地信网论坛
BBS.3S001.COM

目　　录

第一章　流体的物理属性……（1）
§1-1　流体的定义、连续性和易流性……（1）
一、连续性介质假设……（1）
二、流体的易流性……（2）
§1-2　流体的物理属性……（4）
一、计量单位制……（4）
二、流体的密度、重度、比容和比重……（4）
三、完全气体的状态参数和方程……（5）
四、流体的弹性、压缩性和音速……（6）
五、流体的粘性……（11）
六、液体的表面张力和毛细现象……（17）
七、液体的饱和蒸气压力……（20）
八、流体的导热性质……（21）
§1-3　流体的模型化……（22）
附表1-1　在标准大气压下某些常见液体的物理性质……（24）
附表1-2　某些常见气体的物理性质……（25）
附表1-3　水的物理性质……（25）
习题……（26）
第二章　流体静力学……（27）
§2-1　作用在流体微团上的力分类……（27）
一、体积力……（27）

地信网论坛
BBS.3S001.COM

二、表面力……(28)
§2-2 流体的静压力及其特征……(29)
§2-3 流体静力学的平衡方程……(31)
一、平衡微分方程……(31)
二、流体静止的体积力限制条件……(33)
三、等压面……(34)
§2-4 液体内部的压力分布和静压力传递……(36)
一、重力场中静止液体内部的压力分布……(36)
二、静压力的传递……(39)
§2-5 液体压力计原理……(40)
一、测压管……(41)
二、U形管压力计……(41)
三、差压计……(43)
四、倾斜管微压计……(44)
§2-6 液体作用在壁面上的合力和压心……(46)
一、平面上液体压力的合力与压心……(46)
二、曲面上液体压力的合力与压心……(50)
§2-7 阿基米德原理……(55)
一、浮力原理……(56)
二、潜体的平衡与稳定……(57)
三、浮体的平衡与稳定……(58)
§2-8 液体的相对平衡……(59)
一、作等加速直线运动液体的平衡……(60)
二、绕垂直轴等角速旋转液体的平衡……(63)
§2-9 大气的静平衡和国际标准大气……(65)
习题……(69)

第三章 流体力学基础……(73)

§3-1 流场……(73)

地信网论坛
BBS.3S001.COM

一、描述流动的方法……(73)
二、流场的几何图象……(75)
三、流面、流管和流量……(81)
四、相对运动……(83)
§3-2 流场模型化和加速度表达式……(86)
一、一维流场、二维流场和三维流场……(86)
二、加速度表达式……(89)
§3-3 雷诺输运方程和质量方程……(97)
一、基本物理定律和控制体分析方法……(97)
二、雷诺输运方程……(99)
三、质量方程（或称连续方程）……(102)
§3-4 理想流体沿流线的欧拉运动方程 ……(112)
§3-5 不可压理想流体沿流线的伯努利方程 ……(116)
一、定常不可压理想流体沿流线的伯努利方程 ……(117)
二、伯努利方程的应用 ……(120)
§3-6 能量方程 ……(136)
一、能量方程的推导 ……(136)
二、能量方程的各种形式及其应用 ……(140)
§3-7 动量方程和动量矩方程 ……(146)
一、惯性坐标系中的动量方程 ……(146)
二、动量方程的应用 ……(151)
三、非惯性坐标系中的动量方程 ……(163)
四、动量矩方程 ……(166)
习题 ……(174)

第四章 相似和量纲分析原理 ……(197)

§4-1 引言 ……(197)
§4-2 相似理论 ……(198)
一、相似的基本概念 ……(198)

二、相似准数 ……(203)
三、相似律的应用 ……(205)
§4-3 量纲分析原理 ……(210)
一、量纲的基本概念 ……(210)
二、物理方程量纲一致性原理 ……(211)
三、π 定理及其应用 ……(211)
附表4-1 流体力学中常用物理量的*SI*单位和量纲…(221)
习题 ……(222)

第五章 粘性流体的流动与低速管流 ……(224)

§5-1 层流与湍流 ……(225)
一、雷诺实验 ……(225)
二、层流与湍流的主要特征 ……(228)
§5-2 粘性流体的外部流动现象 ……(234)
一、邻近固体壁面边界的流动现象 ……(234)
二、边界层概念 ……(237)
三、分离现象 ……(240)
§5-3 粘性流体的内部流动现象 ……(242)
一、进口段的流动 ……(242)
二、流动横截面上的速度分布 ……(245)
三、管流中的分离现象 ……(248)
四、二次流 ……(249)
§5-4 低速管流的基本方程 ……(250)
一、管流的能量方程 ……(250)
二、管流的动量方程（流动阻力和能量耗散的关系） ……(254)
三、沿程损失因子 f ……(256)
§5-5 低速管流的沿程损失 ……(258)
一、圆管层流 ……(258)

二、湍流光滑管 ……(262)
三、湍流粗糙管 ……(270)
四、湍流光滑管和粗糙管的判据 ……(273)
五、圆管流动的沿程损失实验 ……(278)
六、非圆管中的沿程损失——水力直径或半径 ……(284)
七、哈振-威廉斯公式 ……(287)
八、求解圆管中流动沿程损失因子f的步骤综述 ……(289)
§5-6 低速管流的局部损失 ……(292)
一、突然扩张 ……(295)
二、逐渐扩张 ……(297)
三、突然收缩 ……(300)
四、逐渐收缩 ……(303)
五、弯头 ……(303)
§5-7 管路和管路系统的流动阻力计算 ……(305)
一、简单管路 ……(306)
二、串联和并联管路 ……(311)
三、管网系统 ……(321)
习题 ……(325)

第六章 可压缩气体的一维流动 ……(333)

§6-1 可压缩流体力学基础 ……(333)
一、热力学基础知识回顾 ……(333)
二、小扰动波的传播、音速和马赫数 ……(337)
三、微弱扰动区的划分 ……(339)
§6-2 可压缩气体的一维定常流动 ……(342)
一、一维定常流的基本方程（微分形式） ……(342)
二、一维定常等熵流的基本方程（积分形式） ……(344)
三、一维定常流能量方程的各种形式 ……(345)
四、驻点参数 ……(346)

五、临界状态参数，最大速度和速度系数 ……(348)
六、熵和总压的关系 ……(351)
七、气流按不可压缩处理的限度 ……(351)
§6-3 一维定常等熵变截面管流 ……(357)
一、流速与截面积的变化关系 ……(357)
二、流量公式和截面比关系式 ……(360)
三、气流对内管壁的作用力 ……(364)
§6-4 正激波 ……(367)
一、正激波的形成 ……(368)
二、正激波的基本方程 ……(369)
三、普兰特激波关系式 ……(370)
四、正激波前后流动参数的关系式 ……(371)
五、弱激波 ……(374)
六、兰金-雨贡纽方程 ……(375)
七、正激波在静止气体中的传播 ……(376)
§6-5 几何喷管中的流动 ……(380)
一、收缩形喷管中的流动 ……(380)
二、拉瓦尔喷管中的流动 ……(384)
§6-6 摩擦、热交换和质量交换等因素对等截面管中气体流动的影响 ……(392)
一、等截面绝热摩擦管中的流动 ……(392)
二、等截面加热管中的流动 ……(397)
三、等截面变质量管中的流动 ……(398)
附表 一维等熵流气体动力学函数表 ($k=1.4$) 节录 ……(400)
习题 ……(401)

第七章 流体机械 ……(403)

§7-1 流体机械的简单分类 ……(403)

§7-2 离心式泵 ……(405)
一、概述 ……(405)
二、离心式泵叶轮的基本方程 ……(406)
三、离心式泵的特性曲线 ……(415)
四、离心式泵的相似理论 ……(425)
五、泵和管路系统的匹配 ……(432)
§7-3 往复式活塞泵 ……(441)
一、往复式活塞泵的工作原理 ……(442)
二、活塞泵的扬程流量特性 ……(443)
三、活塞泵的扬程、功率和效率 ……(447)
四、活塞泵的吸上扬程限制和压缩空气室 ……(452)
§7-4 旋转泵 ……(458)
一、齿轮泵 ……(458)
二、叶片泵（旋板泵）……(460)
§7-5 液压传动简单工作原理 ……(462)
一、概述 ……(462)
二、液压作动筒（马达）……(463)
三、举例 ……(465)
习题 ……(467)

附录 国际单位、工程单位、英制单位及其换算 ……(471)

参考文献 ……(473)

第一章　流体的物理属性

流体一般可以分为液体和气体。本章先着重从力学角度区分流体与固体的异同，对流体下定义；然后介绍流体的重要物理属性与参数，以及在流体力学分析与计算中采用的流体模型等。

§1-1　流体的定义、连续性和易流性

一、连续性介质假设

从微观结构上看，固体和流体的内部都是由大量离散的、不断运动的分子所组成。不同之处就在分子间的距离及分子运动平均自由行程上，固体最小，液体较大，而气体最大。这就导致固体分子间的内聚力最大，液体次之，而气体最小。从而在宏观表象上显示出差异：一定量的固体具有一定的体积并保持一定的几何外形；一定量的液体具有一定的体积，但几何外形却随盛液容器形状的变化而改变；一定量的气体，其体积和外形则完全由密封容器的大小和形状所决定。但就固体或流体分子间的距离来讲，一般都比分子本身的尺寸大得多，这意味着不仅流体，而且在固体内部都是有间隙的；“空”的地方多，“实”的地方少，即内部不连续。但是，就间隙的绝对尺寸来讲，一般却又都是十分微小的；从宏观角度来研究固体和流体的力学问题时，如在固体或流体中任意取出一个微团（微体积元）来分析，该微团内必然包含很多的分子，这许许多多分子运动的统计特性就体现为微团的特性（如微团的应力，密度，温度和宏观运动速度等等）；把最小单位由分子扩大到微团，就可以把固体和流体看成是由连续分布

的微团所组成的，内部是没有任何空隙的，连绵一片的介质。这就是连续性介质假说。

在各类流体力学问题中，只要与流体相互作用的物体尺寸足够大（物体的几何尺寸大小一般用有代表性的特征尺寸来表示，例如飞机的机翼则可用它的弦长，水泵则可用它的直径等），比流体分子平均自由行程大得很多的情况下，物体的受力可根据连续流体介质与物体的相互作用来计算。当然，如果物体的几何特征尺寸并不比流体分子平均自由行程大很多，例如在高空稀薄空气中飞行的航天飞行器情况。航天飞行器的受力等则应根据空气分子流与飞行器的相互作用来计算，不能引用流体微团概念和连续性介质假说。

一般引用称做努生数的量来划分流体能否按连续介质处理的标志；努生数的定义为

$$K_n = \frac{\lambda}{l} \tag{1-1a}$$

式中，λ 为流体分子平均自由行程，l 为物体的几何特性尺寸；故努生数是一个无量纲量。显然，只有

$$K_n \ll 1.0 \tag{1-1b}$$

才能把绕物体流动的流体按连续介质来处理。

一旦可以采用连续性介质假设，就可以把流体的一切物理性质和运动状态，例如流体的密度，压力，温度以及宏观运动速度等参数，表成为流体所占据空间点位置和时间的连续、可微的函数（只有在特殊的曲面上，才允许有不连续性，详情见第六章正激波情况），这就便于利用数学工具来分析解决流体力学问题。

二、流体的易流性

从力学角度看，流体和固体一样，能够承受压应力和产生压缩变形；但流体几乎不能承受拉应力；而最能说明流体和固体本质区别的、是两者承受剪应力和产生剪切变形能力上的不同。在

图 1-1(*a*)，(*b*)上，分别表出了在同样大小剪应力作用下，固体和流体产生的剪切变形情况。如图 1-1(*a*)所示，固体上下固连着二块平板，通过上平板对固体加上剪力 F；由材料力学知，固体将产生一定的剪切角变形量，只要不超过该固体材料的弹性极限，该剪切角变形量的大小将与剪切应力 $\tau = F/A$ 成比例。A 是固体与上平板相连接部分的面积。

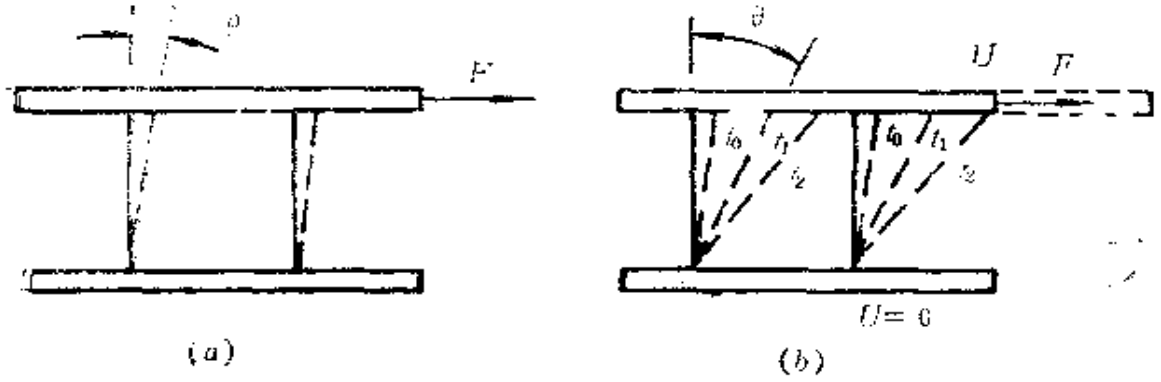


图 1-1

对流体做同样的实验。在时间 $t = t_0$ 瞬间，先用色液标画出受剪切应力的一块流体体元的边界线，见图 1-1(*b*)。然后加力 F 于上平板，只要力 F 不取掉，流体体元将一直变形下去。图上用虚线标出了相应瞬间（$t_2 > t_1 > t_0$），流体体元边界线的变形情况。图上还表明了与固壁相接触的流体，其运动速度始终与固壁运动速度相同的情况，这称为无滑移条件。如下平板静止不动，与其相接触的流体运动速度也为零。由图1-1(*b*)可见，流体体元的剪切角变形量 θ 的大小，不仅取决于所加剪切应力 τ 的大小，而且还与剪切应力 τ 的作用时间长短有关。因此，不论所加剪切应力 τ 多么小，只要不等于零，流体都将在该剪切应力作用下连续不断地产生变形运动（流动），这种性质称为流体的易流性。

因此，从力学角度对流体下的定义是连续的且具有易流性质的介质。

§1-2 流体的物理属性

一、计量单位制

在介绍流体的各种物理属性之前，简单回顾一下各种物理量的单位制。本书采用国际单位制（SI）。在力学的范围内，国际单位制有四个基本量纲（或称因次）。这四个基本量纲和相应的基本单位是：长度（其量纲用符号 L 表示）、质量（量纲符号为 M），时间（量纲符号为 T）和热力学温度（量纲符号为 t）；相应的计量基本单位为米、公斤（或千克），秒和开。其他有关物理量的量纲和导出单位，可以依据该物理量的定义或它应遵循的物理定律，通过上述四个基本量纲和基本单位表达出来。详情可参看第四章有关内容。

二、流体的密度、重度、比容和比重

流体的密度 是指单位体积中所包含的流体质量，用符号 ρ 表示。对于均质流体，如流体的体积为 τ，该体积包含的流体质量为 m，则

$$\rho = \frac{m}{\tau} \tag{1-2a}$$

显然密度的量纲为 ML^{-3}，单位是公斤/米^3。对于非均质流体，空间各点处的密度是不相同的。上式只相当于该体积内流体的平均密度。要计算该体积内某点处流体的密度时，可围绕该点取体积为 $\delta\tau$ 的微团，设该微团所包含的流体质量为 δm，则该流体微团的平均密度则为

$$\overline{\rho} = \frac{\delta m}{\delta \tau} \tag{1-2b}$$

该点处的流体密度则为

$$\rho = \lim_{\delta\tau \to 0} \frac{\delta m}{\delta \tau} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\tau} \tag{1-3}$$

某些常见液体的 ρ 值，可见本章附表 1-1

流体的重度 是指单位体积中所包含的流体重量，用符号 γ 表示。对于均质流体有

$$\gamma = \frac{W}{\tau} \tag{1-4}$$

式中，W 是体积 τ 中所包含流体的重量，量纲是 MLT^{-2}，单位是牛。重度 γ 的量纲为 $ML^{-2}T^{-2}$，单位是牛/米^3。

对于非均质流体，同样有某点处流体重度概念。设 g 为当地重力加速度，则某点处流体重度 γ 和密度 ρ 之间有下列关系存在：

$$\gamma = \rho g \tag{1-5}$$

流体的比容 是指单位质量流体所占有的体积，它是流体密度的倒数。用符号 v 表示。即

$$v = \frac{1}{\rho} \tag{1-6}$$

它的量纲是 $M^{-1}L^3$，单位是米^3/公斤。

流体的比重 $(s.g.)$ 是流体的密度与在指定温度和压强下水的密度之比。显然，比重是无量纲的量。某些常见液体的比重 $s.g.$，见本章附表 1-1。知道流体的 $s.g.$ 后，则可按下式计算流体的密度和重度，即

$$\rho = (s.g.) \times \rho_w \tag{1-7}$$

$$\gamma = (s.g.) \times \gamma_w \tag{1-8}$$

式中，ρ_w，γ_w 是指定温度和压力下水的密定和重度。

三、完全气体的状态参数和方程

热力学中讨论的理想气体，在流体力学中习惯上改称为完全气体。在常温、常压下，大多数常见的气体都可以按完全气体来对待。按照气体分子运动论，完全气体状态参数密度、压力和温

度之间存在下列关系：

$$\frac{p}{\rho}=\frac{\bar{R}}{m}T \tag{1-9}$$

式中，p 为气体的绝对压力，其量纲为 $ML^{-1}T^{-2}$，单位为牛/米^{2}或帕；T 为气体的绝对温度，单位为开；$\bar{R}$ 为通用气体常数，其量纲为$L^2T^{-2}t^{-1}$，单位为焦耳/（公斤·开）；m为气体的分子量，这是一个无量纲的量。某些常见气体的 $\bar{R}$ 值，可见附表 1-2。式(1-9)称为克拉贝隆方程。如果取 $R=\bar{R}/m$，R称为气体常数，则式(1-9) 变为

$$p=\rho RT \tag{1-10}$$

某些常见气体的 R 值，可参看附表 1-2。式(1-10)称为完全气体的状态方程。

气体状态参数发生了一系列的变化时，热力学称为过程。对于完全气体的热力学过程，可用下式表出：

$$pv^n=\text{Const.},\quad p^{\frac{1}{n}}v=\text{Const.} \tag{1-11}$$

式中，n 称为多变过程的指数。

有如下一些典型的变化过程：

等容过程	$\tau=\text{Const.}$，$n=\infty$
等压过程	$p=\text{Const.}$，$n=0$
等温过程	$T=\text{Const.}$，$n=1$
绝热可逆过程	$s=\text{Const.}$，$n=k$
多变过程	$n=-\infty\sim+\infty$

s 代表单位质量气体的熵，它的量纲为 $L^2T^{-2}t^{-1}$，单位为焦耳/(公斤·开)$k=c_p/c_v$ 是气体的比热比，是一个无量纲的常数；其中 c_p 是气体的等压比热，c_v 是气体的等容比热，它们的量纲和单位都与熵 s 的相同。某些常见气体的k，c_p等大小，可参看附表1-2。

四、流体的弹性、压缩性和音速

流体的弹性或压缩性是指流体在承受一定量的压力时，体积

将被压缩（对一定量的流体来讲，密度也将发生变化而增加），当压力卸去后流体的体积将恢复到原来大小的一种特性。流体的这种性质，工程上习惯用弹性模量来表示，正像对待固体弹性材料，例如钢材一样。不过因为流体不具有稳定的形状，故流体的弹性模量必须按体积来定义，称为体积弹性模量，用符号 E 来表示。

如图 1-2 所示，在一个汽缸中盛有体积为 τ_1 的弹性流体。在活塞上施加力 F，加力后体积减小为 τ，流体中的压力由 p_1 增加到 p。画出压力 $p=\frac{F}{A}$ 对 $\frac{\tau}{\tau_1}$ 的曲线，即为应力应变图。定义该曲线上任一点处的斜率即代表该状态下流体的体积弹性模量 E，有

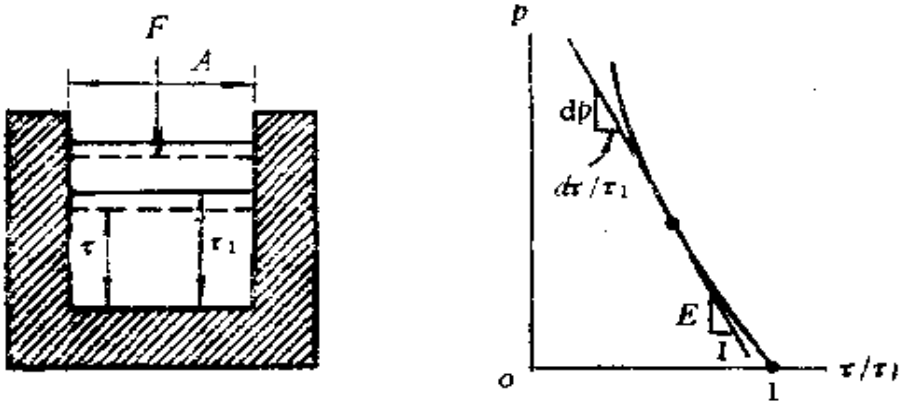


图 1-2

$$E=-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\tau/\tau_1} \tag{1-12}$$

式中，$\mathrm{d}\tau=\tau-\tau_1(<0)$。对于一定量的流体有 $\rho\tau=\mathrm{Const.}$，故有

$$\rho\mathrm{d}\tau+\tau\mathrm{d}\rho=0$$

即

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau_1}=-\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho_1} \tag{1-13}$$

故式（1-12）可改写成

$$E=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}\rho, \tag{1-14}$$

流体的体积弹性模量 E 的量纲是 $ML^{-1}T^{-2}$，单位是牛/米^{2}或帕。它的定义与材料力学中对固体弹性材料的抗压弹性系数相一致，代表单位流体体积相对变化所需要增加的压力大小。

由图 1-2 还可知，随着压力 p 的增加，曲线变陡，E 值增加，表明要使流体压缩越加困难。从物理原因上讲，这是因为分子间距离减小而产生较大斥力的必然结果。同时上述事实也表明流体的体积弹性模量 E 并不是一个常值而与初始状态有关。

对于液体，工程上通常取 $\frac{\tau}{\tau_1}=1$ 处的 E 值作为液体的体积弹性模量大小。由附表 1-1 可知，液体的 E 值是相当大的；除非压力变化非常大，液体受压缩时的体积相对变化量是很小的，故一般可把液体按不可压缩的流体（$E\to\infty$，$\rho\to$Const.）来处理。

对于气体，情况则有所不同。气体的体积弹性模量 E 的大小，不仅与气体所处初始状态有关，而且也与受压缩的热力学过程性质有关。为了唯一地确定气体的 E 值，规定了两种性质的压缩过程：

对于等温压缩过程，由式(1-11)知，

$$\frac{p}{\rho}=\text{Const.} \tag{1-15}$$

因此得

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}=\text{Const.} \tag{1-16}$$

对于绝热可逆压缩过程即等熵压缩过程，由式(1-11)知：

$$\frac{p}{\rho^k}=\text{Const.} \tag{1-17}$$

微分上式得

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho} = k\frac{p}{\rho} \tag{1-18}$$

将式(1-16)，(1-18)，代入式(1-14)，并利用完全气体状态方程式(1-10)，得

$$E_T = p_1 = p \tag{1-19}$$

和

$$E_s = kp_1 = kp \tag{1-20}$$

上式中，E_T 代表等温压缩过程完全气体的体积弹性模量，而 E_s 代表等熵压缩过程完全气体的体积弹性模量。可见，即使气体的初始状态相同，但压缩过程性质不同，气体的 E 值也不相同。

音速 a 是声波在介质中的传播速度。它的量纲是 LT^{-1}，单位是米/秒。声波是一种小扰动压缩波。在物理学中已介绍过音速的计算公式为

$$a = \sqrt{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}} \tag{1-21}$$

在本书的第六章将重新推导式（1-21）。现将式（1-14）代入式（1-21）得

$$a = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{1-22}$$

上式表明音速的大小与流体的体积弹性模量有关，例如在水中的音速大约为 1 440 米/秒，而在海平面空气中的音速则大约为 335 米/秒。这说明水的可压缩性远比空气的要小。

声波或小扰动压缩波在气体中的传播过程，可看作是等熵过程。因此，将式（1-20）中的 E 代入式（1-22），并利用完全气体的状态方程式（1-10）有

$$a = \sqrt{\frac{kp}{\rho}} = \sqrt{kRT} \tag{1-23}$$

上式表明在完全气体中，音速的大小仅仅与气体的温度有关。

在当今高速飞行的时代，读者可能早已熟知马赫数 Ma —

词。流体流动马赫数Ma是流体流动速度与当地音速之比，即

$$Ma=\frac{V}{a} \tag{1-24}$$

它是一个无量纲的量。如流动马赫数$Ma<1$，则$V<a$，称为亚音速流动，反之，如$Ma>1$，则$V>a$，称为超音速流动。有关Ma数所表征的流动特征等详细讨论，可参看本书的第六章。但无论如何，从上面对音速a的阐述，可以看出Ma数是判断气体相对压缩性大小的一个有用的标志。在工程计算中，Ma数大小可以用来判断是否可以把气体按不可压缩介质(没有弹性的介质)对待的指标。对于不可压缩气体的流动($V\neq 0$)，因$E\to\infty$，使$a\to\infty$，故$Ma=0$。因此，当气体流动马赫数$Ma\to 0$时，对于大多数工程计算来说，气体压缩性的影响是很小的。经验指出，只要气体流动马赫数$Ma\leqslant 0.3$时，气体也可按不可压缩流体来处理。

例1-1　已知：空气在15℃和101.3千帕情况下被等熵压缩，使体积减小50%．求：空气被压缩后的压力和温度，以及在压缩开始和结束时的音速。

解　因$p_1=101.3$千帕，$T_1=15+273.15=288.15$开，而由附表1-1知，$R=286.8$焦耳/(公斤·开)，$k=1.4$。现由式(1-10)得

$$\rho_1=\frac{p}{RT}=\frac{101.3\times10^3}{286.8\times288.15}=1.23\ (\text{公斤/米}^3)$$

按题意知

$$\rho_2=2\times1.23=2.46\ (\text{公斤/米}^3)$$

由式(1-17)知

$$\frac{p_2}{(2.46)^{1.4}}=\frac{101.3\times10^3}{(1.23)^{1.4}}\qquad p_2=267.3\times10^3\ (\text{帕})$$

由式(1-10)得

$$T_2=\frac{p_2}{R\rho_2}=\frac{267.3\times10^3}{286.8\times2.46}=379\ (\text{开})$$

最后由式（1-23）得

$$a_1 = \sqrt{kRT_1} = \sqrt{1.4\times286.8\times288.15} = 340 \text{（米/秒）}$$

$$a_2 = \sqrt{kRT_2} = \sqrt{1.4\times286.8\times379} = 390 \text{（米/秒）}$$

五、流体的粘性

流体的粘性是指流体内部相邻流动层因速度不同而产生相对滑动，与此同时在相邻流动层间出现一种相互牵制、阻抗相互滑动的剪切应力的性质。流体的粘性来源于流体分子间的内聚力和相邻流动层间分子的动量交换。一旦相邻层间有相对滑动，粘性的作用就以相邻层间出现剪切应力来体现。

从流体具有易流性看，见图 1-1，尽管流体抵抗剪切变形的能力很小，但并不能由此认为在流动流体中，不会存在因流体具有粘性而在有相互滑动的相邻流动层间产生剪切应力或内摩擦应力。两者不能混淆。

参看图 1-3，下平板固定不动，对上平板施加力 F 并使它以速度 U 向右缓慢移动。正如前述，因存在无滑移条件，紧贴着上、下平板的流体微团的速度分别应为 U 和零值。在两平板之间的各层流体的速度自上而下逐渐减慢直到为零。在运动的流体中取出上、下相邻的两流动层来看，设上层流体的流动速度为 $u+\mathrm{d}u$，下层流体的速度则为 u。在上、下两层的接触面上产生

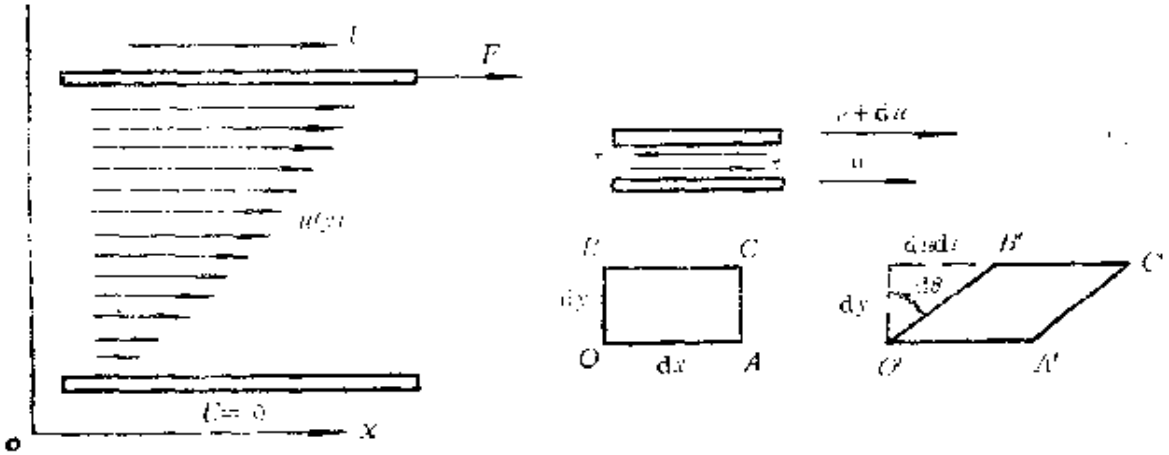


图 1-3

了相对滑动，上层流动较快，下层流动较慢；由于流体粘性作用，上层牵动下层，下层阻滞上层；因此体现为上层对下层作用一个向前的切向力，而下层对上层作用一个向后的切向力。这是一对内力。这种因两层流体有相对滑动而在接触面上产生的切向力正是流体的粘性力或内摩擦力。图 1-3 上所示各流动层的流动情况，也正是因流体具有粘性，有切向力作用的结果。

为了确定这种内摩擦力或粘性力，先来计算流体微团受剪切应力作用时产生的剪切角变形率或剪切应变率的大小。

1．流体微团的剪切角变形率

参看图 1-3，从某一起始瞬间在流体中取流体微团 $OACB$，沿 x，y 方向的长度分别为 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y$；垂直于纸面的长度为一个单位。经 $\mathrm{d}t$ 时间后该微团在剪切应力作用下变形为 $O'A'C'B'$。OB 线变化为 $O'B'$ 线。$\mathrm{d}t$ 时间内微团产生的剪切角变形量（或称为剪切应变）为

$$\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} \tag{1-25}$$

在固体中，剪切应力的大小直接取决于剪切应变；但在流体中却不同，因流体具有易流性，剪切应力的大小并不直接取决于剪切应变 θ，而是取决于剪切角变形率或剪切应变率，即单位时间产生的角变形量的大小有

$$\dot{\theta}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} \tag{1-26}$$

如图所示，假如 $u=u(y)$，则各点处的剪切角变形率 $\dot{\theta}=\dot{\theta}(y)$，即也是 y 的函数。

2．牛顿内摩擦定律

设图 1-3 上所示两相邻流体层间的剪切应力为 τ，而剪切角变形率或剪切应变率为 $\dot{\theta}=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$，则流体的内摩擦或粘性定律的一般关系可表示成

$$\tau = f(\dot{\theta}) = f\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{1-27}$$

上述方程的最简单形式为

$$\tau = \mu\dot{\theta} = \mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} \tag{1-28}$$

式中，μ 称为流体的动力粘性系数或动力粘度。它的量纲为 $ML^{-1}T^{-1}$，单位是帕·秒。

式（1-28）表明，剪切应力和剪切应变率之间为线性关系。它最早是由牛顿提出的假定，后被实验所证实，故被称作牛顿内摩擦定律或粘性定律。凡流体的粘性定律符合式（1-28）的，称为牛顿流体。从式（1-28）还可以看出：（1）流体相邻两层的内摩擦力与压力 p 无关，说明它与固体壁面之间的摩擦力显然不同，后者直接与正压力有关；（2）因为 $\mu > 0$，只要 $\tau \neq 0$，则 $\dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} \neq 0$，这是流体易流性的数学表达形式；（3）只要 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = 0$，则 $\tau = 0$，因此保持静止的流体内部不会出现内摩擦力；（4）因流体和固壁之间总有一层流体与固壁无相对滑动，故在静止固壁上，剪切应变率 $\dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$ 不会趋于∞，而保持有限值。

实验表明，流体的动力粘性系数 μ，将随流体的温度改变而变化，但随流体的压力变化则不大。当温度升高时，气体的动力粘性系数 μ 都将增大。这是因为气体的粘性力主要来自相邻流动层间分子的横向动量交换的结果。温度升高，这种动量的交换也加剧，因而内摩擦力或 μ 值将增大。但是，液体则不同。随着温度的升高，液体的 μ 值将减小。原因在于液体的粘性力主要来自相邻流动层间分子的内聚力；随着温度的升高液体分子热运动加剧、液体分子间的距离变大，因而分子间的内聚力将随之

减小，故 μ 值减小。

常见流体的动力粘性系数 μ 的大小，可参看附表1-1，1-2。它们随温度的变化关系，可以参考下列方程：

对于液体有

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + \alpha(T - 273.15) + \beta(T - 273.15)^2} \qquad (1\text{-}29)$$

式中，μ_0 为 $T = 273.15$ 开（摄氏 0 ℃）时的动力粘性系数，α 和 β 是取决于液体种类的系数。比如，对于水，$\alpha = 33.68 \times 10^{-3}$；$\beta = 221 \times 10^{-6}$，而 $\mu_0 = 1.79 \times 10^{-3}$ 帕·秒。

对于气体（空气）有

$$\mu = [17040 + 56.02(T - 273.15) - 0.1189(T - 273.15)^2] \times 10^{-9} \qquad (1\text{-}30)$$

从附表中或列举的方程可知，气体的 μ 是很小的，除非剪切应变率很大，一般剪切应力不会很大。反之，液体的 μ 值都比气体的大许多，特别是低温时。所以，在寒带地区进行液体的输送（如石油的输送）时需要考虑增温；飞机或其它机械的某些传动系统需考虑用气体替代液体来做工作介质。

还有一个称做运动粘性系数或运动粘度 ν 的量，它的定义是：

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \qquad (1\text{-}31)$$

ν 的量纲是 L^2T^{-1}，单位是米^2/秒。量纲只包含长度和时间，故是运动学的量纲因而得名。在流体力学的许多方程中，常有这样一个组合量 μ/ρ 出现而作了上述定义。现在广泛使用 μ 和 ν 这样两个粘性系数；但初学者要留意，例如水的动力粘性系数 μ 要比空气的 μ 大许多；但空气的运动粘性系数 ν 却要比水的 ν 大许多，这是因为空气的密度 ρ 比水的 ρ 小许多的缘故。

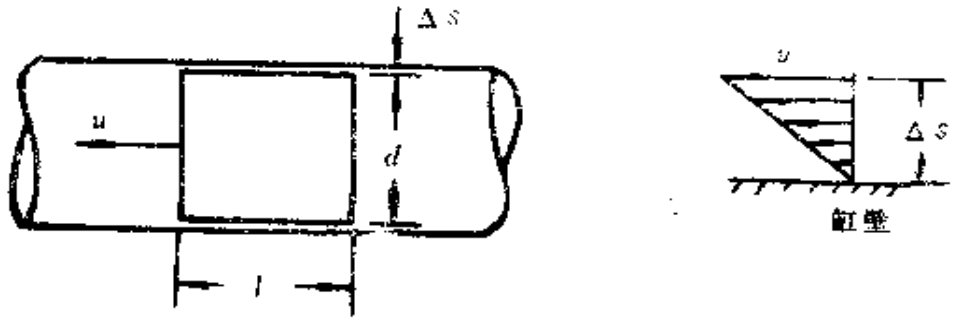
例 1-2 已知：活塞的直径 d 和长度 l 分别为 14 厘米和 16 厘米。活塞在汽缸内作往复运动，活塞与汽缸内壁的间隙 $\Delta s =$

$=0.04$ 厘米，其间充满了 $\mu=0.1$ 帕·秒的润滑油；活塞运动速度 u 为 1.5 米/秒，润滑油在间隙中的速度按线性分布。求：活塞上所受到的摩擦阻力大小。

解 因知润滑油在间隙中的速度按线性分布，则沿半径方向剪切应变率为（见图 1-4）

$$\dot{\theta}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}=-\frac{u}{\Delta s}=-\frac{1.5}{0.04\times10^{-2}}=-3\,750(1/\text{秒})$$

代入式（1-28）计算作用活塞与润滑油相接触面积上的摩擦应力，有



(a)　　(b)

图 1-4

$$\tau=\mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}=0.1\times(-3\,750)=-375(\text{帕})$$

因为活塞与润滑油相接触的面积为

$$A=\pi dl=\pi\times0.14\times0.16=0.070\,4(\text{米}^2)$$

所以，活塞上的摩擦阻力为

$$F=A\tau=0.070\,4\times(-375)=-26.39(\text{牛})$$

方向与运动速度 u 的相反。

3．牛顿流体与非牛顿流体

在图 1-5 上给出了一些流体典型的剪切应力对剪切应变率图线。式（1-28）在图上是一条通过原点的直线，该直线的斜率就是牛顿流体的动力粘性系数 μ。象附表 1-1，1-2 上的流体，都

是牛顿流体。凡不符合式（1-28）的流体则称非牛顿流体。象塑料，胶体，油漆，某些悬浮溶液（如泥浆）等都是非牛顿流体。图 1-5 上给出两种类型的塑料。理想塑料与牛顿流体的区别在于只有克服初始剪切应力τ_1之后塑料才能流动起来，类同于一种牛顿流体。真实塑料和理想塑料的区别在于流动起来后，前者的应力应变率关系并不是线性关系。图上还给出了另外两种称为伪塑

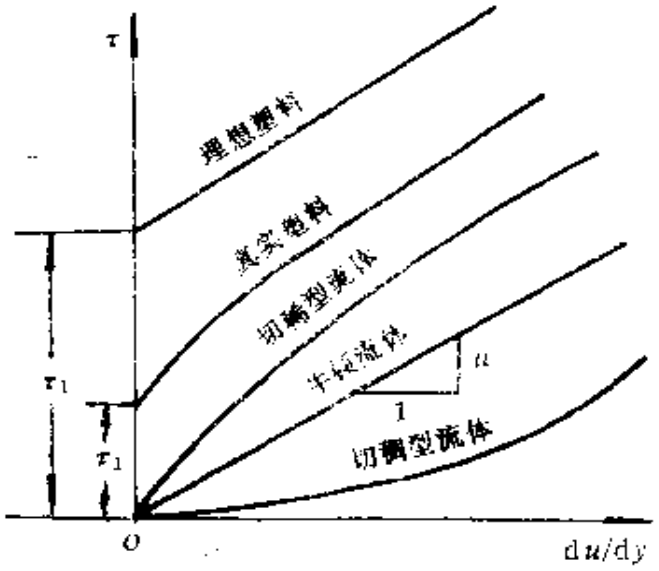


图 1-5

料流体的情况，象某些悬浮溶液和聚合物溶液就属此类。对应于式（1-28），理想塑料和伪塑料流体的应力应变率方程可写成：

$$\tau-\tau_1=\mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\qquad \tau>\tau_1\quad \text{理想塑料（油漆等）}$$

$$\tau=k\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right)^n$$

$n>1$：切稠型流体

$n<1$：切稀型流体

对于伪塑料流体，相当于$\mu=k\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right)^{n-1}$。

本书只限于研究牛顿流体的运动。关于非牛顿流体的研究属于流变学的范围。近年来在工程应用中，非牛顿流体的重要性正

在日益增加，引起了广泛的重视。

六、液体的表面张力和毛细现象

在液体内部，液体分子之间的内聚力是相互平衡的；但在液体与气体交界的自由面上，内聚力之间不能平衡，参看图 1-6，交界面下侧的内聚力力图使自由面收缩，从而在交界面上形成张紧的分子膜。在两种不相混合的液体之间的分界面上也会因同样原因形成分子膜。所谓表面张力就是指这种分子膜中的拉力。显然一种液体表面张力的大小与它和何种流体组成交界面有关。在附表 1-1 中所列举的表面张力数据都是指该液体同空气组成交界面情况下取得的。

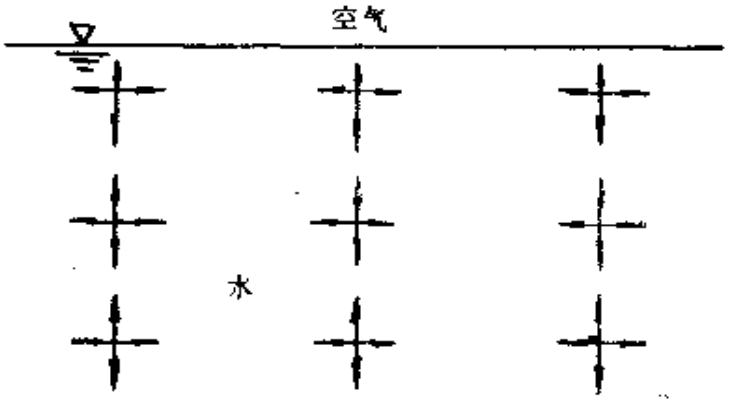


图 1-6

表面张力 σ 是如此来度量的，参看图 1-7。表面张力 σ 的

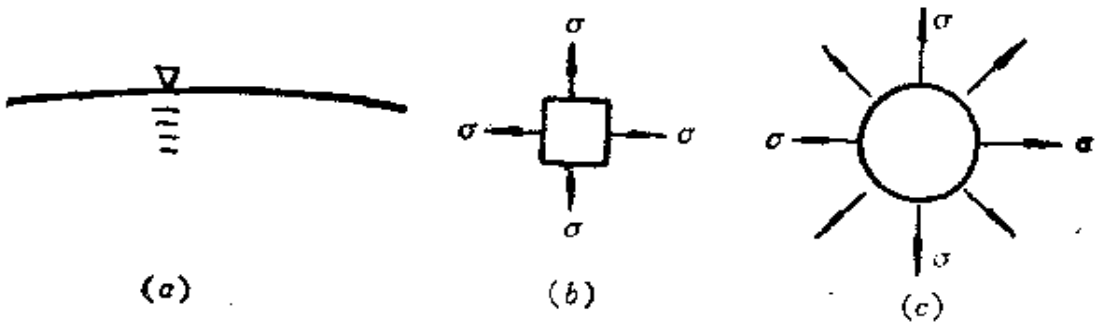


图 1-7

方向与自由液面相切并与所取面元边缘相垂直，σ 的大小是指所取面元单位边缘长度上的拉力，故 σ 的量纲为 MT^{-2}，单位是牛/米。

某些常见液体的表面张力 σ 值，可以参看附表 1-1。它们都是在某个温度下测量所得的数据。因为表面张力是液体分子间内聚力不相平衡造成的，温度上升内聚力将减小，故表面张力亦将减小。

自然界中存在许多有表面张力作用的现象。如毛细现象，气泡或液滴的生成以及液体射流的破碎现象等。

毛细（管）现象在流体力学实验所使用的测量仪器中经常遇到。在液体中插入一根竖直的细管，于是将产生管内液体上升或下降的情况，这称为毛细现象。见图 1-8。如液体能够浸湿内管壁，管内液面将上升 h 高度，液面呈凹形；反之如液体不能浸湿内管壁，管内液面将下降 h 高度，液面呈凸形。前者相当于水在

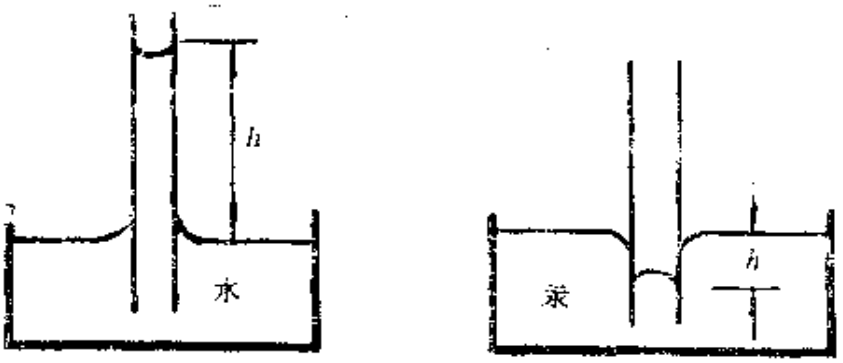


图 1-8

毛细玻璃管内，后者相当于汞在毛细玻璃管内产生的毛细现象。

毛细管内液面上升或下降的高度 h，直接与液体的表面张力有关。这里来推导一下它们之间的关系式。参看图 1-9，设自由液面为双曲面。面元面积为 $dxdy$，曲率半径分别为 R_1，R_2；交界自由液面两侧的压力分别为 p_0，p_i；面元边缘上作用的表面张力为 σ. 于是作用在该面元上的力在面元法线方向上的平衡式

为

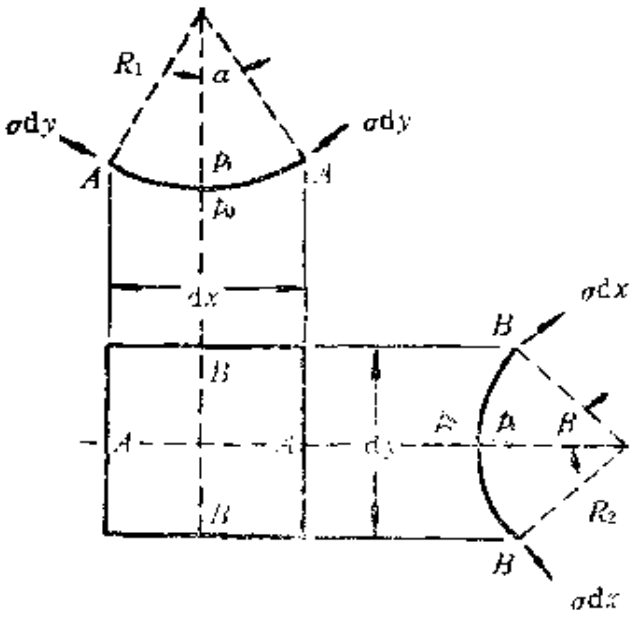


图 1-9

$$(p_i - p_0)dxdy - 2\sigma dy\sin\alpha - 2\sigma dx\sin\beta = 0$$

其中，α 和 β 都是小量。从面元几何关系知，有 $\sin\alpha = dx/2R_1$，$\sin\beta = dy/2R_2$，代入上式，则有

$$p_i - p_0 = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \tag{1-32}$$

应用上式到图 1-10 的情况，设毛细管内液体自由面为球面，则 $R_1 = R_2 = R$；而 $R = r/\cos\theta$，其中 r 为毛细管的半径，θ 角称为接触角。作用在自由液面的压力记为 p_a，则 $p_i = p_a$，而 $p_0 = p_a - \gamma h$，γ 是液体的重度（可参看第二章的式（2-31），故有 $p_i - p_0 = \gamma h$，代入式（1-32）得

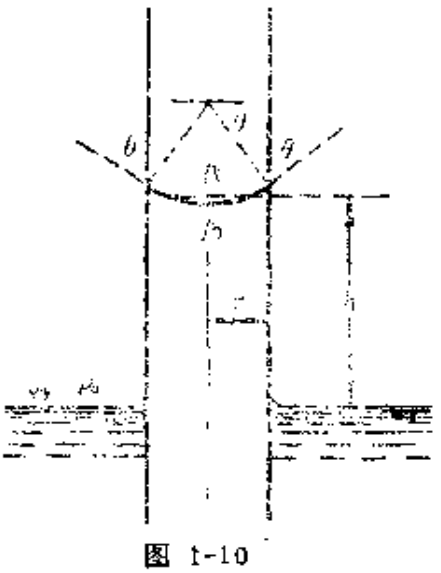


图 1-10

$$h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\gamma r} \tag{1-33}$$

即是毛细管内液面上升或下降高度 h 同液体表面张力 σ 等参数之间的关系式。参看图 1-11，对于蒸馏水和汞，当管子为玻璃管时，θ 分别为零值和 130°．换句话讲 $\theta>90°$，则 $h<0$，液面下降。接触角 θ 的大小主要取决于液体内聚力与液体和管壁之间的附着力的相对大小。附着力大于内聚力，则接触角 θ 小（$\theta<90°$），也称液体可以浸湿管壁；附着力小于内聚力，则接触角 θ 大（$\theta>90°$），也称液体不能浸湿管壁。由于是假定交界面为球面下推得的式（1-33），故只适用于较细的管子。倘若管径小于 5 毫米，液体和管壁都十分纯净，按式（1-33）计算可得满意结果，否则按该式计算的 h 值偏大。

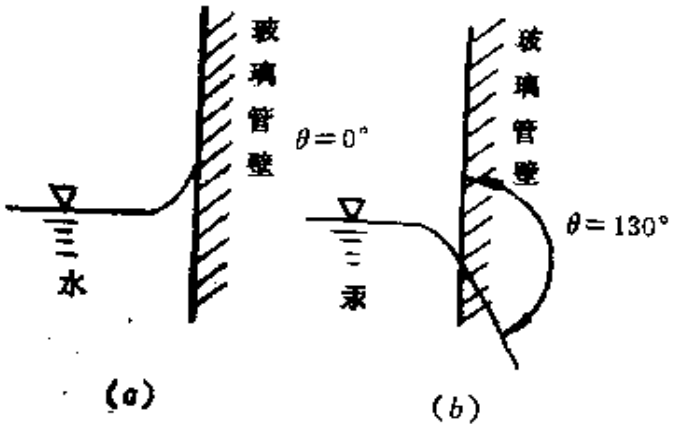


图 1-11

七、液体的饱和蒸气压力

一定温度的液体都会蒸发，即由液态转变为气态。产生蒸发现象的原因是由于液体内部分子热运动的结果。比如盛液体的容器是封闭的，液面上方尚有一定的剩余空间；对于一定温度的液体，经过足够的一段时间之后，从液面上逸出变成气态的分子数量和气态分子重新进入液面复归为液态的分子数量将趋于相等，这叫饱和状态。相应这时该液体蒸气的分压力称为饱和蒸气压力，用 p_v 表示。液体的温度增加，分子的活动能力增大，蒸发能力增大，因而给定液体的饱和蒸气压力增大。常见液体的饱和

蒸气压力 p_v，可参看本章附表 1-1。而水的 p_v 随温度的变化，见附表 1-3。值得注意的是，在一定温度下，当作用在液体上的绝对压力等于或小于液体的饱和蒸气压力时，液体将沸腾，即在液体内部产生大量气泡。这意味着液体的沸点取决于外加压力和液体的温度。比如压力降低很多，水在室温下也能沸腾（“冷”沸腾）。

液体的饱和蒸气压力大小在流体机械中有重要意义。例如当水泵运行时，在泵内某些局部地区流动压力有可能降低到水的饱和蒸气压力，于是在此流动地区的水沸腾产生大量气泡。气泡顺流进入较高压力区域时又将迅速凝缩，破灭，这一过程进行得非常猛烈，泵内将产生强烈噪音，甚至可能造成水泵内局部部件损坏而不能正常工作。这种现象称为泵的气穴(气蚀)或空化现象。正常运行中必须避免发生此种现象。

从附表 1-1 上提供的 p_v 数据可知，在同一温度和压力下，汞的 p_v 最小，加上汞的重度又大，故很适合作一些液体测压仪器中的工作液体。

八、流体的导热性质

流体同固体一样，当流体内部温度分布不均匀时，也会出现热传导现象。在流体内部取微元面积 dA，其法线方向为 $\vec{n}$，单位时间沿法线方向所传导的热量 dq 与流体在 $\vec{n}$ 方向上的温度梯度 $\frac{\partial T}{\partial n}$ 及传热面积 dA 成比例。写成数学式子为

$$dq = -\lambda(\partial T/\partial n)dA \qquad (1\text{-}34)$$

上式称为傅立叶定律。式中，λ 称为流体的热传导系数。它的量纲是 $MLT^{-3}t^{-1}$，单位为焦耳/(米·秒·开)或瓦/(米·开)。因为热流量 dq 定义沿 $\vec{n}$ 方向为正，故 dq 的符号与 $\partial T/\partial n$ 相反，所以上式右边冠以负号。空气在 0 ℃时的 $\lambda \approx 0.026\ 0$瓦/(米·开)，是一个很小的数值，故由 (1-34) 式可以看出，当温度梯度不是

很大的时候，dq 也是一个小量。

§ 1-3 流体的模型化

上节中介绍了流体的多种物理属性，它们对流体流动都有不同程度的影响。在研究某一流动问题时，如果将流体的所有属性全部考虑进去，不仅不容易求解，而且也是不必要的。因为在某些具体问题中，流体的各种属性并不具有同等的重要性。因此，对于一些具体问题来说，可以抓住一些起主要作用的属性，略去一些居于次要地位的属性，这样就使问题简化，便于数学分析和求解。按照对实际流体物理属性的不同情况的简化，可得出各种流体模型或模型化流体。

流体力学中常采用的流体模型有：

理想流体 它是一种不考虑流体粘性的模型。按前述可认为它的 $\mu \to 0$。按图 1-5 的应力应变率图线看，水平轴线代表了这一情况。讨论这种流体运动时，流体微团仍会变形，但不考虑微团承受的剪切摩擦应力的作用。

不可压流体 它是一种不考虑流体压缩性或弹性的模型。按前述可认为它的 $E \to \infty$，或流体密度 $\rho = \text{Const.}$。液体是十分接近这种情况的。对于把气体按不可压流体处理，初学者一般不容易接受。以后将知道对流动速度较低的、更确切地讲对流动马赫数较低的气体，是完全可以这样做的。求解不可压流体流动的规律，只需服从力学定律，而无需考虑热力学规律。

只考虑气体的可压缩性的影响，但不考虑气体的粘性的影响，就得到了**可压理想流体模型**，按前述可认为它的 $E > 0$，$\mu = 0$。此外，当然还可以有**不可压粘性流体模型**（$\rho = \text{Const.}$，$\mu \neq 0$）。自然，最简单的莫过于**不可压理想流体模型**了（即它是 $E \to \infty$ 或 $\rho = \text{Const.}$ 而 $\mu = 0$ 的流体）。

绝热流体 它是不考虑流体的热传导性的模型，即认为它是

$\lambda \to 0$（热阻无限大）的流体。在低速流动中，除了专门研究传热问题之外，一般都不考虑流体的热传导性质的；在高速流动中，除非在温度梯度很大的地方，气体微团间的传热量也很小，故也可按绝热流体来考虑的。

后面将结合各章讨论的具体问题，分别讨论各种模型化流体的运动规律，这些规律对于理解和掌握实际流体的运动规律无疑有很大帮助。

附表 1-1　在标准大气压下某些常见液体的物理性质

名称 \ 项目	温度 (T) ℃	密度 (ρ) 公斤/米³	比重 ($s.g.$)	弹性模量 (E) 千帕	动力粘性系数 ($\mu\times10^4$) 帕·秒	表面张力 (σ) 牛/米	饱和蒸气压力 (p_v) 千帕
苯	20	876.2	0.88	1 034 250	6.56	0.029	10.0
四氯化碳	20	1 587.4	1.59	1 103 200	9.74	0.026	13.1
乙　醇	20	788.6	0.79	1 206 625	12.0	0.022	5.86
氟利昂-12	15.6	1 345.2	1.35	—	14.8	—	—
	−34.4	1 499.8	—	—	18.3	—	—
石　油	20	855.6	0.86	—	71.8	0.03	—
汽　油	20	680.3	0.68	—	2.9	—	55
甘　油	20	1 257.6	1.26	4 343 850	14 939	0.063	0.000 014
汞	15.6	13 555	13.57	26 201 000	15.6	0.51	0.000 17
	315.6	12 833	12.8	—	9.0	—	47.2
燃油(JP-4)	15.6	773.1	0.77	—	8.7	0.029	8.96
液　氢	−257.2	73.7	0.072	—	0.21	0.003	21.4
液　氧	−195.6	1 206.0	1.21	—	2.78	0.015	21.4
水	20	998.2	1.0	2 170 500	10.0	0.073	2.34

附表 1-2　某些常见气体的物理性质*

项目 / 名称	通用气体常数 $(\overline{R})$ 焦耳/公斤·开	气体常数 (R) 焦耳/公斤·开	定压比热 (C_p) 焦耳/公斤·开	比热比 (k)	动力粘性系数 $(\mu\times10^6)$ 帕·秒
二氧化碳	8 264	187.8	858.2	1.28	1.47
氧	8 318	259.9	909.3	1.40	2.01
氮	8 302	296.5	1 038	1.40	1.76
氩	8 307	2 076.8	5 223	1.66	1.97
氢	8 318	4 126.6	14 446	1.40	0.90
甲烷	8 302	518.1	2 190	1.31	1.34
空气	8 313	286.8	1 003	1.40	1.81

* 海平面标准大气压，t℃＝20℃下。

附表 1-3　水的物理性质

t℃	密度 ρ 公斤/米³	动力粘性系数 $\mu\times10^3$ 帕·秒	表面张力 σ 牛/米	饱和蒸气压力 p_v 千帕	饱和蒸气压头 p_v/γ 米	弹性模量 $E\times10^{-6}$ 千帕
0	999.8	1.781	0.075 6	0.61	0.06	2.02
5	1000.0	1.518	0.074 9	0.87	0.09	2.06
10	999.7	1.307	0.074 2	1.23	0.12	2.10
20	998.2	1.002	0.072 8	2.34	0.25	2.18
30	995.7	0.798	0.071 2	4.24	0.44	2.25
40	992.2	0.653	0.069 6	7.38	0.76	2.28
50	988.0	0.553	0.067 9	12.33	1.26	2.29
60	983.2	0.466	0.066 2	19.92	2.03	2.28
70	977.8	0.404	0.064 4	31.16	3.20	2.25
80	971.8	0.354	0.062 6	47.34	4.96	2.20
90	965.3	0.315	0.060 8	70.10	7.18	2.14
100	958.4	0.282	0.058 9	101.33	10.33	2.07

习　题

1．什么称做连续性假设？

2．什么称做完全气体？描述完全气体状态参数间关系的方程叫什么方程？

3．阐明动力粘性系数的定义和量纲。它和易流性概念有何关系？

4．什么是流体的压缩性？一般可用什么参数来描述它。

5．什么是液体的饱和蒸气压力，在流体机械中有什么重要意义？

6．管中水流的流速分布如图 1-12 所示，水温为 60℃。已知在图示 A，A' 两点处速度分布曲线的切线与管轴所成的夹角为 60° 和 45°，横坐标单位为

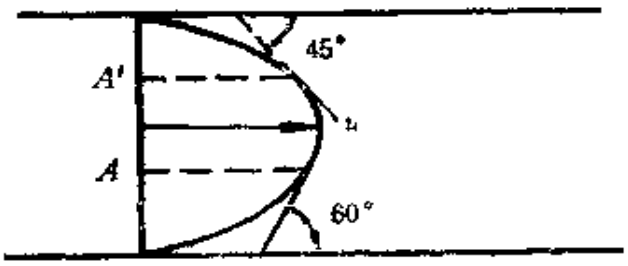


图 1-12

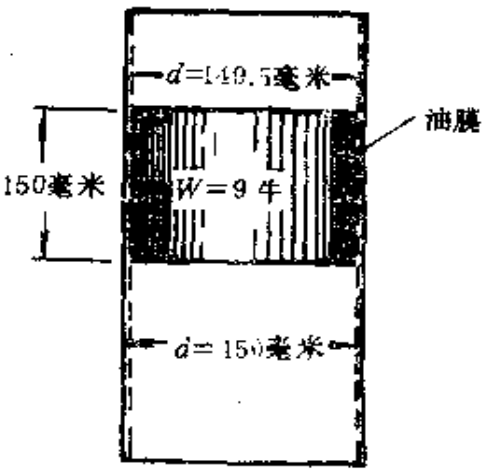


图 1-13

米/秒，纵坐标单位为米。求在 A 及 A' 点处的粘性应力 τ_A，$\tau_{A'}$ 大小，并标出方向。

7．如图 1-13 所示为重物 $W=9$ 牛以常速度 46 毫米/秒下落，试近似计算油的动力粘性系数 μ 的大小。

8．某汽车发动机在压缩冲程开始时，$p_1=1.0$ 大气压，$t_1=32$℃，$\tau_1=183$ 厘米^3，作可逆绝热压缩，压缩完毕后体积 $\tau_2=30.6$ 厘米^3。求 p_2 和 T_2 的大小。

第二章　流体静力学

流体静力学研究流体在外力作用下处于平衡的力学规律及其在工程中的应用。流体处于平衡，通常是指流体相对地球处于静止或匀速直线运动状态。如果流体对地球有相对运动，但相对于某参考系没有运动，则流体对参考系相对静止。根据力学中的达朗伯原理，这种相对静止问题也可用静力学方法求解。

流体处于静止状态时，流体内各微团间没有相对运动，不会呈现出粘性作用，作用在流体内部就没有内摩擦应力。因而，由流体静力学所得的结论，对理想流体和实际流体均适用。

§2-1　作用在流体微团上的力分类

按力的作用方式和性质，可分为体积力和表面力两类。

一、体积力

体积力是外力场作用在流体质量上的非接触力，又称质量力。设在密度为 ρ 的流体中取一体积为 τ 的流体团，其封闭表面积用 A 表示，见图 2-1。若 $\Delta\vec{F}_v$ 为作用于微体积元 $\Delta\tau$ 中质量上的体积力，则单位质量流体上所受的体积力为

$$\vec{f}_v = \lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\Delta\vec{F}_v}{\rho\Delta\tau} \tag{2-1}$$

体积力只与微体积元中相应的物理量（如质量、电荷等）有关，与它周围的微体积元无关。一般说来，单位质量流体所受体积力随空间位置和时间而变，它是时间和空间位置的函数。

流体力学问题中最常见的体积力是重力。用静力学方法解决相对静止问题时，必须附加的牵连惯性力也属于体积力。显然，

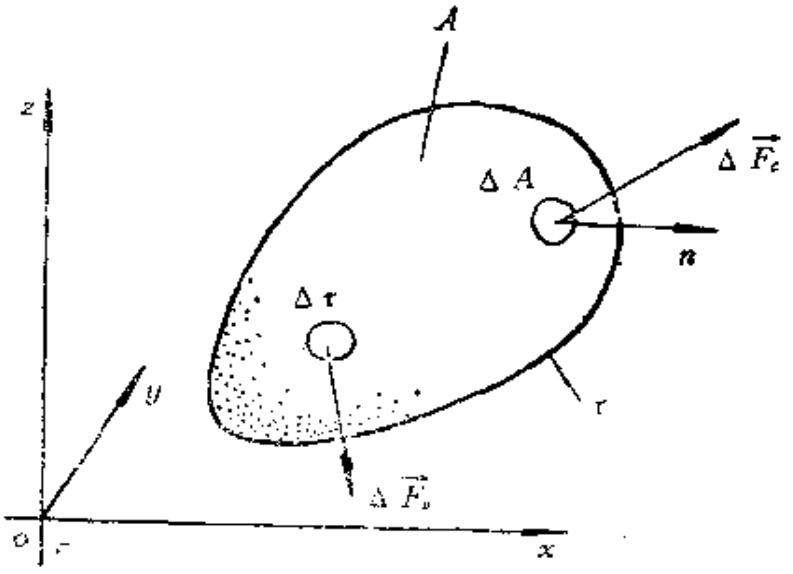


图 2-1

重力和惯性力都与流体质量成正比。此外，在流体上还可能作用着其它性质的体积力，如带电流体所受的静电力，有电流通过的流体所受的电磁力等。

流体力学中，常用分量形式表示体积力。如果流体所受的体积力只有重力，按图 2-1 坐标（oz轴铅垂向上），其分量形式为

$$f_x = f_y = 0, \quad f_z = -g \tag{2-2}$$

式中：g 为重力加速度。

二、表面力

表面力是毗邻流体微团或其他物体（如果有的话）直接施加在相接触表面上的接触力。若$\Delta\vec{F}_c$表示法线为$\vec{n}$的微面积元 ΔA 上所受的表面力，在法线为$\vec{n}$的单位面积上作用的表面力则为

$$\vec{p}_n = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \vec{F}_c}{\Delta A} \tag{2-3}$$

通常称$\vec{p}_n$为过某点法线为$\vec{n}$的微元面积上的接触应力。应力$\vec{p}_n$的方向一般与法线方向$\vec{n}$并不重合，其大小和方向与微元面积所处的位置及其方向有关。一般常把接触应力$\vec{p}_n$分解成垂直于作用表面的分量（称为法向应力）和平行于作用表面的分量（称为

切向应力）两部分。

§2-2 流体的静压力及其特征

流体静压力（有时也称为静压强）是指静止流体内部各点的法向应力。在静止流体中，流体内部没有相对运动，切向应力等于零，作用于流体微团的表面力只有法向应力，即静压力。流体静压力有两个重要特性：

（1）流体静压力方向必然沿着作用面的内法线方向。

这可由流体的性质加以说明。由于流体不能承受拉力，在微小切向力作用下都会产生变形而引起流体微团的相对运动，破坏流体的平衡。因此平衡流体只能承受压力，其方向沿作用面内法线方向。

（2）静止流体中任意点处的静压力数值与作用面的方位无关，即同一点处各方向的流体静压力均相等。

在静止流体内任意点 o 处取一个微元四面体 $oABC$，设直角坐标系原点与 o 点重合，微元四面体三个边长分别为 dx、dy、dz，斜表面外法线 $\vec{n}$ 与坐标轴夹角分别为 θ_x、θ_y、θ_z，见图2-2。

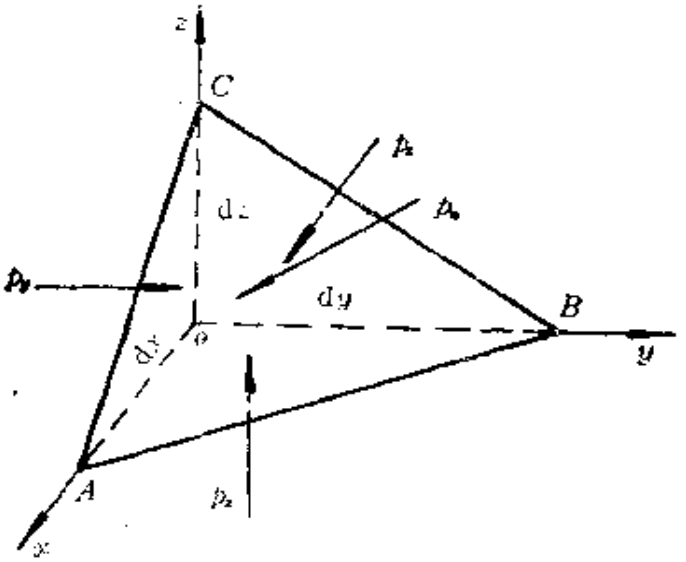


图 2-2

由于静止流体中没有切向应力，作用在微元四面体的表面力只有静压力。设作用在 ΔoAC、ΔoBC、ΔoAB 和 ΔABC 各面中点的静压力分别为 p_y、p_x、p_z 和 p_n，由于微元四面体很小，可近似认为各表面上静压力均匀分布。因此，在微元四面体各面上的表面力为

$$\begin{aligned} P_x &= p_x \mathrm{d}y\mathrm{d}z/2 \\ P_y &= p_y \mathrm{d}x\mathrm{d}z/2 \\ P_z &= p_z \mathrm{d}x\mathrm{d}y/2 \\ P_n &= p_n \mathrm{d}A \end{aligned} \tag{2-4}$$

式中：$\mathrm{d}A$ 为 ΔABC 的面积。

设流体密度为 ρ，单位质量流体的体积力在各坐标轴方向的分量分别为 f_x、f_y 和 f_z，则作用于微元四面体的总体积力的三个分量为

$$\begin{aligned} F_x &= \rho f_x \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z/6 \\ F_y &= \rho f_y \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z/6 \\ F_z &= \rho f_z \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z/6 \end{aligned} \tag{2-5}$$

式中：$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z/6$ 为微元四面体体积。

按照力学原理，作用于静止状态微元四面体上所有力的合力应等于零。在 x 方向可得

$$P_x - P_n\cos\theta_x + F_x = 0 \tag{2-6}$$

将式（2-4）和式（2-5）代入上式，应用关系式 $\mathrm{d}A\cos\theta_x = \mathrm{d}y\mathrm{d}z/2$，化简后可得

$$p_x - p_n + \rho f_x \mathrm{d}x/3 = 0 \tag{2-7}$$

令微元四面体在坐标原点 o 处趋于零，略去高阶小量可得

$$p_x = p_n \tag{2-8}$$

同理，由 y 和 z 方向的力平衡关系可得

$$\begin{aligned} p_y &= p_n \\ p_z &= p_n \end{aligned}$$

即

$$p_x = p_y = p_z = p_n \tag{2-9}$$

由于方向 $\vec{n}$ 可任意选取，从式（2-9）可得出结论：从各方向作用于一点处的流体静压力数值均相等，即作用在一点处的流体静压力的大小与作用面的方位无关。换句话讲，一点处的流体静压力是一个标量。

虽然同一点处各方向的流体静压力均相等，但不同点处静压力可以不同，而流体又是连续介质，所以静压力应是空间坐标的连续函数

$$p = p(x, y, z) \tag{2-10}$$

§2-3 流体静力学的平衡方程

在本节中，将由力学平衡条件出发研究流体静止时的基本关系式，并讨论流体静止时等压面的特征和对体积力的限制条件等。

一、平衡微分方程

在惯性坐标系中任何物体处于静止状态的必要条件是作用于物体上外力的合力为零。

在静止流体中任取一微元六面体，设微元六面体边长为$\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$、$\mathrm{d}z$，其中心点为 A，该点的静压力为p，见图 2-3。

作用于微元六面体的外力有表面力和体积力，因为流体处于静止状态，表面力中只有静压力。

经中心点A作x轴的平行线，与表面 $abcd$和$efgh$ 相交于 m、n。则m、n 点的流体静压力分别为$p - \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x$ 和 $p + \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x$，见图 2-3。

作用于其它表面上的静压力在 x 方向的投影为零，因此，作用于微元六面体的总表面力的 x 分量为

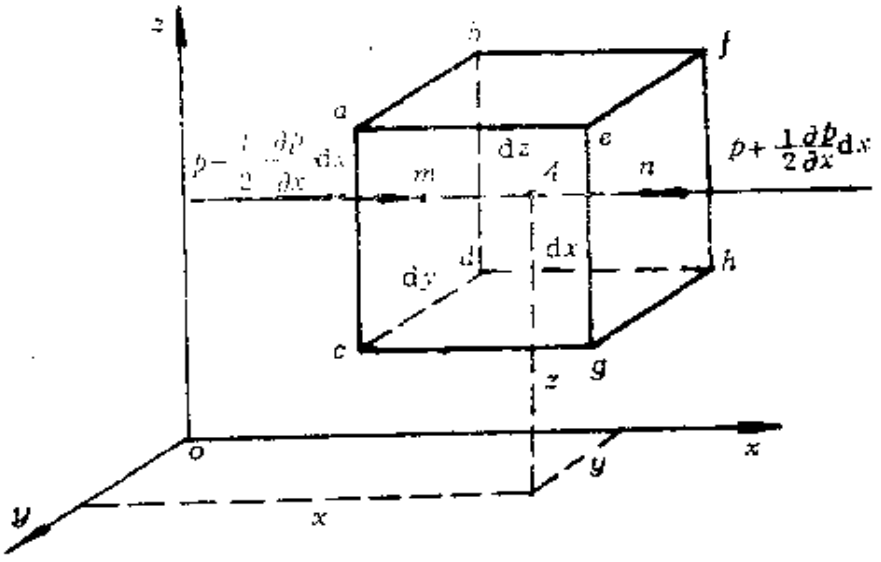


图 2-3

$$P_x=\left(p-\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\left(p+\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \qquad (2\text{-}11)$$

设 f_x、f_y、f_z 分别为单位质量流体的体积力在 x、y、z 方向的分量，ρ 为流体密度，则作用于微元六面体总体积力的 x 分量为

$$F_x=\rho f_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \qquad (2\text{-}12)$$

对于静止流体，由力平衡条件可得

$$P_x+F_x=0 \qquad (2\text{-}13)$$

将式（2-11）和式（2-12）代入式（2-13），可得

$$f_x=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \qquad (2\text{-}14a)$$

同理，由 y 和 z 方向力平衡条件可得

$$f_y=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \qquad (2\text{-}14b)$$

$$f_z=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \qquad (2\text{-}14c)$$

式（2-14）称为流体静力学平衡微分方程式，又称欧拉平衡方程

式，是欧拉于1775年首先推导的。它是力学平衡条件在平衡流体中的一种特殊形式，其物理意义是：流体处于静止平衡时，作用在单位质量流体上的体积力与静压力的合力相互平衡，它们沿三个坐标轴的投影之和分别等于零。式（2-14）既适用于不可压缩流体，也可用于可压缩流体。

二、流体静止的体积力限制条件

能使流体处于静止的体积力要满足一定条件，称为体积力限制条件。式（2-14）可写为

$$f_x\vec{i}+f_y\vec{j}+f_z\vec{k}=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial p}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}\right)$$

上式中的$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$为沿xyz坐标轴的三个单位向量，或

$$\vec{f}_v=\frac{\nabla p}{\rho} \tag{2-15}$$

式中，$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$为拉普拉斯运算子。对（2-15）式两侧取旋度，则

$$\nabla\times\vec{f}_v=\frac{1}{\rho}\nabla\times(\nabla p)+\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right)\times\nabla p=\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right)\times\nabla p \tag{2-16}$$

显然，如把式（2-15）与式（2-16）作标量积，可得体积力限制条件：

$$\vec{f}_v\cdot(\nabla\times\vec{f}_v)=0 \tag{2-17}$$

由此可见，流体静止的必要条件是体积力满足式（2-17），即体积力有势。

对于不可压流体，式（2-15）可写为

$$\vec{f}_v=\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) \tag{2-18}$$

对上式两侧取旋度，可得

$$\nabla\times\vec{f}_v=0 \tag{2-19}$$

由此可见，不可压流体静止的必要条件是体积力有势。即 $\vec{f}_v = \nabla U$，而 U 称为体积力 $\vec{f}_v$ 的势函数。

现在讨论正压流体情况。正压流体是指流体密度只是压力的函数的可压流体。实际上，这是对流体所经历的热力学过程的一种限制。流体力学中常遇到的等温流场或等熵流场中的流体都是正压流体。为方便起见，定义压力函数

$$\mathscr{P} = \int \frac{dp}{\rho} \tag{2-20}$$

则

$$\nabla \mathscr{P} = \frac{d\mathscr{P}}{dp}\nabla p = \frac{1}{\rho}\nabla p \tag{2-21}$$

将式（2-21）代入式（2-15），经类似处理也可获得式（2-19）。因此，体积力有势也是正压流体静止的必要条件。综上所述，在有势体积力作用下流体有可能静止，实际问题中遇到的体积力，如重力便是有势力。

将式（2-14）各式分别乘 $\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}z$ 后累加，可得

$$f_x\mathrm{d}x + f_y\mathrm{d}y + f_z\mathrm{d}z = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial p}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}z\right) \tag{2-22}$$

因 U 为体积力 $\vec{f}_v$ 对应的势函数，式(2-22) 左侧正好是势函数的全微分，而右侧括号内正是静压力的全微分，由此可得

$$\mathrm{d}p = \rho(f_x\mathrm{d}x + f_y\mathrm{d}y + f_z\mathrm{d}z) = \rho\mathrm{d}U \tag{2-23}$$

三、等压面

流体中静压力相等的各点所组成的面称为等压面。由定义知，等压面的方程式为

$$p = \mathrm{Const} \tag{2-24a}$$

或

$$\mathrm{d}p = 0 \tag{2-24b}$$

根据式（2-23），因流体密度不可能为零，还可得到

$$dU = f_x dx + f_y dy + f_z dz = 0 \qquad (2\text{-}24c)$$

由此可见，等压面同时也是等势面。

等压面的重要特征是：作用于静止流体中任意一点的体积力必然垂直于过该点的等压面。其证明如下：设点 $A(x,y,z)$ 和 A_1 $(x+dx, y+dy, z+dz)$ 位于同一等压面上，则流体微团沿等压面由 A 移动到 A_1 时，单位质量体积力所作的功为 $f_x dx + f_y dy + f_z dz$。根据等压面方程式（2-24），$f_x dx + f_y dy + f_z dz$ 等于零，即流体微团沿等压面移动时，体积力不作功。因为体积力和微团移动距离都不等于零，由力学原理可知，唯一的解是体积力垂直于等压面。

利用等压面这一特性，已知体积力方向便可确定等压面的形状，或反之。例如，当体积力仅为重力时，其等压面必然是水平面，因为水平面与重力相垂直。

下面讨论两种互不相混流体平衡时分界面的特性。设这两种流体的密度分别为 ρ_1 和 ρ_2，体积力有势。在分界面上取两个无限接近的点 A 和 B，对分界面上侧的流体，由式（2-23）有

$$dp_1 = \rho_1 dU_1 \qquad (2\text{-}25)$$

同理，对分界面下侧的流体，可得

$$dp_2 = \rho_2 dU_2 \qquad (2\text{-}26)$$

因为在分界面上任意点处，两种流体的静压力和势函数都应相等，因此，$dp_1 = dp_2 = dp$，$dU_1 = dU_2 = dU$。代入式（2-25）和式（2-26），消去 dU 可得

$$\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right) dp = 0 \qquad (2\text{-}27)$$

因为 $\rho_1 \neq \rho_2$，因此 $dp = 0$，即两种互不相混的不同密度静止流体的分界面必然是等压面。显然，分界面也是等势面。

与一种流体时相似，若体积力仅为重力，两种互不相混静止流体的等压面（包括分界面）必然也是水平面。

§2-4 液体内部的压力分布和静压力传递

液体在重力作用下处于静止状态是工程上最常见的情况。本节由流体静压力平衡微分方程式（2-23）出发，着重讨论体积力只是重力的静止液体内部的压力分布规律，然后研究液体内部静压力传递特性。

一、重力场中静止液体内部的压力分布

容器内盛有重度 γ 的不可压均质液体，在重力作用下处于静止状态。取坐标系 $oxyz$，z 轴铅直向上，见图2-4。

因为液体所受的体积力只有重力，单位质量体积力的三个分量为[见式（2-2）]

$$f_x = f_y = 0,\quad f_z = -g \tag{2-28}$$

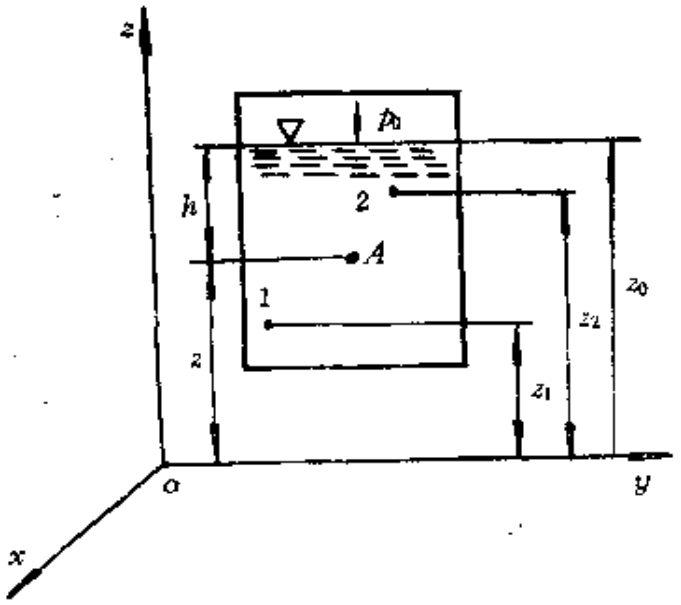


图 2-4

将式（2-28）代入式（2-23），注意到 $\gamma = \rho g$，可得

$$\frac{\mathrm{d}p}{\gamma} + \mathrm{d}z = 0 \tag{2-29}$$

因为重度 γ 为常数，积分上式可得

$$p/\gamma + z = C \qquad (2\text{-}30)$$

式中：C 为积分常数，由边界条件确定。

若液体有自由面 z_0，在自由面上压力应等于液面上方气体压力 p_0，由此可确定积分常数 $C = p_0/\gamma + z_0$。代入式（2-30），令 $h = z_0 - z$，可得

$$p = p_0 + \gamma h \qquad (2\text{-}31)$$

式中：h 为离自由液面的深度，见图2-4。式（2-31）为在重力作用下，不可压静止液体内部静压力的计算公式。该式表明，静止液体中任意点处静压力由自由面上压力 p_0 和液柱重量 γh 两部分组成，静止液体内部静压力的大小与深度 h 成正比。

在工程中，常常已知液体内某点的静压力，而求另一点的静压力。设静止液体中任意两点的垂直坐标分别为 z_1 和 z_2，静压力分别为 p_1 和 p_2，见图 2-4。则按（2-30）式可写为

$$p_1/\gamma + z_1 = p_2/\gamma + z_2 \qquad (2\text{-}32)$$

上式通常称为液体静力学基本方程式。

例2-1　已知：水池自由表面压力 98 100 帕，混浊水重度为 10 800牛/米^3。求：池内水深 3 米和 5 米处的静压力

解：由题意 $p_0 = 98\,100$ 帕，按式（2-31），$h_1 = 3$ 米处

$$p_1 = p_0 + \gamma h_1 = 98\,100 + 10\,800 \times 3 = 130\,500(\text{帕})$$

而在 $h_2 = 5$ 米处

$$p_2 = p_0 + \gamma h_2 = 98\,100 + 10\,800 \times 5 = 152\,100(\text{帕})$$

从物理学可知，与某一水平基准面相距 z 的物体所具有的单位重量位能为 z，所以式（2-32）两边的第二项分别代表点 1 和点 2 处单位重量液体所具有的位能。若在点 1 和点 2 处分别连接两根上端开口的直管，在压力作用下，液体质点将沿直管分别升起一定高度 p_1/γ 和 p_2/γ，因此，式（2-32）两边的第一项分别代表点 1 和点 2 处单位重量液体所具有的压力势能。由此，式（2-32）表示，相对于选定的水平基准面，静止液体中各点处的

单位重量位能和压力势能之总和保持常数。随在液体中位置的不同，单位重量流体的位能和压力势能可以有所不同，但其总和必然保持不变。这就是液体静力学基本方程式（2-32）的物理意义，也是静止液体中能量守恒与转换定律的特殊形式。

在实际应用中，压力可以用不同的方法来度量。以绝对真空为基准计算的压力称为绝对压力；以当地大气压为基准计算的压力称为相对压力。工程上用的大多数压力仪表都是用当地大气压为基准计量压力的，因而压力仪表指示的数值一般是相对压力，有时也称为表压力。

当流体中某处的绝对压力小于大气压时，则称处于某种程度真空状态。通常用大气压力与绝对压力的差值来度量，称为真空度（或真空压力）。

绝对压力、相对压力和真空度的关系为

$$p_b = p - p_a$$

$$p_{va} = p_a - p \qquad (2\text{-}33)$$

式中：p为绝对压力；p_a为大气压力；p_b为相对压力；p_{va}为真空压力。

为了正确地区分绝对压力、相对压力和真空度，图 2-5 形象

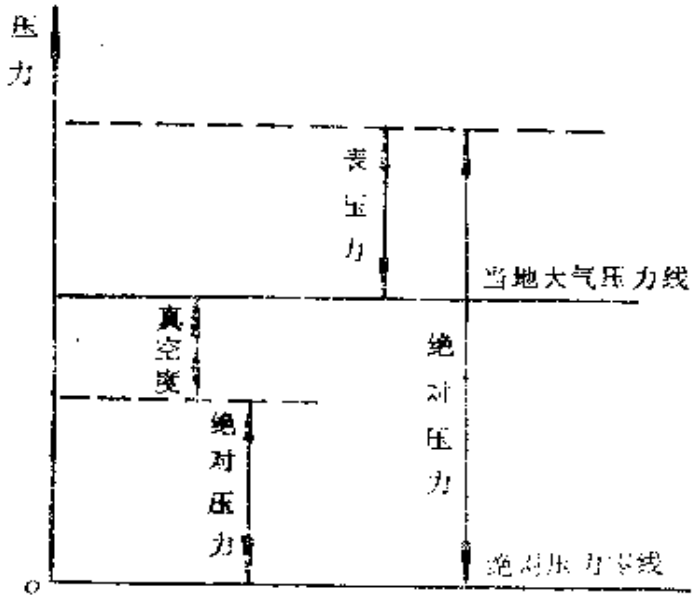


图 2-5

地表示绝对压力、相对压力、真空度与大气压力及绝对真空（即绝对压力零线）之间的关系。

压力是一种应力，是单位面积上所承受的力。在国际单位制中，压力的单位是帕或牛/米^2；在工程单位制中，压力单位为公斤力/米^2；此外，工程上还习惯用工程大气压、标准大气压或液柱高表示。各种压力单位的换算见表 2-1。

表 2-1　压力单位换算

帕	工程大气压	公斤力/米^2	毫米汞柱	米水柱	标准大气压
98 100	1	10 000	735.3	10	0.967 5
9.81	0.000 1	1	0.073 5	0.001	0.000 097
133.41	0.001 36	13.6	1	0.013 6	0.001 31
9 810	0.1	1 000	73.53	1	0.096 75
101396	1.0336	10 336	760	10.336	1

二、静压力的传递

从静压力计算公式（2-31）可知，如果p_0改变，作用在液体内任意点处的压力将会发生相应的变化。设有一容器，其一部分边界是活塞，外力F通过活塞向容器内液体加压，见图 2-6。若活塞的面积为A，则外力F在活塞边界流体上的压力为$p_0 = F/A$. 由式（2-31），则得液体内任意点处静压力为

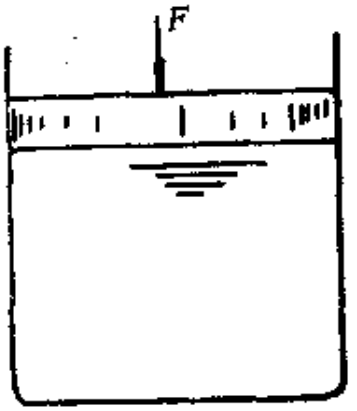


图 2-6

$$p = p_0 + \gamma h = F/A + \gamma h \qquad (2\text{-}34)$$

显然，如果力F增大或减小而液体仍然处于静止平衡时，液体内任意点处的静压力也随之增大或减小。由此得出结论：在平衡液体中，由于部份液体边界上承受外力而产生的流体静压力，将均匀地传递到液体内所有点上去。若$\gamma h \ll p_0$，即重力可忽略时，则

可认为容器中液体内部的静压力处处相等。

当封闭容器中平衡液体存在自由面，且自由面上的压力p_0改变时，也会引起容器内各点处压力相应变化，见图2-7。

若容器是敞口的，自由液面压力为p_0，液面上浮着一块面积为A的木块，见图 2-8(a)。若在木块上施加外力 F，则在木块与液体接触面上也会产生压力 $p=F/A$. 在外力作用下，木块将下沉，使一定体积液体挤向四周，液面上升一定高度Δh，液体达到新的平衡，见图2-8(b)。根据木块的平衡条件，$p=F/A=\Delta h\gamma$，显然外力产生的压力也使液体内各点压力相应增加。

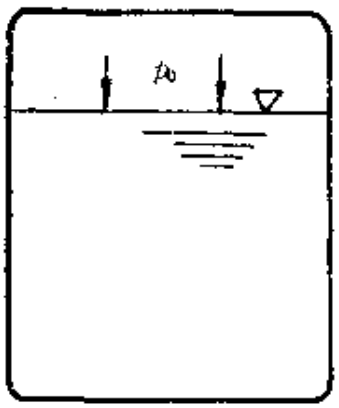


图 2-7

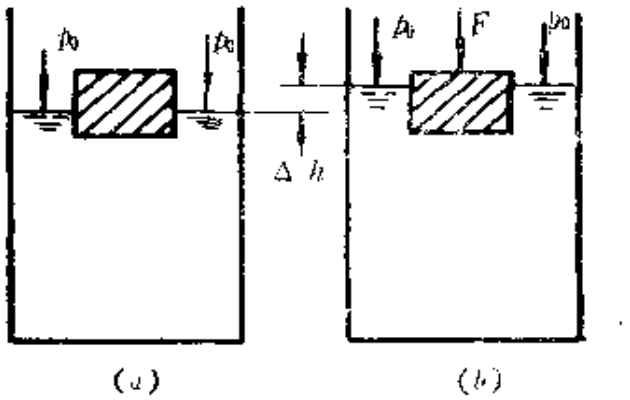


图 2-8

综上所述，不管液体有无自由面存在，也无论容器封闭与否，只要液体保持静止平衡状态，液体部分边界上的压力变化都会均匀地传到液体内各点处，这就是所谓的压力等值传递规律，通常称为帕斯卡原理。

§2-5 液体压力计原理

在工程实际中和试验研究时，经常需要测量容器或管路系统等内部流体的静压力。测量压力的仪表称为压力计，常用的压力计种类繁多，按照其作用原理可分为液柱式压力计、金属式压力计

和电测式压力计三类。液柱式压力计利用液柱高度的变化来测量压力；金属式压力计利用金属弹性元件的变形来测量压力；电测式压力计通过压力传感器把压力变成某种电量，用非电量电测的方法来测量压力。本节结合流体静力学讲述液柱式压力计的原理及简单构造。

液柱式压力计以流体静力学原理为基础，工作液体通常用水、乙醇、四氯化碳或汞，适用于低压、真空度和压力差的测量。

一、测压管

这是一种最简单的液柱式压力计，其构造是一根细长的直玻璃管，上端开口并与大气相通，下端与待测点相连，见图2-9。

在压力作用下，液体将沿测压管上升，液柱上升的高度可代表测点的相对压力。设容器中液体重度为γ，测压管中液柱高度为h。大气压力为p_a，则测点A处的相对压力为

$$p_b=\gamma h \qquad (2\text{-}35)$$

而测点A处的绝对压力为

$$p=p_a+\gamma h \qquad (2\text{-}36)$$

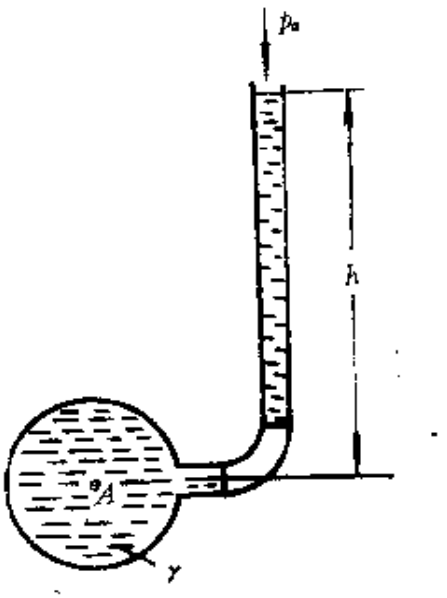


图 2-9

测压管结构简单，测量直接而准确。但测压管的测量范围较小，仅适用于测量0.1个大气压以内的相对压力。此外，这种压力计只能用于测量液体的压力。

为了减小毛细管现象对测量精度的影响，测压管内径以5～10毫米为宜。

二、U形管压力计

U形管压力计由装在刻度板上的U形玻璃管（又称连通器）

组成，管的一端与待测点相连，另一端开口，并与大气相通，见图2-10。因待测点压力大于外界大气压，所以工作液体通大气端的液柱将上升。

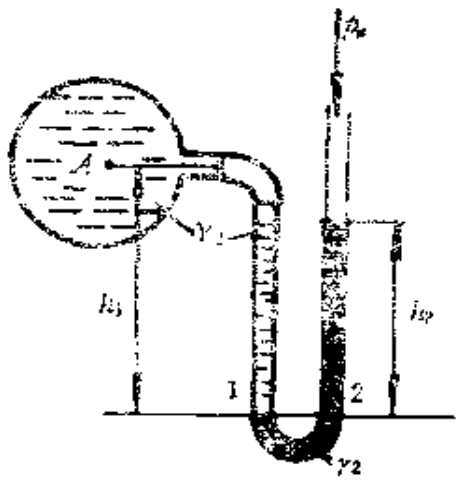


图 2-10

设被测液体重度为γ_1，压力计工作液体重度为γ_2（$\gamma_2>\gamma_1$），根据流体静力学原理，待液柱平衡时，测点A处的绝对压力p可写为

$$p = p_1 - \gamma_1 h_1 \qquad (2\text{-}37)$$

因为点1和点2处于同一种流体内，又在同一水平面即等压面上，因此p_1应等于p_2。又由式(2-31)，点2处压力p_2可写为

$$p_2 = p_a + h_2\gamma_2 \qquad (2\text{-}38)$$

由此可得，测点A的绝对压力和相对压力为

$$p = p_a + \gamma_2 h_2 - \gamma_1 h_1$$

$$p_b = \gamma_2 h_2 - \gamma_1 h_1 \qquad (2\text{-}39)$$

U形管压力计工作液体重度应大于被测流体重度，两种流体还应互不相混。使用中可根据被测压力的大小和精度要求来选择适当的工作液体。由于工作液体可人为选择，因此U形管压力计的测量范围比测压管大，但一般不超过3个大气压。

这种压力计也可用来测量气体压力。由于气体重度很小，式(2-39)中的$\gamma_1 h_1$项可以略去，故测点A的绝对压力和相对压力可表为

$$p = p_a + \gamma_2 h_2$$

$$p_b = \gamma_2 h_2 \qquad (2\text{-}40)$$

例2-2 已知：当被测流体的压力较高时，可把几个U形管串联，组成U形多管测压计，见图2-11。若$h=0.2$米，$h_1=0.1$米，$h_2=0.12$米，$h_3=0.13$米，U形管工作液体为汞($\gamma_2=133\,416$牛/米^3)，被测流体为水（$\gamma_1=9\,810$牛/米^3）。求：测点A的相

对压力

解 对各U形管连续应用流体静压力计算公式和BB，CC，DD等压面特性，以及$\gamma_{气} \ll \gamma_2$，可得

$$p_A = p_B - \gamma_1 h$$

$$p_B = p_C + \gamma_2 h_1 \quad (p_C \approx p_{C'})$$

$$p_C = p_D - \gamma_2 h_2 \quad (p_D \approx p_{D'})$$

$$p_D = p_a + \gamma_2 h_3$$

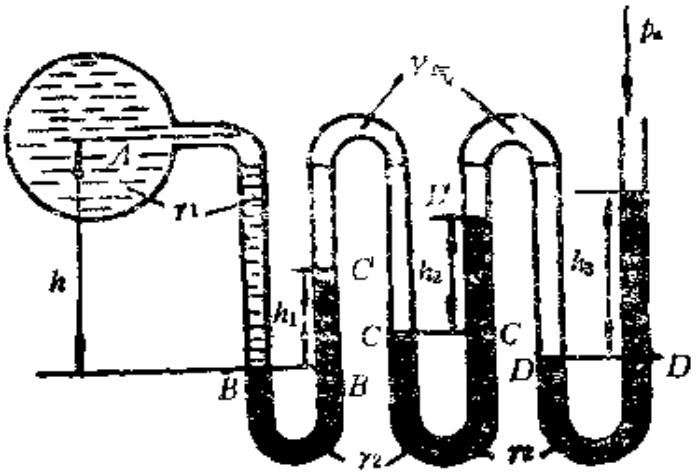


图 2-11

将上述各方程累加，则A点的绝对压力和相对压力分别为

$$p = p_a - \gamma_1 h + \gamma_2 (h_1 + h_2 + h_3) \qquad (2\text{-}41)$$

$$p_b = -\gamma_1 h + \gamma_2 (h_1 + h_2 + h_3)$$

将已知数据代入式（2-41），A点相对压力为

$$p_b = -\gamma_1 h + \gamma_2 (h_1 + h_2 + h_3)$$

$$= -9\,810 \times 0.2 + 133\,416 \times (0.1 + 0.12 + 0.13)$$

$$= 44\,734 \text{（帕）}$$

三、差压计

差压计测量的是不同位置两点间流体的压力差。就构造而言，差压计与U形管压力计并无区别，只不过前者是把U形管两

端分别与待测压差的两测压点相连，见图2-12。

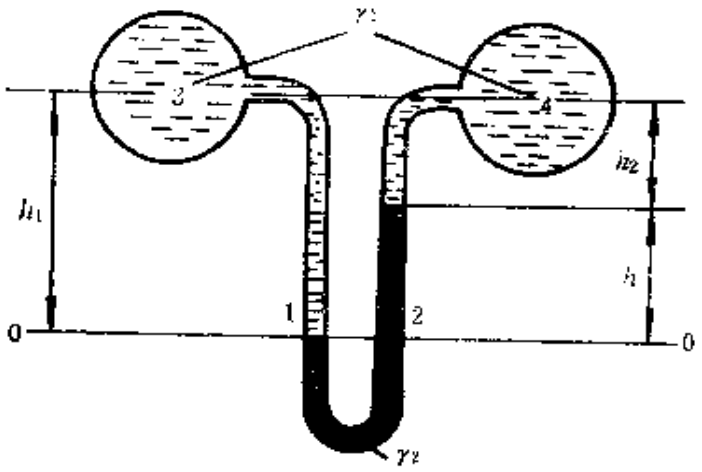


图 2-12

设被测流体重度为 γ_1，差压计工作液体重度为 γ_2，取水平面0—0为基准面，根据流体静力学原理和等压面特性，U 形管左端点 3 和右端点 4 的压力可写为

$$p_3 = p_1 - \gamma_1 h_1 \qquad (2\text{-}12)$$

$$p_4 = p_2 - \gamma_1 h_2 - \gamma_2 h$$

上式两边分别相减，注意到 $p_1 = p_2$，$h_1 = h + h_2$ 可得

$$\Delta p = p_3 - p_4 = (\gamma_2 - \gamma_1) h \qquad (2\text{-}13)$$

测得液柱高 h，即可算得不同位置两点间的压差。

若被测流体为气体，略去γ_1，式（2-43）可简化为

$$\Delta p = \gamma_2 h \qquad (2\text{-}14)$$

四、倾斜管微压计

工程应用中有时流体压力差很小，例如被测压力差只有20毫米水柱时，若视读误差 1 毫米，相对误差可达 5%。为了提高测量精度，在测量微小压力差时，可采用倾斜管微压计。图2-13为倾斜管微压计示意图。在一个截面较大的容器中盛有工作液体，容器一端接一倾斜角可调的细玻璃管，容器上方通过玻璃管（引压管）与被测压力相连。在压力 p作用下，工作液体将沿倾斜玻

璃管上升一定高度，由此可确定待测压力的值。

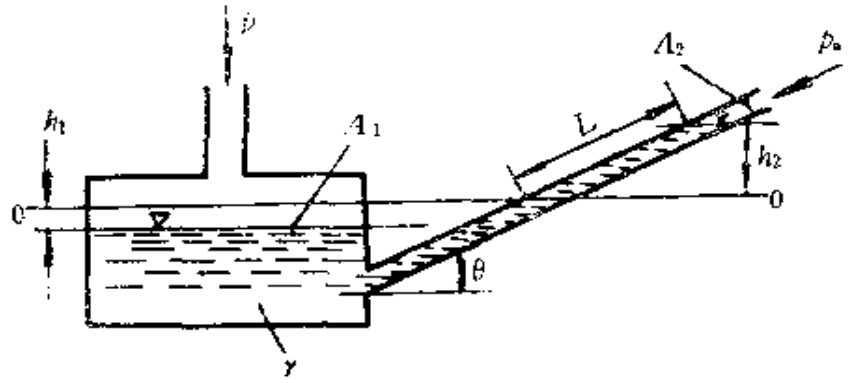


图 2-13

设容器截面积为A_1，倾斜玻璃管横截面积为A_2，玻璃管倾斜角为θ，工作液体重度为γ．当微压计两端都与大气相通时，容器和倾斜玻璃管中的液面为0—0，现在被测压力p的作用下，倾斜管内液柱长度变化为L．由图2-13知，被测气体相对压力为

$$p_b = \gamma(h_1 + h_2) \tag{2-45}$$

由几何关系知，$h_2 = L\sin\theta$，再根据液体的不可压缩性可得，$h_1 = LA_2/A_1$（它反映的是质量守恒关系，详情见第三章）。将上述h_1、h_2值代入式（2-45），整理后可得

$$p_b = \gamma L\sin\theta K \tag{2-46}$$

式中：$K = 1 + A_2/(A_1\sin\theta)$称为倾斜管压力计常数，可通过压力计校测确定。一般说来，A_2远小于A_1，因此，压力计常数K值很接近于1。

倾斜管微压计的倾斜角θ一般可以调节，可根据被测压力大小及精度要求来选择。θ越小，同样压力差引起的液柱长度变化越大。但倾斜角不能太小，否则由于液面高度判读困难反而对测量不利。

倾斜管微压计工作时，不言而喻，容器上端的引压管要与压力高者相通，倾斜玻璃管端要与压力低者相连，以保证玻璃管中液面上升一定高度，以便于测量得以正确进行。

上述压力仪器中，除测压管外，都可用来测量流体的真空

度，其计算公式与测量相对压力时的基本相同。

§2-6 液体作用在壁面上的合力和压心

在设计水坝、水箱、挡水闸门、船体、油罐等设备时，不仅需要知道静止流体内部静压力分布规律，还需要知道与静止流体接触的固体壁面上承受的流体压力的合力。因为压力是作用在单位面积上的法向力，故总可以通过压力分布的积分来求得固体壁面上所承受的流体压力的合力。为了便于工程应用，本节将进一步研究固体壁面上流体静压力的合力的计算问题，给出确定合力大小、方向和作用点的一般表达式。

一、平面上液体压力的合力与压心

为了说明问题的普遍性，讨论盛液容器中与水平面成倾角 α 的平面 A. 取平面A所在平面与液体自由面的交线为x轴（它垂直于纸面），铅垂面与平面 A 所在平面的交线为y轴，并将平面A绕oy轴旋转90°角，见图 2-14。设平面A的形心离x轴的距离为 y_c，离开自由面的深度为 h_c；因为大气压力均匀地作用在平面A的两侧，自相平衡，因此在下面的讨论中，只考虑相对压力的贡献。

由流体静压力特性可知，平面A上各点的静压力都垂直于平面 A，构成一组平行力系，因此，可根据平行力系合成定理确定其合力。设 $\mathrm{d}A$ 为平面A上的面元，其深度为h，则作用在该面元上压力的合力为

$$\mathrm{d}P = \gamma h \mathrm{d}A \tag{2-47}$$

将面元上的合力$\mathrm{d}P$沿平面A积分，注意到有关系 $h = y\sin\alpha$存在，则平面上压力的合力为

$$P = \gamma \sin\alpha \int_A y\mathrm{d}A \tag{2-48}$$

由理论力学可知，$\int_A y\mathrm{d}A$ 是面积 A 对 ox 轴的静力矩，其值等于该平面图形的面积 A 和形心坐标 y_c 的乘积，因此，式 (2-48)

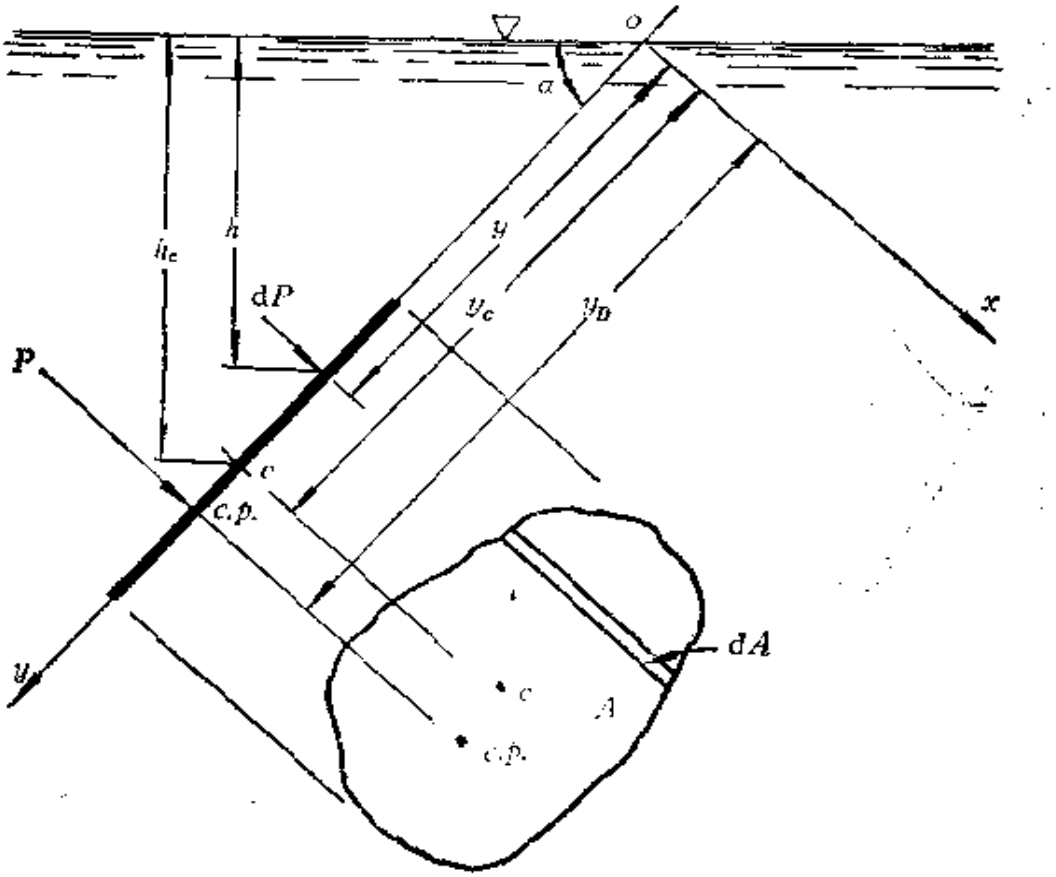


图 2-14

可写为

$$P = \gamma \sin\alpha\, y_c A = \gamma h_c A \qquad (2\text{-}49)$$

上式即是作用在面积为A的平面上液体压力的合力计算公式。它表明，平面上液体压力的合力等于该平面面积和该平面图形形心处的静压力之乘积，即等于以该平面面积为底、形心深度为高的柱体所包围的液重。

由于在静止流体中切向应力为零，显然，平面上液体压力合力的方向必然垂直指向该平面。

另外，根据理论力学中合力矩定理来确定合力作用点位置。参看图2-14，面元dA上流体静压力对ox轴的力矩dM为

$$dM = \gamma y h dA \qquad (2\text{-}50)$$

上式沿平面 A积分，注意到 $h=y\sin\alpha$，流体静压力对 ox 轴的合力矩为

$$M=\gamma\sin\alpha\int_A y^2\mathrm{d}A \tag{2-51}$$

积分$\int_A y^2\mathrm{d}A$为 平面图形A对 ox 轴的惯性矩，用J_x表示。因此，由式（2-49）和式（2-51）可得，合力的作用点，即压力中心坐标y_D为（因$M=Py_D$）

$$y_D=\frac{J_x}{y_cA} \tag{2-52}$$

令 J_{cx} 为平面图形 A 对过形心并与 ox 轴平行的轴的惯性矩，由惯性矩平行移轴定理可得

$$J_x=J_{cx}+y_c^2A \tag{2-53}$$

上式代入式（2-52），可得

$$y_D=y_c+\frac{J_{cx}}{y_cA} \tag{2-54}$$

因为J_{cx}和y_c都是正值，上式表明，平面上压力中心（图上用c、p注出）总是位于该平面图形的形心（图上 用 c 注出）之下。

若平面图形 A 具有轴对称性，而对称轴 与 oy 轴平行，则压力中心的 x 向位置必然位于该对称轴上。否则，还要确定压力中心的 x 向坐 标 x_D。把面元 $\mathrm{d}A$ 上的静压力对 oy 轴求矩，经过类似的处理，可得

$$x_D=-\frac{J_{xy}}{y_cA} \tag{2-55}$$

式中：$J_{xy}=\int_A xy\mathrm{d}A$ 为平面图形 A 对 x 和 y 轴的惯性矩。

在工程设计手册或材料力学等书籍中，通常都用表格形式给出常见规则平面图形的形心位置及对形心的惯性矩的计算公式，可供工程计算使用。

对于比较复杂的平面图形，可以用直接积分的方法首先计算该图形的形心及 对 x、y 轴 的 惯 性 矩，然后用式（2-49）、式（2-54）和式（2-55）确定压力的合力及压力中心位置。在工程应用中，更常用的方法是把复杂的平面图形划分成若干个简单的

规则图形，利用材料力学或设计手册中现成的计算公式分别确定各简单图形的压力的合力及其作用点位置，再按照平行力系合成规律，求出复杂图形的总的合力及其压力中心位置。

例2-3　已知：一冷却水池的长方形排水孔，在 N 点用铰链将闸门连接到挡水墙上，见图 2-15。设闸门铰链处离水面距离 $h_1=2.9$ 米，闸门宽 $b=1$ 米，高 $h_2=0.5$ 米，闸门开启力作用于闸门下端 M 点处，并与水平面成 45° 角。求：启开闸门所需的力，闸门重量及摩擦力忽略不计。

解：因为矩形图形的形心位于其中点，形心坐标为

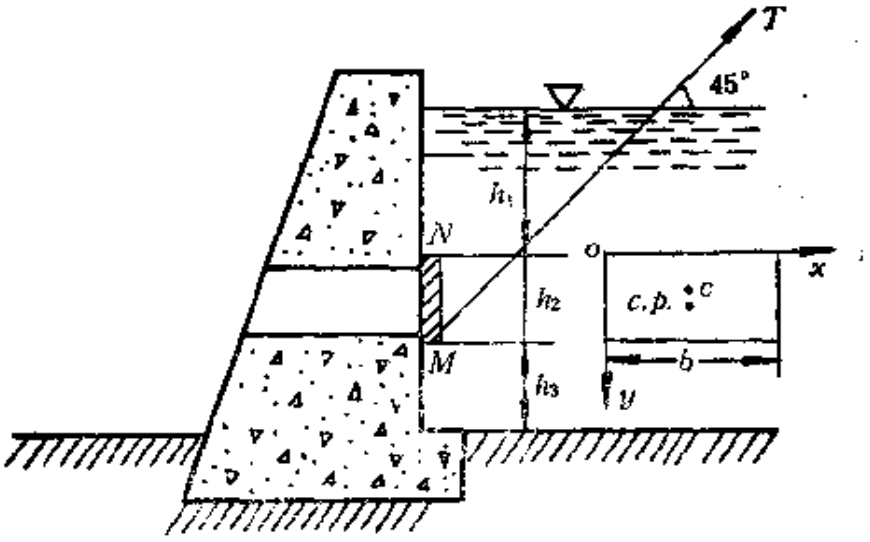


图 2-15

$$y_c = h_c = h_1 + h_2/2 = 2.9 + 0.25 = 3.15 \text{（米）}$$

因此，水对闸门的总作用力为

$$P = \gamma h_c A = 9\,810 \times 3.15 \times 1.0 \times 0.5 = 15\,451 \text{（牛）}$$

查有关手册得，矩形图形对其形心的惯性矩 J_{cx} 为

$$J_{cx} = \frac{b \times h_2^3}{12} = \frac{1 \times 0.5^3}{12} = 0.010\,417 (\text{米}^4)$$

则压力中心坐标为

$$y_D = y_c + \frac{J_{cx}}{y_c A} = 3.15 + \frac{0.010\,417}{3.15 \times 0.5 \times 1} = 3.156\,6 (\text{米})$$

对铰链点 N 取矩，按力矩平衡关系开启力 T 为

$$Th_2\cos 45^\circ = P(y_D - h_1)$$

$$T = \frac{P(y_D - h_1)}{h_2\cos 45^\circ} = \frac{15\,451\times(3.156\,6 - 2.9)}{0.5\times\frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$= 11\,214\ (\text{牛})$$

当开启力T 大于 11 214牛时，闸门可开启。

二、曲面上液体压力的合力与压心

由于曲面上各点所承受的液体静压力分别垂直于所对应的面元，显然它们的方向各不相同，属于非平行力系，因此，不能直接用上段所述方法来解决曲面上液体压力的合力和压心问题。

下面以二维曲面为例，研究静止液体作用在曲面上压力的合力大小、方向及作用点。其结论对三维曲面情况也同样适用。

设AB为与液体直接接触的柱面，其面积为 A．取坐标轴y与曲面的母线平行（即垂直于纸面），坐标轴 z 铅垂向下，而坐标轴x 取水平方向，见图 2-16。

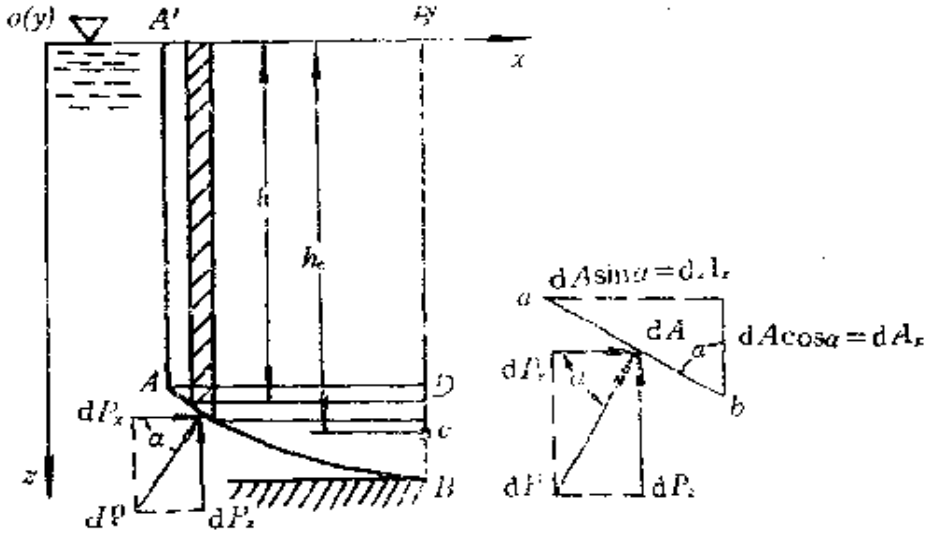


图 2-16

在曲面AB上取一面元 dA，它距自由面的深度为 h．根据流体静力学原理，作用在该面元上液体压力的合力为

$$dP = \gamma h dA \tag{2-47}$$

由图 2-16，设面元 dA 的法线与水平线的夹角为 α，则面元上液体压力的合力在 x 轴和 z 轴方向的分量分别为

$$dP_x = \gamma h dA\cos\alpha \tag{2-56}$$

$$dP_z = \gamma h dA\sin\alpha$$

令dA_x为面元 dA 在 yoz 平面的投影面积，dA_z 为面元 dA 在 xoy 平面的投影面积。显而易见，$dA_x = dA\cos\alpha$，$dA_z = dA\sin\alpha$。代入式（2-56），可得

$$dP_x = \gamma h dA_x \tag{2-57}$$

$$dP_z = \gamma h dA_z$$

因为面元 dA 上合力的水平分量为平行力系，因此，积分式（2-57）第一式，得曲面AB上液体压力的合力的水平分量为

$$P_x = \gamma \int_{A_x} h dA_x \tag{2-58}$$

式中：A_x为曲面 AB 在 yoz 平面的投影面积。积分 $\int_{A_x} h dA_x$ 恰好是平面图形A_x对oy轴的静力矩，令平面图形 A_x 的形心坐标（深度）为h_c（图2-16），则式（2-58）可改写为

$$P_x = \gamma h_c A_x \tag{2-59}$$

上式表明，作用在曲面 AB 上液体压力合力的水平分量等于液体作用在曲面的投影面积 A_x上压力的合力。通过类似的分析表明，曲面上压力合力的水平分量的作用点，将位于其投影面积 A_x 的压力中心处。

再积分式（2-57）的第二式，于是曲面 AB 上液体压力的合力的垂直分量为

$$P_z = \gamma \int_{A_z} h dA_z \tag{2-60}$$

由图 2-16 知，$h dA_z$ 表示阴影部分的微体积，因此，积分 $\int_{A_z} h dA_z$ 从几何上相当于以曲面 AB 为底、曲面周边各点向上投影为母线，直到液体自由面所包围空间的体积，通常称为压力体，用$\forall_P$表示。因此，式（2-60）可改写为

$$P_z = \gamma \mathscr{V}_p \qquad (2\text{-}61)$$

上式表明，曲面上液体静压力合力的垂直分量等于压力体内液体的重量。类似分析表明，合力的垂直分量的作用线通过其压力体的重心。

根据作用在曲面上液体压力合力的垂直分量和水平分量，由力合成定理，很容易确定作用在曲面上液体压力的合力的大小及方向。

显然，上述分析略加推广，亦可适用于三维曲面情况。

综上所述，三维曲面上液体压力的合力的确定步骤为

1．将曲面分别投影到垂直于 x 轴与垂直于 y 轴的平面上，确定投影面积 A_x 和 A_y 的形状、大小及形心位置；

2．由投影面积 A_x 和 A_y，利用平面上液体压力的合力计算公式（2-49）、（2-54）和（2-55），确定作用在曲面上压力的合力的水平分量 P_x、P_y 及其作用点；

3．确定曲面所对应的压力体，用式（2-61）计算曲面上流体压力的合力的垂直分量 P_z；

4．由力合成原理，确定合力的大小及方向，即

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2} \\ \cos\alpha_x &= \frac{P_x}{P} \\ \cos\alpha_y &= \frac{P_y}{P} \\ \cos\alpha_z &= \frac{P_z}{P} \end{aligned} \qquad (2\text{-}62)$$

式中，$\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ 分别为合力 P 与坐标轴 x，y，z 之间的夹角。

显然，作用在曲面上液体静压力合力的垂直分量，按图2-16所示情况是垂直向上的。然而，液体与同一曲面可以有两种相互作用的情况发生，参看图 2-17。

图 2-17(a)和(b)分别为直接作用在曲面 AB 的液体位于曲面

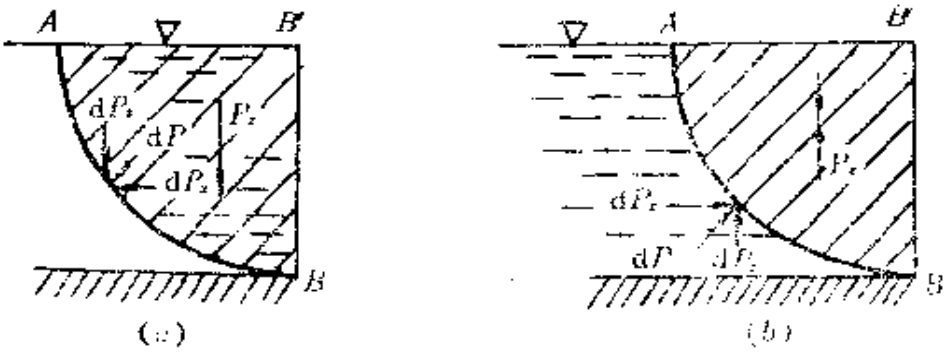


图 2-17

上、下侧的两种情况，图中用斜阴影线表示出所对应的压力体。显然，由于两种情况的曲面形状和距液体自由面的相对位置相同，两者对应的压力体也相同。如果两种情况下的液体重度相等，则两者所承受的垂直分力大小应相等。但两者的垂直分力方向却不同。由图 2-17(a) 可见，曲面 AB 各面积元上的垂直分力都向下，因此，其合力的垂直分力也必然向下；而图2-17(b) 的情况正好相反。由此可见，不管压力体内是否有液体存在，只要压力体相同，曲面上所承受的垂直分力的数值就相等；但垂直分力的方向却决定于和曲面直接接触的流体是位于曲面的上侧或是下侧。

基于上述分析，可进一步把压力体分成两类：如直接作用在曲面上的液体包含在压力体内，则称这种压力体为实压力体，它的垂直分力方向必然向下，如图 2-17(a) 所示；反之，如直接作用在曲面上的液体没有被包含在压力体内，这种压力体称为虚压力体，它的垂直分力方向必然向上，如图 2-16和图2-17(b) 所示。

例2-4　已知：一贮水容器，其容器壁上有三个半球形的盖子，设半球形盖的直径 $d=0.5$米，$h=2.0$米，$H=2.5$ 米，水的重度 $\gamma=9\,810$牛/米^3，见图 2-18。求：作用于每个球盖上液体压力的合力。

解　底盖：因为底盖左右对称，左右两半部分压力的水平分

力大小相等方向相反，故底盖的水平分力为零。其液体压力的合力就是曲面上液体压力合力的垂直分量，由式（2-61）有

$$P_{z_1}=\gamma\mathscr{V}_{p_1}=\gamma\left[\frac{\pi d^2}{4}\left(H+\frac{h}{2}\right)+\frac{\pi d^3}{12}\right]$$

$$=9\,810\times\left[\frac{3.141\,6\times0.5^2}{4}\times\left(2.5+\frac{2.0}{2}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{3.141\,6\times0.5^3}{12}\right]$$

$$=7\,062.7\text{（牛）（方向向下）}$$

顶盖：与底盖一样，水平分力亦为零，其液体压力的合力就是曲面上液体合力的垂直分量，由式（2-61）有

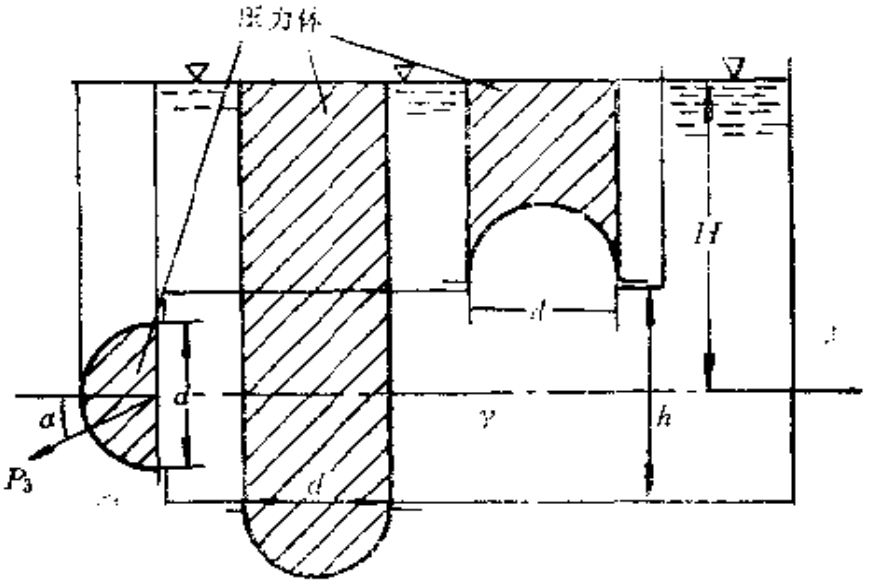


图 2-18

$$P_{z_2}=\gamma\mathscr{V}_{p_2}=\gamma\left[\frac{\pi d^2}{4}\left(H-\frac{h}{2}\right)-\frac{\pi d^3}{12}\right]$$

$$=9\,810\times\left[\frac{3.141\,6\times0.5^2}{4}(2.5-1)\right.$$

$$\left.-\frac{3.141\,6\times0.5^3}{12}\right]$$

$$=2\,568.3\text{（牛）（方向向上）}$$

侧盖：其液体压力的合力由垂直分量与水平分量合成。垂直分力可由式（2-61）确定，即

$$P_{zs}=\gamma\forall_{ps}=\gamma\frac{\pi d^3}{12}=9\,810\times\frac{3.141\,6\times0.5^3}{12}$$

$$=321.0(\text{牛})\text{（方向向下）}$$

侧盖的水平分力为作用在半球体（在垂直平面上）的投影面积（即直径等于球盖直径的圆面积）上的液体压力的合力。由式（2-59），其值为

$$P_{xs}=\gamma h_{cx}A_x=\gamma H\frac{\pi d^2}{4}=9\,810\times2.5\times\frac{3.141\,6\times0.5^2}{4}$$

$$=4\,822.2(\text{牛})\text{（方向向左）}$$

故侧盖受到的流体压力的合力为

$$P_s=\sqrt{P_{ys}^2+P_{zs}^2}=4\,832.9(\text{牛})$$

其方向为（P_s对水平方向的倾斜角α）

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{P_{zs}}{P_{xs}}=\frac{321.0}{4\,822.2}=0.066\,6$$

$$\alpha=3°49'$$

总的合力P_s垂直指向侧盖曲面，并通过其球心。

§2-7 阿基米德原理

根据在液体中物体和自由液面的相对位置，可把浸没在液体中的物体分成两类：当任意形状的物体完全浸没在液体中时，称为潜体；当物体部分浸没在液体中、部分露出在自由面上时，称为浮体。液体对浮体或潜体表面作用力的合力称为浮力，浮力的作用点称为浮心，浮心与重心的连线称为浮轴。

根据阿基米德原理，浸没在液体中的物体，受到垂直向上的浮力，浮力的大小等于物体所排开的同体积液重，而和物体下沉的深度无关。本节将利用流体静力学原理证明阿基米德原理，并简要讨论潜体和浮体的平衡和稳定问题，它们对船舶的设计有重

要意义。

一、浮力原理

设在重度为 γ 的液体中有一静平衡物体 $BCDE$，从自由面向下作与物体表面相切的垂线 BB'、DD'……，它们与物体表面的切点形成的曲线 $BGDF$ 把物体表面分成Ⅰ、Ⅱ两部分，见图 2-19。

现分别确定表面Ⅰ和表面Ⅱ上液体压力合力的垂直分量。曲面Ⅰ对应的压力体 $\mathscr{V}_{BGDD'B'}$ 为实压力体，因此，曲面Ⅰ上所承受的垂直分力值为 $\gamma\mathscr{V}_{BGDD'B'}$，方向向下；而曲面Ⅱ对应的压力体 $\mathscr{V}_{BEDD'B'}$ 为虚压力体，因此曲面Ⅱ上所承受的垂直分力为 $\gamma\mathscr{V}_{BEDD'B'}$，方向向上。作用在物体表面的总垂直分力应等于表面Ⅰ和表面Ⅱ两部分垂直分力的代数和。由图 2-19 可见，虚压力体 $\mathscr{V}_{BEDD'B'}$ 大于实压力体 $\mathscr{V}_{BGDD'B'}$，两者的差值正好等于物体体积。由此说明，流体作用在物体上的合力的垂直分力等于物体所排开的同体积液重，方向向上。显然，该力的大小只与物体的体积有关，而与物体的下潜深度无关。

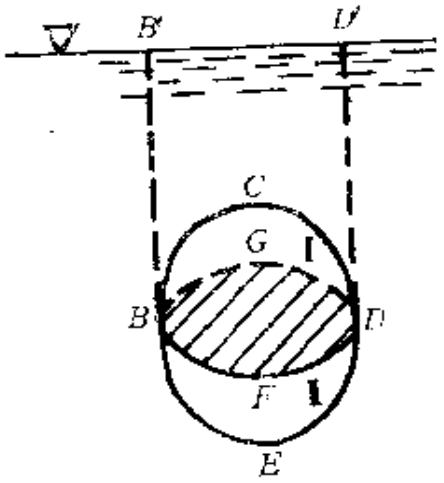


图 2-19

在水平面上任选一个方向，沿该方向作与物体表面相切的水平切线，类同于刚才所述情况，这些水平切线与物体表面的切点形成的曲线将把物体分成左右两部分。但由于物体表面为封闭曲面，因此，左、右两部分曲面的水平投影面积必然完全相同。根据上节的分析，作用在左、右两部分表面上压力的水平分力大小相等，方向相反。因此，作用在物体上的液体压力合力的水平分量为零。

综上所述，作用在潜体上液体静压力的合力方向垂直向上，

其大小等于潜体所排开的液体重量，与下潜深度无关；而该力的作用点显然在物体的几何中心即浮心上，此即阿基米德原理。

不难看出，阿基米德原理同样适用于浮体。在这种情况下，阿基米德浮力等于浸没于液体中那部分物体体积的液体重量，其方向垂直向上，作用线通过物体被浸没部分的几何中心即浮心。

二、潜体的平衡与稳定

在静平衡时，潜体只受到两个力，即通过浮心C向上作用的浮力P_a和通过重心D向下作用的重力W。

潜体的平衡必须满足以下条件：

1．重力和浮力相等，否则潜体将上浮到自由面成为浮体，或下沉到液体底部成为沉体。

2．浮力和重力必须共线，否则将会产生力矩使潜体转动。

潜体平衡时的稳定条件可用图2-20的例来说明：

1．如果潜体重心位置低于其浮心位置，则潜体的平衡是稳定的，这种平衡称为稳定平衡。若在外力作用的干扰下使潜体平衡姿态发生偏斜变化，在重力和浮力组成的力矩作用下，潜体将恢复到原来的平衡位置，见图2-20(a)。

2．如果潜体重心位置高于其浮心位置，则潜体的平衡是不

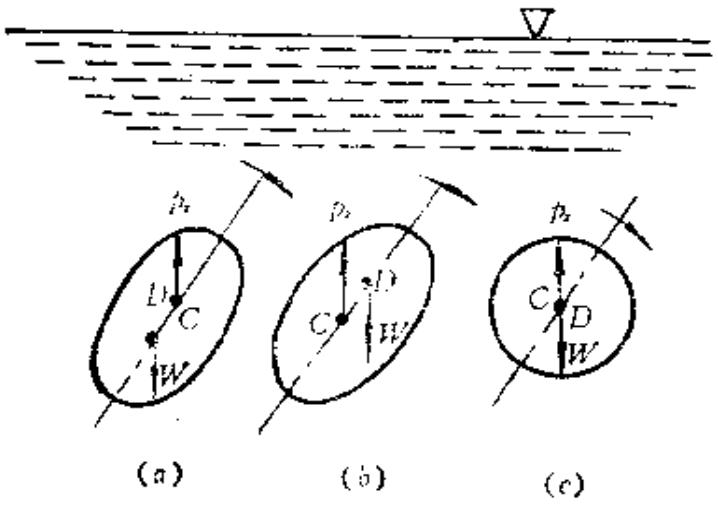


图 2-20

稳定的，这种平衡称为不稳定平衡。若在外力作用的干扰下使潜体偏离平衡位置，而重力和浮力将产生一个使潜体继续翻转的转动力矩，潜体不能恢复到原来的平衡位置，如图 2-20(*b*) 所示。

3. 如果潜体重心与其浮心位置重合，则潜体的平衡与平衡姿态无关，这种平衡称为随遇平衡。若在外力作用的干扰下，潜体平衡姿态发生偏斜变化，重力和浮力都不会形成任何力矩，因而，在新的姿态下，潜体又达到新的平衡，如图 2-20(*c*) 所示。

三、浮体的平衡与稳定

浮体平衡的条件与潜体相同，即重力和浮力大小相等，并且共线。但浮体与潜体有所不同，浮体能自动调节其浮力大小，使其与重力相等。因为浮体的浮力随其沉浮的深度不同而变化，若开始时浮体的重力大于浮力，则浮体会下沉，使浮力增大，直到浮力等于重力，使浮体处于平衡状态。

当浮体摆动时，其浸没部分的形状也随着发生变化，浮体的浮心位置也随之而变。因此，浮体平衡时的稳定条件与潜体略有不同。

1. 如果浮体的重心位置始终低于其浸没部分的浮心位置，则浮体的平衡是稳定的，这种平衡也称为稳定平衡，与潜体情况相同。

2. 如果浮体的重心位置高于其浸没部分的浮心位置，由于浮体摆动时浮心位置的变化，浮体的平衡可能是稳定的，也可能是不稳定的，简略讨论如下（见图2-21）

对于图 2-21(*a*)情况，在外力作用的干扰下，假定浮体向右偏转，浮心位置由 C 点移到 C' 点。浮力和重力产生的力矩将使浮体继续向右翻转，因而，浮体不可能再恢复到原来的平衡位置。这种平衡情况属于不稳定平衡。

图 2-21(*b*) 的情况则与此不同。在外力作用的干扰下，假定浮体向右偏转，浮心位置由 C 点移到 C' 点。浮力和重力产生的

力矩使浮体向左翻转，因而，浮体将重新恢复到原来的平衡位置。这种平衡情况属于稳定平衡。

显然，浮体的稳定性与浮心位置的变化密切相关。如果定义浮心位置由 C 点变到 C' 点后，通过 C' 点的垂线与浮轴的交点 o 称为定倾中心，则可根据定倾中心与重心的相对位置，判断浮体平衡时的稳定性，如图 2-21 所示。若定倾中心位于重心之上，这种平衡属于稳定平衡，见图 2-21(b)；若定倾中心位于重心之下，这种平衡属于不稳定平衡，见图 2-21(a)。

3．当重心和浮心重合时，浮体的平衡总是稳定的，不像潜体情况那样会形成随遇平衡。当浮体受到外力作用的干扰偏离原来位置后，浮心将离开重心而产生恢复力矩，使浮体恢复到原来平衡位置。

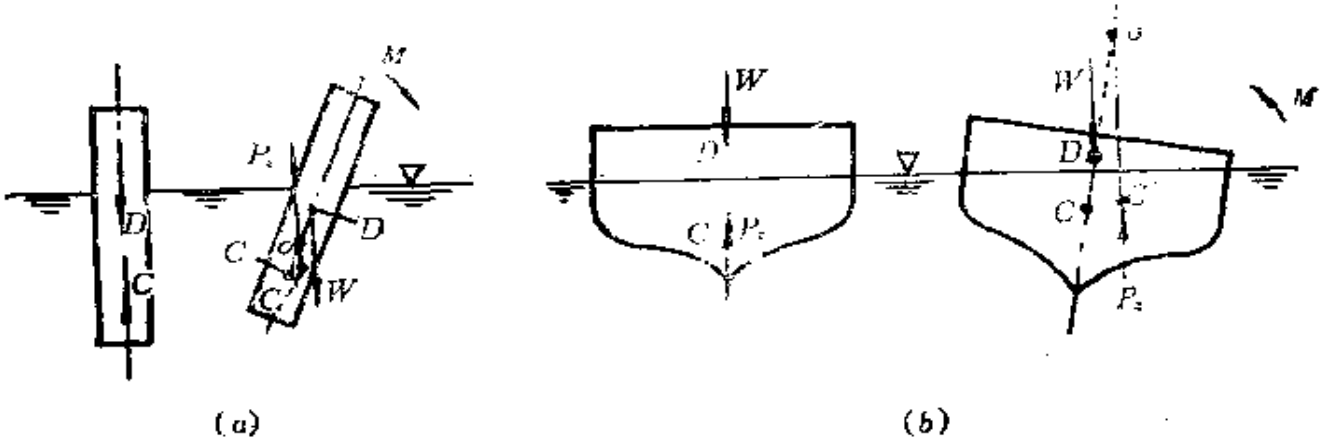


图 2-21

§ 2-8 液体的相对平衡

盛有液体的容器在作等加速直线运动或等角速度转动时，容器内液体各微团除受到重力作用外，还要受到惯性力的作用。在这种情况下，液体相对于地球是运动的。但是，如果把坐标系取在容器上，并与容器一起运动，相对于该坐标系，液体则处于相对静止状态。因此，可用流体静力学的基本规律来探讨解决相对

静止液体的平衡问题。

一、作等加速直线运动液体的平衡

在作等加速直线运动的拖拉机、汽车上的油箱、水箱和油槽车等内部的液体都处于相对静止状态，可用流体静力学原理确定液体内部压力分布规律、等压面及自由面形状等。

取直角坐标系原点 o 位于液体自由面中心，x 轴与运动方向一致，z 轴垂直向上，坐标系与运动容器固连，见图 2-22。

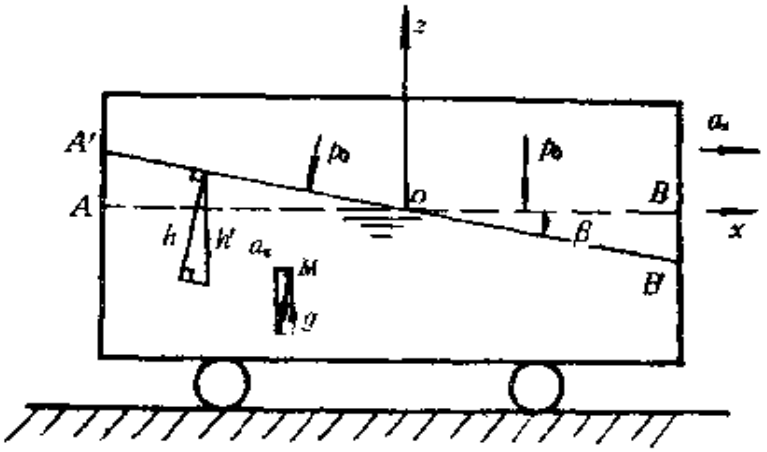


图 2-22

设容器以等加速度 a_x 沿 x 轴方向作水平直线运动，则作用在液体内任意点 M 处微团上的单位质量体积力为沿负 z 轴方向的重力 g 和沿负 x 轴方向的牵连惯性力 a_x，即

$$f_x = -a_x,\quad f_y = 0,\quad f_z = -g \tag{2-63}$$

将式（2-63）代入式（2-23），则有

$$\mathrm{d}p = -\rho(a_x\mathrm{d}x + g\mathrm{d}z) \tag{2-64}$$

在等压面上，$\mathrm{d}p=0$，由（2-64）式，等压面方程的微分形式为

$$a_x\mathrm{d}x + g\mathrm{d}z = 0 \tag{2-65}$$

上式积分后可得等压面方程为

$$z = -\frac{a_x}{g}x + C \tag{2-66}$$

式中，C 为积分常数，可由边界条件确定。

显然，（2-66）式为倾斜平面族方程，不同的积分常数对应不同的平面。由此可见，作等加速水平直线运动时，达到新的平衡而处于相对静止液体的等压面为倾斜平面，等压面与水平面夹角 β 为常数，其值为

$$\beta = \mathrm{tg}^{-1}\left(-\frac{a_x}{g}\right) \tag{2-67}$$

在倾斜自由面上，$x=0$，$z=0$。代入（2-66）式可得积分常数 $C=0$。因此，倾斜自由面的方程为

$$z = -\frac{a_x}{g}x \tag{2-68}$$

积分式（2-64），可求得等加速直线运动时，相对静止液体内的压力分布规律为

$$p = -\rho(a_x x + gz) + C_1 \tag{2-69}$$

式中，C_1 为积分常数。在坐标原点，$x=0$，$z=0$，$p=p_0$。由此可得 $C_1=p_0$。代入式（2-69）后，得液体内部任意点处的压力计算公式为

$$p = p_0 + \gamma\left(-\frac{a_x}{g}x - z\right) \tag{2-70}$$

由图 2-22 可知，式（2-70）右端括号内的项表示液体中任意一点在倾斜的自由液面下，沿垂直方向（即沿负 z 轴方向）量取的深度，若用 h' 表示，则式（2-70）可写为

$$p = p_0 + \gamma h' \tag{2-71a}$$

如果用垂直于自由液面的深度 h 来表示，则因有 $h = h'\cos\beta = h' g/\sqrt{a_x^2+g^2}$，故（2-71a）变为

$$p = p_0 + \gamma' h \tag{2-71b}$$

而

$$\gamma' = \gamma\frac{\sqrt{a_x^2+g^2}}{g} \tag{2-71c}$$

对比式（2-71b）和式（2-3）可知，两者的压力分布规律

是相同的，不过此时要用 γ' 替代 γ。

盛液容器以等加速度 $\vec{a}$ 作直线运动的一般情况，可参看图2-23。显然，有

$$f_x = -a_x,\quad f_y = 0,\quad f_z = -(a_z + g) \tag{2-72}$$

相应的等压面方程为

$$z = -\left(\frac{a_x}{a_z + g}\right)x + C \tag{2-73}$$

而倾斜自由液面的方程为

$$z = -\left(\frac{a_x}{a_z + g}\right)x \tag{2-74}$$

即仍为倾斜平面族。但倾斜角 β 的大小变为

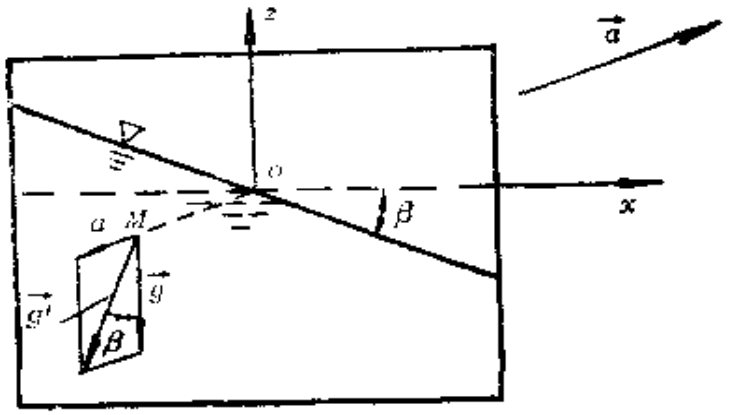


图 2-23

$$\beta = \mathrm{tg}^{-1}\left(-\frac{a_x}{a_z + g}\right) \tag{2-75}$$

这时，相对静止液体内部的压力分布规律为

$$p = p_0 + \gamma' h \tag{2-76a}$$

而

$$\gamma' = \gamma\frac{\sqrt{a_x^2 + (a_z + g)^2}}{g} \tag{2-76b}$$

换句话讲，在盛液容器作等加速度 $\vec{a}$ 直线运动时，容器内部处于相对静止液体所承受的牵连惯性加速度，使液体承受的合力

加速度$\vec{g'}$的大小和方向都发生了改变，有

$$|\vec{g'}| = \sqrt{a_x^2 + (a_z + g)^2} \tag{2-77}$$

而$\vec{g'}$与 z 轴的夹角正是式（2-75）的 β 角。

二、绕垂直轴等角速旋转液体的平衡

设有一个半径为 R 的开口圆桶，桶内盛有重度为 γ（或密度为 ρ）的液体。当桶静止时，液面高为 H_1。取直角坐标系原点 o 在桶底中心处，z 轴与桶的轴线一致，垂直向上为正，如图 2-24 所示。当圆桶绕 z 轴以等角速度 ω 旋转后，液体被甩向外周，桶内液面形状发生变化。等达到相对平衡后，液体随圆桶一起旋转，但贴近桶壁处的液面上升到高度 H_2，而中心处的液面下降到高度 H_0，桶内液体自由面变成一个旋转曲面。

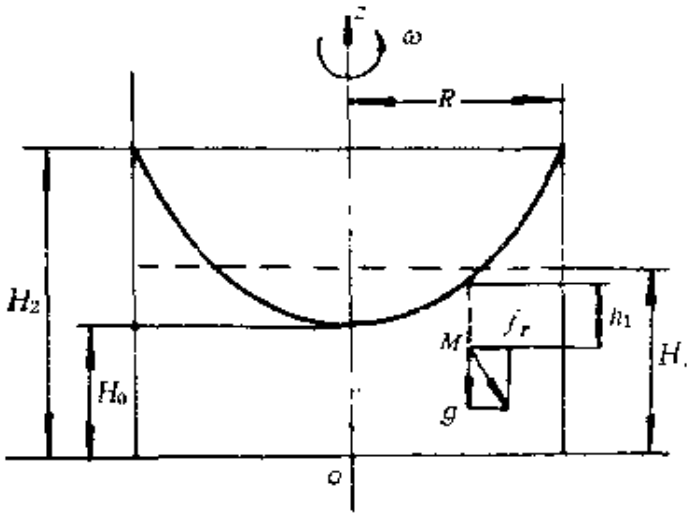


图 2-24

当液体和圆桶绕 z 轴一起以等角速度 ω 旋转时，作用在旋转液体中任意点 M 处单位质量流体上的力除沿负 z 轴方向的重力 g 外，还有沿径向的牵连惯性力 $f_r = \omega^2 r$，其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$。因此，对图 2-24 所示坐标系，作用在单位质量流体上的体积力的三个分量为

$$f_x = \omega^2 x, \quad f_y = \omega^2 y, \quad f_z = -g \tag{2-78}$$

将式（2-78）代入式（2-23）后有

$$\mathrm{d}p=\rho(\omega^2x\mathrm{d}x+\omega^2y\mathrm{d}y-g\mathrm{d}z) \tag{2-79}$$

在等压面上，$\mathrm{d}p=0$。代入式（2-79），得等压面方程的微分形式为

$$\omega^2x\mathrm{d}x+\omega^2y\mathrm{d}y-g\mathrm{d}z=0 \tag{2-80}$$

上式积分后，等压面方程为

$$x^2\omega^2/2+y^2\omega^2/2-gz=C \tag{2-81}$$

式中：C 为积分常数。

式（2-81）为旋转抛物面族方程，不同的积分常数对应不同的旋转抛物面。由此可见，等角速度旋转时相对静止液体的等压面是以 z 轴为对称轴的旋转抛物面。

在自由液面与 z 轴相交处，$x=0$，$y=0$，$z=H_0$，代入式(2-81)，则积分常数为 $C=-gH_0$。因此，自由液面方程为

$$\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)+g(H_0-z)=0 \tag{2-82}$$

由式（2-79）积分，可得等角速度旋转时，相对静止液体内部压力分布规律，即

$$p=\rho\left(\frac{\omega^2x^2}{2}+\frac{\omega^2y^2}{2}-gz\right)+C_1 \tag{2-83}$$

其中：C_1 为积分常数，由边界条件 $x=0$，$y=0$，$z=H_0$ 时，$p=p_0$ 确定。由此可得，积分常数 $C_1=p_0+\rho gH_0$，代入式(2-83)，可得

$$p=p_0+\gamma\left(\frac{\omega^2x^2}{2g}+\frac{\omega^2y^2}{2g}-z+H_0\right) \tag{2-84}$$

或

$$p=p_0+\gamma\left(\frac{\omega r^2}{2g}-z+H_0\right) \tag{2-85}$$

上式为容器作等角速度旋转时，液体内部任意点处压力分布的计算公式。它说明在相对平衡条件下，等角速度旋转容器内液体各点的压力随高度 z 的增大而减小；在同一高度上，由于离心惯性

力的作用，沿半径方向随 r 的增加，压力增大。

在生产实践中，可根据旋转容器中液面高度的变化，来测定容器的旋转角速度大小。由于液体的不可压缩性，旋转前后，容器内液体的体积应保持不变。由图 2-23 可见，H_2，H_1 和 H_0 之间有关系式

$$\pi R^2 H_1 = \pi R^2 H_2 - \frac{1}{2}\pi R^2 (H_2 - H_0)$$

化简后可得

$$H_2 + H_0 = 2H_1 \tag{2-86}$$

当 $r = R$，$z = H_2$ 时，$p = p_0$. 代入式（2-85），可得

$$\frac{R^2\omega^2}{2g} = H_2 - H_0 \tag{2-87}$$

由式（2-86）和式（2-87）消去 H_2，则得

$$\omega = \frac{2}{R}\sqrt{(H_1 - H_0)g} \tag{2-88}$$

在通常的情况下，圆筒半径 R 和未旋转前筒内液面高度 H_1 为已知量，由式（2-88）可见，旋转后的自由面中心处高度 H_0 和旋转角速度 ω 成一一对应关系。测得高度 H_0，即可用式（2-88）求得容器旋转角速度 ω 的大小。

§2-9 大气的静平衡和国际标准大气

在本章前几节中，研究对象大都是液体，且认为液体的重度（或密度）是常数。在本节中，将研究重力作用下气体的静平衡特点及压力分布等规律。

一般说来，由于气体的密度比较小，如果高度变化不大，可略去气体密度变化的影响。因此，如果在研究过程中高度变化不大，则前几节对静止液体的研究结果也可直接用于静止气体情况。

当研究过程中高度变化很大时，必须考虑气体密度变化的影

响。假设静止气体所受的体积力只包括重力，取直角坐标系 z 轴铅垂向上，则单位质量气体的体积力为

$$f_x = f_y = 0,\quad f_z = -g \tag{2-89}$$

代入式（2-23），可得

$$\mathrm{d}p = -\rho g \mathrm{d}z \tag{2-90}$$

一般说来，气体的密度是压力和温度的函数。因此，要积分式(2-90）来确定静止气体中的压力分布规律，必须给出补充条件。

下面以地球周围的大气层为例，说明静止空气内部压力分布的特点等。

大气层中，压力、密度和温度随高度变化的规律与地理位置、季节和气候等因素有关。对飞行器进行设计计算和实验研究时，如果各国都按当时当地的大气参数作为初始数据，那么各国所获得的实验数据和计算结果就无法进行比较和交流，也无法确切评定飞行器性能的优劣。为了解决这一矛盾，根据北纬平均纬度上多年气象观察的统计数据，国际上约定了一种统一的大气压力、密度和温度等参数随高度的变化关系，这种变化关系称为国际标准大气。于是，做计算时，都依此标准进行计算，做实验时，也都换算成标准条件下的数据。

国际标准大气取海平面为基准平面（$z=0$）。在海平基准平面上的大气物理量定为：温度$T_0 = 288^\circ K$（$t_0 = 15^\circ\mathrm{C}$)；压力$p_0 = 1.013\,2\times10^5$牛/米^2 = 760毫米汞柱；密度$\rho_0 = 1.225$公斤/米^3。动力粘性系数 $\mu_0 = 1.781\times10^{-5}$帕·秒等。

从基准平面到11 000米的高空是对流层。在对流层内，大气的密度和温度随高度有明显变化，温度随高度增大而下降，其变化关系可写为

$$T = T_0 - \alpha z \tag{2-91}$$

式中：T 表示距海平面 z 米处大气的绝对温度；α 为常数，其值为0.006 5开/米。

下面用式（2-90）确定对流层内大气的压力和密度随高度的

变化关系。

设大气是完全气体，按式（1-10）其状态方程为

$$p=\rho RT \tag{2-92}$$

式中，$R=286.85$焦耳/(公斤·开)，为大气的气体常数。将式（2-91)和式（2-92）代入式（2-90），对流层内静压力变化的微分关系式为

$$\mathrm{d}p=\frac{-pg}{R(T_0-\alpha z)}\mathrm{d}z \tag{2-93}$$

积分上式可得

$$\ln p=\frac{g}{R\alpha}\ln(T_0-\alpha z)+C \tag{2-94}$$

式中：C为积分常数。由海平面处边界条件，$z=0$时，$p=p_0$，则积分常数 $C=\ln p_0-\frac{g}{R\alpha}\ln T_0$。代入式（2-94），整理后，对流层中标准大气的压力分布计算公式为

$$\frac{p}{p_0}=\left(1-\frac{z\alpha}{T_0}\right)^{\frac{g}{R\alpha}} \tag{2-95}$$

将标准大气状态有关数据代入上式，可得

$$\frac{p}{p_0}=\left(1-\frac{z}{44\,330}\right)^{5.256} \tag{2-96}$$

相应的密度变化可由状态方程导出。因为

$$\frac{p}{p_0}=\frac{\rho RT}{\rho_0 RT_0}=\frac{\rho}{\rho_0}\left(1-\frac{\alpha z}{T_0}\right) \tag{2-97}$$

将上式代入式（2-95），对流层中标准大气的密度分布计算公式为

$$\frac{\rho}{\rho_0}=\left(1-\frac{\alpha z}{T_0}\right)^{\frac{g}{R\alpha}-1} \tag{2-98}$$

代入标准大气状态有关数据可得

$$\frac{\rho}{\rho_0}=\left(1-\frac{z}{44\,330}\right)^{4.256} \tag{2-99}$$

由式（2-91）、式（2-96）和式（2-99），求得在11 000米处的

压力、温度和密度分别为 $T_{11}=216.5°$开，$p_{11}=22\,630$ 帕，$\rho_{11}=0.364$公斤/米^3。

在 11 000 米到 21 000 米范围内，大气温度几乎不变，称为同温层。同温层内温度保持为 216.5 开，压力和密度关系为

$$p/p_{11}=\rho/\rho_{11} \tag{2-100}$$

将式（2-100）代入式（2-90），同温层内静压力变化的微分关系式为

$$\mathrm{d}p=-\frac{p\rho_{11}}{p_{11}}g\mathrm{d}z \tag{2-101}$$

积分上式，应用边界条件 $z=z_{11}$ 时，$p=p_{11}$ 确定积分常数，可得

$$z-z_{11}=\frac{p_{11}}{\rho_{11}g}\ln\frac{p_{11}}{p} \tag{2-102}$$

代入标准大气有关数据后，同温层中标准大气的压力分布计算公式为

$$\frac{p}{p_{11}}=\mathrm{e}^{\frac{11\,000-z}{6\,340}} \tag{2-103}$$

将式（2-103）代入式（2-100），同温层中标准大气的密度分布计算公式为

$$\frac{\rho}{\rho_{11}}=\mathrm{e}^{\frac{11\,000-z}{6\,340}} \tag{2-104}$$

当 $z>21\,000$ 米时，对大气温度 T 随 z 的变化关系的规定，可参看图 2-25。用相类似的方法也可以得到各高度上的静止国际标准大气状态参数。一般可查阅国标标准大气表。

最后应再强调一下，国际标准大气是飞行器等设计试验部门在设计、试验工作中使用的大气，它并不适合于使用飞行器的部门（如民航部门）使用，后者必须随时注意飞行地区和航线上的天气变化，采取相应措施来确保航行的安全。

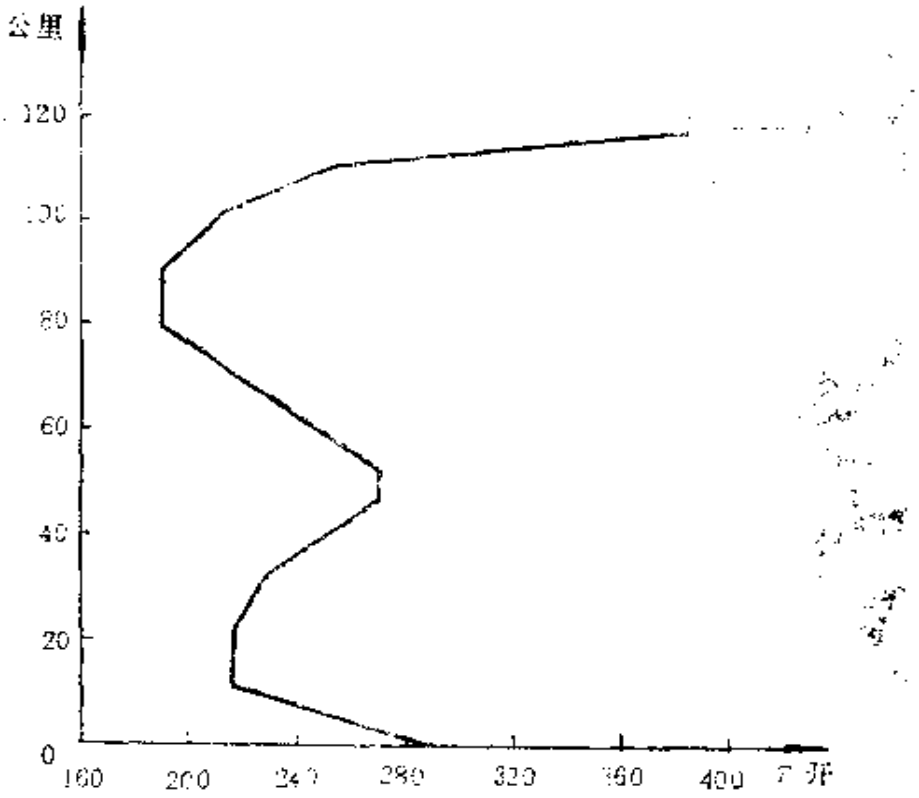


图 2-25

习　　题

1．已知大气压力为 98.1 千帕，求绝对压力为 117.7 千帕时的相对压力和绝对压力为 68.5 千帕时的真空度，并用水柱高度表示。

2．气压计读数为 755 毫米汞柱，求水面以下 7.6 米深处的相对压力和绝对压力为多大？

3．一封闭水箱，在水深为 1.5 米处接一压力表，测得压力表读数为 4.9 千帕，求水箱水面上的绝对压力和相对压力。

4．画出图2-26所示各曲面的压力体，并说明它是虚压力体还是实压力体。

5．用 U 形管压力计测定管道中 A 点压强，若读数 $h_1=300$ 毫米，$h_2=600$毫米，求 p_A 值。

（1）γ_1为汞，γ_2为油时；

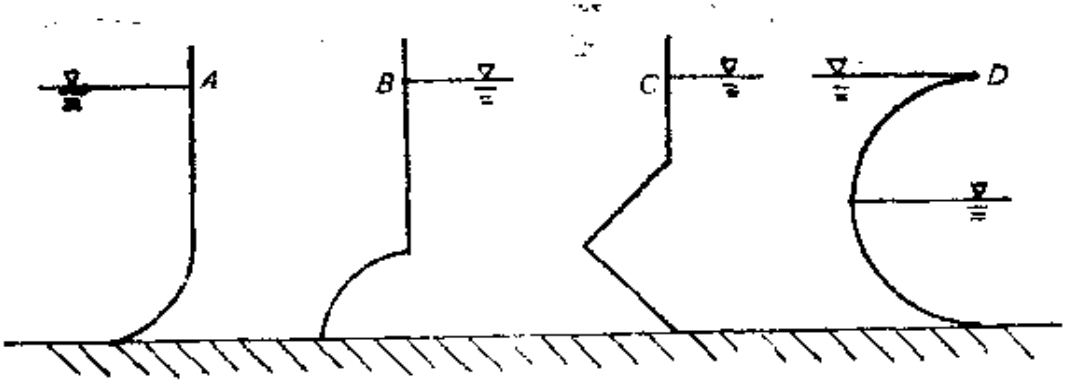


图 2-26

（2）γ_1为水，γ_2为油时；

（3）γ_1为水，γ_2为空气时。

这里设油的重度为 8.4 千牛/米^3

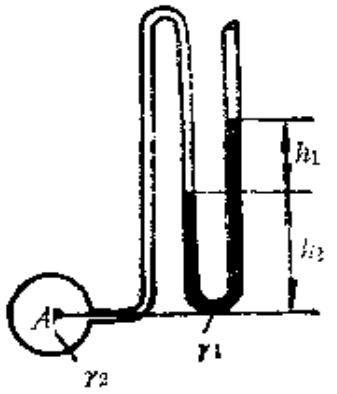


图 2-27

6. 若测压管上端封闭，并为完全真空，测得$z_1 = 50$ 毫米，参看图2-28。求封闭容器液面上绝对压力及z_2。

7. 一矩形底孔平面闸门，高 $h = 3$米，宽 $b = 2$米，上游水深 $h_1 = 6$米，下游水深 $h_2 = 4$米，参看图2-29。求水对闸门的合力大小及作用点位置。

8. 平面闸门 AB 倾斜45°置于静水中，左侧水深$h_1 = 3$米，右侧水深$h_2 = 2$米，参看图2-30。求水对闸门的作用力大小及作用点位置。

9. 一圆柱形闸门，直径 $D = 4$米，长 10 米，上游水深 $H_1 = 4$

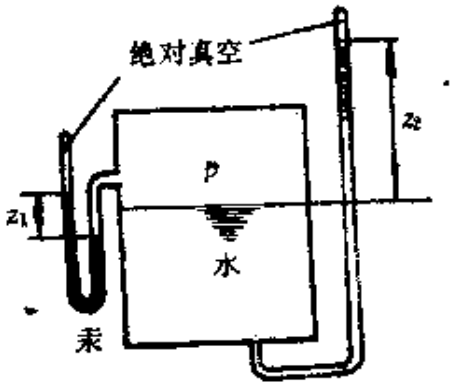


图 2-28

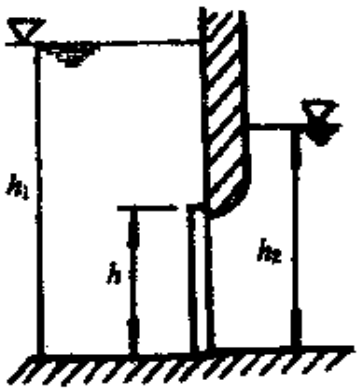


图 2-29

米，下游水深$H_2=2$米，参看图2-31。求作用于该闸门上的水的合力。

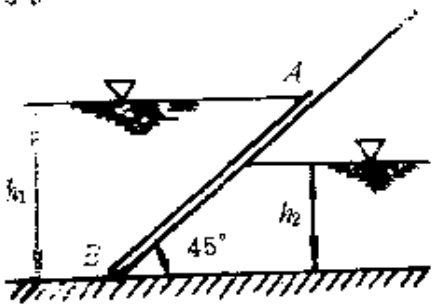


图 2-30

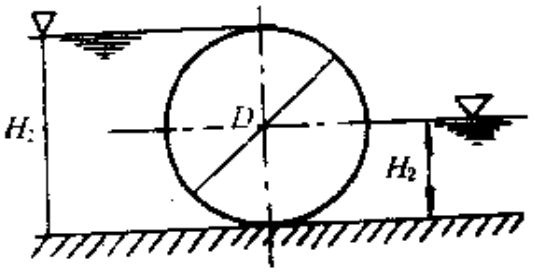


图 2-31

10. 盛有水的半径为R的圆筒形容器以等角速度ω绕垂直轴旋转，试求ω为多大时可露出筒底？设没有开始旋转时水面高度为h.

11. 直径$D=600$毫米，高$H=500$毫米的圆柱形容器盛水到高度$h=400$毫米处，容器剩余的容积装重度为7.8千牛/米^{3}的油。用一中心有孔口的顶盖将容器盖住，且使容器绕其竖轴旋转。问转速ω多大时，油水分界面开始接触底板？此时底板和顶盖上的最大压力和最小压力各多大？当$h=250$毫米和$h=100$毫米时，ω和压力各为多少？参看图2-32。

12. 有半径$R=100$毫米的钢球，堵塞着垂直壁面上直径$d=150$毫米的圆孔。参看图2-33。已知钢重度为78.5千牛/米^3，油

的重度为 8 千牛/米^3，试求恰好使钢球处于平衡状态时容器内油面高度H。

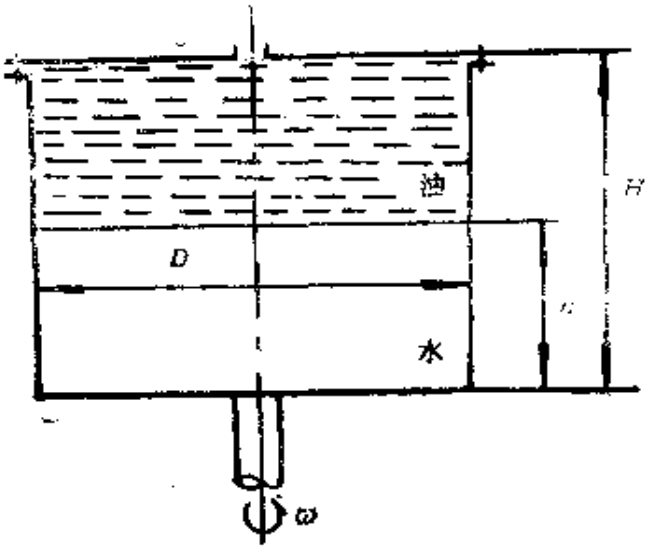


图 2-32

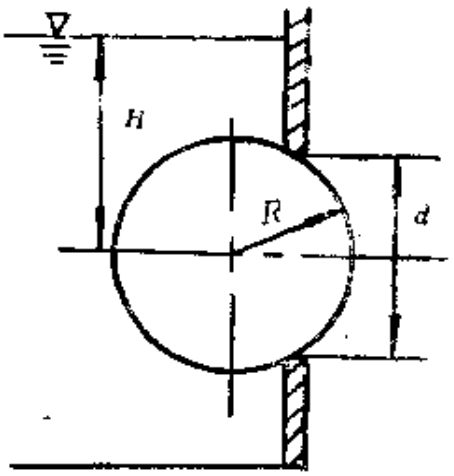


图 2-33

13. 设有一物体平衡于两种液体的分界面处。液体的密度分别为 ρ_1 和 ρ_2（设 $\rho_1>\rho_2$），物体在 ρ_1 液体中的体积为 $\mathscr{V}_1$，在 ρ_2 液体中的体积为 $\mathscr{V}_2$，求物体所受的液体压力的合力。假设物体的形状为母线垂直于分界面的柱体。

14. 已知海平面上海水重度为 $\gamma_0=10$ 千牛/米^3，深度 h 处的海水重度 $\gamma=\gamma_0+0.025\sqrt{h}$，$h$ 以米计。求 $h=100$ 米处的海水静压力。

15. 飞机在同温大气层中飞行，已知地面上的大气压力为 100千帕，重度为11.8牛/米^3，若飞机上气压计读数为600毫米汞柱，求飞机所在高度。

16. 设大气沿高度的温度分布符合绝热条件，当地面温度为 288开时，求 1 000 米处的温度。

第三章　流体力学基础

研究流体的运动，首先关心的是如何来描述它以及它必须遵循的是哪些基本物理定律。前者，一般属于流体运动学问题，主要概念有速度、加速度、流线、流管和流量以及它们之间的内在关系等。后者，一般属于流体动力学问题，它将讨论流体之所以产生运动的原因：流体受到的作用力或与外界的能量交换所产生的作用、以及流体动力学的基本方程组等。

§3-1　流　　场

一、描述流动的方法

充满运动流体的空间称为流场。

描述流动有两种方法。第一种方法称为拉格朗日法，它通过追踪流场中每个流体微团的轨迹，来描述流体的运动特性。参看图3-1，为区别起见，需要先给每个流体微团一个标号；通常取某个特定瞬间 $t=t_0$、每个微团的空间坐标数值作标号。比如，微团 P_1 的标号为 (x_{01}, y_{01}, z_{01})，依次类推。如果知道每个微团 P_l $(l=1,2,\cdots)$ 的空间坐标 (x_l, y_l, z_l) 随时间 t 变量的变化规律（即轨迹），通过对时

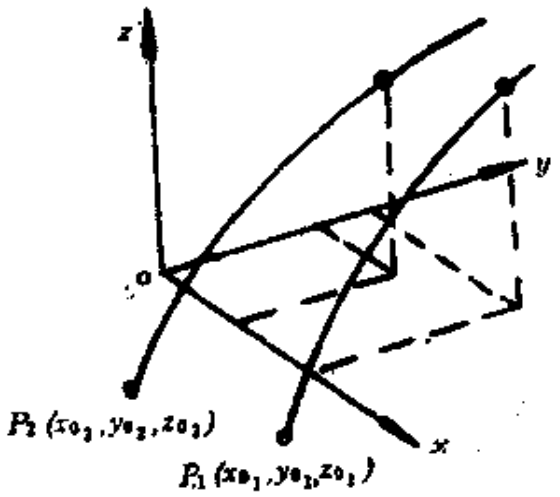


图 3-1

间 t 求导，也就得到了每个微团在不同瞬间 t 的速度 $\vec{V}_t$ 和加速度 $\vec{a}_t$ 等。用数学式子来表述，则流体微团的轨迹参数方程为

$$\begin{aligned} x &= x(x_0,\ y_0,\ z_0,\ t) \\ y &= y(x_0,\ y_0,\ z_0,\ t) \\ z &= z(x_0,\ y_0,\ z_0,\ t) \end{aligned} \tag{3-1}$$

即流体微团的空间坐标 x，y，z 将是微团标号 x_0，y_0，z_0 和时间 t 的函数（注：代表任一选定的流体微团时，都省略了脚注 t，下同）。有了式（3-1）后，对任一选定的流体微团，其速度和加速度则有

$$u = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_0,\quad v = \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_0,\quad w = \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_0 \tag{3-2}$$

和

$$a_x = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0,\quad a_y = \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_0,\quad a_z = \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_0 \tag{3-3}$$

式中，u，v，w 是流体微团速度向量 $\vec{V}$ 在图示笛卡尔坐标系 x，y，z 方向的速度分量；a_x，a_y，a_z 是流体微团加速度向量 $\vec{a}$ 的三个分量。偏导数的脚注 0 表示微团标号始终保持不变。这表明由式（3-2），（3-3）求得的 $\vec{V}$ 和 $\vec{a}$ 也是微团标号 x_0，y_0，z_0 和时向 t 的函数。这种描述流动的方法沿用了描述刚体运动所用的方法，比较直观和易于接受。

第二种方法称为欧拉方法，它通过观测流场中每个固定空间点处，在同一瞬间 t 流过的流体微团的速度，来描述流体的运动特性。参看图 3-2，流过各个固定空间点 A_n（x_n，y_n，z_n）处的流体微团的速度向量为 $\vec{V}_n = u_n\vec{i} + v_n\vec{j} + w_n\vec{k}(n = 1, 2, \cdots\cdots)$。如果知道在同一瞬间 t 流过每个固定空间点处流体微团的速度向量 $\vec{V}_n$，则整个流场的运动也就被确定了。注意，在不同瞬间 t 流过同一空间点处的、当然不是同一个流体微团。用数学式子来表述即为

$$\vec{V} = \vec{V}(x,\ y,\ z,\ t) \tag{3-4}$$

或

$$\begin{aligned} u &= u(x,\ y,\ z,\ t) \\ v &= v(x,\ y,\ z,\ t) \\ w &= w(x,\ y,\ z,\ t) \end{aligned} \tag{3-5}$$

式中，u，v，w 是任一固定空间点处的速度向量$\vec{V}$的三个分量，并且都省略了脚注 n，下同。式（3-4）或式（3-5）表明，每个固定空间点处的速度向量$\vec{V}$是空间点位置 x，y，z 和时间 t 的函数。有了式(3-4)或(3-5)，每个固定空间点处的加速度也可以确定，详情将在下节中介绍。

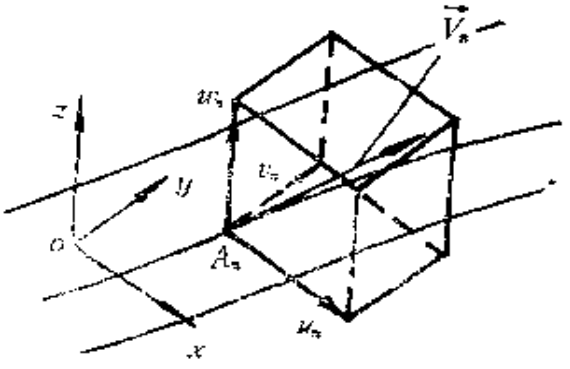


图 3-2

从上述可知，两种描述流动方法的区别在于：拉格朗日法着眼于每个流体微团的详尽运动历程（轨迹），而欧拉法着眼于流过每个固定空间点处流体微团的速度特性。从全局上看，两种方法截然不同，见式（3-1）与式（3-5）。然而，从局部来看，按欧拉法讨论任一固定空间点处、某个瞬间的速度时，正如一再强调的是讨论某个流体微团途经该点处邻域、其位移对时间的变化率，故两种方法又存在着瞬间的统一。

对于大多数流体力学问题，欧拉描述流动或流场的方法，比较实用、方便，可以广泛采用场论等数学工具来研究流动。本书亦将采用欧拉法来描述流场，分析流体的运动。

二、流场的几何图象

描绘流场的几何图象有用等时线、流线，迹线和“染色”线等分别勾画出来的图形。它们将为流动问题的解决提供极有用的信息。

等时线是在某个给定瞬间 t_0，对若干个相邻流体微团着色，

从而在流场中所形成的线。通过观察该等时线在以后各个瞬间 t（$t=t_0+\Delta t$，$t_0+2\Delta t$，……）发生的变化，将提供上述流体微团流动情况的有用信息。例如，在§1-1讨论流体微团受剪切应力作用时，等时线提供了相邻流体微团在不同瞬间 t 的流动情况，十分直观、有用。参看图1-1。

流线是指在给定瞬间 t，把流场中一系列空间点连接起来的一条假想线，线上各点的切线方向都和该点处的速度方向相重合。见图3-3，因此，流线表示了在给定瞬间沿流线各点处不同流体微团的运动方向。如沿流线某点处的位移向量为 $\vec{ds}=dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}$，因按流线的定义有 $\vec{V}//\vec{ds}$，故

$$\vec{V}\times\vec{ds}=0 \tag{3-6}$$

或（因 $\vec{V}=u\vec{i}+v\vec{j}+w\vec{k}$）

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w} \tag{3-7}$$

式（3-7）被称为流线的微分方程式。显然，流线勾画出来的图形是与欧拉描述流动方法相连系的几何图象。

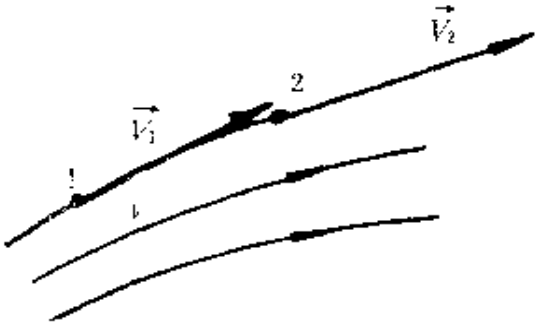


图 3-3

迹线是同一个流体微团在流场中运动时所勾画出来的曲线。它给出了同一个流体微团在不同瞬间的速度方向和位置。迹线的微分方程参看式（3-2）。它勾画出来的图形是与拉格朗日描述流动方法相连系的几何图象。

还有一种线称做“染色”线（也有称为痕线的）。在流场中选择某一个固定空间点，然后不时地给流经该点的流体微团着色（比如，在水流中给流经选定固定点的水微团着上某种色液；在气流中给流经的气体微团染以白烟等），经历一段时间之后，连接流经同一固定空间点、被着色的各个流体微团所形成的线即为

"染色"线。

应当指出，按欧拉方法描述流动时，倘若流场中任一固定空间点处的速度向量（严格讲，还应包括描述流动的其他参数如压力等）不随时间变量 t 变化，则该流动称为定常流。反之，则称为非定常流。对于定常流，有

$$\vec{V}=\vec{V}(x,\ y,\ z) \tag{3-8}$$

或

$$\begin{aligned} u&=u(x,\ y,\ z)\\ v&=v(x,\ y,\ z)\\ w&=w(x,\ y,\ z) \end{aligned} \tag{3-9}$$

而前述的式（3-4），（3-5）代表的就是非定常流了。图3-4是用来说明非定常流和定常流的一个简单例子。贮水池通过管道向外排水，水面水位不断降低的情况是典型的非定常流，见图3-4(a)，因为考察选定的某一固定空间点处的流速，将随时间 t 的变化而改变；但如果设法在排水过程中始终保持水面水位不变，见图3-4(b)，则流速将只随选定的固定空间点位置的不同而变化，流动就变成定常流了。显然，非定常流要比定常流情况复杂。

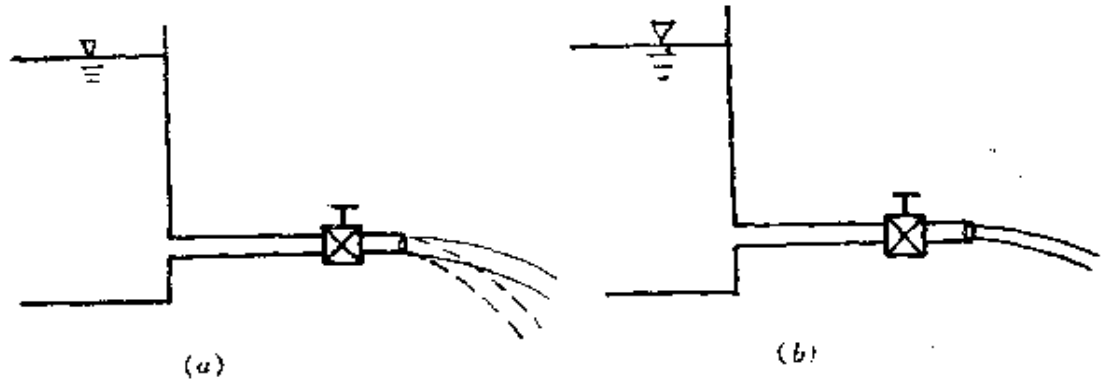


图 3-4

从非定常流的几何图象上看，不仅流线将随时间 t 的变化而改变，而且流线和迹线也不会重合。现用图3-5来予以说明。用

下述方法作通过 A_1 点的流线：在同一瞬间 $t=t_1$ 时沿 A_1 点处速度向量方向、量取距离为 $ds_1=V_1dt$ 的另一点 A_2，再沿 A_2 点处速度方向、量取距离为 $ds_2=V_2dt$ 的另一点 A_3，依次类推可得到一条折线 $A_1A_2A_3A_4\cdots\cdots$。令 $dt\to0$，则得过 A_1 点在 $t=t_1$ 瞬间的流线。现作流过 A_1 点的迹线。在 $t=t_1$ 瞬间，从 A_1 点离开应是 $t=t_1-dt$ 瞬间占据 A_1 点的流体微团，因是非定常流，$\vec{V}_1(t_1-dt)\neq\vec{V}_1(t_1)$，$dt$ 时间内该流体微团沿 $\vec{V}_1(t_1-dt)$ 流到 A_2' 点，距 A_1 点的距离为 $ds_1'=V_1'(t_1-dt)dt$，该流体微团离开 A_2' 点的速度应是 $\vec{V}_2'(t_1-2dt)$，dt 时间内流到 A_3' 点，距 A_2' 点的距离为 $ds_2'=V_2'(t_1-2dt)$，依次类推可得到一条折线 $A_1A_2'A_3'A_4'\cdots$。令 $dt\to0$，则得过 A_1 点的迹线。显然过同一点处的流线和迹线不会重合。

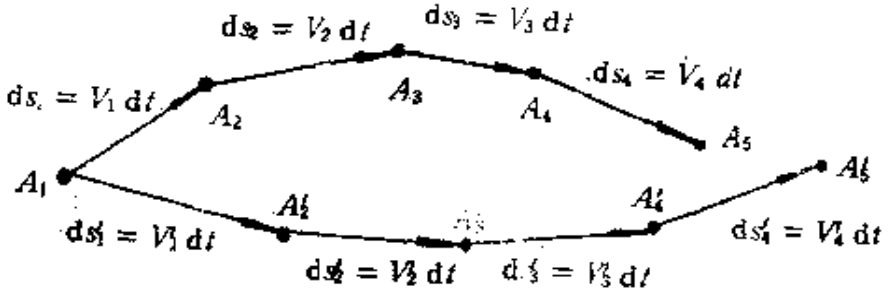


图 3-5

如是定常流，因流场中各固定空间点处的速度向量不随时间变化，结果不仅流线不再随时间而变化，而且过同一点处的流线、迹线乃至“染色”线都将重合在一起。因此，可以方便地利用“染色”线将流体流过物体的流线图形等显示出来，供分析使用。它将为流动问题的解决提供极有价值的信息。图 3-6 是在烟风洞中利用白烟显示出来的、空气流过翼型时的流线图或称翼型的流谱。



图 3-6

例 3-1 已知：有一速度场 $\vec{V}=\alpha x\vec{i}-\alpha y\vec{j}$，式中，$\alpha=0.1$ 秒$^{-1}$。求：

（1）通过空间点 $A_0(x_0,\ y_0,\ z_0)=A_0(2,\ 8,\ 0)$ 的流线方

程式；

（2）在 A_0 点处的速度大小；

（3）在 $t=0$ 时，位于 A_0 点的微团20秒钟后的位置和速度大小；

（4）在 $t=0$ 时，通过 A_0 点微团的迹线方程式。

解 （1）按流线的微分方程式（3-7），有

$$\frac{\mathrm{d}x}{ax}=-\frac{\mathrm{d}y}{-ay}$$

分离变量并积分可得

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\int\frac{\mathrm{d}x}{x},\quad \ln y=-\ln x+C$$

或

$$xy=C$$

流线通过 A_0 点时，上式中的待定积分常数 $C=16$，所以过 A_0 点的流线方程式为

$$xy=x_0y_0=16$$

（2）由 $A_0(x_0,\ y_0,\ z_0)=A_0(2,\ 8,\ 0)$ 知，在 A_0 点处有

$$\vec{V}=ax\vec{i}-ay\vec{j}=0.1\times(2\vec{i}-8\vec{j})$$
$$=0.2\vec{i}-0.8\vec{j}$$

故

$$|\vec{V}|=V=\sqrt{0.2^2+0.8^2}=0.825\quad(\text{米/秒})$$

（3）按式（3-2）有

$$u=\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_0=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=ax,\quad v=\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_0=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-ay$$

分离变量并积分可得

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int_0^t a\mathrm{d}t,\qquad x=x_0e^{at}$$

$$\int_{y_0}^{y}\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\int_0^t a\mathrm{d}t,\qquad y=y_0-e^{-at}$$

上式即为迹线的参数方程式。现 $t=20$ 秒，代入得

$$x = 2e^{0.1\times 20} = 14.8(\text{米}),\quad y = 8e^{-0.1\times 20} = 1.08\ (\text{米})$$

即 $t = 20$ 秒后，微团的位置将在 $(x, y, 0) = (14.8, 1.08, 0)$ 处。这时，微团的速度将等于

$$\vec{V} = a(x\vec{i} - y\vec{j}) = 1.48\vec{i} - 0.108\vec{j}$$

故

$$|\vec{V}| = V = \sqrt{1.48^2 + 0.108^2} = 1.484\ (\text{米/秒})$$

（4）利用已求得的迹线参数方程，消去 t，因

$$e^{at} = \frac{x}{x_0} = \frac{y_0}{y}$$

得

$$xy = x_0y_0 = 16$$

因是定常流，故过 A_0 点的迹线方程和流线方程相同。

例 3-2 已知：有一速度场 $\vec{V} = (x+t)\vec{i} + (-y+t)\vec{j}$，式中，$t$ 为时间变量。求：$t = 0$ 时过 $A_0(-1, -1, 0)$ 点处的流线和迹线方程式。

解 按式（3-7），有

$$\frac{dx}{x+t} = \frac{dy}{-y+t}$$

积分后得

$$(x+t)(-y+t) = C$$

因 $t = 0$，$x = -1$，$y = -1$，故积分常数 $C = -1$。而 $t = 0$ 时过 A 点的流线方程为

$$xy = x_0y_0 = 1$$

再求迹线方程。按式（3-2），有

$$x + t = \frac{dx}{dt},\qquad -y + t = \frac{dy}{dt}$$

这是两个非齐次常系数的常微分方程，它们的解是

$$x = C_1e^t - t - 1,\qquad y = C_2e^t + t - 1$$

因 $t = 0$，$x = -1$，$y = -1$，代入得 $C_1 = C_2 = 0$。于是过 A_0 点流体微团迹线的参数方程为

$$x = -t - 1, \qquad y = t - 1$$

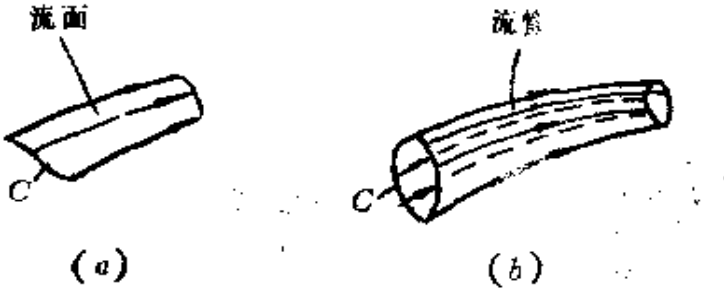
或者消去 t，得过 A 点的迹线方程为

$$x + y = -2$$

可见，在非定常中，过同一点处的流线和迹线并不相同。

三、流面、流管和流量

在流场中取一条不封闭的、不是流线的曲线 C，在同一瞬间通过曲线 C 上的所有点作流线，则由这些流线形成的曲面，称为流面。见图 3-7(a)。显然，在该瞬间不会有流体穿越流面。



(a)　　(b)

图 3-7

若曲线 C 是一条封闭的，不在某一流面上的曲线，在同一瞬间通过该曲线上的所有点作流线，则这些流线将形成管状的流面，而这个管状流面就构成了称之为流管的管壁。在该瞬间，除了在流管内的横截面上有流体流过外，流体不会穿越流管壁。见图3-7(b)。即流管内的流体不会穿过流管壁流出去，管外的流体也不会穿过流管壁流进来。

现计算流过某一流管给定截面上的流体质量。参看 图 3-8。如给定截面的面积为 A，在面元dA上，面元的单位法向量为 $\vec{n}$，速度向量为 $\vec{V}$，则单位时间流过面元 dA 的流体质量称为质量流量 dm 将等于

$$\mathrm{d}m = \rho \vec{V} \cdot \vec{n} \mathrm{d}A$$

而单位时间流过面元 dA 的流体体积称为体积流量 dQ 将等于

$$\mathrm{d}Q = \vec{V} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}A$$

可见，流过给定截面积 A 的质量流量和体积流量将分别是

$$m = \int_A \rho \vec{V} \cdot \vec{n} \mathrm{d}A \tag{3-10}$$

和

$$Q = \int_A \vec{V} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}A$$

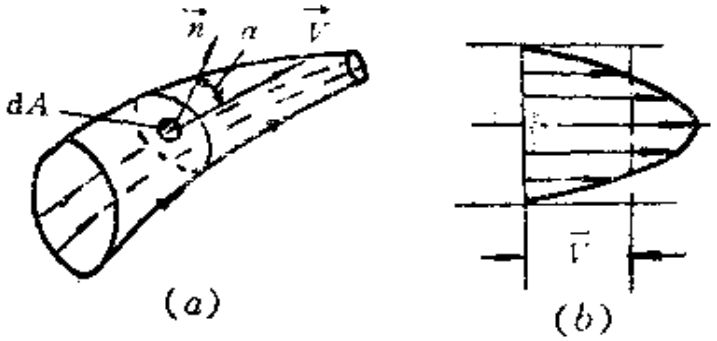


图 3-8

假如在给定截面上，$\vec{V} /\!/ \vec{n}$，见图即 $\alpha = 0$，则这个截面称为流管的横截面（也有称为通流或过流截面的）。流过流管横截面积 A 的质量流量和体积流量，因 $\vec{V} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}A = V \cos\alpha \mathrm{d}A = V \mathrm{d}A$（注：这里 $V = |\vec{V}|$，$\cos\alpha = 1$），将分别是

$$m = \int_A \rho V \mathrm{d}A \tag{3-12}$$

和

$$Q = \int_A V \mathrm{d}A \tag{3-13}$$

在给定横截面 A 上，流速 V 一般是非均匀分布的，见图3-8 (b)。但可以按下式定义一个平均流速 $\overline{V}$，即

$$\overline{V} = \frac{1}{A} \int_A V \mathrm{d}A \tag{3-14}$$

参看式（3-13），故有

$$Q = A\overline{V} \tag{3-15}$$

例 3-3　已知：流过一圆形流管横截面上的速度分布为

$$V = V_m\left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]$$

式中，r_0是流管的半径，V_m是管轴线上的速度，参看图3-9。求：流过该横截面上的体积流量和平均流速大小。

解 参看图3-9，取环形面元dA，其大小为$dA = 2\pi r dr$，按式（3-13）有

$$Q = \int_A V dA = \int_0^{r_0} V(2\pi r dr) = 2\pi V_m \int_0^{r_0} r\left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right] dr$$

$$= 2\pi V_m \left(\frac{r_0^2}{2} - \frac{r_0^2}{4}\right) = \frac{\pi r_0^2 V_m}{2}$$

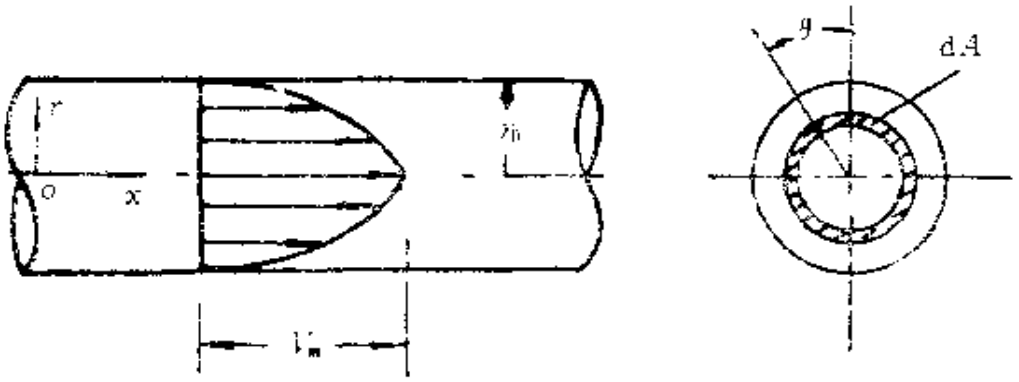


图 3-9

按式（3-15），有

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{\pi r_0^2 V_m}{2\pi r_0^2} = \frac{V_m}{2}$$

四、相对运动

分析某些流动问题，特别是物体在静止流体中作等速直线运动时，通过变换描述运动的参考坐标系可以得到化简。比如，就船只在静止湖面上作等速直线航行的情况来看，船只航行速度为$\vec{U}$，从固连于地面的静止坐标系来看，船只引起的水运动（通常说成是运动物体对静止流体产生的扰动运动）显然是非定常的；

因为湖面上各固定点处水微团的运动状态与船只的相对位置有关。远离船只的湖水，几乎没有运动；但在船只的邻近地区以及它经过的地区，湖水确实都因船只的扰动而发生了运动。但是，有一点值得注意：在不同的瞬间，只要各固定点与船只的相对位置相同，参看图3-10(*a*)中的 p和 p' 点处，船只引起水微团产生的速度（或称绝对速度）必然相同，即有

$$\vec{V}_{a,p'} = \vec{V}_{a,p} \tag{3-16}$$

现在，变换描述湖水运动的参考坐标系，把坐标系固连在作等速直线运动的船只上（即观察者站在船只上来观察运动）。这时相当于船只不动，而湖水产生相对运动。按理论力学知，在各固定空间点处湖水微团的绝对速度将等于相对速度和牵连速度的向量和，即

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{U} \tag{3-17}$$

式中，$\vec{V}_a$ 为绝对速度，$\vec{V}_r$ 为相对速度，$\vec{U}$ 为牵连速度。

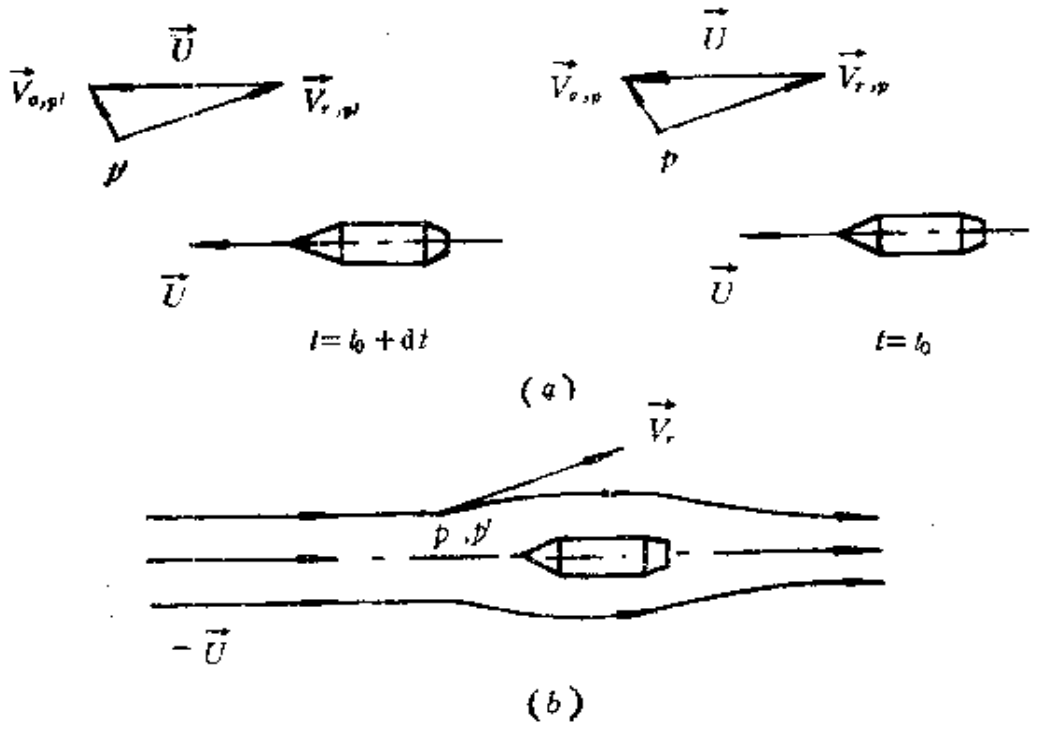


图 3-10

湖水产生的相对运动是：在左远前方，原来湖水的绝对速度为零，故相对速度应为 $-\vec{U}$，在图 3-10(a) 所示 p，p' 点上，绝对速度相同[按式 (3-16)]，故两点处的相对速度相等有

$$\vec{V}_{r,p'}=\vec{V}_{a,p'}-\vec{U}=\vec{V}_{a,p}-\vec{U}=\vec{V}_{r,p} \qquad (3\text{-}18)$$

换句话讲，从相对运动来看，就变成了从左远前方以 $-\vec{U}$ 速度的来流，流过固定不动船只的定常流了。参看图 3-10(b)，因相对运动的速度场满足式 (3-8) 为定常流场。显然，这将化简问题。

所以，当物体在静止流体中作等速直线运动时，从相对运动角度来进行分析和研究的方法，在实际中得到广泛应用。如用风洞，水洞来研究飞机、船只和各种物体的运动就是例证。

例 3-4　已知：在静止湖面上，有一艘渡船以 6.1米/秒的速度航行。船头附近A点处，湖水相对于渡船的速度测得为6.4米/秒、方向如图 3-11 所示。求：A 点处湖水的绝对速度。

解　设 $\vec{V}_B$ 为渡船的速度，$\vec{V}_{r,A}$为A点处湖水的相对速度，$\vec{V}_A$ 为 A 点处湖水的绝对速度。按式 ((3-17) 有

$$\vec{V}_A=\vec{V}_{r,A}+\vec{V}_B$$

在图 3-11 上已画出 A 点处的速度三角形。按图示静止坐标系，设 u，v 为沿x，y 方向的速度分量，则有

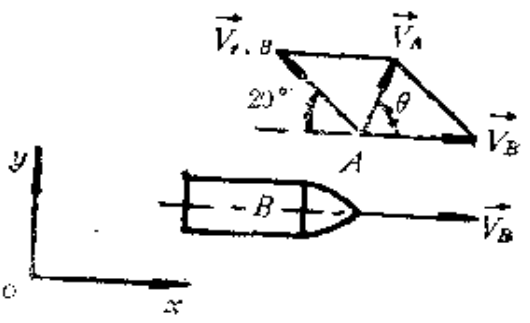


图 3-11

$$u_A=-u_{r,A}+u_B=-6.4\times\cos 20^\circ+6.1=0.0823 \text{（米/秒）}$$

$$v_A=v_{r,A}+v_B=6.4\times\sin 20^\circ+0.0=2.19 \text{（米/秒）}$$

因此，A点处湖水的绝对速度等于

$$V_A=\sqrt{u_A^2+v_A^2}=\sqrt{0.0823^2+2.19^2}=2.192 \text{（米/秒）}$$

V_A 与 x 轴的夹角 θ 等于

$$\theta=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{v_A}{u_A}\right)=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{2.19}{0.0823}\right)=87.85^\circ$$

§3-2 流场模型化和加速度表达式

一、一维流场、二维流场和三维流场

一般来讲，几乎所有的流动都是三维流或称三维流场，即流体的流动参数（如速度，压力，密度乃至温度等）沿坐标系的三个方向都有变化。比如在笛卡尔坐标系中，速度按式（3-4）变化，就是三维流场。流体在远前方以来流速度$\vec{U}$流过机翼的情况，是一个典型的例子。见图3-12。

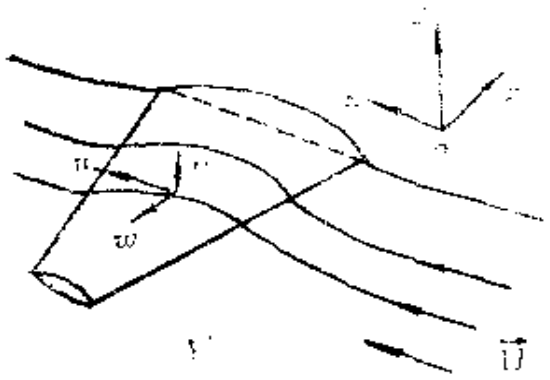


图 3-12

在二维流场中，流动参数仅沿坐标系的二个方向有变化。比如在笛卡尔坐标系中，流动参数仅是x和y坐标的函数；在z坐标方向上没有变化。换句话讲，在同一瞬间，在垂直于z方向的所有平面上，具有相同的流谱。粘性流体流过如图3-13所示平板的情况是一个二维流场的典型例子。

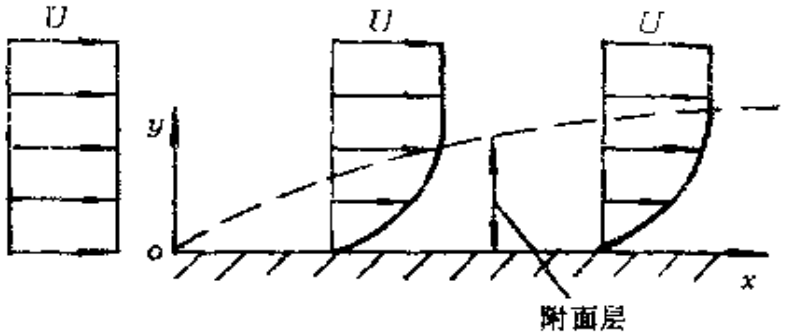


图 3-13

远前方来流速度为$\vec{U}$。流体因粘性的作用在板面上完全滞止、流速等于零（满足无滑移条件）；然后，流速由零值迅速增

加到来流速度；沿 x 方向看，流速受到粘性滞止影响很强烈的区域，随 x 的增大而扩大，已在图上用虚线标出（注，应当说明，这个区域紧贴板面十分狭窄，但为了能在图上表示出来，在 y 方向的尺寸是过分夸大了的）。这个狭窄紧贴板面的流动区域称做平板的附面层或边界层流动区。显然，在附面层流动区中，流动是二维的。它的速度场满足：

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y, t) \tag{3-19}$$

或（因 $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j}$）

$$u = u(x, y, t) \tag{3-20}$$

$$v = v(x, y, t)$$

对于二维定常流，则式（3-19）、（3-20）变为

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y) \tag{3-21}$$

和

$$u = u(x, y) \tag{3-22}$$

$$v = v(x, y)$$

河水流过等横截面、坝宽为无限大的水坝也是二维流场的例子。参看图3-14。实际上坝宽长度是有限的，接近水坝的两端，坝端的三维流动影响加强，必须考虑修正问题。然而在其他大部分地区，流动可按二维流来处理。



图 3-14

流体在圆管中的流动，参看图 3-15 和前图3-9，都属于轴对称流动。采用柱坐标 x，r，θ 来描述，流动参数仅仅是 x 和 r 的函数，而与 θ 无关。严格讲不应称做二维流场。为简单起见，本书也广义称为二维流。从图3-9上看，尽管速度仅仅是 r 的函数，

但以后将知道流体的压力将是 x 的函数（比如参看第五章），所以仍属二维流。

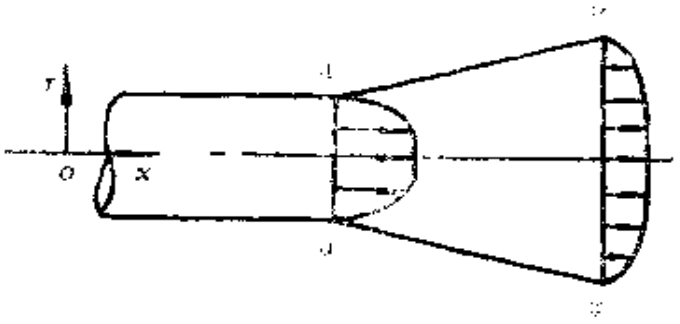


图 3-15

所谓一维流是指所有流动参数仅是一个空间坐标变量的函数的流动。在管流中，通常取沿管道中心流线（并不要求一定是直线）的位移作这个空间坐标，亦称流线或自然坐标。沿中心流线，流速，压力等流动参数都可以发生变化；但不考虑在各个横截面上流动参数的变化。这就是一维流模型。比如图3-15所示二维流的一维流模型，可以参看图3-16所示情形，即在每个横截面上对原来分布不均匀的流动参数取相应的平均值来替代。这样，沿管道中心流线的速度、压力等流动参数，按一维流定义就有

$$V = V(s,\ t) \tag{3-23a}$$

$$p = p(s,\ t) \tag{3-23b}$$

对于一维定常流，有

$$V = V(s) \tag{3-24a}$$

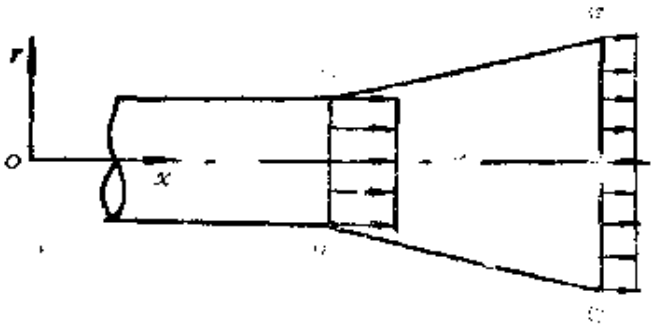


图 3-16

$$p = p(s) \tag{3-24b}$$

式中，s 是沿管道中心流线的流线坐标，p 是流体的压力。当管道轴线为直线时，$s = x$.

从以上叙述可知，一维流、二维流是三维流动的简化模型。使用得好不仅化简了问题，而且还可以获得有使用价值的结果，故非常有用。

二、加速度表达式

在流场中，加速度的表达式与所选坐标系有关。这里先推导在流线坐标系中的加速度表达式。参看图3-17，沿流线切线方向的坐标记为 s（称为流向坐标），流线的法向坐标记为 n，其正方向按图所示。尽管沿流线的法向速度分量始终等于零，但当流线弯曲时，法向速度分量对时间 t 的导数并不等于零（下详），所以先暂时将沿流线的速度向量 $\vec{V}$ 写成下列形式：

$$\vec{V} = v_s\vec{i}_s + v_n\vec{i}_n \tag{3-25}$$

而

$$\begin{aligned} v_s &= v_s(s,\ n,\ t) \\ v_n &= v_n(s,\ n,\ t) \end{aligned} \tag{3-26}$$

式中，v_s，v_n 分别为沿流向和法向的速度，另还有

$$v_s = |\vec{V}| = v, \qquad v_n = 0 \tag{3-27}$$

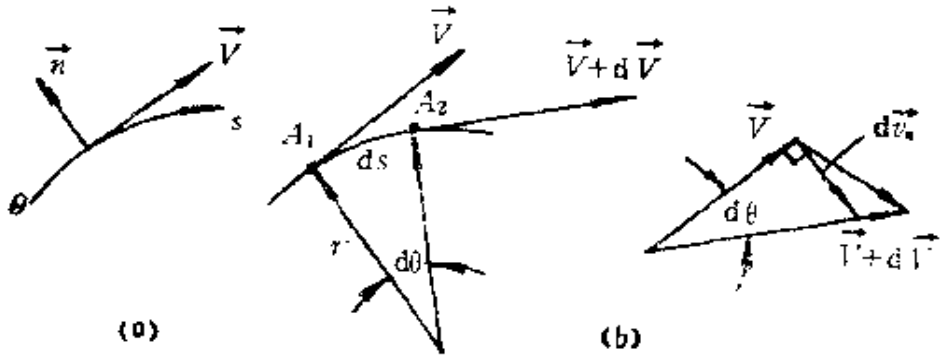


图 3-17

参看图3-17(*b*)，在流线上 A_1 点处的流体微团，在时间 t 瞬间的加速度等于什么？这就需要先分析一下该微团在dt时间内，在 A_1 点邻域的运动。dt时间内，微团沿流线由 A_1 点移到 A_2 点，弧长变化ds，相应的速度变化按式（3-26）有

$$\begin{aligned} \mathrm{d}v_s &= \frac{\partial v_s}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial v_s}{\partial s}\mathrm{d}s + \frac{\partial v_s}{\partial n}\mathrm{d}n \\ \mathrm{d}v_n &= \frac{\partial v_n}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial v_n}{\partial s}\mathrm{d}s + \frac{\partial v_n}{\partial n}\mathrm{d}n \end{aligned} \tag{3-28}$$

因为此时是有意识追踪A_1点处流体微团的运动，则坐标增量ds，dn和时间增量dt之间并不是独立的，而有

$$v_s = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}, \qquad v_n = \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} \tag{3-29}$$

和

$$a_s = \frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t}, \qquad a_n = \frac{\mathrm{d}v_n}{\mathrm{d}t} \tag{3-30}$$

式中，a_s，a_n 分别为流体微团沿流向和法向的加速度。

利用式（3-28）、（3-29）、（3-30），并令dt→0时可得

$$\begin{aligned} a_s &= \frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial v_s}{\partial t} + v_s\frac{\partial v_s}{\partial s} + v_n\frac{\partial v_s}{\partial n} \\ a_n &= \frac{\mathrm{d}v_n}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial v_n}{\partial t} + v_s\frac{\partial v_n}{\partial s} + v_n\frac{\partial v_n}{\partial n} \end{aligned} \tag{3-31}$$

而

$$\vec{a} = a_s\vec{i}_s + a_n\vec{i}_n \tag{3-32}$$

引用式（3-27），则式（3-31）变为

$$\begin{aligned} a_s &= \frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial s} \\ a_n &= \frac{\mathrm{d}v_n}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial v_n}{\partial t} + v\frac{\partial v_n}{\partial s} \end{aligned} \tag{3-33}$$

式中，$\frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t}$，$\frac{\mathrm{d}v_n}{\mathrm{d}t}$，有时也写成$\frac{\mathrm{D}v_s}{\mathrm{D}t}$，$\frac{\mathrm{D}v_n}{\mathrm{D}t}$，称做流向和法向的物质加速度或物质导数，也有称实导数或随体导数的。这样写或

这样称呼无非要强调这个导数是针对流过某固定空间点处流体微团的运动来说的，否则式（3-29）、（3-30）根本不能成立。由式（3-33）可知，物质加速度由两部分组成：

（1）$\frac{\partial v}{\partial t}$（或$\frac{\partial v_s}{\partial t}$），$\frac{\partial v_n}{\partial t}$称做当地加速度或当地导数，是各固定空间点处速度随时间 t 变化产生的变化率，即由流动的非定常性所引起的加速度。对于定常流，则$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial v_n}{\partial t}=0$.

（2）$v\frac{\partial v}{\partial s}$（或$v_s\frac{\partial v_s}{\partial s}$），$v\frac{\partial v_n}{\partial s}$（或$v_s\frac{\partial v_n}{\partial s}$）称做流向和法向的迁移加速度或迁移导数，也有称对流导数和位变导数的。它们反映流体微团有位移时，因速度分布不均一产生的加速度。如果 $v\frac{\partial v}{\partial s}$，$v\frac{\partial v_n}{\partial s}$都等于零，则流动称为均一的。比如直匀流（等速直线流动）就是均一流。

现将式（3-33）变换一下，可得常用的形式。由图 3-17(b)知，dt 时间内，微团由 A_1 点移到 A_2 点时，θ 角的变化为 dθ，法向速度的变化为 dv_n 且有下列关系存在(注，流线的曲率半径为 r)

$$\mathrm{d}v_n=-v\mathrm{d}\theta=-v\frac{\mathrm{d}s}{r} \tag{3-34}$$

代入式（3-33），有

$$\begin{aligned} a_s&=\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial s}=\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{v^2}{2}\right)\\ a_n&=\frac{\partial v_n}{\partial t}+v\frac{\partial v_n}{\partial s}=\frac{\partial v_n}{\partial t}+\frac{v^2}{r} \end{aligned} \tag{3-35}$$

由式（3-35）可知，无论沿流线速度 v 变化与否，只要流线弯曲，则 $a_n\neq 0$，即都有法向加速度产生。此外也表明，按欧拉方法描述流动时，求沿流线上各点处的加速度公式式（3-35），与一般质点动力学求质点加速度的公式并不相同。

在笛卡尔坐标系中，推导流场中 A_1 点处加速度的表达式，方

法与推导式（3-31）相似。参看图3-18。dt时间内，微团由A_1点运动到邻域A_2点时，按式（3-4）或（3-5），x方向的速度变化为

$$du=\frac{\partial u}{\partial t}dt+\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$$

当$dt\to 0$时，在x方向的加速度为

$$a_x=\frac{Du}{Dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

因此时有

$$u=\frac{dx}{dt},\quad v=\frac{dy}{dt},\quad w=\frac{dz}{dt} \tag{3-36}$$

故

$$a_x=\frac{Du}{Dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z} \tag{3-37a}$$

同理可得

$$a_y=\frac{Dv}{Dt}=\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z} \tag{3-37b}$$

$$a_z=\frac{Dw}{Dt}=\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z} \tag{3-37c}$$

而

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k} \tag{3-38}$$

同样，$\frac{\partial u}{\partial t}$，$\frac{\partial v}{\partial t}$，$\frac{\partial w}{\partial t}$称为当地加速度，而$u\frac{\partial u}{\partial x}$，$v\frac{\partial u}{\partial y}$，$w\frac{\partial u}{\partial z}$等九项称为迁移加速度。只要知道速度场，见式(3-4)或式(3-5)，则可按式（3-37）计算加速度。

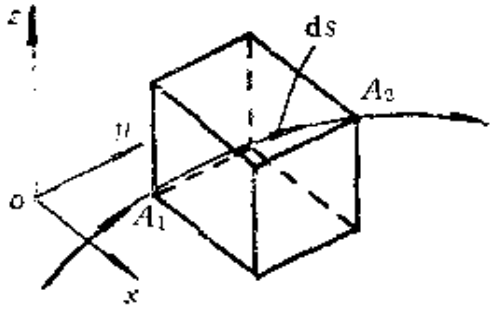


图 3-18

在二维流场中，参看图3-19(a)，按式（3-19）和式(3-20)，或直接由式(3-37)可得

$$a_x = \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}$$
$$a_y = \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} \tag{3-39}$$

而

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} \tag{3-40}$$

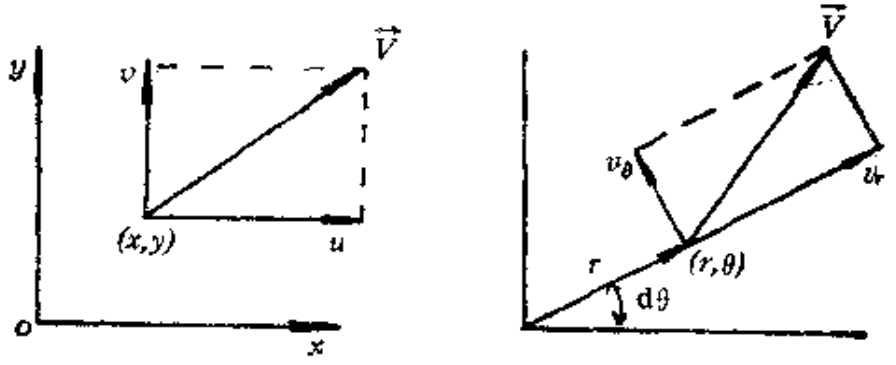
如果选用极坐标系，见图 3-19(*b*)，这时速度场的表达式为

$$\vec{V} = v_r\vec{i}_r + v_\theta\vec{i}_\theta \tag{3-41}$$

相应的径向和周向物质加速度可以推得为

$$a_r = \frac{Dv_r}{Dt} = \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + v_\theta\frac{\partial v_r}{r\partial\theta} - \frac{v_\theta^2}{r}$$
$$a_\theta = \frac{Dv_\theta}{Dt} = \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + v_\theta\frac{\partial v_\theta}{r\partial\theta} + \frac{v_\theta v_r}{r} \tag{3-42}$$

对比式（3-39）和式（3-42）可知，后者要多两项，这是因极坐标的基向量$\vec{i}_r$，$\vec{i}_\theta$在各点处方向有变化造成的。



(*a*)　　(*b*)

图 3-19

例 3-5　已知：在沿图 3-20 所示的直线流线上，速度$V = 3\sqrt{x^2+y^2}$.求：在 $A(8,6)$ 点处的速度和加速度大小。

解　将所给速度场，转换到极坐标系 (r,θ)中去求解方便一些。显然因$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$，并参看图后知有

$$v_r = 3r \tag{3-43}$$
$$v_\theta = 0$$

式中，$r=\sqrt{x^2+y^2}$.在 A 点处，$r=\sqrt{8^2+6^2}=10$，所以在 A 点处的速度等于

$$V=v_r=3\times10=30\ (\text{米/秒})$$

按式（3-42）、（3-43）知，A 点处的加速度等于

$$a_r=v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}=9r=9\times10=90\ (\text{米/秒}^2)$$

$$a_\theta=0$$

即

$$a=a_r=90\ (\text{米/秒}^2)$$

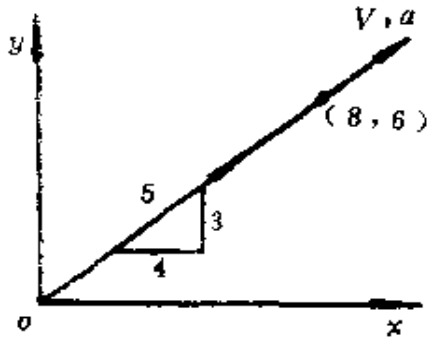


图 3-20

例 3-6　已知：沿 $r=2$ 米的圆形流线，流速均等于 1.04 米/秒。参看图3-21。求：在 $A(r,\theta)=A(2,60^\circ)$ 点处的速度和加速在图示坐标 x，y 方向的分量和沿流向 s、法向 n 的分量大小。

解　由图3-21上的相似三角形几何关系知

$$\frac{u}{U}=-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\qquad \frac{v}{V}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

故

$$u=-\frac{1.04y}{\sqrt{x^2+y^2}},\qquad v=\frac{1.04x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

代入 A 点的坐标值，$x=1$，$y=\sqrt{3}$，得

$$u=-0.90\ (\text{米/秒})\qquad v=0.52\ (\text{米/秒})$$

再按式（3-39）求导，并代入 A 点坐标得

$$a_x=-\frac{2.16x}{8}=-0.27\ (\text{米/秒}^2)$$

$$a_y=-\frac{2.16y}{8}=-0.47\ (\text{米/秒}^2)$$

另外，从题意知 s 方向为周向，n 方向为径向，且有

$$v_\theta = 1.04\ (\text{米/秒}),\quad v_r = 0\ (\text{米/秒})$$

按式（3-35）有

$$a_\theta = a_s = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{v_\theta}{2}\right) = 0\ (\text{米/秒}^2),$$

$$a_r = a_n = -\frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{1.04^2}{2} = -0.54\ (\text{米/秒}^2)$$

例 3·7 已知：如图 3-22所示为不可压流体在收缩管道中的流动。速度 $V = V_1(1 + \frac{x}{L})$。式中 V_1 为 $x = x_1 = 0$ 截面上的平均流速，L 为管道长度。求：

（1）x方向的加速度。

（2）$t = 0$ 时，位于 $x = 0$ 处流体微团的迹线方程 $x_p = f(t)$ 和加速度 $a_p = f_1(t)$ 表达式。

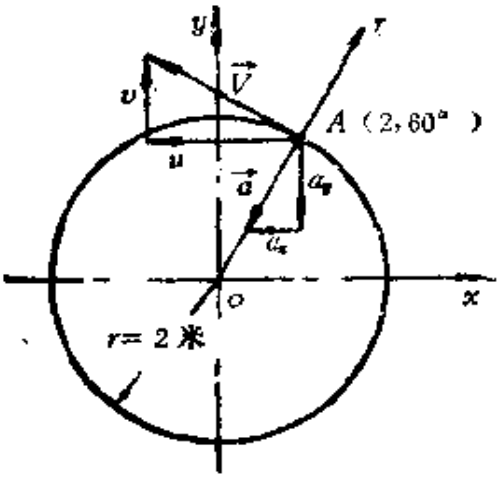


图 3-22

解 （1）从已给速度分布，按式（3-39）求导有

$$a_x = \frac{Du}{Dt} = \frac{Dv}{Dt} = v\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{v_1^2}{L}(1 + \frac{x}{L})$$

（2）如微团的迹线方程 $x_p = f(t)$，则微团的速度 $u_p = \frac{dx_p}{dt} = \frac{df(t)}{dt}$ 也将是时间 t 的函数。一旦流体微团的位置确定，其速度将与所给速度场同一位置处的速度相等。即在任一瞬间有

$$u_p = \frac{dx_p}{dt} = \frac{df(t)}{dt} = V_1(1 + \frac{x}{L}) = V_1(1 + \frac{f}{L})$$

分离变量后得

$$\frac{df}{(1 + f/L)} = V_1 dt$$

因 $t=0$ 时，$x_p=f(0)=0$，在任一瞬间，流体微团的位置 $x_p=f$，故

$$\int_0^t \frac{\mathrm{d}f}{(1+f/L)}=\int_0^t V_1\mathrm{d}t,\qquad L\ln\left(1+\frac{f}{L}\right)=V_1t$$

或

$$x_p=f(t)=L\left[\mathrm{e}^{\frac{V_1t}{L}}-1\right]$$

在任一瞬间，流体微团的加速度有

$$a_p=\frac{\mathrm{d}^2x_p}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}t^2}=\frac{V_1^2}{L}\mathrm{e}^{\frac{V_1t}{L}}$$

换句话说，按拉格朗日方法描述流动，流体微团的位移，速度和加速度都将是时间 t 的函数。检查一下同一流动两种加速度表达式的计算结果是否一致？分三种情况来看：

1）当 $x=x_p=0$ 时，对应的 $t_1=0$；$a_x=\frac{V_1^2}{L}$，而 $a_p=\frac{V_1^2}{L}$，结果一致。

2）当 $x=x_p=\frac{L}{2}$ 时，对应的时间 t_2，由式 $x_p=\frac{L}{2}=L\left[\mathrm{e}^{\frac{V_1t_2}{L}}-1\right]$ 解出，得 $\mathrm{e}^{\frac{V_1t_2}{L}}=1.5$。分别代入 a_x，a_p 的式子，所得结果都是 $\frac{1.5V_1^2}{L}$，结果一致。

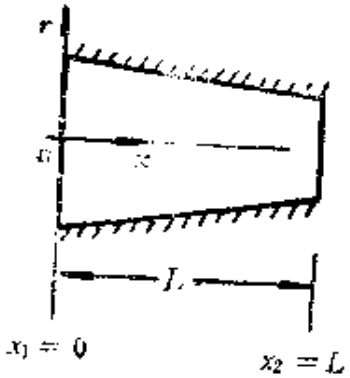


图 3-12

3）当 $x=x_p=L$ 时，对应的时间 t_3，有 $\mathrm{e}^{\frac{V_1t_3}{L}}=2$。$a_x=a_p=\frac{2V_1^2}{L}$，结果也一致。说明两种描述流动的方法都可以用，但采用欧拉方法更方便实用一些。

§3-3 雷诺输运方程和质量方程

一、基本物理定律和控制体分析方法

1. 基本物理定律和系统分析方法

在流体的流动过程中，必须遵循的基本物理定律有：

质量守恒定律

牛顿运动定律，特别是第二定律（动量定律）

动量矩定律

热力学第一定律（能量守恒与转换定律）

热力学第二定律

当然并不是在分析与解决任何一个流体力学问题时，上述基本物理定律或者由它们导出的基本方程组都会同时用到。此外，在分析某些问题时，还需要补充一些附加关系，如有关流体物理属性的关系式，象完全气体的状态方程，粘性流体的粘性定律等等。

在力学和热力学中，这些基本物理定律适用的对象是一个选定的物质系统（亦称闭口系统）。该系统始终由一定量的物质组成；系统的边界把自己同周围的外界物质分开；系统边界既可以固定不动，也可以运动，而且系统边界的形状和系统所占据的空间都可以随时间发生变化；可以透过系统边界和外界有功和热量的交换但绝无质量的交换。按照对物质系统的这些要求，当把上述基本物理定律应用到运动流体时，势必要追踪一个选定的流体系统的整个运动历程不可。参看图3-23，$t=t_0$瞬间，选定的流体系统处于A_1标注的位置，在$t=t_0+dt$瞬间，流体系统将占据A_2标注的新位置。比如从流体系统的质量守恒定律来看，该系统的质量始终应等于常数。设系统的质量为m_s，质量守恒定律的数学表达式即是：

$$\frac{\mathrm{d}m_s}{\mathrm{d}t}=0 \tag{3-44a}$$

式中，脚注s代表分析的对象是一个流体闭系统。如$\mathrm{d}\tau$是系统的微体积元，ρ是流体的密度，微体积元的质量$\mathrm{d}m=\rho\mathrm{d}\tau$；设系统的总体积为$\tau_s$，则有

$$m_s=\int_s \rho\mathrm{d}\tau \tag{3-44b}$$

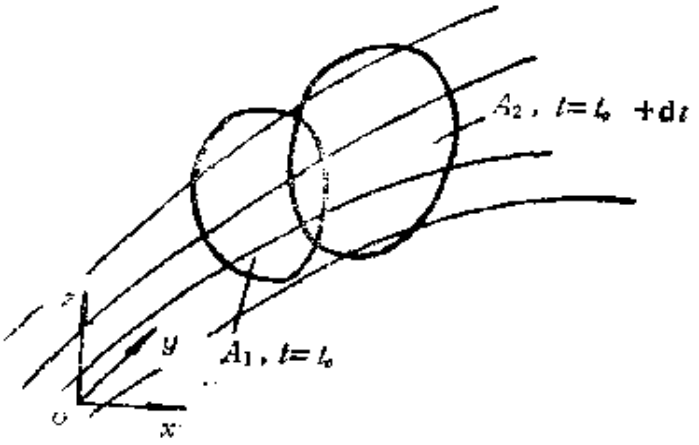


图 3-23

进一步把（3-44）式用流动参数表述出来，则得到关于流体闭系统的质量守恒方程。这种分析方法也称为系统分析法。但是，由于运动中的流体系统将产生由移动，转动和变形运动等组成的复杂运动，长时间追踪难以做到，甚至在紊流流动（也称湍流，将在第五章介绍）状态由于流动的混沌，严格讲要辨认哪些流体仍否属于原来的流体系统都成问题。况且，在不少流体力学问题中，往往关心的是在流体流过的物体上产生了多大的力或多高的温度等，而并不关注一个流体系统的整个运动历程如何。所以，实用的分析方法是称做控制体的分析方法（下详）。但要把适用于一个流体闭系统的各个基本物理定律用于控制体，其间一般还需要用一个变换关系即雷诺输送方程，对此下面也将予以介绍。

2．控制体分析方法

控制体是由选定的、几何上封闭的界面（称为控制面）所围

成的空间体，相对于坐标系而固定不变。控制面可以是物体壁面或者是假想的界面；与外界不仅可以透过控制面有功和热量的交换，而且也允许有质量的交换，后一点与前述系统界面的性质不同（可称为开口系统）。控制体的形状、大小可视问题的需要而变化，可以是有限体积大小的控制体，也可以是微元控制体。参看图3-24，它是分析管流时可选择的一个控制体：管壁是控制面的一部分，而两端的控制面则是假想、虚构的。流体可以通过两端的控制面流入和流出控制体。一旦选择好控制体，它就不再改变。把适用于一个流体闭系统的各个基本物理定律，比如描述质量守恒的定律式(3-44)，用关于控制体的流动参数表述出来，则得到关于控制体（开系统）的质量守恒方程。这种分析方法就称为控制体分析法。

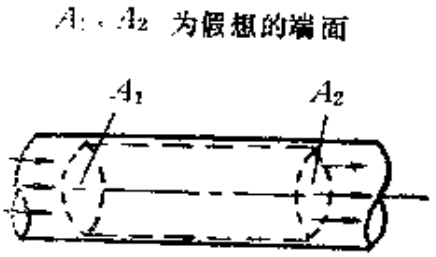


图 3-24

二、雷诺输运方程

设N是流场中的某个物理量，比如可以代表质量m，动量$\vec{P}$和能量E等。单位流体质量所具有的N值，用符号σ代表，有$\sigma = \frac{dN}{dm}$。现按图3-25所示一维流动情况，来推导雷诺输运方程。所选固定控制体用1 2 3 4标出，控制面1—2，3—4是流面；控制面1—3，2—4上有流体由左向右流过。在瞬间t，固定控制体内部含有的N值为

$$N_{CV} = \int_{CV} \sigma \, dm = \int_{CV} \sigma \rho \, d\tau \qquad (3-45)$$

式中，CV代表控制体的体积。

在同一瞬间t，取与图示控制体相重合的流体作为选定的流体系统，它包含的N值为

$$N_s = \int_{\tau_s} \sigma \, dm = \int_{\tau_s} \sigma \rho \, d\tau \qquad (3-46)$$

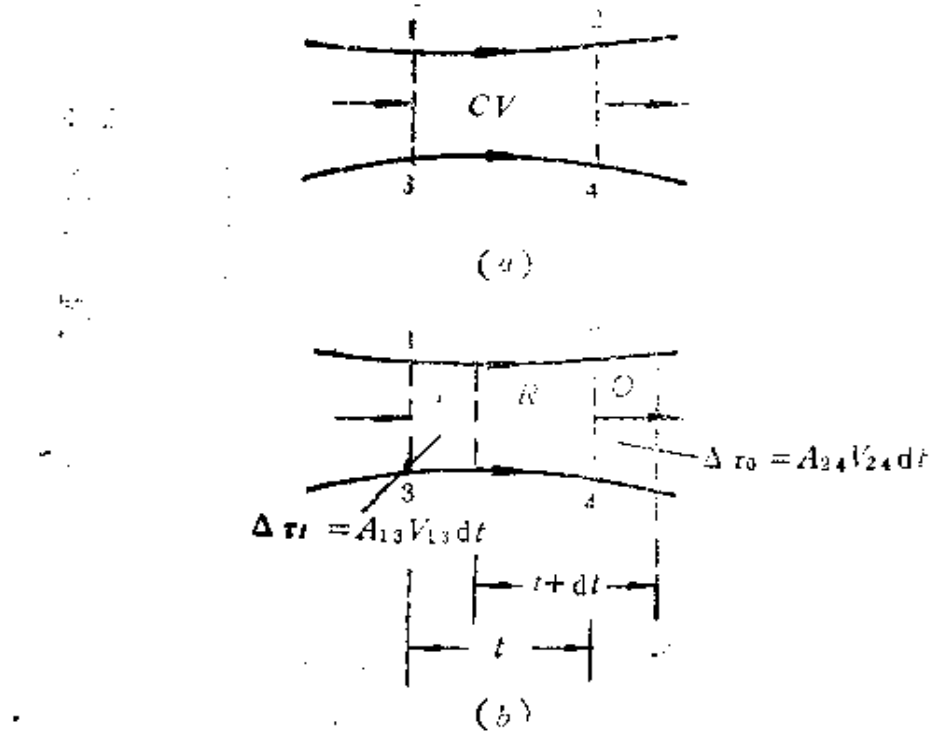


图 3-25

式中，τ_s是瞬间 t 流体系统的体积。显然有 $CV = \tau_s$.

在$t+\mathrm{d}t$瞬间，选定的流体系统向右流动，不再与控制体相重合。计算N_s对时间 t 的导数，有

$$\frac{\mathrm{d}N_s}{\mathrm{d}t} = \lim_{\mathrm{d}t\to 0}\frac{N_s(t+\mathrm{d}t) - N_s(t)}{\mathrm{d}t} \tag{3-47}$$

而

$$N_s(t+\mathrm{d}t) = N_{CV}(t+\mathrm{d}t) - (\sigma\rho\Delta\tau)_I + (\sigma\rho\Delta\tau)_O \tag{3-48}$$

式中，$(\sigma\rho\Delta\tau)_I$是$\mathrm{d}t$时间内通过A_{13}流入控制体的N值，而$\Delta\tau_I = A_{13}V_{13}\Delta t$；$(\sigma\rho\Delta\tau)_O$是同一时间内通过 A_{24} 流出控制体的N值，而 $\Delta\tau_O = A_{24}V_{24}\Delta t$. V_{13}，V_{24} 分别是相应控制面上的速度。

因在 t 瞬间，有$N_s(t) = N_{CV}(t)$，故式（3-47）可改写成

$$\frac{\mathrm{d}N_s}{\mathrm{d}t} = \lim_{\mathrm{d}t\to 0}\frac{N_s(t+\mathrm{d}t) - N_{CV}(t)}{\mathrm{d}t}$$

再将式（3-48）代入上式，则得

$$\frac{\mathrm{d}N_s}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}\sigma\rho\mathrm{d}\tau+(\sigma\rho A_{2t}V_{2t})_0-(\sigma\rho A_{1t}V_{1t})_i \tag{3-49}$$

式（3-49）就是流体物理量N的一维雷诺输运方程。右端第一项是控制体内物理量N对时间的变化率，第二项是单位时间内以速度V_{2t}、通过截面A_{2t}流出控制体的N值，第三项是单位时间内以速度V_{1t}、通过截面A_{1t}流入控制体的N值。第二、三项之和代表流体穿越控制面时物理量N值的净通量率。

很容易把式（3-49）推广到三维流动情况。参看图3-26。对于任一选定的固定控制体CV，其控制面为CS。对照式（3-49），对于任一瞬间t与控制体相重合的流体系统来讲，其N值对时间的导数，即右端第一项形式不会变化；关于穿越控制面流体物理量N值的净通量率表达式则有变化，需要把控制面CS分成三部分来考虑，即

$$CS=CS_o+CS_i+CS_n \tag{3-50}$$

式中，CS_o代表有流体流出的那一部分控制面，CS_i代表有流体流入的那一部分控制面，而CS_n代表无流体流出或流入的哪一部分控制面。参看图3-26(b)，和式（3-10）等有

$$\int_{cs_o}\sigma\rho\vec{V}\cdot\vec{n}\mathrm{d}A=\int_{cs_o}\sigma\rho V_{on}\cos\alpha\mathrm{d}A$$

参看图3-26(c)，因CS_i部分的$\alpha>\frac{\pi}{2}$，故积分自带负号，有

$$\int_{cs_i}\sigma\rho\vec{V}\cdot\vec{n}\mathrm{d}A=\int_{cs_i}\sigma\rho V_{in}\cos\alpha\mathrm{d}A$$

对于CS_n，不是$\vec{V}=0$，就是$\alpha=\frac{\pi}{2}$，故无流体流出或流入，参看图3-26(d)。又如图3-24上的管壁部分或如图3-25上的流面部分即是如此。所以，三维雷诺输运方程的形式为

$$\frac{\mathrm{d}N_s}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}\sigma\rho\mathrm{d}\tau+\int_{cs_0}\sigma\rho V_{cs_0}\cos\alpha\mathrm{d}A+\int_{cs_1}\sigma\rho V_{cs_1}\cos\alpha\mathrm{d}A \tag{3-51a}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}N_s}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}\sigma\rho\mathrm{d}\tau+\int_{cs}\sigma\rho\vec{V}\cdot\vec{n}\mathrm{d}A \tag{3-51b}$$

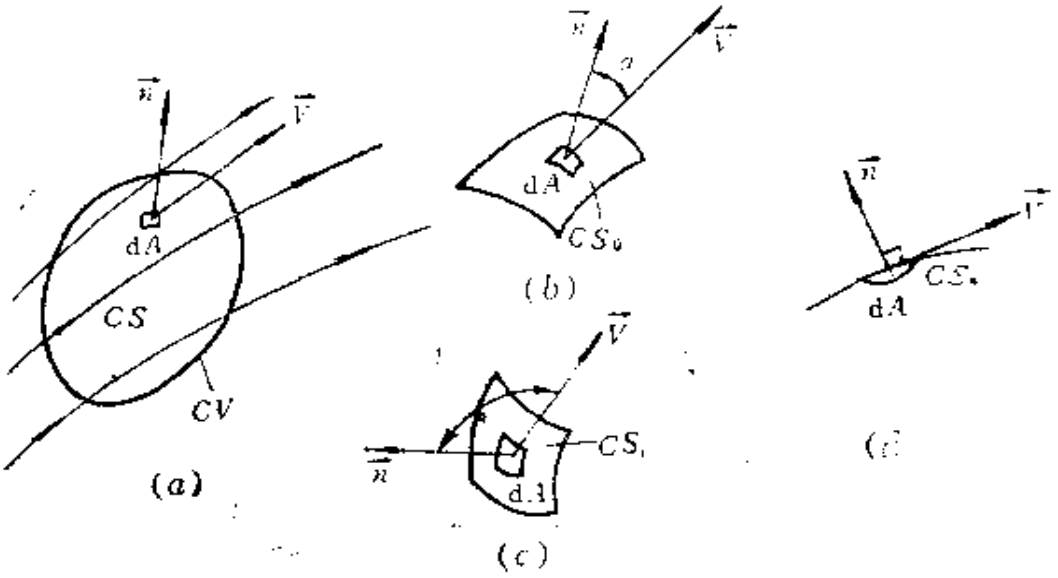


图 3-26

三、质量方程（或称连续方程）

1．积分形式的质量方程

对于流体系统，质量守恒定律的数学表达式是式（3-44），现利用雷诺输运方程式（3-51）可以方便地推得关于控制体的质量方程。因现在 $N=m$，而 $\sigma=\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}m}=1$，代入式（3-44）和(3-51）有

$$\frac{\mathrm{d}m_s}{\mathrm{d}t}=0=\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}\rho\mathrm{d}\tau+\int_{cs}\rho\vec{V}\cdot\vec{n}\mathrm{d}A$$

或

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho d\tau+\int_{CS}\rho\vec{V}\cdot\vec{n}dA=0 \qquad (3\text{-}52)$$

上式就是关于有限大小控制体的质量方程（积分形式）。说明为了满足质量守恒律，有限控制体内流体质量随时间的变化率与穿越该控制体的净质量流量之和应等于零。

讨论式（3-52）的几个重要情况：

1）对于不可压流体，因 $\rho=\text{Const.}$，且控制体内始终充满流体，故第一项恒等于零而变成

$$\int_{CS}\vec{V}\cdot\vec{n}dA=0 \qquad (3\text{-}53)$$

结合式（3-11）知，上式表明不可压流体穿越控制体的净体积流量应恒等于零。换句话讲，流出和流入控制体的体积流量应相等。注意，式（3-53）对定常流和非定常流都适用。

2）对于可压流体，只要是定常流，因 $\rho=\rho(x,\ y,\ z)$，故第一项也恒等于零而变成

$$\int_{CS}\rho\vec{V}\cdot\vec{n}dA=0 \qquad (3\text{-}54)$$

结合式（3-10）知，上式表明可压流体穿越控制体的净质量流量应恒等于零。换句话讲，流出和流入控制体的质量流量应相等。注意，式（3-54）仅适用于定常、可压流体的流动。

3）对于沿流管的一维流，参看图3-27和图3-25，此时 $A_{1s}=A_1$，$V_{1s}=V_1$，$A_{2s}=A_2$，$V_{2s}=V_2$. 对于不可压流体按式(3-53)有

$$V_1A_1=V_2A_2=VA=\text{Const.} \qquad (3\text{-}55)$$

这表明沿流管通过各横截面的体积流量应相等。流管横截面积变小，平均流速必须增加；流管横截面积变大，平均流速则必须减小。

对于定常可压流按式（3-54）有

$$\rho_1V_1A_1=\rho_2V_2A_2=\rho VA=\text{Const.} \qquad (3\text{-}56)$$

即沿流管通过各横截面的质量流量应相等。

例 3-8　已知：现用图 3-28所示管道来输送空气，单位时间通过横截面的空气重量（称为重量流量）为30牛/秒；在①横截面上空气重度为9.81牛/米^3，$d_1=300$毫米，在②横截面上空气重度为7.85牛/米^3，$d_2=200$毫米。流动定常。求：通过上述两个横截面的质量流量、体积流量，平均流速和比质量流量（指通过单位横截面上的质量流量ρV）的大小。

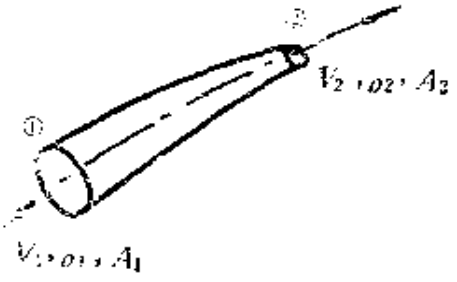


图 3-27

解　因 $\gamma_1=9.81$ 牛/米^3，$\gamma_2=7.85$牛/米^3，而重量流量 $G=g\rho VA=30$牛/秒，按式（3-56）有

$$m=m_1=m_2=\frac{G}{g}=\frac{30}{9.81}=3.06(\text{公斤/秒})$$

关于体积流量有

$$Q_1=\frac{G}{\gamma_1}=\frac{30}{9.81}=3.06(\text{米}^3/\text{秒}),$$

$$Q_2=\frac{G}{\gamma_2}=\frac{30}{7.85}=3.82(\text{米}^3/\text{秒})$$

按式（3-15），平均流速有

$$V_1=\frac{Q_1}{A_1}=\frac{3.06}{(\pi/4)\times0.3^2}=43.3(\text{米/秒}),$$

$$V_2=\frac{Q_2}{A_2}=\frac{3.82}{(\pi/4)\times0.2^2}=121.6(\text{米/秒})$$

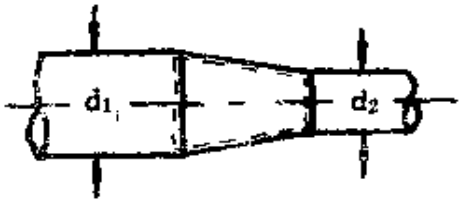


图 3-28

而比质量流量有

$$(\rho V)_1=\frac{m_1}{A_1}=\frac{3.06}{(\pi/4)\times0.3^2}$$
$$=43.3(\text{公斤}/(\text{米}^2\cdot\text{秒})),$$

$$(\rho V)_2=\frac{m_2}{A_2}=\frac{3.06}{(\pi/4)\times0.2^2}$$

$$= 97.3(\text{公斤}/(\text{米}^2\cdot\text{秒}))$$

例 3-9 已知：参看前图3-13，现转绘于此作为图 3-29。远前方直匀来流$U=30$米/秒，附面层内，在$x=x_d$截面上测得的x方向速度分量为$\frac{u}{V}=2\left(\frac{y}{\delta}\right)-\left(\frac{y}{\delta}\right)^2$，$0\leqslant y\leqslant\delta$。$\delta=5$毫米。空气的密度$\rho=1.24$公斤/米^3。平板的宽度$z$为0.6米。求：通过控制体$abcd$的$bc$控制面的质量流量。

解 因为是二维不可压流，$\rho=1.24$ 公斤/米^3 = Const.，质量方程按式（3-53）有

$$\int_{CS}\vec{V}\cdot\vec{n}\mathrm{d}A=0 \qquad (3\text{-}53)$$

因（注意，沿 z 方向无流动）

$$CS=A_{ab}+A_{bc}+A_{cd}+A_{da}$$

因A_{da}为壁面，无流体流过，故由（3-53）式得

$$m_{bc}=\rho\int_{A_{bc}}\vec{V}\cdot\vec{n}\mathrm{d}A=-\rho\int_{A_{ab}}\vec{V}\cdot\vec{n}\mathrm{d}A-\rho\int_{A_{cd}}\vec{V}\cdot\vec{n}\mathrm{d}A$$

其中

$$\int_{A_{ab}}\vec{V}\cdot\vec{n}\mathrm{d}A=-Uz\delta \qquad (\text{因}\alpha=180^\circ)$$

$$\int_{A_{cd}}\vec{V}\cdot\vec{n}\mathrm{d}A=\int_0^\delta zU\left[2\left(\frac{y}{\delta}\right)-\left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right]\mathrm{d}y=\frac{2}{3}Uz\delta$$

$$(\text{因}\alpha=0^\circ)$$

故

$$m_{bc}=\rho Uz\delta-\frac{2}{3}\rho Uz\delta=\frac{1}{3}\rho Uz\delta$$

$$=\frac{1}{3}\times1.24\times30\times0.6\times0.005=0.0372\ \text{公斤/秒}$$

这表明有质量流出bc控制面。

2. 微分形式的质量方程

正如前述，控制体的大小可视问题的需要来选择。选择有限

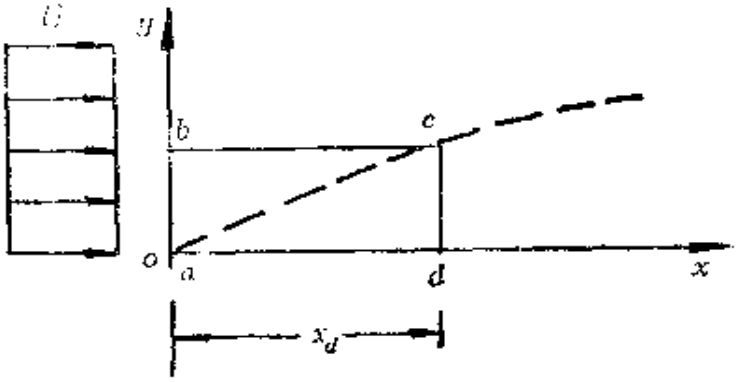


图 3-29

体积大小的控制体，按质量守恒律推得的质量方程为积分形式。如选择微元控制体推得的质量方程则为微分形式。参看图3-30，取沿流管相邻为 ds 距离的两个横截面与流管壁围成的微元控制体。①截面面积为 A，②截面面积则为 $A+\frac{\partial A}{\partial s}\mathrm{d}s$；微元控制体体积 $\mathrm{d}\tau = A\mathrm{d}s$；①截面上的比质量流量为 ρV，则②截面上的比质量流量为 $\rho V+\frac{\mathrm{d}(\rho V)}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s$。利用质量守恒式（3-44）和雷诺输运方程式（3-51）可得

$$0=\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}\rho\mathrm{d}\tau+\int_{cs}\rho\vec{V}\cdot\vec{n}\mathrm{d}A$$

针对图示微元控制体，上式各项具体有

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}\rho\mathrm{d}\tau\approx\frac{\partial\rho}{\partial t}A\mathrm{d}s$$

$$\int_{cs}\rho\vec{V}\cdot\vec{n}\mathrm{d}A\approx(\rho V+\frac{\mathrm{d}(\rho V)}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s)(A+\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s)-\rho VA$$

$$=\mathrm{d}(\rho V)A+\rho V\mathrm{d}A=\mathrm{d}(\rho VA)$$

代入得

$$A\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\rho VA)=0 \qquad (3-57)$$

上式称为一维非定常可压流的质量方程（微分形式）。

对于一维定常流，式（3-57）第一项恒为零而变为

$$\mathrm{d}(\rho VA)=\rho V\mathrm{d}A+\rho A\mathrm{d}V+AV\mathrm{d}\rho=0$$

或

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}+\frac{\mathrm{d}V}{V}+\frac{\mathrm{d}A}{A}=0 \qquad (3\text{-}58)$$

上式称为一维定常可压流的质量方程（微分形式）。

对于一维不可压流，由式（3-57）直接可得

$$\frac{\mathrm{d}V}{V}+\frac{\mathrm{d}A}{A}=0 \qquad (3\text{-}59)$$

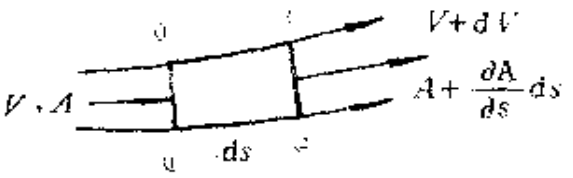


图 3-38

上式称为一维不可压流的质量方程（微分形式），定常与非定常流均适用。

由上可见，取微元控制体与取有限体积大小控制体所得的质量方程形式并不相同，对流场提供的信息量也有差异，但揭示的规律却是一致的。比如，对于一维不可压流的情况而言，由式（3-59）知，沿流管$\mathrm{d}A>0$，则$\mathrm{d}V<0$；$\mathrm{d}A<0$，则$\mathrm{d}V>0$。这与积分形式的质量方程式（3-55）揭示的规律相一致。对于一维定常可压流，无论从式（3-58）或式（3-56），眼下尚无法判断，比如$\mathrm{d}A$发生变化，$\mathrm{d}V$的正负号，因为$\mathrm{d}\rho$也会变化。原因在于目前可用的方程式数量还不够。

例 3-10　已知：在汽车悬挂系统中，充气支柱作用与图3-31所示汽缸活塞装置的作用相同。当活塞位于$L_0=0.15$米处的瞬间，缸内气体的平均密度$\rho_0=18$公斤/米^3。现活塞突然以速度$V=12$米/秒由此位置向右运动，从而将引起缸内气体产生运动；假定缸内气体的运动是一维的，并知气体运动速度与离开汽缸底部的距离成比例，$s=0$，$u=0$；$s=L$，$u=V$即$u=V\frac{s}{L}$．求：缸内平均密度$\rho=\rho(t)$表达式以及活塞开始运动瞬间（$t=0$），缸内

平均密度的当地导数$\frac{\partial \rho}{\partial t}$大小。

解 这是一个一维非定常可压流问题。利用式（3-37）有

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\rho u)=0$$

或

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\rho u)=-\rho\frac{\partial u}{\partial s}-u\frac{\partial \rho}{\partial s}$$

因ρ为缸内平均密度，故$\frac{\partial \rho}{\partial s}=0$，而$u=u(s)=V\frac{s}{L}$。故有

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}=-\rho\frac{\partial u}{\partial s}=-\rho\frac{V}{L}$$

分离变量并积分（注意，$L=L_0+Vt$）后有

$$\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}=-\int_0^t\frac{V}{L}\mathrm{d}t=-\int_0^t\frac{V\mathrm{d}t}{L_0+Vt}$$

$$\ln\frac{\rho}{\rho_0}=\ln\frac{L_0}{L_0+Vt}$$

即

$$\rho=\rho(t)=\rho_0\left[\frac{1}{1+(V/L_0)t}\right]$$

从而有

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}=-\frac{\rho_0(V/L_0)}{[1+(V/L_0)t]^2}$$

当$t=0$时，有

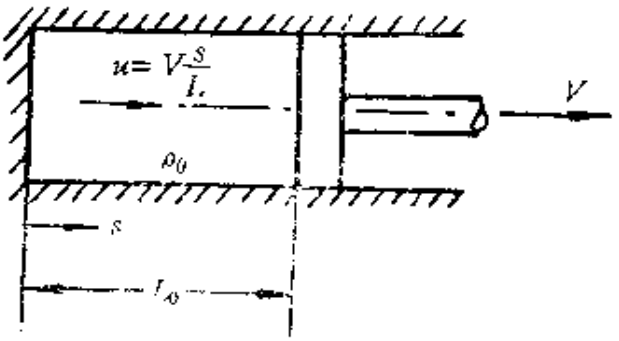


图 3-31

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 \frac{V}{L_0} = -18 \times \frac{12}{0.15} = -1\,440\text{(公斤/(米}^3\text{·秒))}$$

对于二维流场，微分形式的质量方程的表达式与选择的坐标系形式有关。参看图3-32。先推导在笛卡尔坐标系中的质量方程。微元控制体体积 $d\tau = dxdy\cdot 1$。利用质量守恒式（3-44）和雷诺输运方程式（3-51）得

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \rho d\tau + \int_{CS} \rho \vec{V}\cdot\vec{n} dA$$

针对图示微元控制体，上式右端两项积分可写成下列形式：

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \rho d\tau \approx \frac{\partial \rho}{\partial t} dxdy\cdot 1$$

$$\int_{CS} \rho \vec{V}\cdot\vec{n} dA = \int_{AB} \rho \vec{V}\cdot\vec{n} dA + \int_{BC} \rho \vec{V}\cdot\vec{n} dA + \int_{CD} \rho \vec{V}\cdot\vec{n} dA + \int_{DA} \rho \vec{V}\cdot\vec{n} dA$$

其中，因在四个控制面 AB，BC，CD 和 DA 上都有通量，故写成四项（注意，微元控制体中心点处的速度分量记为 u，v；密度记为 ρ）有

$$\int_{AB} \rho \vec{V}\cdot\vec{n} dA \approx -\left(\rho - \frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)\left(v - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)\cdot 1$$

$$\int_{BC} \rho \vec{V}\cdot\vec{n} dA \approx \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)\left(u + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)\cdot 1$$

$$\int_{CD} \rho \vec{V}\cdot\vec{n} dA \approx \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)\left(v + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)\cdot 1$$

$$\int_{DA} \rho \vec{V}\cdot\vec{n} dA \approx -\left(\rho - \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)\left(u - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)\cdot 1$$

各项展开后略去高阶小，再将四项相加得

$$\left(\rho\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)dxdy\cdot 1$$

代入后得

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} = 0$$

或

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \qquad (3\text{-}60)$$

上式称为二维非定常可压流的质量方程（微分形式）。

对于二维定常可压流，上式变为

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \qquad (3\text{-}61)$$

对于二维不可压流，因ρ=Const.，则由式（3-60）得

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (3\text{-}62)$$

以上讨论表明，对于二维可压流动，为了满足质量守恒，速度场和密度场间必须满足式（3-60）或式（3-61）。对于不可压流，速度分量之间必须满足式（3-62）。否则流动就不满足质量守恒了。

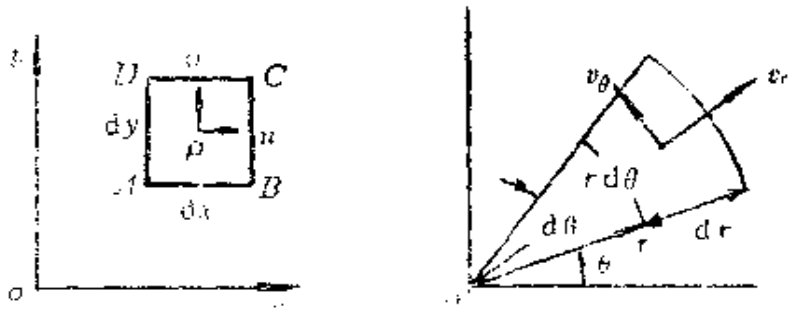


图 3-32

对于图3-32(b) 所示极坐标系，同样可以推得

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(\rho v_r) + \frac{\partial}{r\partial \theta}(\rho v_\theta) + \frac{1}{r}(\rho v_r) = 0 \qquad (3\text{-}63)$$

对于二维定常可压流，上式变为

$$\frac{\partial}{\partial r}(\rho v_r) + \frac{\partial}{r\partial \theta}(\rho v_\theta) + \frac{1}{r}(\rho v_r) = 0 \qquad (3\text{-}64)$$

对于二维不可压流有

$$\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{\partial v_\theta}{r\partial\theta}+\frac{v_r}{r}=0 \qquad (3\text{-}65)$$

例 3-11 已知：有一个二维定常不可压流，x方向的速度$u=Kx$，K为常数。求：可能存在的y方向速度的表达式，以及有多种可能的形式。

解 按题意，待求的$\vec{V}=\vec{V}(x,y)$，其分量应满足式(3-62)，即

$$-\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial x}=-K$$

积分

$$v=\int\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y+f(x)=-Ky+f(x)$$

注意，积分常数应是待定的$f(x)$函数，因$\frac{\partial f(x)}{\partial y}=0$。可见满足题意的$v=v(x,y)$表达式有无穷多个。其中最简单的情况是$f(x)=0$，即

$$v=-Ky$$

或

$$\vec{V}=\vec{V}(x,y)=-Kx\vec{i}-Ky\vec{j}$$

例 3-12 已知：有一个二维定常不可压流，$v_\theta=0$，而$v_r=f(r)$。求：$v_r=f(r)$应具备什么形式才能代表存在的流动。

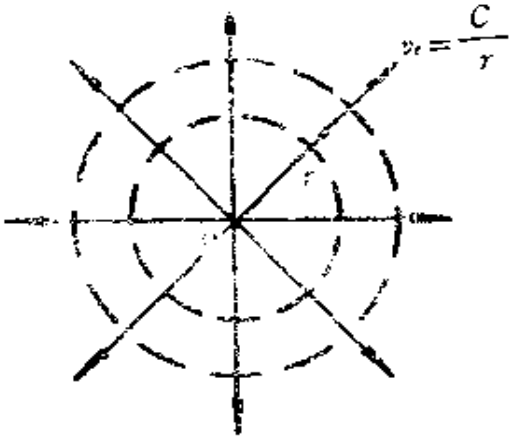


图 3-33

解 从满足质量方程要求来看，按式（3-65）有

$$\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{\partial v_\theta}{r\partial\theta}+\frac{v_r}{r}=0$$

再按题意有

$$\frac{\partial v_r}{\partial r}+0+\frac{v_r}{r}=0,\quad \text{即}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)=0$$

积分后有

$$rv_r=C$$

或

$$v_r=f(r)=\frac{C}{r}$$

参看图3-33。这个速度场在流体力学中称为二维定常不可压点泉流。同例 3-5 比较后可知，该例（指例 3-5 所给速度场）不满足质量方程，故式（3-43）不能代表一个实际存在的流动。

例 3-13 已知：有一个二维定常不可压流，其$v_r=0$，而$v_\theta=\frac{C}{r}$，C是常数。求：它能否代表一个存在的流动。

解 仍需用质量方程来检查。由式（3-65）有

$$\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{\partial v_\theta}{r\partial\theta}+\frac{v_r}{r}=0$$

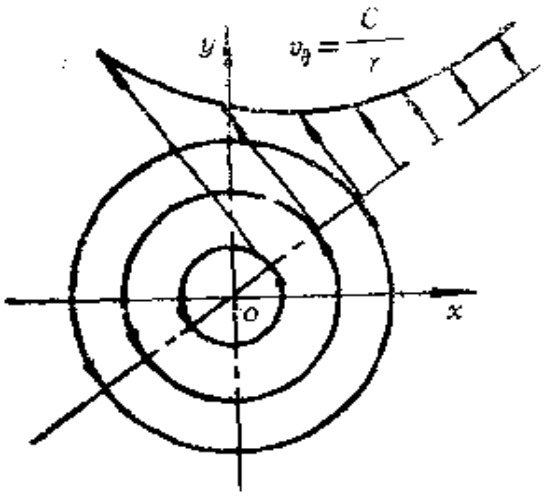


图 3-34

按题意有

$$\frac{\partial}{\partial r}(0)+\frac{\partial}{r\partial\theta}\left(\frac{C}{r}\right)+\frac{0}{r}=0$$

可见，所给速度场满足式（3-65）。故可以代表一个存在的流动。这个流场称为二维定常不可压点涡流。参看图3-34。

§ 3-4 理想流体沿流线的欧拉运动方程

正如上节所述，从质量守恒定律出发得到质量方程一样，下

面将针对不同情况应用其他基本物理定律，来建立流体动力学的各个基本方程；分析讨论流体产生各种运动的起因、条件和结果；从而熟悉、了解和掌握流体运动变化规律，以及解决工程中流体力学问题的基本方法。

流体运动必须满足的另一基本定律是牛顿第二定律。按系统分析方法表述它有

$$\vec{F}=m_s\vec{a}_s=m_s\frac{\mathrm{d}\vec{V}_s}{\mathrm{d}t} \tag{3-66a}$$

或

$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{P}_s}{\mathrm{d}t} \tag{3-66b}$$

而

$$\vec{P}_s=\int_{\tau_s}\vec{V}\mathrm{d}m=\int_{\tau_s}\vec{V}\rho\mathrm{d}\tau \tag{3-66c}$$

式中，$\vec{F}$是作用在流体系统上所有外力的合力，$\vec{a}_s$是流体系统质心的加速度，$\vec{V}_s$是流体系统质心的速度，$\vec{P}_s$是流体系统的线动量，m_s是流体系统的质量，见（3-44b）式。

本节将介绍如何应用式（3-66），来建立理想（无粘性）流体沿流线的运动方程。参看图3-35。这时既可以采用系统分析法，也可以采用固定微元控制体分析法。前者是在图示流线上①点处邻域取一流体微团：微团的体积$\mathrm{d}\tau=\mathrm{d}s\mathrm{d}n\mathrm{d}y=\mathrm{d}s\mathrm{d}A$，其中$\mathrm{d}A=\mathrm{d}n\mathrm{d}y$，微团质量$\mathrm{d}m=\rho\mathrm{d}s\mathrm{d}A$，其中$\rho$是微团的密度；然后按式（3-66$a$）来建立该微团的运动微分方程。后者则是在同一点

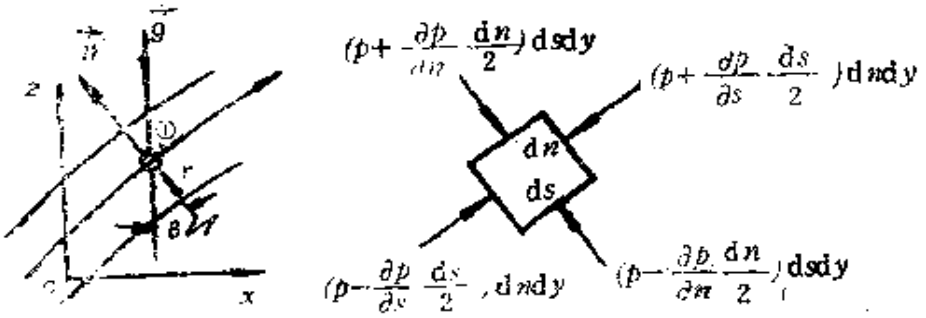


图 3-35

处取体积为$d\tau$的固定微元控制体，利用式（3-66b）、（3-66c）和雷诺输运方程（3-51）等式来建立运动微分方程。此处将采用系统分析方法。关于采用固定微元控制体的方法留给读者自己去推导练习。

见图，作用在所选流体微团上的力，$\vec{F}=\vec{F}_p+\vec{F}_v$；其中，$\vec{F}_p$是作用在微团表面上的压力的合力，因考虑的是理想流体，故无剪切应力作用；$\vec{F}_v$是作用在微团上的体积力，现只考虑重力。按图示选用的坐标系统，重力与oz轴平行但方向相反。

由图可知：$\vec{F}_p$在流动方向上和法向方向上的分量分别为

$$\left(p-\frac{\partial p}{\partial s}\frac{\mathrm{d}s}{2}\right)\mathrm{d}A-\left(p+\frac{\partial p}{\partial s}\frac{\mathrm{d}s}{2}\right)\mathrm{d}A=-\frac{\partial p}{\partial s}\mathrm{d}s\mathrm{d}A$$

$$\left(p-\frac{\partial p}{\partial n}\frac{\mathrm{d}n}{2}\right)\mathrm{d}s\mathrm{d}y-\left(p+\frac{\partial p}{\partial n}\frac{\mathrm{d}n}{2}\right)\mathrm{d}s\mathrm{d}y=-\frac{\partial p}{\partial n}\mathrm{d}s\mathrm{d}A$$

$\vec{F}_v$在流动方向上和法向方向上的分量分别为

$$-\rho g\sin\beta\mathrm{d}s\mathrm{d}A,\qquad -\rho g\cos\beta\mathrm{d}s\mathrm{d}A$$

在流动方向上，按式（3-35）有流体微团的加速度a_s的表达式，因此按牛顿第二定律（3-66a）式得［下式中用大写V代替沿流线的速度，而$V=V(s,t)$］

$$\rho\mathrm{d}s\mathrm{d}Aa_s=-\frac{\partial p}{\partial s}\mathrm{d}s\mathrm{d}A-\rho g\sin\beta\,\mathrm{d}s\mathrm{d}A$$

因$\sin\beta=\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}$，代入式（3-35）并化简得

$$\frac{\partial V}{\partial t}+V\frac{\partial V}{\partial s}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}-g\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\qquad(3\text{-}67a)$$

或

$$\frac{\partial V}{\partial t}+V\frac{\partial V}{\partial s}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}+g\frac{\partial z}{\partial s}=0\qquad(3\text{-}67b)$$

上式称为非定常理想流体沿流线的欧拉运动微分方程。

对于定常流，上式变为

$$V\mathrm{d}V+\frac{\mathrm{d}p}{\rho}+g\mathrm{d}z=0 \tag{3-68}$$

用 g 通除上式，得另一形式为

$$\mathrm{d}\left(\frac{V^2}{2g}\right)+\frac{\mathrm{d}p}{\gamma}+\mathrm{d}z=0 \tag{3-69}$$

对于不可压理想流体，式（3-67）可写成

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{V^2}{2}+\frac{p}{\rho}+gz\right)=0 \tag{3-70}$$

再看流线的法向方向，流体微团的法向加速度记为 a_n，按式(3-66a) 也有

$$\rho\mathrm{d}s\mathrm{d}Aa_n=-\frac{\partial p}{\partial n}\mathrm{d}s\mathrm{d}A-\rho g\cos\beta\mathrm{d}s\mathrm{d}A$$

因$\cos\beta=\frac{\partial z}{\partial n}$，而$a_n$的表达式参看式（3-35），代入并化简得[下式用大写V_n代替法向分速]

$$\frac{\partial V_n}{\partial t}-\frac{V^2}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}-g\frac{\partial z}{\partial n} \tag{3-71a}$$

或

$$\frac{\partial V_n}{\partial t}-\frac{V^2}{r}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}+g\frac{\partial z}{\partial n}=0 \tag{3-71b}$$

上式称为非定常理想流体沿流线法向方向上的欧拉运动微分方程。

对于定常流，上式变为

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}+g\frac{\partial z}{\partial n}-\frac{V^2}{r}=0 \tag{3-72a}$$

对于定常不可压流，则有

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{p}{\gamma}+z\right)=\frac{V^2}{gr} \tag{7-72b}$$

如果讨论在水平面上的流动，因$\frac{\partial z}{\partial n}=0$，式（3-72$a$）变为

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}=\frac{V^2}{r} \tag{3-73}$$

这表明，流线如果发生弯曲，都是由于沿流线法向方向上有 $\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{p}{\gamma}+z\right)>0$ 或 $\frac{\partial p}{\partial n}>0$ 作用的结果。在水平面上流动时，则纯为压力差的作用；朝向曲率中心方向（即图示的法向负方向）跨流线压力必须减小。如果流线平直（曲率半径 $r\to\infty$），则在流线的法向方向上无压力变化，即 $\frac{\partial p}{\partial n}=0$。

§3-5 不可压理想流体沿流线的伯努利方程

理想流体沿流线的流动满足欧拉运动微分方程式（3-67）。沿流线积分有

$$\int\frac{\partial V}{\partial t}\mathrm{d}s+\int\frac{\mathrm{d}p}{\rho}+\frac{V^2}{2}+gz=\mathrm{Const.} \tag{3-74a}$$

对于定常流，上式则变为

$$\int\frac{\mathrm{d}p}{\rho}+\frac{V^2}{2}+gz=\mathrm{Const.} \tag{3-74b}$$

对于不可压理想流体，式(3-74a) 变为

$$\int\frac{\partial V}{\partial t}\mathrm{d}s+\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}+gz=\mathrm{Const.} \tag{3-74c}$$

对于定常不可压理想流体，上式则变为

$$\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}+gz=\mathrm{Const.} \tag{3-74d}$$

式(3-74)称为理想流体沿流线的伯努利方程。对于可压理想流体，要做出式(3-74a)中的积分，需要知道 $p=p(\rho)$ 和 $V=V(s,t)$ 的函数关系后才有可能，有关内容将在第六章介绍。对于液体和流速较低的气体，压缩性的影响并不大，可以按不可压流体

来处理。所以，关于定常不可压理想流体沿流线的伯努利方程式(3-74d）等，由于关系简单故十分有用。本节的重点也是介绍式(3-74d）的物理意义和它的应用。

一、定常不可压理想流体沿流线的伯努利方程

沿流线的伯努利方程，除了式(3-74d）的形式外，还有其他形式。用g除以式（3-74d）后得

$$\frac{p}{\gamma}+\frac{V^2}{2g}+z=\text{Const.} \qquad (3\text{-}75a)$$

以 ρ 除以式（3-74d）后得

$$p+\frac{1}{2}\rho V^2+\gamma z=\text{Const.} \qquad (3\text{-}75b)$$

既然沿一条流线，上述式子中的三项之和等于常数，那么，在一条流线上的两点之间则应有

$$\frac{p_1}{\rho}+\frac{V_1^2}{2}+gz_1=\frac{p_2}{\rho}+\frac{V_2^2}{2}+gz_2 \qquad (3\text{-}76a)$$

$$\frac{p_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1=\frac{p_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2 \qquad (3\text{-}76b)$$

$$p_1+\frac{1}{2}\rho V_1^2+\gamma z_1=p_2+\frac{1}{2}\rho V_2^2+\gamma z_2 \qquad (3\text{-}76c)$$

式（3-76）的形式表明，沿一条流线如果有一点的流动状态参数已知（比如，p_1，V_1，z_1和 ρ 等）则伯努利式的积分常数即可确定；再者，式中包含的是（z_1-z_2），（p_1-p_2）等差值，因而流线的高度 z 和压力 p 的计算基准可以视问题的需要分别任意选择，而不影响计算结果。

伯努利方程各项的物理意义如下：

$\frac{v^2}{2}$项代表单位质量流体因有速度而具有的动能。

gz 项代表单位质量流体因位于重力高度 z（从某一个选择的水平基准面量取的距离，参看图3-36）而具有的重力势能；它

相当于把流体提高到高度 z 处，为克服重力需对单位质量流体所作的功。

$\frac{p}{\rho}$ 项代表单位质量流体由压力等于 p 的点处流到压力 $p=0$ 点处时，压力合力对流体所作的功，称为流动功。因为按前图 3-35 知，作用在流体微团（其质量 $\mathrm{d}m=\rho\mathrm{d}s\mathrm{d}A$）上、沿流动方向的压力合力为 $-\mathrm{d}p\mathrm{d}A$，当流体微团由压力等于 p 的点移动到压力等于 $p+\mathrm{d}p$ 点时，位移为 $\mathrm{d}s$，则压力合力对流体微团所作的功为 $-\mathrm{d}p\mathrm{d}A\mathrm{d}s$；对单位质量流体所作的功则为 $-\frac{\mathrm{d}p}{\rho}$。当流体沿流线由 $p=p_1$ 点处流动到 $p=p_2$ 点处时，压力合力对单位质量流体所作的功为 $-\int_{p_1}^{p_2}\frac{\mathrm{d}p}{\rho}=\frac{p_1-p_2}{\rho}$（因 $\rho=\mathrm{Const.}$），故有如上所述的含义，$\frac{p}{\rho}$ 项代表流动功或位移功。流动功也称为流动

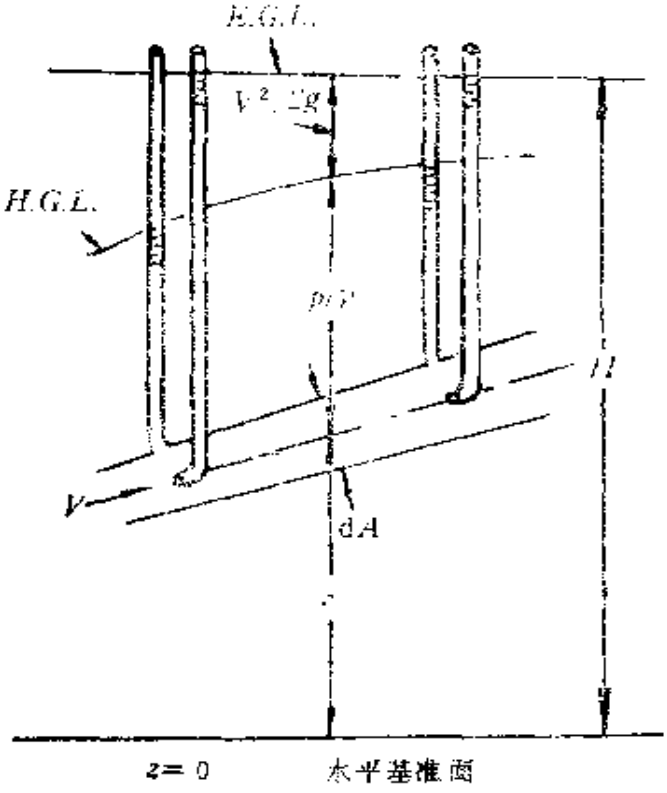


图 3-36

能，还有称为压力能的，但它容易引起误解以为是流体因有可压缩性（弹性）而具有的能量，并贮存在流体之中，比如象动能那样。应当注意，在固体力学中，只要运动物体的高度下降，重力势能就将变为动能；但在流体流动的过程中并不如此，还有其他限制条件如质量守恒等起作用。比如在斜置的一根等直径管道中，为保持不可压流体流过管道的质量流量不变，流速始终也不会变化，参看式(3-55)；尽管此时高度z减小但势能转变为动能的情况并没有发生；势能的减小转换成流动功了。所以，在某种意义上讲，流动功可看成是在流体输运过程中的一种势能。

因此，从式（3-74d）看，它代表沿一条流线单位质量流体输运的总机械能量始终保持不变，即势能、动能和流动功之和等于常数，但它们互相可以转换。

同理，从式（3-75a）看，它代表沿一条流线单位重量流体输运的总机械能量保持不变。由于此时方程式各项的因次（或称量纲）都是长度L，故z项代表了流体微团的位置高度，简称位势头；$\frac{p}{\gamma}$项相当的高度称为静压头，而$\frac{V^2}{2g}$项相当的高度称为速度头。式(3-75a)右端的常数，一般用H来表示称为总压头。故式(3-75a)表明，流线上一点处的总压头H，等于位势头z，静压头$\frac{p}{\gamma}$和速度头$\frac{V^2}{2g}$之和，而且沿一条流线有$H_1=H_2=\text{Const.}$用几何图形来表示的话，参看图3-36，可画一条水平的、被称做总压头线或称能量坡度线（$E.G.L.$）来代表。由$z+\frac{p}{\gamma}$画出来的高度线称做水力坡度线（$H.G.L.$）。能量坡度线和水力坡度线之间的距离表示出速度头的大小；而水力坡度线和流线之间的距离表示出静压头的大小。几何图象直观，一目了然，在分析某些不可压管流问题时常用到它们。

伯努利方程式（3-75b），代表沿一条流线单位体积流体输运的总机械能量保持不变。这个形式常用于高度z变化不大，特

别是气体作低速运动的情况。此时第三项γz相对较小而被略去、变成

$$p+\frac{1}{2}\rho V^2=\text{Const.} \qquad (3\text{-}77a)$$

和

$$p_1+\frac{1}{2}\rho V_1^2=p_2+\frac{1}{2}\rho V_2^2 \qquad (3\text{-}77b)$$

在上式中，p称为静压，$\frac{1}{2}\rho V^2$称为速压（也有称为动压的），而式子右端的常数，常用p_0来表示称为总压。故式(3-77a)表明沿一条流线的静压和速压之和保持不变，或者讲沿一条流线的总压等于常数。

二、伯努利方程的应用

上述伯努利方程有很多应用的例子。本段只举几个典型例子来说明伯努利方程的使用方法，注意事项，并随之熟悉一些基本流动现象。

1. 皮托管测速原理

在流场中，流速减小为零的点称为驻点。参看图3-37。在二维定常理想不可压来流速度为V_∞的直匀流场中，放入任一物体（图上用了一个上下对称的物体为例子来说明，并只画出了上半部的情况。），在迎着来流的物面上将会出现一个驻点；因为由于物体的出现，将迫使流体分上下两路绕物面（物面应是流面）流过，分界面上必有一条流线始终保持直线；因受物体的阻挡，沿该流线流速逐渐减小，流到A点处时流速迅速减小为零，A点就是该流线上的驻点。从流线定义知，流线上的一点只有一个方向，而流到驻点的那一条流线，过驻点后将分叉变成两条、沿物面向后流去，故驻点被称是流线上的奇异点。图上还画出了沿流线OAC的能量坡度线$E.G.L.$和水力坡度线$H.G.L$，它们可提供

出沿该流线的流动变化信息。

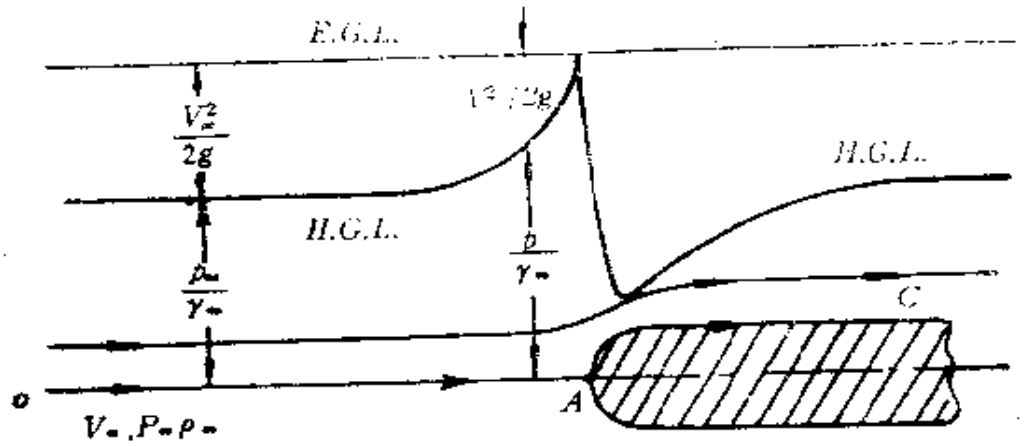


图 3-37

按伯努利方程式(3-77)知，驻点 A 处的压强为总压，沿流线OAC有

$$p_0 = p_\infty + \frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 \qquad (3\text{-}78)$$

如果设法用压力计测量出 p_0，p_∞，再利用式（3-78）则得速压$\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2$，从而可以算出流速$V_\infty$大小。

皮托利用上述原理，采用如图 3-38 所示的直角弯管（后被称为简单皮托管或总压管）来测量过塞纳河水的流速。由图可知，只要能读出总压管中的水柱高度 h，由下式即可算出V_∞

$$V_\infty = \sqrt{2gh} \qquad (3\text{-}79)$$

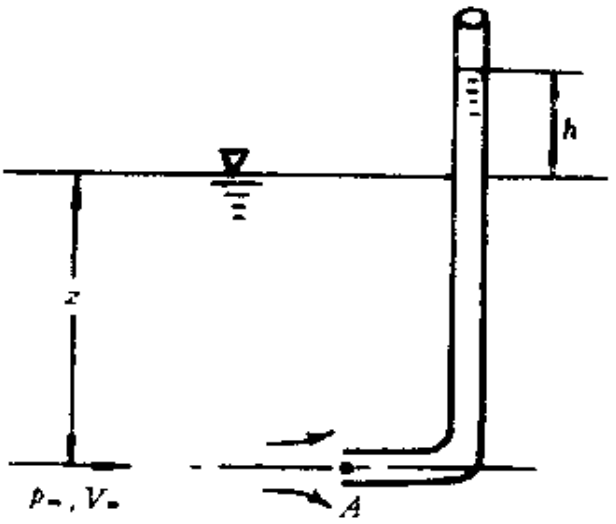


图 3-38

在管流中测量液体的流速，可以采用图 3-39(a) 所示的方法，用一根总压管和一根静压管分别测量总压和静压，然后连接到一个 U形管压力计上，测得图示测量

液柱 γ_m 的高度 h，然后用下式算出 V_∞

$$V_\infty = \sqrt{\frac{2(\gamma_m - \gamma_\infty)h}{\rho_\infty}} \qquad (3\text{-}80)$$

式中，γ_m 是 U 形管中使用的工作液体的重度。

目前最常用的测速管是将总压管和静压管组合在一起的、简称为皮托管。参看图 3-39(*b*)。内管为总压管，外管为静压管。测量静压的孔口位置和形状要精心选择，以避免皮托管头部绕流干扰影响（比如参看图3-37，孔口位置太靠前，静压测量值将低于待测值）和皮托管后支柱的干扰影响（孔口位置太靠后，静压测量值将高于待测值），否则都将影响测量结果的准确度。

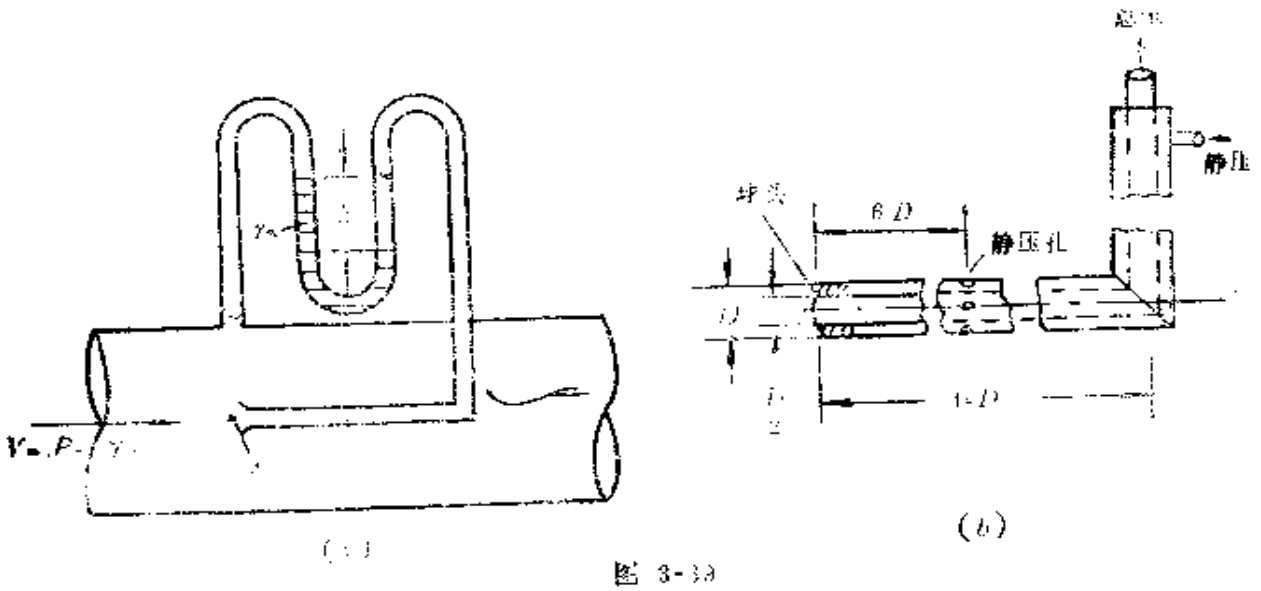


图 3-39

一般，按伯努利方程求出的速度称为理论值，而待测的实际速度为

$$V_\infty = \xi\sqrt{\frac{2(\gamma_m - \gamma_\infty)h}{\rho_\infty}} \qquad (3\text{-}81)$$

式中，ξ 称为皮托管的校正系数，需要由试验方法来确定。ξ 的大小取决于皮托管的外形。如图 3-39(*b*)所示的标准皮托管，试验表明，当 $\frac{\rho_\infty V_\infty D}{\mu_\infty} > 3\,000$ 时，$\xi \doteq 1.0$。

例 3-14 已知，用皮托管测量空气的来流速度大小。空气

的密度 $\rho_\infty = 1.23$公斤/米^3，U 形管比压计中使用的工作流体为水，$\gamma_m = 9.81$ 千牛/米^3，读数 $h = 150$ 毫米。$\xi = 1.0$。求：空气的来流速度 V_∞。

解 按式（3-81）有

$$V_\infty = \sqrt{\frac{2\times(9\,810 - 1.23\times 9.81)\times 0.15}{1.23}} = 48.88(\text{米/秒})$$

如果忽略去 $\gamma_\infty h$ 项，则有

$$V_\infty = \sqrt{\frac{2\gamma_m h}{\rho_\infty}} = \sqrt{\frac{2\times 9\,810\times 0.15}{1.23}} = 48.91(\text{米/秒})$$

两者结果相差甚微，即测量气体流速时，可以不计式（3-81）中 $\gamma_\infty h$ 项的作用。

2．文邱利流量计原理

在管流中经常需要测量流量的大小。用来测量流量的仪器称做流量计。如图 3-40 所示的，叫做文邱利流量计：它由进口段、收缩段，等截面圆柱段（也称为喉道）和管截面逐渐扩张的扩压段等四段组成，是众多类型流量中的一种。使用时串连在待测管路中。

假设从文邱利流量计进口截面①处到喉道截面②处，流动一维，且无任何损失。①，②截面的静压，照图所示用导管连到 U 形管比压计。文邱利流量计轴线可以倾斜。按式（3-76b），有

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

在流动过程中，还必须同时满足质量方程式（3-55），有

$$Q = A_1V_1 = A_2V_2$$

因此有

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{Q^2}{2gA_1^2} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{Q^2}{2gA_2^2} + z_2$$

故

$$Q = \left[\frac{2g\left(\frac{p_1}{\gamma} + z_1\right) - \left(\frac{p_2}{\gamma} + z_2\right)}{(1/A_2^2) - (1/A_1^2)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

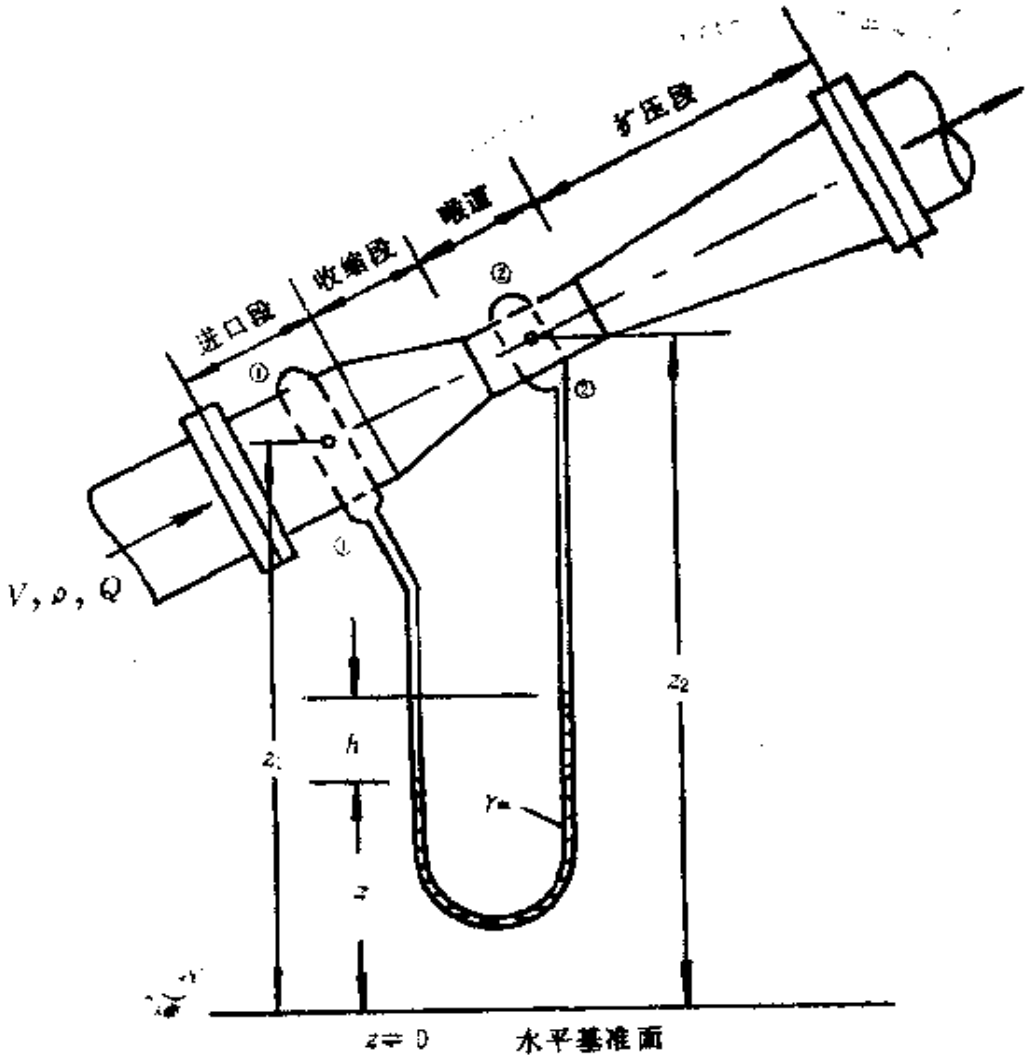


图 3-40

$$= A_1\left[\frac{2g\Delta h}{(A_1/A_2)^2-1}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (3\text{-}82a)$$

式中，

$$\Delta h = \left(\frac{p_1}{\gamma}+z_1\right)-\left(\frac{p_2}{\gamma}+z_2\right) \qquad (3\text{-}82b)$$

假定测压导管中充满着待测管内的流体，重度是γ，比压计中工作流体为$\gamma_m(>\gamma)$，从比压计中的静平衡条件知有

$$p_1+\gamma(z_1-z)=p_2+\gamma(z_2-z-h)+\gamma_m h$$

故可得

$$\Delta h=\left(\frac{p_1}{\gamma}+z_1\right)-\left(\frac{p_2}{\gamma}+z_2\right)=h\left(\frac{\gamma_m-\gamma}{\gamma}\right) \quad (3\text{-}82c)$$

代入式(3-82a)，有

$$Q=\frac{A_1}{[(A_1/A_2)^2-1]^{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{2g(\gamma_m-\gamma)h}{\gamma}} \quad (3\text{-}83)$$

由式（3-83）知，只要读出U形管比压计中的h值，代入即可算得通过管道的体积流量Q的大小，而无需知道文邱利流量计轴线具体倾斜角度的大小。

但是，如果采用在壁面上安装压力表的方式来测量①，②截面上的压力，参看图3-41上的例子，情况就变化了，需要知道z_1和和z_2的具体数值（即流量计轴线具体倾斜角度的大小）；然后通过式（3-82a）来计算Q的大小。至于应选用横截面上哪一条流线的z值呢？从式（3-72b）知，只通过横截面上的流线平直，$r\to\infty$，则有

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{p}{\gamma}+z\right)=0, \quad \frac{p}{\gamma}+z=\text{Const.} \quad (3\text{-}84)$$

即跨流线水力坡度线不改变（即选用任一条流线的z值均行）。但从代表一维流的平均值含义上看，选用截面上的中心流线的z值为佳，相应地在静压测量上也在①，②截面的周向打上多个静压孔，来保证测量的静压更接近于中心流线上的平均值。此外，为了保证在②截面上的流线平直，流速分布更加均匀，采用了平直的喉道，和前部收缩段等结构手段，尽管如此，仍因有粘性摩擦造成机械能耗散等等原因，按文邱利流量计测得的Δh值或者h值，来计算Q值，一般都大于实际通过的流量值，故式(3-82a）和式(3-83)都需要乘一个流量系数C_d(<1.0)，它可由试验来确定。

至于文邱利流量计后段采用逐渐扩张的扩压段的原因，乃是为了避免粘性流体可能产生的分离现象，造成流过流量计时有较大的机械能量的耗散损失，有关情况将在第五章介绍。

例 3-15　已知：有一竖直输油管道，$d=0.3048$米。油的比

重 $s.g.$ 为 0.82。用文邱利流量计来测量流量，见图 3-41。流量计进口截面 $d_1=0.3048$ 米，喉道截面 $d_2=0.1524$ 米。①，②截面上的压力采用上述两种方法（压力表和 U 形管比压计）来测量。各种测量结果和其他有关数据均注明在图上。求：利用两种测量结果，计算通过管道的体积流量 Q 的大小。

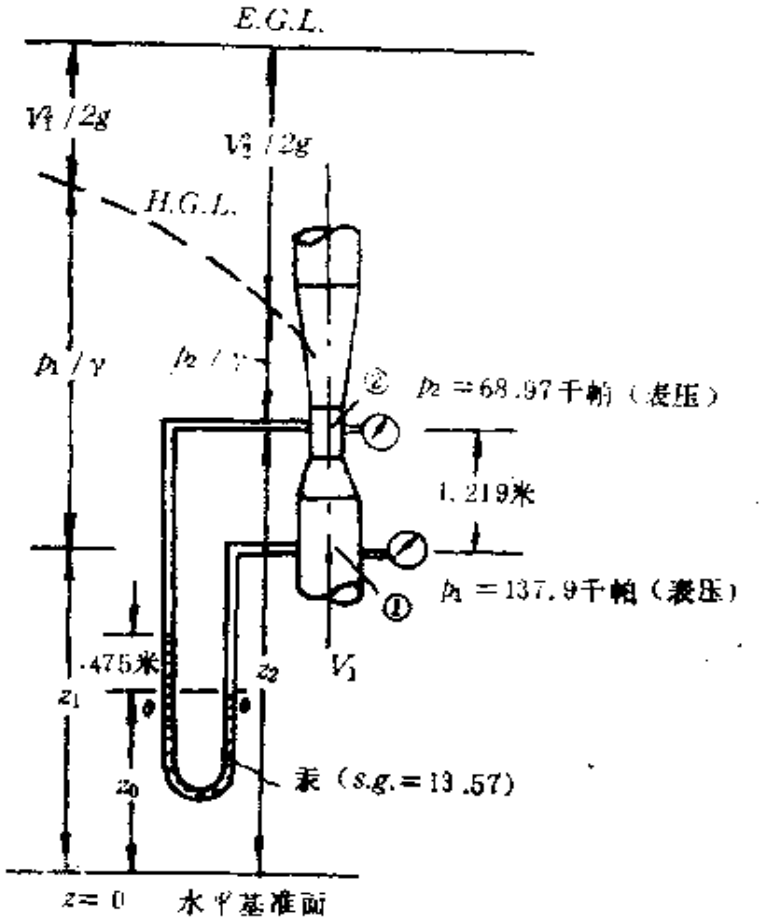


图 3-41

解 （1）利用 U 形管比压计测量结果 $h=0.475$ 米，代入式（3-83）有

$$Q=\frac{(\pi/4)\times 0.3048^2}{[(0.3048/0.1524)^2-1]^{\frac{1}{2}}}\times\sqrt{\frac{2\times 9.81\times(13.57-0.82)\times 0.475}{0.82}}$$

$$=0.226\ (\text{米}^3/\text{秒})$$

（2）利用压力表测量结果，先按式（3-82b）有

$$\Delta h=\left(\frac{137.9\times10^{3}}{0.82\times9.81\times10^{3}}+0\right)$$

$$-\left(\frac{68.9\times10^{3}}{0.82\times9.81\times10^{3}}-1.219\right)$$

$$=7.36(\text{米})$$

再代入式（3-82a）有

$$Q=(\pi/4)\times0.3048^{2}\left[\frac{2\times9.81\times7.36}{(0.3048/0.1524)^{2}-1}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=0.226\ (\text{米}^{3}/\text{秒})$$

可见两种测量方法所得结果一致。

3．孔口出流射流

在开口贮液箱的侧壁上开一孔口，液体将在重力作用下通过孔口流出，形成自由射流，参看图3-42。

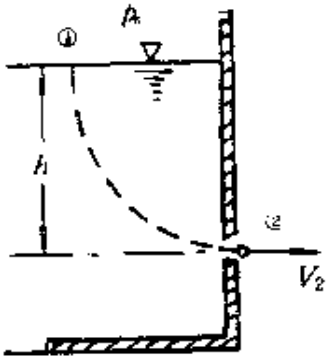


图 3-42

先讨论图示锐边小孔流出。这可利用伯努利方程来分析。设想选择一条流过孔口中心线的流线，如图上虚线所示。①点选在自由液面上，$p_1=p_a$（p_a代表大气压力），②点选在稍稍离开孔口截面外一点的地方，在该点处压力$p_2=p_a$。由于①点所处横截面积很大，使$V_1\approx0$。所以，按式（3-76b）有

$$\frac{p_1}{\gamma}+\frac{0}{2g}+z_1=\frac{p_2}{\gamma}+\frac{V_2^{2}}{2g}+z_2$$

或

$$\frac{V_2^{2}}{2g}=z_1-z_2=h$$

故

$$V_2=\sqrt{2gh}\qquad(3\text{-}85)$$

这个公式称为锐边小孔外射液流速度公式。

如果小孔的面积为 A，按下式计算所得体积流量为理论值，即

$$Q = A\sqrt{2gh} \tag{3-86}$$

实际上通过图示孔口的流量只有上式算得的 0.6～0.65 左右。换句话讲需要乘上一个由试验确定的流量系数 C_d，才能得到实际通过孔口的体积流量值。造成这一结果的原因有两个：

（1）由于有粘性造成机械能量的耗散损失。实际的射流速度比式（3-85）计算值要小一些，即需要乘上一个由试验确定的速度系数 C_v，大约为 0.97 左右，才是实际射流速度。

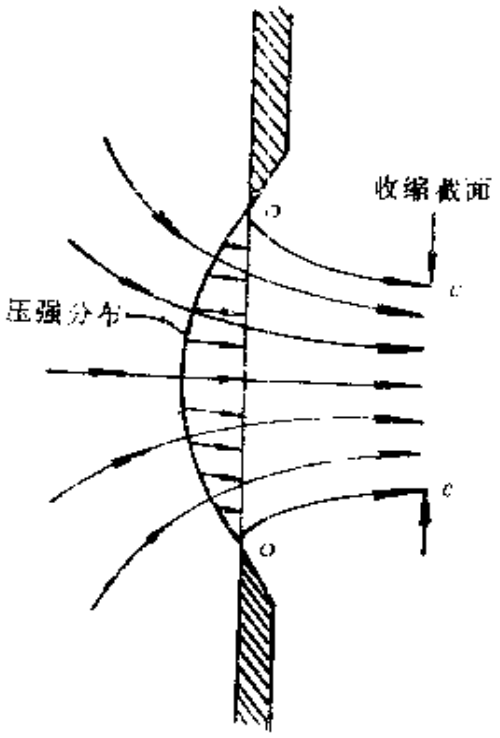


图 3-43

（2）由于孔口附近流线将发生弯曲和收缩。见图 3-43。在孔口处要求流体瞬间转向是不可能的。流出孔口的射流要流到图示 $C—C$ 截面处时，才能达到流线平直状况，这个截面称为孔口出流射流的收缩截面。在这个截面上 $p_c = p_a$，而 $A_c < A$。在孔口截面上，压力均大于大气压力（图上画的是表压力，不是绝对压力）。所以，在式（3-86）中的 A 应换成 A_c，或者该式应乘上一个由试验确定的面积收缩系数 $C_c = \frac{A_c}{A}$。图示锐边小孔，$C_c \approx 0.64$。

换句话讲，锐边小孔的流量系数 $C_d = C_v \times C_c$。

对于大孔口，由于孔口上、下部的水深 H 变化较大，用孔口中心线上的值来替代有误差，故需要用图 3-44 所示方法，具

体参看例3-16，用积分求得通过孔口的体积流量理论值，再乘上孔口流量系数 C_d，则得实际的体积流量大小。

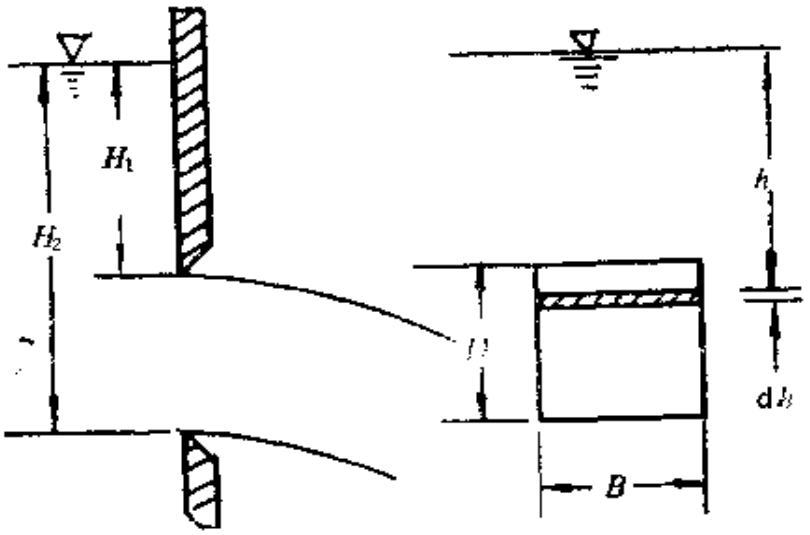


图 3-44

例 3-16 已知：水池通过宽度 $B=0.7$ 米，高度 $D=1.5$ 米的闸门来泄水。闸门在水下的深度如图 3-44 所示，$H_1=0.4$ 米。孔口流动如图所示。求：通过大孔口的理论体积流量计算公式，并比较如按小孔流出处理时，两者的差别。

解 （1）按图取一水平窄条面元，面积为 $B\mathrm{d}h$；通过这一窄条的射流速度为 $\sqrt{2gh}$，通过该面元的体积流量为

$$\mathrm{d}Q = B\sqrt{2g}\,h^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}h$$

积分

$$Q=\int_{H_1}^{H_2} B\sqrt{2g}\,h^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}h=\frac{2}{3}B\sqrt{2g}\,(H_2^{\frac{3}{2}}-H_1^{\frac{3}{2}}) \tag{3-87}$$

代入 B，H_2，H_1 等数据则得

$$Q=\frac{2}{3}\times 0.7\times\sqrt{2\times 9.81}\times(1.9^{\frac{3}{2}}-0.4^{\frac{3}{2}})$$

$$=4.891(\text{米}^3/\text{秒})$$

（2）按小孔流出计算，因 $A=BD$，而 $h=\frac{1}{2}(H_1+H_2)$，

代入式（3-86）有

$$Q = 0.7 \times 1.5 \times \sqrt{2 \times 9.81 \times 1.15} = 4.988(\text{米}^3/\text{秒})$$

后者的计算结果与前者的计算结果相对误差为1.98%。

4. 液体流动中的气穴现象

从式（3-75），（3-76）等知，当流速和位置高度 z 都增大时，流体的压力将迅速下降。对气体而言，如果压力下降过低，气体就会加剧膨胀，这时不仅不能当成不可压流体来处理，而且伯努利方程也不再适用。对于一定温度的液体，如果压力下降过低、甚至到接近或等于饱和蒸气压力 p_v 时，液体本身将气化，产生冷"沸腾"，形成气穴现象（也有称气蚀现象的）。大量气泡的发生、发展和重新凝结、破灭，对流动将产生巨大影响。如果气穴现象在固壁附近产生，还将在固壁上产生很大的局部应力，对输运管道，水力机械（象泵、涡轮和船用螺桨等）将带来噪音、振动、局部机械部件损伤，甚至破坏性的后果。因此，研究液体流动中的气穴现象有重要意义。

在有关液体的流动过程中，要留意压力最低的流动截面或地区，检查该处液体的绝对压力 p_{min} 是否接近当时温度下液体的饱和蒸气压力 p_v，并应采取措施保证 $p_{min} > p_v$，而不致于产生气穴现象。

例 3-17 已知：储水池中水温 $t = 20℃$，用图 3-45 所示管道引水。管径 $d = 0.15$ 米，$d_3 = d$、$H_1 = 10.67$ 米。大气压强 $p_a = 101.3$ 千帕，其它有关尺寸见图。求：喉道截面直径 d_2 等于多大时，将产生气穴现象。

解 因水温 $t = 20℃$，查表知此时水的饱和蒸气压力 $p_v = 2.34$千帕，水的重度 $\gamma = 9.792$千牛/米^3。

沿管道中心流线，作 $E.G.L.$ 和 $H.G.L.$：选出口截面③中心点的高度为零高度（水平基准线通过此点），压力均采用表压。在储水池自由液面上，$V_1 = 0$，$p_1 = 0$，$z_1 = 10.67$ 米。所以，①点处的总机械能量为 $H_1 = z_1$。沿流线流动不考虑任何损失，故流线

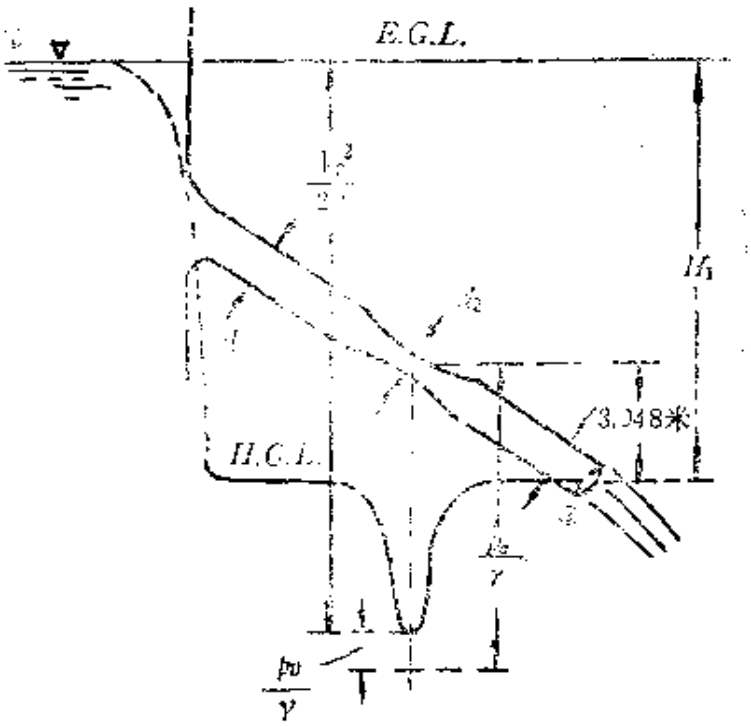


图 3-45

上各点的 $H=H_1=10.67$ 米，即 $E.G.L.$ 是一条平行于自由液面的水平线。再画 $H.G.L.$。流体沿流线加速时，$H.G.L.$ 与 $E.G.L.$ 的距离增大，当流速等于常数时，$H.G.L.$ 与 $E.G.L.$ 平行；在②点处，因速度最大，则 $H.G.L.$ 与 $E.G.L.$ 的距离最大；在出口截面上，$V=V_3$，$p_3=0$，$z_3=0$，所以 $H.G.L.$ 要通过③点。由图可见，在管路的大部分截面上，$H.G.L.$ 的高度低于流线的高度 z，表明在这些截面上的压力低于大气压力，即为真空压力。

喉道截面②速度最高，水流可能首先产生气穴的地方也在此处。近似估计，在不考虑任何流动损失条件下，产生气穴的条件为 $p_{min}=p_2=p_v$（绝对压力）。由图可知在②截面上有

$$H_2=z_2-\left(\frac{p_a}{\gamma}-\frac{p_2}{\gamma}\right)+\frac{V_2^2}{2g}=H_1$$

取 $p_2=p_v$ 代入上式，得

$$\frac{V_2^2}{2g}=H_1-z_2+\frac{p_a}{\gamma}-\frac{p_2}{\gamma}=10.67-3.048+$$

$$+\frac{101.3\times10^3-2.34\times10^3}{9.792\times10^3}$$

$$=17.7(\text{米})$$

在③截面上有

$$H_3=z_3+\frac{p_3-p_a}{\gamma}+\frac{V_3^2}{2g}=H_1$$

故（因 $p_3=p_a$，$z_3=0$）

$$\frac{V_3^2}{2g}=10.67(\text{米})$$

按质量方程式（3-55）有

$$\left(\frac{d_2}{d_3}\right)=\left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{10.67}{17.7}\right)^{\frac{1}{2}}$$

所以由上式可得（因 $d_3=0.15$ 米）

$$d_2=0.132(\text{米})$$

即 $d_2\leqslant0.132$ 米时，在喉道截面上将产生气穴。

5．不可压理想流体沿流线的非定常流

这里简单讨论不可压理想流体沿流线的非定常流动。按式（3-74c）有

$$\int\frac{\partial V}{\partial t}\mathrm{d}s+\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}+gz=\mathrm{Const.}\qquad(3\text{-}74c)$$

沿流线从①点积分到②点时有

$$\frac{p_1}{\rho}+\frac{V_1^2}{2}+gz_1=\frac{p_2}{\rho}+\frac{V_2^2}{2}+gz_2+\int_1^2\frac{\partial V}{\partial t}\mathrm{d}s\qquad(3\text{-}88)$$

上式称为非定常不可压理想流体沿流线的伯努利方程。它与式（3-76a）的不同就在于右端多了一项积分。只要能知道$\frac{\partial V}{\partial t}$沿流线的变化关系，就有可能把积分做出来，从而计及流动非定常性的影响。

例 3-18 已知：U 形管中的液体柱在 $t=0$ 瞬间的位置如图 3-46 所示，随后，液体柱将在管内产生振荡。假设液体无粘性，流动满足一维流条件。求：左枝液体柱液面位置与时间 t 的函数

关系以及振荡周期。

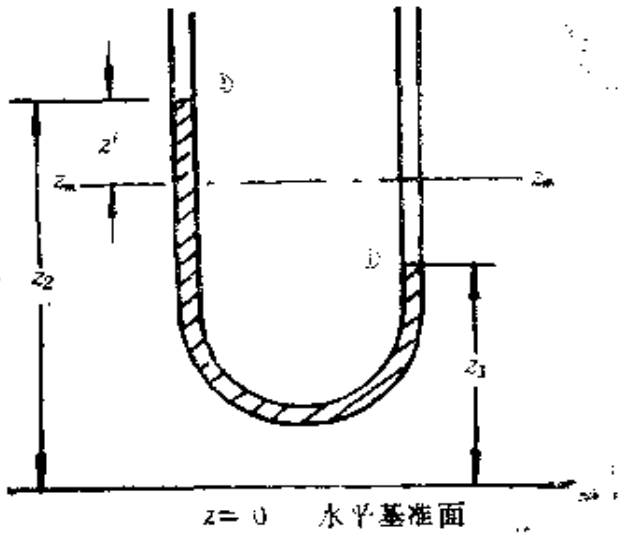


图3-46

解 按式（3-88）有

$$\frac{p_2-p_1}{\rho}+g(z_2-z_1)+\frac{V_2^2-V_1^2}{2}+\int_1^2\frac{\partial V}{\partial t}\mathrm{d}s=0$$

现按式（3-55）知，$V_1=V_2=V$；又因 $p_1=p_2=p_a$，故由上式得

$$g(z_2-z_1)+\frac{\partial V}{\partial t}L=0$$

式中，L是管内液柱的总长度。

作变量置换，取$z'=\frac{z_2-z_1}{2}$，它是左枝液面位置到液柱平衡位置z_m之间的距离，或写成$z'=z-z_m$；并且有$V=\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t}$，故由上式可得

$$\frac{\mathrm{d}^2z'}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{g}{L}z'=0$$

这个齐次微分方程的解为

$$z'=C_1\cos\left(\sqrt{\frac{2g}{L}}t\right)+C_2\sin\left(\sqrt{\frac{2g}{L}}t\right)$$

按初值条件：$t=0$，$z'=z_2-z_m$，$V=\dfrac{dz'}{dt}=0$，得$C_1=z_2-z_m$，$C_2=0$，故

$$z'=(z_2-z_m)\cos\left(\sqrt{\frac{2g}{L}}t\right)$$

或（$t=t$，$z'=z-z_m$）

$$z=z_m+(z_2-z_m)\cos\left(\sqrt{\frac{2g}{L}}t\right)$$

而振荡周期为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}}$$

例 3-19 已知：利用如图 3-47 所示等直径管道来排水箱中的水。水深 $h=3$ 米，管长 $L=6$ 米，而管径 $d=0.15$ 米。假设水可按不可压理想流体来处理。流动满足一维流条件。求：当管道右端阀门打开后，管中流速随时间的变化关系。

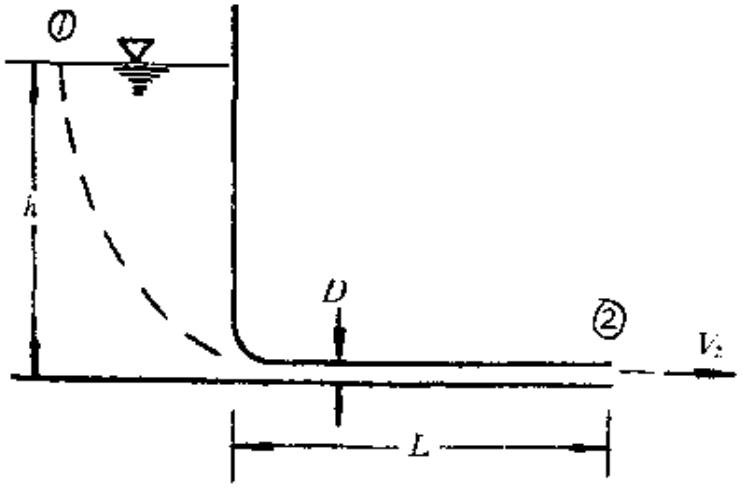


图 3-47

解 选一条流线，①点选在自由液面上，②点选在管道出口截面上。由于 $V_1=0$，$p_1=p_2=p_a$，而 $z_2=0$，按式（3-88）有

$$gz_1=gh=\frac{V_2^2}{2}+\int_1^2\frac{\partial V}{\partial t}ds$$

因是等直径管，$V=V(t)=V_2(t)$，沿流线积分由①→②，近似

用 $0\to L$ 替代，故有

$$gh=\frac{V_2^2}{2}+L\frac{dV_2}{dt}$$

分离变量得

$$\frac{dV_2}{2gh-V_2^2}=\frac{dt}{2L}$$

因 $t=0$，$V=V_2=0$，$t=t$，$V=V_2$，故

$$\int_0^{V_2}\frac{dV}{2gh-V^2}=\frac{1}{\sqrt{2gh}}\text{th}^{-1}\left(\frac{V}{\sqrt{2gh}}\right)\Bigg|_0^{V_2}$$

因 $\text{th}^{-1}(0)=0$，故最后有

$$\frac{1}{\sqrt{2gh}}\text{th}^{-1}\left(\frac{V_2}{\sqrt{2gh}}\right)=\frac{t}{2L}$$

或

$$\frac{V_2}{\sqrt{2gh}}=\text{th}\left(\frac{t}{2L}\sqrt{2gh}\right)$$

按题目所给数据有

$$\sqrt{2gh}=\sqrt{2\times 9.81\times 3}=7.67(\text{米/秒}),$$

$$\frac{t}{2L}\sqrt{2gh}=\frac{t}{2\times 6}\times 7.67=0.639t$$

故

$$V_2=7.67\text{th}(0.639t)(\text{米/秒})$$

按上式画出的图形见图 3-48 上的曲线。

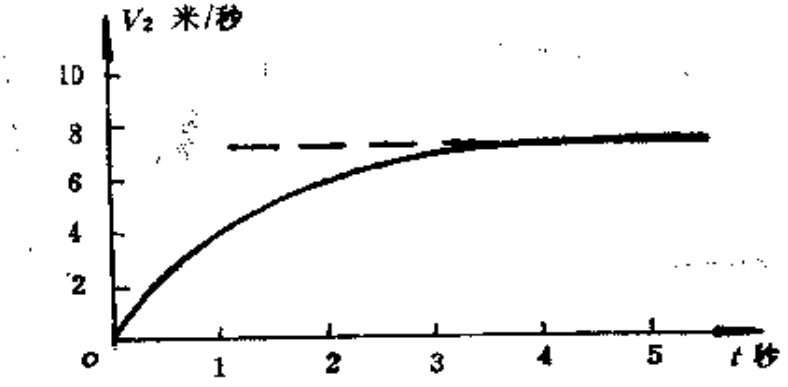


图 3-48

注意，由上式知，只当 $t\to\infty$ 时，$V_2\to\sqrt{2gh}$，即运动才趋于定常情况。实际上如取 $V_2=0.9\sqrt{2gh}$ 作为定常值的一次近似，所需时间 $t=1.5\frac{2L}{\sqrt{2gh}}$；在本例情况，$t=2.35$ 秒，可见所需时间并不很长。

§3-6 能量方程

本节将从热力学第一定律（能量守恒与转换定律）出发，来推导在流体的运动过程中，与外界有能量交换情况下的基本方程，流体的能量方程。重点放在能量方程的建立和讨论一维定常不可压理想流体的能量方程，并同定常不可压理想流体沿流线的伯努利方程作比较上。

一、能量方程的推导

由热力学第一定律知

$$\delta Q_H+\delta W=\mathrm{d}E_s \tag{3-89a}$$

式中，δQ_H 代表由外界加入流体系统的热量，δW 代表外界对流体系统所作做的功，$\mathrm{d}E_s$ 代表流体系统总能量的增量。它反映了该流体系统的能量守恒与转换定律。相对于单位时间的变化，则有下列关系

$$\dot{Q}_H+\dot{W}=\frac{\mathrm{d}E_s}{\mathrm{d}t} \tag{3-89b}$$

这时，式中 $\dot{Q}_H=\frac{\mathrm{d}Q_H}{\mathrm{d}t}$ 代表外界对系统的加热率，$\dot{W}=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$ 代表外界对系统所作功率的大小，而 $\frac{\mathrm{d}E_s}{\mathrm{d}t}$ 代表系统总能量的增加率。

流体系统的总能量 E_s，可按下式计算，即

$$E_s=\int_{\tau_s}e\mathrm{d}m=\int_{\tau_s}e\rho\mathrm{d}\tau \tag{3-89c}$$

式中，τ_0是流体系统的体积；e代表流体系统单位质量具有的能量，称为比能量，有

$$e = u + \frac{V^2}{2} + gz \qquad (3\text{-}89d)$$

式中，u是比内能，$\frac{V^2}{2}$是比动能，而gz是比重力势能。这里仅考虑了重力场中的势能；除此之外，如在电场或磁场中所具有的势能，表面张力势能，弹性势能等等在本书中均未计及。

利用雷诺输运方程式（3-51），可以方便地把上述流体系统的能量守恒与转换定律式（3-89b）等，变换成关于控制体的能量方程。参看图3-49，在流场中选择图示固定有限大小控制体CV，其控制面积为CS。从（3-51）式看，此时$N=E$，$\sigma=e$；利用式（3-51b）和(3-89b）得

$$\dot{Q}_H + \dot{W} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} e\rho \mathrm{d}\tau + \int_{CS} e\rho \vec{V}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A \qquad (3\text{-}90)$$

为了便于应用，把式(3-90）中左端的外加功率项$\dot{W}$写得稍为具体一些，即

$$\dot{W} = \dot{W}_{shaft} + \dot{W}_{normal} + \dot{W}_{shear} \qquad (3\text{-}91a)$$

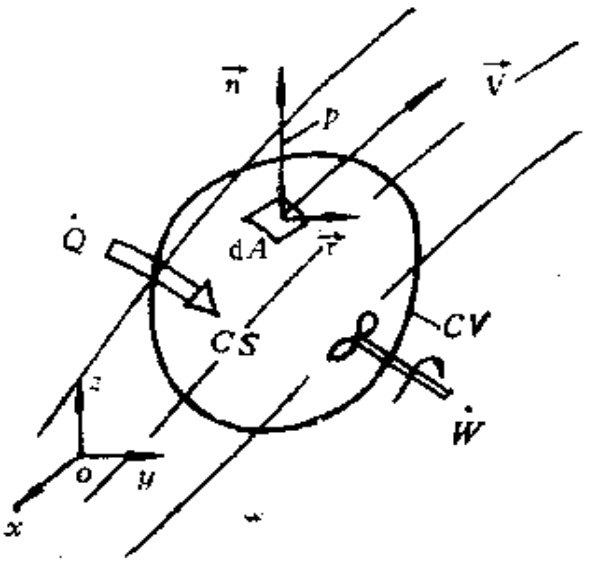


图 3-49

其中：

· $\dot{W}_{shaft}$称为轴功率，即外界（流体机械）通过一转轴系统穿过控制面对控制体内流体所作功率。泵给流体以功率，$\dot{W}_P>0$；涡轮从流体中吸收功率，$\dot{W}_T<0$。

· $\dot{W}_{normal}$称为流动功率，它是作用在控制面上的法向压力

合力对控制体内流体所作的功率。如作用在控制面面元 $\mathrm{d}\vec{A}=\vec{n}\,\mathrm{d}A$ 上的力为 $\mathrm{d}\vec{F}$，在 $\mathrm{d}\vec{F}$ 作用下该面元在 $\mathrm{d}t$ 时间内移动距离为 $\mathrm{d}\vec{s}$，则 $\mathrm{d}\vec{F}$ 所作的功为

$$\delta W_F=\mathrm{d}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s}$$

单位时间所作的功，即 $\dot{W}_F$ 为

$$\dot{W}_F=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\delta W_F}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathrm{d}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s}}{\mathrm{d}t}=\mathrm{d}\vec{F}\cdot\vec{V}$$

参看图 3-49，现作用在控制面面元 $\mathrm{d}A$ 上的法向压力为 p，法向压力合力 $\mathrm{d}\vec{F}=-p\vec{n}\,\mathrm{d}A$，故其所作功率为

$$\mathrm{d}\dot{W}_{normal}=\mathrm{d}\vec{F}\cdot\vec{V}=-p\vec{n}\,\mathrm{d}A\cdot\vec{V}=-p\vec{V}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A$$

沿控制面积分，则有

$$\dot{W}_{normal}=-\int_{CS}p\vec{V}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A \qquad (3\text{-}91b)$$

$\dot{W}_{shear}$ 称为摩擦功率，它是作用在控制面上的切向应力对控制体内流体所作功率。同理，如作用在面元 $\mathrm{d}A$ 上的剪切应力为 $\vec{\tau}$，则面元上的剪切力 $\mathrm{d}\vec{F}=\vec{\tau}\,\mathrm{d}A$ 所作功率为

$$\mathrm{d}\dot{W}_{shear}=\mathrm{d}\vec{F}\cdot\vec{V}=\vec{\tau}\,\mathrm{d}A\cdot\vec{V}=\vec{V}\cdot\vec{\tau}\,\mathrm{d}A$$

沿控制面积分，则有

$$\dot{W}_{shear}=\int_{CS}\vec{V}\cdot\vec{\tau}\,\mathrm{d}A \qquad (3\text{-}91c)$$

尽管在式(3-91b)，(3-91c)中，积分的控制面是 CS，但并不是作用在控制面任一面元上的压力 p 和剪切应力 $\vec{\tau}$ 都能作功。从性质上讲，可将 CS 分成

$$CS=CS_c+CS_s+CS_t+CS_{io} \qquad (3\text{-}91d)$$

式中，CS_c 代表转轴系统穿过控制面与控制面相截割的那一部分控制面面积，其上的剪切应力所作功率已在 $\dot{W}_{shaft}$ 中计及，不应再计入。CS_s 代表部分控制面为固壁（如果有的话）的那一部分控制面面积，虽然其上的 $p\neq 0$，$\vec{\tau}\neq 0$，但因 $\vec{V}=0$，故两者都不能作功。CS_t 代表 $\vec{V}\cdot\vec{\tau}\neq 0$ 的那一部分控制面面积，剪切应力

将作摩擦功。CS_{ic}代表$\vec{V}\cdot\vec{n}\neq 0$的那一部分控制面面积，即为有流量通过的部分控制面面积，法向压力将作流动功。当然，随控制面的取法变化，完全可能在同一部分控制面上，不仅$\vec{V}\cdot\vec{\tau}\neq 0$，而且$\vec{V}\cdot\vec{n}\neq 0$，所以，式（3-91$d$）代表的是性质上的划分，而不是代数上的划分。

总而言之，可将式（3-91a）写成

$$\dot{W}=\dot{W}_P-\dot{W}_T-\int_{cs}p\vec{V}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A+\int_{cs}\vec{V}\cdot\vec{\tau}\,\mathrm{d}A \qquad (3\text{-}91e)$$

将上式代入式（3-90），有

$$\dot{Q}_H+\dot{W}_P-\dot{W}_T-\int_{cs}p\vec{V}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A+\int_{cs}\vec{V}\cdot\vec{\tau}\,\mathrm{d}A$$
$$=\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}e\rho\,\mathrm{d}\tau+\int_{cs}e\rho\vec{V}\cdot\vec{n}\mathrm{d}A$$

注意，因

$$\int_{cs}p\,\vec{V}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A=\int_{cs}\left(\frac{p}{\rho}\right)\rho\,\vec{V}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A$$

代入上式，并将流动功率项移到等式右端，整理后有

$$\dot{Q}_H+\dot{W}_P-\dot{W}_T+\int_{cs}\vec{V}\cdot\vec{\tau}\,\mathrm{d}A$$
$$=\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}e\rho\,\mathrm{d}\tau+\int_{cs}\left(e+\frac{p}{\rho}\right)\rho\,\vec{V}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A$$

或

$$\dot{Q}_H+\dot{W}_P-\dot{W}_T-\int_{cs}\vec{V}\cdot\vec{\tau}\mathrm{d}A$$
$$=\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}\left(u+\frac{V^2}{2}+gz\right)\rho\,\mathrm{d}\tau$$
$$+\int_{cs}\left(u+\frac{V^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho}\right)\rho\,\vec{V}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A \qquad (3\text{-}92)$$

上式称为关于有限大小固定控制体的、三维非定常流的能量方程（积分形式）。流体既有可压缩性（$\rho\neq$Const.），又有粘性和导热性（$\mu\neq 0$，$\lambda\neq 0$）等。

对于定常流，上式将变为

$$\dot{Q}_H + W_P - W_T + \int_{CS} \vec{V} \cdot \vec{\tau}\, dA = \int_{CS} \left(u + \frac{V^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho}\right) \rho \vec{V} \cdot \vec{n}\, dA \qquad (3\text{-}93)$$

二、能量方程的各种形式及其应用

1．一维定常流能量方程

参看图 3-50 所示选择的固定有限控制体，现在进口、出口横截面①和②上有流体的流入和流出外；其他控制面上均无流动，但有轴功和热量的交换。整个流动定常。此外，还假定在①，②横截面上的流动是一维流；按式（3-93），这时，不仅控制面上的摩擦功项将等于零（尽管流体有粘性），而且右端积分项可以直接得出有

$$\dot{Q}_H + \dot{W}_P - \dot{W}_T = \dot{m}_2\left(u_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2\right) - \dot{m}_1\left(u_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1\right)$$

按质量方程式（3-55）有

$$\dot{m}_1 = \rho_1 V_1 A_1 = \dot{m}_2 = \rho_2 V_2 A_2 = \dot{m}$$

用 $\dot{m}$ 通除之，则得

$$q_H + w_P - w_T = \left(u_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2\right) - \left(u_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1\right) \qquad (3\text{-}94)$$

上式称为一维定常流能量方程。式中，q_H 代表外界对控制体内单位质量流体的加热量，w_P 代表泵给控制体内单位质量流体所作的功，而 w_T 代表涡轮从控制体内单位质量流体中吸收的功；该式表明，上述三项的代数和应等于右端进出口横截面上单位质量流体所输运的内能 u，动能 $\frac{V^2}{2}$，势能 gz 和流动功 $\frac{p}{\rho}$ 之和的差

值。应当指出，在上式中的 w，$\frac{V^2}{2}$，gz和$\frac{p}{\rho}$等项都是机械能；而与式中的 q_H，u 不同，后者是热能；按热力学第二定律知，热能并不是全部可利用的能量。换句话讲，前者可称为高级能，后者可称为低级能。在流动过程中，为克服粘性剪切力所作摩擦功率将把一部分机械能（高级能）不可逆地转变成热能（低级能），从能量守恒与转换定律角度来看，仍是满足的，能量的数量并没有减少；然而从能量的可用性角度来讲，就称为有流动损失了。当然单凭能量方程无法确定这一流动损失的大小。有关内容将在第五、六章中介绍。

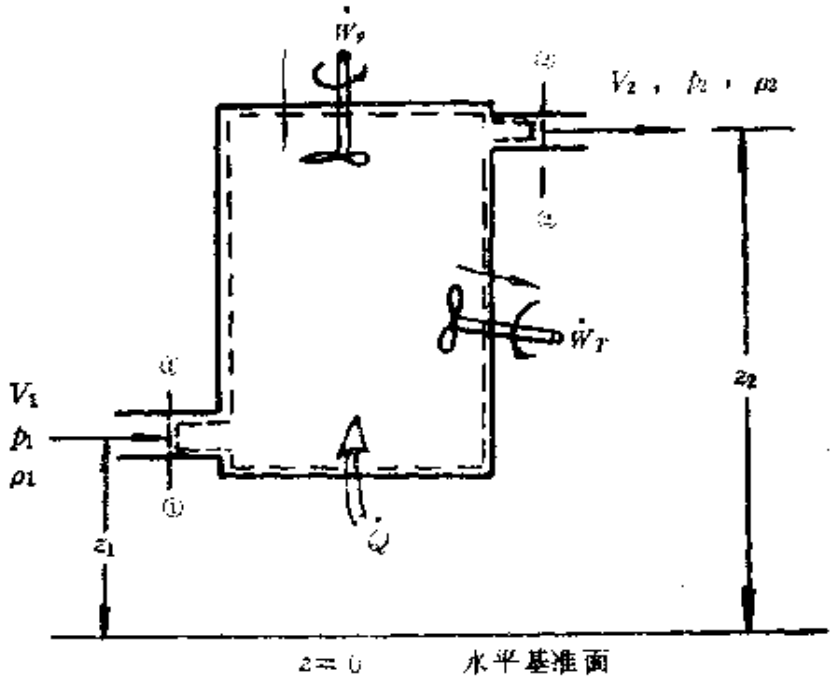


图 3-50

2．一维定常不可压理想流能量方程

与上一小段不同，此小段讨论不可压理想流体流动的能量方程。由于假设是理想流体，所取有限大小固定控制体的侧面可以选择流管壁面，流管的大小以能把要讨论分析的对象、如泵或涡轮等流体机械包含在内为前提。在侧面控制面上尽管有流速 $\vec{V}\neq 0$，但 $\vec{\tau}=0$，所以 $\dot{W}_{shear}=0$。在控制体的进出口横截面①，

②上仍假定为一维流；对控制体内其他部分流动是否一维并不要求。参看图3-51。同时，因假设是不可压流体、控制体与外界的热交换作用始终仅能表现为流体内能的变化，即有

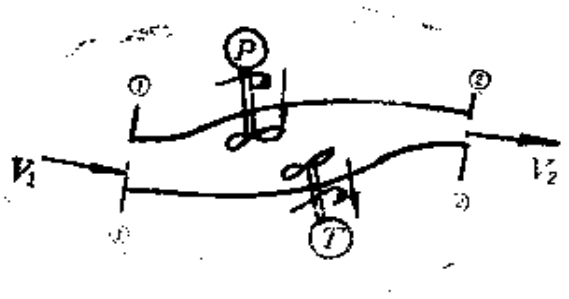


图 3-51

$$q_H = u_2 - u_1 = C(T_2 - T_1) \qquad (3\text{-}95a)$$

式中，C 是流体的比热，T 代表流体的温度。如果控制体与外界绝热（无热交换），$q_H = 0$，则 $u_2 = u_1$，或 $T_2 = T_1$。

因此，按式（3-94）有

$$w_P - w_T = \left(\frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2\right) - \left(\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} - gz_1\right) \qquad (4\text{-}95b)$$

上式称为一维定常不可压理想流能量方程。它反映了控制体与外界有轴功、流动功交换条件下机械能的守恒与转换律。

用 g 通除上式，得

$$\frac{w_P}{g} - \frac{w_T}{g} = \left(\frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2\right) - \left(\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1\right) \qquad (3\text{-}96)$$

引入符号

$$E_P = \frac{w_P}{g} = \frac{\dot{W}_P}{g\dot{m}}, \qquad E_T = \frac{w_T}{g} = \frac{\dot{W}_T}{g\dot{m}} \qquad (3\text{-}97)$$

代入式（3-96），则有

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + E_P = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + E_T \qquad (3\text{-}98)$$

式中，E_P 代表泵对单位重量流体所作的功（又称泵的扬程），E_T 代表涡轮从单位重量流体中吸收的功，整个方程乃是对单位重量流体而言的能量方程常用的形式。各项的单位都是焦耳/牛或米。

在工程计算中，通常需要确定安装在管路中的流体机械加入或吸收的总能量；故由式(3-98)求得 E_P 或 E_T 后，应乘以重量

流量 mg，则得流体机械的总功率，如单位以瓦计，则有

$$\text{流体机械的功率} = \frac{mgE_p(\text{或}E_T)}{1\,000} = \frac{Q\gamma E_p(\text{或}E_T)}{1\,000} \quad (3\text{-}99)$$

式中，Q 为流体的体积流量米^3/秒，γ 为流体的重度牛/米^3。

例 3-20　已知：如图 3-52 所示，是装有泵的局部管路。在进口横截面①处测得的表压为 250 毫米汞柱（真空度），在出口横截面②处测得的表压为 275×10^3 帕。$d_1=200$毫米，$d_2=150$ 毫米。水的重度 $\gamma=9.8\times10^3$ 牛/米^3。其他有关尺寸见图。不计粘性损失。求：保持通过管路的水体积流量 $Q=0.15$ 米^3/秒时，泵必须给流体提供多大功率？

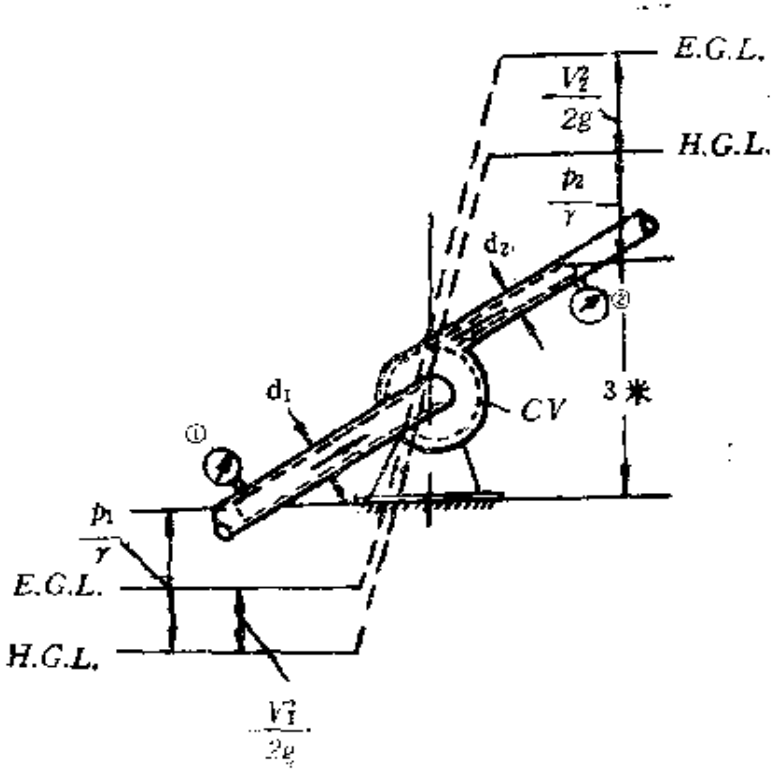


图 3-52

解　取图示虚线表示的控制体。有水通过的只有①，②横截面。选①横截面上中心点作为位置高度的基准，$z_1=0$；由图可知，$z_2=3$ 米。再画水力坡度线，因 $\frac{p_1}{\gamma}=-3.39$ 米（水柱），

$\frac{p_2}{\gamma}$ = 28.1 米（水柱），故在 z_1 点处向下量 3.39 米向左画一水平线，在 z_2 点处向上量 28.1 米向右画一水平线即得 $H.G.L.$。最后画能量坡度线，因 $Q = 0.15$ 米^3/秒，而 $A_1 = 0.0314$ 米^2，$A_2 = 0.0177$ 米^2，按质量方程可求得 $V_1 = 4.77$ 米/秒，$V_2 = 8.47$ 米/秒，而 $\frac{V_1^2}{2g} = 1.16$ 米，$\frac{V_2^2}{2g} = 3.68$ 米，故可画出 $E.G.L.$。显然，总能量的增加只能是泵提供的。由图或式(3-98)得（此时，$E_T = 0$.）

$$E_p = \left(\frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2\right) - \left(\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1\right) = (28.1 + 3.68 + 3) - (-3.36 + 1.16 + 0)$$

$$= 37.0 \text{（焦耳/牛）}$$

所以

$$\text{泵功率} = \frac{Q\gamma E_p}{1\,000} = \frac{0.15 \times 9.8 \times 10^3 \times 37.0}{1\,000} = 54.4 \text{（瓩）}$$

应当指出，此时对泵内流动的情况并不清楚，也不会是一维流，这都不妨碍式（3-98）的使用。自然，在泵的前后，$E.G.L.$ 和 $H.G.L.$ 都无法仔细画出，只能用陡然上升来代表有能量加入而已。

例3-21　已知：在图 3-53 上表示了一个涡轮机的工作示意图。水库中的水通过 $d_1 = 1.5$ 米管道来推动涡轮；然后经 $d_2 = 2.0$ 米出水管道将水排入大气之中。有关其他尺寸见图。$\gamma = 9.81 \times 10^3$ 牛/米^3。求：当通过管道的水体积流量为 19 米^3/秒时，涡轮机输出功率的大小。

解　在图上已将 $H.G.L.$ 和 $E.G.L.$ 画出。水流过涡轮，$E.G.L.$ 突然下降，表示能量为涡轮吸收，具体高度待求。注意，与泵的情况不同，进口截面上的表压大于零，而出口截面上的压力为真空压力。由质量方程知 $V_2 = 6.05$ 米/秒。由图或式(3-98)可得（此时，$E_p = 0$）

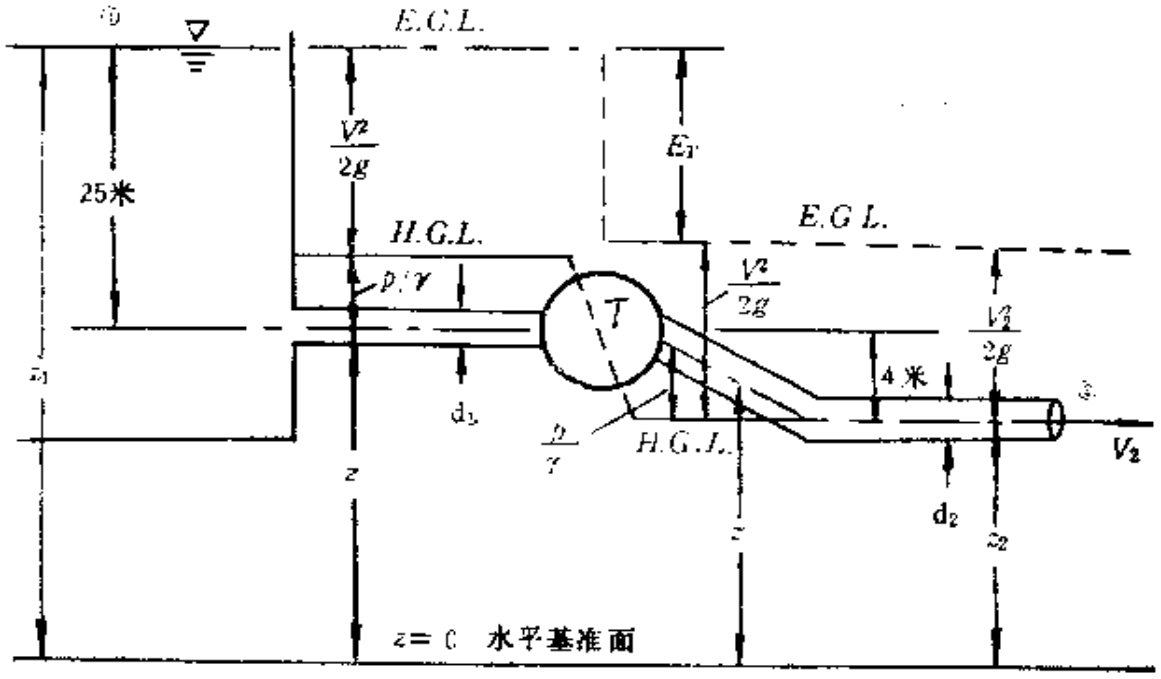


图 3-53

$$E_T=\left(\frac{p_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1\right)-\left(\frac{p_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2\right)=(0+0+29)$$

$$-\left(0+\frac{6.05^2}{2\times 9.81}+0\right)$$

$$=27.13\text{（焦耳/牛）}$$

所以

$$\text{涡轮吸收功率}=\frac{Q\gamma E_T}{1\,000}=\frac{19\times 9.81\times 10^3\times 27.13}{1\,000}$$

$$=5.06\text{（瓩）}$$

3．一维定常不可压理想流能量方程同定常不可压理想流体沿流线的伯努利方程的关系

选择如图3-54所示的微控制体：控制体的侧面为流管壁面，控制体中心线为一条流线；当流管各个横截面积同时趋于零时，则变成一条中心流线了。假设不可压理想流体沿图示控制体的各个横截面上的流动均为一维定常流，因控制体与外界无轴功交

换，按式（3-95）有

$$q_H = u_2 - u_1 \tag{3-100}$$

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2$$

显然，如控制体与外界绝热（无热量交换），$q_H = 0$，则有 $u_2 = u_1$，则式（3-100）完全与式（3-76a）相同。这表明前面介绍的伯努利方程是不可压理想流体与外界无轴功和热量交换下的能量方程。尽管它是利用牛顿第二定律推导的，而能量方程是利用热力学第一定律（能量守恒与转换定律）推导的。出发点和限制条件均不相同。

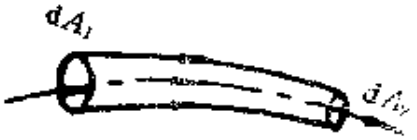


图 3-54

在上述特定条件下，两个方程形式上的一致绝不表明两个基本物理定律是相关的。一般情况下，流体运动必须分别满足牛顿第二定律与热力学第一定律或运动方程与能量方程。

§ 3-7 动量方程和动量矩方程

本节将利用牛顿第二定律来推导固定控制体或作直线加速度运动控制体的动量方程；利用动量矩定律来推导固定控制体的动量矩方程。它们都是流体运动过程中必须遵循的基本方程，并在工程流体力学问题中有重要的使用价值。

一、惯性坐标系中的动量方程

对于流体系统，牛顿第二定律的表述形式可见式（3-66）。利用雷诺输运方程式（3-51）可以方便地把式（3-66），变换成关于控制体的动量方程。仍参看图3-49，在流场中选择图示的固定有限大小控制体CV，控制面积为CS。从（3-51b）式看，此时 $\boldsymbol{N} = \vec{P}$，$\sigma = \vec{V}$，利用式（3-51b）和（3-66）得

$$\vec{F} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{cv} \rho \vec{V}\, d\tau + \int_{cs} \vec{V}\,(\rho \vec{V} \cdot \vec{n}\, dA) \tag{3-101}$$

式中，$\vec{F}$为作用在控制体上外力的合力，用$\vec{F}_p$代表作用在控制面上法向压力产生的合力，用$\vec{F}_\tau$代表作用在控制面上切向应力产生的合力，用$\vec{F}_v$代表作用在控制体上的体积力(仅考虑重力)，则有

$$\vec{F} = \vec{F}_p + \vec{F}_\tau + \vec{F}_v \tag{3-102a}$$

而

$$\vec{F}_p = -\int_{cs} p\,\vec{n}\mathrm{d}A, \quad \vec{F}_\tau = \int_{cs} \vec{\tau}\mathrm{d}A \tag{3-102b}$$

和（因作用在单位质量流体上的重力为$\vec{f}_v$）

$$\vec{F}_v = \int_{cv} \vec{f}_v \rho \mathrm{d}\tau \tag{3-102c}$$

代入式（3-101），得

$$\vec{F}_p + \vec{F}_\tau + \vec{F}_v = \frac{\partial}{\partial t}\int_{cv} \rho\vec{V}\,\mathrm{d}\tau + \int_{cs}\vec{V}(\rho\vec{V}\cdot\vec{n}\mathrm{d}A) \tag{3-103}$$

上式称为关于固定有限大小控制体的线动量方程（积分形式）。它说明作用在控制体上的合力等于控制体内流体动量对时间的变化率与通过控制面净动量率之和。

对于定常流，式（3-103）将变为

$$\vec{F}_p + \vec{F}_\tau + \vec{F}_v = \int_{cs}\vec{V}(\rho\vec{V}\cdot\vec{n}\mathrm{d}A) \tag{3-104}$$

应当强调指出，一是式（3-103）未对流体作任何假设，即实际流体也满足；二是所谓固定控制体乃是相对于选择的坐标系（比如是xyz坐标系）而言的。如果选择的坐标系本身相对于另一惯性坐标系（比如XYZ坐标系，它固连于地球上不动）作等速直线运动；从相对运动观点来看，因式（3-66）照样适用，故式（3-103）仍然可用，但需要把原式中的所有速度向量换成为相对速度向量才成，即

$$\vec{F}_p + \vec{F}_\tau + \vec{F}_v = \frac{\partial}{\partial t}\int_{cv} \rho\vec{V}_{xyz}\mathrm{d}\tau + \int_{cs}\vec{V}_{xyz}(\rho\vec{V}_{xyz}\cdot\vec{n}\mathrm{d}A) \tag{3-105}$$

式中，用$\vec{V}_{xyz}$代表xyz坐标系作等速直线运动时（也即控制体作等速直线运动时），在动量方程中应采用的相对速度向量，即用观察者站在xyz坐标系上看到的速度向量来进行计算。

注意，动量方程式（3-103）或（3-105）都是向量式，使用时常用在坐标系中的投影式来运算。这里，以式（3-103）为例，写出在笛卡尔坐标系中的投影式。因

$$\vec{V}=u\vec{i}+v\vec{j}+w\vec{k}$$

故有

$$\begin{aligned}
\sum F_x &= F_{p_x}+F_{\tau x}+F_{vx}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}\rho u\mathrm{d}\tau+\int_{cs}u(\rho\vec{V}\cdot\vec{n}\mathrm{d}A)\\
\sum F_y &= F_{py}+F_{\tau y}+F_{vy}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}\rho v\mathrm{d}\tau+\int_{cs}v(\rho\vec{V}\cdot\vec{n}\mathrm{d}A)\\
\sum F_z &= F_{pz}+F_{\tau z}+F_{vz}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}\rho w\mathrm{d}\tau+\int_{cs}w(\rho\vec{V}\cdot\vec{n}\mathrm{d}A)
\end{aligned}\tag{3-106}$$

又因式中$\vec{V}\cdot\vec{n}=V\cos\alpha$，这里用$V$代表速度向量的模，$\alpha$为控制面面元$\mathrm{d}A$的单位外法线向量$\vec{n}$和通过该面元的速度向量$\vec{V}$之间的夹角，故上式也可写成：

$$\begin{aligned}
\sum F_x &= F_{px}+F_{\tau x}+F_{vx}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}\rho u\mathrm{d}\tau+\int_{cs}u\rho(V\cos\alpha)\mathrm{d}A\\
\sum F_y &= F_{py}+F_{\tau y}+F_{vy}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}\rho v\mathrm{d}\tau+\int_{cs}v\rho(V\cos\alpha)\mathrm{d}A\\
\sum F_z &= F_{pz}+F_{\tau z}+F_{vz}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}\rho w\mathrm{d}\tau+\int_{cs}w\rho(V\cos\alpha)\mathrm{d}A
\end{aligned}\tag{3-107}$$

使用动量方程的投影式来分析流动问题，要注意如下几点：

（1）要从有利于运算和解决问题的角度来选择控制体。

（2）速度分量u，v和w，以及作用力分量的正负与所选择

的坐标系有关。

（3）通过控制面的质量流量$\rho \vec{V} \cdot \vec{n} \mathrm{d}A = \rho(V\cos\alpha)\,\mathrm{d}A$的正负仅取决于$\cos\alpha$的正负，与坐标系选择无关。$V = |\vec{V}|$，始终是相对控制面而言的。

从原则上讲，可以有两类控制体供选择：

一类是流体流过的物体不包括在所取控制体之内，而物体的部分壁面构成控制面的一部分，参看图3-55(a)，(b) 等。

另一类是控制体将流体流过的物体包括在内，参看图3-55(c)。对于这种情况，应将式(3-103)或式（3-105）作些变换和说明，以便推得常用的形式。

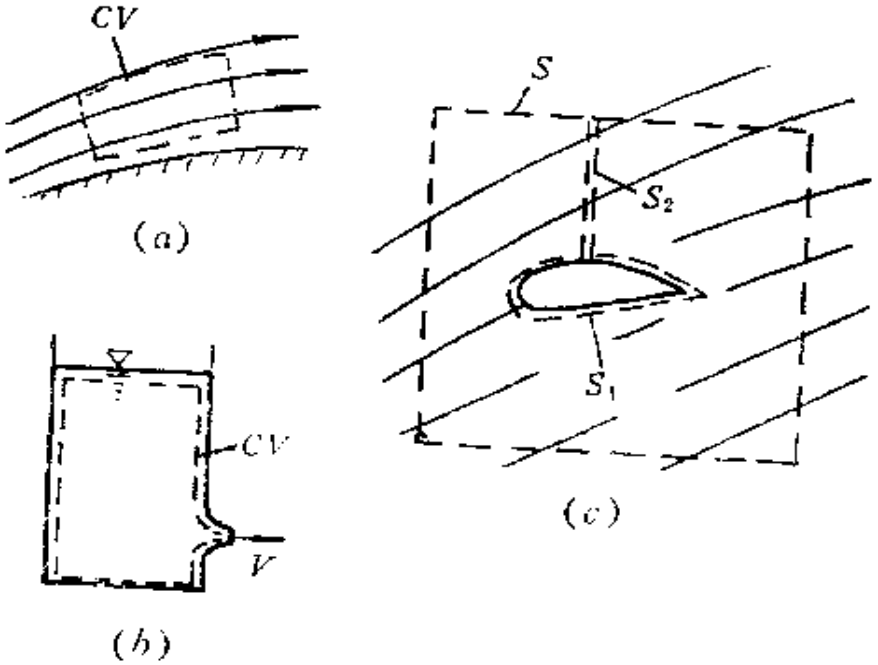


图 3-55

参看图 3-55(c)，控制体的控制面 CS 应理解为由外控制面S和流体绕流过的整个物面边界S_1组成，S和 S_1 之间用一个双层的S_2面连接起来，从而构成一个封闭的控制体 CV。按式（3-103）或（3-105）作面积分时，因双层 S_2 面上的结果正负相互抵消，故积分面积是 $S+S_1$. 在求 $\vec{F}_r$ 和 $\vec{F}_r$ 时的积分面积也应是 $S+S_1$（参看式（3-102b））。又因研究问题的着眼点大都放在流体和物体间的相互作用力的大小上，故单独把作用在控制面S_1上的

力分出来单独书写，即

$$\vec{F}_p + \vec{F}_\tau = (\vec{F}_p - \vec{F}_\tau)_{s} + (\vec{F}_p + \vec{F}_\tau)_{s_1}$$

其中，$(\vec{F}_p + \vec{F}_\tau)_{s_1}$代表物体对流体的作用力，利用作用与反作用原理知，流体对物体的作用力，如用符号$\vec{F}_B$代表，则有

$$\vec{F}_B = -(\vec{F}_p + \vec{F}_\tau)_{s_1}$$

这时，式（3-103）可改写成：

$$\vec{F}_B = (\vec{F}_p + \vec{F}_\tau)_s + \vec{F}_v$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv} \rho\vec{V}\mathrm{d}\tau - \int_s \vec{V}\ (\rho\vec{V}\cdot\vec{n}\mathrm{d}A) \quad (3\text{-}108)$$

注意，上式右端净动量率积分项的积分面积也只是外控制面 S，因为S_1面积上无动量通过。

设法通过适当选择外控制面 S 的形状与位置，使作用在 S面上法向压力 p 的分布成为已知量，并使作用在 S 面上的剪切应力$\vec{\tau}$变得很小，乃至为零，而有$\vec{F}_\tau = 0$；参看式（3-102b）；这时式（3-108）则变为

$$\vec{F}_B = -\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv} \rho\vec{V}\mathrm{d}\tau + \int_{cv} \rho\vec{f}_v\mathrm{d}\tau$$

$$-\int_s [p\vec{n} - \rho\vec{V}(\vec{V}\cdot\vec{n})]\mathrm{d}A \quad (3\text{-}109)$$

对于定常流，有

$$\vec{F}_B = -\int_s [p\vec{n} + \rho\vec{V}(\vec{V}\cdot\vec{n})]\mathrm{d}A + \int_{cv} \rho\vec{f}_v\mathrm{d}\tau \quad (3\text{-}110)$$

对于定常流，又不计重力作用时，有

$$\vec{F}_B = -\int_s [p\vec{n} + \rho\vec{V}(\vec{V}\cdot\vec{n})]\mathrm{d}A \quad (3\text{-}111)$$

使用等式（3-109）时也要用到投影式。令$\vec{F}_B = X_B\vec{i} + Y_B\vec{j} + Z_B\vec{k}$，$\vec{f}_v = f_x\vec{i} + f_y\vec{j} + f_z\vec{k}$，$\vec{n} = \cos(n, x)\vec{i} + \cos(n, y)\vec{j} + \cos(n, z)\vec{k}$，则式（3-109）在笛卡尔坐标系中的投影式为

$$X_B = -\int_s [p\cos(n,x) + \rho u(V\cos\alpha)]\,dA + \int_{cv}\rho f_x d\tau - \frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}\rho u d\tau$$

$$Y_B = -\int_s [p\cos(n,y) + \rho v(V\cos\alpha)]\,dA + \int_{cv}\rho f_y d\tau - \frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}\rho v dt \qquad (3-112)$$

$$Z_B = -\int_s [p\cos(n,z) + \rho w(V\cos\alpha)]\,dA + \int_{cv}\rho f_z d\tau - \frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}\rho w d\tau$$

使用上式的其他注意事项与使用式（3-107）类同。

二、动量方程的应用

1. 自由射流对壁面的冲击力

例 3-22　已知：二维液体射流的流速为 V，宽度为 b，射向一个倾斜角为 θ 角的平板。参看图3-56。射流打到斜板上时，将分成两股沿板面流走，但液流的宽度并不一样，流到较远处时一股的宽度变为 b_1，另一股宽度变为 b_2。射流在分股前后，内部的流速和压力变化很复杂，但每股最外层的液流都直接和大气相接触，其压力必恰好等于大气压力 p_a。分股之后流动复归均一时，流动截面上的静压都将等于 p_a。假定流动平面为水平面，液体为不可压理想流体，流动过程无任何损失，而且是定常流动。求：射流对斜板壁面的冲击力（垂直于板面的力）的大

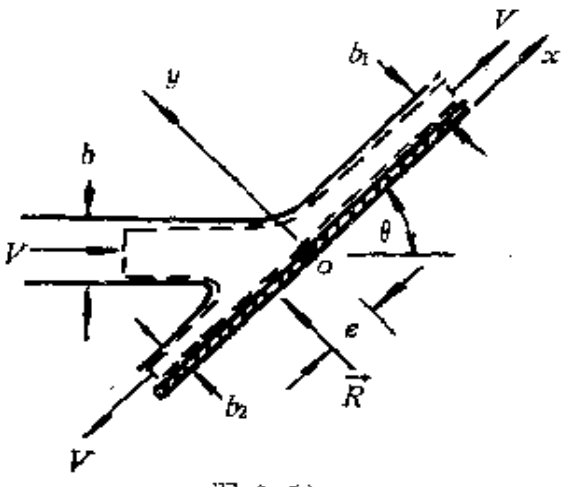


图 3-56

小和射流的宽度比$\frac{b_1}{b_2}$的大小。

解 取图3-56上用虚线表示的控制体，和坐标系。分析这个问题有四个方程可以利用：质量方程，能量方程和动量方程的两个投影式。因在两股液流复归均--处的 z 和$\frac{p}{\rho}$均不变，故从能量方程知，该处的流速都等于 V。再从质量方程知有

$$b_1 + b_2 = b \tag{3-113}$$

可利用的动量方程两个投影式，按式（3-107）有

$$\sum F_x = F_{Bx} + F_{Tx} + F_{vx} = \int_{cs} u\rho(V\cos\alpha)\mathrm{d}A$$

$$\sum F_y = F_{By} + F_{Ty} + F_{vy} = \int_{cs} v\rho(V\cos\alpha)\mathrm{d}A$$

按假设液体为不可压理想流体，流动平面为水平面，故 $F_{Tx} = F_{Ty} = F_{vx} = F_{vy} = 0$。沿整个控制面的压力均取表压；与板面相接触部分控制面上的压力分布并不知道，但其合力可用$\vec{R}$代表，是待求量；已在图上标出其方向；其他控制面上的表压应均为零。所以，有

$$\sum F_x = 0 = \int_{cs} u\rho(V\cos\alpha)\mathrm{d}A = V(\rho V b_1) - V(\rho V b_2) - V\cos\theta(\rho V b)$$

由此得

$$b_1 - b_2 = b\cos\theta \tag{3-114}$$

和

$$\sum F_y = |\vec{R}| = \int_{cs} v\rho(V\cos\alpha)\mathrm{d}A = V\sin\theta(\rho V b)$$

即

$$|\vec{R}| = \rho V^2 b\sin\theta \tag{3-115}$$

可见，射流对斜板壁面的冲击力大小等于$|\vec{R}|$，但方向与图示相反。θ角越大，$|\vec{R}|$越大。

利用式（3-113)和（3-114）联立求解可得

$$b_1=\frac{b}{2}(1+\cos\theta),\qquad b_2=\frac{b}{2}(1-\cos\theta)\tag{3-116}$$

而

$$\frac{b_1}{b_2}=\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}\tag{3-117}$$

例 3-23 已知：在自由水射流的冲击下，水射流流过冲击涡轮叶片的情况，见图3-57。射流在叶片的导流下偏转角 $\theta=60°$，射流流速 $V=30$ 米/秒，质量流量 $m=80$公斤/秒。水的 $\rho=1000$ 公斤/米^3。还假定流动定常，流体为不可压理想流体。不计重力。求：（1）如果叶片静止不动，水射流作用上叶片上的冲击力；（2）在水射流冲击下，叶片沿初始射流方向以速度 $U=10$ 米/秒运动，为保持这一等速直线运动，对叶片应施加的外力多大。

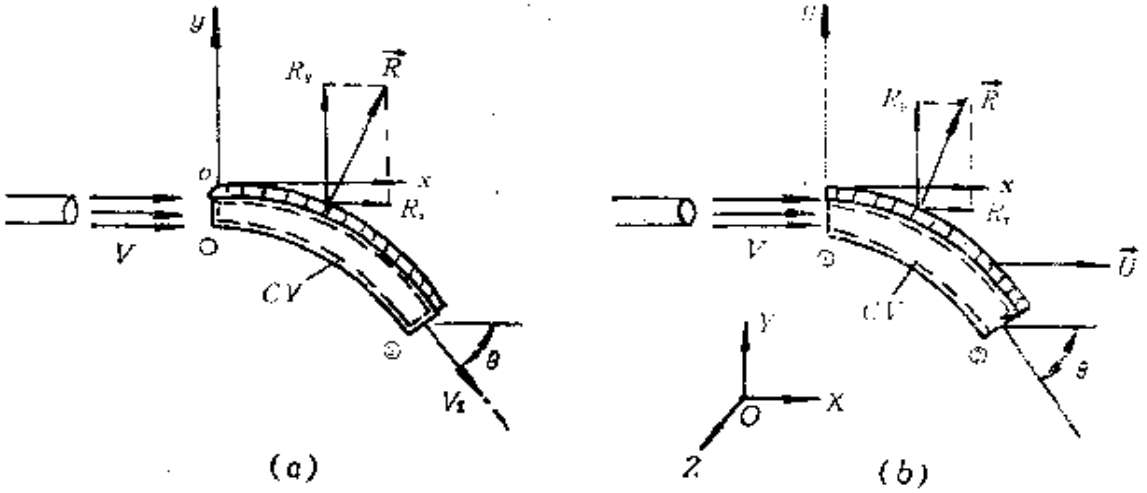


图 3-57

解 （1）叶片静止不动时，采用的控制体和坐标系如图3-57(*a*) 所示。作用在控制面上的法向压力均取表压。设叶片对控制体的作用力为 $\vec{R}=R_x\vec{i}+R_y\vec{j}$（通过叶片与控制体相接触的部分控制面施加的）。按题意，由式（3-107）可得

$$\sum F_x=R_x=u_2m_2-u_1m_1=V_2\cos\theta m_2-V_1m_1$$

$$\sum F_y = R_y = v_2 m_2 = -V_2 \sin\theta \dot{m}_2$$

然而按能量方程和质量方程有

$$V_1 = V_2 = V, \quad \dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}$$

故有

$$R_x = \dot{m}V(\cos\theta - 1), \quad R_y = -\dot{m}V\sin\theta \qquad (3\text{-}118)$$

代入数字后有

$$R_x = 80 \times 30 \times (\cos 60^\circ - 1) = -1.2 \text{（千牛）}$$

$$R_y = -80 \times 30 \times \sin 60^\circ = -2.078 \text{（千牛）}$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-1.2)^2 + (-2.078)^2}$$

$$= 2.4 \text{(千牛)}$$

所以，水射流作用在叶片上的冲击力等于2.4千牛，方向与图示$\vec{R}$相同，与x轴的夹角$\phi = \mathrm{tg}^{-1}\dfrac{2.078}{1.2} = 60^\circ$.

（2）叶片以$U = 10$米/秒向右运动时，控制体固连在叶片上一起运动，参看图3-57(b)。仍设叶片对控制体的作用力为$\vec{R} = R_x\vec{i} + R_y\vec{j}$. 按题意，由式（3-105）[参考式(3-107)]有

$$R_x = u_2 m_2 - u_1 m_1, \quad R_y = v_2 m_2$$

但上式中各个与速度有关的量，都应一律换成相对速度来计算。同样按能量方程和质量方程有

$$V_1 = V_2 = V - U$$

$$m_1 = m_2 = \rho V_1 A_1 = \rho(V - U)A_1$$

$$u_1 = V_1 = V - U$$

$$u_2 = V_2\cos\theta = (V - U)\cos\theta$$

$$v_2 = -V_2\sin\theta = -(V - U)\sin\theta$$

故

$$R_x = \rho(V - U)A_1[(V - U)\cos\theta - (V - U)]$$

$$= \rho(V - U)^2 A_1(\cos\theta - 1)$$

$$R_y = -\rho(V - U)^2 A_1 \sin\theta$$

代入数字后有（注意，在截面①处射流的横截面A_1应与射流喷口

的面积 A 相等，按题意知 $A=0.002\,667$米^2）

$$m_1=m_2=1\,000\times(30-10)\times0.002\,667$$
$$=53.33\ （公斤/秒）$$
$$R_x=1\,000\times(30-10)^2\times0.002\,667\times(\cos60^\circ-1)$$
$$=-.533\ （千牛）$$
$$R_y=-1\,000\times(30-10)^2\times0.002\,667\times\sin60^\circ$$
$$=-.924\ （千牛）$$
$$|\vec{R}|=\sqrt{(-.533)^2+(-.924)^2}=1.067\ （千牛）$$

所以，水射流作用在叶片上的冲击力等于 1.067 千牛，方向与图示 $\vec{R}$ 相同，而 $\phi=\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{0.924}{0.533}=60^\circ$。而为维持叶片作等速直线运动对叶片应施加的力大小为 1.067 千牛，方向与图示 $\vec{R}$ 相反。

注意，尽管本题假定为理想流体；对于有粘性流体，只要知道进出口截面上的流动参数，应用动量方程也是不会有什么困难的。

2．流体对内管壁的作用力

流体流过弯管、扩张或收缩管道时，流体同管道内壁约相互作用力大小，可以应用动量方程来求。这里以流体流过一个渐收缩的弯管为例来说明。参看图3-58。选择的控制体和坐标系均已

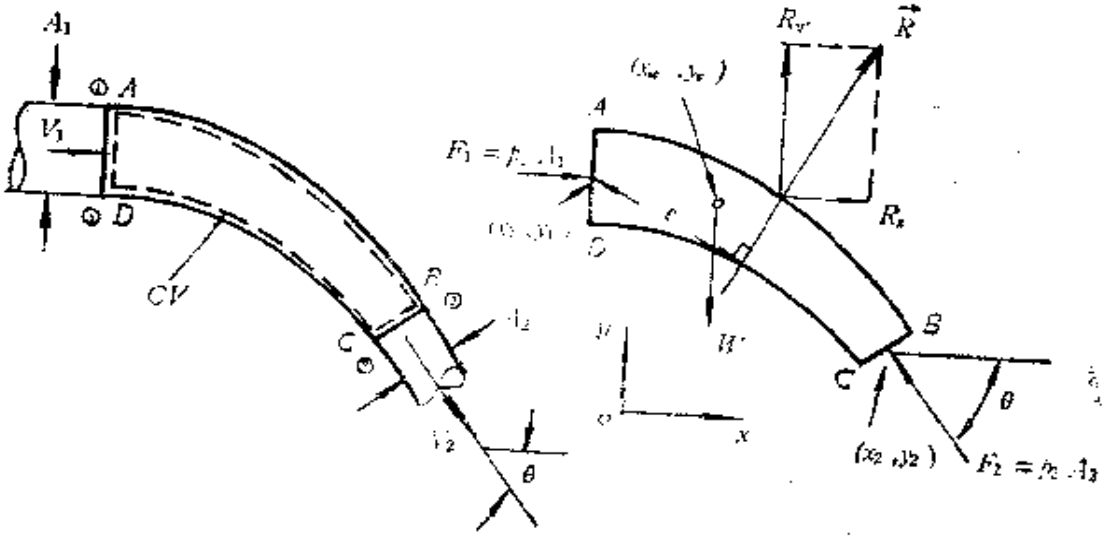


图 3-58

画在图上。假定流体不可压缩、流动定常；在①和②横截面上为一维流，压力和流速均为已知。假设内管壁对控制体的作用力为$\vec{R}$，已画在图上；控制体内流体的体积力为重力W，原则上讲是知道的，它仅取决于流体的重度和控制体的形状和大小。按式（3-107），有

$$\sum F_x = \int_{cs} u\rho(V\cos\alpha)\mathrm{d}A$$

$$\sum F_y = \int_{cs} v\rho(V\cos\alpha)\mathrm{d}A$$

参看图知（$\vec{R} = R_x\vec{i} + R_y\vec{j}$）

$$\sum F_x = p_1A_1 - p_2A_2\cos\theta + R_x$$

$$\int_{cs} u\rho(V\cos\alpha)\mathrm{d}A = V_2\cos\theta(\rho V_2A_2) - V_1(\rho V_1A_1)$$

按质量方程，有

$$V_1A_1 = V_2A_2 = Q$$

故

$$R_x = -p_1A_1 + p_2A_2\cos\theta + \rho Q(V_2\cos\theta - V_1) \quad (3\text{-}119a)$$

同理，可推得

$$R_y = W - p_2A_2\sin\theta - \rho QV_2\sin\theta \quad (3\text{-}119b)$$

而

$$|\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}\ ,\ \phi = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right) \quad (3\text{-}119c)$$

一旦求得$\vec{R}$，利用作用与反作用原理，立即可以求得流体对内管壁的作用力为$-\vec{R}$。

例3-24 已知：管径$d_1 = 30$厘米的水平直管通过20°圆锥角的扩张段与$d_2 = 60$厘米的管子相连接。通过该管路油的体积流量$Q = 0.3$米^3/秒，油的密度$\rho = 850$公斤/米^3。测量得在①，②横截面上的表压分别为140千牛/米^2，145千牛/米^2。求：流体（油）对锥形段内管壁的作用力。

解　选择的控制体和坐标系已标注在图3-59上。扩张段内壁对控制体的作用力设为 $\vec{R}=R_x\vec{i}$，按式（3-119a），有

$$R_x=-p_1A_1+p_2A_2+\rho Q(V_2-V_1)$$

式中各个量，由题意知有

$A_1=0.070\,65$（米^2），

$A_2=0.282\,6$（米^2）

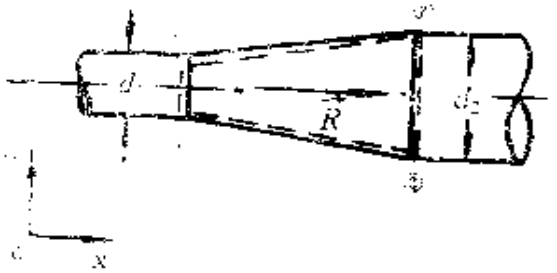


图 3-59

$$V_1=\frac{0.3}{0.070\,65}=4.25\text{（米/秒）},$$

$$V_2=\frac{4.25}{4}=1.06\text{（米/秒）}$$

所以

$$R_x=-140\times10^3\times0.070\,65+145\times10^3\times0.282\,6+850\times0.3\times(1.06-4.25)$$

$$=10^3\times(-9.891+40.977-0.813\,5)=30.27\text{（千牛）}$$

故流体对锥形段内管壁的作用力等于30.27千牛，方向与图示$\vec{R}$相反，方向向左。

3．物体的阻力

流体流过物体时，由于粘性等原因流体将对物体产生阻力。阻力的大小可以利用动量方程来求。下面举一个二维流的例子来说明。

例3-25　已知：二维不可压空气来流以速度V_∞流向直径为d的圆柱，见图3-60。气流绕流过圆柱在其后部形成了尾迹区，速度和压力都将减小。现在远离圆柱的后方，横截面②上测得的速度，在$4d$的宽度上呈抛物线，即$V_2=V_\infty\left[1-0.25\left(1-\frac{y}{2d}\right)^2\right]$，但$p_2=p_\infty$。流动定常，不计重力。求：空气作用在圆柱上的阻力系数C_x的大小（一般，顺来流方向作用在圆柱上的力X，称为

阻力，而阻力系数的定义是$C_x=\dfrac{X}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 d\cdot 1}$）。

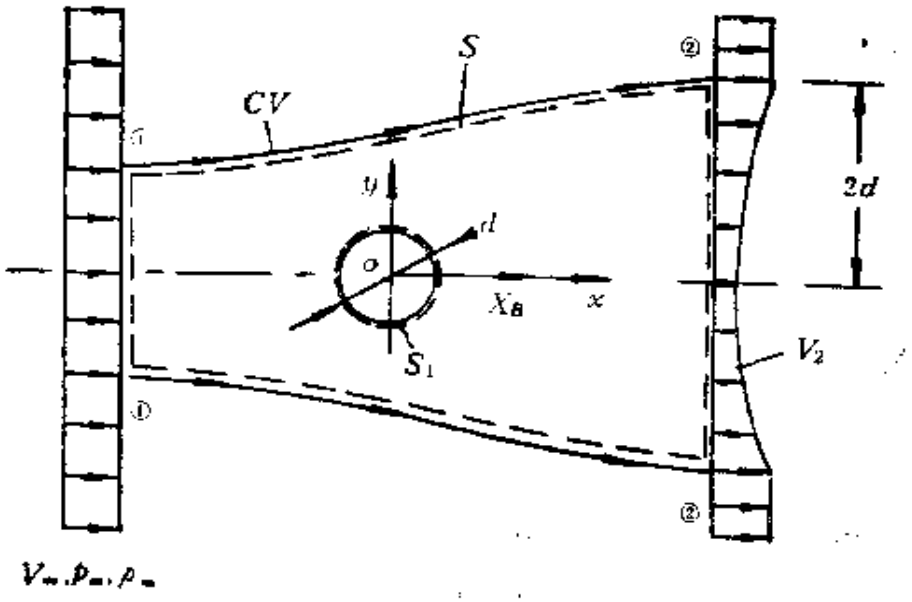


图 3-60

解：所取控制体如图上虚线所示。圆柱体被包围在控制体之内。外控制面 S 由流管侧壁和①，②横截面围成。只要所取S 面离开圆柱体足够远，作用在S 面上的法向压力（表压）都近似地取为零。按式（3-112）有

$$X_B=-\int_s[p\cos(n,x)+\rho u(V\cos\alpha)]\mathrm{d}A$$

式中，

$$\int_S p\cos(\mathrm{n},x)\mathrm{d}A=0$$

$$\int_S \rho u(V\cos\alpha)\mathrm{d}A=\rho_\infty\int_{A2}V_2(V_2\mathrm{d}A_2)$$

$$-\rho_\infty\int_{A_1}V_\infty(V_\infty\mathrm{d}A_\infty)$$

按质量方程有

$$V_\infty\mathrm{d}A_\infty=V_2\mathrm{d}A_2$$

故

$$X_B = \rho_\infty \int_{A_2} V_{x2}(V_\infty - V_2)\,dA_2 = \rho_\infty \int_{-2d}^{+2d} V_2(V_\infty - V_2)\,dy.$$

因按 X_B 的定义为流体对物体的作用力，即为阻力，故

$$X = X_B = -\rho_\infty \int_{-2d}^{+2d} V_x(V_\infty - V_2)\,dy \qquad (3\text{-}120)$$

而

$$C_x = \frac{X}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 d \cdot 1} = \frac{2}{d}\int_{-2d}^{+2d} \frac{V_2}{V_\infty}\left(1 - \frac{V_2}{V_\infty}\right)dy$$

(3-121)

代入$\frac{V_2}{V_\infty}$的式子，积分后得

$$C_x = 1.07$$

4．射流的反作用力和推力公式

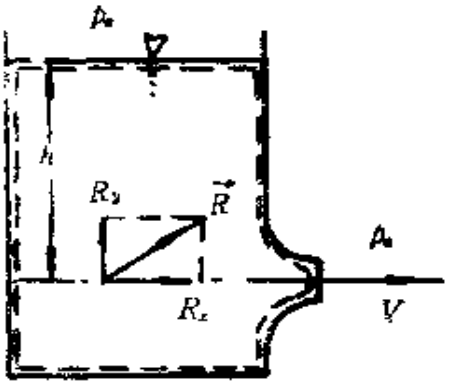


图 3-61

在开口贮水箱侧壁上开一小孔并装上图示圆弧管咀放水时（流速为 V），水箱将受到自由水射流的反作用力作用。参看图3-61。采用图上用虚线表示的控制体和坐标系来分析这一反作用力，显然，只要水箱足够大，则可不计自由水面的下降。沿控制面法向压力均用表压，与控制面相接触的水箱内壁对流体的作用力用$\vec{R}$表示，已画在图上。按式（3-119），有

$$R_x = \rho Q V, \qquad R_y = W$$

显然，流体对水箱的作用力大小与$|\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$相等，方向与图示$\vec{R}$相反。但作为射流的反作用力，仅是 R_x 分量，方向亦与图示 R_x 相反，方向向左。按小孔口出流射流的式（3-85），（3-86）知

$$\text{射流反作用力} = \rho Q V = 2\rho g h A \qquad (3\text{-}122)$$

式中，A是孔口管咀出口横截面积。

这个反作用力的存在，从物理上可作如下解释：在孔口附近，因流速增加而使内壁压强下降，小于 ρgh；在孔口对面的内壁面上，压力约为 ρgh，内壁上的这个压力差将产生上述反作用力。

飞机上所用的涡轮喷气发动机，也利用同样的原理来产生反作用力（推力），推动飞机前进。涡轮喷气发动机内部通常由进气道、轴流式压气机、燃烧室，涡轮和尾喷管等部件构成，示意图可参看图3-62。发动机起动后，空气由外界经进气道进入压气机，旋转的压气机对气流作功提高压力；进入燃烧室后，通过油

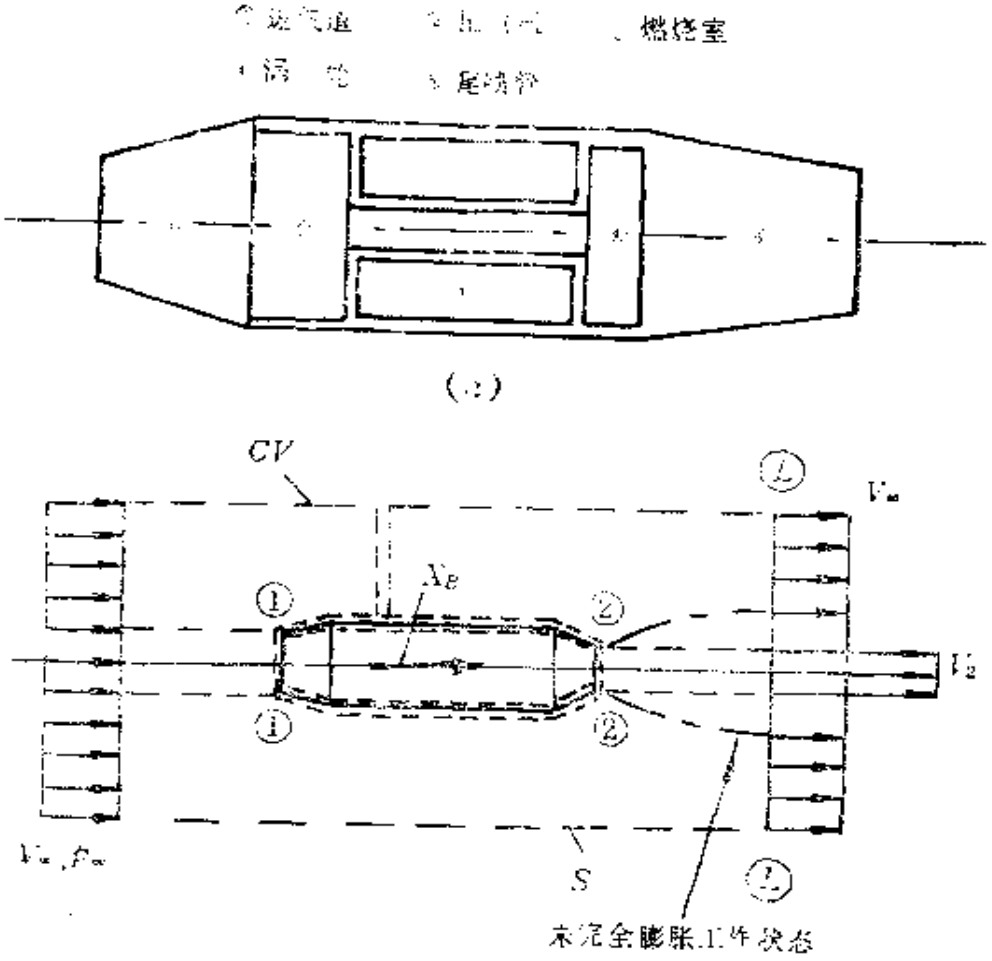


图3-62

咀向气流喷加燃料进行燃烧，提高气流的温度；然后通过涡轮，气流的一部分能量被涡轮吸收，主要用来推动前面的压气机；最后，高温高压的气流通过尾喷管产生高速的尾喷流（射流），上述整个流动过程最终使涡轮喷气发动机产生了所需的反作用推力。

现利用动量方程来分析说明，飞机以速度 V_∞ 作水平直线飞行时，涡轮喷气发动机产生的反作用推力大小。在图3-62(b)上，外控制面 S 已用虚线表出，而物面边界应由内外壁面组成，因空气分内、外流两部分流过内外壁面。按式（3-112），反作用推力 P 等于 X_B，即

$$P=-\int_s[p\cos(n,x)+\rho u(V\cos\alpha)]\mathrm{d}A$$

要把上式中的积分做出来，需要作下面几点说明：

（1）进气道进口截面①上的进气情况将影响推力的大小。这里只讨论截面①上的气流参数与远前方来流参数相同的情况，即进气有如图所示的情况。

（2）尾喷管出口截面②上的排气情况也将影响推力的大小。比如截面②上的压力 $p_2>p_\infty$，则尾喷流外边界将扩大，喷流的横截面积将大于喷口的面积 A_2；对尾喷管流动来讲，称为未完全膨胀工作状态。此时的排气情况如图所示。这里讨论了截面②上 $p_2>p_\infty$ 情况，但不计尾喷流边界扩大的影响。同时假定截面②上为一维流。

（3）在后方 L 截面上，因空气流过发动机外部（实际是流过飞机的机身或发动机短舱的外部）时，也将引起气流参数产生变化。比如，类似于图3-60上发生的情况，从而产生外流阻力影响推力的大小。换句话讲，内、外流的影响是牵连在一起而不可分的。这里未考虑此点，假定除尾喷口面积 A_2 之外，L 截面上的其余部分，$V=V_\infty$，$p=p_\infty$.

这样，上式的右端就有

$$\int_S p\cos(n,x)\,dA = -p_\infty A_x + p_\infty(A_\infty - A_2) + p_2 A_2$$

$$= (p_2 - p_\infty)A_2$$

$$\int_S \rho u(V\cos\alpha)\,dA = -\rho_\infty V_\infty^2 A_1 + \rho_2 V_2^2 A_2 + \dot{m}_f V_2$$

故

$$P = -\{\rho_2 V_2^2 A_2 - \rho_\infty V_\infty^2 A_1 + \dot{m}_f V_2 + (p_2 - p_\infty)A_2\}$$

上式表明，推力的方向与图示X_B相反。式中，$\dot{m}_f$为燃料的质量流量，亦称燃料消耗率；又因质量方程有$\rho_\infty V_\infty A_1 = \rho_2 V_2 A_2 = \dot{m}_a$（空气质量流量），故推力$P$的大小为

$$P = \dot{m}_a(V_2 - V_\infty) + \dot{m}_f V_2 + (p_2 - p_\infty)A_2 \qquad (3\text{-}123a)$$

一般，因$\dot{m}_f \ll \dot{m}_a$，故近似地可用下式

$$P = \dot{m}_a(V_2 - V_\infty) + (p_2 - p_\infty)A_2 \qquad (3\text{-}123b)$$

式（3-123）就是涡轮喷气发动机的推力公式。由该式可知，只有$V_2 > V_\infty$，才有推力，即必须增加动量，才会有反作用推力产生。从公式看，如p_2增加，推力将增加，但因此时将使式中的V_2减小，结果反使推力下降。当然这种内部的关连单从推力公式是无法知晓的。

例 3-26 已知：飞机以$V_\infty = 200$米/秒作水平直线飞行。涡轮喷气发动机在此时的燃料消耗率$\dot{m}_f = 1.1$公斤/秒，燃料和空气质量流量之比为1:40。尾喷口喷流速度$V_2 = 700$米/秒，$p_2 = p_\infty$。求：（1）发动机的反作用推力大小。（2）发动机反作用推力所作功率。（3）发动机的效率。

解 （1）由题意知，$\dot{m}_f = 1.1$公斤/秒，$\dot{m}_a = 40 \times 1.1 = 44$（公斤/秒），按式（3-123）立即可得

$$P = \dot{m}_a(V_2 - V_\infty) + \dot{m}_f V_2 = 44 \times (700 - 200) + 1.1 \times 700$$
$$= 22.77 \text{（千牛）}$$

（2）推力所作功率$= PV_\infty = 22.77 \times 200 = 4\,554$（瓦）

（3）除了推力所作有用功率外，离开喷口射流的动能也是

发动机提供的。损失的动能因质量流量为 m_a+m_f，喷流的绝对速度为 V_2-V_∞，故有

$$\frac{1}{2}(m_a+m_f)(V_2-V_\infty)^2=\frac{1}{2}(44+1.1)(700-200)^2$$
$$=5\,638\ (\text{瓦})$$

所以，发动机的效率为

$$\eta=\frac{\text{有用功率}}{\text{有用功率}+\text{损失功率}}=\frac{4\,554}{4\,554+5\,638}=0.447$$

三、非惯性坐标系中的动量方程

这里介绍控制体所固连的坐标系 xyz 作直线加速度运动时的动量方程。

对于流体系统，牛顿第二定律的表述式是式（3-66），式中的速度向量必须相对于一个惯性参考系才成立。假定，XYZ 为一惯性参考坐标系，按式（3-66）应有

$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{P}_{XYZ}}{\mathrm{d}t}=\int_{\tau_s}\frac{\mathrm{d}\vec{V}_{XYZ}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}m=\int_{\tau_s}\vec{a}_{XYZ}\rho\,\mathrm{d}\tau \tag{3-124}$$

如 xyz 坐标系作直线加速度运动，该坐标系称为非惯性坐标系。相对于非惯性坐标系 xyz 来讲，流体系统的加速度用 $\vec{a}_{xyz}$ 代表，xyz 坐标系相对于惯性坐标系 XYZ 的直线加速度用 $\vec{a}_{rf}$ 代表；则流体系统相对于惯性坐标系 XYZ 的加速度 $\vec{a}_{XYZ}$ 有下列关系存在，即

$$\vec{a}_{XYZ}=\vec{a}_{xyz}+\vec{a}_{rf} \tag{3-125}$$

将上式代入式（3-124），有

$$\vec{F}=\int_{\tau_s}\left(\vec{a}_{xyz}+\vec{a}_{rf}\right)\rho\,\mathrm{d}\tau$$

或者

$$\vec{F}-\int_{\tau_s}\vec{a}_{rf}\rho\,\mathrm{d}\tau=\int_{\tau_s}\vec{a}_{xyz}\rho\,\mathrm{d}\tau=\frac{\mathrm{d}\vec{P}_{xyz}}{\mathrm{d}t}$$

式中，$\vec{P}_{xyz}$是流体系统对非惯性参考坐标系xyz的线动量，即

$$\vec{P}_{xyz}=\int_{\tau_s}\vec{V}_{xyz}\rho\mathrm{d}\tau$$

利用雷诺输运方程式（3-51），可将上式转换成固连在xyz坐标系的控制体动量方程：因$N=\vec{P}_{xyz}$，而$\sigma=\vec{V}_{xyz}$，故有

$$\vec{F}-\int_{cv}\vec{a}_{rf}\rho\mathrm{d}\tau=\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}\vec{V}_{xyz}\rho\mathrm{d}\tau+\int_{cs}\vec{V}_{xyz}(\rho\vec{V}_{xyz}\cdot\vec{n}\mathrm{d}A)$$

此时，$\vec{F}$也变为作用在控制体上的所有外力的合力。参看式（3-102），有

$$\vec{F}_s+\vec{F}_v+\vec{F}_a-\int_{cv}\vec{a}_{rf}\rho\mathrm{d}\tau=\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}\vec{V}_{xyz}\rho\mathrm{d}\tau$$

$$+\int_{cs}\vec{V}_{xyz}(\rho\vec{V}_{xyz}\cdot\vec{n}\mathrm{d}A)\qquad(3\text{-}126)$$

上式就是控制体作直线加速度$\vec{a}_{rf}$运动时的动量方程，或称非惯性坐标系中的动量方程。与式（3-105）比较可知，当$\vec{a}_{rf}=0$时，两者是一致的。使用式（3-126）时，也得用投影式。

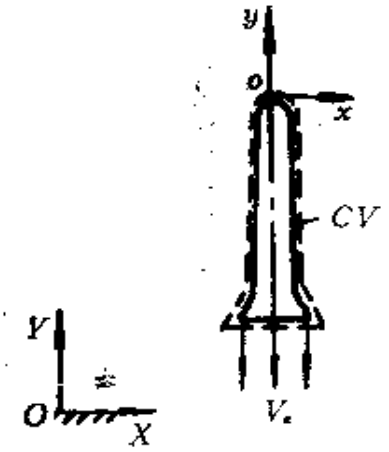


图 3-63

例3-27　已知：有一小型火箭将垂直放射升空。初始发射起飞质量$M_0=400$公斤。点火后燃料消耗率$m_e=5$公斤/秒。火箭发动机尾喷口流速$V_e=3\,000$米/秒（相对于火箭）。假设喷口截面压力始终等于周围的大气压力。不计外流空气阻力。

求：（1）火箭发射起飞时加速度的大小。（2）发射后10秒钟时火箭飞行速度的大小。

解　选择的控制体固连于火箭上，用虚线表出，参看图3-63。惯性坐标系XYZ固连在地面上，非惯性坐标系xyz固连在火

箭上，见图。按式（3-126）有（只需用其y向分量式）

$$F_{s\,y}+F_{r\,y}+F_{v\,y}-\int_{CV}(a_{rf})_y\rho\,\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}v_{xyz}\rho\,\mathrm{d}\tau+\int_{CS}v_{xyz}\rho(V_{xyz}\cos\alpha)\,\mathrm{d}A \qquad (3\text{-}127)$$

式中，按题意有$F_{s\,y}=F_{r\,y}=0$，只剩下重力项有

$$F_{v\,y}=-\int_{CV}g\rho\,\mathrm{d}\tau=-gM_{CV}$$

而$M_{CV}=\int_{CV}\rho\,\mathrm{d}\tau$代表每瞬间控制体内的质量。因有燃料的消耗，$M_{CV}=M_{CV}(t)$，按质量方程有

$$M_{CV}=M_0-m_e t$$

故

$$F_{v\,y}=-gM_{CV}=-g(M_0-m_e t)$$

另外

$$-\int_{CV}(a_{rf})_y\rho\,\mathrm{d}\tau=-(a_{rf})_yM_{CV}$$

$$=-(a_{rf})_y(M_0-m_e t)$$

$$\int_{CS}v_{xyz}\rho(V_{xyz}\cos\alpha)\,\mathrm{d}A=-V_e m_e$$

最后再看式（3-127）中剩余的一项：因为相对控制体来讲，在y方向的动量是一个大量，但随时间t的变化率却是个小量，故近似取

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}v_{xyz}\rho\,\mathrm{d}\tau\approx 0$$

将以上关系式代入式（3-127），得

$$-g(M_0-m_e t)-(a_{rf})_y(M_0-m_e t)=-m_e V_e$$

或

$$(a_{rf})_y=\frac{m_e V_e}{M_0-m_e t}-g \qquad (3\text{-}128)$$

按定义有

$$(a_{rf})_y = \frac{dv_{cv}}{dt}$$

式中，v_{cv} 为控制体即火箭的 Y 方向运动速度，故

$$\frac{dv_{cv}}{dt} = \frac{m_e V_e}{M_0 - m_e t} - g$$

分离变量积分后得

$$v_{cv} = \int_0^{v_{cv}} dv_{cv} = \int_0^t \frac{m_e V_e}{M_0 - m_e t} dt - \int_0^t g dt$$

$$= V_e \ln\left(\frac{M_0}{M_0 - m_e t}\right) - gt \qquad (3\text{-}129)$$

代入数字，得

(1) $t = 0$ 秒时，代入式 (3-128) 有

$$(a_{rf})_y = \frac{5 \times 3\,500}{400} - 9.81 = 33.94 \text{（米/秒}^2\text{）}$$

(2) $t = 10$ 秒时，代入式 (3-129) 有

$$v_{cv} = 3\,500 \times \ln\left[\frac{400}{400 - (5 \times 10)}\right] - 9.81 \times 10 = 369.3 \text{（米/秒）}$$

四、动量矩方程

在流场中，流体微团因有速度而具有动量；动量对某一约定的取矩点取矩，称为流体微团的动量矩（是一向量）。参看图 3-64。比如在 xoy 平面上，取位于 (x, y) 点处一流体微团，其体积为 $d\tau$，质量为 $dm = \rho d\tau$，该点处的速度为 $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j}$。则该微团对原点 o 的动量矩（约定绕原点的动量矩正负号按右手定则定）有 $(vx - uy)\rho d\tau$，用向量来表示有：微团的动量 $d\vec{P} = \vec{V}\rho d\tau$，位置向量为 $\vec{r}$ $(= x\vec{i} + y\vec{j})$，则 $\vec{r} \times d\vec{P}$ 就是该微团对原点的动量矩表达式；因按向

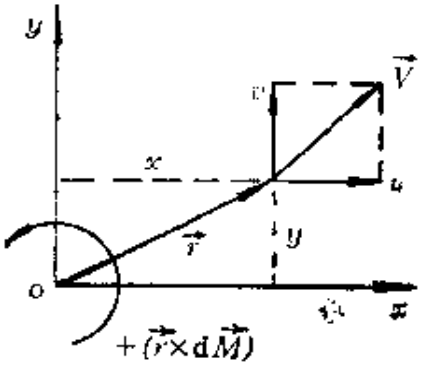


图 3-64

量代数知

$$\vec{r}\times d\vec{P}=(\vec{r}\times\vec{V})\rho d\tau=(vx-uy)\rho d\tau \quad (3-130a)$$

很容易推广到三维流场中去，因 $\vec{V}=u\vec{i}+v\vec{j}+w\vec{k}$ 和 $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$，按

$$\vec{r}\times\vec{V}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x&y&z\\u&v&w\end{vmatrix}=(wy-vz)\vec{i}+(wx-uz)\vec{j}+(vx-uy)\vec{k}$$

故

$$\vec{r}\times d\vec{P}=[(wy-vz)\vec{i}-(wx-uz)\vec{j}+(vx-uy)\vec{k}]\rho d\tau \quad (3-130b)$$

对于流体系统而言，按动量矩定律有

$$\vec{T}=\frac{d\vec{M}_s}{dt} \quad (3-131a)$$

而

$$\vec{M}_s=\int_{\tau_s}(\vec{r}\times\vec{V})\,dm=\int_{\tau_s}(\vec{r}\times\vec{V})\rho d\tau \quad (3-131b)$$

式中，$\vec{T}$是代表作用在流体系统上所有外力矩之合力矩，$\vec{M}_s$是代表系统的动量矩。式(3-131)相对于一个惯性参考坐标系成立。

作用在系统上位置向量 $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ 处的外力如为$\vec{F}$，$\vec{F}=F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k}$，则它对原点的外力矩 $\vec{T}=\vec{r}\times\vec{F}$，其投影式参考式（3-130$b$）有

$$\vec{T}=\vec{r}\times\vec{F}=(F_zy-F_yz)\vec{i}-(F_zx-F_xz)\vec{j}+(F_yx-F_xy)\vec{k} \quad (3-132a)$$

如果作用在系统上有 l 个外力$\vec{F}_l$，各个外力的位置向量为 $\vec{r}_l$，显然，其合力矩$\vec{T}$有

$$\vec{T}=\sum_l\vec{r}_l\times\vec{F}_l \quad (3-132b)$$

利用雷诺输运方程式（3-51），可以方便地把关于流体系统的动量矩方程式（3-131），转换成关于固定有限大小控制体的

动量矩方程：现在 $N=\vec{M}_o$，$\sigma=\vec{r}\times\vec{V}$，故有

$$\vec{T}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}(\vec{r}\times\vec{V})\rho\mathrm{d}\tau+\int_{cs}(\vec{r}\times\vec{V})(\rho\vec{V}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A)$$

(3-133a)

此时，$\vec{T}$ 变为作用在控制体上所有外力之合力矩。按式(3-102)知，外力共有$\vec{F}_p$，$\vec{F}_\tau$ 和$\vec{F}_v$三项，故$\vec{T}$也应有三项，即$\vec{T}_p=\Sigma(\vec{r}_p\times\vec{F}_p)$，$\vec{T}_\tau=\Sigma(\vec{r}_\tau\times\vec{F}_\tau)$ 和 $\vec{T}_v=\Sigma(\vec{r}_v\times\vec{F}_v)$。所以，上式可写成

$$\vec{T}_p+\vec{T}_\tau+\vec{T}_v=\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}(\vec{r}\times\vec{V})\rho\mathrm{d}\tau+\int_{cs}(\vec{r}\times\vec{V})(\rho\vec{V}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A)\qquad(3\text{-}133b)$$

对于定常流，上式变为

$$\vec{T}_p+\vec{T}_\tau+\vec{T}_v=\int_{cs}(\vec{r}\times\vec{V})(\rho\vec{V}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A)\qquad(3\text{-}134)$$

以上式（3-133），（3-134）称为固定有限大小控制体的动量矩方程（积分形式）。它说明作用在控制体上的合外力矩等于控制体内流体动量矩对时间的变化率与通过控制面净动量矩率之和。动量矩方程使用也很广泛，特别是用在一些带有旋转轴的流体机械中，作关于泵和涡轮的流动性能计算和分析等就要用到。使用时也要用投影式。

在笛卡尔坐标系中，式（3-134）的投影式为

$$\Sigma(T)_x=\int_{cs}(wy-vz)\rho(V\cos\alpha)\mathrm{d}A\qquad(3\text{-}135a)$$

$$\Sigma(T)_y=\int_{cv}(wx-uz)\rho(V\cos\alpha)\mathrm{d}A\qquad(3\text{-}135b)$$

$$\Sigma(T)_z=\int_{cs}(vx-uy)\rho(V\cos\alpha)\mathrm{d}A\qquad(3\text{-}135c)$$

在柱坐标系中，参看图3-65，任一点处的坐标为（r，θ，z），该点处的速度$\vec{V}=v_r\vec{i}_r+v_\theta\vec{i}_\theta+v_z\vec{i}_z$. 为一般化起见，将

取矩点取在（0，0，δ）处。由图可知，任一点（r，θ，z）到取矩点（0，0，δ）的距离向量$\vec{l}=r\vec{i}_r+(z-\delta)\vec{i}_z$。在式（3-134）中右端的$\vec{r}\times\vec{V}$变为$\vec{l}\times\vec{V}$，按向量代数有

$$\vec{l}\times\vec{V}=\begin{vmatrix}\vec{i}_r & \vec{i}_\theta & \vec{i}_z\\ r & 0 & z-\delta\\ v_r & v_\theta & v_z\end{vmatrix}=-v_\theta(z-\delta)\vec{i}_r$$

$$+[v_r(z-\delta)-v_z r]\vec{i}_\theta+v_\theta r\vec{i}_z$$

故式（3-134）的柱坐标投影式为

$$\Sigma(T)_r=-\int_{cs}v_\theta(z-\delta)\rho(V\cos\alpha)\mathrm{d}A \qquad (3\text{-}136a)$$

$$\Sigma(T)_\theta=\int_{cs}[v_r(z-\delta)-v_z r]\rho(V\cos\alpha)\mathrm{d}A \qquad (3\text{-}136b)$$

$$\Sigma(T)_z=\int_{cs}v_\theta r\rho(V\cos\alpha)\mathrm{d}A \qquad (3\text{-}136c)$$

例 3-28　已知：承前例 3-22。

求：冲击力$\vec{R}$的作用点。

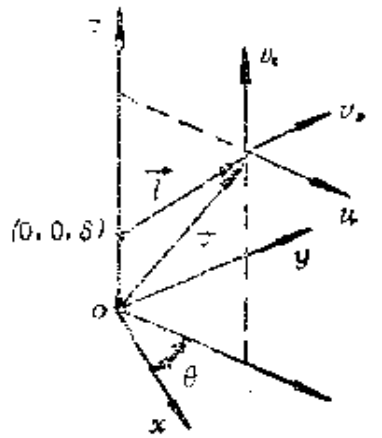


图 3-65

解　参看前图 3-56，利用式（3-135c）有

$$\Sigma(T)_z=\int_{cs}(vx-uy)\rho(V\cos\alpha)\mathrm{d}A$$

上式中两项各为[参看式（3-132a）]

$$\Sigma(T)_z=-|\vec{R}|\times(-e)=|\vec{R}|e$$

$$\int_{cs}(vx-uy)\rho(V\cos\alpha)\mathrm{d}A=-V\frac{b_1}{2}\rho Vb_1+V\frac{b_2}{2}\rho Vb_2$$

利用式（3-115），（3-116）等，最后得

$$e=-\frac{b}{2}\cot\theta$$

由上式可知，当$\theta=\frac{\pi}{2}$时，$e=0$，冲击力作用点与 0 点重

合。当 θ 角由 $\frac{\pi}{2}$ 减小到零时，e 由零趋于 $-\infty$。总之，当 $\theta>0$ 时，冲击力产生的力矩总是力图使平板回复到垂直位置（$\theta=\frac{\pi}{2}$）。

例 3-29 已知：承前图 3-58。求：流体对内管壁作用力的作用点。

解 先求内管壁对控制体内流体作用力 $\vec{R}$ 的作用点。取矩点选为截面①的中心点 (x_1, y_1)，力 $\vec{R}$ 与取矩点的垂直距离（力臂）用 e 表示，是待求量。参看前图 3-58 和式 (3-135c) 有

$$\Sigma(T)_z=\int_{cs}(vx-uy)\rho(V\cos\alpha)\mathrm{d}A$$

又上式等号两端各为[参看式 (3-132a)]

$$\Sigma(T)_z=|\vec{R}|e-W(x_W-x_1)+F_2\sin\theta(x_2-x_1)+F_2\cos\theta(y_2-y_1)$$

$$\int_{cs}(vx-uy)\rho(V\cos\alpha)\mathrm{d}A=[-V_2\sin\theta(x_2-x_1)-V_2\cos\theta(y_2-y_1)]\rho Q$$

代回上式得

$$|\vec{R}|e-W(x_W-x_1)+F_2\sin\theta(x_2-x_1)+F_2\cos\theta(y_2-y_1)=-[V_2\sin\theta(x_2-x_1)+V_2\cos\theta(y_2-y_1]\rho Q$$

再代入数据，则可解得力臂 e 的值。显然，它就是流体对内管壁的作用力到取矩点的距离。

例 3-30 已知：有如图 3-66 所示弯管，流过的水体积流量为 300 升/秒，进口截面①处 $d_1=300$ 毫米，出口截面②处 $d_2=200$ 毫米。在①，②两截面间控制体内水的重量为 833 牛。$p_1=70$ 千牛/米^2。水的重度 $\gamma=9.79$ 千牛/米^3。假定流动为一维定常流，且不计可压缩性和粘性作用。其他有关尺寸见图。求：流体流过弯管时对内管壁作用力的大小和作用点的位置。

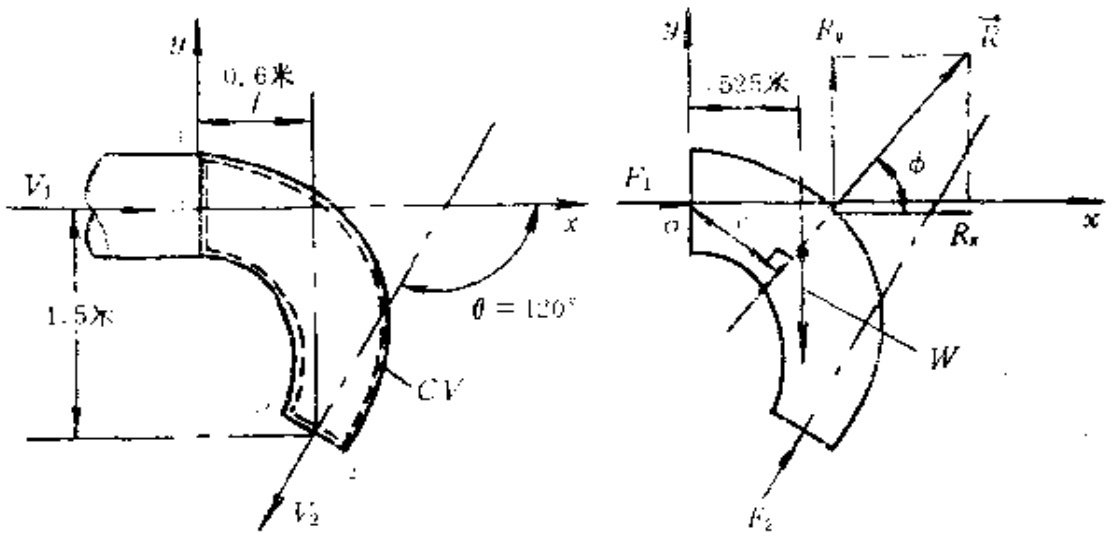


图 3-66

解 从质量方程可知，$V_1 = 4.25$（米/秒）和$V_2 = 9.56$（米/秒）；从能量方程可求得，$p_2 = 48.19$（千牛/米^2）。因而有$F_1 = 4.95$（千牛），$F_2 = 1.51$（千牛）。再按式（3-119）有（见图，此时$\theta = 120°$）

$$R_x = -8.41\text{（千牛）}, \qquad R_y = -2.95\text{（千牛）}$$

故

$$|\vec{R}| = 8.91\text{（千牛）}, \qquad \phi = 19.33°$$

由上可知，流体流过弯度时对内管壁的作用力等于8.91千牛，方向正好与图示$\vec{R}$相同，指向图示右上方，与x轴的夹角$\phi = 19.33°$。

再按式（3-137）和图示尺寸，有[注意，式（3-137）中，$\vec{R}$代表的是内管壁对流体的作用力，按刚才计算结果知，其方向与图示$\vec{R}$相反]

$$\begin{aligned}&-8.91\times e-0.833\times 0.525+1.51\times\sin 120°\times 0.6\\&\qquad+1.51\times\cos 120°\times(-1.5)\\&=-[9.55\times\sin 120°\times 0.6\\&\quad+9.55\times\cos 120°\times(-1.5)]\times .998\times 0.3\end{aligned}$$

由上式解出 e，得

$$e = 0.24\ (\text{米})$$

例 3-31 已知：参看图 3-67，是一个旋转洒水器的工作原理简图。水由中心轴向导管流入，体积流量 $Q = 2.5$ 升/秒。旋转臂上水射流喷嘴共有四个，喷嘴的直径均为 1 厘米。旋转臂半径为 0.3 米。射流方向如图所示，$\phi = 60°$，ϕ_1 角为一小量。水的密度 $\rho = 1\,000$ 公斤/米^3。流动定常。求：（1）如果使旋转臂不旋转需施加多大的力矩。（2）不计摩擦，旋转臂所能达到的最大转速。（3）如果转速 $N = 120$ 转/分，洒水器所作功率的大小。

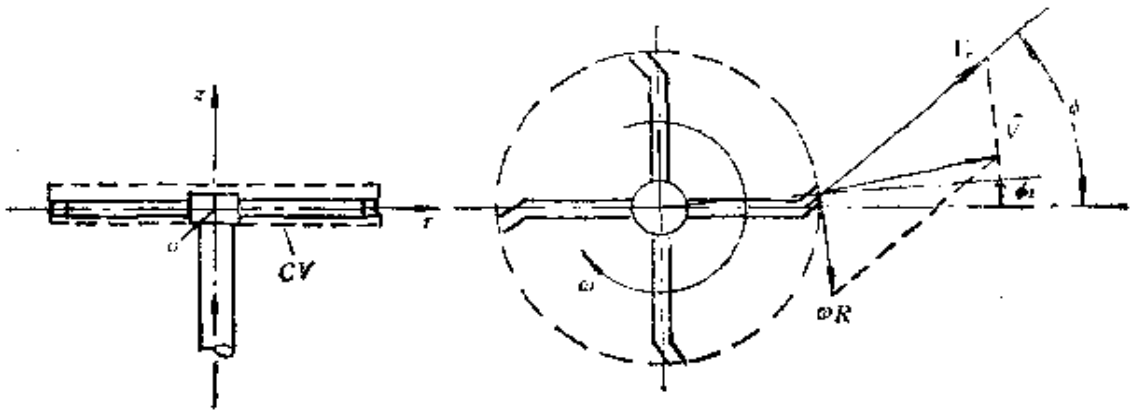


图 3-67

解 先取如图上虚线所示的固定有限大小控制体。控制面包围着洒水器，只有喷口处有动量矩流出。由于控制面与旋转轴相截割，通过截割面积将传递旋转轴作用在控制面上的外力矩 T'_z。选柱坐标系的 z 轴与旋转轴相重合，按动量矩方程（3-136 c）有

$$T'_z = \int_{CS} v_\theta r \rho (V\cos\alpha)\mathrm{d}A$$

见图，从喷口处的速度三角形知，该处的绝对速度 $\vec{V}$，按相对运动原理，和式（3-17）有

$$\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{U}$$

结合本例情况有

$$V_r = \frac{Q}{4A}, \qquad U = \omega R = \frac{2\pi N}{60} R \qquad (3\text{-}138)$$

式中，A 为喷口横截面积，R 为旋转臂半径，而 $A = 0.078\,54 \times 10^{-3}$ 米^2，$R = 0.3$ 米。

于是有（积分号内的速度是绝对速度的分量和模）

$$T'_z = \int_{cs} v_{or}\rho(V\cos\alpha)\mathrm{d}A = 4[V_r\sin(\phi - \phi_1) - \omega R]R\rho V_r A$$
$$= \rho QR[V_r\sin(\phi - \phi_1) - \omega R]$$

因而，流体射流对旋转轴的反作用力矩 T_z 与 T'_z 相等，但方向相反，即

$$T_z = -\rho QR[V_r\sin(\phi - \phi_1) - \omega R] \qquad (3\text{-}139)$$

所以

（1）按式（3-139）知，$\omega = 0$，有

$$T_z = -\rho QRV_r\sin(\phi - \phi_1)$$

按式（3-138）知，$V_r = 7.96$（米/秒），故

$T_z = -1\,000 \times 0.002\,5 \times 0.3 \times 7.96 \times \sin 60° = -5.17$（牛·米）在计算中取 $\phi_1 = 0$。可见流体射流产生的旋转力矩 $T_z = -5.17$(牛·米)。要使旋转臂不旋转所需施加的力矩为5.17(牛·米)。按图示应为逆时针方向。

（2）不计旋转轴等摩擦作用的情况下，旋转臂所能达到的最大转速，乃相当于喷口处的绝对速度方向与旋转臂径向方向一致的情况，有

$$V_r\sin(\phi - \phi_1) - \omega R = 0$$

或

$$\omega = \frac{V_r\sin(\phi - \phi_1)}{R} \qquad (3\text{-}140)$$

代入数字后得

$$\omega = 22.98 \text{（弧度/秒）}$$

或转速为

$$N=\frac{60\omega}{2\pi}=\frac{60\times 22.98}{2\pi}=219\ (\text{转/分})$$

相应此时运动状态，$T_z=0$。

（3）当$N=120$转/分时，$\omega=12.57$弧度/秒，代入式(3-139)，有

$$T_z=-1\,000\times 0.002\,5\times 0.3\times(7.96\times\sin 60^\circ-12.57\times 0.3)$$
$$=2.34\ (\text{牛}\cdot\text{米})$$

故洒水器所作有用功率为

有用功率$=T_z\omega=2.34\times 12.57=29.4$（瓦）

习　题

1．对下列给出的速度场，试确定：

（a）哪些是定常流，哪些是非定常流，为什么？

（b）哪些是一维、二维或三维流场，为什么？

(1) $\vec{V}=[ae^{-bx}]\vec{i}$；　(2) $\vec{V}=ax^2\vec{i}+bx\vec{j}$；

(3) $\vec{V}=[ax^2e^{-bt}]\vec{i}$；　(4) $\vec{V}=ax\vec{i}-by\vec{j}$；

(5) $\vec{V}=(ax+t)\vec{i}-by^2\vec{j}$；(6) $\vec{V}=ax^2\vec{i}+bxz\vec{j}$；

(7) $\vec{V}=a(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{z^3}\right)\vec{k}$；(8) $\vec{V}=axy\vec{i}-byzt\vec{j}$；

(9) $\vec{V}=ax^2\vec{i}+by\vec{j}+cxz\vec{k}$；(10) $\vec{V}=ax\vec{i}-by\vec{j}+(t-cz)\vec{k}$；

(11) $\vec{V}=ax\vec{i}+by^2\vec{j}+cy\vec{k}$；(12) $\vec{V}=ax\vec{i}+by^2\vec{j}+czt\vec{k}$。

式中，a，b，c都是常数。

2．对下列给出的速度场，试确定其流线方程，并画出流线的几何图形来：

（1）$\vec{V}=ay\vec{i}$；　（2）$\vec{V}=-ay\vec{i}+ax\vec{j}$；

（3）$\vec{V}=ay\vec{i}+ax\vec{j}$；（4）$\vec{V}=\frac{ax}{x^2+y^2}\vec{i}+\frac{ay}{x^2+y^2}\vec{j}$；

（5）$\vec{V}=-\frac{ay}{x^2+y^2}\vec{i}+\frac{ax}{x^2+y^2}\vec{j}$

3．如速度场$\vec{V}=x\vec{i}-y\vec{j}$，求流线方程并画出通过$x=2$，$y=3$点的一条流线。

4．如速度场$\vec{V}=2xy^2\vec{i}+2x^2y\vec{j}$，求证通过（1，7）点的流线方程是$y^2-x^2=48$。

5．如速度场$\vec{V}=\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}\vec{i}-\frac{2xy}{x^2+y^2}\vec{j}$，求流线方程。

6．如速度场$\vec{V}=-10x\vec{i}-10y\vec{j}$，求在$xy$平面上，$|\vec{V}|=20$米/秒的方程式。（$x$，$y$的单位都是米）

7．如速度场$\vec{V}=2\theta\vec{i}_r+(1-\theta^2)\vec{i}_\theta$，求流线方程？并计算在$(r,\theta)=\left(2,\frac{\pi}{2}\right)$点处合速的大小。

8．如速度场$\vec{V}=x(1+at)\vec{i}+y\vec{j}$，其中$a=0.5$秒$^{-1}$。计算并画出通过（1，1）点处的

（1）在$t=0$瞬间的流线；

（2）在$t=0$瞬间的流体微团的迹线.

9．有速度场$\vec{V}=U\cos\theta\left[1-\left(\frac{a}{r}\right)^2\right]\vec{i}_r-U\sin\theta\left[1+\left(\frac{a}{r}\right)^2\right]\vec{i}_\theta$，其中，$a$，$U$为常数。在$r\theta$平面上寻找所有的点有：

（1）$v_r=0$；（2）$v_\theta=0$；（3）$v_r=v_\theta=0$.

10．有一速度场$\vec{V}=az\vec{j}+b\vec{k}$，其中，$a=10$秒$^{-1}$，$b=5$米/秒。参看图3-68，控制体的厚度为$\delta$（垂直于纸面），计算通过截面①和②上的$\int_{A_1}\vec{V}\cdot d\vec{A}_1$和$\int_{A_2}\vec{V}(\vec{V}\cdot d\vec{A}_2)$的大小。

11．有速度场$\vec{V}=ay\vec{i}+b\vec{k}$，其中$a=2$秒$^{-1}$，$b=1$米/秒，计算通过图3-69上阴影面积上体积流量的大小。（注：所有量纲都是米）

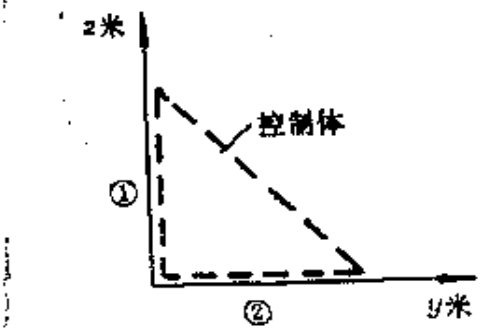


图 3-68

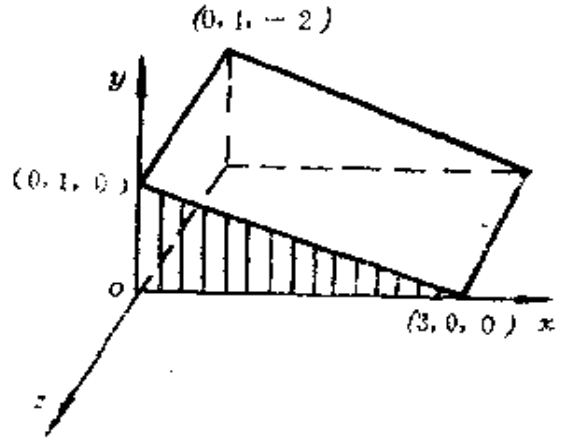


图 3-69

12. 在速度场$\vec{V}=-a\vec{x}\vec{i}+b\vec{y}\vec{j}+c\vec{k}$，其中$a=b=1$秒$^{-1}$，$c=1$米/秒。现有图3-70所示的一块阴影面积，计算通过该面积上的$\int\vec{V}\cdot d\vec{A}$和$\int\vec{V}(\vec{V}\cdot d\vec{A})$各多少？

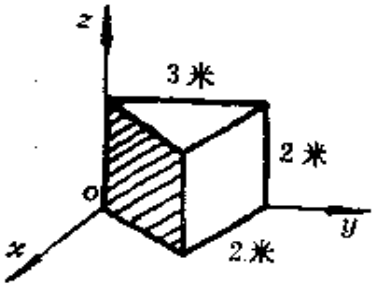


图 3-70

13. 在一个0.3米×0.5米的长方形截面的通风管道中，通过的空气体积流量为0.45米^3/秒，空气密度为2公斤/米^3。求管道中的平均流速多大。又如流管道截面最后收缩成0.15米×0.5米的长方形，在该截面上空气的密度变为1.5公斤/米^3，求此截面上的平均流速多大？

14. 直径为100毫米的管道中，空气的平均流速为15米/秒，温度30℃，压力为3个大气压。求通过的空气重量流量是多少？

15. 参看图3-71，如$u_0=3$米/秒，计算在各个速度分布情况下的平均流速的大小（二维流动情况，垂直于纸面的厚度取为一个单位）

16. 承上题，如果上图中的b为直径，再计算各个情况下的平均流速的大小。

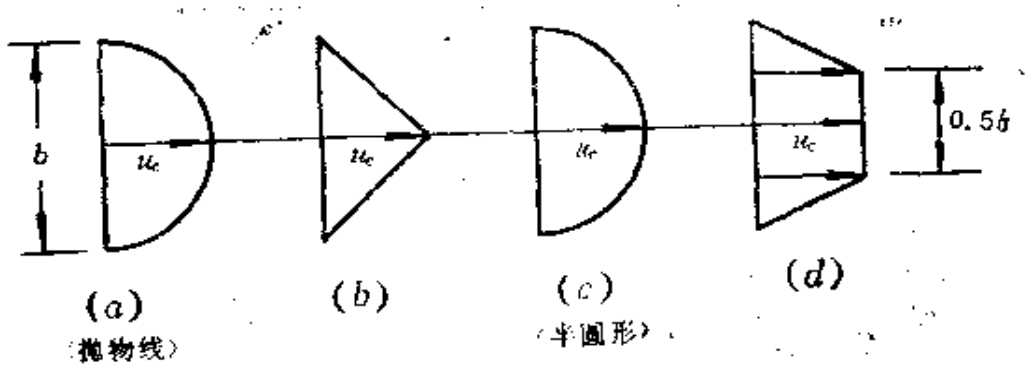


图 3-7

17．在发电厂排气口附近，空气的密度场可用下式近似表示：

$$\rho = \rho_0 + \frac{\Delta\rho}{2}\left[\frac{r_0}{r_0 + (x^2+y^2)^{1/2}} + e^{-kz}\right]$$

问该密度场是一维、二维或三维场？是定常或非定常场？

18．在汽车发动机排气管中的密度场可用下式近似地表出

$$\rho = a[1 + be^{-0.5t}\cos(\omega t)]$$

问该密度场是一维、二维或三维场？是定常或非定常场？

19．在一非定常二维流场中的三点：P_1（0，0），P_2(1，0），P_3（0，1）处同时测得同一瞬间的速度分量（u，v），单位为米/秒，它们分别为（20，10），（22，15），（14，5）。又在P_1点处量得$\Delta t = 0.5$秒后的速度分量为（30，10）。假定速度随时间和位置坐标的变化关系接近于线性。求P_1点处的当地加速和迁移加速度，以及总加速度各是多少？

20．已知速度场$\vec{V} = (yz+t)\vec{i} + (xz+t)\vec{j} + (xy)\vec{k}$，求$t=2$秒时在点$P$（1，2，3）处的三个加速度分量等于多少？

21．已知速度场$\vec{V} = ax\vec{i} - ay\vec{j}$，其中，$a = 1$秒$^{-1}$。试确定：

（1）它的流线方程为$xy = C$，C为待定常数；

（2）画出$C = 0$，1，4米^{2}的三条流线，说明它可能代表什么流动；

（3）计算$(x,y)=\left(\frac{1}{2},2\right)$，（1,1）和$\left(2,\frac{1}{2}\right)$各点处的加速度各多少？并画出加速度向量；

（4）求出在$t=0$，流过（x_0，y_0）点处的流体微团的迹线方程$x_p=f_1(t)$，$y_p=f_2(t)$；

（5）确定从起始点（x_0，y_0）为$\left(\frac{1}{2},2\right)$流动到点（$x$，$y$）为（1，1）和$\left(2,\frac{1}{2}\right)$各点所需要的时间；

（6）由（4）中求得的结果，算加速度并与（3）的结果作比较。

22．远前方来流U，从左向向右流过半径为a的二维圆柱体，其理想不可压流场的速度分布可用下式表示：

$$\vec{V}=U\cos\theta\left[1-\left(\frac{a}{r}\right)^2\right]\vec{i}_r-U\sin\theta\left[1+\left(\frac{a}{r}\right)^2\right]\vec{i}_\theta$$

求：（1）沿$\theta=\pi$的含驻点流线、流体微团的加速度表达式；

（2）沿圆柱面（$r=a$）的加速度表达式；

（3）加速度达到最大或最小值的位置。

23．一输气管道直径为150毫米，在相距8米的两个截面上同时量取数据，重量流量分别为2牛/秒和1.8牛/秒，问这段管

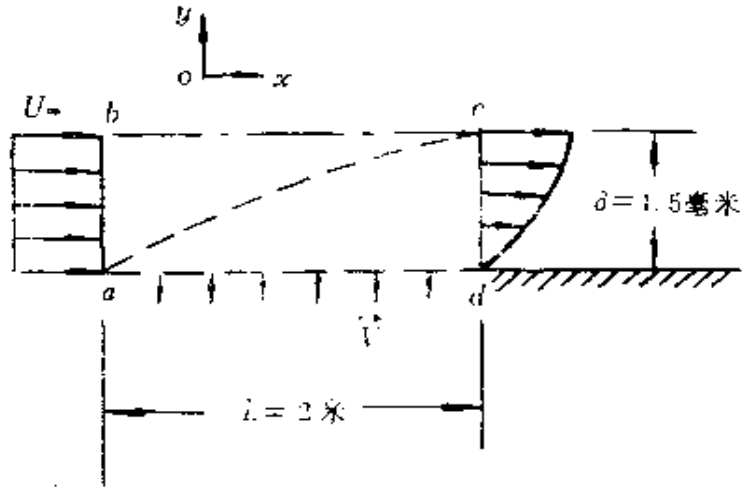


图 3-72

道内气体的平均密度随时间的变化率有多大？

24. 水定常地流过带孔的平板（板宽 1.5 米）；沿带孔平板向外抽水，其速度 $\vec{V}=-0.2\vec{j}$ 毫米/秒。在截面 cd 上的速度分布为（参看图 3-72）

$$\frac{u}{U_\infty}=3\left(\frac{y}{\delta}\right)-2\left(\frac{y}{\delta}\right)^{1.5}$$

计算通过 bc 横截面的质量流量有多大？

25. 输气管道直径为 0.4 毫米，气体是二氧化碳。在相距 1 000 米的两个截面①和②上，同时测得气体的压力，温度和流速，共测了两次，时间相隔半分钟，数据见下表。

截面	时间	温度	压力	流速
①	0 秒	30℃	5×10^5帕	20米/秒
②	0 秒	30℃	5.8×10^5帕	18米/秒
①	30秒	32℃	5.67×10^5帕	16米/秒
②	30秒	32℃	6.62×10^5帕	13米/秒

求在这一段管道中的平均漏气量。

26. 试判断下列速度场有否可能代表一个二维不可压流动：

（1）$u=ax$，　$v=-ay$；

（2）$u=ax$，　$v=ay$；

（3）$u=ay$，　$v=ax$；

（4）$u=x+y$，　$v=x-y$；

（5）$u=x+2y$，　$v=x^2-y^2$；

（6）$u=x^2y+y^2$，　$v=x^2-y^2x$；

（7）$u=xt+2y$，　$v=x^2-yt^2$；

（8）$u=xt^2$，　$v=xyt+y^2$；

（9）$u=a(x^2+xy-y^2)$，　$v=a(y^2+x^2)$

（10）$u=x^3\sin y$，　$v=3x^2\cos y$

（11）$u=a\ln(xy)$，　$v=\frac{ay}{x}$

(12) $v_r = U\cos\theta$, $\quad v_\theta = -U\sin\theta$

(13) $v_r = 2\gamma\sin\theta\cos\theta$, $\quad v_\theta = 2\gamma\sin^2\theta$

(14) $v_r = -\dfrac{a}{2\pi\gamma}$, $\quad v_\theta = \dfrac{b}{2\pi\gamma}$

(15) $v_r = U\cos\theta\left[1-\left(\dfrac{a}{\gamma}\right)^2\right]$, $v_\theta = -U\sin\theta\left[1+\left(\dfrac{a}{\gamma}\right)^2\right]$

式中，a，b，U 都是常数。

27. 设有一个二维不可压流动，其中 $u = a\sin\left(\dfrac{y}{h}\right)$，式中，$a$ 为常数，h 是 x 的函数，$h = h(x)$。v 在 x 轴上全为零。求 v 的一般表达式。

28. 在层流附面层内，当 $y = 0$，$u = 0$，$y = \delta$（附面层边界上），$u = U_\infty$，其间有一个近似关系，即

$$u = CU_\infty \frac{y}{x^{\frac{1}{2}}}$$

其中，C 为常数。

证明最简单的 y 方向速度分量为

$$v = \frac{uy}{4x}$$

并计算当 $x = 0.5$ 米，$\delta = 5$ 毫米处，v/u 的最大值。

29. 在层流附面层中，对于 x 方向速度分量有一个有用的近似表达式

$$u = U_\infty \sin\left(\frac{\pi y}{2\delta}\right)$$

式中，$\delta = Cx^{\frac{1}{2}}$，$C$ 为常数。

计算在 $x = 0.5$ 米，$\delta = 5$ 毫米处，v/u 的最大值。

30. 有一个二维不可压流动，其

$$v_r = -\frac{A\cos\theta}{\gamma^2}$$

确定 v_θ 分量的表达通式。

31. 在下述流场中有$\vec{V}=\frac{K}{2\pi r}\vec{i}_\theta$，$r>0$，其中$r$以米计，流体的密度$\rho=1\,000$公斤/米^3，而$K=20\pi$米^2/秒。试确定：

（1）在流场中的$\frac{\partial p}{\partial r}$的表达式；

（2）计算在$r_1=1$米和$r_2=2$米之间的压力变化。

32. 在风洞模型进口段附近，流线的曲率半径，参看图3-73，可以近似地用

$$R=\frac{(L/2)}{y}R_0$$

作为初步近似，假定沿每一条流线的速度$V=20$米/秒。计算由$y=0$到洞壁$y=\frac{L}{2}$时的压力变化。如$L=150$毫米，$R_0=0.6$米。

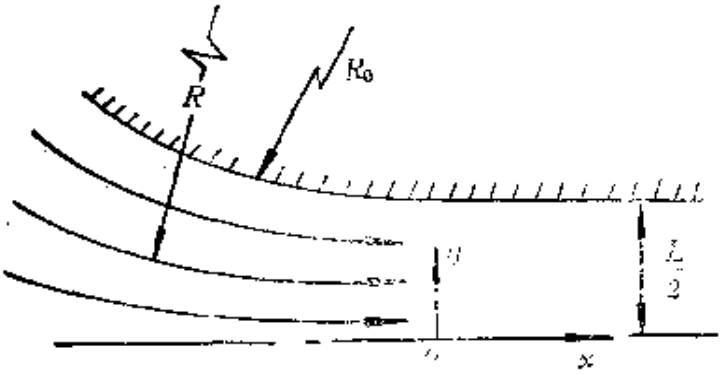


图 3-73

33. 一贮水池用一等径管道向外放水。见图3-74，求管道中A，B两截面处的静压力（表压）和流速各为多大。设贮水池自由液面保持不变。

34. 通过如图3-75所示一个收缩扩张管放水。$d_1=100$毫米，$d_2=120$毫米，设贮水池自由液面保持不变，外界大气压$p_a=101.3$千帕。求：

（1）在截面①处的静压力多大？

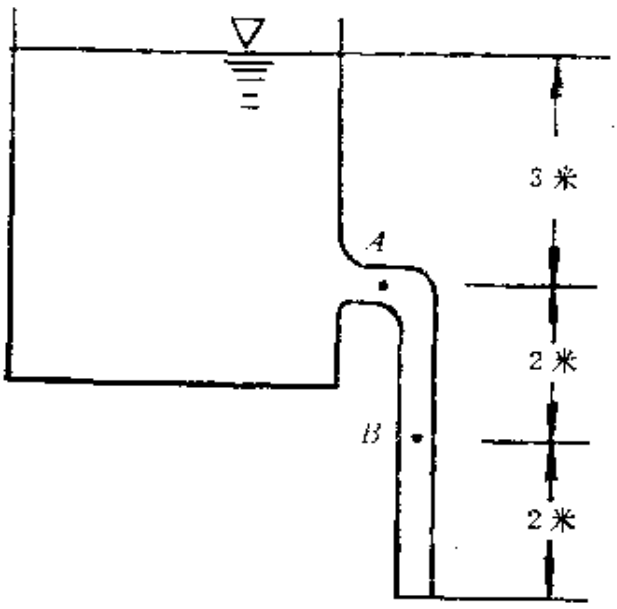


图 3-74

（2）通过管道的流量多大？

（3）如果去掉①②段扩张管道，通过管道的流量变化否？

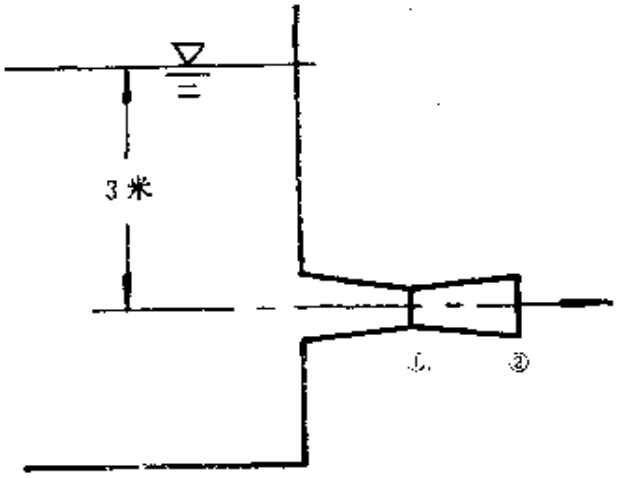


图 3-75

35．选矿场有一台碎矿机，每小时可以处理矿石36吨，其振动筛每筛分一吨矿石需用水一吨。贮水池和供水管如图3-76所示，不计任何损失。问此管路的直径 d 应多大时才能满足用水需要。

36．离心式通风机由吸气管吸入空气。吸气管圆筒部分直径

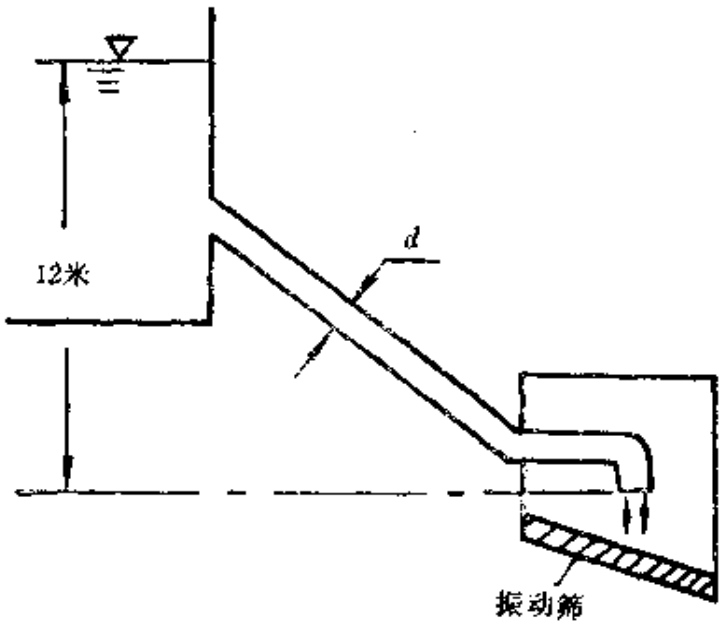


图 3-76

$d=200$ 毫米。按图所示装有一个盛水的测压管，现量得 $h=0.25$ 米，空气的重度为 12 牛/米^3。问此风机的吸气流量 Q 有多大？见图 3-77。

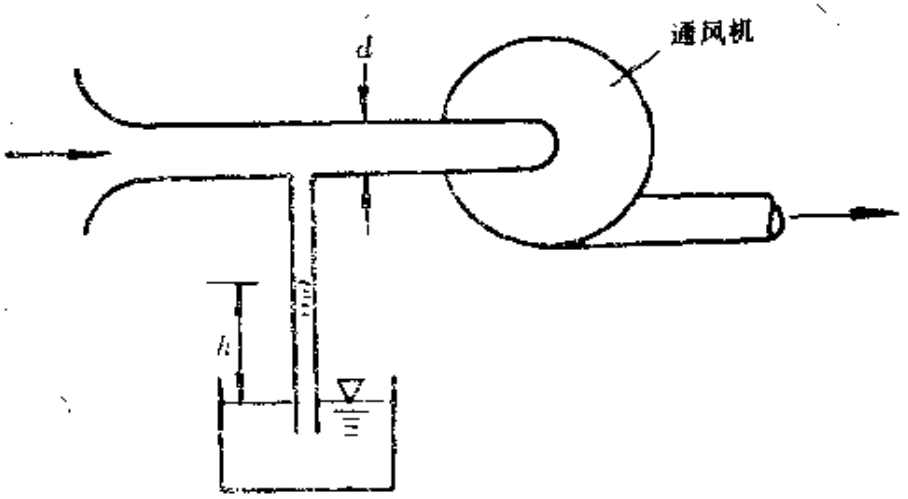


图 3-77

37．计算由小孔射出的水射流，其水平射程刚好等于 3 米时（刚好射过竖墙）的最小流量是多少？见图 3-78。

38．在图 3-79 上，来流为海平面标准大气，在图（a）上，截

面上流速分布均匀，$V=20$ 米/秒，求 U 形管压力计中水面差值 h 的大小？假如在截面中流速分布不均匀，见图（b），现已在 1，2 点处的速度 $V_1=10$ 米/秒，$V_2=13$ 米/秒，此时 U 形管压力计中乙醇液面差 h 值应有多大？

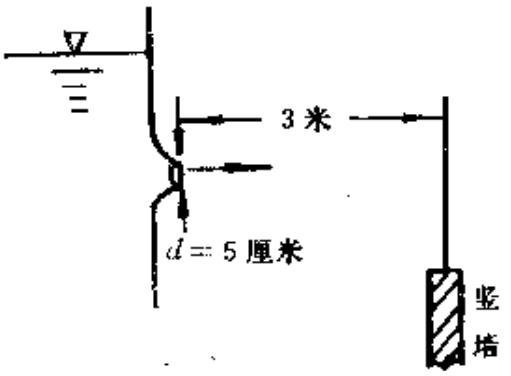


图 3-78

39. 冷空气经过热炉膛，密度由 ρ_1 降为 ρ_2，烟囱高 H 米；假设烟囱中不散热，热空气的密度始终保持 ρ_2 不变，直到冒出烟囱口。设进入炉膛时的空气流速可以略去不计，空气通过热炉膛时的压力亦不变。求证流出烟囱口的热空气流速

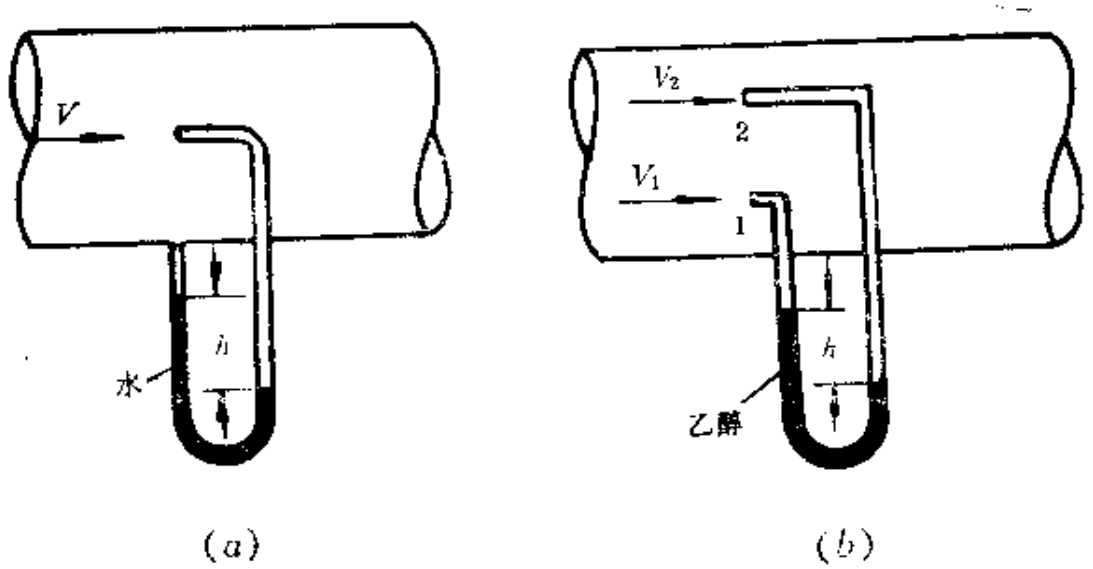


图 3-79

$$V=\sqrt{2gH\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}-1\right)}$$

40. 用一根文邱利管从贮水池中放水，见图 3-80。在文邱利管喉道处开一细孔，用一细管与另一水池相通，下方水池的水有可能通过细管被吸入文邱利管中。现 $A_2\gg A_0$，试证明通过细

管把下方水池中的水吸入文邱利管中的条件为

$$\frac{A_1}{A_2}>\sqrt{\frac{h+h_2}{h_1}}$$

其中，A_1 为出口截面积，A_2 为文邱利管喉道截面积。

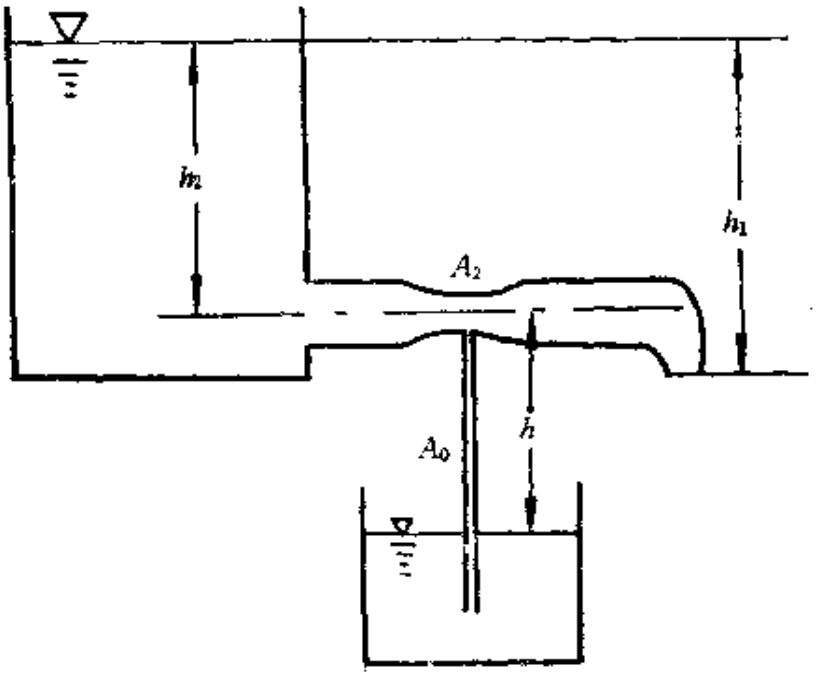


图 3-80

41、水流过图示管道，当两个压力表读数相同时，管径 d_2 应等于多大？参看图 3-81。

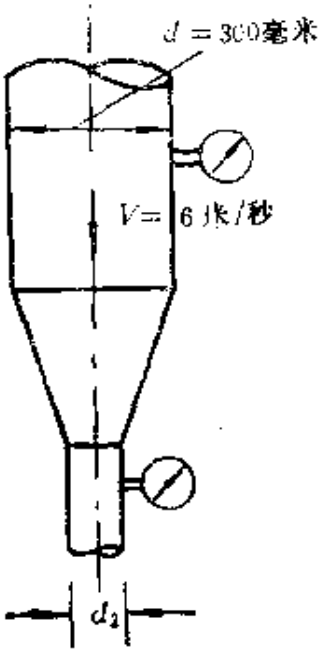


图 3-81

42. 空气通过贮气罐被气泵打入管道，不计压缩性和粘性效应。计算空气在进气管道直径等于100毫米截面的平均流速多大？大气压力 p_a 为91千帕，空气重度 γ 为11牛/米^3。见图3-82。

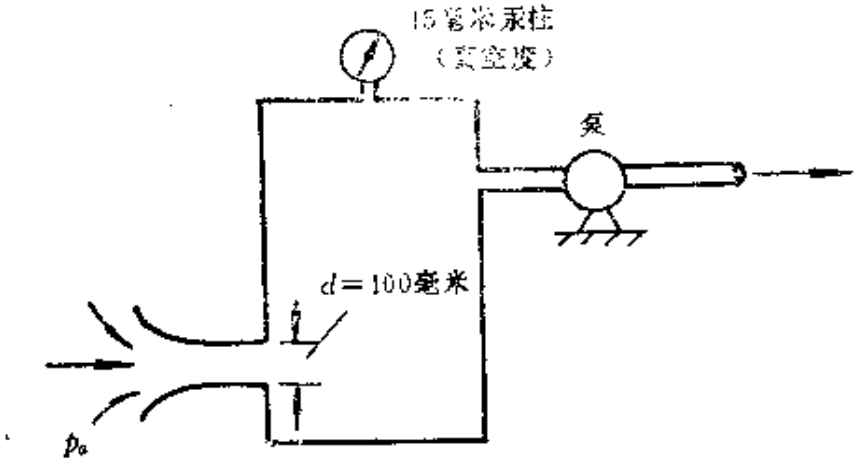


图 3-82

43. 一架飞机在9.14公里高空飞行，空气的密度为0.464公斤/米^3，压力为30.14千帕。一支总压管安装在它的喷气发动机进气道进口处，见图3-83，并用导管连接到座舱的压力表上。此时在压力表上的读数为330毫米汞柱（真空度），座舱中的气

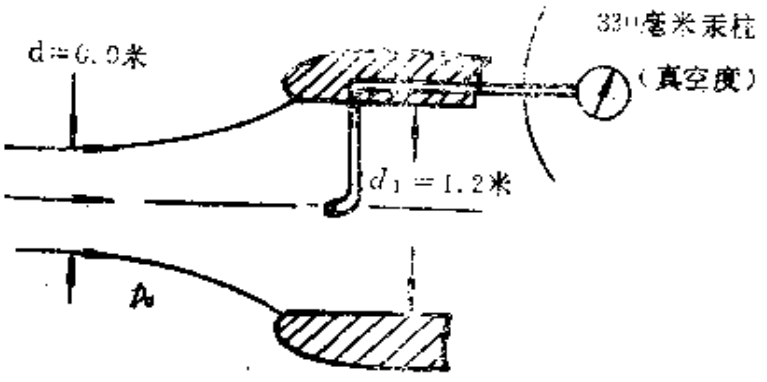


图 3-83

压为84.4千帕。空气流入进气道情况如图所示，不计压缩性影响，计算流进进气道中的空气体积流量多大？

44．如果在直径 $d=50$ 毫米处刚产生气穴，参看图3-84，这时通过管道的流量为多大？大气压力为100千帕，流动液体为四氯化碳，温度为20℃。

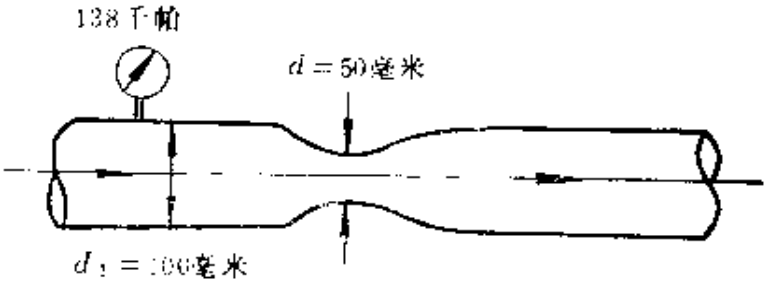


图 3-84

45．在河道某处用等截面虹吸管取水。虹吸管的最高点距水面为4.5米，出水口在水面以下5米处。某日气温达40℃，问大气压力表读数在什么范围内，管内会出现气穴？（注，不计任何流动损失），参看图3-85。

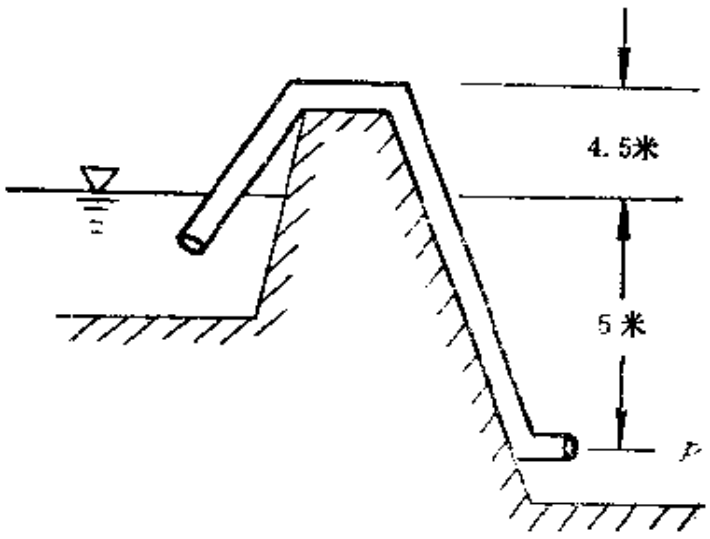


图 3-85

46．见图3-86，水洞中的流量为1.54米³/秒（水的重度为9.81千牛/米³，饱和蒸气压力为6.9千帕）。把图上的旋钮打开

后，计算 U 形管压力计中汞的液面变化方向以及液面差值 h 的大小。大气压力为 100 千帕。

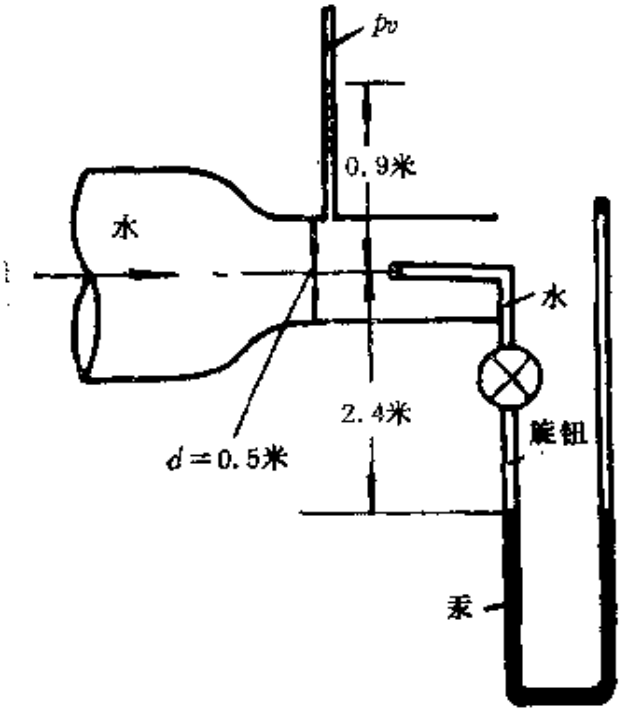


图 3-86

47. 压缩空气被用来推动水从细管中流出。参看图 3-87，不计容器中水面的下降速度，并假定在细管中任一截面中速度分布均匀。在一特定瞬间，已知细管中的 $V=2$ 米/秒，和 $\frac{dV}{dt}=0.5$ 米/秒^2，求此瞬间容器中空气压力 p 的值。

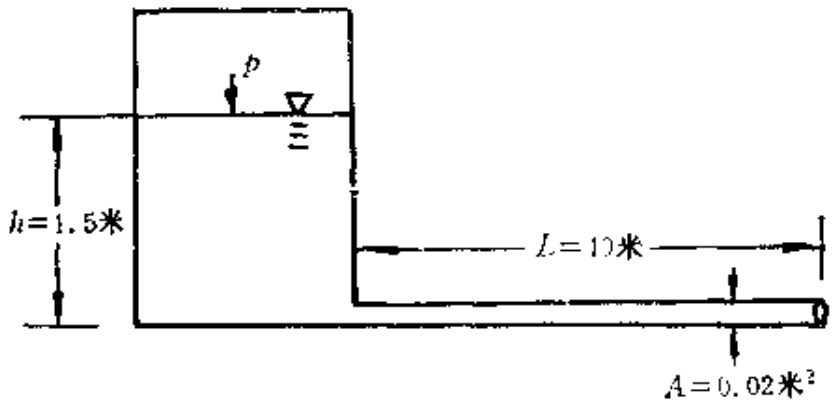


图 3-87

48. 要求有 120×10^{-3} 米³/秒的喷气发动机燃油（其比重 $s.g.=0.77$）通过图 3-88 所示管道，求所需泵的功率有多大？（不计任何损失）

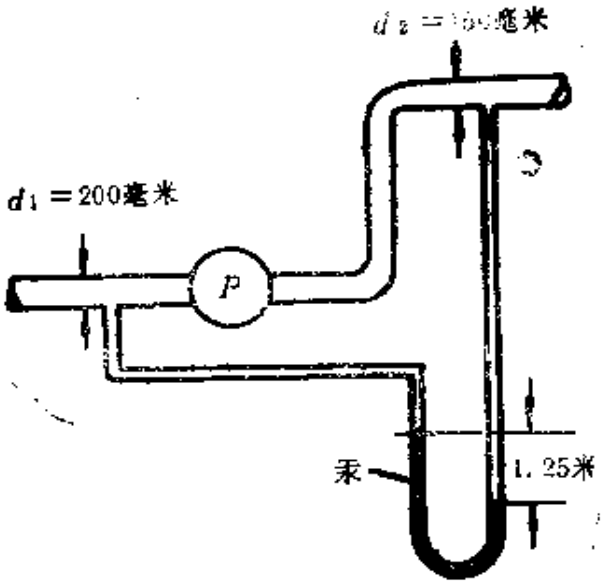


图 3-88

49. 参看图 3-89，要求输送的水流量为 0.113 米³/秒，计算所需泵的功率大小。知当时大气压为 98.6 千帕，水的饱和蒸气压力为6.9 千帕。此外，为了可靠运行，图示 x 的最大值为多少？

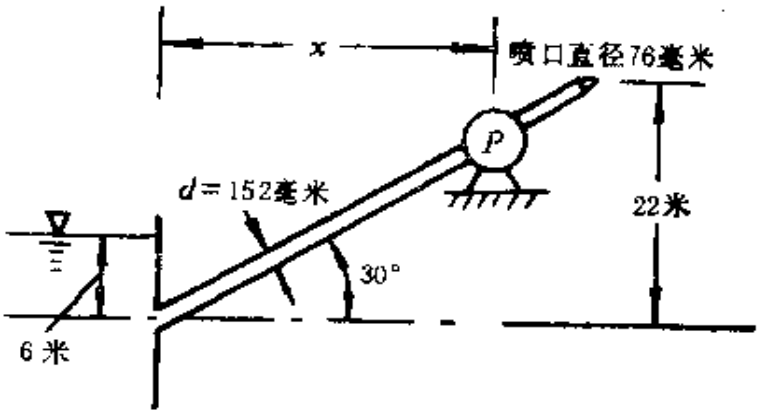


图 3-89

50. 承上题，当泵的功率为 37.3 千瓦时，此时水流量为多

大？

51．管道中通过的水流量为 85×10^{-3} 米^3/秒，而涡轮输出的功率为 15 千瓦时，此时 h 值应多大？参看图 3-90，不计任何损失。

52．通过管路的水流量为 0.566米^3/秒，而涡轮输出的功率为 74.5 千瓦，问当去掉涡轮机后，通过管道的流量可能变为多少？参看图 3-91。

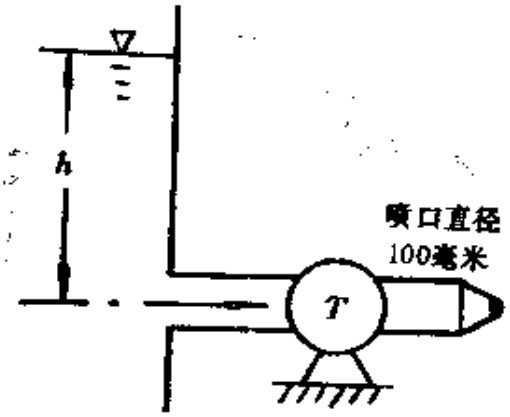


图 3-90

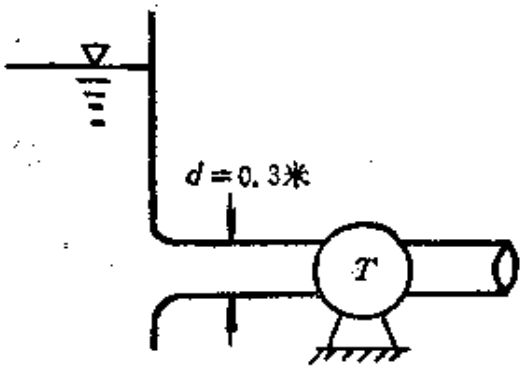


图 3-91

53．假定有一很大的贮气箱，其中空气的密度为 1.29 公斤/米^3，参看图 3-92，计算：

（1）涡轮前气体的压力为多大？

（2）涡轮输出功率有多大？

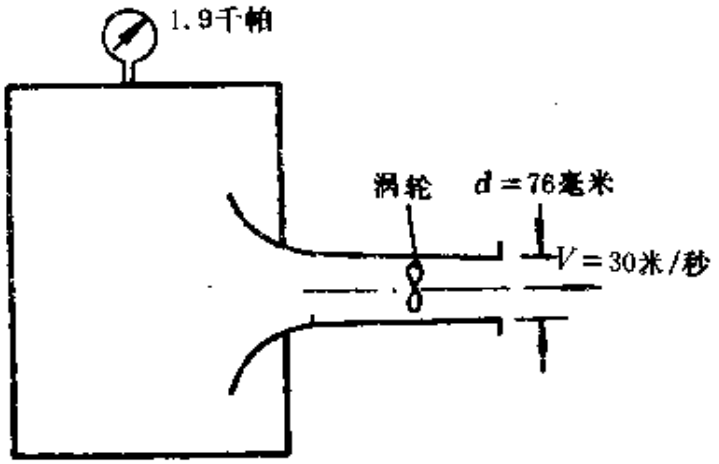


图 3-92

（3）当去掉涡轮后，管道中的流速是多大？

（注，不计任何损失）

54. 水的射流量为 42.5×10^{-3} 米^3/秒，计算圆板上所受到冲击力的大小。圆板直径 $d=0.3$ 米，见图 3-93。

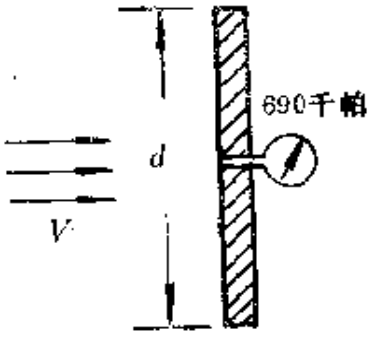


图 3-93

55. 一股直径为 25.4 毫米，速度为 30 米/秒的水射流由左向右射向圆板；而圆板本身则以速度7.6米/秒由右向左运动，参看图3-94，计算圆板上压力表的表压力大小，以及作用在圆板上的力和维持向左作等速运动时需要付出的功率多大？

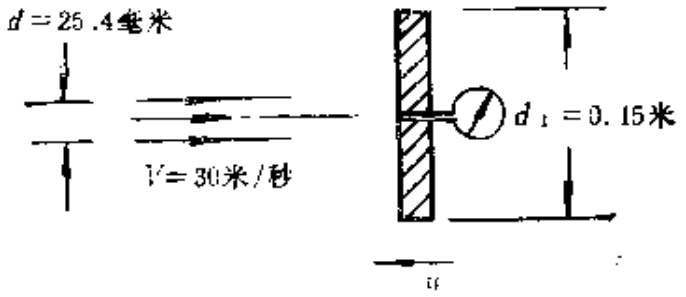


图 3-94

56. 水的射流流速为 12 米/秒，现被图3-95上所示静止叶片分流，$\frac{1}{3}$流量流向A边，计算作用在该叶片上的冲击合力大小与方向。不计粘性与重力作用。

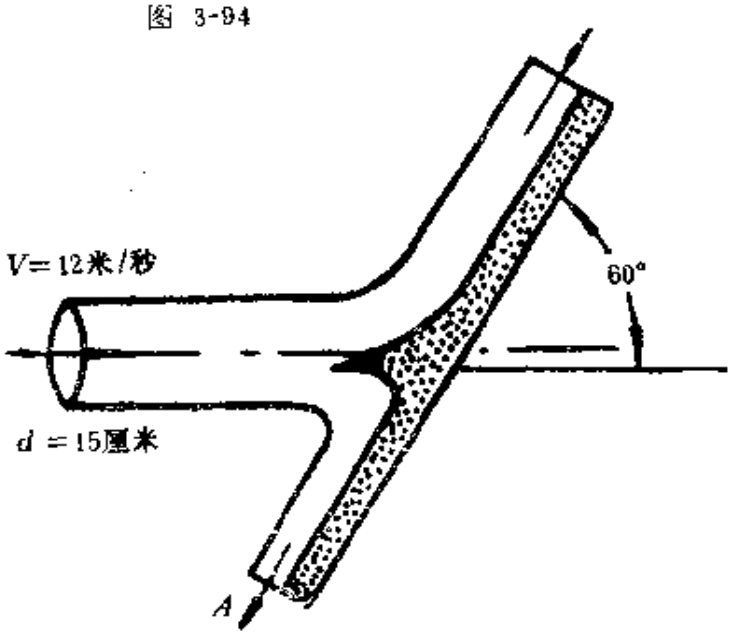


图 3-95

57．空气从 A，B 两管口（横截面积均为 5 厘米^2）流入贮气箱，入口压力为 108 千帕，流速为 30 米/秒。然后由 C 管喷射到大气中，大气压力为 101.3 千帕。流动定常，空气密度保持 1.225 公斤/米^3 不变。求作用在贮气箱上的力的大小。见图 3-96。

58．有一叶片置于小车上，而小车在射流的冲击下以速度 U

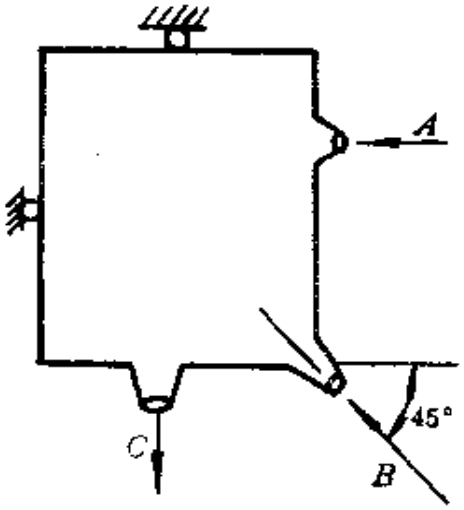
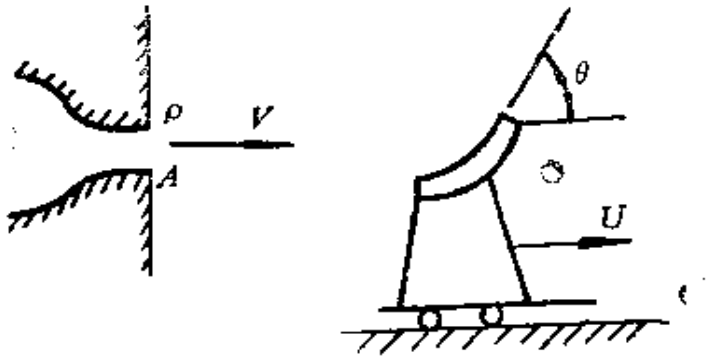


图 3-96



3-97

向右沿地面运动。水射流的绝对速度为 V。求作用在叶片上的合力和叶片产生的功率。并证明当 $U=V/3$ 时，叶片产生的功率为最大值。见图 3-97。

59. 水从图 3-98 所示管口中射入大气中，求螺钉上所受拉力有多大？

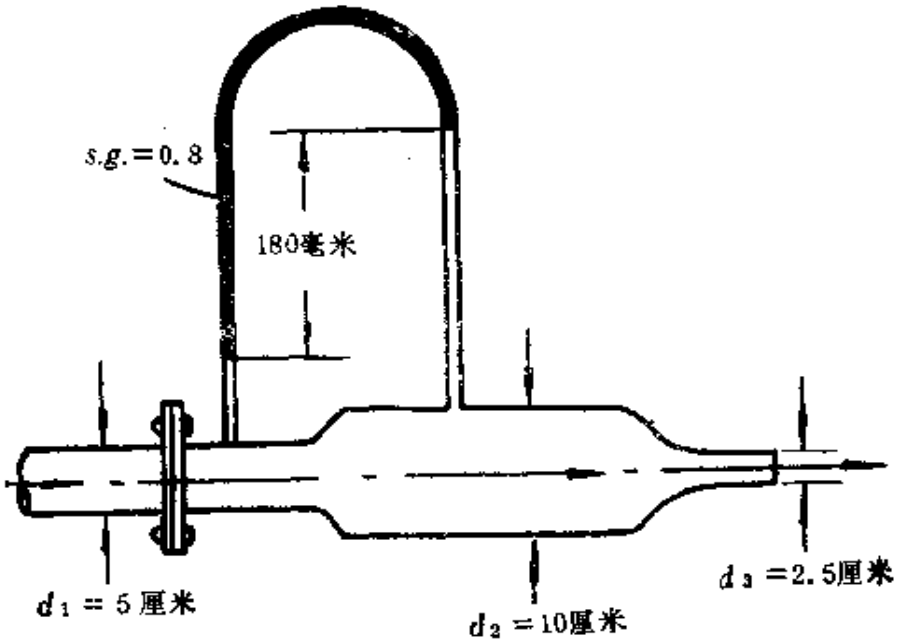


图 3-98

60. 一段水平放置的收缩管道，由直径 150 毫米收缩到 75 毫米，通过的水流量为 62 升/秒。如果在进口截面上的压力为 275 千帕，试计算水作用在收缩段内管壁上的水平力的方向和大小。（注，不计任何损失）

61. 水定常流过图 3-99 所示 180°的弯管。进口①截面的表压力为 96千帕。水从②截面处射入大气。在①、② 截面上流动均匀；$A_1=2\,600$ 毫米^2，$A_2=650$ 毫米^2，$V_1=3.05$ 米/秒。求维持弯管需加的水平分力大小和方向。

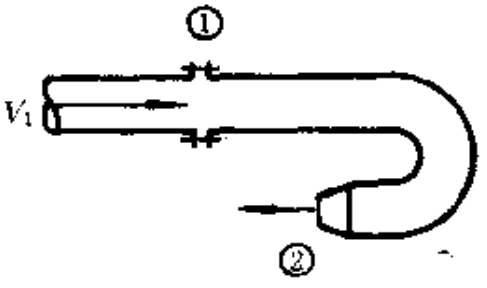


图 3-99

62. 考虑在例 3-9 中不可压粘性附面层的例子，证明粘性流

体作用在平板上的阻力 X 为

$$X=\int_0^{\delta}\rho u(U-u)z\mathrm{d}y$$

并计算该例情况下 X 的大小。

63．空气顺流流过平板。$U=10$ 米/秒。在从平板前缘量起的距离 $x=145$ 毫米处，附面层的厚度为 $\delta=2.3$ 毫米，在此位置附面层内速度分布为

$$\frac{u}{U}=\frac{3}{2}\frac{y}{\delta}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3$$

计算单位宽度平板上水平分力的大小。

64．在翼型后面的 4 倍弦长处测量的速度分布近似值可用下式表示：

$$u=V_\infty\left[1-0.83\cos^2\left(\frac{\pi y}{d}\right)\right]$$

其中，d 为尾迹的宽度，见图 3-100，其大小近似等于 $0.2b$，b 为翼型的弦长。试求该翼型的阻力系数 $C_x=\dfrac{X}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 b\cdot 1}$ 的大小。

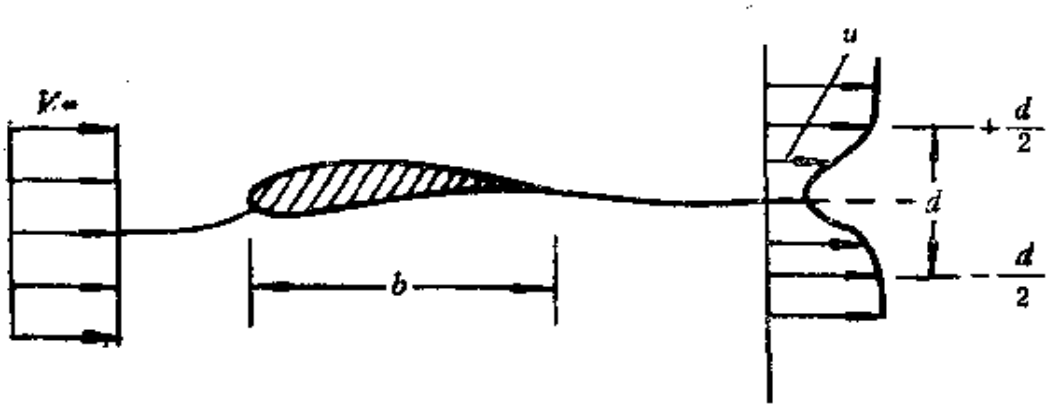


图 3-100

65．参看图 3-101，保持 1.8 米的水头不变，问：

（1）作用在小车上推力的大小；

（2）作用在叶片上推力的大小；

（3）作用在水箱和喷管上推力的大小。

66. 由水平液体射流推动的小车，在水平轨道上滑跑；不计运动中的阻力。水箱内加压可维持射流的速度不变。试推导小车从静止到加速运动整个过程的速度表达式。

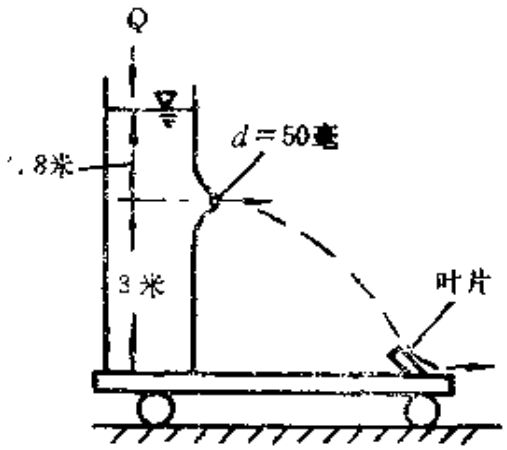


图 3-101

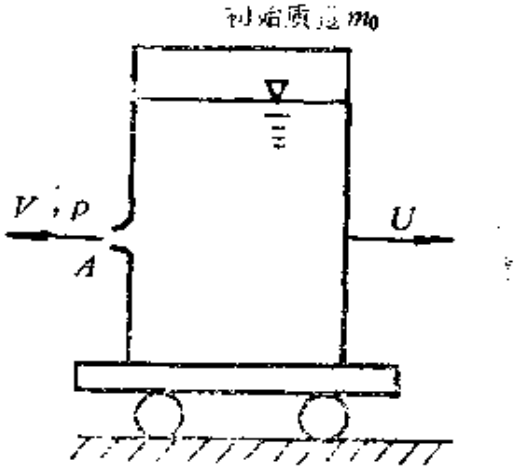


图 3-102

67. 一个质量为30 000 公斤的二级液体火箭将在海平面发射台上发射升空。主发动机燃烧液氢、氧混合燃料为2 450 公斤/秒。推力喷管出口直径 2.6 米；在喷口出口截面上，燃气的速度为 2 270 米/秒，压力 66 千帕（绝对）。计算起飞时的加速度多大？用重力加速度的倍数表示。

68. 如果一火箭的起始质量为 200 公斤，燃料消耗率为 10 公斤/秒，相对火箭喷管出口燃气速度为 1 200 米/秒；不计空气阻力，问10秒钟后火箭垂直上升速度可达到多大？

69. 一大型灌溉设备装在车上，通过喷口直径为 50 毫米，高 3 米，与水平线成 30° 的方向，向外喷水，水速为 40 米/秒。参看图 3-103，计算要翻倒车子的力矩有多大？

70. 通过图3-104 所示管路输送原油（其 $s.g.=0.95$），管子直径 $d=0.4$ 米，流量 $Q=0.58$ 米^3/秒。在①，②截面处测得的表压力分别为 345 千帕，332 千帕。求作用在图示一段管子上的

力和力矩各是多少？

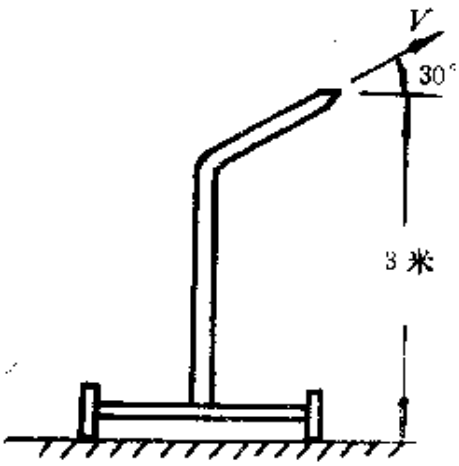


图 3-103

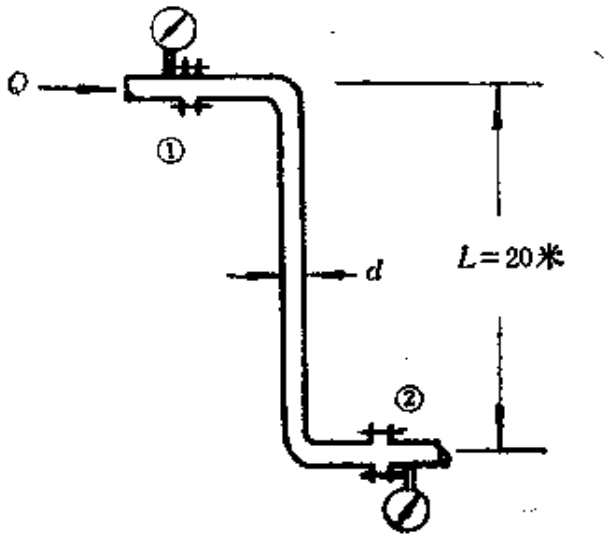


图 3-104

71．有如图3-105所示的洒水器，水的表压为140千帕，总流量为4升/分，喷口水射流流速为17米/秒（相对于洒水器而言），方向与水平面成30°。转动轴承中的摩擦力矩为0.18牛·米。计算：

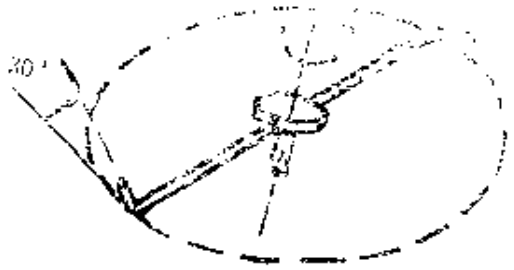


图 3-105

（1）保持洒水器不旋转所需力矩大小是多少？

（2）如无外加力矩作用，洒水器从静止开始旋转的起始加速度多大？已知灌满水时的洒水器相对于旋转轴的转动惯矩为0.1公斤·米²。

（3）定常旋转角速和近似的喷洒地面面积多大？

第四章　相似和量纲分析原理

§4-1　引　　言

虽然许多实际流动问题可用前述有关理论求解，但在计算时都包括某些近似假设。对于大多数实际流体的流动力学问题，由于流动现象和结构的复杂性，比如粘性流体的湍流或紊流结构，理论计算尚有一定困难。为了解决这些问题，实验方法起着重要作用。对很多实际流动，直接用实物（或称作原型）进行实验会遇到很大困难：如新型飞机，大型流体机械因尺寸大，造价昂贵，没有足够把握是不能冒然投产并进行原型实验的；有的原型尺寸太小，实测甚是困难；也有的用原型进行实验是不可能的。因此，在研究发展过程中，都必须要用一定尺度的模型进行实验。

自上世纪末就开始了用模型实验方法研究原型流动现象；在工业技术现代化的今天，应用模型实验方法进行科学研究和产品开发就更为普遍。例如宇航科技人员用风洞模型实验研究航空航天飞行器的性能；航海科技人员用船模在水池或水洞中研究船只的性能；建筑师用建筑物模型在风洞内进行风载实验；环保人员用风洞进行大气污染实验等等。

使用模型实验方法进行研究的优点为：经济性好，因为模型一般比原型小，容易制作成本低；因为模型实验的环境和条件容易控制，便于全面、系统地研究，而且风险性也小。但用模型实验研究来解决原型流动问题，首先遇到的重要问题是：如何做模型实验才能模拟原型情况；如何将模型实验结果推广应用到原型

情况中去。解决这些问题的正确途径应该是：要按照相似理论和量纲分析原理安排实验，使模型现象与原型现象相似；要用相似准数形式整理模型实验结果，并把它们应用到原型情况或者按相似比例率外推到原型情况。

本章简明阐述相似理论和量纲（又称因次）分析原理，它们是指导模型实验的理论基础。

§4-2 相似理论

一、相似的基本概念

1．几何相似

若两个物体对应的角度相同（包括方位或姿态角）、而且对应几何长度之比都相等，则称这两个物体几何相似。如图 4-1 所示，模型和原型分别用下标 m 和 p 表示，在几何相似条件下，不仅物体与来流方向的夹角（图上用 α 表示）相等，即

$$\alpha_m = \alpha_p \tag{4-1}$$

而且对应的几何长度之比有

$$C_l = \frac{b_m}{b_p} = \frac{C_m}{C_p} \tag{4-2}$$

式中，C_l 称为几何相似常数，也称做模型的比例尺。

两个几何相似物体，对应的面积比和体积比应满足

$$\frac{A_m}{A_p} = \frac{d_m^2}{d_p^2} = C_l^2 \tag{4-3}$$

$$\frac{\mathscr{V}_m}{\mathscr{V}_p} = \frac{d_m^2}{d_p^2}\ \frac{l_m}{l_p} = C_l^3 \tag{4-4}$$

2．运动相似

若两个物体的流场，在对应瞬间、在各对应点处的速度方向一致、速度大小之比都相等，则称这两个物体的流场运动相似。如图 4-2 所示，在运动相似条件下，在对应瞬间

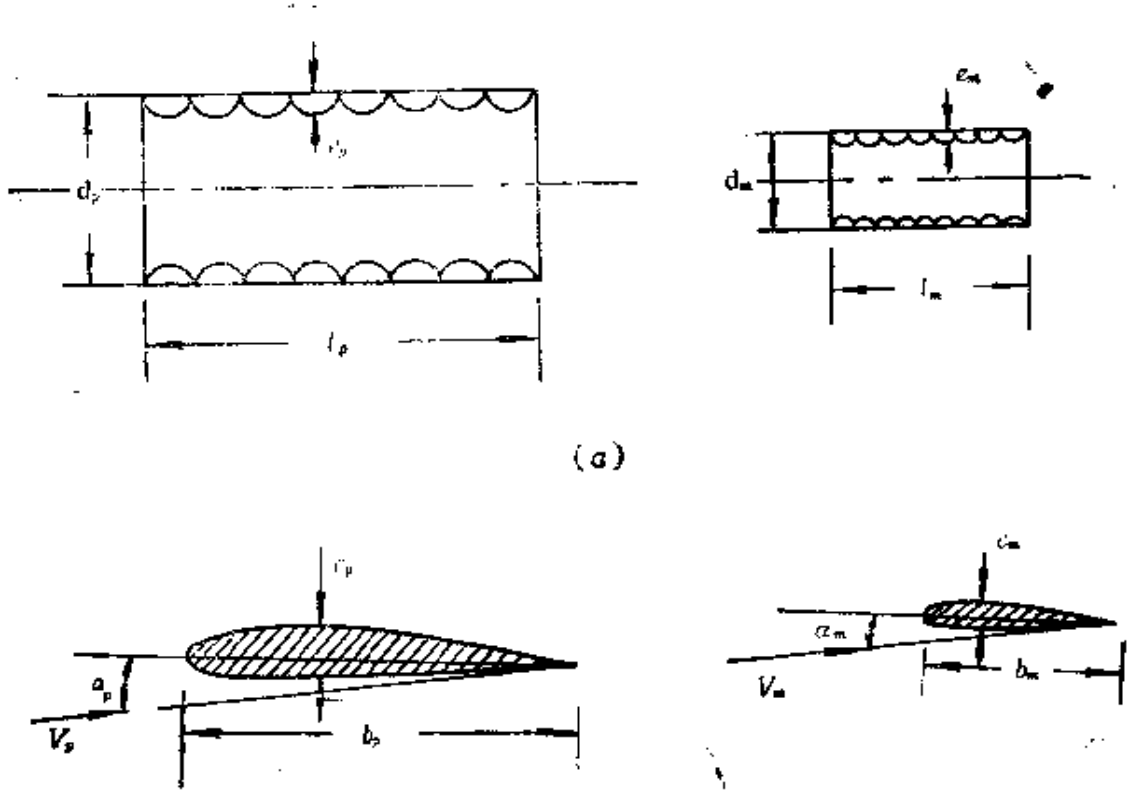


图 4-1

$$C_t = \frac{(t_1)_m}{(t_1)_p} = \frac{(t_2)_m}{(t_2)_p} = \frac{t_m}{t_p} \tag{4-5}$$

在对应点处

$$C_l = \frac{x_m}{x_p} = \frac{y_m}{y_p} = \frac{z_m}{z_p} = \frac{l_m}{l_p} \tag{4-6}$$

有

$$C_v = \frac{(V_1)_m}{(V_1)_p} = \frac{(V_2)_m}{(V_2)_p} = \frac{V_m}{V_p} \tag{4-7}$$

上面诸式中的 C_l，C_v 分别称为时间和速度相似常数。因为

$$C_v = \frac{V_m}{V_p} = \frac{l_m t_m^{-1}}{l_p t_p^{-1}} = C_l C_t^{-1} \tag{4-8a}$$

或者写成

$$C_v C_t^{-1} C_l = 1 \tag{4-8b}$$

它正是用相似常数表述的运动相似条件。显然几何相似是运动相

似的前提条件。

同理，在运动相似流场中各对应点处的加速度应满足

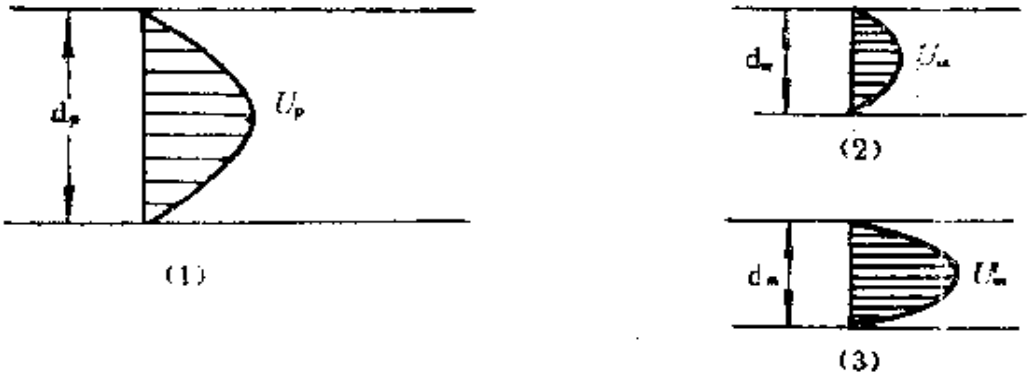
$$C_a = \frac{(a_1)_m}{(a_1)_p} = \frac{(a_2)_m}{(a_2)_p} = \frac{a_m}{a_p} = \frac{V_m t_m^{-1}}{V_s t_s^{-1}} = C_v C_t^{-1} = C_l C_t^{-2} \tag{4-9a}$$

或

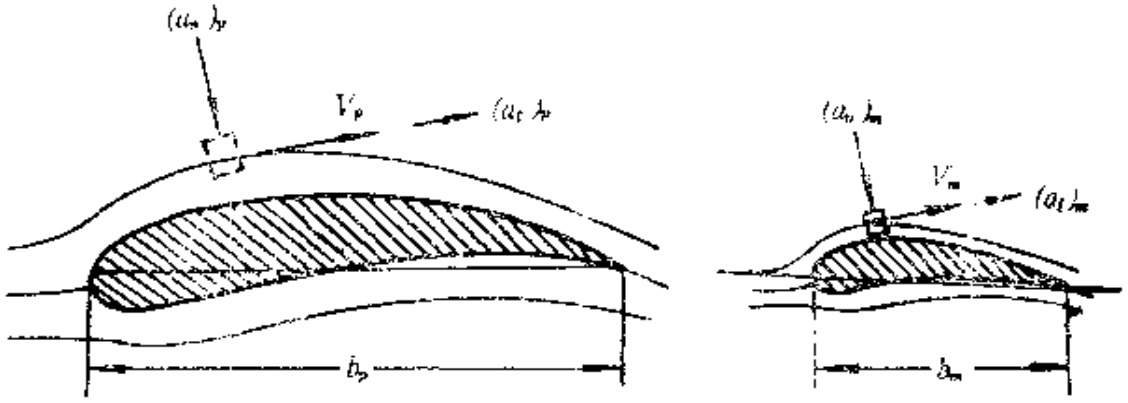
$$C_a C_t^{-1} C_t = 1, \quad C_a C_t^{-1} C_t^2 = 1 \tag{4-9b}$$

式中，C_a 称为加速度相似常数。

由上述可知，在运动相似流场中，速度场和加速度场必然相似，整个流场的流线谱相似。注意，如图4-2(*a*)上，（1）与（3）运动并不相似，只有（1）与（2）才运动相似。



(*a*)



(*b*)

图 4-2

3．动力相似

若两个物体的流场，在对应瞬间、在对应点处微团上作用着同样性质的力，而且由各种力组成的力多边形几何相似，则称这两个流场动力相似。如图 4-3 所示，在动力相似条件下，在对应瞬间、对应点处作用的相同性质的力应满足

$$C_R=\frac{(F_1)_m}{(F_1)_p}=\frac{(F_2)_m}{(F_2)_p}=\frac{(F_3)_m}{(F_3)_p}=\frac{M_m(a_4)_m}{M_p(a_4)_p} \tag{4-10}$$

式中，只列举了四个力；F_1，F_2，F_3是泛指作用在微团上的表面力和体积力，具体是几个视讨论的问题性质而定；$M(a_4)$是指作用在微团上的惯性力，微团的质量 $M=\rho\tau\propto\rho l^3$，$l$ 为微团的特征尺寸。

利用式（4-10）中惯性力之比，代入相应的相似常数，得

$$C_R=\frac{M_m(a_4)_m}{M_p(a_4)_p}=\frac{(\rho l^3)_m(Vt^{-2})_m}{(\rho l^3)_p(Vt^{-2})_p}=C_\rho C_v^2C_l^2$$

$$=C_\rho C_l^4C_t^{-2} \tag{4-11a}$$

或

$$C_RC_\rho^{-1}C_v^{-2}C_l^{-2}=1 \quad \text{或} C_RC_\rho^{-1}C_l^{-4}C_t^2=1 \tag{4-11b}$$

同理，比如 F_1，F_2 分别代表作用在微团表面上的、粘性剪切应力和压力的合力，而 F_3 代表重力，那么因 $F_1\propto$（粘性剪切应力）×（面积）$\propto\mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}A\propto\mu\frac{V}{l}l^2\propto\mu Vl$；$F_2\propto$（压力差）×（面积）$\propto\Delta pl^2$；$F_3\propto$（质量）×（重力加速度）$\propto\rho l^3g$。因此，按式（4-10）中粘性力之比，得

$$C_R=\frac{(F_1)_m}{(F_1)_p}=\frac{(\mu Vl)_m}{(\mu Vl)_p}=C_\mu C_vC_l=C_\rho C_l^2C_t^{-1} \tag{4-12a}$$

或

$$C_RC_\mu^{-1}C_v^{-1}C_l^{-1}=1 \quad \text{或} \quad C_RC_\mu^{-1}C_l^{-2}C_t=1 \tag{4-12b}$$

按式（4-10）中压力合力之比，得

$$C_R=\frac{(F_2)_m}{(F_2)_p}=\frac{(\Delta pl^2)_m}{(\Delta pl^2)_p}=C_pC_l^2 \tag{4-13a}$$

或

$$C_R C_\rho^{-1} C_l^{-2} = 1 \qquad (4\text{-}13b)$$

按式（4-10）中重力之比，得

$$C_R = \frac{(F_g)_m}{(F_g)_p} = \frac{(\rho l^3 g)_m}{(\rho l^3 g)_p} = C_\rho C_l^3 C_g \qquad (4\text{-}14a)$$

或者

$$C_R C_\rho^{-1} C_l^{-3} C_g^{-1} = 1 \qquad (4\text{-}14b)$$

如果作用在微团上还有弹性力，$F_e \propto$（体积弹性模量）×（面积）$\propto El^2$；还有表面张力合力，$F_\sigma \propto$（表面张力）×（长度）$\propto \sigma l$；同样利用式（4-10），还可以得到

$$C_R = C_E C_l \quad 或 \quad C_R C_E^{-1} C_l^{-1} = 1 \qquad (4\text{-}15)$$

$$C_R = C_\sigma C_l \quad 或 \quad C_R C_\sigma^{-1} C_l^{-1} = 1 \qquad (4\text{-}16)$$

以上等式（4-11）～（4-16）称为动力相似条件，考虑有六个力的作用，则有六个动力相似条件需要满足

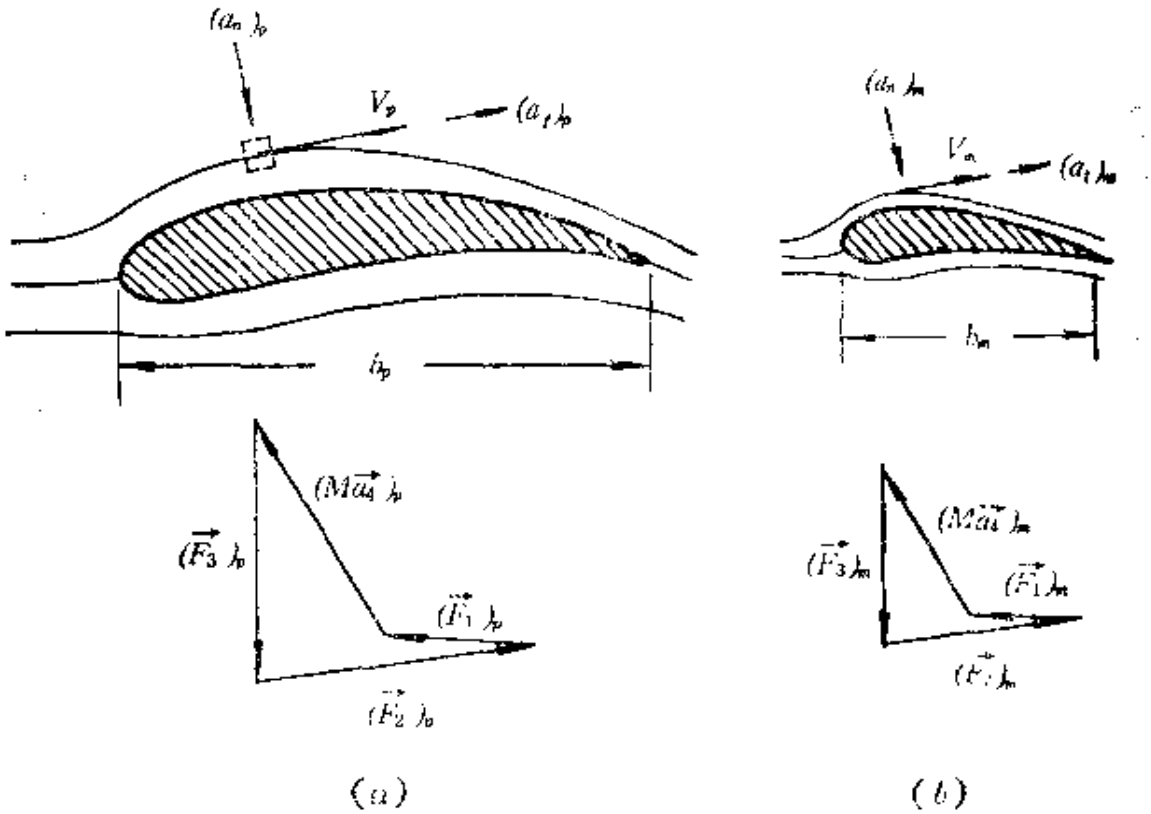


图 4-3

4．物理现象相似

若两个物体的流场，在对应瞬间、在对应点处各个物理量之比都各自相等（是向量还包括方向一致），则称这两个物体的流动物理现象相似或完全相似。显然，要保证两个物体的流动物理现象完全相似，则要求两个物体的流场动力相似。从式（4-11）～(4-16）可知，相应各个物理量之比都各自相等。

二、相似准数

从式（4-10）看，有四个力，它只能提供三个独立的动力相似条件。现分别用式（4-11a）与式（4-12a）、（4-13a）、（4-14a）等之比，得三个独立的动力相似条件：由式（4-11a）与式（4-12a）之比

$$\frac{C_\rho C_v^2 C_l^2}{C_p C_v C_l}=\frac{C_\rho C_v C_l}{C_p}=1 \qquad (4\text{-}17a)$$

得：

$$\frac{\rho_m V_m l_m}{\mu_m}=\frac{\rho_p V_p l_p}{\mu_p} \quad 或 \quad (Re)_m=(Re)_p \qquad (4\text{-}17b)$$

式中，$Re=\dfrac{\rho V l}{\mu}$称为雷诺相似准数。

由式（4-11a）与式（4-13a）之比

$$\frac{C_\rho C_v^2 C_l^2}{C_\rho C_t^2}=\frac{C_\rho C_v^2}{C_p}=1 \qquad (4\text{-}18a)$$

得

$$\frac{\rho_m V_m^2}{(\Delta p)_m}=\frac{\rho_p V_p^2}{(\Delta p)_p} \quad 或 \quad (Eu)_m=(Eu)_p \qquad (4\text{-}18b)$$

式中，$Eu=\dfrac{\rho V^2}{\Delta p}$称为欧拉相似准数。

由式（4-11a）与式（4-14a）之比

$$\frac{C_\rho C_v^2 C_l^2}{C_\rho C_l^3 C_g}=\frac{C_v^2}{C_l C_g}=\frac{C_v}{(C_l C_g)^{\frac{1}{2}}}=1 \qquad (4\text{-}19a)$$

得

$$\frac{V_m}{\sqrt{g_m l_m}}=\frac{V_p}{\sqrt{g_p l_p}} \quad 或 \quad (Fr)_m=(Fr)_p \qquad (4\text{-}19b)$$

式中，$Fr=\frac{V}{\sqrt{gl}}$称为弗劳德相似准数。

如果还考虑弹性力和表面张力的作用，则还可以利用式（4-11a）与式（4-15）、（4-16）之比，得考虑弹性力（压缩性影响）和表面张力的相似准数。考虑弹性力的相似准数称为柯西数 Ca 或马赫数 Ma，有

$$Ca=\frac{\rho V^2}{E},\quad Ma=\frac{V}{\sqrt{E/\rho}}=\frac{V}{a} \tag{4-20a}$$

或

$$\left(\frac{V}{a}\right)_m=\left(\frac{V}{a}\right)_p \text{ 或 } Ma_m=Ma_p \tag{4-20b}$$

和考虑表面张力的相似准数称为韦泊数 We，有

$$We=\frac{\rho l V^2}{\sigma} \tag{4-21a}$$

$$\frac{\rho_m l_m V_m^2}{\sigma_m}=\frac{\rho_p l_p V_p^2}{\sigma_p} \quad \text{或} \quad (We)_m=(We)_p \tag{4-21b}$$

从上述推导过程中知，这些相似准数的物理意义都是作用在微团上的惯性力与某一个其他性质的力之比；如雷诺数就是惯性力与粘性之比。显然，这些相似准数又都是无量纲的组合量，但它们分别包含着表征流动现象特性的所有物理量。因此，如描述流动物理现象的各个物理量之间存在着如式（4-22）所示待定的函数关系，按相似定理知，它一定可以表述为上述相似准数之间的待定函数关系式（4-23）。即如有

$$f(q_1,\ q_2,\ \cdots\cdots q_n)=0 \tag{4-22}$$

式中，q_1，q_2，$\cdots q_n$ 是代表某一流动物理现象中包含的 n 个物理量。

则有

$$f_1(Eu,\ Re,\ Fr,\ Ma,\ We,\ \cdots\cdots)=0 \tag{4-23}$$

或

$$Eu=f_2(Re,\ Fr,\ Ma,\ We,\ \cdots) \tag{4-24}$$

如果考虑六个作用力，可得五个独立的动力相似条件，引入五个相似准数；此时由式（4-23）立即可知，只能有四个独立的相似准数。如按式（4-24）写法，欧拉数Eu称为非决定相似准数（即非独立的相似准数，相当于因变量），而Re，Fr，M_a，We等称为决定相似准数（即独立的相似准数，相当于自变量）。哪个是决定相似准数，哪个是非决定准数，视现象和问题的不同而变化，不是一成不变的。

从以上讨论可以得出下列结论：如果模型现象和原型现象几何相似、而且决定相似准数数值相等，则两个现象完全相似。此时，式（4-23）或式（4-24）可应用于完全相似现象之中。换句话讲，在模型实验中，应当测量的量是相似准数中所包含的量；并且应当按式（4-24）形式来整理实验结果，得出待定函数f_*具体形式。这样做不仅使变量数目大大减少，简化了问题，而且可把按相似准数形式整理的模型实验结果推广应用到原型现象中去。

从式（4-24）看，为了完全相似，在模型实验中要同时满足四个相似准数与原型的相等，实际上这是办不到的（下详）。另外考虑到在原型流动现象中，上面提到的六个力不见得同时都起着主要作用；没有自由液面或气穴现象出现时，表面张力的作用就很小；液体或者气体的流动马赫数比较小时，则弹性力的作用可以忽略；对于气体的流动，重力的作用一般都很小；换句话讲，通常只有一、二种力起主要作用，决定流动现象的力学本质，另外的一些力的作用可以忽略。总之，在工程问题中，需要针对具体问题做具体分析，减少决定相似准数的数目，并保证满足或尽可能满足必不可少的决定相似准数相等或近似相等，以使模型实验获得成功。但是应当讲，这时模型现象与原型现象并不完全相似，而只做到了部分相似。

三、相似律的应用

1．雷诺相似

如果流动现象的决定相似准数只有一个是雷诺数 Re，则模型实验必须遵守的相似称做雷诺相似。因雷诺数代表惯性力与粘性力之比，故是考虑流体粘性影响的相似准数。例如，低速粘性流体流过物体或管道产生的阻力或压力损失，就是有粘性影响的结果。这时雷诺数是决定相似准数，并且应按式（4-17）来设计安排模型实验。因运动粘性系数 $\nu=\mu/\rho$，故式（4-17）可变为

$$C_v C_l C_t^{-1}=1 \quad 或 \quad \frac{V_m l_m}{\nu_m}=\frac{V_p l_p}{\nu_p} \tag{4-25}$$

上式表明，模型实验用流体可以和原型情况不同($C_\nu\neq 1$)，如原型在空气中运动，而模型却在水中运动。如果模型实验用流体和原型用的相同，则 $C_\nu=1$。由式（4-25）得

$$C_v=\frac{1}{C_l} \quad 或 \quad \frac{V_m}{V_p}=\frac{l_p}{l_m} \tag{4-26}$$

可见，模型几何尺寸大小的选择，直接影响到对实验时流速大小的要求。模型尺寸越小，则要求作实验时的流速越大。

对于低速粘性流体流过物体的阻力问题，非决定相似准数是欧拉数 Eu，一般实用的形式 $Eu^{-1}=\dfrac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho V^2}=\dfrac{\Delta pA}{\frac{1}{2}\rho V^2 A}=$

$=\dfrac{X}{\frac{1}{2}\rho V^2 A}=C_x$，$X$是阻力，$C_x$称做阻力系数；$A$是物体的参考面积。对于低速粘性流体流过等截面管道造成的压力损失问题，非决定相似准数也是欧拉数 $Eu^{-1}=\dfrac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho V^2}$，按式（4-24）有

$$C_x=f(Re) \tag{4-27}$$

和

$$\frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho V^2}=f_1(Re) \tag{4-28}$$

例 4-1　已知：某物体在海平面标准大气情况下作等速直线

运动，速度为20米/秒。用1/5缩尺模型在风洞内进行实验，测得阻力为50牛。假设风洞实验段来流的压力、密度和温度与海平面标准大气情况相同。求：模型实验的风速和物体所受到的阻力。

解 根题意知，海平面的音速 $a=340$ 米/秒，故物体的飞行马赫数 $Ma=\frac{V}{a}=\frac{20}{340}=0.06$，属于低速流动；所以流体粘性力起主要作用，雷诺数是决定相似准数。模型实验应按雷诺相似来考虑。因 $C_l=\frac{1}{5}=0.2$，$C_\nu=1.0$，从式（4-26）得

$$V_m=\frac{V_p}{C_l}=\frac{20}{0.2}=100\text{米/秒}$$

另由式（4-11a）和式（4-25）有（称为力的雷诺相似比例率）

$$C_R=C_\rho C_\nu^2 C_l^2=\frac{C_\mu^2}{C_\rho}=C_\rho C_\nu^2 \qquad (4\text{-}29)$$

现由题意知，$C_\rho=C_\mu=C_\nu=1.0$，故

$$C_R=1.0 \quad 或 \quad X_p=\frac{X_m}{C_R}=X_m=50\ (\text{牛})$$

注意，由 $C_\rho=0.2$，为保证决定相似准数 Re 相等，风洞实验段风速 V_m 将达100米/秒，但实验中的流动马赫数仅有0.3，压缩性影响仍不大。

例 4-2 已知：0℃的水，$\mu=1.781\times10^{-3}$ 帕·秒，$\rho=998.3$ 公斤/米^3，在管径为75毫米的水平直管中以平均流速3米/秒流动；当管长为10米时，测得的压力降为14千帕。20℃的汽油，$\mu=2.9\times10^{-4}$ 帕·秒，$\rho=680.3$ 公斤/米^3，在与上述几何相似的管道中流动（管径为25毫米，管长$3\frac{1}{3}$米）。求：汽油需要多大流速才能使流动与水的流动相似，又此时汽油的压力降将等于多少？

解：仍只考虑雷诺相似律。设水的流动为“模型”，而汽油

的流动为“原型”。因此，有

$$C_l = \frac{d_m}{d_p} = \frac{75}{25} = \frac{10}{3\frac{1}{3}} = 3$$

故按式（4-17a）有

$$C_v = \frac{C_\mu}{C_\rho C_l} = \frac{1.781\times10^{-3}/2.9\times10^{-4}}{(998.8/680.3)\times3} = 1.394$$

因而

$$V_p = \frac{V_m}{C_v} = \frac{3}{1.394} = 2.15\ (\text{米/秒})$$

再按式（4-18a），（4-25）有

$$C_p = C_\rho C_v^2 = \frac{C_\rho C_v^2}{C_l^2} = \frac{C_\mu^2}{C_\rho C_l^2} \qquad (4\text{-}30)$$

故

$$C_p = \frac{(1.781\times10^{-3}/2.9\times10^{-4})^2}{(998.8/680.3)\times3^2} = 2.85,$$

$$\Delta p_p = \frac{\Delta p_m}{C_p} = \frac{14\times10^3}{2.85} = 4.9\ (\text{千帕})$$

2. 弗劳德相似

如果流动现象的决定相似准数只有一个是弗劳德数 Fr，则模型实验必须遵守的相似称为弗劳德相似。因弗劳德数代表惯性力与重力之比，故是考虑流体重力影响的相似准数；只要 Fr 数不大，特别是当有自由液面出现的流动情况，都应当考虑重力对流动的影响。例如，研究水力学中的明渠流动和堰流；船舶和水上飞机在水面上运动产生的波浪阻力等问题。这时弗劳德数是决定相似准数，并且应按式（4-19）来设计安排模型实验。除非在离心机上做实验外，一般 $C_g = g_m/g_p = 1$，故式（4-19）变为

$$C_v = C_l^{\frac{1}{2}} \quad 或 \quad \frac{V_m}{V_p} = \sqrt{\frac{l_m}{l_p}} \qquad (4\text{-}31)$$

可见，对于 $C_l<1$ 的缩尺模型实验，模型实验速度比原型速度要低，与雷诺相似要求恰好相反。

例 4-3　已知：某船长122 米，航行速度15米/秒。现用船模在水池中做实验，船模长 3.05 米。求：船模应以多大速度运动才能保证与原型现象相似；又如此时测得船模上所受阻力为 20 牛，问船上所受阻力将等于多少？

解　本题只按弗劳德相似来考虑。并知 $C_g=1.0$。按题意知

$$C_l=\frac{l_m}{l_p}=\frac{3.05}{122}=0.025$$

按式（4-31）有

$$C_v=C_l^{\frac{1}{2}}=(0.025)^{\frac{1}{2}}=0.158$$

故

$$V_m=C_vV_p=0.158\times15=2.37\ (\text{米/秒})$$

再按式（4-11a）和式（4-19a）有

$$C_R=C_\rho C_v^2C_l^2=C_\rho C_gC_l^3 \qquad (4\text{-}32)$$

按题意 $C_g=C_\rho=1.0$，所以

$$C_R=C_l^3=(0.025)^3=1.562\,5\times10^{-5}$$

故

$$X_p=\frac{X_m}{C_R}=\frac{20}{1.562\,5\times10^{-5}}=1\,280\ (\text{千牛})$$

3．雷诺相似与弗劳德相似

研究在重力作用下的粘性流体运动时，决定相似准数就包括雷诺数和弗劳德数。看一下同时满足这两个决定相似准数，对做模型实验的流体的具体要求：从式（4-25）和式（4-19）看，有

$$C_v=\frac{C_\nu}{C_l}\quad 和\quad C_v=(C_lC_g)^{\frac{1}{2}}$$

如取$C_g=1.0$，由上二式可解出

$$C_\nu=C_l^{\frac{3}{2}} \qquad (4\text{-}33)$$

这表明实验用流体的粘性系数大小将取决于模型的缩尺，相似常数C_l的大小。在实际工作中很难满足式（4-33）要求。更不用说多于两个决定相似准数的情况了。因此，从实用观点看，模

型实验只能做到部分相似。

§ 4-3 量纲分析原理

如果确知某一流动现象的 n 个物理量之间有如式（4-22）所示的待定关系存在：即

$$f(q_1, q_2, \cdots, q_n) = 0 \qquad (4\text{-}22)$$

那么，不仅通过相似理论分析方法，而且通过量纲分析或称因次分析方法，也可以正确地组合有关的物理量构成无量纲量，而它们正是相似物理现象间、所存在的相似准数或相似常数等，从而获得如式（4-23）所示的待定关系，即

$$f_1(Eu, Re, Fr, Ma, We, \cdots) = 0 \qquad (4\text{-}23)$$

所以，量纲分析方法是一个有用的工具，是模型实验的理论基础之一。

一、量纲的基本概念

在流体力学现象所包含的众多物理量中，只有四个基本物理量，即长度、质量、时间和温度；其他物理量均可按其自身的定义或所遵循的定律、由基本物理量导出，称为导出量。所谓物理量的量纲或因次，是指代表物理量性质或种类的符号。因此，在众多物理量中，也只有四个基本量纲，分别用符号 L，M，T 和 t 来代表；其他所有导出量的量纲都可以写成上述四个基本量纲的幂的乘积表达式，即

$$[q] = M^{c_1} L^{c_2} T^{c_3} t^{c_4} \qquad (4\text{-}34)$$

此式称为量纲公式。式中 q 为任一物理量；$[q]$ 表示该物理量 q 的量纲；c_1，c_2，c_3 和 c_4 为基本量纲的幂指数。任一物理量的量纲决定于该物理量的性质，故可通过该物理量的定义或有关物理定律来确定其基本量纲的幂指数大小。例如，密度 ρ 的量纲为：$[\rho] = ML^{-3}T^0t^0$，速度 V 的量纲为：$[V] = M^0LT^{-1}t^0$，力 F

的量纲为：$[F]=MLT^{-2}t^{0}$，流体粘性系数 μ 的量纲，参看式（1-28），显然有$[\mu]=ML^{-1}T^{-1}t^{0}$，完全气体常数 R 的量纲，参看式（1-10）有$[R]=M^{0}L^{2}T^{-2}t^{-1}$等。为了使用方便，流体力学中常用物理量的量纲已列在附表 4-1 中。从表中可以看到，同类物理量具有相同的量纲；但不能认为凡量纲相同的量都是同类的物理量，例如体积弹性模量 E 和压力 p 就是如此。

在式（4-34）量纲公式中，只有当所有量纲幂指数全为零时，该物理量才是无量纲量，否则是有量纲的量。无量纲量可以是两个同类物理量的比值，例如线应变 ε 的量纲，$[\varepsilon]=M^{0}L^{0}T^{0}t^{0}=1$；也可以是由几个有量纲量通过一定的组合而成，例如前述的雷诺数 $Re=\frac{Vl}{\nu}$ 的量纲，$[Re]=\left[\frac{Vl}{\nu}\right]=\frac{LT^{-1}\cdot L}{L^{2}T^{-1}}=1$，即 $[Re]=M^{0}L^{0}T^{0}t^{0}$。

二、物理方程量纲一致性原理

量纲分析的方法是以傅里叶于1882年提出的“物理方程量纲一致性”原理为基础的。这一原理可以简述如下：在任何表示一定物理现象的物理方程中，各项的量纲必须相同。实际上这已为大家所熟悉、而又经常应用的基本原理，因为只有同类的量才能相加、减。比如，常用它来校核物理方程和经验公式的正确性和完整性。显然，量纲不一致的物理方程和经验公式肯定有错误或者是不完整的。

三、π 定理及其应用

π 定理是量纲分析的主要内容，它是巴金汉于 1915年首先提出来的，故也称巴金汉定理。此处只用了 π 这个符号，与圆周率毫不相干。对于一些比较复杂的流动现象，当只靠数学分析无法求解时，或者甚至暂时还难以找到确切的方程来加以描述时，π 定理将为如何由有关物理量组成无量纲组合量、即相似准数提供

方法，这对模型实验研究是十分重要的。

由于本书的篇幅和内容所限，如同对待相似理论一样，也只能重点介绍π 定理的主要内容及其应用，对定理本身不作具体的证明。

1．量纲幂指数矩阵

在某一物理现象中包含有n个 物 理 量：q_1，q_2，$\cdots q_n$，它们之间且满足待定的关系式（4-22）。在这n个物理量中假定有k个基本量纲L_1，L_2，$\cdots$，L_k，按式（4-34）则知，任一物理量q_i的量纲可表示为

$$[q_i]=L_1^{c_{1i}}L_2^{c_{2i}}\cdots L_k^{c_{ki}} \tag{4-35}$$

式中，c_{1i}，c_{2i}，$\cdots$，c_{ki}为物理量q_i 对应的量纲幂指数，$i=1,2,\cdots,n$。

把n 个物理量 q_1，q_2，$\cdots$，q_n 的量纲幂指数排列成如下形式

	q_1	q_2	$\cdots\cdots$	q_n
L_1	c_{11}	c_{12}	$\cdots\cdots$	c_{1n}
L_2	c_{21}	c_{22}	$\cdots\cdots$	c_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
L_k	c_{k1}	c_{k2}	$\cdots\cdots$	c_{kn}

这样排列的量纲幂指数称为n 个物理量 q_i 的量纲幂指数矩阵．可用符号 $\|c_{kn}\|$ 来表示，即

$$\|c_{kn}\|=\begin{vmatrix} c_{12} & c_{12} & \cdots\cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots\cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots\cdots & c_{kn} \end{vmatrix} \tag{4-36}$$

2．基本物理量

若在上述n个物理量中，有k个物理量 q_1，q_2，$\cdots$，q_k，它们

能同时满足下述两个条件，则称这 k 个物理量为 n 个物理量中的一组基本物理量。即

（1）在n个物理量中，任何一个物理量 q_i 的量纲都可以用这 k 个物理量纲的幂乘积形式来表示，即

$$[q_i]=[q_1^{\lambda_{1i}}q_2^{\lambda_{2i}}\cdots q_k^{\lambda_{ki}}] \tag{4-37}$$

式中，λ_{1i}，λ_{2i}，$\cdots\lambda_{ki}$ 为待定幂指数常数；$i=1$，2，$\cdots$，n。

（2）不可能由这k个物理量本身组成一个无量纲的组合量，即不可能找到一组不是全为零的量纲幂指数β_1，β_2，$\cdots$，β_k，使下式成立：

$$[q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}\cdots q_k^{\beta_k}]=L_1^0L_2^0\cdots L_k^0=1 \tag{4-38}$$

从上述基本物理量应同时满足的两个条件，可导出在 n 个物理量中确定 k 个基本物理量的方法。

将式（4-35）代入式（4-37），利用物理方程量纲一致性原理，比较等式两边同一基本量纲的幂指数，可得

$$\begin{aligned}
&c_{11}\lambda_{1i}+c_{12}\lambda_{2i}+\cdots+c_{1k}\lambda_{ki}=c_{1i}\\
&c_{21}\lambda_{1i}+c_{22}\lambda_{2i}+\cdots+c_{2k}\lambda_{ki}=c_{2i}\\
&\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\\
&\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\\
&c_{k1}\lambda_{1i}+c_{k2}\lambda_{2i}+\cdots+c_{kk}\lambda_{ki}=c_{ki}
\end{aligned} \tag{4-39}$$

同理，把式（4-35）代入式（4-38），可得

$$\begin{aligned}
&c_{11}\beta_1+c_{12}\beta_2+\cdots+c_{1k}\beta_k=0\\
&c_{21}\beta_1+c_{22}\beta_2+\cdots+c_{2k}\beta_k=0\\
&\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\\
&\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\\
&c_{k1}\beta_1+c_{k2}\beta_2+\cdots+c_{kk}\beta_k=0
\end{aligned} \tag{4-40}$$

由式（4-39）和式（4-40）可见，行列式

$$|c_{kk}| = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots\cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots\cdots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots\cdots & c_{kk} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (4\text{-}41)$$

是待定幂指数常数 λ_{1i}，λ_{2i}，$\cdots\lambda_{ki}$ 存在一组非零解的充分必要条件，也是幂指数 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k$ 为全零解的充分必要条件。这也就是说，式（4-41）是 q_1，$q_2\cdots\cdots$，q_k 可作为一组基本物理量的充分必要条件。

综上所述，从 n 个物理量 $q_1,q_2\cdots q_n$ 中找出一组基本物理量的方法是：首先排列出该群物理量的量纲幂指数矩阵 $\| c_{kn} \|$，然后从该矩阵中找出一个其值不为零的、最高阶数为 k 的子行列式 $|c_{kk}|$（这个阶数 k 即为量纲幂指数矩阵 $\| c_{kn} \|$ 的秩），其对应的 k 个物理量就是一组基本物理量。

例 4-4 已知：有六个物理量，q_1 为质量，q_2 为长度，q_3 为时间，q_4 为速度，q_5 为加速度，q_6 为力。求：q_1,q_2,q_3 是一组基本物理量吗？另外，q_2,q_4,q_5；以及 q_2,q_4,q_6 分别也是一组基本物理量吗？

解 查附表 4-1，得六个物理量的量纲幂指数矩阵为

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
M	1	0	0	0	0	1
L	0	1	0	1	1	1
T	0	0	1	−1	−2	−2
t	0	0	0	0	0	0

对应于 q_1,q_2,q_3 的行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

对应于 q_2,q_4,q_6 的行列式为

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

对应于 q_2, q_4, q_6 的行列式为

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

可见，质量、长度和时间是一组基本物理量；而长度、速度和加速度三个物理量量纲幂指数构成的子行列式 $|c_{36}| = 0$，所以不是一组基本物理量；但长度、速度和力这一组物理量的 $|c_{56}| \neq 0$，故也是一组基本物理量。因此，在量纲分析中，**基本物理量**并不只限于质量、长度和时间；凡是满足式（4-41）的一组物理量，都可以选作为基本物理量来用；因为有时参与某一物理现象的诸个物理量，并不是单独以质量、长度和时间形式出现的。不作这样的推广，就难以进行量纲分析。

3. π定理

假设在某一物理现象中包含有 n 个物理量，它们满足式（4-22）的一般形式，即

$$f(q_1, q_2, \cdots, q_n) = 0 \qquad (4\text{-}22)$$

在这 n 个物理量中，知有 k 个基本量纲 $L_1, L_2, \cdots, L_k (k \leqslant n)$，则必然可以找到一组基本物理量（含 k 个）$q_1, q_2, \cdots, q_k$（按上式，假设已把它们排列在诸个物理量的前列），而上述函数关系一定能变换为 $m = n - k$ 个无量纲的组合量π之间的关系，即

$$F(1, 1, \cdots, 1, \pi_{k+1}, \pi_{k+2}, \cdots, \pi_n) = 0 \qquad (4\text{-}42a)$$

式中

$$\pi_m = \frac{q_m}{q_1^{\lambda_{1m}} q_2^{\lambda_{2m}} \cdots q_k^{\lambda_{km}}}; \qquad m = k+1, k+2, \cdots, n. \qquad (4\text{-}42b)$$

这就是 π 定理，又叫巴金汉定理。具体求 $(n-k)$ 个无量

纲的组合量 π 的步骤如下：

（1）列出影响某一物理现象的 n 个物理量。（能否正确列出这些物理量，并不是量纲分析方法能解决的问题，这需要理论、实验和经验的指导和帮助）。

（2）列出诸个物理量的量纲幂指数矩阵，并确定要选用的一组 k 个基本物理量 $q_1, q_2, \cdots, q_k$。

（3）按式（4-42）求 π_m，对于每一个 π_m，可从式（4-39）中解出 $\lambda_{1m}, \lambda_{2m}, \cdots, \lambda_{km}$，而 $m = k+1, k+2, \cdots, n$。

例 4-5 已知：当物体在不可压粘性流体中运动，作用在光滑物体上的阻力 X 与运动速度 V，流体密度 ρ，流体粘性系数 μ 和物体的特征尺寸 l 有关，即有

$$f(\rho, V, l, \mu, X) = 0$$

求：用 π 定理把上述五个物理量之间的一般关系式变换为 π_m 之间的关系式

解 （1）列出五个物理量的量纲幂指数矩阵

	ρ	V	l	μ	X
M	1	0	0	1	1
L	−3	1	1	−1	1
T	0	−1	0	−1	−2

试选 ρ, V, l 为一组基本物理量，由其对应的子行式有

$$|c_{ss}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

满足式（4-41）要求，所以，该组物理量可选作基本物理量。

（2）按式（4-42）求 π_m，$m = 4, 5$.

对于 π_{41} 由式（4-39）有

$$\left.\begin{aligned} \lambda_{14} &= 1 \\ -3\lambda_{14} + \lambda_{24} + \lambda_{34} &= -1 \\ -\lambda_{24} &= -1 \end{aligned}\right\}$$

对于π_4：由式（4-39）有

$$\left.\begin{aligned} \lambda_{14} &= 1 \\ -3\lambda_{14}+\lambda_{24}+\lambda_{34} &= 1 \\ -\lambda_{24} &= -2 \end{aligned}\right\}$$

由上面两组联立方程分别解得

$$\lambda_{14}=1,\quad \lambda_{24}=1,\quad \lambda_{34}=1$$
$$\lambda_{15}=1,\quad \lambda_{25}=2,\quad \lambda_{35}=2$$

故

$$\pi_4=-\frac{\mu}{\rho^{\lambda_{14}}V^{\lambda_{24}}l^{\lambda_{34}}}=\frac{\mu}{\rho Vl}$$

$$\pi_5=\frac{X}{\rho^{\lambda_{15}}V^{\lambda_{25}}l^{\lambda_{35}}}=\frac{X}{\rho V^2l^2}$$

因此得

$$F\left(1,1,1,\frac{\mu}{\rho Vl},\frac{X}{\rho V^2l^2}\right)=0$$

或

$$\frac{X}{\rho V^2l^2}=f_1\left(\frac{\mu}{\rho Vl}\right)=f_2(Re)$$

而 $X/\rho V^2l^2$ 用 $X/\frac{1}{2}\rho V^2l^2=C_x$，替代称为物体的阻力系数，故由 π 定理推得下列待定关系，即

$$C_x=f_3(Re) \tag{4-43}$$

由此例可见，一个包含有五个物理量的物理现象，而这些物理量具有三个基本量纲，那么就可用两个无量纲量 π 之间的函数关系来表示这五个物理量之间的函数关系。这两个无量纲组合量π，都是相似准数，一个是决定相似准数 Re 数，另一个是非决定相似准数欧拉数的变型，阻力系数 C_x。后一关系通用于相似现象之间，具有更普遍的意义。

例 4-6　已知：不可压粘性流体流过水平等径园管时，沿流向产生的压力损失Δp，比如可以参看第五章的图5-2，与流过的

管长 l，管径 d，流体的平均流速 V，流体的粘性系数 μ，流体的密度 ρ 和管壁的平均粗糙度 e 等有关，即

$$f(\rho,V,d,\Delta p,\mu,l,e)=0$$

求：用 π 定理导出影响 Δp 的各个无量纲组合量 π 之间的一般关系式

解　（1）列出七个物理量的量纲幂指数矩阵

	ρ	V	d	Δp	μ	l	e
M	1	0	0	1	1	0	0
L	−3	1	1	−1	−1	1	1
T	0	−1	0	−2	−1	0	0

因 ρ,V,d 对应的子行列式 $|c_{33}|=1\neq 0$，满足式（4-41）要求，可以选作基本物理量。

（2）按式（4-42）求 π_m，因为量纲幂指数矩阵满秩，$k=3$，所以有 $n-k=7-3=4$ 个 π，即 $m=4,5,6,7$。

对于 π_4：有

$$\left.\begin{aligned}\lambda_{14}&=1\\ -3\lambda_{14}+\lambda_{24}+\lambda_{34}&=-1\\ -\lambda_{24}&=-2\end{aligned}\right| \text{得}\lambda_{14}=1,\ \lambda_{24}=2,\ \lambda_{34}=0$$

对于 π_5，同理可解得 $\lambda_{15}=1$，$\lambda_{25}=1$，$\lambda_{35}=1$；对于 π_6，同理可解得 $\lambda_{16}=0$，$\lambda_{26}=0$，$\lambda_{36}=1$；对于 π_7，同理可解得 $\lambda_{17}=0$，$\lambda_{27}=0$，$\lambda_{37}=1$。因此，按 π 定理得

$$F\left(1,1,1,\frac{\Delta p}{\rho V^2},\ \frac{\mu}{\rho V d},\ \frac{l}{d},\ \frac{e}{d}\right)=0$$

或

$$\frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho V^2}=f_1\left(Re,\ \frac{l}{d},\ \frac{e}{d}\right)\qquad(4\text{-}44)$$

式中，l/d，e/d 是反映几何相似的参数，一般称为相似定数，而

$\Delta p / \frac{1}{2} \rho V^2$ 是欧拉相似准数 Eu，在本例中也是非决定准数。Re 数是决定相似准数。这种表述形式大为化简了模型实验工作，并为实验数据结果的整理提供了方向和依据。

正如 π 定理指出的，对于某一个物理现象，无量纲组合量 π 的个数是固定的，它与影响该物理现象的物理量个数 n 和该物理现象所涉及的基本量纲数目 k 有关。但是组成 π 的形式不是唯一的。比如本例，如果改选 V，d 和 Δp 这三个物理量作为基本物理量来用（因为它们也满足式（4-41）要求），也可以求出另外的一些组合形式的 π，按式（4-42），当这三个基本物理量与密度 ρ 组合 π 时，其形式是 $\pi_8 = \rho V^2 / \Delta p$，但它不过是 $1/\pi_4$，同 π_4 无实质性变化。把求得的 π，按下表形式排列：

	ρ	V	d	Δp	μ	l	e
π_4	−1	−2	0	1	0	0	0
π_5	−1	−1	−1	0	1	0	0
π_6	0	0	−1	0	0	1	0
π_7	0	0	−1	0	0	0	1
π_8	1	2	0	−1	0	0	0
⋮							

这张表是组成无量纲组合量 π 的物理量的量纲幂指数矩阵。组合 π 的形式有多种可能性，然而看一下 $\pi_4 \sim \pi_8$ 的幂指数矩阵，其秩是 4，即独立的 π 只有四个，继续组合 $\pi_9, \pi_{10}, \cdots$，都不过是 $\pi_4 \sim \pi_7$ 这四个 π 的幂指数乘积的新组合，不反映新的规律。换句话讲，独立的 π 的个数是固定的。在实际应用时，应根据所研究的物理现象选用物理意义明确、习惯上常用的和模型实验时容易控制的 π 组合形式。

4．π 定理的实质

一个物理量的量值，是用数值和单位的乘积来表示的，实际上是把被测物理量与作为单位（即数值为1）的同类量进行比较的结果。对于一定的单位制，对基本物理量、长度、质量、时间等都规定了基本单位，各导出量及其单位可由导出量的定义或相应的物理定律确定。这都为大家所熟知。但在量纲分析中，已把基本物理量作了推广，即与长度、质量、时间等物理量具有同样特性的量，都可以作为基本物理量，即它们都满足式（4-37），（4-38）或者式（4-41）就行。如果选取这样一组新的基本物理量作为基本单位，那么相应其他导出量的单位也随之而变化。以不可压粘性管流的压力降为例，如果以流体密度 ρ，平均流速 V 和管径 d 为基本单位，则时间的单位变为 $V^{-1}d$，Δp 的单位变为 ρV^2，粘性系数 μ 的单位变为 $\rho Vd\cdots$。这相当于建立起一种新的单位制。用新的单位去度量各同类量，就得到一系列无量纲量 ρ/ρ，V/V，d/d，l/d，e/d，$\Delta p/(\rho V^2)$，$\mu/(\rho Vd)\cdots$。因此，在原单位制中，不可压粘性管流压力降的待定关系式为

$$\Delta p = f(\rho, V, d, \mu, l, e)$$

在新的单位制中就变成

$$\frac{\Delta p}{\rho V^2} = f_1\left(1,1,1,\frac{\mu}{\rho Vd},\ \frac{l}{d},\ \frac{e}{d}\right)$$

或

$$\frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho V^2} = f_2\left(Re,\ \frac{l}{d},\ \frac{e}{d}\right)$$

这正是运用 π 定理后所得到的结果。

由此可见，π 定理的实质是用研究对象中的、适用的基本物理量作为新单位制中的基本单位来度量其他物理量的结果。

附表 4-1 流体力学中常用物理量的SI单位和量纲

物理量		SI单位		量纲
符号	名称	中文	英文	
A	面积	米^2	m^2	$M^0L^2T^0t^0$
a	加速度	米/秒^2	m/s^2	$M^0L^1T^{-2}t^0$
c_p	等压比热	焦耳/公斤·开	J/kg·K	$M^0L^2T^{-2}t^{-1}$
E	弹性模量	帕(或牛/米^2)	Pa(或N/m^2)	$M^1L^{-1}T^{-2}t^0$
F	力	牛	N	$M^1L^1T^{-2}t^0$
m	质量	公斤(或千克)	kg	$M^1L^0T^0t^0$
l	长度	米	m	$M^0L^1T^0t^0$
M	力矩	牛·米	N·m	$M^1L^2T^{-2}t^0$
P	功率	瓦	W	$M^1L^2T^{-3}t^0$
W	功	焦耳	J	$M^1L^2T^{-2}t^0$
p	压力	帕(或牛/米^2)	Pa(或N/m^2)	$M^1L^{-1}T^{-2}t^0$
t	时间	秒	s	$M^0L^0T^1t^0$
T	绝对温度	开	K	$M^0L^0T^0t^1$
V	速度	米/秒	m/s	$M^0LT^{-1}t^0$
γ	重度	牛/米^3	N/m^3	$M^1L^{-2}T^{-2}t^0$
ρ	密度	公斤/米^3	kg/m^3	$M^1L^{-3}T^0t^0$
τ	剪切应力	帕(或牛/米^2)	Pa(或N/m^2)	$M^1L^{-1}T^{-2}t^0$
ω	角速度	1/秒	s^{-1}	$M^0L^0T^{-1}t^0$
σ	表面张力	牛/米	N/m	$M^1L^0T^{-2}t^0$
$\dot{m}$	质量流量	公斤/秒	kg/s	$M^1L^0T^{-1}t^0$
μ	动力粘性系数	帕·秒	Pa·s	$M^1L^{-1}T^{-1}t^0$
ν	运动粘性系数	米^2/秒	m^2/s	$M^0L^2T^{-1}t^0$
Q	体积流量	米^3/秒	m^3/s	$M^0L^3T^{-1}t^0$
R	气体常数	焦耳/公斤·开	J/kg·K	$M^0L^2T^{-2}t^{-1}$
h	焓	焦耳/公斤	J/kg	$M^0L^2T^{-2}t^0$
u	内能	焦耳/公斤	J/kg	$M^0L^2T^{-2}t^0$

续表

物理量		SI单位		量纲
符号	名称	中文	英文	
s	熵	焦耳/公斤·开	J/kg·K	$M^0L^2T^{-2}t^{-1}$
Q	热量	焦耳	J	$M^1L^1T^{-2}t^0$
λ	热传导系数	瓦/米·开	W/m·K	$M^1L^1T^{-3}t^{-1}$
Γ	环量	米²/秒	m^2/s	$M^0L^2T^{-1}t^0$

习　题

1. 测定水管阀门的局部阻力系数，拟用同一管道通过空气的办法进行。已知水和空气的温度均为20℃，管路直径为50毫米，当水速为2.5米/秒时，风速应多大？通过空气时测得的压力损失应扩大多少倍才是通过水时的压差？

2. 用比例尺为1/20的快艇模型在水池中进行实验以测定阻力。若快艇航速为0.52米/秒，模型的拖曳速度应为多少？若测得模型阻力为500牛，快艇阻力为多大？

3. 用比例尺为1/225的蓄水库模型，在开闸后240秒可放空库水，问原水库放空库水要多少时间？

4. 比例尺为1/10的模型水管的出口喷嘴，直径为50毫米，喷射流量为15厘米³/秒，喷嘴受力100牛，求原风管喷嘴喷射流量10 000米³/小时时，喷嘴受力多大？设水和空气温度均为20℃。

5. 在温度为20℃的水中有一潜体模型，长1.5米，以3米/秒速度拖曳时阻力为14 000牛。若在15℃大气中以速度18米/秒运动，潜体应多长？阻力有多大？

6. 溢水堰模型比例尺1/20，测得流量为300厘米³/秒，堰所受推力300牛，求实物堰的流量和所受推力各多少？

7. 固粒颗粒在流体中等速沉降速度V与固体颗粒直径d、

密度 ρ_s 及流体的密度 ρ、粘性系数 μ、重力加速度 g 有关，试用 π 定理建立沉降速度公式。

8. 潜艇在水面航行时，其阻力与海水密度、运动粘性系数、潜艇长度、航速及重力加速度有关，试用 π 定理建立潜艇阻力系数表达式。

9. 孔口出流速度 V 与孔口直径 d、流体密度 ρ，粘性系数 μ 和静压差 Δp 有关，试用 π 定理给出出流速度关系式。

10. 壁面剪切应力 τ 与来流密度 ρ、速度 V、定压比热 c_p、定容比热 c_v、粘性系数 μ、弹性系数 E、热传导系数 λ 和特征长度 l 有关。试导出各相似准数。

11. 向心滑动轴承摩擦力 F 与转速 N、润滑油粘性系数 μ、轴径 d、径向间隙 c 和负载压力 p 有关，试用量纲分析方法，确定轴承摩擦力的函数关系。

12. 假设管流阻力 X 与管长 l，管内径 d、管壁粗糙度 e、流体的密度 ρ、流体粘性系数 μ 和流速 V 有关。试用 π 定理，确定管流阻力系数的函数关系。

13. 飞机进行投放实验时，投放物离机后的轨迹和姿态与飞机的迎角 α、侧滑角 β，速度 V，机翼弦长 b 以及投放物体的离机速度 V_1、质量 m、转动惯量 J、特征长度 l 有关，此外它们还与空气的密度 ρ、粘性系数 μ、重力加速度 g 和特征时间 t 有关。试导出各相似准数。

第五章　粘性流体的流动与低速管流

粘性不可忽略的流体称为粘性流体，相应的流动称为粘流。由于存在粘性效应，其流动现象远比理想流体的复杂。在粘流中，流体与固体壁面之间，以及流体内部相邻微团之间将出现摩擦力，即粘性力；它们是阻碍流体运动或相对运动的阻力。在流动中，流体必须克服阻力而做功，因而一部分流体的机械能量将不可逆地转化为热量，造成机械能量的耗散或损失。另外，粘性效应还将导致流体沿固体边界形成边界层（也称附面层），出现转捩、分离和二次流等复杂流动现象；管流横截面上的速度分布也不会是均一的了。理想流体的运动方程，即欧拉方程不再适用，必须代之以粘性流体的运动方程，即纳维-斯托克斯方程。但由于纳维-斯托克斯方程是非线性的二阶偏微分方程，直接求解非常困难，迄今还没有一般解；只有在某些特定的简单情况下才能给出有用的精确解。因此，解决工程中的实际流动问题，将主要依靠实验方法，或利用经验和半经验的分析方法以及近些年来迅速发展起来的数值计算方法等。在这种情况下，本章介绍和讨论有关粘流的一些基本物理现象，探讨一些定性和定量的流动规律，就显得尤其重要。

在工程流动问题中有许多的管流问题。管流中的能量损失，不仅来自长距离直管道中的流动摩擦损失，也来自于管路中某些部件的局部流动分离损失，如管截面突然变化、弯头、阀门等等。前者称为沿程损失，后者称为局部损失。有关管流问题的分析和计算，将根据质量方程、能量方程、动量方程以及流体阻力的一些实验结果等来进行，后面将陆续讨论或介绍。

§5-1 层流与湍流

一、雷诺实验

粘性流体的运动有两种性质完全不同的流态，即层流与湍流。湍流也称紊流。早在1883年，英国物理学家雷诺使用类似图5-1的实验装置，研究过层流与湍流两种流态的基本特征，后人称之为雷诺实验。实验的基本过程如下：水箱A设有溢水装置，以保持水位恒定。水从A箱流入具有喇叭形进口的、水平放置的圆形玻璃管B中，由阀门C控制管内流速。容器D盛有色液（通常是红色液体），通过细管E也导入B管中。当阀门开度比较小因而B管中的流速比较低时，从E管中流出的色液在B管中不扩散，即不与周围的无色水流掺混，保持一股丝线状的、平行管轴的细直的流束。这说明玻璃管中的流体是一层一层地、彼此保持平行而运动的，没有流体微团的横向运动或横向的质量、动量交换。这样的流动称为层流。随阀门的开度逐渐增大，管内流速也不断增加，染色流束开始发生脉动、振荡，逐渐加剧乃至断裂、扩散并向上游发展，而且染色流束迅速缩短；最后，

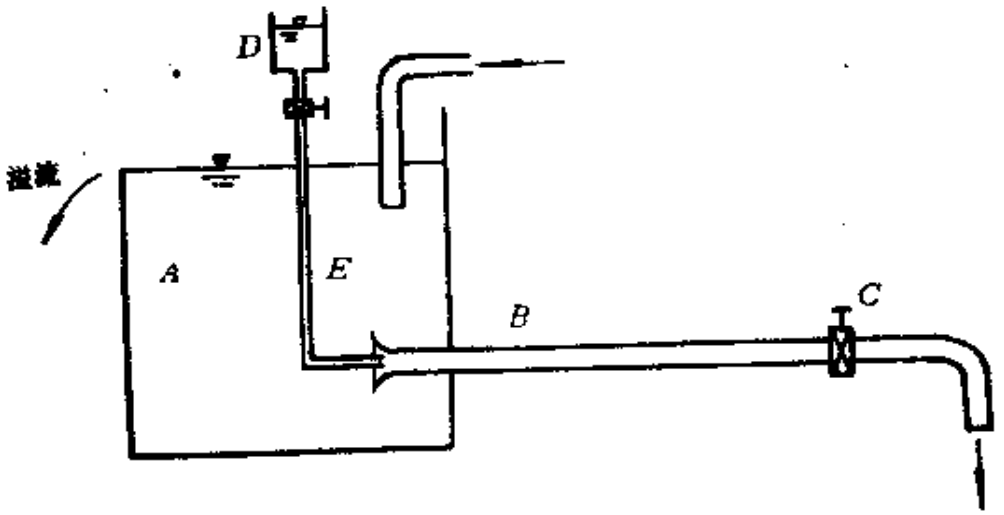


图 5-1

当流速到达某一大小时，染色流束就完全扩散于整个管流中。这表明在流动增速的过程中，流体微团运动的轨迹变得越来越不规则、不仅有轴向运动，而且有垂直管轴线方向的横向运动，当染色流束完全扩散时，则是由于流体微团在各个方向上都有充分的相互掺混的结果。这样的流动称为湍流。

染色流束的完全扩散，即层流完全转变为湍流称为转捩。在一个具体的实验装置中，转捩所对应的管内平均流速称为临界速度；虽然尚有某些不确定因素存在，但临界速度的大小是大致确定的。当层流转捩为湍流后，若减小平均流速，湍流仍可恢复为层流。从层流转捩为湍流所对应的速度称为上临界速度；湍流恢复为层流的所对应的速度称为下临界速度。上临界速度总大于下临界速度。

测量管道中沿程流动损失随速度的变化关系可以发现，层流和湍流中的静压水头损失是不同的。如图 5-2(a) 所示的装置，①、②两截面相隔一定距离，Δh 表示两截面之间的静压水头损失。当速度比较低时，流动为层流，Δh 相对于平均速度V 的变化曲线为直线，即 $\Delta h \propto V$，如图 5-2(b) 。而速度比较高时，流动变为湍流后，变化曲线近似为抛物线，即 $\Delta h \propto V^{2.0}$，见图 5-2

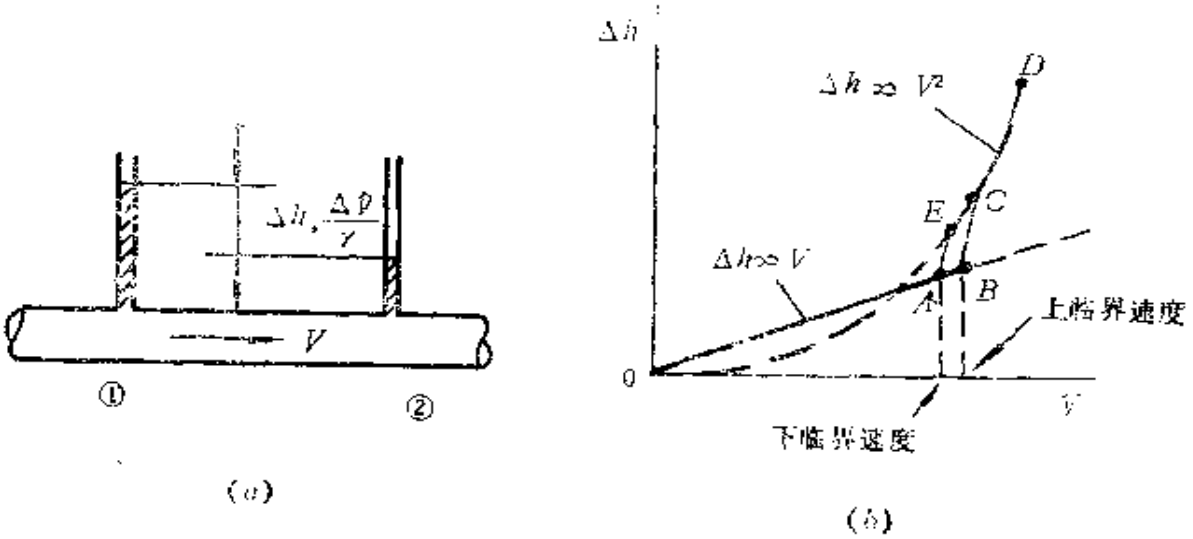


图 5-2

(*b*)。两种流动之间有一个过渡流态。速度增加，由层流转捩为湍流时，数据点将沿*oABCD*变化；反之，则沿*DCEAo*变化。显然，*A*点对应下临界速度，*B*点对应上临界速度。

实际上，流动从层流转捩为湍流，不仅与管内的平均流动速度有关，而且还与流体的性质如密度、粘性系数，以及圆管直径等有关。雷诺提出了一个无量纲组合量（决定相似准数），综合了上述各参数的影响，后人称之为雷诺数，以*Re*表示：

$$Re=\frac{\rho Vd}{\mu}=\frac{Vd}{\nu} \tag{5-1}$$

式中V为管道中的平均速度；ρ、μ、ν分别为流体的密度、粘性系数和运动粘性系数；d为管道直径。对于各种不同的流体，不同的流速，不同的圆管直径，对应层流转捩为湍流或湍流恢复为层流的雷诺数都是相同的。前者称为上临界雷诺数，后者称为下临界雷诺数。仅根据管道中流动的雷诺数大小，就可以判断流动是层流还是湍流。这表明作为相似准数的*Re*数具有巨大使用的价值。

雷诺实验表明，上临界雷诺数在12 000～14 000范围内。实际上，决定层流上限的这个值并不是完全确定的，它还取决于其他一些偶然因素，如流体在箱内的宁静度，玻璃管的入口形状和管壁粗糙度，以及是否有外界扰动等。有人曾十分精细地在实验装置上做过实验，圆管流动中的上临界雷诺数可以高达100 000。但很高的上临界雷诺数在工程实际问题上很难实现，并没有实际意义。工程上一般将上临界雷诺数取为4 000。

确定湍流下限的下临界雷诺数在工程上比较有实际意义。当雷诺数低于下临界雷诺数时，湍流中不论有多大的初始湍流度（一种表示湍流脉动强度的量，后详），也不论管壁粗糙度有多大，流动最终都将因为粘性的制约、阻尼而恢复为层流。许多实验指出，圆管流动中的下临界雷诺数大约为2 100左右。

综上所述，工程上常以下列雷诺数界限判断圆管中的流动是层流还是湍流：

$Re<2\,100$，　　层流

$Re>4\,000$，　　湍流

$Re=2\,100\sim4\,000$，　　层流与湍流间的过渡流态

对于其他横截面形状管道中的临界雷诺数的高低或大小与圆管的各不相同，需由实验确定。最后应当指出（正如前章中所讲述的），Re 的高低或大小代表的物理意义是作用在流体微团上的惯性力与粘性力之比。雷诺数越低，反映粘性力作用越大；反之，雷诺数越高，反映惯性力作用越大。从这里就不难理解层流转捩为湍流或湍流恢复为层流等现象的物理原因。

例 5-1　已知：水的运动粘性系数为 1.15×10^{-6} 米^2/秒，在直径 30 毫米的圆管中流动。求：保持层流状态的最大体积流量为多少？若空气流过该管，相应流量为多少？空气的运动粘性系数取为 1.37×10^{-5} 米^2/秒。

解　取 $Re=2\,100$ 作为层流的上限。对于水，根据式(5-1) 有

$$V=\frac{Rev}{d}=\frac{2\,100\times1.15\times10^{-6}}{0.03}=0.080\,5\text{(米/秒)}$$

$$Q=V\frac{\pi}{4}d^2=0.080\,5\times\frac{\pi}{4}\times0.03^2$$

$$=5.69\times10^{-5}\text{（米}^3\text{/秒）}$$

类似地，对于空气有

$$Q=67.8\times10^{-5}\text{（米}^3\text{/秒）}$$

显然，空气体积流量是水的 12 倍左右。这是因为空气的运动粘性系数比水的大，要保持同样高的雷诺数，空气的流速显然要比水的大才成。

二、层流与湍流的主要特征

在层流中，流体微团保持互相平行的层状运动。流动中的横

向掺混仅限于流体分子运动的规模。流体相邻流动层间的剪切应力或摩擦应力大小等于粘性系数与速度梯度的乘积，即满足牛顿粘性定律

$$\tau = \mu \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y} \tag{1-28}$$

若层流受到壁面粗糙元或其他因素的扰动时，由于粘性的制约、阻尼作用，扰动将急剧地衰减，下游仍能保持层流。相对于扰动来说，可以说层流流态具有流动的稳定性。但湍流却完全不是如此。

在湍流中，流体微团之间处在无规则的随机运动之中。有点类似于分子的热运动，但运动的规模不是单个分子，而是微团。不同尺寸流体微团间的快速相互掺混，引起强烈的动量和热量的交换和传递，这将引起机械能量的耗散迅速增大。微团运动轨迹极其紊乱，而处于混沌状态。微团的运动形态又经常表现为不规则的旋涡形式，所以也可以说湍流中充满了旋涡团的运动。在湍流中，任一点处的速度、压力等流动参数都处在无规则的脉动之中。测量任一点处某一方向上（如 x 方向）的速度，可得到类似图 5-3 的记录。由于湍流脉动频率很高，自然，必须采用十分灵敏的热线或激光测速仪，才能得到如上的结果。曲线变化是随机的，但有统计规律。因而可以反映湍流结构的某些特性。就 x 方向的瞬时速度 u 而言，一般可以分解为时均速度 $\overline{u}$ 和脉动速度 u'

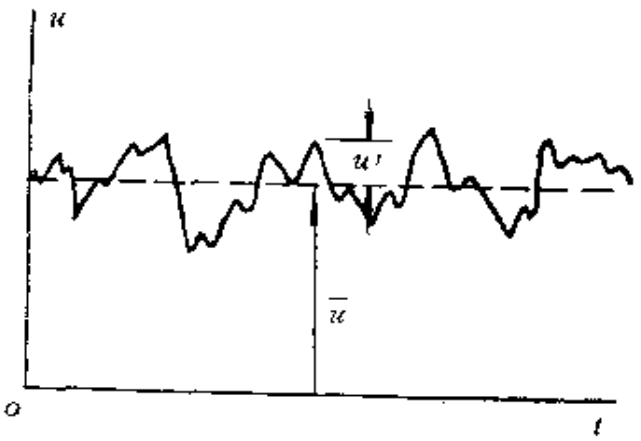


图 5-3

两部分之和，即

$$u = \overline{u} + u'$$

时均速度定义为足够长时间 T 内瞬时速度的平均值，表示为下式：

$$\overline{u} = \frac{1}{T}\int_0^T u\mathrm{d}t$$

在定常流动中，任一点湍流的时均速度将保持不变，而脉动速度的时均值必为零，即

$$\overline{u'} = \frac{1}{T}\int_0^T u'\,\mathrm{d}t = 0$$

通常用脉动速度的均方根平均值 $(\overline{u'^2})^{\frac{1}{2}}$ 表示 x 方向的平均湍流强度。一点处的平均湍流强度以相对值表示为（下面的 U 表示同一点处的时均速度）

$$\varepsilon_T = \frac{\sqrt{\frac{1}{3}\left(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}\right)}}{U} \qquad (5\text{-}2)$$

湍流强度随流动速度增大而增强，而湍流涡团的平均尺度随流动特征尺度增大而增大。

在被研究的时均湍流中，相邻流体流动层之间的剪切应力主要是涡团动量交换所引起的，称为湍流涡团应力。如图 5-4 的二维情况，设想湍流中相邻两流动层，其时均速度分别为 U 和 U

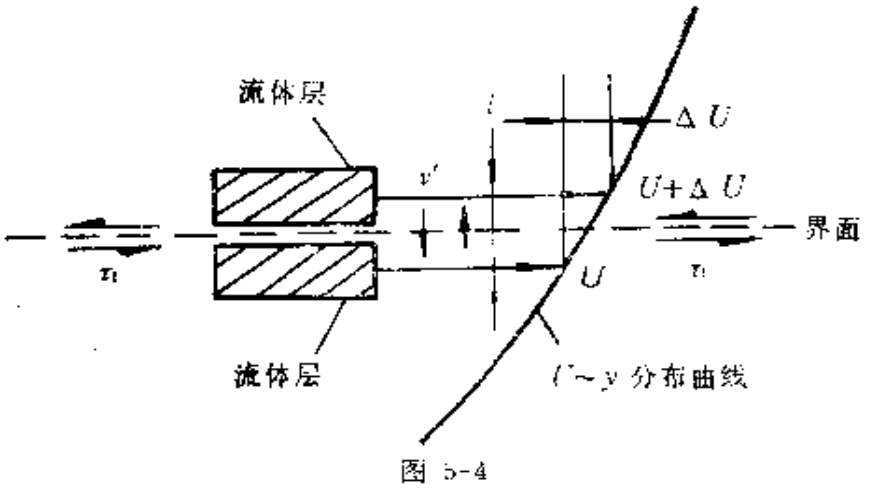


图 5-4

$+\Delta U$。某一瞬间，上层（速度为 $U+\Delta U$）中有一涡团具有 $v'<0$ 的横向脉动速度，穿过界面到达下层（其速度为 U），界面上通过单位面积传递的质量流量为 $\rho v'$，上层运动速度较快的涡团到达下层，一般将产生流向脉动速度 $u'>0$。反之，下层具有横向脉动速度 $v'>0$ 的流体涡团也会穿到上层，造成上层 $u'<0$ 的流向脉动速度。这种现象不断持续发生，并具有随机性质，但总的效果是 x 方向的动量从上层向下层输送，因而上层的动量减小而下层的增加。动量传递率的时均值为 $-\rho\overline{u'v'}$，根据动量定理，界面上的剪切应力为

$$\tau_t=-\rho\overline{u'v'} \tag{5-3}$$

这个关系最早为雷诺所提出，故也称雷诺应力。$\overline{u'v'}$ 代表脉动速度 u' 与 v' 的乘积对时间的平均值。就统计意义来说，u' 和 v' 的正负一般异号，因而其乘积的时均值是负的，故前面冠以负号。

根据对时均湍流的分析可以看出，雷诺应力应该与流体层之间的速度梯度有关，因而可用类似于层流中的粘性应力关系表达：

$$\tau_t=\varepsilon\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y} \tag{5-4}$$

这里，ε 称为涡团粘性系数，它不仅与流体的物理性质有关，而且主要与湍流结构的特性有关。因而在流场中的各点处，ε 是变化的，不是一个常数，与流体的动力粘性系数 μ 不同，即它不是流体的物理属性，而是流动的特性。湍流中总的剪切应力，即湍流剪切应力是雷诺应力与粘性应力之和：

$$\tau=(\mu+\varepsilon)\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y} \tag{5-5}$$

由数值分析可知，μ 远比 ε 小很多，因而一般都可忽略。下面需要解决的问题是如何把式（5-3）中的脉动速度用流体层之间的时均速度梯度来表示。既然雷诺应力是由于不同速度层之间的涡

团脉动迁移引起动量传递而产生的，那么雷诺应力不仅与时均速度梯度大小有关，而且还与涡团在丧失掉自身某些特性之前所能通过的某个平均横向距离有关。普兰特最早提出了这一概念，并把这个平均距离叫做“混合长度”，记为 l。混合长度有点类似于分子热运动中的平均自由程的概念。分子平均自由程是分子运动中两次碰撞之间所能走过的平均距离；而混合长度是湍流涡团作脉动所能通过的平均横向距离。前者是微观尺度，后者是宏观尺度。混合长度越大，在同样时均速度梯度下涡团脉动迁移带来的动量传递率也越大。根据这个分析，可以假定脉动速度 $u' \propto l\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}$，而 v' 与 u' 的大小同量级，故也有 $v' \propto l\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}$。由此，式(5-3)可以写成

$$\tau_t = \rho l^2\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}\right)^2 \tag{5-6}$$

考虑到式（5-4），可得涡团粘性系数 $\varepsilon = \rho l^2\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}$。但 l 还是 y 的未知函数，需要进一步加以研究。

卡门分析了湍流速度分布型的性质，提出了混合长度的另一个表达式为

$$l = -k\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}\right)\Big/\left(\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}y^2}\right) \tag{5-7}$$

因而得到了普兰特-卡门关系如下：

$$\tau_t = \rho k^2\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}\right)^4\Big/\left(\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}y^2}\right)^2 \tag{5-8}$$

式（5-7）中的负号是因为一般（$\mathrm{d}^2U/\mathrm{d}y^2$）总是负的才加的。$k$ 是个无量纲常数，称为湍流常数。

在靠近固体壁面时，湍流强度将受到了壁面边界的强烈抑制。可以设想 l 是比较小的。而在壁面上，脉动速度 u' 和 v' 都应该为零。因此，可以假定一个相当简单的混合长度表达式，

即

$$l = ky \tag{5-9}$$

代入式（5-6）有

$$\tau_t = \rho k^2 y^2 \left(\frac{dU}{dy}\right)^2 \tag{5-10}$$

根据式（5-10）可推出靠近壁面处的湍流速度分布型，与实验测量的速度分布相比，比较符合（后详）。这也表明式（5-9）是可行的。

但是，实验指出，湍流常数 k 并不是常数。因而反映了上述的一些关系在理论上的不完整性。但在某些工程流体力学问题中还是可以近似采用的。应当指出，混合长度只是研究湍流结构的最简单、古老的模型之一，随着计算流体力学的发展，有关湍流结构及其模型化的研究已取得了某些进展。有的内容在以后的专业课程中将介绍。

例 5-2　已知：有直径为 0.6 米的圆管。水在其中作湍流运动，测得其速度分布为 $U = 3.41 + 0.244\ln y$，U 的单位是米/秒，y 从管壁向轴线度量，单位为米。通过测量获知，$y = 0.102$ 米处的剪切应力为 9.58牛/米^2，水的密度 $\rho = 1\,000$ 公斤/米^3。求：该处的涡团粘性系数 e，混合长度 l，以及湍流常数 k 的值。

解　由所给速度分布可知

$$\frac{dU}{dy} = \frac{d}{dy}(3.41 + 0.244\ln y) = \frac{0.244}{y}$$

$$\frac{d^2U}{dy^2} = -\frac{0.244}{y^2}$$

因此

$$\left(\frac{dU}{dy}\right)_{y=0.102} = \frac{0.244}{0.102} = 2.39\ 1/秒$$

$$\left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)_{y=0.102} = -\frac{0.244}{0.102^2} = -23.5\ (1/米\cdot秒)$$

根据式（5-4），并认为 μ 可以忽略，则

$$\varepsilon=\tau_t\Big/\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}\right)=9.58/2.39=4.01\ (\text{帕}\cdot\text{秒})$$

根据式（5-6），有

$$l=\sqrt{\tau_t\Big/\left(\rho\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}\right)^2\right)}=\sqrt{9.58/(1\ 00)\times 2.39^2)}$$

$$=0.041\ (\text{米})$$

根据式（5-8），有

$$k=\sqrt{\tau_t\left(\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}y^2}\right)^2\Big/\left(\rho\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}\right)^4\right)}=\sqrt{\frac{9.58\times(-23.5)^2}{1000\times 2.39^4}}$$

$$=0.403$$

又，按式（5-10）和（5-9）也有

$$k=\sqrt{\tau_t\Big/\left(\rho y^2\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}\right)^2\right)}=\sqrt{\frac{9.58}{1000\times 0.102^2\times 2.39^2}}$$

$$=0.402$$

$$l=ky=0.402\times 0.102=0.041(\text{米})$$

从本例题可以看出，对于所讨论的位置上，涡团粘性系数 ε 是 4.01 帕·秒。通常水的粘性系数 μ 是 1.139×10^{-3} 帕·秒；可见，ε 比 μ 大得多，是 μ 的几千倍，因而忽略 μ 的影响是可以的。对于管流来说，在不包括紧贴壁面的大部分区域内，混合长度大致为管道半径的十分之一量级。本例中的 $l/R=0.137$。另外，用式（5-6）和（5-8）计算的 l 和 k，同用式（5-9）和（5-10）的计算结果一致，这是因为在对数速度分布情况下，式（5-7）即可简化为式（5-9）的缘故。

§5-2 粘性流体的外部流动现象

一、邻近固体壁面边界的流动现象

实际研究的各种流动现象一般总会受到固体边界的影响。为

研究方便，可将流动分为外部流动和内部流动两类。外流指的是流体绕物体（如飞行器）的流动，因而物体外表面就构成流动的内边界；流动的外边界理论上一般将延伸至无穷远。内流指的是处在固体壁面边界内部的流动，如管道中的流动，这时壁面就成为流动的外边界了。

对于大多数高雷诺数的外流（物体为流线形）来说，理想流体和粘性流体流动的主要差别表现在固体壁面附近的流动区域。因而，研究靠近固体壁面边界的流动现象是十分必要的。

理想流体紧贴固体壁面的一层仍然保持流动，即壁面可视为流面。但粘性流体并非如此。紧贴物面的一层流体将完全贴附于物面，其相对于物面的速度为零，即必须满足“无滑移条件”。这意味着任何速度分布型都必须满足壁面上速度为零的要求。离开物面向外，流体速度将迅速增加。增加的速率则取决于相邻流体层所承受的剪切力的大小。

实际物面也不可能是完全光滑的，可以设想表面一定是高低不平的，由一个个随机分布的粗糙元所构成，粗糙元高度的平均值或当量值称为粗糙度，其大小取决于壁面的材料和表面加工方法及质量等。实验表明在层流情况下，只要粗糙度远小于物体的特征尺寸，则粗糙元对流动的扰动将被粘性作用所抑制与阻尼，对流动基本上没有影响。速度从边界上的零值开始，向外逐渐增加。流动层之间的剪切应力完全由粘性引起，并由式（1-28）所确定。

但是，在湍流中，壁面粗糙度将不同程度地影响流动特性。在十分靠近物面的区域中，由于湍流运动受到壁面的抑制，流体微团很难有垂直壁面方向的运动，因而微团掺混现象变弱，混合长度趋于零。这表明紧贴物面一定有一薄流动层存在，其内基本上保持层状运动，称为粘性底层。当稍微离开物面一定距离以后，物面对湍流的抑制作用迅速减小，湍流得到充分的发展。这个区域称为全湍流区。在全湍流区和粘性底层之间有一过渡层。在过

渡层中，湍流运动部分地受到抑制，流动状态介于上述两种情况之间。通常过渡层的厚度也很小。湍流中的物面粗糙度对流动的影响主要取决于粗糙度 e 与粘性底层厚度 δ_v 的相对大小。若底层厚度比粗糙度大很多，则粗糙元将完全淹没于底层之中，如图 5-5(a)，因而类似层流情况，粗糙度对流动的扰动被粘性效应所抑制，对底层以外的湍流流动结构没有影响。这种壁面称之为光滑壁面。若底层厚度与粗糙度量级相当，也即两者大小比较接近时，物面粗糙度就开始对流动有影响，它将促进湍流的发展，增加流动阻力。当粗糙度大于底层厚度时，粗糙元将暴露于全湍流区中，如图 5-5(b)，每个粗糙元的下游将出现非定常的小的分离旋涡，大大增加了湍流强度。此时，湍流的结构，流动阻力以及能量损失等将主要取决于粗糙度，而与雷诺数没有明显的关连。这种壁面称之为粗糙壁面。

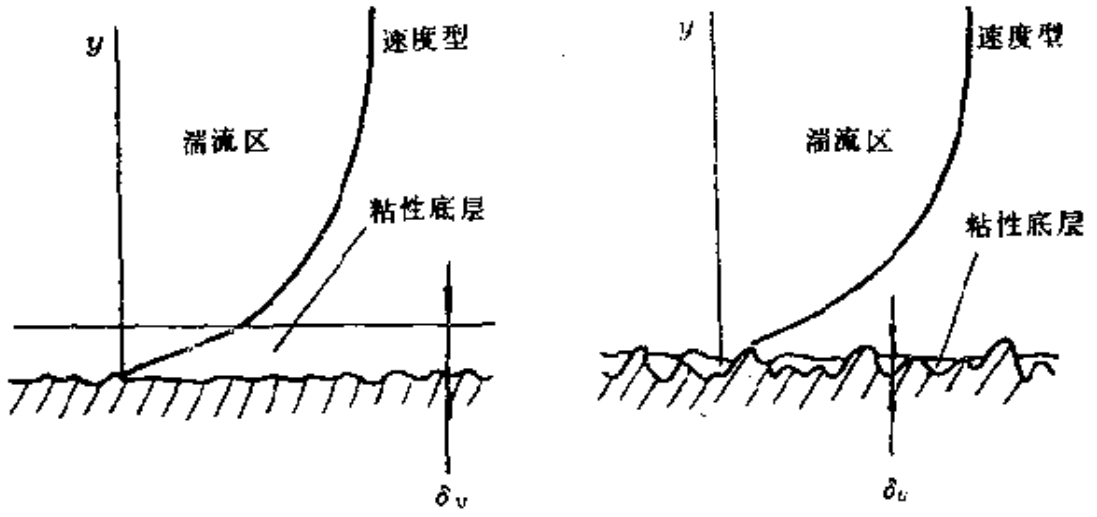


图 5-5

由于湍流中的粘性底层的厚度随主流雷诺数而变化，对于同一物面来说，可能出现这样的情况：在流动速度比较低，因而雷诺数比较低时，底层比较厚，粘性底层完全复盖了粗糙元，这时物面可以认为是光滑的；但随着速度增加，雷诺数增加，底层变

薄，使粗糙度超过或大大超过底层的厚度，这时物面又变成为粗糙壁面了。因此，物面是光滑还是粗糙，以及粗糙度的影响，不完全是一个几何问题，而且与流动状态，特别是与流动雷诺数的高低有关。

二、边界层概念

正如上述，在高雷诺数情况，对于流线形物体的绕流问题，理想流动与粘流的差别将主要局限于固体壁面边界附近的一个薄的流动层中。粘性流体流经物体表面时，紧贴物面的一层速度为零，由边界向外，速度迅速增大。对于粘性系数很小的流体，如水、空气等，大多数情况下速度增加率是很大的，在离开壁面很近的地方，速度就已经非常接近相应于理想流体的速度了，即理想流体绕同一物体在该处所能达到的速度。因此，只有在靠近物体表面的一薄层流动区中，粘流才与理想流动表现出有本质的差别。在这一层中，由于速度迅速增大而形成很大的速度梯度，流动层之间的剪切应力不能忽略。而在这一薄层之外，速度梯度很小，粘性流动与理想流动没有很大差别，流体的粘性可以忽略，因而可以把流体当作理想流体处理。早在 1904 年，普兰特首先提出了这一概念，并把邻近物面的这一薄层流动区称为边界层，或附面层。有了边界层的概念，则把粘性影响局限于边界层内。边界层以外的流动可按理想流动求解。因此，利用边界层概念，不仅解决了流线形物体摩擦阻力计算的问题，而且建立了理想流体绕流规律与粘性流体绕流规律之间的相关关系，从而对近代流体力学的发展起了巨大的推动作用。

直匀来流绕光滑平板和流线形物体流动的边界层分别如图 5-6 和图 5-7 所示。边界层从物体前缘开始，由于流体粘性滞止作用迅速向外、向后扩展，边界层厚度 δ 沿流动方向逐渐增厚。边界层内，流体的速度大小从物面上的零值，将迅速增大到边界层外边界上接近相应理想流体绕流所能达到的速度值。通常，把

当地流体速度达到相应理想流体绕流速度的99%大小的点处，定义为边界层的外边界点，由物面外法线方向度量物面至边界层外边界点之间的距离，即称为该点处边界层的厚度。按图 5-6 情况而言，流场中物面各点理想流体绕流速度是常数，处处都是 U_∞。因而边界层各外边界点上当地流体速度都是 $0.99U_\infty$。而按图 5-7 情况看，边界层外边界上各点的相应理想流体绕流的速度是变化的，因而在边界层边界上实际流体的速度也是变化的。

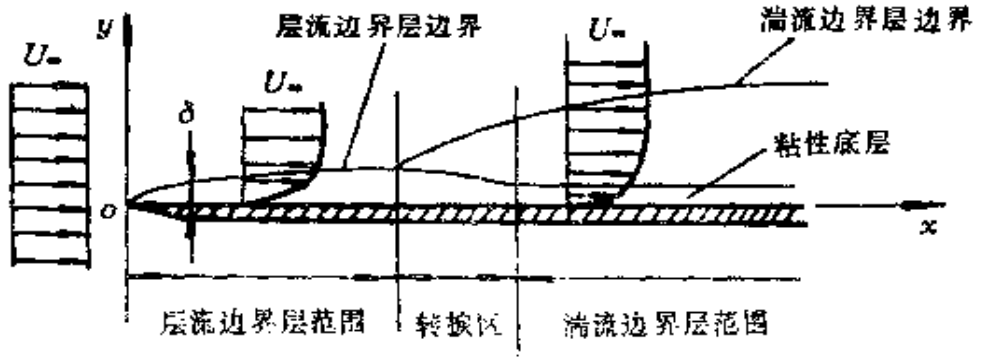


图 5-6

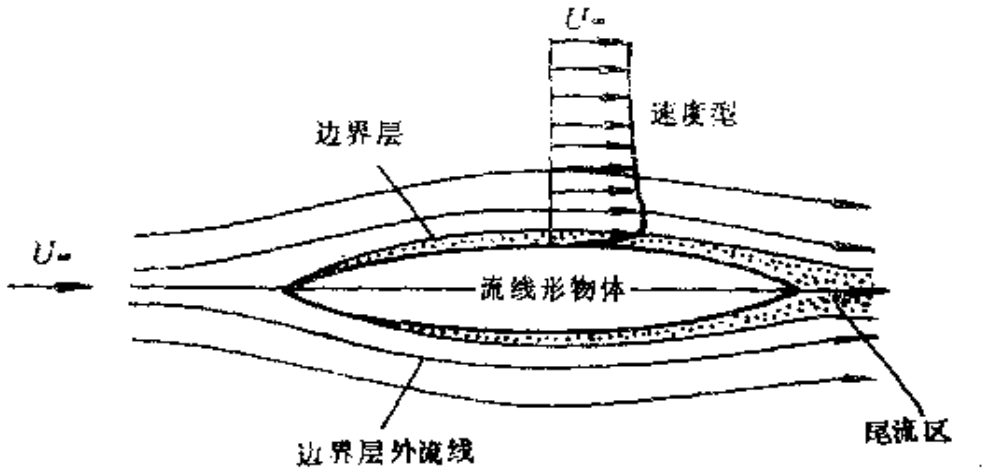


图 5-7

边界层中的流动可以是层流；也可以是湍流；也可以同时存在两种流态，但总是从层流转变为湍流。在接近物体前缘的部位，边界层很薄，因受到壁面的抑制作用，一般很难一开始就发展成湍流。但沿流动方向当边界层厚度逐渐增加时，层流就可能

转捩为湍流。转捩过程是一个复杂而短暂的现象，工程上常简化为是突然发生、完成的，相应的位置称为转捩点。对于如图5-6所示平板，可以用如下两个雷诺数中的任意一个来估算转捩位置与判别边界层中流态：

$$Re_x=\frac{U_\infty x}{\nu} \qquad 或 \qquad Re_\delta=\frac{U_\infty \delta}{\nu} \tag{5-11}$$

式中 x 是从前缘点（严格讲是前缘驻点）量取的流向距离，δ 是边界层的厚度，U_∞ 是远前方直匀来流流速。实验表明，当 $Re_x=5\times10^5$ 或 $Re_\delta=4\,000$ 时，相应的 x（记为 x_t）为转捩点位置，相应的 δ 为转捩点处的边界层厚度。当按式（5-11）计算的雷诺数低于这两个值时，则该段（即从 $x=0$ 到 $x=x_t$ 的范围内）将是层流边界层，而在 $x>x_t$ 的平板壁面上经转捩已变为湍流边界层了。

流线形物体上的边界层同平板边界层稍有一些不同。沿流线形物体表面压力是变化的。在物面前缘驻点处（按图示情况为前缘点处）压力最大，然后压力减小到最小压力点；从最小压力点到后缘点，压力又逐渐增大。因此，在物面最小压力点之前，边界层外的气流不断加速，因而压力逐渐降低，沿流向具有顺压梯度。顺压作用传入边界层内，推动边界层内的流体向前流动，相对于无压力梯度情况（如图5-6顺流平板情况），边界层有变薄的趋势。而在最小压力点以后，外流速度逐渐降低，压力逐渐升高，沿流向形成逆压梯度。类似地，逆压作用传入边界层内，阻碍边界层内的流体向前运动。这时，流体不仅要克服粘性阻力，而且还要减速、增压，用以克服逆压梯度，故边界层内流体速度将迅速减小，使边界层厚度急剧增加。这是平板边界层中所没有的现象。无论是平板或流线形物体，上下表面的边界层将在后缘处汇合而形成尾流，因边界层中的流体受粘性作用而消耗了比较多的机械能量，故尾流区中的流体速度将明显低于外流速度而压力亦将低于来流的压力。

三、分离现象

导致流体从物面上分离的本质原因是流体的粘性。理想流体的绕流是不可能出现分离现象的。粘流与理想流动之间的差别，除了表现在是否有边界层以外，还表现为是否会出现分离现象。如图 5-8，是直匀流绕过壁面上一尖角或一个垂直平板的流动情况。若根据理想流体的流动理论求解（这将在以后有关专业课程中讲述），在尖点 B 的前后，上下游的流场是对称的。在上游，流动截面减小，流体加速；而在下游则相反，流动截面增大，流体减速。在 B 点则是一个奇点，速度趋于无限大。但对于粘性流体来说，情况完全不同。在尖点 B 处，流体微团的速度为有限值，因惯性流体微团也不可能突然地折转而绕过尖角，故流动必然会从尖点处发生分离。在尖点下游，将形成旋涡和尾流区，又

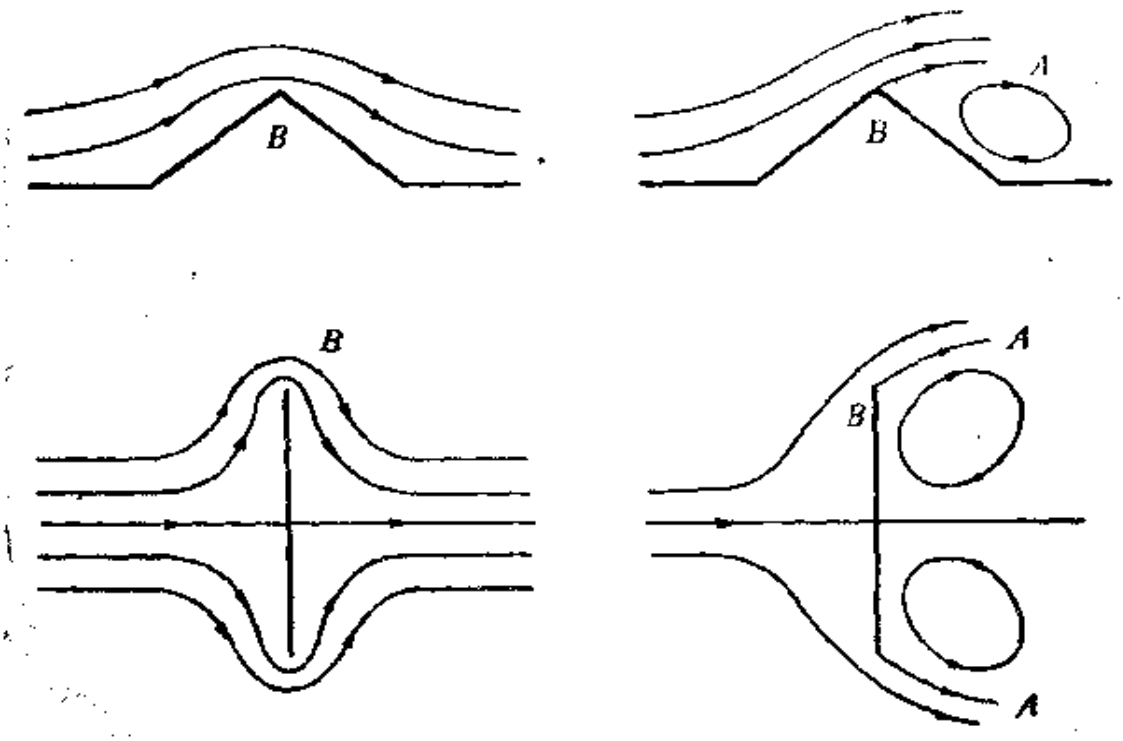


图 5-8

称分离区。因此，上下游的流场完全不对称。在分离区中，流动是非定常的，从旋涡的生成、脱离壁面到重新又生成分离旋涡，周而复始。脱离壁面的旋涡的能量来自主流，但由于有粘性摩擦等因素的作用，旋涡在尾流区中将受到阻尼，大旋涡变成小旋涡，最终使旋涡能量耗散转变为热量。因此在这样的流动中，主流的机械能量有很大的损耗。

为什么会不断地形成旋涡，简单地可以这样解释：图 5-8 中的A面是一个速度不连续面，即它的一侧是流体主流区，另一侧是随机的旋涡区，跨过界面（从旋涡区到主流区），速度有突跃的变化，但压力是连续的。而速度不连续面A很容易因为偶然的扰动（来自外因或内因）而发生弯扭、卷合、撕裂而形成旋涡。

对于上述绕尖角物体的流动来说，分离点位置是显而易见的。但对于一般流线形物体来说，确定分离点的位置并不是一件容易的事情。如图 5-9 所示，正如前述，从前缘驻点A到最小压力点B是顺压梯度，边界层不会发生分离。但从B点往后，压力增加，是逆压梯度，它会促使沿壁面的边界层迅速增厚，逆压梯

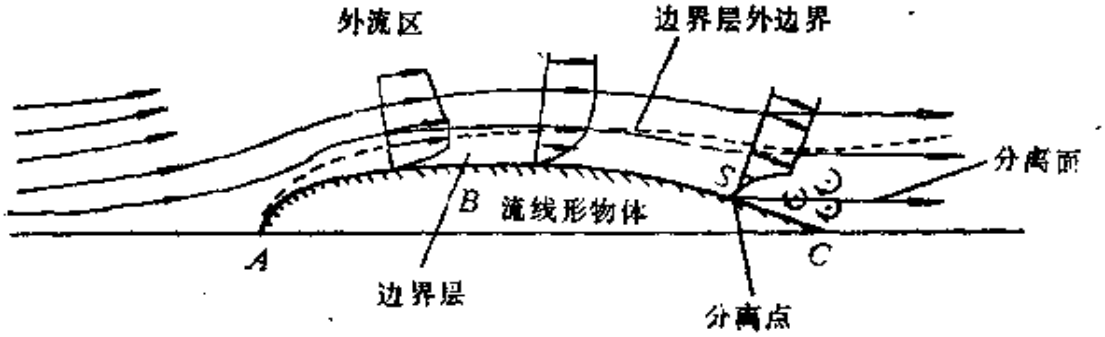


图 5-9

度越大，增厚现象越严重。在很大的逆压梯度作用下，边界层内流体将由壁面向外逐渐滞止下来。因此，不仅物面上$V=0$，而且迫使贴近壁面的部分地区内的$\frac{\partial V}{\partial y}$由正号变为负号（出现回流

现象）。通常，将首先出现$\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{y=0}=0$的点定义为分离点 S。滞止而堆积起来的流体，必使边界层以及主流离开壁面而产生分离。但分离点的具体位置与物体形状和方位等因素有关，一般需要依靠实验方法才能确定。多数情况下，分离区一直向后延伸，形成很宽的尾流区。正如前述，尾流区内的流速和压力都将显著小于外流速度和来流的压力。

综上所述，流动发生分离是粘性和逆压梯度共同作用的结果。在粘性流体的加速流动过程中，一般不会发生分离。而在流体减速流动过程中，则可能导致流动分离。产生分离时对应的逆压梯度的大小与绕流物体的形状和方位以及来流速度大小等因素有关。在高 Re 下，在直匀来流绕圆柱、圆球，或以大迎角绕翼型、机翼的流动中，分离都是难以避免的。对于具有尖角的物体，也一定会发生分离。在工程实际问题中，一般都要设法避免或防止分离，以减小阻力和机械能量损失。

§ 5-3 粘性流体的内部流动现象

一、进口段的流动

内部流动有各种情况，但主要的是管流。管流有长管道流动和短管道流动之分。前者是指流体在一个相当长的等截面管道内的流动，其上、下游都延伸至足够远；沿管壁形成的边界层已汇交于中心轴上，因而沿流向不会再有发展；管道中每一个流动横截面上有十分相近或完全相同的速度分布。这样的流动称为定型流动（*established flow*）或充分发展流动（*fully developed flow*）。在短管道流动情况，管道比较短，管壁边界层还在发展，远没有到达汇交的程度，因而横截面上的速度分布还在不断变化。

当流体从一个大贮箱流入一等截面管道时，显然，需要经过一段距离才能形成定型流动。这一段管道就称为进口段。下面着重讨论进口段中的流动情况。

进口段的流动与进口的形状紧密相关。若进口形状不是流线形[参见图(5-29a)与图(5-29b)]，则流动将发生分离。进入管内的流体，相当于绕过一个尖角，进口截面的下游将出现分离区或旋涡区，分离旋涡不断拖向下游，然后在流动中不断受到阻尼而耗散。实验表明，这个过程大致要延伸 50 倍直径的距离。若进口形状为圆弧形或流线形，则流动情况如图 5-10 所示，从贮箱流

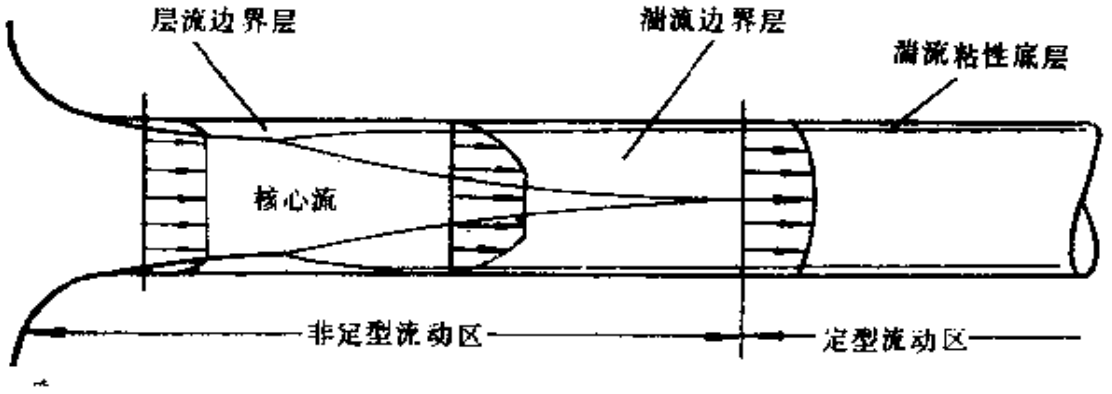


图 5-10

到管道入口截面处的速度基本上是均匀的，也不会产生分离。流入管道后，由于管壁的滞止作用，壁面附近存在着很大的速度梯度，类似于沿平板或绕流过物体的表面的情况，将形成沿管壁的边界层。四周管壁的边界层均衡地增厚，使管道中心区即粘性可以忽略的均匀核心流动区逐渐缩小。沿流向壁面边界层不断增厚直到管道中心轴上彼此汇交而充满整个管道截面时，定型流动区得以建立。流体粘性的影响扩及整个横断面和流场，进口段结束。往后，整个管流变成了完全的粘流。

若管道中流动的雷诺数小于 2 100，则定型流动区是层流。进口段壁面边界层中的流动也将全部是层流，进口段长度大约为 $0.055Re\ d$，d 为管道直径。若管内流动的雷诺数大于 4 000，定

型流动区为湍流；进口段的边界层一般先为层流，后转捩为湍流。进口段长度为(20～40)d。若进口段壁面比较粗糙，或贮箱内的流体受到扰动，原始宁静度很低，则可能进口段壁面的整个边界层全部都为湍流。

内管壁上的边界层同平板上的边界层在现象方面有相似之处，但也有一些重要区别。对于圆管壁上的边界层来讲，区别主要有下面两点：第一，圆管内壁面是内柱面；第二，管道中心区的核心流由于面积的减小而流速增加，因而沿流向压力将逐渐减小。顺压梯度的作用将推迟内壁面上层流边界层的转捩，相应于式（5-11）的两个雷诺数临界值分别将变为 6×10^5 和 5 000，明显高于平板时的对应值。

进口段管壁的湍流边界层以及管内定型流动区中的湍流区，贴近管壁都会存在粘性底层。进口段内核心区流动速度在开始时略为大于体积流量除以管道横截面积，即管内的平均流速。随着核心流面积的减小，核心区中流速将不断增加，最后达到定型流动区横截面中心处的最大速度，此时壁面边界层恰好在中心处汇合，核心流也正好消失。

在进口段中，由于边界层比较薄，导致壁面的速度梯度比较大，因而摩擦应力以及单位长度上的能量损失都大于定型流动区的值。在一般工程计算中，尤其是当管道总长度远大于进口段长度时，通常不单独计算进口段的损失，而将其并入管道总长度中，按定型流动计算损失。

对于某些大口径、高雷诺数的短管道，如风洞、水洞及发动机进气道中的流动，将是另外一种情况。由于管道短而直径大，直到管道出口截面，边界层的厚度相对直径来说也仍是一个小量，远没有形成如上所述的定型流动。管道中除靠近壁面附近的区域外，大部分地区处在边界层以外，速度是均匀的，可以认为是理想流动区。在等截面情况，如风洞、水洞中的实验段，边界层的增长将使核心区的速度不断增加，相应地压力也不断减小。

解决的办法是让管壁向外扩张一个小角度，如 0.5°～1° 左右(确切的值与流动雷诺数有关)，以抵消边界层增长产生的影响，使核心区的速度和压力沿流向（即轴向）保持不变。从而提高实验段中流动的品质。

二、流动横截面上的速度分布

对于如图 5-10 情况，若管道横截面沿流动方向没有变化或变化率很小，而且管道轴线是直线或基本上是直线（即其曲率半径远大于管道直径），对于理想流体来讲，流动横截面上的速度分布将是均匀的。对于粘性流体来说，显然，在横截面上的速度分布不会是均匀的。因而在计算通过横截面上的动量和动能流率时，都将有别于理想流动中的速度均匀分布情况。

单位时间通过微元流管横截面元 $\mathrm{d}A$ 的流体动能或动量，即动能或动量流率分别为 $V\mathrm{d}A\frac{1}{2}\rho V^2$ 和 $V\mathrm{d}A\rho V$。通过管道横截面积A的动能和动量流率则为：

$$\text{动能流率}=\frac{1}{2}\int_A \rho V^3\mathrm{d}A=\frac{1}{2}\rho\int_A V^3\mathrm{d}A \tag{5-12}$$

$$\text{动量流率}=\int_A \rho V^2\mathrm{d}A=\rho\int_A V^2\mathrm{d}A \tag{5-13}$$

单位分别为瓦和牛。积分时认为 ρ 可以视为常数（如低速流动情况）。实用中，动能或动量流率习惯上都用平均速度来表示，有

$$\text{动能流率}=\alpha\frac{1}{2}\rho\bar{V}^3A=\alpha Q\frac{\rho\bar{V}^2}{2} \tag{5-14}$$

$$\text{动量流率}=\beta\rho\bar{V}^2A=\beta Q\rho\bar{V} \tag{5-15}$$

式中α，β 都是无量纲参数，分别称为动能和动量修正因子，$\bar{V}$ 为平均流速，Q 是体积流量[参看式(3-15)]。比较以上有关式子不难得出：

$$\alpha = \frac{\int_A V^3 \mathrm{d}A}{\overline{V}^3 A} \tag{5-16}$$

$$\beta = \frac{\int_A V^2 \mathrm{d}A}{\overline{V}^2 A} \tag{5-17}$$

若给定了在横截面 A 上流速 V 的分布函数，则 α、β 都可按上述式子而求出。在横截面上，如速度分布为均一的，显然有 $\alpha = \beta = 1$。对于速度非均一分布的情况，必有 $\alpha > \beta > 1$。可见，当横截面上速度分布不均一时，若用 $Q\frac{\rho\overline{V}^2}{2}$ 和 $Q\rho\overline{V}$ 来表动能和动量流率时，就必须相应乘上 α 与 β 修正因子才成。

由第三章式（3-72）已知，在任意一个流动横截面上，只要流线平直，各个流体微团的 $\left(\frac{p}{\gamma}+z\right)$ 值将保持不变。但如各点处

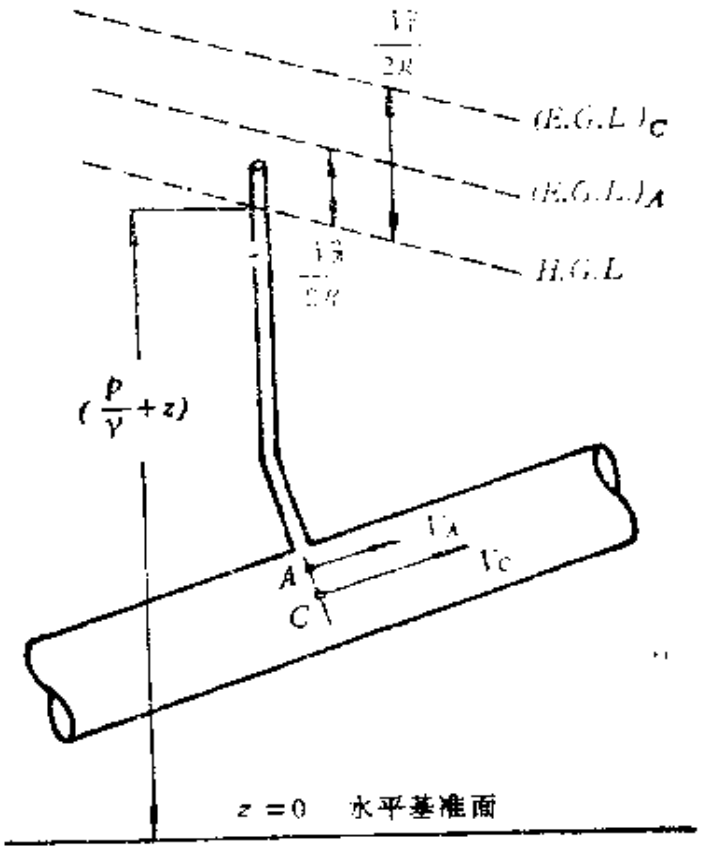


图 5-11

的速度不相同，则每一条流线上的总压水头$\left(\frac{p}{\gamma}+z+\frac{V^2}{2g}\right)$的值不会相同，即各条流线上的总压水头不是常数。图 5-11 表示了上述情况。同一流动横截面上任意两点 A、C 处，对应同一条水力坡度线（$H.G.L.$）；但因两点处的速度水头不同，因而各对应于一条能量坡度线（$E.G.L.$），也即通过横截面的每一条流线都有不同的能量坡度线。因此，管流的 $E.G.L.$ 变成了一束而不是一条。但是在实用中，很少需要对通过同一横截面上的每一条流线加以区别，而感兴趣的是总能量，故常以平均速度 V 计算的速度水头乘以 α 再加到横截面的 $H.G.L.$ 上而得到该截面上的等效 $E.G.L.$ 来代替上面说的能量坡度线束。这也是把总能量流率表示为平均速度的函数而已。

下面，为了方便起见，用 V 表示平均速度，不再用 $\bar{V}$ 符号。在此特作说明。

例 5-3　已知：在两个无限平板之间构成了一个二维通道，流体在其中流过，速度分布为抛物型，若两平板相距 $2R$，中心处速度为 V_c。求：单位厚度上的流量 Q 及 α，β 各为何值？

解　考虑到在上、下平板处的流体速度应为零，因而距中心线 r 处的速度应为

$$V=V_c(1-r^2/R^2)$$

微元面积为 $\mathrm{d}A=\mathrm{d}r\cdot 1$，所以单位厚度上的流量为

$$Q=2\int_0^R V\mathrm{d}r=2\int_0^R V_c(1-r^2/R^2)\mathrm{d}r=\frac{2}{3}\left(2RV_c\right)$$

因而平均速度为

$$V=\frac{Q}{2R}=\frac{2}{3}V_c$$

根据式（5-16），（5-17）有

$$\alpha=2\int_0^R V_c^3\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)^3\mathrm{d}r\Big/\left[\left(\frac{2}{3}V_c\right)^3 2R\right]=1.543$$

$$\beta = 2\int_0^R V_c^2\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)^2 \mathrm{d}r \Big/ \left[\left(\frac{2}{3}V_c\right)^2 2R\right] = 1.200$$

三、管流中的分离现象

在管流中，当流动横截面发生突然变化，或者有较大的逆压梯度作用时，流动都将发生分离现象。如图 5-12，理想流体与粘

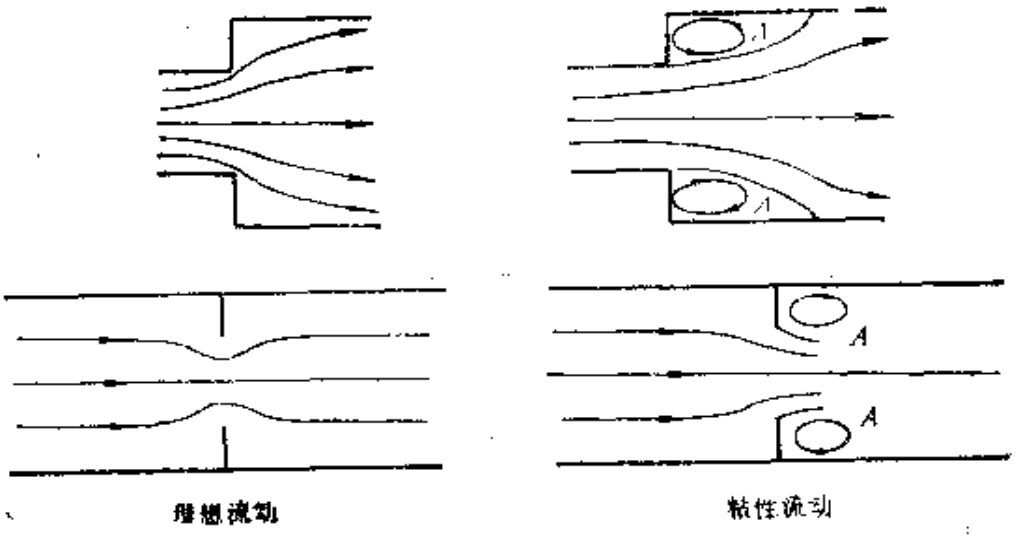


图 5-12

性流体分别流经突然扩张管道或带孔孔板时，两者流动情况有很大的不同。粘性流体在突然扩张截面的下游，由于逆压梯度和流动的惯性作用，将出现显著的分离，其特征是形成了很大的分离旋涡区，如图中的分离旋涡 A，并伴随着巨大的能量损失。

即使流动截面没有突然的变化，但有比较大的逆压梯度作用时，也会产生分离。例如流体在一个逐渐扩张的管道内流动（参见图 5-27），流速从进口①截面上的 V_1，降低到出口②截面上的 V_2，因而压力将从 p_1 提高到 p_2。正如 §5-2 节分析外流流动时所指出的那样，流体从低压区流到高压区的减速过程中，在逆压梯度的作用下，边界层将增厚，甚至造成流动分离。工程上常采用锥形的扩张管道来减速增压。其关键问题是如何选择最佳的

锥角或扩张角 θ，以便使流体经过扩张管道时总水头损失最小而压力恢复最大。过大的扩张角是不利的，由于扩张过急而导致逆压梯度过大，壁面上将出现分离。这不仅将引起很大的能量损失，也使流动品质变坏。防止采用过大扩张角产生分离的办法有在管道中安装导流片；或者在扩张段壁面上安装吸除装置，将边界层中流得很慢的流体吸走等方法。但这些办法往往因为过于复杂而不为工程设计所采用。在没有采用这些措施情况下，选用的锥角应该相当小。但也不能太小，过小的锥角将使给定面积比（出口面积与进口面积之比）的扩张段变得很长，虽然避免了分离，却大大增加了摩擦阻力。实验表明，最佳的锥角大致在6°至8°范围。当然，在一个具体设计中，最佳的参数往往不可能完全取决于流动损失，还要根据多方面的因素来决定。

若粘性流体通过一个收缩管道，情况同扩张时的相反，由于速度提高而压强下降，流体从高压区流向低压区，顺压梯度可以使边界层相对地减薄，一般不会发生分离。所以，流体的加速运动是一个流动效率比较高的流动过程，而减速运动则是流动效率比较低的过程。这个关系可以引伸到流体机械中。涡轮类机械的叶轮通道是收缩型的，流体得到加速，一般不会出现分离。而在泵类机械中正相反，叶轮通道是扩张型的，流体减速，比较容易出现分离。因而涡轮的流动效率一般都比泵的流动效率要高。

四、二次流

所谓二次流，是指由一种流动（称为主流）引起的另一种伴随的流动。在粘性流体的管流中，典型的二次流是管道在逐渐转弯时所形成的双旋流现象。如图 5-13 的圆管弯头，对理想流动来说，在流体转弯过程，即流线发生弯曲时，由于受离心力的作用，转弯外侧的流体将具有比较高的压力，形成向流线曲率中心方向，即 AB 方向的顺压梯度。作用在流体微团上的压力增量产生向心力与微团上的离心力达到平衡。而在粘性流动中，速度是

不均匀的，靠近壁面处速度比较小。如在转弯的外侧管壁附近，速度降低，将使离心力减小，因而使 A 点附近的管壁压力低于

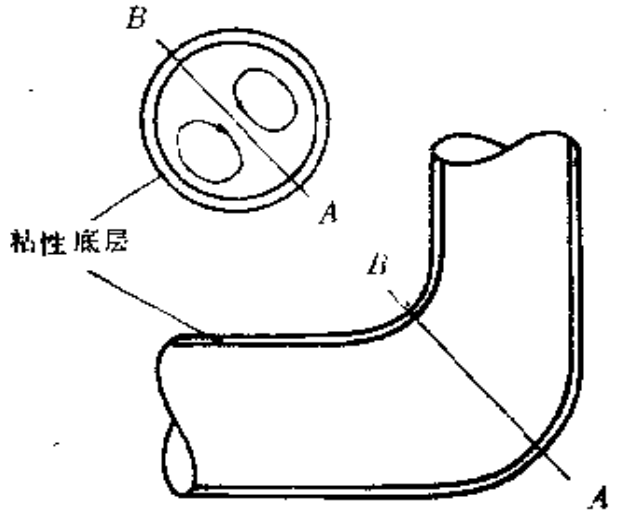


图 5-13

对应理想流体的值。而在管流中心区的大部分范围，粘性流体的速度与对应理想流体的速度差不多，因而压力也是接近的。外侧相对减小了的压力，将引起流体从管中心向外侧的附加流动。与此同时，还将引起流体沿管壁从外侧向内侧的流动，故形成一对双旋流，也就是二次流。旋流与主流叠加，构成螺旋状的流动。二次流的能量来自主流，最后也会因粘性作用而耗散转换为热量。因而粘性流体在转弯过程中，除了摩擦损失和分离损失外，还会有二次流引起的能量损失。

§ 5-4 低速管流的基本方程

一、管流的能量方程

如图 5-14 的管道流动系统，取①、②两流动截面之间的流动区域为控制体，如图中虚线所围。通过热交换器，流体与外界

有热量的交换。热量的交换并不局限于热交换器。当流体温度与外界温度不相同时，沿整个管道壁面上都会有热交换。但现假定全部热交换都集中于热交换器，而其他壁面是完全绝热的。从外界向流体加热为正，单位质量流体所增加的热量记为 q_H。泵和涡轮都是常见的流体机械，前者对流体做功，将外功转变为流体的能量。单位质量或重量流体所增加的能量分别为 w_P 或 E_P。后者吸收流体的能量，输出机械功。单位质量或重量流体减小的能量分别为 w_T 或 E_T。根据第三章推导的一维定常流动的能量方程，对单位质量流体有

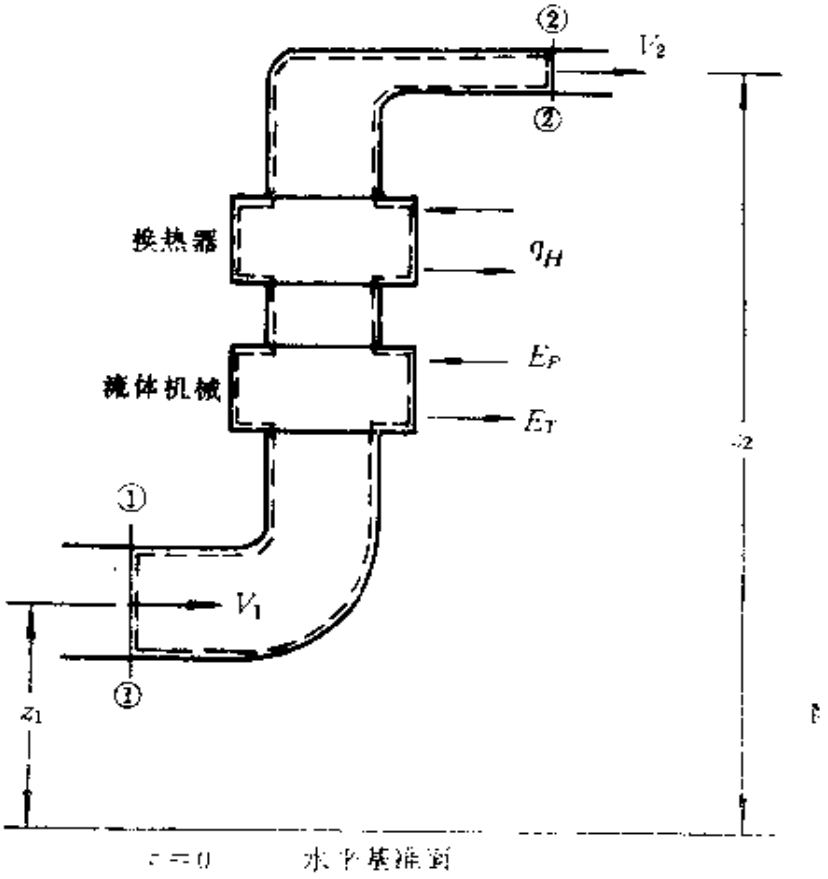


图 5-14

$$q_H + w_P - w_T = (u_2 + p_2/\rho_2 + V_2^2/2 + gz_2) - (u_1 + p_1/\rho_1 + V_1^2/2 + gz_1) \qquad (3\text{-}94)$$

或对单位重量流体有

$$q_H/g + E_P - E_T = (u_2/g + p_2/\gamma_2 + V_2^2/2g + z_2) - (u_1/g + p_1/\gamma_1 + V_1^2/2g + z_1) \quad (5\text{-}18)$$

若不考虑流体的压缩性，则 $\rho_1 = \rho_2 = \rho$，$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$，式（5-18）成为

$$u_1/g + p_1/\gamma + V_1^2/2g + z_1 + q_H/g + E_P = u_2/g + p_2/\gamma + V_2^2/2g + z_2 + E_T \quad (5\text{-}19)$$

在既没有涡轮，也没有泵时，则 $E_T = 0$，$E_P = 0$，因而

$$u_1/g + p_1/\gamma + V_1^2/2g + z_1 + q_H/g = u_2/g + p_2/\gamma + V_2^2/2g + z_2 \quad (5\text{-}20)$$

对于不可压、理想流体的流动，上式变为式（3-100），即

$$\begin{aligned} q_H &= u_2 - u_1 = C(T_2 - T_1) \\ p_1/\gamma + V_1^2/2g + z_1 &= p_2/\gamma + V_2^2/2g + z_2 \end{aligned} \quad (3\text{-}100)$$

正如在第三章中已讨论的，在不可压、理想流体的流动中内能的变化仅能通过热交换而实现，不会出现机械能和内能（或外加热量）之间的转换。

对于粘流来说，情况就不同了。由于存在粘性摩擦作用，一部分机械能会转变成热，因而式(3-100）不再成立。上述这种能量转换过程是不可逆的，但若把所产生的热量计入 q_H 项，则总能量并没有减少，故式（5-20）仍然适用，并且可以改写为

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + \Delta h_{1-2} \quad (5\text{-}21)$$

或对单位体积流体有

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 + \gamma z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \gamma z_2 + \Delta p_{1-2} \quad (5\text{-}22)$$

式中 Δh_{1-2} 和 Δp_{1-2} 分别为

$$\Delta h_{1-2} = (u_2 - u_1 - q_H)/g \quad (5\text{-}23)$$

$$\Delta p_{1-2} = \rho(u_2 - u_1 - q_H) \quad (5\text{-}24)$$

它们表示从①截面至②截面的总水头损失和总压损失或简称水头

损失和压力损失。部分机械能量耗散转变的热量，一部分可传到外界，一部分使流体的内能或温度升高，都是不可能再加以利用的了。但是从能量守恒与转换观点来看，能量并没有损失，仅仅是从一种形式转变为另一种形式而已。

式（3-94）来自一维定常流动。若①②截面上的速度分布不均匀，则应该对通过每个微元流管的流体进行积分求出通过上述截面的总动能流率，式（5-21）成为

$$\frac{p_1}{\gamma}+\alpha_1\frac{V_1^2}{2g}+z_1=\frac{p_2}{\gamma}+\alpha_2\frac{V_2^2}{2g}+z_2+\Delta h_{1-2} \qquad (5\text{-}25)$$

式中 V_1，V_2 为①、②截面上的平均流速。压力 p 和高度 z 通常取中心轴线上的值。

在工程应用中，经常可以近似取 $\alpha_1=\alpha_2=1$，甚至有时可略去动能流率项。其理由如下：①大多数工程问题中流动可能属于湍流，而湍流的 α 值很接近于 1。②若不是湍流而是层流，则此时相应于流速比较低，故整个动能流率项相对于其他项来讲是个小量，α 的大小不会导致最后结果有明显的误差。实际上，即使在湍流情况下，动能流率项也不是一个大量。③α 恒大于 1，且出现在方程式等号的两边，其影响是趋于相互抵消的。④工程计算结果的精度受到很多因素的影响，有些因素（如影响 Δh_{1-2} 大小的因素）往往比含 α 项的影响要大得多。

例 5-4 已知：如图 5-14 所示的系统，但没有热交换器，只有一个水泵。水流量为 1.42 米³/秒；水泵输出功率为 300 千瓦；$A_1=0.4$ 米²，$A_2=0.2$ 米²；$z_1=9$ 米，$z_2=24$ 米；$p_1=138$ 千帕，$p_2=69$ 千帕。求：①、②两截面之间的水头损失。

解 流量 $Q=V_1A_1=V_2A_2$

因而

$$V_1=Q/A_1=1.42/0.4=3.55\text{（米/秒）}$$

$$V_2=Q/A_2=1.42/0.2=7.10\text{（米/秒）}$$

水泵做功而提高的水头为

$$E_P = P/\gamma Q = 300\times 1\,000/[9\,807\times 1.42] = 21.54(\text{米})$$

$$\Delta h_{1-2} = \frac{1}{\gamma}(p_1 - p_2) + \frac{1}{2g}(V_1^2 - V_2^2) + (z_1 - z_2) + E_P$$

$$= \frac{1}{9807}(138\,000 - 69\,000)$$

$$+ \frac{1}{2\times 9.807}(3.55^2 - 7.10^2) + (9 - 24) + 21.54$$

$$= 7.04 + (-1.93) + (-15) + 21.54 = 11.65(\text{米})$$

从本例中可以看出，动能项的影响是不大的，取 α_1、α_2 都为 1，不会给最后结果带来明显误差。

二、管流的动量方程（流动阻力和能量耗散的关系）

上面介绍的能量方程是求解管流的一个基本方程，但能量方程没有也不可能给出流动中粘性剪切应力与能量耗散（表现为水头损失）之间的关系式。现通过动量方程可以导出这样的关系。如图 5-15，取图示圆柱状微控制体（半径为 R，长度为 dl），上游截面中心点的参数为 p、γ、z，平均速度为 V，下游截面上

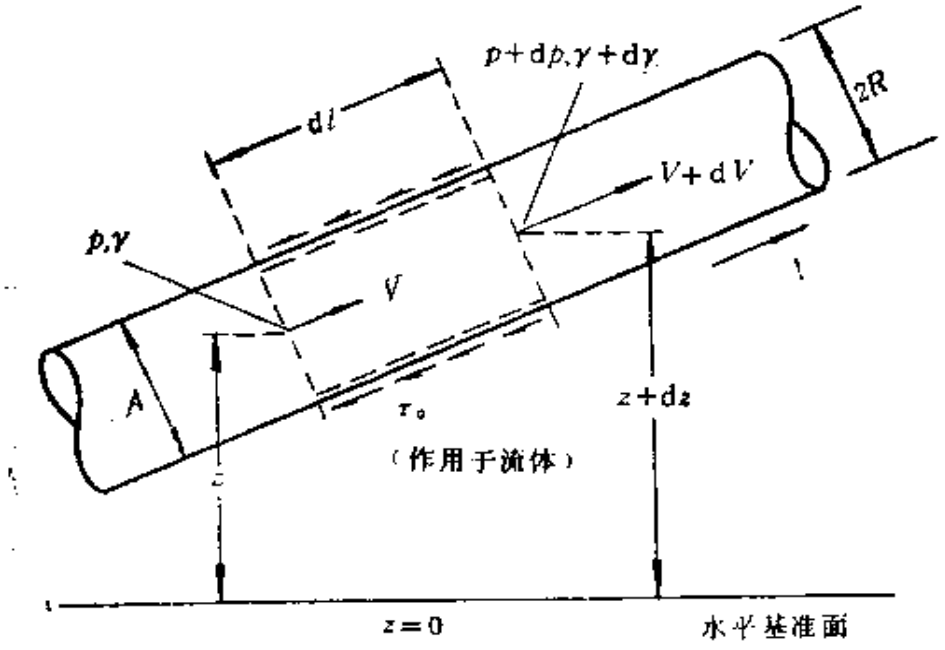


图 5-15

相应参数为 $p+\mathrm{d}p$、$\gamma+\mathrm{d}\gamma$、$z+\mathrm{d}z$ 和 $V+\mathrm{d}V$。流动过程中由于粘性作用，控制体侧面上有一个作用于流体的粘性剪切应力，其方向与流体运动方向相反，其合力即为流动阻力，它对流体的动量变化有作用。根据动量方程式（3-107），沿流动方向的作用力和动量变化之间的关系为

$$pA-\left(p+\mathrm{d}p\right)A-\tau_0 2\pi R\mathrm{d}l-\left(\gamma+\frac{1}{2}\mathrm{d}\gamma\right)A\mathrm{d}l\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}l}$$

$$=\beta(V+\mathrm{d}V)^2(\rho+\mathrm{d}\rho)A-\beta V^2\rho A$$

式中，τ_0 为长 $\mathrm{d}l$ 的控制体侧面上的平均剪切应力，β 为微控制体上下游截面上的动量修正因子，可假定为 1。左端第三项是作用于控制体侧面的流动阻力，第四项是控制体内流体重量在流动方向上的投影；右端是单位时间流出和流入的动量之差，即控制体内的动量增量率。两边除以 γA，并忽略高阶小项，经整理后上式可化简为

$$\mathrm{d}p/\gamma+\mathrm{d}(V^2/2g)+\mathrm{d}z=-2\tau_0\mathrm{d}l/\gamma R \qquad (5\text{-}26)$$

若对所取的微控制体写出能量方程，加入的热量记为 $\mathrm{d}q_H$，利用式（5-18），可得

$$\mathrm{d}\left(\frac{p}{\gamma}\right)+\mathrm{d}\left(\frac{V^2}{2g}\right)+\mathrm{d}z=\mathrm{d}\left(\frac{q_H}{g}\right)-\mathrm{d}\left(\frac{u}{g}\right) \qquad (5\text{-}27)$$

式中动能项微分式已取 $\alpha=1$。

上面的结果对可压流或不可压流同样适用。在可压流情况，即使管道面积 A 不变，V 也是可以变化的（详情可参阅第六章），当然 γ 也是变化的。因而 $\mathrm{d}\left(\frac{p}{\gamma}\right)=\frac{\mathrm{d}p}{\gamma}+p\mathrm{d}\left(\frac{1}{\gamma}\right)$，由（5-26）和（5-27）两式可得到如下关系

$$\frac{2\tau_0\mathrm{d}l}{\gamma R}=\mathrm{d}\left(\frac{u}{g}\right)-\mathrm{d}\left(\frac{q_H}{g}\right)+p\mathrm{d}\left(\frac{1}{\gamma}\right) \qquad (5\text{-}28)$$

沿管道在任意相距为 l 的①、②两截面之间积分，则有

$$\frac{2}{R}\int_1^2\frac{\tau_0\mathrm{d}l}{\gamma}=\frac{(u_2-u_1-q_H)}{g}+\int_1^2 p\mathrm{d}(1/\gamma)$$

对于可压流，若不清楚流动的热力过程，则上式右端的积分无法进行；此外，τ_o 沿流动方向也有变化，故也需要引进它的变化关系才能积分。对于不可压流，有 $d(1/\gamma)=0$。若流动为等截面管流中的定型流动，速度和速度分布沿管轴也将保持不变，因而 τ_o 也不变。由此，可解得

$$\frac{2\tau_o l}{\gamma R}=\frac{(u_2-u_1-q_H)}{g}$$

式中，$l=l_2-l_1$。上式右边即为从①截面至②截面的水头损失（按式（5-23）），所以

$$\Delta h_{1-2}=\frac{2\tau_o l}{\gamma R} \tag{5-29}$$

它给出了在等截面圆管中作定型流动时壁面剪切应力与水头损失之间的关系，十分有用。显然上述关系在等截面圆管中对任一以管轴线为中心线，半径为 r，长为 l 的圆柱状控制体都是适用的；若作用在控制体侧面的剪切应力为 τ，因而有

$$\Delta h_{1-2}=\frac{2\tau l}{\gamma r} \tag{5-30}$$

所以

$$\frac{\tau}{\tau_o}=\frac{r}{R} \tag{5-31}$$

各式（5-29）～（5-31）的建立，并不涉及流动的流态类型，故对于层流和湍流都是适用的。

三、沿程损失因子 f

根据早期的圆管水头损失实验结果，法国工程师达西等最早提出将它表示为

$$\Delta h=f\frac{l}{d}\frac{V^2}{2g} \tag{5-32}$$

以及

$$\Delta p=f\frac{l}{d}\frac{1}{2}\rho V^2 \tag{5-33}$$

式中 f 称为圆管沿程损失因子（也有称为沿程损失系数的），它是一个无量纲系数，表示管长等于一个直径大小时、单位速度水头所引起的水头损失或单位速压所引起的压力损失。式（5-32）和（5-33）又称为达西公式。它是等截面圆管定型流动粘性损失计算的基本公式之一。若 f 确定，则水头损失的计算问题就得以解决。确定 f 的大小及影响它的各种因素是管流计算中的关键。

剪切应力 τ_0 也经常表达为摩擦阻力系数 C_f 的形式，即

$$C_f = \tau_0 / \frac{1}{2}\rho V^2 \tag{5-34}$$

比较式（5-29）、（5-32）、（5-34），可以推出

$$C_f = \frac{1}{4} f \tag{5-35}$$

由式（5-29）、（5-32），还可以导出

$$\tau_0 = \frac{f \rho V^2}{8} \tag{5-36}$$

因而

$$\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = V \sqrt{\frac{f}{8}}$$

由于 f 是无量纲量，$\sqrt{\tau_0/\rho}$ 必然具有速度的量纲，故称为摩擦速度，以 V_* 表示有

$$V_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = V \sqrt{\frac{f}{8}} \tag{5-37}$$

下面，在推导管流横截面上的速度分布函数和确定沿程损失因子 f 时，τ_0 和 ρ 两个量经常组合成 V_* 形式而出现，因而是一个很有用的参数；尤其对于湍流情况。

例 5-5　已知：水在直径为 0.61 米的圆管中流动，在相距61米的长度上测定水头损失是 9.15 米，水的重度 γ 为 9807牛/米^3。求：（a）管壁处的剪切应力；（b）距管壁 0.2 米处流体的剪切应力。

解 由式（5-29），有

$$\tau_0=\frac{\gamma R\Delta h}{2l}=\frac{9\,807\times0.305\times9.15}{2\times61}=224.3(\text{牛/米}^2)$$

由式（5-31），有

$$\tau=\tau_0\frac{r}{R}=224.3\times\frac{(0.305-0.2)}{0.305}=77.2(\text{牛/米}^2)$$

例 5-6 已知：在直径 0.15 米的圆管中，水流平均速度为 4.5 米/秒，在 30 米长的管路上测定水头损失是 5,333 米。求：摩擦速度 V_*

解 由式（5-32），有

$$f=\frac{\Delta h\mathrm{d}2g}{lV^2}=\frac{5.333\times0.15\times2\times9.807}{30\times(4.5)^2}=0.0258$$

由式（5-37），有

$$V_*=V\sqrt{\frac{f}{8}}=4.5\times\sqrt{\frac{0.0258}{8}}=0.256(\text{米/秒})$$

§ 5-5 低速管流的沿程损失

一、圆管层流

一般说来，实验方法是研究流体运动规律的基础。但是，为了深入理解流动规律的本质，采用理论分析的手段也是必不可少的，它可以给出流体各个参数之间的相互关系。由于圆管层流运动相对比较简单，因而可以通过理论分析方法完全求得流动的基本规律。

考虑如图 5-16 的圆管层流运动。下述几点已经为实践所证实：①剪切应力和速度必然是轴对称分布的；②圆管中心处的速度最大，而在壁面处速度为零，满足无滑移条件；③剪切应力沿半径是线性分布的；④层流中的剪切应力完全由粘性所引起，满足牛顿内摩擦公式，即式（1-28）。从图 5-16 还可以看到，$r=$

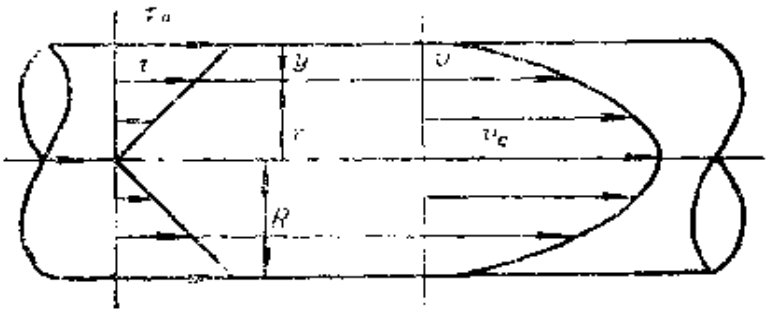


图 5-16

$= R - y$，因而 $\mathrm{d}r = -\mathrm{d}y$。由式（5-30）以及式（1-28）有

$$\tau = \frac{\gamma \Delta h}{2l} r = \mu \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = -\mu \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}$$

在壁面处 $r = R$，$\tau = \frac{\gamma \Delta h}{2l} R = \tau_0$；而在管截面中心处有 $r = 0$，$\tau = 0$，以及 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = 0$。故上式可改写为

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -\frac{\tau_0}{\mu R} r$$

积分后得到

$$v = -\frac{\tau_0}{\mu R} \cdot \frac{r^2}{2} + C$$

考虑到无滑移条件，即当 $r = R$ 时 $v = 0$，因而

$$C = \frac{\tau_0 R^2}{2\mu R}$$

代入前式后成为

$$v = \frac{\tau_0}{2\mu R}(R^2 - r^2) \qquad (5\text{-}38a)$$

由此可见，在圆管层流运动中，横截面上的速度分布为抛物型。当 $r = 0$ 时，$v = v_0 = \frac{\tau_0 R}{2\mu}$ 为速度之最大值。因而式（5-38a）也可表示为

$$v = v_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \qquad (5\text{-}38b)$$

考虑到 $V_*^2=\tau_o/\rho$，式（5-38）还可表示为

$$\frac{v}{V_*}=\frac{V_*}{2\nu R}(R^2-r^2) \tag{5-39}$$

式中 $\nu=\mu/\rho$ 为运动粘性系数，若以 $r^2=(R-y)^2$ 代入后有

$$\frac{v}{V_*}=\frac{V_*}{\nu}(y-y^2/2R) \tag{5-40}$$

由此可看出，层流运动的速度分布可表示为从壁面开始量取的距离 y 的函数；摩擦速度 V_* 可以看作是一个特征参考速度。

在很靠近壁面时，y 相对 R 很小，$y^2/2R$ 项可以忽略，因此速度 v 与 y 成线性关系，即

$$\frac{v}{V_*}=\frac{V_*}{\nu}y \qquad (y\ll R) \tag{5-41}$$

通过圆管的体积流量为

$$Q=\int_0^R v2\pi r\,\mathrm{d}r=\frac{\pi\tau_o}{\mu R}\int_0^R(R^2-r^2)\,\mathrm{d}r=\frac{\pi\tau_o R^3}{4\mu} \tag{5-42}$$

因而平均速度为

$$V=Q/A=\frac{\tau_o R}{4\mu}=\frac{1}{2}v_0$$

即平均速度是圆管中心轴上最大速度 v_0 的一半。根据式(5-29)有 $\tau_o=\dfrac{\Delta h\gamma R}{2l}$，因而代入式（5-42）有

$$Q=\frac{\pi R^4\gamma\Delta h}{8\mu l}=\frac{\pi d^4\gamma\Delta h}{128\mu l} \tag{5-43}$$

以及

$$V=\frac{d^2\gamma\Delta h}{32\mu l}$$

即

$$\Delta h=\frac{32\mu lV}{\gamma d^2}=\left(\frac{64\mu}{\rho Vd}\right)\frac{l}{d}\,\frac{V^2}{2g} \tag{5-44}$$

与达西公式（5-32）比较，可知沿程损失因子 f 为

$$f=\frac{64\mu}{\rho Vd}=64/Re \qquad \left(Re=\frac{\rho Vd}{\mu}\right) \tag{5-45}$$

由此可以看出，在圆管层流中，沿程损失因子 f 仅与雷诺数有关，而与壁面粗糙度无关。正如前述，这是由于雷诺数小，粗糙度产生的扰动影响，完全被粘性效应所抑制和阻尼。从式(5-43)可以看到，在圆管层流情况，若给定水头损失高度 Δh，则流量正比于直径的四次方，反比于管道长度；若给定管道的几何参数（直径、长度），则流量与水头损失成正比。因此，提高流量的主要手段是增大水头损失和直径。

例 5-7 已知：每分钟有 0.378 5 米^{3}的油通过直径 76.2 毫米的圆管，油的密度为 900 公斤/米^3，粘性系数为0.057 5帕·秒。求：305 米长度上的水头损失，管中心处的速度，距中心25.4毫米处的剪切应力和速度。

解 平均速度为

$$V=\frac{Q}{A}=\frac{0.378\,5}{60\times\frac{\pi}{4}\times(0.076\,2)^2}=1.383(\text{米/秒})$$

故圆管中的流动雷诺数为

$$Re=\frac{\rho Vd}{\mu}=\frac{900\times1.383\times0.076\,2}{0.057\,5}=1\,650$$

显然，因 $Re<2\,100$，定型流动为层流，$f=64/Re$。由式(5-32)，Δh 为

$$\Delta h=f\frac{l}{d}\frac{V^2}{2g}=\frac{64}{1\,650}\times\frac{305}{0.076\,2}\times\frac{1.383^2}{2\times9.807}=15.14(\text{米})$$

管中心轴上的最大速度有

$$v_0=2V=2\times1.383=2.766(\text{米/秒})$$

由式（5-38），在 $r=25.4$ 毫米处的速度为

$$v=v_0\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)=2.766\times\left(1-\frac{25.4^2}{38.1^2}\right)=1.537(\text{米/秒})$$

由式（5-31），当地剪切应力为

$$\tau=\frac{\gamma\Delta h}{2l}r=\frac{900\times9.807\times15.14}{2\times305}\times0.025\,4=5.56(\text{帕})$$

二、湍流光滑管

在层流中，由于剪切应力有准确的表达式，因而可以方便地导出横截面上的速度分布、沿程损失因子等的计算公式，并且其计算结果与实验结果相符合。但在湍流流动中，目前还难以从理论上准确地确定雷诺应力的大小。因此，在解决圆管湍流问题时，最简单的做法是在普兰特·卡门所提出的混合长度概念基础上，通过实验测定横截面上的速度分布等，然后确定式（5-6）或式（5-8）中的一些待定系数等。故这种理论是半经验性的。由于壁面粗糙度对流动有重要的影响，因此随粗糙度的类型及大小的不同，横截面上的速度分布以及沿程损失因子等都将不同。这里首先研究光滑管流的情况。所谓光滑管流，是指在一定雷诺数下，壁面上存在着粘性底层，而且底层的厚度超过了粗糙元的高度，使粗糙度的扰动影响被粘性效应所抑制，阻尼的情况，参见图 5-5(*a*)。有关光滑管的确切定义，在后面还要进一步讨论。

在湍流中，总的剪切应力由粘性应力和雷诺应力两部分组成，即

$$\tau = \mu \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y} - \rho \overline{u'v'} \tag{5-46}$$

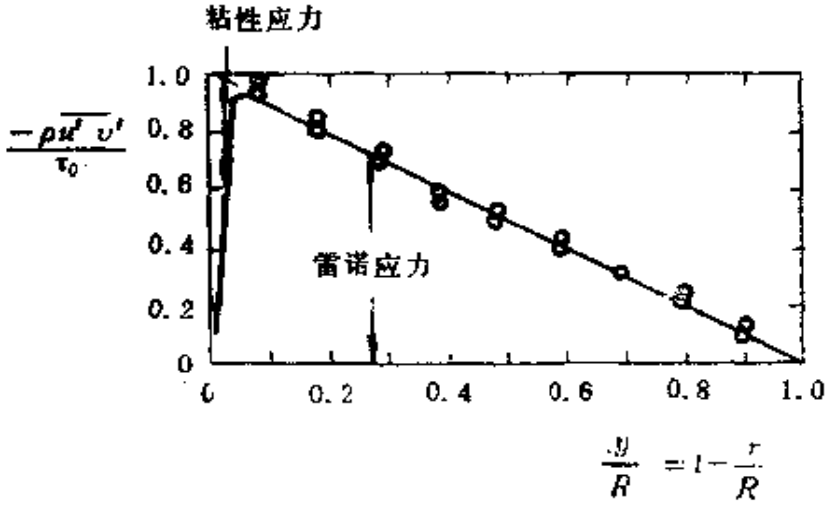


图 5-17

如图 5-17 所示，实验表明，在大部分流动区域中，$\mu \ll e$，雷诺应力是主要的，粘性应力可以忽略；而在靠近壁面的一个很薄的范围内，雷诺应力迅速趋于零，壁面附近的剪切应力主要由粘性应力构成。

在推导圆管湍流运动的关系时，将先完全忽略粘性应力。因而 $\tau = \tau_t$。

根据普兰特-卡门关系式（5-8），以及式（5-31），采用图 5-16 表示的坐标关系，并用 v 代替速度 U，有

$$\tau = \tau_0\left(1 - \frac{y}{R}\right) = \rho k^2 \left(\frac{dv}{dy}\right)^4 / \left(\frac{d^2v}{dy^2}\right)^2$$

并根据式（5-37），上式开方后可得

$$\frac{d^2v/dy^2}{\left(\frac{dv}{dy}\right)^2} = -\frac{k}{V_* \sqrt{1 - y/R}}$$

令 $x = \frac{dv}{dy}$，则

$$\frac{dx}{x^2} = -\frac{k}{V_* \sqrt{1 - y/R}} dy$$

积分得

$$\frac{1}{x} = -\frac{2kR}{V_*}\sqrt{1 - y/R} + C_1$$

当 $y \to 0$ 时，$\frac{dv}{dy}$ 一般是很大的，可近似认为 $\frac{1}{x} \to 0$，因而 $C_1 = \frac{2kR}{V_*}$，代入有

$$\frac{dy}{dv} = \frac{2kR}{V_*}(1 - \sqrt{1 - y/R})$$

调整变量位置，再积分可以得到

$$v = \frac{V_*}{k}[\sqrt{1 - y/R} + \ln(1 - \sqrt{1 - y/R})] + C_2$$

当 $y = R$ 时 $v = v_0$，因而 $C_2 = v_c$，故

$$\frac{v_o - v}{V_*} = -\frac{1}{k}\left[\sqrt{1-y/R} + \ln(1-\sqrt{1-y/R})\right] \tag{5-47}$$

这个速度分布公式过于繁琐，在实际使用中很不方便。因而还可采用根据实验结果推导的速度分布公式。尼古拉兹对圆管流动进行了系统的实验。湍流光滑管的速度分布经测定可以表达为如下对数曲线关系（在 $Re = 5\times10^5 \sim 3\times10^6$ 范围）：

$$\frac{v_o - v}{V_*} = -2.5\ln\left(\frac{y}{R}\right) \tag{5-48}$$

可见，$\frac{dv}{dy} \propto \frac{1}{y}$。由式（5-6）和式（5-31），有

$$\tau = \tau_o\left(1-\frac{y}{R}\right) = \rho l^2\left(\frac{dv}{dy}\right)^2 \tag{5-49}$$

由这个公式可以看出 $l \propto y\sqrt{1-y/R}$；但在壁面附近应有 $l = ky$（式（5-9）），因而可以假定 $l = ky\sqrt{1-y/R}$，代入式(5-49)后有

$$V_* = ky\frac{dv}{dy}$$

调整变量位置并积分得到

$$v = \frac{V_*}{k}\ln y + C \tag{5-50}$$

当 $y = R$ 时，$v = v_o$，所以 $C = v_o - \frac{V_*}{k}\ln R$，因而

$$\frac{v_o - v}{V_*} = -\frac{1}{k}\ln\left(\frac{y}{R}\right) \tag{5-51}$$

对照式（5-48），可知 $k = 0.4$。也即通过尼古拉兹实验确定了湍流常数 $k = 0.4$。但是，尼古拉兹实验采用的管壁粗糙度是由均匀砂粒所构成，称为人工均匀粗糙度。因而它所给的 k 值，并不能代表工业用管道情况。因而实际上 k 值并不严格都等于 0.4。

式（5-47）或（5-51）给出的速度分布仍存在问题，即当 $y \to 0$ 时，将导致 $v \to -\infty$。这显然违背实际情况。所以导致这

样的错误，是由于在推导以上各关系式时，完全忽略了由于粘性造成的剪切应力，而认为 $\tau=\tau_t$ 的结果。但实际上当 $y\to 0$ 时，雷诺应力已经趋于消失，粘性应力却占了总剪切应力的大部或全部。因而把忽略了粘性剪切应力导出的速度分布用到 $y\to 0$ 地区必然会出问题。为此，应换一个方式确定式（5-50）中的常数 C。设想，当很靠近壁面但 $y\neq 0$ 的地方，即 $y=y'$ 时，已经可认为 $v\approx 0$，当然 y' 是相当小的；若假定有 $y=y'$，$v=0$，则由（5-50）式有 $C=-\frac{V_*}{k}\ln y$，代入可得到

$$\frac{v}{V_*}=\frac{1}{k}\ln\left(\frac{y}{y'}\right)$$

再者，在很靠近壁面时，由圆管层流的式（5-41）知，速度与 y 成线性变化关系，而 y 具有 $\frac{\nu}{V_*}$ 的量级，故可假定 $y'=\beta'\frac{\nu}{V_*}$，而 β' 值由实验来定，于是上式将变成

$$\frac{v}{V_*}=\frac{1}{k}(\ln y-\ln y')=\frac{1}{k}\left(\ln y-\ln\beta'\frac{\nu}{V_*}\right)$$

$$=\frac{1}{k}\ln\frac{V_*y}{\nu}-\frac{1}{k}\ln\beta'$$

或

$$\frac{v}{V_*}=\frac{1}{k}\ln\frac{V_*y}{\nu}+D\qquad(y\neq 0)$$

式中 $D=-\frac{1}{k}\ln\beta'$，对于湍流光滑管情况按尼古拉兹实验的数据，在 $k=0.4$ 的情况下，可取 $D=5.5$，即 $\beta'=0.11$。因而可知 $y'=0.11\frac{\nu}{V_*}$。由此

$$\frac{v}{V_*}=2.5\ln\frac{V_*y}{\nu}+5.5\qquad(5\text{-}52a)$$

转换成常用对数，有

$$\frac{v}{V_*}=5.75\log\frac{V_*y}{\nu}+5.5\qquad(5\text{-}52b)$$

式（5-52）称为对数速度分布规律。该速度分布假定了在 $y=y'$ 时，$v=0$，近似地满足了壁面无滑移条件。但因它是忽略了粘性剪切应力取得的结果，故只适用于湍流区域。即该速度分布应终止于粘性底层的外边界。而在粘性底层内的速度分布应符合式（5-41），即

$$\frac{v}{V_*}=\frac{V_*y}{\nu} \tag{5-41}$$

联立式（5-41）和（5-52），即在粘性底层外边界上应同时满足这两个速度分布，由此解出粘性底层的厚度 δ_v 为

$$\frac{V_*\delta}{\nu}=11.6 \quad 或 \quad \delta_v=11.6\nu/V_* \tag{5-53}$$

这个求解过程可以图解形式给出。如图5-18所示，以

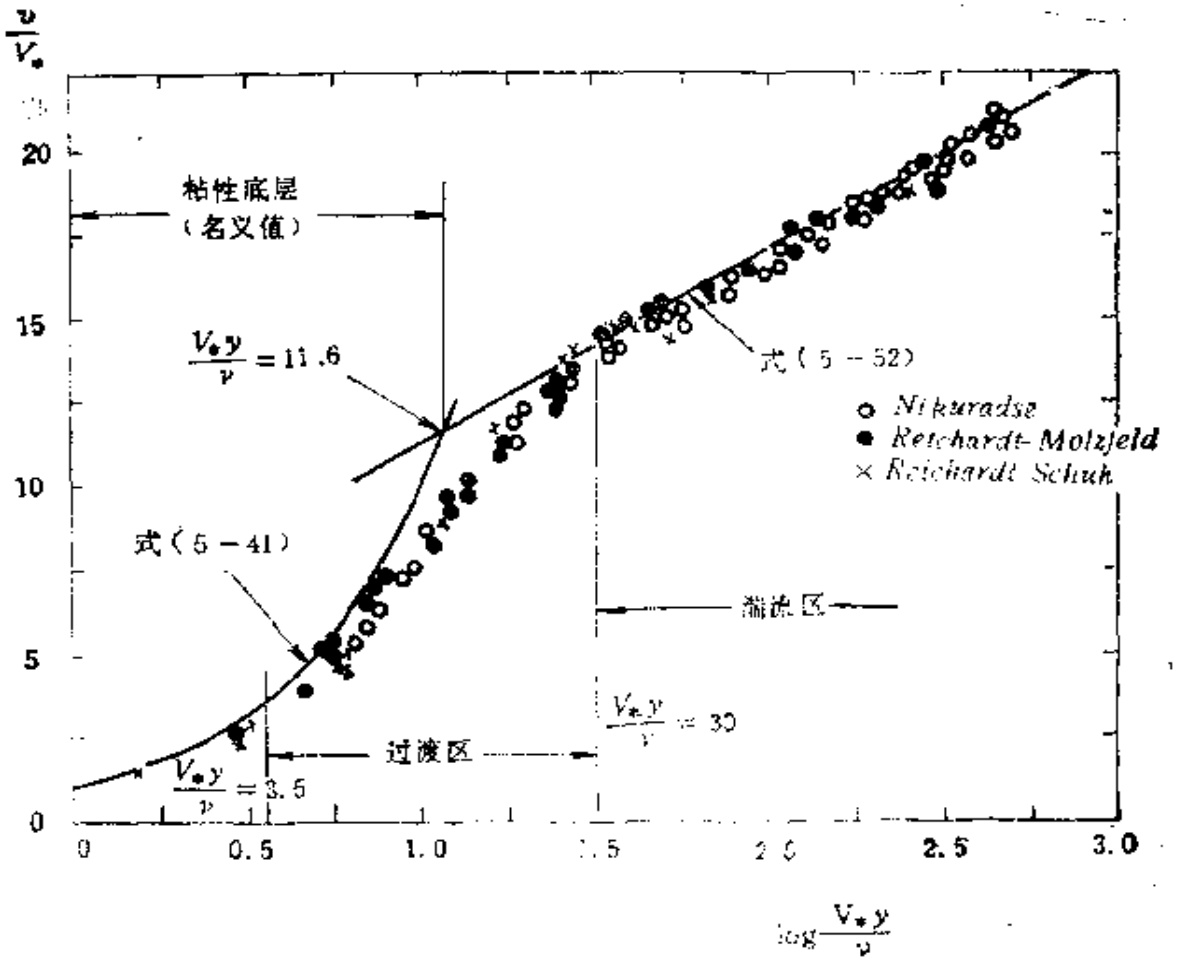


图 5-18

$\log\left(\frac{V_* y}{\nu}\right)$为横坐标，绘式(5-52)和(5-41)的曲线。不难看出，两段速度分布曲线大体上都为实验结果所证实。两曲线交于$\frac{V_* y}{\nu}=11.6$。实际上从湍流区到粘性底层的流动区是逐步变化的，有一个过渡区，$\frac{V_* y}{\nu}=11.6$仅仅是一个名义的边界值。从图5-18还可看出，三个流动区大体按如下划分：

$\frac{V_* y}{\nu}<3.5$　　粘性底层

$\frac{V_* y}{\nu}=3.5\sim30$　　过渡区

$\frac{V_* y}{\nu}>30$　　湍流区

最后还应指出，湍流区速度分布式（5-52）或式（5-53）还有不足之处，即它在中心线上并不满足$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}=0$的要求。

流经管道的体积流量为

$$Q=\int_0^R v2\pi r\mathrm{d}r$$

若以式（5-52）代入，并假定该式适用于整个横截面，积分后可以得到

$$\frac{Q}{\pi R^2 V_*}=5.75\log\frac{V_* R}{\nu}+1.75$$

平均速度$V=Q/\pi R^2$，因而有

$$\frac{V}{V_*}=5.75\log\frac{V_* R}{\nu}+1.75 \qquad (5\text{-}54)$$

根据式（5-53），在$y=R$时，有$v=v_c$，因而

$$\frac{v_c}{V_*}=5.75\log\frac{V_* R}{\nu}+5.5$$

用上式减去式（5-54）有

$$\frac{v_c-V}{V_*}=3.75$$

或 $$v_o = V + 3.75V_*$$

考虑到式（5-37）$V_* = V\sqrt{f/8}$，因而

$$v_o = V(1 + 3.75\sqrt{f/8})$$

根据实验结果可知，常数 3.75 应调整为 4.07，因而

$$\frac{v_o}{V} = 1 + 4.07\sqrt{f/8} \tag{5-55}$$

由上式可以看出，沿程损失因子 f 越大，则 $\frac{v_o}{V}$ 值越大，表明速度分布越不均匀，变化比较剧烈；反之，当 f 逐渐减小时，速度分布变得越加平坦。对于给定的管道，在一定的流量 Q 下，当 f 确定后，速度分布也确定了。图 5-19 上画出了当 $f = 0.025$

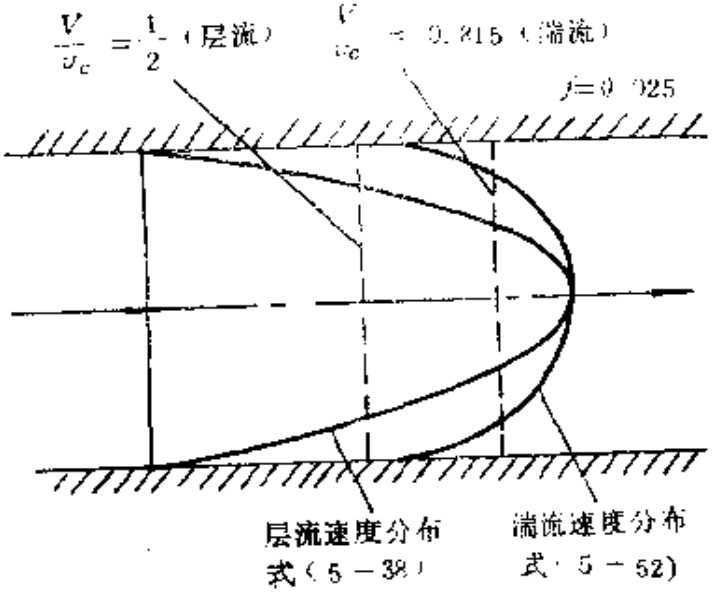


图 5-19

时的圆管湍流光滑管横截面上的对数速度分布曲线，同时也画出了具有相同中心速度下的圆管层流的速度分布曲线。该图表明，在湍流运动中，涡团动量交换的结果使中心部分的速度分布变得相当平缓，但在贴近壁面时的速度变化率却很大。

将式（5-37）代入式（5-54），并用直径代替半径，可以得到计算沿程损失因子 f 的公式：

$$\frac{1}{\sqrt{f}}=2.03\log(Re\sqrt{f})-0.91$$

实验表明，上式公式中的常数 2.03 和 0.91 分别应调整为 2.0 和 0.8，因而

$$\frac{1}{\sqrt{f}}=2.0\log(Re\sqrt{f})-0.8 \qquad (5\text{-}56)$$

式中 $Re=Vd/\nu$ 为管道中流动的雷诺数。

式（5-53）已经给出了底层厚度 δ_v，但使用这个公式并不方便，习惯上将 δ_v 表示为 Re 和 f 的函数。考虑到式（5-37），可得到

$$\frac{\delta_v}{d}=\frac{11.6\nu}{V_*d}=\frac{32.8}{Re\sqrt{f}} \qquad (5\text{-}57)$$

从这个方程还可以看出，当雷诺数不断增加时，底层厚度逐渐减小，这正是在 §5-2 节和图 5-5 中曾经讨论和介绍过的情况：即给定管道（包括壁面粗糙度大小）中的流动究竟是属于湍流光滑管还是粗糙管，不仅与管壁的粗糙度大小有关，而且还与流动的雷诺数有关。

例 5-7 已知：20℃的水在直径为 75 毫米的光滑黄铜管中流动，测得壁面剪切应力 $\tau_0=3.68$ 牛/米^2，水的密度 $\rho=998$ 公斤/米^3，运动粘性系数 $\nu=1\times10^{-6}$ 米^2/秒。求：摩擦速度，平均速度，沿程损失因子，粘性底层的厚度，流量，管道中心线上的速度，半径 25毫米处的速度和剪切应力，在 1 000 米长度上的水头损失。

解 按式（5-37）知摩擦速度

$$V_*=\sqrt{\tau_0/\rho}=\sqrt{\frac{3.68}{998}}=0.0607\text{（米/秒）}$$

按式（5-54）有平均速度

$$V=V_*\left((5.75\log\frac{V_*R}{\nu}+1.75\right)$$

$$= 0.0607 \times \left(5.75 \log \left(\frac{0.0607 \times 0.0375}{1 \times 10^{-6}} \right) + 1.75 \right)$$

$$= 1.278 (\text{米/秒})$$

流动雷诺数 $Re = \frac{Vd}{\nu} = \frac{1.278 \times 0.075}{1 \times 10^{-6}} = 95\,980$

按式（5-56），通过迭代方式求出沿程损失因子为

$$f = 0.0182$$

因而底层厚度按式（5-57）有

$$\delta_v = \frac{32.8d}{Re\sqrt{f}} = \frac{32.8 \times 75}{95\,850 \times \sqrt{0.0182}} = 0.190 (\text{毫米})$$

流量 $Q = VA = 1.278 \times \pi \times (0.0375)^2 = 5.646 \times 10^{-3} (\text{米}^3/\text{秒})$

中心速度按式（5-53）为

$$v_c = V(1 + 4.07\sqrt{f/8}) = 1.526 (\text{米/秒})$$

按式（5-31），半径 25 毫米处的剪切应力为

$$\tau = \tau_0 \left(\frac{r}{R} \right) = 3.68 \times \frac{25}{37.5} = 2.453 (\text{牛/米}^2)$$

按式（5-53），该处速度为

$$v = V_* \left(5.75 \log \frac{V_* y}{\nu} + 5.5 \right)$$

$$= 0.0607 \times \left(5.75 \log \left(\frac{0.0607 \times 0.0125}{1 \times 10^{-6}} \right) + 5.5 \right)$$

$$= 1.339 (\text{米/秒})$$

按式（5-32），1000米长度上的水头损失为

$$\Delta h = f \frac{l}{d} \frac{V^2}{2g} = 0.0182 \times \frac{1000}{0.075} \times \frac{1.278^2}{2 \times 9.807}$$

$$= 20.21 (\text{米})$$

三、湍流粗糙管

对于壁面比较粗糙的管道，在高雷诺数下，流动将主要地受到粗糙度和粗糙元类型所谓粗糙元类型（所谓粗糙元类型，主要

指粗糙元是人工布置的均匀颗粒，或是生产和使用中自然形成的随机型粗糙元）的影响，而与雷诺数无关。这样的管道称为粗糙管。由于粗糙元的强烈扰动作用，粘性底层中的流动主要是粗糙元造成的分离流。

尼古拉兹实验指出，由式（5-48）或（5-51）所表示的速度分布，对于光滑管或粗糙管是同样有效的，因而仍有

$$\frac{v}{V_*}=\frac{1}{k}\ln\left(\frac{y}{y'}\right)$$

并继续认为在 $y=y'$ 处，$v=0$。设 $y'=\alpha' e$，e 为平均或当量粗糙度，α' 为待定常数。代入上式有

$$\frac{v}{V_*}=\frac{1}{k}\ln\left(\frac{y}{\alpha' e}\right)=\frac{1}{k}\ln\left(\frac{y}{e}\right)-2.5\ln\alpha'$$

或采用常用对数为

$$\frac{v}{V_*}=5.75\log\left(\frac{y}{e}\right)+B$$

式中 $B=-2.5\ln\alpha'$，尼古拉兹实验证实，在均匀的人工粗糙元条件下，因 $k=0.40$，有 $B=8.5$，$\alpha'=0.033$，即 $y'=0.033e$。因而上式变为

$$\frac{v}{V_*}=5.75\log\left(\frac{y}{e}\right)+8.5 \qquad (5\text{-}58)$$

类似于光滑管情况，可积分求出通过横截面的体积流量大小为

$$Q=\int_0^R v2\pi r\mathrm{d}r=\pi R^2 V_*\left(5.75\log\left(\frac{R}{e}\right)+4.75\right)$$

因而平均速度为

$$\frac{V}{V^*}=5.75\log\left(\frac{R}{e}\right)+4.75 \qquad (5\text{-}59)$$

代入式（5-37）有

$$\frac{1}{\sqrt{f}}=2.03\log\left(\frac{R}{e}\right)+1.68$$

按尼古拉兹实验的结果，常数 2.03 和 1.68，应分别调整为 2.0 和 1.74，则上式变为

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.0 \log\left(\frac{R}{e}\right) + 1.74$$

若将半径改为直径，则上式变为

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.0 \log\left(\frac{d}{e}\right) + 1.14 \qquad (5\text{-}60)$$

从上述几个公式可以看到，在圆形湍流粗糙管的流动中，沿程损失因子 f 仅仅是相对粗糙度（e/d）的函数，而与雷诺数无关。

例 5-8 已知：在直径为300毫米管道中，水的平均流速为3米/秒，其运动粘性系数为 9×10^{-7} 米^2/秒，管道相对粗糙度e/d为0.002。求：按粗糙管，计算沿程损失因子，管中心速度，距管壁50毫米处的速度，以及300米长管道上的水头损失。

解 按式（5-60）有

$$f = 1/\left(2.0 \log \frac{d}{e} + 1.14\right)^2$$

$$= 1/(2.0 \log 500 + 1.14)^2 = 0.0234$$

摩擦速度为

$$V_* = V\sqrt{f/8} = 3\times\sqrt{\frac{0.0234}{8}} = 0.162 \text{（米/秒）}$$

由式（5-58）可得中心速度为

$$v_c = V_*\left(5.75 \log\left(\frac{R}{e}\right) + 8.5\right)$$

$$= 0.162\times\left(5.75\log\left(\frac{150}{0.002\times300}\right) + 8.5\right)$$

$$= 3.611 \text{（米/秒）}$$

距管壁50毫米处的速度为

$$v = V_*\left(5.75 \log\frac{y}{e} + 8.5\right)$$

$$= 0.162\times(5.75\log\left(\frac{50}{0.002\times300}\right) + 8.5)$$

$$= 3.166 \text{（米/秒）}$$

在300米长度上的水头损失为

$$\Delta h = f\frac{l}{d}\frac{V^2}{2g} = 0.023\,4\times\left(\frac{300}{0.3}\right)\left(\frac{3^2}{2\times 9.807}\right)$$

$$= 10.74\ (\text{米})$$

四、湍流光滑管和粗糙管的判据

前面介绍了两种不同情况的圆管湍流。对于湍流光滑管来说，由于粘性底层厚度完全复盖了粗糙元高度，因而粗糙度的影响实际上不存在。流动只取决于雷诺数。而湍流粗糙管情况正相反，由于粗糙元远超出了粘性底层厚度，它对流动的影响已成为决定因素，即流动只取决于相对粗糙度 e/d。但是，前面没有讨论判断管壁是光滑还是粗糙的确切判据。另外，在湍流粗糙管和光滑管之间有一个过渡流动区。在这个流动区内，雷诺数和粗糙度对流动同时都有影响，这些都需要加以说明。

粗糙元平均高度e与底层厚度 δ_v 之比，是确定雷诺数与粗糙度影响相对大小的一个重要参数。根据式（5-57）有

$$\frac{e}{\delta_v} = (e/d)/(\delta_v/d) = \left(\frac{e}{d}\right)\frac{Re\sqrt{f}}{32.8}$$

因而

$$\frac{e}{d}Re\sqrt{f} = 32.8\frac{e}{\delta_v} \qquad (5\text{-}61)$$

根据式（5-60），对于湍流粗糙管有

$$\frac{1}{\sqrt{f}} - 2.0\log\left(\frac{d}{e}\right) = 1.14$$

对湍流光滑管，按式（5-56），两边减 $2.0\log\left(\frac{d}{e}\right)$后，得

$$\frac{1}{\sqrt{f}} - 2.0\log\left(\frac{d}{e}\right) = 2.0\log\left(\frac{e}{d}Re\sqrt{f}\right) - 0.8 \qquad (5\text{-}62)$$

若以$\left[\frac{1}{\sqrt{f}} - 2.0\log\left(\frac{d}{e}\right)\right]$值为纵坐标，以$\frac{e}{d}Re\sqrt{f}$为

横坐标并取成对数坐标，则式（5-60）和（5-62）在图5-20上表示为两条直线。在该两条直线之间有一段虚线，表示尼古拉兹实验所获得的数据在这一区域内数据有较大的分散度，相应的$\frac{e}{d}Re\sqrt{f}$值在10～200之间。显然，在这一区域内的实验结果，既不符合湍流光滑管的公式，也不符合湍流粗糙管公式，而

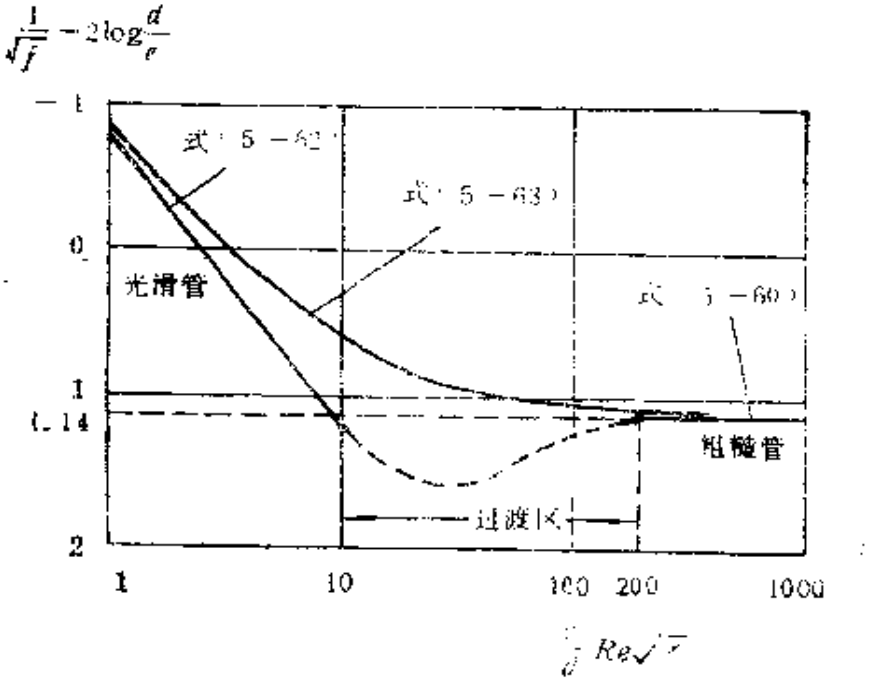


图 5-20

是属于过渡区域的流动情况。因此，可以用无量纲组合量$\frac{e}{d}Re\sqrt{f}$来区分管内流动的情况：

$\frac{e}{d}Re\sqrt{f}<10$　　湍流光滑管流动区，

$\frac{e}{d}Re\sqrt{f}=10\sim200$　　过渡区，

$\frac{e}{d}Re\sqrt{f}>200$　　湍流粗糙管流动区。

根据式（5-61），也可以用$\frac{e}{\delta_v}$代替上述的$\frac{e}{d}Re\sqrt{f}$作为

判别标准：

$\frac{e}{\delta_v}<0.3$　　湍流光滑管流动区，

$\frac{e}{\delta_v}=0.3\sim6.1$　过渡区，

$\frac{e}{\delta_v}>6.1$　　湍流粗糙管流动区。

从这里可以形象地看出，若粗糙元高度小于粘性底层厚度的30%，则粘性底层可完全抑制它的影响，流动属于湍流光滑管；反之，若粗糙元高度大于底层厚度的6倍左右，则粗糙元的影响是决定性的，流动属于湍流粗糙管；而在两者之间，则是过渡区。

但是，上述结论并不能用于一般工业生产和使用中的管道。这类管道的粗糙元是由于加工、腐蚀、污垢积累等各种因素自然形成的，具有随机性质，几何上与人工均匀粗糙元完全不相似。柯尔布鲁克对大量工业用管道进行了实验及数据搜集、整理工作，提出了关于雷诺数（反映粘性底层厚度）和粗糙度对沿程损失因子影响的经验公式：

$$\frac{1}{\sqrt{f}}-2\log\left(\frac{d}{e}\right)=1.14-2\log\left(1-\frac{9.28}{Re\frac{e}{d}\sqrt{f}}\right)$$

(5-63)

它也画在图5-20上了。它是一条连续变化的曲线，正反映出管壁粗糙元高低不平，不会出现尼古拉兹实验中的光滑管和粗糙管两种极端情况。根据柯尔布鲁克公式（5-63），给定雷诺数Re和相对粗糙度e/d后，就可以计算低速圆管粘流的沿程损失因子f。这里的粗糙度应取平均或当量值。从图5-20还可以看出，当$\frac{e}{d}Re\sqrt{f}\geqslant200$时，式(5-63)同由尼古拉兹实验得到的式(5-60)是相当接近的。当$\frac{e}{d}Re\sqrt{f}=200$时，式（5-63）的最后一项

的值仅为0.04，相比其他项可以忽略，该式就变成了式（5-60）。这也说明，在湍流粗糙管情况，尼古拉兹实验的结果式（5-60），对于一般工业用管道也是适用的。

于是可利用式（5-60）的关系，来测定一般工业用管道的粗糙度。其方法如下：使流体在足够高的雷诺数下流过管道，测量其水头损失Δh和其他有关参数，然后由式（5-32）计算f，再由式（5-60）计算粗糙度。

通过速度分布公式还可以引出一个粗糙元雷诺数，作为判别湍流光滑和粗糙管的判据。对于湍流光滑管，由式（5-51）并把它变成常用对数形式后有

$$\frac{v_c - v}{V_*} = 5.75 \log\left(\frac{R}{y}\right) \tag{5-64}$$

另再按式（5-58），代入$y = R$，$v = v_c$，得到湍流粗糙管中心速度为

$$\frac{v_c}{V_*} = 5.75 \log\left(\frac{R}{e}\right) + 8.5$$

上式与式（5-58）相减也可得到式（5-64）。可见，该式对于湍流光滑管和粗糙管都适用。现把式（5-64）进一步改写为

$$\frac{v}{V_*} = \frac{v_c}{V_*} + 5.75 \log\left(\frac{y}{R}\right) = \frac{v_c}{V_*} + 5.75 \log\left(\frac{e}{R}\right) + 5.75 \log\left(\frac{y}{e}\right)$$

$$= A + 5.75 \log\left(\frac{y}{e}\right)$$

式中$A = \frac{v_c}{V_*} + 5.75 \log\left(\frac{e}{R}\right)$，对照式（5-58），可知在湍流粗糙管有$A = 8.5$，为一常数。

对于湍流光滑管，由式（5-53）可得

$$\frac{v}{V_*} = 5.75 \log \frac{V_* y}{\nu} + 5.5 = 5.75 \log \frac{V_* e}{\nu} + 5.75 \log \frac{y}{e} + 5.5$$

和上式对照可知现有

$$A = 5.5 + 5.75 \log\frac{V_* e}{\nu} \qquad (5\text{-}65)$$

以$\log\frac{V_* e}{\nu}$为横坐标，将湍流光滑管和粗糙管对应的 A 值绘图于图5-21上。从图上可以看出，在 $V_* e/\nu < 3.5$ 时，实验数据同光滑管对应的式（5-65）相吻合；而$\frac{V_* e}{\nu} > 70$ 时，$A = 8.5$，符合粗糙管的结果。因此，可以看出，$\frac{V_* e}{\nu}$也可以作为一个判别流动类型的判据，通常称组合量 $V_* e/\nu$ 为粗糙元雷诺数，表示为 Re_*，即

$$Re_* = V_* e/\nu$$

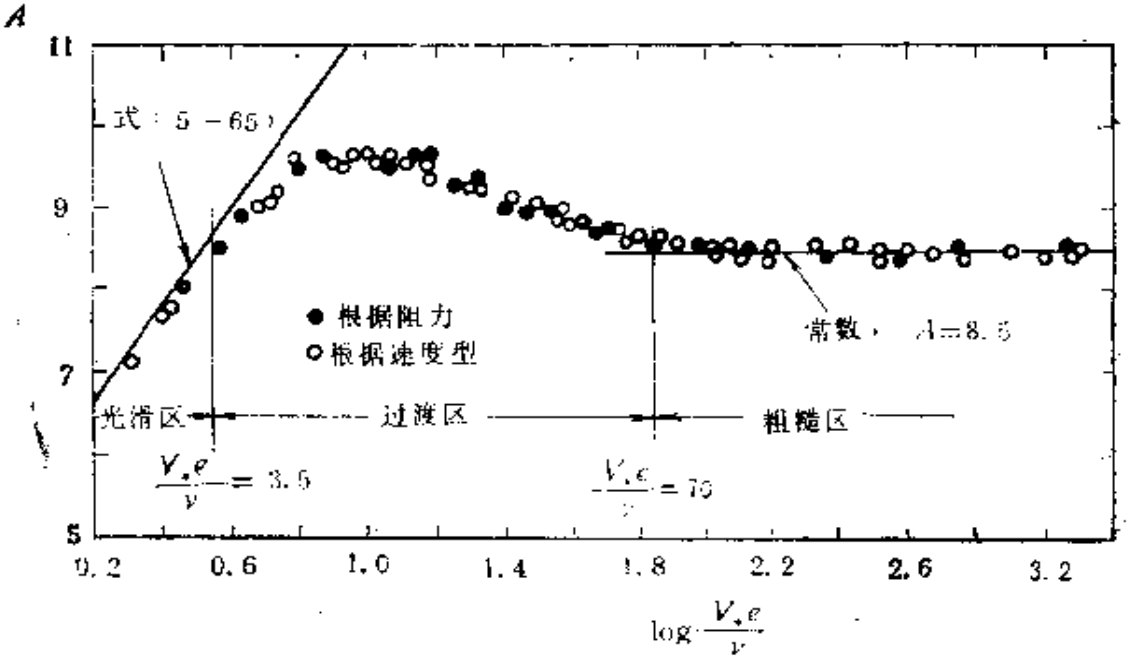


图 5-21

从图5-21可看出有如下界限：

$Re_* < 3.5$	湍流光滑管流动区，
$Re_* = 3.5 \sim 70$	过渡区，
$Re_* > 70$	湍流粗糙管流动区。

实际上，用Re_*判别，同前面用$\frac{e}{d}Re\sqrt{f}$或e/δ_v判别是完全一致的。例如，若$\frac{e}{d}Re\sqrt{f}=10$，但因式（5-61）可得$\frac{e}{\delta_v}=0.3$；但因$\delta_v=11.6\frac{v}{V_*}$，故$\frac{V_*e}{v}=3.5$。若$\frac{V_*e}{v}=70$，则有$\left(\frac{11.6}{\delta_v}\right)e=70$，得$\frac{e}{\delta_v}=6.1$，再由式（5-61）得$\frac{e}{d}Re\sqrt{f}=200$，也是相当的。

五、圆管流动的沿程损失实验

从以上各节的分析和讨论中可知，影响圆管流动沿程损失大小的因素很多，现象也比较复杂，特别是湍流情况。然而，从前面的讨论与分析中可以看出，在不可压粘流中，影响沿程损失Δh或Δp物理量有以下一些：圆管直径d，管长l，平均粗糙元高度e，管流中的平均速度V，流体的密度ρ和粘性系数μ等。这里以压力损失Δp为例进行分析，待定的关系式为

$$F(\rho,V,d,\mu,l,e,\Delta p)=0 \qquad (5\text{-}66)$$

利用量纲分析方法，可以求得影响Δp的各个无量纲组合量之间的一般关系，参看式（4-44）有

$$\Delta p/\frac{1}{2}\rho V^2=F_1\left(Re,\frac{l}{d},\frac{e}{d}\right) \qquad (5\text{-}67)$$

由式（5-33）：

$$\Delta p=f\frac{l}{d}\frac{1}{2}\rho V^2 \qquad (5\text{-}33)$$

因而沿程损失因子f的一般关系式可以表示为

$$f=F_2\left(Re,\frac{e}{d}\right) \qquad (5\text{-}68)$$

F_2为待定函数。这表明f将是雷诺数Re和相对粗糙度e/d的函数。这同前面推导的式（5-45）、（5-56）、（5-60）和（5-63）等的结论是一致的。式（5-68）也为圆管流动摩擦阻力实验的准

备、安排以及对实验数据的整理提供了方向和依据。

为了提供工程计算中所需要的沿程损失因子 f 的数据，许多人作了大量的实验。其中最典型的是尼古拉兹的实验。尼古拉兹采用在管壁上粘贴均匀砂粒，保持相对粗糙度在0.009 85到0.033 3之间，一共有6种。实验雷诺数在$6\times10^2\sim10^6$范围内。其实验结果，按式（5-68）的关系整理成曲线，称为斯坦通图，如图5-22所示。

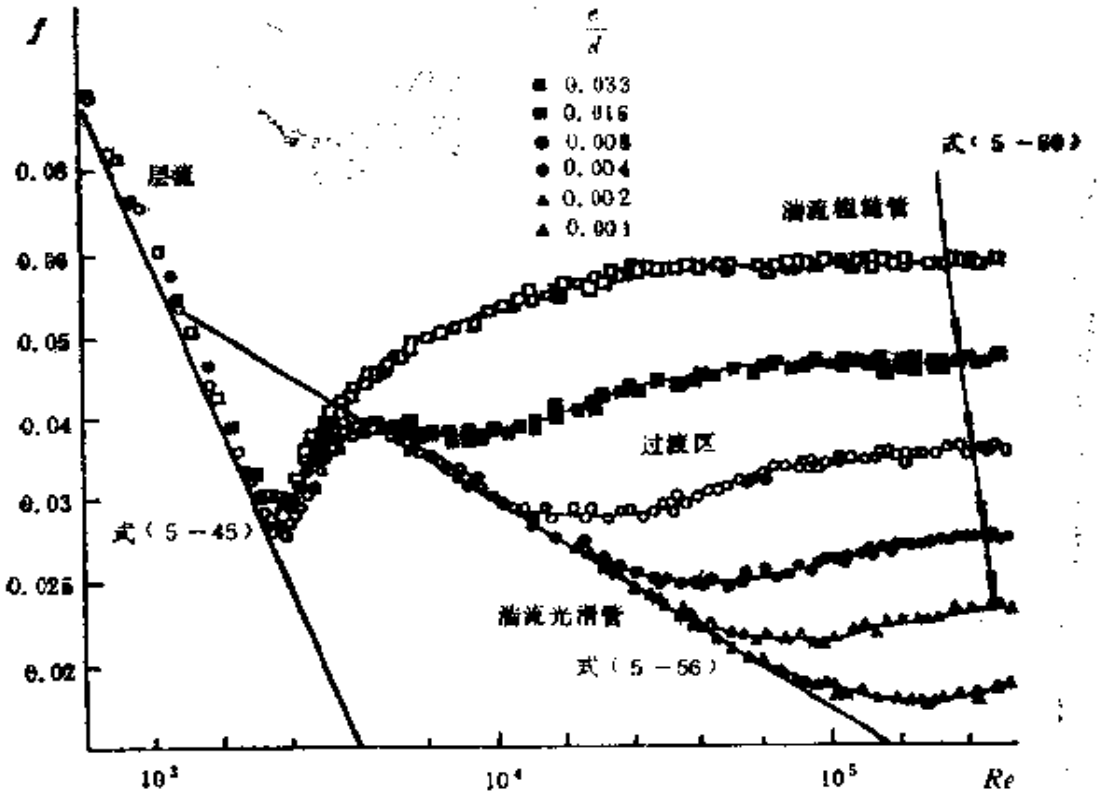


图 5-22

由该图可知：

① 在层流和湍流的不同状态下，f 相对于 Re 数的变化关系是很不相同的。在$Re=2\ 100$附近，实验曲线发生了明显的改变，说明该雷诺数为下临界雷诺数。

② 在层流状态，各种不同粗糙度的实验点都落在同一条曲线上，表明 f 与粗糙度无关。实验证实了前面推导的式（5-45），

$$f = 64/Re \qquad (5\text{-}45)$$

若代入式（5-32），可推出 $\Delta h \propto V$ 的关系。

③ 在湍流状态，粗糙度对 f 的影响是明显的。对应于不同的 e/d 值，有不同的 $f \sim Re$ 曲线。说明 f 确实是 Re 数和 e/d 的函数。

④ 在高雷诺数情况，曲线逐渐趋于水平。说明此时雷诺数对沿程损失因子已不发生影响，f 完全取决于粗糙度，其变化关系可由式（5-60）表示。不难看出，水头损失 $\Delta h \propto V^2$。这正是前述的湍流粗糙管情况。

⑤ 在雷诺数为 5000～50000 范围内，几乎所有粗糙度的实验点都落在同一条曲线上。说明此时粗糙度对 f 没有影响，f 完全取决于雷诺数，其变化关系可由式（5-56）表示。水头损失大致可表示为 $\Delta h \propto V^{1.75}$。这正是前述的湍流光滑管情况。式（5-56）比较复杂，需迭代才能求出 f 值。因而也可用布拉修斯的经验公式：

$$f = 0.3164/Re^{0.25} \qquad (5\text{-}69)$$

但它仅适用于 $Re < 10^5$ 范围。

⑥ 随着雷诺数的提高，粘性底层厚度逐渐降低，粗糙元逐渐暴露于湍流主流中，粗糙度开始发生影响。从图 5-22 也可看到，e/d 值越小，实验点偏离湍流光滑管曲线时所对应的雷诺数越高。可以设想，若粗糙度更小些，实验点还将落在湍流光滑管曲线上。实验曲线从偏离湍流光滑管曲线起，到逐渐变成水平直线为止，f 既受雷诺数影响，也受粗糙度影响，即为湍流过渡区。

例 5-9 已知：38℃的水在直径75 毫米的圆管中流动，雷诺数为80 000，管壁为人工均匀粗糙类型，粗糙元高度 $e = 0.15$ 毫米。水的运动粘性系数 $\nu = 0.686 \times 10^{-6}$ 米^2/秒。求：在 305米长度上，水头损失多少？若按光滑管流动计算，损失又为多少？

解 因相对粗糙度 $\frac{e}{d} = 0.15/75 = 0.002$，相应此粗糙度，

以及$Re=80\,000$，查图5-22，得

$$f=0.021$$

由雷诺数可计算水流平均速度为

$$V=\frac{Rev}{d}=\frac{80\,000\times0.686\times10^{-6}}{0.075}=0.732(\text{米/秒})$$

由式（5-32）得，水头损失为

$$\Delta h=f\frac{l}{d}\frac{V^2}{2g}=0.021\times\frac{305}{0.075}\times\frac{0.732^2}{2\times9.807}=2.33(\text{米})$$

若认为是湍流光滑管流，按式（5-69）有

$$f=0.316\,4/Re^{0.25}=0.316\,4/80\,000^{0.25}=0.018\,8$$

因此，水头损失为

$$\Delta h=2.33\times\frac{0.018\,8}{0.021}=2.09(\text{米})$$

如前所述，对于工业用管道，柯尔布鲁克提出了计算沿程损失因子的式（5-63）。这个公式综合了雷诺数和粗糙度两个因素的影响，适用于湍流光滑管、过渡和粗糙管三个流动区。但式（5-63）使用起来也是很不方便的。后来，莫迪将这个公式按斯坦通曲线的形式，制成如图5-23所示的曲线图，称为莫迪图或莫迪曲线；在工程上得到了广泛的应用。各种不同材料做成的工业用管道，其粗糙度可查阅本章的表5-3和表5-4。

比较图5-22和图5-23上的曲线，可以清楚地看到它们之间的异同。在圆管层流、湍流光滑和湍流粗糙等流动区，两者的沿程损失因子f随雷诺数和粗糙度的变化关系是相同或类似的。两者的不同集中在湍流过渡区，在这个区内，f同时受雷诺数和粗糙度的影响。对于图5-22上的尼古拉兹曲线，f随雷诺数变化有先下降后上升的趋势。可以这样解释，当雷诺数比较低时，粘性底层比较厚，均匀粗糙元对主流的影响较小，阻力主要由粘性引起，故先随雷诺数增加而下降。当雷诺数比较高时，相应粘性底层厚度比较薄，均匀粗糙元开始发生作用；底层变薄的过程实际上反映了粗糙元影响增大的过程，因而随雷诺数的增加f值

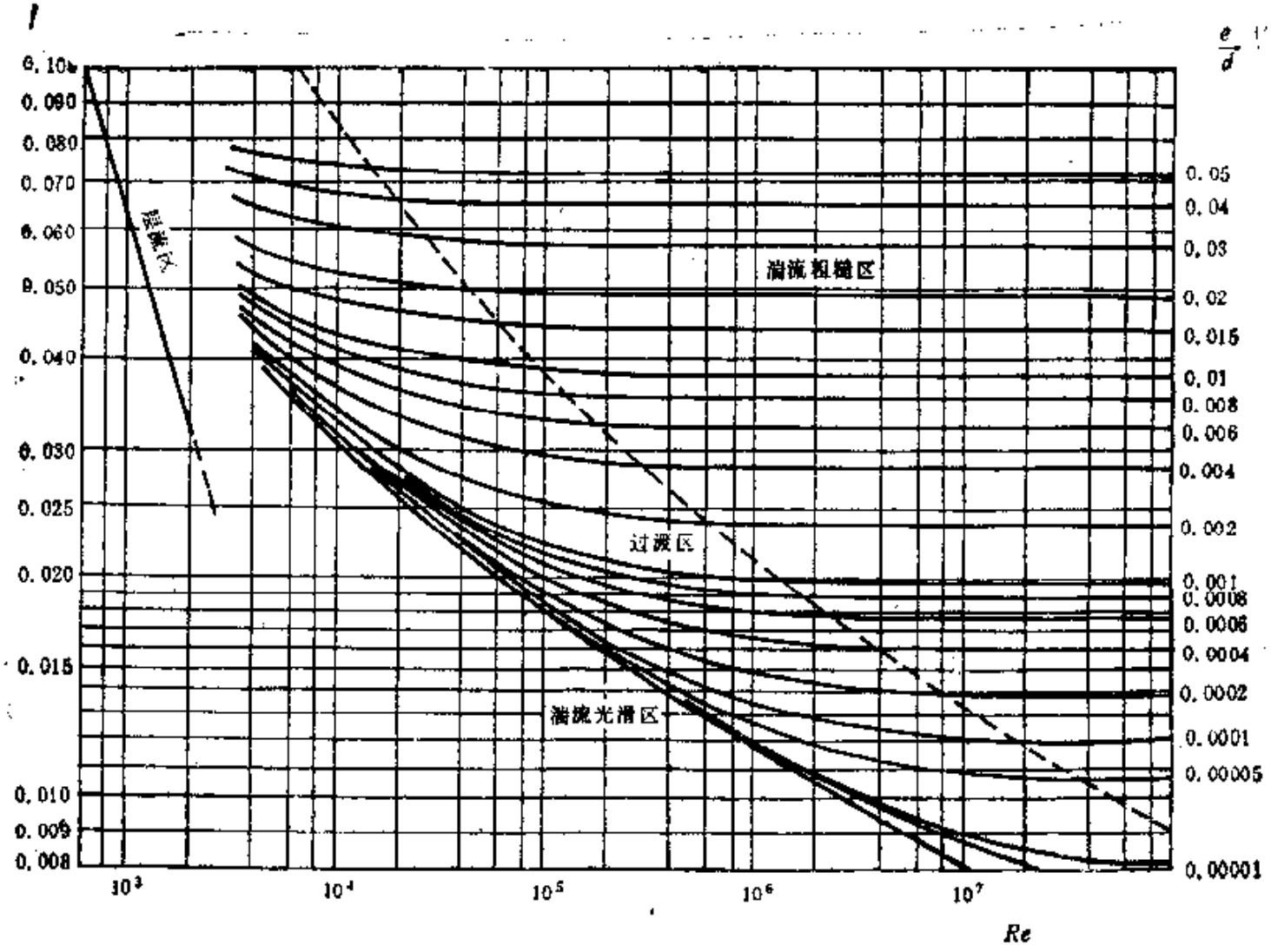

λ
层流区
湍流粗糙区
过渡区
湍流光滑区
0.10
0.090
0.080
0.070
0.060
0.050
0.040
0.030
0.025
0.020
0.015
0.010
0.009
0.008
10^3
10^4
10^5
10^6
10^7
Re
$\frac{e}{d}$
0.05
0.04
0.03
0.02
0.015
0.01
0.008
0.006
0.004
0.002
0.001
0.0008
0.0006
0.0004
0.0002
0.0001
0.00005
0.00001

图 5-23

值反而上升。对于图 5-23 上的工业用管道曲线来说，其粗糙元高度是随机分布的，即使在底层比较厚时，其中比较大的粗糙元已经对流动早已发生了影响，促使层流很快都变成湍流。而且，粗糙度的影响始终与雷诺数的影响交织在一起，表现为 f 随雷诺数的增加而逐渐减小，直到完全粗糙区为止。

莫迪曲线所包括的雷诺数范围和粗糙度范围都比尼古拉兹曲线的大很多，故具有更宽的实用范围。

例 5-10 已知：有一根使用了多年的无缝钢管，直径 0.2 米，输送密度为 900 公斤/米³的石油，质量流量为 90 吨/小时，其运动粘性系数冬季平均为 1.092×10^{-4} 米²/秒，夏季平均为 0.355×10^{-4} 米²/秒，管道长 3 000 米。求：冬季、夏季时管道的沿程损失各为多少？

解 体积流量为

$$Q = m/\rho = \frac{90\times1\,000}{3\,600\times900} = 0.027\,8 \text{米}^3/\text{秒}$$

平均速度为

$$V = Q/A = \frac{0.0278}{\frac{\pi}{4}0.2^2} = 0.885(\text{米/秒})$$

雷诺数为

冬季：$Re = \frac{Vd}{\nu} = \frac{0.885\times0.2}{1.092\times10^{-4}} = 1\,621$

夏季：$Re = \frac{Vd}{\nu} = \frac{0.885\times0.2}{0.355\times10^{-4}} = 4\,986$

可知冬季的流动是层流，而夏季的是湍流。查表 5-3，取该无缝钢管的粗糙度 $e = 0.2$ 毫米，因而相对粗糙度 $e/d = 0.000\,2/0.2 = 0.001$。查图 5-23，有

冬季，层流：　　$f = 0.039\,5$

夏季，湍流：　　$f = 0.037\,6$

相应冬季的水头损失为

$$\Delta h = f\frac{l}{d}\frac{V^2}{2g} = 0.0395 \times \frac{3\,000}{0.2} \times \frac{0.885^2}{2\times 9.807} = 23.7(\text{米})$$

相应夏季的损失按比例为

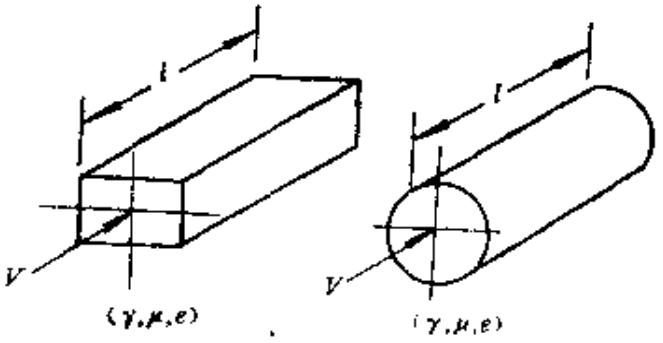
$$\Delta h = 23.7 \times \frac{0.0376}{0.0395} = 22.5(\text{米})$$

六、非圆管中的沿程损失——水力直径或半径

虽然工程实践中的大多数管道都采用圆形截面管道，但也有一些非圆形的，如方形、矩形、环形截面等。工程计算的经验指出，在湍流情况下，如果把非圆形的方形或高宽比不大3～4的矩形等的截面管道折合成一个当量圆管，则前面各段所有关于圆截面管道的沿程损失因子 f 的公式，都可以用来估算非圆管中的损失。当量直径或水力直径定义为

$$d_e = 4A/C$$

式中 A 为原管道的截面积，C 为截面周长。求解非圆形管道的沿程损失时，可用 d_e 代替圆管直径求雷诺数和相对粗糙度，因而可求得 f。然后，用 d_e 代替（5-32）或（5-33）式中的直径，即可求出水头或压强损失。所以能这样做的原因可解释如下：在



1管　　2管

图 5-24

湍流中，由于截面上的流速变化主要集中在邻近管壁的地区，由摩擦产生的机械能损失（转变为热量）也将集中在这里，因而可

认为损失是沿边界壁面分布的。设想有两个管道，一个为非圆形截面（如矩形）管道1，另一个为圆形截面管道2，如图5-24所示。两管除截面形状、面积不同外，其他几何参数和流体物理参数都相同。对于管道1，管道壁面单位面积引起的能量损失为

$$\Delta h_1 AV\gamma/lC$$

类似地，管道2，管道壁面单位面积引起的能量损失为

$$\Delta h_2\frac{1}{4}\pi d^2V\gamma/l\pi d=\Delta h_2\frac{1}{4}dV\gamma/l$$

若两个管道壁面单位面积引起的能量损失相同，则意味着两管近似地有相同的沿程损失因子，因而

$$\Delta h_1/\Delta h_2=\frac{d}{4}/\frac{A}{C}$$

若 $d=\frac{4A}{C}$，则两管的损失相同，即 $\Delta h_1=\Delta h_2$。圆管2成为非圆管1的当量管；或非圆管1的当量直径为 $d_e=\frac{4A}{C}$。

几种常见的非圆截面形状管道的水力直径见表5-1。

将非圆截面管道折合成直径 d_e 的当量圆管时，两管横截面积并不相等，在计算管道流量或速度等有关参数时仍应用原管道的横截面积。

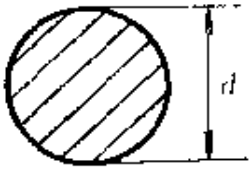
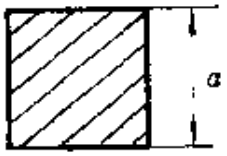
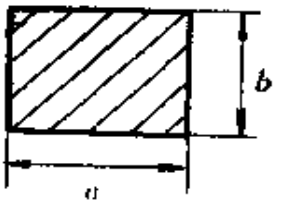
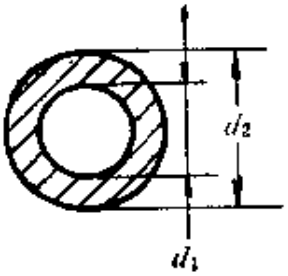
若截面形状与圆截面相差太远，如内外径十分接近时所构成的环形圆缝形，或长缝形、星形等，就不能采用当量直径的概念。另外，在层流情况，速度分布同湍流有很大的不同，能量损失并不像湍流那样主要集中在管壁附近的区域，因而当量直径的概念也不大适用。

工程计算中也有采用水力半径的，即

$$r_e=A/C \qquad (5\text{-}71)$$

显然 $r_e=\frac{1}{4}d_e$。若用水力半径计算时，应该用 $4r_e$ 代替圆管公式中的 d。

表 5-1　几种常见非圆截面管道的水力直径

横截面形状	水力直径 d_e
圆形 	d
方形 	a
长方形 	$\frac{2ab}{a+b}$
环形 	d_2-d_1

例 5-11　已知：空气压力为 101.3 千帕，温度 15℃，在边长 450 毫米和 300 毫米的光滑矩形管道中以 3 米/秒的平均速度流动。空气气体常数 $R=287$ 焦耳/公斤·开，粘性系数 $\mu=0.179\times10^{-4}$ 帕·秒。求：600 米长管道上的水头和压强损失？

解　空气密度为

$$\rho=\frac{p}{RT}=\frac{101\,300}{287\times288}=1.226(\text{公斤/米}^3)$$

水力直径按式（5-70）为

$$d_e = 4A/C = \frac{4\times 0.45\times 0.3}{0.45+0.3} = 0.36(\text{米})$$

雷诺数为

$$Re = \frac{\rho V d}{\mu} = \frac{1.226\times 3\times 0.36}{0.179\times 10^{-4}} = 73\,900$$

因为 $Re \gg 2\,100$，可按湍流光管管之布拉修斯公式（5-69）有

$$f = 0.316\,4/Re^{0.25} = 0.316\,4/73\,900^{0.25} = 0.0192$$

按式（5-32），（5-33），水头和压力损失分别为

$$\Delta h = 0.019\,2\times\frac{600}{0.36}+\frac{3^2}{2\times 9.807} = 14.7(\text{米})\quad(\text{空气柱})$$

$$\Delta p = 0.019\,2\times\frac{600}{0.36}\times\frac{1}{2}\times 1.226\times 3^2 = 176(\text{帕})$$

七、哈振-威廉斯公式

达西公式（5-32），（5-33）是分析和计算等截面定型管流沿程损失的基本公式，广泛应用于工程计算。但在工程实践中也还有不少计算管流损失的经验公式，它们的特点是使用比较简便，其中有名的是哈振-威廉斯公式。

管道中的平均速度可以表示为

$$V = 0.849 C_{hw} r_e^{0.63} S^{0.54} \qquad (5\text{-}72)$$

式中 r_e 为水力半径（米），S 为能量下降坡度，即单位长度上的

表 5-2　哈振-威廉斯系数 C_{hw}

材料和状态	C_{hw}
非常平直光滑的管道	140
光滑管道	130
光滑木质，光滑砖砌管道	120
新的铆接钢管，陶瓷管	110
旧铸铁管，普通砖砌管道	100
旧铆接钢管	95
恶劣条件下的旧铸铁管	60～80

水头损失（$\Delta h/l$）；C_{hw}为哈振-威廉斯系数，或称为光滑系数，几种材料和状态下的C_{hw}值见表5-2，V的单位为米/秒。

若采用水力直径d_e，在圆管情况$d_e=d$，则上式可改写成下列形式

$$S=RQ^m/d^n$$

式中R为阻力系数，有$R=10.70/C_{hw}^n$，Q为体积流量，而$m=4.871$，$n=1.85$。

若将式（5-72）改写成类似达西公式的形式，则有

$$\Delta h=\left(\frac{133.5}{C_{hw}^{1.85}v^{0.15}d^{0.015}Re^{0.15}}\right)\frac{l}{d}\ \frac{V^2}{2g}$$

因而沿程损失因子f为

$$f=133.5/(C_{hw}^{1.85}v^{0.15}d^{0.015}Re^{0.15})$$

若用于常温下的水，$v=1.0\times10^{-6}$米/秒，则

$$f=1\ 060/(C_{hw}^{1.85}d^{0.015}Re^{0.15})$$

使用哈振-威廉斯公式的优点在于：①粗糙度的度量是以系数形式表示的，直接取决于管道的材料和状态；②公式直接反应了雷诺数的影响；③粗糙度以及其他因素对速度的影响可直接给出，见式（5-72）。其不足是：①属经验公式；②使用范围有限，不能用于各种状态下的各种流体，一般多用于水。

例5-12 已知：水流量为5.68升/秒，通过直径75毫米的非常平直的光滑管。求：按哈根-威廉斯公式计算914.4米长度上的水头损失。

解 能量下降坡度为（按表5-2，取$C_{hw}=140$）

$$S=RQ^m/d^n$$

$$=\frac{10.70}{140^{1.85}}\cdot(5.68\times0.001)^{1.85}/(0.075)^{4.871}$$

$$=0.024\ 22$$

914.4米上的水头损失为

$$\Delta h=Sl=0.024\ 22\times914.4=22.15(米)$$

八、求解圆管中流动沿程损失因子 f 的步骤综述

工程中求解等截面圆形管流的重要内容是确定沿程损失因子 f，以便求得水头或压力损失。前面所叙述的内容实际上已经解决了这个问题。为了使用方便，这里予以综述，并补充了一些工程上常用的数据和经验公式。在求解 f 时，首先要确定管道的粗糙度和流动的雷诺数，判明流动属于哪个流动区，然后再选用合适的公式。下面分两步说明。

1．确定管壁粗糙度

常见的金属材料管道的粗糙度见表 5-3，非金属材料管道的粗糙度见表 5-4，这些都是指绝对的当量或平均粗糙元高度。

表 5-3　金属管道的粗糙度　　单位：毫米

管道材料	质量状况	粗糙度
铜、铅等有色金属	新的，质量合格	0.0001～0.01
无缝钢管	新的，干净的	0.015
	使用几年后	0.1～0.2
焊接钢管	新的，干净的	0.06
	已净化，稍有锈蚀	0.15
	中等程度生锈	0.5
	严重生锈，并有积垢	1～3
镀锌钢管	新的，精镀	0.07～0.1
	普通	0.1～0.15
铆接钢管	普通铆接	0.5～1.2
	加强铆接	2～4
	不均匀搭接，加工条件不佳	＞5
铸　　铁	新的，镀沥青	0.12
	新的	0.3
	旧的，使用过的	1～3
镀锌铁管	新的，干净的	0.15
	使用几年后	0.5

表 5-4　非金属管道的粗糙度　　单位：毫米

管道材料及质量状况	粗 糙 度
玻璃管(干净的)	0.0015～0.01
橡皮软管	0.01～0.03
陶土排水管	0.45～6
砖砌风道(表面光洁)	4
混凝土管道(表面比较光滑)	0.3～2.5
木管道	0.15～1
塑料板风道	0.01
石棉水泥管(新的，或中等状况)	0.05～0.06

2．各个流动区的雷诺数界限及相应计算 f 的公式

（1）层流区，其雷诺数界限为

$$Re<2\,100$$

计算 f 的公式为

$$f=64/Re \tag{5-69}$$

（2）转捩区

流动处于过渡状态，随时有可能从层流转捩为湍流，f 基本上是雷诺数的函数，与粗糙度无关。其雷诺数界限为

$$Re=2\,100\sim4\,000$$

计算 f 可用扎依琴柯公式为

$$f=0.002\,5\sqrt[3]{Re} \tag{5-73}$$

或者直接查图 5-23 或图 5-22。

（3）湍流光滑管流动区，其雷诺数界限为

$$Re=4\,000\sim Re_1$$

这里 Re_1 为湍流光滑管的上限雷诺数，其值与粗糙度有关。对于人工均匀粗糙度，前面已推导，应有 $\frac{e}{d}Re\sqrt{\lambda}\leqslant 10$，如用式（5-69）计算其中的 f，则可以导出

$$Re_1=26.9(d/e)^{8/7}$$

若 $Re_1<4\,000$，则表明不存在湍流光滑管流动区。

对于一般工业用管道，Re_1的值很小，为

$$Re_1=1.6\left(\frac{d}{e}\right)^{8/7}$$

对应 $Re_1=4\,000$ 的 e/d 值为 0.001，即相当粗糙度大于 0.001 时，实际上不存在湍流光滑管流动区。

湍流光滑管 f 的计算公式有如下一些：

普兰特-卡门公式

$$\frac{1}{\sqrt{f}}=2.0\log\left(Re\sqrt{f}\right)-0.80 \qquad (5\text{-}56)$$

布拉修斯公式

$$f=0.316\,4/Re^{0.25} \qquad (Re<10^5) \qquad (5\text{-}69)$$

尼古拉兹公式

$$f=0.003\,2+0.221/Re^{0.237} \qquad (Re=10^5\sim10^7) \qquad (5\text{-}74)$$

（4）从湍流光滑管到粗糙管的过渡区，雷诺数界限为

$$Re=Re_1\sim Re_2$$

这里 Re_2 为粗糙管下限雷诺数。无论是人工均匀粗糙度，还是工业用管道内壁的粗糙度，进入湍流粗糙管区的 $\frac{e}{d}Re\sqrt{f}$ 值都是 200，以式(5-60)计算 f 有

$$Re_2=200\frac{d}{e}\left(1.14+2.0\log\frac{d}{e}\right)$$

对于人工均匀粗糙管，过渡区内没有合适的求解 f 的公式，必要时只能查图 5-22 的尼古拉兹实验曲线。对于一般工业用管道，可以查图5-23的莫迪图，也可以用以下各式：

柯尔布鲁克公式

$$\frac{1}{\sqrt{f}}=1.14-2\log\left(1+\frac{9.28}{\frac{e}{d}Re\sqrt{f}}\right)-2\log\left(\frac{e}{d}\right) \qquad (5\text{-}63)$$

莫迪公式

$$f = 0.005\,5\left[1 + \left[20\,000\left(\frac{e}{d}\right) + \frac{10^6}{Re}\right]^{\frac{1}{3}}\right] \qquad (5\text{-}75)$$

阿里特苏里公式

$$f = 0.11\left(\frac{e}{d} + \frac{68}{Re}\right)^{0.25} \qquad (5\text{-}76)$$

或者，也可用下列公式，而且与式（5-63）相比，仅具有很小的误差：

$$f = 1.325/\left[\ln\left(\frac{l}{3.7d} + 5.74Re^{-0.9}\right)\right]^2 \qquad (5\text{-}77)$$

适用范围：$\frac{e}{d} = 10^{-2} \sim 10^{-6}$，$Re = 5\,000 \sim 10^8$

上述各个适用于过渡区的公式，实际上都可延伸到湍流粗糙管区内使用，当 $Re \to \infty$ 时，(5-63)式变为(5-60)式；(5-75)和(5-76)式分别变为(5-78a)和(5-78b)式。

（5）湍流粗糙管流动区，其雷诺数界限为

$$Re > Re_2$$

有以下一些计算 f 的公式：

尼古拉兹公式

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1.14 + 2.0\log\frac{d}{e} \qquad (5\text{-}60)$$

莫迪公式

$$f = 0.0055 + 0.15\left(\frac{e}{d}\right)^{1/3} \qquad (5\text{-}78a)$$

希弗林公式

$$f = 0.11\left(\frac{e}{d}\right)^{0.25} \qquad (5\text{-}78b)$$

§5-6 低速管流的局部损失

低速管流中由于管道截面发生明显变化，管轴线转弯，或流

体流过孔板、阀门、管嘴等部件，亦将产生能量损失，但它的发生和影响仅局限在某一部件的附近范围内，故称为局部损失。对于一个长距离的流体输送系统，其主要组成部分是等截面管道，产生局部损失的部件一般不会很多，因而局部损失在总损失中所占比例并不大，常可以忽略。反之，如果流体输送管道并不很长，而产生局部损失的部件又较多，则局部损失不仅不能忽略不计，而且是总损失中的主要部分，必须仔细考虑。

局部损失的产生是由于流动受到了突然的强扰动，流动的速度在大小和方向上都有急剧变化的结果。当流动发生急剧减速时，必将出现分离，产生大尺度的分离旋涡；在分离旋涡的生成，脱离以及破碎、衰减的周而复始过程中，来自主流的机械能将不断地转变为热能而耗散。如图 5-25 所示，直管道中的流动受到了②截面上的一个突出物的强扰动后所产生的现象，正是这种情况。实际上，突出物的扰动在上游的①截面就开始了。突出物上游沿壁面也会有局部分离产生，这是因为靠近壁面的局部区域中有逆压梯

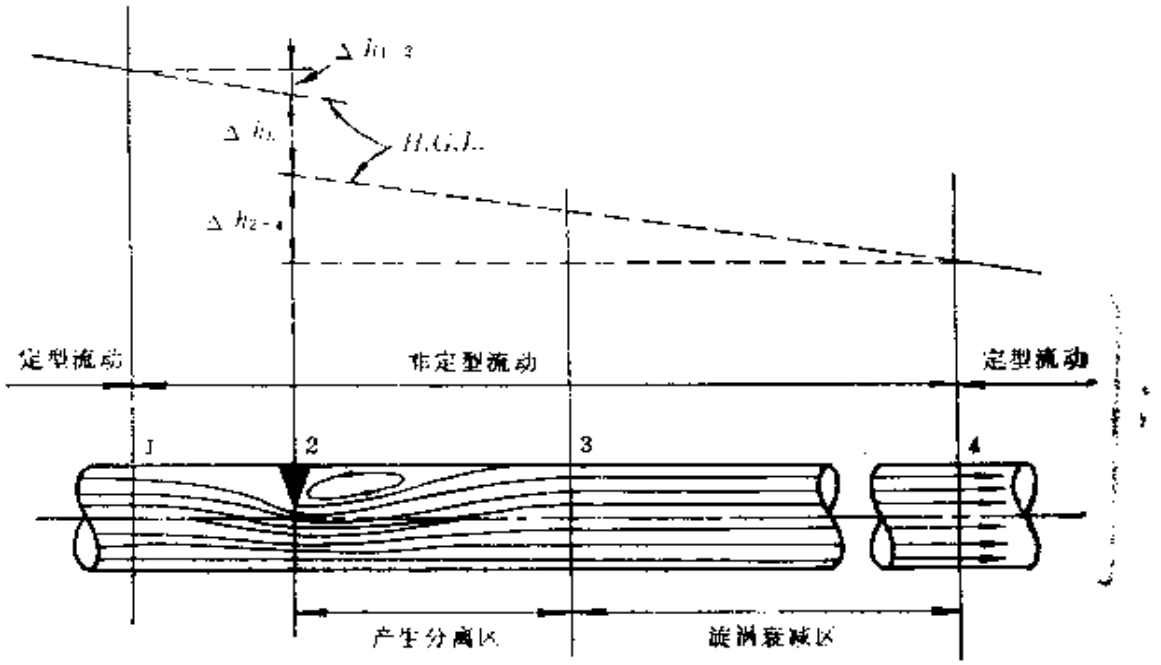


图 5-25

度作用的缘故。但上游分离的强度和能量损失相比下游的要小得多。从①截面经②截面直到④截面，都是突出物扰动的影响范围（当然，从理论上讲影响范围要大很多）。在①截面的上游和④截面的下游是定型流动区。在①～④截面之间则是非定型流动区；尤其在②～③截面之间，是分离旋涡发生区，流动比较复杂；既有大尺度分离旋涡引起的分离损失，即局部损失（这是主要部分），同时也有粘性摩擦应力等原因引起的沿程损失。为了工程上计算的方便，假定这两种能量损失可以分开来计算，然后再迭加。沿程损失仍按原来没有突出物的管道情况来计算，如图5-25所示。突出物引起的分离损失，即局部损失，则认为是在②截面上突然发生的，因而能量坡度线在这里有突降。总的损失是沿程损失与局部损失两者之和。即

$$\Delta h = \Delta h_{1-2} + \Delta h_L + \Delta h_{2-4} = \Delta h_{1-4} + \Delta h_L$$

式中 Δh_L 为局部损失。

局部损失一般是在湍流情况下发生的。即使流动本来是层流，经过很强的扰动后，流动也会转变为湍流。因而损失将与速度的平方成正比，其比例系数即为局部损失因子。因而局部损失可表示为

$$\Delta h_L = \zeta \frac{V^2}{2g} \tag{5-79}$$

或

$$\Delta p_L = \zeta \frac{1}{2} \rho V^2 \tag{5-80}$$

ζ 即为局部损失因子（也有称为局部损失系数的）。其值主要取决于产生局部损失装置的几何特性，也受雷诺数和粗糙度的影响。当雷诺数减小或粗糙度增加时，ζ 将有所增加。但这两者的影响都不太大，除非它们有很大的变化时才需要考虑。因而，对于一个具体的装置而言，在高雷诺数下，ζ 一般是一个常数。当局部损失装置上下游的速度有变化时（如突然扩张管道），要注

意 ζ 用的是哪个参考速度给出的。管道系统中几种常见的局部损失情况现分别叙述如下：

一、突然扩张

突然扩张管道中的流动情况和相应的 $E.G.L.$ 和 $H.G.L.$ 如图 5-26 所示，。流体流过突然扩张管道截面、速度急剧减小时流动将产生分离。在分离区内，分离旋涡的衰减和阻尼过程可能要延续到 50 倍直径以上的长度以后才能恢复为定型流动状态。初步分析时可以认为突然扩张截面上游的流动没有受到扰动，而流到下游②截面上，流动已恢复为定型流动。因而突然扩张引起的水头损失为

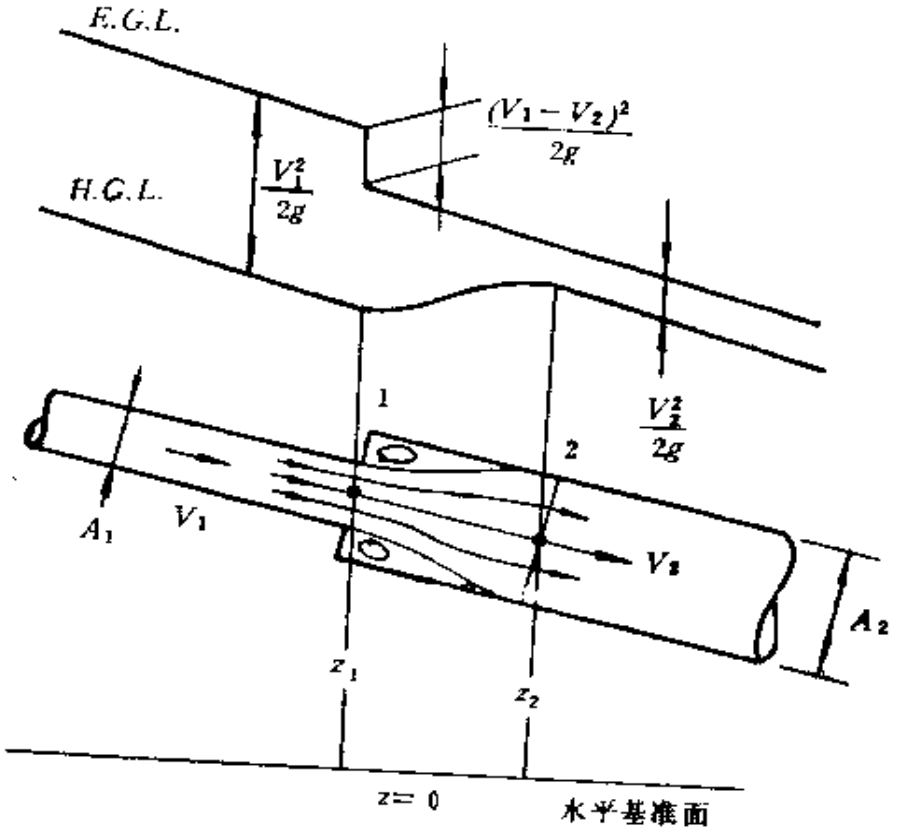


图 5-26

$$\Delta h_L=\left(z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_1 V_1^2}{2g}\right)-\left(z_2-\frac{p_2}{\gamma}+\frac{\alpha_2 V_2^2}{2g}\right)$$

假定 $\alpha_1=\alpha_2=1$，并取由①、②截面和管道内壁面所围成的空间作为控制体，应用动量方程有

$$p_1A_2-p_2A_2+\gamma A_2 l\cos\theta=\frac{\gamma}{g}Q(\beta_2V_2-\beta_1V_1)$$

动量修正因子 β_1、β_2 可假定都为 1。在①截面上，主流的静压为 p_1。分离区内部的压力基本上是不变的，可认为其压力也是 p_1。所以，作用在①截面上的压力合力为 p_1A_2。作用在②截面上的压力合力为 p_2A_2。控制体侧壁上虽有摩擦力，但根据前面的假定，已在沿程损失中计及，计算局部损失时可不再考虑；或者说，这部分摩擦力并不大，可近似忽略不计。流体重力与流动方向之间的夹角为 θ，$\gamma A_2 l\cos\theta=\gamma A_2(z_1-z_2)$。将 $Q=V_2A_2$ 代入，消去 A_2 后，有

$$(z_1+p_1/\gamma)-(z_2-p_2/\gamma)=\frac{V_2}{g}(V_2-V_1)$$

代入局部损失 Δh_L 的表达式中得到

$$\Delta h_L=\frac{(V_1-V_2)^2}{2g} \tag{5-81}$$

由此可见，经过突然扩张的局部损失等于上下游速度差所对应的速度头。参看式（5-79）或式（5-80）可有两种写法：

$$\Delta h_L=\zeta_1\frac{V_1^2}{2g}\qquad 或\ \Delta h_L=\zeta_2\frac{V_2^2}{2g} \tag{5-82a}$$

$$\Delta p_L=\zeta_1\frac{1}{2}\rho V_1^2\qquad 或\Delta p_L=\zeta_2\frac{1}{2}\rho V_2^2 \tag{5-82b}$$

显然，由于 $V_2/V_1=A_1/A_2$，故局部损失因子为

$$\zeta_1=(1-A_1/A_2)^2 \tag{5-83a}$$

$$\zeta_2=(A_2/A_1-1)^2 \tag{5-83b}$$

用 V_1 作参考速度，局部损失因子用 ζ_1 表示；如用 V_2 作参考速度，则用 ζ_2 表示局部损失因子。ζ 是随上下游面积比大小而改变的。面积比越大，则 ζ 值越大。当流体经管道流入一个很大或可以认为是无限大的容器，例如从管道向水池中供水，或向大气

中排气都是突然扩张的极限情况，此时可以认为 $A_1/A_2=0$，因而 $\zeta_1=1$。在这种情况下又称为出口损失。出口损失因子等于1，表示流体从管道中排出后，其动能将全部损失掉。

二、逐渐扩张

管道逐渐扩张时，构成了一个扩散段。沿扩散段流动时，由于速度逐渐降低而压力逐渐升高，故又称为扩压段。§5-3节已经简单讨论了锥形扩散段中的流动现象。其几何形状如图5-27所示，取决于面积比（又称扩散比）A_2/A_1 和锥形扩张角 θ 参数。在计算扩散段中的流动损失时，总是把摩擦或沿程损失也包括在内连同局部损失一起算。图5-27给出了锥形扩散段损失系数 ζ 的实验曲线，ζ 采用的速度头是上下游速差所对应的速度头，即

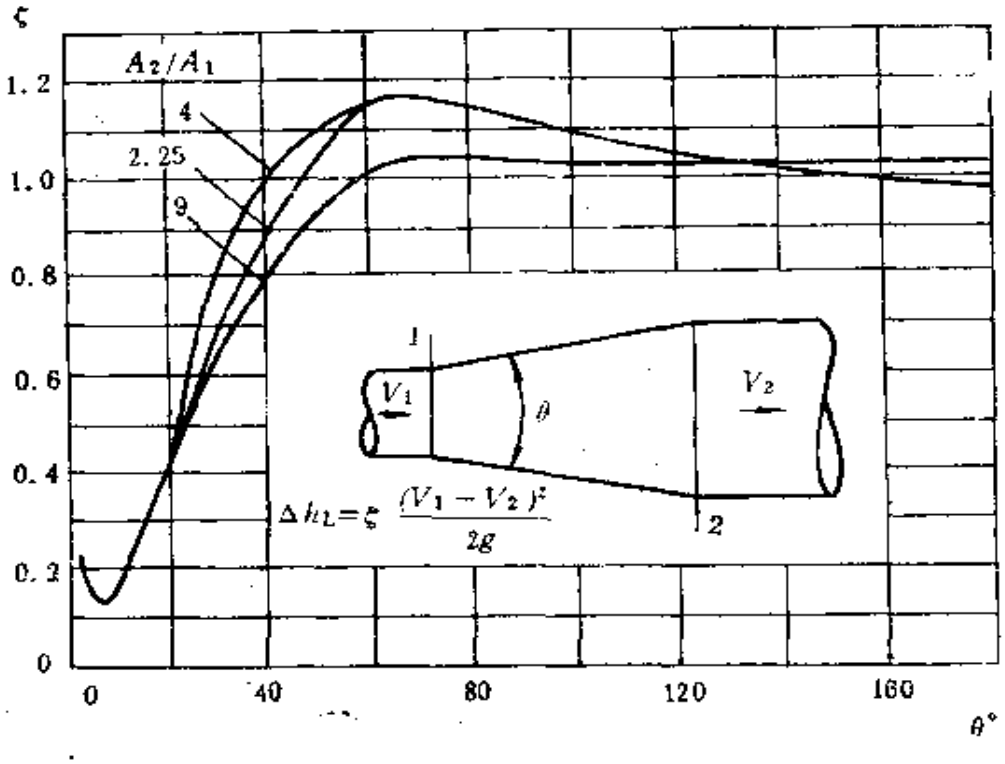


图 5-27

$$\Delta h_L=\zeta\frac{(V_1-V_2)^2}{2g} \tag{5-84}$$

$$\Delta p_L = \zeta \frac{1}{2} \rho (V_1 - V_2)^2 \qquad (5\text{-}85)$$

显然，当 $\zeta = 1$ 时，相当于突然扩张的损失。ζ 主要取决于锥形扩张角 θ，但也和面积比 $\frac{A_2}{A_1}$ 有关。在小 θ 下，ζ 几乎完全来自摩擦损失。但在大 θ 下，ζ 主要来自分离损失，而摩擦损失仅占很小的一部分。从图 5-27 可以看出，大约 $\theta = 7°$ 左右，总损失最小，成为最佳的锥形扩张角。值得注意的是，当 $\theta > 60°$ 时，总损失比突然扩张时的损失还要大，即 $\zeta > 1$，因而在此种情况下不如选用突然扩张管道更合适。

扩散段的损失也可用工程估算方法计算。比如可用达西公式（5-32）计算扩散段中一微段的沿程损失为

$$\mathrm{d}(\Delta h_1) = f \frac{\mathrm{d}l}{d} \frac{V^2}{2g}$$

$\mathrm{d}l$ 为直径 d 处的微段长，V、f 为当地平均速度和沿程损失因子，由于 $\mathrm{d}l = \mathrm{d}r / \sin\frac{\theta}{2}$，$V = V_1\left(\frac{d_1}{d}\right)^2$，代入上式并假定 f 可以取一平均值 f_m（为常数），从 d_1 至 d_2 积分，得全段沿程损失为

$$\Delta h_1 = \frac{f_m}{8\sin\frac{\theta}{2}}\left(1 - \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2\right)\frac{V_1^2}{2g}$$

因而由于沿程损失引起损失因子 ζ_1' 记为

$$\zeta_1' = \frac{f_m}{8\sin\frac{\theta}{2}}\left(1 - \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2\right)$$

扩散段分离[或虽未分离，但边界层增厚所引起的]损失可以按突然扩张的局部损失[按式(5-82)]给以适当修正而得到（式中 K 为修正系数）

$$\Delta h_2 = K\left(\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\right)^{1.25}\left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \frac{V_1^2}{2g}$$

因而损失因子 ζ_2 为

$$\zeta_2 = K\left(\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\right)^{1.25}\left(1-\frac{A_1}{A_2}\right)^2$$

总的损失为

$$\Delta h_L = \left\{\frac{f_m}{8\sin\frac{\theta}{2}}\left[1-\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2\right] + K\left(\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\right)^{1.25} \times\left(1-\frac{A_1}{A_2}\right)^2\right\} V_1^2/2g \qquad (5\text{-}86)$$

或

$$\Delta p_L = \left\{\frac{f_m}{8\sin\frac{\theta}{2}}[1-A_1/A_2)^2] + K\left(\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\right)^{1.25} \times\left(1-\frac{A_1}{A_2}\right)^2\right\}\frac{1}{2}\rho V_1^2 \qquad (5\text{-}87)$$

而扩散段总的损失因子为

$$\zeta = \zeta_1' + \zeta_2$$

在 $\theta = 10^\circ \sim 40^\circ$ 范围，对于锥形圆管取 $K = 4.8$；对于方形锥管取 $K = 9.4$。在 $\theta < 10^\circ$ 时，ζ_2 可忽略。

例 5-12　已知：直径为 0.305 米的水管，经 $\theta = 20^\circ$ 锥形管增大到直径 0.61 米；管内体积流量为 0.283 2 米^3/秒。锥管进口处压力为 1.38×10^6 帕。水的重度 $\gamma = 980\,7$ 牛/米^3。求：扩散段出口压力。

解　进口截面上的速度为

$$V_1 = Q/A_1 = \frac{0.283\,2}{\frac{\pi}{4}(0.305)^2} = 3.88(\text{米/秒})$$

出口截面上的速度为

$$V_2 = \frac{0.283\,2}{\frac{\pi}{4}(0.61)^2} = 0.97(\text{米/秒})$$

查图 5-27 之曲线，得 $\zeta = 0.43$，因而水头损失为

$$\Delta h_L = \zeta\frac{(V_1-V_2)^2}{2g} = 0.43\times\frac{(3.88-0.97)^2}{2\times 9.807}$$

$$= 0.186(\text{米})$$

根据能量方程有

$$p_2/\gamma = p_1/\gamma + \frac{V_1^2}{2g} - \frac{V_2^2}{2g} - \Delta h_L$$

$$= \frac{1.38\times 10^5}{9\,807} + \frac{3.88^2}{2\times 9.807} - \frac{0.97^2}{2\times 9.807}$$

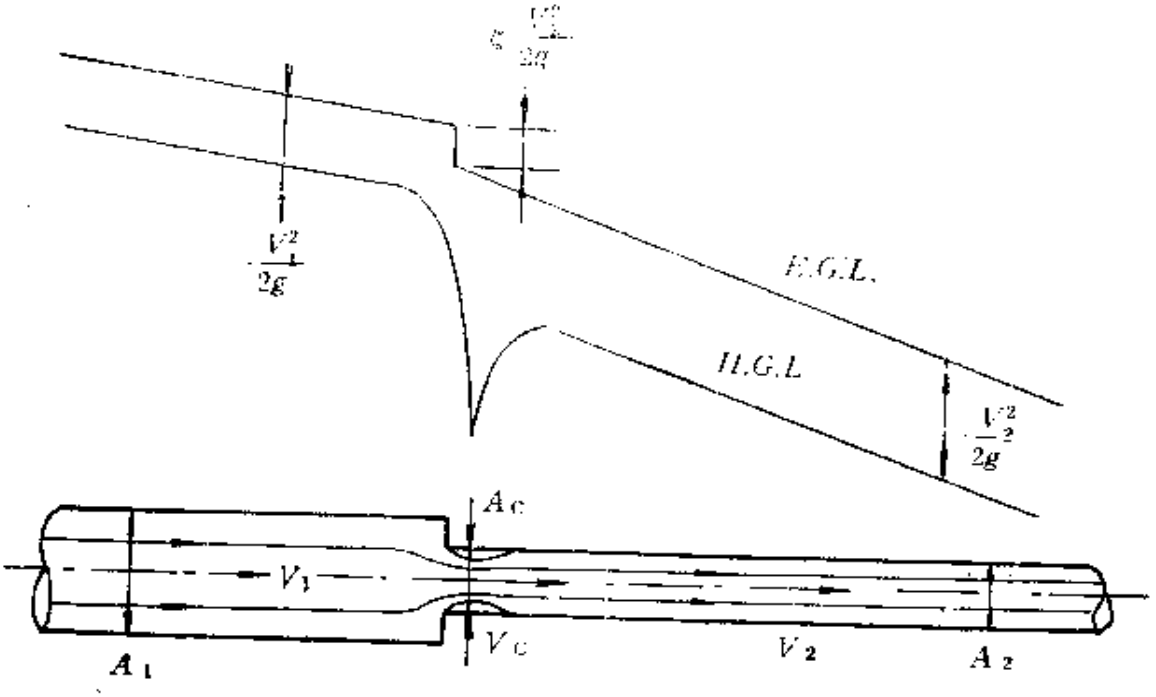
$$- 0.186 = 14.61(\text{米})$$

因而

$$p_2 = 1.43\times 10^5(\text{帕})$$

三、突然收缩

通过突然收缩管道的流动和相应的能量、水力坡度线如图5-28所示，在管道突然收缩截面的下游，主流流管截面将收缩，这



最小收缩截面

图 5-28

是由于流体运动过程中的惯性作用所致。然后，流管扩张，流速减小，直到主流重新充满全管为止。突然收缩截面的上下游都会出现分离，但主要是下游的分离。如前所述，可以假定突然收缩的损失也是突然发生的。其局部损失因子经常以下游截面A_2上的速度为参考速度，即

$$\Delta h_L = \zeta_2 \frac{V_2^2}{2g} \tag{5-88}$$

或

$$\Delta p_L = \zeta_2 \frac{1}{2} \rho V_2^2 \tag{5-89}$$

ζ_2的值可查阅表5-5。在表中同时给出了突然收缩流动中的流管收缩系数C_c，$C_c = A_c/A_2$，A_c为主流流管的最小收缩截面积。

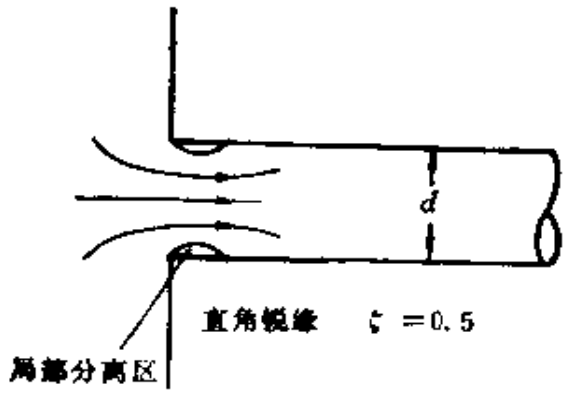
表 5-5　突然收缩的收缩系数和损失因子

A_2/A_1	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
C_c	0.617	0.624	0.632	0.643	0.659	0.681	0.712	0.755	0.813	0.892	1.0
ζ_2	0.50	0.46	0.41	0.36	0.30	0.24	0.18	0.12	0.06	0.02	0

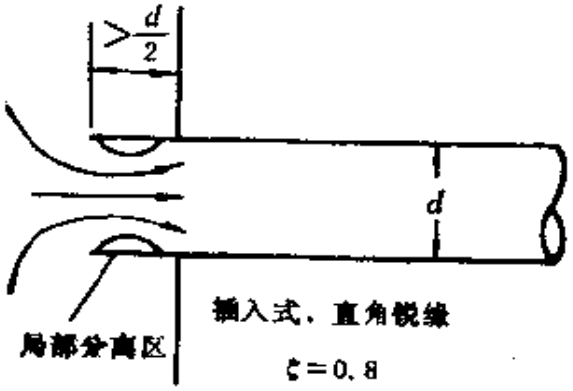
或者，ζ_2也可按如下经验公式计算

$$\zeta_2 = 0.5(1 - A_2/A_1) \tag{5-90}$$

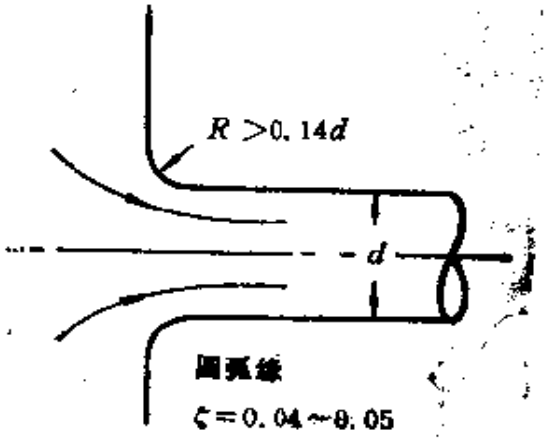
当$A_2/A_1 = 0$时，意味着流体从一个很大的容器中流入一直角锐缘的管道，因而其损失称为入口损失。表5-5和式（5-90）都指出$\zeta = 0.5$。若改变入口形状，ζ_2的值也将改变。图5-29给出了几种不同入口形状及相应的局部损失因子。采用图5-29(a)所示直角锐缘入口，$\zeta = 0.5$；如采用图5-29(b)所示插入式入口形状，由于局部收缩和分离加剧，ζ可高达0.8左右；但如采用图5-29(c)所示圆弧形或流线形的入口形状，流束的收缩现象和局部分离现象均消失，使局部损失因子大大减小，这是十分有利



(a)



(b)



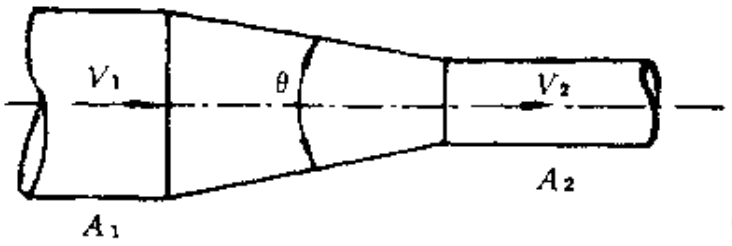
(c)

图 5-29

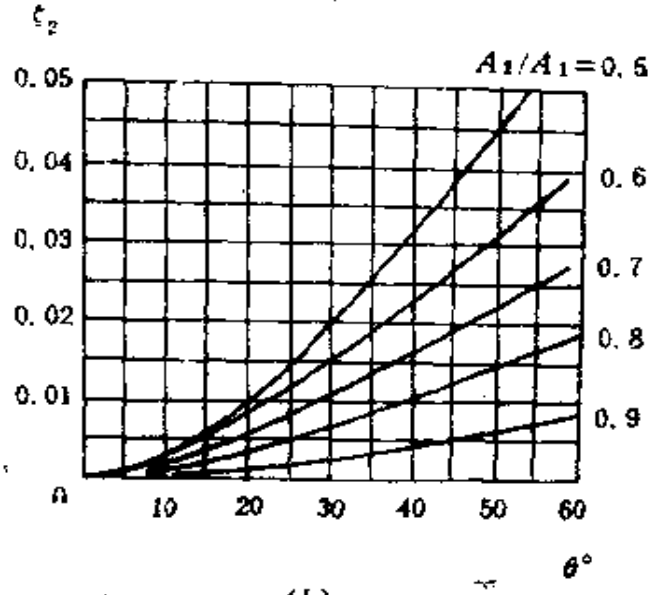
的。

四、逐渐收缩

锥形收缩管道如图 5-30(a)，几何形状由面积比 A_1/A_2 和锥形收缩角 θ 所确定。其损失因子用的参考速度是出口速度 V_2。即相同于式（5-88）和（5-89）。一般 ζ_2 中都包括了沿程和局部损失两部分。ζ_2 的大小可查阅图 5-30(b)。很多情况下，由于 ζ_2 的值比较小，在工程计算中常可忽略不计。



(a)



(b)

图 5-30

五、弯　头

在§5-3节中讨论过有关流体在管道转弯时会出现二次流及

其相应损失的问题。实际上，除了二次流以外，只要转弯并不是十分缓慢的，一般还会出现分离现象。在大直径管道系统中，限于场地及管道材料消耗等原因，很难做到相当缓慢的转弯。因此，当流体流过弯头时，在弯头的外侧壁面以及在下游的内侧壁面上，都会出现分离而造成能量损失。对于壁面光滑的弯头，水头损失包括分离、壁面摩擦和二次流所产生的损失。对于转弯曲率半径相对比较大的管道，损失主要来自摩擦；而曲率半径相对比较小的，则损失主要是分离和二次流所产生的。弯头的水头或压强损失仍表示为式（5-79）或（5-80）的形式。对于圆截面光滑壁面的弯头，图 5-31 给出了损失因子 ζ 的实验结果。在一定雷诺数下，ζ 取决于转弯角 θ 和相对转弯半径 R/d 的大小。大型管道如风洞、水洞等，经常采用 R/d 接近零或等于零的弯头。这样的弯头称为斜接弯头，其 ζ 值大约是 1.1，如图 5-32(a) 所示。在这种情况下，为减小气流分离和二次流动损失和改进流动

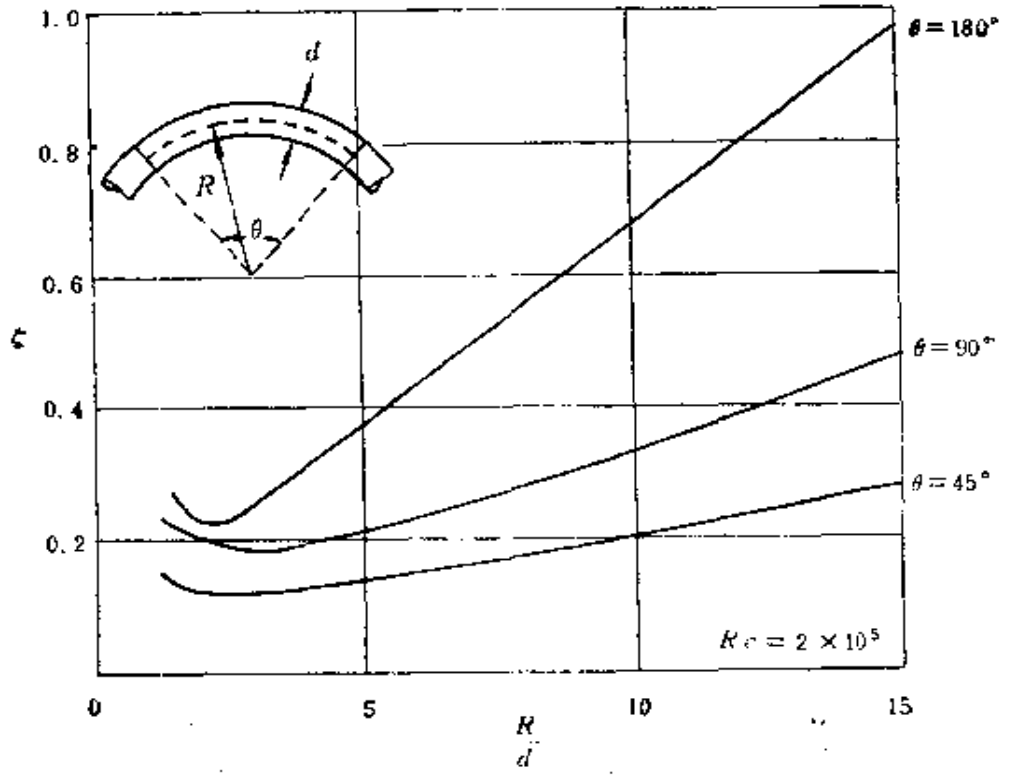


图 5-31

品质，常安装拐角导流片，如图 5-32(*b*) 所示。事实证明这是十分有效的手段。

在管道系统中，还有很多如阀门、接头和连通件等，它们都将产生局部损失；在高雷诺数下，局部损失因子 ζ 都主要取决于零件的几何特性而等于常数。使用中可查阅有关设计计算手册，这里不再一一列举。

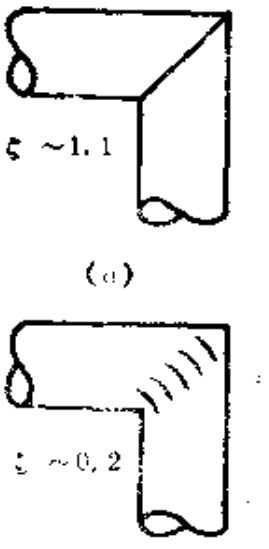


图 5-32

§5-7 管路和管路系统的流动阻力计算

各种管路及管路系统中的流动问题，都可以根据质量、动量和能量等方程求解。其中涉及到的沿程或局部流动阻力（损失），可以分别按各种公式计算。在求解过程中，沿管路绘制出能量坡度线（$E.G.L$）和水力坡度线（$H.G.L$），可以清楚地显示出流动过程中机械能量的变化情况，这对于求解结果和分析结果都是十分有帮助的。

求解的工程管流问题，一般可以划分为以下三类。第一类问题是给定流体属性、流量和管道系统几何特性（如管道长度、直径、管壁材料及粗糙度、各种接头、阀门等等），计算总水头损失或压力损失，以便根据需用功率选配输送流体用的流体机械（如泵和风机等）。第二类问题是给定总水头或压力损失，在已知流体属性、管路系统几何特性的情况下计算流量，看是否满足需要。第三类问题是根据给定的总水头损失和流量的要求，在已知流体属性的条件下，设计或确定管道的直径或其他尺寸。

上述三类问题中，第一类问题可直接求解。第二、三类问题问题一般需要迭代求解，这是因为损失因子 f 和 ζ 取决于雷诺数，而雷诺数又取决于流量和直径，但后者尚是待求的。但在高

雷诺数情况下，由于 f 和 ζ 都趋向于与雷诺数无关，因而有时可不必迭代，这样就简化了求解过程。

一、简单管路

直径不变且流量也不变的一段管路称为简单管路。简单管路是构成管路系统的基本元件。一个管路系统可以分解为许多简单管路，因而简单管路的计算是基础。设有管长为 l，管径为 d 的一简单管路中有许多产生局部损失的部件，它们的损失因子分别为 $\zeta_1, \zeta_2, \cdots$；而沿程损失因子为 f，则总水头损失为

$$\Delta h = \left(f\frac{l}{d} + \Sigma\zeta \right)\frac{V^2}{2g}$$

对于圆管，流量 $Q = V\frac{\pi}{4}d^2$，代入上式有

$$\Delta h = \left(\frac{8\left(f\frac{l}{d} + \Sigma\zeta \right)}{\pi^2 d^4 g}\right)Q^2 \qquad (5\text{-}91)$$

若不计 f、ζ 随雷诺数变化而变化的因素，并定义

$$S_h = \frac{8\left(f\frac{l}{d} + \Sigma\zeta \right)}{\pi^2 d^4 g} \qquad (5\text{-}92)$$

则 S_h 为一常数。于是式（5-91）就变成式（5-93）：

$$\Delta h = S_h Q^2 \qquad (5\text{-}93)$$

S_h 称为管路的水头阻抗，单位为秒^2/米^5，在给定管路几何特性下是个常数。显然，在给定总水头损失 Δh 时，阻抗越大则流量越小。类似地，压力损失可以表示为

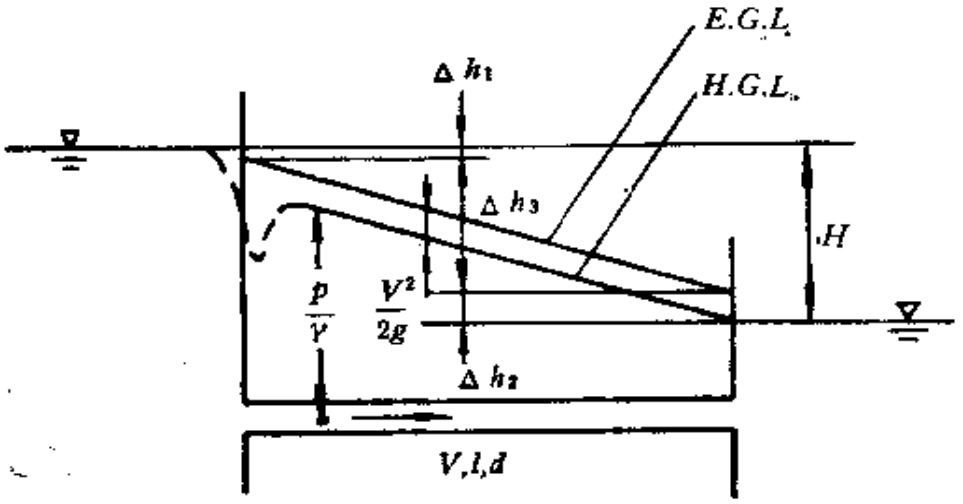
$$\Delta p = S_p Q^2 \qquad (5\text{-}94)$$

S_p 为压力阻抗，定义为

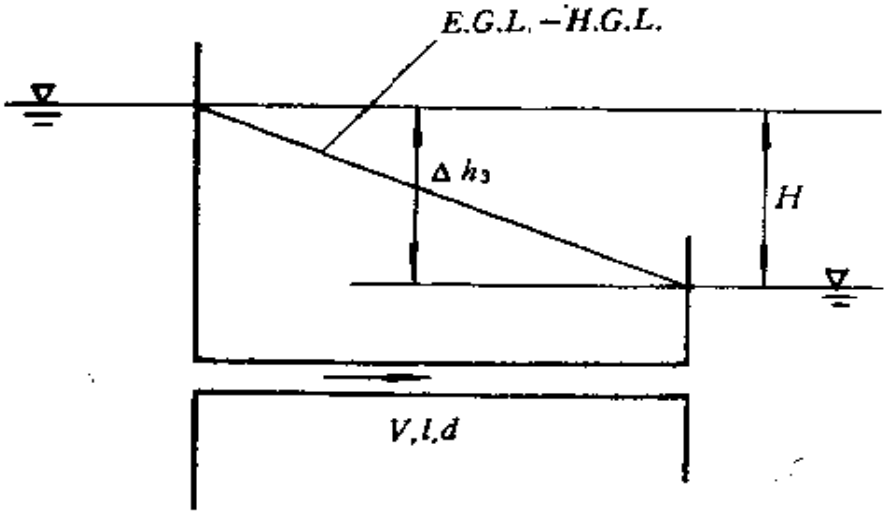
$$S_p = \frac{8\rho\left(f\frac{l}{d} + \Sigma\zeta \right)}{\pi^2 d^4} \qquad (5\text{-}95)$$

其单位为公斤/米^7。

设两个水池或水箱的自由面高度差为 H，如图 5-33 所示，中间有一直管道相通，求管中流量 Q 的大小。能量坡度线和水力坡度线已画在图上（压力均取表压）。在管道入口，有一个集中的入口损失，能量坡度线将突然下降 Δh_1 高度。由于入口处流管出现收缩，流速增加水力坡度线会下降很多；然后随着流速减



(a)



(b)

图 5-33

小，水力坡度线回升；并逐渐与能量坡度线平行，其间仅相差一个管内定型流动速度头（$V^2/2g$）的高度。在管道出口，由于出口的速度将全部损失，因而水力坡度线应终止于自由面。而能量坡度线在这里也有一个突然下降，并用高度Δh_2表示出口局部损失大小。沿程损失导致能量坡度线下降高度为Δh_3。按式(5-92)和（5-93）有

$$S_h = \frac{8\left(f\frac{l}{d} + \Sigma\zeta\right)}{\pi^2 d^4 g}$$

和

$$Q = \sqrt{\Delta h / S_h} = \sqrt{H/S_h}, \qquad \Delta h = \Delta h_1 + \Delta h_2 + \Delta h_3 = H$$

设入、出口损失因子分别为0.5和1，设f为0.03，若l/d分别为100，1 000和10 000，则可以计算$S_h d^4$分别为0.372，2.604和24.92，若忽略局部损失，则相应$S_h d^4$分别为0.248，2.480和24.80，由此而引起的流量误差分别为15%，2%和0.2%。由此可见，当l/d不断增加时，局部损失所占的比重越来越小，以至于可以忽略，因而

$$S_h \approx \frac{8f\left(\frac{l}{d}\right)}{\pi^2 d^4 g}$$

这时计算将更为简单。又，随着l/d增加，速度将越来越小，以至于速度头也可忽略，则水力坡度线与能量坡度线将重合，如图5-33(b)。这对于初步分析与估算管流特性很有帮助，此时总水头损失为

$$\Delta h = f\frac{l}{d}\frac{V^2}{2g} = H$$

例5-13 已知：两个贮水池中间用长300米，直径为0.3米的铸铁管道连接，两个水池自由面标高分别为75米和60米。若水的温度为10°C，其运动粘性系数$\nu = 1.306\times10^{-6}$米^2/秒。且管道入、出口都是直角锐缘口。求：管道中的流量；若忽略局部

损失，流量又为多少。

解　查表 5-3，对于铸铁材料，可取粗糙度 $e=0.5$毫米。先假定是粗糙管流动，按式（5-60），有

$$f=1/(2.0\log(d/e)+1.14)^2=0.022$$

管路阻抗按式（5-92）有

$$S_h=\frac{8\left(f\frac{l}{d}+\Sigma\zeta\right)}{\pi^2d^4g}=239.8(\text{秒}^2/\text{米}^5)$$

其中 $\Sigma\zeta=0.5+1.0=1.5$。由式（5-93），流量为

$$Q=\sqrt{H/S_h}=\sqrt{15/239.8}=0.250(\text{米}^3/\text{秒})$$

若忽略局部损失，则相应 S_h 和 Q 为

$$S_h=224.5(\text{秒}^2/\text{米}^5)$$

$$Q=0.258(\text{米}^3/\text{秒})$$

下面检查假定粗糙管流动是否正确。粗糙管流动的下限雷诺数 R_{e_2} 为

$$R_{e_2}=200\frac{d}{e}\left(1.14+2.0\log\frac{d}{e}\right)=8.6\times10^5$$

而该管道的流速（按不忽略局部损失时的计）为

$$V=Q\Big/\left(\frac{\pi}{4}d^2\right)=3.54(\text{米/秒})$$

相应雷诺数为

$$R_e=\frac{V_d}{\nu}=8.1\times10^5>Re_2$$

说明假定完全粗糙管流动是正确的。若假定不正确，则必须再假定一个流动区而重复上述步骤计算。

例 5-14　已知：光滑铜管长 61 米，连接于两个水面高度差为 1.5 米的水箱之间，流量要求为 0.003米^3/秒，水的温度为 10℃，水的运动粘性系数 $\nu=1.306\times10^{-6}$米^2/秒。求：管直径应为多大

解：速度为

$$V = Q \Big/ \frac{1}{4}\pi d^2 = 0.003\,82/d^2$$

雷诺数为

$$Re = \frac{Vd}{\nu} = 2\,925/d$$

沿程损失因子按式（5-69）为

$$f = 0.3164/Re^{0.25} = 0.043\,02d^{0.25}$$

入出口局部损失因子各取0.5和1.0，则水头损失应为

$$\Delta h = \left(0.5 + 1.0 - f\frac{l}{d}\right)\frac{V^2}{2g} = H$$

代入具体值可变为

$$V = \sqrt{29.42 \Big/ \left(1.5 + 61\frac{f}{d}\right)}$$

联立以下三式

$$V = 0.003\,82/d^2$$

$$f = 0.043\,02d^{0.25}$$

$$V = \sqrt{29.42 \Big/ \left(1.5 + 61\frac{f}{d}\right)}$$

可求出V, d, f，最方便的是采用迭代方法。首先假定$d = 60$毫米$= 0.06$米，由以上三式可分别得

$$V = 1.061,\quad f = 0.021\,3,\quad V = 1.274$$

取平均$V = (1.061 + 1.274) \times 0.5 = 1.094$，再由以上三式分别得

$$d = 0.059\,1,\quad f = 0.021\,2,\quad V = 1.121.$$

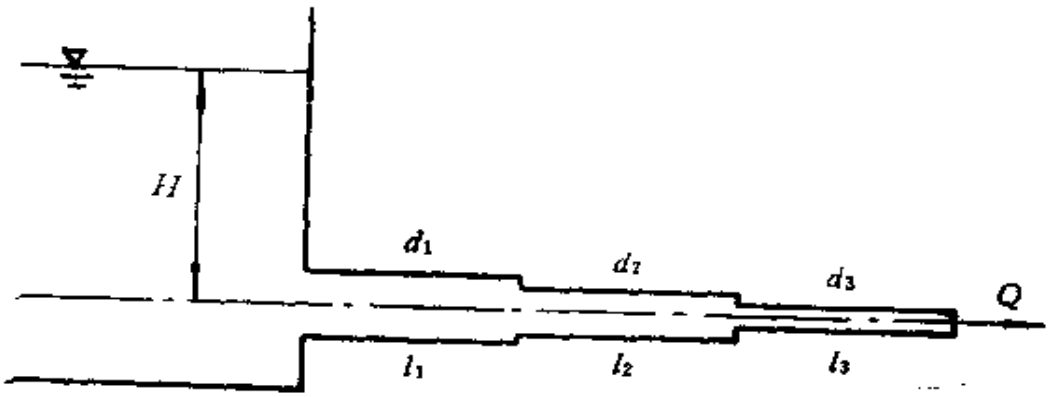
类似再取平均$V = (1.094 + 1.121) \times 0.5 = 1.108$，因而又有

$$d = 0.058\,7,\quad f = 0.021\,2,\quad V = 1.119$$

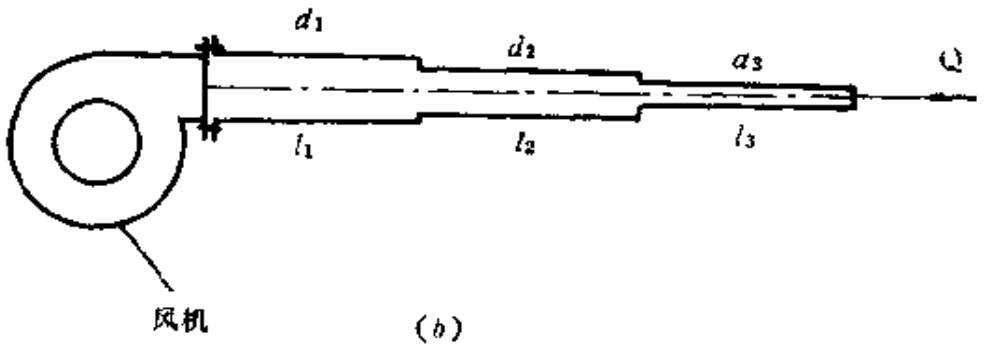
同前一次结果已相当接近，故认为迭代已完成取d为58.7毫米。但一般工程实用中，并没有这样特殊口径，只能采用与之最接近的标准口径，例如取$d = 60$毫米，问题就解决了。

二、串联和并联管路

若干个简单管路串联而形成的管路系统，称为串联管路，如图 5-34 所示。串联管路的流量 Q 保持不变，总损失是每段简单管路损失之和，表示为



(a)



(b)

图 5-34

$$\Delta h = \Delta h_1 + \Delta h_2 + \cdots \Delta h_n$$
$$= S_{h1}Q^2 + S_{h2}Q^2 + \cdots\cdots S_{hn}Q^2 = S_hQ^2$$

式中，Δh_i、S_{hi} $(i=1,2,\cdots,n)$ 为每一段的损失和阻抗，S_h 为整个管路系统的阻抗，即

$$S_h = S_{h1} + S_{h2} + \cdots\cdots + S_{hn} \qquad (5\text{-}96)$$

类似地

$$S_p = S_{p_1} + S_{p_2} + \cdots\cdots S_{p_n} \qquad (5\text{-}97)$$

由此可见，在串联管路中，流量Q保持不变；而总的阻抗等于各简单管路的阻抗之和。

管道出口端装有喷嘴时，其能量坡度线和水力坡度线如图5-35所示。管道长l，直径d_1，喷口直径d_2，当l/d很大而d_2/d_1很小时，则局部损失和管道中的速度头均可略去，但喷嘴出口的速度是不能忽略的，因而能量坡度线和水力坡度线在管路上是重合的，而在喷嘴段上是分开的。利用质量方程和能量方程有

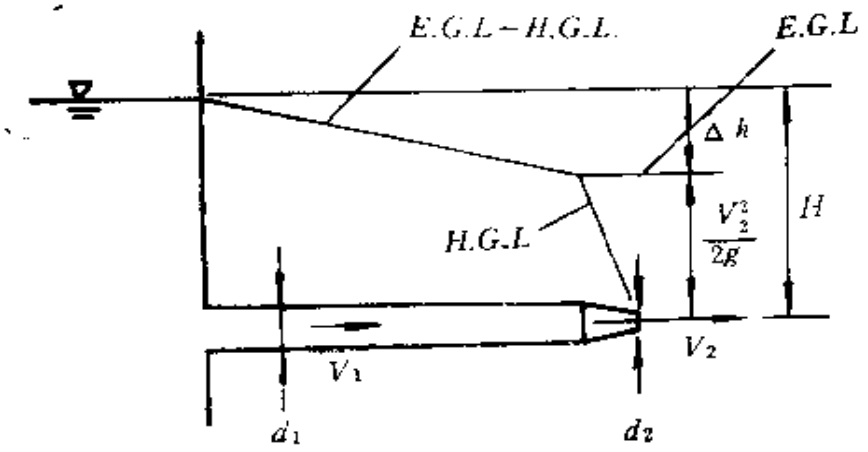


图 5-35

$$Q = A_1V_1 = A_2V_2$$

以及

$$H = \frac{V_2^2}{2g} + f\frac{l}{d_1}\frac{V_1^2}{2g}$$

由此可求解管路流动特性。从喷嘴中喷射出来的水流用于推动水轮机时，射流功率是一个很重要的参数，它可表示为

$$P = Q\gamma\frac{V_2^2}{2g} \qquad (5\text{-}98)$$

将上述有关公式代入上式后得

$$P = Q\gamma\left[H - \frac{flQ^2}{2gd_1A_1^2}\right]$$

显然，在给定 H、l 等参数下，功率随流量而变化，取 $dP/dQ=0$ 可得到最大射流功率的条件为

$$f\frac{l}{d_1}\frac{V_1^2}{2g}=\frac{H}{3}$$

同时相应有

$$\frac{V_2^2}{2g}=\frac{2}{3}H$$

由此，可以根据流量等要求，确定管道直径 d_1 和喷口直径 d_2。

正如在第三章中所述，当管路位置高度 z 高于水力坡度线（$H.G.L$），比如参看例 3-17，或者位置高度 z 高于能量坡度线（$E.G.L.$）时，比如参看例 3-20，该截面上的压力必低于大气压，即为真空压力。在前面已曾讲过，如管路中最低压力（绝对压力）$p_{min}=p_v$（p_v 为液体的饱和蒸气压力），则将产生气穴；为了防止产生气穴，要求 $p_{min}>p_v$。在实际管路中，由于被输运的液体中常含有一定的空气量，当 p_{min} 尚未接近 p_v 时，混入或溶入液体中的空气的析出，将促使气穴提早发生与加剧气穴。因此，在管路运行中，应考虑限制管路中最低压力的大小这一因素。经验表明，管路中的最低真空压力 $(p_{min})_{va}=p_a-p_{min}$ 一般以不低于当时温度下液体饱和蒸气真空压力值的 $\frac{2}{3}$ 左右为宜，即

$$(p_{min})_{va}=p_a-p_{min}<\frac{2}{3}(p_a-p_v)$$

式中，p_a 为大气压力；p_v 可查第一章的附表 1-2 或其他资料。

例 5-15　已知：如图 5-36 所示，通过水泵由低水池向高水池输送水流，水温 10℃，运动粘性系数 $\nu=1.306\times10^{-6}$ 米²/秒。流量为 0.07米³/秒，$\gamma=9.8$千牛/米³。管道由铸铁材料做成，粗糙度 $e=0.3$毫米。忽略局部损失。$p_a=101.3$千帕。求：水泵需要功率的大小，以及这个系统可能达到的最大流量。

解　对于水泵上游的 1 管道有

$$V_1 = Q \Big/ \frac{\pi}{4} d_1^2 = 2.228(\text{米/秒})$$

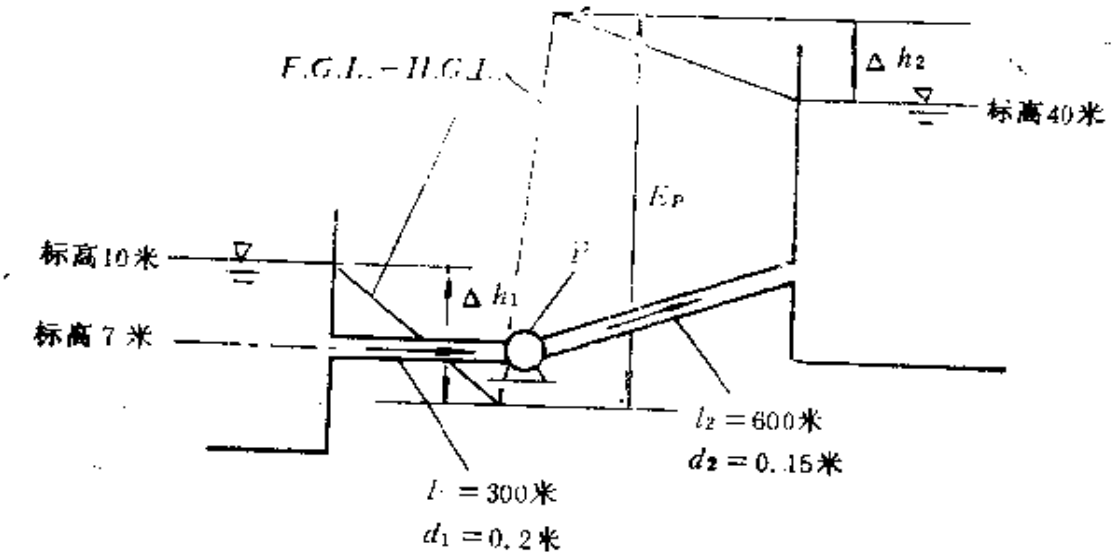


图 5-36

类似地，对下游 2 管道有

$$V_2 = 3.961(\text{米/秒})$$

两管流动的雷诺数分别为

$$Re_1 = \frac{V_1 d_1}{\nu} = 3.41 \times 10^5$$

$$Re_2 = \frac{V_2 d_2}{\nu} = 4.55 \times 10^5$$

相对粗糙度分别为 $(e/d)_1 = 0.001\,5$ 和 $(e/d)_2 = 0.002$，由式(5-77）计算

$$f_1 = 0.022\,5$$

$$f_2 = 0.023\,9$$

忽略局部损失，上下游 1 、 2 管道水头损失按式（5-32）为

$$\Delta h_1 = 8.54(\text{米})$$

$$\Delta h_2 = 76.47(\text{米})$$

根据能量坡度线的变化，水泵的 E_p 即扬程应为

$$E_P = (40-10) + 8.54 + 76.47 = 115.01(米)$$

若认为水泵效率为100%，其需要功率应为

$$P = Q\gamma E_P = 78.95(千瓦)$$

从防止气穴的观点看，对于10℃的水$p_v = 1.23$千帕，因而

$$\frac{2}{3}(p_a - p_v)/\gamma = 6.8(米)$$

忽略速度头，则能量坡度线不能低于管道位置高度z的6.8米以下，若仅允许6米，见图，则要求Δh_1不能大于9米；由此，若仍取$f_1 = 0.0225$，则可以计算允许的最大速度为

$$V_{max} = 2.287米/秒$$

和最大流量

$$Q_{max} = 0.072米^3/秒$$

由此可见，原设计流量0.07米^3/秒已经相当接近最大流量了。

例5-16　已知：如图5-37(a)所示系统；水泵性能曲线参看图5-37(b)；忽略局部损失和速度头，假定流动是湍流粗糙管，沿程损失系数$f_1 = 0.014$，$f_2 = 0.013$。求：通过管路的流量与A池自由面标高之间的关系。

解　按式(5-92)，1、2管道的阻抗分别为

$$S_{h_1} = 361.6(秒^2/米^5)$$

$$S_{h_2} = 88.4(秒^2/米^5)$$

因而水头损失分别为

$$\Delta h_1 = 361.6Q^2 \text{ 和 } \Delta h_2 = 88.4Q^2$$

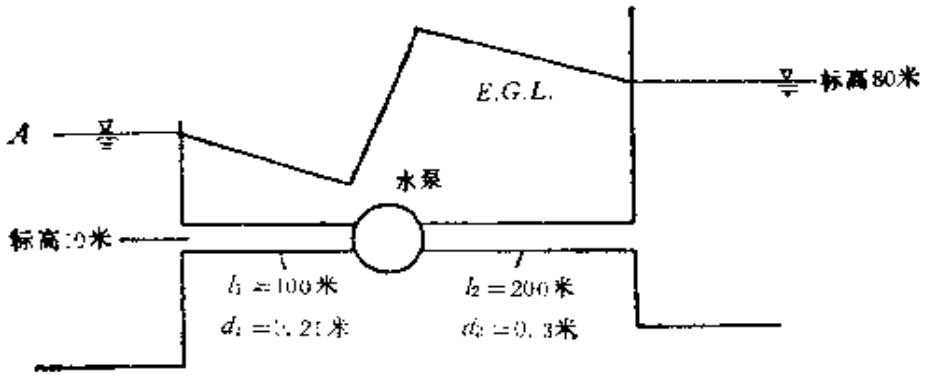
由图5-37可知，水泵扬程应为

$$E_P = \Delta h_1 + \Delta h_2 + (80 - H)$$

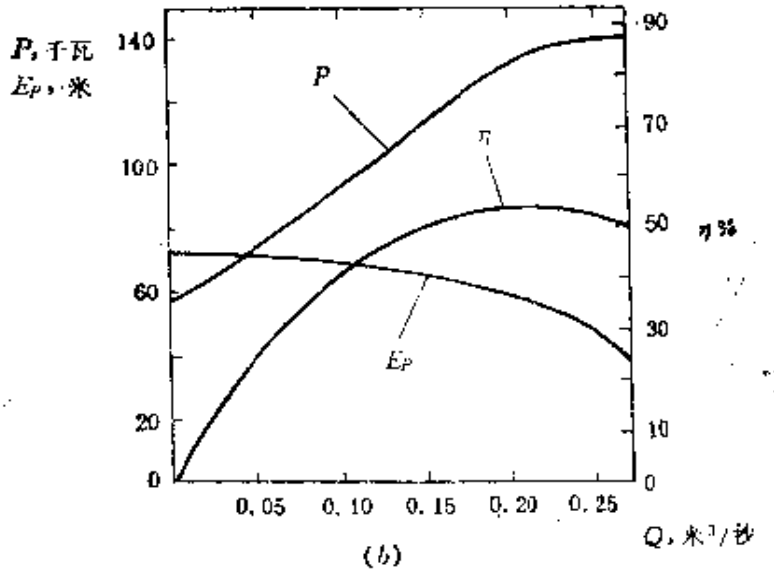
式中H为A池的自由面标高，因而

$$H = 80 - E_P + 450Q^2$$

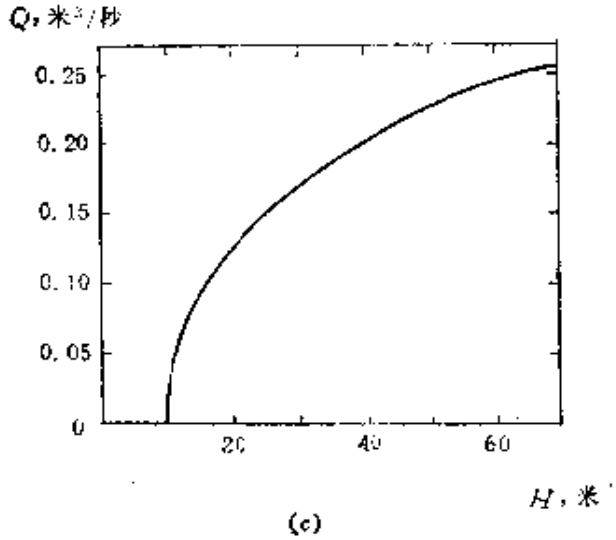
给定Q时，水泵扬程可从性能曲线中查出，因而相应H也可以找到。相应H和Q的数据绘出曲线如图5-37(c)。显然，随着A池自由面标高增加（相应使两池自由面位差减小），流量将增


E.G.L.
标高80米
A
水泵
标高:0米
$l_1=100$米
$d_1=0.2$米
$l_2=200$米
$d_2=0.3$米

(a)


P, 千瓦
E_P, 米
140
100
60
20
0
90
70
50
30
10
0
η%
P
η
E_P
0.05
0.10
0.15
0.20
0.25
Q, 米³/秒

(b)


Q, 米³/秒
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0
20
40
60
H, 米

(c)

图 5-37

加。

两个或两个以上简单管路并联而形成的管路系统称为并联管路，如图 5-38 所示。管路交叉点称为节点。在每个节点上首先流量都应遵循质量方程，若把流向节点的流量看作正的，把离开节点的流量看作负的，则每个节点上应有$\Sigma Q_i = 0$，Q_i是每个简单管路中的体积流量。其次，在两个节点之间的总水头损失乃是一定的。沿节点 A、B 之间有 n 条简单管路并联，则 n 条简单管路上应有相同的水头损失，即

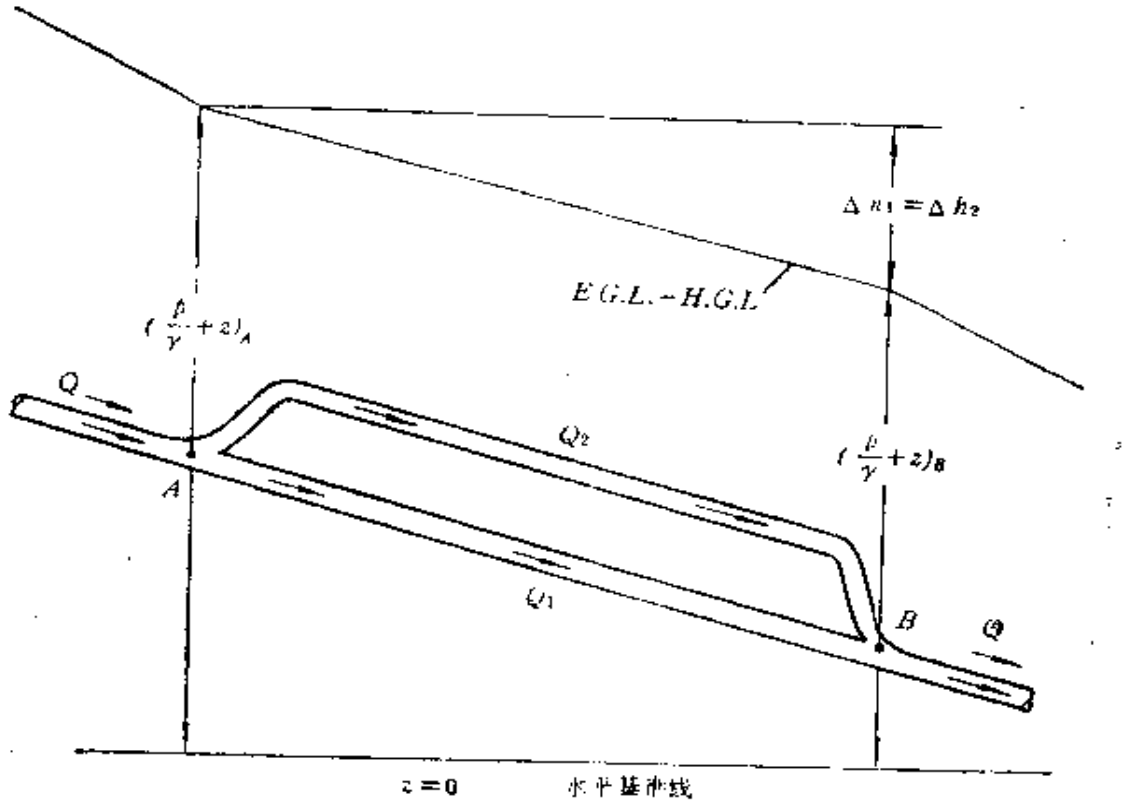


图 5-38

$$\Delta h_1 = \Delta h_2 = \cdots\cdots = \Delta h_n = h_A - h_B$$

因而

$$S_{h1}Q_1^2 = S_{h2}Q_2^2 = \cdots\cdots = S_{hn}Q_n^2 \quad S_hQ^2$$

式中 S_{hi}、Q_i（$i = 1, 2, \cdots, n$）为每一条简单管路的阻抗和流量，而S_h、Q 为管路系统的总阻抗和流量。显然，由质量方程可得

$$Q = Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n \qquad (5\text{-}99)$$

而$Q_1 = \sqrt{\Delta h_1 / S_{h_1}}$，$Q_2 = \sqrt{\Delta h_2 / S_{h_2}}$，……$Q_n = \sqrt{\Delta h_n / S_{h_n}}$，以及$Q = \sqrt{(h_A - h_B)/S_h}$，代入式（5-99）可推出：

$$1/\sqrt{S_h} = 1/\sqrt{S_{h_1}} + 1/\sqrt{S_{h_2}} + \cdots + 1/\sqrt{S_{h_n}} \qquad (5\text{-}100)$$

各简单管路的流量之比为

$$Q_1 : Q_2 : \cdots : Q_n = 1/\sqrt{S_{h_1}} : 1/\sqrt{S_{h_2}} : \cdots : 1/\sqrt{S_{h_n}} \qquad (5\text{-}101)$$

由此可以看出，在并联管路系统中，系统总的流量等于各分管路的流量之和；各分路的流量之比满足式（5-101），阻抗越大的分路，其流量将越小；系统总的阻抗由式（5-100）确定，显然，总的阻抗将小于任何一个分管路的阻抗。因而，在给定水头损失下，增加并联分管路，可以增大流量。

若将管路系统中的水头损失、流量和阻抗与电路系统中的电位降、电流和电阻分别相比拟，则可以看出两者有十分类似的关系。

例 5-17 已知：如图 5-39 所示为供暖水管系统简图，在节点 A、B 之间分成两路。管路 1 直径 20 毫米，总长 20 米，局部损失因子之和为 $(\Sigma\zeta)_1 = 15$；管路 2 的直径、局部损失因子之和与管路 1 的相同，但总长仅 10 米。沿程损失因子都取为 $f = 0.025$。主干管路中的流量$Q = 0.001$米^3/秒。求：各分管路的流量，若使两管路的流量相等，应如何调节各分路的局部损失因子值。

解 按式（5-92），两分路的阻抗各为

$$S_{h_1} = \frac{8 \times \left(0.025 \times \frac{20}{0.02} + 15\right)}{\pi^2 \times 0.02^4 \times 9.807} = 2.07 \times 10^7 (\text{秒}^2/\text{米}^5)$$

$$S_{h_2} = 1.42 \times 10^7 (\text{秒}^2/\text{米}^5)$$

按式（5-101），两分路流量之比为

$$Q_1/Q_2 = \sqrt{S_{h_2}/S_{h_1}} = 0.828$$

而

$$Q_1 + Q_2 = 0.001$$

因而解出

$Q_1 = 0.453 \times 10^{-3}$(米³/秒)和$Q_2 = 0.547 \times 10^{-3}$(米³/秒)

系统总的阻抗按式（5-100）有

$$S_h = 4.2483 \times 10^6 (秒^2/米^5)$$

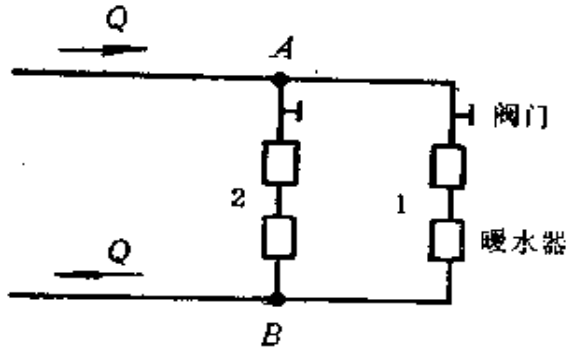


图 5-39

若使两分路流量相等，而又不改变总的流量，则必须使分路的阻抗相等而又不改变总的阻抗。因而按式（5-100）经调整后的阻抗值为

$$S_{h_1} = S_{h_2} = 4S_h = 1.70 \times 10^7 (秒^2/米^5)$$

在管道长度、直径等不变化的情况下，可以计算两分路保持阻抗相同的局部损失因子为

$$(\Sigma\zeta)_1 = 7.91$$

$$(\Sigma\zeta)_2 = 20.41$$

即为了达到流量相等，应使管路 1 的局部损失减小，而使管路 2 的局部损失增大。这样的变化，可以通过调节阀门开度而实现。显然，若要调节沿程损失，则要改变管道长度或直径等，就相当复杂了。

例 5-18　已知：一直径为 0.3 米的管道长 1 500 米，连接于两贮水池之间，两池自由面位差 21 米，其流量为 0.14 米³/秒。不计局部损失。求：在管道中某处并联一长 600 米相同直径和材料的管道，流量能增大至多少？

解　原管道的阻抗为

$$S_h = \Delta h/Q^2 = 21/0.14^2 = 1.071 \times 10^6 (秒^2/米^5)$$

在不考虑局部损失时，$S_h \propto l$，因而未并联部分的阻抗为

$$S_{h_1} = S_h \times \frac{900}{1\,500} = 642.9 (秒^2/米^5)$$

而准备并联部分的阻抗为

$$S_{h_2}' = S_h \times \frac{600}{1\,500} = 428.6(\text{秒}^2/\text{米}^6)$$

这一部分管路再并联600米分路后的阻抗为$S_{h_2} = \frac{1}{4}S_{h_2}' = 107.2$（秒^2/米^6），因而可以列出水头损失方程如下：

$$642.9Q^2 + 107.2Q^2 = 21$$

解出$Q = 0.167$(米^3/秒)，可见，相比原流量将增加约20%。

经典的三贮水池（或更多）问题是一个十分有趣的问题。如图5-40所示，籍助于能量坡度线求解是比较方便的。流动可能有三种情况：①从A池流入B池和C池，其能量坡度线如图中之1线；②从A池流入C池，B池没有流进也没有流出，其能量坡度线如图中之2线；③A、B两池同时流入C池，其能量坡度线如图中之3线。各种情况下都忽略局部损失和速度头。对于第①种情况有

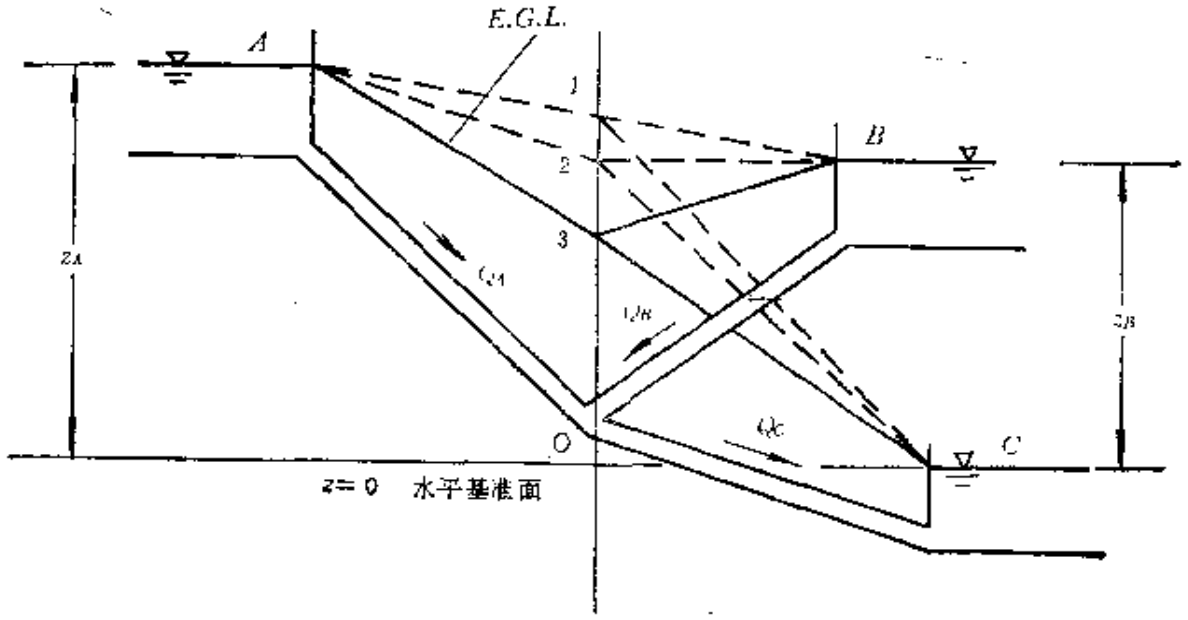


图 5-40

$$z_A - S_{h_A}Q_A^2 = S_{h_C}Q_C^2$$

$$z_A - S_{h_A} Q_A^2 = z_B + S_{h_B} Q_B^2$$
$$Q_A = Q_B + Q_C$$

对于第③种情况有

$$z_A - S_{h_A} Q_A^2 = S_{h_C} Q_C^2$$
$$z_A - S_{h_A} Q_A^2 = z_B - S_{h_B} Q_B^2$$
$$Q_A = Q_C - Q_B$$

若为第②种情况，因为 $Q_B = 0$，则上述两组方程变得完全相同。但实际上仅能有一种情况成立。解这个问题可先从第②种情况入手，从前二个方程解出 Q_A 和 Q_C。若 $Q_A > Q_C$，则属第①种情况；反之属第③种情况。然后再用上述对应的方程组求解 Q_A，Q_B 和 Q_C，从而管路交点的水头也可确定。

三、管网系统

管网系统的基本元件还是简单管路，它们或串联或并联地相互连接在一起。管网系统损失计算要解决的主要问题之一是流量分布问题。限于篇幅，这里很难全面讨论这个专业技术性很强的工程问题，但准备给出解决这类问题的原则性方法，即流量分布计算的迭代方法。

在供水管网系统中，设计和布置的目标是要把水在指定的节点位置上提供给用户。管网由不同尺寸、不同几何方位、和不同水力特性的管道、阀门及水泵等组成。假定所有这些部件的几何和流动特性都是已知的，节点上的出流流量也是确定的。需要求解的是各管路中的流量。图 5-41 是一个简化了的供水管网布置平面图。管路系统中的 8 个节点由大写字母 $A \sim H$ 表示；有10个简单管路由数字 1 ～10表示；系统中包含 3 个闭循环由Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ表示，设循环方向以顺时针为正。组成一个闭循环的原则是，在这个循环中必须起码包含一条新的管路，即这个管路未在其他循环中出现过。管网系统中的 1 、 3 、 4 、 2 管组成Ⅰ循环， 4 、 8 、10、 7 管组成Ⅱ循环， 5 、 7 、 9 、 6 管组成Ⅲ循环，不可

能再构成其他循环。

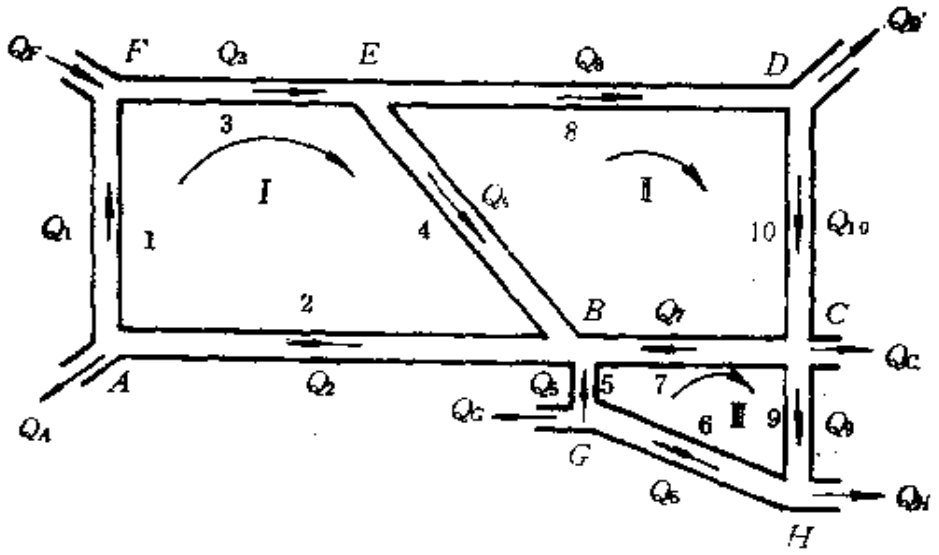


图 5-4

在管网系统中任一个节点处，按质量守恒关系有净流量应为零。按能量方程，每个节点应有确定的水头，故绕任一循环一周，水头损失应为零。计算沿某一循环的水头损失时，若假定的流动方向与循环方向相反，则水头损失应取负值。对于Ⅰ循环，可以有以下方程：

$$\sum_{A} Q = -Q_A + Q_2 - Q_1 = 0$$

$$\sum_{F} Q = Q_F + Q_1 - Q_3 = 0$$

$$\sum_{E} Q = Q_3 - Q_4 - Q_8 = 0$$

$$\sum_{B} Q = Q_4 + Q_7 + Q_5 - Q_2 = 0$$

$$\sum_{I} \Delta h = S_{h1} Q_1^2 + S_{h3} Q_3^2 + S_{h4} Q_4^2 + S_{h2} Q_2^2 = 0$$

对其他循环也有类似的方程。10个未知流量 $Q_i(i=1,2,\cdots,10)$ 需要通过试算或迭代的过程求解。这里介绍一种比较简单的迭代求解法。

该方法先合理地假设一组流量 Q_{oi}，且在节点上应满足流动

的质量方程。假设应比较合理，自然需要一定经验，但即使不够合理也是许可的，只是求解的收敛过程比较慢而已。然后，在保持质量方程得到满足的情况下，不断系统地调整流量值，使得每一循环中水头损失为零的方程得到满足或基本满足。多次调整相当于多次迭代，最后必能唯一求解。在图 5-41 的流动系统中，3 个循环有 3 个水头损失方程，8 个节点只有 7 个节点流量守恒方程，因最后一个节点的流量守恒将自动满足；10个未知数有10个方程，恰能得到一组唯一解。

在假定一组流量的基础上，对于每一个循环应有

$$\Sigma \Delta h = \Sigma(\pm)_i S_{h_i} Q_{oi}^2 = 0$$

正如前述，式中正负号取决于流动方向是否与循环方向一致，两者方向一致时取正号。由于流量是假定的，则不太可能第一次就得到满足。

设想在循环中加入一个流量修正量ΔQ，自然不会影响各节点上的流量守恒关系，但希望加入ΔQ后，能满足

$$\Sigma \Delta h = \Sigma(\pm)_i S_{h_i} (Q_{oi} \pm \Delta Q)^2 = 0$$

括弧中 ΔQ 的符号，同前面符号项的符号是一致的，因为 ΔQ 也定为顺时针方向为正，当 Q_{oi}为逆时针方向时，ΔQ 前的符号应为负。由于一般来说 ΔQ 相对是一个小量，故可以忽略其平方项，因而有

$$\Sigma \Delta h = \Sigma(\pm)_i S_{h_i} (Q_{oi}^2 \pm 2\Delta Q Q_{oi}) = 0$$

或

$$\Delta Q = -\frac{\Sigma(\pm)_i S_{h_i} Q_{oi}^2}{2\Sigma |S_{h_i} Q_{oi}|} \tag{5-102}$$

式中的绝对值符号是由于同号相乘而致。

在每条管路上，修正后的流量为

$$Q_i = Q_{oi} + \Delta Q \tag{5-103}$$

若一条管路处在 n 个循环中，修正量应是 n 个循环的修正量

之和，即

$$Q_i = Q_{oi} + \sum_n \Delta Q_n \qquad (5\text{-}104)$$

由于下述两个原因，这种修正不可能一次就完成：①当假设的 Q_{oi} 不十分合理时，修正量 ΔQ 不一定是小量，略掉其平方项将导致一定的误差。②某一管路处于 n 个循环中时，导致 n 个循环的修正量互相影响。因此，修正将逐次进行，直至达到满意的结果为止。

例 5-19 已知：管网系统如图 5-42。

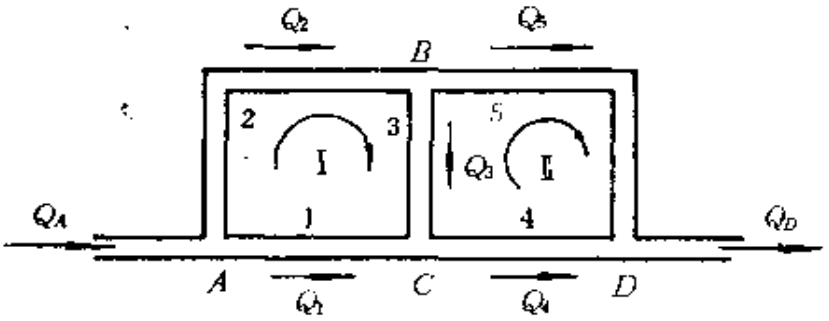


图 5-42

各管的几何或流动特性如下表：

管　　号	长(米)	直径(米)	粗粒度 $\frac{\varepsilon}{d}$	f	S_h(秒²/米⁶)
1	1000	0.5	9×10^{-5}	0.012	31.7
2	1000	0.4	1×10^{-4}	0.012	96.9
3	100	0.4	1×10^{-4}	0.012	9.7
4	1000	0.5	9×10^{-5}	0.012	31.7
5	1000	0.3	1.4×10^{-4}	0.013	442.1

求：各管道中的流量。

解 假定各管路中的流动方向如图 5-42，其数值见上表。按式（5-102），对第Ⅰ循环有

$$\Delta Q_I = \frac{-S_{h1}Q_{01}^2 + S_{h2}Q_{02}^2 + S_{h3}Q_{03}^2}{2(S_{h1}Q_{01} + S_{h2}Q_{02} + S_{h3}Q_{03})}$$

以及对第Ⅱ循环有

$$\Delta_{\text{Ⅱ}}Q=\frac{-S_{h_3}Q_{03}^2+S_{h_5}Q_{05}^2-S_{h_4}Q_{04}^2}{2(S_{h_3}Q_{03}+S_{h_4}Q_{04}+S_{h_5}Q_{05})}$$

修正后的各段流量按式（5-103）、（5-104）为

$$Q_1=Q_{01}-\Delta Q_{\text{Ⅰ}}$$
$$Q_2=Q_{02}+\Delta Q_{\text{Ⅰ}}$$
$$Q_3=Q_{03}+\Delta Q_{\text{Ⅰ}}-\Delta Q_{\text{Ⅱ}}$$
$$Q_4=Q_{04}-\Delta Q_{\text{Ⅱ}}$$
$$Q_5=Q_{05}+\Delta Q_{\text{Ⅱ}}$$

迭代计算的结果见下表中所列数据：

迭代次数	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	$\Delta Q_{\text{Ⅰ}}$	$\Delta Q_{\text{Ⅱ}}$
0	0.5	0.5	0.4	0.9	0.1	−0.13	0.15
1	0.63	0.37	0.12	0.75	0.25	−0.01	−0.04
2	0.64	0.36	0.15	0.79	0.21	0.00	0.00

如上表，经过两次迭代，若取小数点后两位，$\Delta Q_{\text{Ⅰ}}$和$\Delta Q_{\text{Ⅱ}}$都为零，则迭代完成。

习　题

1．21℃的水流通过直径76毫米的管道，流量为0.001 9米³/秒，问流动是层流还是湍流？

2．燃油流量为 6.3 升/秒，其密度和粘性系数分别为 773.1 千克/米³和 8.7×10^{-4}帕·秒，求保持管道流动为层流的最小直径。

3．如图5-43，流体在直径d_1为75 毫米管道中流动的雷诺数为20 000，求在直径d_2为150毫米管道中的雷诺数。

4．粘性系数为 1 帕·秒的某种油在 0.3 米直径的管道中作层流运动，速度分布为抛物型，即 $v=v_0\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$，中心速度 v_0。

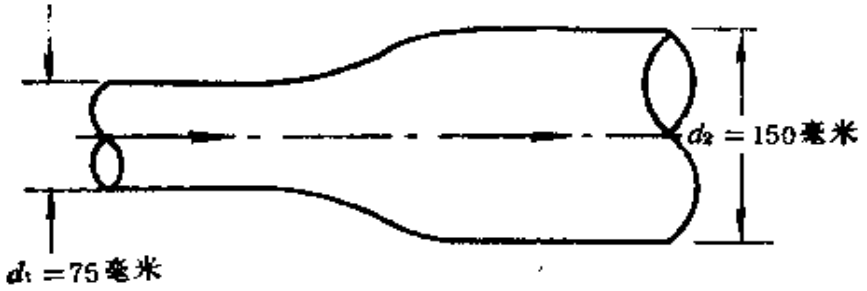


图 5-43

为4.5米/秒，求管壁及距管壁75毫米处的剪应力。

5. 如图5-44所示各种速度分布的管道流动，管直径d为1米，中心速度v_c = 3 米/ 秒，求α、β及动能、动量流率（设流体为水）。

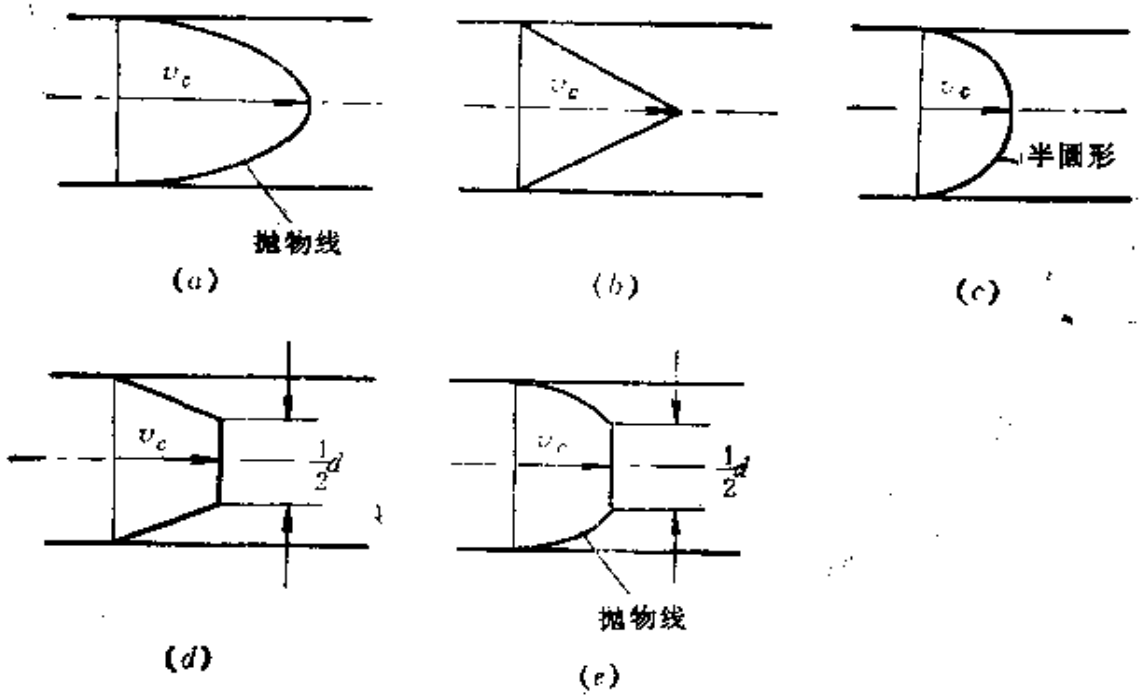


图 5-44

6. 射流泵混合室上下游端面①、②上的速度分布如图5-45，忽略壁面摩擦。计算从①至②截面的压力增益以及混合中的能量损失，流体为水。

7. 用水泵从自由面标高30米的水池引水至标高75米的水池，

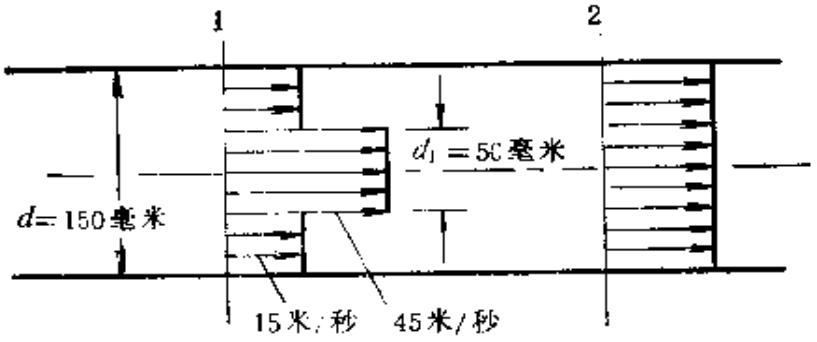


图 5-45

流量为0.56米³/秒，管路及水泵本身的水头损失共12 米，求驱动水泵所需要的功率。

8. 如图5-46，水轮机进水管进口压力p_1为348千帕(表压)，直径为 1 米，标高43.5米；排水管出口真空压力 p_2 为150毫米汞柱，直径为1.5米，标高 39 米。通过水轮机的流量为2.8米³/秒，管道和水轮机的损失共 9 米，问水轮机能输出功率多少?

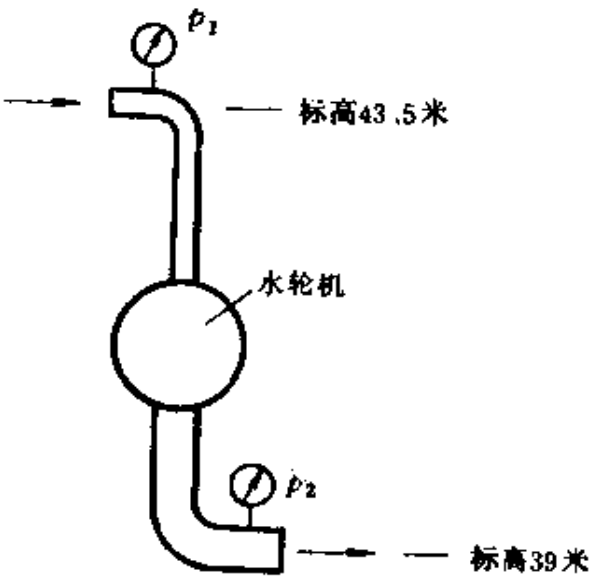


图 5-46

9. 甘油在直径为 50 毫米的管中流动，温度为20℃。中心速度为2.4米/秒，计算流量，以及长度 3 米上的水头损失。

10. 流体在直径为75毫米的管道中作层流运动，流量为0.007米³/秒，测得管壁上的剪应力为 47.9牛/米²，求该流体的粘性系数。

11. 粘性系数为0.48帕·秒的一种油，其密度为900千克/秒，在直径为0.3米的管道中流动，平均速度为 1.5 米/秒，计算离中心线75毫米处的剪应力和速度。

12. 若11题中油的粘性系数为0.0048帕·秒，管壁光滑，再解该题。

13. 水在直径为50毫米的光滑管道中流动，温度为20℃，中心速度为2.4米/秒，计算流量及长度3米上的水头损失。

14. 流体比重为0.7，在直径为0.3米的光滑管道中流动，雷诺数为150 000，测得离壁面50毫米处的速度为3米/秒，求流量和壁面上的速度梯度。

15. 流体在直径为0.3米的光滑玻璃管中流动，其雷诺数为10 000，求粘性底层的厚度和底层外边界上的速度。

16. 若11题中油的粘性系数为0.000 48帕·秒，管壁具有当量粗糙元高度$e=0.5$毫米，再解该题。

17. 比重为0.9的流体通过直径为0.3米的管道，雷诺数为1.5×10^5，离开壁面50毫米处的速度测得为3米/秒，管壁具有当量粗糙元高度$e=0.5$毫米，求壁面上的速度梯度。

18. 水在光滑管道中流动，雷诺数为1.5×10^5，该管道在使用若干年以后，在能量损失不变的情况下流量只有原来的二分之一，求此时的管壁粗糙度。

19. 水在直径为0.3米的管道中流动，流量为0.28米^3/秒，在300米长度上，损失功率为63千瓦，求沿程损失因子、摩擦速度和壁面剪应力的大小。

20. 空气在直径为75毫米的镀锌铁管中流动，进口压力为1 200千帕，温度为27℃，质量流量为45公斤/分，计算90米长度上的压力损失。空气的密度可以认为不变。

21. 在长150米，直径为75毫米的光滑管道中，流量为8.5升/分，流动的水头损失为21米，问流动是层流还是湍流？

22. 20℃水在直径为150毫米的光滑管道中流动，当流量为0.14米^3/秒时，某长度上的损失为45米水头，若流量增加一倍，损失该多大？若管道换成混凝土材料，损失又为多大？

23. 空气在截面为正三角形、边长200毫米的管道中通过，

压力为101.3千帕，温度为15.6℃，中心速度为3.6米/秒，计算每米的压力损失。假定空气的密度不变。

24. 水流通过直径为150毫米管道中的流量为 0.14 米³/秒，管道突然扩张，管道直径变为300毫米。在小管中的水压力为138千帕，问大管中的压力应为多少？假定流动已经定型，忽略管壁摩擦阻力。

25. 如图5-47，流体比重为0.90，管道光滑，小管中的速度为 6 米/秒，雷诺数为 100 000。求下游压力表读数。

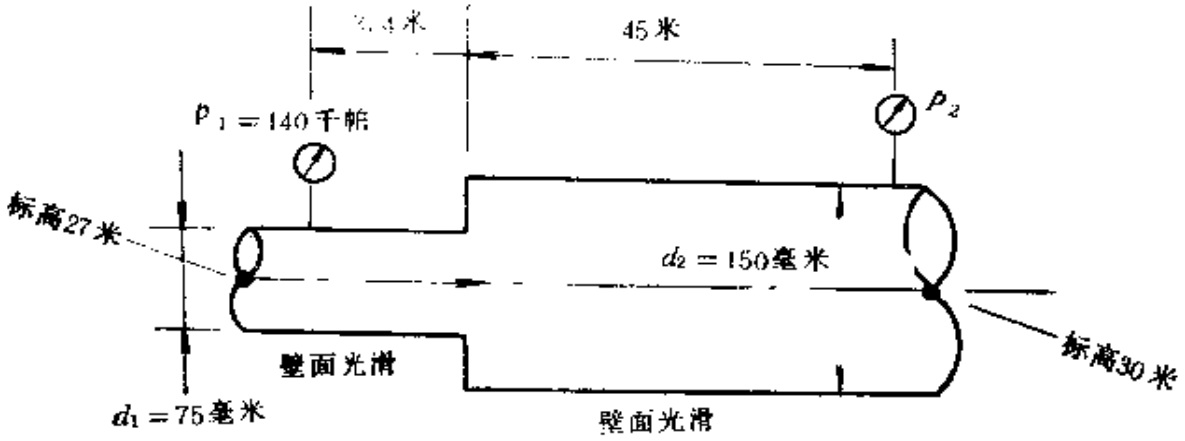


图 5-47

26. 如图 5-48 所示是确定逐渐扩张管道的实验装置，测量在定型流动区域中进行。计算该渐扩管的水头损失及损失因子大小。

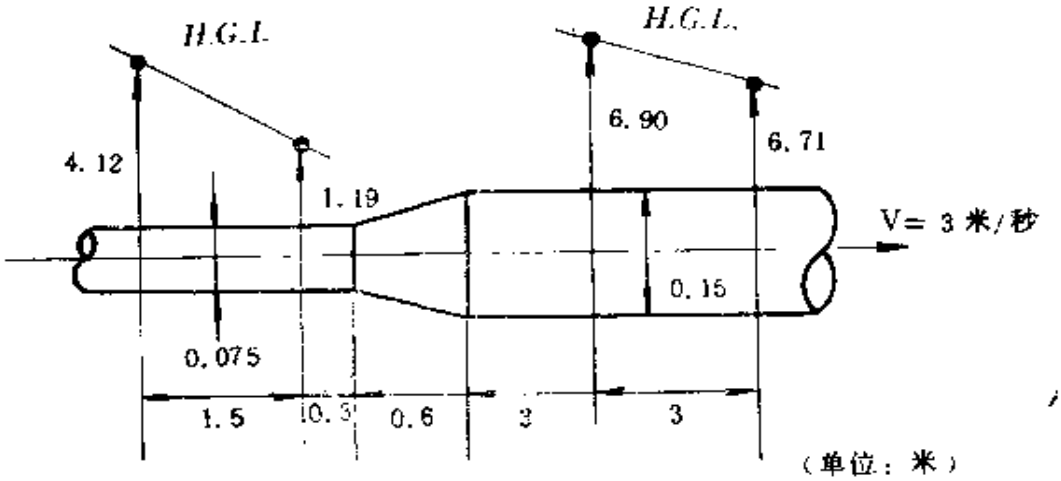


图 5-48

27. 如图5-49所示计算全部螺栓承受的拉力大小。

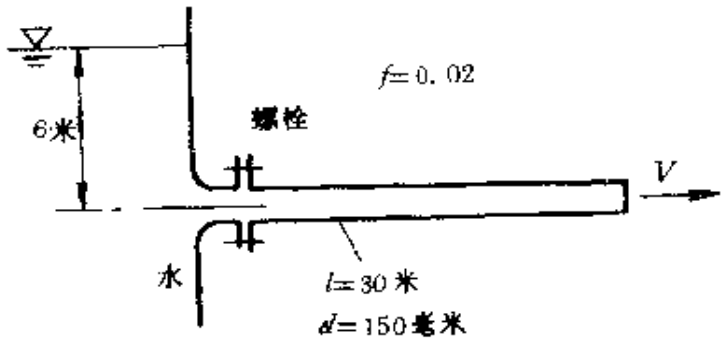


图 5-49

28. 如图 5-50 所示，考虑各种损失后，求通过管路流量大小。水的温度为20℃。

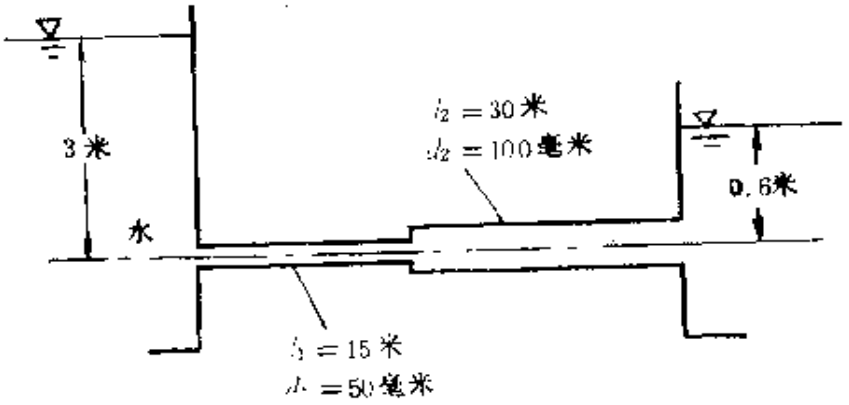


图 5-50

29. 两水池相距90米，自由面水位相差9米，要求向低水池输送流量为0.25米³/秒，采用光滑管材，问直径应多大？忽略局部损失。

30. 如图 5-51，要求达到流量为 0.085米³/秒，水泵功率应多大，若为了防止水流中出现气穴，限制水的压头不低于－6米，求该系统可能达到的最大流量为多大？忽略局部损失。

31. 两水池相距2 000 米，自由面位差 40 米。用水泵由低水池向高水池送水。水泵最高效率对应的流量为 0.2米³/ 秒，扬程

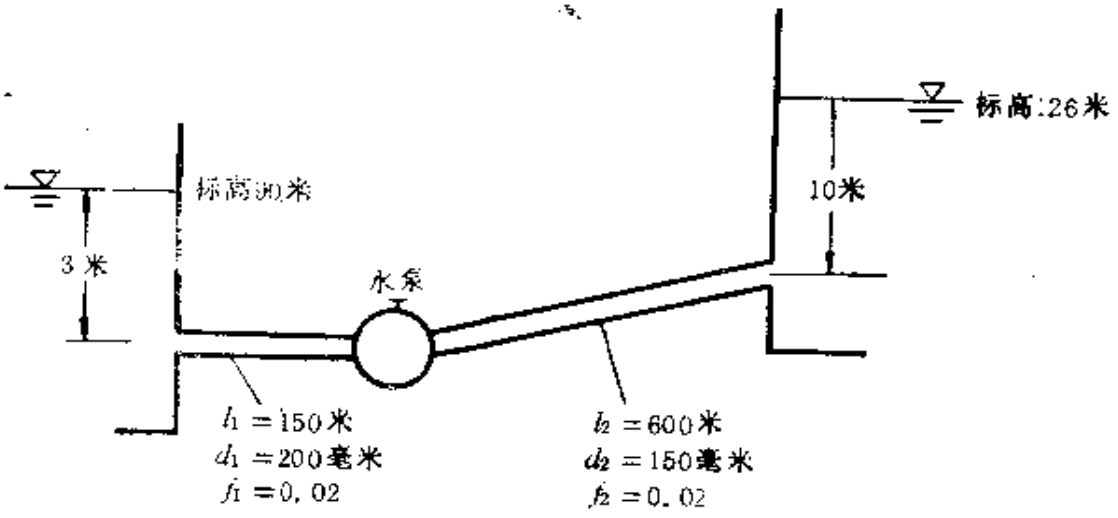


图 5-51

为60米，采用当量粗糙元为 0.045 毫米的钢管，问直径多大时，恰使水泵处于最高效率状态运转？

32. 两个贮水池之间有 5 根同高度直径均为25毫米的光滑铜管共同输送水流量为2.4升/分。若用一根光滑铜管代之，保持相同流量，问直径应多大？若认为大管与小管有相同的 f 值，直径又应多大？

33. 一直径为 0.9 米的水管在标高 120 米处分成三根直径为0.45米的水管，分别经过3.2、4.8和 6.8 公里的长度，注入自由面标高为90、60和30米的水池中，总流量为 1.4 米^3/秒，求各管的流量。假定各管都有 $f=0.017$。

34. 求如图5-52所示管网系统中各管中的流量。忽略局部损失，沿程损失系数都取为 $f=0.02$。各管的尺寸如下：

编　号	1	2	3	4	5	6	7
长度(米)	500	1000	500	1000	500	1000	500
直径(毫米)	300	300	300	200	200	100	700

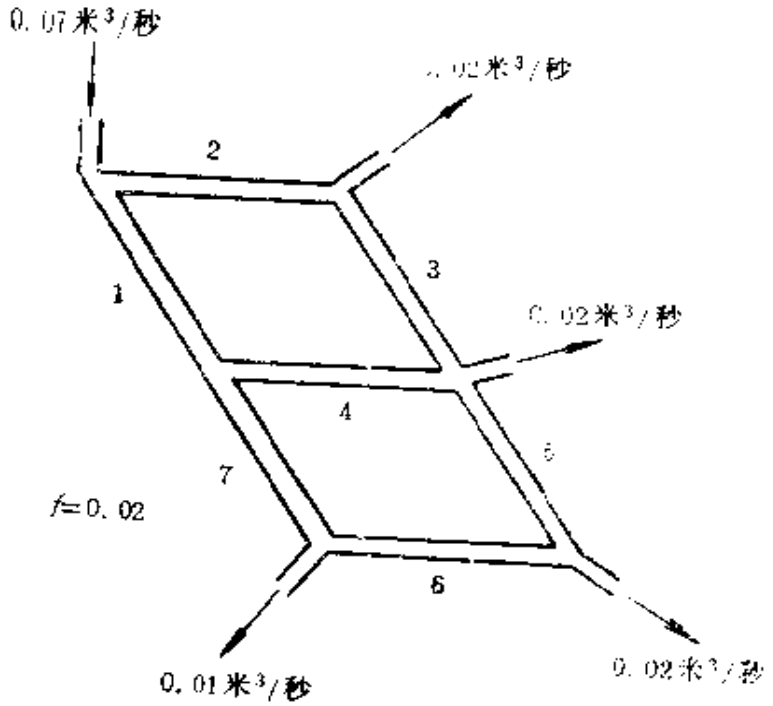


图 5-52

第六章　可压缩气体的一维流动

流体随着压力的变化而发生密度变化的性质叫做压缩性。流体的可压缩性是流体固有的物理属性，任何实际流体都是可压缩流体。对于液体或低速流动气体，由于压缩性影响小，实用上可以忽略这一性质而按不可压流体来处理。但是，对于高速流动的气体，不但不能忽略这一性质，而且，应当深入研究压缩性产生的各种影响。本章主要将讨论可压缩流体流动的若干流动现象和一维定常流动的特性。

§6-1　可压缩流体力学基础

一、热力学基础知识回顾

可压缩流体的流动过程伴随着流体状态的变化，与热力学是密切相关的。而热力学有专门的教程。因此，这里仅对学习本章所需要的热力学基础知识作一简要回顾。

1．状态方程

在第一章中已经提到，完全气体的状态方程为式（1-10），即

$$p=\rho RT \tag{6-1}$$

这种形式的状态方程在本章经常会用到。气体常数R可在第一章的表1-2中查得。

2．内能

在热力学中，气体的内能一般指分子无规则运动的能量及分子间的相互作用能。对于实际气体来说，其内能是温度和体积的

函数。

从微观角度看，完全气体具有以下性质：

① 分子体积与分子间平均距离相比可忽略不计。

② 除弹性碰撞外，分子间及分子与容器壁间没有相互作用。

对于这种理想化的严格遵守状态方程的完全气体来说，其内能就等于各分子动能之总和，因此内能只与绝对温度有关。单位质量的完全气体的内能可用 u 来表示，单位是焦耳/公斤。故有

$$u = u(T) \tag{6-2}$$

就本章所涉及的范围来说，实际气体都可近似地简化为完全气体来处理。因此以后不再作专门说明，均是在完全气体的前提下来讨论的。

3．焓，比热比

焓是热力学中表征气体状态的一个重要参数。单位质量气体的焓值（又称比焓），通常用 h 来表示，其定义是

$$h = u + \frac{p}{\rho} \tag{6-3}$$

其单位与内能u的单位相同，也是焦耳/公斤。

参看式（6-1）、（6-2）及（6-3）可知，气体的焓值将只是绝对温度的函数。

另按热力学第一定律知，对于静止的、单位质量气体有

$$\mathrm{d}q = \mathrm{d}u + p\mathrm{d}\left(\frac{1}{\rho}\right) \tag{6-4}$$

由式（6-3），（6-4）可得

$$\mathrm{d}q = \mathrm{d}h - \frac{1}{\rho}\mathrm{d}p \tag{6-5}$$

由此可见，在可逆等压变化过程中（$\mathrm{d}p = 0$），焓值的增量 $\mathrm{d}h$ 将等于此过程中所吸收的热量 $\mathrm{d}q$。由式（6-4）和（6-5）可得等容比热c_v和等压比热c_p，有

$$c_v = \left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}T}\right)_v = 常数 = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}T} \tag{6-6}$$

$$c_p = \left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}T}\right)_p = 常数 = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}T} \tag{6-7}$$

当绝对温度在1 500 开以下时，c_p 和c_v均可视为常数。因而单位质量气体的焓等于c_p和气体绝对温度T的乘积，即

$$h = c_p T \tag{6-8}$$

单位质量气体的内能等于c_v和气体绝对温度的乘积，即

$$u = c_v T \tag{6-9}$$

c_v和c_p的单位是焦耳/(公斤·开)。在温度不太高时，空气的c_p值通常取1004.6 焦耳/(公斤·开)。等压比热和等容比热之比称为比热比，通常用符号 k 表示，

$$k = c_p / c_v \tag{6-10}$$

各种气体的 k 值可参阅附表 1-2。空气的 k 值为 1.40，喷气发动机中燃烧后气体的 k 值常取为 1.33，火箭发动机中的燃烧后气体的 k 值则常取为 1.25。

根据焓的定义式（6-3），有

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}T} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}T} + \frac{\mathrm{d}(p/\rho)}{\mathrm{d}T}$$

将式（6-1）、（6-6）和(6-7）代入上式，可得

$$c_p = c_v + R \tag{6-11}$$

由式（6-10）和（6-11），得到

$$c_p = \frac{k}{k-1} R \tag{6-12}$$

$$c_v = \frac{1}{k-1} R \tag{6-13}$$

在气体流动问题中，气体的比焓 h 等于气体的内能 u 和流动功 $\frac{p}{\rho}$ 之和，但单位质量气体的总能量（不计重力势能）等于比焓与宏观流动动能 $\frac{1}{2}V^2$ 之和，称为比总焓，通常以 h_0 表示。参看式（3-89），（3-94）等，在与外界没有其他任何能量交换的流

动中，气体的总比焓不变，即

$$h_0 = h + \frac{1}{2}V^2 = \text{Const.} \tag{6-14}$$

4．熵

熵是热力学中表征气体状态的另一个重要参数。在经典热力学中，常采用熵增量的定义，即

$$\mathrm{d}S = \left(\frac{\mathrm{d}Q}{T}\right)_R \tag{6-15}$$

$\mathrm{d}Q$ 为熵增过程中加入气体的热量；下标R表示加热引起的变化过程是可逆的。若过程是不可逆的则用下标IR表示为

$$\mathrm{d}S > \left(\frac{\mathrm{d}Q}{T}\right)_{IR}$$

单位质量气体的熵称为比熵，用 s 表示。

由式（6-4）、(6-5)、（6-6)和（6-7）可得

$$\mathrm{d}s = c_v\frac{\mathrm{d}T}{T} - R\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} \tag{6-16}$$

$$\mathrm{d}s = c_p\frac{\mathrm{d}T}{T} - R\frac{\mathrm{d}p}{p} \tag{6-17}$$

当由状态 1（s_1，p_1，ρ_1，T_1）变到状态 2（s_2，p_2，ρ_2，T_2）时，可把式（6-12）和（6-13）代入上式，积分后可得到

$$s_2 - s_1 = R\ln\left[\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{k-1}}\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{-1}\right] \tag{6-18}$$

$$s_2 - s_1 = R\ln\left[\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{k}{k-1}}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{-1}\right] \tag{6-19}$$

在等熵变化过程中，因 $s_2 = s_1$，可得

$$p_2/p_1 = (\rho_2/\rho_1)^k$$

或

$$p/\rho^k = \text{Const.} \tag{6-20}$$

此即等熵关系式。

二、小扰动波的传播、音速和马赫数

凡具有弹性的介质，当受到扰动时，这扰动就会自动地传播开去。但需要指出，扰动的传播速度和产生扰动的介质自身的运动速度不是一回事。扰动是以波的形式传播出去的，并不是产生扰动的介质自身直接带出去的。在微弱扰动中，介质自身的运动速度是极其微小的，而微弱扰动波的传播速度则有一定的大小。

空气和其它任何一种气体都是弹性介质，当某种乐器发出声音时，在空气中就有一微弱扰动声波在传播，其传播速度称为音速（也有称为声速的）。其实，不管微弱扰动是怎么发生的（并非一定是某种乐器），只要给空气以微弱扰动，尽管听不见声音，但其扰动波仍然是以音速在传播。因此，就把微弱扰动波传播的速度都称为音速。

下面具体来说明微弱扰动波传播的物理过程，并导出音速公式。

$$a^2 = \mathrm{d}p/\mathrm{d}\rho$$

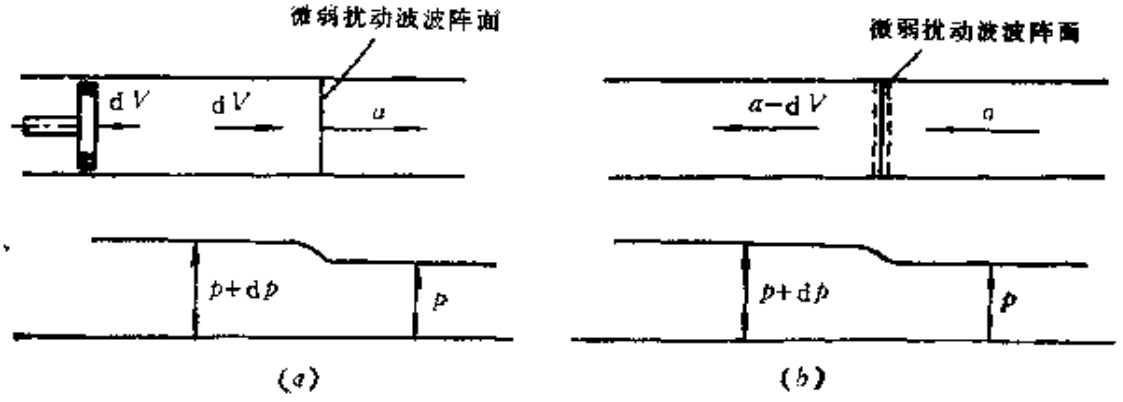


图 6-1

图6-1(*a*)是微弱扰动波传播的物理过程的理想化模型。在等截面直长管内充满可压缩气体，管子的左端有一活塞。管内气体原来处于静止状态。若推动活塞以微小速度 $\mathrm{d}V$ 向右运动，则紧贴活塞右侧的气体也伴随向右运动，并产生微小的压力增量；向

右运动的气体又推动它右侧的气体向右运动，同样也产生压力增量。这个微弱扰动压缩波就是如此以速度为a的波阵面AA的形式向右推进并传播开去。速度a称为音速。压缩波阵面右侧是未经扰动的静止气体，压力为p，密度为ρ，通过压缩波阵面后，气体的速度为$\mathrm{d}V$，压力为$p+\mathrm{d}p$，密度为$\rho+\mathrm{d}\rho$。在此情况下，如果考虑把描写气体运动的坐标系固连在管壁上，则因通过波阵面后的气体状态参数将随时间而发生变化，因而流动也是随时间变化的，故为非定常流问题。为了使问题简化，现将坐标系（相对坐标系）固定在波阵面上，如图6-1(b)所示。此时波阵面静止不动，而波阵面前后的状态不再随时间而变化。这样就把非定常流动变换为定常流动了。在这个坐标系中，压缩波阵面右侧原来静止的气体将以速度a向左运动，压力为p，密度为ρ。左侧的气体将以速度$a-\mathrm{d}V$向左运动，压力为$p+\mathrm{d}p$，密度为$\rho+\mathrm{d}\rho$。这正是在第三章曾讲述过的从相对运动角度来研究流动的方法，它来化简问题。

今研究图6-1(b)中虚线所包围的控制体，设管道截面积为A。对控制体应用质量方程式（3-56），有

$$\rho aA=(\rho+\mathrm{d}\rho)(a-\mathrm{d}V)A$$

略去右端的高阶小项$\mathrm{d}\rho\mathrm{d}V$，经整理后可得

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}=\frac{\mathrm{d}V}{a}. \tag{6-21}$$

对控制体应用动量方程，参看式（3-104），和（3-107），于是有

$$pA-(p+\mathrm{d}p)A=\rho aA[(a-\mathrm{d}V)-a]$$

整理后可得

$$\mathrm{d}p=\rho a\mathrm{d}V \tag{6-22}$$

由式（6-21）和（6-22）消去$\mathrm{d}V$即得音速公式

$$a^2=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}. \tag{6-23}$$

因微弱扰动波在气体中传播的过程可以视作等熵压缩过程，应用等熵条件 $p/\rho^{k}=\text{Const.}$，可得

$$a^2=k\left(\frac{p}{\rho}\right) \tag{6-24}$$

故音速计算公式[即式（1-23）]为

$$a=\sqrt{kRT} \tag{6-25}$$

在室温 $T=15℃$条件下，空气中的音速为340米/秒。氢气中的音速为1 292米/秒。不可压缩流体中，[参看式（1-14），（1-22）等]，因$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}=\frac{E}{\rho}$，或 $a=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$，但其弹性模量 $E\to\infty$故可得 $a\to\infty$，所以，在不可压缩流体中，从理论上讲，任一微弱扰动产生的小扰动波会立即传播到整个流体。

在流动问题中，气流的速度 V 对当地音速a之比称为流动马赫数，记为Ma[见式（1-24）]

$$Ma=V/a \tag{6-26}$$

流动马赫数在高速流动中是一个极重要的相似准数（参看第四章），许多流动现象并不只决定于流速的大小，而是决定于流动马赫数。按照流动马赫数是小于1、等于1和大于1可把流动区分为亚音速流动、音速流动和超音速流动。它们的流动特性下面即将陆续介绍。

三、微弱扰动区的划分

这里要讨论的是在流场中小扰动波的传播有无边界的问题。由上所述已知，任何弹性介质中的微弱扰动波，都会以音速从扰源向四面八方传播开去。比如当飞机在空中飞过时，飞机外表面的每一部分对大气都产生扰动；其中，产生的小扰动波是否也能向四周传播呢？讨论这个问题时，首先假定扰源是静止的，而气流从左面以某个流速V流来的情况。现分四种流速来分析：（1）流速$V=0$；（2）流速V小于音速，$V<a$；（3）流速V等于音

速，$V=a$；（4）流速V大于音速，$V>a$。

图6-2(a)是$V=0$的情况，设扰源每隔一秒钟发出一次小扰动波，图示为4秒钟末的一瞬间小扰动波的四个波阵面位置。这是四个同心的球面。最大的球面半径为$4a$，是4秒钟前发出的一个小扰动波面经4秒钟后所达到的位置。最小的球面半径是$1a$，

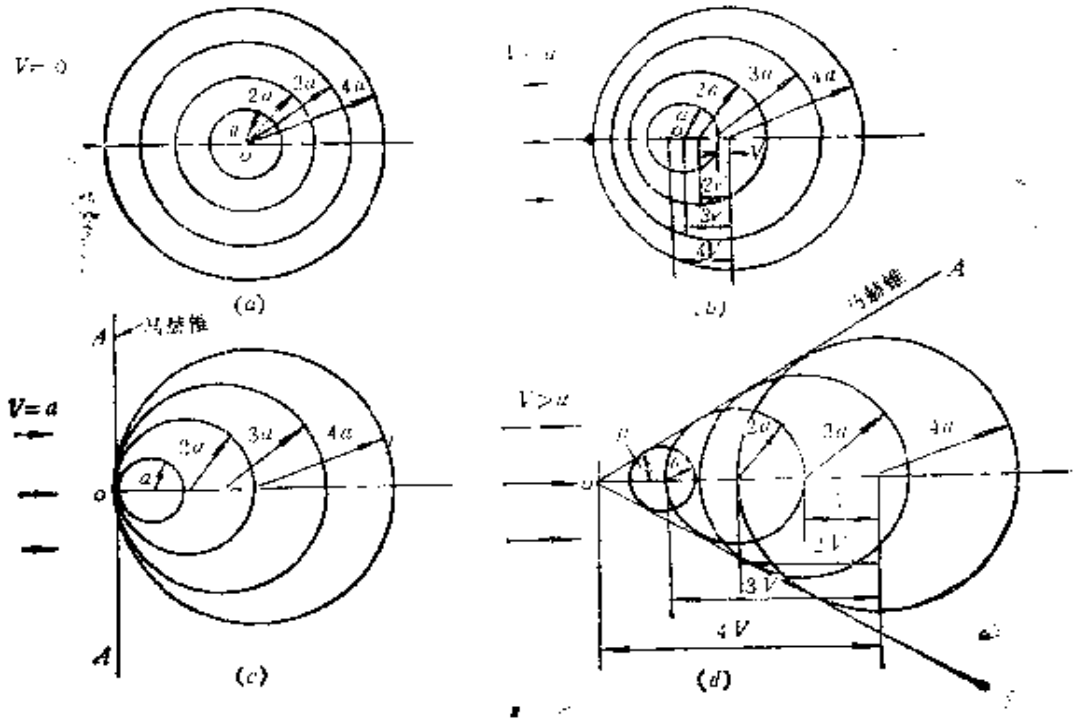


图 6-2

那是4秒钟之初发出的小扰动波面经1秒钟后所达到的位置。第4秒钟末或第五秒钟初的扰动刚要发出，扰动还只是o处的一点。由于流速为零，每个小扰动波面都以o点为球心向四面八方传播。可见，只要时间足够长，小扰动是会波及于全场的。图6-2(b)所示为向右的气流速度$V<a$既流动马赫数$Ma<1$（亚音速流动）的情况。这时，每次发出的小扰动波在向四周传播的同时，还跟随气流向右移动。因为流速V小于音速a，即小扰动向左传播的速度大于气流向右的速度，所以小扰动波还能向扰源o点的左侧传播（逆流上传），时间足够长之后，小扰动仍然会波及全流场。图6-2(c)是气流速度等于音速$V=a$即$Ma=1$（音速流

动）的情况。这时每次发出的小扰动波虽然仍以音速向四周传播，但小扰动波同时随气流向右移动的速度恰等于音速，所以每个小扰动波的左边界都通过扰源所在的o点。这样，小扰动所波及的范围就只能是过o点垂直于来流的平面AoA的右半空间（再不能逆流上传了）。AoA平面以左的区域称为无扰区。这种音速流动的情况和亚音速流动相比有了质的区别：亚音速流动时，小扰动会波及于全场，音速流动就有一扰动不能越过的界线。全场可划分为小扰动影响区及无扰区（也称禁讯区）。图6-2(d)是流速$V>a$即$Ma>1$（超音速流动）的情况。在第4秒钟末可以看到第1秒钟初发出的小扰动波阵面的球面半径已扩展为$4a$，而球心则随气流向下游移动了$4V$的距离，因$4V>4a$，所以球面的左边界也落在扰源o点之右侧。余此类推。第4秒钟初发出的小扰动波的球面半径是$1a$，球心位置向下游移了$1V$，小扰动波阵球面也完全落在扰源o的下游。这些球面的公切面是一个母线为oA的圆锥面。扰动只能波及于此锥以内的地区（扰动区）。母线oA和来流速度的夹角μ是

$$\mu = \text{arc sin}\frac{a}{V} = \text{arc sin}\frac{1}{Ma} \qquad (6\text{-}27)$$

称为马赫角。各扰动波面的公切圆锥称马赫锥。母线oA称马赫线。

按式（6-27）可知，流动马赫数越大，马赫角μ越小。当流动马赫数减小到$Ma=1$时，马赫角μ达到最大值，$\mu=\pi/2$。流动马赫数再小（比如$Ma<1$的亚音速流动）就不存在马赫线与马赫角了。所以马赫线、马赫锥的概念只在超音速（包括音速）流场中才存在。

如果空气静止，扰源（如飞机）以V的速度运动，同样可依V是小于、等于还是大于静止空气中的音速a来区分小扰动所能波及的范围。所以飞行器以超音速和亚音速飞行时，流场所受到的小扰动情况有本质的区别。以上所说的以马赫锥或马赫线为小

扰动边界的情况，均只限于微弱扰动；对于强扰动，例如激波，其扰动传播的边界则是与马赫锥有差别的。在以后的课程中会有讨论。

例 6-1　已知：喷气式飞机以时速1 050公里飞过海面。设大气温度为 280 开。求：飞机的飞行马赫数。

解　查表1-2，空气的$R=286.8$焦耳/(公斤·开)，$k=1.4$，所以由（6-25）式，大气音速为

$$a=\sqrt{1.4\times286.8\times280}=20.04\sqrt{280}$$
$$=335.3\ (\text{米/秒})$$

因此，飞行马赫数为

$$Ma=V/a=\frac{1050\times10^3}{60\times60}\times\frac{1}{335.3}=0.870$$

§ 6-2　可压缩气体的一维定常流动

一维定常流是指流场中的物理量只是一个空间坐标的函数的流动。本章主要讨论的是沿流管或管道的流动。假如流管或管道的中心线弯曲的曲率不大，横截面形状也无急剧的变化，如超音速风洞、火箭的喷管和喷气发动机的进气道等管道流动，则可以认为在任一管道横截面上各点的物理量是相等的。或者可用截面上的平均物理量代替截面上各点的物理量，即可按一维流来对待，这样处理，既反映了问题的本质，同时又使问题大大地简化了。

一、一维定常流的基本方程（微分形式）

如图 6-3 所示，在流管上取一段微元流管作为控制体（图上用虚线表出），则可对控制体写出质量方程、动量方程及能量方程。

1．质量方程

对控制体可写出以下质量方程，参看式（3-56），

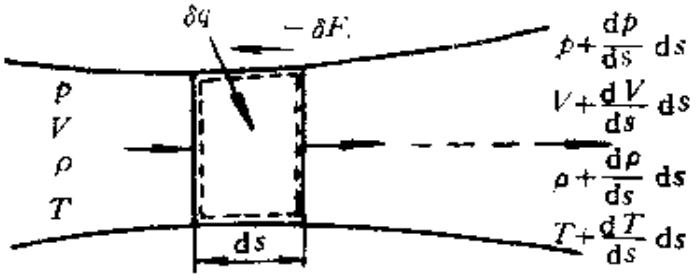


图 6-3

$$\rho VA=\left(\rho+\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s\right)\left(V+\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s\right)\left(A+\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s\right)$$

对上式化简，略去高阶小量后可得[参看式（3-58）]

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}+\frac{\mathrm{d}V}{V}+\frac{\mathrm{d}A}{A}=0 \tag{6-28}$$

2．动量方程

在不计体积力（如重力）的条件下，沿 s 方向的动量方程如下[参看式（3-107）]：

$$pA+\left(p+\frac{\mathrm{d}p}{2}\right)\mathrm{d}A-(p+\mathrm{d}p)(A+\mathrm{d}A)-\delta F_{\tau}$$
$$=\rho VA[(V+\mathrm{d}V)-V]$$

式中 $-\sigma F_{\tau}$ 为作用于控制体侧面上的粘性摩擦阻力在 s 方向的分量。$\left(p+\frac{\mathrm{d}p}{2}\right)\mathrm{d}A$ 项是作用在控制体侧面上的压力的合力在 s 方向的分量。整理并略去高阶小量后可得

$$V\mathrm{d}V+\frac{\mathrm{d}p}{\rho}+\frac{\delta F_{\tau}}{A\rho}=0 \tag{6-29}$$

若不计气体的粘性，则 $\delta F_{\tau}=0$，方程可简化为

$$V\mathrm{d}V+\frac{\mathrm{d}p}{\rho}=0$$

它同第三章中所推导的理想流体沿流线的欧拉运动方程式(3-68)相一致（不计重力势能）。

3．能量方程

假定通过控制体侧面与外界无机械功交换，但有热量的交换，不计体积力作用，用 q_H 表示单位质量流体在单位时间内所吸收的热量。于是从能量守恒与转换定律出发可写出下列方程，参看式（3-94）

$$m\frac{1}{2}V^2 + pVA + mu + mq_H = m\frac{1}{2}(V + \mathrm{d}V)^2 + (p + \mathrm{d}p)(A + \mathrm{d}A)(V + \mathrm{d}V) + m(u + \mathrm{d}u)$$

上式中 m 为流过流管的质量流量（$m = \rho VA = \mathrm{Const.}$），$m\frac{1}{2}V^2$ 为流体的动能，mu 为内能，mq_H 为热能，$pVA = \left(\frac{p}{\rho}\right)\rho VA = m\left(\frac{p}{\rho}\right)$ 为流动流体所输运的流动功。整理上式，并略去高阶小量，可得能量方程

$$V\mathrm{d}V + \mathrm{d}h = q_H \qquad (6\text{-}30)$$

式中

$$h = u + \frac{p}{\rho},\quad u = c_v T$$

上述三个方程是微分形式的一维定常流动的基本方程组，无论是否计及气体的粘性，均适用。其中 p，ρ，V，h，A，q_H，δF_s 等为变量，在求解具体问题时，还须补充足够的方程或条件，才能使方程封闭求解。

二、一维定常等熵流的基本方程（积分形式）

由热力学知，等熵流动是过程既绝热又可逆的流动过程。

在绝热流条件下，即 $q_H = 0$，于是能量方程式（6-30）可表示成

$$V\mathrm{d}V + \mathrm{d}h = 0$$

对上式积分得

$$\frac{V^2}{2}+h=\text{Const.} \tag{6-31}$$

应当指出，在导出此方程时，只是要求过程绝热，而并未限制过程是否可逆，因而这个方程既适用于可逆过程（等熵过程），也适用于不可逆过程（非等熵过程）。

如果是可逆流动，意味着不存在流体微团之间的内摩擦及流体与壁面之间的摩擦（即$\delta F_r=0$），则这种流动必定是理想流体的流动。上面已推导了这种流动的微分形式的动量方程是

$$V\mathrm{d}V+\frac{\mathrm{d}p}{\rho}=0$$

对它积分可得

$$\frac{1}{2}V^2+\int\frac{\mathrm{d}p}{\rho}=\text{Const.} \tag{6-32}$$

当然，这个方程只适用于理想流体的一维定常流动。

质量方程式（6-28）与过程是否绝热或可逆无关，其积分形式为[或参看式（3-56）]

$$\rho VA=\text{Const.} \tag{6-33}$$

式（6-31）、（6-32）和(6-33）这三个方程构成了一维定常可压理想绝热流的基本方程组，即等熵流动的基本方程组（积分形式）。

三、一维定常流能量方程的各种形式

由式（6-8）已知$h=c_pT$，利用式（6-12）、（6-1）及（6-25）关系，可得

$$h=c_pT=\frac{k}{k-1}RT=\frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho}=\frac{a^2}{k-1} \tag{6-34}$$

因而，能量方程式（6-31）可写成下列各种形式

$$\frac{1}{2}V^2+c_pT=\text{Const.} \tag{6-35}$$

$$\frac{1}{2}V^2+\frac{k}{k-1}RT=\text{Const.} \tag{6-36}$$

$$\frac{1}{2}V^2+\frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho}=\text{Const.} \tag{6-37}$$

$$\frac{1}{2}V^2+\frac{1}{k-1}a^2=\text{Const.} \tag{6-38}$$

因为推导能量方程式（6-31）时只用了绝热条件，故式（6-35）至（6-38）均是绝热流动过程满足的能量方程。

若考虑的是等熵流动过程，则存在等熵关系式（6-20）。将该关系式代入动量方程式（6-32），积分后也可得到式(6-35)—（6-38）的各种形式的能量方程。这表明，等熵流动条件下能量方程与动量方程相一致。但是，当过程绝热而不可逆时，能量方程式（6-35)～(6-38）则不能由式（6-32）的动量方程式推出。然而，无论过程是否可逆，只要绝热，能量方程仍具有式（6-35)～(6-38）所示的形式。

四、驻点参数

流动中流速等熵地滞止为零的点称为驻点。该点的状态参数叫做驻点参数，或称总参数。对应于这个状态的焓、压力、温度和密度等分别称为总焓、总压、总温和总密度，或驻点焓、驻点压力、驻点温度和驻点密度等。分别用 h_0、p_0、T_0 和 ρ_0 表示。驻点状态的音速可以用 a_0 表示。于是能量方程可写成

$$\frac{1}{2}V^2+c_pT=c_pT_0 \tag{6-39}$$

$$\frac{1}{2}V^2+\frac{k}{k-1}RT=\frac{k}{k-1}RT_0 \tag{6-40}$$

$$\frac{1}{2}V^2+\frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho}=\frac{k}{k-1}\frac{p_0}{\rho_0} \tag{6-41}$$

$$\frac{1}{2}V^2+\frac{1}{k-1}a^2=\frac{1}{k-1}a_0^2 \qquad (6\text{-}42)$$

显然，在等熵流中，沿一条流管的 T_0，p_0，ρ_0 和 a_0 恒等于常数而不改变。

和驻点参数（或总参数）相对的是流动过程中任意一点处的当地流参数 h、p、T、ρ 等，这些称为静参数。在高速流动中，取驻点作为参考点来表示任何一点处的静参数比较方便。如式（6-39）可写成

$$\frac{T_0}{T}=1+\frac{1}{2}\frac{V^2}{c_pT}$$

即[见式（6-12），（6-25）]

$$\frac{T_0}{T}=\left(1+\frac{k-1}{2}Ma^2\right) \qquad (6\text{-}43)$$

或

$$\frac{a_0^2}{a^2}=\left(1+\frac{k-1}{2}Ma^2\right) \qquad (6\text{-}44)$$

它们表示了流动中一点处的静温和总温之比只取决于马赫数 Ma，这是绝热流动下的重要关系式。当然也适合于等熵流动的情况。

对于与大容器（如贮气罐）相连接的一维管流（参见图6-4），由于容器体积足够大，可以认为容器中的状态处于速度为零的驻点状态。因而贮气罐中的压力、温度就可看作总压、总温。对于没有真实驻点状态的流动，为了计算的方便，可以假想

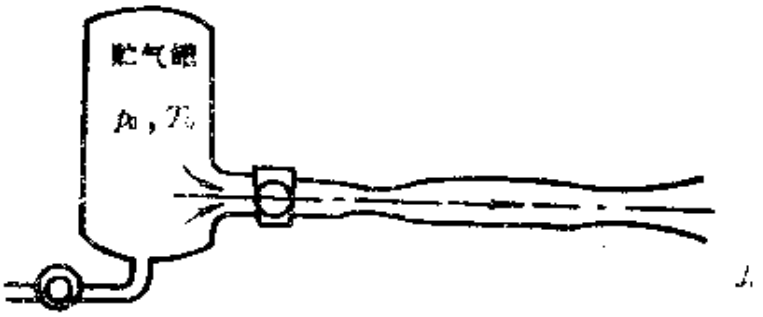


图 6-4

存在着一个“贮气罐”、假想气流等熵地滞止到速度为零的参数即为“贮气罐”参数或驻点参数，则上述的总静参数比的关系式同样成立。

对于等熵过程，则还可以有以下关系式：

$$\frac{p_0}{p}=\left(1+\frac{k-1}{2}Ma^2\right)^{\frac{k}{k-1}} \tag{6-45}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho}=\left(1+\frac{k-1}{2}Ma^2\right)^{\frac{1}{k-1}} \tag{6-46}$$

五、临界状态参数、最大速度和速度系数

临界状态是流速等于当地音速时的状态，通常以脚注“*”表示，如 p_*，ρ_*、T_*、V_*、a_*、Ma_*（=1.0）等。在临界状态下，能量方程式（6-42）可写成

$$\frac{1}{2}V_*^2+\frac{1}{k-1}a_*^2=\frac{1}{k-1}a_0^2$$

由于$V_*=a_*$、于是得到

$$a_*^2=\frac{2}{k+1}a_0^2 \tag{6-47}$$

这时式（6-43）变为（因 $Ma_*=1.0$）

$$\frac{T_0}{T_*}=\frac{k+1}{2} \tag{6-48}$$

有些问题中，使用无量纲速度系数 λ 比使用马赫数 Ma 来得更为方便些。速度系数 λ 的定义为：

$$\lambda=\frac{V}{a_*} \tag{6-49}$$

它与 Ma 数的关系，因

$$Ma^2=\frac{V^2}{a^2}=\frac{V^2}{a_*^2}\cdot\frac{a_*^2}{a_0^2}\cdot\frac{a_0^2}{a^2}=\lambda^2\cdot\frac{a_*^2}{a_0^2}\cdot\frac{a_0^2}{a^2}$$

用式（6-44）及（6-47）代入，得

$$\lambda^2=\frac{\frac{k+1}{2}Ma^2}{1+\frac{k-1}{2}Ma^2} \tag{6-50}$$

或

$$Ma^2=\frac{\frac{2}{k+1}\lambda^2}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2} \tag{6-51}$$

*Ma*数与 λ 的关系也可参见图 6-5

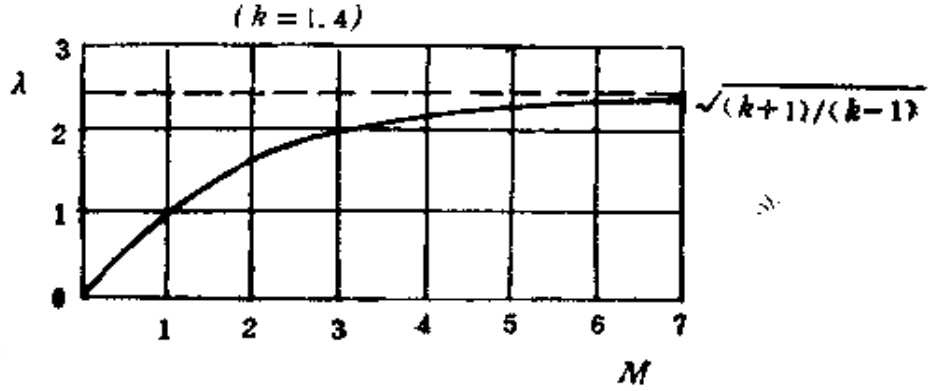


图 6-5

由式（6-43），（6-50）可以看出，当 $T\to 0$ 时，$Ma\to\infty$，但 λ 却趋于有限极值 λ_{max}，有

$$\lambda_{max}=\sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \tag{6-52}$$

利用式（6-51），则由式（6-43）即得

$$\frac{T}{T_0}=1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2 \tag{6-53}$$

若流动过程是等熵的，则还有

$$\frac{p}{p_0}=\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}} \tag{6-54}$$

$$\frac{\rho}{\rho_0}=\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}} \tag{6-55}$$

在临界状态时，$M_{a_*}=1$，且$\lambda=1$，由式(6-49)(6-48)、(6-54)、(6-55)和(6-47)等，有

$$V_*=a_* \tag{6-56a}$$

$$\frac{T_*}{T_0}=\frac{2}{k+1} \tag{6-56b}$$

$$\frac{p_*}{p_0}=\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} \tag{6-56c}$$

$$\frac{\rho_*}{\rho_0}=\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}} \tag{6-56d}$$

$$\frac{a_*^2}{a_0^2}=\frac{2}{k+1} \tag{6-56e}$$

当$T=0$时，由式(6-39)可见，速度可达到最大值，即

$$V_{max}=\sqrt{2c_pT_0}$$

或

$$V_{max}=\sqrt{\frac{2k}{k-1}RT_0}=\sqrt{\frac{2}{k-1}}a_0 \tag{6-57a}$$

利用式(6-47)还可写成

$$V_{max}=\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}a_* \tag{6-57b}$$

这种最大速度状态只是一种假想的状态。其含意是：给定一个总温之后，流动速度所能达到的最大值不能超过$\sqrt{2c_pT_0}$，这意味着气体的全部焓值都转变成了宏观的动能。

对于确定的气体，其比热比k和气体常数R和一定的。式(6-43)—(6-46)表示的总静参数之比都只是Ma的函数。用速度系数表示之后，式(6-53)至(6-55)都只是λ的函数。为了使用方便，可把这些函数预先算出，绘成图线，或制成函数表（这种函数表称为气体动力学函数表）。使用时可直接查表或图线。在本章附录中所列的是一维等熵流气体动力学函数表的节录。由Ma或λ即可查出$\tau(\lambda)=T/T_0$，$\pi(\lambda)=p/p_0$，$\varepsilon(\lambda)=\rho/\rho_0$，也可由$Ma$查出$\lambda$。

六、熵和总压的关系

由式（6-19）可得

$$\Delta s = s_2 - s_1 = R\ln\left[\left(\frac{p_1}{p_2}\right)\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{k}{k-1}}\right] \qquad (6\text{-}58)$$

又由式（6-43）和（6-45）有

$$\frac{p_{0_1}}{p_1} = \left(\frac{T_{0_1}}{T_1}\right)^{\frac{k}{k-1}},\quad \frac{p_{0_2}}{p_2} = \left(\frac{T_{0_2}}{T_2}\right)^{\frac{k}{k-1}} \qquad (6\text{-}59)$$

将式（6-59）代入式（6-58），得

$$\Delta s = -R\ln\left[\left(\frac{p_{0_2}}{p_{0_1}}\right)\left(\frac{T_{0_1}}{T_{0_2}}\right)^{\frac{k}{k-1}}\right] \qquad (6\text{-}60)$$

若流动过程是绝热的，则$T_{0_1} = T_{0_2}$，式（6-60）成为

$$\Delta s = -R\ln\left(\frac{p_{0_2}}{p_{0_1}}\right) \qquad (6\text{-}61)$$

这时熵的变化就只和总压变化有关。对于一个绝热过程，如果变化过程中有摩擦等损失存在，则熵必有所增加，必然表现为$p_{0_2} < p_{0_1}$，即总压有损失。换句话说，若流动过程是等熵的，则总压保持不变。

七、气流按不可压缩处理的限度

对于$Ma > 0$的不同速度的流动情况，气体都具有不同程度的压缩性，下面讨论Ma数的大小在什么范围以内可以忽略气体压缩性的影响。

当气流流向物体时，例如，参看图3-37，沿oA流线上的流速将逐渐等熵滞止为零。按可压流处理时，由式（6-45）知

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2}Ma^2\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

当Ma数较小时，上式可按二项式展开，有

$$\frac{p_0}{p} \approx 1 + \frac{k}{2}Ma^2\left[1 + \frac{Ma^2}{4} + \frac{(2-k)Ma^2}{24} + \cdots\right]$$

其中因$\frac{k}{2}pMa^2=\frac{k}{2}\frac{\rho V^2}{kp/\rho}=\rho V^2/2$，代入上式可得

$$p_0=p+\frac{\rho V^2}{2}\left[1+\frac{Ma^2}{4}+\frac{(2-k)}{24}Ma^4+\cdots\right] \quad (6\text{-}62)$$

引入无因次量

$$c_{p_0}=\frac{p_0-p}{\frac{1}{2}\rho V^2}=\frac{p_0-p}{q}=1+\frac{1}{4}Ma^2+\frac{2-k}{24}Ma^4+\cdots$$

c_{p_0}称为驻点的压力系数，$q=\frac{1}{2}\rho V^2$为来流的速压。当$Ma=0$（气体按不可压理想流体处理时），$c_{p_0}=1$；当$Ma\neq 0$（<1）时，$c_{p_0}>1$。

对于空气，$k=1.4$，上式化简为

$$c_{p_0}=1+\frac{1}{4}Ma^2+\frac{1}{40}Ma^2+\cdots \quad (6\text{-}63)$$

按上式计算可得，$Ma=0.1$，$c_{p_0}=1.025$；$Ma=0.2$，$c_{p_0}=1.012$；$Ma=0.3$，$c_{p_0}=1.025$；当$Ma=0.5$时，$c_{p_0}=1.064$。这说明随着Ma数的增加，按不可压流计算所得的c_{p_0}误差越来越大。$Ma=0.5$时，相对误差可达6.4%。如果约定相对误差以2%左右为宜，则可取来流Ma数$=0.3$时为不可压理想流体流动关系式的使用上限。当$Ma>0.3$时，则应按可压理想流体处理。假如来流马赫数在按不可压流处理的范围以内，按不可压流分析和求解问题，则由于减少了一个密度的变量而带来很大的方便。

从以上分析，也可看出马赫数的作用；需要指出，式（6-62）和（6-63）只适用于来流马赫数$Ma<1$，即为亚音速来流的情况。如全流场各点马赫数均小于1，则称为亚音速流场；当全流场各点马赫数$Ma\leqslant 0.3$（此值可根据约定来确定）时，则可称为低速流场或不可压流场。如果来流马赫数$Ma>1$，称为超音速气流，若全流场各点马赫数$Ma>1$，称为超音速流场。

在不同的流场中，流动现象与规律各不相同，需要分别讨论与分析。这也是需要随时注意的事。

例 6-2　已知：容器内贮有压力为 101.3 千帕，密度1.5 公斤/米³ 的空气，设容器外面为真空。若在容器壁上开孔，装有入口形状光滑的管嘴，不计入口产生的流动损失，并假定管口截面外压力为零。求：空气经管嘴的流出速度。

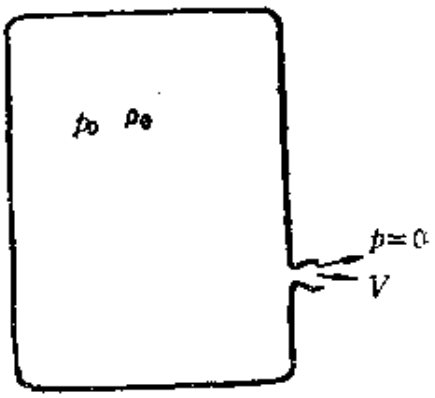


图 6-6

解　因为假定管口处为真空，故音速 $a=0$，因此有 $Ma\to\infty$，对应于 $\lambda=\lambda_{max}$，即 V 趋于 V_{max} 的情况，于是空气经管嘴的流出速度为〔见式(6-57a)〕

$$V_{max}=\sqrt{\frac{2}{k-1}a_0^2}=\sqrt{\frac{2k}{k-1}\frac{p_0}{\rho_0}}=\sqrt{\frac{2\times1.4}{1.4-1}\times\frac{101.3\times10^3}{1.5}}$$

$$=687.6\text{（米/秒）}$$

此速度是给定驻点状态下所能达到的最大速度。

例 6-3　已知：在某个一维定常管流中，①截面处空气流速为30米/秒，压力为35千帕，温度为150℃，②截面处流速为150米/秒。假定沿管道的流动是等熵的，空气的 $c_p=1\,004$ 焦耳/(公斤·开)，$R=287$ 焦耳/(公斤·开)。求：②截面处的气流压力和温度。

解　已有　$V_1=30$ 米/秒，$V_2=150$ 米/秒，

$p_1=35$ 千帕，$T_1=150+273.15=423.15$ 开，

$c_p=1\,004$ 焦耳/（公斤·开）

按式（6-39）有

$$c_pT_0=\frac{V_1^2}{2}+c_pT_1=\frac{30^2}{2}+1\,004\times423.15$$

$$=425\,292.6\text{（焦耳/公斤）}$$

所以

$$T_0=\frac{c_pT_0}{1\,004}=423.6\text{ 开}$$

又

$$a_* = \sqrt{\frac{2}{k+1}a_0^2} = \sqrt{\frac{2}{k+1}kRT_0} = \sqrt{\frac{2\times1.4\times287}{(1.4+1)}\times423.6}$$

$$=376.6\ (\text{米/秒})$$

所以

$$\lambda_1 = \frac{V_1}{a_*} = \frac{30}{376.6} = 0.0797$$

$$\lambda_2 = \frac{V_2}{a_*} = \frac{150}{376.6} = 0.3983$$

据式（6-54）

$$\frac{p_1}{p_0} = \left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2\right)^{\frac{k}{k-1}} = \left(1-\frac{1.4-1}{1.4+1}\times0.0797^2\right)^{\frac{1.4}{1.4-1}}$$

$$=0.9963$$

所以

$$p_0 = \frac{p_1}{0.9963} = \frac{35}{0.9963} = 35.13\text{千帕}$$

而

$$p_2 = p_0\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_2^2\right)^{\frac{k}{k-1}} = p_0\left(1-\frac{1.4-1}{1.4+1}\times0.3983^2\right)^{3.5}$$

$$=32\ (\text{千帕})$$

据式（6-53）

$$\frac{T_2}{T_0} = \left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_2^2\right) = \left(1-\frac{1.4-1}{1.4+1}\times0.3983^2\right) = 0.9736$$

所以

$$T_2 = 0.9736T_0 = 0.9736\times423.6 = 412.4\text{开} = 139℃$$

例 6-4　已知：如图 6-7 所示，在真空泵作用下大气经过短管被吸入容器中。大气参数为 $p_0=101.3$ 千帕，$T_0=300$开，等截面短管的截面积为 30 厘米^2。容器内气体压力保持为 95 千帕，设短管入口具良好外形（圆弧形），没有流动损失（图 6-7a）。$k=1.4$。求：短管出口处[图注①]的马赫数 Ma_1、音速 a_1、密度 ρ_1 和质量流量 m 各为多大。

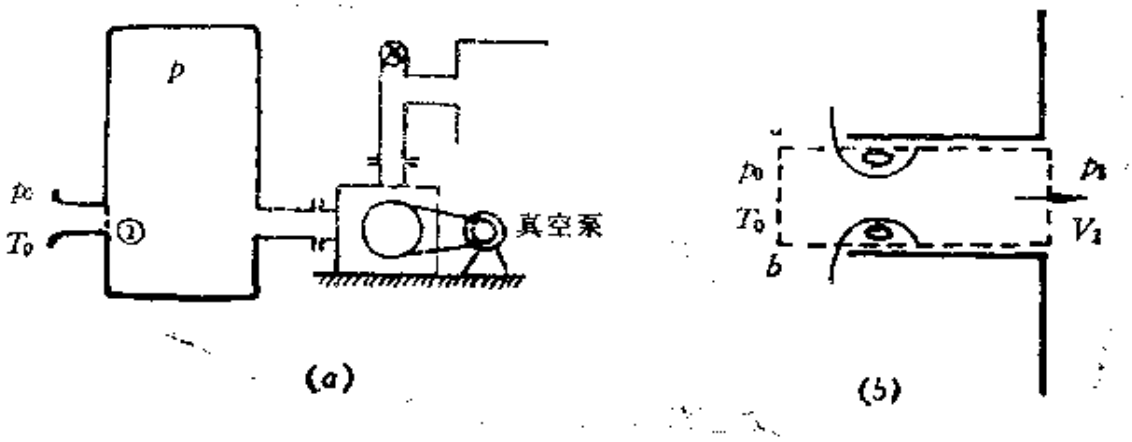


图 6-7

解 本题可用等熵流动的关系式求解。

应用式（6-45）

$$\frac{p_0}{p_1}=\left(1+\frac{k-1}{2}Ma_1^2\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

可解出 Ma_1

$$Ma_1=\sqrt{\frac{2}{k-1}\left\{\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}-1\right\}}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{1.4-1}\left\{\left(\frac{101.3\times10^3}{95\times10^3}\right)^{\frac{1}{3.5}}-1\right\}}$$

$$=0.3042$$

又

$$T_1=\frac{T_0}{1+\frac{k-1}{2}Ma_1^2}=\frac{300}{1+0.2\times(0.3042)^2}=294.5\text{（开）}$$

$$a_1=20.04\sqrt{T_1}=20.04\sqrt{294.5}=343.9\text{（米/秒）}$$

$$\rho_1=\frac{kp_1}{a_1^2}=1.4\times\frac{95\times10^3}{343.9}=1.124\text{（公斤/米}^3\text{）}$$

$$m=\rho_1V_1A_1=1.124\times343.9\times0.3042\times30\times10^{-4}$$

$$=0.352\ 7\text{（公斤/秒）}$$

注 如果有气体动力学函数表可查，则这类问题的计算将更

为方便。解题步骤如下：

1．由 $\pi(\lambda_1)=\frac{p_1}{p_0}$ 查出 λ_1, Ma_1。

2．由 λ_1 查出 $\tau(\lambda_1)$，$\varepsilon(\lambda_1)$。

据 $\tau(\lambda_1)=\frac{T}{T_0}$ 计算 T_1，

据 $\varepsilon(\lambda_1)=\frac{\rho_1}{\rho_0}$ 计算 ρ_1.

3．计算 a_1， m.

例 6-5 已知：同上例题，但短管入口处无圆弧形，即要计及大气进入短管时的分离流动损失（图 6-7(*b*)）。求：短管出口处的 Ma_1、a_1、ρ_1 和 m 各为多大。

解 取控制体，如图 6-7(*a*)上虚线所示。远离容器的 ab 面上流速为零。故流入 ab 面的动量为零。未计从控制体侧面流入动量在流动方向上的分量。流出控制面在流动方向上的动量为

$$mV_1=\rho_1V_1^2A_1$$

作用在该控制面上沿流动方向的力为（忽略了控制面上的粘性剪切应力作用）

$$p_0A_1-p_1A_1$$

因此，由动量方程式（3-107）可得

$$\rho_1V_1^2A_1=p_0A_1-p_1A_1$$

所以

$$p_0-p_1=\rho_1V_1^2$$

由此有 $\frac{p_0}{p_1}=1+\frac{\rho_1V_1^2}{p_1}=1+\frac{kV_1^2}{a_1^2}=1+kMa_1^2$

故得

$$Ma_1=\sqrt{\frac{1}{k}\left(\frac{p_0}{p_1}-1\right)}=\sqrt{\frac{1}{1.4}\left(\frac{101.3\times10^3}{95\times10^3}-1\right)}=0.2176$$

$$T_1 = \frac{T_0}{1+\frac{k-1}{2}Ma_1} = \frac{300}{1+0.2\times 0.2176^2} = 297.2\ (\text{开})$$

$$a_1 = 20.04\sqrt{T_1} = 20.04\sqrt{297.2} = 345.5\ (\text{米/秒})$$

$$\rho_1 = k\frac{p_1}{a_1^2} = 1.4\times\frac{95\times 10^3}{(345.6)^2} = 1.114\ (\text{公斤/米}^3)$$

$$m = \rho_1 V_1 A_1 = \rho_1 a_1 Ma_1 A_1 = 1.114\times 345.6\times 0.2176 \times 30\times 10^{-4} = 0.2513\ (\text{公斤/秒})$$

与上例题结果比较可见，入口有流动损失时，Ma_1 减小，质量流量也减小。

§6-3 一维定常等熵变截面管流

在上一节中给出了一维定常流动的基本方程式和基本概念。本节将主要讨论一维定常变截面管道中的等熵流动。

一、流速与截面积的变化关系

定常一维流的质量方程式（微分形式）为

$$\frac{d\rho}{\rho}+\frac{dV}{V}+\frac{dA}{A}=0 \qquad (6\text{-}28)$$

不计体积力时一维定常理想流的欧拉运动方程式（3-68）为

$$VdV = -\frac{1}{\rho}dp \qquad (6\text{-}64)$$

利用式（6-23），上式可以改写为

$$VdV = -\frac{dp}{d\rho} = -\frac{dp}{d\rho}\frac{d\rho}{\rho} = a^2\frac{d\rho}{\rho}$$

即

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{V^2}{a^2}\frac{dV}{V}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = -Ma^2\frac{\mathrm{d}V}{V} \tag{6-65}$$

将式（6-65）代入式（6-28），得

$$(Ma^2-1)\frac{\mathrm{d}V}{V} = \frac{\mathrm{d}A}{A} \tag{6-66}$$

（6-66）式即为一维定常等熵管流速度变化与管横截面变化的关系式。由上式可以得出：

（1）若 $Ma<1$，即流动是亚音速的，有（Ma^2-1）<0，则 $\mathrm{d}V$ 与 $\mathrm{d}A$ 符号相反。这表明对于亚音速流动，流速与截面积成反比变化关系，即速度随截面积的增大而减小。反之，管截面积的减小将导致速度的增大。定性看来，亚音速流动的这一特性与不可压缩流动的运动规律相一致。

（2）若 $Ma>1$，即流动是超音速的，这时（Ma^2-1）>0，$\mathrm{d}V$ 与 $\mathrm{d}A$ 的符号相同。说明了气体作超音速流动时，流速与截面积成正比变化关系，即速度随截面积 A 的增大而增加。反之，管截面积的减小将导致速度下降，这个特性恰好与亚音速流动相反。

通过对式（6-65）的分析可以认识产生这个现象的原因。在 $Ma>1$ 时，密度 ρ 的下降率高于速度 V 的上升率，这就导致了为通过相同的流量 ρVA 需要更大的截面积 A。

（3）若 $Ma=1$，即为音速流动，由（6-66）式知，

$$\frac{\mathrm{d}A}{A} = 0$$

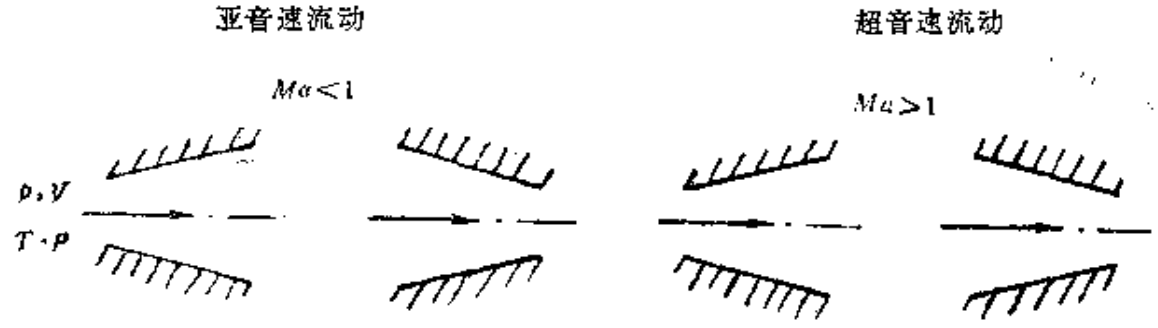
从数学概念来说，$\mathrm{d}A=0$ 的截面可以是最小截面，也可以是最大截面。下面将说明音速不可能在最大截面上出现。假如气流以超音速流入管道的扩张段，气流速度随着截面扩大而越来越大，到最大截面处达到最大值。故流速不会在最大截面处由超音速减为音速。反之，如果气流以亚音速流入管道的扩张段，由于截面的扩大而使流速降低，这样，速度只能保持为亚音速，永远达不

到音速。因而，音速不可能发生在最大截面处。而当亚音速气流流入收缩形管道时，随截面的减小流速将增大。在最小截面处流速达到最大值，因而在一定条件下可能会增加到音速。如果是超音速气流流入管道的收缩段，则流速随截面积减小而减速，到最小截面处超音速气流也可能会减为音速。因此，音速只可能在最小截面处出现。按前述知 $Ma=1$ 的状态称为临界状态，故 $Ma=1$ 的截面称为临界截面。所以，只有在最小截面处才可能成为临界截面。

由上面的讨论可以得出：入口为亚音速的气流流过收缩形管道时，在出口截面上流速最大也只可能达到音速。若要获得超音速气流，则要使亚音速气流先流经过收缩管道，使其在最小截面处达到音速，然后再进入扩张管道，使气流继续膨胀增速，从而获得超音速流。这种先收缩后扩张形的产生超音速流的管道称为拉瓦尔喷管（见图6-21）。

表 6-1 概括了一维定常等熵变截面管流的流动特性。

表6-1　一维定常等熵变截面管流动特性



面　积	增大	减小	增大	减小
速　度	减小	增大	增大	减小
压　力	增大	减小	减小	增大
密　度	增大	减小	减小	增大
温　度	增大	减小	减小	增大
马赫数	减小	增大	增大	减小

二、流量公式和截面比关系式

1．流量公式

对于管道流动，如风洞、火箭发动机或涡轮喷气发动机的尾喷管中的流动来说，流量都是重要的参数。通过风洞的流量的大小和风洞所需的贮气罐容量紧密有关，对于火箭和涡轮喷气发动机，则推力是直接和流量成比例的。因此，在工程问题中，流量计算具有普遍意义。

在管流中，通过任一横截面的质量流量为

$$m = \rho V A$$

由这个基本公式出发，可以得到以下几种不同形式的通过横截面 A 的流量计算公式。

$$m = \rho V A = \frac{p}{RT} VA = A\frac{pV}{\sqrt{kRT}} \cdot \sqrt{\frac{k}{R}} \cdot \sqrt{\frac{T_0}{T}} \cdot \frac{1}{\sqrt{T_0}}$$

$$= A\frac{p}{\sqrt{T_0}} \cdot \sqrt{\frac{k}{R}} \cdot Ma \cdot \left(1 + \frac{k-1}{2} Ma^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (6\text{-}67)$$

若已知 T_0、p、Ma 和截面积 A，则可用上式计算流量。如果利用式（6-45）消去上式中的 Ma 数后，则可得只包含总静压和总温的物理参数的流量计算公式，为

$$m = \frac{Ap}{\sqrt{RT_0}} \left\{ \left(\frac{2k}{k-1}\right) \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{k+1}{k}} \left[\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (6\text{-}68)$$

同样利用式（6-45）消去式（6-67）中的 p 后，可得，以驻点参数和 Ma 数表示的流量公式如下：

$$m = A\sqrt{kp_0\rho_0} Ma \left(1 + \frac{k-1}{2} Ma^2\right)^{-\frac{k+1}{2(k-1)}} \qquad (6\text{-}69)$$

对于比质量流量（单位面积上的质量流量）来讲，有

$$\rho V = \frac{m}{A} = \sqrt{kp_0\rho_0} Ma \left(1 + \frac{k-1}{2} Ma^2\right)^{-\frac{k+1}{2(k-1)}} \qquad (6\text{-}70)$$

由式（6-69）可知，当管道截面积给定以后，若驻点参数p_0、ρ_0不变，则流量m只是Ma数的函数。就比质量流量而言，当驻点参数不变时，也只是Ma数的函数。通过式（6-70）对Ma数求导数，可解得$Ma=1$时，即流速为音速时，比质量流量ρV达最大值，即

$$(\rho V)_{max}=\sqrt{kp_0\rho_0}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \tag{6-71}$$

对于管流来说，当A截面流速达到音速时（该截面即成为临界截面A_*）有最大流量，为

$$(m)_{max}=A_*\sqrt{kp_0\rho_0}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

$$=\sqrt{\frac{k}{R}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}}\frac{p_0}{\sqrt{T_0}}A_* \tag{6-72}$$

上式可写为

$$(m)_{max}=C\frac{p_0}{\sqrt{T_0}}A_* \tag{6-73a}$$

式中

$$C=\sqrt{\frac{k}{R}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}} \tag{6-73b}$$

在温度不太高的范围内，空气的$C=0.04042$，对于燃气则应按它的k及R值来计算C值。

将式（6-56c）和（6-56d）代入式（6-72）可得

$$(m)_{max}=A_*\left[p_*\rho_*\left(\frac{2}{k+1}\right)^{-\frac{k}{k-1}-\frac{1}{k-1}}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}\right]^{1/2}$$

$$=A_*(p_*\rho_*)^{1/2}=A_*\rho_*a_* \tag{6-74}$$

此时，最大比质量流量为

$$(\rho V)_{max}=\rho_*a_* \tag{6-75}$$

可见，最大流量就是通过临界截面的流量。

若对流量公式也引入气体动力学函数表计算，则会带来很大

的方便。

$$m = \rho V A = [\rho_0 \varepsilon(\lambda)][\lambda a_*]A$$

$$= \left[\frac{p_0}{RT_0}\varepsilon(\lambda)\right]\left[\lambda\sqrt{\frac{2k}{k+1}RT_0}\right]A$$

$$= [\lambda\varepsilon(\lambda)]\sqrt{\frac{2k}{k+1}\frac{1}{R}}\frac{p_0 A}{\sqrt{T_0}}$$

若定义一个新的气动函数 $q(\lambda) = \lambda\varepsilon(\lambda)\left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}}$，[$q(\lambda)$ 的大小可参看附录中的气体动力学函数表或图 6-8.]，于是

$$m = C\frac{p_0}{\sqrt{T_0}}Aq(\lambda) \qquad (6\text{-}76)$$

如果用 $\pi(\lambda) = \frac{p}{p_0}$ 来置换 p_0，则又得到用静压来表示的流量公式：

$$m = C\frac{pA}{\sqrt{T_0}}q(\lambda)/\pi(\lambda) = C\frac{pA}{\sqrt{T_0}}y(\lambda) \qquad (6\text{-}77)$$

这样就又定义了一个函数 $y(\lambda)$：

$$y(\lambda) = q(\lambda)/\pi(\lambda)$$

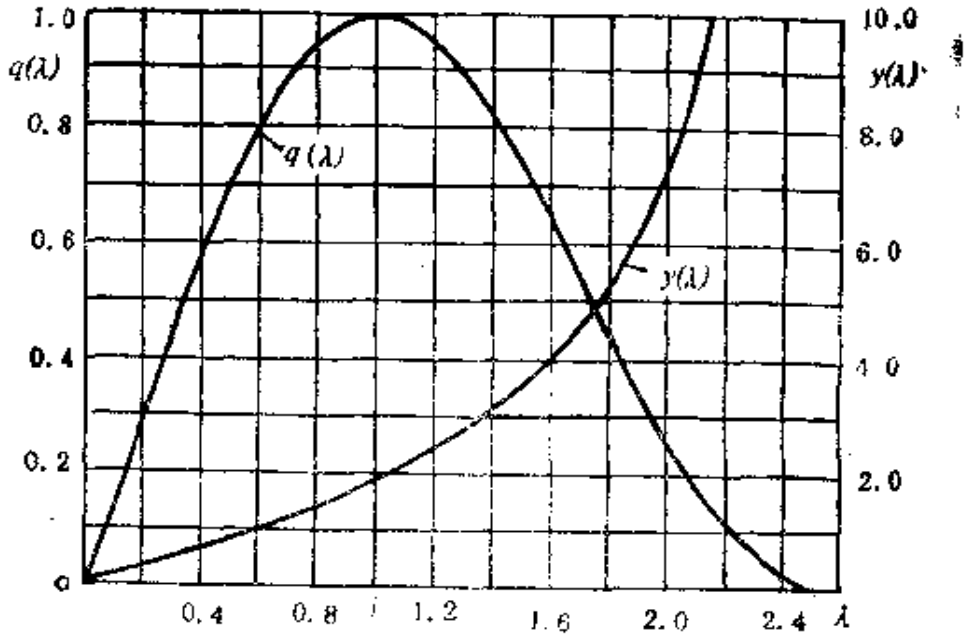


图 6-8

$q(\lambda)$和 $y(\lambda)$的曲线示于图 6-8。在 $\lambda=1$ 时，$q(\lambda)$达到最大值 1。

2. 截面比关系式

据质量方程有

$$\rho V A=\rho_* V_* A_* \tag{6-78}$$

A_*是临界截面积，如果管内是纯亚音速流动，则 A_*是假想的流速等于临界速度 $V_*=a_*$处的截界截面积。由（6-78）式可得

$$\frac{A}{A_*}=\left(\frac{\rho_*}{\rho}\right)\left(\frac{V_*}{V}\right)=\left(\frac{\rho_*}{\rho_0}\right)\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)\left(\frac{a_*}{V}\right) \tag{6-79}$$

将式（6-46）及（6-72）代入上式，再用式（6-50），可得

$$\frac{A}{A_*}=\frac{1}{Ma}\left\{\frac{2}{k+1}\left(1+\frac{k-1}{2}Ma^2\right)\right\}^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \tag{6-80}$$

从上式和式（6-45）中，消去 Ma，可得

$$\frac{A}{A^*}=\frac{\left(\frac{k-1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}}{\left\{1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right\}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{k}}} \tag{6-81}$$

式（6-80）所表示的截面比对 Ma 数的曲线示于图 6-9(b)，它也代表前述的气动函数 $q(\lambda)$的倒数，$1/q(\lambda)$或 $1/qMa$ 的变

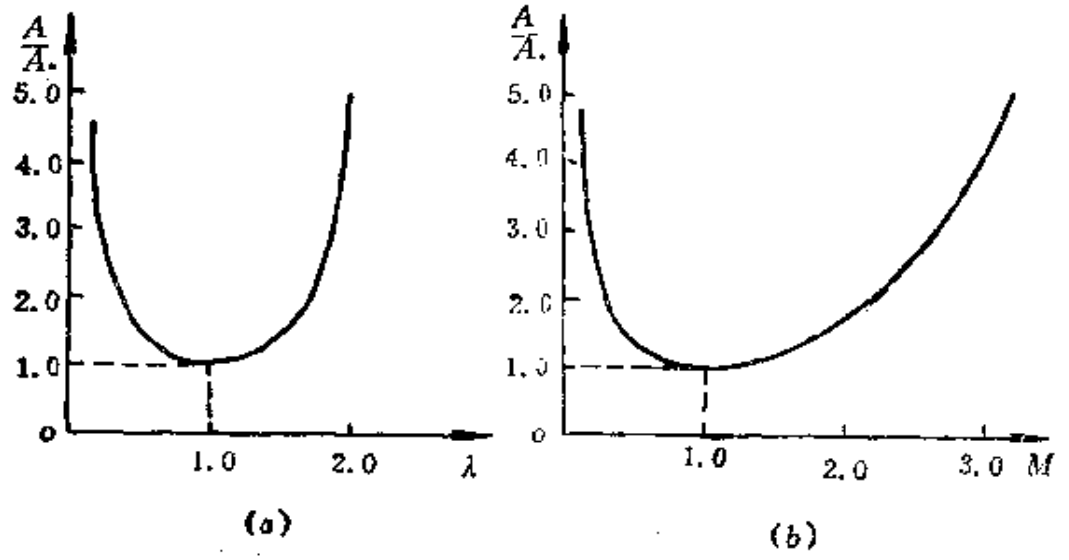


图 6-9

化。图上所示的只是截面比与 Ma 数的关系。至于沿管道（比如喷管）轴线 Ma 数是怎样分布的，这里未作规定，也就是对管道（比如喷管）的形状未作规定。如果希望在喷管中得到均匀的高速气流或尽可能大的推力，则除了必须确定 A_* 和 A_e 之外，还必须对喷管的管壁曲线作精细地设计。但因篇幅所限，这里不作进一步阐述。图 6-9 是 A/A_* 对速度系数 λ 和马赫数 Ma 的曲线。这些曲线说明，对于给定的 A/A_*，A 截面上的流速可以是亚音速，也可以是超音速，依赖于管道上下游的压强比来确定。下面将在 §6-5 结合几何喷管来介绍。

三、气流对内管壁的作用力

现来计算气流流过一段管道时，对内壁面上产生的作用力大小，见图 6-10，首先在图上取虚线所示的控制体，先设内管壁对控制体侧面的作用力为 X，方向如图上所示。再对控制体应用积分形式的动量方程式（3-107），有

$$X=(\rho_2V_2^2A_2+p_2A_2)-(\rho_1V_1^2A_1+p_1A_1)$$

其中

$$(p+\rho V^2)A=(p+\rho V^2)\dot{m}/\rho V=\frac{p}{\rho V}\dot{m}+\dot{m}V$$

用

$$V=\lambda a_*$$

及

$$\frac{p}{\rho}=RT=RT_0\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)=\frac{k+1}{2k}a_*^2\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)$$

代入，得

$$(p+\rho V^2)A=\frac{k+1}{2k}a_*\dot{m}\frac{(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2)}{\lambda}+\lambda a_*\dot{m}$$

$$=\frac{k+1}{2k}a_*\dot{m}\left[\frac{(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2)}{\lambda}+\frac{2k}{k+1}\lambda\right]$$

经通分化简后可得

$$(p+\rho V^2)A=\frac{k+1}{2k}a_*m\left(\frac{1}{\lambda}+\lambda\right)$$

所以

$$X=\frac{k+1}{2k}a_*m\left[\left(\frac{1}{\lambda_2}+\lambda_2\right)-\left(\frac{1}{\lambda_1}+\lambda_1\right)\right] \qquad (6\text{-}82)$$

利用作用与反作用原理可知，气流作用在内管壁上的轴向力与此大小相等指向相反。

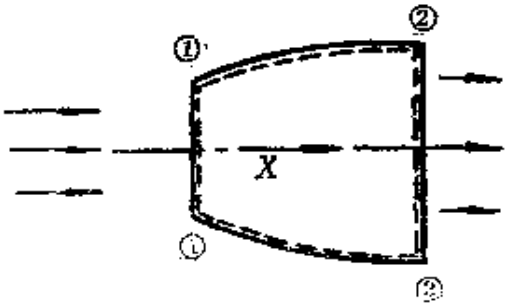


图 6-10

例 6-6 已知：有一段管道[参见图6-10]，入口截面 $A_1=0.2$米^2，该截面上空气流动的速度系数 $\lambda_1=0.85$。总压 $p_0=29.4$ 牛/厘米^2，总温 $T_0=321$ 开，出口截面 $A_2=0.5$ 米^2，外界大气压 $pa=10.56$牛/厘米^2，$R=287$焦耳/(公斤·开)。求：出口截面气流的 λ_2及空气对该段内管壁的作用力。

解 按式（6-51）

$$Ma_1^2=\frac{\frac{2}{k+1}\lambda_1^2}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2}$$

计算 Ma_1，得

$$Ma_1=\sqrt{\frac{\frac{2}{1.4+1}\times 0.85^2}{1-\frac{1.4-1}{1.4+1}\times 0.85^2}}=0.827$$

再应用式（6-67），以①截面流动参数计算质量流量 m，

$$m=A_1\frac{p_1}{\sqrt{T_0}}\sqrt{\frac{k}{R}}\,Ma_1\left(1+\frac{k-1}{2}Ma_1^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

其中

$$p_1=\frac{p_0}{\left(1+\frac{k-1}{2}Ma_1^2\right)^{\frac{k}{k-1}}}=\frac{29.4\times10^4}{\left(1+\frac{0.4}{2}\times0.827^2\right)^{3.5}}$$

$$=187\ 703\ (\text{牛/米}^2)$$

所以

$$m=0.2\times\frac{187\ 703}{\sqrt{321}}\sqrt{\frac{1.4}{287}}\times0.827\left(1+\frac{0.4}{2}\times0.827^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=129\ (\text{公斤/秒})$$

用式（6-80）可算出临界截面积 A_*

$$A_*=A_1/\left\{\frac{1}{Ma_1}\left[\frac{2}{k+1}\left(1+\frac{k-1}{2}Ma_1^2\right)\right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}}\right\}$$

$$=0.2/\left\{\frac{1}{0.827}\left[\frac{2}{2.4}(1+0.2\times0.827^2)\right]^3\right\}$$

$$=0.194\ 6$$

假定截面①与截面②之间流动是等熵的，则有

$$\frac{A_2}{A_*}=\frac{0.5}{0.194\ 6}=\frac{1}{Ma_2}\left\{\frac{2}{k+1}\left(1+\frac{k-1}{2}Ma_2^2\right)\right\}^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

经迭代计算可得 $Ma_2=0.232\ 6$，利用式（6-50）可算得 $\lambda_2=0.253\ 4$。又

$$a_*=\sqrt{\frac{2k}{k+1}RT_0}=\sqrt{\frac{2\times1.4}{2.4}\times287\times321}=327.9(\text{米/秒})$$

于是可计算管壁对流体的作用力为

$$X=\frac{k+1}{2k}a_*m\left[\left(\frac{1}{\lambda_2}+\lambda_2\right)-\left(\frac{1}{\lambda_1}+\lambda_1\right)\right]$$

$$=\frac{2.4}{2.8}\times327.9\times129\times\left[\left(\frac{1}{0.253\ 4}+0.253\ 4\right)\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{0.85}+0.85\right)\right]$$

$$=78.8\ (\text{千牛})$$

所以，气流对该段内管壁的作用力大小等于 78.8 千牛，但方向

是由②截面指向①截面（推力）。

如果用气体动力学函数表来计算上题则比较方便，可按如下步骤计算：

按截面①的流动参数计算质量流量，有式（6-76）

$$m = C\frac{p_0}{\sqrt{T_0}}A_1 q(\lambda_1) = 0.040\,42 \times \frac{29.4\times10^4}{\sqrt{321}} \times 0.2 \times 0.972\,9$$

$$= 129 \text{（公斤/秒）}$$

假设①截面至②截面流动是等熵的，则截面②处气流的总压与总温均和截面①处相同。从质量流量相等由式（6-76）可得出

$$A_1 q(\lambda_1) = A_2 q(\lambda_2)$$

所以

$$q(\lambda_2) = \frac{A_1}{A_2} q(\lambda_1) = \frac{0.2}{0.5} \times 0.972\,9 = 0.389\,2$$

查气体动力学函数表得　　$\lambda_2 = 0.253\,4$

相应于总温 T_0 所对应的 a_* 为

$$a_* = \sqrt{\frac{2k}{k+1}RT_0} = 18.30\sqrt{T_0} = 327.9 \text{（米/秒）}$$

于是

$$X = \frac{k+1}{2k}a_* m\left[\left(\frac{1}{\lambda_2}+\lambda_2\right)-\left(\frac{1}{\lambda_1}+\lambda_1\right)\right] = 78.8 \text{（千牛）}$$

计算结果相同。因此，如果有气体动力学函数表可查时，不妨用后一种方法来进行计算。

§6-4　正　激　波

和在§6-1 中讨论的小扰动波的传播规律不同，本节要讨论激波，激波是一种集中的有一定强度的压缩波。当飞行器以超音速飞行时，会出现激波。超音速风洞一类的管道内部的超音速流动，也会出现激波现象。本节主要讨论正激波的形成，以及正激波前后物理量的关系。

一、正激波的形成

下面以活塞在长管中压缩气体的例子来说明正激波形成的过程。图 6-11 所示为一长管，管内气体开始处于静止，气体运动速度原为零。其它参数为 p_1、ρ_1、T_1。现推动活塞向右作加速运动。为了容易说明问题，我们把活塞连续加速的过程分解为逐步加速的过程。活塞开始以某一速度向右加速，则产生了第一个小压缩扰动波，它以当地音速 a_1 向右传播，小波后的压强、密度和温度分别提高了一个增量 Δp、$\Delta\rho$ 和 ΔT。小波后的气体以运动速度为零提高为以小的速度增量 ΔV，向右运动。若使活塞再有一小的加速，便产生第二个小压缩扰动波，这个小波将以

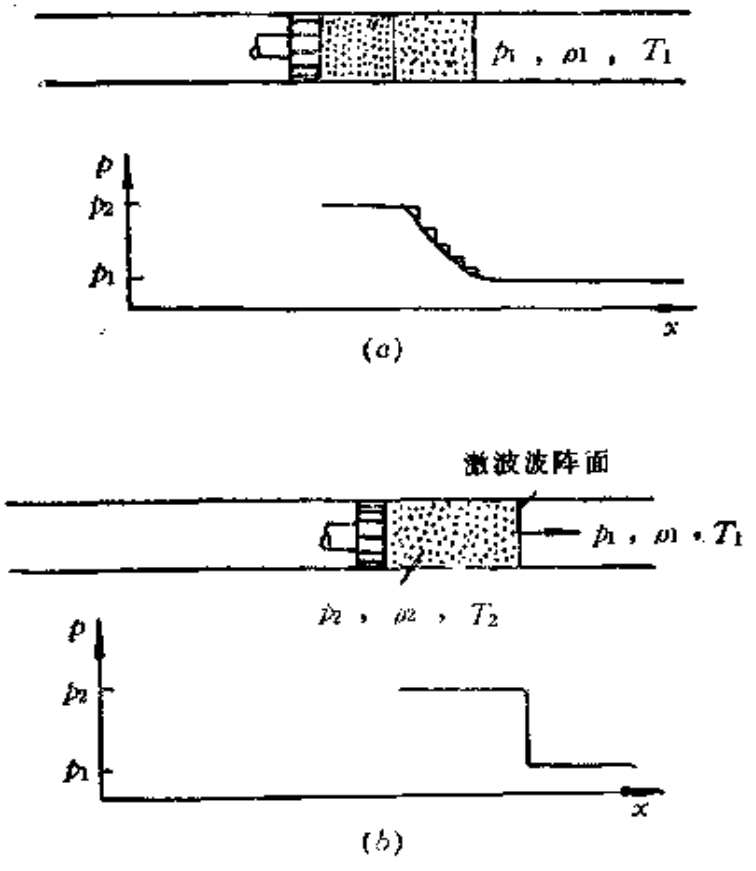


图 6-11

温度已提高为 $T_1+\Delta T$ 的当地音速 a_2 相对于气体向右传播，显

然 a_2 是大于 a_1 的。相对于管壁来说，第二个小压缩波是以（$a_2+\Delta V_s$）的速度在向右推进。波后的压强又有一个 Δp 的增量。若使活塞进一步再加速，可以类推，越是在后面的小压缩波推进速度越快。越是在后面的气体的运动速度也越大。最终，所有的小压缩扰动波会集中在一起，形成一个有一定强度的突跃压缩波以一定速度 V_s 在气体中向右传播。这种集中的压缩波就称为激波。激波扫过未经扰动的气体后，气流参数由 p_1、ρ_1 和 T_1 立刻提高为 p_2、ρ_2 和 T_2。波后的气体立即具有速度 V_s。一旦激波形成，小扰动波的传播规律就不再适用。

上面所讨论的激波的波阵面是与气体运动方向相垂直的，称之为正激波。以上是把激波当作没有厚度的突跃面（在该面上，允许存在流动参数变化的不连续性）处理的。实际上，激波是有厚度的。流动参数正是在这个区域内发生了急剧的变化。但这个厚度很微小，是气体分子平均自由行程的量级。

二、正激波的基本方程

图 6-12 表示气体通过正激波的流动情况，采用相对坐标系后，正激波将固定不动。激波上游的参数记作下标 1，下游的参数记作下标 2。虚线所示的为控制体，控制体内外无热量的交换。则由质量方程可得

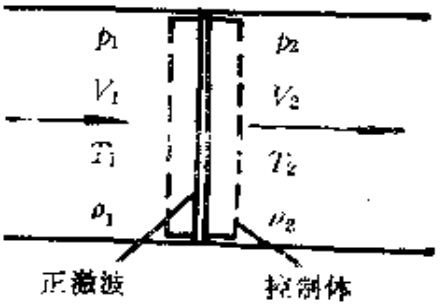


图 6-12

$$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2$$

由于激波很薄，截面积 $A_1 \approx A_2$，则有

$$\rho_1 V = \rho_2 V_2 \qquad (6\text{-}83)$$

对控制体应用动量方程，可得

$$\rho_2 V_2 A_2 V_2 - \rho_1 V_1 A_1 V_1 = p_1 A_1 - p_2 A_2$$

化简为

$$p_1 + \rho_1 V_1^2 = p_2 + \rho_2 V_2^2 \qquad (6\text{-}84)$$

由式（6-42）和（6-47），得到能量方程

$$\frac{V_1^2}{2}+\frac{a_1^2}{k-1}=\frac{V_2^2}{2}+\frac{a_2^2}{k-1}=\frac{k+1}{2(k-1)}a_*^2 \qquad (6\text{-}85)$$

或

$$T_{0_1}=T_{0_2} \qquad (6\text{-}86)$$

即激波前后总温不变。

三、普兰特激波关系式

用式（6-83）除以式（6-84）并移项之后得

$$V_1-V_2=\frac{p_2}{\rho_2 V_2}-\frac{p_1}{\rho_1 V_1}=\frac{a_2^2}{kV_2}-\frac{a_1^2}{kV_1} \qquad (6\text{-}87)$$

由式（6-85），有

$$a_1^2=\frac{k+1}{2}a_*^2-\frac{k-1}{2}V_1^2 \qquad (6\text{-}88)$$

$$a_2^2=\frac{k+1}{2}a_*^2-\frac{k-1}{2}V_2^2 \qquad (6\text{-}89)$$

将上两式代入式（6-87），可得

$$V_1-V_2=\frac{k+1}{2k}\frac{a_*^2}{V_2}-\frac{k-1}{2k}V_2-\frac{k+1}{2k}\frac{a_*^2}{V_1}+\frac{k-1}{2k}V_1$$

$$=\frac{k+1}{2k}a_*^2\left(\frac{1}{V_2}-\frac{1}{V_1}\right)+\frac{k-1}{2k}(V_1-V_2)$$

$$=(V_1-V_2)\left[\frac{k+1}{2k}\frac{a_*^2}{V_1V_2}+\frac{k-1}{2k}\right]$$

因为$V_2\neq V_1$，故只可能是

$$\frac{k+1}{2k}\frac{a_*^2}{V_1V_2}+\frac{k-1}{2k}=1$$

所以

$$V_1V_2=a_*^2 \qquad (6\text{-}90)$$

或用速度系数表示有

$$\lambda_1\lambda_2=1 \qquad (6\text{-}91)$$

即，正激波前后的速度的乘积是一定值，等于临界音速的平方。

式（6-90）称为普兰特激波关系式。用速度系数表示的式（6-91）说明激波上游的 $\lambda_1>1$ 时，必定下游的 $\lambda_2<1$，即上游为超音速流动，则经过激波，下游就只能是亚音速流动。应当指出，亚音速流动（$\lambda_1<1$）经过激波后加速为超音速流动（$\lambda_2>1$）的情况是不可能发生的。其原因将在下面说明。

四、正激波前后流动参数的关系式

可以把式（6-50）代入式（6-91）求得正激波前后马赫数之间的关系，

$$Ma_2^2=\frac{1+\frac{k-1}{2}Ma_1^2}{kMa_1^2-\frac{k-1}{2}} \tag{6-92}$$

激波前后的速度比为

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{V_2V_1}{V_1^2}=\frac{a_*^2}{V_1^2}=\frac{1}{\lambda_1^2}=\frac{1+\frac{k-1}{2}Ma_1^2}{\frac{k+1}{2}Ma_1^2} \tag{6-93}$$

由式（6-83）和（6-93）可得密度比

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{V_1}{V_2}=\frac{(k+1)Ma_1^2/2}{1+(k-1)Ma_1^2/2} \tag{6-94}$$

激波前后的压力比可通过动量方程导出，由式（6-84）可得

$$p_2-p_1=\rho_1V_1^2-\rho_2V_2^2=\rho_1V_1^2-\rho_1V_1V_2$$

$$=\rho_1V_1^2\left(1-\frac{V_2}{V_1}\right)$$

除以 p_1，有

$$\frac{p_2-p_1}{p_1}=\frac{\rho_1V_1^2}{p_1}\left(1-\frac{V_2}{V_1}\right)=\frac{kV_1^2}{a_1^2}\left(1-\frac{V_2}{V_1}\right)$$

$$=kMa_1^2\left(1-\frac{V_2}{V_1}\right)$$

将式（6-93）代入上式，即得

$$\frac{\Delta p}{p_1}=\frac{p_2-p_1}{p_1}=\frac{2k}{k+1}\left(Ma_1^2-1\right) \tag{6-95}$$

因为 Ma_1 是大于 1 的，所以 $\Delta p>0$，式（6-95）表征了激波的强度。激波前后的压力比为

$$\frac{p_2}{p_1}=1+\frac{2k}{k+1}\left(Ma_1^2-1\right) \tag{6-96}$$

激波前后的温度比按式（6-1）可由下式求出

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{p_2}{p_1}\ \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

把式（6-94）和式（6-96）代入上式可得

$$\frac{T_2}{T_1}=1+\frac{2(k-1)}{(k+1)^2}\cdot\frac{kMa_1^2+1}{Ma_1^2}\left(Ma_1^2-1\right) \tag{6-97}$$

下面推导激波前后熵的变化，在式（6-18）中消去 T_2/T_1 后可得

$$\frac{s_2-s_1}{R}=\ln\left\{\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{k-1}}\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{-\frac{k}{k-1}}\right\}$$

把式（6-94）和（6-96）代入上式，得到

$$\frac{s_2-s_1}{R}=\ln\left\{\left[1+\frac{2k}{k+1}\left(Ma_1^2-1\right)\right]^{\frac{1}{k-1}}\times\left[\frac{\frac{k+1}{2}Ma_1^2}{1+\frac{k-1}{2}Ma_1^2}\right]^{-\frac{k}{k-1}}\right\} \tag{6-98}$$

上式还可写为[利用式(6-13)]

$$\frac{s_2-s_1}{c_v}=\ln\left\{\left[1+\frac{2k}{k+1}\left(Ma_1^2-1\right)\right]\left[\frac{(k-1)Ma_1^2+2}{(k+1)Ma_1^2}\right]^k\right\} \tag{6-99}$$

按式（6-99）进行计算，不难得出要使 $\lambda_1<1$ 或 $Ma_1<1$ 的气流经过激波的突跃变化成为超音速气流是不可能的。因为计算会得出熵减少（$s_2-s_1<0$）的结果，这是与热力学第二定律相违背

的。反之 $\lambda_1>1$ 或 $Ma_1>1$ 的超音速气流经过激波的变化是绝热不等熵的过程。它是反映客观实际情况的。因为激波层内速度梯度非常大，而实际流体总有粘性，因此必有内摩擦发生，所以经过激波熵必有所增加。

再看一下激波前后总参数的变化。气流通过激波熵有增加，但总能量并没有损失。由能量方程式（6-86）有 $T_{0_1}=T_{0_2}$；因流动过程是绝热的，由式（6-61），有

$$s_2-s_1=-R\ln\left(\frac{p_{0_2}}{p_{0_1}}\right)=R\ln\left(\frac{p_{0_2}}{p_{0_1}}\right)^{-1} \qquad (6\text{-}100a)$$

与式（6-98）相比较，可得

$$\frac{p_{0_2}}{p_{0_1}}=\left[1+\frac{2k}{k-1}\left(Ma_1^2-1\right)\right]^{-\frac{1}{k-1}} \cdot\left(\frac{\frac{k+1}{2}Ma_1^2}{1+\frac{k-1}{2}Ma_1^2}\right)^{\frac{k}{k-1}} \qquad (6\text{-}100b)$$

由于 $T_{0_1}=T_{0_2}$，由状态方程式（6-1）和上式，即可得出激波前后总密度之比

$$\frac{\rho_{0_2}}{\rho_{0_1}}=\frac{p_{0_2}}{p_{0_1}}=\left[1+\frac{2k}{k+1}\left(Ma_1^2-1\right)\right]^{-\frac{1}{k-1}} \cdot\left(\frac{\frac{k+1}{2}Ma_1^2}{1+\frac{k-1}{2}Ma_1^2}\right)^{\frac{k}{k-1}} \qquad (6\text{-}101)$$

式（6-92）至（6-101）说明，正激波前后流动参数的比都只决定于波前的马赫数 Ma_1 和气体的比热比 k 值。Ma_1 值越高，突跃变化愈大，激波愈强。流动参数通过正激波的变化示意图可参看图 6-13。

通过激波熵增量 Δs 随 Ma_1 的变化可参见图 6-14，当 Ma_1

较1大得不多时，Δs 接近于零。当 Ma_1 增加时，Δs 迅速上升。通过激波熵的增加表明了气流的机械能有损失（转化为热能了），即总压比 p_{0_2}/p_{0_1} 下降[参看(6-100a)式]，$p_{0_2}<p_{0_1}$（同时$\rho_{0_2}<\rho_{0_1}$），这是应当注意的。总压代表了气流机械能的大小，在非等熵流动过程中，总压必然减小。

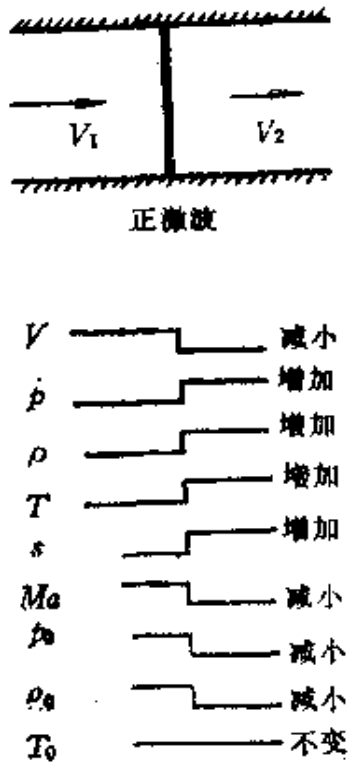


图 6-13

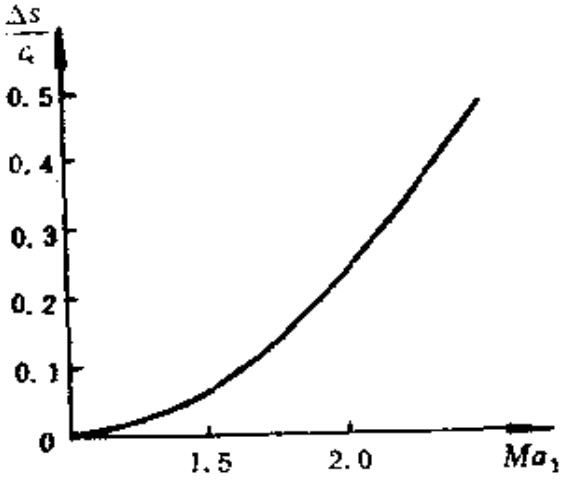


图 6-14

五、弱激波

若 Ma_1 较1大得不多，令 $Ma_1^2=1+\varepsilon$，$\varepsilon\ll1$，则式(6-99)可近似表达为（按二项式展开）

$$\frac{s_2-s_1}{c_v}=\frac{2}{3}\frac{k(k-1)}{(k+1)^2}\varepsilon^3+0(\varepsilon^4)$$

略去高阶小量，再以 $\varepsilon=Ma_1^2-1$ 代回上式，得

$$\frac{s_2-s_1}{c_v}=\frac{2}{3}\frac{k(k-1)}{(k+1)^2}\left(Ma_1^2-1\right)^3 \tag{6-102}$$

把式（6-95）代入上式，可得

$$\frac{s_2-s_1}{c_v}=\frac{k^2-1}{12k^2}\left(\frac{p_2-p_1}{p_1}\right)^3 \tag{6-103}$$

由上式可见，由于是弱激波，气体通过激波的熵增量 s_2-s_1 是与激波强度$\left(\frac{p_2-p_1}{p_1}\right)$的三次方成比例的，$\frac{p_2-p_1}{p_1}$越小，激波强度越弱。当$\frac{p_2-p_1}{p_1}$为小量时，可以近似地把气流经过弱激波的过程看作是等熵压缩过程。因此在弱激波的情况下，激波前后的各参数关系均可近似按等熵变化处理。

六、兰金-雨贡纽方程

对式（6-96）求解 Ma_1^2，得

$$Ma_1^2=\frac{k+1}{2k}\cdot\frac{p_2}{p_1}+\frac{k-1}{2k}$$

把上式代入式（6-94），即得

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{p_2}{p_1}+\frac{k-1}{k+1}}{\frac{k-1}{k+1}\cdot\frac{p_2}{p_1}+1}=\frac{(k-1)p_1+(k+1)p_2}{(k+1)p_1+(k-1)p_2} \tag{6-104}$$

该式是表示激波前后压力比与密度比的重要关系式，称为兰金-雨贡纽方程。它和等熵关系是大不相同的。等熵变化情况有如下关系

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}=\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{k}} \tag{6-20}$$

图 6-15 是按式（6-104）和式（6-20）所给的曲线。

从等熵曲线可以看出，当 $p_2/p_1\to\infty$时，ρ_2/ρ_1 也是$\to\infty$的。而按兰金-雨贡纽曲线（也称激波公式的曲线）却是有界的。当 $p_2/p_1\to\infty$时，$\rho_2/\rho_1\to\frac{k+1}{k-1}$。即不管激波强度多大，密度比不会超过 $\rho_2/\rho_1=\frac{k+1}{k-1}$的界限。对于空气，$\rho_2/\rho_1$不会超过 6。但当压力比较小时，两者几乎是一致的。这也说明了弱激波中的变化十分接近于等熵变化。

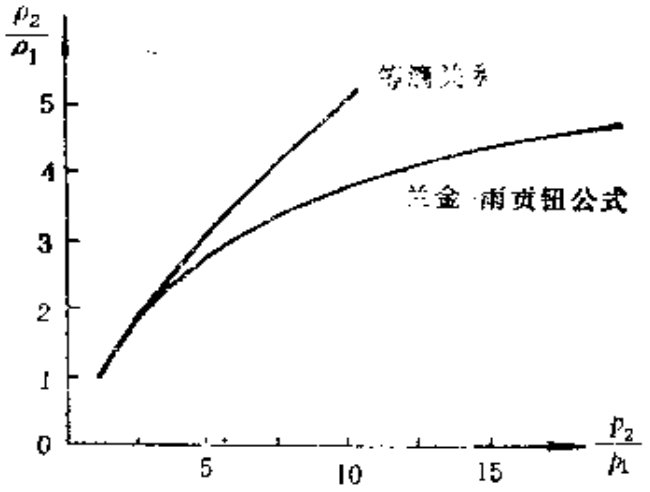


图 6-15

七、正激波在静止气体中的传播

前面从激波位置固定不动状态导出了正激波前后流动各参数的关系式。如果在图 6-16(a)所示的流场上迭加一个均匀速度$-V_1$，则位置固定的激波就变成了以速度$V_s=V_1$向左运动的激波。波前运动的气体就变为静止，原来的波后速度V_2改变为伴随速度$V_f=V_s-V_2$[参见图 6-16(b)]。下面不难利用已导出的公式求出激波在静止气体中的推进速度V_s和波后气体的伴随速度V_f。

由式（6-96）可得

$$V_s=V_1=a_1\sqrt{1+\frac{k+1}{2k}\left(\frac{p_2}{p_1}-1\right)}$$

$$=a_1\sqrt{\frac{k-1}{2k}+\frac{k+1}{2k}\frac{p_2}{p_1}} \qquad (6\text{-}105)$$

由上式可知，激波强度越弱，即p_2/p_1越小，激波传播速度越低。当p_2/p_1接近于 1 时，激波传播速度接近于音速a_1。

正激波后的气体伴随速度V_f可由式（6-83）、（6-104）和（6-105）来确定。

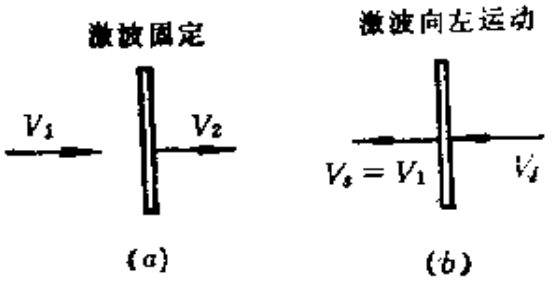


图 6-16

$$V_f = V_s - V_2 = V_1 - V_2 = V_1\left(1 - \frac{V_2}{V_1}\right) = V_1\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)$$

$$= a_1\sqrt{\frac{k-1}{2k} + \frac{k+1}{2k}\frac{p_2}{p_1}}\left[1 - \frac{(k+1)p_1 + (k-1)p_2}{(k-1)p_1 + (k+1)p_2}\right]$$

$$= a_1\sqrt{\frac{2}{k}}\frac{p_2 - p_1}{\sqrt{(k-1)p_1 + (k+1)p_2}}$$

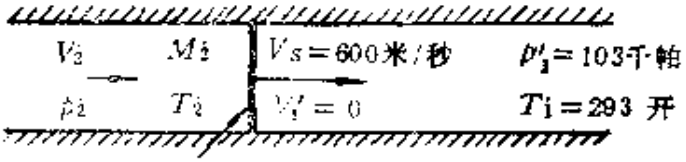
$$= a_1\sqrt{\frac{2}{k}}\frac{p_2/p_1 - 1}{\sqrt{(k-1) + (k+1)p_2/p_1}} \qquad (6\text{-}106)$$

上式说明，激波强度越弱，伴随速度越低。例如对于 $k=1.4$ 的完全气体，当 $(p_2-p_1)/p_1=0.22$，$T_1=288$ 开时，激波速度 $V_s=367$ 米/秒，伴随速度 $V_f=59$ 米/秒，而当 $p_2/p_1\approx 1$ 时，则 $V_s=a_1\approx 340$ 米/秒，$V_f\approx 0$。

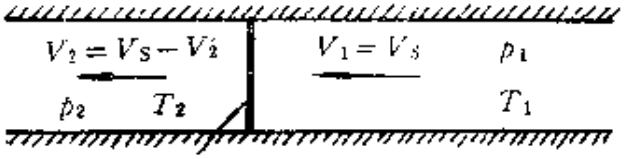
例 6-7 已知：正激波以 600 米/秒的速度在静止的空气中推进，静止空气的压力为 103 千帕，温度为 293 开。求：激波通过后空气流动的马赫数 Ma_2'、压强 p_2'、温度 T_2' 和速度 V_2'。

解 在求解本题时，需把运动的激波转换为固定状态，以便应用所导出的激波关系式。为此把相对坐标系固连在激波上，如图 6-17(*b*)所示。

在静止坐标系中，激波向右方推进，其运动速度为 V_s，激波前方压力、温度分别为 p_1'、T_1'。波后空气的速度、马赫数、压力、温度分别为 V_2'、Ma_2'、p_2'、T_2'。



（a） 静止坐标系



（b） 正激波固定的相对坐标系

图 6-17

将激波位置固定以后，激波前后流动参数分别用不带撇的下标 1 和 2 表示，则有

$$V_1=V_s,\qquad V_2=V_s-V_2'$$

静压、温度与坐标变换无关，故有

$$p_1=p_1',\ T_1=T_1',\ p_2=p_2',\ T_2=T_2'$$

首先计算Ma_1，

$$Ma_1=\frac{V_1}{a_1}=\frac{600}{20.04\sqrt{293}}=1.748$$

由式（6-93）可计算V_2，

$$V_2=V_1\left(\frac{1+\frac{k-1}{2}Ma_1^2}{\frac{k+1}{2}Ma_1^2}\right)=600\times\frac{1+0.2\times1.748^2}{1.2\times1.748^2}$$

$$=263.6(\text{米/秒})$$

所以

$$V_2'=V_s-V_2=600-263.6=336.4(\text{米/秒})$$

按式（6-96），有

$$p_2=p_1\left\{1+\frac{2k}{k+1}(Ma_1^2-1)\right\}$$

$$= 103\times10^3\times\left\{1+\frac{2.8}{2.4}\left(1.748^2-1\right)\right\}$$

$$= 350\times10^3(\text{帕}) = 350(\text{千帕})$$

据完全气体状态方程及激波前后连续方程有

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{p_2}{p_1}\cdot\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{p_2}{p_1}\cdot\frac{V_2}{V_1}$$

所以

$$T_2=T_1\frac{p_2}{p_1}\cdot\frac{V_2}{V_1}=293\times\frac{350\times10^3}{103\times10^3}\times\frac{263.6}{600}$$

$$= 437.4(\text{开})$$

因此，激波后的马赫数为

$$Ma_2'=\frac{V_2'}{a_2}=\frac{336.4}{20.04\sqrt{437.4}}=0.802$$

故求得 $Ma_2'=0.802$，$p_2'=350$(千帕)

$T_2'=437.4$(开)，$V_2'=336.4$(米/秒)

例 6-8　已知：在马赫数为 1.5 的超音速气流中，放置一皮托管（总压管）。皮托管的前方产生一道正激波。由皮托管测出的总压为 150 千帕。求：正激波前超音速来流的静压。

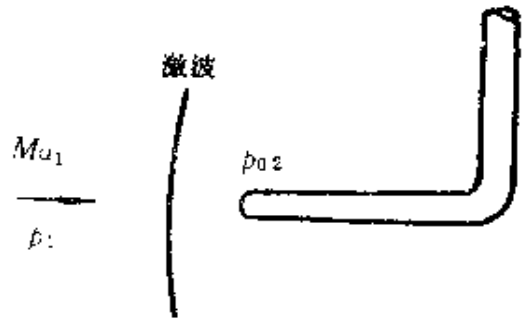


图 6-18

解　由题意已知 $Ma_1=1.5$，$p_{02}=150\times10^3$ 帕。

据式（6-100）

$$p_{01}=p_{02}\left\{1+\frac{2k}{k+1}\left(Ma_1^2-1\right)\right\}^{k-\frac{1}{k-1}}$$

$$\left\{\frac{k+1}{2}Ma_1^2\Big/\left(1+\frac{k-1}{2}Ma_1^2\right)\right\}^{-\frac{k}{k-1}}$$

$$= 150\times 10^5\left\{1+\frac{2.8}{2.4}\left(1.5^2-1\right)\right\}^{\frac{1}{0.4}}$$

$$\cdot\left\{\frac{2.4}{2}\times 1.5^2\Big/\left(1+0.2\times 1.5^2\right)\right\}^{-\frac{2.4}{0.4}}$$

$$=161.3(\text{千帕})$$

由式（6-45）得

$$p_1 = p_{0_1}\Big/\left(1+\frac{k-1}{2}Ma_1^2\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

$$=161\times 10^5/(1+0.2\times 1.5^2)^{3.5}=43.9(\text{千帕})$$

§ 6-5 几何喷管中的流动

一、收缩形喷管中的流动

图 6-19(a)为一收缩形喷管，喷管上游为一个贮气箱，其中气体的参数为 p_0、ρ_0、T_0 及速度 $V_0=0$。喷管出口的下游压力为 p_b，称为反压或背压。它可以是环境大气压力，也可以是另一个贮气箱中的压力。用 p_e 表示喷管出口截面上的压力。在不同的条件下，p_e 与 p_b 在数值上可能相等，也可能不相等。下面分析收缩形喷管内的流动。假定由贮气箱到喷管出口截面的流动为等熵流动。

若 $p_b/p_0=1$，即出口反压与上游贮气箱中的压力相等。此时整个喷管内压力为常值（$p/p_0=1$），管内无流动（$Ma=0$），相应于图 6-19(b)(c)中的曲线 1。

若降低反压 p_b，则 $p_b/p_0<1$，管内产生流动。只要出口截面上的流速 V_e 尚未达到音速，则出口截面上的压力就等于反压，即 $p_e=p_b$。当已知 p_b/p_e 后，利用（6-45）式可求出出口截面上的马赫数 Ma_e，

$$Ma_e=\left\{\frac{2}{k-1}\left[\left(\frac{p_0}{p_e}\right)^{\frac{k-1}{k}}-1\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$$

应用式（6-73）可以求出流量 m。质量流量 m/m_{max} 随 p_b/p_0 的变化曲线表示在图 6-19(d)上。

将式（6-80）中的 A 和 Ma 分别用 A_e 和 Ma_e 代入后，可解出假想的 A_*。再利用式（6-80）即可求出 M 数随截面比 A/A_* 的分布曲线。又由式（6-45）可计算出各截面上的压力 p 的分布。Ma 数和 p/p_0 沿喷管各截面的分布见图 6-19(b)(c)。

不难看出，p_b 越低，则喷管内同一截面上的 Ma 数越大，压力 p 越低，管中通过的流量也越大。它们的变化趋势如图 6-19(b)(c)上的 2，3 标号所示。它们之间只有数量上的差别，无本质区别。

但是，当出口反压 p_b 降低到使出口截面上的流速开始达到音速时，喷管流量达到最大值。此时，出口截面上的流动处于临界状态：出口截面积即变为临界截面积，出口截面上的压力有 $p_e=p_*$ 而 $p_b=p_e$。对于空气此时的压力比 $p_*/p_0=0.528$。管中的压力分布和 M 数分布，如图中标号为 4 的曲线所示。

若进一步降低出口反压 p_b，使 $p_b<p_*$ 时，则出口截面上的压力保持不变，有 $p_e/p_0=p_*/p_0$，管内的流动与曲线 4 相同。此时，流量 $m=m_{max}$，而不再增加，保持为常数，与喷管出口下游的状态不再有关。这种现象称为壅塞现象。按式（6-73a），$m=m_{max}=C\frac{p_0}{\sqrt{T_0}}A_*$，这表明在贮气箱中参数一定的条件下，通过一个收缩喷管的流量是有限度的。此时增大 p_0 虽然不能增加出口截面上的流速，但可以增大质量流量。

例 6-9 已知：如图 6-20 所示的管道中某一截面 A 处空气的速度为 $V=100$ 米/秒，静压 $p=200$ 千帕，静温 $T=300$ 开。假设流动是等熵的。$R=287$ 焦耳/(公斤·开)。求：管道出口截面积减小，当刚刚出现壅塞时，相应出口截面积将减小百分比以及

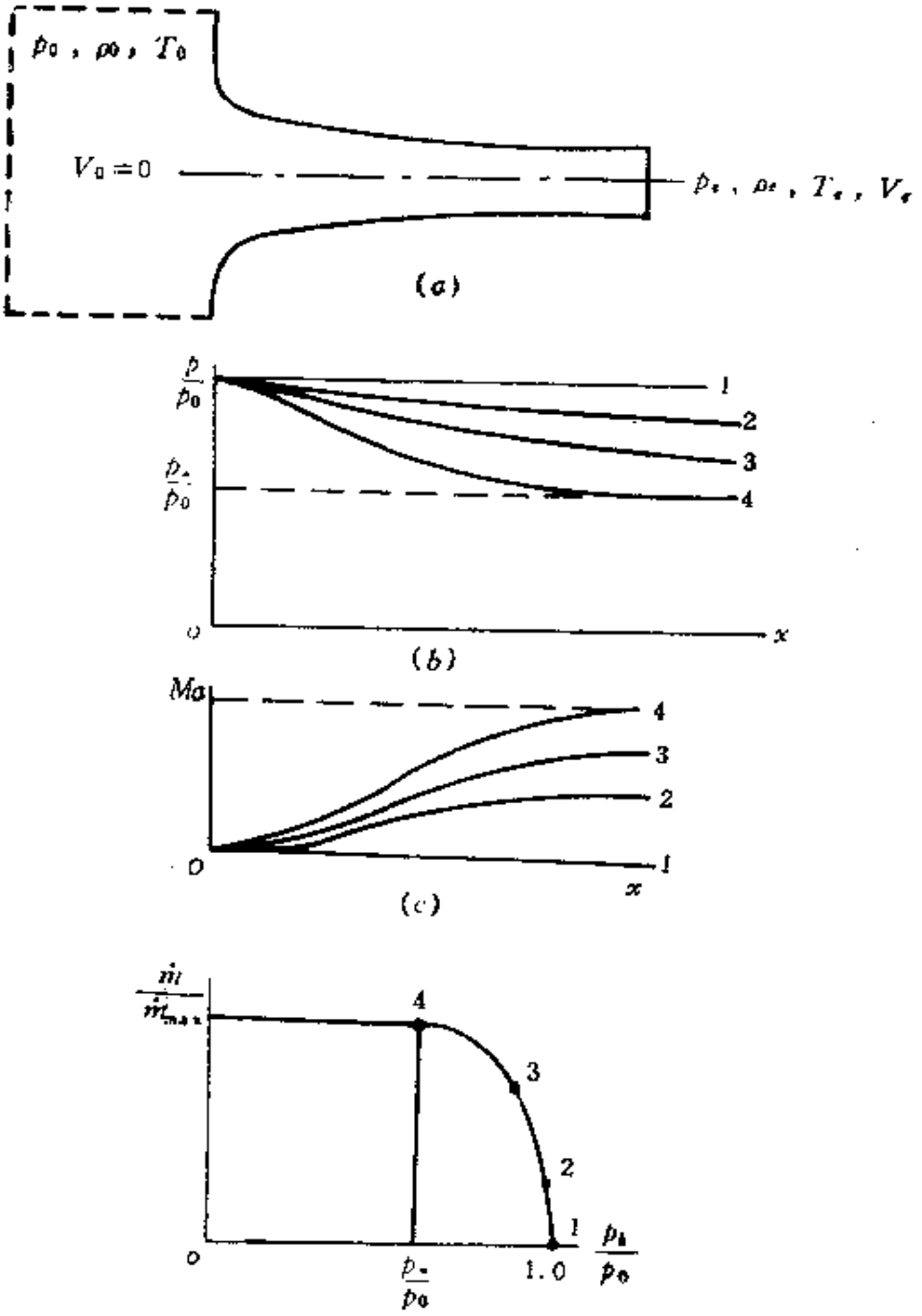


图 6-19

此时出口截面处的总压 p_0，总温 T_0，静压 p_e，静温 T_e 和速度 V_e 各为多大。

解 出口截面积刚发生壅塞现象时，该截面首次处于临界状态，$Ma_e=1.0$。

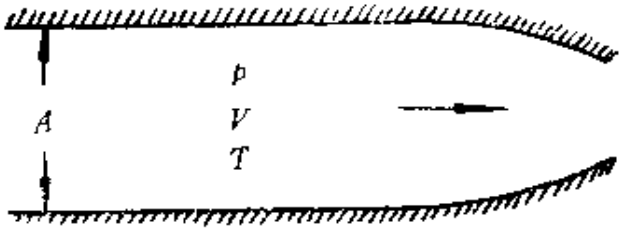


图 6-20

管内截面积 A 处的流动马赫数为

$$Ma=\frac{V}{a}=\frac{V}{\sqrt{kRT}}=\frac{100}{\sqrt{1.4\times287\times300}}=0.288$$

按（6-80）式截面比与马赫数有如下关系

$$\frac{A}{A_*}=\frac{1}{Ma}\left\{\frac{2}{k+1}\left(1+\frac{k-1}{2}Ma^2\right)\right\}^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

$$=\frac{1}{0.288}\left\{\frac{2}{2.4}\left(1+0.2\times0.288^2\right)\right\}^3$$

$$=2.111$$

因此，面积减小率为（$A_e=A_*$）

$$\frac{A-A_e}{A}\times100\%=\left(1-\frac{1}{2.111}\right)\times100\%=52.6\%$$

总压力为

$$p_0=p\left(1+\frac{k-1}{2}Ma^2\right)^{\frac{k}{k-1}}=200\times10^3(1+0.2\times0.288^2)^{3.5}$$

$$=211.9(\text{千帕})$$

总温 T_0 为

$$T_0=T\left(1+\frac{k-1}{2}Ma^2\right)=300(1+0.2\times0.288^2)$$

$$=305.0(\text{开})$$

因为管道出口处为临界状态，令以上诸式中的 $Ma=1$，

$$p_e = p_* = \frac{p_0}{\left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k}{k-1}}}$$

$$= \frac{211.9\times10^5}{(1.2)^{3.5}} = 111.9(\text{千帕})$$

$$T_e = \frac{T_0}{\left(1+\frac{k-1}{2}\right)} = \frac{305.0}{1.2} = 254.2(\text{开})$$

$$V_e = V_* = a_* = \sqrt{kRT_e} = \sqrt{1.4\times287\times254.2}$$
$$= 319.6(\text{米/秒})$$

二、拉瓦尔喷管中的流动

前面已经提到，要得到超音速气流，需要特殊的管形，必须使亚音速气流先经过收缩形管道加速，使最小截面处流速达到音

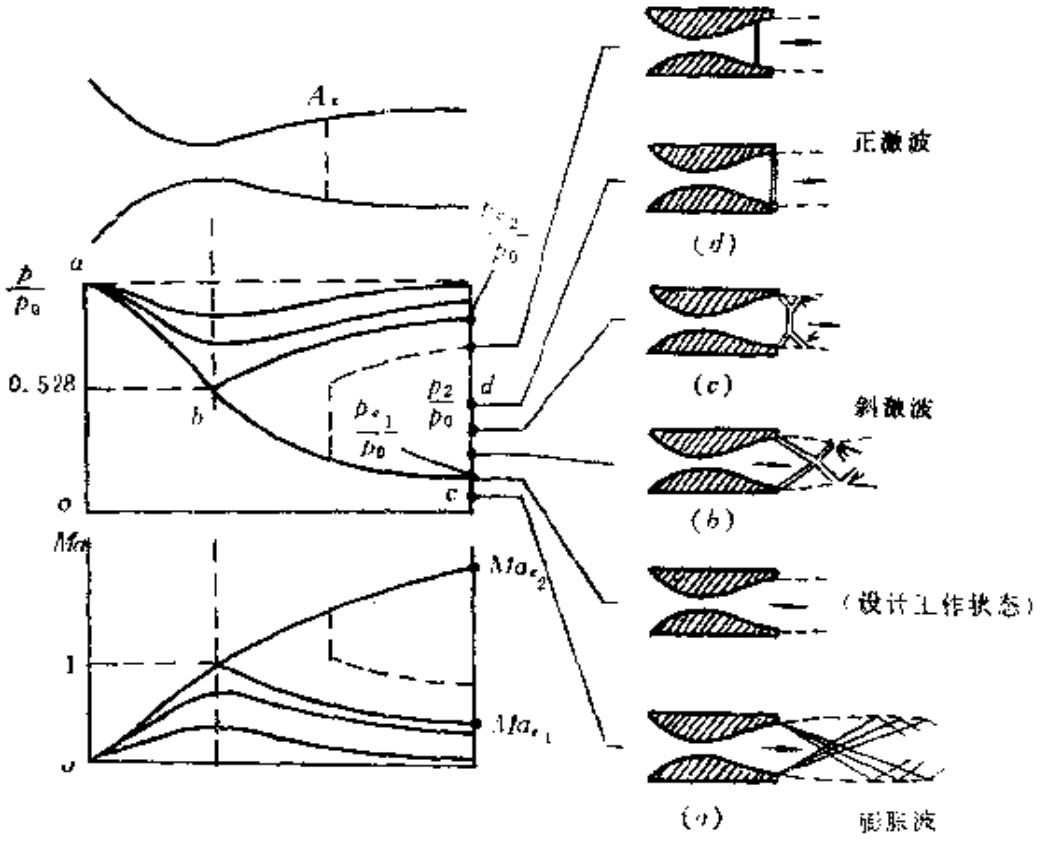


图 6-21

速，再经过扩张形管道继续加速，才能得到超音速气流。这种如图 6-21 上所示的逐渐收缩又逐渐扩张式的喷管，称为拉瓦尔喷管。为要得到一定 Ma 数的超音速气流，除了截面比 A/A_* 要符合上述要求以外，还要求有一定的上下游压力比相配合。对于一个给定的拉瓦尔喷管，即喷管截面的变化规律已知，当改变上下游压力比时，喷管内的流动也会跟着发生变化。改变压力比可有两种方式：一是上游（贮气箱）总压不变，改变反压；二是出口外的反压不变，改变上游总压。

现讨论当上游总压不变，改变出口外反压时喷管的四种工作情况。喷管上游总压为 p_0，出口外的反压为 p_b。若 $p_b=p_0$，即 $p_b=p_0=1$，则管内无流动，管内压力为常数。当反压 p_b 降低时，管内产生流动。逐渐降低反压 p_b，流速增加，流量逐渐增加。当流速增加到使喉部（最小截面处）达到音速后，再降低反压，此时流量不会继续增加，管道产生壅塞，$m=m_{max}$。对于喉部为音速的流动，其喉部下游的扩张管中可能出现两种连续的等熵流动。其一为超音速流，出口处马赫数为 Ma_{e_1}，其二为亚音速流，出口马赫数为 Ma_{e_2}。当喉部截面积 A_* 及出口截面积 A_e 已知后，利用式（6-80）

$$\frac{A_e}{A_*}=\frac{1}{Ma_e}\left\{\frac{2}{k+1}\left(1+\frac{k-1}{2}Ma_e^2\right)\right\}^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

就可以解出 Ma_{e_1} 和 Ma_{e_2}，它表示的正是图 6-9 给定 $\frac{A}{A_*}$ 有两个解的情况

已知 p_0，Ma_{e_1} 和 Ma_{e_2} 之后，应用式（6-45），就可确定 p_{e_1}/p_0 及 p_{e_2}/p_0，p_{e_1} 小于 p_{e_2}。

还有一种流动情况是气流在喷管内部一路加速，喉部为音速，在扩张管中亦是超音速流。但恰好在出口截面上产生一道正激波，经激波后气流变为亚音速流。正激波前的马赫数 $Ma_1>1$，压力为 p_1（即上述的 Ma_{e_1}，p_{e_1}），经过对应于 Ma_1 的正激波

后气流压力变为 p_2。波前波后压力之比 p_2/p_1 可按式（6-96）计算，并可由此进一步计算出 p_2/p_0，

$$\frac{p_2}{p_0}=\frac{p_1}{p_0}\cdot\frac{p_2}{p_1}=\left(1+\frac{k-1}{2}Ma_1^2\right)^{-\frac{k}{k-1}}\cdot\left[1+\frac{2k}{k+1}\left(Ma_1^2-1\right)\right]$$

此压力比处于 p_{e_1}/p_0 和 p_{e_2}/p_0 之间。

上述的三个压力值 p_{e_1}、p_2 和 p_{e_2} 把反压 p_b 的可能范围分成四个区域：从最低的真空状态到 p_{e_1}；从 p_{e_1} 到 p_2；从 p_2 到 p_{e_2}；从 p_{e_2} 到 p_0。下面分别讨论这四种情况的流动。参看图 6-21。

1．$p_b<p_{e_1}$ 的情况

这种情况反压 p_b 处于绝对零值与 p_{e_1} 之间，出口截面气流压力 $p_{e_1}>p_b$，因此气流在口外进行膨胀，参看图 6-21(a)。这时管内的流动完全不受反压的影响。其原因是口外的膨胀波（气流经过膨胀波时其压力、密度下降，速度上升，关于膨胀波在以后的课程会详细讨论。）是微弱扰动波，只能以音速传播，而现在管内已是超音速流动，微弱扰动也就不可能逆流上传了。管内各截面上的流动 Ma 数和压力比完全由管截面比值所确定。管内的压力分布曲线即图 6-21 上的 abc 曲线。

在已知总参数 T_0、ρ_0、p_0 等参数情况下，可按式（6-73a）计算流量 m_* 为（此时喉道截面为临界截面）

$$m_*=m_{max}=C\frac{p_0}{\sqrt{T_0}}A_*$$

当 p_b 增加到恰等于 p_{e_1} 时，管内流动仍没有变化，但口外膨胀波消失。这种状态正是拉瓦尔喷管的设计工作状态。

2．$p_{e_1}<p_b<p_2$ 的情况

此时反压 p_b 在 p_{e_1} 与 p_2 之间，即 p_b 已大于 p_{e_1}；超音速气流流出喷管时，必须经过斜激波（斜激波是指波阵面与速度方

向成一个斜角的平面激波。其物理性质与正激波相同，只是激波强度较正激波的弱。波前波后参数的关系较正激波要复杂一些，因篇幅所限，在这里不作进一步说明。）使波后压力提高到与反压相等才行。根据反压的大小，超音速气流以各种强度的斜激波来提高压力，直到在出口截面上产生最强的激波，即正激波为止。在这个状态下波后气流的静压正是被定为 p_2 的压力，$p_b = p_2$。流动如图 6-21 上的（b）（c）和（d）所示。（d）就对应于在出口截面上产生正激波的情况。

在这个范围内，反压都高于出口截面上的气流压力，但流动变化仍发生在口外，管内流动仍然和第一种情况（$p_b < p_{e_1}$）相同。管内压力分布仍然是曲线 abc。当反压 $p_b = p_2$ 时，压力分布曲线为 $abcd$。c 点至 d 点的压力上升表示了出口截面上经正激波后的压力突跃值。

以上流动特征说明，当反压 $p_b \leqslant p_2$ 时，拉瓦尔喷管中的流动参数与反压无关，只决定于截面比。

3．$p_2 < p_b < p_{e_2}$ 的情况

此时反压 p_b 在 p_2 与 p_{e_2} 之间。反压大于 p_2 之后，必要求气流在喷管出口之前发生正激波以提高压力。当气流在管内发生激波时，波后变为亚音速流，而亚音速气流在扩张管中流动必然是继续降低速度提高静压的。除通过激波的流动外，整个流动仍假定等熵。

假设在 A_x 截面上产生正激波，则由反压可以确定该 A_x 截面的大小及位置。首先根据出口截面上的流量与临界截面上的流量相等可确定出口截面上的马赫数 Ma_e。临界截面流量为

$$m_* = C\frac{p_0}{\sqrt{T_0}}A_*$$

出口截面上的流量用式（6-67）可表示为

$$m = \frac{p_e A_e}{\sqrt{T_0}}\sqrt{\frac{k}{R}}\,Ma_e\left(1+\frac{k-1}{2}Ma_e^2\right)^{\frac{1}{2}} = m_*$$

其中 A_e 为出口截面积。而 $p_e = p_b$，由此定出 Ma_e。再用式（6-45）计算出口截面上的总压 p_{0_2}，这是经过激波后的总压。波前总压为 p_{0_1}。在已知 p_{0_2}/p_{0_1} 后，利用波前波后总压比的公式（6-100）可确定正激波前的 Ma_x，再通过式（6-80）就能定出 A_x。

4. $p_{e_2} < p_b$ 的情况

当反压提高到 p_{e_2} 时，管内的正激波已向上游推进到临界截面处，激波强度趋于零。这时已不存在激波。除了仅在喉道截面上达到音速以外，整个管道内都是亚音速流。由 A_e/A_* 的比值可确定出口截面的 Ma 数，此时应取亚音速解 Ma_{e_2}。当反压进一步提高至 $p_b > p_{e_2}$ 时，连喉道截面处也不再出现音速。整个管道内的流速随反压变化而变化，流量也随之变化。当出口截面上气流速度为亚音速时，其出口静压必须等于反压。因为在亚音速流中，扰动相对于气流以音速传播，出口截面外压力若有变化必将立即传向管道的上游。所以，对于亚音速流动，则是在完全调整好流动参数之后才流出去的。

例 6-10　已知：图 6-22 为一拉瓦尔喷管，喉部截面积为 A_t，出口面积为 A_e，（截面比 $A_e/A_t = 12$）。流入空气的总压为 650 千帕，总温 450 开。在喷管扩张段马赫数为 2.8 之处产生了正激波。求：此时出口截面处的气流马赫数 Ma_e 和温度 T_e。

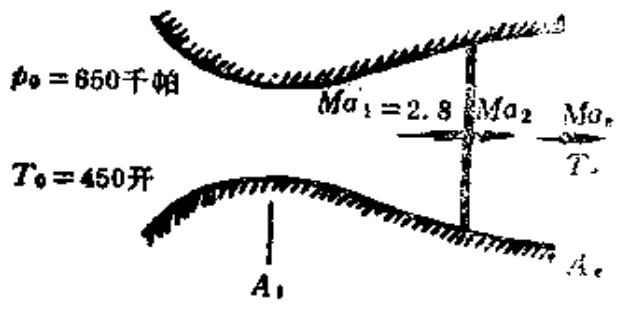


图 6-22

解　紧靠激波前后的流动参数分别用下标 1 和 2 表示。因喉部下游有部分为超音速流，故喉部处为音速截面，有 $A_t = A_{1_*}$。由式（6-80）

$$\frac{A_1}{A_{1_*}} = \frac{1}{Ma_1}\left\{\frac{2}{k+1}\left(1+\frac{k-1}{2}Ma_1^2\right)\right\}^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

$$= \frac{1}{2.8}\left\{\frac{2}{2.4}\left(1+0.2\times 2.8^2\right)\right\}^3 = 3.5$$

又从式（6-92）计算激波后马赫数 Ma_2 为

$$Ma_2 = \left\{\frac{1+\frac{k-1}{2}\cdot Ma_1^2}{kMa_1^2-\frac{k-1}{2}}\right\}^{1/2}$$

$$= \left[\frac{1+0.2\times 2.8^2}{1.4\times 2.8^2-0.2}\right]^{1/2} = 0.488\,2$$

再用（6-80）式得

$$\frac{A_2}{A_{2*}} = \frac{1}{0.488\,2}\left\{\frac{2}{2.4}\left(1+0.2\times 0.488\,2^2\right)\right\}^3$$

$$= 1.363$$

又因为 $A_1 = A_2$，于是有

$$\frac{A_e}{A_{2*}} = \frac{A_e}{A_t}\cdot\frac{A_t}{A_1}\cdot\frac{A_1}{A_{2*}} = \frac{A_e}{A_t}\cdot\frac{A_{1*}}{A_1}\cdot\frac{A_2}{A_{2*}}$$

$$= 12\times\frac{1}{3.5}\times 1.363 = 4.673$$

用式（6-80）进行迭代计算，即可求得与截面比 A_e/A_{2*} 相符的 Ma_e 值为

$$Ma_e = 0.125$$

流动经过激波时总温不变，所以出口静温为

$$T_e = \frac{T_0}{1+\frac{k-1}{2}Ma_e^2} = \frac{450}{1+0.2\times 0.125^2}$$

$$= 448.6(\text{开})$$

例 6-11　已知：空气流过具有两个喉部的管道（图 6-23）。A_1 处称为第一喉部，A_3 称为第二喉部。现在图中截面 A_e 处产生正激波。截面积 $A_1 = 10^{-4}$ 米^2，$A_e = 2.5\times 10^{-4}$ 米^2，$A_2 = 3\times 10^{-4}$ 米^2，管道出口处的压力 $p_4 = 101.4$ 千帕，温度 $T_4 = 290$ 开，总压 $p_{04} = 150\times 10^3$ 帕，$k = 1.4$。除过激波的流动过程以外，假定

整个流动过程是等熵过程。求：当第二喉部处的 $Ma_3=0.85$ 时，计算 A_3 的截面积大小和各截面上的马赫数 Ma_2，Ma_3，Ma_4 大小。

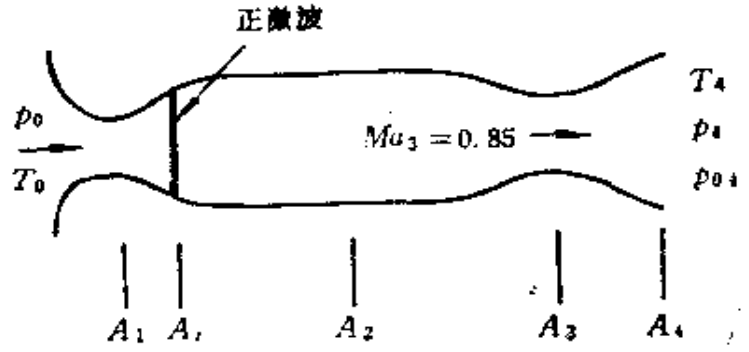


图 6-23

解 由式（6-45），管道出口处气流马赫数为

$$Ma_4=\sqrt{\frac{2}{k-1}\left\{\left(\frac{p_{0t}}{p_4}\right)^{\frac{k-1}{k}}-1\right\}}$$

$$=\sqrt{5\left\{\left(\frac{150\times10^3}{101.4\times10^3}\right)^{1/3.5}-1\right\}}$$

$$=0.7693$$

设激波上游和下游的临界截面积分别为 A_* 和 A_*'，激波前后的马赫数分别为 Ma_s 和 Ma'_s，则由式（6-80）可得激波前的截面比与马赫数的关系为

$$\frac{A_s}{A_*}=\frac{1}{Ma_s}\left\{\frac{2}{k+1}\left(1+\frac{k-1}{2}Ma_s^2\right)\right\}^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

将 A_s，$A_*=A_t$，k 等数值代入上式后得

$$2.5=\frac{1}{Ma_s}\left\{\frac{1}{1.2}\left(1+0.2Ma_s^2\right)\right\}^3$$

经迭代计算，得

$$Ma_s=2.443$$

又由（6-92）式可计算 Ma_s'，

$$Ma_s' = \left(\frac{1+\frac{k-1}{2}Ma_s^2}{kMa_s^2-\frac{k-1}{2}} \right)^{1/2} = \left(\frac{1+0.2\times 2.443^2}{1.4\times 2.443^2-0.2} \right)^{1/2}$$

$$= 0.518\,6$$

再利用式（6-80），有

$$\frac{A_s}{A_*'} = \frac{1}{Ma_s'}\left\{ \frac{2}{k+1}\left(1+\frac{k-1}{2}Ma_s'^2\right)\right\}^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

$$= \frac{1}{0.518\,6}\left\{ \frac{1}{1.2}\left(1+0.2\times 0.518\,6^2\right)\right\}^3$$

$$= 1.306$$

所以

$$A_*' = \frac{A_s}{1.306} = \frac{2.5\times 10^{-4}}{1.306} = 1.914\times 10^{-4}(\text{米}^2)$$

仍然用式（6-80），可得

$$\frac{A_2}{A_*'} = \frac{1}{Ma_2}\left\{ \frac{2}{k+1}\left(1+\frac{k-1}{2}Ma_2^2\right)\right\}^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

将 A_2 及 A_*' 代入，得

$$1.567 = \frac{1}{Ma_2}\left\{ \frac{1}{1.2}\left(1+0.2Ma_2^2\right)\right\}^3$$

因此可解出

$$Ma_2 = 0.407\,4$$

因给定了在第二喉部处气流 Ma 数为 $Ma_3 = 0.85$，故

$$\frac{A_3}{A_*'} = \frac{1}{Ma_3}\left\{ \frac{2}{k+1}\left(1+\frac{k-1}{2}Ma_3^2\right)\right\}^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

$$= \frac{1}{0.85}\left\{ \frac{1}{1.2}\left(1+0.2\times 0.85^2\right)\right\}^3 = 1.021$$

所以

$$A_3 = A_*' \times 1.021 = 1.914\times 10^{-4}\times 1.021 = 1.954\times 10^{-4}\ \text{米}^2$$

§6-6 摩擦、热交换和质量交换等因素对等截面管中气体流动的影响

实际管流中总存在粘性摩擦。对于管道较短而且是加速、减压过程的喷管中的流动，一般初步计算时可以略去摩擦作用，按等熵流处理。而在减速、增压过程的管道内，摩擦对流动的影响必须考虑，不可压情况可参见第五章。同时，实际管流中，还可能有燃烧加热及加入质量的情况，本节要简单讨论这些因素对流动的影响。因为实际问题比较复杂，讨论中作了一些假设和简化，主要阐述三种流动：1.绝热摩擦管中的流动；2.无摩擦加热管中的流动；3.变质量管中的流动。它们的管道截面积都保持不变，流动都假设满足一维流动条件。以下分别进行讨论。

一、等截面绝热摩擦管中的流动

1．基本方程和范诺线

假定管壁绝热，气流与外界无热交换，管内气体微团之间也不考虑热交换，管截面保持不变。对于等截面管中的定常绝热流动，质量方程可简化为

$$\frac{\mathrm{d}V}{V}+\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}=0 \tag{6-107}$$

能量方程式（6-36）为

$$\frac{kR}{k-1}T+\frac{V^2}{2}=\text{Const.} \tag{6-36}$$

其微分形式为

$$\frac{kR}{k-1}\mathrm{d}T+V\mathrm{d}V=0 \tag{6-108}$$

由计及壁面摩擦的动量方程式（6-29）可得

$$\rho V\mathrm{d}V+\mathrm{d}p+\frac{\mathrm{d}F_\tau}{A}=0$$

参看式（5-34）知有

$$dF_r = \tau_0(\pi d)dx = C_f \cdot \frac{\rho V^2}{2}(\pi d)dx$$

式中 d 为等截面圆管的直径，C_f 为摩擦阻力系数，代入上式则有

$$\rho V dV + dp + \frac{4C_f}{d}\frac{\rho V^2}{2}dx = 0 \qquad (6\text{-}109)$$

这些就是等截面摩擦绝热管的基本方程组（对于非圆等截面管，$\frac{4C_f}{d} = \frac{C_f}{r_e}$，$r_e$ 为水力半径）。

用 $\rho = kp/a^2$ 代入式（6-109），并除以 p 后，得

$$k \cdot \frac{V^2}{a^2}\frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} + \frac{4C_f}{d}\frac{k}{a^2} \cdot \frac{V^2}{2}dx = 0$$

或

$$kMa^2\frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} + k\frac{4C_f}{d}\frac{Ma^2}{2}dx = 0 \qquad (6\text{-}110)$$

对状态方程微分，有

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \qquad (6\text{-}111)$$

将式（6-107）及（6-108）代入上式，消去$\frac{d\rho}{\rho}$和$\frac{dT}{T}$，得

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dV}{V} - (k-1)Ma^2\frac{dV}{V} \qquad (6\text{-}112)$$

将上式代入式（6-110），消去$\frac{dp}{p}$，得

$$\left(Ma^2 - 1\right)\frac{dV}{V} + \frac{4kC_f}{d}\frac{Ma^2}{2}dx = 0 \qquad (6\text{-}113a)$$

或

$$\left(\frac{1}{Ma^2} - 1\right)\frac{dV}{V} = -\frac{2kC_f}{d}dx \qquad (6\text{-}113b)$$

又，$Ma = V/a = V/\sqrt{kRT}$，微分化简，有

$$\frac{dMa}{Ma}=\frac{dV}{V}-\frac{1}{2}\frac{dT}{T}$$

对式（6-36）微分，再除以T，得

$$\frac{dT}{T}=-\frac{(k-1)}{kRT}V\,dV=-(k-1)Ma^2\frac{dV}{V} \tag{6-114}$$

将式（6-114）代入上式，得

$$\frac{dMa}{Ma}=\frac{dV}{V}\left\{1+\frac{k-1}{2}Ma^2\right\} \tag{6-115}$$

利用式（6-113）从式（6-115）中消去dV/V，即得

$$\frac{(1-Ma^2)\,dMa}{Ma^3\left\{1+\frac{(k-1)}{2}Ma^2\right\}}=\frac{2kC_f}{d}dx \tag{6-116}$$

从式（6-116）和式（6-113）可看出：若流动是亚音速流，即$Ma<1$，则$\frac{dMa}{dx}>0$，$\frac{dV}{dx}>0$。这表明沿着管道流动随距离的增加马赫数和速度都增大；若流动是超音速流，即$Ma>1$，则$\frac{dMa}{dx}<0$，$\frac{dV}{dx}<0$。表明沿管长马赫数和速度均减小。由此可以看出，管壁的摩擦作用将使亚音速流加速，使超音速流减速，并总使Ma数趋近于1。所以，在等截面管道中的亚音速流不可能从亚音速变为超音速。结果，在管子出口处所能达到的最大马赫数只能为1。反之，对于在等截面管道中的超音速流，也只能通过激波才能变为亚音速流。（注：以上结论是按一维流理论取得的。实验表明，比如在等截面管道中、进口为亚音速的气流，随进口截面的雷诺数和马赫数不同，在出口截面上是可能变为超音速的。）

以上结论也可从焓熵图上的范诺线来得出。

式（6-18）可改写为

$$s-s_1=c_v\ln\left\{\left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^k\cdot\frac{p}{p_1}\right\} \tag{6-117}$$

又由绝热流能量方程式（6-31）和质量方程式（6-33）有

$$h_0 = h + \frac{V^2}{2} = \text{Const.} \tag{6-118}$$

$$\rho V = \text{Const.} = C \tag{6-119}$$

利用状态方程式（6-1），则有

$$h = c_p T = c_p p / R\rho \tag{6-120}$$

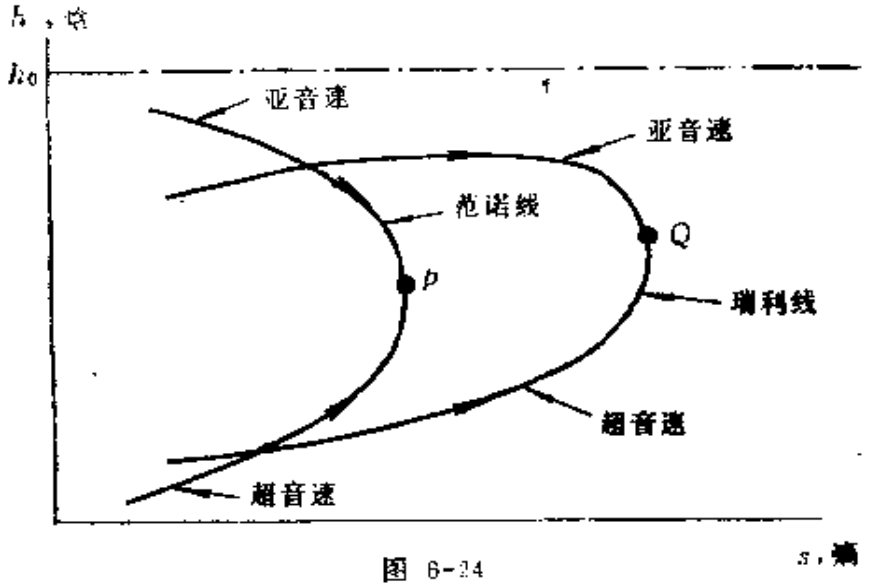


图 6-24

从上述四个方程消去 p、ρ、V，则得

$$s = s_1 + c_v \ln\{h(h_0 - h)^{(k-1)/2}\} + c_v \ln\left\{\frac{\rho_1^k}{p_1}\ \frac{R}{c_p}\left(\frac{\sqrt{2}}{C}\right)^{k-1}\right\} \tag{6-121}$$

图 6-24 上画出了给定比质量流量（$\rho V = C$）条件下的范诺线。最大熵值出现在 p 点，该点可以通过将式（6-121）对 h 微分，且在 $h = h_p$ 处满足 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}h} = 0$ 而求出。

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}h} = \frac{1}{h_p} - \frac{(k-1)}{2} \cdot \frac{1}{h_0 - h_p} = 0$$

$$h_p = \frac{2}{k+1} h_0$$

代入式（6-118），则

$$h_0 = \left(\frac{k+1}{2}\right)h_p = h_p + \frac{V_p^2}{2}$$

$$V_p^2 = (k-1)h_p = (k-1)c_pT_p = (k-1)\left(\frac{kR}{k-1}\right)T_p = kRT_p$$

所以

$$V_p = \sqrt{kRT_p} = a_p$$

因而，范诺线上最大熵值点发生在马赫数等于1的p点处。在绝热有摩擦的等截面管流中，流体微团的熵沿流动方向是不断增加的，因此，流动沿范诺线只能从两端向最大熵值点变化，对于管道入口为亚音速的流动，沿流动方向气流的h下降，由式(6-118)知流速必增加；若入口为超音速流动，沿流动方向的h增加，故流速减小，但两者都向$Ma=1$趋近，直至达到音速。

对于入口为亚音速的流动，摩擦具有与管截面收缩相同的作用。这是就同一条管道而言，下游截面流速和上游截面流速相比较而得出的结论。如果在同样的入出口压力比之下，一条管道没有摩擦（或摩擦系数C_f较小），另一条有摩擦（或C_f较大），则当然是前一种情况在出口处的气流速度要比后一种情况的大，两者不要混淆。对于等截面摩擦管，由于存在摩擦，要维持流动，必要求上下游有压力差。下游压力降低，密度也将随之下降。据质量守恒，管截面不变，$\mathrm{d}\rho$下降必要求$\mathrm{d}V$上升，因此亚音速入口流动的等截面摩擦管中气流速度是增加的。但是以上解释不能简单照搬到超音速流的情况。

2．摩擦管的壅塞现象

在管道中一旦出现了音速截面，在这个截面上流量将达到最大值，管道流动的流量也就受到这个截面的流量所限制。由式（6-73a）可知，通过音速截面的流量的大小和总压成正比，和截面积成正比，和总温的平方根成反比。对于无摩擦的收缩管道来说，如入口和出口截面积给定；当出口截面达到音速时，入口截面的Ma数是确定的值（见图6-9）。若入口截面处Ma数大于

此值，则入口的流量无法全部通过出口截面，这种现象称为几何壅塞现象，结果势必要求气流降低入口速度以减小流量，这种调节过程是通过气流在入口前发生溢流达到的，直到入口处的Ma数恰等于由图确定的值为止。

对于等截面摩擦管的流动，摩擦的作用使亚音速气流加速，超音速气流减速。如果恰好在出口截面上达到音速，则相应于这种管内的流动状态称为摩擦壅塞。因此，在给定的摩擦损失条件下，对于一定的入口状态，相应有一个最大管长，此时在管道出口处恰好达到$Ma=1$。如果实际管长大于最大管长，在出口前已达音速，则流动必须经过调整才可能继续进行。对于亚音速入口状态，必须降低入口流速，减小通过管道的流量（产生溢流），即沿着比流量（ρV）小的范诺线变化，使其可以通过较长的管道长度的摩擦后才达到音速，如此调整直到音速截面发生在管道出口处为止。当入口为超音速状态时，若发生壅塞，此时不一定立即调整入口流量，可以在管内某截面处产生一道正激波，使气流变为亚音速，然后再从亚音速加速到出口截面达到音速。管长越长，壅塞现象越严重，激波位置越靠前，甚至可发生在入口截面或入口截面之前。详情可参看有关专门的教材或资料。

二、等截面加热管中的流动

对于管壁与外界有热交换而管道长度较短的流动（如有燃烧的流动），可视作无摩擦加热管中的流动。为简化起见，仍讨论等截面管。流动满足的动量方程为

$$p_1+\rho_1V_1^2=p+\rho V^2=\text{Const.}=B \tag{6-122}$$

质量方程为

$$\rho V=\text{Const.}=C \tag{6-119}$$

于是有

$$p=B-\frac{C^2}{\rho} \tag{6-123}$$

将上式代入式（6-117），得

$$s = s_1 + c_v \ln\left\{\frac{(B - C^2/\rho)}{\rho^k}\right\} + c_v \ln \frac{\rho_1^k}{p_1} \qquad (6\text{-}124)$$

而焓可表为

$$h = c_p T = \frac{c_p}{R} \cdot \frac{1}{\rho}\left(B - \frac{C^2}{\rho}\right) \qquad (6\text{-}125)$$

由式（6-124）和（6-125），对于给定的比质量流量（$\rho V = C$）可以绘出瑞利线，见图6-24。最大熵值点Q可以通过对式(6-124)和（6-125）微分，给出$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\rho}$和$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\rho}$之后，相除并等于零求出，

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}h} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\rho} \cdot \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}h} = \frac{c_v}{c_p} R\rho_Q \frac{\{C^2/[\rho_Q(B - C^2/\rho_Q)]\} - k}{2C^2/\rho_Q - B} = 0$$

因分母不为零，于是得到

$$\frac{C^2}{\rho_Q(B - C^2/\rho_Q)} - k = 0$$

再用$C = \rho V$代入，得

$$V_Q = \sqrt{kp_Q/\rho_Q} = \sqrt{k \cdot RT_Q} = a_Q$$

因此，在最大熵值点Q处为音速，$Ma_Q = 1$。

由此可以得出，无摩擦等截面管在加热条件下与绝热等截面摩擦管具有相同的流动特征。加热的作用使亚音速流逐渐加速至音速，但不能超过音速；加热的作用使超音速流逐渐减速至音速，但不能低于音速。同样也可能产生类似于摩擦管中的壅塞现象。即在一定流量下存在着一个最大加热量，（使流动在出口截面达到音速的加热量）。当加热量超过此值时，则管中的流量会自动调整，流动将沿另一比质量流量较小的瑞利线变化。无摩擦等截面管在冷却时（通过管壁向外散热），速度的变化趋势恰好与加热时的相反。

三、等截面变质量管中的流动

假如在等截面管中$\mathrm{d}x$的距离内加入的流体质量为$\mathrm{d}m$，并设加入的流体质量与主流有相同的总温和c_p值，则$\mathrm{d}x$段内的流体

所满足的质量方程和动量方程为（微分形式）

$$\frac{\mathrm{d}m}{m}=\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}+\frac{\mathrm{d}V}{V} \tag{6-126}$$

$$\mathrm{d}p+\rho V\mathrm{d}V+\rho V^2(1-y)\frac{\mathrm{d}m}{m}=0 \tag{6-127}$$

上式中略去了 $\mathrm{d}m\mathrm{d}V$ 以上的高阶小量，式中 $y=V_{ax}/V$ 是加入流体质量的 x 向速度分量 V_{ax} 对主流速度 V 之比。

能量方程式（6-36）为

$$c_pT+\frac{1}{2}V^2=\mathrm{Const.}$$

对上式微分，再除以 T，得式（6-114）为

$$\frac{\mathrm{d}T}{T}+(k-1)Ma^2\frac{\mathrm{d}V}{V}=0$$

微分状态方程，得式（6-111），为

$$\frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}+\frac{\mathrm{d}T}{T}$$

应用式（6-126）、（6-127）和以上各式，可得

$$\frac{\mathrm{d}V}{V}=\frac{1}{1-Ma^2}\left[(1+kMa^2)-ykMa^2\right]\frac{\mathrm{d}m}{m} \tag{6-128}$$

从上式看出，增加质量时，$\frac{\mathrm{d}m}{m}>0$，对速度的作用和管道截面积缩小的效果一样，即当气流是亚音速时（$Ma<1$），增加质量使流速增大；而当气流是超音速（$Ma>1$）时，增加质量使流速下降。无论是亚音速流还是超音速流，增加质量都是使马赫数向 1.0 趋近的，而且总压均下降。

以上对等截面的绝热摩擦管、无摩擦加热管和变质量管中的流动特征作了初步讨论。由此可以知道，不仅仅截面收缩的几何喷管可以加速气流，对于入口状态为亚音速的气流、摩擦、加热和增加质量都能起到管道截面积收缩同样的效果，都能使气流加速至音速。但要注意入口变为超音速流以后，会有相反的作用。应当善于利用这些流动特征，为工程设计服务。

附表　一维等熵流气体动力学函数表(节录)(k=1.4)

Ma	$p/p_0=\pi(\lambda)$	$\rho/\rho_0=\varepsilon(\lambda)$	$T/T_0=\tau(\lambda)$	$1/q(\lambda)$	λ
0.5	0 8430	0.8852	0 9524	1.3398	0.5345
0.55	0.8142	0.8634	0.9430	1.2550	0.5851
0.60	0.7840	0.8405	0.9328	1.1682	0.6348
0.65	0.7528	0.8164	0.9221	1.1386	0.6837
0.70	0.7209	0.7916	0.9108	1.09437	0.7318
0.75	0.6886	0.7660	0.8989	1.06242	0.7789
0.80	0.6560	0.7400	0.8865	1.03823	0.8251
0.85	0.6235	0.7136	0.8737	1.02067	0.8704
0.90	0.5913	0.6870	0.8606	1.00886	0.9146
0.95	0.5595	0.6604	0.8471	1.00214	0.9578
1.00	0.5883	0.6339	0.8333	1.0000	1.0000
1.05	0.4979	0.6077	0.8193	1.00202	1.0411
1.10	0.4684	0.5817	0.8052	1.00793	1.0812
1.15	0.4398	0.5562	0.7908	1.01746	1.1203
1.20	0.4124	0.5311	0.7764	1.03044	1.1583
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.50	0.2724	0.3950	0.6897	1.1762	1.3646
1.55	0.2533	0.375	0.6755	1.2115	1.3955
1.60	0.2353	0.3557	0.6614	1.2502	1.4254
1.65	0.2184	0.3373	0.6475	1.2922	1.4544
1.70	0.2026	0.3197	0.6337	1.3376	1 4825
1.75	0.1878	0.3029	0.6202	1.3865	1.5097
1.80	0.1740	0.2868	0.6068	1.4390	1.5360
1.85	0.1612	0.2715	0.5937	1.4952	1.5614
1.90	0.1492	0.2570	0.5807	1.5552	1.5861
1.95	0.1381	0.2432	0.5680	1.6193	1.6099
2.00	0.1278	0.2301	0.5556	1.6875	1.6330
2.05	0.1182	0.2176	0.5433	1.7600	1.6553
2.10	0.1094	0.2058	0.5314	1.8369	1.6769
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
10.0	0.236×10^{-4}	0.495×10^{-5}	0.0476	535.98	2.3904
∞	0	0	0	∞	2.4495

习　题

1．试求下列诸情况下的音速

（1）空气中，温度为 500 开。

（2）空气中，压力为750千帕，密度为 8.30 公斤/米³。

（3）等容比热$c_v=717$ 焦/(公斤·开)，比热比 $k=1.40$ 的气体，其温度为 293.2 开。

2．每小时 600 公里的飞行速度在海平面及 20 000 米的高度上飞行 Ma 数各是多少？

3．有一真空箱，利用管咀从大气吸气。假设空气无论在什么温度下始终是完全气体，问当大气温度为 288 开时，流入真空箱中的最大可能的流速是多少？

4．速度为 200 米/秒的空气流滞止时，温度上升多少度？

5．空气流经无摩擦的管道，在①截面处的温度为 400 开，压力为200千帕，流速为 190 米/秒，在下游的②截面处的流速等于音速，试计算该截面处的温度、速度、压力及密度。

6．$k=1.333$ 的气体在管中流动，截面①上的马赫数为0.5，压力为 200 千帕，截面②上的马赫数为 0.67，试求截面①和②之间的压力降。

7．马赫数1.5，压力 101 千帕，温度 293 开的空气流过静止的正激波。试求经过激波后气流的速度和总压。

8．在马赫数为 Ma_1 的超音速来流中，用皮托管测得总压为 p_{0_2}，试证静压 p_1 可以下式求得

$$p_1=p_{0_2}\left(\frac{2k}{k+1}Ma_1^2-\frac{k-1}{k+1}\right)^{\frac{1}{k+1}}\Big/\left(\frac{k+1}{2}Ma_1^2\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

9．空气由贮气箱通过拉瓦尔喷管在无摩擦损失的情况下流入大气（压力 103 千帕，温度 295 开）。贮气箱内的空气压力为 500 千帕，温度为 305 开，试求贮气箱内、喷管喉部和喷管出口

截面上的音速大小。

10. 要设计一个超音速风洞，试验段的 $Ma=2.0$，截面积 0.6×0.6米^2。运行时，试验段的静压规定为0.5大气压。试计算(*a*)喉道截面；(*b*)安定箱中的总压；(*c*)通过风洞的流量（设总温为室温20℃）。

11. 流场中一条流管的①截面上，$V_1=150$米/秒，$p_1=68.8$千牛/米^2，$T_1=5$℃。顺流而下，在下游的②截面处，其截面积较上游的①截面小15%，求此下游截面上的 p_0，T_0，p_2，T_2，Ma_2。

12. 比热比 $k=1.4$ 的气流沿管径为0.1米的圆管流动，假设流动是绝热的。入口马赫数为0.2，试计算入口至马赫数为1.0和0.6截面的管长，摩擦系数 $C_f=0.00375$。[提示：(6-116)式可化为 $\left\{\frac{1}{Ma^3}+\frac{k+1}{2Ma}+\frac{(k+1)(k-1)Ma}{4\left[1+\frac{k-1}{2}Ma^2\right]}\right\}\mathrm{d}Ma=\frac{2kC_f}{d}\mathrm{d}x$，进行积分，积分常数可用 $Ma=1$ 来确定。]

第七章　流体机械

流体机械是籍助流体力学原理与流体进行机械能量交换的机械装置。它的种类和形式繁多，在国民经济的各个部门都有着广泛的用途。本章专就叶轮式离心泵、容积式（或称扫膛式）泵和马达的流体力学原理作一些介绍，主要目的在于想简要说明前述章节的流体力学规律在流体机械的设计、性能和使用等各个方面的一些应用。对所介绍内容的详情有兴趣的读者，可进一步参看有关专门的教程或资料。

§7-1　流体机械的简单分类

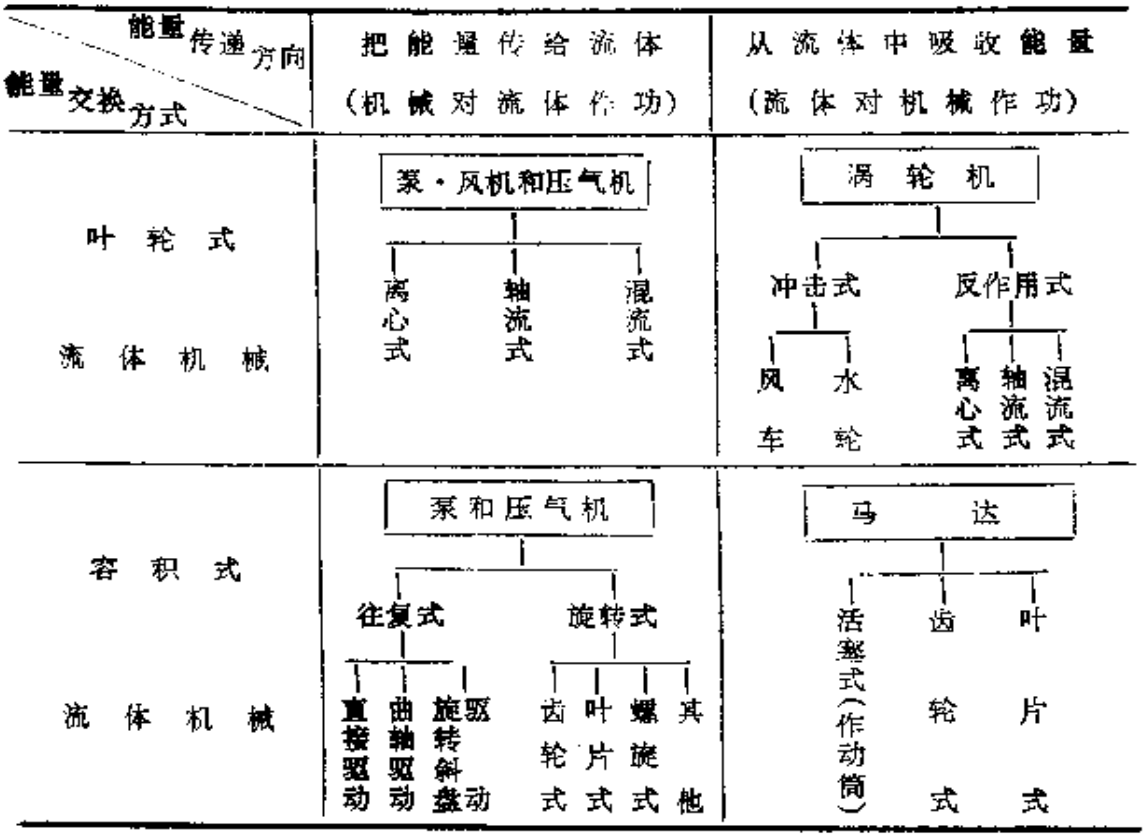
可以从两个角度把流体机械进行简单的分类。

从能量交换或传递的方向看，可分成如下两大类：一大类是流体机械对流体作功，即把输入的机械功率（如转动轴的功率或活塞的移动功率），通过流体机械对流体作功而转给流体，转换为流体功率作为输出，如泵，风机和压气机等；另一大类是流体对流体机械作功，即把输入的流体功率，通过对流体机械所作的功而转给流体机械，转换为轴功率或移动功率作为输出，如涡轮机和马达等。

从能量交换方式或原理看，也可分成如下两大类：一大类的能量交换是通过一个（也可以同时有几个）装有若干叶片的工作叶轮的旋转运动、依靠角动量的连续变化来实现的，故一般称为叶轮式流体机械；另一大类的能量交换依靠流体静力学原理，依靠机械内部密封工作腔室容积的变化来实现流体的吸入、排出，实现机械的往复、或旋转运动，故一般称为容积式流体机械。

在表 7-1 中综述了流体机械的简单分类情况。

表 7-1



本章只介绍叶轮式离心泵、容积式泵和马达，有如下一些考虑：

（1）叶轮式泵或涡轮的流动设计与性能计算方法十分相近。

（2）本书的大部分读者今后遇到选择和使用泵的机会，可能要多一些。

（3）打算讲一点叶轮式离心泵、容积式泵和马达的应用例子，如泵和管路系统以及液压传动系统的特性简单计算分析等。

（4）本书的篇幅限制。

§7-2 离 心 式 泵

一、概 述

离心式泵由下列主要部件组成：1.吸水管口段，2.固定于泵轴上的工作叶轮，3.螺旋形机壳，4.扩张形压水管口段。5.密封装置。见图7-1。

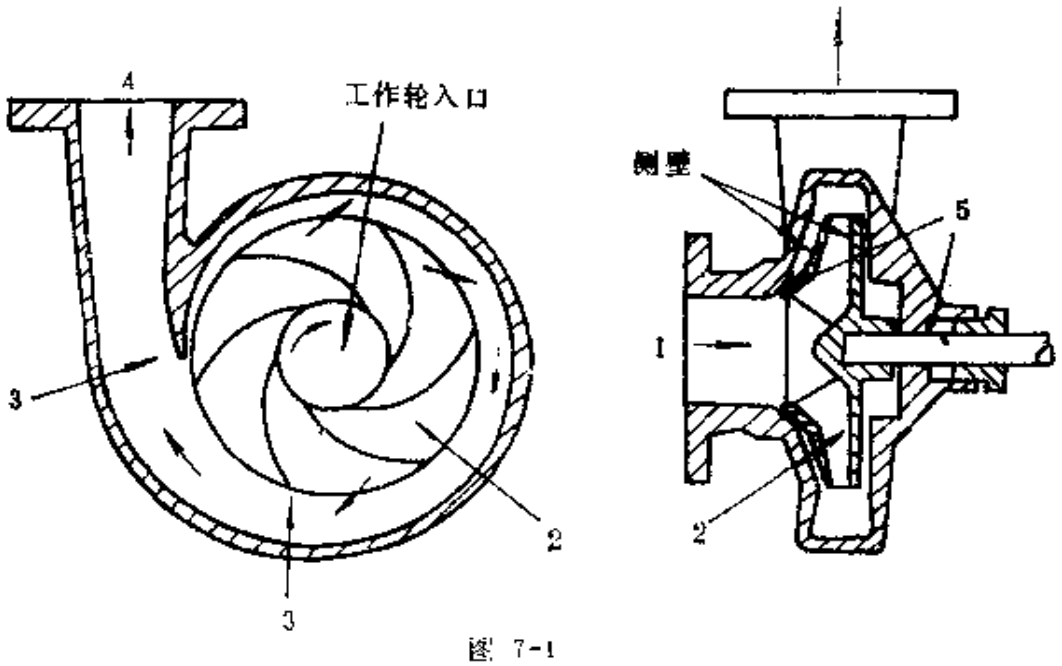


图 7-1

利用电动机输入驱动工作轮旋转所需的轴功率，旋转叶轮推动流体运动而对流体作功，原来充满于叶轮叶片通道中的流体，则在离心力作用下沿着通道向外甩出，与此同时在吸水管口段或叶轮入口处造成低压形成一定真空度，迫使外部流体源源不断地沿吸水管流入，经过叶轮，从螺旋形机壳和压水管口段流入压水管，再经过管路系统将流体功率输运到需要的地方去。流体流过叶轮时，由于从叶轮获得了能量，压力和速度一般都有提高。机壳和压水管口段的通道一般做成扩散形状是为了减速增压，以便减小水力流动损失。以上是离心式泵简单工作原理。另外由图可知，虽然流体先是沿着轴向方向流向叶轮的，然而在叶轮通道入

口截面处流动已经转向，流入与流出叶轮通道的整个流动过程，几乎都是在叶轮旋转平面内进行的，故离心式泵又称径流式泵。

二、离心式泵叶轮的基本方程

1．无限叶片叶轮的欧拉方程

先来推导叶轮加给流体的转动力矩与流体在叶轮叶片通道中运动参数发生变化之间的关系式，即叶轮的欧拉方程。这里需要应用动量矩方程式（3-136）。现在所选取的固定有限大小控制体由半径r_1和r_2的两个同心柱面和工作叶轮的上下两个端面所组成，参看 图7-2。假定流体为不可压、理想流体，流动定常；叶片厚度无限薄，叶片数目无限多；于是，流体在叶片通道中的流动可以看成与沿叶片通道中心流线上的流动相同，即流动完全为叶片形状所决定。由图上画出的叶轮入口和出口流动截面上的速度三角形可知，绝对速度为V_1，V_2；牵连速度为U_1，U_2；相对速度为V_{r_1}，V_{r_2}；绝对速度与牵连速度之间的夹角用α_1，α_2表示，相对速度与牵连速度负方向之间的夹角用β'_1，β'_2表示，按式（3-17）知，有

$$\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{U} \tag{7-1}$$

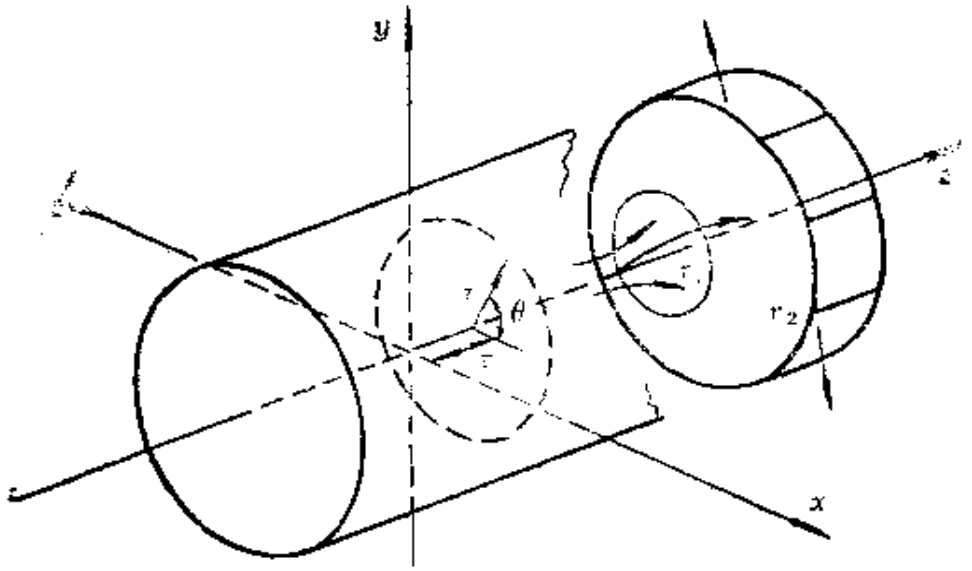
存在；见图，如在叶轮入口和出口截面上，叶片的切线方向与牵连速度负方向之间夹角记为β_1，β_2，它称为叶片的入口和出口角。在上述无限叶片假设前提下，定有

$$\beta'_1 = \beta_1,\quad \beta'_2 = \beta_2 \tag{7-2}$$

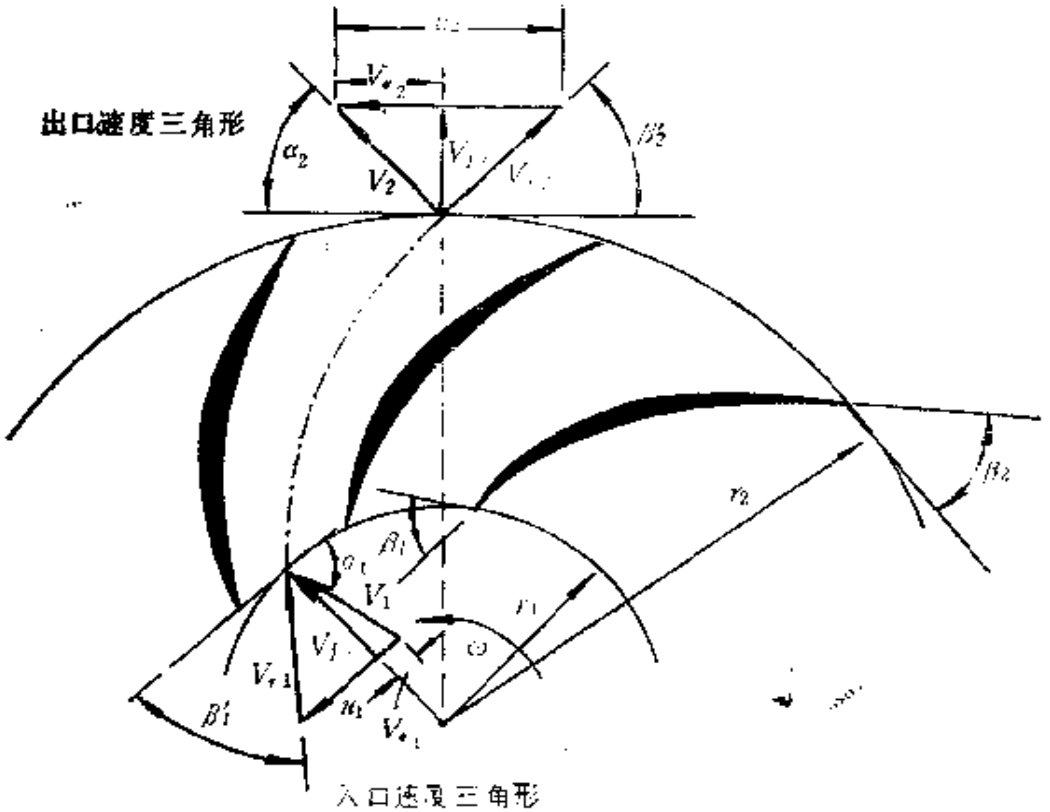
采用柱坐标系（r，θ，z），z轴与泵轴相重合，叶轮旋转平面与r,θ平面相重合；于是按式（3-136）只有一个分量不为零，即

$$T_z = \int_{cs} v_\theta r \rho (V\cos\alpha') \mathrm{d}A \tag{7-3}$$

式中，T_z为作用在控制体上所有外力的合力矩沿z轴的分量，现即为通过泵轴外加在控制体上的转动力矩，v_θ为切向分速，V为


y
x
r_2

(a)


出口速度三角形
α_2
V_2
β_2
r_2
α_1
β_1
V_1
r_1
ω
β_1'
入口速度三角形

(b)

图 7-2

绝对速度，α'为控制面上速度向量$\vec{V}$与面元外法线单位向量$\vec{n}$的夹角。

假定在叶轮入口和出口截面上为一维流，则因$v_{\theta_1}=V_1\cos\alpha_1$，$v_{\theta_2}=V_2\cos\alpha_2$；而$V_2\cos\alpha_2'=V_2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_2\right)=V_2\sin\alpha_2=V_{f_2}$，$V_1\cos\alpha_1'=V_1\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha_1\right)=-V_1\sin\alpha_1=-V_{f_1}$，这里$V_{f_1}$，$V_{f_2}$分别为入口和出口截面上的径向分速，见图7-2(*b*)；按式（7-3）有

$$T_z=\rho(V_2\cos\alpha_2)r_2V_{f_2}(2\pi r_2b_2)-\rho(V_1\cos\alpha_1)r_1V_{f_1}(2\pi r_1b_1)$$

但按质量方程式（3-55）有

$$Q=Q_1=Q_2=V_{f_1}(2\pi r_1b_1)=V_{f_2}(2\pi r_2b_2) \qquad (7-4)$$

式中，b_1，b_2分别为入口和出口截面处叶轮的高度。故

$$T_z=\rho Q(r_2V_2\cos\alpha_2-r_1V_1\cos\alpha_1)=\rho Q(r_2V_{\theta_2}-r_1V_{\theta_1}) \qquad (7-5)$$

这个式子称为叶轮的欧拉方程。因为外加转矩$T_z>0$，故$r_2V_{\theta_2}>r_1V_{\theta_1}$，即叶轮加给流体转矩使流体的动量矩增加。

叶轮对流体所作功率则为

$$P=T_z\omega=\rho Q\omega(r_2V_{\theta_2}-r_1V_{\theta_1}) \qquad (7-6)$$

式中，ω为泵轴的旋转角速度，弧度/秒。泵或叶轮传给单位重量流体的能量，则为

$$E_P=\frac{P}{\rho gQ}=\frac{\omega}{g}(r_2V_{\theta_2}-r_1V_{\theta_1}) \qquad (7-7a)$$

在泵的理论分析中，常把E_P称为泵的扬程或总水头，用H_{th}来表示，脚注*th*表示是按欧拉方程计算得到的扬程，即称为欧拉理论扬程，单位为米，即

$$H_{th}=\frac{\omega}{g}(r_2V_{\theta_2}-r_1V_{\theta_1})=\frac{\omega}{g}(r_2V_2\cos\alpha_2-r_1V_1\cos\alpha_1) \qquad (7-7b)$$

利用图 7-2 上所示入口和出口速度三角形的几何关系，有

$$V_{r_2}^2 = U_2^2 + V_2^2 - 2U_2V_2\cos\alpha_2$$

或

$$U_2V_2\cos\alpha_2 = \frac{1}{2}(U_2^2 - V_{r_2}^2 - V_2^2)$$

同理也有

$$U_1V_1\cos\alpha_1 = \frac{1}{2}(U_1^2 - V_{r_1}^2 + V_1^2)$$

注意因 $U_1 = \omega r_1$，$U_2 = \omega r_2$，将以上关系代入式（7-7b），可得另一表达形式为

$$H_{th} = \frac{U_2^2 - U_1^2}{2g} + \frac{V_{r_1}^2 - V_{r_2}^2}{2g} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} \qquad (7\text{-}8)$$

2．在旋转坐标系上的一维定常不可压理想流体的能量方程

对于图 7-2 所示选定的固定控制体，按能量方程式（3-98）有

$$E_P = H_{th} = \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}\right) - \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g}\right) \qquad (7\text{-}9)$$

利用式（7-8）可消去V_1，V_2，得

$$\left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_{r_2}^2}{2g}\right) - \frac{U_2^2}{2g} = \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_{r_1}^2}{2g}\right) - \frac{U_1^2}{2g} \qquad (7\text{-}10)$$

或

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V_r^2}{2g} - \frac{U^2}{2g} = \text{Const.} \qquad (7\text{-}11)$$

这个式子称为在旋转坐标系上的一维定常不可压理想流体的能量方程，或称沿流线的相对运动伯努利方程。显然，如 $\omega = 0$，则 $U = 0$，按式（7-1）知，$\vec{V}_r = \vec{V}$，则式（7-11）就与伯努利方程式（3-75a）完全相同。

由式（7-10）可改写成：

$$\frac{p_2-p_1}{\gamma}=\frac{U_2^2-U_1^2}{2g}+\frac{V_{r1}^2-V_{r2}^2}{2g}+(z_1-z_2) \quad (7\text{-}12)$$

一般，(z_1-z_2)是一个小量；将式（7-8）与式（7-12）对照则知，在式（7-8）右端前两项之和表示静压水头的增量，而右端第三项为速度水头增量；换句话讲，叶轮对单位重量流体所作的功体现为流体静压水头和速度水头增量之和。如用H_{st}和H_{dyn}分别表示静压水头和速度水头增量，则有

$$H_{th}=H_{st}+H_{dyn} \quad (7\text{-}13)$$

如定义工作叶轮的反应度θ为

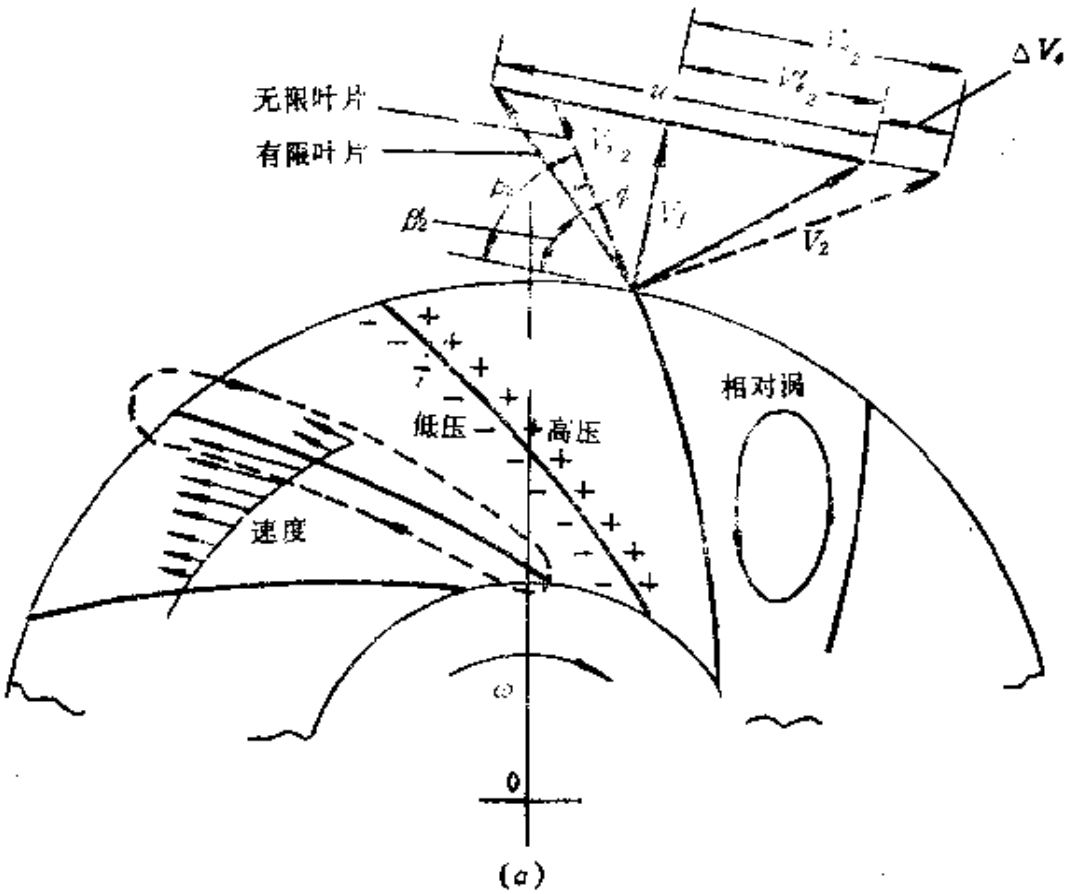
$$\theta=\frac{H_{st}}{H_{th}}=1-\frac{H_{dyn}}{H_{th}} \quad (7\text{-}14)$$

即知工作叶轮的反应度θ越大，说明在叶轮与流体的能量交换过程中，转换为静压水头增量的份额越多，这对减小泵和压水管中的水力损失有利。一般，在离心式泵流动设计中，工作叶轮应具有较大的反应度。

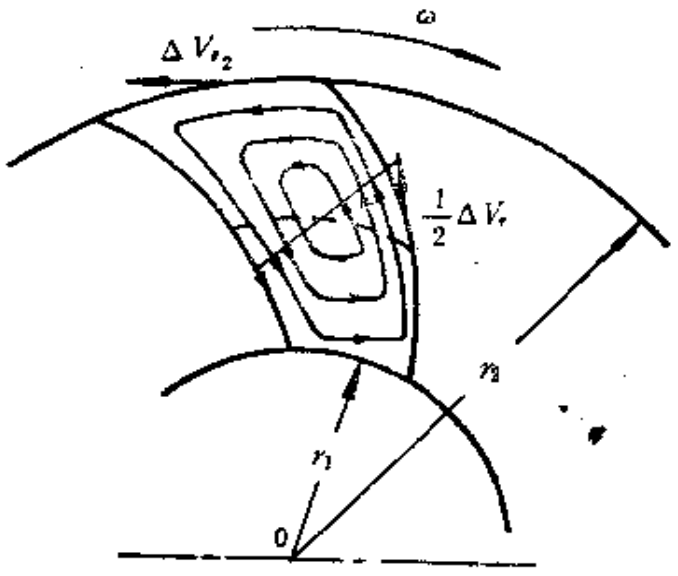
3．有限叶片叶轮的扬程修正因子

当叶片数目为有限值时，沿叶片通道的流动不会是一维流，也不会自动满足式（7-2），结果将导致V_{θ_2}值减小，因而使欧拉理论扬程减小。这个减小并不是流体的粘性效应等原因造成的，故不是能量损失。

参看图7-3，当叶片的正面（指向前运动的叶面，又称工作叶面）推动流体运动时，作用在叶片正面上的压力也相应要升高，大于同一叶片背面上的压力，图上已分别用＋，－号表出；在同一半径上，压力梯度不再等于零；按式（7-11）立即可知，靠近叶片背面的相对速度要大于靠近叶片正面的相对速度，造成出口截面上的速度分布不均匀；换言之，在通道中的流体相当于产生了与叶轮旋转方向相反的回转运动（亦称相对涡流），从而导致出口截面上平均相对流速V_{r_2}发生变化，$\beta_2'=\beta_2-\phi$，使V_{θ_2}减小变为V'_{θ_2}。$\Delta V_{\theta_2}=V_{\theta_2}-V'_{\theta_2}<0$，见图。


无限叶片
有限叶片
ΔV_u
β_2
V_2
相对涡
低压
高压
速度
ω
0

(a)


ω
ΔV_{u_2}
$\frac{1}{2}\Delta V_u$
r_2
r_1
0

(b)

图 7-3

定义有限叶片叶轮通道中的相对回转运动修正因子S_F为

$$S_F = \frac{V'_{u_2}}{V_{u_2}} \tag{7-15}$$

有许多估算S_F的方法和公式，比如下式是其中之一，即

$$S_F = 1 - \frac{\pi \sin\beta_2}{Z\left[1 - \left(\frac{V_{f_2}}{U_2}\right)\cot\beta_2\right]} \tag{7-16}$$

式中，Z为叶轮上叶片的数目。由上式可知，修正因子S_F与Z，β_2，ω（因$U_2 = r_2\omega$）和通过叶轮的流量Q有关[见式（7-4），因V_{f_2}与Q有关]。同实验结果比较后知，上式在$20° < \beta_2 < 30°$范围内比较适用。作为初步估算时，也可以采用下式，即

$$S_F = \frac{1}{1 + \frac{1.2(1+\sin\beta_2)}{Z\left[1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right]}} \tag{7-17}$$

由于在离心式泵中，叶轮入口截面上的α_1通常等于90°，故由式（7-7）可得

$$H_{th} = \frac{\omega r_2 V_2 \cos\alpha_2}{g} = \frac{U_2 V_{u_2}}{g} \tag{7-18}$$

因此，有限叶片叶轮的理论扬程H_F和欧拉理论扬程H_{th}之间的关系即为

$$H_F = S_F H_{th} \tag{7-19}$$

换句话讲，有限叶片叶轮的相对回转运动S_F修正因子也是理论扬程的修正因子。

4．理论扬程流量特性

由图7-2上叶轮出口截面上的速度三角形可知，有

$$V_{u_2} = U_2 - V_{r_2}\cot\beta_2 \tag{7-20}$$

将它代入式（7-18）后，有

$$H_{th} = \frac{U_2}{g}(U_2 - V_{r_2}\cot\beta_2)$$

利用式（7-4）的关系，上式可改写成：

$$H_{t\infty}=\frac{1}{g}\left(\frac{\pi N D_2}{60}\right)^2-\frac{\cot\beta_2}{g\pi D_2 b_2}\left(\frac{\pi N D_2}{60}\right)Q$$
$$=A-BQ \qquad (7\text{-}21)$$

式中，N 是叶轮每分钟的转速，$\omega=\frac{2\pi N}{60}$，而 $D_2=2r_2$. 对于给定转速和叶轮几何参数（如D_2，b_2，β_2 等）的情况下，上式中的 A，B 则为常数。因此，欧拉理论扬程 $H_{t\infty}$ 和流量 Q 之间的关系为线性关系，斜率的正负号取决于叶片出口角 β_2 的大小。见图7-4。对于后弯叶片，$\beta_2<90°$，则扬程随流量的增加将下降；对于前弯叶片，$\beta_2>90°$，则情况相反；径向叶片（$\beta_2=90°$）的理论扬程随流量的增减不发生变化。

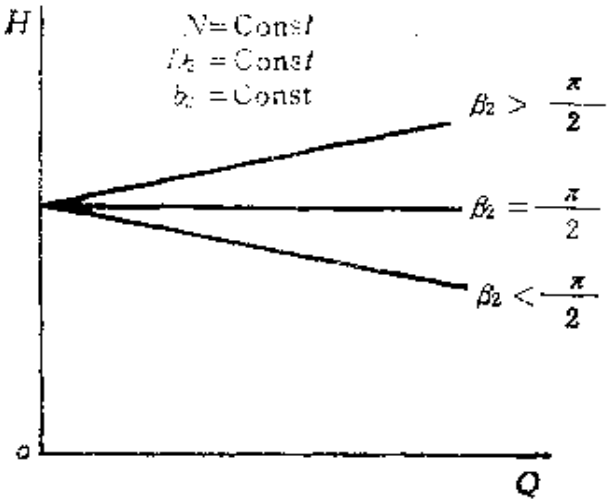


图 7-4

在相同流量、转速和叶轮直径下，三种叶片的出口截面速度三角形的比较，见图7-5。增加 β_2，则绝对速度 V_2 以及 V_{θ_2} 均增加，因而扬程也随之增大，如图 7-4 所示。但在式（7-14）中已指出，速度水头增量在总扬程中的比重也跟着增加；换言之，叶轮的反应度 θ 将随 β_2 的增大而减小，这对减小泵中的水力损失不利。泵出口截面的速度头增加，相应也将增加与泵配套使用的管路系统中的水力损失。综合考虑各方面的因素后，离心式泵常采用后弯叶片，β_2 角一般在 20°～35° 之间。一般在高效率下工作

的泵，叶轮的反应度在0.75左右。

以上讨论虽未提及叶片入口角β_1，但始终隐含应随时满足式（7-2）的要求，即入口处的相对速度V_{r_1}流入叶片间的通道时，要$\beta'_1=\beta_1$，否则将产生绕前缘的流动分离，造成分离水力损失。在流量、转速发生变化的情况下，叶片入口角β_1应做相应的调整。目前，常用的β_1角在14°～25°范围内。

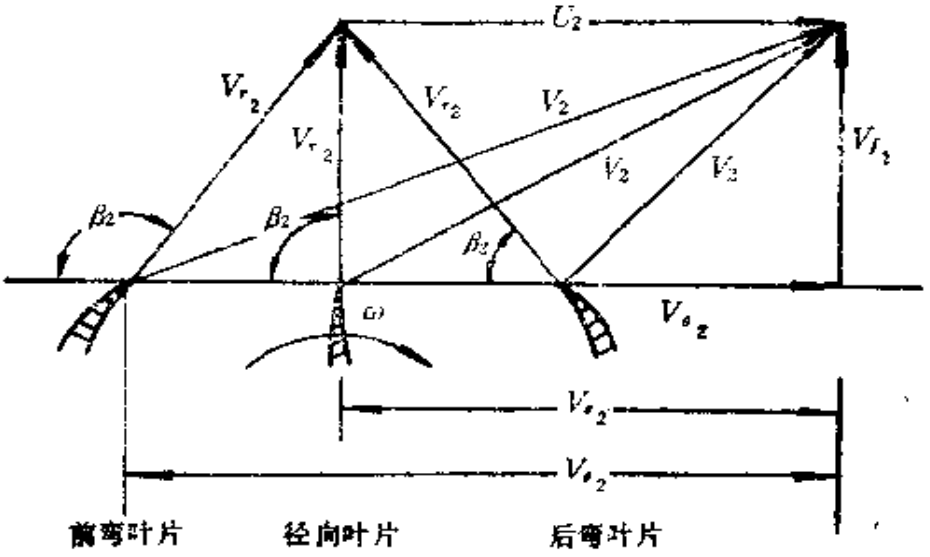


图 7-5

对于有限叶片叶轮的理论扬程流量特性，以上的讨论均适用；只是从式（7-16）～（7-19）等知，β_2还对S_r有影响。此外，增加叶片的数目对减小相对涡流影响有好处，但将增加水力流动损失。从研究高效率的离心式泵的实践知，选用最佳叶片的数目可按下式估算

$$Z=6.5\frac{1+\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}{1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}\sin\left(\frac{\beta_1+\beta_2}{2}\right) \qquad (7\text{-}22)$$

目前，一般采用的Z=6～12。

例7-1　已知：离心式泵的$r_1=0.08$米，$r_2=0.16$米，$b_1=0.0238$米，$b_2=0.0119$米，$\beta_1=15°$，$\beta_2=30°$，$Z=8$，$a_1=90°$

叶轮转速$N=1430$转/分。求：该泵叶轮的理论扬程H_F和流量Q的大小

解 由$N=1430$转/分，得$\omega=149.7$(弧度/秒)，故$U_1=r_1\omega=$ $=0.08\times149.7=11.976$(米/秒)，由图7-2上入口速度三角形知，$V_1=U_1\mathrm{tg}\beta_1=11.976\times\mathrm{tg}15^\circ=3.21$（米/秒），按式（7-4）得

$$Q=V_{f_1}(2\pi r_1b_1)=V_1(2\pi r_1b_1)=3.21\times2\pi\times0.08\times0.0238$$
$$=0.0384\text{（米}^3\text{/秒）}$$

再按式（7-16）计算S_F，因有$V_{f_2}=\dfrac{Q}{2\pi r_2b_2}=3.21$（米/秒），$U_2=r_2\omega=0.16\times149.7=23.95$（米/秒）故

$$S_F=1-\frac{\pi\times\sin30^\circ}{8\left[1-\left(\dfrac{3.21}{23.95}\right)\cot30^\circ\right]}=0.744$$

又按式（7-20）有

$$V_{\theta_2}=23.95-3.21\times\cot30^\circ=18.39\text{(米/秒)}$$

代入式(7-18)，有

$$H_{th}=\frac{U_2V_{\theta_2}}{g}=\frac{23.95\times18.39}{9.81}=44.9\text{（米）}$$

故按式（7-19）有

$$H_F=S_FH_{th}=0.744\times44.9=33.4\text{（米）}$$

三、离心式泵的特性曲线

1．概述

所谓离心式泵的特性曲线是指在给定泵的几何尺寸、要求输运的流体种类和转速下实际测得的、泵的$H=f_1(Q)$，$P=f_2(Q)$和$\eta=f_3(Q)$的关系曲线。H，P，η和Q分别是泵的扬程或总水头，输入的轴功率，总效率和流量。一台典型的离心式泵的特性曲线可参看图7-6。

上述特性曲线表示了离心式泵工作中最重要的变量：流量Q、总水头H、轴功率P、转速N、尺寸D（叶轮外径）等和总

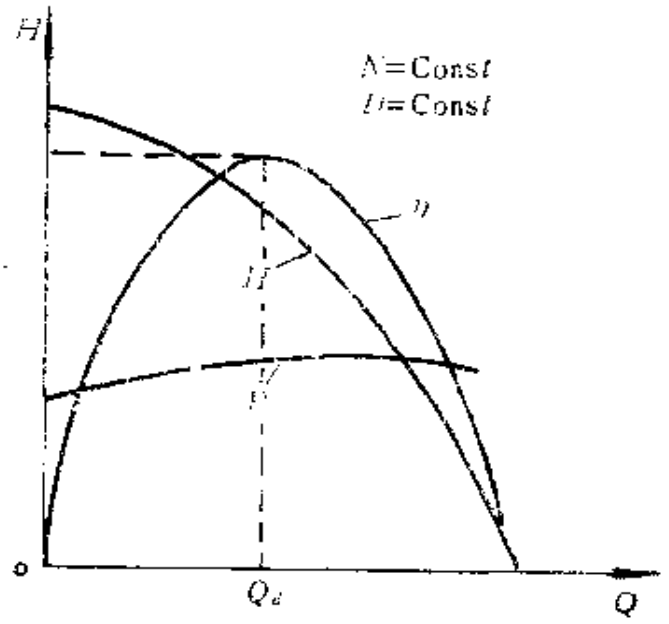


图 7-6

效率 η 之间的关系式。泵总效率 η 的定义为

$$\eta = \frac{\rho g H Q}{P} \tag{7-23}$$

即为泵输出的流体功率与输入泵的轴功率之比。当 $Q=0$，显然 $\eta=0$；当Q增加，η 也跟着增加直到 $\eta=\eta_{max}$点，该点称为该泵的设计工况点，相应该点的流量称为设计流量；再进一步增加流量，则η开始下降；理论上可再次出现$\eta=0$的点，此时$H=0$，$Q=Q_{max}$，但这已早超出泵正常工作的流量范围。

从上一段的讨论中已知道，泵的总水头与流量之间的确有一定的关系存在，但远比式（7-21）等复杂，而有图 7-6 上所示的 $H\sim Q$ 关系，这主要是流体粘性效应所致，特别是当流量偏离设计工况点时的值而产生的粘性摩擦和分离流动损失所致。

2．各种损失功率和效率

泵和流体进行能量交换时，产生机械能量的损失是不可避免的，问题在于如何来减小这些损失，从而提高泵的总效率η.这里，先分项介绍各种损失功率，以便明确减小损失提高效率的途径。

① 叶轮中的流动阻力损失功率，其中包括叶片通道中的粘性

摩擦和分离损失，以及由于通道中压力分布变化引起的二次流损失等。如用 h_i 表示在叶轮中流动总损失水头，Q_i 是流过叶轮通道的流量，则叶轮中的流动阻力损失功率为

$$P_i = \rho g h_i Q_i \qquad (7\text{-}24)$$

② 叶轮中的能量渗漏损失功率，叶轮对流体作功的流量为 Q_i，但有小部分流量通过叶轮和壳体间的缝隙，密封装置从高压区流回低压区，形成回流；见图7-7。使得流入压水管口段的流量 $Q = Q_i - \Delta Q$，ΔQ 为渗漏流量。如叶轮产生的总水头为 H_i，则叶轮中的能量渗漏损失功率为

$$P_l = \rho g H_i \Delta Q \qquad (7\text{-}25)$$

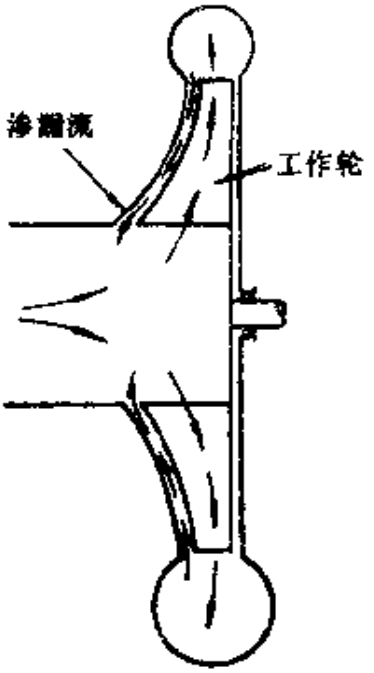


图 7-7

③ 壳体中的流动阻力损失功率，其中包括吸水管口段和压水管口段中的粘性摩擦和分离损失；如用 h_c 表示在壳体中流动总损失水头，流入压水管口段的流量是 Q，则壳体中流动阻力损失功率为

$$P_c = \rho g h_c Q \qquad (7\text{-}26)$$

④ 机械摩擦阻力损失功率，其中包括转动轴承，密封装置中的摩擦损失以及单面叶轮背部（未装叶片的一面）和壳体间流体的摩擦损失等，现记为 P_m。按照能量守恒原理，有

$$P = P_m + \rho g(h_i Q_i + H_i \Delta Q + h_c Q + HQ) \qquad (7\text{-}27)$$

现在来分析各项效率和总效率 η.

（1）机械效率 η_m

现因输入泵轴的有用功率为 $P - P_m$，故

$$\eta_m = \frac{P - P_m}{P} \qquad (7\text{-}28)$$

（2）叶轮水力效率 η_i

因输入叶轮的功率为 $P-P_m$，叶轮所作功率为 $\rho g H_t Q_t$，故

$$\eta_t = \frac{\rho g H_t Q_t}{P - P_m} = \frac{\rho g H_t Q_t}{\eta_m P} \tag{7-29}$$

按式（7-24），也可将上式改写为

$$\eta_t = \frac{\rho g H_t Q_t}{\rho g H_t Q_t + \rho g h_t Q_t} = \frac{H_t}{H_t + h_t} = \frac{H_t}{H_p} = \frac{H_t}{S_p H_{th}} \tag{7-30}$$

换句话讲，有

$$\eta_m P = \rho g Q_t (H_t + h_t) = \rho g Q_t H_p = \rho g Q_t S_p H_{th} \tag{7-31}$$

（3）容积效率 η_v

用来考虑能量渗漏损失，因叶轮作功的流体流量为 Q_t，而输出的流量为 Q，故

$$\eta_v = \frac{Q}{Q_t} = \frac{Q}{Q + \Delta Q} \tag{7-32}$$

（4）壳体水力效率 η_o

用来考虑壳体中的流动阻力损失，有

$$\eta_o = \frac{\rho g H Q}{\rho g H_t Q_t - \rho g H_t \Delta Q} = \frac{HQ}{H_t (Q_t - \Delta Q)} = \frac{H}{H_t} \tag{7-33}$$

到此，很容易证明由式（7-23）定义的总效率 η 与上述各项效率之间的关系为

$$\eta = \eta_m \eta_t \eta_o \eta_v \tag{7-34}$$

实用中常把 $\eta_t \eta_o$ 的乘积称为泵的水力效率，即

$$\eta_h = \eta_o \eta_t = \frac{H}{H_t} \frac{H_t}{S_p H_{th}} = \frac{H}{S_p H_{th}} \tag{7-35}$$

故有

$$\eta = \eta_m \eta_h \eta_v \tag{7-36}$$

这样，就明确了提高泵总效率的可能途径。

3．实际扬程流量特性曲线

由式（7-35）知，泵的扬程（或称可用扬程，实际扬程）与欧拉理论扬程之间的关系为

$$H = \eta_h S_p H_t \tag{7-37}$$

代入式（7-21），并利用式（7-32）关系后有

$$H = \eta_h S_p (A - B\eta_v Q) \tag{7-38}$$

由上式知，机械效率 η_m 并不影响泵的扬程流量特性；如 η_h, η_v 随 Q 的变化不大的话，那么泵的扬程流量特性仍大致呈线性关系。然而正象图 7-6 所示那样，总效率 η 乃至水力效率 η_h 随 Q 的变化很大，故扬程流量特性的变化主要取决于水力阻力损失随 Q 变化的规律和物理机理。

水力阻力损失水头随 Q 变化可归纳成两类：

（1）摩擦阻力损失水头，是粘性流体与泵内所有固体壁面间摩擦造成的损失，其中包括流体与叶轮、机壳内壁等的摩擦。因粘性流体的流态在泵内大都为湍流，故摩擦阻力损失水头可表达为

$$h_f = kQ^2 \tag{7-39}$$

在图7-8上，它是一条过原点的抛物线，k是取决于泵内部结构几何形状的常数。

（2）分离损失水头，主要来自当 $\beta_1' \neq \beta_1$ 时在叶片入口处产生的前缘分离带来的能量损失；在泵的设计工况点，$Q = Q_d$，则前缘分离损失趋于零；当 $Q \neq Q_d$ 时，就会产生分离损失。这种损失水头可表达为

$$h_{sh} = k' (Q - Q_d)^2 \tag{7-40}$$

在图 7-8 上，它也是一条抛物线，不过零点在 $Q = Q_d$ 处。k' 也是取决于泵几何形状的常数。在同一图上还画出了 $(h_f + h_{sh}) \sim Q$ 的变化曲线。

因此，利用图 7-8 形象地说明了由欧拉理论扬程流量特性关系曲线Ⅰ，考虑到 S_p 和 η_v 影响后得到扬程流量关系曲线Ⅱ，再计及水力损失水头 $(h_f + h_{sh})$ 后得到实际扬程流量特性曲线Ⅲ的过程。

图 7-9 是一台离心式泵，在 $N = 2900$ 转/分下，由试验测得的特性曲线，除了 H，η 和 P 外，还列了 $NPSH$（允许气穴余量，意义后详）随流量 Q 的变化曲线。由图可见，该泵设计工况

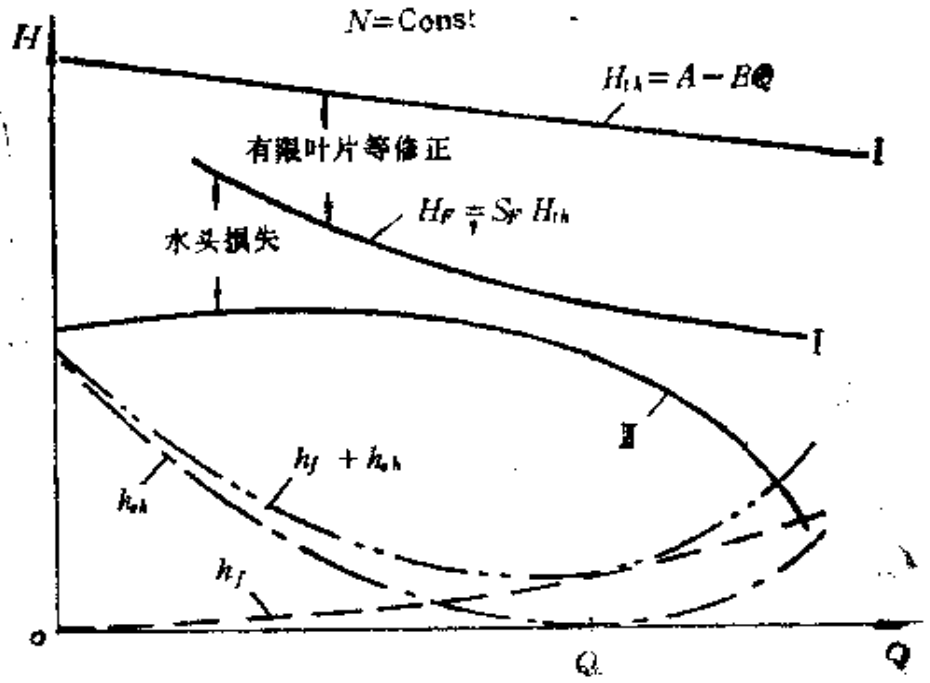

H
N=Const
$H_{th}=A-BQ$
有限叶片等修正
水头损失
$H_F=S_F H_{th}$
I
II
h_f+h_{sh}
h_{sh}
h_f
o
Q
Q

图 7-8

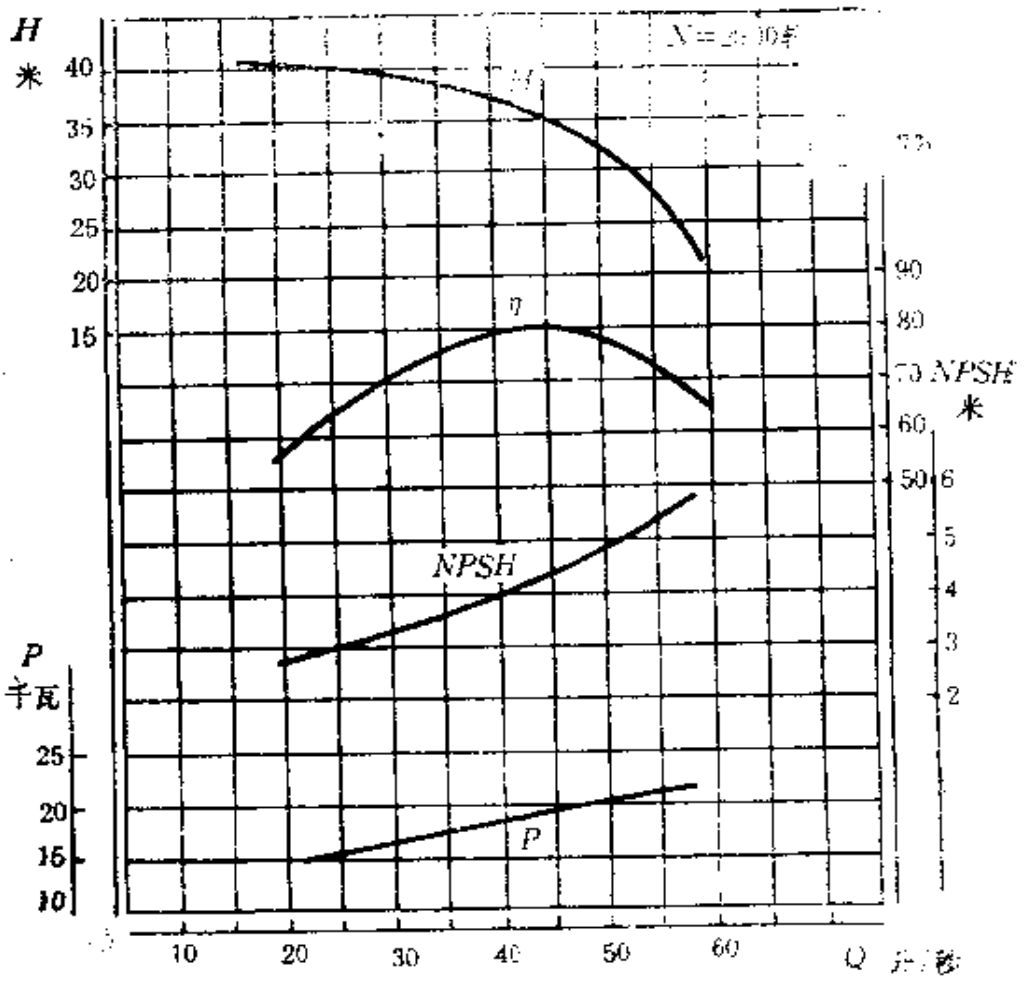

H
米
40
35
30
25
20
15
H
η
NPSH
P
千瓦
25
20
15
10
90
80
70
60
50
NPSH
米
6
5
4
3
2
10
20
30
40
50
60
Q

图 7-9

点的 $Q_d = 45$ 升/秒，$H = 35$ 米，而 $\eta_{max} = 0.804$。

一台泵自然也可以在不同转速下工作，但由于叶片形状和安装情况一般均不能调整，转速偏离设计转速则将导致水力阻力损失增加，使泵的水力效率乃至总效率降低。图 7-10 正是一台泵在不同转速下工作测得的特性曲线，并绘出了该泵的等效率线。图上表明，该泵的最有利工作状态即设计工况点参数是 $N = 1450$ 转/分，$Q_d = 0.044$ 米^3/秒，$H = 36.58$ 米，而 $\eta_{max} = 0.84$。

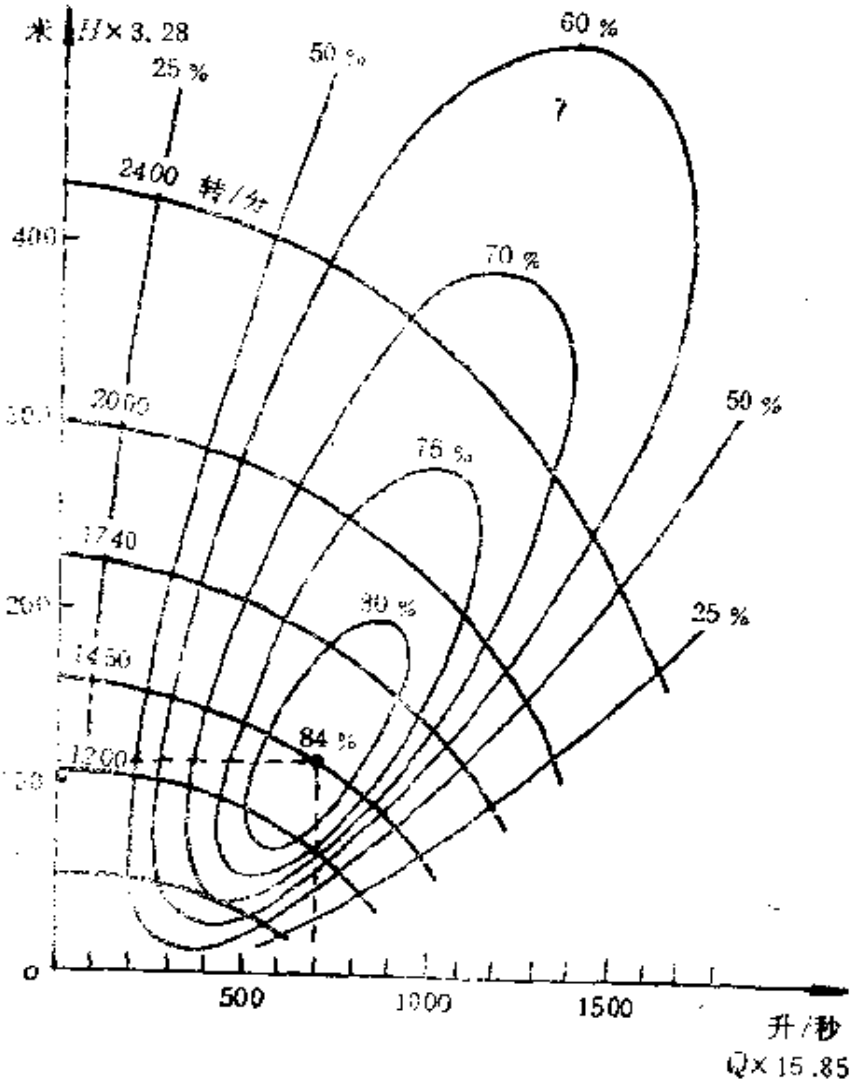


图 7-10

改变叶轮和壳体的设计，泵的特性曲线也将随之变化。从扬程流量特性曲线形状上看，可分成两种情况：随 Q 的增加 H 先跟着增加达到最大值，当 Q 继续增加则 H 下降；或者随 Q 的增加 H 一直下降，见图 7-11。前者称为具有不稳定工作区的扬程流量曲线，后者称为具有稳定型的扬程流量曲线。叶片出口角 $\beta_2>90°$ 的叶轮，其 H-Q 曲线属于前者，而 $\beta_2<90°$ 的叶轮，其 H-Q 曲线属于或接近于后者，见图 7-12。此外，叶片出口角 β_2 对泵的 P-Q 曲线也有重要影响。由图 7-12 可知，对于 $\beta_2<90°$ 的叶轮，要求输入的轴功率 P 先随 Q 的增加而增加，当 Q 增加到 Q_d 附近时 P 达到最大值，然后下降；对于 $\beta_2>90°$ 的叶轮则不同，随 Q 的增加 P 是一直要求增大的。这种情况对选用驱动泵的电动机功率会带来一些问题：如果以设计工况点状态来选用电动机功率，一旦流量超出 Q_d，则电动机将超载运行；如果为防止超载选用较大功率的电动机，则使电动机不能充分发挥潜力满载运行工作，从而带来不必要的浪费。至于前弯叶片（$\beta_2>90°$）在图 7-11 不稳定工作区中所遇到的问题，将在下段介绍。综合各种因素之后，故在离心式泵中多采用后弯叶片。

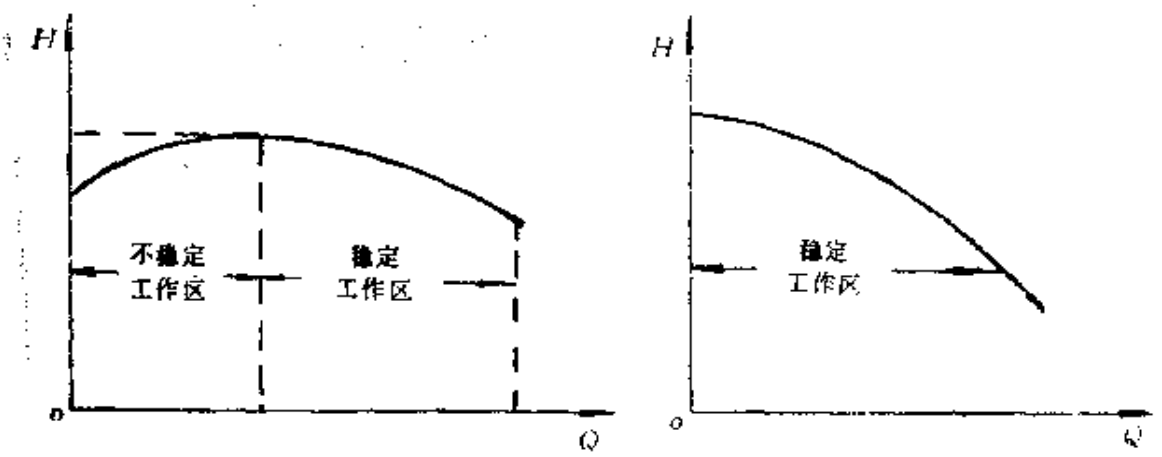


图 7-11

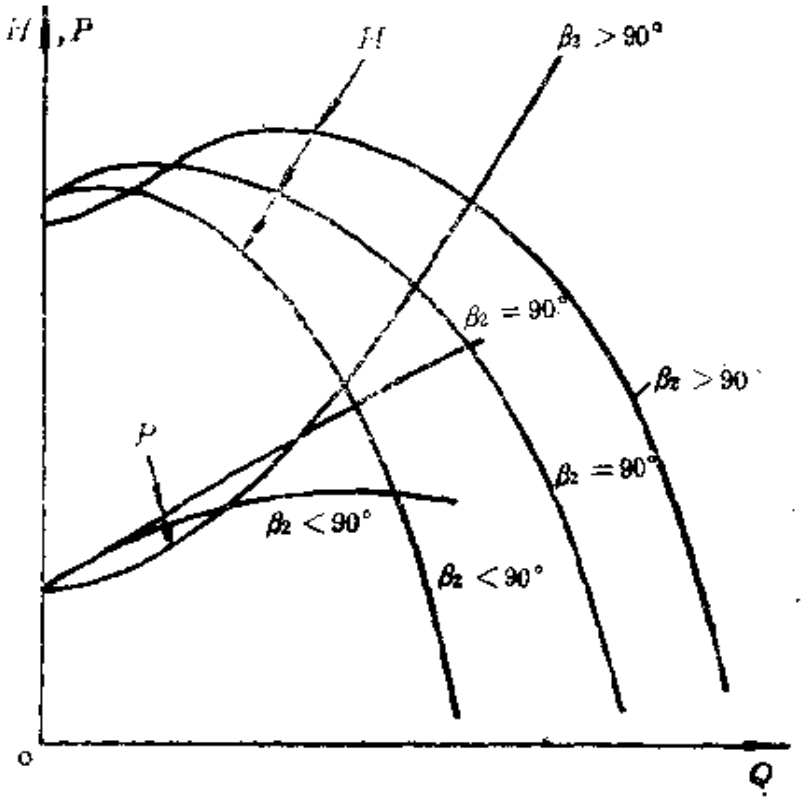


图 7-12

图7-13表出了不同 β_2 角、泵的扬程流量特性曲线和轴功率流量特性曲线。这是用设计工况点参数 Q_d，H_d，P_d 作为参考量，用 H/H_d，P/P_d 和 Q/Q_d 表示的曲线。

例7-2　已知：某水泵在设计工况点时 $\eta_{max}=0.7$，$N_d=1450$ 转/分，$H_d=100$ 米，$Q_d=50$ 升/秒，而该泵的特性曲线见图7-14。水的 $\gamma=9810$ 牛/米^3。求：当流量不变，而扬程增加到130米时需要的转速和功率。

解　由 $Q/Q_d=1$，$H/H_d=\frac{130}{100}=1.3$，按图7-14查得 $N/N_d=1.1$，$\eta/\eta_{max}=0.95$，故有 $N=1595$（转/分），$\eta=0.67$，因此，按（7-23）式有

$$P=\frac{\rho gHQ}{\eta}=\frac{9810\times0.05\times130}{0.67}=95.17(千瓦)$$

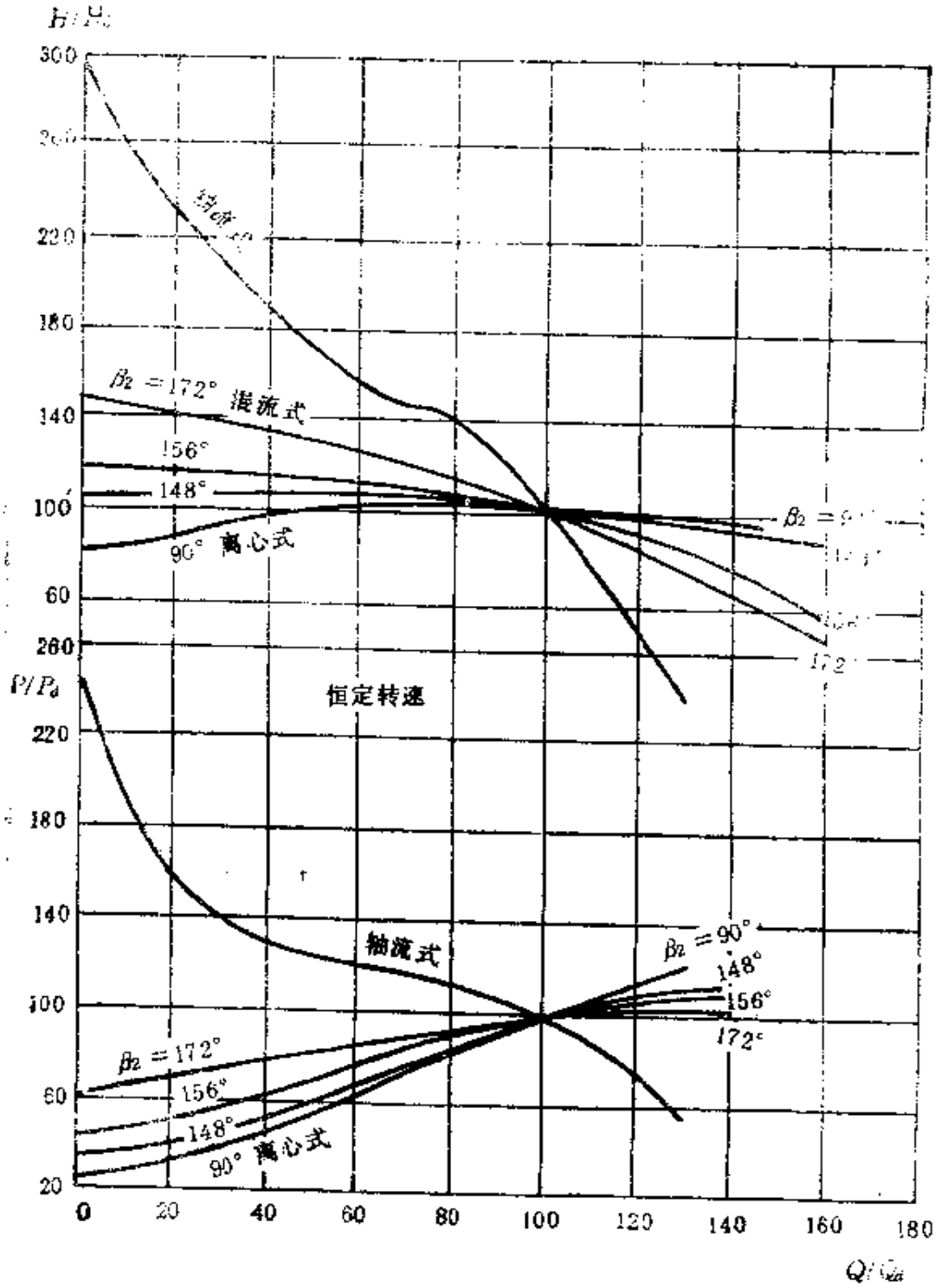

H/Ha
300
220
180
140
100
60
260
P/Pa
220
180
140
100
60
20
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
Q/Qa
恒定转速
混流式
β2 =172°
156°
148°
90° 离心式
轴流式
β2 =90°
148°
156°
172°
β2 =172°
156°
148°
90° 离心式

图 7-11

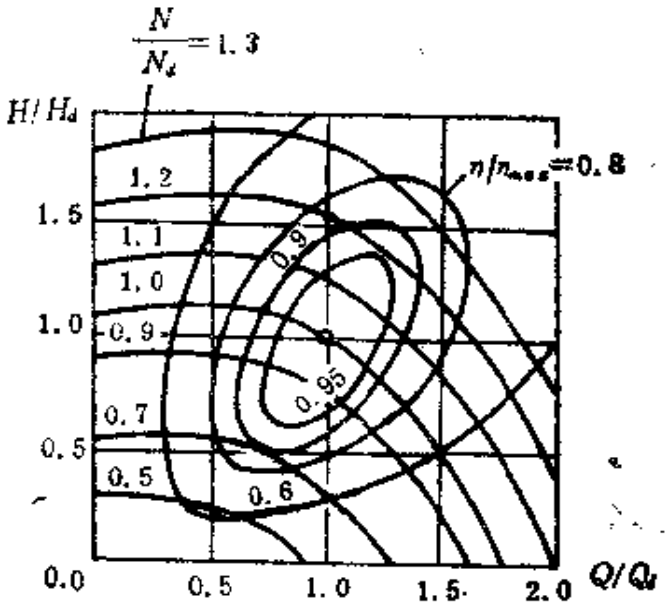


图 7-14

四、离心式泵的相似理论

到目前为止，按流体力学理论要准确地进行离心式泵的流动设计和性能估算还存在不少困难，因此，必须根据模型泵的试验数据来确定泵的几何形状和尺寸，以及泵的性能特性曲线等。这就需要按照泵的相似理论来设计模型、安排模型试验；用无量纲的系数来整理试验结果，绘制泵的特性曲线等；它对一族几何相似的泵具有很大的理论和实用价值。

1．泵的无量纲系数

对于泵的特性有直接影响的变量为：轴功率 P，流量 Q，扬程 H，效率 η，转速 N，叶轮直径 D；流体的属性：密度 ρ，体积弹性模量 E，动力粘性系数 μ；以及泵的其他一些几何特性：叶片出、入口角 β_2，β_1，叶片数目 Z，叶轮高度 b_1，b_2，所有壁面的平均粗糙度 e 等。以上列举的物理量中，除 D 之外，其他几何参数只留下 e 作代表；β_1，β_2 已是无量纲的量，作量纲分析时可暂不列入，对于效率 η 也作了同样处理。对于扬程 H，用 gH 做变量更合适些，它代表单位质量流体所具有的能量，而

与重力加速度无关。至于转速 N，此时其单位应取弧度/秒，$[N]=T^{-1}$。

对泵的性能作量纲分析，寻找无量纲组合参数。对于泵的 gH 量，待定函数关系有

$$f(gH,Q,N,D,\rho,\mu,E,e)=0 \qquad (7\text{-}41)$$

利用第四章所叙述的 π 定理可知，在式（7-41）中，有八个物理量，其中只有三个基本物理量（现选用 ρ,D,N 作基本物理量），故可以得到五个无量纲组合量，即

$$\pi_1=\frac{gH}{N^2D^2},\qquad \pi_2=\frac{Q}{ND^3},\qquad \pi_3=\frac{\mu}{\rho ND^2}$$

$$\pi_4=\frac{E}{\rho N^2D^2},\qquad \pi_5=\frac{e}{D}$$

或者讲，有（把β_2补充进去了）

$$\frac{gH}{N^2D^2}=f_1\left(\frac{Q}{ND^3},\ \frac{\mu}{\rho ND^2},\ \frac{E}{\rho N^2D^2},\ \frac{e}{D},\ \beta_2\right) \qquad (7\text{-}42)$$

式中，$\frac{gH}{N^2D^2}=C_H$称为扬程系数，因 $ND\propto U$（圆周速度），所以扬程系数实质上是弗劳德相似准数；$\frac{Q}{ND^3}=C_Q$ 称为流量系数，因$Q/D^2\propto V_r$（径向速度），故

$$C_Q=\frac{Q}{ND^3}\propto\frac{V_r}{U} \qquad (7\text{-}43)$$

它代表的是速度比。在几何相似泵中，即 e/D，β_2等保持不变时，只要 C_Q 相等，对应叶轮入、出口截面速度三角形就几何相似，这意味着此时运动相似。故 C_Q 是一个运动相似条件。具有几何、运动相似的泵则称为同族或同系列的泵。在式（7-42）中的

$$\frac{\mu}{\rho ND^2}\propto\frac{\mu}{\rho UD}=\frac{1}{Re} \qquad (7\text{-}44)$$

它是雷诺相似准数。此外，按（1-22）式有 $a=\sqrt{E/\rho}$，故

$$\frac{E}{\rho N^2D^2}\propto\frac{a^2}{U^2}\propto\frac{1}{Ma} \qquad (7\text{-}45)$$

是马赫相似准数。所以，式（7-42）可改写成

$$C_H = f_2(C_Q, Re, Ma, e/D, \beta_2) \qquad (7\text{-}46)$$

对于泵的 P，同样有

$$f_3(P, Q, N, D, \rho, \mu, E, e) = 0$$

按 π 定理也可以得到

$$C_P = \frac{P}{\rho N^3 D^5} = f_4(C_Q, Re, Ma, e/D, \beta_2) \qquad (7\text{-}47)$$

其中，C_P 称为功率系数，它实质上是一个欧拉相似准数。

由式（7-23），结合式（7-46），（7-47），泵的效率可表为

$$\eta = \frac{\rho g H Q}{P} = \frac{(gH/N^2D^2)(Q/ND^3)}{(P/\rho N^3 D^5)}$$

得

$$\eta = f_5(C_Q, Re, Ma, e/D, \beta_2) \qquad (7\text{-}48)$$

显然，在C_H，C_P 和η与C_Q 之间的关系必须由试验来确定；只要决定相似准数 Re，Ma 相同，对于同系列的泵而言，则动力完全相似。用 C_H，C_P 和 η 对 C_Q 表出的特性曲线，对同一系列的各个泵都是通用的。图 7-15 表出了某一系列的离心式泵的特性曲线，这时泵的转速N应采用图上的 n_s 标出，即用该系列泵的比转速来注明，它也是一个无量纲的量，具体关于n_s的介绍见第四小节。

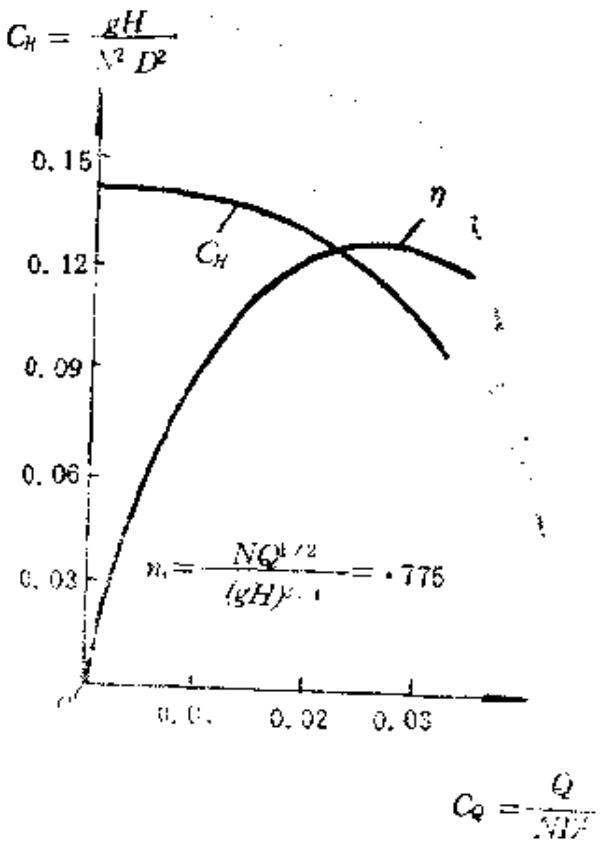


图 7-15

2. 泵的相似律

在动力完全相似条件下，对同一系列中的所有泵，只要 C_Q 相同，则 C_H，C_P 和 η 都相等，因而有

$$C_Q = \frac{Q}{ND^3} = \text{Const.},\quad Q \propto ND^3 \tag{7-49a}$$

$$C_H = \frac{gH}{N^2D^2} = \text{Const.},\quad gH \propto N^2D^2 \tag{7-49b}$$

$$C_P = \frac{P}{\rho N^3 D^5} = \text{Const.},\quad P \propto \rho N^3 D^5 \tag{7-49c}$$

而

$$\eta = \text{Const.} \tag{7-49d}$$

式（7-49）的关系称为泵的相似律。倘若已知一个泵的特性曲线试验结果，则可利用泵的相似律来推算转速 N 或尺寸 D 变化时的特性。设已知泵的特性用脚注 1 标出，而转速或尺寸有变化的相似泵特性用脚注 2 标出，按式（7-49）有

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^3 \tag{7-50a}$$

$$\frac{H_2}{H_1} = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 \tag{7-50b}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^3\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^5 \tag{7-50c}$$

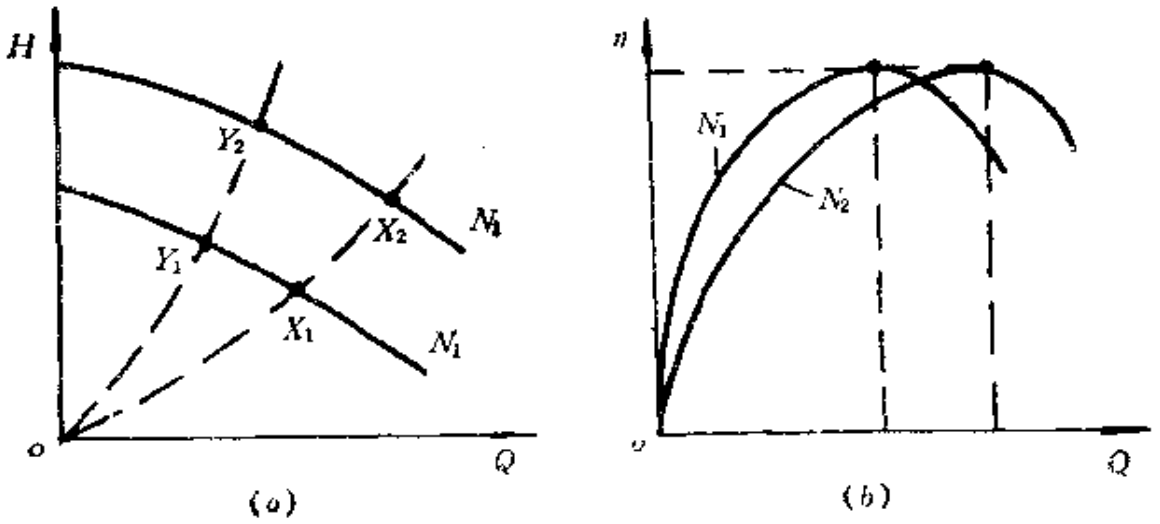


图 7-16

尽管对应点 $\eta_1=\eta_2$，但因$Q_1\neq Q_2$，故特性曲线的形状有变化。见图 7-16，是 $N_2\neq N_1$，但 $D_2=D_1$ 时，两个动力完全相似泵特性曲线之间的关系。

例 7-3　已知：离心式泵的模型尺寸为原型泵的 1/5，试验转速 $N=590$ 转/分，量得模型泵的流量 $Q=8.9$ 升/秒，扬程 $H=0.68$ 米，假设试验完全满足动力相似条件。求：原型泵转速 $N=730$ 转/分时的流量和扬程大小。

解　因满足动力相似条件，故可利用泵的相似律，由式（7-50）可得

$$Q_2=Q_1\left(\frac{N_2}{N_1}\right)\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^3=8.9\times\frac{730}{590}\times5^3=1\,372(\text{升/秒})$$

$$H_2=H_1\left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2=0.68\times\left(\frac{730}{590}\right)^2\times5^2=25.9(\text{米})$$

3．泵的尺度效应

在模型试验中要做到决定相似准数相等是十分困难的。首先拿雷诺相似准数来讲，因$Re=\rho ND^2/\mu$，用同样的流体做试验，并保持 Re 相等则要求$(ND^2)_m=(ND^2)_p$，脚注 m，p 分别代表模型和原型泵。就例 7-3 来讲，$D_m/D_p=0.2$，要 Re相同，则模型的 $N_m=25N_p$，实际上是办不到的。因此尺寸小的泵其流动雷诺数也小，一般将增加水力阻力损失，降低泵的效率。不过，对于象水和空气等运动粘性系数比较小的流体，只要泵的尺寸不太小，转速又比较高，则 Re 数一般都相当大，泵内的流态都是湍流，故水力损失随 Re 数的变化不会太大。

对于马赫数 Ma 来讲，无论增加 N 或 D，都会使马赫数增大，不仅说明相似准数 Ma 的大小要变化，而且可能还会带来压缩性影响。不过对于液体泵来讲，马赫数的影响不会太大。

还应提到，要保持 e/D 相等也是很困难的事，它实质上是一个保持几何相似的问题；在第五章讨论管流水力损失时曾讨论过它。一般讲如果采用的材料和制造加工方法相同，壁面的绝对

粗糙度 e 就大体上相同，因此泵的尺寸越小，就意味着壁面相对粗糙度 e/D 将增加，故也将增加水力损失。此外，要严格保持泵内部结构中的缝隙、局部小尺寸部件几何相似也会遇到同样的困难。

以上所述由于难以保持 Re，Ma，e/D 等因素完全相等，一方面使相似律的使用有一定限制（这时，（7-49）式是近似关系）；另方面也使泵的性能发生变化，可统称为尺度效应。一般讲，对于大尺寸的泵，尺度效应使性能有所改善。作为初步估算，可利用下面的经验公式：

$$\eta_p = 1 - (1 - \eta_m)\left(\frac{D_m}{D_p}\right)^{0.2} \tag{7-51}$$

或者

$$\eta_p = 1 - (1 - \eta_m)\left(\frac{Re_m}{Re_p}\right)^{0.1}\left(\frac{D_m}{D_p}\right)^{0.05} \tag{7-52}$$

4．泵的比转速

对于不同系列的泵，其性能除了可通过对无量纲系数表示的特性曲线进行全面比较之外；还可以用泵设计工况点的流量系数 C_Q 和扬程系数 C_H 之比来表示不同系列泵设计的特点、流量和扬程的匹配特性等。为消去叶轮直径 D 的影响，取 $C_Q^{\frac{1}{2}}$ 和 $C_H^{\frac{3}{4}}$ 之比，定义为 n_s 数，即

$$n_s = \frac{C_Q^{1/2}}{C_H^{3/4}} = N\frac{Q^{1/2}}{(gH)^{3/4}} \tag{7-53}$$

它被称为泵的比转速或称为类型数。式中转速 N 的单位应是弧度/秒，显然它是一个无量纲的量。简单地看，比转数可以理解为泵提供一个单位（gH）扬程和一个单位流量时，所需要的转速。但它包含的实际内容远比这样的理解要丰富得多。参看图 7-17，这是一张按 n_s 整理的不同系列的离心式泵目前所达到的最高效率曲线，其中还包括了轴流式泵和混流式泵的数据。它表明：

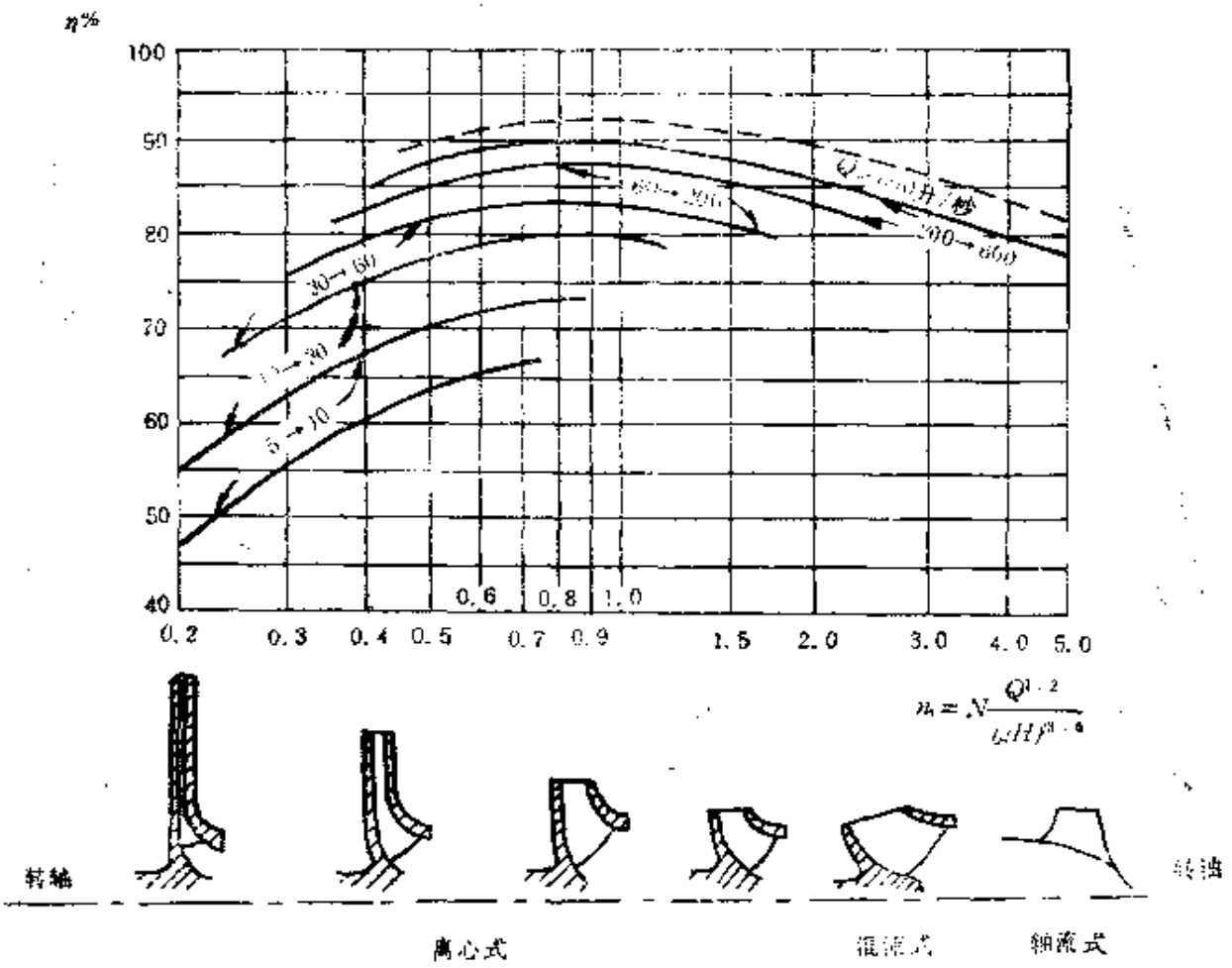


图 7-17

（1）一旦按式（7-53）确定了泵在设计工况点下的比转速大小后，也就相应确定了泵应该选择的类型，否则在设计中能达到的效率将大大降低，换句话讲，应按比转速大小对泵的类型进行分类，故比转速又称为泵的类型数，它是设计、选择泵的最重要参数之一。

（2）离心式泵适用的比转速范围在0.2～1.8左右。当比转速在0.8～1.6间时，总效率 η_{max} 可达0.9左右。

（3）图上还以参数形式注明了流量 Q 对 η_{max} 的影响，Q 越大，泵的尺寸也越大，它正是前面讨论过的尺度效应。当流量 $Q<63$ 升/秒时，效率还将进一步下降。

最后应该指出，由于习惯上的原因，水力工程师在使用比转速时，常把式（7-53）中的 g 略去，这样 n_s 就变成了有量纲的量，现用 n_s' 表示，即

$$n_s' = N\frac{Q^{1/2}}{H^{3/4}} \tag{7-54}$$

于是，随式（7-54）右端各个量单位选择的不同，有不同的 n_s' 值，常容易引起混乱，这是十分不幸的。建议采用 n_s，逐渐淘汰 n_s'。在美制单位制中，如 N 用转/分，Q 用加仑(美)/分，H 用呎，则有

$$n_s' = 179.9 n_s \tag{7-55}$$

五、泵和管路系统的匹配

粘性流体流经管路系统时，由于有流动阻抗存在，需要消耗一定的流体机械能量；而它正好可由本章介绍的离心式泵来供给。故在泵的性能和管路系统流动阻抗之间有密切的匹配关系。本段介绍泵和管路系统共同运行的工况点，泵的串联和并联，以及泵的吸上扬程和在运行中如何防止泵产生气穴现象等。

1．泵和管路系统工况点的确定

参看图7-18，是一个带有泵的管路系统。泵工作时，在吸水管中形成真空压力，促使储水池 A 中的水在外界大气压力作用下，沿吸水管上升，流经泵后，水的能量增加，并在压水管口段形成高压，推动水沿压水管流入储水池 B 中。在图上已画出了沿管路的能量坡度线（$E.G.L.$）和水力坡度线（$H.G.L.$）。要求泵提供的能量，按式（5-19），（5-21），在储水池自由液面 A-A 和 B-B 间有

$$E_p = h_s + h_d + (z_B - z_A) = h_s + h_d + \Delta z \tag{7-56}$$

式中，E_p 是要求泵提供的扬程，h_s，h_d 分别为克服吸水管路和压水管路中的阻抗而产生的水力损失水头；这里与第五章中所用符号稍有不同，略去了 Δ 符号，$h_s + h_d$ 为管路系统的总损失水头。

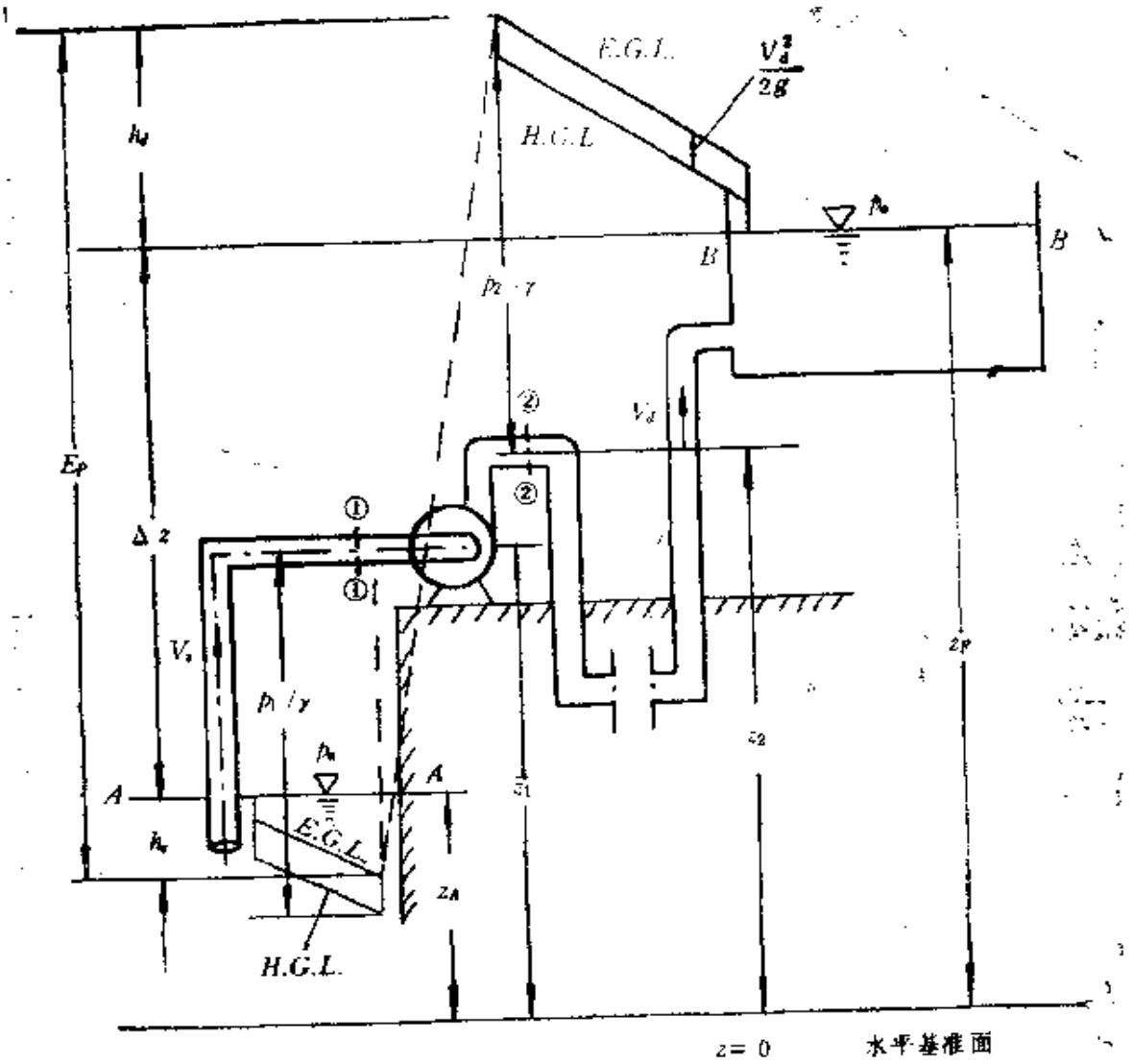


图 7-18

Δz 为要求泵提升流体达到的几何高度差，称为几何扬程。由第五章的式（5-93）还知，有

$$h_s = (S_h)_s Q^2, \qquad h_d = (S_h)_d Q^2 \tag{7-57}$$

或

$$h_s + h_d = S_h Q^2 \tag{7-58}$$

式中，$(S_h)_s$，$(S_h)_d$和 S_h 分别为吸水管路、压水管路以及总管路系统的水力阻抗，均可按第五章中所述方法计算，因此，有

$$E_P = \Delta z + S_h Q^2 \tag{7-59}$$

上式称为管路系统特性方程

把管路系统特性方程画在所选用的泵扬程流量特性曲线图上，见图7-19，两条曲线的交点，即为泵和管路系统共同运行时的工况点。这样得到的工况点参数，不见得能立即满足管路系统输运流体功率和泵高效率运行的要求，即还有一个相互匹配的要求。理想的工况点应该是既满足对管路系统要求的流量 Q 和扬程 H，又能使泵运行在 $\eta=\eta_{max}$ 点附近，即泵的设计工况点附近。实际上这是不容易办到的。

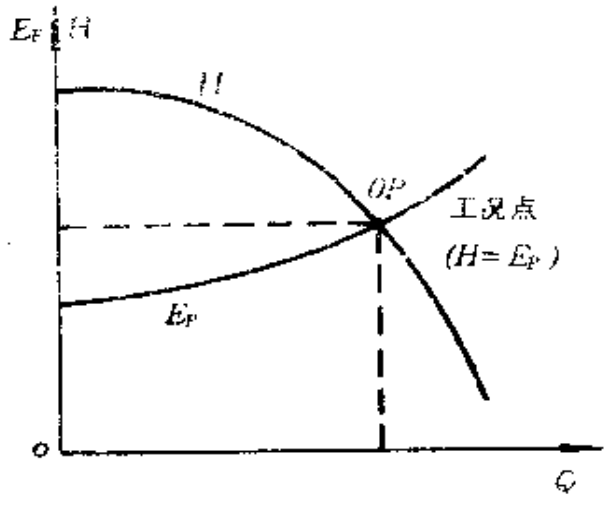


图 7-19

从调节工况点来看，在泵的选择上可以有如下几个方面措施：选用不同系列的泵，随比转速的不同，可以改变泵的 H-Q 曲线形状，见图 7-20(a)，比转速 n_s 越大，H-Q 曲线变化越陡；对于选定系列的泵，一般还可以改变泵的尺寸，或转速来改变 H-Q 曲线，见图 7-20(b)，(c)，不过从效率角度看，可能的话宁可变泵的尺寸而不用变转速的方法；再就是可以把泵串联或并联运行，从而改变 H-Q 曲线形状，见图 7-20(d)，(e)，在图上已注明串联、并联情况下，构造 H-Q 曲线的方法：串联相当于在同一 Q 下，扬程相加，而并联相当于在同一扬程下，流量相加。

从调节工况点来看，改变 H-Q 曲线形状的效果还同管路系统特性曲线形状有关，见图7-21，比如，管路系统的水力阻抗较小，需用的 E_p～Q 曲线变化平缓，采用相同两个泵并联运行，则调节流量的余量较大；又比如管路系统的水力阻抗较大，需用的 E_p～Q 曲线变陡，要想获得较大的扬程调节余量，采用泵的

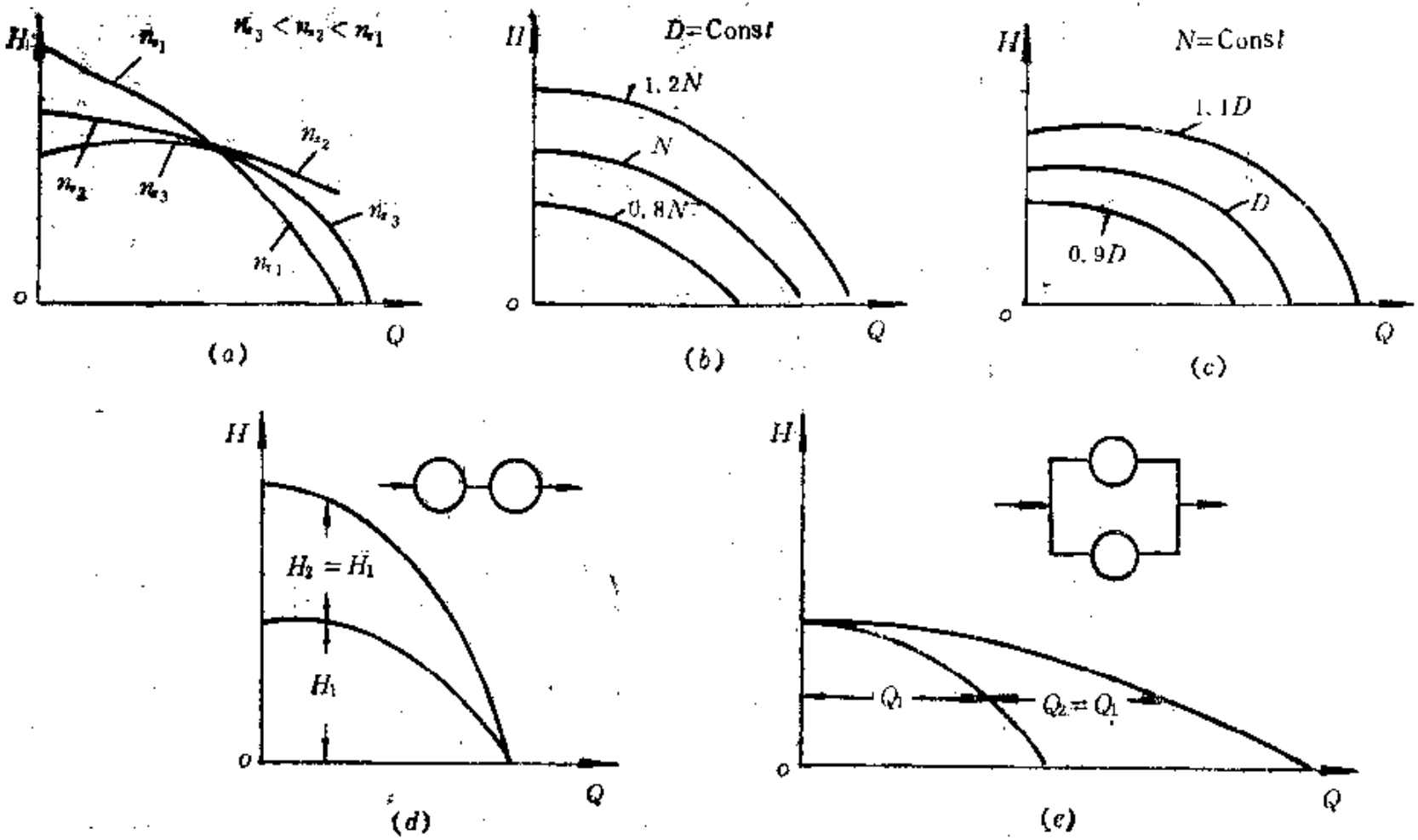

H
$n_3 < n_2 < n_1$
n_1
n_2
n_3
o
Q
(a)
D=Const
1.2N
N
0.8N
(b)
N=Const
1.1D
D
0.9D
(c)
$H_2 = H_1$
H_1
(d)
Q_1
$Q_2 = Q_1$
(e)

图 7-20

串联运行效果就比较好等等。

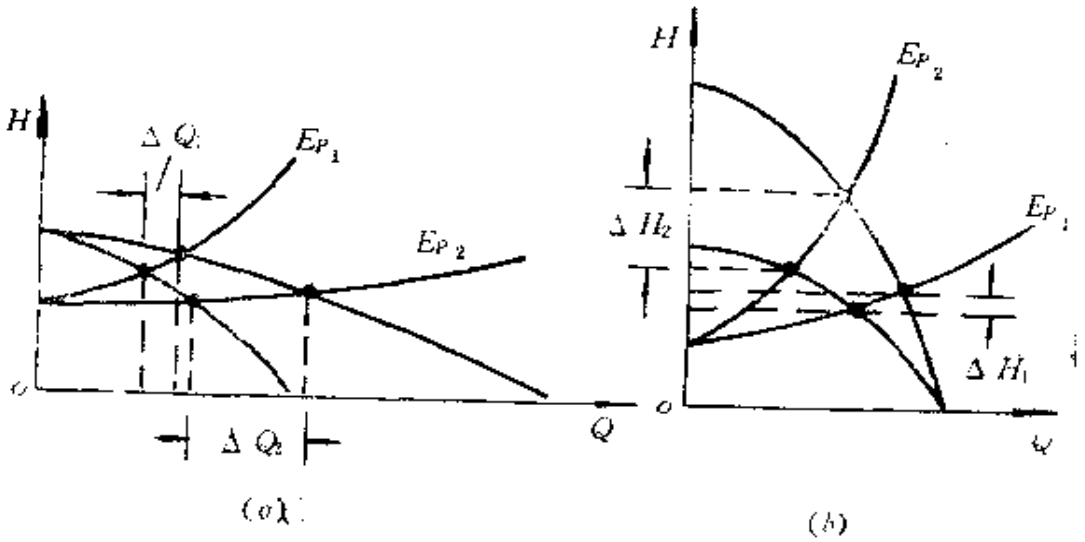


图 7-21

最后还应当指出，由于管路系统的水力阻抗计算精度不高，它也将直接影响到实际运行中的工况点位置。图 7-22 是一个示例。因为阻抗估算偏大，结果实际流量大于预估值（$Q = Q_d$），泵的运行效率较低，故将增大功率的消耗和运行成本。

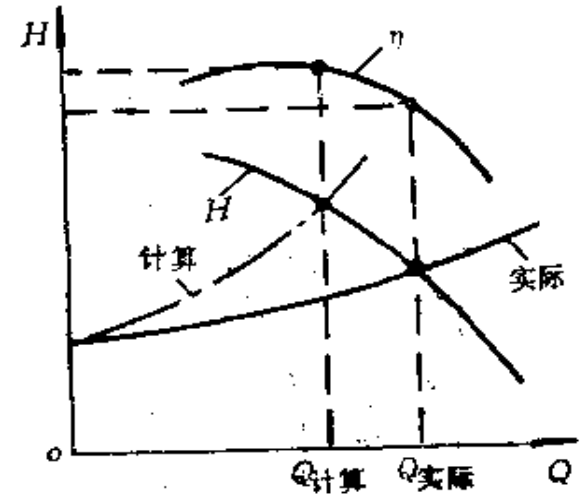


图 7-22

2．调节工况点的方法

对于已经选定几何尺寸的泵和管路系统，在运行过程中有时也有局部调节改变工况点的需要。通常可采用下述三种办法：

在压水管路上安装节流阀，用节流阀开启度的大小来调整压水管路的阻抗，从而来调节工况点位置。参看图7-23。减小节流阀的开启度由 α_1 变到 α_2，管路阻抗由$(S_h)_1$增加到$(S_h)_2$，工况

点则由 B_1 变到 B_2 点。当然，这里有由一个流动状态 B_1 被打破到建立一个新的流动状态 B_2 的过程；管路阻抗增加，逼使流量减小，与此同时泵将随之提高压头来增加流量，故在 B_2 点左右有一个振荡过程，但最终在 B_2 点建立的平衡状态将是稳定的。见图 7-23(a)。如果 H-Q 曲线具有不稳定工作区，即有 $\frac{dH}{dQ}>0$ 的区

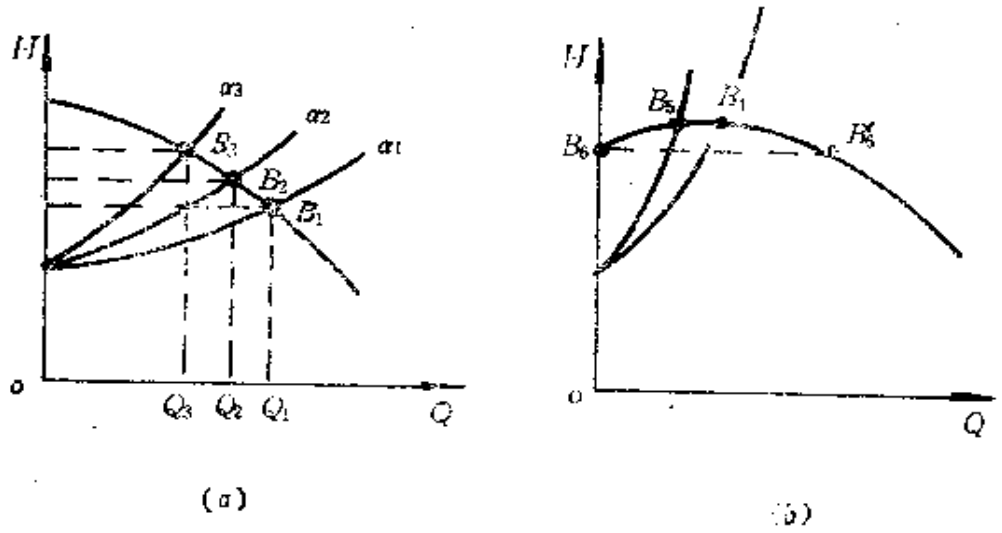


图 7-23

域，见前图 7-11，当节流阀开启度过小，两条曲线的交点在 B_b 处，见图 7-23(b)，这时并不能在 B_b 点建立工况点，因为，倘若阻抗稍有增大，则要求减小流量和增加压头，但与此同时泵所能提供压头不是增加而是降低，结果泵就无力排出流体，流量将迅速降到零，即 B_6 点，压水管中得不到高压流体补充，管中压力必迅速下降。当压力降到 B_6 点以下之后，流动又将重新开始，将以 B_6' 点对应的流量进行；但因管道条件未变化，以 B_6' 点对应的流量刚一流动，阻抗迅速上升，工况点由 B_6' 沿曲线立即升到 B_4 点，然后再跳到 B_6 点，于是出现一种周而复始的不稳定流动现象，称为泵的喘振。泵是不可以用到喘振区里去的，即前面提出的不稳定工作区。

用改变泵的转速来调整工况点，这在图 7-20(b)上介绍过。

但这种方法只能用于汽轮机、内燃机及直流电动机等可调速的发动机上，对于用交流电动机来驱动泵时则需要附加变速装置。

同时采用上述两种方法来调节工况点。

3．气穴和泵的吸上扬程

在泵和管路系统相互匹配和输运液体的过程中，一定还要考虑如何防止产生气穴现象。从图7-18可知，最先可能发生气穴的地方在泵吸水管口截面处，因为该处的压力最低。设该截面上的绝对压力为 p_1，流速为 V_1，按能量方程式（5-25），在 A-A 和①-①截面间有

$$\frac{p_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1+h_s=\frac{p_a}{\gamma}+z_A \qquad (7\text{-}60a)$$

或

$$\frac{p_1}{\gamma}=\frac{p_a}{\gamma}-(\Delta z_s+\frac{V_1^2}{2g}+h_s) \qquad (7\text{-}60b)$$

或

$$p_1=p_a-(\gamma\Delta z_s+\frac{\rho V_1^2}{2}+\gamma h_s) \qquad (7\text{-}60c)$$

式中，$\Delta z_s=z_1-z_A$ 称为吸上扬程，而圆括号内的数值代表泵入口截面处真空压力表的读数。

在前面有关章节中（如第一章、第三章、第五章）多次谈到产生气穴的条件为 $p_{\min}=p_1=p_v$，p_v 为被输运液体的饱和蒸气压力。为防止发生气穴，则应有 $p_{\min}=p_1>p_v$ 才行。

从式（7-60）可见，当 p_v 一定时，大气压力 p_a 降低，吸上扬程 Δz_s 增大，流量 Q 增加以及吸水管水力损失水头 h_s 增大都将促使产生气穴。

使用中定义允许气穴余量（压头），用 $NPSH$ 来表示，为

$$NPSH=\left(\frac{p_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}\right)-\frac{p_v}{\gamma}$$

按式（7-60a）关系有

$$NPSH=\frac{p_a}{\gamma}-h_s-\Delta z_s-\frac{p_v}{\gamma} \qquad (7\text{-}61)$$

在图7-24上，用图解形式表述了式（7-61）的几何意义。可见，$NPSH$ 代表的是为防止气穴所取的压头余量。$NPSH$ 的大小一般由试验来确定，不同系列的泵其大小也不同。图7-9上列出了一台泵的 $NPSH$ 试验值。离心式泵运行在靠近设计工况点左右时的$NPSH$大小，可近似按图7-25上数据确定，图上的纵坐标 $\sigma_c = \frac{NPSH}{H}$（$H$ 是泵的扬程），称为泵的临界气穴参数。图示数据表明，它将是泵的比转速n_s的函数，但数据比较分散。为保守起见，宁肯取得大一些。σ_c 的初步估算也可利用下列经验公式：

$$\sigma_c = 0.073 \frac{n_s^{1.33}}{\eta_h^{3}} \qquad (7\text{-}62)$$

式中，n_s是泵的比转速，η_h 是泵的水力效率。

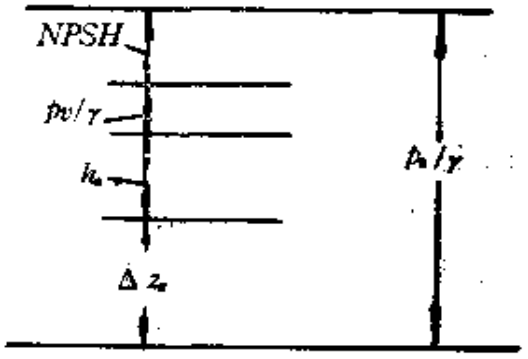


图 7-24

一旦泵的气穴参数 σ_c 确定后，则由式（7-61）立即可得离心式泵最大允许可用吸上扬程公式为

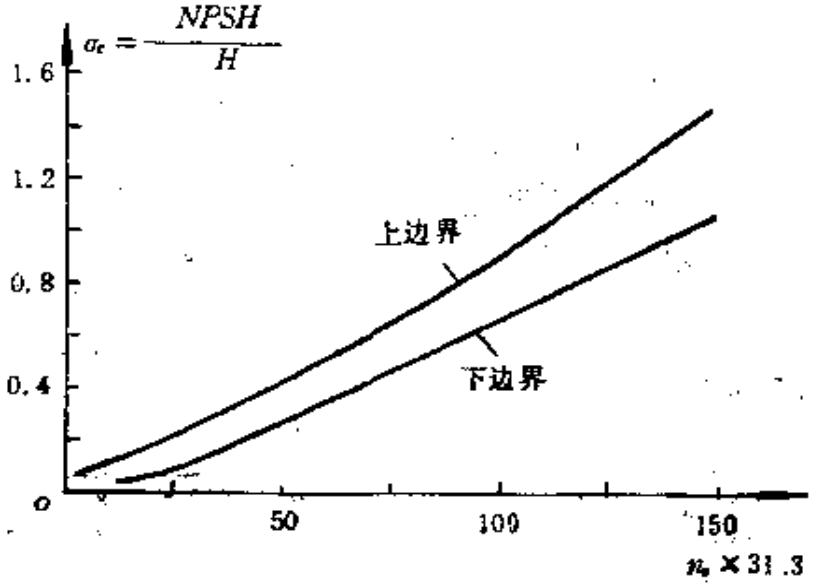


图 7-25

$$(\Delta z_s)_{max}=\frac{p_a}{\gamma}-h_s-\frac{p_v}{\gamma}-\sigma_c H \qquad (7\text{-}63)$$

从式(7-63)可知，为了防止产生气穴，Δz_s不能大于$(\Delta z_s)_{max}$.

在高空飞行时，为防止飞机上的泵和管路系统发生气穴，一般可以采用下述办法：（1）利用发动机排出的废气，使密封油箱自由液面压力提高[即式(7-61)中的p_a，此时应看成是油箱自由液面的压力，它要比大气压力高]。（2）减小吸上扬程Δz_s，甚至将泵装在油箱自由液面下方，这时在式（7-61）中的Δz_s应取负值。（3）利用辅助油泵增加压力等。

例 7-4　已知：一台离心式泵的特性曲线如图 7-26所示。选用该泵用于深井吸水并输送到水塔，泵和所用管路系统已画在同一图上。吸水管高度或吸上扬程 $\Delta z_s=3$ 米，压水管高度$\Delta z_d=7$米，吸水管长 $L_s=5$ 米，压水管长 $L_d=10$ 米。吸水管路中所有局部损失的总和相当于长为 0.5 米管长中的损失，压水管中的所有局部损失的总和相当于长为 0.2 米管长中的损失。管径均为 0.05 米。流动为湍流，单位管长的阻抗为 10 265 秒^2/米^5，水的重度 $\gamma=9\,789$ 牛/米^3。$p_a=1$ 个大气压。求：（1）管路系统特性曲线。（2）工况点的流量和需用功率。（3）泵吸水管口截面上的压力。（4）如果水温为20℃，此时是否产生气穴现象。

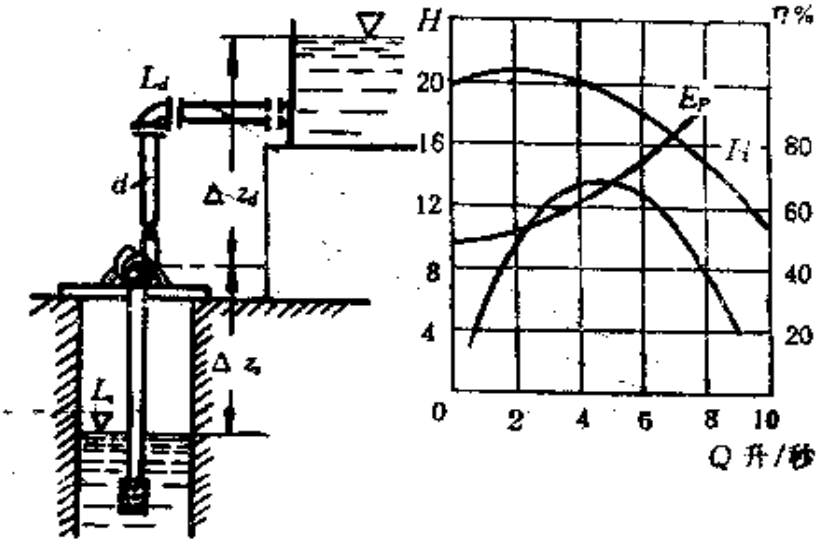


图 7-26

解 （1）管路特性曲线，按式（7-59）有

$$E_P = \Delta z + S_h Q^2 = \Delta z_g + \Delta z_d + S_h Q^2$$

$$= 3 + 7 + (5 + 10 + 0.5 + 0.2) \times 10\,265 \times \frac{Q^2}{1\,000^2}$$

$$= 10 + 0.161 Q^2$$

式中，Q单位为升/秒。按上式计算的 $E_P \sim Q$ 已画在图 7-26 上。

（2）由 $E_P \sim Q$ 和泵 $H-Q$ 两曲线的交点得工况点的参数为 $Q = 6.7$ 升/秒，$H = 17.3$ 米，以及 $\eta = 58\%$，按式（7-23）需用功率为

$$P = \frac{\rho g Q H}{1\,000\eta} = \frac{9\,189 \times 6.7 \times 10^{-3} \times 17.3}{1\,000 \times 0.58} = 1.96(\text{千瓦})$$

（3）按式（7-60b）有（因 $V_1 = \dfrac{Q}{\frac{\pi}{4}d^2} = 3.412$ 米/秒）

$$\frac{p_s}{\gamma} = 10.33 - 3 - \frac{(3.42)^2}{2 \times 9.81} - (5 + 0.5) \times 10\,265 \times \left(\frac{6.7}{1\,000}\right)$$

$$= 1.2(\text{米})(\text{水柱})$$

（4）由第一章附表 1-3，$t = 80$°C时水的饱和蒸气压强 $p_v = 2.34$ 千帕，或 $p_v/\gamma = 0.25$ 米（水柱）。现因 $p_s/\gamma = 4.2$米（水柱）$> p_v/\gamma = 0.25$ 米（水柱），所以，不会发生气穴现象。

§7-3 往复式活塞泵

从本节起介绍一些容积式流体机械的知识。它们的工作原理与叶轮式流体机械截然不同，是依靠密封容积的变化来实现机械和流体之间能量交换的。所谓密封容积，在往复式活塞泵中指的是由活塞和泵缸所构成的工作腔室，在齿轮泵中指的是由两个齿轮相互啮合的齿和端盖所构成的工作腔等。参看表 7-1 知，容积式流体机械也分两大类，这里重点仍放在容积式泵上。本节先介

绍往复式活塞泵，下一节介绍旋转式齿轮泵和叶片泵。最后简单介绍一下往复式马达(或称作动筒、液压缸)。把容积式泵和作动筒联合使用可以传递动作，被广泛应用各种液压传动系统、包括飞机液压传动系统之中。

一、往复式活塞泵的工作原理

见图7-27，它是一台单缸单面作用的活塞泵在供水管路系统中的工作原理图。由发动机驱动摇臂、带动活塞在泵缸内往复运

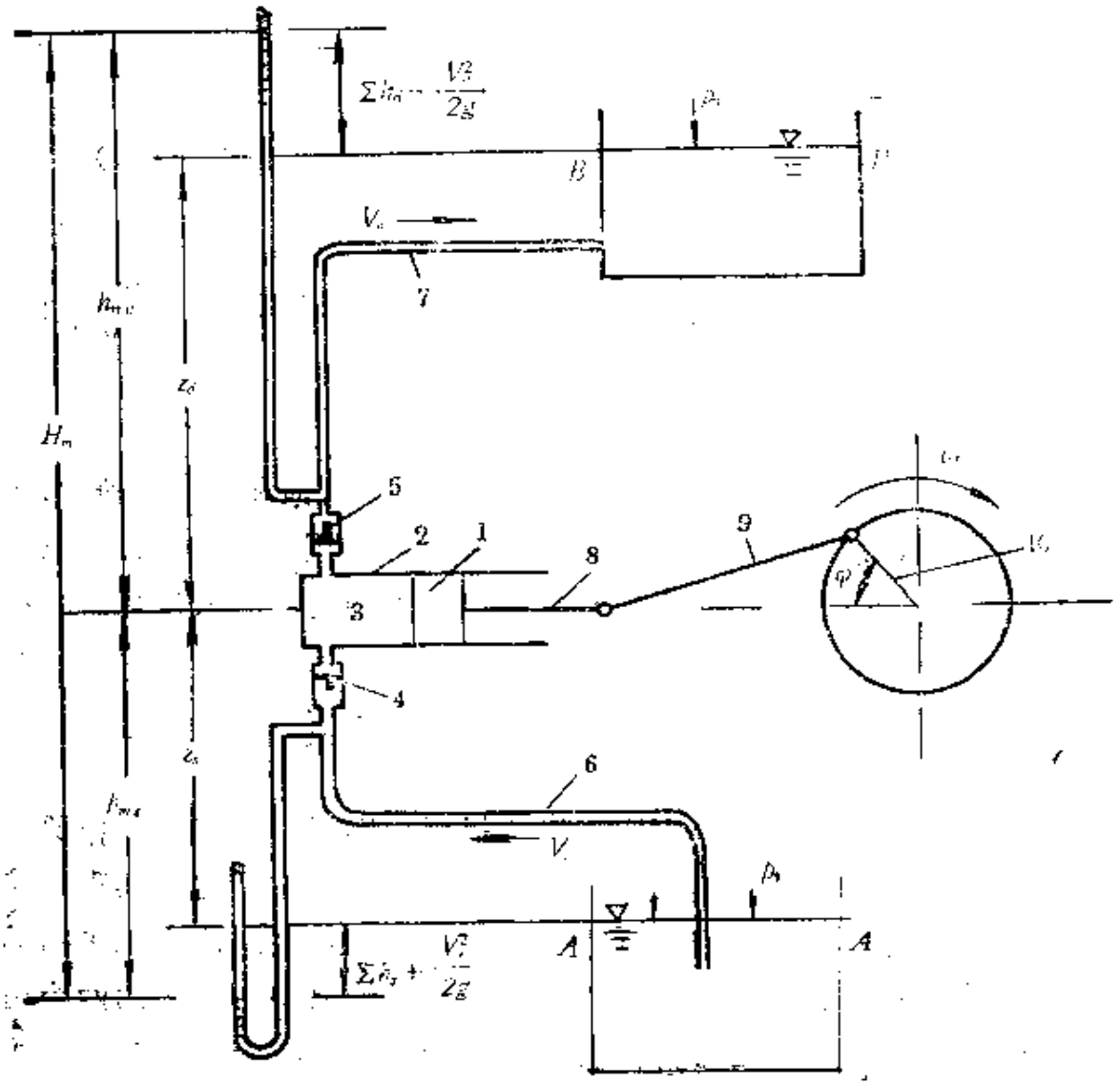


图 7-27

动，由于缸体内工作腔室容积的变化，产生吸入和排出流体的压力差，往复地将流体（本图中则为水）吸入和排出缸体，从而达到输运流体功率的目的。就本例而论，主要部件有1—活塞，2—泵缸，3—工作腔室，4—吸入阀，5—压送阀，6—吸水管，7—压水管，8—活塞杆，9—连杆，10—曲柄。（注：一般还有压缩空气室，见图7-33，图7-35等，其作用见本节第四段介绍）。在泵运行前，先在吸水管和工作室中灌满了水，并设活塞在图示左边上死点位置。开动发动机使泵运行，活塞开始向右移动，密封工作室容积增加，压力下降，在外界大气压 p_a 的配合作用下，使水沿吸水管流动，顶开吸入阀 4（它是单向阀门）流入工作室。这个过程称为吸入过程，吸入过程将持续到活塞运动到右边下死点位置为止。然后，活塞开始向左移动，减小工作室容积，逼使水排出，压力升高；于是一方面关闭吸入阀门，另一方面顶开压送阀 5（也是单向阀门），则水将流入压水管而被送到水池 B。这个过程称为压送过程，它将持续到活塞再次运动到左边的上死点为止。以后重复上述循环，其频率取决于曲柄的旋转角速度 ω 的大小。

二、活塞泵的扬程流量特性

如图7-28所示，作等速旋转运动的曲柄带动连杆，使活塞在

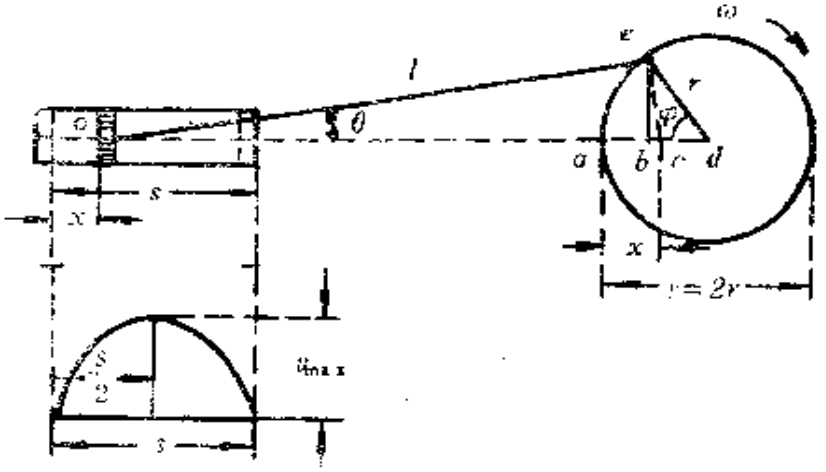


图 7-28

泵缸中所作的往复运动乃是非匀速运动。因而缸内流体的运动速度、流量乃至整个管路系统的速度、流量随时间都有脉动变化。由图可知，活塞的位移x（由上死点向右量取）

$$x = oc - oa = ca = ad - bd + bc$$

图上，oc是以o点为圆心，以连杆长l为半径所画圆弧与od线的交点c到o点的距离，故

$$x = r - r\cos\varphi + (l - l\cos\theta) = r(1 - \cos\varphi) + l(1 - \cos\theta)$$

式中r为曲柄半径。因$\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \sqrt{1 - (r\sin\varphi/l)^2}$，设$r/l \ll 1$，则$\cos\theta \approx 1$，故得（注意，$\omega = \omega t$）

$$x = r(1 - \cos\varphi) = r(1 - \cos\omega t) \qquad (7\text{-}64)$$

即简化成简谐运动来讨论，按上式很易确定活塞的运动速度和加速度为

$$u = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = r\sin\varphi\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \omega r\sin\varphi \qquad (7\text{-}65)$$

$$a_x = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \omega^2 r\cos\varphi \qquad (7\text{-}66)$$

显然，速度按正弦规律变化，在$\varphi = 0$（上死点）和$\varphi = \pi$（下死点）时，$u = 0$，而在$\varphi = \frac{\pi}{2}$，$\frac{3\pi}{2}$时，$u = u_{max}$，有

$$u_{max} = \pm\omega r = \pm\frac{2\pi N r}{60} \qquad (7\text{-}67)$$

式中，N为曲柄旋转速度，单位为转/分。而加速度按余弦规律变化，在$\varphi = \frac{\pi}{2}$，$\frac{3\pi}{2}$时，$a_x = 0$，而在$\varphi = 0$，π（上、下死点位置）时，$a_x = (a_x)_{max}$，有

$$(a_x)_{max} = \pm\omega^2 r = \pm\left(\frac{2\pi N}{60}\right)^2 r \qquad (7\text{-}68)$$

如将式（7-64）代入式（7-65），（7-66），u和a_x也可表为（因$\sin\varphi = \sqrt{\left(\frac{2x}{r}\right) - \left(\frac{x}{r}\right)^2}$）

$$u = \omega r\sqrt{\left(\frac{2x}{r}\right)-\left(\frac{x}{r}\right)^2} \tag{7-69}$$

$$a_x = \omega^2 r\left(1-\frac{x}{r}\right) \tag{7-70}$$

在活塞泵正常运行过程中，流体将连续跟随活塞运动流进或流出泵缸，dt时间流进泵缸的液体体积为

$$d\tau = A\,dx = Au\,dt$$

式中A为活塞的面积，dx为活塞dt时间内移动的距离。将式（7-65）代入（且因$\varphi=\omega t$）

$$d\tau = A\omega r\sin\varphi\,dt = Ar\sin\varphi\,d\varphi \tag{7-71}$$

由上式可得瞬间液体的流量为

$$Q' = \frac{d\tau}{dt} = Au = A\omega r\sin\varphi \tag{7-72}$$

这表明瞬间流量也是按正弦规律变化的。在$\varphi=0$，π时，$Q'=0$，在$\varphi=\frac{\pi}{2}$，$\frac{3\pi}{2}$时，$Q'=Q'_{max}=\pm A\omega r$.

对于单缸单面作用的活塞泵来讲，曲柄旋转一周，吸入或排出的液体流量由式（7-71）积分可得：

$$Q'' = \int_0^{\pi} Ar\sin\varphi\,d\varphi = 2Ar = As \tag{7-73}$$

式中，$s=2r$为活塞的行程即为上死点到下死点的距离。因曲柄旋转角速度为ω（弧度/秒）或其转速为N（转/分），则每秒输出的流量为

$$Q_{th} = \frac{As\omega}{2\pi} = \frac{AsN}{60} \tag{7-74}$$

可见活塞泵的流量只取决转速N，而与活塞泵产生的压头或扬程无关。不过随压头的增加，因机械缝隙渗漏原因，活塞泵的实际流量Q与式（7-74）的理论流量Q_{th}之间有

$$Q = Q_{th} - \Delta Q \tag{7-75}$$

式中，ΔQ为渗漏流量。

因此，活塞泵的扬程流量特性有如图7-29所示情况。

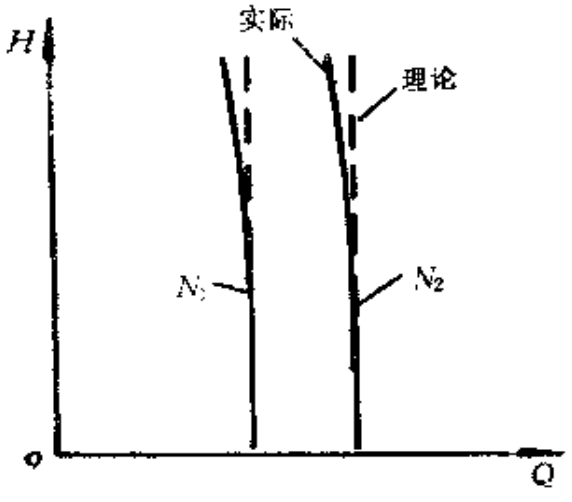


图 7-29

活塞式泵的流量随时间的脉动变化，是其主要缺点之一。为了评估活塞泵流量的不均匀性，常用每一个工作循环中排出的所谓计算最大流量（按最大瞬间流量计算一个工作循环排出的流量）与理论流量Q''之比（称为流量不均匀度σ）作为指标。对于单缸单面作用的活塞泵，其流量不均匀度σ为

$$\sigma=\frac{A_r\omega\cdot\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)}{As}=\frac{\pi As}{As}=\pi \qquad (7-76)$$

减小流量不均匀度的办法很多，比如用单缸双面作用的活塞泵（即泵缸两端都有吸水管和压水管相连，活塞两面都对流体作功。一面是吸入过程，相应另一面则是压送过程），不仅将增加流量，同时也将减小流量的不均匀度。见图7-30。

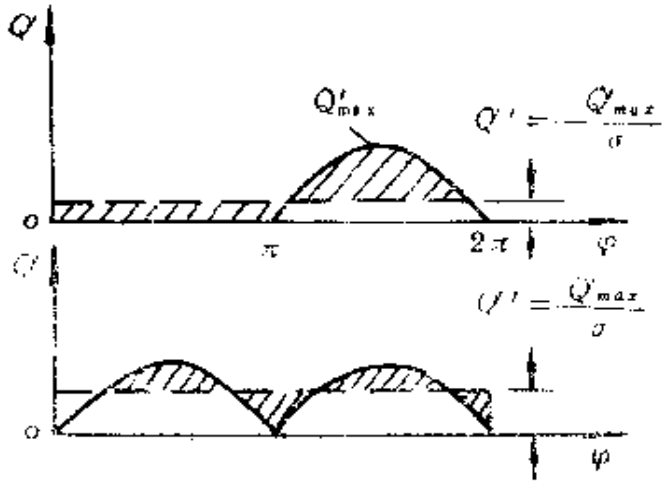


图 7-30

三、活塞泵的扬程、功率和效率

1．活塞泵的扬程

活塞泵的压头或扬程大小取决于与它配套管路系统的阻力。就图7-27的例子，按能量方程式（5-21），在A池自由液面和泵进口截面之间有

$$\frac{p_a}{\gamma}=\frac{p_s}{\gamma}+z_s+\frac{V_s^2}{2g}+\sum h_s \qquad (7-77a)$$

或

$$\frac{p_s}{\gamma}=\frac{p_a}{\gamma}-\left(z_s+\frac{V_s^2}{2g}+\sum h_s\right) \qquad (7-77b)$$

式中，z_s仍称为泵的吸上扬程，V_s为吸水管中的流速，$\sum h_s$代表吸水管中所有的损失压头。圆括号内的数值代表泵进口截面处真空压力表的读数，在图上用h_{ms}代表，称为泵进口截面真空表水头。

同样，在泵出口截面和B池自由液面间，利用能量方程式（5-21），有（下式中的$z=z_s+z_d$）

$$\frac{p_d}{\gamma}+\frac{V_d^2}{2g}+z_s=\frac{p_a}{\gamma}+z+\sum h_d \qquad (7-78a)$$

或

$$\frac{p_d}{\gamma}=\frac{p_a}{\gamma}+\left(z_d-\frac{V_d^2}{2g}+\sum h_d\right) \qquad (7-78b)$$

式中，z_d称为泵的压上扬程，V_d是压水管中的流速，$\sum h_d$代表压力管中所有的损失水头。圆括号内的数值代表泵出口截面处压力表（表压）的读数。图上用h_{md}代表，称为泵出口截面压力表水头。

显然，在A池和B池自由液面之间，应用能量方程有

$$\frac{p_a}{\gamma}+E_s=\frac{p_a}{\gamma}+z+\sum h_s+\sum h_d \qquad (7-79a)$$

则得

$$E_r = z + \sum h_s + \sum h_d \qquad (7\text{-}79b)$$

式中E_r为泵的需用扬程，它等于总几何扬程z（等于吸上和压上扬程之和，即$z = z_s + z_d$）和总损失水头之和。通常泵的实际扬程应等于E_r，即$H = E_r$，故有

$$H = z + \sum h_s + \sum h_d \qquad (7\text{-}79c)$$

如定义泵的压力表水头H_m为

$$H_m = h_{ms} + h_{md} = z + \sum h_s + \sum h_d - \frac{V_d^2 - V_s^2}{2g}$$

则有

$$H - H_m = \frac{V_d^2 - V_s^2}{2g} \qquad (7\text{-}80)$$

如果吸水管和压水管直径相同，则$V_d = V_s$，则有$H = H_m$。只要测量出泵进口和出口截面处压力表读数h_{ms}，h_{md}，从H_m就可以知道泵扬程及其变化情况。

由质量方程知有

$$V_d = \frac{A}{a_d}u, \quad V_s = \frac{A}{a_s}u \qquad (7\text{-}81)$$

式中，a_d，a_s分别为压水管和吸水管的横截面积。因按式(7-65)知u随时间而变化，故V_s、V_d也是非定常的。这样，不仅将引起水力损失水头随时间的变化，还将产生由于流动非定常性引起的惯性水头，从而引起在式（7-77）和（7-78）中的$\sum h_s$，$\sum h_d$，乃至扬程都将随时间发生变化。

在活塞往复运动一个循环当中，如果活塞运动速度相当缓慢，则泵缸内的压力和位移的关系有如图 7-31 上的$abcd$所示。在上、下死点处压力有一个突跃下降和上升。当活塞运动速度较高时，流动非定常性引起的惯性压力必须考虑：在吸入过程中，在上死点，泵缸和吸水管中流体必须加速起动，在下死点，泵缸和压水管中流体必须减速为零；这种加速或减速将导致产生附加的惯性压力。

从吸入行程看，参看第三章的式（3-88）知，有

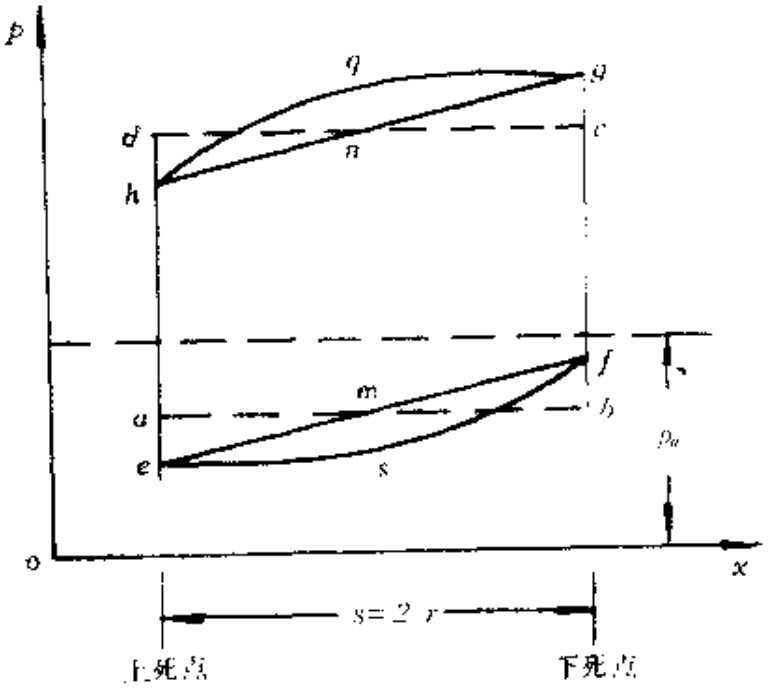


图 7-31

$$p_{in} = \rho\int_1^2 \frac{\partial V}{\partial t}\mathrm{d}s \qquad (7\text{-}82)$$

式中，积分由管道的截面①沿管长积分到截面②，$\frac{\partial V}{\partial t}$是沿管长的流体加速度。在本例中，有两段管长，一是吸水管长度L_s，二是泵缸中由上死点量起的位移x，故由式（7-82）有

$$(p_{in})_s = \rho\int_{L_s}\frac{\partial V}{\partial t}\mathrm{d}s + \rho\int_s\frac{\partial V}{\partial t}\mathrm{d}s = \rho L_s\frac{\partial V_s}{\partial t} + \rho x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

利用式（7-81），上式变为

$$(p_{in})_s = \rho\left(\frac{L_sA}{a_s} + x\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

代入式（7-66）或式（7-70）后有

$$(p_{in})_s = \rho\left(\frac{L_sA}{a_s} + x\right)\omega^2 r\cos\varphi = \rho\left(\frac{L_sA}{a_s} + x\right)\omega^2 r\left(1 - \frac{x}{r}\right) \qquad (7\text{-}83a)$$

或

$$(h_{in})_s = \frac{(p_{in})_s}{\gamma} = \frac{\omega^2 r}{g}\left(\frac{L_s A}{a_s} + x\right)\left(1 - \frac{x}{r}\right) \quad (7\text{-}83b)$$

因$x \ll \frac{L_s A}{a_s}$，故可取

$$(p_{in})_s = \rho\left(\frac{L_s A}{a_s}\right)\omega^2 r\left(1 - \frac{x}{r}\right) \quad (7\text{-}84a)$$

$$(h_{in})_s = \frac{\omega^2 r}{g}\left(\frac{L_s A}{a_s}\right)\left(1 - \frac{x}{r}\right) \quad (7\text{-}84b)$$

在图7-31上已画出吸入过程中计及惯性压力后随活塞位移的压力分布线（emf）。在上死点，$x=0$，因加速压力下降；而在下死点，$x=2r$，因减速压力上升，其数量均为$\frac{\omega^2 r}{g}\left(\frac{L_s A}{a_s}\right)$。

同理，从压送过程看，有

$$(p_{in})_d = -\rho\left[\frac{L_d A}{a_d} + (s-x)\right]\omega^2 r\left(1 - \frac{x}{r}\right)$$

$$\doteq -\rho\left(\frac{L_d A}{a_d}\right)\omega^2 r\left(1 - \frac{x}{r}\right) \quad (7\text{-}85a)$$

$$(h_{in})_d = -\frac{\omega^2 r}{g}\left[\frac{L_d A}{a_d} + (s-x)\right]\left(1 - \frac{x}{r}\right)$$

$$\doteq -\frac{\omega^2 r}{g}\left(\frac{L_d A}{a_d}\right)\left(1 - \frac{x}{r}\right) \quad (7\text{-}85b)$$

同样，在同一图上已画出压送过程中计及惯性压力后，随活塞位移的压力分布线gnh。

因此，再计入粘性造成的水头损失或压力损失，有

$$(h_f)_s = (S_h)_s Q_s'^2,\quad (h_f)_d = (S_h)_d Q_d'^2 \quad (7\text{-}86a)$$

$$(p_f)_s = \gamma(h_f)_s,\quad (p_f)_d = \gamma(h_f)_d \quad (7\text{-}86b)$$

计及压力损失造成的负压后，图7-31上随活塞位移的压力分布也将发生变化，变为$esfgqh$曲线；在上、下死点因流速为零，$(p_f)_s = (p_f)_d = 0$，而在$x=r$时，速度和流量最大，$(p_f)_s$，

$(p_t)_d$达到最大值。

所以，由上述可知在式（7-77）和式（7-78）中的Σh_s和Σh_d分别为

$$\Sigma h_s = (S_h)_s Q_s'^2 + \frac{\omega^2 r}{g}\left(\frac{L_s A}{a_s} + x\right)\left(1 - \frac{x}{r}\right) \quad (7\text{-}87)$$

$$\Sigma h_d = (S_h)_d Q_d'^2 - \frac{\omega^2 r}{g}\left[\frac{L_d A}{a_d} + (s - x)\right]\left(1 - \frac{x}{r}\right) \quad (7\text{-}88)$$

将它们代入式（7-79c），即得泵的扬程。显然，它也有脉动变化。

2. 活塞泵的功率和效率

活塞对流体所作功率，可按下述方法求得：瞬间作用在活塞面积上的压力为p，作用在活塞上的力为Ap；如果在该力作用下活塞位移$\mathrm{d}x$，则活塞对流体所作的功为$Ap\mathrm{d}x$；因此，一个循环过程所作的功为

$$W = A\int p\mathrm{d}x \quad (7\text{-}89)$$

在几何上它显然代表的正是图7-31上的压力曲线所围成的面积。故该图又称为活塞泵的示功图。设示功图的面积已知，除以活塞行程s，得到平均指示压力p_i，则$p_i Fs$为一个循环过程所作的指示功；现曲柄旋转角速度为ω（以弧度/秒计）或N（以转/分计）则活塞每秒钟所作的功为（即指示功率）

$$P_i = p_i Fs\frac{\omega}{2\pi} = p_i Fs\frac{N}{60} = p_i Q_{th} = \gamma H_i Q_{th} \quad (7\text{-}90)$$

输入活塞泵轴的功率为P，因有机械摩擦阻力而损失的功率为P_m；泵内水力摩擦损失功率为$\gamma h_i Q_{th}$，h_i为水力摩擦损失水头；还有渗漏损失功率$\gamma H_i \Delta Q$；泵输出的有用功率为γHQ。因此，从能量守恒角度有

$$P = P_m + \gamma(h_i Q_{th} + H_i \Delta Q + HQ) \quad (7\text{-}91)$$

故活塞泵的总效率为

$$\eta = \frac{\gamma HQ}{P} = \eta_m \eta_h \eta_v \qquad (7\text{-}92)$$

其中，η_m，η_h和η_v分别为泵的机械效率，水力效率和容积效率，有

$$\eta_m = \frac{P - P_m}{P}, \quad \eta_v = \frac{Q}{Q_{th}}$$

$$\eta_h = \frac{\gamma HQ_{th}}{\eta_m P} = \frac{\gamma HQ_{th}}{\gamma HQ_{th} + \gamma h_t Q_{th}} = \frac{H}{H + h_t} = \frac{H}{H_t} \qquad (7\text{-}93)$$

目前活塞泵的$\eta_v = 0.95 \sim 0.98$。$\eta = 0.7 - 0.9$。活塞泵的总效率主要取决于泵的几何尺寸大小（一般用泵的行程s来代表），见图7-32。泵的尺寸越大，效率越高。与前述的叶轮式离心泵不同，无所谓最佳工况点状态。

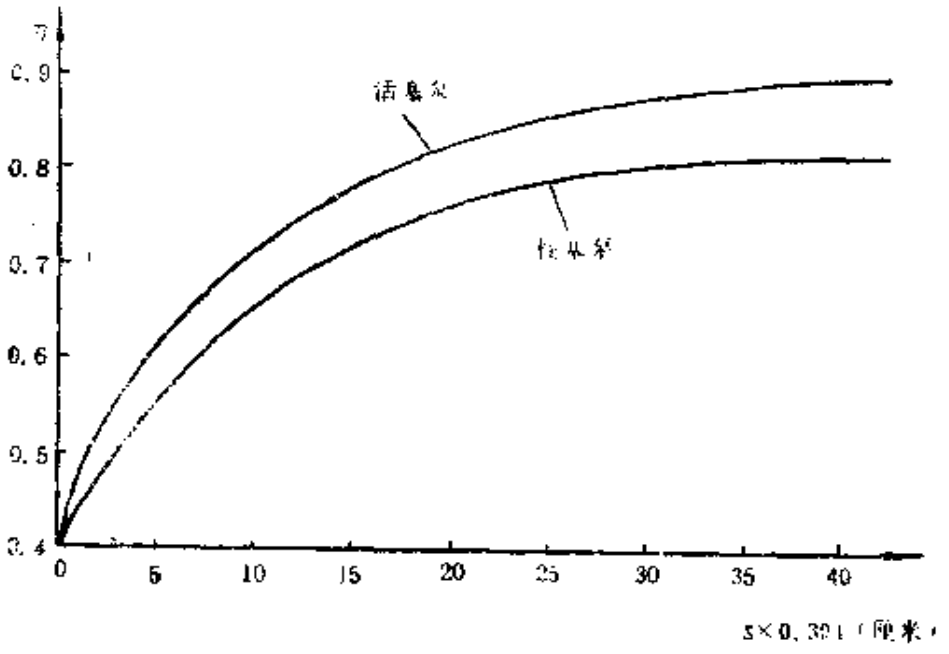


图 7-32

四、活塞泵的吸上扬程限制和压缩空气室

从前面的式（7-77b）、式（7-87），或者从图 7-31 可知，

在吸入过程开始上死点，泵进口截面压力最低，故也有一个防止出现气穴现象的问题。当液体的饱和蒸气力 p_v 一定时，反过来就有一个对真空表水头h_{ms}或吸上扬程z_s的限制。表 7-2 中列出了活

表 7-2 $(Z_s)_{max}$(米)

t℃ / N转/分	0°	20°	30°	40°	50°	60°
50	7.0	6.5	6.0	5.5	4.0	2.5
60	6.5	6.0	5.5	5.0	3.5	2.0
90	5.5	5.0	4.5	4.0	2.5	1.0
120	4.5	4.0	3.5	3.0	1.5	0.5
150	3.5	3.0	2.5	2.0	0.5	0.0
180	2.5	2.0	1.5	1.0	0.0	0.0

塞泵允许的最大吸上扬程z_s的概略数值，可供参考。

最后应当讲一下，在活塞泵运行中，在压水管或吸水管靠近泵缸的地方安装压缩空气室的作用。见图7-33。利用压缩空气室中空气体积的变化，不仅将有效地消除惯性力的作用，而且也有助于减小流动的脉动和水力损失。图 7-34(a)，是装有压缩空气室后实测某活塞泵的示功图，由图表明，惯性效应和流动脉动效应大为减弱；图 7-34(b)，是单缸单面作用活塞泵的流量不匀均的变化。

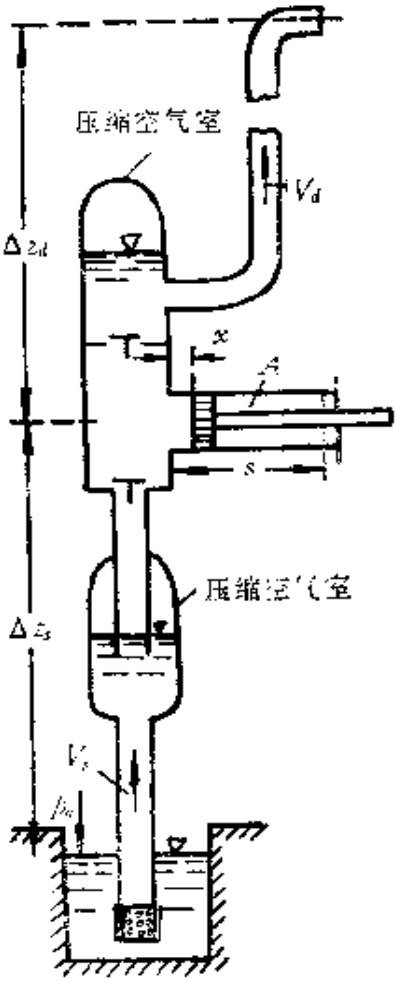
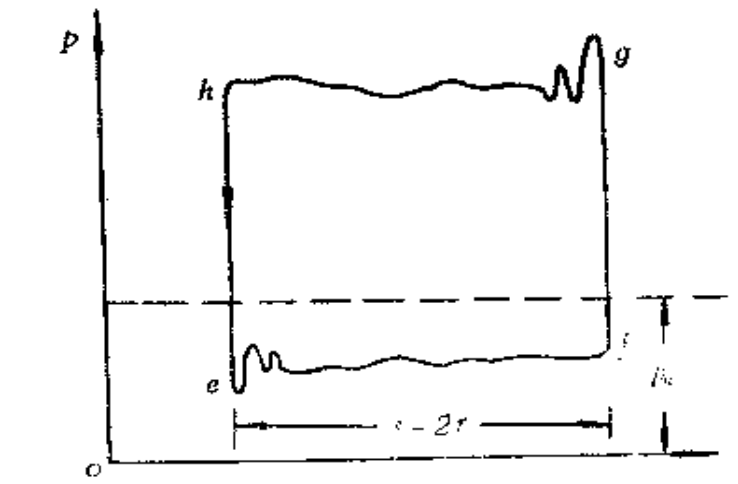
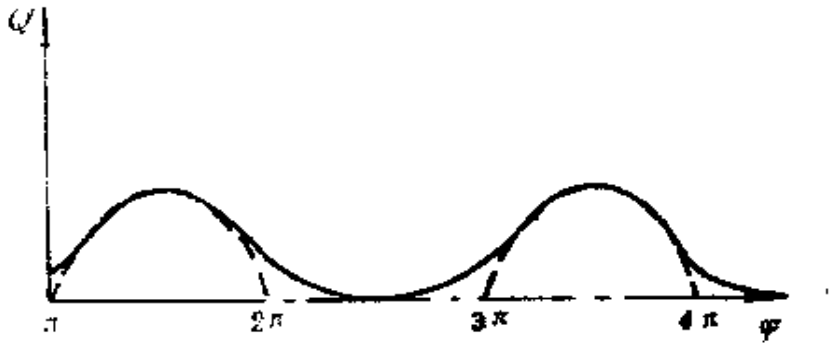


图7-33

例7-5　已知：有一台单缸单面作用的活塞泵用于图 7-35 所示管路系统抽水。活塞泵的曲柄转速为 0.4 转/秒，活塞的直径为200毫米，而行程为 500 毫米。吸水管和压水管的直



(a)



(b)

图 7-34

径都是100毫米。吸上扬程0.4米，压上扬程 20 米。吸水管和压水管的管长分别为 3 米和200米。在压水管离泵出口截面 20 米管长处安装了一个大的压缩空气室（也称空气缓冲室）。大气压力的压头为10.3米。水的饱和蒸气压力高度为 2.4 米。吸水管和压水管的沿程摩擦损失因子 $f=0.032$。不计渗漏损失和管路的局部损失。求：（1）在吸入和压送过程中，位于上、下死点和行程中点处泵缸内的压头。（2）为了避免在活塞工作面上产生气穴，最大允许的转速大小。

解　（1）对于吸入过程，按式（7-77b），（7-81），（7-

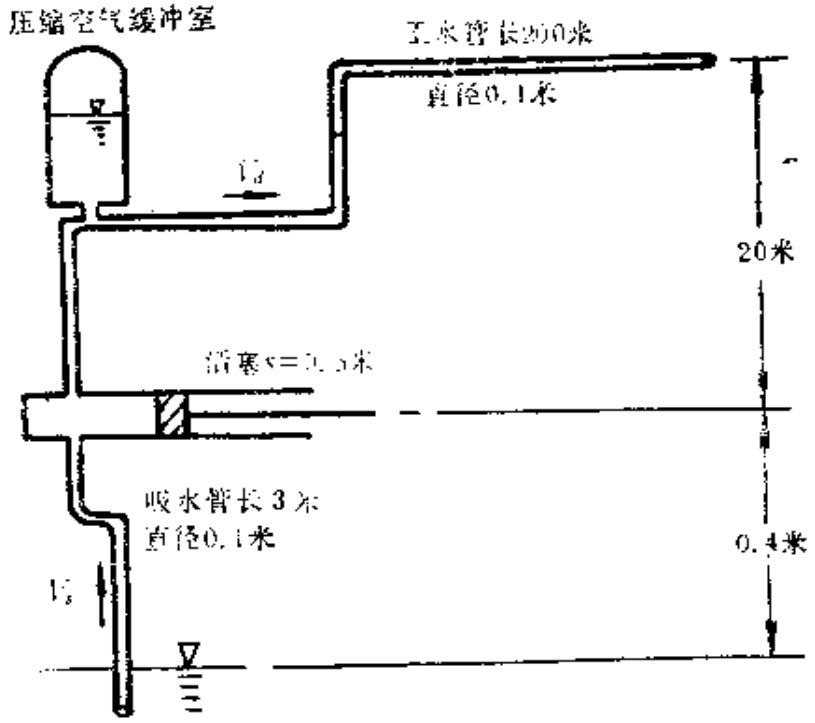


图 7-35

65)，(7-72)，(7-87) 有

$$\frac{p_s}{\gamma}=\frac{p_a}{\gamma}-\left(z_s+\frac{V_s^2}{2g}+\Sigma h_s\right)$$

$$V_s=\frac{A}{a_s}u=\left(\frac{A}{a_s}\right)\omega r\sin\varphi$$

$$\Sigma h_s=(S_h)_s Q_s'^2+\frac{\omega^2 r}{g}\left(\frac{L_s A}{a_s}+x\right)\left(1-\frac{x}{r}\right)$$

$$Q_s'=A\omega r\sin\varphi$$

按已知条件，知$\frac{A}{a_s}=\left(\frac{200}{100}\right)^2=4$，　　$\omega r=(0.4\times 2\pi)\times 0.25$ $=0.628\,3$(米/秒)，$\omega^2 r=1.579$(米/秒^2)。

在上死点：$x=0$，$\varphi=0$，故有$V_s=0$，$Q_s'=0$，而

$$\Sigma h_s=\frac{\omega^2 r}{g}\frac{L_s A}{a_s}=\frac{1.579}{9.81}\times 4\times 3=1.93\text{（米）（水柱）}$$

所以

$$\frac{p_s}{\gamma}=10.3-0.4-1.93=7.97(\text{米})(\text{水柱})$$

在下死点：$x=2r$，$\varphi=\pi$，故有$V_s=0$，$Q_s'=0$，而$\Sigma h_s=-1.93$米（水柱），代入

$$\frac{p_s}{\gamma}=10.3-0.4+1.93=11.83(\text{米})(\text{水柱})$$

在行程的中点：$x=r$，$\varphi=\frac{\pi}{2}$，而$V_s=\omega r$，$Q_s'=A\omega r$，

$(S_h)_s=\frac{8L_sf}{g\pi^2d_s^5}=793.21$（秒^2/米^5），故

$$\frac{p_s}{\gamma}=10.3-0.4-\frac{0.6283^2}{2\times9.81}-793.21\times(0.785\times0.2^2\times0.6283)^2$$
$$=10.3-0.4-0.02-0.31=9.57(\text{米})(\text{水柱})$$

对于压送过程，按式（7-78b），（7-81），（7-65），（7-72），（7-88）有

$$\frac{p_d}{\gamma}=\frac{p_a}{\gamma}+\left(z_d-\frac{V_d^2}{2g}+\Sigma h_d\right),\quad V_d=\left(\frac{A}{a_d}\right)\omega r\sin\varphi$$

$$\Sigma h_d=(S_h)_dQ'^2_d-\frac{\omega^2r}{g}\left[\frac{L_dA}{a_d}+(s-x)\right]\left(1-\frac{x}{2r}\right),$$

$$Q'_d=A\omega r\sin\varphi$$

在下死点：$x=2r=s$，$\varphi=\pi$；如果没有压缩空气室，则全部压水管路中的$V_d=0$，不会产生水力摩擦损失水头；但在本例中的压水管中装有压缩空气室，故它将保持从压缩空气室算起的压水管中的流体作定常流动，通过的流量为Q_{sh}，故此时仍有水力损失。但是，也正是装有压缩空气缓冲室，惯性效应只在从泵缸出口到空气室一段管长上（现只有20米）才继续存在，故将大大减小惯性水头。因此，由于$(S_h)_d=\frac{8L'_df}{g\pi^2d_d^5}=\frac{8\times180\times0.032}{9.81\times\pi^2\times(0.1)^5}$

$= 47\,593$(秒^2/米^5)，$\frac{A}{a_d} = \left(\frac{200}{100}\right)^2 = 4$，$Q_{th} = \frac{AS\omega}{2\pi} =$

$\frac{0.785\times(0.2)^2\times 0.5\times 0.4\times 2\pi}{2\pi} = 0.006\,28$(米^3/秒)，

故

$$\frac{p_d}{\gamma} = 10.3 + 20 + \frac{\omega^2 r}{g}\frac{l'_d A}{a_d} + (S_h)_d Q_{th}^2$$

$$= 10.3 + 20 + \frac{1.579}{981}\times 4\times 20 + 47\,593 \times (0.006\,28)^2$$

$$= 10.3 + 20 + 12.87 + 1.88 = 45.05\text{(米)（水柱）}$$

可见，尽管加了压缩空气室，有了1.88米（水柱）的水力损失出现，但却使惯性水头从无压缩空气室的128.7米减到12.87米，效果是十分显著的。

在上死点：$x = 0$，$\varphi = 0$，这时的情况与上述情况相似，有

$$\frac{p_d}{\gamma} = 10.3 + 20 - 12.87 + 1.88 = 19.31\text{(米)（水柱）}$$

在行程的中点：$x = r$，$\varphi = \frac{\pi}{2}$，惯性水头等于零，水力摩擦损失水头只需再加上20米长一段的水头损失即可，因此时$V_d = \left(\frac{A}{a_d}\right)\omega r$，$Q'_d = A\omega r = 0.019\,73$(米^3/秒)，而$(S_h)_d = 47\,593 \times \frac{20}{180} = 5\,288$(秒^2/米^5)，即

$$\frac{p_d}{\gamma} = 10.3 + 20 + 1.88 + 5\,288\times(0.019\,73)^2$$

$$= 10.3 + 20 + 1.88 + 2.06$$

$$= 34.24\text{（米）（水柱）}$$

（2）为防止产生气穴，在吸入过程的上死点处，$\frac{p_d}{\gamma}$最小

不能低于 $\frac{p_v}{\gamma}=2.4$米，即

$$2.4=10.3-0.4-\frac{\omega^2 r}{g}\frac{L_s A}{a_s}$$

有

$$\omega^2=7.5\times\frac{9.81}{3}\times\frac{1}{4\times0.25}=24.525$$

$$\omega=4.95\text{（弧度/秒）}$$

所以相应最大允许的转速N 不得超过 N_{max}，而

$$N_{max}=\frac{60\omega}{2\pi}=\frac{60\times4.95}{2\pi}=47.27\text{(转/分)}。$$

§7-4 旋 转 泵

旋转泵的种类很多，最常见的是齿轮泵、叶片泵、螺旋泵等。所有旋转泵有如下共同特征：

①由于工作腔室不止一个，所以惯性效应和流动脉动都很小，有均匀的流量。

② 无需吸入阀和压送阀。

③ 旋转速度比较高，可直接与高速电动机配套工作。

④构造简单，工作可靠

如同其他容积式泵一样，旋转泵适用于高压头，小流量的场合，比转速 $n_s<0.2$。在航空航天工业中，主要用于发动机的润滑系统，飞机的操纵液压传动系统。

本节只介绍齿轮泵和叶片泵的简单工作原理。

一、齿轮泵

齿轮泵由一对彼此啮合的相同齿轮和泵壳体组成，见图7-36。主动轮由电动机驱动，从动轮随之旋转。当液体由入口端被

吸入到齿间和壳壁形成的入口工作腔后，沿壳体内壁随着每个齿流动，直到出口工作腔室，最后被挤入压液管。从一个齿隙中挤出的液体体积为 ab，其中，a为齿隙面积，b为齿的高度。设齿轮的齿数为 Z，故齿轮旋转一周挤入压液管的液体体积为$2Zab$。设齿轮泵的容积效率为η_v，则泵的流量为

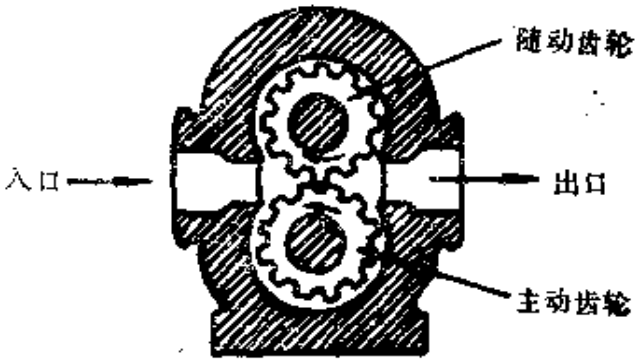


图 7-36

$$Q=\eta_v 2Zab\frac{N}{60} \tag{7-94}$$

式中，转速 N 以转/分计。上式表明泵的流量与转速成比例，而

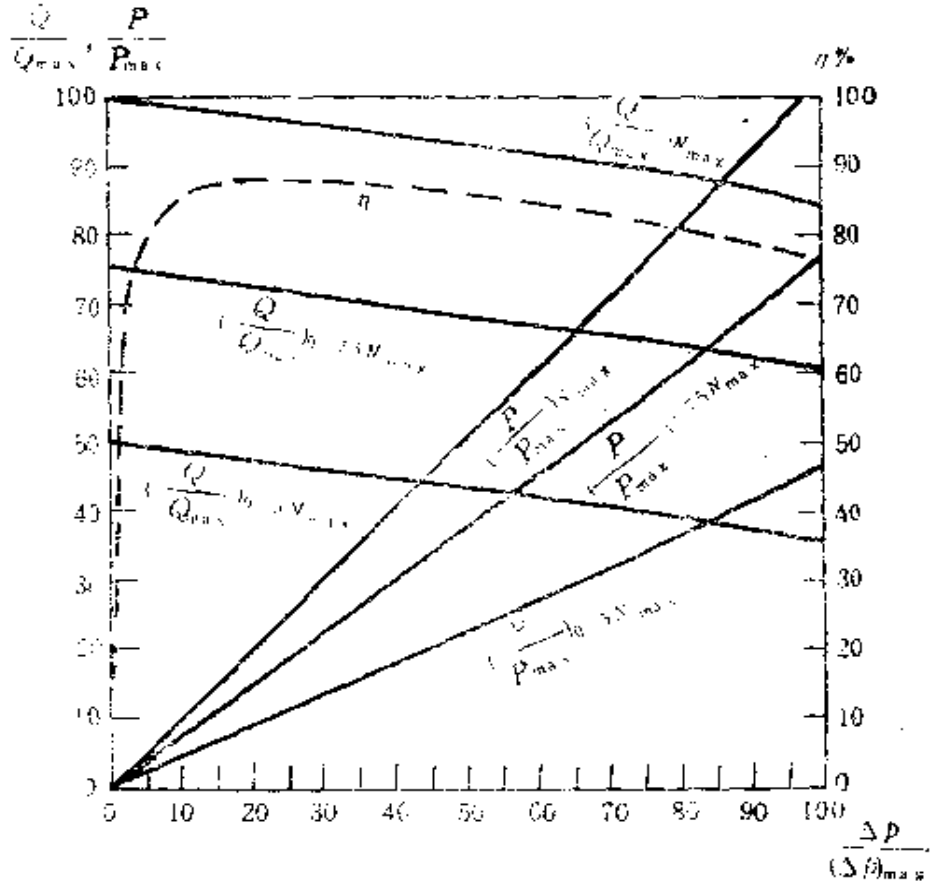


图 7-37

与压头无关。

一般，齿轮泵的最高工作压力可达200个大气压左右，而最高流量可达100升/秒左右。在出口工作压力为40个大气压左右时，$\eta_v \approx 0.96$；如出口工作压力增加，则η_v会减小。在航空发动机润滑系统内，工作压力在2～10个大气压；在飞机起落架收放液压系统内，压力可达100～120个大气压。

齿轮泵的总效率为

$$\eta = \frac{\rho g H Q}{P} = \frac{\Delta p Q}{P} \cdot \eta_m \eta_v \qquad (7\text{-}95)$$

式中，Δp为压力增量，H为齿轮泵的压头，η_m为泵的机械效率。典型齿轮泵的性能曲线，见图7-37。

二、叶片泵（旋板泵）

参看图7-38，是一个叶片泵的示意图，A—泵壳，B—偏心距为e的工作轮（转子），在工作轮上的径向槽缝里装有可活动的叶片C，它始终由弹簧顶着，保持与壳体内壁接触，叶片数目Z一般在10左右。工作轮旋转时，流入进口段的流体，被叶片扫过，沿先扩张后收缩的腔道被带到出口段，在压力p_d下被挤送入压液管。

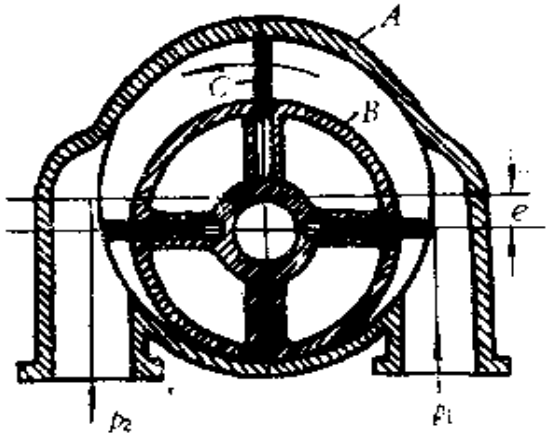


图 7-38

设壳体内壁圆的半径为R，工作轮的偏心距为e，δ为叶片厚度，b为叶片高度。泵的容积效率为η_v，则泵的流量可按下式估算：

$$Q = 2eb[2\pi(R-e) - Z\delta]\frac{N}{60} \qquad (7\text{-}96)$$

式中，N以转/分计。上式表明，如果转子的偏心距e固定（一般

在0.3R左右，具体大小与齿数Z也有关系），则$Q \propto N$；如果允许转子的偏心距e作调整，则在同N下，流量也将变化。

在航空工业中，叶片泵广泛用作航空发动机的汽油泵。

典型叶片泵的特性曲线，见图7-39

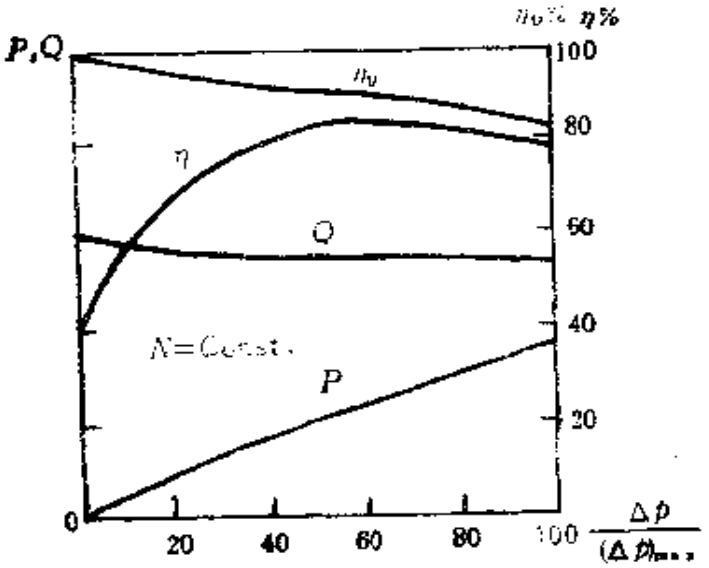


图 7-39

例 7-6　已知：叶片泵壳的内径$D=15$厘米；转子偏心距$e=3$厘米；叶片的$b=4$厘米，$\delta=1$厘米，$Z=8$；$\eta_v=0.85$。求：当$Q=13.3$升/秒时，N的大小。

解　直接由式（7-96）可得

$$N=\frac{30Q}{[2\pi(R-e)-Z\delta]}\frac{1}{eb\eta_v}$$

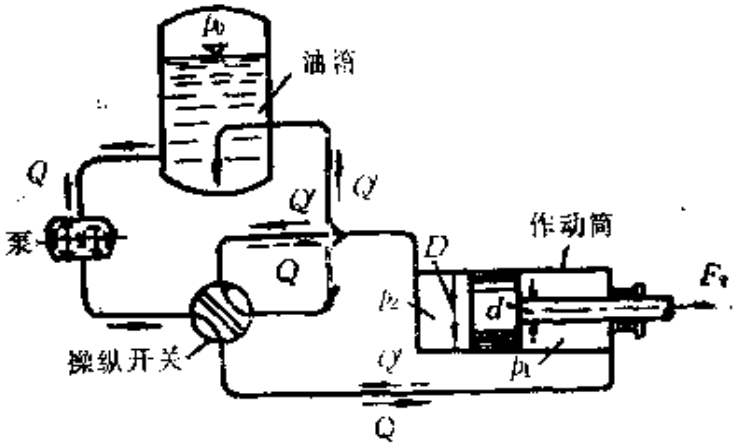
$$=\frac{30\times13.3\times10^{-3}}{[2\pi(0.075-0.03)-8\times0.01]}\frac{1}{0.04\times0.03\times0.85}$$

$$=1929(\text{转/分})$$

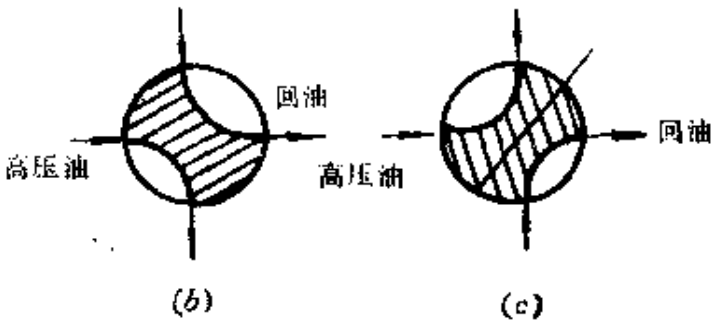
§7-5 液压传动简单工作原理

一、概　　述

液压传动是基于帕斯卡原理，借助于处在密闭容器内液体的压力势能来传递动力的传动：它是以液体为工作介质，通过动力元件液压泵，将电动机的机械能转换为液体的压力势能；然后通过管道、控制元件（或叫操纵机构，如换向阀）等，并借助执行元件马达（比如往复式作动筒或旋转式液压马达）将液体的压力势能再次转换为机械能，驱动负载实现直线或旋转运动。图7-40是一个简单的液压传动系统示意图，图中未画出具体的负载，即



(a)



(b)　　(c)

图 7-40

作动筒活塞杆带动的具体机构，它可以是飞机液压传动系统中的起落架操纵系统，也可以是刹车装置或者是机床的工作台等。图中齿轮泵作为动力元件由发动机驱动，把液压油从油箱经油管吸入齿轮泵，然后经操纵开关（或称换向阀）将液压油压入作动筒（缸体固定不动）；当操纵开关处于图(*b*）位置，高压油进入有杆油腔一方（图示活塞的右边），推动活塞向左运动，回油经油管、操纵开关返回油箱；反之，当操纵开关处于图（*c*）位置，高压油进入无杆油腔一方，推动活塞向右运动，回油经油管、操纵开关返回油箱。总之，在高压油推动下，活塞将克服外力而对外作功。

二、液压作动筒（马达）

作动筒是流体马达中的一种，它把流体功率转换为机械功率。图7-41上是最简单的单杆作动筒。现来讨论作动筒内活塞和流体的运动。设活塞作等速直线运动，而进油腔和回油腔的压力始终用p_1和p_2表示，在图示（*a*），（*b*）情况下，高压油产生的推力F_1或拉力F_2分别为

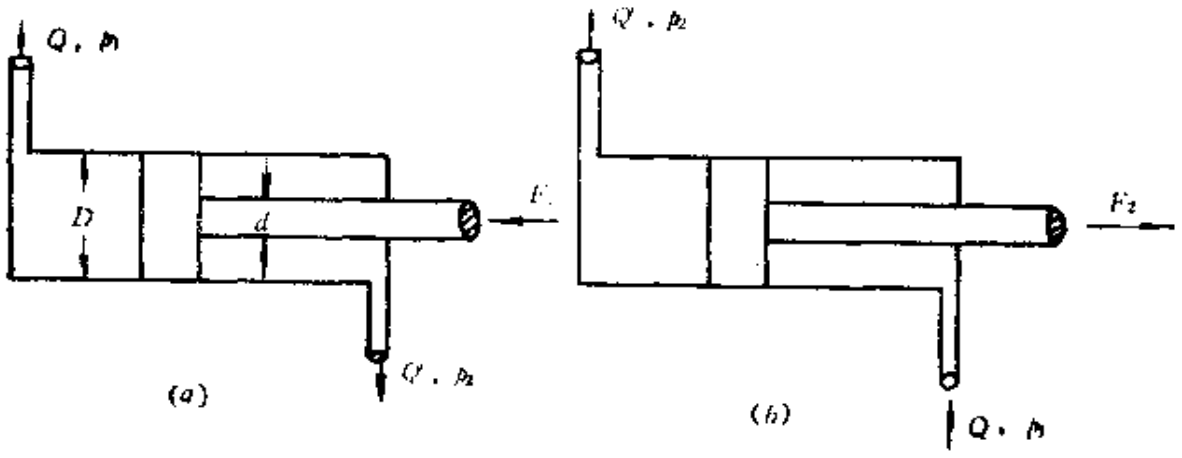


图 7-41

$$F_1 = p_1A_1 - p_2A_2 = \frac{\pi}{4}[p_1D^2 - p_2(D^2 - d^2)] \quad (7\text{-}96)$$

$$F_2 = p_1A_2 - p_2A_1 = \frac{\pi}{4}[p_1(D^2 - d^2) - p_2D^2] \quad (7\text{-}97)$$

式中，D 为活塞的直径，d 为活塞杆的直径。A_1，A_2 分别为无杆油腔、有杆油腔活塞的有效工作面积。

因为活塞两端有效工作面积不等，即使输入的高压油流量都是 Q，但活塞运动速度也不会相等，而有

$$v_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{4Q}{\pi D^2} \quad (7\text{-}98)$$

$$v_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{4Q}{\pi(D^2 - d^2)} \quad (7\text{-}99)$$

同样，在同一Q下，由于输入油腔大小不同，回油管路中的流量Q_R也有变化。当Q输入无杆油腔时，回油管路的流量为

$$Q_R = Q\left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right) \quad (7\text{-}100)$$

反之，当Q输入有杆油腔时，回油管路的流量Q_R为

$$Q_R = Q \Big/ \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right) \quad (7\text{-}101)$$

此外，直接从式（7-96）和（7-97）可得

$$\Delta p_c = p_1 - p_2 = \frac{4F_1}{\pi D^2} - p_2\frac{d^2}{D^2} \quad (7\text{-}102)$$

$$\Delta p_c = p_1 - p_2 = \frac{4F_2}{\pi(D^2 - d^2)} + \frac{p_2d^2}{D^2 - d^2} \quad (7\text{-}103)$$

它们代表高压油p_1进入进油腔产生液压力用来克服负载力F_1或F_2与回油腔背压力p_2所产生的液压阻力之和带来的压降，在计算整个管路特性必须计入。不过，上述两式右端的p_2大小，与活塞运动的调速方案要求等多种因素有关，不易事先确定，一般先可取为$p_2 \approx 0$（表压）。

三、举　例

已知：液压系统简图见图7-40。$F_2=4.9$ 千牛，进油管路总长度$l_1=5$ 米，回油管路总长度 $l_2=5$ 米，油管内径 d_0 都等于10毫米。活塞的$D=50$毫米，活塞杆直径$d=20$毫米，活塞的行程 $s=500$毫米，液压油的重度$\gamma=10\,791$ 牛/米^3，运动粘性系数 $\nu=7$ 厘米^2/秒。不计管路系统中的局部损失。此外，选用的齿轮泵的特性见图 7-42，纵坐标为 p，单位为工程大气压，横坐标为 Q，单位为厘米^3/秒。求：（1）管路系统需用压力流量特性曲线，（2）泵的流量和压力，（3）活塞由上死点运动到下死点所需时间。

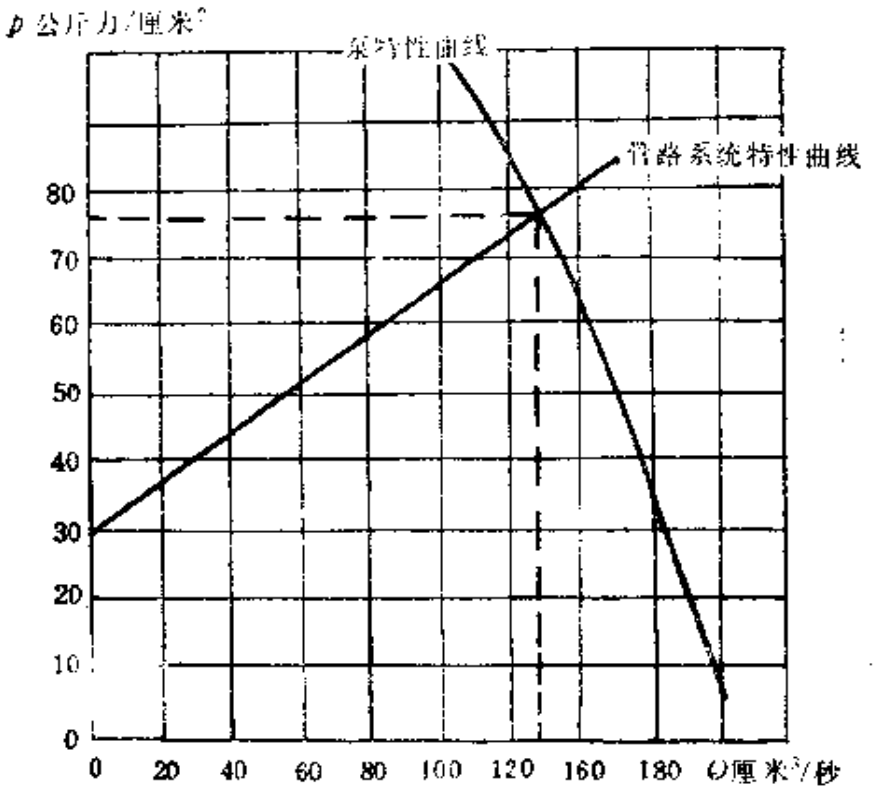


图 7-42

解　（1）确定流态和管路系统的沿程损失

由油管中的流动雷诺数$Re=\dfrac{Vd_0}{\nu}$，得

$$V=\frac{\nu}{d_0}Re=0.07Re\ (\text{米/秒})$$

如取 $Re=2\,100$，则 $V=147$ 米/秒，显然，实际管中流速远小于此数，只有每秒几米的量级，所以，管中的流态肯定是层流。由式（5-32）知，有

$$h_f=f\frac{L}{d_0}\frac{V^2}{2g}$$

按式（5-45），有 $f=\frac{64}{Re}$，而 $V=Q\Big/\left(\frac{\pi}{4}d_0^2\right)$，代入有

$$h_f=4.15\nu L\frac{Q}{d^4}=0.291\times10^6LQ\ (\text{米})$$

式中Q的单位为米^3/秒，但因泵特性曲线中Q的单位为厘米^3/秒，故上式中的Q也换成厘米^3/秒，得

$$h_f=0.291LQ$$

将沿程损失水头换成压降

$$\Delta p_f=\gamma h_f=10\,791\times0.291LQ=3\,140LQ(\text{帕})$$

因为泵的特性曲线中p用工程大气压，故将上式也换成同样的单位，有

$$\Delta p_f=0.032LQ\ (\text{工程大气压})$$

式中，L以米为单位，Q以厘米^3/秒为单位，而Δp_f以工程大气压为单位。

2．计算作动筒中的压降

按式（7-103），回油腔压力p_2近似取为零，则有

$$\Delta p_0=\frac{4F_2}{\gamma\pi(D^2-d^2)}=\frac{4\times4\,900}{9.81\times\pi\times(5^2-2^2)}$$

$$=30.3(\text{工程大气压})$$

3．计算回油管流量 Q_R

按式（7-101）有

$$Q_R = \frac{Q}{\left(1-\frac{d^2}{D^2}\right)} = \frac{Q}{\left(1-\frac{2^2}{5^2}\right)} = 1.19Q$$

4．整个系统特性的计算

沿整个液压系统回路的压降有

$$p = (\Delta p_f)_{进油} + (\Delta p_f)_{回油} + \Delta p_c = 0.032 \times 5Q + 0.032 \times 5Q_R + 30.3$$
$$= 30.3 + 0.35Q$$

上述压降同Q 的关系为线性关系，按上式计算结果已绘在图7-42上。

5．泵的流量和压力

由图 7-42 上两条线的交点可得出，泵的流量 $Q = 128$ 厘米³/秒，$p = 76$ 工程大气压。

6．活塞由下死点运动到上死点所需时间

由式（7-99）知

$$t_2 = \frac{s}{v_2} = \frac{s\pi(D^2-d^2)}{4Q} = \frac{50 \times \pi \times (5^2-2^2)}{4 \times 128} = 6.44(秒)$$

习　　题

1．什么称做流体机械，试举出五种流体机械的名字；并按流体机械的分类分别指出它们属于何类？

2．按图7-2知，$r_1 = 10.16$厘米，$r_2 = 20.32$厘米，$\beta_1 = 30°$，$\beta_2 = 20°$，工作轮的$b_1 = b_2 = 5.08$ 厘米，转速 $N = 1\,800$ 转/分，设 $\alpha_1 = 90°$。试求该离心式泵的理论流量和扬程的大小。

3．离心式泵的相似理论有什么用途？什么叫做泵的尺度效应？

4．什么叫做泵的比转速？一台泵的工作轮直径为200毫米，

转速为 1 140 转/分时，对应于最高效率点的流量和扬程分别为100升/秒，10米，它的比转速多大？其效率最高可达多少？

5．在例7-4中为了提高供水量，拟再并联一相同的离心泵，试按例题中所列项目重新进行计算。

6．在液体燃料火箭发动机上，利用离心式泵将氧化剂(过氧化氢）送到发动机中，泵的叶轮转速 $N=10\,000$ 转/分。如当重量流量 $\gamma Q=73.58$ 牛/秒时，泵进出口截面上的压差达 $\gamma H=343.35$牛/厘米^2，问该泵的叶轮直径为多大？已知，过氧化氢的重度 $\gamma=13\,243.5$牛/米^3，叶轮的 $b_2=8$ 厘米，$\beta_2=30°$，叶片数目为 8，$\frac{D_1}{D_2}=\frac{1}{2}$，泵的水力效率 $\eta_h=0.75$，$S_F=0.86$。

7．泵的试验提供如下的数据：

Q，升/秒	H，米	P，千瓦
0.0	121.92	178.97
85.17	121.92	216.25
170.34	121.92	275.91
255.51	118.87	343.02
340.69	109.73	447.42
425.86	79.25	447.22

试问其最有佳工况点参数等于多少？这个泵是什么类型的泵？

8．如图7-43所示系统，其 $NPSH$ 等于多大？

9．活塞泵的流量为什么会产生脉动变化？有哪些措施可以减小这种脉动变化？

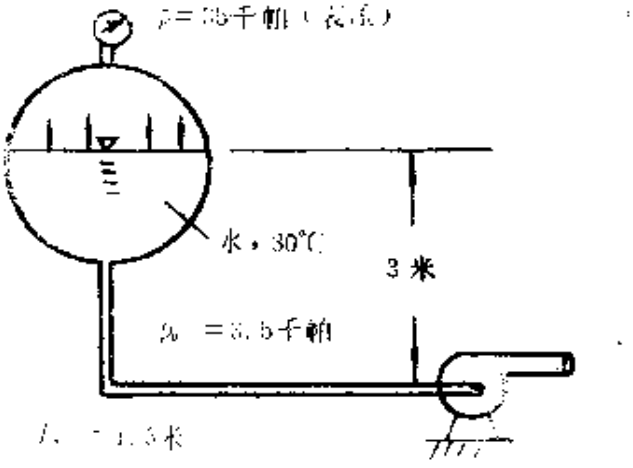


图 7-43

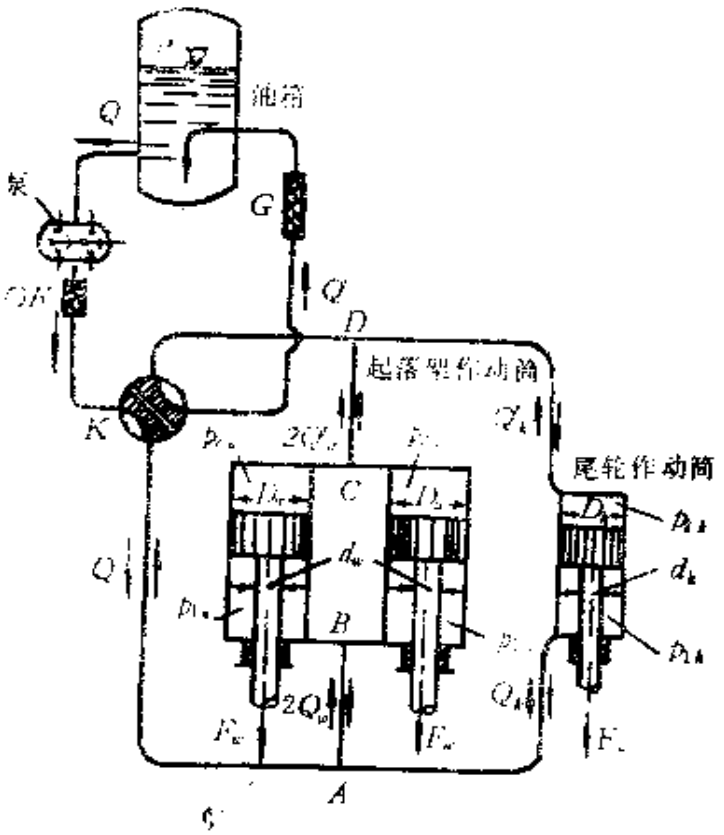
10．什么叫做惯性水头？试分析影响惯性水头的因素是什么？减小惯性影响的措施有哪些？

11．活塞泵的活塞直径为15厘米，活塞行程为30厘米，泵的给水高度为48米，转速为40转/分，如略去各项损失不计，试计算其理论流量及功率，并求其瞬时最大流量值。

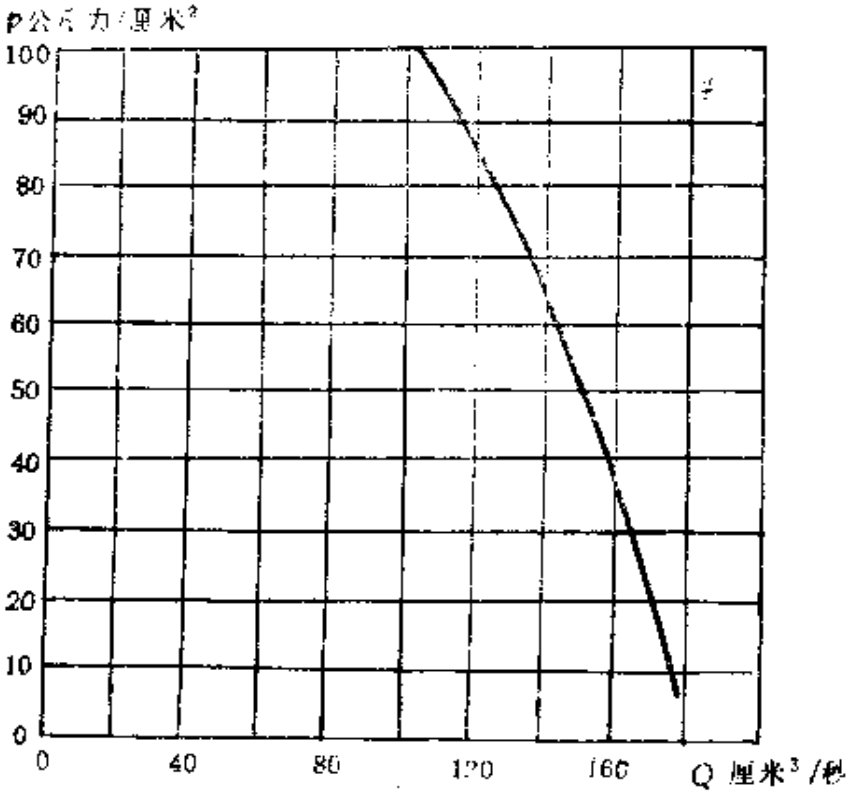
12．说明齿轮泵，叶片泵的工作原理及其在航空上的应用情况。

13．一叶片泵的泵壳内径$D=12$厘米，转子叶片高度$b=3$厘米，偏心距$e=2$厘米，叶片厚度$\delta=0.8$厘米，叶片数目$Z=8$，$\eta_v=0.85$，求当流量$Q=10$升/秒时，转子每分钟的转数等于多少？

14．飞机起落架收放系统简图见图7-44(a)。当起落架收起时，泵从油箱中吸出液压油通过单向活门OK及开关K，送入起落架和尾轮的作动筒中，高压油推动活塞向上移动，其回油路、三个作动筒亦如图中所示。泵的特性曲线见图7-44(b)。其他数据为：起落架杆轴向力$F_w=9\,810$牛，尾轮杆轴向力$F_k=4\,709$牛。作动筒直径：$D_w=60$毫米，$D_k=50$厘米；活塞杆直径$d_w=24$毫米，$d_k=20$毫米；活塞行程$s_w=400$毫米，$s_k=335$毫米。管路长度：由油箱到泵：$L_1=1.5$米，由泵到开关K：$L_2=1.0$米，由开关到三叉点A：$L_3=1.5$米，由三叉点A到三叉点B：$L_4=1.0$米，由三叉点B到作动筒：$L_5=1.25$米，由作动筒到三叉点C：$L_6=1.25$米，由三叉点C到三叉点D：$L_7=1.0$米，由三叉点D到开关K：$L_8=1.5$米，由开关到油箱（回油路）：$L_9=2.5$米。由三叉点A到尾轮作动筒：$L_{10}=6$米，由尾轮作动筒（回油路）到三叉点D：$L_{11}=6$米。全部油管直径d均为10毫米。所有局部阻力损失的换算当量长度为：单向活门OK：$L=30d$，开关K：$L=25d$，过滤器G：$L=20d$。而液压油的运动粘性系数$\nu=5.12$厘米^2/秒，重度$\gamma=10\,104.3$牛/米^3。试问：（1）泵产生的流量和压力各多少？（2）收起起落架和尾轮所需的时间各多少？


油箱
泵
起落架作动筒
尾轮作动筒
A
B
C
D
K
G

(a)


P公斤力/厘米²
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
0
40
80
120
160
Q 厘米³/秒

(b)

图 7-44

附录　国际单位、工程单位、英制单位及其换算

基本物理量 / 单位	国际单位 (*SI*)	工程单位	英制单位 (*FFS*)
	长度 质量 时间 *L* *M* *T* (m) (kg) (s)	长度 力 时间 *L* *F* *T* (m) (kgf) (s)	长度 质量 时间 *L* *M* *T* (ft) (slug) (s)
质量	公斤(千克)(kg)	公斤力·秒²/米 (kgf·s²/m) (1kgf·s²/m=9.81kg)	斯勒格(slug) (1slug=14.59kg)
长度	米(m)	米(m)	英尺(1ft=0.3048m)
时间	秒(s)	秒(s)	秒(s)
温度	开(尔文)(K) 或摄氏度(°C) (t°C=tK−273.15)	开(尔文)(*K*) 或摄氏(°C)	洛氏(°R)或华氏(°F) (t°F=$\frac{9}{5}t$℃+32) (t°F=t°R−459.6)
力	牛(N=kg·m/s²)	公斤力(kgf) (1kgf=9.81N)	磅(lb)(lb=slug·ft/s²) (1lb=4.448N)
压力 应力	帕=牛/米² (Pa=N/m²)	公斤力/米²(kgf/m²) (1kgf/m²=9.81N/m²)	磅/英呎²(lb/ft²) (1lb/ft²=47.88Pa)
功	牛·米(N·m)	公斤力·米(kgf·m) (1kgf·m=9.81 N·m)	磅·英尺(lb·ft) (1lb·ft=1.356 N·m)
热量	焦尔 (J=N·m)	千卡(kcal) (1kcal=4187J)	英热量单位 (BTU) (1BTU=1055 J)
功率	瓦(W=N·m/s)	公斤力·米/秒 (kgf·m/s) (1kgf·m/s=9.81W)	马力(h_p) ($1h_p$=550lb·ft/s) ($1h_p$=745.6W)
密度	公斤/米³(kg/m³)	公斤力·秒²/米⁴ (kgf·s²/m⁴) (1kgf·s²/m⁴= 9.81kg/m³)	斯勒格/英尺³ (slug/ft³) (1slug/ft³= 515.4kg/m³)

续表

基本物理量 / 单位	国际单位 (SI)	工程单位	英制单位 (FPS)
	长度 质量 时间 L M T (m) (kg) (s)	长度 力 时间 L F T (m) (kgf) (s)	长度 质量 时间 L M T (ft) (slug) (s)
速度	米/秒(m/s)	米/秒(m/s)	英尺/秒(ft/s) (1ft/s=0.3048m/s)
气体常数	牛·米/公斤·开(尔文) (N·m/kg·K)	公斤力·米/(公斤力·秒²/米)·开或米²/秒²·开($m^2/s^2\cdot K$) ($1m^2/s^2\cdot K=1N\cdot m/kg\cdot K$)	磅·英尺/斯勒格·洛氏 (1lb·ft/slug·°R=0.1672N·m/kg·K)
动力粘性系数	帕秒或公斤/米·秒 (Pa·s或kg/m·s)	公斤力·秒/米² (1kgf·s/m²) ($1kgf\cdot s/m^2=9.81pa\cdot s$)	斯勒格/英尺·秒 (slug/ft·s)(1slug/ft·s=47.88 kg/ms)
运动粘性系数	米²/秒(m^2/s)	米²/秒(m^2/s)	英尺²/秒(ft^2/s) ($1ft^2/s=0.0929m^2/s$)
热传导系数	牛/秒·开(尔文) (N/s·K)	公斤力/秒·开 (kgf/s·K) (1kgf/s·K=9.81N/s·K)	磅/秒·洛氏(lb/s°R) (1 lb/s·°R=8.007 N/s·K)

参 考 文 献

1. John K. Vennard, Robert L. Street: "Elemenfary Fluid Mechanics", sixth edition, John Wiley & Sons, Inc, 1982
2. Robert W. Fox, Alan T. Mcdonald: "Introduction to Fluid Mechanics", third edition, John Wiley & Sons, Inc, 1985.
3. J.F.Kreider: "Principles of Fluid Mechanics", Allyn & Bacon, Inc, 1985.
4. 徐华舫编著：《空气动力学基础》，国防工业出版社，1979.
5. Alan L. Prasuhn: "Fundamentals of Fluid Mechanics", Prentice—Hall,Inc, 1980
6. 蒋卓如等：《工程流体力学》，哈尔滨工业大学出版社，1987.
7. 徐华舫编：《工程流体力学》，北航印刷所出版，1983.
8. 朱一锟编：《流体力学原理》北航印刷所出版，1985.
9. V. L. Streeter, E. B. Wglie: "Fluid Mechanics", eighth edition, McGraw—Hill Book Company, 1985.
10. 陈克城：《流体力学实验技术》，机械工业出版社，1983.
11. 王铁城等：《空气动力学实验技术》，国防工业出版社，1986.
12. 孙振东编：《因次分析原理》，人民铁道出版社，1979.
13. 岩本顺二郎著，何卓烈译：《可压缩流体动力学》，西安交通大学出版社，1985.
14. 吴望一编著：《流体力学》，北京大学出版社 1982.
15. R. L. Daugherty, J.B. Franzini, E.J. Finnemore: "Fuild Mechanics With Engineering Applications", eighth edition, McGraw—Hill Book Company, 1985.
16. 周寄达主编：《工程流体力学》，冶金工业出版社，1983.
17. 何大钧编著：《液压传动问答》，四川科技出版社，1987.
18. R. H. Warring: "Pumps: Selection, Systems and Applications", Trade & Technical Press Ltd, 2nd edition, 1984.
19. 国家机械工业委员会编：《泵类产品样本》，机械工业出版社，1988.
20. 谢水曜等编译："工程流体力学水力学题解"，四川科学技术出版社，1984
21. 叶诗美主编："工程流体力学习题集"，水利电力出版社，1985.