

高等学校教材

# 地下水流数值模拟

李俊亭

主编



地质出版社



ISBN 7-116-00515-3/P·440

定 价： 1.60 元

高等学校教材

# 地下水流数值模拟

李俊亭 主编

地质出版社

## 内 容 提 要

本书主要阐述地下水流计算中的数值模拟方法。重点讨论了有限元法与有限差分法,包括不规则网格有限差分法的理论和实际应用。对含水层系统识别(最优化原理与数值方法相结合反求水文地质参数)则着重讨论了一些最基本的内容。本书为高等学校水文地质工程地质专业学生的选修课教材,也可供本专业研究生及从事水文地质工作者参考。

高等学校教材

地下水流数值模拟

李俊亭 主编

责任编辑:李永升

地质出版社出版

(北京和平里)

地质出版社印刷厂印刷

(北京海淀区学院路29号)

新华书店总店科技发行所发行

开本:  $787 \times 1092^{1/16}$  印张: 7.5 字数: 170000

1989年9月北京第一版·1989年9月北京第一次印刷

印数: 1—3470册 定价: 1.60元

ISBN 7-116-00515-3/P·410

# 前 言

本书为高等学校水文地质及工程地质专业学生的选修课教材，内容选自作者多年从事本门课程教学的教材。编写时充分考虑到学生数理的实际水平和已掌握的专业知识，以适应学生的承受能力。学完本教材的内容，包括上机实习大约需要40—46学时。本书内容除了满足本专业学生的要求，还适当考虑了从事水文地质工作者的实际需要。

本书重点讨论了有限差分法与有限元法。考虑到在解决水文地质实际计算问题时有限元法与有限差分法没有本质的区别，仅是分析问题的思路稍有差异，但有限差分法水均衡概念清晰，易学易懂，因此本书突出了有限差分的基本概念和不规则网格有限差分法的理论与实际应用。为了拓宽学生的知识面，介绍了含水层系统识别方面的一些基本内容，这对学生今后进一步深入研究是有益的。

本书的第一章、第二章及第四章由西安地质学院李俊亭与成都地质学院林士贵编写，第三章由长春地质学院邹立芝编写。全书由李俊亭主编完成。地下水流数值模拟计算通过计算机来完成，西安地质学院和长春地质学院备有BASIC语言程序和FORTRAN语言程序，需要者可向两院索取。

本书的编写，得到杨成田、卫中鼎、刘金山、王家昌、王愈吉等老师的关心和支持，特别是卫中鼎教授详细审阅了全部书稿，提出许多宝贵的意见，在此表示衷心的感谢。

编写这本教材，数易其稿，但由于编者水平所限，一定会存在许多不妥之处，我们怀着感激的心情接受读者的批评指正。

编者

1988年2月

# 目 录

<b>第一章 绪论</b> .....	1
第一节 研究地下水运动的主要方法.....	1
第二节 地下水运动的基本定律.....	2
第三节 地下水流的解析解及其应用的局限性.....	5
第四节 数值模拟.....	7
<b>第二章 有限差分法</b> .....	9
第一节 基本概念.....	9
一、离散化.....	9
二、地下水流的有限差分方程.....	10
三、三种主要差分格式.....	13
第二节 承压一维稳定流.....	13
一、一个简单水文地质模型的有限差分方程组.....	13
二、解三对角型线性方程组的追赶法.....	15
三、流量边界的处理.....	16
第三节 潜水一维稳定流.....	18
一、潜水一维稳定流有限差分方程.....	18
二、潜水有限差分方程组的迭代解法.....	19
第四节 承压一维非稳定流.....	21
一、承压一维非稳定流的有限差分方程组.....	21
二、三种有限差分格式的应用.....	24
三、有限差分方程的迭代解法.....	30
四、时间步长与松弛因子的确定.....	31
第五节 潜水一维非稳定流.....	32
一、潜水一维非稳定流的有限差分方程组.....	32
二、双重迭代解法.....	33
第六节 承压二维非稳定流.....	34
一、三种主要差分格式的应用.....	35
二、有限差分方程组的SOR解法.....	36
三、有限差分方程组的强隐式迭代(SID)解法.....	37
第七节 不规则网格有限差分法.....	41
一、地下水流区域的剖分.....	44
二、水头模式的建立与面元水力坡度.....	45
三、均衡单元的基本均衡方程.....	47
四、三种差分格式的应用.....	51
五、边界条件的应用.....	52
六、均衡方程组的解算方法.....	52
第八节 二维流计算中的个别问题.....	56

一、抽(注)水井的抽(注)水量分配 .....	51
二、多层结构问题 .....	54
三、井群水位的计算 .....	61
四、非均质各向异性问题 .....	61
五、初始流场的模拟 .....	62
<b>第三章 有限元法</b> .....	63
第一节 迦辽金有限元法原理——剩余加权法 .....	64
一、剩余加权法 .....	64
二、迦辽金法 .....	67
第二节 迦辽金有限元基本方程 .....	65
一、构造基函数 $\Phi_i$ .....	66
二、迦辽金有限元的基本方程 .....	65
第三节 承压二维非稳定流迦辽金有限元方程及其解法 .....	70
一、水文地质概念模型及其数学描述 .....	70
二、承压二维非稳定流的迦辽金有限元方程 .....	71
三、有限元线性代数方程组总系数矩阵的形成 .....	77
四、有限元方程的解算 .....	82
第四节 迦辽金有限元法在解其它类型地下水流问题中的应用 .....	82
一、二维稳定流有限元方程 .....	82
二、潜水二维非稳定流迦辽金有限元方程 .....	82
三、非均质各向异性二维非稳定流有限元方程 .....	87
第五节 有限元法应用于解地下水流的个别问题 .....	90
一、区域的剖分形式与基函数的选择 .....	90
二、有限元法与不规则网格有限差分法的差别 .....	90
三、有限元法的改进 .....	91
第六节 有限元法应用实例 .....	92
<b>第四章 含水层系统识别</b> .....	96
第一节 含水层系统识别中的一些基本问题 .....	96
一、模型参数的概念 .....	96
二、判别准则问题 .....	97
三、反演问题的适定性 .....	98
四、水位测量精度与水量的重要性 .....	100
五、广义的含水层系统识别 .....	101
六、直接解法与间接解法 .....	101
第二节 间接解法 .....	102
一、逐个修正法中的0.618法 .....	102
二、单纯形法 .....	103
第三节 直接解法 .....	108
一、局部直接求逆法 .....	108
二、数学规划法* .....	109
第四节 Frank—Wolfe 方法在含水层识别中的应用 .....	110
一、Frank—Wolfe方法的原理 .....	110
二、Frank—Wolfe方法在含水层系统识别中的应用 .....	112

# 第一章 绪 论

## 第一节 研究地下水运动的主要方法

研究地下水运动的主要方法可概括为数学模型法与物理模型法。

### 1. 数学模型法

采用数学模型法研究地下水运动规律，首先要把复杂的实际水文地质条件概化为水文地质模型。这个模型一方面对实际地下水流状态具有较高的仿真度，另一方面能够用已知的数学工具进行定量描述。定量描述的结果就构成了水文地质模型的数学模型。对此模型求解，用其解表征研究区域地下水的运动规律。但这个解能否用来表征研究区域地下水运动的规律，关键在于水文地质模型的建立，而数学模型是第二位的。至于数学模型的解算，则纯属计算方法的问题。当然，计算方法的解决也不能脱离水文地质模型本身的要求，因此一个水文地质计算工作者研究水文地质模型至关重要。

对于同一个水文地质模型，可根据生产实际的不同要求，建立不同类型的数学模型。数学模型一般可分为以下几类：

#### (1) 线性模型与非线性模型

这是根据模型中变量的阶次来划分的。若模型是由线性微分方程（或线性积分方程、线性代数方程）与线性定解条件组成，则称为线性模型，否则称为非线性模型。在地下水饱和流的计算中，一般描述承压水的模型，大都属于线性模型，而描述潜水的则属于非线性模型。只有在某种近似意义下，才把潜水的数学模型视为线性模型。

#### (2) 静态模型与动态模型

这是按模型中的变量是否与时间有关而划分的。若模型中的变量与时间无关，则称为静态模型或静模型，否则称为动态模型或动模型。在地下水饱和流计算中，稳定流的模型属静态模型，而非稳定流的模型则属于动态模型。

#### (3) 集中参数模型与分布参数模型

这是根据模型中是否含有空间（坐标）变量来划分的。若模型中不包含空间变量就称为集中参数模型，否则称为分布参数模型。比如《地下水动力学》中的裘布依模型、泰斯模型、纽曼模型等，都属于分布参数模型；而利用最小二乘法配置的井涌水量与降深之间的经验公式，比如 $S=AQ+BQ^2$ ，则属于集中参数模型。

#### (4) 确定性模型与随机模型

这是根据模型中变量的取值性质来划分的。如果模型中的变量只能取确定的值，则称为确定性模型；当模型中的变量只知其取值的概率，则这类模型称为随机模型。随机模型近年来发展很快，美国在地质学未来十年发展预测中，把随机模型做为一个重要研究方向。

#### (5) 黑箱模型与白箱模型



这是根据模型本身所描述的对象不同而划分的。如果模型只研究实体与外界的信息交换情况，而不研究实体内部的性质与结构，这样的模型称为黑箱模型。如对一个泉域，若不研究泉域含水层的性质与结构，而仅为研究泉域的降雨补给量与泉排泄量之间关系而建立的数学模型就是黑箱模型。对一个泉域，不仅研究其交换条件与规律，而且还要研究其赋存规律，由此而建立起来的模型称为白箱模型。

## 2. 物理模型法

采用物理模型法研究地下水的运动规律，首先要将复杂的水文地质条件概化为简单的水文地质模型，与数学模型法不同之处是，物理模型法是采用相似的物理模型去比拟水文地质模型，通过研究物理模型来认识地下水流体的运动规律。例如电模拟法等。

在电子数字计算机问世前及问世而未被广泛应用的时候，物理模拟法成为研究地下水流运动规律的重要方法。但随着数学工具的发展及电子计算机的广泛应用，数学模型法得到了迅速的发展，在研究地下水流运动规律中已占据了统治地位。所谓数学模型法，概括地讲就是通过求数学模型的解来达到研究地下水运动的目的。

### 地下水流模型的求解方法

#### 1. 解析法

解析法就是用数学上的积分法或积分变换等方法直接求数学模型的解，其解称为解析解，它是数学模型的精确解。在《地下水动力学》中学到的裘布依公式、泰斯公式、雅可布公式等都是求相应数学模型的解析解。这种解的最大优点是把表征地下水运动规律的变量与激发条件、时空变化包含在一个表达式内，这样就便于分析地下水运动规律。正如在本章第四节将要讲到的，由于地下水运动的交换条件、赋存条件极为复杂，大大制约了解析解的应用。

#### 2. 数值模拟法

数值模拟法就是在电子计算机上用离散化的方法解数学模型，简称为数值法。求得的解为数值解，其解为数值的集合，它是数学模型的近似解。由于数值模拟法可以较好地反映复杂条件下的地下水流状态，具有较高的仿真度，因此在理论和实际应用方面都发展较快。特别是70年代以来，随着微型计算机的出现，数值法的发展和应用已越来越深入广泛了。数值法的研究已从单一含水层到多层含水层，从二维流到三维流，从水量到水质，从饱和流到非饱和流，且已成为当前地下水资源评价中的重要方法，也是本书要研究的主要内容。

## 第二节 地下水运动的基本定律

地下水的运动虽然错综复杂，但它总是服从两条基本原理：质量守恒原理和能量守恒及转换定律。质量守恒原理是客观世界的普遍规律，具体应用到地下水领域中称为水均衡原理。在研究地下水运动时，反映能量守恒及转换定律是由实验而得的经验公式——达西定律。

### 1. 水均衡原理

在地下水资源评价中，经常要建立以地下水盆地为单元的水均衡，它包括上游断面的流入量、下游断面的流出量、垂直入渗与蒸发、抽水与回灌（注水）、盆地内因地下水位

变化而引起的贮存量的增减量等。这些量可概括为两类：地下水的收支量与积累（贮存量的增加或减少）量。收入大于支出，贮存量就增加；反之则减少。因此水均衡原理可概括为

$$\text{流入量} - \text{流出量} = \text{贮存量的变化量} \quad (1-1)$$

在天然的含水层中，由于地下水的温度变幅甚小，地下水的密度变化不大，因此在绝大多数情况下，可以用体积守恒近似代替质量守恒，即用

$$\text{流入水量的体积} - \text{流出水量的体积} = \text{贮存水量体积的变化量} \quad (1-1)'$$

代替式 (1-1)。

## 2. 达西定律

如以  $Q$  表示地下水流量， $K$  表示含水层渗透系数，地下水在渗流途径长度  $l$  上水头变化  $\Delta H$ ，则达西定律为

$$Q = K \cdot \frac{\Delta H}{l} \cdot A \quad (1-2)$$

$A$  为地下水流的过水断面的面积。现在来分析一下式 (1-2) 的能量意义。

若以  $\gamma$  表示地下水的重率， $p$  代表地下水在某点处的静水压力， $z$  表示某点所处的位置高度， $u$  代表地下水实际流速， $g$  代表重力加速度，于是可写出伯努里方程

$$\frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} + z = \text{const (常数)}$$

地下水流的实际流速甚小， $\frac{u^2}{2g}$  可忽略不计，因此，伯努里方程可简化为

$$\frac{p}{\gamma} + z = \text{const}$$

由于水的重率近似等于 1，因此含水层中某一点的静水压力水头可以用该点以上的地下水水柱高度来表示。含水层中某一点上压力水头与标高  $z$  之和实际上就是该点所测得的地下水水位。由此可知，含水层中任一点地下水能量的大小，可以用该点的水头  $H$  来表示。由于含水层的孔隙很小，水又具有粘滞性，因此地下水在含水层中运动时受到的阻力是很大的，在运动中要不断克服摩擦阻力做功，从而消耗能量。于是代表能量的地下水水头就要不断减少。达西定律恰好说明水头损失（即能量损失）与渗透速度（ $Q/A=q$ ）及渗流途径长度（ $l$ ）成正比。当渗流途径取微元时，即得达西定律的微分表达式

$$q = K \cdot \text{grad} H \quad (1-3)$$

鉴于达西定律的重要性，下面将从更为一般的情形研究达西定律的表达式。为了方便，以二维流为例，但所得结论可直接推广至三维流。

设地下水为  $oq$  方向（图 1-1），含水层为各向异性，主渗方向分别为  $\overrightarrow{o\xi}$  与  $\overrightarrow{o\eta}$ ，渗透系数分别为  $K_{\xi\xi}$  与  $K_{\eta\eta}$ ，计算参考系为  $\{o-xy\}$ 。由达西定律可得：

$$q_{\xi} = -K_{\xi\xi} \frac{\partial H}{\partial \xi}$$

$$q_{\eta} = -K_{\eta\eta} \frac{\partial H}{\partial \eta}$$

对计算参考系来讲，则有

$$\begin{aligned} q_x &= q_t \cos \alpha + q_n \sin \alpha \\ q_y &= q_n \cos \alpha - q_t \sin \alpha \end{aligned}$$

进一步写成

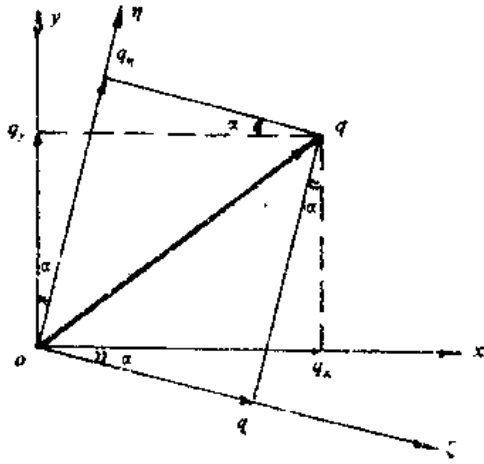


图 1-1

$$\begin{cases} q_x = -K_{t\xi} \frac{\partial H}{\partial \xi} \cos \alpha + K_{n\eta} \frac{\partial H}{\partial \eta} \sin \alpha \\ q_y = -K_{n\eta} \frac{\partial H}{\partial \eta} \cos \alpha + K_{t\xi} \frac{\partial H}{\partial \xi} \sin \alpha \end{cases} \quad (1-1)$$

根据导数的概念可知

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \xi} &= \frac{\partial H}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial H}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial H}{\partial \eta} &= \frac{\partial H}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial H}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{aligned}$$

于是可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \xi} &= \frac{\partial H}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial H}{\partial y} \sin \alpha \\ \frac{\partial H}{\partial \eta} &= \frac{\partial H}{\partial x} \sin \alpha + \frac{\partial H}{\partial y} \cos \alpha \end{aligned}$$

将其代入式 (1-1) 中则有

$$\begin{aligned} q_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} (K_{t\xi} \cos^2 \alpha + K_{n\eta} \sin^2 \alpha) \\ &\quad - \frac{\partial H}{\partial y} (K_{n\eta} - K_{t\xi}) \sin \alpha \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

若令

$$\begin{aligned} K_{xx} &= K_{t\xi} \cos^2 \alpha + K_{n\eta} \sin^2 \alpha \\ K_{xy} &= (K_{n\eta} - K_{t\xi}) \sin \alpha \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

进一步简化可得

$$K_{xx} = \frac{1}{2} (K_{t\xi} + K_{n\eta}) + \frac{1}{2} (K_{t\xi} - K_{n\eta}) \cdot \cos 2\alpha$$

于是

$$q_x = -K_{xx} \frac{\partial H}{\partial x} - K_{xy} \frac{\partial H}{\partial y}$$

同理可求得

$$q_y = -K_{yx} \frac{\partial H}{\partial x} - K_{yy} \frac{\partial H}{\partial y}$$

其中

$$\begin{aligned} K_{yx} &= K_{xy} \\ K_{yy} &= \frac{1}{2} (K_{t\xi} + K_{n\eta}) + \frac{1}{2} (K_{n\eta} - K_{t\xi}) \cdot \cos 2\alpha \end{aligned}$$

按照向量的概念, 渗透速度  $q$  可写成

$$q = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix} = - \begin{pmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (1-5)$$

令

$$K = \begin{pmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{pmatrix} \quad (1-6)$$

则  $K$  为一对称矩阵, 定义为渗透系数张量。只有当  $\alpha=0$  时, 即计算参考系与实际的主渗方向相一致时, 才有  $K_{xy}=K_{yx}=0$ , 于是

$$q = - \begin{pmatrix} K_{xx} & 0 \\ 0 & K_{yy} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial y} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} K_{xx} \frac{\partial H}{\partial x} \\ K_{yy} \frac{\partial H}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix}$$

由上述分析可知, 对于各向异性的含水层, 达西定律的一般形式应写成

$$q = -K \cdot \text{grad} H \quad (1-7)$$

且只有在计算参考系的坐标轴与实际主渗方向一致时, 达西定律才能具有通常意义下的数量表达形式。在数值模拟计算中, 要特别注意这一点, 否则会造成计算上的麻烦。至于在数值模拟计算中如何处理这些问题, 在以后的章节中将要讨论。

### 第三节 地下水流的解析解及其应用的局限性

《地下水动力学》的全部内容, 都在于研究根据概化的水文地质模型如何建立其数学模型并求其解析解 (分析解)。由于解析解可以将描述地下水运动的各种物理量, 例如水头 (或降深)、水量及各种参数反映在一个表达式中, 这样就能用数学分析的方法去研究各个量之间相互联系与相互制约的内在规律。因此, 解析解是十分有用的。但由于自然界地下水流运动状态十分复杂, 往往与解析解的条件要求相差甚远, 致使它的应用受到了极大的限制。

#### 1. 难以适应复杂的水文地质几何边界

地下水流的解析解中有两个基本模型, 这就是读者已熟知的模型

$$(1) \quad \begin{cases} T \left( \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} \right) = S \cdot \frac{\partial H}{\partial t} & t > 0, r > 0 \\ H(r, t) = H_0 & t = 0, r > 0 \\ H(r, t) = H_0 & t > 0, r \rightarrow \infty \\ \lim_{r \rightarrow 0} \left( r \frac{\partial H}{\partial r} \right) = \frac{Q}{2\pi T} \text{ (常量)} & t > 0 \end{cases}$$

与模型

$$(II) \begin{cases} T \left( \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} \right) = S \frac{\partial H}{\partial t} & t > 0, 0 < r < R \\ H(r, t) = H_0 & t = 0, 0 \leq r \leq R \\ H(r, t) = H_0 & t > 0, r = R \\ \lim_{r \rightarrow 0} \left( r \frac{\partial H}{\partial r} \right) = \frac{Q}{2\pi T} \text{ (常量)} & t > 0 \end{cases}$$

前一个模型的解为

$$H = H_0 - \frac{Q}{4\pi T} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{u} du \quad (1-8)$$

其中

$$\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{u} du = -0.577216 \cdot \ln u + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n \cdot n!} \right) u^n = W(u)$$

而后一个模型的解为

$$H = H_0 - \frac{Q}{2\pi T} \left[ \ln \frac{R}{r} - 2W(\bar{r}, \bar{t}) \right] \quad (1-9)$$

其中

$$\bar{r} = \frac{r}{R}$$

$$\bar{t} = \frac{Tt}{SR^2}$$

式(1-8)称为承压非稳定流的泰斯公式,它的近似式为雅各布公式。式(1-9)当 $t$ 足够大时,可获得计算井壁水位的承压稳定流裘布依公式

$$H_w = H_0 - \frac{0.366 Q}{T} \lg \frac{R}{r_w} \quad (1-10)$$

由上述所给模型可知,式(1-8)适合于无限大定水头补给边界,式(1-9)或式(1-10)则适合于具有圆形(半径为 $R$ )的定水头补给边界。但在自然界很难找到无限大的定水头补给边界,也难于找到具有半径为 $R$ 的圆形定水头补给边界,而实际的几何边界总是介于二者之间,此时前述两个模型则无法求得解析解。对于有界的含水层,由于前述两个模型都是线性的,因此可以利用叠加原理(即反映法)求解。但在自然条件下也很难找到严格的直线隔水边界、直线供水边界及对扇形含水层应用叠加原理所需要的边界夹角。实际中的水文地质问题,虽然经过一定的概化可以应用式(1-8)、式(1-9)或式(1-10),但大多数的实际水文地质条件将被严重歪曲。因此,对于复杂的几何边界,难以应用解析解。

以上是针对承压含水层而言的。对于潜水含水层,由于基本偏微分方程的非线性,不仅难于适应复杂的水文地质几何边界,而且不作更多的概化,连叠加原理也无法应用。

## 2. 难以描述含水层的非均质性

由于地质环境的变化,自然界的含水层几乎都是非均质的。此时的数学模型,比如(I)的基本偏微分方程应写成

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( T \frac{\partial H}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} T \frac{\partial H}{\partial r} = S \frac{\partial H}{\partial t}$$

或者写成

$$T \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{\partial H}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{T}{r} \frac{\partial H}{\partial r} = S \frac{\partial H}{\partial r} \quad (1-11)$$

由于  $\frac{\partial T}{\partial r}$  的存在, 不论是 (I) 的定解条件还是 (II) 的定解条件都无法求得式(1-11)

的解析解。

### 3. 难以处理含水层中的线状补给及局部的面状补给

在潜水含水层中, 渠道及河流入渗补给 (河流与地下水位脱节) 可以构成线状补给源; 地表水体 (湖泊、池塘等) 的淋滤式补给及部分地段的渠 (井) 灌回归水量等都可以构成局部面状补给。在有越流的承压含水层中, 由于弱透水层的不稳定与非均质性, 也可以构成对目的含水层的线状补给或面状补给。不论何种情形, 都将导致在描述地下水运动规律的基本偏微分方程中增加一项关于空间变量与时间 (也可以与时间无关) 的源汇项。即使定解条件取得非常典型, 也难以求得此类水文地质问题的解析解。当然, 现有典型模型的解析解也无法用来描述此类复杂条件下地下水的运动规律。

### 4. 难以克服含水层不同地段的各向异性

在研究区域内, 如果含水层的主渗方向保持不变, 只要将计算参考系的坐标轴选取得与含水层主渗方向相一致, 在简单的定解条件下, 解析解还是可以求得的。在实际中, 由于河流变迁及地质作用, 往往在研究区内致使主渗方向随着空间变化。由于解析解要求在一个研究区内只能选择一个计算参考系, 因此无法建立描述与空间变量有关的各向异性含水层中地下水运动规律的数学模型。

实际上的水文地质模型要复杂得多, 不仅边界条件几何形状复杂, 而且物理性质也很复杂 (既非单一的定水头边界, 也非单一的流量边界, 而是交替出现或者是二者的某种组合, 比如线性组合)。就含水层本身来讲, 既是非均质的, 也可以是各向异性的; 就源汇来讲可以是线状的, 也可以是局部面状的, 还可以是二者同时存在。因此, 用简单模型的解析解表征复杂条件下地下水的运动规律, 其仿真度是很低的。由于这些原因, 随着电子数字计算机的发展, 数值模拟方法在研究地下水运动规律中得到了广泛的应用, 尤其在解决复杂条件下的水文地质问题中, 充分显示了数值模拟方法的灵活性与高仿真度。

## 第四节 数 值 模 拟

上节已经指出, 只有在一些简单的特殊情况下才能求得地下水流数学模型的解析解。而在解决复杂水文地质问题时, 就必须借助于数值模拟方法以求其近似解, 或称为数值解。离散化方法就是各种分布参数模型数值解的基本方法。

### 1. 离散化方法

下面通过一个例子说明离散化方法的实质。

假定研究的问题是求一具有均匀垂直补给的矩形区域的入渗补给量, 如图1-2所示。设入渗补给量为  $Q_0$ , 则有

$$Q_0 = \epsilon ab$$

$\epsilon$  为入渗强度。

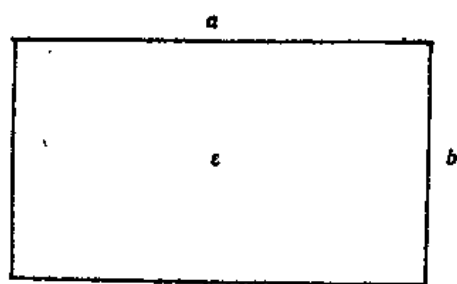


图 1-2

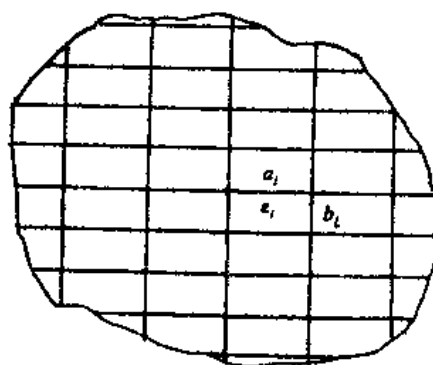


图 1-3

如果问题更复杂一些, 比如入渗强度为  $\varepsilon(x, y)$ , 且区域是极不规则的 (图 1-3), 上式将无法应用。对于这样的问题可采用近似的方法处理。做法是用相互正交的直线组将研究区域分成几个小域。只要小域足够小, 就可以近似地认为在小域上垂向入渗量为常数。第  $i$  个小域的面积若记为  $a_i b_i$ , 入渗量记为  $\varepsilon_i$  (常量), 则全域的垂向入渗补给量可用公式

$$Q_{\text{总}} = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i b_i$$

来计算。

很显然, 小区分得越小, 其结果越精确。象这种把整体剖分成若干个小区域 (或称为小单元), 化整为零, 经过近似处理后, 再积零为整的方法, 就称为离散化的方法。

以上是通过一个简单的例子说明离散化的一般方法, 但将该法应用于求解地下水流的数学模型, 情况要复杂得多, 也是本书今后要讨论的主要内容。

## 2. 用离散化方法求解地下水流数学模型的步骤

利用上述离散化的方法求解地下水流模型时, 可按以下步骤进行。

(1) 将整个研究区域, 按照一定的模式进行剖分以形成若干个小单元。对于非稳定流, 也要将计算时间按照一定的要求分成若干个小时段。

(2) 一个小单元可以看作是一个地下水的小均衡域。之后, 再按照一定的模式在小单元上定义一个特征点, 这个特征点上的各种物理量, 比如水头、渗透系数、给水度、贮水系数、垂向入渗系数、越流系数等作为小单元的代表值。特征点通常称为结点、节点或点元。

(3) 在剖分的基础上, 从描述地下水运动的基本微分方程出发, 通过离散化的方法, 建立一个小时段内结点之间制约各种物理量的关系式, 这种关系式一般表现为代数方程。

(4) 利用定解条件, 建立在一个小时段内处于边界上的点元与内部点元间的关系式, 这种关系式一般也表现为代数方程。

(5) 求解由上述两步构成的方程组, 这个方程组一般表现为含有水头的封闭线性方程组。通过求解这个方程组, 就可得到某一时刻渗流区域上水头的集合  $\{H\}$ 。集合  $\{H\}$  就是渗流区域上某一时刻地下水流场的近似解。小单元剖分得越小,  $\{H\}$  的仿真度越高。

(6) 若拟计算下一时刻的水头集合  $\{H\}$ , 再重复 3、4、5 几步即可。

由于建立封闭线性方程组的方法不同, 也就产生了各种离散化的方法。本书将重点讨论有限差分法与有限元法。

## 第二章 有限差分法

### 第一节 基本概念

以连续性原理(质量守恒)与达西定律(能量转换)为基础,对任何复杂的地下水流系统都可以建立其相应的数学模型(支配地下水运动的微分方程及决定其解的初、边值条件)。但数学模型(定解问题)怎样求解,常取决于地下水流系统水文地质条件能够概化的程度。一般地讲,只有当渗流区域的几何形状比较简单且含水层为均质的才能获得其解析解。对于一个复杂的地下水盆地,大均衡有助于弄清地下水资源的总量,无疑是十分有用的,但其计算结果却不能反映出地下水盆地流场分布及任一点水头随时间的变化规律。有限差分法(也包括有限元法)在某种近似程度上,是一种能够解决非均质、各向异性及复杂几何边界的地下水流系统的模拟问题,而且计算起来又十分简便。尤其自60年代以来,由于电子数字计算机的应用,使得有限差分法在地下水流系统的资源计算中,得到了迅速发展与广泛应用。

#### 一、离散化

有限差分法解地下水流系统的实质,是把要研究的渗流区域(一个地下水盆地或是含水层的某一部份)按一定的方式剖分(离散)成许多但有限的小均衡域。在一定的精度要求下,每个小均衡域内各种参数视为常数,小均衡域内的水头以其中心的水头为其代表,相邻小均衡域间的水头变化近似看作是线性的。把所要研究的渗流区域按一定方式剖分成许多但有限的小均衡域称为对渗流区域的离散化。若以二维渗流区域为例,最简单的剖分是用两组相互正交的平行线把渗流区域剖分成许多矩形小均衡域(图2-1)。在剖分时约定:第一类边界从小均衡域的中心经过;第二类边界与小均衡域的边界重合。小均衡域的中心叫节点或结点,可用适当的方法标定小均衡域及相应节点的编号。习惯作法是,将横向的网格叫行,另一个方向叫列,行与列均顺序编号。于是位于第 $j$ 行与第 $i$ 列相交处的小均衡域及节点统一记为 $(i, j)$ 。沿行与列的网格格距用 $\Delta x$ 、 $\Delta y$ 表示,叫空间步长。对于二维非稳定流来讲,可取第三个坐标为 $t$ ,不妨令其指向自书面向上,若以 $\Delta t$ 表示时间间隔,将二维网格按 $\Delta t$ 向上重复而形成三维网格系,此时的小均衡域为一立方体,位于第 $m$ 层的小均衡域及节点统一记为 $(i, j, m)$ 。

有限差分法所要计算的是 $(i, j)$ 或 $(i, j, m)$ 的近似值,而不是要计算出地下水流系统解析表达式的值(它代表问题的精确解)。换句话讲,有限差分法在于求出地下水流系统离散点 $(i, j)$ 或 $(i, j, m)$ 上的近似值 $u_{i,j}$ 或 $u_{i,j,m}$ 的集合 $\{u\}$ ,而不是精确解 $H(x, y, t)$ 。 $\{u\}$ 与 $H$ 是有差别的,这种差别不仅取决于计算方法本身的精度,还取决于空间步长 $\Delta x$ 、 $\Delta y$ 及时间步长 $\Delta t$ 的选择。究竟采用多大的空间步长及时间步长才能达到一定的精确度,通常是以直观和经验为基础的,这是因为在实际工作中进行误差估计是难以办到的(当然在理论上是可以做到的)。如果在计算前无法确定出合理的空间步长与时间



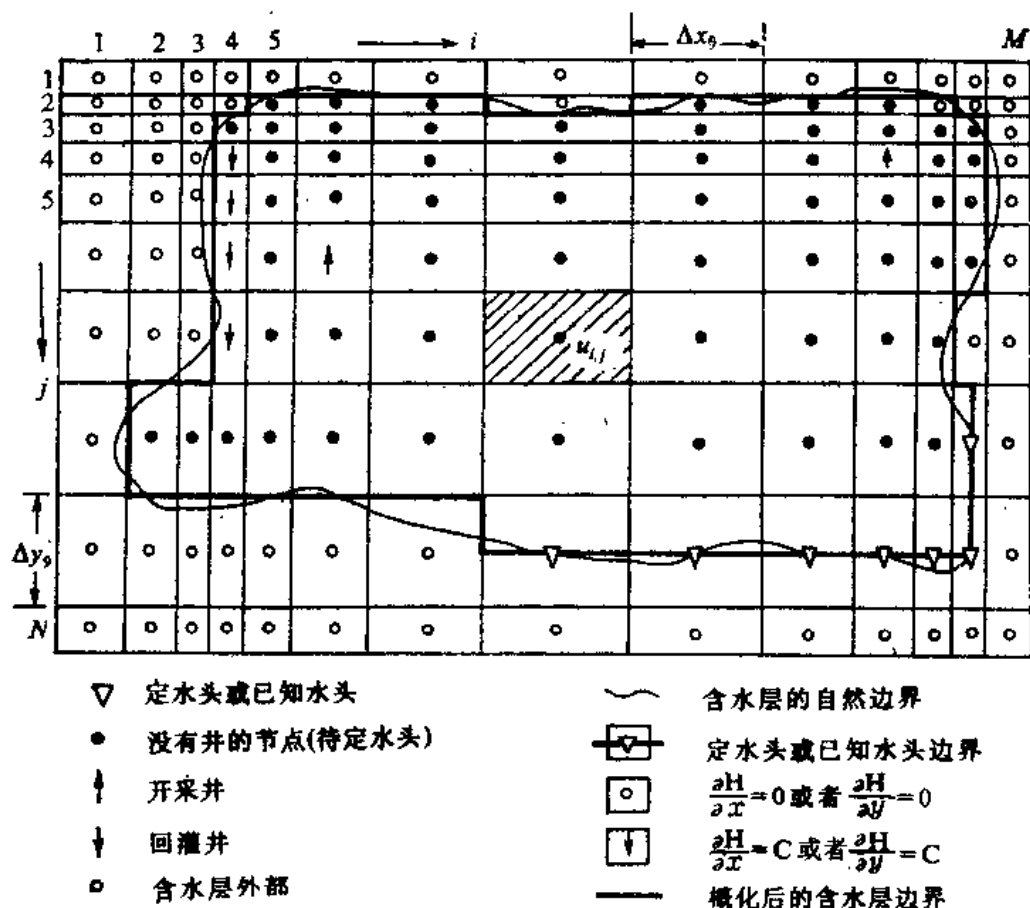


图 2—1

步长，不妨先采用两套不同网格（其中一套是另一套的加密）分别计算其相应节点上的近似解，且比较相同离散点上的值。假若两种网格点近似值之差是计算要求所允许的，那就表明所选网格与时间步长是合适的，否则应加密网格或缩短时间步长，直到满足要求为止。

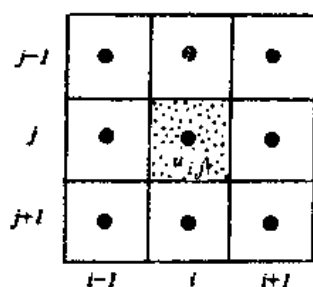


图 2—2

## 二、地下水流的有限差分方程

现从图2—1中取出一个小均衡域如图2—2所示。在不影响弄清基本概念的前提下再做如下假定：(1) 地下水流为承压的；(2) 小均衡域除侧向径流外，无其它流量交换；(3) 网格沿行及列分别为等距的，但行距与列距可以不等，且分别记为  $\Delta x$  与  $\Delta y$ ；(4) 离散点上的近似水头值以  $u$  表示。根据达西定律可算得小均衡域 (i, j) 在某瞬时的四个侧向径流量分别为

沿右侧流入: 
$$K_{i+\frac{1}{2},j} \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} \Delta y \cdot M_{i+\frac{1}{2},j}$$

沿左侧流入: 
$$K_{i-\frac{1}{2},j} \frac{u_{i-1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} \Delta y \cdot M_{i-\frac{1}{2},j}$$

另外两个方向的侧向流入量分别为  $K_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{u_{i,j+\frac{1}{2}} - u_{i,j}}{\Delta y} \Delta x$ 、 $M_{i,j+\frac{1}{2}}$

及  $K_{i,j-\frac{1}{2}} \frac{u_{i,j-\frac{1}{2}} - u_{i,j}}{\Delta y} \Delta x$ 、 $M_{i,j-\frac{1}{2}}$

其中  $K$ 、 $M$  分别表示小均衡域边界上的渗透系数与含水层厚度的平均值，其乘积为导水系数  $T$ 。于是某瞬时流入小均衡域的总侧向径流量  $Q_i$  为：

$$Q_i = T_{i+\frac{1}{2},j} \frac{u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i,j}}{\Delta x} \Delta y + T_{i-\frac{1}{2},j} \frac{u_{i-\frac{1}{2},j} - u_{i,j}}{\Delta x} \Delta y \\ + T_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{u_{i,j+\frac{1}{2}} - u_{i,j}}{\Delta y} \Delta x + T_{i,j-\frac{1}{2}} \frac{u_{i,j-\frac{1}{2}} - u_{i,j}}{\Delta y} \Delta x$$

假定包含某瞬时在内的  $\Delta t$  时段内，由于  $Q_i$  的存在，小均衡域的水头抬高  $\Delta u$ ，相当于贮存量的增加值  $Q_s$  为

$$Q_s = S_{i,j} \frac{\Delta u_{i,j}}{\Delta t} \Delta x \Delta y$$

其中  $S_{i,j}$  为小均衡域  $(i, j)$  的贮水系数。

根据质量守恒（由于在常温条件下地下水的密度可近似为 1，所以质量守恒也可以看作是体积守恒）应有  $Q_i \approx Q_s$ ，于是可得连续性方程的近似式

$$S_{i,j} \frac{\Delta u_{i,j}}{\Delta t} \approx T_{i+\frac{1}{2},j} \frac{u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i,j}}{(\Delta x)^2} + T_{i-\frac{1}{2},j} \frac{u_{i-\frac{1}{2},j} - u_{i,j}}{(\Delta x)^2} \\ + T_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{u_{i,j+\frac{1}{2}} - u_{i,j}}{(\Delta y)^2} + T_{i,j-\frac{1}{2}} \frac{u_{i,j-\frac{1}{2}} - u_{i,j}}{(\Delta y)^2} \quad (2-1)$$

此式称为非均质各向异性的承压含水层二维非稳定流有限差分方程的基本形式。

显然，当  $\Delta x \rightarrow 0$ 、 $\Delta y \rightarrow 0$  及  $\Delta t \rightarrow 0$  时，离散点上地下水头的近似值  $u$  将趋近于真实值  $H$ ，于是得

$$S \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( T_{xx} \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T_{yy} \frac{\partial H}{\partial y} \right) \quad (2-2)$$

这是非均质各向异性承压含水层二维非稳定流的基本偏微分方程。

由此可以看出，有限差分方程实际上是基本偏微分方程的近似表达式，其近似的程度可通过泰勒级数来加以研究。由于地下水头曲面一般来说是连续而光滑的，于是在剖分网格中根据泰勒公式可以写出

$$H_{i+1,j} = H_{i,j} + \Delta x \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)_{i,j} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right)_{i,j} + \dots + \frac{(\Delta x)^n}{n!} \left( \frac{\partial^n H}{\partial x^n} \right)_{i,j} + \dots \quad (2-3)$$

$$H_{i-1,j} = H_{i,j} - \Delta x \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)_{i,j} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right)_{i,j} + \dots \\ + (-1)^n \frac{(\Delta x)^n}{n!} \left( \frac{\partial^n H}{\partial x^n} \right)_{i,j} + \dots \quad (2-4)$$

由式 (2-3) 可得

$$\left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{H_{i+1,j} - H_{i-1,j}}{2\Delta x} + o(\Delta x) \quad (2-5)$$

其中

$$o(\Delta x) = -\frac{\Delta x}{2!} \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right)_{i,j} + \frac{(\Delta x)^2}{3!} \left( \frac{\partial^3 H}{\partial x^3} \right)_{i,j} - \dots$$

由此可知, 用差商  $\frac{H_{i+1,j} - H_{i,j}}{\Delta x}$  代替导数  $\left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)_{i,j}$  所产生的误差就是  $o(\Delta x)$ 。  $o(\Delta x)$  表示误差中占主导地位的是含  $\Delta x$  的项, 叫一阶误差。用差商代替导数时  $o(\Delta x)$  是被舍去的, 因此  $o(\Delta x)$  又称截断误差。在式 (2-5) 中处于  $x$  方向的  $i+1$  号在  $i$  号的“前面”, 因此将

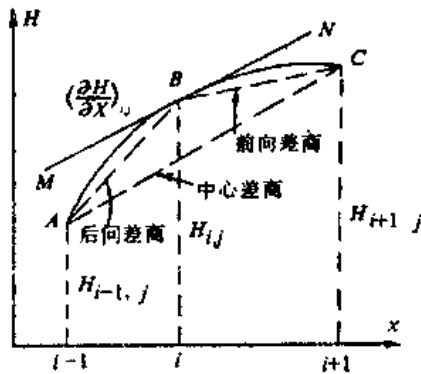


图 2-3

$\frac{H_{i+1,j} - H_{i,j}}{\Delta x}$  叫前向差商。同样可定义后向差商为

$$\left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{H_{i,j} - H_{i-1,j}}{\Delta x} + o(\Delta x) \quad (2-6)$$

其中

$$o(\Delta x) = -\frac{\Delta x}{2!} \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right)_{i,j} + \frac{(\Delta x)^2}{3!} \left( \frac{\partial^3 H}{\partial x^3} \right)_{i,j} - \dots$$

由式 (2-3) 与式 (2-4) 还可以得

$$\left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{H_{i+1,j} - H_{i-1,j}}{2\Delta x} + o[(\Delta x)^2] \quad (2-7)$$

其中

$$o[(\Delta x)^2] = -\frac{(\Delta x)^2}{3!} \left( \frac{\partial^3 H}{\partial x^3} \right)_{i,j} + \frac{(\Delta x)^4}{5!} \left( \frac{\partial^5 H}{\partial x^5} \right)_{i,j} - \dots$$

$\frac{H_{i+1,j} - H_{i-1,j}}{2\Delta x}$  称为中心差商。由上式可见用中心差商代替导数要比后向差商或前向差商代替导数的精度提高了一阶。图 2-3 中  $\widehat{ABC}$  为沿  $x$  方向过  $(i, j)$  点 (即  $B$  点) 地下水水头曲面的剖面,  $\left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)_{i,j}$  就是过  $(i, j)$  点水头曲线的切线  $\overline{MN}$  的斜率。显然  $\overline{AC}$  与  $\overline{MN}$

近似平行, 而  $\overline{AC}$  的斜率恰好是中心差商。

同样, 二阶偏导数也可以用差商来近似代替

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right)_{i,j} = \frac{H_{i-1,j} + H_{i+1,j} - 2H_{i,j}}{(\Delta x)^2} + o[(\Delta x)^2] \\ \left( \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right)_{i,j} = \frac{H_{i,j-1} + H_{i,j+1} - 2H_{i,j}}{(\Delta y)^2} + o[(\Delta y)^2] \end{cases} \quad (2-8)$$

根据式 (2-5)、式 (2-6) 及式 (2-7) 也可以类似地写出用差商近似水头对时间的导数, 比如

$$\left( \frac{\partial H}{\partial t} \right)_{i,j,m} = \frac{H_{i,j,m+1} - H_{i,j,m}}{\Delta t} + o(\Delta t) \quad (2-9)$$

由式 (2-8) 及式 (2-9) 可知, 如果用有限差分方程代替偏微分方程, 将产生误差  $o[(\Delta x)^2 + \Delta t] = o[(\Delta x)^2] + o(\Delta t)$  如果  $o[(\Delta x)^2 + \Delta t]$  在我们所允许的误差范围内, 那么就

可以认为由有限差分方程求得的近似值 $u_{i,j}$ 与 $H_{i,j}$ 是“一样”的。

在渗流区域内(图2—1),每一个节点(当然要考虑到边界条件)都可以建立一个类似于式(2—1)的方程,从而组成有限差分方程组。如果 $\Delta x$ 、 $\Delta y$ 及 $\Delta t$ 取得足够小,可望解此方程组而得到足够精确的近似值。至此,看起来问题的解决似乎是很简单的,但是其中存在着不少困难的数学问题。此处仅需指出的是关于有限差分方程组的解的稳定性和收敛性问题。如以 $u$ 表示差分方程的准确解,而以 $u'$ 表示差分方程的数值解(实际解),显然 $|H-u|$ 就是差分值的截断误差,而 $|u-u'|$ 称为数值解的舍入误差。在渗流区域内如果其解满足 $|H-u|\rightarrow 0$ ,称为差分方程的数值解满足收敛性条件;如果其解满足 $|u-u'|\rightarrow 0$ ,称为差分方程的数值解满足稳定性条件。应用有限差分方程组模拟地下水流系统,就是要在整个渗流区域上求出 $u'$ ,且要求 $|H-u'|$ 小于预先给定的误差范围。如果这个要求不能满足,那么有限差分方程组将不能用来模拟地下水流系统。由于 $H-u'=(H-u)+(u-u')$ ,由此可知用有限差分方程组模拟地下水流系统产生的误差为截断误差与舍入误差之和。如何选择有限差分方程的形式,使有限差分方程组模拟地下水流系统时能满足关于收敛性与稳定性的要求,将在以后各节中逐步讨论。但限于本书的篇幅,只能给出应有的结论。

### 三、三种主要差分格式

在式(2—1)中,如果“ $\approx$ ”号左端的 $\Delta u_{i,j}$ 用 $u_{i,j,m+1}-u_{i,j,m}$ 代替时,那么“ $\approx$ ”号右端的 $u$ 值该如何标记时间呢?一般处理方法是取加权平均值,且将“ $\approx$ ”号换成“ $=$ ”,即得

$$\begin{aligned} S_{i,j} \frac{u_{i,j,m+1}-u_{i,j,m}}{\Delta t} = & \theta \left\{ T_{i+\frac{1}{2},j} \frac{u_{i+1,j,m+1}-u_{i,j,m+1}}{(\Delta x)^2} \right. \\ & + T_{i-\frac{1}{2},j} \frac{u_{i-1,j,m+1}-u_{i,j,m+1}}{(\Delta x)^2} + T_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{u_{i,j,m+1}-u_{i,j,m+1}}{(\Delta y)^2} \\ & \left. + T_{i,j-\frac{1}{2}} \frac{u_{i,j,m+1}-u_{i,j,m+1}}{(\Delta y)^2} \right\} \\ & + (1-\theta) \left\{ T_{i+\frac{1}{2},j} \frac{u_{i+1,j,m}-u_{i,j,m}}{(\Delta x)^2} + T_{i-\frac{1}{2},j} \frac{u_{i-1,j,m}-u_{i,j,m}}{(\Delta x)^2} \right. \\ & \left. + T_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{u_{i,j,m}-u_{i,j,m}}{(\Delta y)^2} + T_{i,j-\frac{1}{2}} \frac{u_{i,j,m}-u_{i,j,m}}{(\Delta y)^2} \right\} \quad (2-10) \end{aligned}$$

其中 $0 \leq \theta \leq 1$ ,称为权系数。取不同的 $\theta$ 值,由式(2—10)就可得出不同的差分格式(所谓“格式”就是一种方案)。在应用有限差分方法模拟地下水流系统时,常取

- (1)  $\theta=0$ ,称为显式差分格式;
- (2)  $\theta=1$ ,称为隐式差分格式;
- (3)  $\theta=\frac{1}{2}$ ,称为中心差分格式或对称差分格式。

上述格式称为有限差分法的三种主要差分格式

## 第二节 承压一维稳定流

### 一、一个简单水文地质模型的有限差分方程组

图2—4是一个简单而理想的河间地块水文地质模型。在0与 $l$ 处有两条长而直且相互平

行的河流切穿了一承压含水层。含水层为均质各向同性，它的顶、底板是水平的，厚度为  $M(m)$ ，渗透系数为  $K(m/d)$ ，顶板为弱透水层，降水入渗通过弱透水层向承压含水层补给，补给强度为  $W(m^3/m^2 \cdot d)$ 。两条河流的水位分别为  $H_0$  与  $H_l$ ，且不随时间变化。现在研究这个理想模型的承压水水头在  $0 \sim l$  上的分布。

图2—4的数学模型为

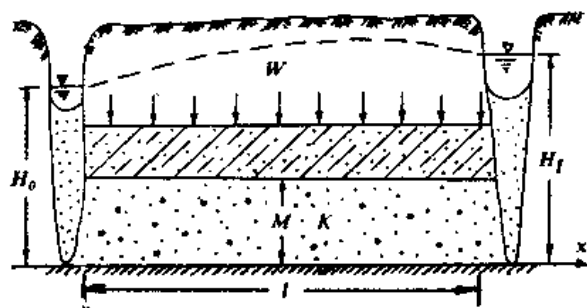


图 2—4

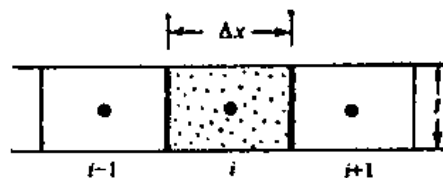


图 2—5

$$\begin{cases} T \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + W = 0 & 0 < x < l \\ H|_{x=0} = H_0 \\ H|_{x=l} = H_l \end{cases} \quad (2-11)$$

其中  $T = KM$ ，解析解为

$$H(x) = -\frac{W}{2T}x^2 + \left( \frac{H_l - H_0}{l} + \frac{Wl}{2T} \right)x + H_0 \quad (2-12)$$

现在用有限差分法计算  $H$ （忽略其与  $u$  及  $w$  的差别）在  $0 \sim l$  上的分布。根据上一节的剖分原则，选择空间步长  $\Delta x = \frac{l}{n}$ ， $0$  与  $l$  分别位于第0号小均衡域与第  $n$  号小均衡域中心，已知水头值  $H_0$  与  $H_l$  恰好是第0号节点与第  $n$  号节点的水头值。第  $i$  号小均衡域如图2—5所示。

由达西定律可知，由第  $i-1$  号小均衡域流进第  $i$  号小均衡域的侧向径流量为  $\frac{H_{i-1} - H_i}{\Delta x} T$ ，而由第  $i$  号小均衡域流至第  $i+1$  号小均衡域的侧向径流量为  $-\frac{H_i - H_{i+1}}{\Delta x} T$ 。

通过弱透水层对第  $i$  号小均衡域的越流补给量为  $W \cdot \Delta x$ 。根据体积守恒，即水均衡原理且忽略差分方程的截断误差则有

$$\frac{H_{i-1} - H_i}{\Delta x} T + W \cdot \Delta x = -\frac{H_i - H_{i+1}}{\Delta x} T$$

化简后得：

$$-H_{i-1} + 2H_i - H_{i+1} = \frac{W(\Delta x)^2}{T} \quad (2-13)$$

这就是第  $i$  号小均衡域的有限差分方程。将式 (2—13) 应用于全部节点时则有

$$\left\{ \begin{array}{l} 2H_1 - H_2 \\ -H_1 + 2H_2 - H_3 \\ \vdots \\ -H_{n-3} + 2H_{n-2} - H_{n-1} \\ -H_{n-2} + 2H_{n-1} \end{array} \right. \begin{array}{l} = \frac{W(\Delta x)^2}{T} + H_0 \\ = \frac{W(\Delta x)^2}{T} \\ \vdots \\ = \frac{W(\Delta x)^2}{T} \\ = \frac{W(\Delta x)^2}{T} + H_l \end{array} \quad (2-14)$$

式(2-14)称为描述承压水头 $H$ 在 $0 \sim l$ 上分布的有限差分方程组。由线性代数知,式(2-14)是一个封闭的线性方程组,因此是可解的。由式(2-14)解出 $H_1 \sim H_{n-1}$ ,就知道了全部节点上的水头值。当 $n$ 无限增多时,就可以根据计算出的水头值绘出一条足够光滑的水头曲线。式(2-14)称为三对角型线性代数方程组,它有两个特点:(1)系数矩阵中的元素仅位于三条对角线上;(2)可以证明系数矩阵不仅对称而且正定。利用这样的特点,可给出一种极为简单的解法。

## 二、解三对角型线性方程组的追赶法

现将式(2-14)的系数矩阵表示成更为一般的形式:

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & & a_n & b_n \end{bmatrix}$$

由于正定对称性, $A$ 可被分解成为两个矩阵之积:

$$A = \begin{bmatrix} \beta_1 & & & & \\ \alpha_2 & \beta_2 & & & \\ & \alpha_3 & \beta_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ & & & & \alpha_n & \beta_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \gamma_1 & & & \\ & 1 & \gamma_2 & & \\ & & 1 & \gamma_3 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & 1 & \gamma_{n-1} \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

利用矩阵相乘及矩阵与矩阵相等的规则,可求得计算 $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ 的递推公式为

$$\begin{cases} \beta_1 = b_1 & \delta_1 = \frac{a_1}{\beta_1} \\ \alpha_i = a_i & \beta_i = b_i - \alpha_i \gamma_{i-1} \\ \gamma_i = \frac{c_i}{\beta_i} & \delta_i = (d_i - \alpha_i \delta_{i-1}) / \beta_i \end{cases} \quad (2-15)$$

或者可以写成

$$\begin{cases} \gamma_1 = \frac{c_1}{b_1} & \delta_1 = \frac{d_1}{b_1} \\ \gamma_i = \frac{c_i}{b_i - \alpha_i \gamma_{i-1}} & \delta_i = \frac{d_i - \alpha_i \delta_{i-1}}{b_i - \alpha_i \gamma_{i-1}} \end{cases} \quad (2-16)$$

$d_i$ 为三对角型线性方程组中第 $i$ 个方程的常数项。以 $x_i$ 表示第 $i$ 个未知数（相当于 $H_i$ ），则

$$x_n = d_n, \quad x_i = d_i - \gamma_i x_{i+1} \quad (2-17)$$

式（2-16）中的 $i$ 由 $1 \sim n$ ，而式（2-17）中的 $i$ 由 $n \sim 1$ ，即它们分别是关于 $i$ 号由小到大与由大至小的递推公式，通常形象地称为“追赶法”，前者为“追”，后者为“赶”。

现以图2-4所示的模型为例。设 $l=1000\text{m}$ ，空间步长取 $100\text{m}$ ， $H_0=10\text{m}$ ， $H_e=20\text{m}$ ， $W=0.005\text{m/d}$ ， $T=100\text{m}^2/\text{d}$ ，由于 $n=10$ ，共有11个节点，而第0号节点与第10号节点的水头是已知的，于是可得到含有9个未知水头的三对角型线性方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & \ddots \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ \vdots \\ H_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ \vdots \\ 20.5 \end{pmatrix}$$

应用递推公式计算的全部过程载于表2-1

表 2-1

节点编号 $i$	三对角型方程组的系数				递推公式中的系数				水头 $H_i$
	$a_i$	$b_i$	$c_i$	$d_i$	$\alpha_i$	$\beta_i$	$\gamma_i$	$\delta_i$	
1	0	2	-1	10.5	0	2	-0.5	5.25	13.25
2	-1	2	-1	0.5	-1	1.5	$-\frac{1}{1.5}$	$\frac{5.75}{1.5}$	16.00
3	-1	2	-1	0.5	-1	$\frac{1}{1.5}$	$-\frac{1.5}{2}$	$\frac{6.50}{2}$	18.25
4	-1	2	-1	0.5	-1	$\frac{2.5}{2}$	$-\frac{2}{2.5}$	$\frac{7.50}{2.5}$	20.00
5	-1	2	-1	0.5	-1	$\frac{3}{2.5}$	$-\frac{2.5}{3}$	$\frac{8.75}{3}$	21.25
6	-1	2	-1	0.5	-1	$\frac{3.5}{3}$	$-\frac{3}{3.5}$	$\frac{10.25}{3.5}$	22.00
7	-1	2	-1	0.5	-1	$\frac{4}{3.5}$	$-\frac{3.5}{4}$	$\frac{12.00}{4}$	22.25
8	-1	2	-1	0.5	-1	$\frac{4.5}{4}$	$-\frac{4}{4.5}$	$\frac{14.00}{4.5}$	22.00
9	-1	2	-1	20.5	-1	$\frac{5}{4.5}$	0	$\frac{106.25}{5}$	21.25

将本例给出的已知数据代入式（2-12）中，可得

$$H(x) = 10 + 0.035x - 0.000025x^2$$

可用此解析公式验证一下表2-1中根据有限差分法计算的结果。

### 三、流量边界的处理

流量边界就是给定流量的边界，也称第二类边界条件。在给定流量边界条件中最为简

单的是零流量边界。实际上有两种情况都可造成零流量边界：一种是隔水边界；另一种是水力坡度等于零的边界（含水层的导水系数不一定为零，相当于能长期维持而不移动的地下水分水岭）。这两种情形虽然条件不同，但均导致没有地下水流越过边界。因此零流量边界在处理时也有两种办法：一种是令边界上的导水系数（或渗透系数）为零；另一种是令边界上的水力坡度（垂直于边界方向上的法向导数）等于零。

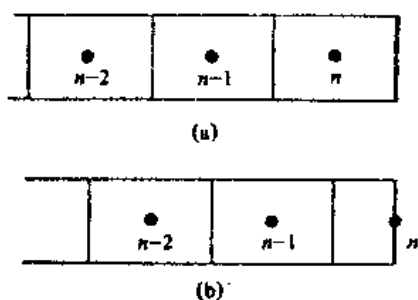


图 2—6

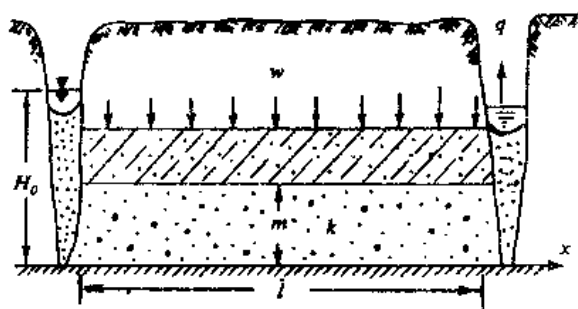


图 2—7

包含第二类边界的小均衡域通常有两种形式（见图 2—6）。当不需要知道边界上的水头值时可采用图 2—6(a) 的形式，小均衡域的边界落在含水层的（概化）边界上；当需要知道边界上的水头值时可采用图 2—6(b) 的形式，第  $n$  号节点落在（概化）边界上。两种作法虽然都能形成零流量边界，但其差分性质是不同的。第一种作法，欲形成水力坡度等于零，可令  $H_n = H_{n+1}$ ，而第二种作法则要令  $H_{n+1} = H_n$ ，以形成水力坡度等于零。前者相当于前向差商，而后者相当于中心差商。第二种作法的截断误差比第一种作法要小一些，但对大范围地下水流系统的模拟来说，这种差异是完全可以不予考虑的。

对于侧向径流量不为零的边界，可先按零流量边界处理，然后将给定的流量再按垂向交换水量的形式加入边界上相应小均衡域的水均衡。

在自然条件下，遇到零流量边界条件的情形是很多的。由于地下水的天然径流量不如地下水头容易观测且能获得较高的观测精度，所以给定流量边界往往不易确定。对大范围地下水流系统模拟，当计算边界不能采用自然边界时，常采用人为给定的流量边界进行近似模拟，虽然有一定的误差，但要比应用给定水头边界“安全”得多。所以流量边界的处理和应用是很重要的。下面再举一个例子，说明流量边界条件的应用。

图 2—7 所示水文地质模型与图 2—4 所示水文地质模型唯一不同之处是，在  $x=l$  处是一个以单位宽度定流量  $q$  为排水量的排水沟，其数学模型为

$$\begin{cases} T \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + W = 0 & 0 < x < l \\ H|_{x=0} = H_0 \\ \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_{x=l} = -\frac{q}{T} \end{cases} \quad (2-18)$$

解析解为 
$$H(x) = H_0 - \frac{1}{2} \frac{W}{T} x^2 - \frac{q-l}{T} x \quad (2-19)$$

假定  $l=1050\text{m}$ ,  $q=3\text{m}^2/\text{d}$ , 其余数据与图 2—4 同。先利用图 2—6 (a) 的形式列出节点  $n$  的有限差分方程



表 2-2

节点编号	三对角型方程组的系数				逆推公式中的系数		水头
$i$	$a_i$	$b_i$	$c_i$	$d_i$	$\gamma_i$	$\delta_i$	$H_i$
1	0	2	-1	10.5	-0.5000000	5.250000	12.00
2	-1	2	1	0.5	0.6666667	3.833333	13.50
3	-1	2	-1	0.5	-0.750000	3.250000	14.50
4	1	2	-1	0.5	-0.800000	3.000000	15.00
5	-1	2	-1	0.5	-0.833333	2.916667	15.00
6	1	2	-1	0.5	-0.857143	2.928371	11.50
7	1	2	1	0.5	-0.875000	3.000000	13.50
8	-1	2	-1	0.5	-0.888889	3.111111	12.00
9	-1	2	-1	0.5	-0.900000	3.250000	10.00
10	-1	1	0	-2.5	0	7.500000	7.50

$$T \frac{H_n - H_{n-1}}{\Delta x} - q + W \cdot \Delta x = 0$$

将有关数据代入得  $-H_9 + H_{10} = -2.5$ 。将表2-1中的第9个方程改换成  $-H_8 + 2H_9 - H_{10} = 0.5$ ，以  $-H_9 + H_{10} = -2.5$  作为第10个方程，连同表2-1中的前8个方程一起，就可得出图2-7所示水文地质模型的有限差分方程组。解方程组的过程及其结果见表2-2

将有关的已知数据代入式(2-19)中，则得

$$H(x) = 10 + 0.0225x - 0.000025x^2$$

可用此公式验证一下表2-2所计算的结果。

### 第三节 潜水一维稳定流

有限差分法应用于潜水与应用于承压水有不同的特点。下面先从一个简单的水文地质模型开始讨论。

#### 一、潜水一维稳定流有限差分方程

图2-8为一个简单且典型的潜水一维稳定流水文地质模型。与图2-4所示水文地质模型的唯一差别是没有作为承压含水层顶板的弱透水层。在裘布依假定下，潜水面高度  $h$  所满足的数学模型为

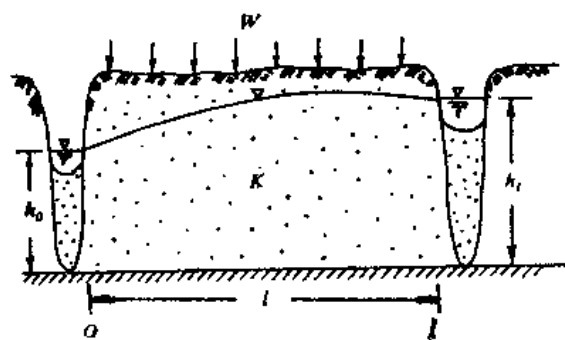


图 2-8

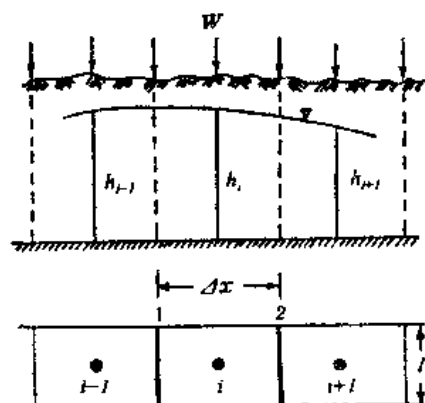


图 2-9

$$\begin{cases} \frac{K}{2} \frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} + W = 0 & 0 < x < l \\ h|_{x=0} = h_0 \\ h|_{x=l} = h_l \end{cases} \quad (2-20)$$

其解为

$$h^2 = h_0^2 + \left( \frac{h_l^2 - h_0^2}{l} + \frac{Wl}{K} \right) x - \frac{W}{K} x^2 \quad (2-21)$$

现在来研究用有限差分法如何来模拟潜水一维稳定流的问题。将  $0 \sim l$  剖分成  $n$  份，空间步长  $\Delta x = \frac{l}{n}$ ， $h_0$  与  $h_l$  恰好为第 0 号节点与第  $n$  号节点的潜水面高度值。现在建立第  $i$  号小均衡域的有限差分方程（图 2—9）。潜水与承压水有一个很大的不同是，潜水含水层的厚度是空间变量的函数。对于断面 1 上含水层的厚度，在节点足够多、空间步长足够小的情况下近似取  $\frac{h_{i-1} + h_i}{2}$ ，于是第  $i-1$  号小均衡域通过断面 1 流进第  $i$  号小均衡域的侧向径流量的近似值为

$$K \frac{h_{i-1} + h_i}{2} \cdot \frac{h_{i-1} - h_i}{\Delta x}$$

同样道理，第  $i$  号小均衡域通过断面 2 流进第  $i+1$  号小均衡域的侧向径流量的近似值为

$$K \frac{h_i + h_{i+1}}{2} \cdot \frac{h_i - h_{i+1}}{\Delta x}$$

根据水均衡原理，第  $i$  号小均衡域的水均衡方程可近似表示为（此处同样忽略了精确值  $h$  与近似值  $h$  的差别）

$$K \frac{h_{i-1} + h_i}{2} \cdot \frac{h_{i-1} - h_i}{\Delta x} + W \cdot \Delta x = K \frac{h_i + h_{i+1}}{2} \cdot \frac{h_i - h_{i+1}}{\Delta x}$$

或者写成

$$(h_i + h_{i-1})(h_i - h_{i-1}) + (h_i + h_{i+1})(h_i - h_{i+1}) = \frac{2W(\Delta x)^2}{K} \quad (2-22)$$

进一步简化可写成

$$-h_i^2 + 2h_i^2 - h_{i+1}^2 = \frac{2W(\Delta x)^2}{K} \quad (2-23)$$

式 (2—22) 或式 (2—23) 称为潜水一维稳定流的有限差分方程，是一个非线性代数方程。若将其应用到  $1 \sim n-1$  的每个节点上，就组成一个封闭的非线性代数方程组。由于代数方程组是非线性的，因此在解算上将有不同的特点。

## 二、潜水有限差分方程组的迭代解法

解非线性代数方程组，常用的方法有以下两种：一种是线性化的方法，即将非线性方程组用线性方程组来近似，由此构成一种迭代格式，逐次逼近所要求的解；另一种是属于求极小值的方法，即由非线性方程组构成一个目标函数，然后采用一种数学方法求满足目标函数取极小值的极小值点，而此极小值点就是非线性方程组的解。在地下水流系统的模拟计算中，有效且适用的方法是迭代解法，它属于线性化的方法。计算步骤如下：

1. 先给  $(h_i + h_{i-1})$  与  $(h_i + h_{i+1})$  一个近似值（初值）用  $(h_i^{(0)} + h_{i-1}^{(0)})$  与  $(h_i^{(0)} + h_{i+1}^{(0)})$

表 2-3

节点 编号 $i$	$h_i^0$ (m)	三角型方程组的系数				递推公式中的系数				$h_i^{(1)}$ (m)	$h_i^{(2)}$ (mm)	$h_i^{(3)}$ (mm)	$h_i^{(4)}$ (mm)	$h_i^{(5)}$ (mm)	$h_i^{(6)}$ (m)	$h_i$ (m)			
		$a_i$	$b_i$	$c_i$	$d_i$	$\alpha_i$	$\beta_i$	$\gamma_i$	$\delta_i$										
1	11	0	44	-23	211	0	14.00000	-0.52273	4.79545	11.56187	11.88	11.60275	5.09	11.59760	0.33	11.59733	0.27	11.59760	11.598
2	12	-23	48	-25	1	-23	35.97721	-0.69488	3.09356	12.94446	27.75	12.97205	10.63	12.96112	0.06	12.96136	0.47	12.96183	12.962
3	13	-25	52	-27	1	-25	34.62800	-0.77972	2.26226	14.17640	3.91	14.17246	13.30	14.15919	0.52	14.15972	0.58	14.16039	14.160
4	14	-27	56	-29	1	-27	34.91756	-0.82081	1.77640	15.28003	36.93	15.21310	12.58	15.23052	0.91	15.23113	0.65	15.23208	15.232
5	15	-29	60	-31	1	-29	35.93551	-0.86266	1.16139	16.27315	62.29	16.21086	10.30	16.20056	1.27	16.20183	0.48	16.20231	16.202
6	16	-31	64	-33	1	-31	37.25765	-0.88572	1.24278	17.16987	5.96	17.09391	7.12	17.08579	1.20	17.08799	0.39	17.08839	17.088
7	17	-33	68	-35	1	-33	38.77110	-0.90273	1.08358	17.98209	76.53	17.90551	4.09	17.90112	1.07	17.90249	0.28	17.90277	17.903
8	18	-35	72	-37	1	-35	40.40430	-0.91574	0.96310	18.71934	63.71	18.65563	1.64	18.65399	0.77	18.65476	0.09	18.65485	18.655
9	19	-37	76	0	781	-37	42.11747	0	13.38971	19.38971	37.89	19.35182	0.20	19.35162	0.10	19.35202	0.07	19.35209	19.352

$h_i^{(0)}$ 表示。于是式(3—22)就被线性化,而式(3—23)成为一个线性代数方程。将被线性化的式(3—23)应用于 $1 \sim n-1$ 节点时,就能得到一个被线性化了的 $n-1$ 阶三对角型线性方程组。

2. 解此三对角型 $n-1$ 阶线性方程组,得 $1 \sim n-1$ 节点上潜水面高度的一组近似值,称为第一次近似值,记为 $h_i^{(1)}$ ,  $i=1, 2, \dots, n-1$ 。

3. 再用 $(h_i^{(0)} + h_i^{(1)})$ 与 $(h_i^{(1)} + h_{i+1}^{(1)})$ 代替式(3—22)中的 $(h_i + h_{i-1})$ 与 $(h_i + h_{i+1})$ ,再次形成 $n-1$ 阶三对角型线性方程组。解此三对角型 $n-1$ 阶线性方程组又可得出 $1 \sim n-1$ 节点上潜水面高度的另一组近似值,称为第二次近似值,记为 $h_i^{(2)}$ ,  $i=1, 2, \dots, n-1$ 。

4. 重复(3)的做法,直至 $m$ 次。当 $\max |h_i^{(m)} - h_i^{(m-1)}| \leq \epsilon$ 时,终止计算。 $h_i^{(m)}$ 就作为所要求的结果,其中 $i=1, 2, \dots, n-1$ 。 $\epsilon$ 叫做迭代收敛的误差限,为了保证计算结果具有毫米级的精度,通常 $\epsilon$ 取 $10^{-5}m$ 。

现在来解算图2—8所示的水文地质模型。计算时仍采用本章图2—1水文地质模型的基本数据。为了示范, $\epsilon$ 取 $10^{-5}m$ 。计算过程载于表2—3中,表2—3中 $h_i^{(0)}$ 是按线性插值给出的。表2—3中详细给出了 $h_i^{(1)}$ 的计算过程, $h_i^{(2)}$ 、 $h_i^{(3)}$ ...的计算从略。迭代至第5次已有 $\max |h_i^{(5)} - h_i^{(4)}| = 0.00065 < 10^{-5}$ ,所以计算终止。

由式(2—21)可得

$$h(x) = +\sqrt{100 + 0.35x - 0.00005x^2}$$

可按此公式检验一下根据有限差分法计算的结果。

## 第四节 承压一维非稳定流

### 一、承压一维非稳定流的有限差分方程组

图2—10是一个理想的承压一维非稳定流水文地质模型。该模型系假定一承压含水层被两条无限长的,且相互平行的直线河流切穿。含水层的顶、底板水平、均质各向同性、且沿河流方向无限延伸。假设两条河流的水位长期保持在同一高度上,设其为 $H_0$ (基准面为 $o-o'$ )。含水层中的水头标高与河流水位一致,也为 $H_0$ 。

假设两条河流的水位于某时刻突然下降到 $o-o'$ ,由于含水层中的水头与河水位形成

一个水头差,于是含水层中的水头随着时间的推移慢慢地下降,直到降至基准面 $o-o'$ ,显然这是一个非稳定运动过程。根据上述假定,此模型在所有垂直河流的剖面中,水头曲线是相同的。当承压水头还未降到 $o-o'$ 面的某个时刻 $t_0$ 水头曲线近似用下式表示:

$$H(x, t_0) = \begin{cases} 2 \frac{x}{l} & 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \\ 2 \left(1 - \frac{x}{l}\right) & \frac{l}{2} < x \leq l \end{cases}$$

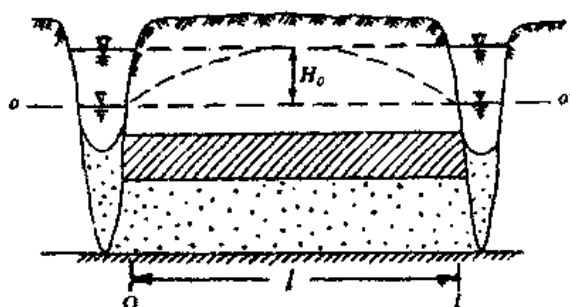


图 2—10

于是图2—10所示水文地质模型的数学模型可写为

$$\begin{cases} T \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = S \frac{\partial H}{\partial t} & 0 < x < l, t > 0 \\ H(x, t) \big|_{t=t_0} = \begin{cases} \frac{2x}{l} & 0 < x < \frac{l}{2} \\ 2 \left( 1 - \frac{x}{l} \right) & \frac{l}{2} < x < l \end{cases} \\ H \big|_{x=0} = H \big|_{x=l} = 0 & t > 0 \end{cases} \quad (2-24)$$

解析解为

$$H(x, t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi x}{l} \cdot \exp \left( -\frac{n^2 \pi^2 T}{S l^2} t \right) \right] \quad (2-25)$$

式中S为弹性贮水系数。

下面来研究当用有限差分法模拟图2—10所示水文地质模型时，所形成的有限差分方程组将具有什么样的特点。与模拟承压一维稳定流一样，也将0~l分成n份，空间步长

$\Delta x = \frac{l}{n}$ 。现取出第i个小均衡域加以研究，建立其有限差分方程（见图2—11）。假设时刻

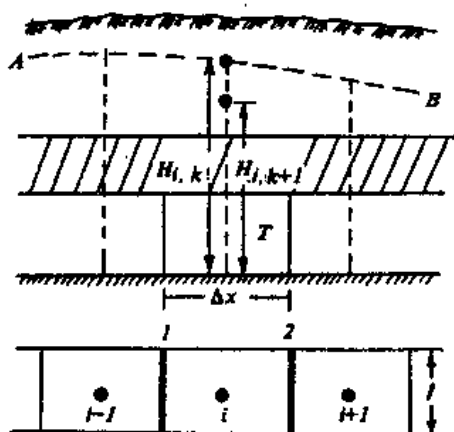


图 2—11

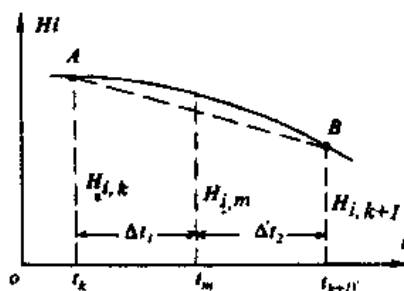


图 2—12

刻地下水头曲线为AB。i节点的水头记为 $H_{i,k}$ ，k称为时阶。 $H_{i,k}$ 表示第i号节点处第k时阶的水头值。由于地下水流处于非稳定状态，因而研究第i号小均衡域的水量均衡时就不能离开时间。假设时刻 $t_k$ 增至 $t_{k+1}$ ，由第i-1号小均衡域经断面1流入到第i号小均衡域的侧向径流量记为 $q_{1,m}$ ，而由第i号小均衡域经断面2流入到第i+1号小均衡域的侧向径流量记为 $q_{2,m}$ 。在 $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ 时间段内，第i号节点的水头假定由 $H_{i,k}$ 下降至 $H_{i,k+1}$ ，水头变化 $H_{i,k} - H_{i,k+1}$ ，相应的贮量变化记为 $q_{i,r}$ 。如果在第i号小均衡域上再无其它水量交换，根据水均衡原理则有：

$$q_{1,m} - q_{2,m} \approx q_{i,r} \quad (2-26)$$

现在来讨论式(2—6)中各项的计算。

#### 1. $q_{i,r}$ 的计算

计算 $q_{i,r}$ 需要知道 $\Delta t_k$ 时段内第i号节点上水头的变化速度 $\frac{\partial H}{\partial t}$ 。一般情形下，水头随

时间的变化并不是等幅的, 那么  $\frac{\partial H}{\partial t}$  该取  $\Delta t_k$  时段内那个时刻的呢? 假设  $t_k \leq t_m \leq t_{k+1}$ ,  $t_m$  时刻第  $i$  号节点的压力水头以  $H_{i,m}$  表示 (图2-12), 由泰勒公式可知:

$$\begin{aligned}\Delta t_1 \frac{\partial H}{\partial t} \Big|_m &= H_{i,m} - H_{i,k} + o[(\Delta t_1)^2] \\ \Delta t_2 \frac{\partial H}{\partial t} \Big|_m &= H_{i,k+1} - H_{i,m} + o[(\Delta t_2)^2]\end{aligned}$$

将两式相加, 得

$$(\Delta t_1 + \Delta t_2) \frac{\partial H}{\partial t} \Big|_m = H_{i,k+1} - H_{i,k} + o[(\Delta t_k)^2]$$

即

$$\frac{\partial H}{\partial t} \Big|_m = \frac{H_{i,k+1} - H_{i,k}}{\Delta t_k} + o[\Delta t_k]$$

这就告诉我们, 用差商  $\frac{H_{i,k+1} - H_{i,k}}{\Delta t_k}$  代替  $\Delta t_k$  时段内任一时刻的水头变化速度, 其截断误差都是  $o(\Delta t_k)$ 。于是  $\Delta t_k$  时间段内, 第  $i$  号小均衡域上由于水头变化而引起地下水流的贮量变化量为

$$q_{i,r} = S \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial H}{\partial t} \Big|_m$$

当  $\frac{\partial H}{\partial t} \Big|_m$  为正时,  $q_{i,r}$  为贮存; 当  $\frac{\partial H}{\partial t} \Big|_m$  为负时,  $q_{i,r}$  为释放。上式进一步可写成近似式

$$q_{i,r} = S \cdot \Delta x \frac{H_{i,k+1} - H_{i,k}}{\Delta t_k} \quad (2-27)$$

$\Delta t_k$  称为时间步长。

## 2. $q_{1,m}$ 与 $q_{2,m}$ 的计算

计算侧向径流量需要知道水力坡度, 由于地下水流处于非稳定运动状态, 因此水力坡度是时间  $t$  的函数。通常  $q_{1,m}$  与  $q_{2,m}$  应取两个时阶的加权平均值:

$$\begin{cases} q_{1,m} = -T\theta \frac{H_{i,k+1} - H_{i-1,k+1}}{\Delta x} - T(1-\theta) \frac{H_{i,k} - H_{i-1,k}}{\Delta x} \\ q_{2,m} = -T\theta \frac{H_{i+1,k+1} - H_{i,k+1}}{\Delta x} - T(1-\theta) \frac{H_{i+1,k} - H_{i,k}}{\Delta x} \end{cases} \quad (2-28)$$

将式 (2-27) 及式 (2-28) 代入式 (2-26) 中并将 “ $\approx$ ” 号换成 “=” 号得

$$\begin{aligned}& \theta(2H_{i,k+1} - H_{i-1,k+1} - H_{i+1,k+1}) + (1-\theta)(2H_{i,k} - H_{i-1,k} - H_{i+1,k}) \\ &= \frac{S(\Delta x)^2}{T \Delta t_k} (H_{i,k} - H_{i,k+1})\end{aligned} \quad (2-29)$$

这就是第  $i$  号小均衡域的有限差分方程。

若以  $H_{i,m}$  表示  $\theta H_{i,k+1} + (1-\theta)H_{i,k}$ ,  $H_{i-1,m}$  表示  $\theta H_{i-1,k+1} + (1-\theta)H_{i-1,k}$  和  $H_{i+1,m}$  表示  $\theta H_{i+1,k+1} + (1-\theta)H_{i+1,k}$ , 则式 (2-29) 可写成

$$-H_{i-1,m} + 2H_{i,m} - H_{i+1,m} = \frac{S(\Delta x)^2}{T \Delta t_k} (H_{i,k} - H_{i,k+1}) \quad (2-30)$$

将式 (2—30) 应用于第  $0 \sim n$  号小均衡域, 由于第 0 号与第  $n$  号节点的水头是已知的, 因此可形成一封闭的  $n-1$  阶线性代数方程组。它的显著特点是含有时间因素。如果取  $x-t$  直角坐标系, 在  $x$  轴上将  $0 \sim l$  分成  $n$  个区间, 若考虑的时间范围为  $t_0 \sim t_u$ , 则把  $t_u$  分成  $m$  个时阶 (图 2—13)。式 (2—30) 中所包含的 5 个水头值如图 2—13 所示。可以看出, 由于  $t_0$  时刻全部节点的水头及  $t_1$  时刻第 0 号与第  $n$  号节点水头均是已知的, 因此求解

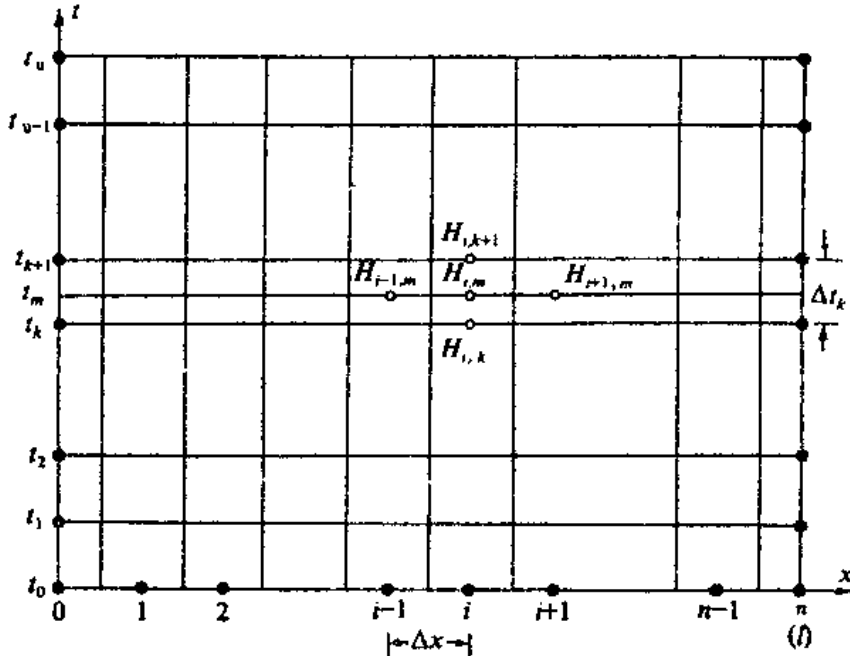


图 2—13

通过由式 (2—30) 组成的  $n-1$  阶封闭线性方程就可得出  $t_1$  时刻  $1 \sim n-1$  号节点的水头值 (假定  $\theta$  已给定)。据此可递推至  $t_u$  时刻。对图 2—10 所示的水文地质模型来讲, 就可了解到  $t_0 \sim t_u$  时刻每一个节点上水头随时间的变化规律。

## 二、三种有限差分格式的应用

1. 令  $\theta=0$ , 由式 (2—29) 可得

$$-H_{i-1,k} + 2H_{i,k} - H_{i+1,k} = \frac{S(\Delta x)^2}{T\Delta t_k} (H_{i,k} - H_{i,k+1})$$

进一步可写成

$$H_{i,k+1} = r(H_{i-1,k} - 2H_{i,k} + H_{i+1,k}) + H_{i,k} \quad (2-31)$$

其中

$$r = \frac{T\Delta t_k}{S(\Delta x)^2} \quad (2-32)$$

式 (2—31) 称为承压一维非稳定流的显式差分格式。

2. 令  $\theta=1$ , 由式 (2—29) 可得

$$-rH_{i-1,k+1} + (2r+1)H_{i,k+1} - rH_{i+1,k+1} = H_{i,k} \quad (2-33)$$

称为隐式差分格式或简隐式差分格式。

3. 令  $\theta=\frac{1}{2}$ , 由式 (2—29) 可得

$$-rH_{i-1,k+1} + 2(r+1)H_{i,k+1} - rH_{i+1,k+1} = rH_{i-1,k} - 2(r-1)H_{i,k} + rH_{i+1,k} \quad (2-34)$$

称为对称差分格式或中心隐式差分格式。

下面分别利用三种差分格式计算图2—10所示的水文地质模型。

第一种格式—显式差分格式

设  $T=1000\text{m}^2/\text{d}$ ,  $\Delta t=0.01\text{d}$ ,  $l=1000\text{m}$ ,  $\Delta x=100\text{m}$ ,  $S=0.01$ 。于是可算得  $r=\frac{1}{10}$ ,

而式 (2—31) 为  $H_{i,k+1}=\frac{1}{10}(H_{i-1,k}+8H_{i,k}+H_{i+1,k})$  当计算至  $k=100$  时, 相当于一天的水头变化值载于表2—4。由于对称关系仅列出了500~900m间各节点的结果。表2—4中所列结果计算起来是很简单的。比如

表 2—4

$k$	5	6	7	8	9
	500m (m)	600m (m)	700m (m)	800m (m)	900m (m)
1	0.9600	0.8000	0.6000	0.4000	0.2000
2	0.9280	0.7960	0.6000	0.4000	0.2000
3	0.9016	0.7896	0.5996	0.4000	0.2000
4	0.8792	0.7818	0.5986	0.4000	0.2000
5	0.8597	0.7732	0.5971	0.3998	0.2000
6	0.8424	0.7643	0.5950	0.3996	0.2000
7	0.8268	0.7551	0.5924	0.3992	0.2000
8	0.8125	0.7460	0.5893	0.3986	0.1999
9	0.7992	0.7370	0.5859	0.3978	0.1998
10	0.7867	0.7281	0.5822	0.3968	0.1996
20	0.6891	0.6486	0.5373	0.3781	0.1939
30	0.6138	0.5830	0.4899	0.3506	0.1821
40	0.5545	0.5263	0.4451	0.3212	0.1679
50	0.5011	0.4761	0.4039	0.2925	0.1534
60	0.4535	0.4311	0.3663	0.2657	0.1395
70	0.4107	0.3906	0.3320	0.2411	0.1267
80	0.3721	0.3639	0.3010	0.2186	0.1149
90	0.3372	0.3267	0.2728	0.1982	0.1042
100	0.3056	0.2907	0.2472	0.1796	0.0944

$$H_{5,1}=\frac{1}{10}(0.8+8\times 1+0.8)=0.9600$$

$$H_{6,2}=\frac{1}{10}(0.6+8\times 0.8+0.96)=0.7960$$

若以同样的参数代入式 (2—25) 可得解析解。取  $x=500\text{m}$ , 给  $t$  以不同的值0.05、0.1、0.2、1.0 d等, 算得解析解载于表2—5。若取  $x=700\text{m}$ , 时间仍取0.05、0.1、0.2、1.0 d等, 利用解析解算得的水头值载于表2—6。

在地下水系统的模拟计算中, 差分解与解析解比较, 若所得的结果相对误差不大于5%, 应该认为差分解是可以接受的。表2—4及表2—5所列的对比较结果应该是满意的。



表 2—5

$r$ (d)	差 分 解 (m)	解 析 解 (m)	绝 对 误 差 (m)	相 对 误 差
0.05	0.8597	0.8404	0.0193	2.3%
0.1	0.7867	0.7743	0.0124	1.6%
0.2	0.6891	0.6809	0.0082	1.2%
1.0	0.3056	0.3021	0.0035	1.2%

表 2—6

$r$ (d)	差 分 解 (m)	解 析 解 (m)	绝 对 误 差 (m)	相 对 误 差
0.05	0.5971	0.5965	0.0006	0.1%
0.1	0.5822	0.5798	0.0024	0.4%
0.2	0.5373	0.5333	0.0040	0.7%
1.0	0.2472	0.2444	0.0028	1.1%

表 2—7

$r$ (d)	差 分 解 (m)	解 析 解 (m)	绝 对 误 差 (m)	相 对 误 差
0.05	0.6000	0.5965	0.0035	0.6%
0.1	0.6000	0.5798	0.0202	3.5%
0.2	0.5500	0.5333	0.0167	3.1%
1.0	0.2484	0.2444	0.0040	1.6%

如果把 $\Delta t$ 增大一些, 取 $\Delta t = 0.05d$ ,  $x$ 仍取700m。此时 $r = 0.5$ , 则有:

$$H_{i,k+1} = \frac{1}{2}(H_{i-1,k} + H_{i+1,k})$$

相应的数值解与解析解的对比载于表2—7。

比较表2—6与表2—7可以看出, 虽然都是 $x = 700m$ 处的结果, 但由于选择了不同的 $\Delta t$ , 相对误差显著不同。虽然两种情况下的相对误差都小于5%, 但随着 $r$ 的增大(即 $\Delta t$ 的增大)相对误差将有明显的增大趋势。比如取 $\Delta t = 0.1d$ , 则 $r = 1$ , 由式(2—31)得

$$H_{i,k+1} = H_{i-1,k} - H_{i,k} + H_{i+1,k}$$

计算结果载于表2—8。由表中所列数据可以看出其差分解产生了严重的振荡现象。

由上述分析可知, 显式差分格式的计算结果能否逼近解析解, 将取决于 $r$ 值的大小。只要 $r$ 的值选取适当, 显式差分格式的数值解就能逼近解析解。

图2—14、图2—15及图2—16是分别取 $r = 0.48$ 、 $r = 0.52$ 及 $r = 1$ 时, 显式差分格式的解与解析解的对比。图中的实线代表解析解, 黑圆点及黑圆点虚线表示差分解。由这三张图中可以看出, 在 $r \leq 0.5$ 时, 差分解与解析解拟合得很好, 一旦 $r > 0.5$ , 差分解很快发生振

表 2-8

$i$ $k$	$x$	5	6	7	8	9
		500m (m)	600m (m)	700m (m)	800m (m)	900m (m)
1		0.6	0.8	0.6	0.4	0.2
2		1.0	0.4	0.6	0.4	0.2
3		-0.2	1.2	0.2	0.4	0.2
4		2.6	-1.2	1.4	0	0.2
5		-5.0	5.2	-2.6	1.6	-0.2
6		15.4	-12.8	9.4	-4.4	1.8
7		-41.0	37.6	-26.6	15.6	-6.2
8		116.2	105.2	79.8	-48.4	21.8
9		-326.6	301.2	-233.4	150.0	-70.2
10		929.0	-861.2	684.6	-453.6	229.2

荡。 $r$ 愈大, 振荡愈剧烈。这种现象叫显式差分格式的不稳定性。可以证明, 对于显式差分格式只有当

$$r = \frac{T \Delta t}{S (\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2} \quad (2-35)$$

时, 才是稳定的。由于显式差分格式的稳定性要受一定条件的制约, 因此称为条件稳定差分格式。

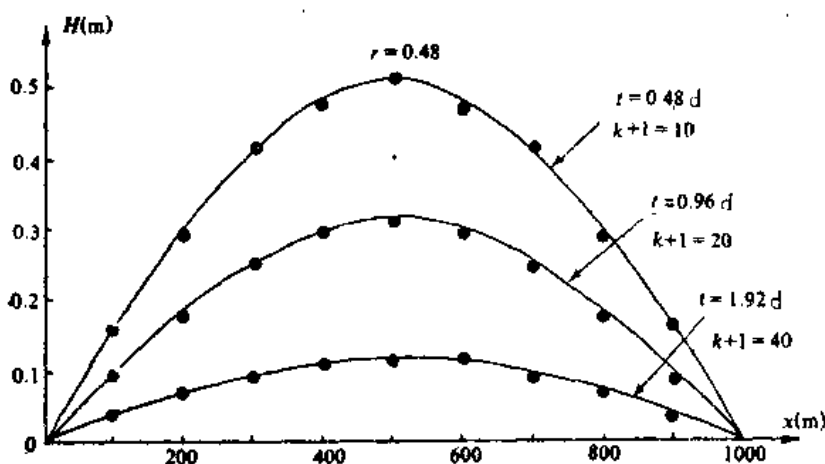


图 2-14  
(据 G. D. Smith)

由式 (2-35) 可知, 当  $T$ 、 $S$  给定之后, 欲使  $r \leq \frac{1}{2}$ , 只能缩短时间步长或增大空间步长, 缩短时间步长意味着计算量增加, 而增大空间步长将意味着牺牲计算精度。由于这样的原因, 显式差分格式的应用就受到了限制。由于显式差分格式的计算不需要解联立方程组, 因此只要条件许可, 显式差分格式还是应该优先采用的。

第二种格式—隐式差分格式 (简隐式差分格式和中心隐式差分格式)。

为了说明隐式差分格式与显式差分格式的不同特点, 特取  $r=1$  (由前已知, 此种情形下显式差分格式是不稳定的)。

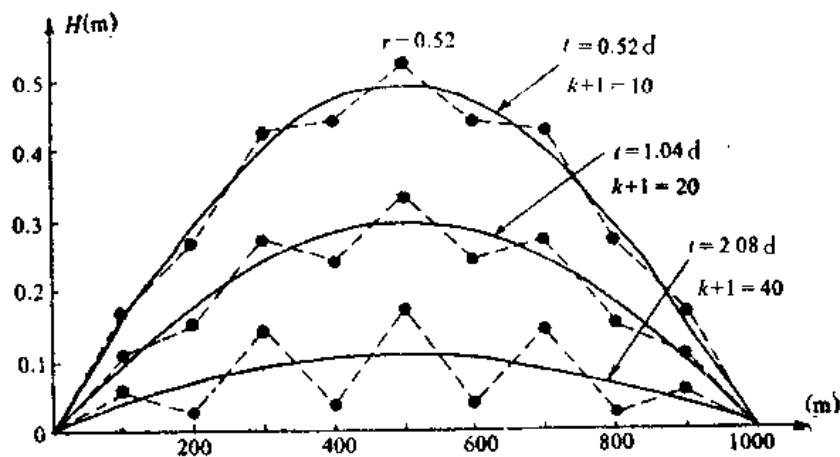


图 2-15  
(据 G. D. Smith)

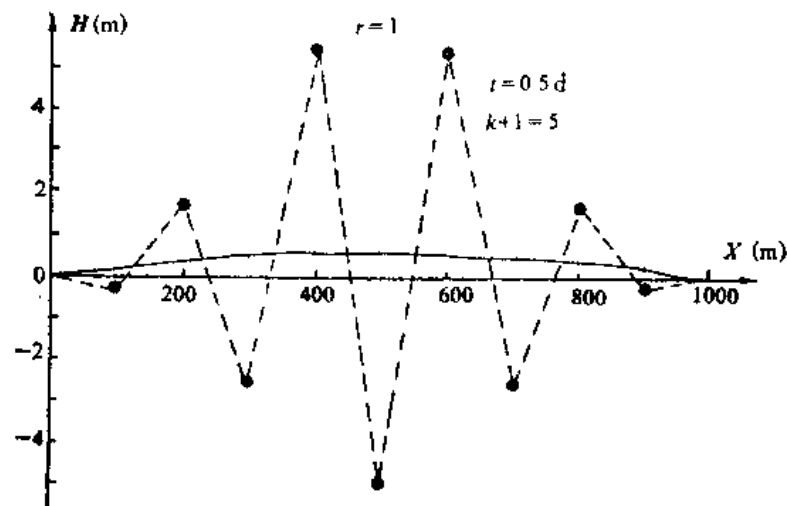


图 2-16

当  $r = 1$  时, 由式 (2-33) 得

$$-H_{i-1,k+1} + 3H_{i,k+1} - H_{i+1,k+1} = H_{i,k}$$

考虑到图2-10所示水文地质模型的对称性, 于是可得:

$$\begin{cases} 3H_{9,k+1} - H_{8,k+1} & = H_{9,k} \\ -H_{9,k+1} + 3H_{8,k+1} - H_{7,k+1} & = H_{8,k} \\ -H_{8,k+1} + 3H_{7,k+1} - H_{6,k+1} & = H_{7,k} \\ -H_{7,k+1} + 3H_{6,k+1} - H_{5,k+1} & = H_{6,k} \\ -2H_{6,k+1} + 3H_{5,k+1} & = H_{5,k} \end{cases} \quad (A)$$

先取  $k = 0$ , 式 (A) 等号右端为 0 时刻的水头值, 左端为  $t_1$  时刻的水头值。解式 (A) 可得  $H_{5,1} \sim H_{9,1}$  的值。之后再把此值代入式 (A) 的右端, 解式 (A) 又可得  $H_{5,2} \sim H_{9,2}$  的值。

由于式 (A) 是三对角型线性方程组, 所以用追赶法求解是很方便的。表2-9记载了 10 个时段的计算结果。

表 2-9

$i$	5	6	7	8	9
$x$	500 (m)	600 (m)	700 (m)	800 (m)	900 (m)
0.1	0.8211	0.7317	0.6740	0.8902	0.1967
0.2	0.7139	0.6603	0.5353	0.3717	0.1895
0.3	0.6356	0.5961	0.4932	0.3480	0.1792
0.4	0.5919	0.5100	0.4519	0.3224	0.1672
0.5	0.5174	0.4901	0.4129	0.2966	0.1516
0.6	0.4694	0.4154	0.3767	0.2718	0.1421
0.7	0.4255	0.4051	0.3154	0.2185	0.1302
0.8	0.3880	0.3687	0.3130	0.2268	0.1190
0.9	0.3531	0.3366	0.2852	0.2069	0.1086
1.0	0.3214	0.3056	0.2598	0.1886	0.0991

对于中心隐式差分格式, 当  $\tau=1$  时由式 (2-31) 得

$$-H_{i-1,k+1} + 4H_{i,k+1} - H_{i+1,k+1} = H_{i-1,k} + H_{i+1,k}$$

从而可得下列线性方程组:

$$\begin{cases} 4H_{1,k+1} - H_{2,k+1} = 2H_{1,k} + H_{2,k} \\ H_{2,k+1} + 4H_{3,k+1} - H_{4,k+1} = H_{2,k} + H_{4,k} \\ -H_{2,k+1} + 4H_{3,k+1} - H_{4,k+1} = H_{2,k} + H_{4,k} \\ -H_{3,k+1} + 4H_{4,k+1} - H_{5,k+1} = H_{3,k} + H_{5,k} \\ -2H_{4,k+1} + 4H_{5,k+1} = 2H_{4,k} \end{cases} \quad (B)$$

表 2-10

$i$	5	6	7	8	9
$x$	500m (m)	600m (m)	700m (m)	800m (m)	900m (m)
0.1	0.7691	0.7381	0.5834	0.3956	0.1989
0.2	0.6921	0.6161	0.5397	0.3789	0.1936
0.3	0.6152	0.5843	0.4902	0.3515	0.1826
0.4	0.5555	0.5267	0.4161	0.3218	0.1683
0.5	0.5019	0.4270	0.4047	0.2932	0.1538
0.6	0.4546	0.4321	0.3672	0.2664	0.1399
0.7	0.4119	0.3916	0.3330	0.2418	0.1270
0.8	0.3733	0.3550	0.3019	0.2193	0.1153
0.9	0.3385	0.3219	0.2738	0.1989	0.1045
1.0	0.3069	0.2918	0.2482	0.1803	0.0918

式 (B) 与 (A) 一样, 也是三对角型线性方程组, 亦可用追赶法求解。表 2-10 记载了 10 个时段的计算结果。图 2-17 绘出了两种隐式差分格式的计算结果与解析解的对比。可以看出, 对称差分格式的数值解与解析解的结果基本一致, 而简隐式差分格式计算的结果精度稍差一些。

以上通过图 2-10 这个典型的水文地质模型较为详细地讨论了三种主要差分格式的应用。

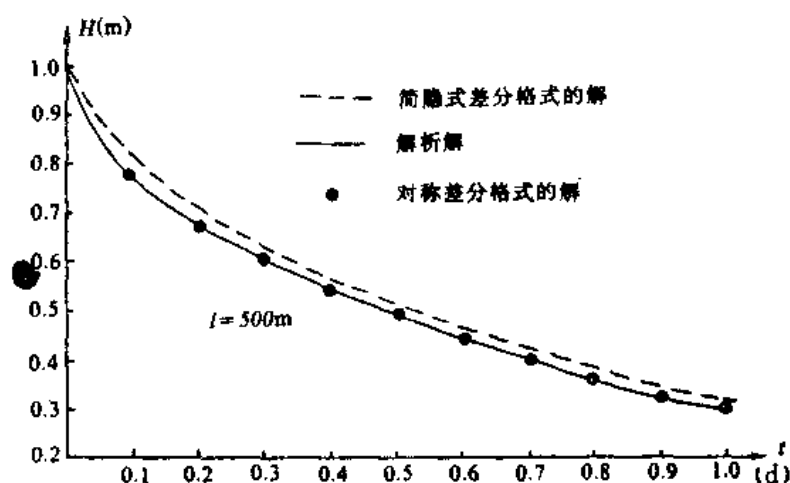


图 2-17

用, 值得指出的是所得结论具有普遍性。

通过上述讨论, 且在理论上可以证明

(1) 当  $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$  时,

取  $r \leq \frac{1}{2(1-2\theta)}$ , 其差分格式是稳定的。这与显式差分格式是条件稳定差分格式的结论是一致的。

(2) 当  $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$  时,  $r$  取任何值, 差分格式都是稳定的, 因此隐式差分格式都是无条件稳定的差分格式。

通常差分格式的稳定性与收敛性是一致的, 因此满足稳定性要求的差分格式一般来说也满足收敛性。

### 三、有限差分方程的迭代解法

对一维地下水系统来讲, 无论是稳定流还是非稳定流, 由于所形成的有限差分方程组都是三对角型方程组, 因此追赶法总是有效的解法。下面介绍一种迭代解法, 具有更广泛的适用性, 而且对潜水计算会带来额外的好处。

以简隐式为例。取  $\theta = 1$ , 则式 (2-29) 可以写成

$$\left( \frac{2T}{\Delta x} + \frac{S\Delta x}{\Delta t_k} \right) H_{i,k+1} - \frac{T}{\Delta x} (H_{i-1,k+1} + H_{i+1,k+1}) - \frac{S\Delta x}{\Delta t_k} H_{i,k} = 0$$

它表示第  $i$  号小均衡域水量的均衡。假定在上式中已经知道了  $k+1$  时阶水头的近似值, 且以  $H_{i,k+1}^{(m)}$ 、 $H_{i-1,k+1}^{(m)}$  及  $H_{i+1,k+1}^{(m)}$  表示。若将其代入上式, 则第  $i$  号小均衡域上的水量将不能均衡, 产生一个水量余数以  $W_i^{(m)}$  表示

$$W_i^{(m)} = \left( \frac{2T}{\Delta x} + \frac{S\Delta x}{\Delta t_k} \right) H_{i,k+1}^{(m)} - \frac{T}{\Delta x} (H_{i-1,k+1}^{(m)} + H_{i+1,k+1}^{(m)}) - \frac{S\Delta x}{\Delta t_k} H_{i,k}$$

现给  $H_{i,k+1}^{(m)}$  一个修正值  $\Delta H_{i,k+1}^{(m)}$ , 使其  $W_i^{(m)} \equiv 0$ , 则由上式可得

$$\left( \frac{2T}{\Delta x} + \frac{S\Delta x}{\Delta t_k} \right) (H_{i,k+1}^{(m)} + \Delta H_{i,k+1}^{(m)}) - \frac{T}{\Delta x} (H_{i-1,k+1}^{(m)} + H_{i+1,k+1}^{(m)}) - \frac{S\Delta x}{\Delta t_k} H_{i,k}$$

$$= \left( \frac{2T}{\Delta x} + \frac{S\Delta x}{\Delta t} \right) \Delta H_{i,k+1}^{(m)} + W_i^{(m)} = 0$$

于是可得

$$\Delta H_{i,k+1}^{(m)} = - \frac{W_i^{(m)}}{\frac{2T}{\Delta x} + \frac{S\Delta x}{\Delta t}} \quad (2-37)$$

$$\text{若令} \quad H_{i,k+1}^{(m+1)} = H_{i,k+1}^{(m)} + \Delta H_{i,k+1}^{(m)} \quad (2-38)$$

则  $H_{i,k+1}^{(m+1)}$  一定可使  $W_i^{(m)} \equiv 0$ , 称为式 (2-36) 被“松弛”了。

如果将  $m$  视为迭代次数, 当  $m=0$  时, 以  $k$  时阶的流场作为迭代时用的第 0 次近似值, 则式 (2-36)、式 (2-37) 及式 (2-38) 就构成了一个完整的迭代计算方案, 通常称为同步迭代法。

当把迭代公式依次用于全部节点, 可知当在  $i$  节点作  $m+1$  次迭代时,  $i+1$  节点为  $m$  次迭代值, 而  $i-1$  节点上已经有了  $m+1$  次的迭代值。为了加快迭代速度, 计算  $W_i^{(m)}$  时可用式

$$W_i^{(m)} = \left( \frac{2T}{\Delta x} + \frac{S\Delta x}{\Delta t} \right) H_{i,k+1}^{(m)} - \frac{T}{\Delta x} (H_{i+1,k+1}^{(m+1)} + H_{i-1,k+1}^{(m+1)}) - \frac{S\Delta x}{\Delta t} H_{i,k} \quad (2-39)$$

代替式 (2-36)。式 (2-39) 与式 (2-37) 及式 (2-38) 又组成了一个完整的迭代计算方案, 称为异步迭代法。为了更进一步加快迭代速度, 将式 (2-38) 改写为

$$H_{i,k+1}^{(m+1)} = H_{i,k+1}^{(m)} + \Delta H_{i,k+1}^{(m)} \cdot \omega \quad (2-40)$$

其中  $1 < \omega < 2$ 。由于按式 (2-38) 计算的  $H_{i,k+1}^{(m+1)}$  已能使  $W_i^{(m)} \equiv 0$ , 即式 (2-39) 已被“松弛”。而按式 (2-40) 算得的  $H_{i,k+1}^{(m+1)}$  使  $W_i^{(m)} \neq 0$ , 就说式 (2-39) 被“超松弛”了。“超松弛”可能是  $W_i^{(m)} > 0$ , 也可能是  $W_i^{(m)} < 0$ , 不论“松弛”过头还是“松弛”不足, 统称为“超松弛”。由式 (2-39)、式 (2-37) 及式 (2-40) 组成的迭代方案称为超松弛 (SOR) 迭代法。 $\omega$  称为松弛因子。

无论何种迭代方法, 对一个时段来讲, 只有当  $\max |H_{i,k+1}^{(m+1)} - H_{i,k+1}^{(m)}| \leq \epsilon$  时, 迭代方可结束, 然后再进入下一个时段的迭代计算。

#### 四、时间步长与松弛因子的确定

1. 时间步长的确定极为重要, 直接与计算量的大小有关。为了减少计算量又能满足计算精度的要求, 必须确定合理的时间步长。关于时间步长的确定, 在大多数情况下采用

$$\Delta t_{k+1} = I \cdot \Delta t_k, \quad k=1, 2, \dots \quad (2-41)$$

$I=1.3 \sim 1.1$  是能达到既保证计算精度又节省计算时间的目的。关于  $\Delta t_1$  可采用试算方法来确定。先给一个经验数作为  $\Delta t'_1$ , 以式 (2-41) 计算出若干个时段的  $\Delta t$ , 再分别用超松弛迭代法计算出若干个时阶的结果。之后分别以  $\frac{\Delta t'_1}{2}$  及  $2\Delta t'_1$  作为初始的时间步长, 以同样的

方法计算出若干个时阶的结果。比较相同时刻 (通过调整  $I$  来达到) 的结果, 看是否有显著的差异。若三种初始步长的计算结果基本一致, 这就说明可以用经验数  $\Delta t'_1$  作为初始时间步长。如果以  $2\Delta t'_1$  作为初始时间步长不能保证计算精度, 应再以  $\frac{\Delta t'_1}{4}$  作为初始时间步长

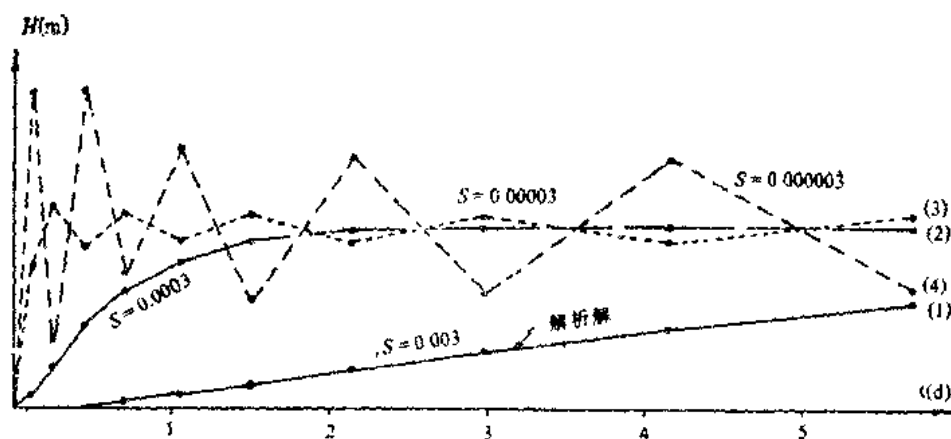


图 2-16

来计算, 通过比较看  $\frac{\Delta t_1}{2}$  作为初始时间步长是否合适。

对于贮水系数较小的承压含水层, 初始步长的选择要十分当心。图 2-18 中的几条曲线是根据一个典型承压含水层例子所算结果而绘制的。由图中的几条曲线可以看出, 同一时间步长, 在同一节点上, 由于贮水系数  $S$  的量级不同, 数值解与解析解产生了极大的差异。当  $S = 0.003$  时, 数值解与解析解拟合得很好 (曲线 1)。当  $S = 0.0003$  时, 虽然数值解算出的  $H-t$  曲线是光滑的, 但与解析解已有较大差异 (曲线 2)。当  $S = 0.00003$  时, 数值解开始振荡, 当  $S = 0.000003$  时, 数值解已经振荡得面目全非。由此可见, 初始时间步长的选择是十分重要的。

关于  $I$  值的应用需要指出的是, 初期取  $I$  为 1.3, 随着时段数的增多, 应逐步变为等时间步长。从保证计算精度来讲似乎没有必要, 但当计算的结果需要用图象 (曲线) 表示时却是十分必要的, 否则会造成绘图上的困难。

2. 关于松弛因子的确定, 目前尚无较好的直接方法。由于地下水流的数值模拟一般来说是离不开电子数字计算机的, 所以试算乃是基本的方法。计算实践指出, 在计算机上通过试算以确定  $\omega$  的最佳值要比确定合理的初始时间步长容易得多。

## 第五节 潜水一维非稳定流

潜水含水层与承压含水层不同, 随着潜水面的升降, 会引起导水系数的变化, 所以潜水含水层的导水系数是时间的函数。因此, 有限差分方程组的求解也有其自身的特点。

### 一、潜水一维非稳定流的有限差分方程组

与第三节处理方法相类似, 对于均质、各向同性含水层来讲, 可定义

$$\begin{cases} T_{i+1/2} = K \frac{h_{i+1,k,t} + h_{i,k,t}}{2} \\ T_{i-1/2} = K \frac{h_{i,k,t} + h_{i-1,k,t}}{2} \end{cases} \quad (2-12)$$

以  $\mu$  代表重力给水度, 顾及式 (2-27) 与式 (2-28), 取  $\theta = 1$ , 由式 (2-29) 可得

$$K \frac{h_{i-1,k+1} + h_{i,k+1} - h_{i-1,k} - h_{i,k}}{2 \Delta x} - K \frac{h_{i,k+1} + h_{i+1,k+1} - h_{i,k} - h_{i+1,k}}{2 \Delta x} = \frac{\mu \Delta x}{\Delta t_k} (h_{i,k+1} - h_{i,k}) \quad (2-43)$$

将其展开得

$$h_{i-1,k+1} - 2h_{i,k+1} + h_{i+1,k+1} - \frac{2\mu(\Delta x)^2}{K\Delta t_k} h_{i,k+1} + h_{i-1,k} - 2h_{i,k} + h_{i+1,k} = \frac{2\mu(\Delta x)^2}{K\Delta t_k} h_{i,k} \quad (2-44)$$

如将式(2-44)应用到潜水一维流的全部节点上,就可得到封闭的非线性的有限差分方程组,采用直接解法是很困难的。

## 二、双重迭代解法

含水层厚度近似用第 $m$ 次的水位迭代值来计算,则导水系数为

$$\begin{cases} T_{i-\frac{1}{2},k+1}^{(m)} = K \frac{h_{i-1,k+1}^{(m)} + h_{i,k+1}^{(m)}}{2} \\ T_{i+\frac{1}{2},k+1}^{(m)} = K \frac{h_{i,k+1}^{(m)} + h_{i+1,k+1}^{(m)}}{2} \end{cases} \quad (2-45)$$

计算水力坡度则用 $m+1$ 次的迭代值(即未知值),于是有

$$\begin{aligned} & T_{i-\frac{1}{2},k+1}^{(m)} \frac{h_{i-1,k+1}^{(m+1)} - h_{i,k+1}^{(m+1)}}{\Delta x} + T_{i+\frac{1}{2},k+1}^{(m)} \frac{h_{i,k+1}^{(m+1)} - h_{i+1,k+1}^{(m+1)}}{\Delta x} \\ &= \frac{\mu \Delta x}{\Delta t_k} [h_{i,k+1}^{(m+1)} - h_{i,k}^{(m)}] \end{aligned} \quad (2-46)$$

式(2-46)是一个线性方程,将其应用至全部节点时,仍得到一个三对角型的线性方程组,可用追赶法求解。当在一个时段内解算得到一次水位值就改变一次导水系数,直至在一个时段内 $\max |h_{i,k+1}^{(m+1)} - h_{i,k+1}^{(m)}| \leq \epsilon$ ,一个时段的计算就可结束,然后可进入下一个时段的迭代计算。为了提高迭代效率,将式(2-45)与(2-46)改写为

$$\begin{cases} T_{i-\frac{1}{2},k+1}^{(m)} = K \frac{h_{i-1,k+1}^{(m+1)} + h_{i,k+1}^{(m)}}{2} \\ T_{i+\frac{1}{2},k+1}^{(m)} = K \frac{h_{i,k+1}^{(m+1)} + h_{i+1,k+1}^{(m)}}{2} \end{cases} \quad (2-47)$$

$$\begin{aligned} & T_{i-\frac{1}{2},k+1}^{(m)} \frac{h_{i-1,k+1}^{(m+1)} - h_{i,k+1}^{(m+1)}}{\Delta x} + T_{i+\frac{1}{2},k+1}^{(m)} \frac{h_{i,k+1}^{(m+1)} - h_{i+1,k+1}^{(m+1)}}{\Delta x} \\ &= \frac{\mu \Delta x}{\Delta t_k} [h_{i,k+1}^{(m+1)} - h_{i,k}^{(m)}] \end{aligned} \quad (2-48)$$

这就组成了一个计算效率较高的双重迭代计算方案,在一个时段内迭代水位值的同时改变其导水系数。在一个时段内当 $\max |h_{i,k+1}^{(m+1)} - h_{i,k+1}^{(m)}| \leq \epsilon$ 时,进入下一个时段的迭代计算。

例:设有一季节性河流切穿了面积广阔的潜水含水层,含水层底板水平,标高为零米。假定河流长期无水,含水层完全被疏干。在 $t_0=0$ 时,河水位突然上升1m,并较长时间的维持在这个高度上(图2-19)。设含水层的渗透系数为400m/d,重力给水度 $\mu=0.2$ 。现用有限差分法研究含水层中潜水面高度 $h$ 随时间的变化规律。图2-19所示水文地质模型是一个半无限的潜水含水层,但在有限的时间内可以看作是一个有界的含水层。如取 $\Delta t =$



1d,  $\Delta x = 100\text{m}$ , 在100m处假设在一天这个较短时间内含水层仍处于疏干状态。利用双重迭代法的迭代过程载于表5—1。

表2—11中的“ $k-m$ ”表示  $k$  时阶的第  $m$  次迭代。由表2—11可以看出一个重要现象, 从第4个时段开始, 第一次迭代值常“超越”解的值, 如  $h_{1,10}^{(1)} > h_{1,10}^{(2)}$ 、 $h_{1,10}^{(1)} > h_{1,10}^{(2)}$ ……、 $h_{1,10}^{(1)} > h_{1,10}^{(2)}$ 等。如果把式(2—48)改为超松弛迭代, 由于  $1 < \omega < 2$ , 那么这种“超越”现象将会更加严重, 必将增加迭代次数或产生解的发散。在潜水含水层中如果应用超松弛迭代, 一般取  $0 < \omega < 1$ , 常取 0.85。

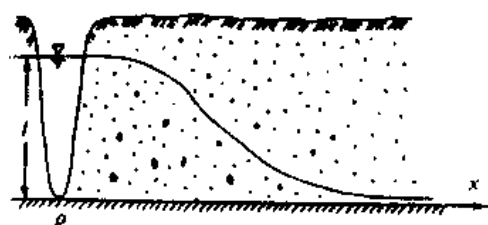


图 2—19

为了区别, 通常将取  $0 < \omega < 1$  的松弛迭代法称为亚松弛迭代。

在水位变幅与含水层厚度相比很小的情形下, 可近似地认为导水系数不随水位变化而变化, 这样就把非线性问题直接转化为线性问题。在计算实际的水文地质问题时, 凡是允许的话, 都应该这样做。

为了避免直接解非线性方程组, 人们还提出了一些其它方法, 读者可参考其它一些专门著作。计算实践证明, 亚松弛双重迭代是一种较好的算法。

表 2—11

$k-m$	$x$	0	1	2	3	4	$k-m$	$x$	0	1	2	3	4
		0 (m)	100 (m)	200 (m)	300 (m)	400 (m)			0 (m)	100 (m)	200 (m)	300 (m)	400 (m)
1—0		1.0000	0	0	0	0	6—1		1.0000	0.4738	0.0611	0.0007	0
—1		1.0000	0.0909	0	0	0	—2		1.0000	0.4722	0.616	0.0007	0
—2		1.0000	0.0976	0	0	0	—3		1.0000	0.4723	0.0616	0.0067	0
—3		1.0000	0.0980	0	0	0	7—1		1.0000	0.5209	0.0865	0.0014	0
—4		1.0000	0.0981	0	0	0	—2		1.0000	0.5191	0.0870	0.0015	0
—5		1.0000	0.0981	0	0	0	—3		1.0000	0.5192	0.0870	0.0015	0
2—1		1.0000	0.1865	0.0034	0	0	8—1		1.0000	0.5599	0.1150	0.0028	0
—2		1.0000	0.1906	0.0036	0	0	—2		1.0000	0.5581	0.1155	0.0028	0
—3		1.0000	0.1908	0.0036	0	0	—3		1.0000	0.5582	0.1155	0.0028	0
3—1		1.0000	0.2737	0.0196	0	0	9—1		1.0000	0.5920	0.1957	0.0049	0
—2		1.0000	0.2755	0.0112	0	0	—2		1.0000	0.5905	0.1961	0.0049	0
—3		1.0000	0.2756	0.0112	0	0	3		1.0000	0.5906	0.1961	0.0049	0
4—1		1.0000	0.3508	0.031	0.0001	0	10—1		1.0000	0.6185	0.1777	0.0080	0
2		1.0000	0.3501	0.0234	0.0001	0	—2		1.0000	0.6174	0.1779	0.0081	0
5—1		1.0000	0.9174	0.0400	0.0003	0	—3		1.0000	0.6175	0.1779	0.0081	0
—2		1.0000	0.4165	0.0401	0.0093	0							

## 第六节 承压二维非稳定流

不论含水层的几何形状如何复杂, 总可以用一个矩形框将其框在矩形内, 如图2—1所示。矩形框内以怎样的网格间距剖分含水层, 这取决于含水层的非均质情况及对计算精度的要求。习惯上多以  $\Delta x = \Delta y$  的等间距网格来剖分含水层。

### 一、三种主要差分格式的应用

假设含水层是非均质的。根据式(2-10)则有

$$\begin{aligned}
 S_{i,j} \frac{H_{i,j,k+1} - H_{i,j,k}}{\Delta t_k} = & \theta \left( T_{i+\frac{1}{2},j} \frac{H_{i+1,j,k+1} - H_{i,j,k+1}}{(\Delta x)^2} + T_{i-\frac{1}{2},j} \frac{H_{i-1,j,k+1} - H_{i,j,k+1}}{(\Delta x)^2} \right. \\
 & + T_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{H_{i,j+1,k+1} - H_{i,j,k+1}}{(\Delta y)^2} + T_{i,j-\frac{1}{2}} \frac{H_{i,j-1,k+1} - H_{i,j,k+1}}{(\Delta y)^2} \Big) \\
 & + (1-\theta) \cdot \left( T_{i+\frac{1}{2},j} \frac{H_{i+1,j,k} - H_{i,j,k}}{(\Delta x)^2} + T_{i-\frac{1}{2},j} \frac{H_{i-1,j,k} - H_{i,j,k}}{(\Delta x)^2} \right. \\
 & \left. + T_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{H_{i,j+1,k} - H_{i,j,k}}{(\Delta y)^2} + T_{i,j-\frac{1}{2}} \frac{H_{i,j-1,k} - H_{i,j,k}}{(\Delta y)^2} \right) \quad (2-49)
 \end{aligned}$$

以 $Q_{i,j}$ 表示 $(i, j)$ 小均衡域上的垂向交换水量(图2-2),流入为正,流出为负。于是在式(2-49)的右端应加上 $Q_{i,j}$ 。如果 $Q_{i,j}$ 是时间的函数,则 $Q_{i,j}$ 的下标也应该带上时阶标记。

#### 1. 二维显式差分格式

令 $\theta=0$ ,且考虑到有垂向交换水量 $Q_{i,j}$ 及 $\Delta x=\Delta y$ 则式(2-49)可写成

$$\begin{aligned}
 T_{i-\frac{1}{2},j}(H_{i-1,j,k} - H_{i,j,k}) + T_{i+\frac{1}{2},j}(H_{i+1,j,k} - H_{i,j,k}) + T_{i,j-\frac{1}{2}}(H_{i,j-1,k} - H_{i,j,k}) \\
 + T_{i,j+\frac{1}{2}}(H_{i,j+1,k} - H_{i,j,k}) + Q_{i,j}(\Delta x)^2 = S_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t_k} (H_{i,j,k+1} - H_{i,j,k}) \quad (2-50)
 \end{aligned}$$

由式(2-50)可直接解出 $H_{i,j,k+1}$ ,求解是很简单的。可以证明当

$$(T_{i-\frac{1}{2},j} + T_{i+\frac{1}{2},j} + T_{i,j-\frac{1}{2}} + T_{i,j+\frac{1}{2}}) \cdot \frac{\Delta t_k}{S_{i,j}(\Delta x)^2} \leq 1 \quad (2-51)$$

时,二维显式差分格式才是稳定的。

对矩形网格习惯作法是将导水系统定义在节点上,因此可令

$$T_{i-\frac{1}{2},j} = 2 \frac{T_{i-1,j} T_{i,j}}{T_{i-1,j} + T_{i,j}}, \quad T_{i+\frac{1}{2},j} = 2 \frac{T_{i+1,j} T_{i,j}}{T_{i+1,j} + T_{i,j}}, \dots$$

称为在小均衡域边界处导水系数取几何平均值。

#### 2. 二维隐式差分格式

就解算方法来讲,简隐式差分格式与对称差分格式没有什么不同,因此仅讨论简隐式差分格式。

令 $\theta=1$ ,且考虑到有垂向交换水量 $Q_{i,j}$ 及 $\Delta x=\Delta y$ 则式(2-49)可写为

$$\begin{aligned}
 T_{i-\frac{1}{2},j}(H_{i-1,j,k+1} - H_{i,j,k+1}) + T_{i+\frac{1}{2},j}(H_{i+1,j,k+1} - H_{i,j,k+1}) + T_{i,j-\frac{1}{2}} \\
 (H_{i,j-1,k+1} - H_{i,j,k+1}) + T_{i,j+\frac{1}{2}}(H_{i,j+1,k+1} - H_{i,j,k+1}) + Q_{i,j}(\Delta x)^2 \\
 = S_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t_k} (H_{i,j,k+1} - H_{i,j,k}) \quad (2-52)
 \end{aligned}$$

将式(2-52)应用于边界内的全部节点,就可构成一封闭的线性方程组。在列出方程组时可利用下述技巧:(1)在隔水边界外再设立一排虚拟节点,令该节点上导水系数为0,这样在隔水边界内侧节点上列方程时自然就实现了隔水边界,这也是导水系数为什么取几何平均值的理由之一;(2)对给定流量的边界,将侧向径流量按流入为正、流出为负并入 $Q_{i,j}$ 中。如果侧向径流量是时间的已知函数,可取时阶 $k$ 与 $k+1$ 的平均值并入 $Q_{i,j}$ 中。

可以证明, 简隐式差分格式是无条件的稳定差分格式。对于对称差分格式来讲, 由于  $\theta = \frac{1}{2}$ , 已处于无条件稳定的边缘, 所以当含水层被强刺激 (突然的大量抽水、注水或边

界水位突然上升或下降) 时, 往往显得稳定性不足。此种情况下, 可在强刺激的开始时刻用简隐式差分格式, 经过若干时段之后再用对称格式。这样做的好处是, 一方面避免了对称格式稳定性不足的一面, 又利用了对称差分格式比简隐式差分格式精度好的一面。

## 二、有限差分方程组的SOR解法

为了方便, 令

$$B_{i,j} = T_{i,j-\frac{1}{2}}, \quad D_{i,j} = T_{i-\frac{1}{2},j},$$

$$F_{i,j} = T_{i+\frac{1}{2},j}, \quad \bar{H}_{i,j} = T_{i,j+\frac{1}{2}}.$$

$B_{i,j}$ 、 $D_{i,j}$ 、 $F_{i,j}$ 及 $\bar{H}_{i,j}$ 与节点的关系如图2—20所示。若再令

$$E_{i,j} = -B_{i,j} - D_{i,j} - \bar{H}_{i,j} - F_{i,j} - S_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t_k}$$

$$A_{i,j,k} = Q_{i,j,k} (\Delta x)^2 + S_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t_k} H_{i,j,k}$$

则式 (2—52) 可改写为

$$B_{i,j} H_{i,j-1,k+1} + D_{i,j} H_{i-1,j,k+1} + E_{i,j} H_{i,j,k+1} + F_{i,j} H_{i+1,j,k+1} + \bar{H}_{i,j} H_{i,j+1,k+1} + A_{i,j,k} = 0 \quad (2-53)$$

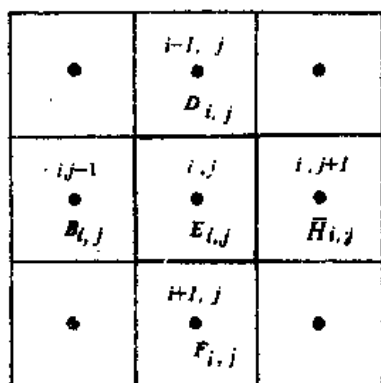


图 2—20

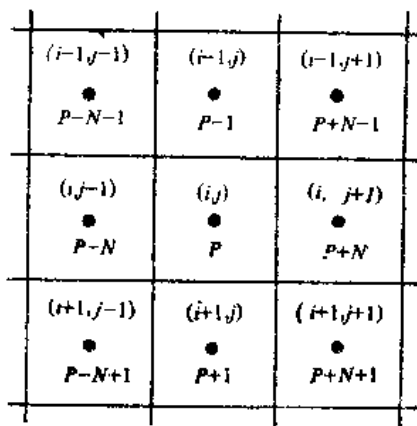


图 2—21

根据超松弛迭代原理, 由式 (2—53) 可构造如下的迭代公式:

$$\begin{cases} W_r^{(m)} = B_{i,j} H_{i,j-1,k+1}^{(m)} + D_{i,j} H_{i-1,j,k+1}^{(m)} + E_{i,j} H_{i,j,k+1}^{(m)} + F_{i,j} H_{i+1,j,k+1}^{(m)} + \bar{H}_{i,j} H_{i,j+1,k+1}^{(m)} + A_{i,j,k} \\ \Delta H_{i,j,k+1}^{(m)} = -\frac{W_r^{(m)}}{E_{i,j,k}} \\ H_{i,j,k+1}^{(m+1)} = H_{i,j,k+1}^{(m)} + \omega \Delta H_{i,j,k+1}^{(m)} \end{cases} \quad (2-54)$$

计算实践证明, 对于200个节点以内的问题, 超松弛迭代法是很有效的, 不仅程序设

计简单，且运算速度很快。

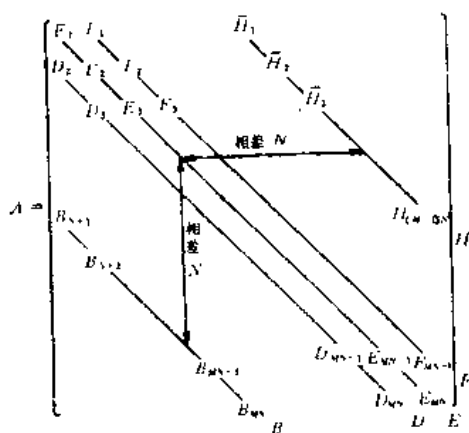
### 三、有限差分方程组的强隐式迭代（SIP）解法

斯通（H. J. Stone）在1968年提出来的强隐式迭代法，用于解矩形网格的大型有限差分方程组是一种很有效的方法。它的突出特点是迭代的收敛速度对结点数目及问题的性质不甚敏感，收敛速度快。但计算实践表明，当节点数目不超过100个时反而不如SOR法好用。

为了便于推导出强隐式迭代法的有关公式，将图2—1中的 $(i, j)$ 号换成顺序号，对应关系如图2—21所示。于是式（2—53）可写成

$$B_p H_{p+N, k+1} + D_p H_{p-1, k+1} + E_p H_{p, k+1} + F_p H_{p+1, k+1} + \bar{H}_p H_{p+N, k+1} + A_p H_k = 0 \quad (2-55)$$

水头 $H$ 的编号由1— $MN$ 。 $MN$ 个未知水头（见图2—1，第二类边界外的水头为虚拟的，解时令导水系数为0即可）所对应的系数矩阵为



可以看出，二维隐式差分格式形成的系数矩阵为五对角型的，五条对角线分别称为 $B$ 、 $D$ 、 $E$ 、 $F$ 、 $H$ 对角线。 $E$ 对角线称为主对角线。在主对角线上共有 $MN$ 个元素， $D$ 、 $F$ 与 $E$ 相邻。在同一列中，如果 $B$ 的下标是 $N+i$ ，则 $E$ 的下标为 $i$ 。为了便于了解后面要阐述的内容，先举一个简单的例子以建立有关概念。图2—22是一个具有9个节点的模型。根据式（2—56）可写出（略去了 $H$ 上面的横线）

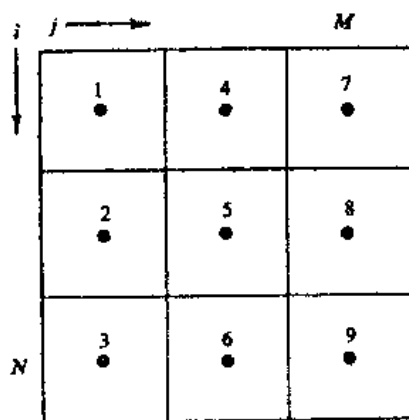


图 2—22

$$A_1 = \begin{bmatrix} E_1 & F_1 & 0 & H_1 & & & & & \\ D_2 & E_2 & F_2 & 0 & H_2 & & & & \\ 0 & D_3 & E_3 & 0 & 0 & H_3 & & & \\ B_4 & 0 & 0 & E_4 & F_4 & & H_4 & & \\ & B_5 & 0 & D_5 & E_5 & F_5 & & H_5 & \\ & & B_6 & 0 & D_6 & E_6 & 0 & & H_6 \\ & & & B_7 & 0 & 0 & E_7 & F_7 & \\ & & & & B_8 & 0 & D_8 & E_8 & F_8 \\ & & & & & B_9 & 0 & D_9 & E_9 \end{bmatrix}$$

如 $A_1$ 也能和三对角型矩阵一样的进行分解,且希望能分解成 $\bar{L}_1$ 及 $\bar{U}_1$

$$\bar{L}_1 = \begin{bmatrix} d_1 & & & & & & & & \\ c_2 & d_2 & & & & & & & \\ 0 & c_3 & d_3 & & & & & & \\ b_4 & 0 & c_4 & d_4 & & & & & \\ & b_5 & 0 & c_5 & d_5 & & & & \\ & & b_6 & 0 & c_6 & d_6 & & & \\ & & & b_7 & 0 & c_7 & d_7 & & \\ & & & & b_8 & 0 & c_8 & d_8 & \\ & & & & & b_9 & 0 & c_9 & d_9 \end{bmatrix}$$

及

$$\bar{U}_1 = \begin{bmatrix} 1 & e_1 & 0 & f_1 & & & & & \\ & 1 & e_2 & 0 & f_2 & & & & \\ & & 1 & e_3 & 0 & f_3 & & & \\ & & & 1 & e_4 & 0 & f_4 & & \\ & & & & 1 & e_5 & 0 & f_5 & \\ & & & & & 1 & e_6 & 0 & f_6 \\ & & & & & & 1 & e_7 & 0 \\ & & & & & & & 1 & e_8 \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

那么,就可以设想利用追赶法的思想来解有限差分方程组。欲证明 $A_1$ 能否分解为 $\bar{L}_1$ 与 $\bar{U}_1$ ,最直接的办法是将 $\bar{L}_1$ 与 $\bar{U}_1$ 相乘,看其乘积形式是否与 $A_1$ 一样。根据矩阵与矩阵相乘可知

$$\bar{L}_1 \bar{U}_1 = \begin{bmatrix} \hat{E}_1 & \hat{F}_1 & 0 & \hat{H}_1 & & & & & \\ \hat{D}_2 & \hat{E}_2 & \hat{F}_2 & \hat{G}_2 & \hat{H}_2 & & & & \\ 0 & \hat{D}_3 & \hat{E}_3 & \hat{F}_3 & \hat{G}_3 & \hat{H}_3 & & & \\ \hat{B}_4 & \hat{C}_4 & \hat{D}_4 & \hat{E}_4 & \hat{F}_4 & \hat{G}_4 & \hat{H}_4 & & \\ & \hat{B}_5 & \hat{C}_5 & \hat{D}_5 & \hat{E}_5 & \hat{F}_5 & \hat{G}_5 & \hat{H}_5 & \\ & & \hat{B}_6 & \hat{C}_6 & \hat{D}_6 & \hat{E}_6 & \hat{F}_6 & \hat{G}_6 & \hat{H}_6 \\ & & & \hat{B}_7 & \hat{C}_7 & \hat{D}_7 & \hat{E}_7 & \hat{F}_7 & \hat{G}_7 \\ & & & & \hat{B}_8 & \hat{C}_8 & \hat{D}_8 & \hat{E}_8 & \hat{F}_8 \\ & & & & & \hat{B}_9 & \hat{C}_9 & \hat{D}_9 & \hat{E}_9 \end{bmatrix}$$

显然,  $\overline{L}_1 \overline{U}_1$  比  $A_1$  多了两条对角线  $\hat{C}$  与  $\hat{G}$ 。这就是说, 一个五对角线型的矩阵  $A_1$  是不能分解为三对角型的  $\overline{L}_1$  与  $\overline{U}_1$ 。于是可以推知, 式 (2-56) 的  $A$  也不能分解成下面形式的  $\overline{L}$  与  $\overline{U}$ :

$$\overline{L} = \begin{bmatrix} d_1 & & & & \\ c_2 & d_2 & & & \\ & & & & \\ b_{N+1} & c_{N+1} & d_{N+1} & & \\ & & & & \\ & & & b_{MN} & c_{MN} & d_{MN} \end{bmatrix} \quad (2-57)$$

$b \qquad c \qquad d$

$$\overline{U} = \begin{bmatrix} 1 & e_1 & & f_1 & & \\ & 1 & e_2 & f_2 & & \\ & & & & & \\ & & & & f_{M(N-1)} & \\ & & & & & f \\ & & & & & & \\ & & & & 1 & e_{MN-1} & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (2-58)$$

$e \qquad f$

此时  $\overline{L}$  与  $\overline{U}$  的乘积一定是:

$$\bar{\mathbf{L}} \bar{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} \bar{B}_p & \bar{C}_p & \bar{D}_p & E_p & F_p & \bar{G}_p & H_p \\ (p-N) & (p-N-1) & (p-1) & (p) & (p+1) & (p+N-1) & (p+N) \end{pmatrix} \begin{matrix} H \\ G \\ F \\ E \end{matrix} \quad (2-59)$$

而不是原来 $\mathbf{A}$ 的五对角线的形式。若以 $\mathbf{U}$ 代表一个由 $MN$ 个元素组成的列向量（元素为 $u$ ），作 $\bar{\mathbf{L}} \bar{\mathbf{U}} \mathbf{U}$ ，并令

$$\bar{B}_p u_{p-N} + \bar{D}_p u_{p-1} + E_p u_p + \bar{F}_p u_{p+1} + \bar{H}_p u_{p+N} + (\bar{C}_p u_{p-N+1} + \bar{G}_p u_{p+N-1}) + A_p = 0 \quad (2-60)$$

当 $p$ 取 $1, 2, \dots, MN$ 就可列出 $MN$ 个线性方程组。由于 $\mathbf{A} \neq \bar{\mathbf{L}} \bar{\mathbf{U}}$ ，所以 $\mathbf{H} \neq \mathbf{U}$ ，但 $\mathbf{U}$ 至少可以视为 $\mathbf{H}$ 的一个近似值， $\mathbf{H}$ 为 $MN$ 个水头组成的列向量。

可以作这样的设想，由于地下水流系统的水头在空间步长取得足够小时，可认为（见图2-21）

$$\begin{cases} H_{p-N+1} - H_{p-N} \approx H_{p+1} - H_p \\ H_{p+N-1} - H_{p+N} \approx H_{p-1} - H_p \end{cases} \quad (2-61)$$

类似的可以写出

$$\begin{cases} u_{p-N+1} - u_{p-N} \approx u_{p+1} - u_p \\ u_{p+N-1} - u_{p+N} \approx u_{p-1} - u_p \end{cases} \quad (2-62)$$

现选择一个适当的 $\alpha$ 使得下式成立

$$\begin{cases} u_{p-N+1} - \alpha(-u_p + u_{p+1} + u_{p-N}) = 0 \\ u_{p+N-1} - \alpha(-u_p + u_{p-1} + u_{p+N}) = 0 \end{cases} \quad (2-63)$$

现利用式(2-63)将式(2-55)改写如下（为了推导公式方便，省去时阶下标）：

$$B_p u_{p-N} + D_p u_{p-1} + E_p u_p + F_p u_{p+1} + H_p u_{p+N} + \bar{C}_p [u_{p-N+1} - \alpha(-u_p + u_{p+1} + u_{p-N})] + \bar{G}_p [u_{p+N-1} - \alpha(-u_p + u_{p-1} + u_{p+N})] + A_p = 0 \quad (2-64)$$

或者写成

$$(B_p - \alpha \bar{C}_p) u_{p-N} + (D_p - \alpha \bar{G}_p) u_{p-1} + [E_p + \alpha(\bar{G}_p - \bar{C}_p)] u_p + (F_p - \alpha \bar{C}_p) u_{p+1}$$

$$+ (H_p - \alpha \bar{G}_p) u_{p+N} + \bar{C}_p u_{p-N+1} + \bar{G}_p u_{p+N-1} + A_p = 0 \quad (2-65)$$

由于式(2-64)与式(2-55)是一致的, 因此由式(2-65)形成的线性方程组的解 $\mathbf{U}$ 一定和 $\mathbf{H}$ 一样。由于式(2-55)中包含五个点的水头, 而式(2-65)中包含着七个点的水头, 所以把前者称为五点格式, 后者称为七点格式。式(2-65)与式(2-60)在形式上完全一样, 因此由式(2-65)形成的线性方程组的系数矩阵一定可分解为式(2-57)与式(2-58)的形式。这样就可达到简化计算的目的, 但关键在于要确定 $\alpha$ 及式(2-57)与式(2-58)中的元素。为此将 $\mathbf{L}$ 与 $\mathbf{U}$ 相乘, 将相乘的结果与式(2-59)中的各个元素对比, 可知式(2-60)能写成如下形式:

$$b_p u_{p-N} + c_p u_{p-1} + (d_p + c_p e_{p-1} + b_p f_{p-N}) u_p + d_p e_p u_{p+1} + d_p f_p u_{p+N} + b_p e_{p-N} u_{p-N+1} + c_p f_p u_{p+N+1} + A_p = 0 \quad (2-66)$$

将式(2-66)与式(2-65)比较可知

$$\begin{aligned} B_p - \alpha \bar{C}_p &= b_p \\ D_p - \alpha \bar{G}_p &= c_p \\ E_p - \alpha (\bar{C}_p + \bar{G}_p) &= b_p f_{p-N} + c_p e_{p-1} + d_p \\ F_p + \alpha \bar{C}_p &= d_p e_p \\ H_p - \alpha \bar{G}_p &= d_p f_p \\ \bar{C}_p &= b_p e_{p-N} \\ \bar{G}_p &= c_p f_{p-1} \end{aligned}$$

由此可以推出:

$$\left\{ \begin{aligned} b_p &= \frac{B_p}{1 + \alpha e_{p-N}} \\ c_p &= \frac{D_p}{1 + \alpha f_{p-1}} \\ d_p &= E_p + \alpha (b_p e_{p-N} + c_p f_{p-1}) - b_p f_{p-N} - c_p e_{p-1} \\ e_p &= \frac{F_p - \alpha b_p e_{p-N}}{\bar{G}_p} \\ f_p &= \frac{H_p - \alpha c_p f_{p-1}}{d_p} \end{aligned} \right. \quad (2-67)$$

当 $P$ 取 $1, 2, \dots, MN$ 时, 就可算得 $\bar{\mathbf{L}}, \bar{\mathbf{U}}$ 中的全部元素。

例如:

$$(1) \quad P=1 \text{ 时, } b_1=0, c_1=0, d_1=E_1, e_1=\frac{F_1}{E_1}, f_1=\frac{H_1}{E_1}$$

$$(2) \quad P=2 \text{ 时, } b_2=0, c_2=\frac{D_2 E_1}{E_1 + \alpha H_1}, d_2=E_2 + \alpha c_2 f_1 - c_2 e_1$$

$$e_2 = \frac{F_2}{d_2}, f_2 = \frac{H_2 - \alpha c_2 f_1}{d_2}$$

不难看出,  $\bar{\mathbf{L}}, \bar{\mathbf{U}}$ 中的元素可自上而下, 自左至右一行一行地求出。有了 $\bar{\mathbf{L}}$ 与 $\bar{\mathbf{U}}$ 以后, 下面再来研究如何求出水头 $\mathbf{H}$ 。



为了不因符号的使用引起混乱, 以下推导令  $A_p = q_p$ , 解向量用  $U$ 。于是由式 (2-55) 构成的线性方程组可表示为

$$AU = Q \quad (2-68)$$

由于  $\bar{L}\bar{U} \neq A$ , 于是不妨设

$$\bar{L}\bar{U} = A + B \quad (2-69)$$

从而有

$$AU + BU = Q + BU$$

或者写成

$$(A + B)U = (A + B)U + (Q - AU) \quad (2-70)$$

如果知道了  $U$  的一个近似值  $U^{(m)}$ , 则  $U^{(m)}$  代入式 (2-70) 后,  $Q - AU^{(m)}$  就是由于水头取近似值而在每一个小均衡域上所产生的水量不平衡值。令

$$R^{(m)} = Q - AU^{(m)} \quad (2-71)$$

于是由式 (2-70) 可构造一个迭代公式

$$(A + B)U^{(m+1)} = (A + B)U^{(m)} + R^{(m)} \quad (2-72)$$

令

$$\Delta U^{(m)} = U^{(m+1)} - U^{(m)} \quad (2-73)$$

于是式 (2-72) 可写成

$$(A + B)\Delta U^{(m)} = R^{(m)}$$

进一步写成

$$\bar{L}\bar{U}\Delta U^{(m)} = R^{(m)} \quad (2-74)$$

再令

$$\bar{U}\Delta U^{(m)} = V \quad (2-75)$$

$$\bar{L}V = R^{(m)} \quad (2-76)$$

将式 (2-76) 展开, 其中第  $P$  个方程的形式为

$$b_P v_{P-N} + c_P v_{P-1} + d_P v_P = \gamma_P^{(m)} \quad (2-77)$$

如果以式 (2-77) 为递推公式, 则可求出  $V$ , 由式 (2-75) 就可以求出  $\Delta U^{(m)}$ 。式 (2-75) 展开后的第  $P$  个方程的形式是

$$\Delta u_P^{(m)} + e_P \Delta u_{P-N}^{(m)} + f_P \Delta u_{P-1}^{(m)} = v_P \quad (2-78)$$

显然式 (2-78) 可以作为回代公式, 即可求出  $\Delta U^{(m)}$ 。利用式 (2-74) 就可以求出  $U^{(m+1)}$ 。

推导过程虽然很长, 但实际计算时仅用到式 (2-67)、(2-77) 及式 (2-78) 等三个公式。在实际计算时, 常用  $(i, j)$  编号而不用  $P$  编号。利用图 2-21 的对照关系可得

$$\begin{cases} b_{i,j} = \frac{B_{i,j}}{1 + \alpha e_{i,j-1}} \\ c_{i,j} = \frac{D_{i,j}}{1 + \alpha f_{i-1,j}} \\ d_{i,j} = F_{i,j} + \alpha (b_{i,j} e_{i,j-1} + c_{i,j} f_{i-1,j}) - b_{i,j} f_{i,j-1} - c_{i,j} e_{i-1,j} \\ e_{i,j} = \frac{F_{i,j} - \alpha b_{i,j} e_{i,j-1}}{d_{i,j}} \\ f_{i,j} = \frac{H_{i,j} - \alpha c_{i,j} f_{i-1,j}}{e_{i,j}} \end{cases} \quad (2-79)$$

$$b_{i,j}v_{i,j+1} + c_{i,j}v_{i-1,j+1} + d_{i,j}v_{i,j} = \gamma_{i,j}^{(m)} \quad (2-80)$$

$$\Delta u_{i,j}^{(m)} + c_{i,j}\Delta u_{i-1,j}^{(m)} + v_{i,j}\Delta u_{i,j+1}^{(m)} = v_{i,j} \quad (2-81)$$

$$u_{i,j}^{(m+1)} = u_{i,j}^{(m)} + \Delta u_{i,j}^{(m)} \quad (2-82)$$

迭代收敛的准则为

$$\max |\Delta u_{i,j}^{(m)}| \leq \varepsilon \quad (2-83)$$

$\varepsilon$  为事先给定的误差限。

式(2-79)一式(2-83)组成了解二维非稳定流有限差分方程组的强隐式迭代方案。按照斯通的建议,  $\alpha$  值的计算分两步。先计算

$$\alpha_{\max} = 1 - \min \left\{ \frac{2(\Delta x)^2}{T_{xx}(\Delta x)^2}, \frac{2(\Delta y)^2}{T_{yy}(\Delta y)^2} \right\} \quad (2-84)$$

其余的  $\alpha$  按下式计算

$$\alpha_m = 1 - (1 - \alpha_{\max})^{\frac{m}{M-1}}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, M-1 \quad (2-85)$$

$T_{xx}$ 、 $T_{yy}$  为沿  $x$  方向与  $y$  方向的导水系数。如果含水层系均质或者采用非等距网格, 则式(2-84)按点计算, 最后取其平均值作为式(2-85)中的  $\alpha_{\max}$ 。式(2-85)中  $M$  为使用的参数数目。

在迭代计算中,  $\alpha$  值自大至小轮换使用, 比如取  $M=4$ , 则  $\alpha_3$ 、 $\alpha_3$ 、 $\alpha_2$ 、 $\alpha_2$ 、 $\alpha_1$ 、 $\alpha_1$ 、 $\alpha_0$ 、 $\alpha_0$  循环使用。

为了提高强隐式法解题的效率, 在实际解题时还可采用以下措施

1. 当使用式(2-79)一式(2-83)迭代时, 先按节点编号(1, 1)、(2, 1)、(3, 1)、 $\dots$ 、(1, 2)、(2, 2)、(3, 2)、 $\dots$ 的顺序按式(2-79)计算每个节点上的系数。对节点(1, 1),  $B_1 = D_{1,1} = 0$ , 因此  $b_{1,1} = c_{1,1} = 0$ 。于是根据式(2-80)得

$$v_{1,1} = \frac{1}{d_{1,1}} \gamma_{1,1}^{(m)} = \frac{1}{E_{1,1}} \gamma_{1,1}^{(m)}$$

$\gamma_{1,1}^{(m)}$  由式(2-71)算得。有了  $v_{1,1}$ , 其余的  $v$  值就容易计算了。待全部  $v$  计算完了之后就可由式(2-81)计算  $\Delta u$ , 而计算  $\Delta u$  则是由节点  $(m, n)$  开始。计算  $v$  的递推路线与计算  $\Delta u$  的回代路线如图2-23所示。为了加速收敛, 在奇数次迭代时交换图2-23中的路线, 即将回代路线改为递推路线, 递推路线则改为回代路线。计算系数的式(2-79)改为:

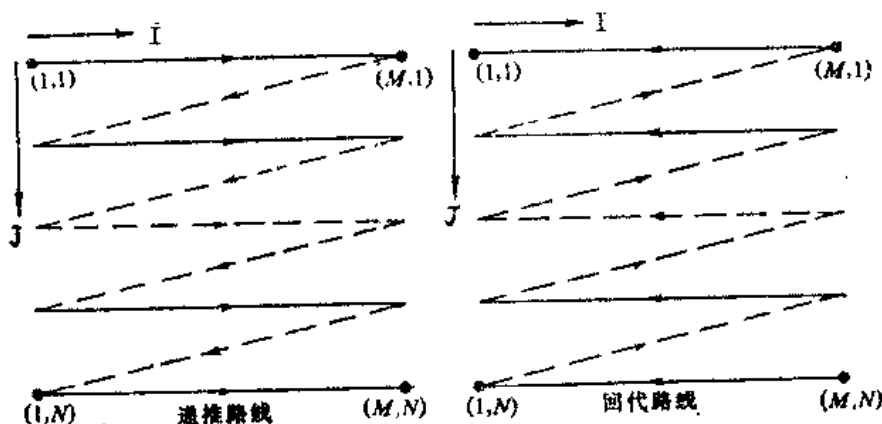


图 2-23

$$\begin{cases} b_{i,j} = \frac{B_{i,j}}{1 + \alpha e_{i,j+1}} \\ c_{i,j} = \frac{D_{i,j}}{1 + \alpha f_{i-1,j}} \\ d_{i,j} = F_{i,j} + \alpha (b_{i,j} e_{i,j+1} + c_{i,j} f_{i-1,j}) - b_{i,j} f_{i,j+1} - c_{i,j} e_{i-1,j} \\ e_{i,j} = \frac{F_{i,j} - \alpha b_{i,j} e_{i,j+1}}{d_{i,j}} \\ f_{i,j} = \frac{H_{i,j} - \alpha c_{i,j} f_{i-1,j}}{d_{i,j}} \end{cases} \quad (2-86)$$

其余公式不变。

2. 在解实际问题时, 将式(2-81)改写为:

$$\Delta u_{i,j}^{(m)} + e_{i,j} \Delta u_{i+1,j}^{(m)} + f_{i,j} \Delta u_{i,j+1}^{(m)} = \omega v_{i,j} \quad (2-87)$$

$\omega$ 称为松弛因子,  $0.5 < \omega < 1.5$ 。使用松弛因子可以加速收敛,  $\omega$ 可通过电子计算机试算确定。

以上推导均指承压含水层而言, 当含水层为潜水时, 由于  $T_{i,j} = h_{i,j} K$ , 因此每迭代一次只需修改一次导水系数即可。

在地下水流的模拟计算中, 取  $\Delta x \neq \Delta y$  的非等距网格应该说是没有多大必要性, 反而增加计算上的麻烦。在实际工作中宁肯将网格间距取小而采用等距网格也不宜采用非等距网格。

## 第七节 不规则网格有限差分法

在上一节所阐述的有限差分网格通常称为规则差分网格, 其特点是, 建立有限差分(均衡)方程时物理概念清楚、计算简单, 编制计算机程序容易。不足之处是, 拟合自然边界及非均质界线时显得不够灵活。为弥补这种不足, 产生了不规则网格有限差分法。该方法的应用可追溯到1953年。1964年蒂桑(Tyson)与韦伯(Weber)已成功地将不规则网格有限差分法应用于美国加利福尼亚州地下水含水层的模拟。

### 一、地下水流区域的剖分

不规则网格有限差分法可简称为单元均衡法。它按照三角形剖分渗流区域(图2-24)。三角形叫面元, 三角形的边叫线元, 三角形的顶点叫点元或称为节(结)点。

剖分时, 点元必须是具有公共线元的面元的顶点, 不允许落在线元的非端点位置上。为了提高计算的精度及计算上的方便, 面元的任一内角不应大于 $90^\circ$ 及小于 $30^\circ$ 。剖分时点元的密度可根据在某些“地区”的需要灵活选择。区域内的点元如1, 2, ...称为内点元, 边界上的点元如 $n+1$ ,  $n+2$ , ...称为边界点元。边界点元分两类: 当点元的水头变化是时间 $t$ 的已知函数时, 如 $n+1$ ,  $n+2$ , ...称为第一边界点元; 当该点元与之相连的线元上的单位宽度侧向径流量为 $t$ 的已知函数时, 如 $m+1$ ,  $m+2$ , ...称为第二边界点元。点元、面元均要编号。点元编号时, 不必分内点元与第二边界点元, 而自小至大编号, 编完之后再编第一边界点元的号。编号时, 第一边界与第二边界的交界点元要取为第一边界点元。渗流区域内的各种界线(非均质界线、承压水与潜水分界线等)及自然边界均可用线

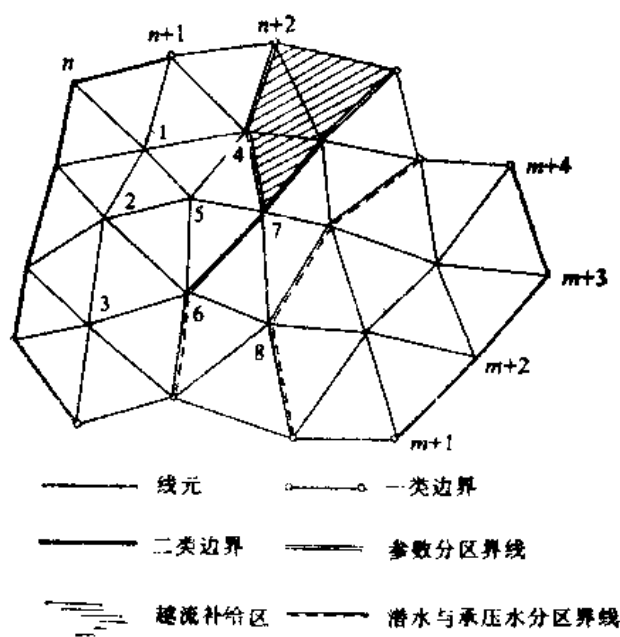


图 2-24

元构成的折线逼近。渗流区域内的抽水孔不一定要求与点元重合，但渗流区域内的观测孔应尽量与点元重合。在漏斗中心及地下水流场变化比较复杂地段的线元，尽可能取得短一些。

## 二、水头模式的建立与面元水力坡度

先以地下水流系统的二维承压含水层为例。就一个渗流区域来讲，水头函数  $H(x, y, t)$  是一个非常复杂的连续函数，在实际上几乎不可能用解析式来表示（图2-25a）。但是，当渗流区域  $\Omega$  被剖分以后，只要面元取得足够小，可近似地认为，在任一时刻  $t$ ，一个面元上水头的变化规律是坐标的线性函数。现考虑编号为  $(\beta)$  的面元，设三点元的编号为  $i, j, m$ 。水头  $H(x, y, t)$  在点元  $L (L=i, j, m)$  上的值记为  $H_L(t)$ ，点元  $L$  的坐标记为  $(x_L, y_L)$ 。根据上面的近似假定，作线性函数

$$H^{(\beta)}(x, y, t) = a + bx + cy \quad (2-88)$$

使得

$$H^{(\beta)}(x_L, y_L, t) = H_L(t), \quad L=i, j, m \quad (2-89)$$

这将意味着在面元  $(\beta)$  上用  $H^{(\beta)}(x, y, t)$  逼近面元上的真实水头函数  $H(x, y, t)$ 。 $H^{(\beta)}(x, y, t)$  定义为第  $(\beta)$  面元上的水头模式（图2-25）。式（2-88）中包含着待定常数  $a, b, c$ ，可由式（2-89）确定。于是得

$$\begin{cases} a + bx_i + cy_i = H_i(t) \\ a + bx_j + cy_j = H_j(t) \\ a + bx_m + cy_m = H_m(t) \end{cases} \quad (2-90)$$

若以  $D$  表示式（2-90）的行列式的值，按照克莱姆法则

$$a = \frac{D_a}{D}, \quad b = \frac{D_b}{D}, \quad c = \frac{D_c}{D} \quad (2-91)$$

由于

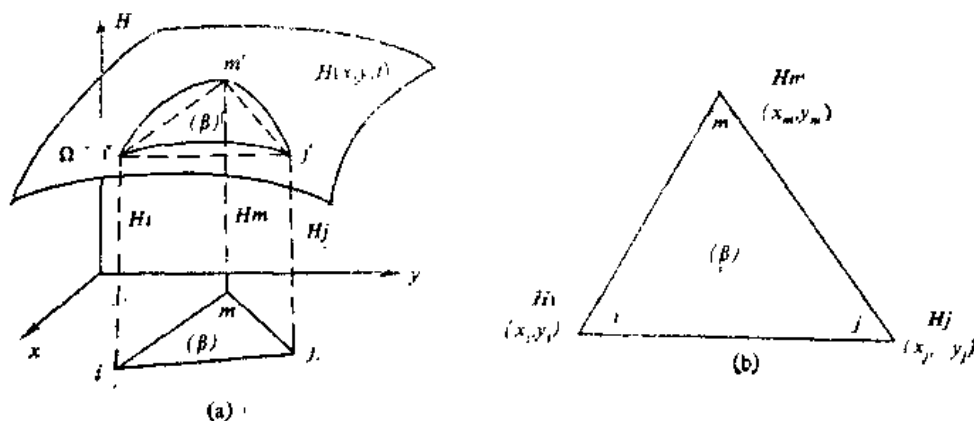


图 2-25

$$\begin{cases} \frac{\partial H^{(2)}(x, y, t)}{\partial x} = b \\ \frac{\partial H^{(2)}(x, y, t)}{\partial y} = c \end{cases} \quad (2-92)$$

恰好是  $t$  时刻面元  $(\beta)$  上沿  $x$  方向与  $y$  方向的水力坡度  $J_x^{(2)}(t)$  与  $J_y^{(2)}(t)$  的负值, 即

$$J_x^{(2)}(t) = -b, \quad J_y^{(2)}(t) = -c \quad (2-93)$$

因此重要的是求出  $b$  与  $c$ 。由克莱姆法则及行列式的计算知

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = 2\Delta_\beta \quad (2-94)$$

$\Delta_\beta$  为第  $(\beta)$  面元的面积。为了简化后面将要导出的公式, 引入下列符号:

$$\begin{cases} b_i = y_j - y_m, & b_j = y_m - y_i, & b_m = y_i - y_j \\ c_i = x_j - x_m, & c_j = x_m - x_i, & c_m = x_i - x_j \end{cases} \quad (2-95)$$

称为坐标轮换数。利用坐标轮换数可求得  $D_b$  与  $D_c$  为

$$\begin{cases} D_b = \begin{vmatrix} 1 & H_i(t) & y_i \\ 1 & H_j(t) & y_j \\ 1 & H_m(t) & y_m \end{vmatrix} = b_i H_i(t) + b_j H_j(t) + b_m H_m(t) \\ D_c = \begin{vmatrix} 1 & x_i & H_i(t) \\ 1 & x_j & H_j(t) \\ 1 & x_m & H_m(t) \end{vmatrix} = -[c_i H_i(t) + c_j H_j(t) + c_m H_m(t)] \end{cases} \quad (2-96)$$

将式 (2-94)、(2-96) 代入式 (2-91) 中, 由式 (2-93) 知

$$\begin{cases} J_x^{(2)}(t) = -\frac{1}{2\Delta_\beta} [b_i H_i(t) + b_j H_j(t) + b_m H_m(t)] \\ J_y^{(2)}(t) = -\frac{1}{2\Delta_\beta} [c_i H_i(t) + c_j H_j(t) + c_m H_m(t)] \end{cases} \quad (2-97)$$

由于

$$D_s = \begin{vmatrix} H_i(t) & x_i & y_i \\ H_j(t) & x_j & y_j \\ H_m(t) & x_m & y_m \end{vmatrix}$$

$$= H_i(t)(x_j y_m - x_m y_j) + H_i(t)(x_m y_i - x_i y_m) + H_m(t)(x_i y_j - x_j y_i)$$

令

$$\omega_i = x_j y_m - x_m y_j, \quad \omega_j = x_m y_i - x_i y_m, \quad \omega_m = x_i y_j - x_j y_i$$

则有

$$D_a = \omega_i H_i(t) + \omega_j H_j(t) + \omega_m H_m(t)$$

将  $D_a$ 、 $D_b$ 、 $D_c$ 、 $D$  代入式 (2-91)，求出  $a$ 、 $b$ 、 $c$ ，再代入式 (2-88)

若令

$$\lambda_L = \frac{1}{2\Delta_S} (b, x - c, y + \omega_L) \quad L = i, j, m$$

则水头模式可写成如形式

$$H^{(\beta)}(x, y, t) = \lambda_i H_i(t) + \lambda_j H_j(t) + \lambda_m H_m(t) \quad (2-98)$$

在式 (2-98) 中，如果令  $\beta = 1, 2, \dots$ ，那么在每一个面元上都定义着一个水头模式，只要将这些水头模式“拼接”起来，就可近似地表示  $\Omega$  上的真实水头函数  $H(x, y, t)$ 。

### 三、均衡单元的基本均衡方程

#### 1. 均衡单元的建立

单元的均衡方程与均衡单元的建立是密切相关的。任意一个点元  $i$  的均衡单元  $R_i$  是这样建立的： $R_i$  的围线由以点元  $i$  为公共顶点的面元外心的连线组成（图2-26）。相邻面元外心的连线一定经过公共线元的中点，比如  $a$ 、 $c$  等。均衡单元的建立相当于对渗流区域的第二次剖分（计算时并不作这样的具体剖分）。剖分以后，均衡单元与均衡单元之间既无裂缝亦无重叠。只有这样的剖分才能保证不规则网格有限差分法所给出的近似解随着点元数无限增多，且向  $i$  收缩而趋于零时，收敛于问题的精确解。

#### 2. 均衡单元的基本均衡方程

现分析均衡单元  $R_i$ （图2-26）上的水量均衡。

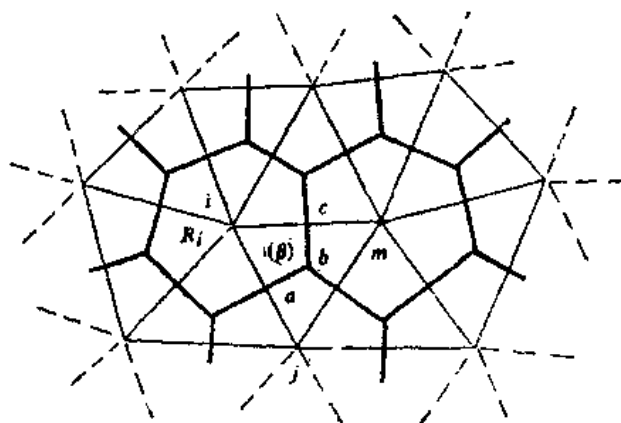


图 2-26

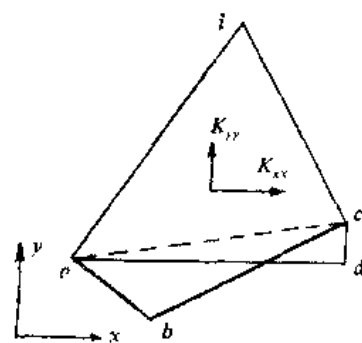


图 2-27

#### (1) 侧向净径流量

设流进  $R_i$  的侧向径流量为正，自  $R_i$  流出的侧向径流量为负。以  $Q_a(t)$  表示  $t$  时刻发生在  $R_i$  上的侧向净径流量，即侧向流入量减去侧向流出量。 $q_a^{(\beta)}(t)$  表示包含在  $R_i$  内 ( $\beta$ )

面元上过水断面 $\overline{ab}$ 与 $\overline{bc}$  (图 2—27) 的侧向径流量 (同样规定流进  $R_i$  为正, 自  $R_i$  流出为负)。于是有

$$Q_u(t) = \sum_{\beta}^p q_u^{(\beta)}(t) \quad (2-99)$$

$p$  为包含在  $R_i$  内的面元个数。

由图 2—27 可知, 通过 $\overline{ac}$ 与 $\overline{ab}$ 两个断面的侧向径流量是一样的 (这是由所选择的水头模式所决定)。按图 2—27 所取的坐标系及均衡单元与过水断面的相对位置可得

$$q_u^{(\beta)}(t) = MK_{yy}f_y^{(\beta)}(t) \cdot \overline{ad} - MK_{xx}f_x^{(\beta)}(t) \cdot \overline{cd} \quad (2-100)$$

其中  $M$  代表含水层的厚度。按惯用符号取:

$$T_{xx} = \begin{cases} K_{xx}M & \text{在承压区} \\ K_{xx}[h_c^{(\beta)}(t) - H_d^{(\beta)}] & \text{在潜水区} \end{cases}$$

$$T_{yy} = \begin{cases} K_{yy}M & \text{在承压区} \\ K_{yy}[h_c^{(\beta)}(t) - H_d^{(\beta)}] & \text{在潜水区} \end{cases}$$

其中  $h_c^{(\beta)}(t)$  表示  $t$  时刻 ( $\beta$ ) 面元上潜水面的高度,  $H_d^{(\beta)}$  为 ( $\beta$ ) 面元的平均底板标高。 $h_c^{(\beta)}(t)$  可取

$$h_c^{(\beta)}(t) = \frac{1}{3} [h_i(t) + h_j^{(\beta)}(t) + h_m^{(\beta)}(t)]$$

或取

$$h_c^{(\beta)}(t) = h_c(t)$$

由于 (图 2—6)

$$\overline{ad} = \frac{1}{2} (x_m - x_i) = \frac{1}{2} c_i$$

$$\overline{cd} = \frac{1}{2} (y_m - y_j) = \frac{1}{2} b_i$$

于是得

$$q_u^{(\beta)}(t) = -\frac{1}{2} b_i T_{xx} f_x^{(\beta)}(t) - \frac{1}{2} c_i T_{yy} f_y^{(\beta)}(t) \quad (2-101)$$

将式 (2—97) 代入得

$$q_u^{(\beta)}(t) = -\frac{1}{2} b_i T_{xx} \frac{1}{2\Delta_\beta} [b_i H_i(t) + b_j H_j(t) + b_m H_m(t)]$$

$$- \frac{1}{2} c_i T_{yy} \frac{1}{2\Delta_\beta} [c_i H_i(t) + c_j H_j(t) + c_m H_m(t)]$$

稍加整理后可写成如下形式

$$q_u^{(\beta)}(t) = -\frac{1}{4\Delta_\beta} [(T_{xx} b_i b_i + T_{yy} c_i c_i) H_i(t) + (T_{xx} b_i b_j + T_{yy} c_i c_j) H_j(t)$$

$$+ (T_{xx} b_i b_m + T_{yy} c_i c_m) H_m(t)] \quad (2-102)$$

现约定点元编号  $i$  始终位于均衡单元的中心, 且  $i$ 、 $j$ 、 $m$  保持逆时针排列, 则有

$$Q_u(t) = - \left[ \sum_{\beta=1}^p \frac{T_{xx} b_i^{(\beta)} b_i^{(\beta)} + T_{yy} c_i^{(\beta)} c_i^{(\beta)}}{4\Delta_\beta} H_i(t) \right.$$

$$\left. + \sum_{\beta=1}^p \frac{T_{xx} b_i^{(\beta)} b_j^{(\beta)} + T_{yy} c_i^{(\beta)} c_j^{(\beta)}}{4\Delta_\beta} H_j^{(\beta)}(t) \right]$$

$$+ \sum_{\beta=1}^p \frac{T_{xx} b_i^{(\beta)} b_m^{(\beta)} + T_{yy} c_i^{(\beta)} c_m^{(\beta)}}{4 \Delta \beta} H_m^{(\beta)}(t) \quad (2-103)$$

其中  $H_i(t)$  没有面元编号的标记, 表示编号  $i$  为  $R_i$  内所含面元公用。

例: 写出右图所示均衡单元侧向净径流量  $Q_s(t)$ 。

$$\begin{aligned} Q_s(t) = - \left\{ \right. & \frac{T_{xx} b_1^{(1)} b_1^{(1)} + T_{yy} c_1^{(1)} c_1^{(1)}}{4 \Delta_1} \\ & + \frac{T_{xx} b_1^{(2)} b_1^{(2)} + T_{yy} c_1^{(2)} c_1^{(2)}}{4 \Delta_2} + \frac{T_{xx} b_1^{(3)} b_1^{(3)} + T_{yy} c_1^{(3)} c_1^{(3)}}{4 \Delta_3} \\ & + \frac{T_{xx} b_1^{(4)} b_1^{(4)} + T_{yy} c_1^{(4)} c_1^{(4)}}{4 \Delta_4} + \frac{T_{xx} b_1^{(5)} b_1^{(5)} + T_{yy} c_1^{(5)} c_1^{(5)}}{4 \Delta_5} \left. \right\} H_1(t) \\ & + \left\{ \frac{T_{xx} b_1^{(2)} b_2^{(2)} + T_{yy} c_1^{(2)} c_2^{(2)}}{4 \Delta_2} + \frac{T_{xx} b_1^{(1)} b_2^{(1)} + T_{yy} c_1^{(1)} c_2^{(1)}}{4 \Delta_1} \right\} H_2(t) \\ & + \left\{ \frac{T_{xx} b_1^{(4)} b_3^{(4)} + T_{yy} c_1^{(4)} c_3^{(4)}}{4 \Delta_3} + \frac{T_{xx} b_1^{(2)} b_3^{(2)} + T_{yy} c_1^{(2)} c_3^{(2)}}{4 \Delta_2} \right\} H_3(t) \\ & + \frac{T_{xx} b_1^{(1)} b_4^{(1)} + T_{yy} c_1^{(1)} c_4^{(4)}}{4 \Delta_4} + \frac{T_{xx} b_1^{(3)} b_4^{(3)} + T_{yy} c_1^{(3)} c_4^{(3)}}{4 \Delta_3} \left. \right\} H_4(t) \\ & + \left\{ \frac{T_{xx} b_1^{(5)} b_5^{(5)} + T_{yy} c_1^{(5)} c_5^{(5)}}{4 \Delta_5} + \frac{T_{xx} b_1^{(1)} b_5^{(1)} + T_{yy} c_1^{(1)} c_5^{(5)}}{4 \Delta_1} \right\} H_5(t) \\ & + \left\{ \frac{T_{xx} b_1^{(1)} b_6^{(1)} + T_{yy} c_1^{(1)} c_6^{(1)}}{4 \Delta_1} + \frac{T_{xx} b_1^{(5)} b_6^{(5)} + T_{yy} c_1^{(5)} c_6^{(5)}}{4 \Delta_5} \right\} H_6(t) \left. \right\} \end{aligned}$$

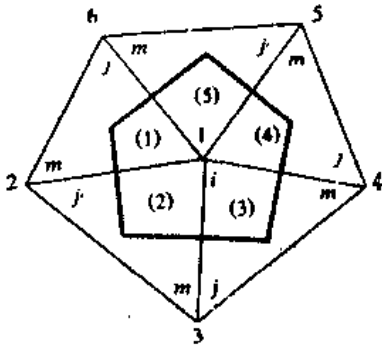


图 2-28

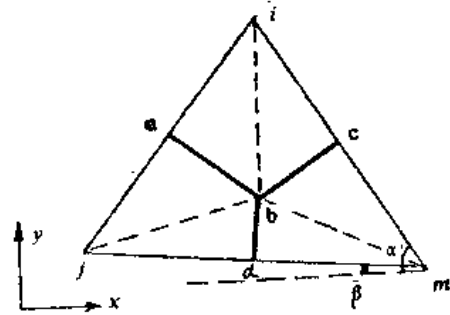


图 2-29

$b_1^{(1)} = y_4 - y_5$ , 即第 (4) 面元中的  $y_i - y_m$ ;

$c_2^{(2)} = x_1 - x_2$ , 即第 (2) 面元中的  $x_i - x_j$ ;

(2) 贮存量的变化量

以  $Q_s(t)$  表示  $t$  时刻由于  $R_i$  上侧向净径流量使水头变化所引起的贮存量的变化量,

$\left. \frac{\partial H}{\partial t} \right|_c$  表示  $R_i$  上由于侧向净径流量使水头变化的平均速度,  $B_i$  表示  $R_i$  的面积, 则

$$Q_s(t) = \left. \frac{\partial H}{\partial t} \right|_c B_i S \quad (2-104)$$

当含水层为潜水时, 以  $\mu$  取代  $S$ 。



以下分别导出式 (2-104) 中  $\left. \frac{\partial H}{\partial t} \right|_c$  及  $B_i$  的表达式。

由图2-26可以看出, 只要求出了  $iabc$  四边形的面积  $A_i^{(\beta)}$ ,  $B_i$  的值也就容易求得了, 但  $iabc$  四边形又是由  $\triangle iab$  和  $\triangle ibc$  构成 (图7-5)。记  $\triangle iab$  的面积为  $\triangle iab$ 。

$$\triangle iab = \frac{1}{2} \overline{ia} \cdot \overline{ab} = \frac{1}{2} \overline{ia} \cdot \frac{\overline{ab}}{\overline{ia}}$$

进一步又可写成

$$\triangle iab = \frac{1}{8} \overline{ij} \cdot \frac{\overline{ab}}{\overline{ia}} \quad (2-105)$$

而

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{ia}} = \operatorname{ctg} \angle iba = \frac{\cos \angle iba}{\sin \angle iba} = \frac{\cos \angle imj}{\sin \angle imj} = \frac{j \overline{im} \cos(\alpha - \beta)}{2 \Delta_\beta}$$

因

$$\begin{aligned} j \overline{im} \cos(\alpha - \beta) &= j \overline{im} (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \\ &= (x_m - x_j)(x_m - x_i) + (y_j - y_m)(y_i - y_m) \\ &= (b_i b_j + c_i c_j) \\ ij^2 &= (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 = b_m^2 + c_m^2 \end{aligned}$$

于是由式 (2-105) 可得

$$\triangle iab = -\frac{1}{16 \Delta_\beta} (b_i b_j + c_i c_j) (b_m^2 + c_m^2) \quad (2-106)$$

同理得

$$\triangle ibc = -\frac{1}{16 \Delta_\beta} (b_i b_m + c_i c_m) (b_j^2 + c_j^2) \quad (2-107)$$

将式 (2-106) 与式 (2-107) 相加, 即可得  $iabc$  四边形的面积  $A_i^{(\beta)}$

$$A_i^{(\beta)} = -\frac{1}{16 \Delta_\beta} [(b_i b_j + c_i c_j) (b_m^2 + c_m^2) + (b_i b_m + c_i c_m) (b_j^2 + c_j^2)] \quad (2-108)$$

同理可得

$$\begin{cases} A_j^{(\beta)} = -\frac{1}{16 \Delta_\beta} [(b_i b_j + c_i c_j) (b_m^2 + c_m^2) + (b_i b_m + c_i c_m) (b_j^2 + c_j^2)] \\ A_m^{(\beta)} = -\frac{1}{16 \Delta_\beta} [(b_i b_m + c_i c_m) (b_j^2 + c_j^2) + (b_i b_j + c_i c_j) (b_m^2 + c_m^2)] \end{cases} \quad (2-109)$$

显然, 式 (2-109) 在计算  $j$ 、 $m$  节点处均衡单元的面积  $B_j$  与  $B_m$  时是有用的。

现在来求  $\left. \frac{\partial H}{\partial t} \right|_c$ 。要在  $R_i$  上找到一点, 使得这一点的水头变化速度恰好等于  $\left. \frac{\partial H}{\partial t} \right|_c$ , 在

实践上是困难的。近似做法是取  $\frac{\partial H_i(t)}{\partial t} \approx \left. \frac{\partial H}{\partial t} \right|_c$ 。若令  $t_1 = t + \Delta t$ , 只要时间步长  $\Delta t$  取得足够小, 则可取

$$\frac{\partial H_i(t)}{\partial t} = \frac{H_i(t_1) - H_i(t)}{\Delta t} \quad (2-110)$$

将式 (2-108) 与式 (2-110) 代入式 (2-101) 中得

$$Q_i(t) = -\frac{S}{16 \Delta t} \sum_{\beta=1}^p \frac{1}{\Delta_\beta} \{ [b_i^{(\beta)} b_j^{(\beta)} + c_i^{(\beta)} c_j^{(\beta)}] [(b_m^{(\beta)})^2 + (c_m^{(\beta)})^2] \}$$

$$+ [b_i^{(\theta)} b_m^{(\theta)} + c_i^{(\theta)} c_m^{(\theta)}] \{ (b_i^{(\theta)})^2 + (c_i^{(\theta)})^2 \} \cdot [H_i(t_1) - H_i(t)] \quad (2-111)$$

假设在  $t$  至  $t_1$  之间,  $R_i$  上无其它垂向水量交换 (抽水、注水、蒸发、入渗、越流等), 则当时间步长  $\Delta t \rightarrow 0$  时有  $Q_u(t) = Q_s(t)$ 。在实际上由于  $\Delta t$  总是一个有限的值, 因此  $Q_u(t)$  常取加权平均值, 即

$$Q_s(t) = \theta Q_u(t_1) + (1 - \theta) Q_u(t) \quad (2-112)$$

其中  $\theta$  为权系数,  $0 \leq \theta \leq 1$ 。式 (2-112) 称为均衡单元的单元基本均衡方程。

根据均衡单元的建立原则, 每一个节点都将对应着一个均衡单元, 都可列出类似式 (2-112) 的方程, 从而组成一个关于水头的线性方程组 (第一边界点元由于水头是已知的, 自然是不需列出方程的)。由于  $\theta$  可取不同的值, 此线性方程组将有不同的解法。

#### 四、三种差分格式的应用

1. 取  $\theta = 0$ , 系显式差分格式, 此时, 式 (2-112) 可写成

$$H_i(t) = \sum_{\beta=1}^p \frac{T_{xx} b_i^{(\beta)} b_i^{(\beta)} + T_{yy} c_i^{(\beta)} c_i^{(\beta)}}{4\Delta_\beta} + \sum_{\beta=1}^p \frac{T_{xx} b_i^{(\beta)} b_i^{(\beta)} + T_{yy} c_i^{(\beta)} c_i^{(\beta)}}{4\Delta_\beta} H_i^{(\beta)}(t) \\ + \sum_{\beta=1}^p \frac{T_{xx} b_i^{(\beta)} b_m^{(\beta)} + T_{yy} c_i^{(\beta)} c_m^{(\beta)}}{4\Delta_\beta} H_m^{(\beta)}(t) = B_i S \frac{H_i(t) - H_i(t_1)}{\Delta t}$$

$H_i(t_1)$  的显式表达式为

$$H_i(t_1) = H_i(t) - \frac{\Delta t}{B_i S} \left[ H_i(t) \sum_{\beta=1}^p \frac{T_{xx} b_i^{(\beta)} b_i^{(\beta)} + T_{yy} c_i^{(\beta)} c_i^{(\beta)}}{4\Delta_\beta} \right. \\ + \sum_{\beta=1}^p \frac{T_{xx} b_i^{(\beta)} b_i^{(\beta)} + T_{yy} c_i^{(\beta)} c_i^{(\beta)}}{4\Delta_\beta} H_i^{(\beta)}(t) \\ \left. + \sum_{\beta=1}^p \frac{T_{xx} b_i^{(\beta)} b_m^{(\beta)} + T_{yy} c_i^{(\beta)} c_m^{(\beta)}}{4\Delta_\beta} H_m^{(\beta)}(t) \right] \quad (2-113)$$

其中  $i = 1, 2, \dots, M$ 。  $M$  为内点元与第二边界点元统一编号的最大号码。当  $\Delta t$  满足

$$\Delta t < \frac{SB_i}{\sum_{\beta=1}^p \frac{T_{xx} b_i^{(\beta)} b_i^{(\beta)} + T_{yy} c_i^{(\beta)} c_i^{(\beta)}}{4\Delta_\beta}} \quad (2-114)$$

时, 式 (2-113) 才是稳定的、收敛的。对每一个点元来讲, 满足稳定性与收敛性的时间步长是不一样的, 因此应取  $\Delta t$  的最小值。

2. 取  $\theta = 1$ , 系简隐式差分格式

式 (2-112) 有如下形式

$$\left( \sum_{\beta=1}^p \frac{T_{xx} b_i^{(\beta)} b_i^{(\beta)} + T_{yy} c_i^{(\beta)} c_i^{(\beta)}}{4\Delta_\beta} + \frac{B_i S}{\Delta t} \right) H_i(t_1) \\ + \sum_{\beta=1}^p \frac{T_{xx} b_i^{(\beta)} b_i^{(\beta)} + T_{yy} c_i^{(\beta)} c_i^{(\beta)}}{4\Delta_\beta} H_i^{(\beta)}(t) \\ + \sum_{\beta=1}^p \frac{T_{xx} b_i^{(\beta)} b_m^{(\beta)} + T_{yy} c_i^{(\beta)} c_m^{(\beta)}}{4\Delta_\beta} H_m^{(\beta)}(t) = \frac{B_i S}{\Delta t} H_i(t) \quad (2-115)$$

其中  $i = 1, 2, \dots, M$ 。可应用SOR法求解, 也可使用直接法求解 (后面将要讲到)。

3. 取  $\theta = \frac{1}{2}$ , 系中心隐式差分格式

此种情形, 式 (2-112) 有如下形式

$$\begin{aligned}
 & \left( \sum_{\beta=1}^p \frac{T_{xx}b_i^{(\beta)}b_i^{(\beta)} + T_{yy}c_i^{(\beta)}c_i^{(\beta)}}{8\Delta_\beta} + \frac{B_i S}{\Delta t} \right) H_i(t_1) \\
 & + \sum_{\beta=1}^p \frac{T_{xx}b_i^{(\beta)}b_j^{(\beta)} + T_{yy}c_i^{(\beta)}c_j^{(\beta)}}{8\Delta_\beta} H_j^{(\beta)}(t_1) \\
 & + \sum_{\beta=1}^p \frac{T_{xx}b_i^{(\beta)}b_m^{(\beta)} + T_{yy}c_i^{(\beta)}c_m^{(\beta)}}{8\Delta_\beta} H_m^{(\beta)}(t_1) \\
 & = \left( \frac{B_i S}{\Delta t} - \sum_{\beta=1}^p \frac{T_{xx}b_i^{(\beta)}b_j^{(\beta)} + T_{yy}c_i^{(\beta)}c_j^{(\beta)}}{8\Delta_\beta} \right) H_i(t) \\
 & - \sum_{\beta=1}^p \frac{T_{xx}b_i^{(\beta)}b_j^{(\beta)} + T_{yy}c_i^{(\beta)}c_j^{(\beta)}}{8\Delta_\beta} H_j^{(\beta)}(t) \\
 & - \sum_{\beta=1}^p \frac{T_{xx}b_i^{(\beta)}b_m^{(\beta)} + T_{yy}c_i^{(\beta)}c_m^{(\beta)}}{8\Delta_\beta} H_m^{(\beta)}(t) \quad (2-116)
 \end{aligned}$$

其中  $i=1, 2, \dots, M$ 。与简隐式差分方程一样, 组成  $M$  阶封闭线性方程组, 解法与简隐式差分格式一样。

### 五、边界条件的应用

1. 设  $i$  点元为已知水头值的第一类边界点元。此时对  $i$  点元处自然是不需要列出均衡方程的。但在靠边界的点元  $j$  或  $k$  处 (图2-30) 列均衡方程时, 将用到点元  $i$  的水头, 这时只要给出  $H_i(t_1)$  及  $H_i(t)$  即可。

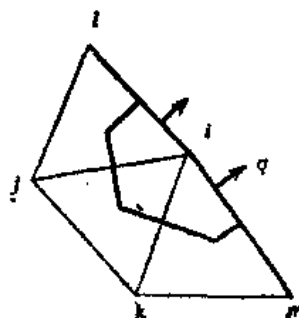


图 2-30

2. 设点元  $i$  为第二边界点元。此时单宽侧向径流量  $q$  已知 (图2-30), 且规定  $q$  流入为正, 流出为负。由于第二边界点元上的水头是未知的, 因此需要列出均衡方程。由图2-24与图2-1的对比中可以看出, 同样可将图2-30所示的流量边界视为隔水边界, 然后将  $(\bar{i}l + \bar{i}m)q/2$  按垂向交换水量参与式 (2-112) 的水均衡。

### 六、均衡方程组的解算方法

不论是  $\theta=1$  或是  $\theta=\frac{1}{2}$ , 所形成的线性方程组统称为均衡方程组。在生产实际中, 虽

然中心差分格式稳定性不足, 但这种不足仅表现在初始的几个时段, 或者均衡方程中某些量发生突变后的邻近几个时段。由于中心差分格式可在较大时间步长 (相对于简隐式差分格式) 时仍能取得较好的计算精度, 因此在生产中得到了广泛的应用。但就解算方法来讲, 正如前面已经指出的, 简隐式差分格式与中心隐式差分格式是没有区别的。

均衡方程组解算的实质, 就是给定渗流区域内  $t$  时刻的流场预报  $t_1$  时刻的流场。生产实际中常用的解法有以下两种。

第一种解法为SOR法。

若以  $k$  表示迭代次数,  $Q_i$  表示源汇项 (流入为正, 流出为负), 则迭代公式为

$$\begin{aligned}
W^{(k)} = & \left( \sum_{\beta=1}^p \frac{T_{xx}b_i^{(\beta)}b_i^{(\beta)} + T_{yy}c_i^{(\beta)}c_i^{(\beta)}}{8\Delta_\beta} + \frac{B_i S}{\Delta t} \right) H^{(k)}(t_1) \\
& + \sum_{\beta=1}^p \frac{T_{xx}b_i^{(\beta)}b_j^{(\beta)} + T_{yy}c_i^{(\beta)}c_j^{(\beta)}}{8\Delta_\beta} [H_j^{(\beta)}(t_1)]^{(k)} \\
& + \sum_{\beta=1}^p \frac{T_{xx}b_i^{(\beta)}b_m^{(\beta)} + T_{yy}c_i^{(\beta)}c_m^{(\beta)}}{8\Delta_\beta} [H_m^{(\beta)}(t_1)]^{(k)} \\
& + \left( \sum_{\beta=1}^p \frac{T_{xx}b_i^{(\beta)}b_i^{(\beta)} + T_{yy}c_i^{(\beta)}c_i^{(\beta)}}{8\Delta_\beta} - \frac{B_i S}{\Delta t} \right) H_i(t) \\
& + \sum_{\beta=1}^p \frac{T_{xx}b_i^{(\beta)}b_j^{(\beta)} + T_{yy}c_i^{(\beta)}c_j^{(\beta)}}{8\Delta_\beta} H_j^{(\beta)}(t) \\
& + \sum_{\beta=1}^p \frac{T_{xx}b_i^{(\beta)}b_m^{(\beta)} + T_{yy}c_i^{(\beta)}c_m^{(\beta)}}{8\Delta_\beta} H_m^{(\beta)}(t) \\
\Delta H^{(k)} = & \frac{W^{(k)}}{\frac{B_i S}{\Delta t} + \sum_{\beta=1}^p \frac{T_{xx}b_i^{(\beta)}b_i^{(\beta)} + T_{yy}c_i^{(\beta)}c_i^{(\beta)}}{8\Delta_\beta}} \\
H^{(k+1)}(t_1) = & H^{(k)}(t_1) + \omega \cdot \Delta H^{(k)}
\end{aligned} \tag{2-117}$$

当第  $k+1$  次的迭代值  $H^{(k+1)}(t_1)$  供与点元相邻的均衡单元迭代使用时, 相邻单元的迭代结果反过来又会影响  $i$  点元处均衡域的水均衡。所以迭代要进行多次, 直至  $\{\Delta H_j^{(k+1)}\}_{\max} \leq \epsilon$  时为止。 $\epsilon$  常取  $10^{-5} - 10^{-7} \text{ m}$ 。

第二种解法为直接方法。通常广泛使用乔累斯基 (Cholesky) 法。乔累斯基法的应用主要考虑到了均衡方程组的下述特点:

1. 对任一面元, 由直接验证可知

$$-T_{xx}b_i^{(\beta)}b_i^{(\beta)} - T_{yy}c_i^{(\beta)}c_i^{(\beta)} = T_{xx}b_i^{(\beta)}b_j^{(\beta)} + T_{yy}c_i^{(\beta)}c_j^{(\beta)} + T_{xx}b_i^{(\beta)}b_m^{(\beta)} + T_{yy}c_i^{(\beta)}c_m^{(\beta)}$$

进一步则有

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{\beta=1}^p \frac{T_{xx}b_i^{(\beta)}b_i^{(\beta)} + T_{yy}c_i^{(\beta)}c_i^{(\beta)}}{8\Delta_\beta} + \frac{B_i S}{\Delta t} \right| \\
& \gg \left| \sum_{\beta=1}^p \frac{T_{xx}b_i^{(\beta)}b_j^{(\beta)} + T_{yy}c_i^{(\beta)}c_j^{(\beta)}}{8\Delta_\beta} \right. \\
& \quad \left. + \sum_{\beta=1}^p \frac{T_{xx}b_i^{(\beta)}b_m^{(\beta)} + T_{yy}c_i^{(\beta)}c_m^{(\beta)}}{8\Delta_\beta} \right|
\end{aligned}$$

因此, 均衡方程组的系数矩阵具有对角线优势。

2.  $R_i$  的均衡方程仅包含点元  $i$  的水头及与  $i$  点元相邻的点元的水头, 因此均衡方程组的系数矩阵具有高度的稀疏性。在均衡方程组中, 将  $R_i$  的均衡方程排为第  $i$  个方程, 那么它的未知数的系数在系数矩阵中就处于第  $i$  行。若  $i$  及周围相邻点元数为  $p+1$ , 则系数矩阵的第  $i$  行就有  $m-p-1$  个是零元素, 通常  $p+1$  最多为 8。

3. 如  $i$ 、 $j$  两个点元相邻, 那么在  $R_i$  的均衡方程中一定有  $H_j(t)$ , 而在  $R_j$  的均衡方程中, 一定包含有  $H_i(t)$ , 且它们的系数又相同, 因此均衡方程的系数矩阵具有对称性。

上述特点可概括为, 均衡方程组的系数矩阵是一个具有对角线优势的高度稀疏的正定

对称矩阵。乔累斯基方法的应用恰好建立在此基础上。

为了给出乔累斯基解法的一般形式,用 $A$ 代表均衡方程组的系数矩阵, $X$ 代表未知水头的列向量, $B$ 代表常数列向量,则均衡方程组可以表示为

$$AX=B \quad (2-118)$$

由于 $A$ 具有上述三个特性,因此 $A$ 可被分解为:

$$A=L^T L_0 L \quad (2-119)$$

其中

$$L=\begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \cdots l_{1m} \\ & l_{22} & l_{23} \cdots l_{2m} \\ & & l_{33} \cdots l_{3m} \\ & 0 & & l_{mm} \end{bmatrix} \quad L_0=\begin{bmatrix} l_{11}^{-1} & & & \\ & l_{22}^{-1} & 0 & \\ & & l_{33}^{-1} & \\ & & 0 & l_{mm}^{-1} \end{bmatrix}$$

令 $L_1=L^T L_0$ , 则

$$L_1=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{12}l_{11}^{-1} & 1 & & 0 \\ l_{13}l_{11}^{-1} & l_{23}l_{22}^{-1} & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{1m}l_{11}^{-1} & l_{2m}l_{22}^{-1} & l_{3m}l_{33}^{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

于是 $A=L_1 L$ , 将两边展开则有

$$\begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{12} & \frac{l_{12}l_{12}}{l_{11}} + l_{22} & & \\ l_{13} & \frac{l_{13}l_{12}}{l_{11}} + l_{23} & \frac{l_{13}l_{13}}{l_{11}} + \frac{l_{23}l_{23}}{l_{22}} + l_{33} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{1,m} & \frac{l_{1,m}l_{12}}{l_{11}} + l_{2,m} & \frac{l_{1,m}l_{13}}{l_{11}} + \frac{l_{2,m}l_{23}}{l_{22}} + l_{3,m} & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ a_{12} & a_{22} & \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1,M} & a_{2,M} & a_{3,M} \cdots a_{M,M} \end{bmatrix}$$

对称                      对称

根据矩阵与矩阵相等的规则可以推知

$$a_{i,j}=l_{i,j} + \sum_{p=1}^{i-1} \frac{l_{ip}l_{pj}}{l_{pp}}$$

于是可得

$$l_{ij}=\begin{cases} a_{i,i} - \sum_{p=1}^{i-1} \frac{l_{ip}l_{ip}}{l_{pp}} & i \leq j \leq M \\ 0 & i > j \end{cases} \quad (2-120)$$

例如 $i=3, j=M$ , 由式(2-120)知

$$a_{3,M}=l_{3,M} + \frac{l_{1,M}l_{13}}{l_{11}} + \frac{l_{2,M}l_{23}}{l_{22}}$$

有了 $L$ 以后,求 $X$ 就容易了。由于 $L_1 L X = B$ ,若令 $L X = G$ ,则 $L_1 G = B$ 。于是问题又归结于求 $G$ ,求得 $G$ 之后, $X$ 就可求得了。由于

$$B = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{12}l_{11}^{-1} & 1 & & 0 \\ l_{13}l_{11}^{-1} & l_{23}l_{22}^{-1} & 1 & \\ \vdots & \vdots & & \\ l_{1,M}l_{11}^{-1} & l_{2,M}l_{22}^{-1} & l_{3,M}l_{33}^{-1} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \\ g_M \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} g_1 \\ l_{12}l_{11}^{-1}g_1 + g_2 \\ l_{13}l_{11}^{-1}g_1 + l_{23}l_{22}^{-1}g_2 + g_3 \\ \vdots \\ l_{1,M}l_{11}^{-1}g_1 + l_{2,M}l_{22}^{-1}g_2 + l_{3,M}l_{33}^{-1}g_3 + \cdots + g_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_M \end{bmatrix}$$

所以很容易推得

$$g_i = b_i - \sum_{p=1}^{i-1} \frac{l_{ip}}{l_{pp}} g_p, \quad i=1,2,\dots,M \quad (2-121)$$

而

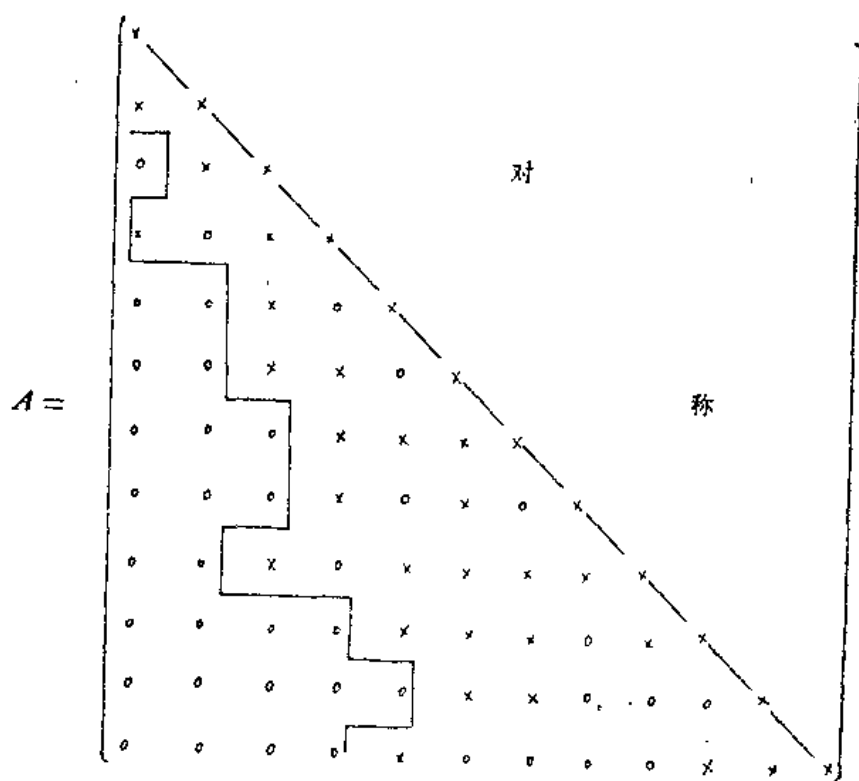
$$G = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} & \cdots & l_{1,M} \\ & l_{22} & l_{23} & \cdots & l_{2,M} \\ & & l_{33} & \cdots & l_{3,M} \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & l_{M,M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_M \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} l_{11}x_1 + l_{12}x_2 + l_{13}x_3 + \cdots + l_{1,M}x_M \\ l_{22}x_2 + l_{23}x_3 + \cdots + l_{2,M}x_M \\ l_{33}x_3 + l_{34}x_4 + \cdots + l_{3,M}x_M \\ \vdots \\ l_{M,M}x_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \\ g_M \end{bmatrix}$$

于是获得了求 $X$ 的通用公式

$$\begin{cases} x_M = \frac{g_M}{l_{M,M}} \\ g_i = \sum_{p=i+1}^M l_{ip}x_p \\ x_i = \frac{g_i}{l_{ii}}, \quad i=M-1, M-2, \dots, 1 \end{cases} \quad (2-122)$$

当在电子计算机上解算时,由于 $A$ 的稀疏对称性,可仅将 $A$ 中的折线右边及主对角线以下的部分元素(包括以 $\times$ 表示的非零元素及零元素)存入计算机内,不仅可节省机器内存且可大大提高计算速度。



## 第八节 二维流计算中的个别问题

### 一、抽（注）水井的抽（注）水量分配

当抽（注）水井不在点元上时，就存在一个水量分配问题。设在  $\beta$  面元上有一口抽水井  $W$ ，抽水量为  $q_w^{(\beta)}(t)$ 。通常按下式将水量分配给  $R_i$ 、 $R_j$ 、 $R_m$  三个均衡域去参与水均衡。

$$\begin{cases} q_i^{(\beta)}(t) = \frac{\Delta_i}{\Delta_\beta} q_w^{(\beta)}(t) \\ q_j^{(\beta)}(t) = \frac{\Delta_j}{\Delta_\beta} q_w^{(\beta)}(t) \\ q_m^{(\beta)}(t) = \frac{\Delta_m}{\Delta_\beta} q_w^{(\beta)}(t) \end{cases} \quad (2-123)$$

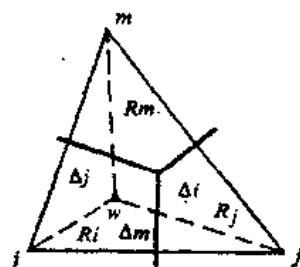


图 2-31

其中  $\Delta_i$ 、 $\Delta_j$ 、 $\Delta_m$  为图 2-31 中所表示的三个面积，例如  $\Delta_i = \Delta_{wjm}$ 。分配的水量在参与均衡域的水均衡时要注意流入为正，流出为负的原则。

式 (2-123) 的来源如下：

由式 (2-88) 可知，如果在  $(\beta)$  面元上  $H_i(t) = H_j(t) = H_m(t) = 1$ ，则  $H_{(x,y,t)}^{(\beta)}$  也一定等于 1。于是由式 (2-98) 得

$$\lambda_i + \lambda_j + \lambda_m = 1 \quad (2-124)$$

如果在  $(\beta)$  面元上分别令  $H_i(t) = x_i$ 、 $H_j(t) = x_j$ 、 $H_m(t) = x_m$  及  $H_i(t) = y_i$ 、 $H_j(t) = y_j$ 、 $H_m(t) = y_m$ ，则令

$$x_i \lambda_i + x_j \lambda_j + x_m \lambda_m = x \quad (2-125)$$

$$y_i \lambda_i + y_j \lambda_j + y_m \lambda_m = y \quad (2-126)$$

若取质量为  $\lambda_i$ 、 $\lambda_j$ 、 $\lambda_m$  的三个质点且满足式 (2-124) 关系, 将其分别放在  $(\beta)$  面元的三个点元上, 则三质点的重心坐标由静力学可知为

$$x = (x_i \lambda_i + x_j \lambda_j + x_m \lambda_m) / (\lambda_i + \lambda_j + \lambda_m) = x_i \lambda_i + x_j \lambda_j + x_m \lambda_m$$

$$y = (y_i \lambda_i + y_j \lambda_j + y_m \lambda_m) / (\lambda_i + \lambda_j + \lambda_m) = y_i \lambda_i + y_j \lambda_j + y_m \lambda_m$$

这正是式 (2-125) 与式 (2-126)。 $(\lambda_i, \lambda_j, \lambda_m)$  通常称为面元  $(\beta)$  的重心坐标。由  $(\lambda_i, \lambda_j, \lambda_m)$  按式 (2-125) 与式 (2-126) 在式 (2-124) 制约下计算的坐标  $(x, y)$ , 恰好就是在点元  $i, j, m$  放置质点为  $\lambda_i, \lambda_j, \lambda_m$  的质点组的重心坐标。现在应用面元重心坐标的概念来处理面元上抽(注)水井的水量分配问题。

设在面元  $(\beta)$  的三点元  $i, j, m$  上分别有三个虚拟水井进行抽(注)水, 抽水量分别为  $q_i^{(\beta)}$ ,  $q_j^{(\beta)}(t)$  及  $q_m^{(\beta)}(t)$ , 而且三个量的叠加满足

$$q_i^{(\beta)}(t) + q_j^{(\beta)}(t) + q_m^{(\beta)}(t) = q_w^{(\beta)}(t) \quad (2-127)$$

或者写成

$$\frac{q_i^{(\beta)}(t)}{q_w^{(\beta)}(t)} + \frac{q_j^{(\beta)}(t)}{q_w^{(\beta)}(t)} + \frac{q_m^{(\beta)}(t)}{q_w^{(\beta)}(t)} = 1$$

于是仿照式 (2-125) 与式 (2-126) 可写出

$$\begin{cases} x_i q_i^{(\beta)}(t) + x_j q_j^{(\beta)}(t) + x_m q_m^{(\beta)}(t) = x_w q_w^{(\beta)}(t) \\ y_i q_i^{(\beta)}(t) + y_j q_j^{(\beta)}(t) + y_m q_m^{(\beta)}(t) = y_w q_w^{(\beta)}(t) \end{cases} \quad (2-128)$$

式中  $x_w, y_w$  即为抽(注)水井的坐标。

将式 (2-127) 与式 (2-128) 联立求解, 即可得式 (2-123)。

抽(注)水井水量的分配在数值计算中占有十分重要的地位, 因此有必要进一步深入了解式 (2-123) 的意义。

如果一个抽水井位于点元  $i$  上, 那么此时抽水量由于  $\Delta_j = \Delta_m = 0$ , 而抽水量不再向点元  $j$  与点元  $m$  分配, 抽水量将直接参与均衡域  $R_i$  的水均衡。此时实际上将抽水井的井筒

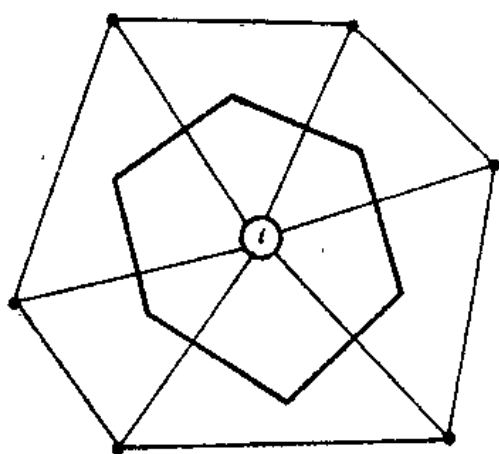


图 2-32

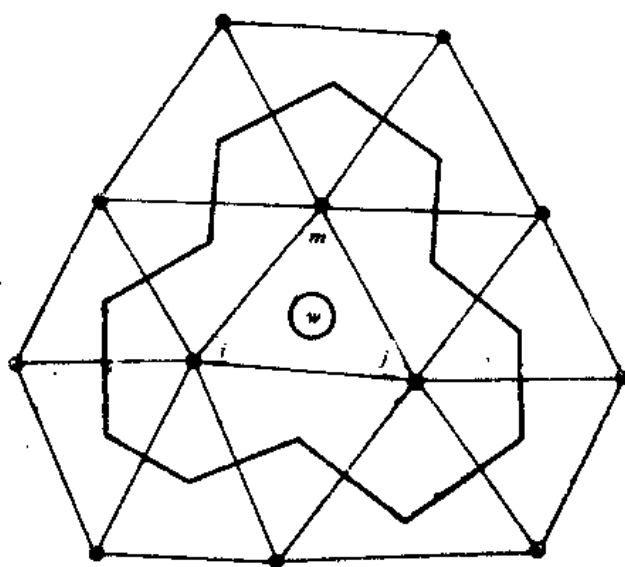


图 2-33



面积视为与  $R_i$  的面积一般大 (图2—32), 因此点元上的抽水是将与  $R_i$  上的蒸发量总量或越流流出量总量等价 (即总量为  $q^{(w)}(t)$ )。

对于面元 (B) 上的一口抽水井, 按式 (2—123) 分配后, 抽水井井筒面积将被“歪曲”为三个均衡域  $R_i, R_j$  与  $R_m$  面积的总和 (图2—33)。不同之处是相当于三个均衡域上的蒸发总量或越流流出总量不等而已。

如果三个抽水井位于成折线的三个点元  $i, j, m$  上, (图2—34), 抽水总量为  $Q$ 。此时不仅抽水井的井筒面积被“歪曲”, 而且三个抽水井与一条排水量为  $Q$  的  $i-j-m$  排水沟对含水层的激发是一样的。

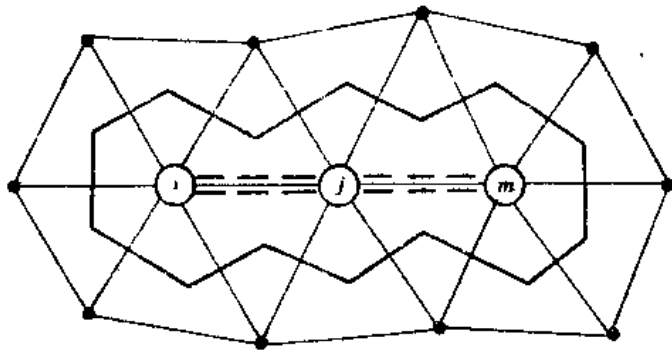


图 2—34

由此可以看出, 按式 (2—123) 分配抽 (注) 水量, 地下水流系统模拟的结果, 都将使抽水井的井壁降深值变小, 即“压平”了降落漏斗。对于大面积的地下水流系统模拟来讲, 这种“压平”不会构成严重的误差。对于小范围的地下水流系统模拟, 为了提高降落漏斗的模拟程度, 权宜办法是在井附近缩短线元, 使井与点元重合, 且两口井不要落在一条线元的两个端点上 (图2—35)。

为了进一步提高抽水井附近流场的模拟精度, 读者可参考有关“井点折奇”及“抽水井附近采用对数插值”的专门著作。

对于规则网格可按同样的办法处理。设在  $(i+1, j+1)$  均衡域内有一口抽水井, 抽水量为  $q(t)b_I, b_{II}, b_{III}, b_{IV}$  分别表示 I、II、III、IV 四块小面积 (图2—36)。分配给相应

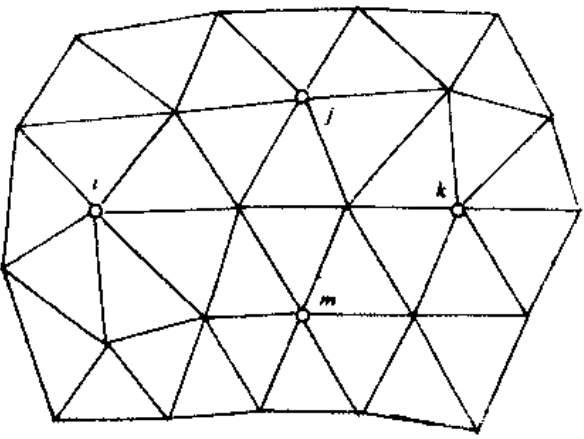


图 2—35

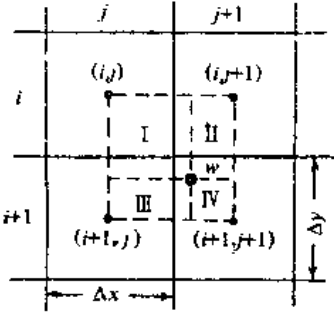


图 2—36

均衡域的水量分别按下式计算:

$$\left\{ \begin{aligned} q_{i,j}(t) &= \frac{b_s}{\Delta x \Delta y} q(t) \\ q_{i,j+1}(t) &= \frac{b_{\text{中}}}{\Delta x \Delta y} q(t) \\ q_{i+1,j}(t) &= \frac{b_{\text{左}}}{\Delta x \Delta y} q(t) \\ q_{i+1,j+1}(t) &= \frac{b_r}{\Delta x \Delta y} q(t) \end{aligned} \right. \quad (2-129)$$

当渗流区域内抽水井较多且均匀分布时, 可直接将抽水量全部分配至抽水井所在的均衡域参与均衡域的水均衡。

## 二、多层结构问题

多层结构的含水层在实际中是常见的, 多层结构含水层往往存在层间越流。图 2-37 为一典型的多层结构含水层。如以  $q_e$  表示越流量, 根据达西定律则有

$$q_e = \frac{k'}{m'} (\bar{h} - \underline{h}) \quad (2-130)$$

其中

$k'$  表示弱透水层的垂向渗透系数;

$m'$  表示弱透水层的厚度;

$\bar{h}$  表示弱透水层上部 (可以是潜水) 含水层中的水头;

$\underline{h}$  表示弱透水层下部含水层 (可以视为目的含水层) 中的水头。

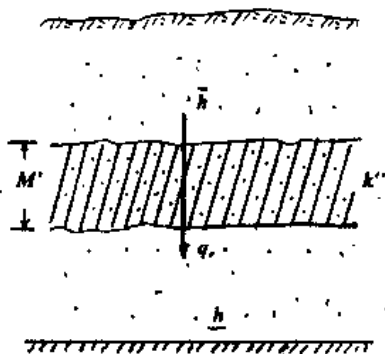


图 2-37

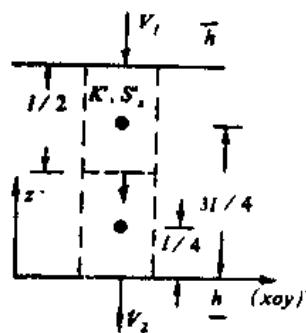


图 2-38

于是弱透水层上下含水层中的均衡方程将表示为

$$\left\{ \begin{aligned} \text{上部: } \bar{Q}_w(t) - \frac{k'}{m'} (\bar{h} - \underline{h}) &= \bar{Q}_s(t) \\ \text{下部: } \underline{Q}_w(t) + \frac{k'}{m'} (\bar{h} - \underline{h}) &= \underline{Q}_s(t) \end{aligned} \right. \quad (2-131)$$

如果  $\bar{h}$  为定水头, 那么就只要考虑解算式 (2-131) 中由第二个方程组成的线性方程组; 否则, 这时由第一式组成的是非线性方程组 (如果是潜水), 要通过线性化加以处理。

上述越流仅将弱透水层看作是输水的通道, 而实际上弱透水层的弹性释放量也是不可

忽略的。考虑到弱透水层的弹性释放量，上、下层的均衡方程应为

$$\begin{cases} \bar{Q}_u(t) - V_1 = \bar{Q}_i(t) \\ Q_u(t) + V_2 = Q_i(t) \end{cases} \quad (2-132)$$

$V_1$ 与 $V_2$ 可用差分方法求出（图2—38）。假定弱透水层的渗透系数为 $k'$ ，贮存率为 $S'_s$ ，而水头 $h'$ 假使近似服从线性变化规律，则

$$h' = \left(1 - \frac{z}{l}\right) \bar{h} + \frac{z}{l} \bar{h} \quad (2-133)$$

于是有

$$\frac{\partial h'}{\partial t} = \left(1 - \frac{z}{l}\right) \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} + \frac{z}{l} \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} \quad (2-134)$$

弱透水层中的水力坡度为

$$I = -\frac{h - \bar{h}}{l} \quad (2-135)$$

利用式（2—134）及式（2—135）可知在上面一个均衡域中，根据水均衡有

$$V_1 = \frac{k'}{l} (\bar{h} - h) + S'_s \frac{l}{2} \left( \frac{3}{4} \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} + \frac{1}{4} \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} \right) \quad (2-136)$$

或者写成

$$V_1 = \frac{k'}{l} (\bar{h} - h) + S'_s \frac{l}{2} \left( \frac{3}{4} \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} + \frac{1}{4} \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} \right) \quad (2-137)$$

同理可得

$$V_2 = \frac{k'}{l} (\bar{h} - h) + S'_s \frac{l}{2} \left( \frac{1}{4} \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} + \frac{3}{4} \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} \right) \quad (2-138)$$

将 $V_1$ 、 $V_2$ 代入式（2—132）中，上、下两层的均衡方程组联合求解。

### 三、井壁水位的计算

用有限差分法计算的水位 $H_{i,j}$ 是均衡域的平均水位值。因此当一个抽水井位于节点时，计算出来的水位值不能代表抽水井井壁的水位 $H_w$ 。为了计算井壁的水位，普里凯特（Prickett）提出了一个较为简单，亦能满足生产上精度要求的方法。若假定流场已近似稳定，在规则网格差分法中，可以近似认为抽水井与周围相邻四个节点间已形成稳定漏斗，此时漏斗的形状可用蒂姆公式描述。这个漏斗的实际降深值在井壁上要比差分法计算的值大，而相当于井所在节点的漏斗表面不在井壁而在一个较大的假想与井轴同心的圆上。在均质各向同性的条件下，设此圆的半径为 $r_f$ （图2—39）。以 $\Delta h$ 表示用有限差分法计算出来的井在节点与相邻节点间的水头差，设这一地段的导水系数为 $T$ ，抽水井流量为 $Q$ ，则根据蒂姆公式有

$$\Delta h = \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{\Delta x}{r_f} \quad (2-139)$$

而按差分法则有

$$Q = 4T \frac{\Delta h}{\Delta x} \Delta x = 4T \cdot \Delta h \quad (2-140)$$

联合式（2—139）与式（2—140）可求得

$$r_f = \frac{\Delta x}{\exp\left(\frac{\pi}{2}\right)} \quad (2-141)$$

设井筒半径为 $r_w$ ，在 $r_w$ 与 $r_f$ 间再次应用蒂姆公式

$$H_{i,j} - H_w = -\frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{r_i}{r_w} = -\frac{Q}{2\pi T} \left( \ln \frac{\Delta x}{r_w} - \frac{\pi}{2} \right)$$

或者写成

$$H_w = H_{i,j} - \frac{Q}{2\pi T} \left( \ln \frac{\Delta x}{r_w} - \frac{\pi}{2} \right) \quad (2-142)$$

对于潜水含水层则可按上式作近似处理。

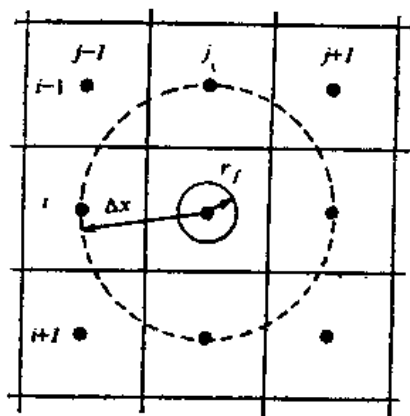


图 2-39

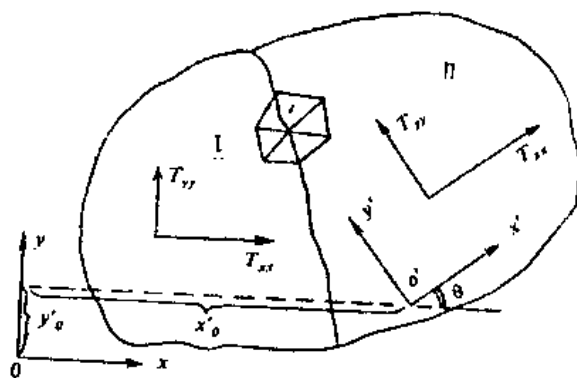


图 2-40

#### 四、非均质各向异性问题

在一个地下水流系统内， $T_{xx}$ 、 $T_{yy}$ 在方向与大小上保持不变是不可能的。为了简化计算，我们总可以把渗流区域划分成若干个区，使每个区内的 $T_{xx}$ 及 $T_{yy}$ 近似保持不变。如图2-40将渗流区域分成两个区。由于 $Q_w(t)$ 的计算是以 $T_{xx}$ 、 $T_{yy}$ 与 $\{x_0y\}$ 的坐标轴相平行为前提的，因此对II区（图2-40）的一些与坐标有关系的量要经过转轴处理（II区的坐标系为 $\{x'o'y'\}$ ）。由式（2-102）可以推知，对任意一个面元来讲，可有如下矩阵（称为面元渗透矩阵）

$$\frac{1}{4\Delta} \begin{pmatrix} T_{xx}b_i b_i + T_{yy}c_i c_i & T_{xx}b_i b_j + T_{yy}c_i c_j & T_{xx}b_i b_m + T_{yy}c_i c_m \\ \text{对} & T_{xx}b_j b_j + T_{yy}c_j c_j & T_{xx}b_j b_m + T_{yy}c_j c_m \\ & & T_{xx}b_m b_m + T_{yy}c_m c_m \end{pmatrix}$$

称

其中 $b$ 、 $c$ 、 $\Delta$ 均是坐标的函数，将其称为几何量。对II区来讲，由于 $T'_{xx}$ 、 $T'_{yy}$ 并不与 $\{x_0y\}$ 的坐标轴相平行，因此不能在 $\{x_0y\}$ 下写出这样的矩阵。但II区在 $\{x'o'y'\}$ 坐标系中可以写出

$$\frac{1}{4\Delta} \begin{pmatrix} T'_{xx}b'_i b'_i + T'_{yy}c'_i c'_i & T'_{xx}b'_i b'_j + T'_{yy}c'_i c'_j & T'_{xx}b'_i b'_m + T'_{yy}c'_i c'_m \\ \text{对} & T'_{xx}b'_j b'_j + T'_{yy}c'_j c'_j & T'_{xx}b'_j b'_m + T'_{yy}c'_j c'_m \\ & & T'_{xx}b'_m b'_m + T'_{yy}c'_m c'_m \end{pmatrix}$$

称

其中

$$\begin{cases} b'_i = y'_i - y'_m, & b'_j = y'_m - y'_i, & b'_m = y'_i - y'_j \\ c'_i = x'_j - x'_m, & c'_j = x'_m - x'_i, & c'_m = x'_i - x'_j \end{cases}$$

由解析几何学可知，当两个坐标系坐标轴间的夹角为 $\theta$ 时，则有

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta + x'_0$$

$$y' = -x \sin \theta + y \cos \theta + y_0'$$

于是可知, 比如

$$T'_{xx}b'_i b'_j + T'_{yy}c'_i c'_j = T'_{xx}(b_i \cos \theta - c_i \sin \theta)(b_j \cos \theta - c_j \sin \theta) \\ + T'_{yy}(b_i \sin \theta + c_i \cos \theta)(b_j \sin \theta + c_j \cos \theta)$$

这样在形成均衡方程的系数矩阵时都可以将局部坐标系变换到整体坐标系。

### 五、初始流场的模拟

在非稳定流计算中, 不论是规则网格的有限差分法或是不规则网格有限差分法, 每个节点上都要给出初始流场值 (初始条件), 以反映流场的初始状态。所谓初始流场, 并不是流场的“原始”流场, 而是计算时人为选定的某一个参考时刻的流场。这个参考时刻可以是水文年中的枯水期或者是一个抽水试验的开始时刻, 也可以是某个特定时刻, 但水头一定要在已经选定的时刻统一测量。究竟选择什么样的时刻作为计算时的初始时刻, 这取决于计算的目的和要求。

研究一个地下水流系统时, 通常节点数总是多于统一测量水位的观测孔, 何况还有一些统一测量水位点不一定能和节点重合, 因此绝大多数节点上的初始水位要根据统一测量水位通过插值求得。为了避免插值的随意性, 使插值模式具有较高的仿真程度和较强的唯一性和外推能力, “趋势面加残差”是一个较好的模拟模式。假设在流场内有  $m$  个统一测量水位点,  $n$  个节点。节点  $i$  的初始水头值  $H$  由下式计算:

$$\begin{cases} H_i = \hat{H}_i + \epsilon_i & i = 1, 2, \dots, n \\ \epsilon_i = \sum_{j=1}^m \frac{\epsilon_j}{R_j^k} / \sum_{j=1}^m \frac{1}{R_j^k} \end{cases} \quad (2-143)$$

式中  $\hat{H}_i$  为节点  $i$  的趋势值, 可取

$$\hat{H} = a + b_x x + c_y y$$

或

$$\hat{H} = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 x^2 + \hat{b}_2 xy + \hat{b}_3 y^2 + \hat{b}_4 x + \hat{b}_5 y$$

由于初始流场在一般情况下水力坡度较平缓, 趋势平面就可以取得较好的效果。趋势平面中的待定常数  $a$ 、 $b$  及  $c$  系由  $m$  个统一测量水位依最小二乘原理确定。

式 (2-143) 中的  $\epsilon_i$  为趋势值  $\hat{H}_i$  的修正值,  $\epsilon_j$  为第  $j$  号统一测量水位点上的趋势值与实测值之差,  $R_j$  为第  $i$  号节点到第  $j$  号统一测量水位点间的距离,  $k$  为  $R_j$  的幂。

初始流场如果模拟得不合适, 那么在计算开始的若干时段将会产生计算结果的异常。比如渗流场中已有强烈的开采, 而某些节点的水位计算结果不但不降反而升高, 这显然是不合理的。究其原因, 就在于初始流场没有满足水均衡原理。因此, 水均衡能否成立就成为一个初始流场模拟是否适当的重要标志。人们在确定初始流场时, 总是预先设法使这个场成为近似稳定场。若取  $\Delta t = 1d$ , 对初始流场而言应有

$$Q_{\text{流入}} + F - Q_{\text{流出}} \approx 0 \quad (2-144)$$

$F$  ——流场内各类源汇的总和;

$Q_{\text{流入}}$  ——越过边界流入到渗流区域的侧向径流量;

$Q_{\text{流出}}$  ——越过边界流出渗流区域的侧向径流量。

边界上点元  $i$  处的侧向流入量或侧向流出量  $q_i$  按下式计算 (图2-41)。

$$q_i = \sum_{\beta=p_1}^{p_2} \left\{ \frac{1}{4\Delta_\beta} [(T'_{xx}b_i^{(\beta)}b_i^{(\beta)} + T'_{yy}c_i^{(\beta)}c_i^{(\beta)})H_i + (T'_{xx}b_i^{(\beta)}b_i^{(\beta)} + T'_{yy}c_i^{(\beta)}c_i^{(\beta)})H_j + (T'_{xx}b_i^{(\beta)}b_m^{(\beta)} + T'_{yy}c_i^{(\beta)}c_m^{(\beta)})H_m] \right\} \quad (2-145)$$

$p_1-p_2$ 为边界上点元  $i$  周围三角形的编号。于是

$$Q_{\text{流入}} - Q_{\text{流出}} = \sum_{i=1}^N q_i$$

$N$ 为边界上的全部点元数。

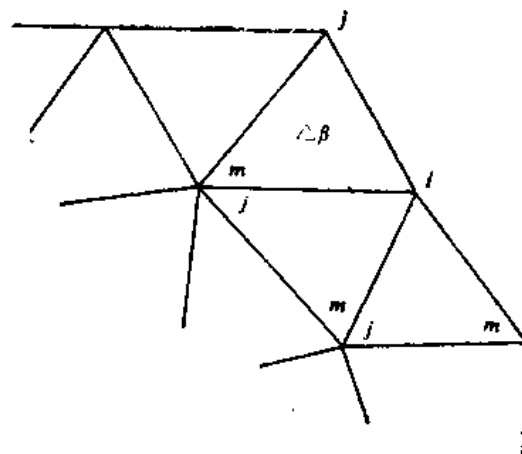


图 2-41

当初始流场模拟结果不满足式 (2-111) 所表示的水均衡方程时, 应从两个方面调整: 首先调整  $k$ ,  $k$  通常在 6—10 之间, 如果调整  $k$  后均衡误差很大, 就应该考虑导水系数确定的是否合适, 尤其是当导水系数采用外推或比拟值时更应注意。其次, 当上述调整仍不能减小均衡误差时, 就要考虑是否应该顾及日变幅的影响, 尽管日变幅很小, 但也会构成很大的水量值。

# 第三章 有 限 元 法

有限元法是由我国数学家冯康等人于1956年最先提出,当时广泛应用于结构力学。至60年代末, Javende (1968年) 将有限元法引用到地下水流问题的求解。随着电子计算机技术的飞速发展, 有限元法同有限差分法等数值法一样, 已成为解决复杂水文地质渗流问题的有效方法。

有限元法是利用剖分插值把区域连续求解的微分方程离散成求解线性代数方程组, 以近似解代替精确解。按照所依据的原理不同, 有限元法可分为变分有限元法、迦辽金有限元法和均衡有限元法等。

变分有限元法也称瑞里—里兹 (Rayleigh-Ritz) 法, 是从变分原理出发, 把微分方程的求解等价于求某个泛函的极小值问题, 再用剖分插值把求泛函的极小值问题化成求解线性代数方程组, 此法适用于稳定流问题的求解, 而对于某些非线性方程和找不到与之对应的等价泛函的非稳定流方程的求解则不适用。

迦辽金有限元法是从剩余加权法出发离散微分方程的, 其数学原理将在以后详细介绍。

均衡有限元法是从小均衡角度出发, 对区域进行三角剖分, 然后建立以任一结点  $i$  为公共顶点的各三角形的重心与相应边中点的连线所组成的区域均衡方程。如图3—1阴影部分所示, 即可得到一个关于水均衡的线性代数方程。对整个区域来讲, 将得到一个线性方程组。均衡有限元法虽然简单直观, 但在数学上认为是不严密的。

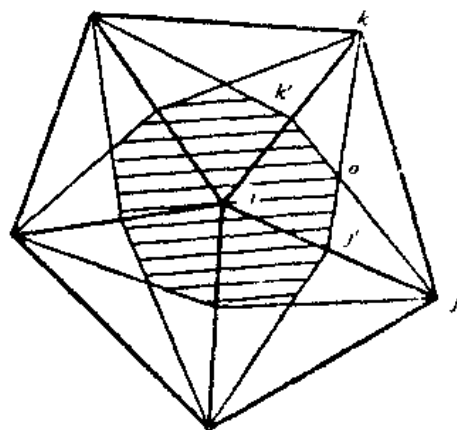


图 3—1

以上三种有限元法所依据的原理尽管不同, 但在解决相同条件下的地下水渗流问题时, 最终所得到的线性方程组是一致的。其中迦辽金有限元法在反应水文地质概念方面比较清楚, 并且在水文地质计算中应用较广, 因此作为本章讨论的重点。至于其它方法读者可参阅有关专著。

## 第一节 迦辽金有限元法原理

### ——剩余加权法

#### 一、剩余加权法

剩余加权法 (或加权剩余法) 是求微分方程近似解的一种方法。如有下列数学模型

$$\left\{ \begin{array}{ll} L(u) = \frac{d^2 u}{dx^2} + u + x = 0 & 0 \leq x \leq 1 \quad (a) \\ u(0) = 0 & (b) \\ u(1) = 0 & (c) \end{array} \right. \quad (3-1)$$

精确解（解析解） $u(x)$ 必须在区域 $\Omega$ （即 $[0, 1]$ ）中任一点都满足微分方程和相应的边界条件。对于复杂的问题，精确解往往不易找到，总是设法找到一个具有一定精度的近似解去代替精确解。

现用一试探函数 $\tilde{u}$ 表示欲解问题的近似解，并要求此函数满足相应的边界条件，令

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^n a_i \Phi_i \quad (3-2)$$

式中： $\Phi_i$ ——按特定要求选定的已知函数， $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ 线性独立，通常称为基函数。  
 $a_i$ ——待定系数。

由于 $\tilde{u}$ 是方程（a）的近似解，将 $\tilde{u}$ 代入（a）中，则使方程（a）的右端项不会等于零，而产生一个剩余量 $R$ ，即

$$L(\tilde{u}) = R$$

假若用某种方法选取与待定系数相对应的几个权函数 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ ，并要求权函数能使剩余量的加权积分值等于零，于是就可以得到由几个方程构成的方程组，即

$$\iint_{\Omega} R \omega_i dx dy = 0 \quad i=1, 2, \dots, n \quad (3-3)$$

域 $\Omega$ 可以是线域（区间）、面域或体域。

式（3-3）就称为剩余加权积分式。

通过求解方程组（3-3）式就可确定出几个待定系数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，再根据式（3-2）就可得到欲求数学模型的近似解。

## 二、迦辽金法

由于权函数 $\omega_i$ 的选取途径不同，就构成了不同的剩余加权法，如矩量法、配置法、最小二乘法 and 迦辽金法等，而迦辽金法应用较为广泛。该法是将权函数 $\omega_i$ 取为基函数 $\Phi_i$ ，故式（3-3）可写成：

$$\iint_{\Omega} R \Phi_i dx dy = 0 \quad i=1, 2, \dots, n \quad (3-4)$$

式（3-4）称为迦辽金方程。

例：用迦辽金法求式（3-1）的近似解。

设近似解为：

$$\tilde{u} = a_1 x(1-x) + a_2 x^2(1-x) + a_3 x^3(1-x) + \dots + a_n x^n(1-x) \quad (1)$$

可以验证， $\tilde{u}$ 满足式（3-1）中的边界条件（b）与（c）。式（1）的右端应取多少项，根据具体情况和精度要求来确定。

若在式（1）中仅取右端的第一项作为近似解，即

$$\tilde{u} = a_1 x(1-x)$$

代入式（3-1）中的（a）得剩余量

$$R = x + a_1(-2 + x - x^2)$$

取权函数 $\omega_1 = \Phi_1 = x(1-x)$ ，由式（3-3）得

$$\int_0^1 \omega_1 R dx = \int_0^1 x(1-x)[x + a_1(-2 + x - x^2)] dx = 0$$

$$a_1 = \frac{5}{18} = 0.278$$



由此得近似解

$$\tilde{u}_1 = 0.278x(1-x) \quad (2)$$

若取式(1)右端的前两项为近似解,即

$$\tilde{u}_1 = a_1x(1-x) + a_2x^2(1-x)$$

于是  $R = x + a_1(-2+x-x^2) + a_2(2-bx+x^2-x^3)$

取权函数 $\omega_1$ 与 $\omega_2$ 分别为

$$\omega_1 = \Phi_1 = x(1-x), \quad \omega_2 = \Phi_2 = x^2(1-x)$$

由式(1-3)得

$$\begin{cases} \int_0^1 \omega_1 R dx = \int_0^1 x(1-x)[x + a_1(-2+x-x^2) + a_2(2-bx+x^2-x^3)] dx = 0 \\ \int_0^1 \omega_2 R dx = \int_0^1 x^2(1-x)[x + a_1(-2+x-x^2) + a_2(2-bx+x^2-x^3)] dx = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{10}a_1 + \frac{3}{20}a_2 = \frac{1}{12} \\ \frac{3}{20}a_1 + \frac{13}{105}a_2 = \frac{1}{20} \end{cases}$$

由此二元一次方程组可解得 $a_1 = 0.1924$ ,  $a_2 = 0.1707$ , 而

$$\tilde{u}_2 = x(1-x)(0.1924 + 0.1707x). \quad (3)$$

本例的精确解已知为

$$u = \frac{\sin x}{\sin 1} - x$$

一般来讲, 迦辽金法比其它加权剩余法的精度要高。由下面的计算可以看出第二个近似解已相当接近于精确解, 其最大误差仅为2%。

$$x = 0.25, \quad \tilde{u}_1 = 0.0521, \quad \tilde{u}_2 = 0.0440, \quad u = 0.0440$$

$$x = 0.50, \quad \tilde{u}_1 = 0.0695, \quad \tilde{u}_2 = 0.0698, \quad u = 0.0697$$

$$x = 0.75, \quad \tilde{u}_1 = 0.0521, \quad \tilde{u}_2 = 0.0600, \quad u = 0.0601$$

## 第二节 迦辽金有限元基本方程

将式(3-4)用于解地下水渗流问题时, 关键在于如何构造基函数 $\Phi_i$ 。对于地下水流系统来讲, 渗流区域的边界几何形状及性质都比较复杂, 为了提高仿真度, 通常采用剖分插值法分片定义式(3-4)中的基函数。基函数确定后就可以找到满足边界条件的试探函数, 从而可得欲求问题的近似解, 这种方法称为迦辽金有限元法。

由此可见, 构造基函数是迦辽金有限元法重要的一步。

### 一、构造基函数 $\Phi_i$ :

将计算区域 $\Omega$ 分割成若干面元(或称为单元), 面元的形状可以有三角形、矩形、四边形以及曲边形等, 如图3-2所示。单元形状不同, 基函数的形式也不同。通常多采用简单的三角形单元, 并且采用线性函数。对于地下水流模拟计算来讲, 线性插值函数就能满足计算精度的要求了。因此, 高次非线性插值函数用得较少。

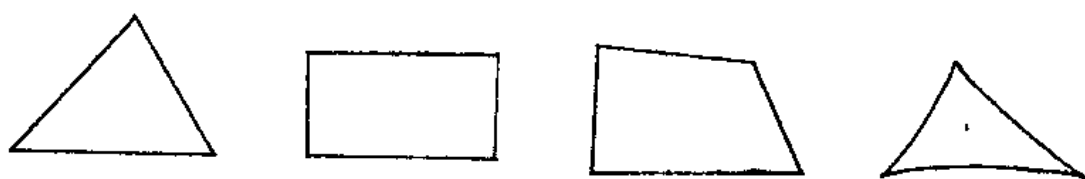


图 3-2

对渗流区域进行三角剖分，其方法及意义与第二章不规则网格有限差分法相同。每个小单元上待求的水头函数  $H(x, y, t)$  用线性插值函数  $\bar{H}(x, y, t)$  近似，即用平面水头面去代替曲面水头面。对整个渗流区来说，是用彼此相连且互不重叠的小三角平面组成的折面去逼近整个真实的水头曲面。

区域剖分后按结点和单元编号。从区域中任取一单元，其编号为  $\beta$ ，设此单元的三个结点的编号按逆时针顺序为  $i, j, k$ ，其坐标分别为  $(x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_k, y_k)$ ，水头为  $H_i(t), H_j(t)$  和  $H_k(t)$ 。

首先构造单元上的线性插值函数（亦称形状函数）。在单元  $\beta$  上，定义这样的线性形状函数  $\varphi_i(x, y)$ ，在结点  $i$  上其值为 1，在结点  $i$  的对边上其值为零，而在单元  $\beta$  内部则按线性变化求值，即

$$\begin{aligned} \varphi_i(x_i, y_i) &= 1, \quad \varphi_i(x_j, y_j) = 0, \quad \varphi_i(x_k, y_k) = 0 \\ \varphi_i(x, y) &= A_i + B_i x + C_i y \quad x, y \in \Delta\beta \end{aligned} \quad (3-5)$$

式中  $A_i, B_i, C_i$  为待定系数。

同理可定义线性形状函数  $\varphi_j(x, y), \varphi_k(x, y)$ ：

$$\begin{aligned} \varphi_j(x_j, y_j) &= 1, \quad \varphi_j(x_i, y_i) = \varphi_j(x_k, y_k) = 0 \\ \varphi_j(x, y) &= A_j + B_j x + C_j y \quad x, y \in \Delta\beta \\ \varphi_k(x_k, y_k) &= 1, \quad \varphi_k(x_i, y_i) = \varphi_k(x_j, y_j) = 0 \\ \varphi_k(x, y) &= A_k + B_k x + C_k y \quad x, y \in \Delta\beta \end{aligned}$$

由此可见，单元形状函数  $\varphi_i(x, y), \varphi_j(x, y), \varphi_k(x, y)$  的几何图象如图 3-3 所示，且单元形状函数只限定在单元内部有意义。

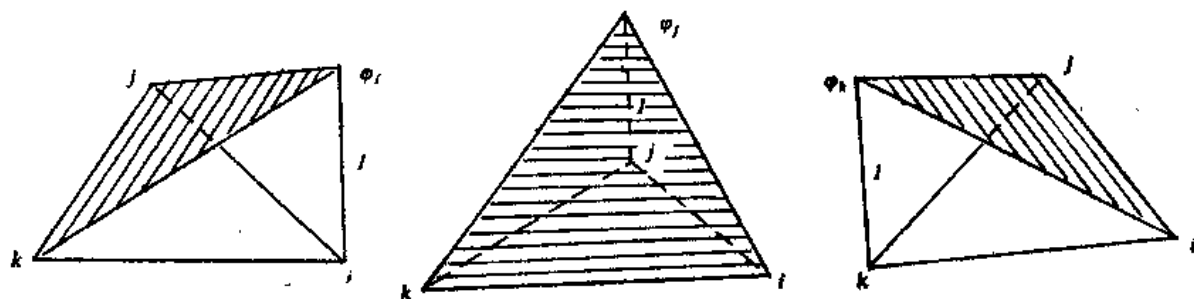


图 3-3

利用单元形状函数的定义就可以求出式 (3-5) 的待定函数。即

$$\begin{cases} A_i + B_i x_i + C_i y_i = 1 \\ A_i + B_i x_j + C_i y_j = 0 \\ A_i + B_i x_k + C_i y_k = 0 \end{cases}$$

按照克莱姆法则得:

$$A_i = \frac{1}{2\Delta_\beta} (x_j y_k - x_k y_j) = \frac{a_i}{2\Delta_\beta}$$

$$B_i = \frac{1}{2\Delta_\beta} (y_j - y_k) = \frac{b_i}{2\Delta_\beta}$$

$$C_i = \frac{1}{2\Delta_\beta} (x_k - x_j) = \frac{c_i}{2\Delta_\beta}$$

将  $A_i$ 、 $B_i$ 、 $C_i$  代入 (3-5) 式得:

$$\varphi_i(x, y) = \frac{1}{2\Delta_\beta} (a_i + b_i x + c_i y) \quad (3-6)$$

式中:  $a_i$ 、 $b_i$ 、 $c_i$  由式 (2-95) 确定, 其它下标  $j, k$  只要依次循环替换即可,  $\Delta_\beta$  为  $\beta$  三角形的面积, 由式 (2-94) 确定。

由此可见, 只要单元  $\beta$  三个顶点的坐标已知, 则单元形状函数  $\varphi_i(x, y)$ ,  $\varphi_j(x, y)$ ,  $\varphi_k(x, y)$  也就被唯一确定。

单元形状函数的意义, 如图 3-4 所示:

$$\begin{aligned} \varphi_i(x, y) &= \frac{1}{2\Delta_\beta} (a_i + b_i x + c_i y) = \frac{1}{2\Delta_\beta} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} \\ &= \frac{\Delta_i}{\Delta_\beta} \end{aligned}$$

$$\varphi_j(x, y) = \frac{\Delta_j}{\Delta_\beta}$$

$$\varphi_k(x, y) = \frac{\Delta_k}{\Delta_\beta}$$

可见,  $\varphi_i(x, y)$ 、 $\varphi_j(x, y)$ 、 $\varphi_k(x, y)$  就是在第二章曾定义过的点  $(x, y)$  的面积坐

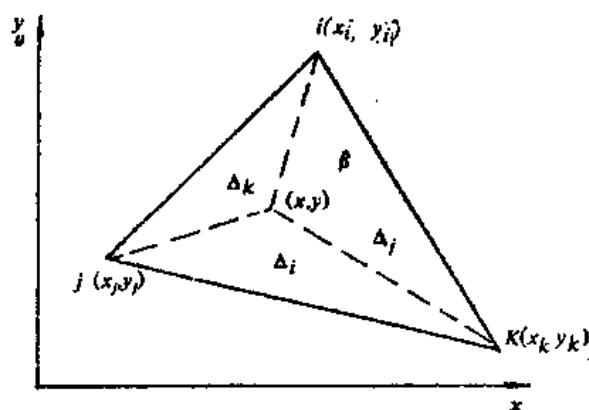


图 3-4

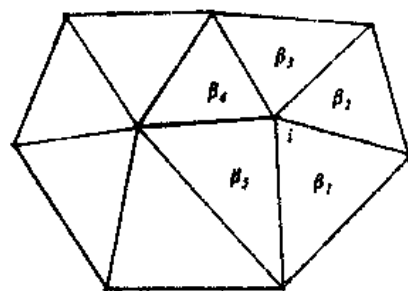


图 3-5

标, 写成通式为:

$$\varphi_i(x, y) + \varphi_j(x, y) + \varphi_k(x, y) = 1$$

$$\varphi_i(x, y) = \frac{d_i}{d_\beta} \quad (\text{下标 } i, j, k \text{ 轮换})$$

$d_i, d_\beta$  分别为图3—4中三角形  $\Delta_i, \Delta_\beta$  在  $\overline{jk}$  上的高。

对整个计算区域来说, 任一结点同时可以是几个小单元的公共顶点。如图3—5所示, 结点  $i$ , 同时是五个单元的公共顶点。因此, 在区域  $\Omega$  (包括边界) 上定义结点  $i$  的基函数  $\Phi_i(x, y)$ , 其形式应为:

$$\Phi_i(x, y) = \begin{cases} \varphi^{\beta_1}(x, y) & x, y \in \beta_1 \text{ 单元} \\ \varphi^{\beta_2}(x, y) & x, y \in \beta_2 \text{ 单元} \\ \varphi^{\beta_3}(x, y) & x, y \in \beta_3 \text{ 单元} \\ \varphi^{\beta_4}(x, y) & x, y \in \beta_4 \text{ 单元} \end{cases} \quad (3-8)$$

根据单元形状函数  $\varphi_i(x, y)$  的几何图象, 不难想象出基函数  $\Phi_i(x, y)$  的几何图象 (图3—6)。基函数  $\Phi_i(x, y)$  在结点  $i$  处值为 1, 在其它结点上的值为零, 而在与  $i$  结点有关联的三角单元内其值按线性变化, 即  $0 < \Phi_i(x, y) < 1$ 。对单元来说, 基函数等于单元形状函数, 即  $\Phi_i^\beta(x, y) = \varphi_i^\beta(x, y)$ 。所以基函数是一个分片定义的函数。它只与计算区的几何形状即结点坐标有关, 而与数学模型无关。

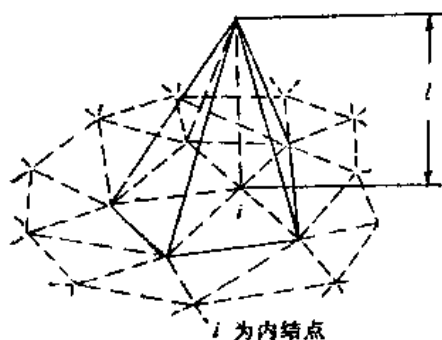


图 3—6

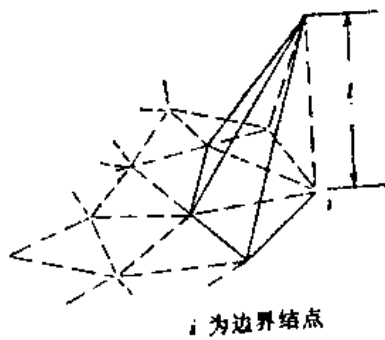
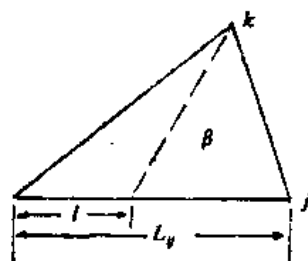


图 3—7



## 二、迎辽金有限元的基本方程

根据式 (3—2) 可写出渗流区域内任意一结点的近似水头  $\hat{H}(x, y, t)$  的表达式:

$$\hat{H}(x, y, t) = \sum_{j=1}^n H_j(t) \Phi_j(x, y) \quad (3-9)$$

而在任一单元  $\beta$  内任一点的近似水头可通过下式求得:

$$\hat{H}^\beta(x, y, t) = H_i(t) \varphi_i^\beta(x, y) + H_j(t) \varphi_j^\beta(x, y) + H_k(t) \varphi_k^\beta(x, y) \quad (3-10)$$

水头函数在线元 (单元的边上) 上的线性插值, 仍可按式 (3—10) 进行。若点  $(x, y)$  在单元  $\beta$  的线元  $\overline{ij}$  上 (图3—7), 由于  $\varphi_k^\beta(x, y) = 0$ ,

$$\hat{H}^\beta(x, y) = H_i(t) \varphi_i^\beta(x, y) + H_j(t) \varphi_j^\beta(x, y) \quad (3-11)$$

若定义  $l$  为线元  $\overline{ij}$  的弦长变量,  $L_{ij}$  为线元  $\overline{ij}$  的长度, 当点  $(x, y)$  在结点  $i$  上时, 则  $l=0$ ; 若在结点  $j$  上时, 则  $l=L_{ij}$ ; 当在线元  $L_{ij}$  上时, 则有:

$$\varphi_i^{\beta}(x, y) = \frac{\Delta j}{\Delta \beta} = \frac{dj}{d\beta} = \frac{l}{L_{ij}} \quad (3-12)$$

由于

$$\varphi_i^{\beta}(x, y) + \varphi_j^{\beta}(x, y) = 1$$

所以

$$\varphi_i^{\beta}(x, y) = 1 - \frac{l}{L_{ij}} \quad (3-13)$$

式(3-11)用弦长变量表示时, 则有如下形式:

$$\tilde{H}(x, y, t) = \left(1 - \frac{l}{L_{ij}}\right) H_i(t) + \frac{l}{L_{ij}} H_j(t) \quad (3-14)$$

式(3-14)是近似水头函数 $\tilde{H}(x, y, t)$ 在线元上的一种表达形式, 它说明单元的 $\bar{ij}$ 边上任一点的水头值可用 $i, j$ 两结点水头值进行线性插值求得。

至此, 将构造的基函数及式(3-9)代入迦辽金方程式(3-4), 可得:

$$\iint_{\Omega} L(\tilde{H}) \Phi_i dx dy = \sum_{\beta=1}^P \iint_{\Delta_{\beta}} L \left( \sum_{i=1}^n H_i \Phi_i \right) \Phi_i dx dy \quad (3-15)$$

式(3-15)称为迦辽金有限元的基本方程。由于采用的是三角形剖分线性插值的基函数, 式(3-15)又称迦辽金线状有限元方程。

### 第三节 承压二维非稳定流迦辽金有限元方程及其解法

#### 一、水文地质概念模型及其数学描述

假设计算区域 $\Omega$ 为非均质各向同性的承压含水层,  $\Gamma$ 为区域的边界。其中 $\Gamma_1$ 为第一类边界,  $\Gamma_2$ 为第二类边界。边界上的单位宽度补给量为 $q(x, y, t)$ , 区内垂直越流补给量为 $\epsilon(x, y, t)$ 。区内有 $v$ 口开采井, 第 $L$ 口井的开采量为 $Q_L (L=1, 2, \dots, v)$ , 井坐标为 $(x_L, y_L)$ 。区内任一点的水头标高为 $H(x, y, t)$ , 水流为承压二维非稳定达西流。

上述水文地质概念模型的数学描述如下:

$$\begin{cases} L(H) = \frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T \frac{\partial H}{\partial y} \right) + W = S \frac{\partial H}{\partial t} & x, y \in \Omega, t > 0 \\ H(x, y, 0) = H^0(x, y) & x, y \in \Omega \\ H(x, y, t) |_{\Gamma_1} = H^1(x, y, t) & x, y \in \Gamma_1, t > 0 \\ T \frac{\partial H}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = q(x, y, t) & n \text{ 为外法线 } x, y \in \Gamma_2, t > 0 \end{cases} \quad (3-16)$$

式中:  $T, S$ ——分别为含水层的导水系数和贮水系数

$$W = \epsilon(x, y, t) - \sum_{L=1}^v Q_L \delta(x - x_L, y - y_L),$$

进入含水层水量为正, 流出含水层水量为负,  $\delta(x - x_L, y - y_L)$ ——点 $(x_L, y_L)$ 处的 $\delta$ 函数。

#### 二、承压二维非稳定流的迦辽金有限元方程

(一) 用迦辽金方程将定解问题离散成常微分方程组

假设式(3-16)的近似解如式(3-9)的形式, 即

$$\tilde{H}(x, y, t) = \sum_{j=1}^n H_j(t) \Phi_j(x, y) \quad (3-17)$$

将式 (3-16) 中的微分方程及式 (3-17) 代入 (3-15) 式, 则有

$$\iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T \frac{\partial \tilde{H}}{\partial y} \right) + W - S \frac{\partial \tilde{H}}{\partial t} \right] \Phi_i dx dy = 0 \quad (3-18)$$

$i=1, 2, \dots, m$ ,  $m$  为内结点数与第二类边界点数之和。

现在计算式 (3-18) 中前两项的积分

式 (3-3) 中前两项应用分部积分和格林公式后有如下形式

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} \right) \Phi_i dx dy = - \iint_{\Omega} T \frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} dx dy + \int_{\Gamma_2} T \frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} n_x^0 \Phi_i dl \quad (3-19)$$

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left( T \frac{\partial \tilde{H}}{\partial y} \right) \Phi_i dx dy = - \iint_{\Omega} T \frac{\partial \tilde{H}}{\partial y} \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} dx dy + \int_{\Gamma_2} T \frac{\partial \tilde{H}}{\partial y} n_y^0 \Phi_i dl$$

式中:  $n_x^0, n_y^0$  —— 为  $x, y$  方向的单位向量。

由于第一类边界上水位已知, 式 (3-19) 右端第二项积分在第一类边界上的值应为零, 所以式中只有第二类边界上的积分。将式 (3-19) 代入式 (3-18) 并利用定解条件, 整理后得

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \left[ T \frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} + T \frac{\partial \tilde{H}}{\partial y} \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \right] dx dy + \iint_{\Omega} S \frac{\partial \tilde{H}}{\partial t} \Phi_i dx dy \\ & = \iint_{\Omega} W \Phi_i dx dy + \int_{\Gamma_2} q \Phi_i dl \end{aligned} \quad (3-20)$$

由于

$$\iint_{\Omega} = \sum_{\beta=1}^p \iint_{\Delta_{\beta}} \quad (3-21)$$

将式 (3-17), 式 (3-21) 代入式 (3-20), 整理后得

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{\beta=1}^p \iint_{\Delta_{\beta}} T_{\beta} \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \right) dx dy \right] H_i \\ & + \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{\beta=1}^p \iint_{\Delta_{\beta}} S_{\beta} \Phi_i \Phi_i dx dy \right] \frac{\partial H_i}{\partial t} \\ & = \sum_{\beta=1}^p \iint_{\Delta_{\beta}} W \Phi_i dx dy + \int_{\Gamma_2} q \Phi_i dl \end{aligned} \quad (3-22)$$

式中参数  $T_{\beta}, S_{\beta}$  在单元  $\beta$  内认为不变,  $p$  为全区剖分的单元总数,  $i=1, 2, \dots, m$ 。此处基函数的书写省略了关于单元的注记上标, 以后类同。

式 (3-22) 是第  $i$  个结点的有限元方程。根据基函数的特性, 在  $p$  个单元中真正对  $i$  结点方程有“贡献”的只有以  $i$  结点为公共顶点的周围单元, 而其他单元对  $i$  结点方程的“贡献”为零, 即在区域  $\Omega$  上的积分值与在图 3-8 中由粗线所围成的区域  $D_i$  上的积分值相等, 于是式 (3-20) 可写成:

$$\begin{aligned} & \iint_{D_i} \left( T \frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} + T \frac{\partial \tilde{H}}{\partial y} \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \right) dx dy + \iint_{D_i} S \frac{\partial \tilde{H}}{\partial t} \Phi_i dx dy \\ &= \iint_{D_i} W \Phi_i dx dy + \int_{\Gamma_i} q \Phi_i dx dy \end{aligned} \quad (3-23)$$

亦可写成

$$\begin{aligned} & \sum_{\beta=1}^{p'} \iint_{\Delta_\beta} \left( T \frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} + T \frac{\partial \tilde{H}}{\partial y} \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \right) dx dy + \sum_{\beta=1}^{p'} \iint_{\Delta_\beta} S \frac{\partial \tilde{H}}{\partial t} \Phi_i dx dy \\ &= \sum_{\beta=1}^{p'} \iint_{\Delta_\beta} W \Phi_i dx dy + \int_{\Gamma_i} q \Phi_i dx dy \end{aligned} \quad (3-24)$$

式中  $p'$  为与  $i$  结点有关联的单元个数。

式 (3-24) 能直观地反映出有限元方程与不规则网格有限差分方程在形式上的一致性。

为了解有限元方程总系数矩阵的特点, 现从式 (3-22) 出发推导有限元方程。

### 1. 渗透矩阵的计算

$$\begin{aligned} \text{设 } [A] &= \sum_{i=1}^n A_{i,j}, \quad i=1, 2, \dots, m \\ A_{i,j} &= \sum_{\beta=1}^p \iint_{\Delta_\beta} T_\beta \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned} \quad (3-25)$$

根据式 (3-6) 知

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x} = \frac{b_i}{2\Delta\beta}, \quad \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} = \frac{c_i}{2\Delta\beta} \quad (3-26)$$

而  $\Delta\beta = \iint_{\Delta\beta} dx dy$ , 按式 (2-94) 计算。现将式 (3-26) 代入式 (3-25) 得

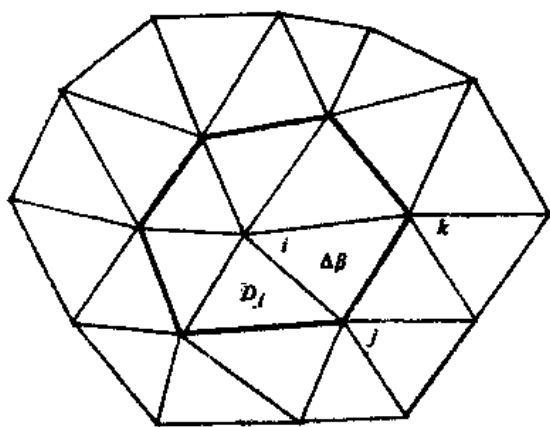


图 3-8

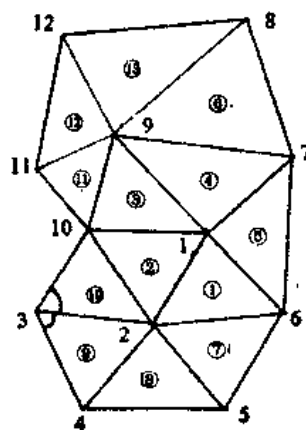


图 3-9

$$A_{i,j} = \begin{cases} \sum_{\beta=1}^p \frac{T_{\beta}}{4\Delta_{\beta}} (b_i b_j + c_i c_j) & i \neq j \\ \sum_{\beta=1}^p \frac{T_{\beta}}{4\Delta_{\beta}} (b_i^2 + c_i^2) & i = j \end{cases} \quad (3-27)$$

式中  $b_i, c_i$  等几何量由式 (2-95) 确定。

式 (3-27) 说明, 只要三角单元的顶点号码与  $i, j$  号码相同, 就按式 (3-27) 计算累加到  $A_{i,j}$  中去, 否则加零。如图 (3-9), 当  $i=1, j=1$  时, 则有

$$\begin{aligned} A_{1,1} = & \frac{1}{4} \left[ \frac{T_{\textcircled{1}}}{\Delta_{\textcircled{1}}} (b_1^2 + c_1^2) + \frac{T_{\textcircled{2}}}{\Delta_{\textcircled{2}}} (b_1^2 + c_1^2) \right. \\ & + \frac{T_{\textcircled{3}}}{\Delta_{\textcircled{3}}} (b_1^2 + c_1^2) + \frac{T_{\textcircled{4}}}{\Delta_{\textcircled{4}}} (b_1^2 + c_1^2) \\ & \left. + \frac{T_{\textcircled{5}}}{\Delta_{\textcircled{5}}} (b_1^2 + c_1^2) \right] \end{aligned}$$

而其它单元对此项的“贡献”为零。当  $i=1, j=2$  时, 则有

$$A_{1,2} = \frac{1}{4} \left[ \frac{T_{\textcircled{1}}}{\Delta_{\textcircled{1}}} (b_1 b_2 + c_1 c_2) + \frac{T_{\textcircled{2}}}{\Delta_{\textcircled{2}}} (b_1 b_2 + c_1 c_2) \right]$$

其它单元对  $A_{1,2}$  的“贡献”为零,  $\Delta_{\textcircled{2}}$  表示单元②的面积。

由式 (3-27) 可看出,  $[A]$  是由含水层的导水系数与单元几何量 ( $\Delta_{\beta}, b, c$ ) 组成, 且是一个  $m$  行  $n$  列的矩阵, 故将  $[A]$  称为渗透矩阵或导水矩阵。

## 2. 贮水矩阵的计算

$$\text{设 } [D] = \sum_{j=1}^n D_{i,j} \quad i=1, 2, \dots, m \quad (3-28)$$

$$D_{i,j} = \sum_{\beta=1}^p \iint_{\Delta_{\beta}} S_{\beta} \Phi_i \Phi_j dx dy \quad (3-29)$$

现在给出在计算中所需要的下列公式

$$\iint_{\Delta_{\beta}} \Phi_i^2 \Phi_j^2 \Phi_k^2 dx dy = 2\Delta_{\beta} \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!}$$

$$\iint_{\Delta_{\beta}} \Phi_i \Phi_j dx dy = \frac{\Delta_{\beta}}{12} \quad (3-30)$$

$$\iint_{\Delta_{\beta}} \Phi_i \Phi_j dx dy = \frac{\Delta_{\beta}}{6} \quad (3-31)$$

$$\iint_{\Delta_{\beta}} \Phi_i dx dy = \frac{\Delta_{\beta}}{3} \quad (3-32)$$

据此可求出式 (3-29) 中

$$D_{i,j} = \begin{cases} \sum_{\beta=1}^p \frac{\Delta_{\beta}}{12} S_{\beta} & i \neq j \\ \sum_{\beta=1}^p \frac{\Delta_{\beta}}{6} S_{\beta} & i = j \end{cases} \quad (3-33)$$



同理图3—2中, 当 $i=2, j=2$ 时, 则

$$D_{2,2} = \frac{S}{6}(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_8 + \Delta_9 + \Delta_7 + \Delta_{10}), \text{ 而其它单元对 } D_{2,2} \text{ 的“贡献”为零。当}$$

$i=1, j=2$ 时, 则  $D_{1,2} = \frac{S}{12}(\Delta_1 + \Delta_2)$ , 其它单元对  $D_{1,2}$  的“贡献”为零。

式(3—33)可以看出, 系数 $[D]$ 是由含水层的贮水系数与单元面积组成, 故将 $[D]$ 称为贮水矩阵或贮量矩阵。

### 3. 源汇项的计算

式(3—22)右端第一项为含水层的补给量和开采量的代数和, 简称为源汇项。由于

$$\sum_{\beta=1}^p \iint_{\Delta_\beta} W \Phi_i dx dy = \sum_{\beta=1}^p \iint_{\Delta_\beta} \epsilon_\beta \Phi_i dx dy - \sum_{\beta=1}^p \iint_{\Delta_\beta} \sum_{L=1}^v Q_L \delta(x-x_L, y-y_L) \Phi_i dx dy$$

而源项

$$\begin{aligned} \epsilon_i &= \sum_{\beta=1}^p \iint_{\Delta_\beta} \epsilon_\beta \Phi_i dx dy = \sum_{\beta=1}^p \epsilon_\beta \iint_{\Delta_\beta} \Phi_i dx dy \\ &= \sum_{\beta=1}^p \frac{\Delta_\beta}{3} \epsilon_\beta \end{aligned} \quad (3-34)$$

式(3—34)说明每个结点各得其总补给量的 $1/3$ 。对于一个结点 $i$ 来说, 所得补给量等于以该结点为公共顶点的周围三角形单元内所得补给总量的 $1/3$ 。

汇项为

$$\bar{Q}_i = \sum_{\beta=1}^p \iint_{\Delta_\beta} \sum_{L=1}^v Q_L \Phi_i \delta(x-x_L, y-y_L) dx dy \quad (3-35)$$

利用 $\delta$ 函数的性质

$$\iint_{\Delta_\beta} Q(x, y) \delta(x-x_L, y-y_L) dx dy = \begin{cases} Q(x_L, y_L) & x, y \in \Delta_\beta \\ 0 & x, y \notin \Delta_\beta \end{cases}$$

及

$$\iint_{L_\alpha} Q(x, y) \delta(x-x_L, y-y_L) dx dy = \begin{cases} \frac{\alpha}{2\pi} Q(x_L, y_L) & x, y \in L_\alpha \\ 0 & x, y \notin L_\alpha \end{cases}$$

式中:  $L_\alpha$ 表示以点 $(x_L, y_L)$ 为顶点夹角为 $\alpha$ 的扇形域。

顾及基函数 $\Phi_i$ 的特性, 式(3—35)可写成

$$Q_i = \begin{cases} \sum_{\beta=1}^p \sum_{L=1}^{v_\beta} Q_L \Phi_i(x_L, y_L) & \text{井位于 } \beta \text{ 单元内} \\ Q_i & \text{井位于内结点 } i \text{ 上} \\ \sum_{\beta=1}^p \frac{\sum \alpha_\beta}{2\pi} Q_i & \text{井位于外结点上} \end{cases} \quad (3-36)$$

式中:  $v_\beta$ ——为单元内井数

$\alpha_\beta$ ——单元顶点为第二类边界点时, 该单元在区内的夹角, 如图3—10所示的 $\alpha_5, \alpha_6$ 等。

式(3-36)说明,当井在单元内部时,则井开采量按其面积坐标分配到三个结点上,而对其它结点的分配量为零;当井在内结点*i*上,则井的开采量 $Q_i$ 全部为该结点*i*所有,而对其他结点的分配量为零;当井在第二类边界结点*i*上时,则该井的开采量不能全部分

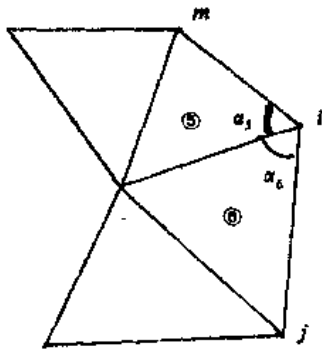


图 3-10

配给结点*i*,而是按  $\frac{\sum \alpha_e}{2\pi}$  比例分配到结点*i*上,开采量的另一部分归计算区外所有。

于是式(3-22)的源汇项可表示为

$$\sum_{e=1}^p \iint_{\Delta_e} W \Phi_i dx dy = \epsilon_i - \bar{Q}_i \quad (3-37)$$

式中  $\epsilon_i$ ,  $Q_i$  分别由式(3-34), (3-36)确定。如果 $\epsilon$ 是含水层的流出项(如蒸发量),则 $\epsilon_i$ 前面冠以负号。

#### 4. 边界流量的计算

式(3-22)右端第二项为边界流量项。设

$$G_i = \int_{\Gamma_2} q \Phi_i dl$$

如图3-10中*m, i, j*三点为第二类边界点,其相邻的边界长度为 $L_{i,m}$ ,  $L_{i,j}$ ,相应边上的单宽补给量分别为 $q_{i,m}$ ,  $q_{i,j}$ 。由基函数的特性得知

$$G_i = \int_{\Gamma_2} q \Phi_i dl = \int_{L_{i,j}} q_{i,j} \Phi_i dl + \int_{L_{i,m}} q_{i,m} \Phi_i dl$$

再根据基函数 $\Phi_i$ 在线元上的表达式(3-13)便可求得

$$G_i = -\frac{1}{2} (q_{i,j} L_{i,j} + q_{i,m} L_{i,m}) \quad (3-38)$$

这说明,第二类边界点*i*所得到的侧向流量等于该点两侧边界上所得到的侧向总流量的一半。当边界侧流量为排泄量时, $G_i$ 的前面应冠以负号。

现将式(3-24)、(3-25)、(3-28)、(3-33)、(3-35)、(3-36)、(3-38)代入式(3-22)得

$$\sum_{j=1}^n A_{i,j} H_j + \sum_{j=1}^n D_{i,j} \frac{dH_j}{dt} = \epsilon_i - Q_i + G_i \quad (3-39)$$

$i=1, 2, \dots, m$  ( $m$ 为内结点加第二类边界点数)

$j=1, 2, \dots, n$  ( $n$ 为结点总数)

若将定解问题(3-16)中的初始条件写成离散形式,且式(3-39)用矩阵形式表示,便可得到如下常微分方程的初值问题

$$\begin{cases} [A]_{m \times n} \{H\}_{n \times 1} + [D]_{m \times n} \left\{ \frac{dH}{dt} \right\}_{n \times 1} = \{F\}_{m \times 1} \\ \{H\}_{n \times 1}|_t = \{H^0\}_{n \times 1} \end{cases} \quad (3-40)$$

式中:矩阵 $[A]$ 、 $[D]$ 中的各元素分别按式(3-27)、(3-33)确定。由于系数 $[A]$ 、 $[D]$ 完全由含水层的参数和单元几何量组成,所以只要给出单元剖分结果及参数,它们就被确定。

$F_i = \varepsilon_i - \bar{Q}_i + G_i$ , 分别按式 (3-34)、(3-36)、(3-38) 确定。由于  $[F]$  矩阵各元素完全由水量组成, 故将矩阵  $[F]$  称为水量矩阵。

式 (3-40) 就是用迦辽金有限元方程将定解问题式 (3-16) 离散成常微分方程的初值问题, 即由常微分方程组成的承压水迦辽金有限元方程。

(二) 将常微分方程组的初值问题离散成线性代数方程组——有限元方程

有限元方程 (3-40) 是定解问题 (3-16) 从空间上离散的结果, 如再对式 (3-40) 从时间上进行离散, 便可得到最终的有限元方程, 即线性代数方程组。

现将式 (3-40) 写成差分方程

$$[A]\{H(t)\} + [D]\left\{\frac{H(t) - H(t_0)}{\Delta t}\right\} = \{F\} \quad (3-41)$$

对式 (3-41) 采用不同的差分格式, 便可得到不同表达形式的有限元方程。

取显式:

$$\left[\frac{D}{\Delta t}\right]\{H(t)\} = \{F\} - \left([A] - \left[\frac{D}{\Delta t}\right]\right)\{H(t_0)\} \quad (3-42)$$

取隐式:

$$\left([A] + \left[\frac{D}{\Delta t}\right]\right)\{H(t)\} = \{F\} + [D]\{H(t_0)\} \quad (3-43)$$

取对称差分格式:

$$\left(\frac{[A]}{2} + \left[\frac{D}{\Delta t}\right]\right)\{H(t)\} = \{F\} - \left(\frac{[A]}{2} - \left[\frac{D}{\Delta t}\right]\right)\{H(t_0)\} \quad (3-44)$$

若将式 (3-42)、(3-43)、(3-44) 写成统一形式则有

$$[B]_{m \times n}\{H(t)\}_{n \times 1} = \{C\}_{m \times 1} \quad (3-45)$$

式中:  $[B]$  称为有限元方程的总系数矩阵;

$\{C\}$  为共常数项。

式 (3-45) 的展开式为

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \cdots B_{1m} & \vdots & B_{1,m+1} \cdots B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} \cdots B_{2m} & \vdots & B_{2,m+1} \cdots B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{m1} & B_{m2} \cdots B_{mm} & \vdots & B_{m,m+1} \cdots B_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_m \\ H'_{m+1} \\ \vdots \\ H'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_m \end{pmatrix} \quad (3-46)$$

因为第一类边界点水位已知, 式 (3-46) 左边含有已知项, 若将已知项移到方程的右端, 则式 (3-46) 为下列形式:

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \cdots B_{1m} \\ B_{21} & B_{22} \cdots B_{2m} \\ \vdots & \vdots \\ B_{m1} & B_{m2} \cdots B_{mm} \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_m \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} B_{1,m+1} & B_{1,m+2} \cdots B_{1n} \\ B_{2,m+1} & B_{2,m+2} \cdots B_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ B_{m,m+1} & \cdots B_{mn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} H'_{m+1} \\ H'_{m+2} \\ \vdots \\ H'_{m+n} \end{pmatrix}$$

或

$$[B]_{m \times m}\{H\}_{m \times 1} = \{C\}_{m \times 1} - [B]_{m \times (n-m)}\{H'\}_{m \times (n-m)} \quad (3-47)$$

式 (3-47) 就是定解问题 (3-16) 的迦辽金有限元方程, 也是所要求的承压含水层的迦

辽金有限元方程。式(3—47)是由 $m$ 个方程组成的方程组,每个方程有 $m$ 列。当计算区域全是二类边界点时,则式(3—47)右端第二项就不存在,即

$$[B]_{m \times m} \{H\}_{m \times 1} = \{C\}_{m \times 1} \quad (3-48)$$

有限元法是从区域的总水均衡出发,由“面”到“点”推导出线性代数方程组——有限元方程。有限差分法则是从“点”水均衡出发,由“点”到“面”推导出线性代数方程组——有限差分方程。

非稳定流有限元法的计算与非稳定流有限差分法一样,也将时间分成若干个小时段,一个时段一个时段地向前推进。每计算一个时段就要解式(3—48)方程组一次,求得每一时段的末时刻水位就作为下一个时段的初时刻水位。如此重复计算下去,直至指定的计算时刻。

有限元法对时段内水量的处理方法与有限差分法一样,认为在一个时段内水量是常数。一般取时段内的平均水量,但从多个时段来看,水量仍然是时间 $t$ 的函数。

### 三、有限元线性代数方程组总系数矩阵的形成

由式(3—27)、(3—33)可看出,系数矩阵中的每个元素都是由水文地质参数和单元几何量组成。由于水文地质参数是已知的,因此要形成有限元方程系数,首先要形成单元几何量。单元几何量形成后,通常不是按式(3—27)、(3—33)所示的循环次序形成方程系数,而是采用单元叠加形成方程系数,即按单元系数下标所指示的行、列逐次叠加到总系数矩阵中去。

#### 1. 单元几何量的计算

考虑到计算井开采量的分配时,需要用面积坐标,因此每个单元的10个几何量 $a_i, b_i, c_i$ (按 $i, j, k$ 循环)以及单元面积 $\Delta_\mu$ 都需要以数组形式存贮,以备后用。如果单元内没有开采井,则几何量 $a_i, b_i, c_i$ (按 $i, j, k$ 循环)就无须贮存。

下面给出计算单元几何量的子程序SJM。

程序中的数组**AI**(500,3),**BJ**(500,3),**CJ**(500,3),和**FB**(500)分别贮存单元的 $a_i, b_i, c_i$ (按 $i, j, k$ 循环)和面积 $\Delta_\mu$ 。

计算单元几何量子程序

**CJ**(500,3)—存单元几何量 $c_i, c_j, c_k$ , **FB**(500)—存单元面积, **NP**—三角单元总数, **AI**(500,3)—存单元几何量 $a_i, a_j, a_k$ , **XY**( $n, 2$ )—结点坐标数组, 1为X, 2为Y, **BJ**(500,3)—存单元几何量 $b_i, b_j, b_k$

SUBROUTINE SJM

COMMON/ZX/ N, M, NS2, NP, NV, ND, NQP, NE, IG, IW, LX, JS,

NVO, IJK(500,3)

1, IPQP(500), IK(100), NPD(500), IS2(0:100)

COMMON/SJ/BJ(500,3), CJ(500,3), AI(500,3), FB(500)

COMMON/SW/XY(400,2), XYP(100,2), TSE(10,6), T(50)

DO 50 IP=1, NP

FB(IP)=0.0

DO 40 I1=1, 3

IF(I1.EQ.3) THEN

```

I2=1
      ELSE
I2=I1+1
END IF
IF(I1.EQ.1)THEN
I3=3
      ELSE
I3=I1-1
END IF
J1=IJK(IP,I1)
J2=IJK(IP,I2)
J3=IJK(IP,I3)
AI(IP,I1)=XY(J2,1)*XY(J3,2)-XY(J3,1)*XY(J2,2)
FB(IP)=FB(IP)+AI(IP,I1)/2.0
BJ(IP,I1)=XY(J2,2)-XY(J3,2)
CJ(IP,I1)=XY(J3,1)-XY(J2,1)
40 CONTINUE
50 CONTINUE
WRITE(*,'(//''FB=''//)')
WRITE(*,'(8F10.0)')(FB(I), I=1, NP)
END

```

## 2. 单元系数矩阵与总矩阵的形成

式 (3—27) 的几何量  $(b_i b_j + c_i c_j)$ , 其中下标  $i$  表示总系数矩阵的行号,  $j$  表示其列号。由于一个单元的三个顶点编号都有做行号 (第一类边界点除外) 和列号的可能, 因此, 按它们的排列组合形式共有九种。

$$\begin{aligned}
 [A]_p &= \frac{T}{4\Delta_p} \begin{pmatrix} b_i \\ b_j \\ b_k \end{pmatrix} (b_i b_j b_k) + \frac{T}{4\Delta_p} \begin{pmatrix} c_i \\ c_j \\ c_k \end{pmatrix} (c_i c_j c_k) \\
 &= \frac{T}{4\Delta_p} \begin{bmatrix} b_i^2 + c_i^2 & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_j b_i + c_j c_i & b_j^2 + c_j^2 & b_j b_k + c_j c_k \\ b_k b_i + c_k c_i & b_k b_j + c_k c_j & b_k^2 + c_k^2 \end{bmatrix} \quad (3-49)
 \end{aligned}$$

式 (3—49) 称为单元渗透矩阵。

$$[D]_p = \frac{S\Delta_p}{3} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (3-50)$$

称为单元贮水矩阵。

从式(3-49)、(3-50)可以看出,单元系数矩阵是一个对称矩阵,每一个元素在总系数矩阵中的位置,决定于该元素下标所表示的行、列号。

在形成总系数矩阵时,不需要将所有单元的 $[A]_e$ 和 $[D]_e$ 形成后,再按行、列号逐次累加形成总系数矩阵,而是计算一个单元后,就将其中各元素按下标所指示的行、列号叠加到方程总系数矩阵 $[B]$ 和 $[C]$ 的相应位置上。之后,循环计算第二个单元的 $[A]_2$ , $[D]_2$ ,再把第二个单元的 $[A]_2$ , $[D]_2$ 中的各元素,同样按其下标所指示的行、列号叠加到 $[B]$ 和 $[C]$ 中的相应位置上。如此循环下去,当所有单元的系数矩阵 $[A]_e$ , $[D]_e$ 依次计算完后,方程的总系数矩阵也就形成了。

现以图3-11中的部分区域为例,示范总系数矩阵的形成。设其水文地质条件为均质各向同性的承压含水层,水流为二维非稳定流,边界为第二类边界,全区有均匀补给,其强度为 $\epsilon$ ,边界补给量为 $q(t)$ ,结点4上有开采井,其流量为 $Q_1$ 。

图3-11的剖分中,每一个单元的三个顶点号码已列在图3-11的表中,如第①单元的三个顶点号码为1,2,3。需要注意的是,一个单元的结点 $i$ 一旦确定后,其它结点号码必须按逆时针方向的顺序排列,但 $i$ 的选择可以任意。如果①单元,将结点1确定为 $i$ ,则 $j$ , $m$ 两点就是2,3;若将结点2确定为 $i$ ,则 $j$ , $m$ 两点就是3,1。于是根据 $i$ , $j$ , $m$ 的顺序就可写出第①个单元的系数矩阵

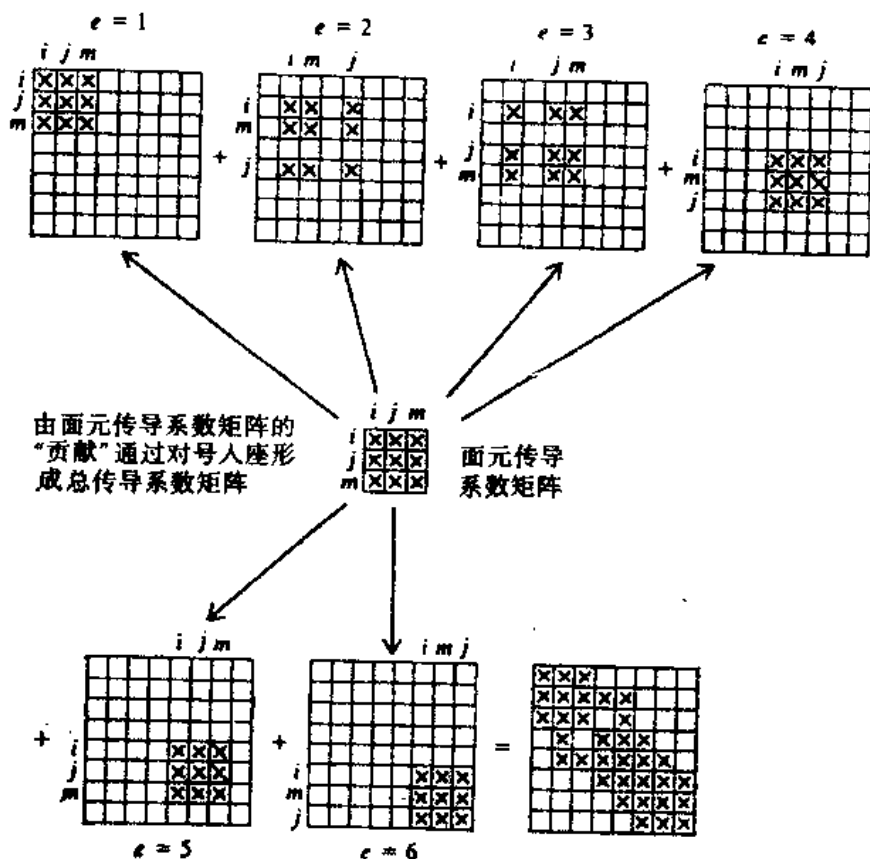


图 3-11

$$[A]_{①} = \frac{T}{4\Delta_{①}} \begin{bmatrix} b_1^2 + c_1^2 & b_1b_2 + c_1c_2 & b_1b_3 + c_1c_3 \\ b_2b_1 + c_2c_1 & b_2^2 + c_2^2 & b_2b_3 + c_2c_3 \\ b_3b_1 + c_3c_1 & b_3b_2 + c_3c_2 & b_3^2 + c_3^2 \end{bmatrix}$$

$$[D]_{\text{①}} = \frac{S\Delta_{\text{①}}}{3} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

现在来研究总系数矩阵的形成。顾及式 (3—44) 与 (3—45)，将  $[A]_{\text{①}}$ 、 $[D]_{\text{①}}$  中各元素分别叠加到总系数矩阵  $[B]$  中第 1、2、3 行与第 1、2、3 列的交叉处，如图 3—11 中  $\beta=1$  的表格所示。因为本例题共有 8 个结点，且边界为第二类边界，所以最后形成的有限元方程系数矩阵应是 8 行 8 列。图 3—11 中每个方格都是 8 行 8 列，其中“×”表示元素不为零，空者为零。例如第 ① 单元系数矩阵中的  $\left[ \frac{1}{8\Delta_{\text{①}}} (b_1^2 + c_1^2) + \frac{S}{6\Delta t} \Delta_{\text{①}} \right]$  元素应加在总系数矩阵

的第一行第一列上，即属于  $B_{11}$  的一部分。另外可看出，虽然  $\frac{1}{8\Delta_{\text{①}}} (b_2b_3 + c_2c_3)$  和  $\frac{T}{8\Delta_{\text{①}}} (b_1b_2 + c_1c_2)$  这两个元素的值相等，但它们所指示的总系数矩阵中的位置却不一样，它们的位置是对称于对角线的，即前者位于  $B$  的第二行第三列上，后者则位于  $B$  的第三行第二列的位置上。当把  $[A]_{\text{①}}$ 、 $[D]_{\text{①}}$  中各元素全部加到  $[B]$  中后，计算第 ② 个单元的  $[A]_{\text{②}}$ 、 $[D]_{\text{②}}$  (见图 3—11)，再将  $[A]_{\text{②}}$ 、 $[D]_{\text{②}}$  中各元素按所指示的下标加到  $[B]$  矩阵中去。如此计算下去，直至第 ⑥ 个单元算完加完为止，这时总系数矩阵  $B$  也就形成了。图 3—11 形象地说明了这一过程。总系数矩阵  $[B]$  中任一元素为：

$$B_{i,j} = \sum_{\beta=1}^{p'} \left[ \frac{T}{8\Delta_{\beta}} (b_i b_j + c_i c_j) \right] + \frac{S\Delta_{\beta}}{3\Delta t} \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{当 } i=j \\ \frac{1}{4} & \text{当 } i \neq j \end{cases} \quad (3-51)$$

这说明总系数矩阵  $[B]$  中任一元素  $B_{i,j}$  应等于单元系数矩阵中其下标与  $i, j$  相同的元素之和。式中  $p'$  是以  $i$  为公共顶点的单元个数。例如：

$$\begin{aligned} B_{2,3} &= \frac{T}{8} \left[ \frac{1}{\Delta_{\text{①}}} (b_2b_3 + c_2c_3) + \frac{1}{\Delta_{\text{②}}} (b_2b_3 + c_2c_3) \right] + \frac{S}{12\Delta t} (\Delta_{\text{①}} + \Delta_{\text{②}}) \\ B_{2,2} &= \frac{T}{8} \left[ \frac{1}{\Delta_{\text{①}}} (b_2^2 + c_2^2) + \frac{1}{\Delta_{\text{②}}} (b_2^2 + c_2^2) + \frac{1}{\Delta_{\text{③}}} (b_2^2 + c_2^2) \right] \\ &\quad + \frac{S}{6\Delta t} (\Delta_{\text{①}} + \Delta_{\text{②}} + \Delta_{\text{③}}) \end{aligned}$$

可见  $B$  中每个元素所包含的单元系数的个数是不同的。通过下列结点单元关联表可以看出图 3—11 总系数矩阵  $[B]$  中各元素所包含的单元系数的个数。如  $B_{55}$  包括了四个单元 (②、③、④、⑤) 的系数。也可以根据结点单元关联表直接写出总系数矩阵中的各元素。例如：

$$\begin{aligned} B_{55} &= \frac{T}{8} \left[ \frac{1}{\Delta_{\text{④}}} (b_5^2 + c_5^2) + \frac{1}{\Delta_{\text{⑤}}} (b_5^2 + c_5^2) + \frac{1}{\Delta_{\text{⑥}}} (b_5^2 + c_5^2) \right] \\ &\quad + \frac{S}{6\Delta t} (\Delta_{\text{④}} + \Delta_{\text{⑤}} + \Delta_{\text{⑥}}) \end{aligned}$$

表 3—1 图3—11的结点单元关联表

行 \ 列	1	2	3	4	5	6	7	8
1	①	①	①	0	0	0	0	0
2	①	①②③	①②	③	0	0	0	0
3	①	①②	①②	0	②	0	0	0
4	0	③	0	③④	③④	④	0	0
5	0	0	②	③④	②③④⑤	①⑤	⑤	0
6	0	0	0	①	①⑤	④⑤⑥	⑤⑥	⑥
7	0	0	0	0	③	⑤⑥	⑤⑥	⑥
8	0	0	0	0	0	⑥	⑥	⑥

### 3. 常数项{C} (对于一个时段而言) 的形成

常数矩阵{C}由水量矩阵{F}和初始水头项组合而成, 所以在形成总系数矩阵{B}的同时, 也要形成常数矩阵{C}的一部分。因为{C}中初始水头项的系数与单元系数矩阵中的元素只差一个负号, 即:

$$c_i = F_i - \sum_{j=1}^n \left( \frac{A_{ij}}{2} - \frac{D_{ij}}{\Delta t} \right) H_j^0$$

图3—11中的例子, 按结点单元关联表可写出 $c_i$ 中的初始水头部分:

$$\begin{aligned} c_1 = & - \left[ \frac{T}{8\Delta_1} (b_1 b_1 + c_1 c_1) - \frac{S}{12\Delta t} \Delta_1 \right] H_1^0 \\ & - \left\{ \frac{T}{8} \left[ \frac{1}{\Delta_1} (b_1 b_2 + c_1 c_2) + \frac{1}{\Delta_2} (b_2 b_2 + c_2 c_2) \right] - \frac{S}{12\Delta t} (\Delta_1 + \Delta_2) \right\} H_2^0 \\ & - \left\{ \frac{T}{8} \left[ \frac{1}{\Delta_1} (b_1^2 + c_1^2) + \frac{1}{\Delta_2} (b_2^2 + c_2^2) \right] - \frac{S}{6\Delta t} (\Delta_1 + \Delta_2) \right\} H_3^0 \\ & - \frac{T}{8} \left[ \frac{1}{\Delta_2} (b_2 b_3 + c_2 c_3) - \frac{S}{12\Delta t} \Delta_2 \right] H_6^0 \end{aligned}$$

所以, 计算机执行时, 总系数矩阵和常数项{C}中的初始水头项是同时形成的。

对常数项{C}中的水量, 要根据具体条件进行计算, 在图3—11所示的例题中, 由于结点4是开采井, 则常数项 $c_3$ 、 $c_1$ 可写为:

$$c_3 = \frac{\varepsilon}{3} (\Delta_1 + \Delta_2) + \frac{1}{2} (q_{31} L_{31} + q_{35} L_{35})$$

$$c_1 = \frac{\varepsilon}{3} (\Delta_3 + \Delta_4) + \frac{1}{2} (q_{12} L_{12} + q_{16} L_{16}) - \frac{Q_4}{2}$$

最后形成的常数项矩阵{C}, 其中任一元素可写为:

$$\begin{aligned} c_i = & \sum_{j=1}^{p'} \left( \frac{\varepsilon}{3} \Delta_j - \theta^n \varphi_j^0 \right) + \frac{1}{2} (q_{i,i-1} L_{i,i-1} + q_{i,i+1} L_{i,i+1}) \\ & - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{p'} \left\{ \frac{T}{8\Delta_k} (b_i b_j + c_i c_j) - \frac{S}{3\Delta t} \Delta_k \begin{cases} 1 & i=j \\ 2 & i \neq j \\ \frac{1}{4} & i \neq j \end{cases} \right\} H_j^0 \end{aligned} \quad (3-52)$$



图3—11所示例题的有限元方程，最后形成的形式为：

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & B_{22} & B_{23} & B_{24} & B_{25} & 0 & 0 & 0 \\ & & B_{33} & 0 & B_{35} & 0 & 0 & 0 \\ \text{对} & & & B_{44} & B_{45} & B_{46} & 0 & 0 \\ & & & & B_{55} & B_{56} & B_{57} & 0 \\ & & \text{称} & & & B_{66} & B_{67} & B_{68} \\ & & & & & & B_{77} & B_{78} \\ & & & & & & & B_{88} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \\ H_5 \\ H_6 \\ H_7 \\ H_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \end{Bmatrix}$$

由系数矩阵可以看出，关于 \$i\$ 行来说，只有与 \$i\$ 结点有关联的结点号码所指示的列数上的元素不为零，而其它列数上的元素为零。如果区域部分的结点数越多，则所形成的总系数矩阵 \$(B)\$ 的零元素就越多，因此总系数矩阵 \$(B)\$ 是一个具有主对角线优势且高度稀疏的矩阵，还可以证明该矩阵是正定的。

#### 四、有限元方程的解算

为了求解由迦辽金有限元法形成的线性方程组，除了用第二章讲过的迭代法、乔累斯基法外，还可以用消元法，其方法原理可参考线性代数方面的教科书。

### 第四节 迦辽金有限元法在解其它类型 地下水流问题中的应用

#### 一、二维稳定流有限元方程

现以承压含水层二维稳定流为例说明稳定流的迦辽金有限元方程。除水流为稳定流外，水文地质概念模型与第三节所述相同，其数学模型为

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T \frac{\partial H}{\partial y} \right) + W = 0 \\ H(x, y) \Big|_{\Gamma_1} = H^*(x, y) \\ T \frac{\partial H}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = q(x, y) \quad n \text{ 为外法线} \end{cases} \quad (3-53)$$

下面运用比较的方法来获得稳定流有限元方程。比较式 (3-53) 与 (3-16)，二者的差别仅在含有时间 \$t\$ 的项上，式 (3-53) 是稳定流，所以凡是式 (3-16) 中含有 \$t\$ 的项在式 (3-53) 中皆为零，从而仿照式 (3-39) 就很容易地写出稳定流的有限元方程：

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} H_j = \epsilon_i + Q_i + G_i$$

$$\text{或} \quad [A]_{m \times n} \cdot \{H\}_{n \times 1} = \{F\}_{m \times 1} \quad (3-54)$$

式中各符号意义与式3—39相同

由此可见，稳定流有限元方程系数中，不含有贮水矩阵。

对式 (3-54) 的求解，可采取任何一种解线性方程组的方法。

稳定流有限元方程可用来模拟地下水流初始流场，以及模拟矿坑涌水量等实际问题。

#### 二、潜水二维非稳定流迦辽金有限元方程

### (一) 数学模型

假设 $\Omega$ 为潜水含水层开采区的平面区域， $\Gamma$ 为区域边界，含水层为非均质各向同性。区内有降雨入渗补给和蒸发，其补给和蒸发强度分别为 $\epsilon(x, y, t)$ 和 $E(x, y, t)$ 。区内有 $n$ 口开采井，第 $L$ 口井的开采量为 $Q_L (L=1, 2, \dots, n)$ 。区内任意一点的水位标高为 $H(x, y, t)$ 。区域边界由第一类边界 $\Gamma_1$ 和第二类边界 $\Gamma_2$ 组成，即 $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ 。第二类边界为补给边界，其单位宽度补给量为 $q(x, y, t)$ 。水流为二维达西流，其数学模型为

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left[ k(H-B) \frac{\partial H}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ k(H-B) \frac{\partial H}{\partial y} \right] + W = \frac{\partial H}{\partial t} & x, y \in \Omega \quad t > 0 \\ H(x, y, 0) = H^0(x, y) & x, y \in \Omega \\ H(x, y, t)|_{\Gamma_1} = H'(x, y, t) & x, y \in \Gamma_1 \quad t > 0 \\ k(H-B) \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{\Gamma_2} = q(x, y, t) & x, y \in \Gamma_2 \quad t > 0 \end{cases} \quad (3-55)$$

式中  $W = \epsilon(x, y, t) - \sum_{L=1}^n Q_L \delta(x - x_L, y - y_L) - E(x, y, t)$   
 $B(x, y)$ ——为含水层底板标高。

### (二) 潜水有限元方程

在本章第三节建立承压含水层迦辽金有限元方程的基础上，是很容易建立潜水有限元方程的。

在剖分区域 $\Omega$ 的基础上，假设数学模型式(3-55)的近似解为

$$\bar{H}(x, y, t) = \sum_{i=1}^n H_i(t) \Phi_i(x, y) \quad (3-56)$$

含水层底板的近似标高也表示为

$$\bar{B}(x, y) = \sum_{j=1}^n B_j \Phi_j(x, y) \quad (3-57)$$

按照迦辽金有限元方程式(3-15)以及格林公式，用求解承压含水层的相同步骤，可将式(3-55)的边值问题写成如下形式

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} k(\bar{H} - \bar{B}) \left( \frac{\partial \bar{H}}{\partial x} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \bar{H}}{\partial y} \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \right) dx dy + \iint_{\Omega} \mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \Phi_i dx dy \\ & = \iint_{\Omega} W \Phi_i dx dy + \int_{\Gamma_2} q \Phi_i dl \end{aligned} \quad (3-58)$$

式中： $i=1, 2, \dots, m$  (内结点加第二类边界点数)。

将式(3-55)、(3-56)代入式(3-57)并应用 $\iint_{\Omega} = \sum_{\beta=1}^p \iint_{\Delta_{\beta}}$ 得

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{\beta=1}^p \iint_{\Delta_{\beta}} K_{\beta} \left( \sum_{L=1}^n \Phi_L \Delta H_L \right) \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \right) dx dy \right] H_i \\ & + \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{\beta=1}^p \iint_{\Delta_{\beta}} \mu \Phi_i \Phi_i dx dy \right] \frac{dH_i}{dt} \\ & = \sum_{\beta=1}^p \iint_{\Delta_{\beta}} W \Phi_i dx dy + \int_{\Gamma_2} q \Phi_i dl \end{aligned} \quad (3-59)$$

式中  $\Delta H_L = H_L - B_L$  ( $L=1, 2, \dots, n$ )

将式 (3-59) 与式 (3-22) 对比可以看出, 只是方程左端第一项积分与承压水的该项积分不同, 其它项的积分基本一样, 而潜水的式 (3-58) 右端第一项积分中的  $W$  比承压水多了一项蒸发量的计算。所以, 下面着重计算式 (3-58) 左端第一项积分和右端第一项积分。

设

$$A_{i,j} = \sum_{\beta=1}^p \iint_{\Delta_\beta} K_\beta \left( \sum_{L=1}^n \Phi_L \Delta H_L \right) \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \right) dx dy$$

由式 (3-6) 知

$$\begin{aligned} A_{i,j} &= \sum_{\beta=1}^p \iint_{\Delta_\beta} K_\beta \left( \sum_{L=1}^n \Phi_L \Delta H_L \right) \left( \frac{b_i b_j + c_i c_j}{4 \Delta_\beta^2} \right) dx dy \\ &= \sum_{\beta=1}^p K_\beta \left( \frac{b_i b_j + c_i c_j}{4 \Delta_\beta^2} \right) \iint_{\Delta_\beta} \sum_{L=1}^n \Phi_L \Delta H_L dx dy \end{aligned}$$

根据基函数的特性, 上式中的积分可写成下列形式

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta_\beta} \sum_{L=1}^n \Phi_L \Delta H_L dx dy &= \iint_{\Delta_\beta} \sum_{L=i,j,k} \Phi_L \Delta H_L dx dy \\ &= \sum_{L=i,j,k} \frac{\Delta_\beta}{3} \Delta H_L \end{aligned}$$

代入上式得

$$\begin{aligned} A_{i,j} &= \sum_{\beta=1}^p K_\beta \left( \frac{b_i b_j + c_i c_j}{4 \Delta_\beta^2} \right) \sum_{L=i,j,k} \frac{\Delta H_L}{3} \\ &= \sum_{\beta=1}^p \frac{K_\beta m_\beta}{4 \Delta_\beta} (b_i b_j + c_i c_j) \end{aligned} \quad (3-60)$$

式中

$$m_\beta = \sum_{L=i,j,k} \frac{\Delta H_L}{3} = \frac{1}{3} [(H_i - B_i) + (H_j - B_j) + (H_k - B_k)]$$

表明一个单元的含水层厚度是三角形顶点厚度的算术平均值。由此可见,  $A_{i,j}$  中含有未知数。

式 (3-58) 右端第一项积分

$$\begin{aligned} &\sum_{\beta=1}^p \iint_{\Delta_\beta} W \Phi_i dx dy \\ &= \sum_{\beta=1}^p \iint_{\Delta_\beta} \left( \epsilon - \sum_{L=1}^r Q_L \delta(x-x_L, y-y_L) - E \right) \Phi_i dx dy \end{aligned}$$

前两项积分的计算结果与承压水的式 (3-34) 和式 (3-36) 完全相同。由于

$$E_i = \sum_{\beta=1}^p \iint_{\Delta_\beta} E \Phi_i dx dy = \sum_{\beta=1}^p \frac{\Delta_\beta}{3} E \quad (3-61)$$

这表明每个单元的蒸发总量由三个结点各自分担总量的三分之一。

式 (3-59) 中其它两项积分, 按承压水的式 (3-33)、(3-38) 也可写出

$$D_{i,j} = \begin{cases} \sum_{\beta=1}^p \frac{\Delta_\beta}{12} \mu & i \neq j \\ \sum_{\beta=1}^p \frac{\Delta_\beta}{6} \mu & i = j \end{cases} \quad (3-62)$$

$$G_i = \frac{1}{2} (q_{i,j} L_{i,j} + q_{i,m} L_{i,m}) \quad (3-63)$$

常微分方程组式 (3-59) 的系数, 由式 (3-60)、(3-62)、(3-34)、(3-36)、(3-61) 和式 (3-62) 确定以后, 便可得到常微分方程组的初值问题, 即

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n A_{i,j} H_j + \sum_{j=1}^n D_{i,j} \frac{dH_j}{dt} = \epsilon_i - Q_i - E_i \\ H_j|_{t=0} = H_j^0 \end{cases} \quad (3-64)$$

式中  $i=1, 2, \dots, m$ ;  $j=1, 2, \dots, n$ 。由于  $A_{i,j}$  中含有未知水位, 因此是一个非线性常微分方程组。

将式 (3-64) 写成矩阵形式

$$\begin{cases} [A]_{m \times n} [H]_{n \times 1} + [D]_{m \times n} \left\{ \frac{dH}{dt} \right\}_{n \times 1} = \{F\}_{m \times 1} \\ \{H\}_{n \times 1}|_{t=0} = \{H^0\}_{n \times 1} \end{cases} \quad (3-65)$$

式中  $[A]_{m \times n}$ ——导水矩阵, 由式 (3-60) 确定;

$[D]_{m \times n}$ ——贮水矩阵, 由式 (3-62) 确定;

$\{F\}_{m \times 1}$ ——水量矩阵, 由式 (3-61) 确定,

其中  $E_i = \epsilon_i - Q_i - F_i$

$$\epsilon_i = \sum_{\beta=1}^p \frac{\Delta_\beta}{3} \epsilon$$

$$\bar{Q}_i = \begin{cases} \sum_{\beta=1}^p \sum_{L=1}^{cn} Q_L \varphi_i(x_L, y_L) & \text{井位于 } \beta \text{ 单元内} \\ Q_i & \text{井位于内结点上} \\ \sum_{\beta=1}^p \frac{\alpha_\beta}{2\pi} Q_i & \text{井位于外结点上} \end{cases}$$

上式中符号意义与式 (3-36) 相同;

$m$ ——待求水头的结点数 (内结点与第二类边界点个数之和);

$n$ ——结点总数。

式 (3-65) 在形式上与承压水的式 (3-40) 相同, 可采用与承压水相同的差分近似, 并写成如下形式

$$(\theta[A(t)] + \frac{[D]}{\Delta t})\{H(t)\} = \{F\} + \left( \frac{[DJ]}{\Delta t} - (1-\theta)[A(t_0)] \right)\{H(t_0)\} \quad (3-66)$$

式中  $[A(t)]$  的元素为

$$A(t)_{i,j} = \sum_{\beta=1}^p \left[ \frac{1}{3} K_\beta \sum_{L=i,j,k} (H_L(t) - B_L) \right] \frac{1}{4\Delta_\beta} b_i b_j + c_i c_j \quad (3-67)$$

$[A(t_0)]$ 的元素为

$$A_{i,j}(t_0) = \sum_{\beta=1}^p \left[ \frac{1}{3} K_{\beta} \sum_{L=1,2,3} (H_L(t_0) - B_L) \right] \frac{1}{4\Delta_{\beta}} (b_i b_j + c_i c_j) \quad (3-68)$$

式(3-66)中, 当 $\theta=0$ 时为显式差分格式;  $\theta=1$ 为隐式差分格式;  $\theta=\frac{1}{2}$ 为对称差分格式。

由式(3-67), (3-68)可以看出, 矩阵 $[A]$ 的形成与承压水相同, 但系数矩阵中的各元素却包含待求的未知量, 因此潜水非稳定二维流的有限元方程组是一个非线性方程组。

与承压水相同, 将式(3-66)写成简式

$$[B]\{H\} = \{C\} \quad (3-69)$$

式中  $[B]$ 、 $[C]$ 因采用的差分格式不同, 其组合形式也不同, 如采用隐式差分格式时为

$$[B] = [A(t)] + \left[ \frac{D}{\Delta t} \right] \quad (3-70)$$

$$\{C\} = \{F\} + \left[ \frac{D}{\Delta t} \right] \{H(t_0)\}$$

若采用对称差分格式时为

$$[B] = \frac{[A(t)]}{2} + \left[ \frac{D}{\Delta t} \right]$$

$$\{C\} = \{F\} - \left( \left[ \frac{A(t_0)}{2} \right] + \left[ \frac{D}{\Delta t} \right] \right) \{H(t_0)\}$$

潜水与承压水的有限元方程相比, 其差别表现在渗透矩阵上, 承压水的渗透矩阵与时间无关, 对时段来说, 它是一个常数; 而潜水的渗透矩阵则与时间有关, 它是时段的函数。也就是说, 渗透矩阵中除了第一类边界上的导水系数是已知的外, 其余结点上均为未知, 即含有未知水位的结点。 $F_i$ 中的项数则根据具体水文地质条件决定。

潜水有限元方程组的解法, 一般是先将其线性化, 然后再进行求解。目前所采用的线性化方法主要有以下三种:

1. 当潜水含水层很厚, 水位变幅小, 与含水层厚度相比差别很大时, 可不考虑渗透矩阵中的未知水头, 完全按承压水的计算方法进行计算。

2. 当潜水含水层厚度较大时, 则将渗透矩阵中的未知水头取时段的初时刻。这样, 就每一个时段而言, 便可利用承压水的有限元方程, 用SOR迭代法, 乔累斯基法以及高斯消元法等进行求解。

3. 当含水层厚度较小时, 可采用迭代法将其线性化。首先给定水位初值, 再代入系数矩阵, 这样非线性方程组就变成了线性方程组, 便可利用前述的求解方程的方法进行求解; 将求得的解再代入系数矩阵中, 再求解线性方程组; 再将求得的解代入系数矩阵……。如此迭代下去, 直到两次相邻的迭代值之差满足事先给定的误差限额为止。此时的迭代值即是所要求的非线性方程组的解。

现在以对称差分格式为例说明迭代过程。这里求解方程组时采用双重迭代, 即确定系数矩阵 $[A^{k+1}]$ 的迭代过程和确定结点水头矩阵 $\{H^{k+1}\}$ 的迭代过程。

对称差分格式的潜水有限元方程为

$$\left( \frac{[A(t)]}{2} + \left[ \frac{D}{\Delta t} \right] \right)_{m \times n} \{H(t)\}_{n \times 1} = \{F\}_{m \times 1} - \left( \frac{[A(t_0)]}{2} - \left[ \frac{D}{\Delta t} \right] \right)_{m \times n} \{H(t_0)\}_{n \times 1} \quad (3-71)$$

如果有第一类边界点时, 则式 (3-71) 改写为

$$\begin{aligned} \left( \frac{[A(t)]}{2} + \left[ \frac{D}{\Delta t} \right] \right)_{m \times n} \{H(t)\}_{n \times 1} = & \{F\}_{m \times 1} - \left( \frac{[A(t_0)]}{2} - \left[ \frac{D}{\Delta t} \right] \right)_{m \times n} \{H(t_0)\}_{n \times 1} \\ & - \left( \frac{[A_1(t)]}{2} + \left[ \frac{D_1}{\Delta t} \right] \right)_{m \times (n-m)} \{H'(t)\}_{(n-m) \times 1} \end{aligned} \quad (3-72)$$

式中  $[A_1(t)]$ 、 $[D_1]$  表示由第一类边界点确定的系数;  $\{H'(t)\}$  表示第一类边界点水位。为书写方便, 下面一律略去时间  $t$  及矩阵的维数标号。

第一次迭代值采用  $H^{(0)}$ , 将该值代入式 (3-71) 求得系数矩阵  $[A^{(0)}]$ , 此时非线性方程式 (3-71) 就变成了线性方程。

$$\left( \frac{[A^{(0)}]}{2} + \left[ \frac{D}{\Delta t} \right] \right) \{H^{(1)}\} = \{C\} - \left( \frac{[A_1^{(0)}]}{2} + \left[ \frac{D_1}{\Delta t} \right] \right) \{H^{(1)}\} \quad (3-73)$$

式中

$$\{C\} = \{F\} - \left( \frac{[A(t_0)]}{2} - \left[ \frac{D}{\Delta t} \right] \right) \{H(t_0)\}$$

$H^{(1)}$  的上角标号表示系数迭代次数。可用SOR法求解式 (3-73), 将求得的解  $[H^{(1)}]$  代入系数矩阵式 (3-71) 中得  $[A^{(1)}]$ , 式 (3-73) 变为

$$\left( \frac{[A^{(1)}]}{2} + \left[ \frac{D}{\Delta t} \right] \right) \{H^{(2)}\} = \{C\} - \left( \frac{[A_1^{(1)}]}{2} + \left[ \frac{D_1}{\Delta t} \right] \right) \{H^{(1)}\} \quad (3-74)$$

再用SOR法迭代求出式 (3-74) 的解  $[H^{(2)}]$ , 并将其代入系数矩阵 (3-71) 得  $[A^{(2)}]$ , ……依次类推, 可求得第  $k$  次迭代时方程组的形式:

$$\left( \frac{[A^{(k)}]}{2} + \left[ \frac{D}{\Delta t} \right] \right) \{H^{(k+1)}\} = \{C\} - \left( \frac{[A_1^{(k)}]}{2} + \left[ \frac{D_1}{\Delta t} \right] \right) \{H^{(k)}\}$$

如此迭代下去, 直至两次相邻的系数迭代值之差满足

$$|[A^{(k+1)}] - [A^{(k)}]| < \epsilon_1$$

此时的  $[H^{(k+1)}]$  即为潜水方程组 (3-71) 的解。 $\epsilon_2$  为迭代的误差限。

在使用SOR迭代法求解方程组时, 也使用了一个误差限  $\epsilon_1$ , 因此用双重迭代求解潜水有限元方程组时, 需要两个控制量  $\epsilon_1$  和  $\epsilon_2$ 。其中  $\epsilon_1$  为求解水头的迭代误差限,  $\epsilon_2$  为求解系数  $[A]$  的迭代误差限。

实践证明, 导水系数对含水层水位的影响不是很“敏感”的, 所以通常取时段初的导水系数将潜水有限元方程线性化是一种可行的办法。

### 三、非均质各向异性二维非稳定流有限元方程

在承压含水层平面域  $\Omega$  内, 含水层为非均质各向异性, 地下水流为二维非稳定达西流, 区域补给强度和开采强度的代数和为  $W$ , 边界含第一类边界和第二类边界。

根据第二章介绍的非均质各向异性岩层中局部坐标系与总体坐标系的转换关系, 就可以写出该渗流域  $\Omega$  的数学模型。

#### (一) 承压含水层有限元方程

## 1. 数学模型

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[ (T_1 \cos^2 \theta + T_2 \sin^2 \theta) \frac{\partial H}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ (T_1 - T_2) \sin \theta \cos \theta \frac{\partial H}{\partial y} \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (T_1 - T_2) \sin \theta \cos \theta \frac{\partial H}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (T_1 \sin^2 \theta + T_2 \cos^2 \theta) \frac{\partial H}{\partial y} \right] \\ & + W = S \frac{\partial H}{\partial t} \quad x, y \in \Omega, t > 0 \\ & H(x, y, 0) = H^0(x, y) \quad x, y \in \Omega \\ & H(x, y, t)|_{\Gamma_1} = H'(x, y, t) \quad x, y \in \Gamma_1 \\ & (T_1 \cos \theta \mathbf{n}_x^0 - T_2 \sin \theta \mathbf{n}_y^0) \frac{\partial H}{\partial x} + (T_1 \sin \theta \mathbf{n}_x^0 + T_2 \cos \theta \mathbf{n}_y^0) \frac{\partial H}{\partial y} \Big|_{\Gamma_2} \\ & = q(x, y, t) \quad x, y \in \Gamma_2 \end{aligned} \right. \quad (3-75)$$

式中  $\theta$ ——最大主渗透方向与 $x$ 方向的夹角;

$\mathbf{n}_x^0, \mathbf{n}_y^0$ ——分别为边界上 $x, y$ 方向的单位向量;

$T_1, T_2$ ——分别为含水层的最大和最小主渗透方向上的导水系数;

$W$ ——源汇项,  $W = \epsilon - \sum_{L=1}^n Q_L \delta(x - x_L, y - y_L)$

## 2. 有限元方程

在三角剖分区域 $\Omega$ 的基础上, 设式(3-75)的近似解为

$$\tilde{H}(x, y, t) = \sum_{i=1}^n H(t) \Phi_i(x, y) \quad (3-76)$$

根据迦辽金有限元方程式(3-11)可以写出式3-75的有限元方程

$$\begin{aligned} & \sum_{\beta=1}^p \iint_{\Delta_\beta} \left\{ (T_1 \cos^2 \theta + T_2 \sin^2 \theta) \frac{\partial \tilde{H}}{\partial x^2} + 2(T_1 - T_2) \sin \theta \cos \theta \frac{\partial \tilde{H}}{\partial x \partial y} \right. \\ & \quad \left. + (T_1 \sin^2 \theta + T_2 \cos^2 \theta) \frac{\partial^2 \tilde{H}}{\partial y^2} + W - S \frac{\partial \tilde{H}}{\partial t} \right\} \\ & \cdot \Phi_i dx dy = 0 \end{aligned} \quad (3-77)$$

$i = 1, 2, \dots, m$  ( $m$ 为内结点加第二类边界点总数)。

将方程式(3-77)中的第一项、第二项以及第三项分别应用分部积分及格林公式后, 并将式(3-76)及定解条件代入得

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{\beta=1}^p \iint_{\Delta_\beta} \left[ (T_1 \cos^2 \theta + T_2 \sin^2 \theta) \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} + (T_1 - T_2) \sin \theta \cos \theta \cdot \right. \right. \\ & \quad \left. \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \right) + (T_1 \sin^2 \theta + T_2 \cos^2 \theta) \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \right] \cdot dx dy \Big\} H_j \\ & + \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{\beta=1}^p \iint_{\Delta_\beta} S \Phi_i \Phi_i dx dy \right] \frac{\partial H_i}{\partial t} \\ & = \sum_{\beta=1}^p \iint_{\Delta_\beta} W \Phi_i dx dy + \int_{\Gamma_2} q \Phi_i dl \end{aligned} \quad (3-78)$$

将式 (3-78) 与式 (3-22) 对比可看出, 只有方程左端的第一项积分与各向同性承压水的该项积分不同, 其它项的积分完全一样, 所以仅讨论式 (3-78) 中左端第一项积分的计算。

$$\begin{aligned} \text{设: } A &= \sum_{i=1}^n A_{ij} \\ A_{ij} &= \sum_{\beta=1}^p \left\{ \left[ (T_1 \cos^2 \theta + T_2 \sin^2 \theta) \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} + (T_1 - T_2) \sin \theta \cos \theta \cdot \right. \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \right) + (T_1 \sin^2 \theta + T_2 \cos^2 \theta) \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \right] \cdot dx dy \end{aligned} \quad (3-79)$$

根据基函数的表达式 (3-6) 可求得 (假设  $T_1, T_2$  在单元  $\beta$  内为常数)

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{\beta=1}^p \frac{1}{4\Delta_\beta} \left[ (T_1 \cos^2 \theta + T_2 \sin^2 \theta) b_i b_j + (T_1 - T_2) \sin \theta \cos \theta \cdot (b_i \cdot c_j \right. \\ &\quad \left. + b_j c_i) + (T_1 \sin^2 \theta + T_2 \cos^2 \theta) c_i c_j \right] \end{aligned} \quad (3-80)$$

于是式 (3-78) 可写成常微分方程组

$$\begin{cases} [A]_{m \times n} \{H\}_{n \times 1} + [D]_{m \times n} \left\{ \frac{dH}{dt} \right\}_{n \times 1} = \{F\}_{m \times 1} \\ \{H\}_{n \times 1} \big|_{t=0} = \{H^0\} \end{cases} \quad (3-81)$$

其差分形式为

$$[A] \{H(t)\} + [D] \left\{ \frac{H(t) - H(t_0)}{\Delta t} \right\} = \{F\} \quad (3-82)$$

当取对称差分格式时

$$\left( \frac{[A]}{2} + \frac{[D]}{\Delta t} \right) \{H(t)\} = \{F\} - \left( \frac{[A]}{2} - \frac{[D]}{\Delta t} \right) \{H(t_0)\} \quad (3-83)$$

式 (3-83) 就是非均质各向异性承压含水层的二维非稳定流有限元方程。

## (二) 潜水有限元方程

除了地下水为潜水外, 其它水文地质条件同式 (3-75)。

### 1. 数学模型

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x} \left\{ [K_1(H-B) \cos^2 \theta + K_2(H-B) \sin^2 \theta] \frac{\partial H}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ [K_1(H-B) \right. \\ \quad \left. - K_2(H-B)] \sin \theta \cos \theta \frac{\partial H}{\partial y} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ [K_1(H-B) - K_2(H-B)] \right. \\ \quad \left. \cdot \sin \theta \cos \theta \frac{\partial H}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ [K_1(H-B) \sin^2 \theta + K_2(H-B) \cos^2 \theta] \frac{\partial H}{\partial y} \right\} \\ \quad + W = \mu \frac{\partial H}{\partial t} \\ H(x, y, 0) = H^0(x, y) \\ H(x, y, t) \big|_{\Gamma_1} = H'(x, y, t) \\ [K_1(H-B) \cos \theta n_x^0 - K_2(H-B) \sin \theta n_y^0] \frac{\partial H}{\partial x} + [K_1(H-B) \sin \theta n_x^0 \\ \quad + K_2(H-B) \cos \theta n_y^0] \frac{\partial H}{\partial y} \big|_{\Gamma_2} = q(x, y, t) \end{cases} \quad (3-84)$$



式中:  $K_1$ 、 $K_2$ ——分别为潜水含水层的最大和最小主渗透方向上的渗透系数。

## 2. 潜水有限元方程 (含水层为各向异性)

用推导式 (3—83) 和 (3—66) 相同的方法和步骤可推导出式 (3—84) 的有限元方程 (取对称差分格式)

$$\left(\frac{[A]}{2} + \left[\frac{D}{\Delta t}\right]\right)\{H(t)\} = \{F\} - \left(\frac{[A]}{2} - \left[\frac{D}{\Delta t}\right]\right)\{H(t_0)\} \quad (3-85)$$

式中  $[A]$ 、 $[D]$ 、 $[F]$ 、 $[H]$  同式 (3—83), 其中

$$A_{ij} = \sum_{\beta=1}^p \frac{m_{\beta}}{4\Delta_{\beta}} [(K_1 \cos^2 \theta + K_2 \sin^2 \theta) b_i b_j + (K_1 - K_2) \cdot \sin \theta \cos \theta (b_i c_j + b_j c_i) + (K_1 \sin^2 \theta + K_2 \cos^2 \theta) \cdot c_i c_j] \quad (3-86)$$

$$m_{\beta} = \sum_{L=i,j,k} \frac{1}{3} (H_L - B_L)$$

所以非均质各向异性潜水含水层有限元方程为非线性方程。其解法与二维非稳定流各向同性潜水有限元方程的解法相同。

# 第五节 有限元法应用于解地下水流的个别问题

## 一、区域的剖分形式与基函数的选择

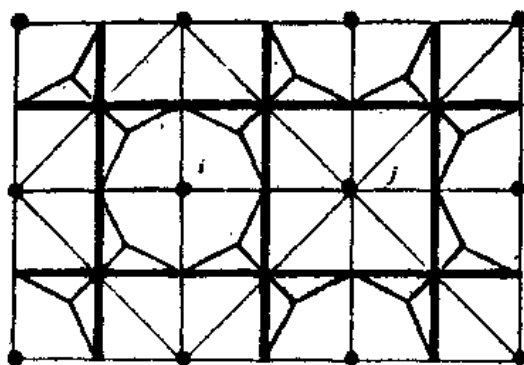
前述有限元方程, 都是建立于对渗流区域进行三角剖分, 以及将基函数选为线性基函数的基础上的。我们知道, 迦辽金有限元法对渗流区域可剖分成任何几何形状, 基函数也可以选取高次非线性函数, 因此, 有限元法可以模拟任何复杂几何边界及复杂渗流区域的地下水流系统。但是实践证明, 迦辽金线性有限元法完全可以满足计算精度的要求, 不必选取复杂的高次非线性函数。

## 二、有限元法与不规则网格有限差分法的差别

从有限元方程和不规则有限差分方程中可以看出, 在解决稳定流问题时, 若不规则有限差取单元参数, 则两种方法所形成的导水矩阵是一样的 (如果有限差取用点参数, 对均质含水层来说, 所形成的导水矩阵也一样; 但对非均质含水层而言, 两者所形成的导水矩阵略有不同)。在解决非稳定流问题时, 两种方法的主要差别在于贮存量变化量的计算上, 具体表现在以下两方面:

1. 在有限元法中, 结点  $i$  所控制的子区域是由以任一结点  $i$  为公共顶点的各三角形的重心与相应边中点的连线所围成的面积组成 (图5—1), 在每个单元中划入子区域的面积占其三角单元面积的三分之一; 而在不规则网格有限差分法中,  $i$  子区域面积是由与  $i$  结点有关联的三角单元的外心连线组成, 对每个单元来说, 在子区域中的面积与单元面积的比值不是常数, 而是随单元形状的变化而变化, 但差别不是太大的。如图 3—12 所示, 面积只差三分之一。即在结点  $i$  处, 有限元子区域面积比不规则网格有限差的子区域面积小了三分之一, 而在  $j$  点处则又大了三分之一。

2. 有限元法在计算  $i$  子区域地下水贮存量的变化量时, 水位的变化率采用相邻三角单元的水头变化率的加权平均值, 即中心结点  $i$  水位变化率采取  $\frac{1}{2}$ , 其相邻结点取  $1/4$ , 即



• 点元  
 — 线元  
 — 不规则网格有限差的均衡域  
 — 集中有限元的均衡域

图 3—12

$$\frac{1}{2} \frac{\Delta H_i}{\Delta t} + \frac{1}{4} \left( \frac{\Delta H_j}{\Delta t} + \frac{\Delta H_k}{\Delta t} \right) \quad (3-87)$$

这意味着有限元法中不是局部水量均衡，而是需要与若干子区域贮存量变化量相平衡。

在不规则有限差分法中， $i$  子区域的水位变化率是取中心结点  $i$  的水位变化率  $\frac{\Delta H_i}{\Delta t}$ 。从不规则网格有限差分法的推导中也可看出，不规则网格有限差分法是保证局部水量守恒的。

### 三、有限元法的改进

从上述推导结果看出，迦辽金有限元法所形成的贮水矩阵  $[D]$  是非对角矩阵，而不规则网格有限差分法所形成的贮水矩阵是对角矩阵。因此有限元法较之不规则网格有限差分法来说，就削弱了主对角线的优势，对方程组的解算是不利的。为了加强迦辽金有限元法所形成的总系数矩阵主对角线的优势，将其加以改进，取  $\frac{1}{2} \frac{\Delta H_i}{\Delta t} + \frac{1}{4} \left( \frac{\Delta H_j}{\Delta t} + \frac{\Delta H_k}{\Delta t} \right) \approx \frac{\Delta H_i}{\Delta t}$ 。于是单元贮水矩阵 (3-85) 就变为如下对角矩阵

$$S \Delta_p \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad (3-88)$$

用式 (3-88) 代替式 (3-50) 后所形成的迦辽金有限单元称为集中有限元。显然集中有限元增强了点系数矩阵主对角线元素优势。

可见，改进的有限元法，只要剖分单元的内角在  $60^\circ$  附近时，与不规则网格有限差分就没有多大区别，且可获得以下几点好处：

1. 加强了总系数矩阵主对角线的优势, 从而提高了计算的效率。
2. 避免了不规则网格有限差对均衡区域面积的复杂计算, 以及对三角形剖分内角的限制。

## 第六节 有限元法应用实例

有限元法曾应用于石家庄市地下水资源评价。

石家庄市位于太行山东麓漳沱河冲洪扇后部与小洸河、太平河冲洪积扇的交迭部位。主要含水层为第四系松散层 ( $Q_1, Q_2$ )。  $Q_1$  主要岩性为砂卵砾石、粗砂砾石夹土层、含土卵砾石等,  $Q_2$  为粉细砂及中细砂。其中  $Q_1$  的地下水在市区已被疏干, 目前开采层深度一般为 40—80m 左右, 水位埋深大多在 10m 以下, 市区漏斗中心达 30m, 只在西北的小部分区域的埋深为 3—10m。

在有限元法的应用过程中, 其具体步骤如下:

1. 根据本区水文地质条件概化出本区的水文地质概念模型为:
  - (1) 含水层底板为一相对隔水的粘土层, 局部地方存在越流;
  - (2) 含水层为非均质各向同性的潜水层, 局部被视为均质层;
  - (3) 计算区的边界, 其北、东部和南部皆为第一类边界, 西部为不同程度的弱透水层, 全计算区面积为 544km<sup>2</sup>;
  - (4) 区内分布着很多开采井, 据其分布特点, 分别将其概化为面积井和大井;
  - (5) 地下水流为非稳定平面流, 水流符合达西流。
2. 根据水文地质概念模型, 建立计算区的数字模型为

$$\begin{cases} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left[ K(H-B) \frac{\partial H}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ K(H-B) \frac{\partial H}{\partial y} \right] + \epsilon_1(x, y, t) - \epsilon_2(x, y, t) \right. \\ \quad \left. - \sum_{k=1}^n Q_k \delta(x-x_k, y-y_k) = \mu \frac{\partial H}{\partial t} \right. \\ H(x, y, 0) = H_0(x, y) \\ H(x, y, t) |_{r_1} = H_1(x, y, t) \\ \left. K(H-B) \frac{\partial H}{\partial n} \right|_{r_2} = -q(x, y, t) \end{cases}$$

式中  $\epsilon_2(x, y, t)$  —— 开采强度 (m/d);  
 $\epsilon_1(x, y, t)$  —— 补给强度 (m/d);  
 $Q_k$  —— 第  $K$  个大井的开采量  
 $n$  —— 内法线。

### 3. 剖分计算区, 整理计算资料

(1) 将全区剖分了 506 个三角单元, 231 个结点, 其中第一类边界点 40 个, 第二类边界点 14 个。详见图 3—13。

#### (2) 数据整理

a. 选取时段。根据石家庄市用水特点, 从每年 11 月底至第二年 2 月底期间, 基本上无农业开采用水、工业用水也是全年最小的时段, 故选取 84 年 11 月 30 日至 85 年 2 月 20 作为

校正模型时段。

b. 根据统计的开采量, 按概化要求, 整理出选取时段内的日平均开采量。

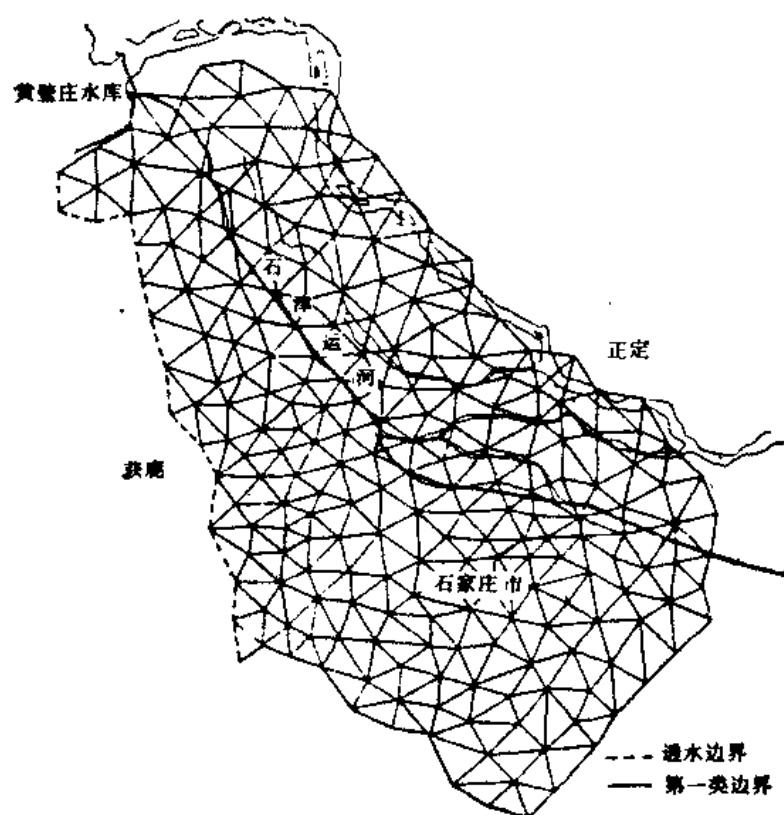


图 3—13 三角剖分图

c. 分析已有的水文地质条件, 初步给出参数分区, 通过试验, 给出参数初值。

#### 4. 校正数字模型

校正结果表明, 微分方程和边界条件是正确的, 全区共分10个参数区(参见图3—14)。参数区的值列于表3—2。

表 3—2 参数分区值

参数区编号	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
$K (m/d)$	366.8	288	139.8	101.5	63	130.8	165.2	14.5	10.5	52.2
$\mu$	0.23	0.23	0.22	0.209	0.205	0.209	0.225	0.17	0.165	0.219

拟合结果, 在52个观测孔结点中, 水位计算值与实测值的绝对误差均小于0.62, 其中小于0.4者占61.54%, 大于0.5者占86.5%; 大于0.5者, 其拟合的相对误差, 全部小于时段水位变幅的5%。

#### 5. 验证数学模型

取用84年6月20日——86年8月15日的水位资料, 分7个时段进行水位验证。根据验证资料, 编制1985年高水位期拟合图和1986年低水位期拟合图, 高水位和低水位梯度的拟合

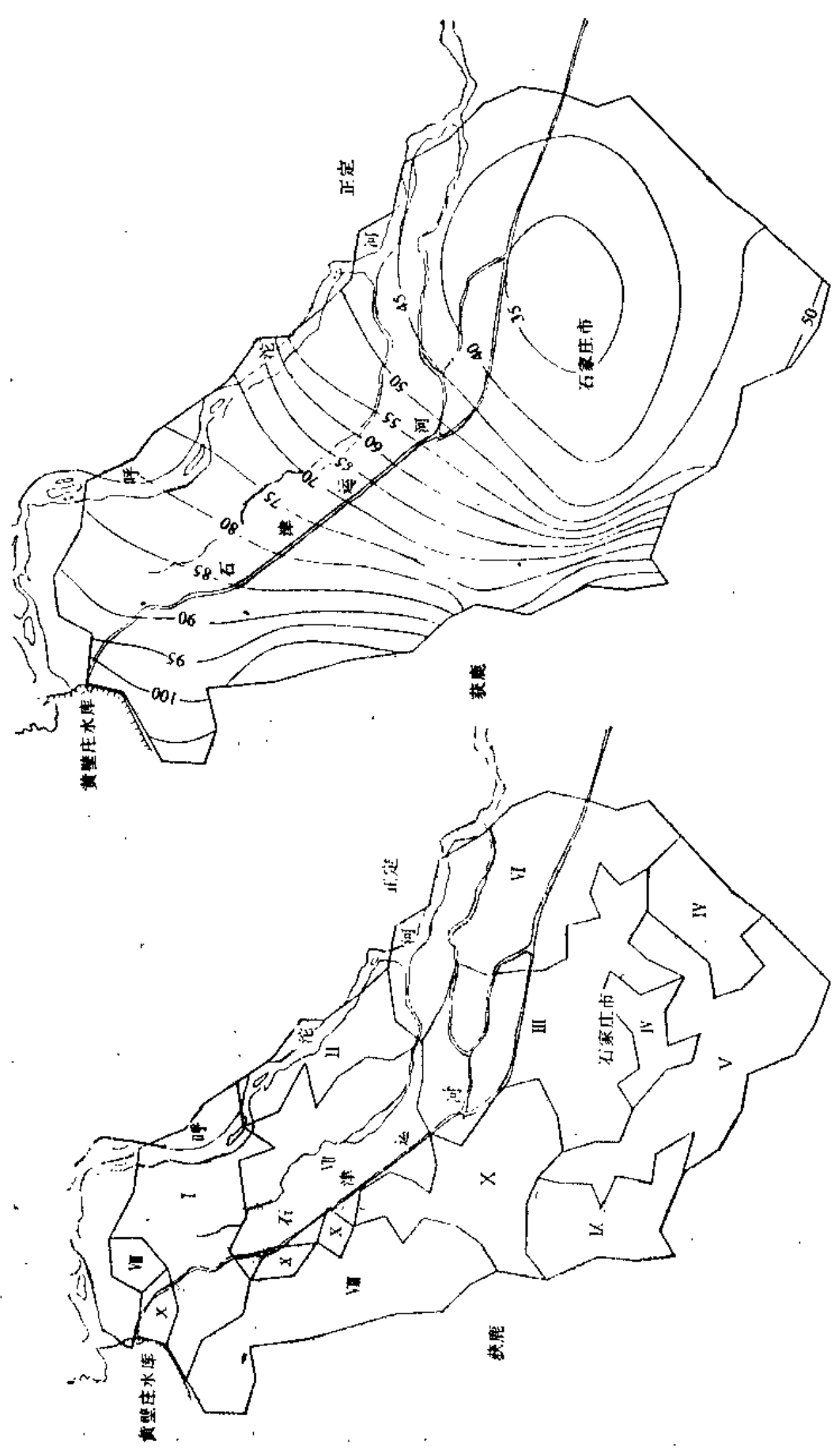


图 3-14 水文地质参数分区图

图 3-15 1990年第一方案水位预报图

状况是高的。又编制了降速场变化拟合图,拟合情况也是良好的。

利用边界上观测孔的长期观测水位,进行统计分析,建立了水位与多年降雨量、开采量的相关方程,结合未来开采条件,作了预报。由于第二类边界是弱透水边界,故用定流量方法处理。

#### 6. 模型运转——地下水位预报

根据设计开采量和预报的未来降雨量,对石家庄市区的源汇项进行了计算,最后分别进行预报,即:以1990年工业开采量 $105 \times 10^4 \text{m}^3/\text{d}$ 为前提,预报了1990年低水位期的区域地下水位(见图3—15);在此基础上,又预报了2000年开采量为 $122 \times 10^4 \text{m}^3/\text{d}$ 时的区域地下水位。

## 第四章 含水层系统识别

地下水流系统的模拟, 概括起来要解决两大问题: 预报问题与参数计算问题。解决这两个问题的前提是要建立一个尽可能反映实际含水地质体与边界条件的数学模型。预报问题又称为地下水流系统的正演问题, 有限差分法与有限元法都是用来解决预报问题的。参数计算问题又称为地下水流系统的反演问题或含水层系统的识别问题, 有时也称模型校正问题。一个地下水流系统, 如果不能给出可信的含水层参数, 那么预报问题就会变成空中楼阁。因此, 自40年代以来, 随着地下水模型化方法的广泛应用及电子数字计算机的迅速发展, 含水层系统识别的方法也得到了迅速的发展。但是, 由于含水层系统识别问题本身的复杂性, 到目前为止虽然提出了不少方法, 而实际应用还存在不少问题。故本章仅阐述一些较为适用的基本方法。

### 第一节 含水层系统识别中的一些基本问题

#### 一、模型参数的概念

自然界地下水流系统在时空域上都是非常复杂的, 必须概化才能建立相应的数学模型; 另一方面由于数学工具的局限性, 往往概化得非常合理的水文地质模型, 却不能用现有的数学工具描述, 或者可以描述却不能得到它的解。权宜的做法是“两相凑合”, 即使概化不失大体, 而数学描述又简单可解。一个地下水流系统通过勘探建立其水文地质模型, 由于勘探工作的局限性, 不同的工作者对同一地区可以建立起不同的水文地质模型, 相当的就有不同的数学模型。如图4—1所示, 地下水渗流区域为一承压含水层,  $p$ 点有一口抽水井, 抽水量为 $Q_p = Q(x_p, y_p)$ ,  $m$ 点为一观测孔。从 $t_0$ 时刻开始抽水, 在 $m$ 点测得 $H-t$ 曲线。如果有三个工作者根据同一抽水试验获得的 $H-t$ 曲线进行含水层系统识别, 分别建立的数学模型为

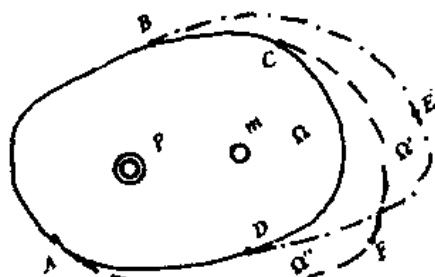


图 4—1

$$(I) \begin{cases} T_{xx} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + T_{yy} \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} - Q_p \delta(x-x_p, y-y_p) \\ \quad = S \frac{\partial H}{\partial t} & x, y \in \Omega, t > 0 \\ H(x, y) |_{t=0} = f(x, y) & x, y \in \Omega \\ H(x, y, t) |_{AB} = h(x, y, t) & x, y \in AB, t > 0 \\ \left. \frac{\partial H}{\partial n} \right|_{BCDA} = -g(x, y, t) & x, y \in BCDA, t > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(II)} \quad & \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T \frac{\partial H}{\partial y} \right) - Q_p \delta(x-x_p, y-y_p) \\ \quad = S \frac{\partial H}{\partial t} & x, y \in \Omega', t > 0 \\ H(x, y) |_{t=t_0} = f(x, y) & x, y \in \Omega' \\ H(x, y, t) |_{ABE} = h(x, y, t) & x, y \in ABE \quad t > 0 \\ \left. \frac{\partial H}{\partial n} \right|_{EDA} = -g(x, y) & x, y \in EDA \end{cases} \\
 \text{(III)} \quad & \begin{cases} T \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right) - Q_p \delta(x-x_p, y-y_p) \\ \quad = S \frac{\partial H}{\partial t} & x, y \in \Omega'' \quad t > 0 \\ H(x, y) |_{t=t_0} = f(x, y) & x, y \in \Omega'' \\ H(x, y, t) |_{ABC} = h(x, y, t) & x, y \in ABC \\ \left. \frac{\partial H}{\partial n} \right|_{CFA} = -g(x, y) & x, y \in CFA \end{cases}
 \end{aligned}$$

三个工作者可用给定参数的方法，各自应用有限差分法或有限元法建立的数学模型对地下水流系统进行预报，且都力求在  $m$  点的预测结果与抽水试验的  $H-t$  曲线重合，来判定各自最后所要获得的参数。很显然，三个数学模型最后必定获得三组参数，何者正确呢？判定将是困难的。但有一点是肯定的，它们都不可能是含水层本身所固有的参数。为了区别，将按数学模型求得的参数定义为“模型参数”。模型参数与含水层本身固有的参数有区别，这是因为模型参数主要包含来自以下方面的误差：

1. 地下水流系统区域几何形状的概化；
2. 边界性质的概化与初始流场的模拟；
3. 参数性质（均质与非均质、各向同性与各向异性）的概化；
4. 地下水流状态（二维流还是三维流）的概化。

随着勘探程度的不断提高和工作者认识的不断深化，不断改进数学模型，模型参数将会不断地逼近含水层本身所固有的参数。但是，我们所研究的对象是一个被高度概化的宏观体，因此，要求模型参数无限逼近含水层本身固有参数是不必要的。

## 二、判别准则问题

如上所述，通过对数学模型的预报，使预报的结果与实测的  $H-t$  曲线完全拟合，这是一个理论上的问题，而实际上是难以做到的。那么拟合到什么程度才算完成了模型的识别呢？这就需要给出一个判别准则。

假设在模型识别中所用到的拟合点有  $i$  个，而时段有  $j$  个，实测值用  $H$  表示，在某组参数下的预报值用  $h$  表示，判别准则（目标函数）常用以下五种形式：

1. 最大绝对偏差准则

$$\max_i \max_j |H_i(j) - h_i(j)| \leq \epsilon_1$$

2. 最大偏差的绝对值总和准则 1



$$\sum_i |\max_j [H_i(j) - h_i(j)]| \leq \epsilon_2$$

3. 最大偏差的绝对值总和准则 2

$$\sum_i |\max_j [H_i(j) - h_i(j)]| \leq \epsilon_3$$

4. 全部偏差绝对值之和准则

$$\sum_i \sum_j |H_i(j) - h_i(j)| \leq \epsilon_4$$

5. 全部偏差平方和准则

$$\sum_i \sum_j [H_i(j) - h_i(j)]^2 \leq \epsilon_5$$

其中  $\epsilon_i, i=1,2,3,4,5$ , 为根据拟合精度要求给定的误差限。

计算经验指出, 第四个判别准则较好, 其次为第五个判别准则。

### 三、反演问题的适定性

对于一个描述地下水流系统的数学模型, 比如 (1), 在做预报时:

1. 一定可以求得某时刻水头的解, 称为解的存在性;

2. 所求得的水头且是唯一的, 称为解的唯一性;

3. 如果当参数、初始条件和边界条件产生的误差是微小的, 那么所解得的水头中包含的误差也是很小的。称为解的稳定性。

如果一个地下水流系统的数学模型的解存在, 唯一且是稳定的, 就称为这个数学模型满足适定性要求, 或者说是适定的, 如果三条中有一条不满足就称为不适定的。

由于描述地下水系统的数学模型, 是一个实际的水文地质模型的正确定量描述: 其解的适定性应该是不言而喻的。但对反演问题, 其解 (即求得的参数) 是否满足适定性却需要加以研究。

现以承压二维稳定流方程为例

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \epsilon = 0 \quad x, y \in D \quad (4-1)$$

若已知  $D$  上每一点的水头  $H(x, y)$  和垂向补给  $\epsilon$ , 需要反求水文地质参数  $T$ 。

因为方程 (4-1) 可以改写为

$$T \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} + T \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial T}{\partial y} \cdot \frac{\partial H}{\partial y} + \epsilon = 0$$

由于水头是已知的, 因此  $\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y}, \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}$ , 也是已知的。

令

$$a = \frac{\partial H}{\partial x}, \quad b = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad c = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}$$

则式 (4-1) 可写为

$$a \frac{\partial T}{\partial x} + b \frac{\partial T}{\partial y} + cT + \epsilon = 0 \quad (4-2)$$

方程 (4-2) 是关于  $T$  的一阶线性偏微分方程, 其通解一定包含任意函数。例如  $T$  是方程 (4-2) 的一个解,  $T'$  是方程

$$a \frac{\partial T}{\partial x} + b \frac{\partial T}{\partial y} + cT = 0$$

的一个解, 则  $T + T'$  也必是方程 (4-2) 的一个解。这是由于

$$\begin{aligned} & a \frac{\partial}{\partial x} (T + T') + b \frac{\partial}{\partial y} (T + T') + c(T + T') + \epsilon \\ &= \left( a \frac{\partial T}{\partial x} + b \frac{\partial T}{\partial y} + cT + \epsilon \right) + \left( a \frac{\partial T'}{\partial x} + b \frac{\partial T'}{\partial y} + cT' \right) = 0 \end{aligned}$$

说明 (4-2) 的解不是唯一的。因此, 在含水层系统识别问题中, 其解一般是不唯一的。但是适当补充一些条件, 还有可能使反演问题获得正确的唯一解。例如, 对于方程 (4-2) 如果能给出  $T'(x, y)$  在渗流区域内沿某条曲线上的值 (方程) (4-2) 的柯西条件), 其解就被唯一确定。

下面再以二维承压稳定流的数学模型

$$\begin{cases} T \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right) + \epsilon = 0 & x, y \in D \\ H|_{\Gamma} = \phi(x, y) \end{cases} \quad (4-3)$$

为例来讨论反演的解是否满足稳定性的要求。假设  $D$  内实测水头  $H$  和垂向补给  $\epsilon$  是已知的, 欲求参数  $T(x, y)$  值。

由式 (4-3) 得

$$T = - \frac{\epsilon}{\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}}$$

若实测水头含有误差  $\alpha(x, y)$ , 则

$$T^* = - \frac{\epsilon}{\left( \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} \right)}$$

而

$$T - T^* = \frac{T \left( \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} \right)}{\left( \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} \right)}$$

即使  $\alpha$  很小, 而  $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2}$ 、 $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2}$  也可能很大, 因此  $T$  与  $T^*$  之差的绝对误差  $|T - T^*|$  就可能很大。这就表明反演问题的解是不稳定的。由此可知, 水头的微小误差, 可能给逆问题的解  $T(x, y)$  带来很大的误差。

实际上, 观测孔的数量是有限的。原始数据中的水头值往往只能根据这些有限的数据经过适当加工而获得 (通过趋势模拟或通过人工绘制流场插值), 加工过程中的误差也是不可避免的。由于反演问题解的不稳定性, 给含水层系统的识别带来一定的困难。只有采取特殊的措施, 才有可能求得可靠的参数。由此可知在勘探工作中合理布置观测网及提高水头观测精度的重要性。

由于反演问题解的不唯一性和不稳定性, 往往会造成不同的水文地质参数都可得出满

足判别准则要求的结果,但所得导水系数可能为负数,贮水系数(或给水度)可能大于1,显然是错误的。为了求得反演问题的可靠解,必须根据水文地质条件的分析、判断和水文地质工作者的经验,人为地限制参数的变化区间,以避免出现不合理的现象。这种限制,称为约束条件。常用的方法是假定待求参数 $T$ 、 $S$ 等在某一小区间内是常数,每一参数又被限制在事先指定的上、下限之内。

#### 四、水位测量精度与水量的重要性

下面举例说明参数对水头误差的敏感性以及在模型识别中关于水量的重要性。如图4—2所示,点元7、4、9的连线与点元6、2、8的连线为隔水边界,各长400m。点元6、7、8、9为第一类边界点元,水头为固定值100m,初始流场水平:水头为100m,点元1、5为

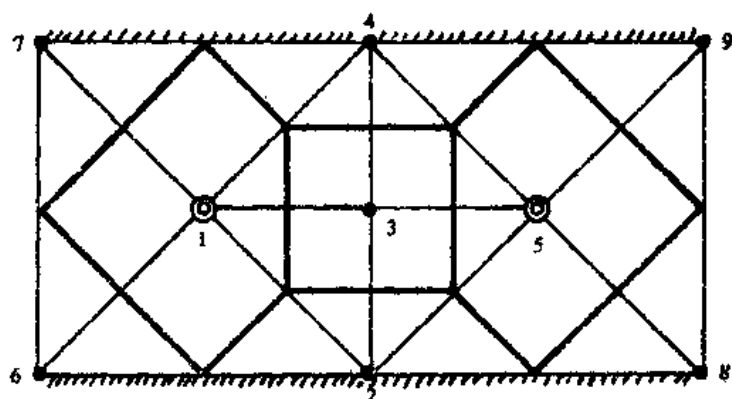


图 4—2

抽水井,抽水量均为 $2000\text{m}^3/\text{d}$ ,导水系数为 $250\text{m}^2/\text{d}$ ,贮水系数为0.001, $\Delta t$ 取0.1d。根据渗流区域的对称性,利用不规则网格有限差分法可以列出关于点元1、2、3、在0.1d时刻的水头方程

$$\begin{cases} 4.8H_1 - H_2 - H_3 = 260 \\ -H_1 + 2.3H_2 - H_3 = 30 \\ -H_1 - H_2 + 2.2H_3 = 20 \end{cases}$$

解此方程得

$$H_1 = 93.74808\text{m}, H_2 = 95.07237\text{m}, H_3 = 94.91839\text{m}$$

把这三个水头值视为真值。根据这些真值,利用点元1与点元2,又可以列出关于 $T$ 与 $S$ 的方程

$$\begin{cases} 14.99844T + 1250384S = 5000 \\ -1.47827T + 369572.25S = 0 \end{cases}$$

解得 $T = 250\text{m}^2/\text{d}$ 及 $S = 0.001$

假设由于观测的精度所限,仅能至厘米。则 $H_1 = 93.75\text{m}$ , $H_2 = 95.07\text{m}$ , $H_3 = 94.92\text{m}$ 。利用点元1与点元3的均衡方程可反演得 $T = 250.5\text{m}^2/\text{d}$ 及 $S = 0.000996$ ,与本例正演时所给的参数基本一致。

再从野外实际情况考虑,如果点元3的水头的实测值为 $H_3 = 94.92\text{m}$ ,而点元1及点元2的水头是由趋势模拟或由人工绘制的流场图中插值获得,内插精度约为30—40cm,不妨假定 $H_1 = 93.4\text{m}$ ,而 $H_2 = 95.4\text{m}$ 。根据点元1与点元3的均衡方程可得

$$\begin{cases} 16.74T + 1320000S = 5000 \\ -2.48T + 345000S = 0 \end{cases}$$

解得  $T = 191 \text{ m}^2/\text{d}$  及  $S = 0.0014$ 。尤其是导水系数与本例正演时所给的值相差 24%，而贮水系数相差很大，竟达 40%。由此可以看出在含水层系统的识别中参数对于水头带来的误差是十分敏感的。

上述求参数利用了点元 1 与点元 3 的均衡方程，如果利用点元 2 与点元 3，则根据均衡方程可得（利用正演求得的水头值）

$$\begin{aligned} -1.47827T + 369572.25S &= 0 \\ -2.03266T + 508161S &= 0 \end{aligned}$$

这是一个线性齐次方程组，除零解外再无其他的解。因此，在反演问题中没有水量项，或者说没有源汇项是无法求得参数的。当然，也可以将点元 1、2、3 均衡方程转化而得的参数的方程联系起来，得

$$\begin{aligned} 14.99844T + 1250384S &= 5000 \\ -1.47827T + 369572.25S &= 0 \\ -2.03266T + 508161S &= 0 \end{aligned}$$

这是一个  $T$  与  $S$  的超定方程组（方程个数多于未知数个数），可用最小二乘法求解，但仍然克服不了参数对水测量误差的敏感性。

在反演问题中，水量的重要性是显而易见的。达西定律的梯度形式为

$$q = -K \cdot \text{grad}(H)$$

它包括三个量，必须知道其中两个量才能求出第三个量。如果只知道  $H$ ，而不知道  $q$ ，那是无法求得渗透系数  $K$  的。

## 五、广义的含水层系统识别

以上仅阐述了根据在渗流场取得某些信息以反求概化模型的水文地质参数，但从广义角度来看，含水层系统识别应包括以下四个方面：

- （1）单纯求概化模型的水文地质参数，包括导水系数，渗透系数，贮水系数、给水度，越流因素等；
- （2）求支配方程中的源汇项，包括降雨入渗系数、蒸发量、渠系灌溉回归水系数，井灌回归水系数等；
- （3）求支配方程的定解条件，比如第二类边界条件的单宽补排量等；
- （4）上述三种情形的不同结合。

在实际工作中，多半遇到的是第四种情形的含水层系统识别问题。此时要注意区分反求量间是否有相关性，比如当在给定水头的情况下，给水度与回归水系数是相关的，贮水因素与越流因素是相关的等。只有这样才能避免含水层系统识别中过多的主观臆断性。

## 六、直接解法与间接解法

直接方法就是根据渗流区域内若干个点在不同时刻的已知水头和某些点上的抽水量或者其它的垂向交换水量以及侧向径流量，在已知定解条件下，利用水均衡方程直接计算含水层的参数。这种方法一般来说，需要增加人为的约束条件，才能保证问题解的适定性。因此，直接方法用的较少。间接方法是利用正演问题的适定性，即按照一定的模式不断的变换参数，利用正演求解出已知点不同时刻的水头，再将计算值与实测值进行比较，按照

一定的判别准则和误差限,判断最后所要选取的参数。直接方法计算难度大,但化费电子计算机的机时少。而间接方法原理简单,但化费电子计算机的机时多。对于一个实际的工作区域,如果工作者对含水层的岩性及水文地质条件能了如指掌,间接方法往往能取得较好的效果。

由于含水层系统的识别问题,总可以化为最优化问题去求解,因此,从原则上讲,一切最优化方法都可以用于含水层系统的识别。关于这方面的讨论读者可以参考有关专著。考虑到识别问题的复杂性,以下的讨论仅局限于求规范化模型的含水层参数。

## 第二节 间接解法

间接解法利用解正演问题的适定性,先给欲求水文地质参数一组初值  $\{k^{(0)}\} = (k_1^{(0)}, k_2^{(0)}, \dots, k_n^{(0)})$ , 再利用这组参数解正演问题,求出  $i$  点 ( $i=1 \sim I$ ), 在  $j$  ( $j=1 \sim J$ ) 时刻的水头  $H_i(j)$ 。假设在该点相应时刻的水头观测值为  $h_i(j)$ , 由任一判别准则,比如用判别准则 5。

$$E(k_1, k_2, \dots, k_n) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J [H_i(j) - h_i(j)]^2 \quad (4-4)$$

作为衡量水头值计算和观测值之间的拟合程度。上式中  $j$  和  $i$  分别表示比较时刻和观测点的编号,  $J$ ,  $I$  为观测时刻和观测点的总数。

初值  $\{k^{(0)}\} = (k_1^{(0)}, k_2^{(0)}, \dots, k_n^{(0)})$  假设得好坏,由  $E$  的大小来衡量。一般  $E$  愈小,假设的这组参数就愈符合实际情况。但是,也可能出现这种情况,使  $E$  达到极小的这一组参数还没有满足对计算水头  $H_i(j)$  和观测水头  $h_i(j)$  之间差值的精度要求。为了避免出现这种情况通常采用加权的办法,把函数  $E$  取为

$$E(k_1, k_2, \dots, k_n) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \omega_{i,j} [H_i(j) - h_i(j)]^2 \quad (4-5)$$

式中  $\omega_{i,j}$  称为权因子。精度高的水头值,相应的  $\omega_{i,j}$  取得也就愈大。函数  $E$  习惯上称为评价函数或目标函数。

由此,反演问题就转化为一个最优化问题,求一组参数  $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \dots, \bar{k}_n$  使

$$E(\bar{k}_1, \bar{k}_2, \dots, \bar{k}_n) = \min E(k_1, k_2, \dots, k_n) \quad (4-6)$$

满足约束条件

$$\alpha_i \leq \bar{k}_i \leq \beta_i \quad i=1, 2, \dots, n \quad (4-7)$$

即在一定的限制条件下寻找使目标函数取得极小值的极小点。最优化问题的具体作法是,根据计算  $E$  值的大小逐次修正所假设的参数,使  $E$  逐渐减小,直至满意为止。在这个过程中要不断解正演问题,因为只有根据修正后的参数去解正演问题计算出  $H_i(j)$ , 才能得到相应目标函数  $E$  的值。

如何修正各个水文地质参数才能使  $E$  值不断减小,这就是本节要讨论的问题。

### 一、逐个修正法中的 0.618 法

逐个修正是建立在直接搜索法的基础上的。假设一元函数  $y=f(x)$  具有单峰性(图 4-3), 即在区间  $[a, b]$  内仅有唯一的极小点  $\bar{x}$ 。如何通过搜索求得  $\bar{x}$ , 可设想用一种比较大小的方法。假设在区间  $[a, b]$  内取任意两个比较点  $a_1$  和  $b_1$ , 且  $a_1 < b_1$ , 则将函数值  $f(a_1)$

与 $f(b_1)$ 比较时只能有三种情况:

1. 当 $f(a_1) < f(b_1)$ , 由函数的单峰性可知, 极小点 $\bar{x}$ 必在 $[a, b_1]$ 内;

2. 当 $f(a_1) > f(b_1)$ , 由函数的单峰性可知, 极小点 $\bar{x}$ 必在 $[a_1, b]$ 内;

3. 当 $f(a_1) = f(b_1)$ , 由函数的单峰性可知, 极小点 $\bar{x}$ 必在 $[a_1, b_1]$ 内。

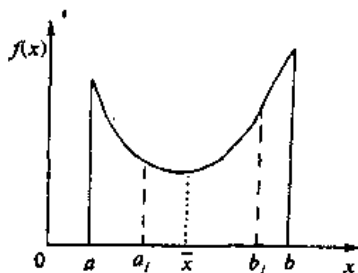


图 4-3

上述三种情况的任一种, 都将缩小搜索区间。下一步是在缩小后的小区间上, 重复上述的比较, 其搜索区间继续缩小, 直至找到能满足一定精度要求的极小点的近似值为止。

情况 1 是在 $[a, b_1]$ 上继续比较, 由于在 $[a, b_1]$ 上已有函数值 $f(a_1)$ , 因此只要在 $[a, b_1]$ 内任取一点求出其函数值, 按上述原则比较就可再次缩小搜索区间。情况 2 与情况 1 相同, 不过比较的区间一开始为 $[a_1, b]$ 而已。对于情况 3, 在 $[a_1, b_1]$ 内则要取两点, 求其相应的函数值, 再继续比较以缩小搜索区间。

选择比较点的一种较好方法为 0.618 法。

1. 0.618 法的原理

由上述的比较方法可知, 如果比较点选择得适当, 可以大大节省计算工作量, 加快缩短区间的速度。0.618 法就是优选比较点较好的方法。为了更好地理解这种方法, 先介绍一下黄金分割的原理。

在 $[a, b]$ 中求一分点 $x_1$ , 使它满足比例

$$\frac{x_1 - a}{b - x_1} = \frac{b - x_1}{x_1 - a}$$

将上式简化可得

$$x_1^2 - (3b - a)x_1 + b^2 + ab - a^2 = 0$$

$$x_1 = a + \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} (b - a)$$

这是两个根, 但是只有一个根

$$x_1 = a + \frac{3 - \sqrt{5}}{2} (b - a) \approx a + 0.382(b - a) \approx b + 0.618(a - b)$$

在 $[a, b]$ 区间内, 因此 $x_1 \approx b + 0.618(a - b)$  才是欲求区间 $[a, b]$ 上的一个分割点。

在 $[a, b]$ 中再确定一个分点 $x_2$ , 使其满足

$$\frac{b - x_2}{x_2 - a} = \frac{x_2 - a}{b - a}$$

同理可求得 $x_2 \approx a + 0.618(b - a)$  为区间 $[a, b]$ 上的另一个分割点。

按上述要求确定的分割点 $x_1$ 与 $x_2$ 称为 $[a, b]$ 上的黄金分割点。由于这两个分割点便于计算, 具有一定的规律可以遵循, 自然可以被选取为比较点。由于计算分割点 $x_1$ 、 $x_2$ 的公式中都含有系数 0.618, 所以这种比较法称为 0.618 法。

0.618 法可表述为: 假设函数 $y = f(x)$  具有单峰, 极小点 $\bar{x}$ 在 $[a, b]$ 内, 取 $[a, b]$ 内的两个比较点为

$$x_1 = a + 0.382(b - a) \quad (4-8)$$

$$x_2 = a + 0.618(b-a) \quad (4-9)$$

算出  $f(x_1)$ 、 $f(x_2)$  进行比较, 以逐步缩小搜索区间。反复按此法进行, 直至区间收缩到满足精度要求为止。最后以最末小区间的端点坐标的平均值做为极小点的近似值。

## 2. 0.618法在反演问题中的应用

首先将地下水流系统的渗流区域分为若干个小区 (如用有限差分法或有限元法, 每个小区可以包含若干个面元, 但小区的划分一定要结合含水层的富水条件), 导水系数  $T$  或者渗透系数  $K$  以及贮水系数  $S$  或者给水度  $\mu$  假定在一个小区上为常数。  $T$  (或  $K$ ) 与  $S$  (或  $\mu$ ) 的分区可以不一致。假设待求参数  $T_1, T_2, \dots, T_m$ ;  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , 其中  $m+n=n$ 。这些待求参数就作为式 (4-4) 中的待求参数  $k_1, k_2, \dots, k_n$ 。

其次, 适当给一组初值  $k_1^{(0)}, k_2^{(0)}, \dots, k_n^{(0)}$ , 以这组假定的参数值求解正演问题, 预报各点不同时刻的水头

$$H_i(j), \quad i=1, 2, \dots, I; \quad j=1, 2, \dots, J$$

按照式 (4-4) 计算判别准则 (评价函数)  $E$  的值。一般情况下, 由于所选择的初值含有较大的误差, 所以  $E$  值总是一个较大的数。如何修正初值, 以减小评价函数  $E$  的值, 或者说如何选取更合适的参数, 可按以下步骤进行。

先令  $k_2^{(0)}, k_3^{(0)}, \dots, k_n^{(0)}$  保持不变, 取

$$E(k_1, k_2^{(0)}, k_3^{(0)}, \dots, k_n^{(0)}) = E(k_1)$$

变为  $k_1$  的函数, 按照 0.618 法进行多次修正, 选出合适的  $k_1$  使  $E(k_1)$  达到极小 (即仅在  $k_1$  变化的情况下), 此时的  $k_1$  记为  $k_1^{(1)}$ 。

再按照同样的方法保持  $k_1^{(1)}, k_2^{(0)}, \dots, k_n^{(0)}$  不变, 对  $k_2^{(0)}$  进行修正, 求得合适的  $k_2$  值, 记为  $k_2^{(1)}$ 。依照同样的方法继续对  $k_3^{(0)}, k_4^{(0)}, \dots, k_n^{(0)}$  进行修正, 最后求得  $k_1^{(1)}, k_2^{(1)}, k_3^{(1)}, \dots, k_n^{(1)}$ 。这称为第一次修正值。

需要注意的是,  $k_1^{(1)}$  是在  $k_2^{(0)}, k_3^{(0)}, \dots, k_n^{(0)}$  保持不变的情况下求得的, 当参数修正完一遍时, 所得到的是  $E(k_n)$  为极小, 而不再是  $E(k_i)$  为极小,  $i=1, 2, \dots, n-1$ , 因此  $k_1^{(1)}$  已不合适。由此可知, 还需要按照上面的方法进行多次, 直至满足下式即可结束。

$$\begin{cases} |k_i^{(m+1)} - k_i^{(m)}| \leq \delta & i=1, 2, \dots, n \\ E(k_1^{(m+1)}, k_2^{(m+1)}, \dots, k_n^{(m+1)}) \leq \epsilon \end{cases}$$

$\delta, \epsilon$  为根据计算精度要求事先给定的误差限。

如果按照上面的方法进行多次修正,  $E$  值仍然不能满足要求, 这就可能是由于分区不合理等原因造成的, 此时就需要进行分区调整, 再重新进行修正。一般情况下, 只要对计算区域的水文地质条件有较为深入的了解, 通过几次分区修正就可获得较为满意的结果。

下面举一个例子说明 0.618 法的应用。

对于第一节最后给出的超定方程组, 如果  $T, S$  有一近似值  $T', S'$ , 则有

$$\Delta_1 = 14.9984T' + 1250384S' - 5000$$

$$\Delta_2 = -1.47827T' + 369572.25S'$$

$$\Delta_3 = -2.03266T' + 508161S'$$

$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  就是由于  $T', S'$  不是模型的真正参数而使点元 1, 2, 3 处均衡域的均衡方程所产生的水量均衡差。为了求得一组模型参数尽可能地使水量均衡差小, 可仿效判别准则 5,

取  $E = \sum_{i=1}^3 \Delta_i^2$ 。由于反演问题的不适定性，根据含水层岩性分析，比如取  $100 \leq T \leq 500$ ， $0.0002 \leq S \leq 0.002$  作为人工约束，于是问题就变为

$$A: \begin{cases} \text{minimize } E = \Delta_1^2(T, S) + \Delta_2^2(T, S) + \Delta_3^2(T, S) \\ \text{stipulate: } 100 \leq T \leq 500 \\ 0.0002 \leq S \leq 0.002 \end{cases}$$

的一个最优化问题。人工约束的作用就在于按人为的分析（经验）把  $T$ 、 $S$  的最后结果限定在  $ABCD$  构成的四边形内（图4—4）。由于0.618法是一个一个参数的轮换优选，因此不妨先定  $S$  优选  $T$ （先定  $T$  优选  $S$  也是一样的）。优选前还需要确定收敛的误差限。为了示例，假定  $E$  的误差限为  $\epsilon = 1200 \text{ m}^3/\text{d}$ ，相当于参数的近似性使每个均衡方程的水量均衡差在  $|20 \text{ m}^3/\text{d}|$  上下变动。 $T$  的缩短区间即  $\Delta T \leq 10$  及  $S$  的缩短区间即  $\Delta S \leq 0.0001$ 。

图4—5形象的表示了计算的过程。第1步令  $S = 0.0011$ ，为  $S$  上、下限的平均值。固定这个值优选  $T$ ，优选时，对按0.618法计算的参数点，首先检验  $E$  是否小于等于  $\epsilon$ ，再检验  $T$  的缩短区间是否小于等于  $\Delta T$ ，二者中有一个满足，即可转入计算下一个参数。图4—5中的粗线表示被优选而缩短了区间。由图中可以看出，

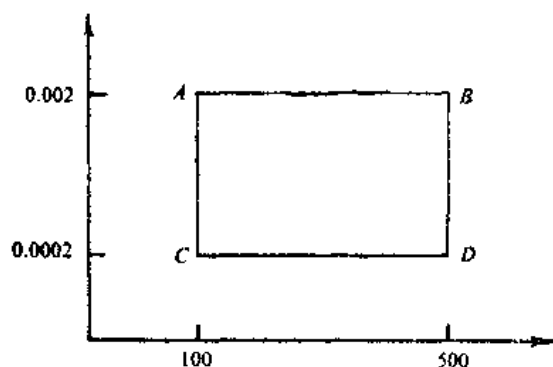


图 4—4

当  $T$  选到第6次时， $E < \epsilon$ ，但  $\Delta T < 10$ ，因此对  $T$  的优选可以结束，取区间内两个参数点的平均值作为下一步优选  $S$  时  $T$  的固定值。

第II步取  $T = 248$ ，再优选  $S$ 。优选到了第3次就有  $E < \epsilon$ ，但  $\Delta S \neq 0.0001$  而为  $0.00011$ 。因为判别准则已达要求即可停止优选。最后参数取  $T = 248$ ， $S = 0.001$ ，这与原问题给出的参数值基本一致。而  $E = 925 \text{ m}^3/\text{d}$ ，相当于每个均衡方程的水量均衡差平均约为  $|18 \text{ m}^3/\text{d}|$ 。

## 二、单纯形法

单纯形（在  $n$  维空间中用  $n + 1$  个点组成的最简单的几何图形）法在解反演问题中也是一种较好的逐步修正法。

用  $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$  表示  $n$  维空间中的一个点，则坐标满足约束条件

$$\alpha_i \leq k_i \leq \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

的点  $k$  的全体是  $n$  维空间中的长方体，并记为  $K$ 。约束条件从几何角度来看，就是限制参数所确定的点必须在长方体  $K$  内。于是由式(4—6)与式(4—7)所确定的最优化问题可简述为：

求  $\bar{k} \in K$ ，使得

$$E(\bar{k}) = \min_{k \in K} E(k) \quad (4-10)$$

求解最优化问题一般应包含三个内容：

1. 给出初值向量  $k^{(0)}$ ；
2. 给出修正初值向量的具体可行方案，从而构成一个搜索序列



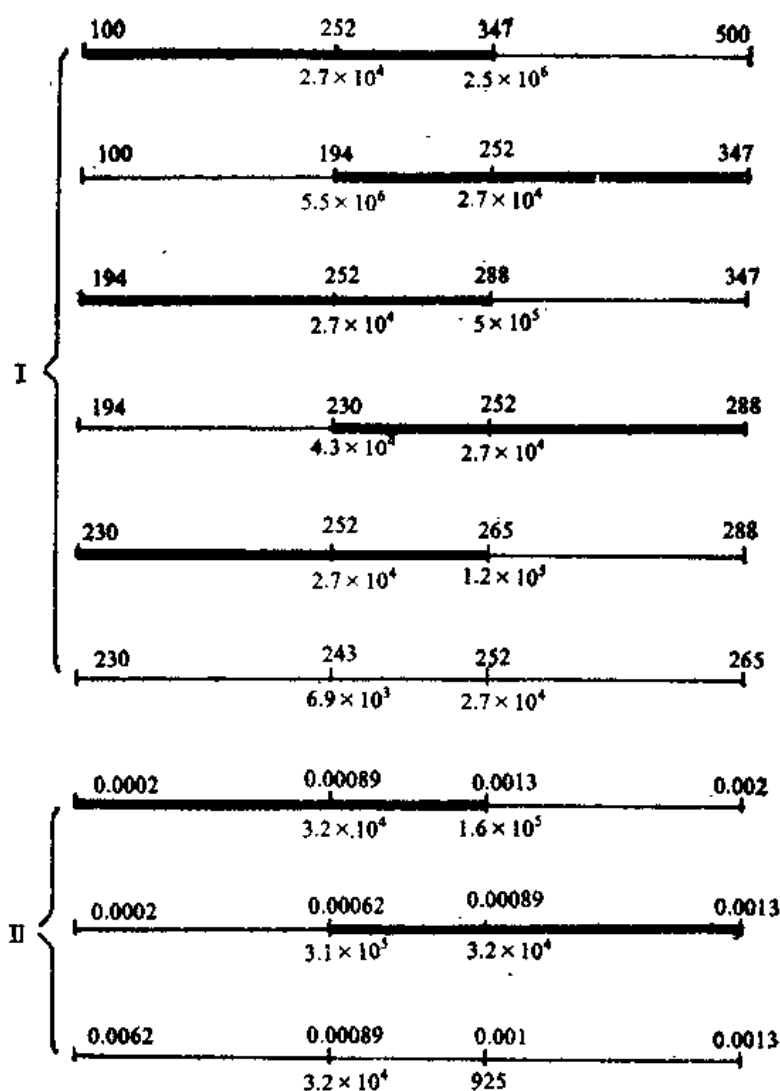


图 4-5

$$k^{(0)}, k^{(1)}, \dots, k^{(i)} \quad (4-11)$$

3. 规定一个判别准则的收敛要求, 若判别准则已经收敛, 搜索过程即可停止。

各种间接方法的最优化的区别就在于形成搜索序列的方法不同。Nelder和Mead(1965)改进的单纯形搜索法给出了形成搜索序列的一种较为简单可行的方案, 其步骤如下:

第一步, 形成初始单纯形。从初始点  $k_0^{(0)}$  出发, 分别沿每一坐标轴方向移动一个步长  $\lambda$ , 就得到  $n$  个点

$$k_i^{(0)} = k_0^{(0)} + \lambda e_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4-12)$$

其中  $e_i$  是沿第  $i$  个坐标轴的单位向量。式 (4-12) 同初始点  $k_0^{(0)}$  共有  $n+1$  个点

$$k_0^{(0)}, k_1^{(0)}, k_2^{(0)}, \dots, k_n^{(0)} \quad (4-13)$$

上面这  $n+1$  个点在  $n$  维空间中构成一个单纯形 (多面体)。适当选取  $\lambda$ , 就可使由式 (4-13) 所确定的单纯形在  $K$  内。为书写简单起见, 将式 (4-13) 中上角码 (0) 略去。

第二步, 计算式 (4-13) 中所有点的函数值, 并记为  $E_i (i=0, 1, 2, \dots, n)$ 。从所有的  $E_i$  中选出三个特别的点  $k_H, k_G, k_L$ 。且分别是

$$\begin{cases} E(k_N) = \max_i E_i, & i=0,1,2,\dots,n, \\ E(k_G) = \max_i E_i, & i=0,1,2,\dots,n, \text{ 但 } i \neq H \\ E(k_L) = \min_i E_i, & i=0,1,2,\dots,n. \end{cases} \quad (4-14)$$

这是在单纯形所有的顶点上比较目标函数 $E_i$ 的结果,以 $k_H$ 的最大, $k_G$ 的次大, $k_L$ 的最小。

第三步,因为 $k_H$ 点最坏,应寻找新的点代替 $k_H$ 。为此应计算出除 $k_H$ 外的其余点的重心

$$k_G = \frac{\sum_{i=0}^n (k_i - k_H)}{n} \quad (4-15)$$

然后再求出 $k_H$ 相对于 $k_G$ 的映射点

$$k_R = 2k_G - k_H \quad (4-16)$$

并计算出目标函数值 $E(k_R)$ 。

第四步,假若

$$E(k_R) < E(k_L) \quad (4-17)$$

就说明 $k_R$ 是比 $k_L$ 更好的一个点,沿此方向去搜索还可能获得较好的点,于是可以再放大步长,取点

$$k_E = (1-\lambda)k_H + \lambda k_R, \quad \lambda > 1 \quad (4-18)$$

若 $E(k_E) < E(k_R)$ ,意味着放大成功,就用 $k_E$ 代替最坏的顶点 $k_H$ ,否则用 $k_R$ 代替 $k_H$ ,这样又形成了一个新的单纯形。

在取 $k_R$ 与 $k_E$ 时,要注意判定其是否在约束条件 $K$ 内。若 $k_R$ 超出了 $K$ ,就人为地置 $E(k_R) > E(k_H)$ ,转入执行下一步。若 $k_E$ 超出 $K$ ,则置 $E(k_R) = E(k_E)$ ,这样做的目的就是要保持新的单纯形始终在 $K$ 内。

对于这个新的单纯形,首先要检查目标函数的收敛要求是否满足,即检查不等式

$$\sum_{i=0}^n [E(k_i) - E(k_L)]^2 \leq \varepsilon \quad (4-19)$$

是否成立, $\varepsilon$ 为预先给定的衡量收敛要求的指标(正数)。式(4-19)满足式(4-19),就取 $\bar{k} = k_L$ ,即最优值已找到,否则就按第二步继续搜索。

第五步,假若式(4-17)不成立,但只要

$$E(k_R) < E(k_G) \quad (4-20)$$

即 $k_R$ 比次大的 $k_G$ 要好,就用 $k_R$ 代替 $k_H$ 而形成一个新的单纯形。

若式(4-20)也不成立,说明在 $k_R$ 这个方向上步子迈的太大了,应考虑缩小步长。

取点

$$k_N = (1-\mu)k_H + \mu k_R, \quad 0 < \mu < 1, \text{ 但 } \mu \neq 0.5 \quad (4-21)$$

若

$$E(k_N) < E(k_H) \quad (4-22)$$

即 $k_N$ 比 $k_H$ 好,就用 $k_N$ 代替 $k_H$ 以形成新的单纯形。否则表明 $k_L$ 已经很接近极小点了,于是需要取缩向 $k_L$ 的单纯形,即取以 $\frac{1}{2}(k_i + k_L)$ 为顶点的单纯形代替原来的单纯形, $i=0,1,2,\dots,n$ 。对这个新单纯形检查收敛要求是否成立,若成立即可取 $\bar{k} = k_L$ ,否则按第二步继

续搜索。

单纯形搜索法的绝大部分计算工作量都用在求  $E$  的计算上。一般来说, 单纯形搜索法要比 0.618 收敛得快, 也就是说, 若按同一准则都达到收敛, 那么单纯形计算  $E$  值的次数比逐个修正法计算  $E$  值的次数要少。

### 第三节 直接解法

#### 一、局部直接求逆法

局部直接求逆法是从基本微分方程出发, 把已知的实测水头和垂向补给  $\epsilon$  等源汇项代入方程, 求参数  $T$  和  $S$ 。例如, 二维承压非稳定流方程

$$T \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right) + \epsilon = S \frac{\partial H}{\partial t} \quad (4-23)$$

若已知某个局部地区不同时刻的水头和垂直补给的实测资料, 则式 (4-23) 在  $t=t_1$  和  $t=t_2$  时刻的  $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}$ ,  $\frac{\partial H}{\partial t}$ ,  $\epsilon$  都是已知的, 设

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right)_{t=t_1} &= a_1, \quad \left( \frac{\partial H}{\partial t} \right)_{t=t_1} = b_1, \quad \epsilon(t_1) = \epsilon_1 \\ \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right)_{t=t_2} &= a_2, \quad \left( \frac{\partial H}{\partial t} \right)_{t=t_2} = b_2, \quad \epsilon(t_2) = \epsilon_2 \end{aligned}$$

代入方程 (4-23) 得

$$\begin{cases} a_1 T - b_1 S = -\epsilon_1 \\ a_2 T - b_2 S = -\epsilon_2 \end{cases} \quad (4-24)$$

解方程 (4-24) 求得参数

$$T = \frac{b_2 \epsilon_1 - b_1 \epsilon_2}{a_2 b_1 - a_1 b_2}, \quad S = \frac{a_2 \epsilon_1 - a_1 \epsilon_2}{a_2 b_1 - a_1 b_2}$$

另外也可将方程 (4-23) 离散化为差分方程求参数的解。例如, 已知某个局部区域  $t_0 = k\Delta t$  和  $t_1 = (k+1)\Delta t$  两个时刻的水头值和垂向补给值, 就可写出两个时刻的差分方程构成关于  $T$  和  $S$  的线性方程组。

$$\begin{cases} T \left[ \frac{H_{i+1,j}^k - 2H_{i,j}^k + H_{i-1,j}^k}{(\Delta x)^2} + \frac{H_{i,j+1}^k - 2H_{i,j}^k + H_{i,j-1}^k}{(\Delta y)^2} \right] + \epsilon_{i,j}^k = S \frac{H_{i,j}^{k+1} - H_{i,j}^k}{\Delta t} \\ T \left[ \frac{H_{i+1,j}^{k+1} - 2H_{i,j}^{k+1} + H_{i-1,j}^{k+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{H_{i,j+1}^{k+1} - 2H_{i,j}^{k+1} + H_{i,j-1}^{k+1}}{(\Delta y)^2} \right] + \epsilon_{i,j}^{k+1} = S \frac{H_{i,j}^{k+2} - H_{i,j}^{k+1}}{\Delta t} \end{cases} \quad (4-25)$$

该方程组与式 (4-24) 相似, 可以直接解出  $T$  和  $S$ 。当然, 方程 (4-23) 也可以按照有限元方程离散化, 列出两个时刻的方程求解  $T$  和  $S$ 。

这种方法的优点是不需要初始条件和边界条件, 对均质各向同性、等厚的渗流区域来说, 只需要知道某个局部区域在两个不同时刻的水头值和垂直方向的补给量就可以求参数  $T$  和  $S$ 。由于这种方法把问题局部化了, 因此称为局部直接求逆法。

上述方法看起来似乎有不少优点, 但实际应用却有不少困难。其原因是求方程 (4-23) 中  $H$  对  $x$ 、 $y$  和  $t$  的偏导数值, 会碰到很大困难。因为我们通常只知道区域内某些点

的观测值, 根据这些有限的观测值求出的偏导数误差很大, 因而很少应用。

假设渗流方程 (4-23) 离散化后得到有关水头和水文地质参数的方程组

$$[A]\{H\} = \{F\} \quad (4-26)$$

其中  $[A]$  表示由水文地质参数等组成的矩阵。如果把未知的水文地质参数写成一个列向量

$$\{K\} = (K_1, K_2, \dots, K_n)^T$$

而且记

$$\{f\} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$$

则式 (4-26) 可以改写为

$$[B]\{K\} = \{f\} \quad (4-27)$$

上式中  $[B]$ 、 $\{f\}$  可由实测水头值和垂向补给  $\epsilon$  求得。由于 (4-27) 可以直接求解未知列向量  $\{K\}$ , 即求得大面积的分区参数。通过实际计算发现, 与矩阵  $[B]$  相应的行列式的值通常很小, 因此由式 (4-27) 求得的  $\{K\}$  往往含有很大的误差。

## 二、数学规划法

由于上述直接求逆法碰到计算水头对时间和空间的偏导数的困难 (利用有限的实测值求出的导数值, 其精度很低), 因而可以增加方程组 (4-27) 中方程的个数, 使其方程个数  $m$  大于要确定的水文地质参数的个数  $n$ , 即方程组 (4-27) 变为

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_i \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

由于  $m \gg n$ , 方程组 (4-27) 系超定方程组, 即

$$[B]\{K\} = \{f\} \quad (4-28)$$

为超定方程组。

这样做的目的, 在于多使用一些实测信息, 以清除实际测量误差的影响。这和利用最小二乘法, 根据大量的观测资料确定两个变量之间的直线关系有相似之处。在非稳定流条件下建立超定方程组, 可以多用几个时段的实测资料; 在稳定流条件下, 在抽水试验时多做几次降深, 利用  $n$  个不同稳定水平的资料来建立超定方程组 (4-28)。

由于式 (4-28) 是一个超定方式组, 方程的个数  $m$  大于未知数 (参数) 的个数  $n$ , 所以任一组参数 ( $n$  个) 都不能同时满足超定方程组的每一个方程。如果用  $k_i$  表示对应水文地质参数 ( $K_1, K_2, \dots, K_n$ ) 的超定方程组 (4-28) 中第  $i$  个方程的剩余, 则有

$$b_{i1}K_1 + b_{i2}K_2 + \dots + b_{in}K_n - f_i = k_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

即

$$\sum_{j=1}^n b_{ij}K_j - f_i = k_i \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4-29)$$

上式中  $b_{ij}$  ( $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ ) 为矩阵  $[B]$  的元素。上述剩余的平方加权和为

$$E(K_1, K_2, \dots, K_n) = \sum_{i=1}^m \omega_i k_i^2 = \sum_{i=1}^m \omega_i \left( \sum_{j=1}^n b_{ij}K_j - f_i \right)^2 \quad (4-30)$$

其中  $\omega_i$  为权因子。

如果有一组水文地质参数  $K_1, K_2, \dots, K_n$  在一维约束条件

$$\alpha_i \leq K_i \leq \beta_i \quad i=1, 2, \dots, n \quad (4-31)$$

下, 使式(4-30)的函数 $E(K_1, K_2, \dots, K_n)$ 达到极小, 这样的一组水文地质参数 $(K_1, K_2, \dots, K_n)$ 便称为超定方程组(4-28)的最优解。参数的变化区间 $[\alpha_i, \beta_i]$ , 可由水文地质工作者根据实际水文地质条件分析给出。

我们通常把在线性不等式的约束条件下, 求二次函数的极值问题称为二次规划问题。例如, 上述求超定方程组(4-28)的最优解问题, 即是在线性不等式(4-31)的约束条件下, 求式(4-30)的二次函数 $E(K_1, K_2, \dots, K_n)$ 的极值问题, 就是一个二次规划问题。在线性不等式的约束条件下, 求一次函数的极值问题称为线性规划问题。解规划问题, 即是求最优解的问题, 对于解这类规划问题的方法, 统称数学规划方法。具体解法, 可参考有关专门文献。

通过实践和文献指出: 求上述水文地质参数最优解的方法, 对于数据的误差仍然十分敏感, 即不稳定性仍然存在。

## 第四节 Frank-Wolfe方法在含水层识别中的应用

在第一节中曾指出了参数识别可采用五种判别准则, 同时还指出第4种较好, 第5种次之。但是由于第1—4种判别准则中都含有绝对值, 这会给计算上带来一些麻烦。若采用第5种判别准则, 则因判别准则为非线性函数, 所以反演的最优化问题将是一个非线性规划问题, 这又增加了计算的难度。本节所要讨论的是如何将非线性规划问题化简为线性规划问题, 然后按照一定的模式由线性规划的解去逼近非线性规划问题的解。这个方法在理论上虽然复杂一些, 但可利用已经广泛使用的按单纯形法编制的线性规划程序, 从而较好地解决了含水层系统的识别问题。

### 一、Frank-Wolfe方法的原理

考虑如下的规划问题:

$$\begin{aligned} \text{Minimize } f(X) \quad X \in R \\ R = \{X | AX \geq B, X \geq 0\} \end{aligned} \quad (4-32)$$

式(4-32)中的 $f(X)$ 可以理解为是按第五种判别准则(全部偏差平方和)给出的非线性函数。由于求参时,  $h$ 是实测值, 而在包含 $H$ (事先也要给定, 通过模拟或通过人工流场插值)的均衡线性方程组中也只包含着所要求的参数, 因此 $f(X)$ 就是一个关于参数(把 $X$ 理解为参数)的非线性方程。由于包含 $H$ 、 $h$ 的均衡方程中: 参数都是一次的, 因此 $AX \geq B$ 就是以参数为变量的线性方程组, 由这些方程组围成的区域为 $R$ ,  $R$ 称为约束凸集。由于所有的参数不能小于零, 因此规定 $X \geq 0$ 。这样, 对式(4-32)就有了一个水文地质的明确概念。

下面从数学角度来阐述式(4-32)的解法。

任取约束凸集的一个顶点 $X^{(0)}$ (相当于所求参数的一个近似值), 在 $X^{(0)}$ 处将 $f(X)$ 按泰勒公式展开且仅取一阶, 就得一线性函数

$$\tilde{f}(X) = f(X^{(0)}) + (\nabla f(X^{(0)}))^T (X - X^{(0)})$$

并以此作为目标函数, 在 $X^{(0)}$ 处

$$\text{Minimize}(\nabla f(X^{(0)})^T X, X \in R$$

上式中并没有包括常数项部分, 因为考虑常数项是没有意义的。如果解得的极值点为  $\bar{X}^{(0)}$ , 由于解  $X^{(0)}$  时要求  $X \in R$ , 所以  $\bar{X}^{(0)}$  也一定是约束凸集的一个极点, 但  $\bar{X}^{(0)}$  并不是原问题式 (4-32) 的最优解  $X^*$  (即最优参数值)。假若  $\bar{X}^{(0)}$  是一个最优解, 那么  $\bar{X}^{(0)}$  一定要满足

$$\nabla f(X^{(0)})^T (\bar{X}^{(0)} - X^{(0)}) = 0 \quad (4-33)$$

于是式 (4-33) 就成为检验  $\bar{X}^{(0)}$  是否为最优解的准则。若  $\bar{X}^{(0)}$  不是最优解, 为了加速迭代速度可在  $(\bar{X}^{(0)} - X^{(0)})$  作一维搜索, 看在此方向上能否找到比  $\bar{X}^{(0)}$  还要好的点。容易理解, 如果使  $(\nabla f(X^{(0)})^T (\bar{X}^{(0)} - X^{(0)})) < 0$ ,  $(\bar{X}^{(0)} - X^{(0)})$  就是一个可行的下降方向。比如在此方向上确可找到一点  $X^{(1)}$ , 比  $\bar{X}^{(0)}$  更好, 就以解得的  $X^{(1)}$  作为新的起点再继续迭代, 如此反复, 直至式 (4-33) 满足, 迭代结束, 最后所得  $X^{(n)}$  (比如迭代  $n$  次) 就是所求得的参数。

上述迭代可概括为以下步骤:

1. 任取极点  $X^{(0)} \in R$ , 定义允许误差  $\varepsilon > 0$ , 且置  $k := 0$ 。

2. 求下列线性规划问题的最优解  $X^{(k)} \in R$ :

$$\text{Minimize}(\nabla f(X^{(k)})^T X, X \in R$$

3. 检验判别收敛准则

$$|(\nabla f(X^{(k)})^T (\bar{X}^{(k)} - X^{(k)}))| \leq \varepsilon$$

若满足, 则停止迭代, 得  $X_{\min} = \bar{X}^{(k)}$ ; 否则转第 1 步。

4. 求单变量极值问题

$$\text{Minimize} f(X^{(k)} + \lambda(\bar{X}^{(k)} - X^{(k)})) \quad \lambda \in (0, 1)$$

的最优解  $\lambda_k$ 。

$\lambda_k$  的计算可用 0.618 法或其它一维寻优方法。

5. 令  $X^{(k+1)} = X^{(k)} + \lambda_k(\bar{X}^{(k)} - X^{(k)})$  再置  $k := k + 1$  后转回第 2 步。

下面举一个简单的数学例子以了解本方法的计算步骤。

$$\text{Minimize} f(X) = 4x_1^2 + (x_2 - 2)^2$$

$$\text{Stipulate: } -2 \leq x_1 \leq 2$$

$$-1 \leq x_2 \leq 1$$

这个问题的  $R$  域显然是一个矩形。任取一顶点  $X^{(0)} = (-2, -1)^T$ , 取  $\varepsilon = 0.5$ 。

由于

$$\nabla f(X) = (8x_1, 2x_2 - 4)^T$$

则

$$\nabla f(X^{(0)}) = (-16, -6)^T$$

那么原问题就可转化为求

$$\text{Minimize}(\nabla f(X^{(0)})^T X = (-16, -6)(x_1, x_2)^T = -2(8x_1 + 3x_2)$$

$$\text{Stipulate: } -2 \leq x_1 \leq 2$$

$$-1 \leq x_2 \leq 1$$

解此线性规划问题得其最优解为  $\bar{X}^{(0)} = (2, 1)^T$ 。检验最优性:

$$|\nabla f(X^{(0)})^T (\bar{X}^{(0)} - X^{(0)})| = |(-16, -6)(2+2, 1+1)^T| > \varepsilon$$

这说明  $\bar{X}^{(0)} = (2, 1)^T$  并不是原问题的最优解。此时沿  $(\bar{X}^{(0)} - X^{(0)})$  方向作一维搜索, 即取

$$X^{(1)} = X^{(0)} + \lambda(\bar{X}^{(0)} - X^{(0)}) = (-2, -1)^T + \lambda(4, 2)^T = (-2 + 4\lambda, 1 + 2\lambda)^T$$

而

$$f(X^{(1)}) = 4(-2 + 4\lambda)^2 + (-1 + 2\lambda - 2)^2 = 25 - 76\lambda + 68\lambda^2$$

因为问题比较简单, 可用求一元函数极小值的办法来求 $\lambda$ , 即令

$$\frac{df(X^{(1)})}{d\lambda} = 136\lambda - 76 = 0$$

求得  $\lambda_0 = 0.588$ , 而  $X^{(1)} = (0.235, 0.118)^T$ ,  $\nabla f(X^{(1)}) = (1.88, -3.75)^T$ 。

再以新的 $\nabla f(X^{(1)})$  构成一个新的线性规划问题, 即

$$\text{Minimize } \nabla f(X^{(1)})^T X = (1.88, -3.76)(x_1, x_2)^T = 1.88x_1 - 3.76x_2$$

$$\text{Stipulate: } -2 \leq x_1 \leq 2$$

$$-1 \leq x_2 \leq 1$$

再次解此线性规划问题得 $X^{(1)} = (-2, 1)^T$ , 再次检验最优性得

$$\nabla f(X^{(1)})^T (\bar{X}^{(1)} - X^{(1)}) = (1.88, -3.76)(-1.765, 0.882)^T > 0$$

这说明 $\bar{X}^{(1)} = (-2, 1)^T$ 还不是原问题的最优解。之后再沿 $(\bar{X}^{(1)} - X^{(1)})$  方向作一维搜索。

如此反复迭代, 最后得原问题的最优解 $X^* = (0, 1)^T$ 。

## 二、Frank-Wolfe方法在含水层系统识别中的应用

现在来研究第二节中的问题A, 不妨再写在下面

$$A: \begin{cases} \text{Minimize } E = 231.27T^2 + 3.7192 \times 10^8 TS + 1.958 \times 10^{13} S^2 \\ \quad - 1.5 \times 10^6 T - 1.25 \times 10^{10} S + 2.5 \times 10^7 \\ \text{Stipulate: } 100 \leq T \leq 600 \\ \quad 0.0005 \leq S \leq 0.005 \end{cases}$$

先求导数

$$\frac{\partial E}{\partial T} = 462.54T + 3.7192 \times 10^8 S - 1.5 \times 10^6$$

$$\frac{\partial E}{\partial S} = 3.916 \times 10^{12} S + 3.7192 \times 10^8 T - 1.25 \times 10^6$$

取参数的初始值为 $X^{(0)} = (T^{(0)}, S^{(0)})^T = (100, 0.0005)^T$ , 则

$$\nabla E(100, 0.0005) = (-1.27 \times 10^6, -1.24 \times 10^{12})^T$$

于是问题A转化为先求如下线性规划问题B:

$$B: \begin{cases} \text{Minimize } (\nabla E(X^{(0)})^T X = -(1.27 \times 10^6 T, 1.24 \times 10^{12} S) \\ \text{Stipulate: } 100 \leq T \leq 600 \\ \quad 0.0005 \leq S \leq 0.005 \end{cases}$$

以后的作法完全可仿照上面的数学例子, 有兴趣的读者不妨自己试算下去, 最后的最优结果:  $T^* \approx 250$ ,  $S^* \approx 0.001$ , 与精确结果基本一致。

本节编写中引用了线性规划理论, 有关线性规划问题可参阅专门著作。

## 参 考 文 献

- [1] 孙纳正, 地下水的数学模型与数值方法, 地质出版社, 1982。
- [2] 李俊亭、林士贵、付泽周, 地下水流的统计模拟与数值模拟, 西北农业大学, 1986。
- [3] 李俊亭、林士贵, 水文地质计算方法概论(中册), 河北地质学院, 1983。
- [4] 付泽周, 水文地质数值法, 西安地质学院, 1984。
- [5] 薛禹群, 谢春红, 水文地质学的数值方法, 煤炭工业出版社, 1980。
- [6] 张宏仁、李俊亭, 有限差分与有限单元法在渗流问题中的对比, 《水文地质工程地质》第二期, 地质出版社, 1979。
- [7] 张宏仁、李俊亭, 解地下水流的不规则网格有限差分法, 《地下水资源评价理论与方法》, 地质出版社, 1982。
- [8] 李俊亭、聂洪起, 水文地质计算的单元均衡法, 河北地质学院学报第二期, 1980。
- [9] 李俊亭, 解地下水平面非稳定渗流的积分离散法, 《综合治理和利用矿床大面积地下水(经验汇编)》, 煤炭工业出版社, 1979。
- [10] 刘金山、邹立芝编, 地下水流数值计算方法, 长春地质学院印刷厂, 1987。
- [11] 林学钰主编, 石家庄市地下水资源的科学管理, 长春地质学院学报水文地质专辑, 1987。
- [12] J. Bear 著, 许涓铭等译, 地下水水力学, 地质出版社, 1985。
- [13] 李俊亭、王愈吉主编, 地下水动力学, 地质出版社, 1987。
- [14] H. P. 王, M. P. 安德森著, 陈文华版, 地下水模拟导论, 南京建筑工程学院, 1985。
- [15] 秦元勋, 计算物理学, 四川科学技术出版社, 1984。
- [16] W. Kinzelbach, Groundwater Modelling (An Introduction with Sample Programs in BASIC) New York, U. S. A., 1986。



