

目 录

符号一览表	I
第一章 绪言	1
第二章 含水层频谱响应的线性理论	3
2.1 时间序列分析中的频谱描述	3
2.2 线性贮水模型	6
2.3 线性化裘布依含水层的分析	7
2.4 拉普拉斯含水层	27
2.5 渗透系数的空间变化	31
2.6 非饱和带	36
2.7 讨论	39
第三章 含水层频谱响应的非线性模拟	44
3.1 潜水含水层分析的物理基础和理论基础	44
3.2 数值模型：频谱响应的确定性模拟	59
3.3 频谱响应的非线性模拟	69
3.4 小结	93
第四章 资料分析和参数确定	95
4.1 集中参数线性系统谱分析的一般描述	95
4.2 谱估计的计算方法	99
4.3 含水层参数的估算	100
4.4 讨论	124
第五章 结论	126
参考文献	127
附录 A 计算机程序表	132
附录 B 谱的置信区间	143

第一章 绪 言

一般认为,水文现象受复杂的自然因素影响,所以确实不能指望了解它的详情。因此,水文系统的分析常按随机过程来考虑。然而,对地下水流的分析,习惯上却是建立在求解偏微分控制方程这类确定性方法上的。自然变化,诸如地下水补给随时间的变化、相邻水体的水位变化、以及地下水补给和渗透系数的空间变化等,通常只是按平均状态加以处理的。但是自然变化仍然是地下水流的一个重要特征,因为根据水位的波动,有可能推断出含水层的性质。用概率的观点来看含水层管理问题,也是令人感兴趣的。在下述报告中,我们准备采用确定性方法,而将使用平稳随机过程探讨潜水含水层中天然的随时间的变化,并且研究垂向水流、空间变化以及非饱和带的贮水量等各种影响。

虽然,以往从随机意义上论述地下水系统的分析模型的文章不多,但也有一些与之有关的研究。有些研究的课题就是如何解释地下水位的升降变化,以便评价含水层的性质。1943年雅各布(Jacob)应用加权平均方法研究降水量与地下水补给的关系,从而得出了与地下水位变化的关系。1965年蒂森(Tison)在一篇评论文章中,描述了一种线性贮水含水层模型,其补给输入呈正弦级数。他发现贮水体流出量是补给量变化的函数,而且与含水层的范围和孔隙度有关。在所附的讨论中,蒂森(1965)描述了一个线性化的裘布依(Dupuit)方程的含水层模型,具有呈正弦曲线的河水位边界条件。他发现水位变化(波动)是由边界扰动传播到含水层而产生的,水位变化具有振幅衰减现象,而且在较短距离内短波就趋于消失;他也发现水位变化的滞后时间随着离开河流的距离加大而增加。平德(Pinder)等人1969年采用一种数值模型,从河流的水位变化确定含水层参数。所有这三种情况,都把地下水系统和输入按确定性问题对待,而没有把它们看作是随机性的。

集中参数线性贮水系统是用来表示潜水含水层的最简单的模型中的一种。地下水系统的线性贮水模型已被克赖詹霍夫·范德勒(Kraijenhoff van de Leur, 1958)、杜奇(Dooge, 1960)、范希尔加德(van Schilfgaarde, 1965)和埃里克逊(Eriksson, 1970)等人用来研究含水层流出量与含水层平均水位。

经典的裘布依近似式提供了一个比较实际的分布参数含水层模型。虽然布鲁克斯(Brooks, 1961)和辛(Singh, 1969)已经推导出特定非线性问题的解析解,但是通过对方程式的线性化求得这种模型的确定性解是具有代表性的方法(Cooper与Rorabaugh, 1963; Glover, 1967; Venetis, 1971; Hall与Moench, 1972)。有几种非线性裘布依方程的数值解法可以应用(Singh, 1969; Horberger等, 1970)。

在某些情况下,含水层性质的空间变化在含水层对各种输入的响应方面具有重要影响。虽然以往没有研究过地下水的随机意义,但是布耶维奇等人(Buyevich, et al., 1969)已经分析了多孔介质中的渗流与随机变化的孔隙度的关系问题。

埃里克逊(1970)和杰克逊等人(Jackson, et al., 1973)已将谱分析用于地下水水位、降水量和温度等时间序列的定性解释方面。

研究目的和范围

本研究总的目标在于发展描述随机性地下水流动现象的分析技术。更明确地说，直接目的在于提出并应用谱分析技术来评价地下水系统，以便利用有关含水层中水位变化的广泛资料。本研究的具体目标如下：

1. 提出潜水含水层频谱响应的线性分析模型，包括不同的含水层轮廓形状的效应；
2. 用频谱响应评价非线性化的效应；
3. 应用理论频谱计算的结果来估算野外条件下的含水层参数；
4. 估算其它因素的频谱效应，如渗透系数的空间变化和非饱和水流。

线性含水层模型的理论分析基础是用傅里叶-斯蒂尔吉斯 (Fourier-Stieltjes) 积分表示的随机函数。偏微分控制方程的解引出各种形状含水层的输入-输出频谱关系式。本研究明显地包括含水层倾斜、地下水径流带厚度、以及垂直流动等效应，并且估计了非饱和带的影响，使用波数域中的谱分析评价了渗透系数空间变化的一些效应。

非线性效应是用有限差分形式的非线性含水层方程的数值模拟来确定的。非线性模拟的谱分析被用来评价频谱域中的非线性效应。

通过堪萨斯州一个地区的地下水位、降水量和河流水位的野外资料的谱分析，说明了线性理论的应用。含水层参数则是通过由野外实测数据所确定的参数与理论的转换函数相比较而确定的。

第二章 含水层频谱响应的线性理论

2.1 时间序列分析中的频谱描述

平稳随机过程 如果一个随机过程的统计量不受时间原点推移的影响, 则此随机过程 $X(t)$ 就称为绝对平稳过程。在特定的情况下, $X(t)$ 的概率密度函数是与时间无关的。就是说

$$X(t) \text{ 和 } X(t+\tau)$$

两个过程对 τ 的任一值都有同样的统计量。但是自然界是否总是存在这种过程, 那是很值得怀疑的。因为应用在时间序列分析中的许多方法都要依据一阶矩和二阶矩, 亦即平均值和方差, 这就可以更切合实际地定义平稳过程的较小的限制标准了。

广义地说, 如果一个过程的期望值为常数, 而且它的自相关只取决于 τ , 则称这个过程为平稳过程。依据概率密度函数 $p(X)$, 有:

$$m_x = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} X p(X) dX \quad (2.1.1)$$

对全部 t 和 τ , 则有

$$\mu_x(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)X(t+\tau) p(X) dX \quad (2.1.2)$$

$\mu_x(\tau)$ 为自协方差函数, 它仅为 τ 而非 t 的函数。 $\mu_x(0)$ 即是大家所熟知的方差。

谱分析 全部平稳过程能够表示为复形式, 为

$$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} dZ(\omega) \quad (2.1.3)$$

这叫做平稳过程的克莱姆 (Cramer) 表达式或随机的傅里叶-斯蒂尔吉斯积分式, 而自协方差的形式 (见 Granger 与 Hatanaka, 1964, 28—29 页) 为:

$$\mu(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} d\phi(\omega) \quad (2.1.4)$$

其中 $Z(\omega)$ 为频率 ω 的傅里叶型复振幅, 这种过程亦称为非相关增量 (non-correlated increments) 过程, 因为它有下列性质:

$$\begin{aligned} E[dZ(\omega_1)dZ^*(\omega_2)] &= 0 & \omega_1 \neq \omega_2 \\ &= d\phi(\omega) = S(\omega)d\omega & \omega_1 = \omega_2 = \omega \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

与

$$\phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} S(\omega') d\omega' \quad (2.1.6)$$

式中的 * 号表示复共轭。 $\phi(\omega)$ 称为功率谱分布, $S(\omega)$ 称为功率谱密度或谱。利用式 2.1.5,

可将 2.1.4 式记为:

$$\mu(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} S(\omega) d\omega \quad (2.1.7)$$

然后, $S(\omega)$ 可利用协方差函数 $\mu(\tau)$ 的傅里叶变换式求出。因此

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} \mu(\tau) d\tau \quad (2.1.8)$$

对于一个实数的和不连续的平稳过程, 有

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[\mu_0 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \mu(j) \cos(j\omega) \right] \quad (2.1.9)$$

通常, 对于有限数量的数据, $\{X_t, t=1, 2, \dots, n\}$, 用 $\hat{R}(\tau)$ 估计 $\mu(j)$, 这里

$$\hat{R}(\tau) = \frac{1}{n-\tau} \sum_{t=1}^{n-\tau} (X_t - \bar{X})(X_{t+\tau} - \bar{X}) \quad (2.1.10)$$

以及

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t \quad (2.1.11)$$

而功率谱密度的估计值 $\hat{S}(\omega)$ 可给定如下:

$$\hat{S}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[\hat{R}(0) + 2 \sum_{j=1}^n \hat{R}(j) \cos(j\omega) \right] \quad (2.1.12)$$

因为 $\hat{S}(\omega)$ 的这种估值与周期图有关, 而且汉南 (Hannan, 1960) 已经指出周期图并不给出 $S(\omega)$ 的相容估计, 同时它一点也没有修匀。习惯上, 用一组称为“频谱窗”的加权因子去修匀这个估计值。最常用的窗有矩形、巴特利特 (Bartlett)、图基 (Tukey) 与帕曾 (Parzen) 的 (见 Jenkins 和 Watts 著作的 244 页, 实例, 1968)。滞后窗的基底宽度愈窄, $\hat{S}(\omega)$ 的修匀谱的偏离愈小; 然而一个窄的频谱窗却给出一个较大的方差。所以选择频谱窗时, 必须在方差与估计值的偏差之间加以权衡。

交叉谱分析 在直接模拟单变事件时, 广义地说, 二元随机过程 $\{X(t), Y(t)\}$ 如果其一阶矩和二阶矩与时间无关, 则称之为平稳过程。从而

$$\begin{aligned} m_X &= E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} X \phi(X) dX \\ m_Y &= E[Y(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} Y \phi(Y) dY \\ \mu_X(\tau) &= E[X(t)X(t+\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} X_k(t) X_k(t+\tau) \phi(X) dX \\ \mu_Y(\tau) &= E[Y(t)Y(t+\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} Y_k(t) Y_k(t+\tau) \phi(Y) dY \\ \mu_{XY}(\tau) &= E[X(t)Y(t+\tau)] = \iint_{-\infty}^{\infty} X(t) Y(t+\tau) \phi(X, Y) dX dY \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

$\mu_{XY}(\tau)$ 为二元随机过程 $\{X(t), Y(t)\}$ 的交叉协方差函数。应用随机的傅里叶-斯蒂尔吉斯积分, 数列 $\{X(t)\}$ 和 $\{Y(t)\}$ 可以表示为下列形式:

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ_X(\omega) \quad (2.1.14)$$

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ_Y(\omega) \quad (2.1.15)$$

而它们的协方差函数为:

$$\mu_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S_{XX}(\omega) d\omega \quad (2.1.16)$$

$$\mu_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S_{YY}(\omega) d\omega \quad (2.1.17)$$

$$\mu_{XY}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S_{XY}(\omega) d\omega \quad (2.1.18)$$

以及

$$E[dZ_X(\omega_1) dZ_X^*(\omega_2)] = \begin{cases} 0 & \omega_1 \neq \omega_2 \\ S_{XX}(\omega) d\omega & \omega_1 = \omega_2 \end{cases} \quad (2.1.19)$$

$$E[dZ_Y(\omega_1) dZ_Y^*(\omega_2)] = \begin{cases} 0 & \omega_1 \neq \omega_2 \\ S_{YY}(\omega) d\omega & \omega_1 = \omega_2 \end{cases} \quad (2.1.20)$$

$$E[dZ_X(\omega_1) dZ_Y^*(\omega_2)] = \begin{cases} 0 & \omega_1 \neq \omega_2 \\ S_{XY}(\omega) d\omega & \omega_1 = \omega_2 \end{cases} \quad (2.1.21)$$

μ_X , S_{XX} , μ_Y 和 S_{YY} 分别为数列 $\{X(t)\}$ 和 $\{Y(t)\}$ 的自协方差函数和功率谱。 μ_{XY} 为交叉协方差函数, 而

$$S_{XY}(\omega) = Co(\omega) + iQ(\omega) \quad (2.1.22)$$

称为数列 $\{X(t)\}$ 和 $\{Y(t)\}$ 之间的交叉谱; $Co(\omega)$ 称之为同相谱, $Q(\omega)$ 为转象谱。从方程式 2.1.18, 可见交叉谱可由 μ_{XY} 的傅里叶变换求得:

$$S_{XY} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} \mu_{XY}(\tau) d\tau \quad (2.1.23)$$

而在数据的总量有限时, $S_{XX}(\omega)$, $S_{YY}(\omega)$ 和 $S_{XY}(\omega)$ 分别由 $\hat{S}_{XX}(\omega)$, $\hat{S}_{YY}(\omega)$ 和 $\hat{S}_{XY}(\omega)$ 估算。

凝聚、相位与放大系数 凝聚函数 $\gamma^2_{XY}(\omega)$, 与传统的统计分析中的相关系数平方直接相当, 它是两个过程的频率分量之间进行相关的度量, 以下式表示:

$$\gamma^2_{XY}(\omega) = \frac{|S_{XY}(\omega)|^2}{S_{XX}(\omega)S_{YY}(\omega)} = \frac{Co^2(\omega) + Q^2(\omega)}{S_{XX}(\omega)S_{YY}(\omega)} \quad (2.1.24)$$

相应的相位移 (phase difference) 则为

$$\theta_{XY}(\omega) = \tan^{-1} \frac{Q(\omega)}{Co(\omega)} \quad (2.1.25)$$

有时也称为过程 $\{X(t)\}$ 和 $\{Y(t)\}$ 的相位谱。相位谱表示两个过程的频率分量之间, 正的或负的滞后时间。

放大系数 (gain factor) 有时亦称为转换函数的振幅, 按下式确定:

$$|G(\omega)| = \frac{|S_{XY}(\omega)|}{S_{XX}(\omega)} = \frac{\sqrt{Co^2(\omega) + Q^2(\omega)}}{S_{XX}(\omega)} \quad (2.1.26)$$

用来测定不同频率分量的振幅放大率 (amplitude magnification)。关于谱分析的更详细的讨论, 建议阅读时间序列分析的有关论著(例如, Jenkins与Watts, 1968)。

2.2 线性贮水模型

图 2.1 示意的集中参数线性贮水系统, 是一种最简单的能代表潜水含水层的模型。这种模型对地下水位的全部空间变化, 都忽略不计; 并将饱和带的平均厚度 $h(t)$, 只看成是时间的函数。还假设单位面积的流出量能表示为:

$$q = a(h - H) \quad (2.2.1)$$

式中, a 为流出常数 (outflow constant), H 为附近水体的水面标高。于是可用下式表示水平衡:

$$S \frac{dh}{dt} + a(h - H) = \epsilon \quad (2.2.2)$$

式中, ϵ 为补给强度, S 为平均贮水系数。在假定 S 和 a 为常数, 以及 h , H 和 ϵ 在时间上为平稳的前提下, 取方程式 2.2.2 的期望

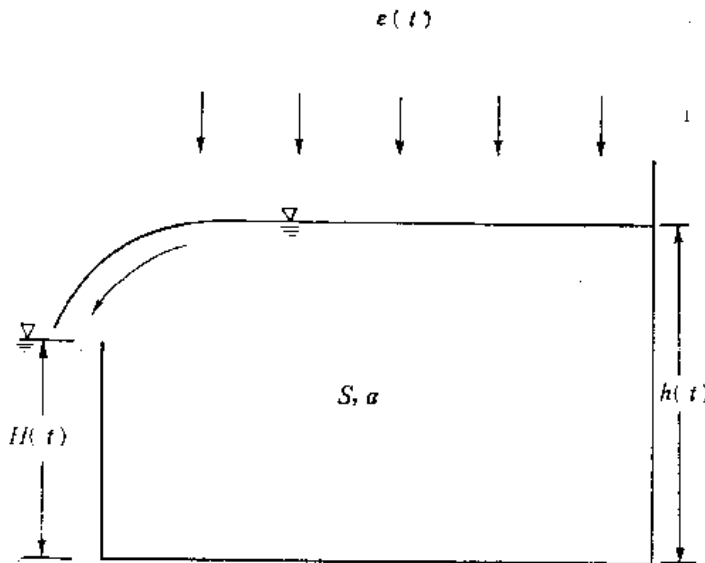


图 2.1 线性贮水系统示意图

值, 得到表示平均值的式子:

$$a(\bar{h} - \bar{H}) = \bar{\epsilon} \quad (2.2.3)$$

而且, 围绕平均数的上下波动, 也满足式 2.2.2, 即:

$$S \frac{dh'}{dt} + a(h' - H') = \epsilon' \quad (2.2.4)$$

因此 h' , H' 和 ϵ' 是平均数为零时的平稳随机过程。省去撇点, 利用式 2.1.3, 得:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ_h(\omega) \quad (2.2.5)$$

$$H(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ_H(t) \quad (2.2.6)$$

$$\epsilon(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ_\epsilon(\omega) \quad (2.2.7)$$

将式 2.2.5, 2.2.6 和 2.2.7 代入 2.2.4, 则由下式给出广义的傅里叶振幅:

$$dZ_h(\omega) = \frac{a dZ_H(\omega) + dZ_\epsilon(\omega)}{i\omega S + a} \quad (2.2.8)$$

应用式 2.1.19—21, 则频谱密度函数变为

$$S_{hh} = \frac{a^2 S_{HH}(\omega) + a S_{H\epsilon}(\omega) + a S_{\epsilon H}(\omega) + S_{\epsilon\epsilon}(\omega)}{\omega^2 S^2 + a^2} \quad (2.2.9)$$

同样，从式2.2.8可以得出输入-输出交叉谱为

$$S_{\epsilon h}(\omega) = \frac{[a S_{\epsilon H}(\omega) + S_{\epsilon\epsilon}(\omega)](a + i\omega S)}{a^2 + \omega^2 S^2} \quad (2.2.10)$$

$$S_{Hh}(\omega) = \frac{[a S_{HH}(\omega) + S_{H\epsilon}(\omega)](a + i\omega S)}{a^2 + \omega^2 S^2} \quad (2.2.11)$$

当只考虑单个输入时(例如 $H=0$ 或 $\epsilon=0$)，比方说 $\epsilon=0$ ，则式2.2.11可简化为：

$$S_{Hh}(\omega) = \frac{a(a + i\omega S)}{a^2 + \omega^2 S^2} S_{HH} \quad (2.2.12)$$

由式2.1.26，我们可以看出因子

$$\left| \frac{a(a + i\omega S)}{a^2 + \omega^2 S^2} \right|$$

正是放大系数或者由 H 至 h 的转换函数。在对地下水系统进行谱分析时，可以用它来推断含水层参数的数值(此处为 a 和 S)。将这种简单的集中参数分析的结果，与以下各节中用更切合实际的分布系统所得到的结果相比较，是具有重要意义的。

2.3 线性化裘布依含水层的分析

裘布依近似式 裘布依近似式可以说是研究多孔介质中无压水流问题的最权威的方法。它需要假定等势线(在二维情况下)基本上是垂直的，而水流基本上是水平的(见Bear, 1972)。因此，对像图2.2所示的一般情况(完全切穿水流，长度 L 有限)来说，传统的裘布依近似式可导出下列控制方程：

$$S \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[Kh \frac{\partial (h + \zeta)}{\partial x} \right] + \epsilon \quad (2.3.1)$$

式中， $h(x, t)$ ——饱和带的厚度；

x ——水平坐标；

ζ ——含水层隔水底板的高度；

S ——贮水系数；

K ——渗透系数；

ϵ ——补给强度(假定在 x 坐标轴上是均匀的)。

2.3.1式也可以写成：

$$S \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} Kh \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} Kh \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \epsilon \quad (2.3.2)$$

设 $Kh=T$ (导水系数)和 $\partial \zeta / \partial x = \beta$ (隔水底板的坡度)为常数，2.3.2式可以线性化为

$$S \frac{\partial h}{\partial t} = T \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \beta K \frac{\partial h}{\partial x} + \epsilon \quad (2.3.3)$$

其边界条件为 $x=0, h=H$ 和 $x=L, \partial h / \partial x = 0$ 。对于平稳随机过程，2.3.3式的均值部分由下式给出：

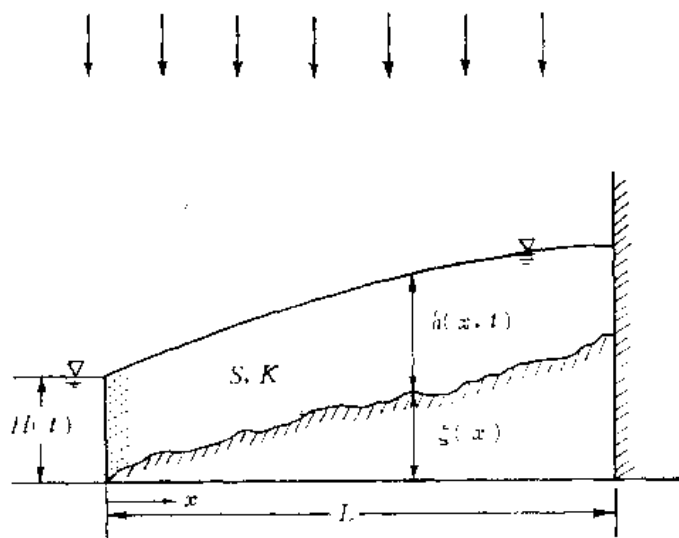


图 2.2 具有任意底板并完全切穿水流的潜水含水层

含水层底板坡度固定时的线性化裘布依分析 利用随机的傅里叶-斯蒂尔吉斯积分式 2.1.3, 我们有:

$$\begin{aligned}
 h' &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ_h(\omega, x) \\
 \varepsilon' &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ_\varepsilon(\omega) \\
 H' &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ_H(\omega)
 \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

将式 2.3.6 代入 2.3.5 式, 则有

$$T \frac{d^2}{dx^2} [dZ_h(\omega, x)] + \beta K \frac{d}{dx} [dZ_h(\omega, x)] - i\omega S dZ_h + dZ_\varepsilon = 0 \tag{2.3.7}$$

其边界条件为

$$\begin{aligned}
 x=0 & \quad h' = H'(t) & \quad dZ_h(\omega, 0) = dZ_H(\omega) \\
 x=L & \quad \frac{\partial h'}{\partial x} = 0 & \quad \frac{d}{dx} [dZ_h(\omega, x)] = 0
 \end{aligned}$$

式 2.3.7 的解为

$$dZ_h(\omega, x) = F(\omega, x) dZ_H(\omega) - [1 - F(\omega, x)] \frac{idZ_\varepsilon(\omega)}{\omega S} \tag{2.3.8}$$

式中,

$$F(\omega, x) = \frac{\alpha_1 e^{\alpha_1 L} e^{\alpha_2 x} - \alpha_2 e^{\alpha_1 x} e^{\alpha_2 L}}{\alpha_1 e^{\alpha_1 L} - \alpha_2 e^{\alpha_2 L}}$$

$$T \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial x^2} + \beta K \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} + \bar{\varepsilon} = 0 \tag{2.3.4}$$

在式 2.3.3 中代入

$$h = \bar{h} + h'$$

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon} + \varepsilon'$$

$$H = \bar{H} + H'$$

其中带撇号的量表示围绕均值的波动, 减去均值方程式 2.3.4, 得控制波动值的方程:

$$S \frac{\partial h'}{\partial t} = T \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} + \beta K \frac{\partial h'}{\partial x} + \varepsilon \tag{2.3.5}$$

并具有下列边界条件:

$$x=0 \quad h' = H'$$

$$x=L \quad \frac{\partial h'}{\partial x} = 0$$

而

$$\alpha_1 = -\frac{\beta K}{2T} + \sqrt{\left(\frac{\beta K}{2T}\right)^2 + \frac{i\omega S}{T}}$$

$$\alpha_2 = -\frac{\beta K}{2T} - \sqrt{\left(\frac{\beta K}{2T}\right)^2 + \frac{i\omega S}{T}}$$

于是应用式2.1.4, 2.1.5和2.1.6, 得下列频谱密度函数之间的关系式:

$$S_{hh} = (1-F-F^*+FF^*)\frac{S_{z_0}}{\omega^2 S^2} - \frac{i}{\omega S} [(1-F)F^*S_{hh} - (1-F^*)FS_{hh}] + FF^*S_{hh} \quad (2.3.9)$$

对 $\beta=0$ (即水平的底板) 这种特殊情况,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = (1+i)\left(\frac{|\omega|S}{2T}\right)^{\frac{1}{2}} = b$$

和

$$F = \frac{\cosh[b(x-L)]}{\cosh bL} = \frac{\cosh\left\{bL\left(\frac{x}{L}-1\right)\right\}}{\cosh bL}$$

式2.3.9可以简化为基尔哈给出的式18(1974)。

值得注意的是, 含水层的底板坡度怎样沿着含水层影响式2.3.9给出的频谱关系。式2.3.8给出的 $F(\omega, x)$ 可以写作:

$$F(\omega, x) = \frac{e^{-\tau L \frac{x}{L}} \left[\xi L \cosh \xi L \left(1 - \frac{x}{L}\right) - \tau L \sinh \xi L \left(1 - \frac{x}{L}\right) \right]}{\xi L \cosh \xi L - \tau L \sinh \xi L} \quad (2.3.10)$$

以及

$$F = \tau L = \frac{\beta KL}{2T}$$

$$\xi L = \sqrt{(\tau L)^2 + \frac{i\omega L^2}{\alpha}} \quad \text{和} \quad \alpha = \frac{T}{S}$$

图2.3至2.8上表示的一些曲线, 是沿含水层不同位置上的不同 F 值。由式2.3.9可见, 当 $\epsilon=0$ 时, 函数 $f \equiv FF^* = S_{hh}/S_{HH}$, 从而表征出含水层对河水位变化的频谱响应。同样, 当 $H=0$ 时, $g \equiv (1-F)(1-F^*)/\Omega^2 = T^2 S_{hh}/S_{z_0} L^4$, 表征出对补给变化的无量纲频谱响应。式2.3.10中的参数 $\Omega = \omega L^2/\alpha$ 是无量纲频率, 而且 L^2/α 可以设想为频率的标度。显而易见, 倾斜底板的一般效应是当频率从河流向外传播时, 高频逐渐衰减。从这些曲线可以看出, 在 $F < 0.1$ 时, 这种效应可忽略不计。这一参数 F 表征了底板的坡度。令 $T = Kh_0$ 和 $\beta L = \zeta|_{x=L}$, 得

$$F = \frac{\beta KL}{2T} = \frac{\zeta|_{x=L}}{2h_0} \quad (2.3.11)$$

式中, h_0 为径流带厚度的空间平均值。又依据稳定流方程式, 有:

$$T \frac{d^2}{dx^2} (h + \beta x) = -\epsilon \quad (2.3.12)$$

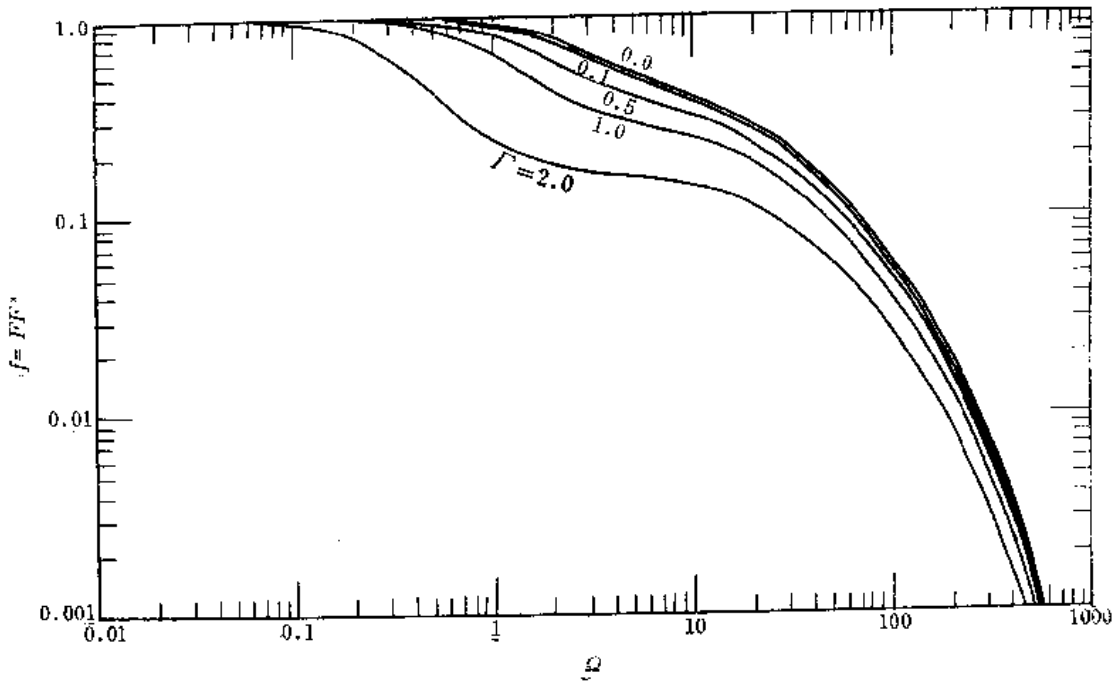


图 2.3 含水层对河水位变化的响应; $x/L = 0.2$ 时不同 Γ 值的 f 曲线

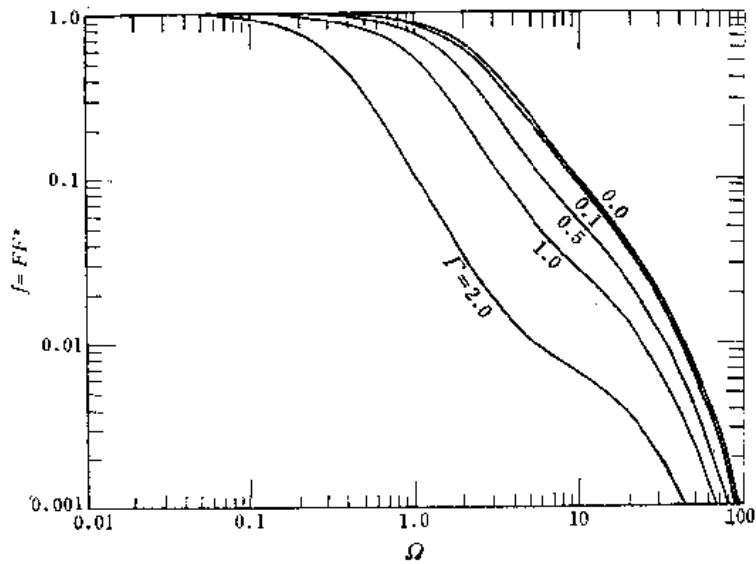


图 2.4 含水层对河水位变化的响应; $x/L = 0.5$ 时不同 Γ 值的 f 曲线

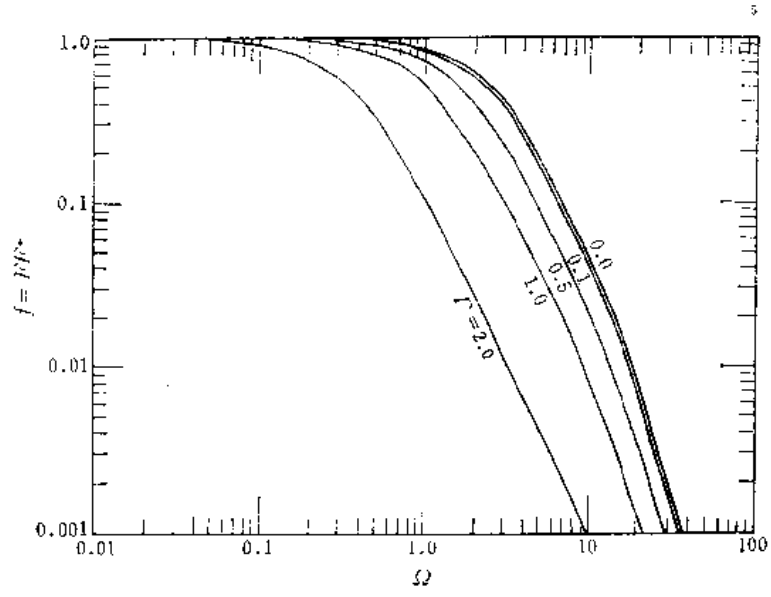


图 2.5 含水层对河水位变化的响应; $x/L = 0.8$ 时不同 Γ 值的 f 曲线

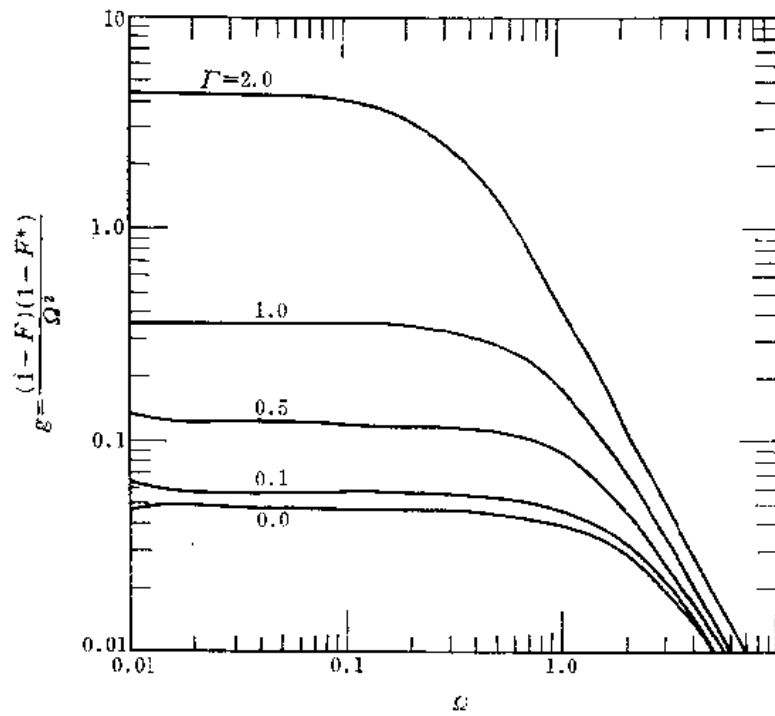


图 2.6 含水层对补给的响应; $x/L = 0.25$ 时不同 Γ 值的 g 曲线

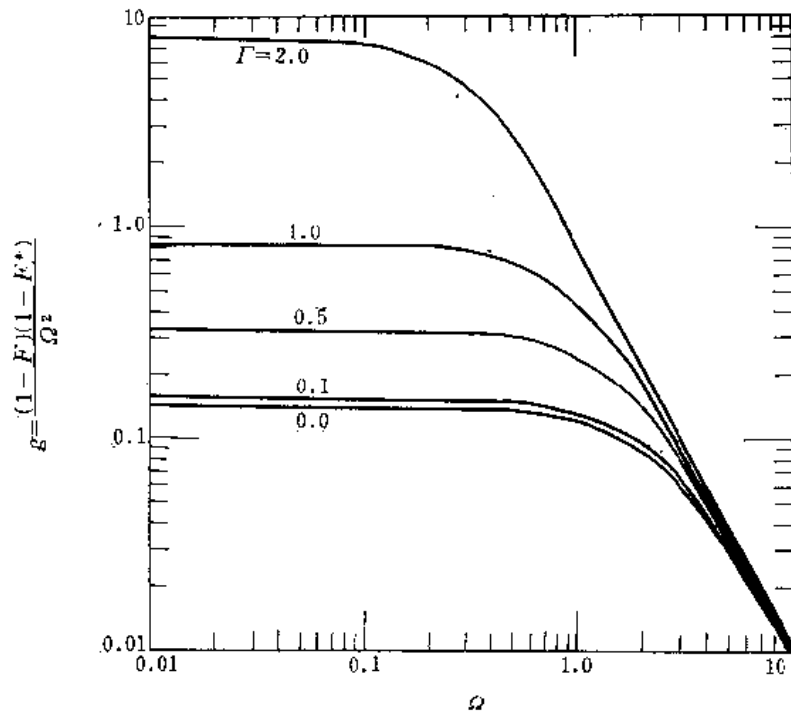


图 2.7 含水层对补给的响应; $x/L = 0.5$ 时不同 F 值的 g 曲线

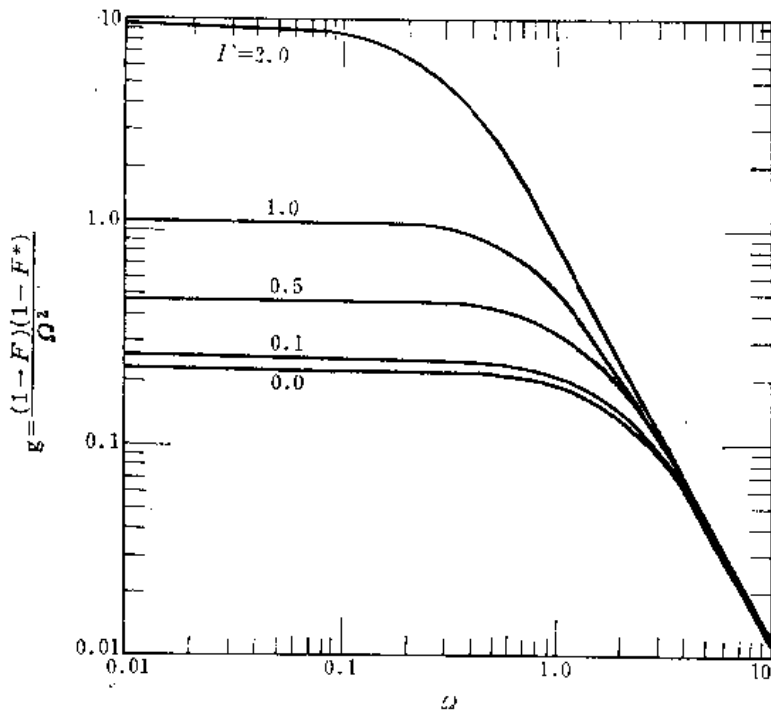


图 2.8 含水层对补给的响应; $x/L = 0.75$ 时不同 F 值的 g 曲线

以及

$$\begin{aligned} x=0 & \quad \frac{d}{dx}(h + \beta x) = 0 \\ x=L & \quad h = \bar{H} \end{aligned}$$

其解为

$$T(h + \beta x - \bar{H}) = x \left(L - \frac{x}{2} \right) \quad (2.3.13)$$

含水层饱和带厚度的变化情况为

$$\frac{h(L) - h(0)}{\bar{H}} = \frac{\Delta h}{\bar{H}} = \frac{\epsilon L^2}{2T\bar{H}} - \frac{\beta L}{\bar{H}} \quad (2.3.14)$$

如果变化很小(比方说, $\left| \frac{\Delta h}{\bar{H}} \right| < \frac{1}{3}$), 由于 $T \approx$ 常数, 倾斜底板的线性化理论应该是最适用的。这种情况的基本原理在“径流带增厚效应”一节中加以阐述。

线性贮水体与裘布依含水层之间的相互作用 就图 2.9 所示的情况来看, 潜水含水层与一个水体或线性贮水体相连, 利用裘布依近似式, 得到含水层的控制方程为:

$$S \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} K h \frac{\partial h}{\partial x} + \epsilon \quad (2.3.15)$$

令 $Kh = T$ 为常数, 则上式可线性化为:

$$S \frac{\partial h}{\partial t} = T \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \epsilon \quad (2.3.16)$$

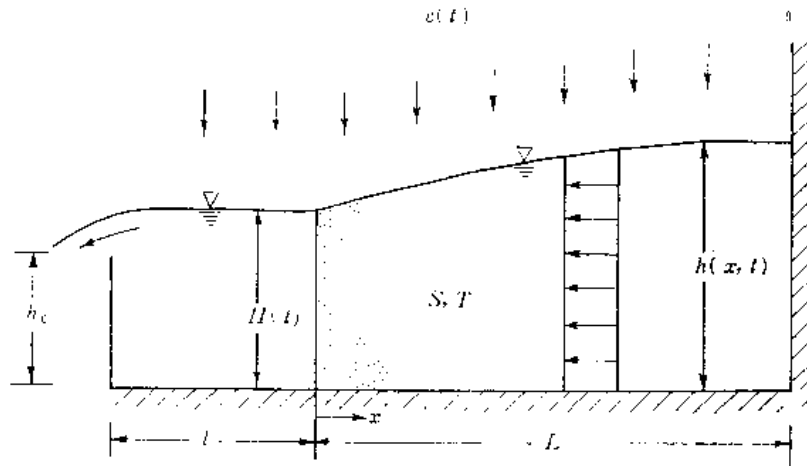


图 2.9 裘布依含水层以及附近的线性贮水体示意图

其边界条件为:

$$\begin{aligned} x=0 & \quad h = H \\ x=L & \quad \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

对线性贮水体来说, 有:

$$l \frac{dH}{dt} + al(H - h_c) = T \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=0} \quad (2.3.17)$$

$T \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=0}$ 项为潜水含水层流入线性贮水体的净流入量。在2.3.16和2.3.17式中代入

$$\begin{aligned} h &= \bar{h} + h' \\ H &= \bar{H} + H' \\ \varepsilon &= \bar{\varepsilon} + \varepsilon' \end{aligned}$$

并消去均值部份，可给出波动值的方程式：

$$\frac{dH'}{dt} + aH' = \frac{T}{l} \frac{\partial h'}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad (2.3.18)$$

$$S \frac{\partial h'}{\partial t} = T \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} + \varepsilon' \quad (2.3.19)$$

以及

$$x=0 \quad h' = H'$$

$$x=L \quad \frac{\partial h'}{\partial x} = 0$$

将2.3.6式给出的 h' 、 ε' 和 H' 的随机的傅里叶-斯蒂尔吉斯积分代入2.3.18和2.3.19式，有：

$$\frac{l(i\omega + a)}{T} dZ_H = \frac{\partial}{\partial x} dZ_h \Big|_{x=0} \quad (2.3.20)$$

$$i\omega dZ_h = \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} dZ_h + \frac{dZ_\varepsilon}{S} \quad (2.3.21)$$

式中， $\alpha = \frac{T}{S}$

其边界条件为

$$x=0 \quad dZ_h = dZ_H$$

$$x=L \quad \frac{d}{dx} dZ_h = 0$$

联立2.3.20与2.3.21式，求解，得到下面的解：

$$dZ_h = (F-1) \frac{1}{\omega S} dZ_\varepsilon \quad (2.3.22)$$

其中

$$F = \frac{\cosh[bL(\frac{x}{L}-1)]}{\frac{Tb}{l(a+i\omega)} \sinh(bL) + \cosh(bL)}$$

而

$$b = (1+i) \left(\frac{\omega}{2\alpha} \right)^{\frac{1}{2}}$$

注意 $\frac{Tb}{l(a+i\omega)}$ 项可写为：

$$\frac{Tb}{l(a+i\omega)} = (bL) \left(\frac{SL}{l} \right) \frac{\left(\frac{aL^2}{\alpha} \right) - i \left(\frac{\omega L^2}{\alpha} \right)}{\left(\frac{aL^2}{\alpha} \right)^2 + \left(\frac{\omega L^2}{\alpha} \right)^2} \quad (2.3.23)$$

利用2.1.5和2.1.6式，有：

$$S_{hh}(\omega) = \frac{(F-1)(F^*-1)}{S^2\omega^2} S_{ss}(\omega) \quad (2.3.24)$$

在这种耦合系统中，除了无量纲频率 $\Omega = \omega L^2/\alpha$ 之外，有两个独立参数，即 SL/l 和 aL^2/α 。第一个参数表示两个系统的容积之比，第二个参数可设想为两个系统的响应时间的比值。然而这两个参数的结合效应怎样影响频率关系则并不明显。图2.10—2.14中表示了这些参数按不同组合形成的曲线。要注意式2.3.24中的 F 也是 x/L 的函数，由于所得的比值 $[S_{hh}(\omega)|_{x=0}/S_{hh}(\omega)]$ 是含水层与水体（湖或水库）之间的频谱响应的量度，所以对下式的比值进行研究也是重要的。

$$\frac{[S_{hh}(\omega)/S_{ss}(\omega)]_{x/L=0}}{[S_{hh}(\omega)/S_{ss}(\omega)]} \quad (2.3.25)$$

在图2.15—2.17中，画出了无量纲频率 Ω 与2.3.25式给出的比值之间的关系曲线。

径流带增厚效应 在上述模型中，我们略去了与径流带厚度变化有关的导水率的变化。这一节中，从平均流动条件的观点来看，分析时已经包含了这种空间变化。为了简化起见，只研究水平的底板。由方程式2.3.1，忽略不计底板的坡度，得到的控制方程为：

$$S \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} Kh \frac{\partial h}{\partial x} + \epsilon \quad (2.3.26)$$

令 $h(x) = \bar{h}(x) + h'(x)$ 和 $\epsilon = \bar{\epsilon} + \epsilon'$ ，其中 $\bar{h}(x)$ 和 $\bar{\epsilon}$ 为期望值，而 $h'(x)$ 和 ϵ' 为波动值，则式

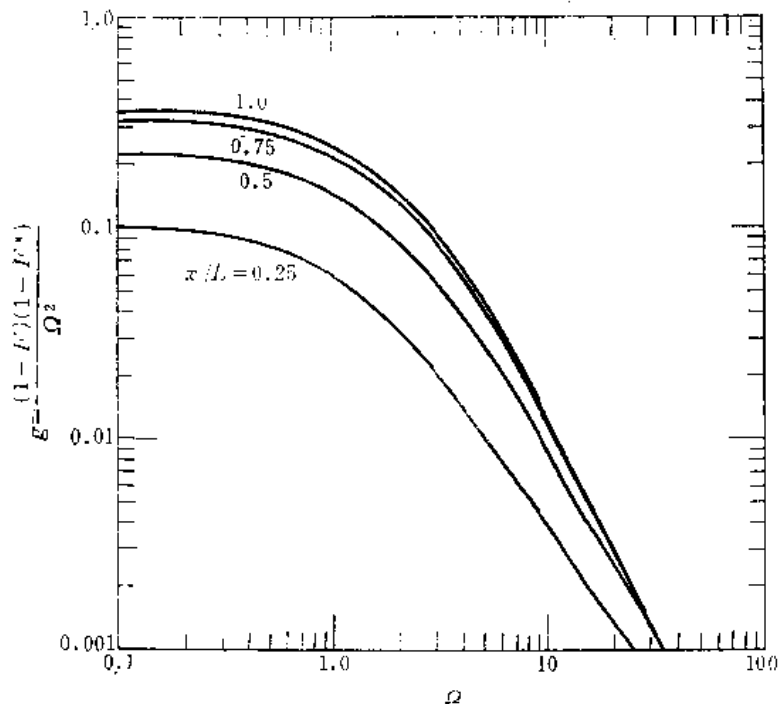


图 2.10 含水层-贮水体系统的响应，沿含水层在 $aL^2/\alpha = 1.0$ 和 $SL/l = 0.1$ 时的 g 曲线

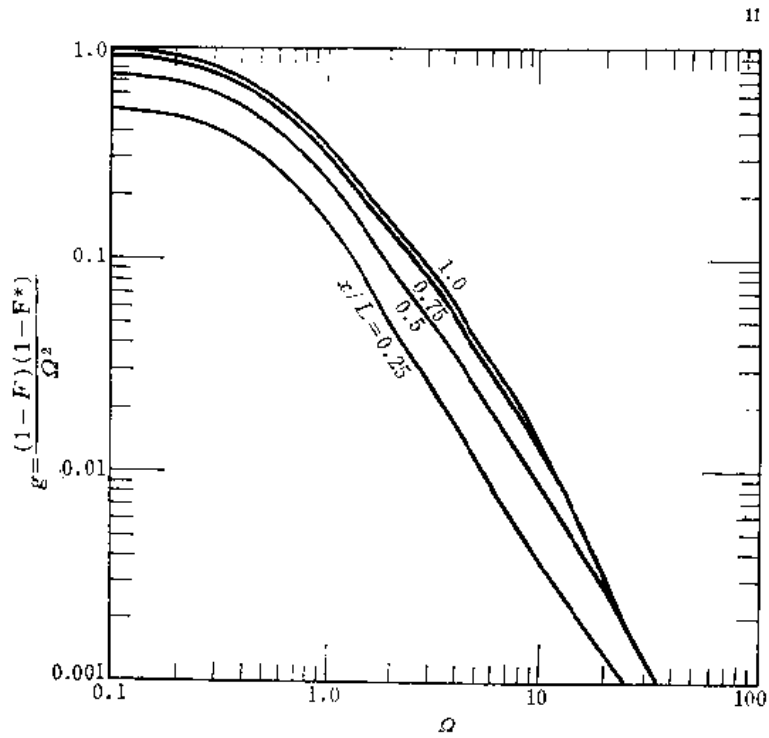


图 2.11 含水层-贮水体系统的响应, 沿含水层在 $aL^2/\alpha = 1.0$ 和 $SL/l = 0.5$ 时的 g 曲线

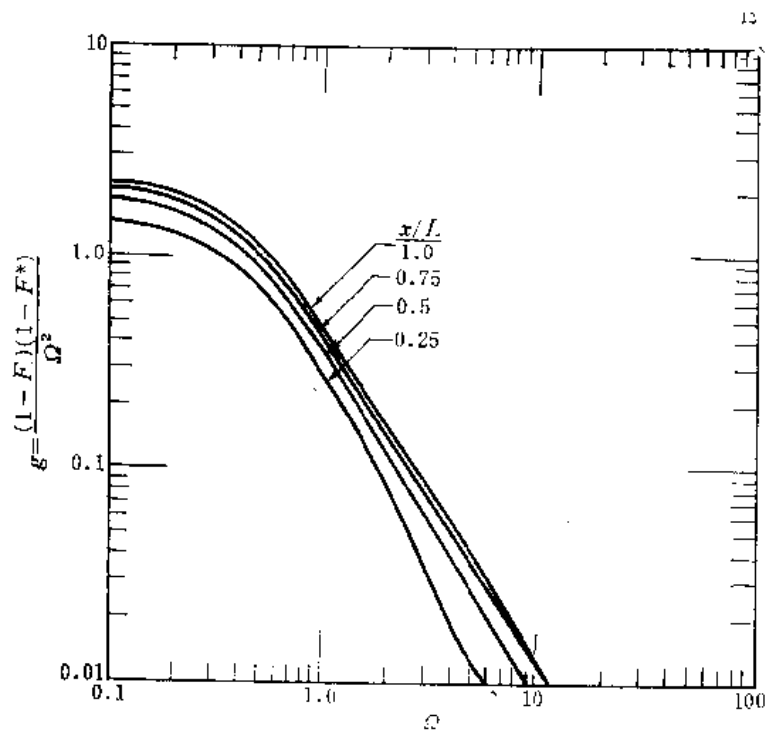


图 2.12 含水层-贮水体系统的响应, 沿含水层在 $aL^2/\alpha = 1.0$ 和 $SL/l = 1.0$ 时的 g 曲线

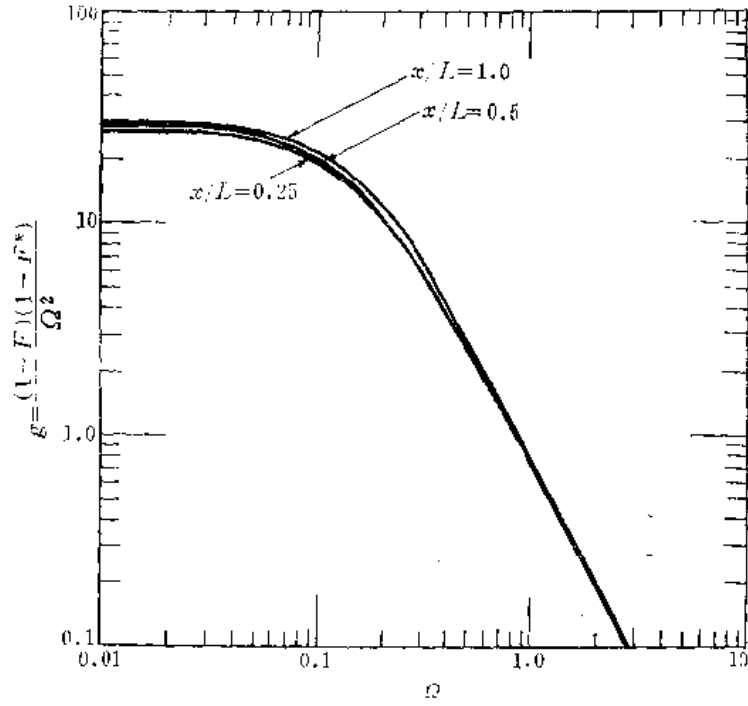


图 2.13 含水层-贮水体系统的响应，沿含水层在 $aL^2/\alpha = 1.0$ 和 $SL/l = 5.0$ 时的 g 曲线

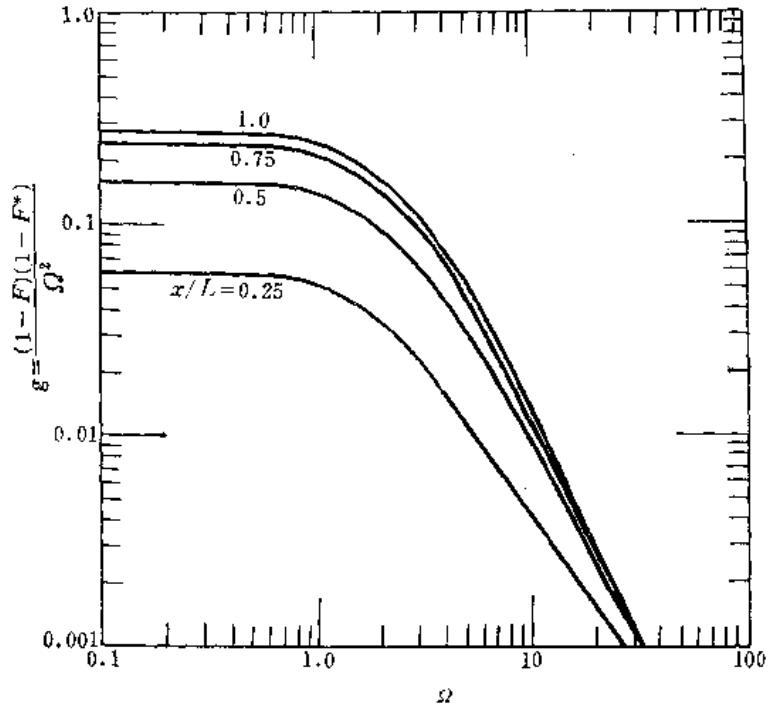


图 2.14 含水层-贮水体系统的响应，沿含水层在 $aL^2/\alpha = 200$ 和 $SL/l = 5$ 时的 g 曲线

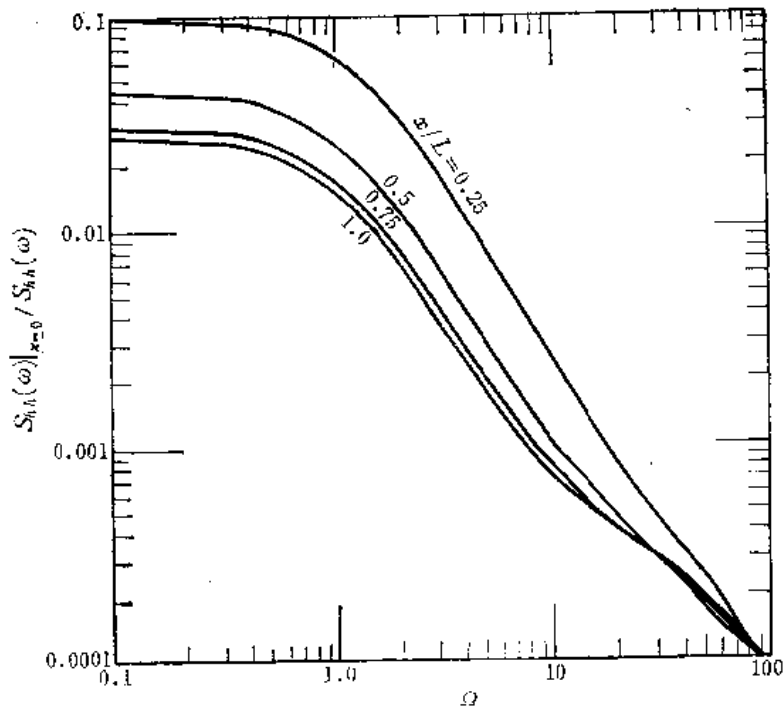


图 2.15 含水层-贮水体系统的响应, 沿含水层在 $aL^2/\alpha = 1.0$ 和 $SL/l = 0.1$ 时的 $S_{hh}|_{x=0}/S_{hA}$ 曲线

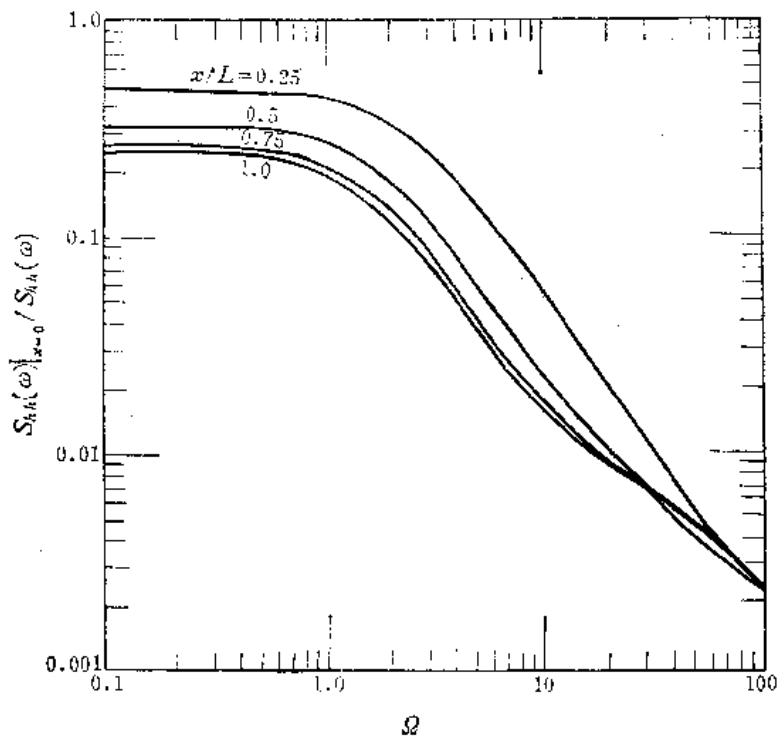


图 2.16 含水层-贮水体系统的响应, 沿含水层在 $aL^2/\alpha = 1.0$ 和 $SL/l = 0.5$ 时的 $S_{hh}|_{x=0}/S_{hA}$ 曲线

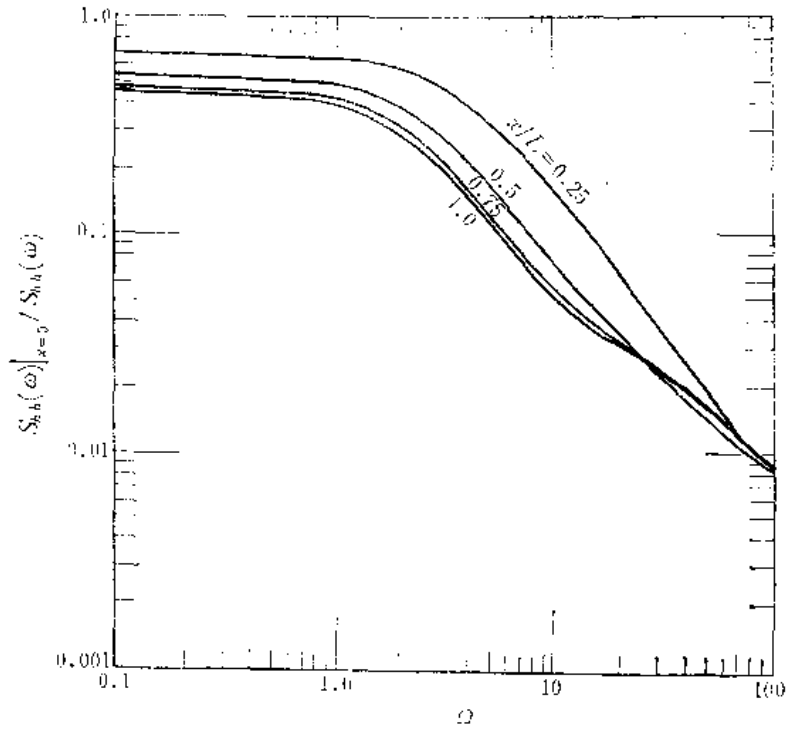


图 2.17 含水层-贮水体系统的响应, 沿含水层在 $aL^2/\alpha = 1.0$ 和 $SL/l = 1.0$ 时的 $S_{hh}|_{x=0}/S_{hh}$ 曲线

2.3.26变为:

$$S \left[\frac{\partial \bar{h}}{\partial t} + \frac{\partial h'}{\partial t} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[K \bar{h} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} + K \bar{h} \frac{\partial h'}{\partial x} + K h' \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} + K h' \frac{\partial h'}{\partial x} \right] + \bar{\epsilon} + \epsilon' \quad (2.3.27)$$

略去包含波动值的乘积项, 则可容易地提出式2.3.27的均值部分:

$$\frac{\partial}{\partial x} K \bar{h} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} = -\bar{\epsilon} \quad (2.3.28)$$

具有下列边界条件

$$\begin{aligned} \bar{h} &= \bar{H} & x &= 0 \\ \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} &= 0 & x &= L \end{aligned} \quad (2.3.29)$$

因为 \bar{h} 仅为 x 的函数, 偏导数可用全导数置换, 其解为:

$$\bar{h}^2 - \bar{H}^2 = \frac{\bar{\epsilon} x}{K} (2L - x) \quad (2.3.30)$$

由于 $\mu = \bar{\epsilon} L^2 / 2K \bar{H}^2 < 1$, 此方程式可用下式近似表示:

$$\bar{h} - \bar{H} = \mu \frac{x}{L} \left(2 - \frac{x}{L} \right) \bar{H} + O(\mu^2) \quad (2.3.31)$$

式2.3.7剩下的含波动值部分为:

$$S \frac{\partial h'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K \bar{h} \frac{\partial h'}{\partial x} + K h' \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} + K h' \frac{\partial h'}{\partial x} \right] + \epsilon' \quad (2.3.32)$$

注意右边括号内的第三项为两个小数量的乘积，可以忽略不计。因此得到下面的波动值控制方程：

$$S \frac{\partial h'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K \bar{h} \frac{\partial h'}{\partial x} + K h' \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} \right] + \epsilon' \quad (2.3.33)$$

K 当作一个常数。按方程式 2.3.31 将 \bar{h} 代入式 2.3.33，则有：

$$S \frac{\partial h'}{\partial t} = K \bar{H} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \left[1 + \mu \frac{x}{L} \left(2 - \frac{x}{L} \right) + \dots \right] h' \right\} + \epsilon' \quad (2.3.34)$$

具有下列边界条件：

$$\begin{aligned} h' &= H' & x &= 0 \\ \frac{\partial h'}{\partial x} &= 0 & x &= L \end{aligned} \quad (2.3.35)$$

参数 μ 表征式 2.3.31 中所见的饱和带厚度随着 $x=L$ 的相对变化。

$$\Delta h = \bar{h}|_{x=L} - \bar{H} = \mu \bar{H}$$

对于小的 μ ，找到下面形式的扰动解：

$$h' = h'_0 + \mu h'_1 + \mu^2 h'_2 + \dots \quad (2.3.36)$$

将 2.3.36 式代入 2.3.34 式，略去 μ^2 以上的高次项，并取消撇点，则有

$$S \frac{\partial (h_0 + \mu h_1)}{\partial t} = K \bar{H} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ h_0 + \mu \left[\frac{x}{L} \left(2 - \frac{x}{L} \right) h_0 + h_1 \right] \right\} + \epsilon \quad (2.3.37)$$

以及

$$\begin{aligned} h_0 + \mu h_1 &= \bar{H} & x &= 0 \\ \frac{\partial h_0}{\partial x} + \mu \frac{\partial h_1}{\partial x} &= 0 & x &= L \end{aligned}$$

因为 $K \bar{H} = T$ ，对 μ^0 次，有：

$$S \frac{\partial h_0}{\partial t} = T \frac{\partial^2 h_0}{\partial x^2} + \epsilon \quad (2.3.38)$$

以及

$$\begin{aligned} x=0 & & h_0 &= H \\ x=L & & \frac{\partial h_0}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

对于 μ 次则有：

$$S \frac{\partial h_1}{\partial t} - T \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} = T \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[h_0 \frac{x}{L} \left(2 - \frac{x}{L} \right) \right] \quad (2.3.39)$$

以及

$$\begin{aligned} x=0 & & h_1 &= 0 \\ x=L & & \frac{\partial h_1}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

依据式 2.1.4—5，方程 2.3.38 的解为：

$$dZ_{h_0} = F dZ_H + \frac{i(F-1)}{\omega S} dZ \quad (2.3.40)$$

式中，

$$F = \frac{\cosh bL \left(\frac{x}{L} - 1 \right)}{\cosh bL}$$

$$b = (1+i) \left(\frac{\omega}{2\alpha} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\alpha = \frac{T}{S}$$

注意2.3.40式与前面导出的2.3.8式是相同的，也就是说非线性并不影响 μ^0 次的解。应用式2.1.14, 2.1.15和2.3.40, 可把 μ 次的方程2.3.39写成下列形式:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x, \omega) - \frac{i\omega S}{T} G(x, \omega) = \frac{-i\omega S}{T} \frac{x}{L} \left(2 - \frac{x}{L} \right) dZ_{h_0}$$

式中,
$$G(x, \omega) = dZ_{h_1} + dZ_{h_0} \frac{x}{L} \left(2 - \frac{x}{L} \right) \quad (2.3.41)$$

以及

$$x=0 \quad G(x) = 0$$

$$x=L \quad \frac{\partial G}{\partial x} = 0$$

使用参数变值法, 可求出方程2.3.41的解为:

$$G(x, \omega) = C_1 e^{bx} + C_2 e^{-bx} + G_1(x, \omega) \quad (2.3.42)$$

式中, $G_1(x)$ 由下列积分给出:

$$G_1(x, \omega) = \int_0^{\frac{x}{L}} \left[\frac{x}{L} - bL \frac{s}{L} \left(2 - \frac{s}{L} \right) \sinh \left[bL \left(\frac{x}{L} - \frac{s}{L} \right) \right] \right] dZ_{h_0} d \left(\frac{s}{L} \right) \quad (2.3.43)$$

而 C_1 和 C_2 是取决于边界条件的系数。注意 dZ_{h_0} 是由式2.3.40中 μ^0 的解给定的。把按式2.3.40给定的 dZ_{h_0} 代入2.3.43式, G_1 可分解为下面两个独立的积分式:

$$\begin{aligned} G_1 = & \int_0^{\frac{x}{L}} \left[\frac{x}{L} - bL \frac{s}{L} \left(2 - \frac{s}{L} \right) \frac{\cosh bL \left(\frac{s}{L} - 1 \right)}{\cosh bL} \sinh \left[bL \left(\frac{x}{L} - \frac{s}{L} \right) \right] \right] dZ_{h_0} d \left(\frac{s}{L} \right) \\ & + \int_0^{\frac{x}{L}} \left[\frac{x}{L} - bL \frac{s}{L} \left(2 - \frac{s}{L} \right) \left[\frac{\cosh bL \left(\frac{s}{L} - 1 \right)}{\cosh bL} - 1 \right] \sinh \left[bL \left(\frac{x}{L} - \frac{s}{L} \right) \right] \right] \\ & \frac{i}{\omega S} dZ_{h_0} d \left(\frac{s}{L} \right) \end{aligned} \quad (2.3.44)$$

式2.3.44内两个积分式的积分, 以及式2.3.42内 C_1 和 C_2 系数的计算, 都是在麻省理工学院按MAC制操作系统设计, 用DEC PDP-10计算机和LISP程序卡进行计算的。所用的标识符列如表2.1。

表 2.1 标识符检索表

标 识 符	相同意义的项	标 识 符	相同意义的项
B ²	$i/\omega S$	Y	bL
DZE	dZ_{h_0}	Z	x/L
DZH	dZ_{h_1}	T	s/L
%E	exp		

计算结果如下 (原书称之为图2.18)

$$\begin{aligned}
 & - \frac{2B^2DZE\%E^{4Y}}{Y^2\%E^{YZ+4Y} + 2Y^2\%E^{YZ+2Y} + Y^2\%E^{YZ}} - \frac{2B^2DZE\%E^{2Y}}{Y^2\%E^{YZ+4Y} + 2Y^2\%E^{YZ+2Y} + Y^2\%E^{YZ}} \\
 & - \frac{DZH\%E^{4YZ}}{4Y\%E^{YZ+4Y} + 8Y\%E^{YZ+2Y} + 4Y\%E^{YZ}} - \frac{B^2DZE\%E^{4YZ}}{4Y\%E^{YZ+4Y} + 8Y\%E^{YZ+2Y} + 4Y\%E^{YZ}} \\
 & - \frac{DZH\%E^{2YZ}}{4Y\%E^{YZ+4Y} + 8Y\%E^{YZ+2Y} + 4Y\%E^{YZ}} - \frac{B^2DZE\%E^{2YZ}}{4Y\%E^{YZ+4Y} + 8Y\%E^{YZ+2Y} + 4Y\%E^{YZ}} \\
 & + \frac{DZH\%E^{2Y}}{2Y\%E^{YZ+4Y} + 4Y\%E^{YZ+2Y} + 2Y\%E^{YZ}} + \frac{B^2DZE\%E^{2Y}}{2Y\%E^{YZ+4Y} + 4Y\%E^{YZ+2Y} + 2Y\%E^{YZ}} \\
 & - \frac{DZHY\%E^{4YZ^3}}{6\%E^{YZ+4Y} + 12\%E^{YZ+2Y} + 6\%E^{YZ}} - \frac{B^2DZEY\%E^{4YZ^3}}{6\%E^{YZ+4Y} + 12\%E^{YZ+2Y} + 6\%E^{YZ}} \\
 & - \frac{DZHY\%E^{2YZ^3}}{6\%E^{YZ+4Y} + 12\%E^{YZ+2Y} + 6\%E^{YZ}} - \frac{B^2DZEY\%E^{2YZ^3}}{6\%E^{YZ+4Y} + 12\%E^{YZ+2Y} + 6\%E^{YZ}} \\
 & - \frac{DZH\%E^{4YZ^2}}{4\%E^{YZ+4Y} + 8\%E^{YZ+2Y} + 4\%E^{YZ}} - \frac{B^2DZE\%E^{4YZ^2}}{4\%E^{YZ+4Y} + 8\%E^{YZ+2Y} + 4\%E^{YZ}} \\
 & - \frac{DZH\%E^{2YZ^2}}{4\%E^{YZ+4Y} + 8\%E^{YZ+2Y} + 4\%E^{YZ}} - \frac{B^2DZE\%E^{2YZ^2}}{4\%E^{YZ+4Y} + 8\%E^{YZ+2Y} + 4\%E^{YZ}} \\
 & - \frac{2DZHY\%E^{2Y}}{3\%E^{YZ+4Y} + 6\%E^{YZ+2Y} + 3\%E^{YZ}} - \frac{2B^2DZEY\%E^{2Y}}{3\%E^{YZ+4Y} + 6\%E^{YZ+2Y} + 3\%E^{YZ}} \\
 & + \frac{DZHY\%E^{4YZ^2}}{2\%E^{YZ+4Y} + 4\%E^{YZ+2Y} + 2\%E^{YZ}} + \frac{B^2DZEY\%E^{4YZ^2}}{2\%E^{YZ+4Y} + 4\%E^{YZ+2Y} + 2\%E^{YZ}} \\
 & + \frac{DZHY\%E^{2YZ^2}}{2\%E^{YZ+4Y} + 4\%E^{YZ+2Y} + 2\%E^{YZ}} + \frac{B^2DZEY\%E^{2YZ^2}}{2\%E^{YZ+4Y} + 4\%E^{YZ+2Y} + 2\%E^{YZ}} \\
 & + \frac{DZH\%E^{4YZ}}{2\%E^{YZ+4Y} + 4\%E^{YZ+2Y} + 2\%E^{YZ}} + \frac{B^2DZE\%E^{4YZ}}{2\%E^{YZ+4Y} + 4\%E^{YZ+2Y} + 2\%E^{YZ}} \\
 & + \frac{DZH\%E^{2YZ}}{2\%E^{YZ+4Y} + 4\%E^{YZ+2Y} + 2\%E^{YZ}} + \frac{B^2DZE\%E^{2YZ}}{2\%E^{YZ+4Y} + 4\%E^{YZ+2Y} + 2\%E^{YZ}} \\
 & + \frac{DZHYZ^3\%E^{YZ+2Y}}{6\%E^{4Y} + 12\%E^{2Y} + 6} + \frac{B^2DZEYZ^3\%E^{YZ+2Y}}{6\%E^{4Y} + 12\%E^{2Y} + 6} - \frac{DZHZ^2\%E^{YZ+2Y}}{4\%E^{4Y} + 8\%E^{2Y} + 4} \\
 & - \frac{B^2DZEZ^2\%E^{YZ+2Y}}{4\%E^{4Y} + 8\%E^{2Y} + 4} - \frac{DZHYZ^2\%E^{YZ+2Y}}{2\%E^{4Y} + 4\%E^{2Y} + 2} - \frac{B^2DZEYZ^2\%E^{YZ+2Y}}{2\%E^{4Y} + 4\%E^{2Y} + 2} \\
 & + \frac{DZHZ\%E^{YZ+2Y}}{4Y\%E^{4Y} + 8Y\%E^{2Y} + 4Y} + \frac{B^2DZEZ\%E^{YZ+2Y}}{4Y\%E^{4Y} + 8Y\%E^{2Y} + 4Y} + \frac{DZHZ\%E^{YZ+4Y}}{2\%E^{4Y} + 4\%E^{2Y} + 2} \\
 & + \frac{B^2DZEZ\%E^{YZ+4Y}}{2\%E^{4Y} + 4\%E^{2Y} + 2} - \frac{2B^2DZE\%E^{YZ+4Y}}{Y^2\%E^{4Y} + 2Y^2\%E^{2Y} + Y^2} - \frac{DZH\%E^{YZ+2Y}}{2Y\%E^{4Y} + 4Y\%E^{2Y} + 2Y} \\
 & - \frac{B^2DZE\%E^{YZ+2Y}}{2Y\%E^{4Y} + 4Y\%E^{2Y} + 2Y} + \frac{2DZHY\%E^{YZ+2Y}}{3\%E^{4Y} + 6\%E^{2Y} + 3} + \frac{2B^2DZEY\%E^{YZ+2Y}}{3\%E^{4Y} + 6\%E^{2Y} + 3} \\
 & + \frac{DZHYZ^3\%E^{YZ}}{6\%E^{4Y} + 12\%E^{2Y} + 6} + \frac{B^2DZEYZ^3\%E^{YZ}}{6\%E^{4Y} + 12\%E^{2Y} + 6} - \frac{DZHZ^2\%E^{YZ}}{4\%E^{4Y} + 8\%E^{2Y} + 4} \\
 & - \frac{B^2DZEZ^2\%E^{YZ}}{4\%E^{4Y} + 8\%E^{2Y} + 4} - \frac{DZHYZ^2\%E^{YZ}}{2\%E^{4Y} + 4\%E^{2Y} + 2} - \frac{B^2DZEYZ^2\%E^{YZ}}{2\%E^{4Y} + 4\%E^{2Y} + 2} \\
 & + \frac{DZHZ\%E^{YZ}}{4Y\%E^{4Y} + 8Y\%E^{2Y} + 4Y} + \frac{B^2DZEZ\%E^{YZ}}{4Y\%E^{4Y} + 8Y\%E^{2Y} + 4Y} + \frac{DZHZ\%E^{YZ}}{2\%E^{4Y} + 4\%E^{2Y} + 2} \\
 & + \frac{B^2DZEZ\%E^{YZ}}{2\%E^{4Y} + 4\%E^{2Y} + 2} - \frac{2B^2DZE\%E^{YZ}}{Y^2\%E^{4Y} + 2Y^2\%E^{2Y} + Y^2} + \frac{B^2DZE\%E^{4YZ^2}}{\%E^{4Y} + 2\%E^{2Y} + 1} + \frac{2B^2DZE\%E^{2YZ^2}}{\%E^{4Y} + 2\%E^{2Y} + 1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{B^2 DZ E Z^2}{\% E^{4Y} + 2\% E^{2Y} + 1} - \frac{2B^2 DZ E \% E^{4Y} Z}{\% E^{4Y} + 2\% E^{2Y} + 1} - \frac{4B^2 DZ E \% E^{2Y} Z}{\% E^{4Y} + 2\% E^{2Y} + 1} - \frac{2B^2 DZ E Z}{\% E^{4Y} + 2\% E^{2Y} + 1} \\
& + \frac{2B^2 DZ E \% E^{4Y}}{Y^2 \% E^{4Y} + 2Y^2 \% E^{2Y} + Y^2} + \frac{4B^2 DZ E \% E^{2Y}}{Y^2 \% E^{4Y} + 2Y^2 \% E^{2Y} + Y^2} + \frac{2B^2 DZ E}{Y^2 \% E^{4Y} + 2Y^2 \% E^{2Y} + Y^2}
\end{aligned}$$

(以上为原书的图2.18, 方程2.3.45的解)

可以看出, 解呈下述形式:

$$G(x, \omega) = P_H(x, \omega) dZ_H + \frac{i}{\omega S} P_s(x, \omega) dZ_s \quad (2.3.45)$$

式中, $P_H(x, \omega)$ 和 $P_s(x, \omega)$ 为图2.18中的 dZ_H 项和 $\frac{1}{\omega S} dZ_s$ 项的系数。 $P_H(x, \omega) dZ_H$ 和

$P_s(x, \omega) \frac{i}{\omega S} dZ_s$ 用下式代换:

$$T = e^{-bL} \left(\frac{x}{L} \right) + 4bL + 2e^{-bL} \left(\frac{x}{L} \right) + 2bL + e^{-bL} \left(\frac{x}{L} \right) \quad (2.3.46)$$

$$TT18 = e^{4bL} + 2e^{2bL} + 1 \quad (2.3.47)$$

得 (原书称之为图2.19和图2.20):

$$\begin{aligned}
& \frac{DZHYZ^3 \% E^{2YZ+2Y}}{6T} - \frac{DZHYZ^2 \% E^{2YZ+2Y}}{2T} - \frac{DZH Z^2 \% E^{2YZ+2Y}}{4T} + \frac{DZH Z \% E^{2YZ+2Y}}{4TY} \\
& + \frac{DZH Z \% E^{2YZ+2Y}}{2T} + \frac{2DZHY \% E^{2YZ+2Y}}{3T} - \frac{DZH \% E^{2YZ+2Y}}{2TY} + \frac{DZHYZ^3 \% E^{2YZ}}{6T} \\
& - \frac{DZHYZ^3 \% E^{2YZ}}{2T} - \frac{DZH Z^2 \% E^{2YZ}}{4T} + \frac{DZH Z \% E^{2YZ}}{4TY} + \frac{DZH Z \% E^{2YZ}}{2T} + \frac{DZHY \% E^{2YZ^3}}{6T} \\
& - \frac{DZH TT18YZ^3}{6T} + \frac{DZHYZ^3}{6T} - \frac{DZHY \% E^{2YZ^2}}{2T} + \frac{DZH \% E^{2YZ^2}}{4T} + \frac{DZHTT18YZ^2}{2T} \\
& - \frac{DZHYZ^2}{2T} - \frac{DZH TT18Z^2}{4T} + \frac{DZH Z^2}{4T} + \frac{DZH \% E^{2YZ}}{4TY} - \frac{DZH \% E^{2YZ}}{2T} - \frac{DZHTT18Z}{4TY} \\
& + \frac{DZH Z}{4TY} + \frac{DZHTT18Z}{2T} - \frac{DZH Z}{2T} - \frac{2DZHY \% E^{2Y}}{3T} + \frac{DZH \% E^{2Y}}{2TY}
\end{aligned}$$

(以上为原书的图2.19, 方程2.3.45中的 $P_H(x, \omega) dZ_H$)

$$\begin{aligned}
& \frac{B^2 DZ E Y Z^3 \% E^{2YZ+2Y}}{6T} - \frac{B^2 DZ E Y Z^2 \% E^{2YZ+2Y}}{2T} - \frac{B^2 DZ E Z^2 \% E^{2YZ+2Y}}{4T} - \frac{B^2 DZ E Z \% E^{2YZ+2Y}}{4TY} \\
& + \frac{B^2 DZ E Z \% E^{2YZ+2Y}}{2T} + \frac{2B^2 DZ E Y \% E^{2YZ+2Y}}{3T} - \frac{B^2 DZ E \% E^{2YZ+2Y}}{2TY} - \frac{2B^2 DZ E \% E^{2YZ+2Y}}{TY^2} \\
& + \frac{B^2 DZ E Y Z^3 \% E^{2YZ}}{6T} - \frac{B^2 DZ E Y Z^2 \% E^{2YZ}}{2T} - \frac{B^2 DZ E Z^2 \% E^{2YZ}}{4T} + \frac{B^2 DZ E Z \% E^{2YZ}}{4TY} \\
& + \frac{B^2 DZ E Z \% E^{2YZ}}{2T} - \frac{2B^2 DZ E \% E^{2YZ}}{TY^2} + \frac{B^2 DZ E Y \% E^{2YZ^3}}{6T} - \frac{B^2 DZ E TT18YZ^3}{6T} \\
& + \frac{B^2 DZ E Y Z^3}{6T} - \frac{B^2 DZ E Y \% E^{2YZ^2}}{2T} + \frac{B^2 DZ E \% E^{2YZ^2}}{4T} + \frac{B^2 DZ E TT18YZ^2}{2T} - \frac{B^2 DZ E Y Z^2}{2T} \\
& - \frac{B^2 DZ E TT18Z^2}{4T} + \frac{B^2 DZ E Z^2}{4T} + B^2 DZ E Z^2 + \frac{B^2 DZ E \% E^{2YZ}}{4TY} - \frac{B^2 DZ E \% E^{2YZ}}{2T} \\
& - \frac{B^2 DZ E TT18Z}{4TY} + \frac{B^2 DZ E Z}{4TY} + \frac{B^2 DZ E TT18Z}{2T} - \frac{B^2 DZ E Z}{2T} - 2B^2 DZ E Z - \frac{2B^2 DZ E Y \% E^{2Y}}{3T}
\end{aligned}$$

$$+ \frac{B^2 DZE \% E^{2Y}}{2TY} + \frac{2B^2 DZE \% E^{2Y}}{TY^2} - \frac{2B^2 DZETT18}{TY^2} + \frac{2B^2 DZE}{TY^2} + \frac{2B^2 DZE}{Y^2}$$

[以上为原书的图2.20, 方程 2.3.45 中的 $\frac{i}{\omega S} P_s(x, \omega) dZ_s$]

于是, 式2.3.42中的 $G(x, \omega)$ 已经求出。由式2.3.36, 有:

$$dZ_h = dZ_{h_0} + \mu dZ_{h_1} + O(\mu^2) \quad (2.3.48)$$

把2.3.41式用于上式中, 得:

$$dZ_h = dZ_{h_0} + \mu \left[G - \frac{x}{L} \left(2 - \frac{x}{L} \right) dZ_{h_0} \right] \quad (2.3.49)$$

因此, 在使用式2.1.19—21, 并且保留 $O(\mu)$ 项时, 得频谱关系式:

$$\begin{aligned} S_{hh} = & f S_{HH} + \Omega^2 g \frac{S_{\dots}}{\omega^2 S^2} - \frac{i}{\omega S} \left\{ \left[1 - 2\mu \frac{x}{L} \left(2 - \frac{x}{L} \right) \right] F(F^* - 1) \right. \\ & + 2\mu \operatorname{Re}[P_H(F^* - 1)] \left. \right\} S_{H\ast} + \frac{i}{\omega S} \left\{ \left[1 - 2\mu \frac{x}{L} \left(2 - \frac{x}{L} \right) \right] F^*(F - 1) \right. \\ & \left. + 2\mu \operatorname{Re}[P_s F^*] \right\} S_{sH} \end{aligned} \quad (2.3.50)$$

式中,

$$f = \left\{ \left[1 - 2\mu \frac{x}{L} \left(2 - \frac{x}{L} \right) \right] F F^* + 2\mu \operatorname{Re}[P_H F^*] \right\}$$

以及

$$\Omega^2 g = \left\{ \left[1 - 2\mu \frac{x}{L} \left(2 - \frac{x}{L} \right) \right] (F - 1)(F^* - 1) + 2\mu \operatorname{Re}[P_s (F^* - 1)] \right\}$$

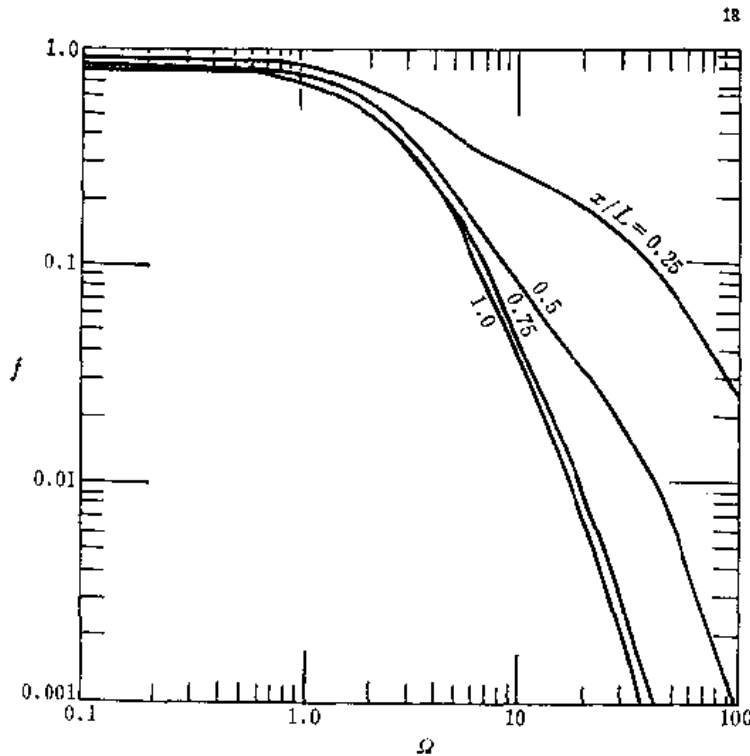


图 2.21 $\mu=0.1$ 时, 式2.3.50中的 f 曲线图

不同 μ 值时的 f 函数和 g 函数表示在图 2.21—26 中。可以看到，在较高的频率域中， μ 值的影响不大，而在低频域中则变化可以是显著的（与图2.5—2.8中 $\Gamma=0$ 的情况比较）。

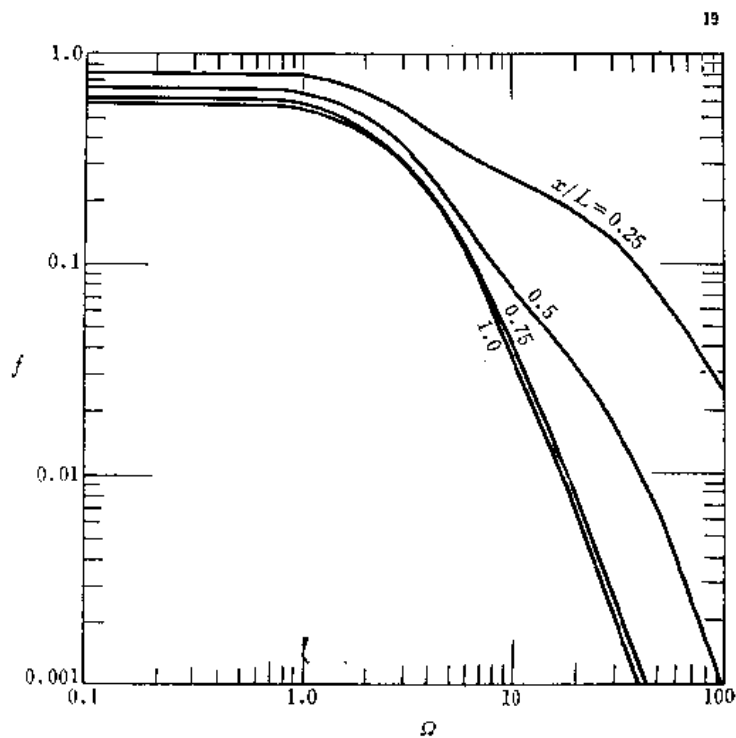


图 2.22 $\mu = 0.2$ 时，式2.3.50中的 f 曲线图

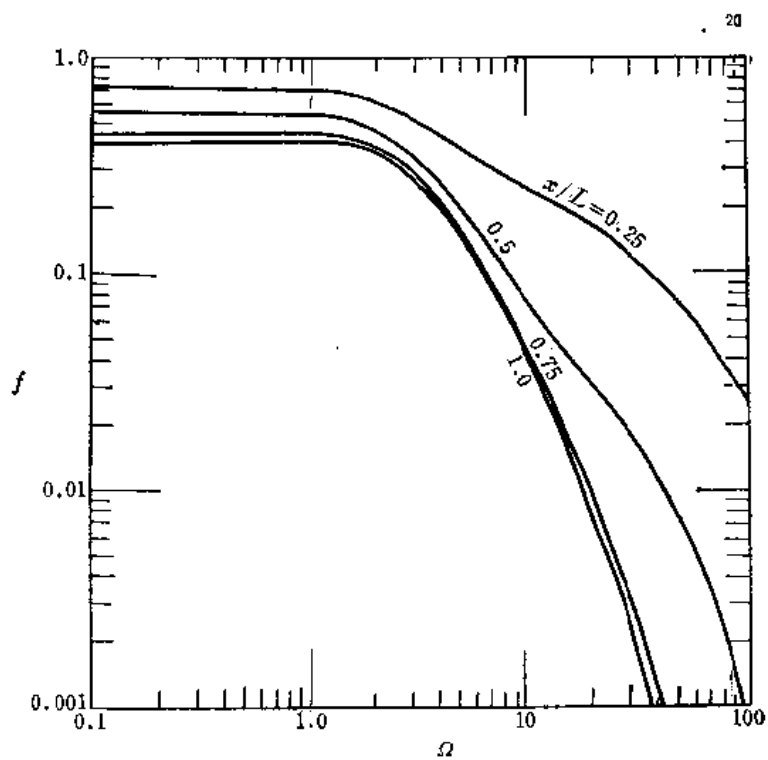


图 2.23 $\mu = 0.3$ 时，式2.3.50中的 f 曲线图

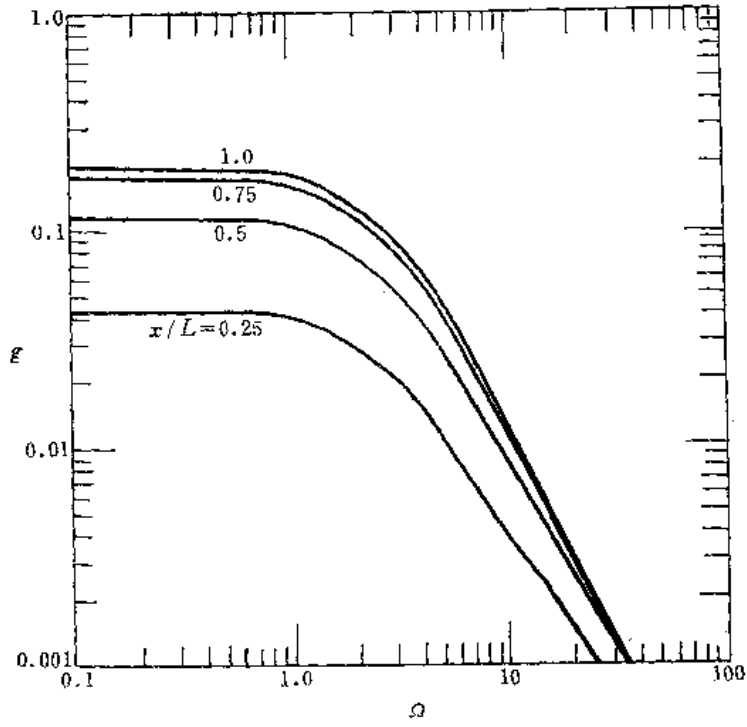


图 2.24 $\mu = 0.1$ 时, 式2.3.51中的 g 曲线图

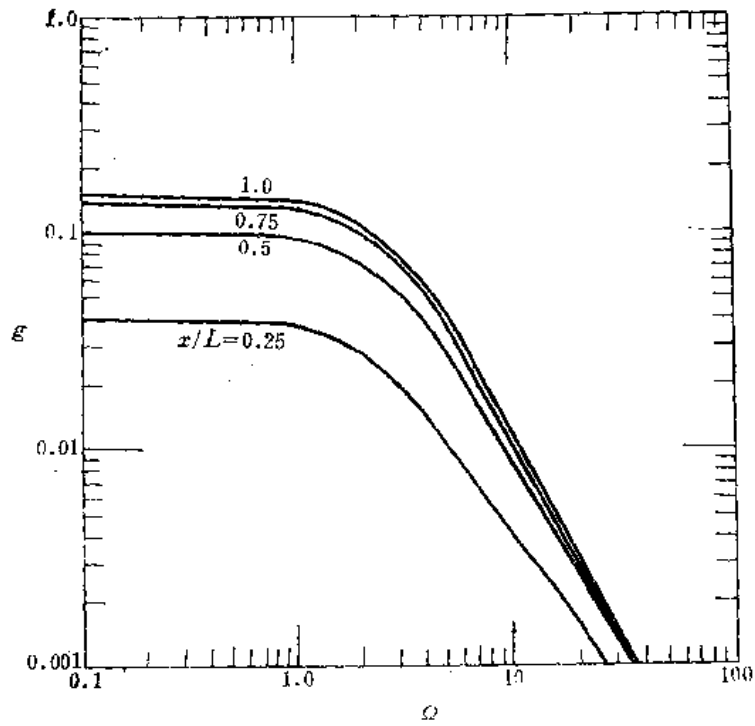


图 2.25 $\mu = 0.2$ 时, 式2.3.50中的 g 曲线图

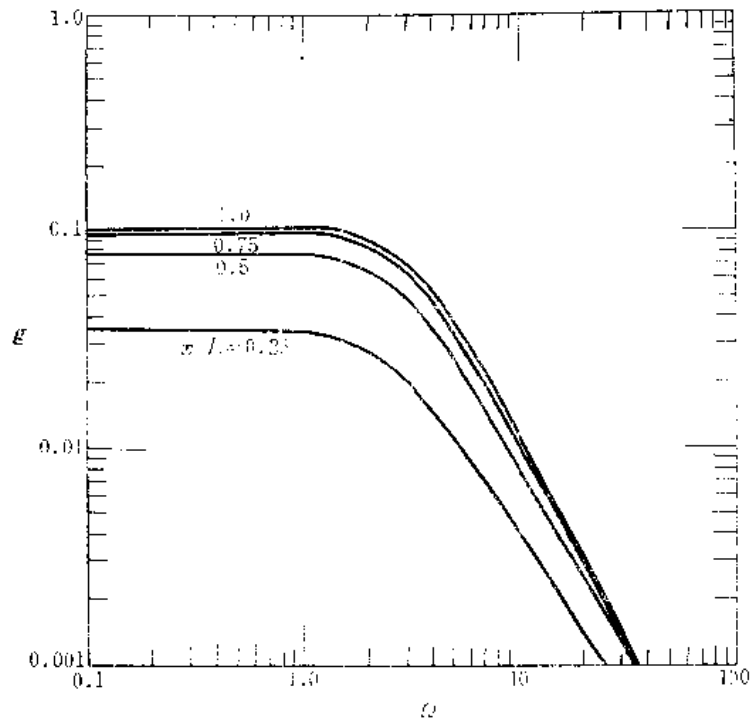


图 2.26 $\mu = 0.3$ 时, 式 2.3.50 中的 ε 曲线图

2.4 拉普拉斯含水层

对远离河流的较薄的含水层来说, 上述裘布依含水层的分析可以提供比较好的表达式。然而, 比较深厚的、局部有河流通过的各向异性含水层, 用这种以水平流为主的假设就显得不适宜了。在本节中, 将要提出垂向水流的动态效应分析。

图 2.27 画的是一个均质而各向异性的二维潜水含水层, 其垂直剖面上的水流可表示为:

$$K_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + K_z \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.4.1)$$

式中, $\phi(x, z, t)$ 为测压水头, K_x 和 K_z 为渗透系数张量的主分量 (张量的主轴与 x, z 轴一致)。线性的潜水面边界条件为:

$$n \frac{\partial \phi}{\partial t} + K_z \frac{\partial \phi}{\partial z} = \varepsilon, \quad z = \eta(x, t) \approx 0 \quad (2.4.2)$$

式中, n 为有效孔隙度。达根 (Dagan, 1964) 和亨特 (1971) 在解决有关的确定性问题时, 应用 $z = 0$ 的条件, 取得了与这种线性化一致的结果。由于常压状态 $\phi(x, \eta, t) = \eta(x, t)$, 潜水面 $\eta(x, t)$ 的形态与测压水头有关, 而且在这种线性化情况下, 和应用 $z = 0$ 的条件一致, 即:

$$\phi(x, 0, t) = \eta(x, t) \quad (2.4.3)$$

无流量通过的隔水边界条件为:

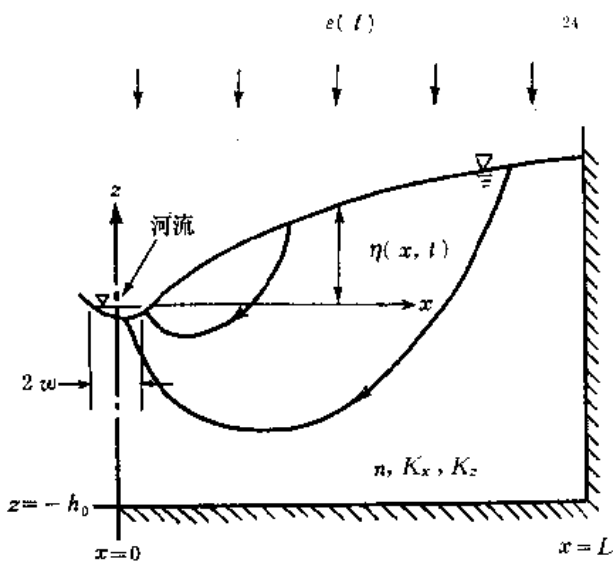


图 2.27 拉普拉斯含水层

如果 ϕ, η, ϵ 用零均值指出其变化, 则引入下列表达式:

$$\phi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ_{\phi}(\omega, x, z) \quad (2.4.7)$$

$$\eta = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ_{\eta}(\omega, x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ_{\phi}(\omega, x, 0) \quad (2.4.8)$$

以及

$$\epsilon(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ_{\epsilon}(\omega) - \delta(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ_q(\omega) \quad (2.4.9)$$

式中, $\delta(x)$ 为迪拉克 δ 函数。式 2.4.9 中的最后一项表示对河流的流出量, 它近似于一个汇点形式。注意这个河流表达式并没有明显地引入河流横截面的形状。河流的形状是由条件 $\phi=0$ 不明显地给出的。因为汇点附近的等势线是圆形的, 所以河流的边界在变换了的 (y, z) 系统中实际上是圆的, 或者在 (x, z) 系统中当 $w \ll L$ 时是椭圆的。

借助于式 2.4.7, 2.4.8 和 2.4.9 及符号 $\phi \equiv dZ_{\phi}(\omega), c \equiv dZ_{\epsilon}(\omega), q \equiv dZ_q(\omega), y = (K_x/K_z)^{1/2}x, l = (K_x/K_z)^{1/2}L, N \equiv dZ_q(\omega)$, 方程组 (2.4.1—2.4.6) 变为:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.4.10)$$

$$i\omega n \phi + K_x \frac{\partial \phi}{\partial z} = c - \delta(y)q, \quad z=0 \quad (2.4.11)$$

$$\phi = N, \quad z=0 \quad (2.4.12)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad z = -h_0 \quad (2.4.13)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad y = l \quad (2.4.14)$$

$$z = -h_0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (2.4.4)$$

$$x = L, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (2.4.5)$$

另外, 在宽度为 $2w$ 的河流处, 要求 $z=0, x=w$ 时,

$$\phi = \eta = 0 \quad (2.4.6)$$

这意味着略去了河流处的任何渗出面。

平均的水流条件由式 2.4.1—2.4.6 取总体均值 (ensemble average) 求得。已经给出了 $h_0 \rightarrow \infty$ 时的稳定平均流的显解 (Dagan, 1964, 式 14)。然而, 对平稳随机过程来说, ϕ, η 和 ϵ 的变化也取决于线性系统 (式 2.4.1—2.4.6), 而平均流的关系则不清楚。

$$\phi = 0, z = 0, y = w' = w \left(\frac{K_z}{K_x} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.4.15)$$

由于 $y = x = 0$ 周围的对称性, 方程组 (2.4.10—2.4.15) 的解会有下列形式:

$$\phi = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \lambda_m y \cosh \lambda_m (z + h_0) \quad (2.4.16)$$

上式在 $\lambda_m = m\pi/l$ 时满足 2.4.10, 2.4.13 和 2.4.14 式。式 2.4.11 在用 δ 函数的傅里叶级数表达式

$$\delta(y) \sim \frac{b_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \cos \lambda_m y, \quad b_m = 1/l \quad (2.4.17)$$

时, 令:

$$a_0 = (2c - q/l) / (i\omega n) \quad (2.4.18)$$

$$a_m = -(q/l)(i\omega n \cosh \lambda_m h_0 + K_z \lambda_m \sinh \lambda_m h_0)^{-1}, \quad m > 0 \quad (2.4.19)$$

并根据式 2.4.15, 得:

$$0 = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \lambda_m w' \cosh \lambda_m h_0 \quad (2.4.20)$$

再借助式 2.4.18, 得出:

$$a_0 = \frac{4bl\sigma/K_z}{1 + i2\xi\sigma} \quad (2.4.21)$$

$$\sigma = \sum_{m=1}^{\infty} \cos \lambda_m w' (m\pi \tanh \lambda_m h_0 + i\xi)^{-1}, \quad \xi = nlw/K_z$$

于是根据式 2.4.18, 2.4.19 和 2.4.21, ϕ 的全解 (complete solution) 为:

$$dZ_s \equiv \phi \frac{2lb}{(1 + i2\xi\sigma)K_z} \left[\sigma - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cosh \lambda_m (z + h_0) \cos \lambda_m y}{m\pi \sinh \lambda_m h_0 + i\xi \cosh \lambda_m h_0} \right] \quad (2.4.22)$$

根据式 2.4.22, 在 $z = 0, c = dZ_s$ 时, 并利用 2.14.12 式, 求得 v 的广义傅里叶振幅为:

$$dZ_v(\omega, y) = dZ_s(\omega) \frac{2l/K_z}{1 + i2\xi\sigma} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_m w' - \cos \lambda_m y}{m\pi \tanh \lambda_m h_0 + i\xi}$$

因此, 按式 2.1.19, 可用下式表示频谱密度函数:

$$\begin{aligned} \frac{S_{vv}K_xK_z}{S_{ss}4L^2} &= G(\Omega, x/L, h_0/l, w/L) \\ &= r^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sum_{m=1}^{\infty} A_m^* = r^{-1} \left[\left(\sum_{m=1}^{\infty} u_m \right)^2 + \left(\sum_{m=1}^{\infty} v_m \right)^2 \right] \\ r &= 1 - 4\xi\sigma_i + 4\xi^2(\sigma_r^2 + \sigma_i^2), \quad \sigma = \sigma_r + i\sigma_i \\ \xi &= \Omega h_0/l, \quad \Omega = nl/K_x h_0 \\ A_m &= u_m + iv_m = \frac{\cos \lambda_m w' - \cos \lambda_m y}{m\pi \tanh \lambda_m h_0 + i\xi} \end{aligned} \quad (2.4.23)$$

当取 $n = S$ 和 $K_x h_0 = T$ 时, 变量 Ω 相当于裘布依含水层所使用的无量纲频率。式 2.4.23 内的求和是用数字计算机计算的; 级数是收敛的, 但要求精度为百分之几时要取数百项, 特别是在 w/L 很小时更是如此。数字计算的一些典型结果表示在图 2.28 和 2.29 中。图 2.28 用的

是与表示裘布依含水层相同的对数坐标，图中表示了含水层中相对水平位置的效应 (effects of relative horizontal position)，其趋向也与裘布依含水层的情况相同。注意由于 $G = (K_x/K_z)(L/h_o)^2 g/4$ ， G 与裘布依含水层的响应函数 g 有关。在图 2.29 中使用因变量 $\phi = 4\Omega(h_o/l)^2 G$ ，因为当 $T = K_x h_o$ 和 $S = n$ 时，它与裘布依含水层的因变量 $\Omega g(\Omega)$ 相等。这种表示形式，对转换关系式 $S_{hh}/S_{..}$ 内不同频率的重要性，提供了直接的图示。因为 ϕ 与 $\omega S_{hh}/S_{..}$ 成比例，且

$$\bar{h}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{hh} d\omega = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \omega S_{hh} d \ln \omega$$

当补给输入用白噪音* ($S_{..} = \text{常数}$, 表示时) 曲线下面的增加区域直接表示了给定的频率对总均方变动的作用。图 2.29 是拉普拉斯含水层 ($w/L, h_o/l$) 与裘布依含水层的结果相比，所增加的参数效应的图示。拉普拉斯含水层的响应曲线看来具有与裘布依含水层的响应曲线十分相似的形状，但是振幅由于参数的关系而显然不同。图 2.29 中所表现的趋势一看就是合理的；随着河流宽度 (w/L) 的增加，波动的幅度减小；含水层相对厚度 (h_o/l) 增加，振幅则加大。

拉普拉斯含水层与裘布依含水层之间，有些参数值之所以有比较明显的差别，可能与裘布依近似式的适用范围有一定关系。然而，由于拉普拉斯含水层问题的边界条件是宽度有限的河流有局部的切穿，裘布依含水层则是完全切穿的河流，两者不是完全相同的，所以不能得出严格的结论。根据以前关于确定性问题的著作，当 $h_o/l \ll 1$ 时，预计拉普拉斯

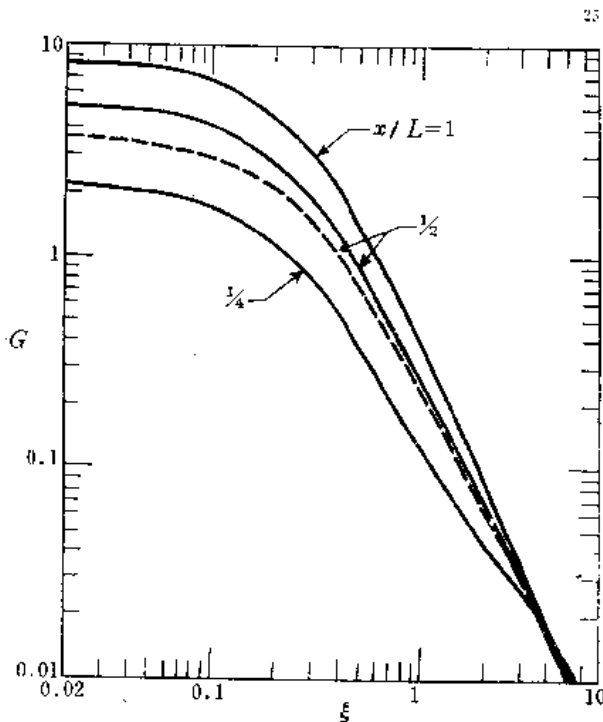


图 2.28 拉普拉斯含水层的频谱响应；实线表示 $h_o/l = 0.1, w/L = 0.01$ 的拉普拉斯含水层，虚线表示裘布依含水层

与裘布依含水层应该变成等效的。依据非线性裘布依问题和拉普拉斯问题的数值解，弗马和布鲁察特 (Verma and Brutsaert, 1971) 发现，当含水层的长度四倍于其初始饱和厚度时，即使河流完全降落，仍具有一致性。

在 $h_o/l \rightarrow 0$ 的极限情况下，对拉普拉斯含水层方程式 2.4.23 进行仔细分析，表明函数 ϕ 在有限范围内取决于参数 w/L 。图 2.29 中的成果反映了 $w/L = 0.01$ 和 0.05 时的这种现象。当 $h_o/l < 0.02$ 时，函数 ϕ 就变成与 h_o/l 无关了。由此可见，当 h_o/l 很小时， $w/L = 0.01$ 的拉普拉斯含水层与裘布依含水层等效。

总之，当各向异性 K_x/K_z 大而相对河流宽度 w/L 很小时，拉普拉斯含水层的结果表明，非静水压效应在天然系统内可能是非常重要的。

* 白噪音 (White noise), 指具有均匀频谱的噪音。又：原文在此句中有“在图 4 中”，因书中无此图，故删去。——编者

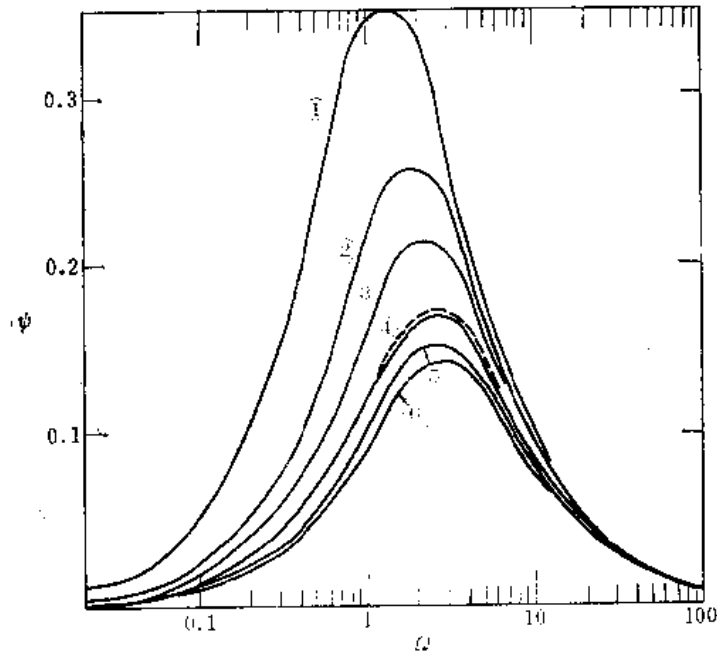


图 2.29 $x/L = 1/2$ 处的拉普拉斯含水层的频谱响应

其 $\psi = 4\Omega (h_0/l)^2 G$, $\Omega = \omega L^2 n / (K_x h_0)$; 曲线 1, $h_0/l = 0.5, \omega/L = 0.05$; 曲线 2, $h_0/l = 0.1, \omega/L = 0.003$; 曲线 3, $h_0/l = 0.1, \omega/L = 0.01$; 曲线 4, $h_0/l = 0.02$ 和 $0.0002, \omega/L = 0.01$; 曲线 5, $h_0/l = 0.1, \omega/L = 0.05$; 曲线 6, $h_0/l = 0.02$ 和 $0.002, \omega/L = 0.05$; 虚线表示裘布依含水层 ($x/L = 1/2$)

2.5 渗透系数的空间变化

除了以前各节所分析的时间变化外, 还有渗透系数或补给等特性在含水层内各个不同点上的变化。对空间变化的分析要比时间现象更加复杂得多, 因为这些变化都体现在方程式的系数上, 而且在受到边界条件的影响时, 空间统计可能是不均一的。然而, 在保证含水层空间均匀性的情况下, 对它小范围内的扰动效应进行分析, 仍能使认识有所提高。因此, 频谱技术能应用于波数域中, 以便对水流的某些统计特征作出评价。分析结果用来计算与渗透系数空间变化有关的水流观测系统的误差。

下面分析服从于 2.3.1 式的一个倾斜含水层的水流, 并引入下列表示平均值和微小扰动的量, 使方程线性化。

$$\begin{aligned} h &= \bar{h} + h' \\ y &= \bar{h} + \zeta = \bar{y} + y' \\ \zeta &= \bar{\zeta} + \zeta' \\ \varepsilon &= \bar{\varepsilon} + \varepsilon' \\ K &= \bar{K} + K' \end{aligned}$$

略去带撇点的量的所有乘积部份, 式 2.3.1 变为:

$$S \frac{\partial h'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\bar{K} \bar{h} \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} + \bar{K} \bar{h} \frac{\partial y'}{\partial x} + \bar{K} \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} h' + \bar{h} \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} K' \right] + \bar{\varepsilon} + \varepsilon' \quad (2.5.1)$$

由于带撇点的量的平均值为零，所以平均水流由下式给出：

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{K} \bar{h} \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \right) + \bar{\epsilon} = 0$$

把平均水流看作一个具有固定厚度 ($\bar{h} = h_0$)、沿一定坡度 β ($\zeta = \beta x$) 倾斜的水流，在这种情况下意味着 $\bar{\epsilon} = 0$ 。水流的图示见图 2.30。

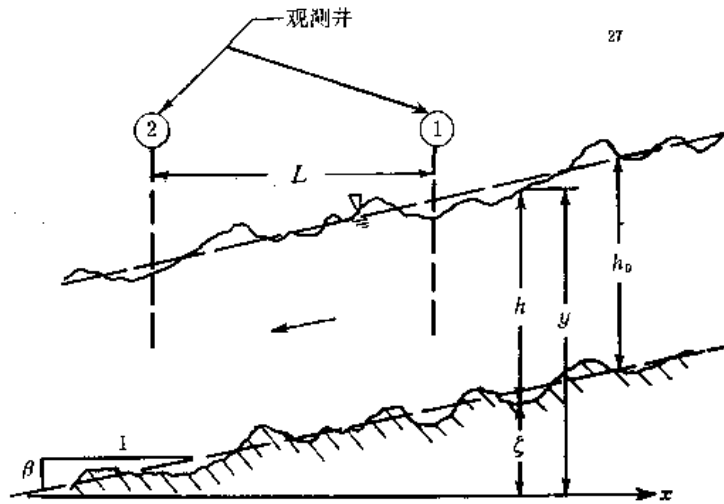


图 2.30 具有空间变化的倾斜含水层

考虑到统计上的均匀稳定输入扰动条件，用波数 k 的傅里叶-斯蒂尔吉斯积分式表示这种扰动如下：

$$\zeta' = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dZ_{\zeta}(k), \quad K' = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dZ_K(k), \quad \epsilon' = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dZ_{\epsilon}(k) \quad (2.5.2)$$

同样，潜水位的扰动表示为：

$$y' = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dZ_y(k) \quad (2.5.3)$$

把上述各式以及 $h' = y' - \zeta'$ 代入 2.5.1 式，得出一般的傅里叶振幅之间的关系式：

$$dZ_y = \frac{ik\beta(h_0 dZ_K - \bar{K} dZ_{\zeta}) + dZ_{\epsilon}}{\bar{K}h_0k^2 - ik\bar{K}\beta} \quad (2.5.4)$$

依据输入扰动的频谱和交叉谱，这一结果可用来构成水位变化的波数谱 $\phi_{yy}(k)$ 。因为缺乏交叉谱输入资料，就用表示渗透系数变化的单输入来评价系统的性状。在这种情况下式 2.5.4 化为：

$$dZ_y = \frac{ikh_0\beta}{Tk^2 - ik\bar{K}\beta} dZ_K, \quad T = \bar{K}h_0 \quad (2.5.5)$$

并且在波数空间中采用等效条件下的 2.1.5 式，

$$\phi_{yy}(k) = \frac{(h_0\beta)^2}{T^2k^2 + (\bar{K}\beta)^2} \phi_{KK}(k) \quad (2.5.6)$$

式中， ϕ_{KK} 为渗透系数变化的波数谱。为了获得显解，必须给定 ϕ_{KK} ；为此要假定自协方

差的简单指数形式为:

$$R_{KK}(\xi) = E[K'(x+\xi)K'(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\xi} \phi_{KK}(k) dk$$

$$= \overline{K'^2} e^{-|\xi|/\lambda} \quad (2.5.7)$$

式中, $\overline{K'^2}$ 为 K' 的方差, 而入则是按下式规定的积分标度:

$$\lambda = \int_0^{\infty} [R_{KK}(\xi) / \overline{K'^2}] d\xi$$

积分标度表示与渗透系数相关的平均距离。 ϕ_{KK} 谱可从傅里叶逆变换式求出,

$$\phi_{KK}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik\xi} R_{KK}(\xi) d\xi = \lambda \overline{K'^2} / [1 + (k\lambda)^2] \pi \quad (2.5.8)$$

而方差 $\overline{y'^2}$ 由下式求出:

$$\overline{y'^2} = R_{yy}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{yy}(k) dk$$

综合2.5.6式和2.5.8式, 得

$$\overline{y'^2} / h_0^2 = (\overline{K'^2} / \overline{K^2}) [r / (1+r)] \quad (2.5.9)$$

式中, $r = \beta\lambda/h_0$, 是渗透系数变化的长度标度(λ)和含水层的长度标度(h_0/B)之比。因为潜水面斜率一般较小($\beta = 10^{-2}$ 至 10^{-4}), 所以其结果表明, 除非积分标度比含水层厚度大得多, 一般说来, 由于含水层厚度所引起的水位波动, 总是比渗透系数变化所引起的波动小得多。

同样重要的是按2.5.6式的傅里叶变换式求得的 y 的自协方差,

$$R_{yy}(\xi) = \overline{y'^2} (e^{-\beta\xi/h_0} - re^{-\xi/\lambda}) / (1-r) \quad (2.5.10)$$

以及 K 和 y 的交叉协方差 (cross covariance):

$$R_{Ky}(\xi) = E[K'(x+\xi)y'(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\xi} \phi_{Ky}(k) dk \quad (2.5.11)$$

式中, ϕ_{Ky} 为交叉谱, 它是把式2.5.6用于空间条件等效的2.1.21式中求得的。

$$\phi_{Ky}(k) = \phi_{KK}(k) (-ikh_0\beta) / (Tk^2 + ik\overline{K}\beta)$$

这个 ϕ_{Ky} 表达式 (其中的 ϕ_{KK} 按2.5.8式求得) 用于式2.5.11, 求出

$$R_{Ky}(\xi) = \overline{K'y'} \left\{ \begin{array}{l} e^{-\xi/\lambda}, \quad \xi \geq 0 \\ [2e^{\beta\xi/h_0} - (1+r)e^{\xi/\lambda}] / (1-r), \quad \xi \leq 0 \end{array} \right\} \quad (2.5.12a)$$

$$\overline{K'y'} \equiv R_{Ky}(0) = -(\overline{K'^2} / \overline{K^2}) T r / (1+r)$$

可以容易地看出

$$R_{yK}(\xi) = E[y'(x+\xi)K'(x)] = R_{Ky}(-\xi) \quad (2.5.12b)$$

当 $r = 1/2$ 时, 这个系统的各种频谱与协方差函数, 表示于图2.31中。

这种分析的结果能够用来评价简单的双孔测压网 (用以估算通过含水层的流量) 的误差结构。如图2.30所示, 观测井用来测量相距 L 的两点的水位 y_1 和 y_2 。另外, 两个井还用来作为渗透系数 (K_1, K_2) 的基本观测点 (比方说, 根据抽水试验或取芯求得)。含水层单宽流

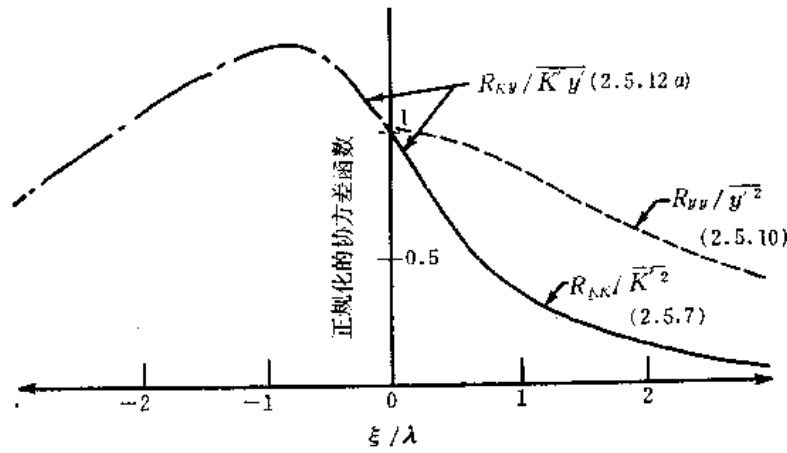
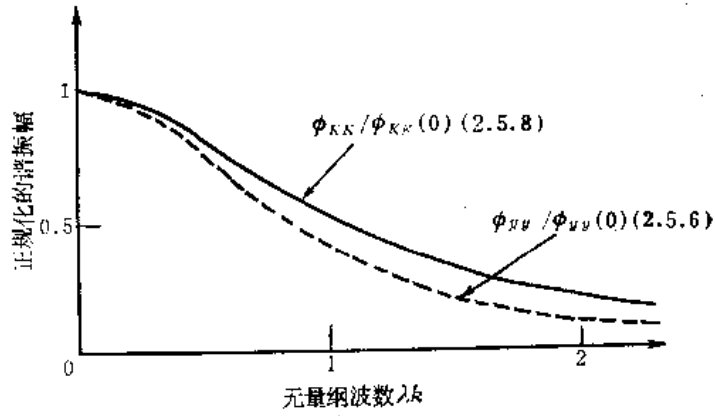


图 2.31 $r = 1/2$ 时, 正规化的频谱函数和协方差函数

量 \hat{Q} 的计算, 按呈下列形式的达尔西方程求得:

$$\hat{Q} = \frac{K_1 + K_2}{2} \frac{h_1 + h_2}{2} \frac{y_1 - y_2}{L} \quad (2.5.13)$$

在 2.5.13 式中引入平均值加扰动量, 则

$$\hat{Q} = \bar{K} \bar{h}_0 \beta + \beta h_0 (K'_1 + K'_2) / 2 + \bar{K} \beta (h'_1 + h'_2) / 2 + \bar{K} h_0 (y'_1 - y'_2) / L \quad (2.5.14)$$

式中, $(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) / L = \beta$, $\bar{h}_1 = \bar{h}_2 = h_0$, $\bar{K}_1 = \bar{K}_2 = \bar{K}$ 。 $\bar{K} h_0 \beta$ 是通过含水层的实际水流, 而差值 $Q' = \hat{Q} - Q$, 将它们平方, 并且加以平均, 得到

$$\begin{aligned} \overline{Q'^2} / Q^2 = & (\overline{K'^2} + \overline{K'_1 K'_2}) / (2\bar{K}^2) & \text{〔 I, 渗透系数的变化〕} \\ & + 2(\overline{y'^2} - \overline{y'_1 y'_2}) / (L\beta)^2 & \text{〔 II, 潜水面斜率的变化〕} \\ & + (\overline{y'^2} + \overline{y'_1 y'_2}) / 2h_0^2 & \text{〔 III, 厚度变化〕} \\ & + (\overline{K'_2 y'_1} - \overline{K'_1 y'_2}) / (\beta \bar{K} L) & \text{〔 IV, 潜水面斜率与渗透系数的相关性〕} \\ & + (2\overline{K'_1 y'_1} + \overline{K'_1 y'_2} + \overline{K'_2 y'_1}) / (2\bar{K} h_0) & \text{〔 V, 厚度与渗透系数的相关性〕} \end{aligned} \quad (2.5.15)$$

这里已经使用了统计的均匀性, 即

$$\overline{K_1^2} = \overline{K_2^2}, \quad \overline{y_1^2} = \overline{y_2^2}, \quad \overline{y_1 y_2} = \overline{y'_1 y'_1}$$

2.5.15式内各项的来源已标注在右方。利用前面的结果，式2.5.14内各项的协方差可以用 $\overline{K'^2}/\overline{K^2}$ 表示。注意下列恒等式：

$$\overline{K'_1 K'_2} \equiv R_{KK}(L) \quad [2.5.7式]$$

$$\overline{y'_2} \equiv R_{yy}(0) \quad [2.5.9式]$$

$$\overline{y'_1 y'_2} \equiv R_{yy}(L) \quad [2.5.10式]$$

$$\overline{K'_2 y'_1} \equiv E[y'(x+L)K'(x)] = R_{yK}(L) = R_{Ky}(-L) \quad [2.5.12式的a和b]$$

$$\overline{K'_1 y'_2} \equiv E[K'(x+L)y'(x)] = R_{Ky}(L) \quad [2.5.12a式]$$

$$\overline{K' y'} \equiv R_{Ky}(0) \quad [2.5.12a式]$$

利用所指出的方程，相对均方误差的表达式就变为：

$$Q'^2/Q^2 = (K'^2/K^2) \{ (1 + e^{-L/\lambda}) / 2 \quad [I]$$

$$+ (2h_0/\beta L) (\lambda/L) [1 - e^{-rL/\lambda} - r(1 - e^{-L/\lambda})] / (1 - r^2) \quad [II]$$

$$+ r [1 + e^{-rL/\lambda} - r(1 + e^{-L/\lambda})] / 2(1 - r^2) \quad [III]$$

$$- (2\lambda/L) (e^{-rL/\lambda} - e^{-L/\lambda}) / (1 - r^2) \quad [IV]$$

$$- r [(1 - r) + e^{-rL/\lambda} - r e^{-L/\lambda}] / (1 - r^2) \quad [V]$$

(2.5.16)

式中各项的来源与2.5.15式中标注的一样。

用下述的条件来说明这些成果的应用：含水层渗透系数变化的积分标度给定为 $\lambda = 100$ 英尺，含水层中的测压管间距取几种不同数值。这个例子所用的参数和计算的结果列在表2.2中。从这些数字成果看，有些重要特征是显而易见的。估算的流量方差确实大大地小于渗透系数的方差。这是因为潜水面斜率与渗透系数的相关性（IV）几乎抵销了渗透系数的变化（I）和潜水面斜率的变化（II）。另外，与一些可能直觉的情况相反，井距最小，误差看来也最小。这是因为井距最小时，斜率与渗透系数相关的补偿效应最大。当然，这种分析不考虑用来测量水位的仪器的制约；若考虑时则应确定适合具体应用的最小间距。如果假定 Q' 为正态分布，而且 $\overline{K'^2}/\overline{K^2}$ 为已知，则 Q 在规定范围内的概率可以根据表2.2内各种类型的结果加以估算。

表 2.2 几种观测井距的流量估算误差

井距 L (英尺)		10	100	1000
相对方差比 $\frac{(\overline{Q'^2}/Q^2)}{(\overline{K'^2}/K^2)}$ 的组成	I	0.95	0.68	0.50
	II	0.95	0.72	0.16
	III	0.02	0.02	0.02
	IV	-1.86	-1.23	-0.16
	V	-0.04	-0.04	-0.01
$(\overline{Q'^2}/Q^2)/(\overline{K'^2}/K^2)$ 总计		0.02	0.16	0.48

参数： $h_0 = 50$ 英尺， $\beta = 10^{-2}$ ， $\lambda = 100$ 英尺， $\gamma = 2 \times 10^{-2}$

虽然，本节提出的简单分析可以用来评价基本水流的观测网，可能更加重要的是：由于有了这方面的认识，为研究地下水流空间变化的普遍性问题创造了条件。它说明了空间

相关结构的重要性。今后在这种普遍性领域的研究中，应该探讨的一些其他问题是：同时具有时间与空间变化、具有多维空间变化、以及具有渗透系数大幅度变化效应的系统。

2.6 非饱和带

地下水得到重新补足或增加的补给，其天然的时间变化是降水量的函数，并受各种复杂的滞缓作用影响的支配。这些作用发生在地表和潜水面以上的非饱和带内。从降水-径流-渗入的简单观点来看，降水量（ P ）的一部份呈地表径流流失，而余下的则渗入到土壤中去和（或者）被蒸发及蒸腾。水进入到土壤呈湿润相的非饱和带中，有一部分才最后向下渗透到潜水面。进入饱和带的水的比例称之为补给强度（ ϵ ）。在考虑非饱和带时，涉及到渗入、蒸发-蒸腾、渗透等过程，还有土壤水分的贮存。因为非饱和土壤有一部分充气的孔隙，它们能够贮存更多的水分。同样，水又可以从以前的饱和孔隙中排出，从而消耗贮存的水分，并且供给蒸发-蒸腾或补给地下水以补充的水分。

这样形成的系统可以用图2.32的示意图表示。此系统的净渗入量 $I = P - E - R_0$ ，其中 E 是蒸发-蒸腾量而 R_0 是地表径流量。净渗入量进入土壤水带，在那里贮存和最后渗透到地下水中，成为补给强度 ϵ 。水分贮存量用 s 表示。根据水的质量均衡原理，用下式给出贮存量的变化：

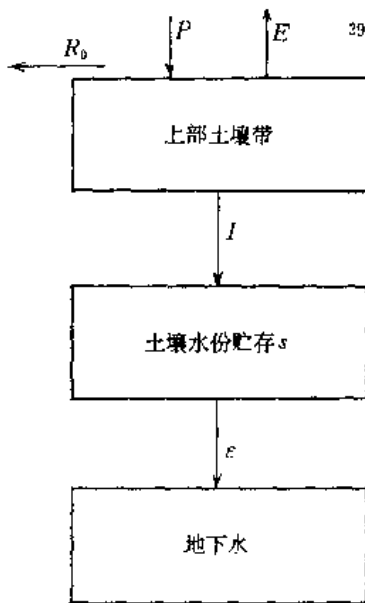


图 2.32 非饱和带示意图

$$\frac{ds}{dt} = I - \epsilon \quad (2.6.1)$$

其中流至地下水的补给强度必定是水分贮存量的函数。设补给强度用下式表示：

$$\epsilon = a'(s - s_0) \quad (2.6.2)$$

式中， a' 为流量常数， s_0 为最小水分贮存量。于是土壤水分贮存就用一个集中参数线性贮水系统表示，水分贮存量垂直和水平的空间变化在此处忽略不计。

总的水分贮存量由下式给出：

$$s = \int_0^b \theta dz \quad (2.6.3)$$

式中， θ 为容水度， z 为垂直坐标（向下为正）， b 是从地表到潜水面的深度。最小水分贮存量由下式给出：

$$s_0 = \int_0^b \theta_0 dz$$

式中的 θ_0 称为田间持水量。

把这种简单的系统与比较复杂的空间系统进行比较，土壤水带的表达式就可以按分块参数线性贮水系统来建立。例如，在灌溉中遇到的一个普遍问题是土柱向潜水静水面的垂直排水。若土柱原为饱和的（ $s = nb = s_n$ ），并且允许排水，那么，根据非饱和的多孔介质内达尔西型水流的偏微分方程，求解而得总的流出量是时间的函数（Bear, 1972）。

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[-K(\theta) \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} + \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] \quad (2.6.4)$$

式中, $\eta = -\phi/\gamma$, $\phi = -(z + \eta)$, 初始和边界条件为:

$$\begin{aligned} \theta &= n & 0 \leq z \leq b & & t = 0 \\ \theta &= n & z = b & & t > 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial z} &= \text{常数} & z = 0 & & t > 0 \end{aligned}$$

最后面的那个边界条件是在无流量条件下的线性近似式, $\partial \phi / \partial z = 0$, $z = 0$ 。求解此问题, 仅仅保留级数的第一项, 并对 z 积分, 则从土柱流出的总水量是时间的函数 (Swartzendruber, 1969):

$$\frac{F(t)}{F_{\infty}} \approx 1 - \left(\frac{32}{\pi^3}\right) e^{-\left(\frac{\pi}{2b}\right)^2 Nt} \quad (2.6.5)$$

式中, $F(t) = s_n - s(t)$, $F_{\infty} = F(t \rightarrow \infty)$, $N = -K(\theta)(\partial z / \partial \theta + \partial \eta / \partial \theta) = -K(\theta) \cdot \partial z / \partial \theta + D\theta$, 而 $D(\theta)$ 是土壤水分扩散系数。求解时假定 N 为常数, 流出量的这个指数关系式具有合理的实验依据 (Youngs, 1960 和 Gardner, 1962), 而且也是线性贮水系统流出量的特征曲线。

关于本节特定的土壤水分模型, 在相等的排水条件下

$$\begin{aligned} s &= s_n & t &= 0 \\ I &= 0 & t &> 0 \end{aligned}$$

式 2.6.1 和 2.6.2 的解为:

$$(s - s_0) = (s_n - s_0) e^{-at} \quad (2.6.6)$$

线性贮水模型的流出总量为 $F = s_n - s(t)$ 或者 $F = (s_n - s_0)(1 - e^{-at})$ 。当 $t \rightarrow \infty$ 时, $F \rightarrow F_{\infty} = s_n - s_0$ 。于是

$$\frac{F}{F_{\infty}} = (1 - e^{-at}) \quad (2.6.7)$$

因为 $32/\pi^3$ 近似于 1, 所以线性贮水系统 (2.6.7) 和散布的土壤水模型 (2.6.5) 具有同样的输出, 其流出常数由下式给出:

$$a' = \frac{\pi^2 N}{4b^2} \quad (2.6.8)$$

这样就能用线性贮水系统去近似计算非饱和带内水分的贮存量和释放量。

净渗入量用 $I = P - E - R_0$ 给出, 并且若 I , P 和 E 都视为随机平稳过程 (设 R_0 的变化忽略不计), 则渗入量围绕平均数的变化用 $I' = P' - E'$ 给出, 并有下列频谱关系:

$$S_{I'I'}(\omega) = S_{P'P'}(\omega) - S_{E'E'}(\omega) + S_{E'P'}(\omega) \quad (2.6.9)$$

如果把补给和土壤水贮存视为平稳随机过程, 则根据 2.6.1 式和 2.6.2 式得出与线性贮水系统 (参见 2.2 节) 一样的分析:

$$S_{s's'} = a'^2 S_{I'I'} / (\omega^2 + a'^2) \quad (2.6.10)$$

当只有降水输入时 ($S_{I'I'} = S_{P'P'}$), 可以通过考察降水量对含水层响应的规格化的转换函数变动幅度的平方来研究非饱和带的效应。在此情况下 (2.2.9 式的 $H = \text{常数}$),

$$S_{h'h'} = S_{s's'} / (\omega^2 S^2 + a'^2) \quad (2.6.11)$$

式中, S 为贮存系数, a 为含水层线性贮水体的常数。转换函数为 (式 2.6.10—2.6.11):

$$\frac{S_{h'h'}}{S_{P'P'}} = \frac{a'^2}{(\omega^2 S^2 + a'^2)(\omega^2 + a'^2)}$$

或者，用规格化的形式表示：

$$g = T^2 S_{hh} / L^2 S_{pp} = \frac{A^2}{(\Omega^2 + \beta^2)(\Omega^2 + A^2)} \quad (2.6.12)$$

式中， $a = \beta T / L^2$ ， $\Omega = SL^2 \omega / T$ ， $A = (L^2 N / b^2 T) \beta' S$ 以及 $a' = \beta' N / b^2$ 。当非饱和带 $\beta' = \pi^2 / 4$ 时（式2.6.8），线性贮水体含水层 $\beta = 3$ （见2.7节）。其他参数的合理值有如下列： $L/b \cong 100$ ， $N/T \cong 0.003$ 以及 $S = 0.25$ ，或者说 $A^2 = 65$ 。

以 $\Omega = 0$ 时的值为准，转换函数为：

$$g(\Omega) / g(0) |_{\text{I}} = A^2 \beta^2 / [(\Omega^2 + \beta^2)(\Omega^2 + A^2)] \quad (2.6.13)$$

在图2.33中，以此与未计非饱和带中水分贮存时（式2.6.11，其中 $S_{pp} = S_{..}$ ）的转换函数

$$g(\Omega) / g(0) |_{\text{I}} = \beta^2 / (\Omega^2 + \beta^2) \quad (2.6.14)$$

相比。在比较低的频率范围内，两种情况下的响应没有太大差别。只是当无量纲频率 (Ω) 趋近于10的数值时，不计土壤水分贮存的简单系统 (g_{I}) 的响应才发生偏离。当 $\Omega = 10$ 时，这种偏离仅为响应函数 $g(0)$ 的5%。降水的有些高频变化通过土壤的水分贮存，渗透过来给潜水面供给了水，这要比降水对土壤供给的水更为均匀。这种机理在野外和实验室内都曾确切地观察到过 (Freeze 和 Banner, 1970)。然而，因为偏离只和低能、高频的变化有关，所以由于存在非饱和带而造成的输入畸变，正如第四章中所叙述的，当频率区间考虑

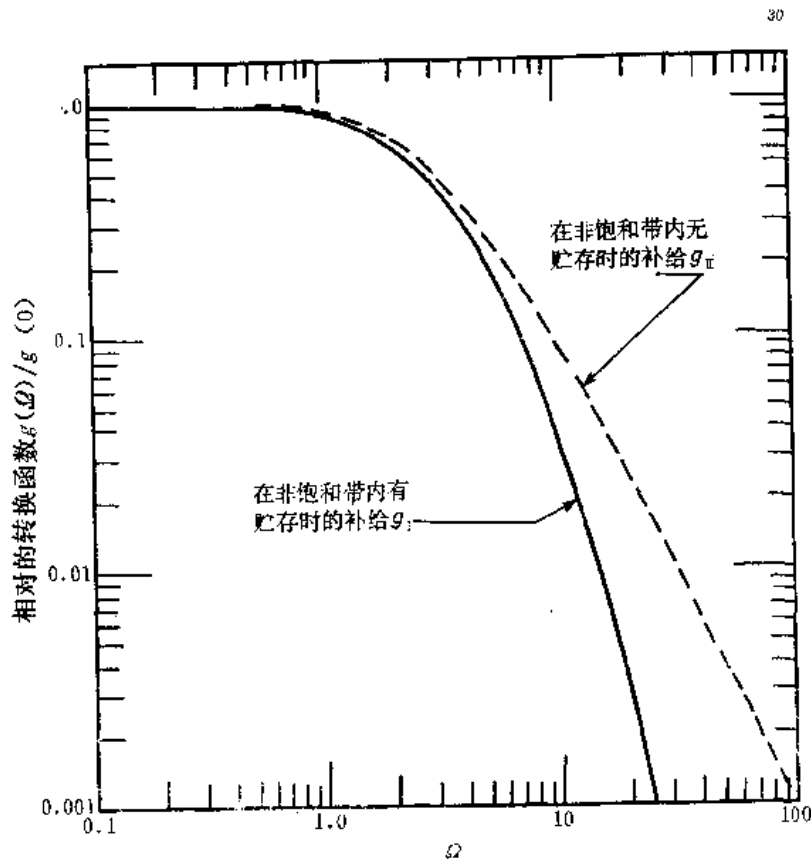


图 2.33 考虑或未考虑非饱和带内水的贮存，在这两种情况下地下水线性贮水体对补给响应的比较
(图中转换函数为转换函数之误)

采用月份资料时, 这种畸变就可以认为非常小了。如果采用较小的抽样间距, 畸变必将变得更为明显。

虽然, 土壤水分贮存效应可以忽略不计, 但是考虑蒸发-蒸腾效应如何会影响补给输入还是很重要的。水分由于蒸发-蒸腾作用而从地表和上部土层散失, 否则便会渗入或形成径流。因此, 按最简单的形式, 净补给可以表示为降水量的一部分。

$$\epsilon = \gamma P$$

式中的比例系数为常数。这是根据降水量观测记录得出的补给输入形式, 这将在第三章和第四章内应用。根据季节变化的 $\bar{\gamma}$ 所确定的变差, 或者, 依据对 E 和 P 的净渗入的频谱关系, 可以得到更可靠的估计。将来的研究可以直接针对后一种设想。因为能广泛收集到温度记录, 所以设想可以单独依据温度资料估算净蒸发-蒸腾量。例如, 桑思韦特 (Thornthwaite) 方法利用幂函数关系把 E 当作温度的函数来估算 (Thornthwaite, 1948)。就目前的情况而言, 采取

$$E = a + bT$$

式中, T 为温度, 是一平稳随机过程, a 和 b 是常数。于是

$$S_{EE} = b^2 S_{TT}$$

净渗入的频谱可由下式求出:

$$S_{II} = S_{PP} - bS_{PT} - bS_{TP} + b^2 S_{TT}$$

在野外应用中, 右边的频谱可以根据分析蒸发-蒸腾资料 (b)、温度 (S_{TT}) 和降水量 (S_{PP}) 的记录 (加上 S_{PT} , S_{TP}) 等来计算。然后净渗入量 (S_{II}) 就可以用来作为土壤水-地下水系统的输入。这种程序将在以后的研究中加以探讨。

2.7 讨 论

本章的前面几节中, 提出了几种不同的模型, 近似表达频率域中潜水含水层的频谱响应。这些模型是:

1. 未考虑空间变化的线性贮水模型;
2. 线性裘布依近似式, 其中假定 $Kh_0 = T$ 为一个常数;
3. 线性贮水体和裘布依含水层的耦合系统, 曾经探讨了上述系统之间的相互作用;
4. 在“径流带的增厚效应”中, 应用扰动解法, 保持了一些非线性效应;
5. 兼具垂向流动效应的拉普拉斯含水层。

线性化裘布依近似式可能是最广泛应用的模型。因为它简单而在物理意义上又保持一定程度的现实性。

人们会要求把线性贮水模型与具有水平底板的线性裘布依含水层的空间平均值进行比较。取式 2.3.6 的空间平均值, 则有:

$$\langle h'(x, t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \frac{1}{L} \int_0^L dZ_h(x, \omega) dx \quad (2.7.1)$$

于是可以看到含水层空间平均值的频谱响应由下式给出:

$$S_{\langle h \rangle \langle h \rangle} = \left[\frac{\tanh bL}{bL} \right] \left[\frac{\tanh bL}{bL} \right]^* S_{III} + \frac{i}{\omega S} \left[\frac{\tanh bL}{bL} - 1 \right] \left[\frac{\tanh bL}{bL} \right]^* S_{IH}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{i}{\omega S} \left[\frac{\tanh bL}{bL} - 1 \right]^* \left[\frac{\tanh bL}{bL} \right] S_H, \\
& + \frac{1}{\omega^2 S^2} \left[\frac{\tanh bL}{bL} - 1 \right] \left[\frac{\tanh bL}{bL} - 1 \right]^* S_{..}
\end{aligned} \tag{2.7.2}$$

与线性贮水模型的式2.2.9对照, 就能在响应函数的两种形式之间得到某些相似的等量,

即: 对输入序列 H 来说, $\frac{a^2}{\omega^2 S^2 + a^2}$ 和 $\left[\frac{\tanh bL}{bL} \right] \left[\frac{\tanh bL}{bL} \right]^*$ 等同; 对输入序列 ϵ 来说, $\frac{1}{\omega^2 S^2 + a^2}$ 和 $\left[\frac{\tanh bL}{bL} - 1 \right] \left[\frac{\tanh bL}{bL} - 1 \right]^*$ 等同。取 $a = -\beta_0 T/L$, β_0 为用数字表示的常数,

$$\frac{a^2}{\omega^2 S^2 + a^2} = \frac{1}{[1 + (\Omega/\beta_0)^2]} \tag{2.7.3}$$

和

$$\frac{1}{\omega^2 S^2 + a^2} = \frac{1}{\omega^2 S^2} \left[\frac{1}{1 + (\beta_0/\Omega)^2} \right] \tag{2.7.4}$$

应用最小二乘法, 对序列 H 来说, 用平方和 = 0.00955, $\beta_0 = 2.722$; 对序列 ϵ 来说, 用平方和 = 4.712×10^{-4} , $\beta_0 = 3.021$ 。二者的比较示于图2.34与图2.35内。 β_0 的这些数值可以与基尔哈 (Gelhar, 1974) 所用的稳定状态的 β_0 值 ($\beta_0 = 3$) 和下降正弦曲线形潜水面的 β_0 值 ($\beta_0 = \pi^2/4 = 2.467$) 作比较。

上述分析说明线性贮水模型可以用来对潜水含水层的频谱响应作粗略的、轮廓的估算。显而易见, 线性裘布依近似式是一个更接近实际的模型。但是在应用线性裘布依近似式时, 必须注意含水层底板的几何形状和非线性化程度。特别是对倾斜底板, 若 β 满足式2.3.14, 我们要使用线性理论则必须 $T = \text{常数}$ 。然而用图2.3—2.8进行判断, 只有 T 值大于0.1时, 倾斜底板的效应才能显示出来。

关于“径流带的增厚效应”, $\mu = \epsilon L^2 / 2K\bar{H}^2$ 的值可量度补给系统的非线性化程度, 而且又是含水层参数的一个函数。但是对于直到0.1的 μ 值来说, 在低频中非线性效应不太重要, 而在高频中非线性效应已察看不出来了。当 $x/L = 0.5$ 时, 这些效应之间的比较示于图2.36和图2.37中。它们是以后在第四章中进行资料分析时使用水平底板的程式。

如果有地表水贮水体, 即湖泊或水库存在, 那么就可以使用线性贮水体和裘布依含水层的耦合系统。假设补给在空间上为均匀的, 潜水含水层的频谱响应完全由补给确定。同样, 已知地表贮水体的响应, 可以用式2.3.25估算含水层的响应。然而我们不得不计算两个参数即 aL^2/α 和 SL/l , 它们分别为两种系统的响应时间之比和水体积之比。两种参数的组合可以表示沿含水层方向上频谱响应的特征。例如, 在图2.13中, $aL^2/\alpha = 1$ 和 $SL/l = 5$ 的组合, 所导致的沿含水层的频谱响应几乎是均匀的。

拉普拉斯含水层的分析表明, 垂向流效应会在裘布依含水层和拉普拉斯含水层的频谱响应之间造成明显的差别。正如图2.29所示, 即使是很薄的含水层 ($h_0/l < 0.02$), 也能有取决于相对河流宽度 w/L 的差异。当 $w/L = 0.01$ 而 h_0/l 不大时, 裘布依含水层和拉普拉斯含水层实际上相等, 但是对别的数值, 它们就有差别了。虽然拉普拉斯含水层的结果更符合许多野外情况, 但是它的应用却受到对需用参数估算能力的限制。相对河流宽度也许能估算得相当好, 可是 h_0/l 取决于各向异性比 K_x/K_z , 并不是总可以取得的。在同一含水

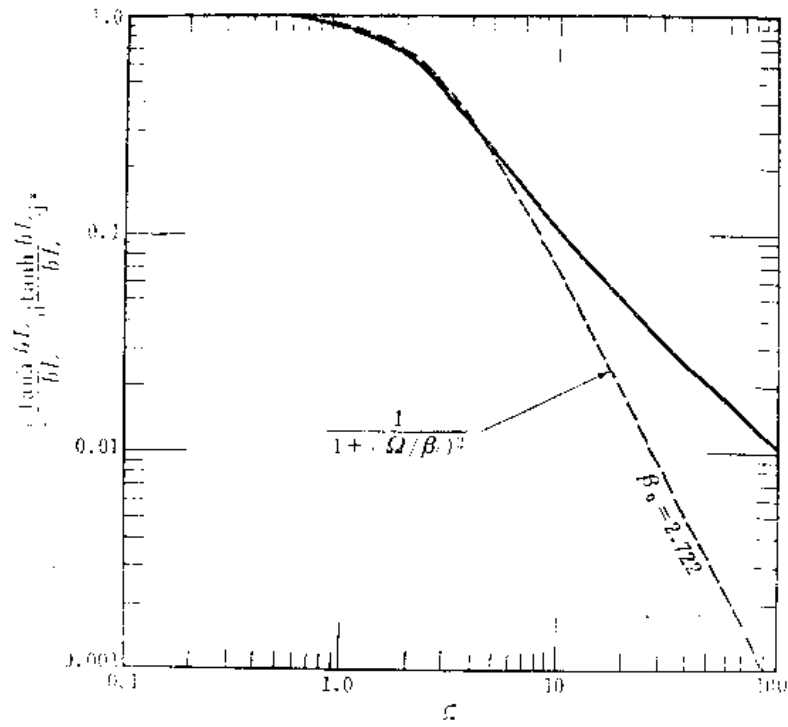


图 2.34 对输入序列 H 来说，线性贮水系统和线性裘布依含水层空间平均值的比较

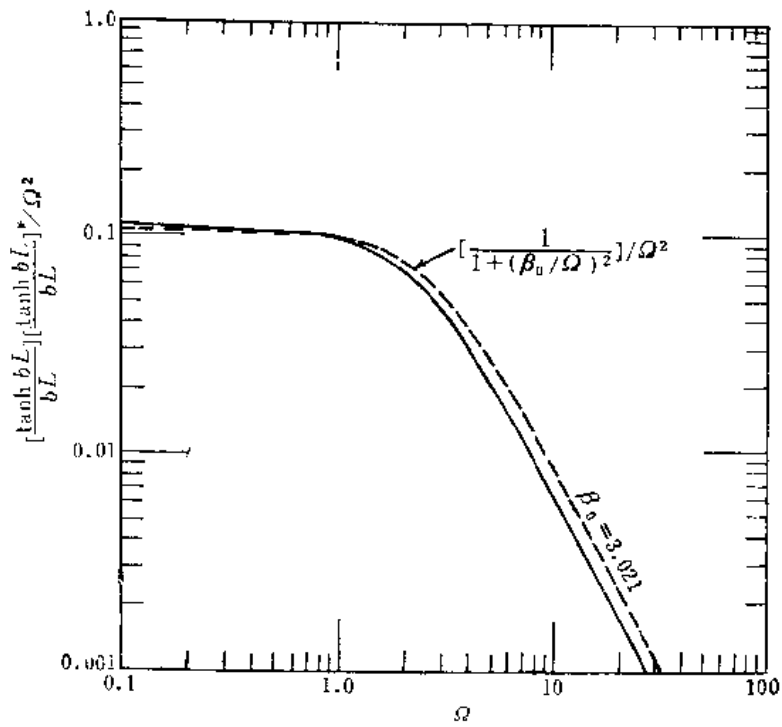


图 2.35 对输入序列 e 来说，线性贮水系统和线性裘布依含水层空间平均值的比较

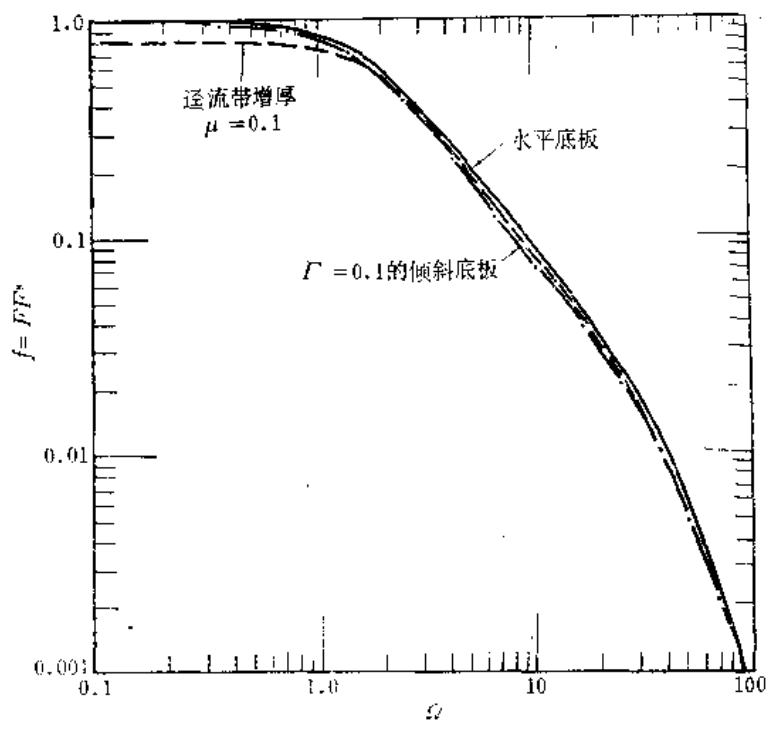


图 2.36 当 $x/L = 0.5$ 时, 对输入序列 H (河水位) 来说, 水平底板、倾斜底板和“径流带增厚”效应之间的比较

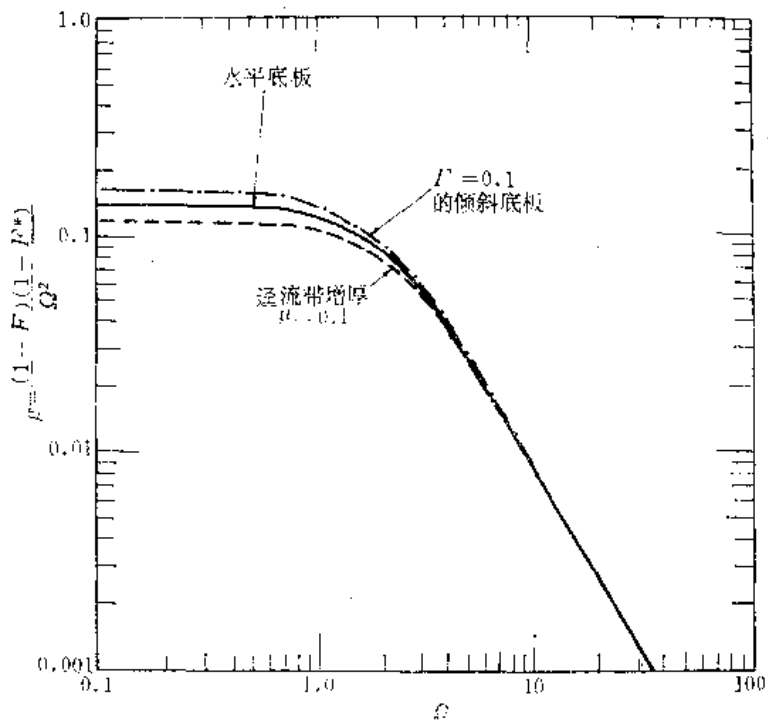


图 2.37 当 $x/L = 0.5$ 时, 对输入序列 ϵ (补给) 来说, 水平底板、倾斜底板和“径流带增厚”效应之间的比较

层内不同深度的两口水井中测水位，依据水位的交叉谱分析有可能确定 K_x/K_z ，然而这种方法的可行性仍然还有待验证，而且在许多情况下，要取得不同深度水井的广泛测井记录是不可能的。

在 2.5 节中，对空间变化的分析提供了某些有关这个复杂问题的初步理解。它证明：由渗透系数的变化引起的水位变化的方差，一般要比渗透系数的方差小很多。对于两口水井水流观测网的分析表明，在流量计算中的误差显著地小于渗透系数相对方差所表示的误差，而且小间距观测井的误差是最小的（表 2.2）。这种误差也比把变量假设为统计上的空间独立变量时所造成的误差小得多。在那种情况下，式 2.5.14 中仅保留以下各项：

$$\overline{Q'^2}/\overline{Q}^2 = \overline{K'^2}/2\overline{K}^2 + 2\overline{y'^2}/(L\beta)^2 + \overline{y'^2}/2h_0^2$$

这一结果意味着误差至少是渗透系数相对方差的一半。当观测井间距 L 减小时，可以看到由水位方差 $\overline{y'^2}$ 形成的误差迅速增加；这与把实际的空间相关结构计算进去时所发现的特性是相反的。因此，这对以后在研究地下水流的空間变化时要涉及的空间相关结构问题来说是重要的。

非饱和带的分析表明，水分贮存效应对低频来说是次要的，而且如果像第四章那样采用月资料时，在所用的频率范围内可以忽略不计。引入补给强度与降水的简单比例关系 ($\epsilon = \gamma P$)，可以用来测定对地下水含水层的净补给。但是为了求得净补给量，在将来的工作中应该进一步研究评价蒸发-蒸腾作用的更精密的方法。

第三章 含水层频谱响应的非线性模拟

3.1 潜水含水层分析的物理基础和理论基础

物理基础

了解实际的地下水系统不仅有助于建立数学模型，而且对本研究的计算和评价也有作用。后者与地下水系统的实际形状和大小有关，这对确定那些在非线性效应中值得注意的参数来说，是有重要意义的。

要研究的地下水系统的类型是图 2.2 中示意表示的潜水含水层，它可以视为一个具有两种输入和一个输出的转换系统。这种转换系统是饱和的多孔介质的空间分布结构，本研究所考虑的它的两项主要物理特性是导水系数和贮水系数。两种输入是补给强度和河流水位。从地表到潜水面的渗透是补给过程，它可以视为另一转换系统。河流的水位变化是含水层与河流边界上水位的上升与下降。这些输入是复杂的水文过程，并随空间与时间而变化。另外，它们都是时间与空间的随机事件。系统的输出是含水层的测压水头（即井内的水位）。由于输入和转换系统二者的特征都是随空间和时间变化的随机事件，所以输出也有这种特性。物理边界是潜水面、河流水位变化和底板处的隔水边界。对长度有限的含水层来说，还有无水流通过的边界。

当系统被圈定在所描述的边界以内时，可以直观地看到输入越大输出也越大。因此，一种有效的系统的度量就是响应幅度，它是本研究的主要分析对象。其它的物理特征则是输出在时间上的滞后（相对于输入而言）。这是潜水面从一个位置移动到另一个位置的变位所需的时间，因此它能够度量含水层系统的导水系数。对此我们只作概略研究。

数学模型

数学模型是复杂的物理现象的抽象。在描述一个模型时应该足够完整以便获得有用的结果，而且还要比较简单以利运用。描述潜水非稳态的数学方程式最常用的为裘布依-福希海默尔方程式，它的基本假设前提是水流主要为水平的，而等势面为垂直的（见 Bear, 1972）。因为在实际情况中，潜水面的倾斜很小，所以才采用这样的假定前提。默里和蒙克迈耶（Murray & Monkmeyer, 1973）曾讨论了这些假定的正确性，他们发现对稳定流来说，如果期望达到99%的精度，自由面的倾斜必须不大于1:10。在非稳定状态时，他们发现用这个方程式描述潜水面的上升条件要比描述下降更为确切。

方程式的一般形式为：

$$S \frac{\partial h}{\partial t} = \nabla \cdot [T \nabla (h + z)] + e$$

式中，S——贮水系数；

h ——隔水底板以上的饱和带厚度，底板高程用 η 表示；

T ——含水层的导水系数；

ϵ ——补给强度。

本研究部分只限于一维水平含水层，于是简化控制方程2.3.2，得：

$$S \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left[T(x, t) \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right] + \epsilon(x, t) \quad (3.1.1)$$

对潜水含水层来说，导水系数定义为渗透系数 K 和饱和带厚度 $h(x, t)$ 的乘积，或者 $T = Kh$ 。因此有：

$$S \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left[Kh(x, t) \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \epsilon(x, t) \quad (3.1.2)$$

此偏微分方程为非线性方程，并已接近似的线性化形式，用解析法对各种边界条件作出了求解（见Glover, 1964; Haushild, 1960; Kriz, 1967; Polubarinova-Kochina, 1962; 以及Singh, 1969）；而按非线性形式，则对一维，二维和轴对称的形状，都用数值法作过求解（见Hornberger等, 1970; Karadi等, 1968; Kriz等, 1966; 以及Yeh, 1970）。此数学模型的边界条件为：方程式中的潜水面以上的垂直补给、河流与含水层的相互作用以及处于无径流状态的地下水分水岭。这些条件中的后两种在数学上的表示式为：

$$\begin{aligned} (a) \quad & h(0, t) = H(t) \\ (b) \quad & \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

式中， X ——水平坐标；

L ——含水层长度；

$H(t)$ ——河流水位。

此物理系统示意性地表示在图2.2上。

这种分析的主要特征是：补给和河流水位这些输入都是随机的。因此，沿含水层不同位置上的输出也是随机的。次要的特征则是有效孔隙度或贮水系数(S)和渗透系数(K)，通常都是呈空间分布的。这一特征导出一个复杂的随机变换系统。为了简化起见，一般假定 S 和 T 为常数， ϵ 则仅随时间而变化。这一简化导出了著名的线性裘布依模型如下：

$$S \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) = T \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t) + \epsilon(t) \quad (3.1.4)$$

此方程可用解析法求解，而且它成为解析研究的基础。方程式的其他非线性形式可与这种简单模型相比较。它们是：

(a) $T = Kh(x, t)$ 的非线性裘布依模型；

(b) 具有空间分布输入 $\epsilon = \epsilon(x, t)$ 的非线性裘布依模型。

这种用来解非线性方程的方法是一种数值模拟法，它用的是以后要讨论的隐式有限差分法。但是首先，为了对物理系统的特性有个较好的了解，对裘布依模型提出解析解是有益处的。

线性理论

本节的目的有两个方面：第一，了解在最简单情况下的系统；第二，将简单的解析模型与以后要研究的有限差分模型作比较。非线性数值模拟的精度就是靠这种比较来确定

的。

方程3.1.4所表示的线性裘布依模型是以式3.1.3为边界条件的。为了用数值模拟解这个方程式，把方程式变换成无量纲形式是有好处的。

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{h}{m} \\ \eta_0 &= \frac{H}{m} \\ \xi &= \frac{x}{L} \\ \tau &= \frac{T}{SL^2} t \\ \rho &= \frac{L^2}{Tm} \varepsilon(t) \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

式中， m 为饱和带具有代表性的厚度。通常这是河流水位升降的平均数，或 $m = \bar{H}(t)$ 。因此无量纲方程式成为：

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} + \rho(\tau) \quad (3.1.6)$$

并服从以下边界条件：

$$\begin{aligned} \eta(0, \tau) &= \eta_0(\tau) \\ \left. \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

为了得到该方程的显式解，必须规定进入系统的输入 η_0 和 ρ 。因为这些输入在时间域内是随机的，所以可用一个具有单频和单振幅的谐函数作最佳表示。自然界中的概周期函数簇可以用具有一大列频率和振幅的一些谐函数叠加构成。如果用来限定概周期函数的频率区间趋近于零，则概周期函数近似于随机函数。

正弦函数有它特殊的振幅和频率。输入用复数形式表示如下：

$$\rho(\tau) = \alpha_0 + \alpha e^{i\Omega_a \tau} \quad (3.1.8)$$

$$\eta_0(\tau) = \beta_0 + \beta e^{i\Omega_b \tau} \quad (3.1.9)$$

式中， α_0 和 β_0 分别为补给强度的平均值和河流水位升降变化的平均值； α 和 β 为各自的振幅，而 Ω_a 和 Ω_b 为各自的无量纲频率。无量纲频率 Ω 与实际频率 ω 的关系为：

$$\Omega \Delta \tau = \omega \Delta t \quad (3.1.10)$$

因此，由式3.1.5有：

$$\Omega = \frac{SL^2}{T} \omega \quad (3.1.11)$$

依据叠加原理，这种方程的解就是三种情况的总和，即稳定情况、有补给的情况以及有河流作用的情况。

(a) 稳定情况——补给强度为常数

$$\rho = \alpha_0, \quad \beta = 0, \quad \beta_0 = 1$$

$$\eta_1(\xi, \tau) = 1 + \alpha_0 \xi \left(1 - \frac{1}{2} \xi \right) \quad (3.1.12)$$

(b) 有补给的情况——补给强度呈正弦曲线型变化，即

$$\rho(\tau) = \alpha e^{i\Omega_a \tau} \quad \text{条件为 } \alpha_0 = 0 \text{ 和 } \eta_0 = 0$$

$$\eta_2(\xi, \tau) = -\frac{i\alpha}{\Omega_a} \left[\frac{\cosh [\sqrt{i\Omega_a} (1-\xi)]}{\cosh \sqrt{i\Omega_a}} - 1 \right] e^{i\Omega_a \tau} \quad (3.1.13)$$

(c) 有河流作用的情况——河流水位呈正弦曲线型变化，即

$$\eta_0(\tau) = \beta e^{i\Omega_\beta \tau}$$

$$\eta_3(\xi, \tau) = \beta \frac{\cosh [\sqrt{i\Omega_\beta} (1-\xi)]}{\cosh \sqrt{i\Omega_\beta}} e^{i\Omega_\beta \tau} \quad (3.1.14)$$

所以，三种解的叠加式如下：

$$\eta(\xi, \tau) = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 \quad (3.1.15)$$

可以看到，输出是具有与输入相同频率的正弦函数。唯一不同的是振幅的变化和相移。这是线性系统的基本响应特性。若输入 $X(\tau)$ 由下式给出，

$$X(\tau) = A e^{i\Omega \tau} \quad (3.1.16)$$

其中 A 为波动变化的振幅，而输出 $Y(\tau)$ 有下列形式，

$$Y(\tau) = A G(\Omega) e^{i\Omega \tau} \quad (3.1.17)$$

其中 $G(\Omega)$ 为放大因子或转换函数，则 $Y(\tau)$ 对 $X(\tau)$ 之比为

$$\frac{Y(\tau)}{X(\tau)} = |G| e^{i\theta} \quad (3.1.18)$$

式3.1.18为频率响应函数。振幅响应或转换函数的振幅为

$$|G(\Omega)| = \left| \frac{Y(\tau)}{X(\tau)} \right| \quad (3.1.19)$$

其相位响应为

$$\theta = \arg \left| \frac{Y(\tau)}{X(\tau)} \right| \quad (3.1.20)$$

利用这些公式，我们求得有补给的情况和有河流作用的情况二者的响应如下：

$$\begin{aligned} \text{今 } \cosh r\xi' \cos r\xi' &= B \\ \cosh r \cos r &= C \\ \sinh r\xi' \sin r\xi' &= D \\ \sinh r \sin r &= E \end{aligned}$$

其中

$$r = \sqrt{\Omega_a/2} \quad (\text{有补给的情况})$$

$$= \sqrt{\Omega_\beta/2} \quad (\text{有河流作用的情况})$$

$$\xi' = 1 - \xi$$

有补给的情况：

$$|G_1(\Omega_a)| = \frac{\alpha}{\Omega_a} \left[\frac{(B-C)^2 + (D-E)^2}{C^2 + E^2} \right]^{1/2} \quad (3.1.21)$$

$$\theta_1 = \theta_{\rho_1}(\Omega_a) = \tan^{-1} \left[\frac{E(B-C) - C(D-E)}{E(D-E) + C(B-C)} \right] \quad (3.1.22)$$

有河流作用的情况:

$$G_2(\Omega_\beta) = \left[\frac{B^2 + D^2}{C^2 + E^2} \right]^{1/2} \quad (3.1.23)$$

$$\theta_2 = \theta_{\rho_2}(\Omega_\beta) = \tan^{-1} \left[\frac{BE - DC}{BC + DE} \right] \quad (3.1.24)$$

在图3.1(a), (b)和图3.2(a), (b)以及图3.3中, 分别绘制了频率范围从 $\Omega = 0.1$ 到 $\Omega = 100$ 的 $|G_1|$, $|G_1|^2$, $|G_2|$, $|G_2|^2$ 和 θ_{ρ_1} 的曲线图。于是得到的转换函数和相位响应函数与按线性频谱理论得到的正好相当。(参见第二章)。这种相同是由于输入 $X(\tau)$ 的形式相同。按正弦曲线理论, 输入用单个振幅表示, 而在频谱理论中, 输入则是由频谱域内许多振幅的叠加用傅里叶-斯蒂尔吉斯积分式表达的。

$$X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\Omega\tau} dZ_X(\Omega) \quad (3.1.25)$$

式中, dZ_X 为输入的复值幅。输出 $Y(\tau)$ 同样表示为:

$$Y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\Omega\tau} dZ_Y(\Omega) \quad (3.1.26)$$

将这些方程式代入线性裘布依方程, 从而导出与正弦函数理论得出的同样结果。在频谱理

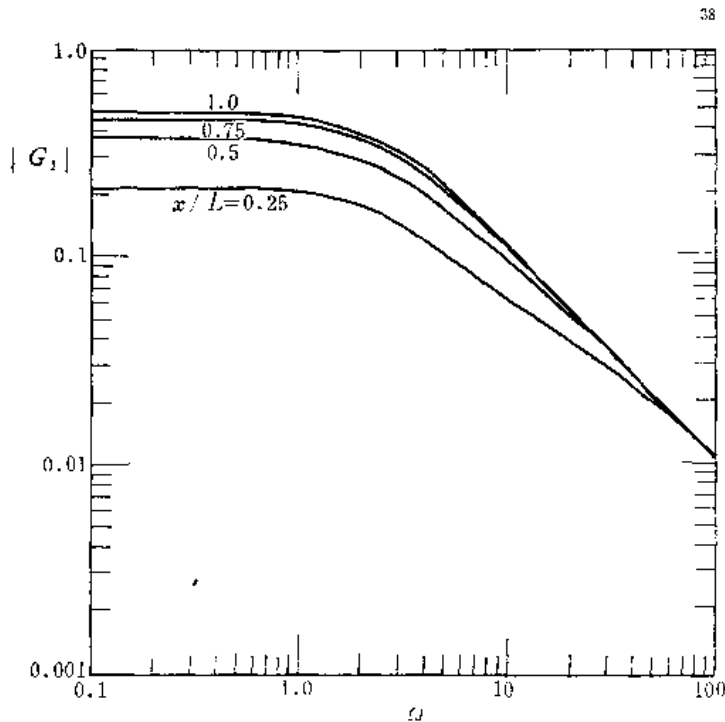


图 3.1(a) 具有补给输入的含水层系统的转换函数的振幅

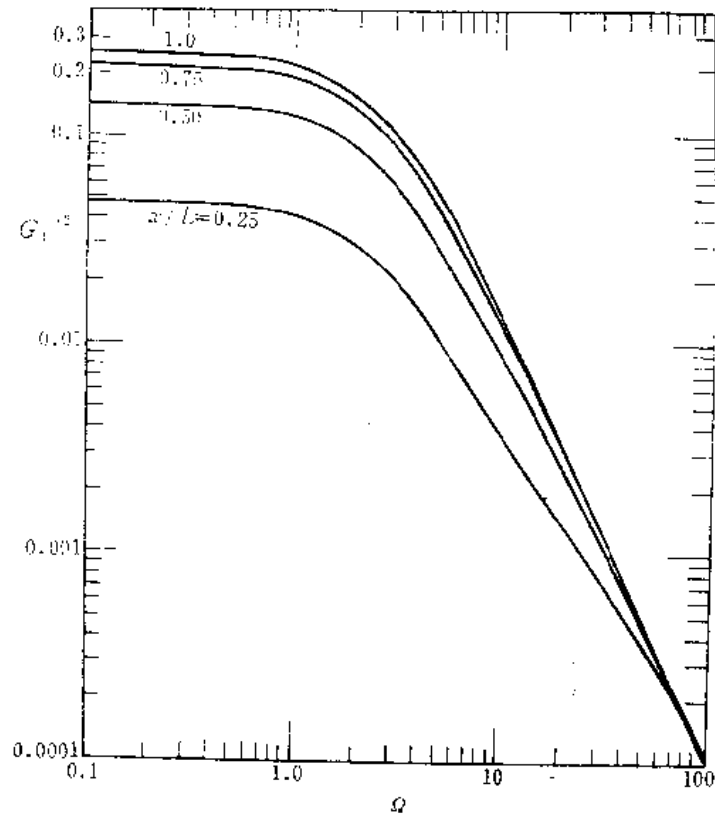


图 3.1(b) 具有补给输入的含水层系统的转换函数的振幅平方

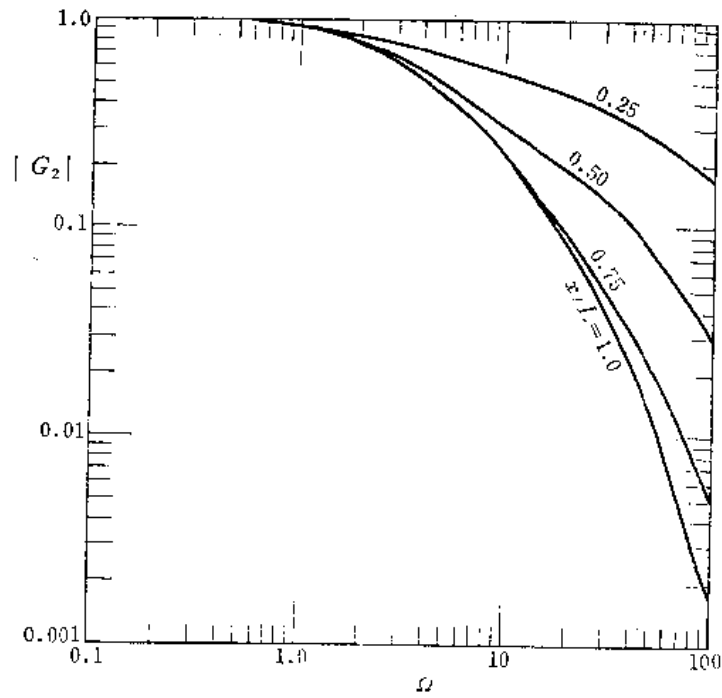


图 3.2(a) 具有河流水位输入的含水层的转换函数的振幅
(也是 $\beta = 1$ 时式 2.5.7 的比值的振幅)

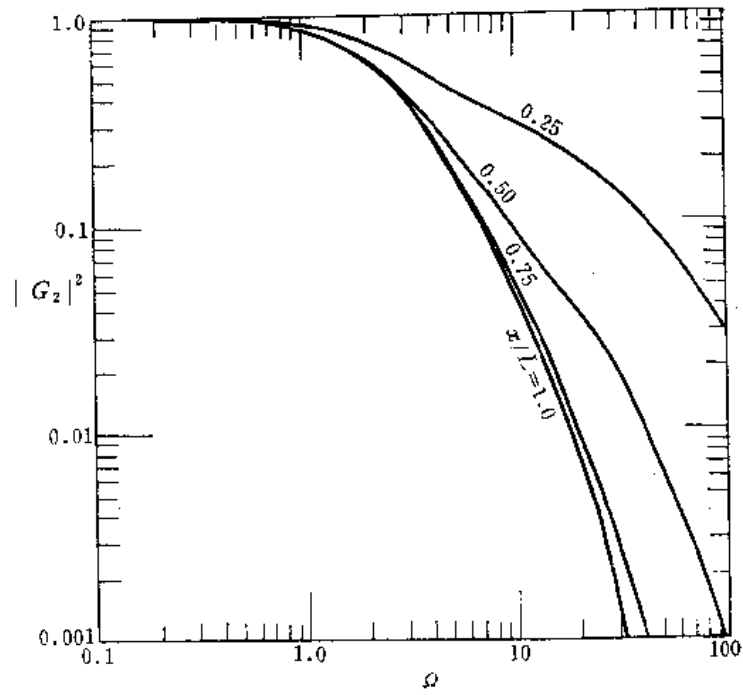


图 3.2(b) 具有河流水位输入的含水层系统的转换函数的振幅平方

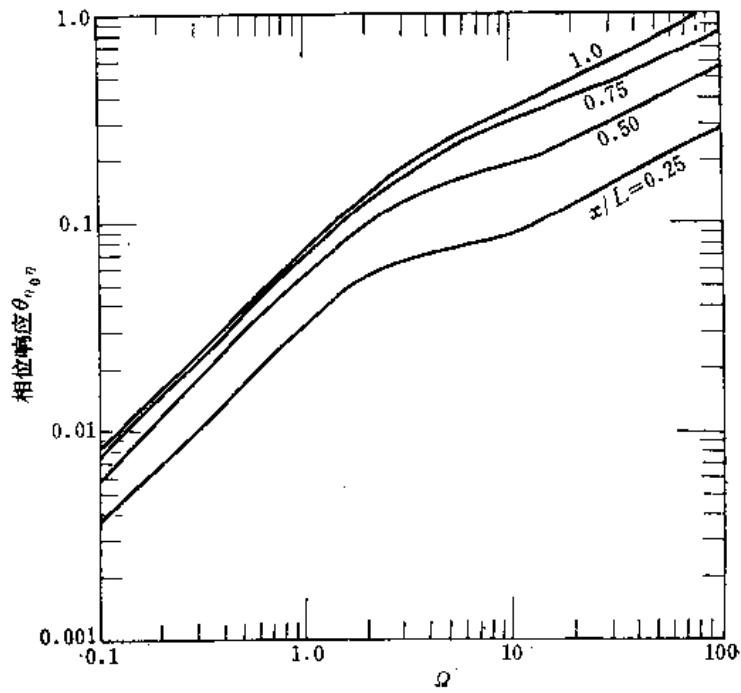


图 3.3 具有河流水位输入的含水层系统的相位响应

论中用 dZ_y/dZ_x 给定频率响应函数，而在正弦函数理论中则用 Y/X 给定。前一种理论的好处在于处理更为普遍的随机平稳函数时均可使用，后一种则有利于求解难度较小的问题。

无量纲频率 Ω 应该与系统的物理意义相关联。由式3.1.11，

$$\Omega = \frac{SL^2}{T} \omega$$

式中， Ω 为弧度/无量纲时间；

ω 为弧度/时间单位。

因此，输入的频率取决于物理参数和系统的量纲。对于一个 $L=1$ 英里， $S=9.3$ ， $T=10^4$ 加仑/日/英尺²和实际时间间隔为一个月的典型含水层来说，我们近似得到

$$\omega \approx \frac{1}{5} \Omega \text{ 弧度/月} = \frac{1}{10\pi} \Omega \text{ 周期/月}$$

当 $\Omega=100$ 时， $\omega \approx \frac{10}{\pi}$ 周期/月 ≈ 3 周期/月。

对补给和河水位这些输入来说，这是一个很大的数值。在这样的高频情况下，无疑除了特有的响应频率（例如年周期降水）以外，还会引入噪音。

$$\Omega=0.1 \text{ 时， } \omega \approx \frac{1}{100\pi} \text{ 周期/月} \approx 0.003 \text{ 周期/月。}$$

与系统响应的特征频率比较时，这种频率是很小的。因此从 $\Omega=0.1$ 到 $\Omega=100$ 代表含水层响影特性的一个相当大的范围。

如图3.1(a)，(b)和3.2(a)，(b)所示，从 $\Omega=0.1$ 到 $\Omega=1$ 的低频范围内，比较不灵敏的响应有着明显的物理意义。在这样的低频条件下（0.003周期/月），响应实际上没有衰减效应。对这类情况来说，响应振幅之间的一个重要区别就是河流响应比补给响应衰减得更快，特别是在观测井距离河流较远时是这样。在高频条件下（ $\Omega>50$ ），所有地点的补给响应都大致相同。在本研究中，特别是对确定系统的物理参数（ S 和 T ）来说，响应振幅是一个重要的概念。

具有物理意义的另一个重要数学特性，就是响应对输入的相位滞后。在有河流作用的情况下，这是更加具有实际意义的。相位滞后表示从响应位置到河流位置的信号滞后。滞后响应时间（ τ_D ）与相位滞后 θ_{xy} 在线性系统内的关系为

$$\tau_D = \frac{\theta_{xy}}{\Omega} \quad (3.1.27)$$

式中， X ——输入；

Y ——输出；

Ω ——输入的无量纲频率。

在有河流作用情况下的 θ_{xy} 和 τ_D 分别表示在图3.3和图3.4内。可以看到，行经较近地段的波，所化的时间较少。同样，传播到较近地点的信号，所用的时间也较小。值得指出的是响应时间对频率的变化（特别是在 Ω 从0.1到1范围内）不太灵敏。这直接意味着在这样的低频条件下，波的衰减如此缓慢，以致频率响应几乎已与河流处的情况同步。在有补给的情况下，所有位置几乎都没有相位滞后。依据裘布依模型的基本假定，水流主要是水平的，系统上面的垂直补给作用应该不太重要，因此未予详细研究。

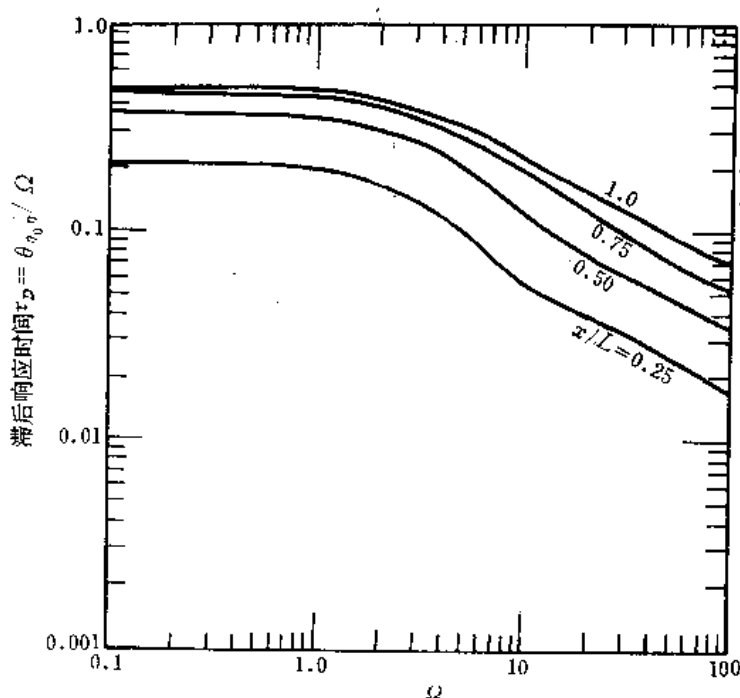


图 3.4 具有河流水位输入的含水层系统的滞后响应时间

综上所述，对这种线性地下水系统的特性的研究，是以它的振幅和相位响应为基础的，并且特别注重前者。非线性效应的评价也是以这些物理特性为依据的。

稳定补给和稳定河流水位的非线性理论

求非线性裘布依方程的解析解通常是不可能的。然而，稳定流状态却是例外，此处研究一种这类情况。其方程与边界条件为：

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\eta \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right) + \alpha_0 \quad (3.1.28)$$

$$\eta(0, \tau) = 1 \quad (3.1.29)$$

$$\left. \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = 0 \quad (3.1.30)$$

式中， α_0 为常数，而方程式的解为：

$$\eta(\xi) = (1 + 2\alpha_0\xi - \alpha_0\xi^2)^{1/2} \quad (3.1.31)$$

至于对此问题的线性解则由下式给出，

$$\eta(\xi) = 1 + \alpha_0\xi + \frac{\alpha_0\xi^2}{2} \quad (3.1.32)$$

把非线性解展成泰勒级数，得到

$$\eta(\xi) \simeq \left(1 + \alpha_0\xi - \frac{\alpha_0\xi^2}{2} \right) - \frac{1}{8} (2\alpha_0\xi - \alpha_0\xi^2)^2 + \frac{3}{48} (2\alpha_0\xi - \alpha_0\xi^2)^3 \quad (3.1.33)$$

分析非线性效应，可以看到，当 α_0 很小时，线性解接近于非线性解。也能看到，如果 ξ 固定不变，当平均补给量 α_0 递增时，两种解之间的差异近似成平方递增。 α_0 固定不变，差异随 ξ 的增加而递增。在图3.5中，画出了 $\alpha_0=1$ 时线性与非线性两种情况的解。可以看到，

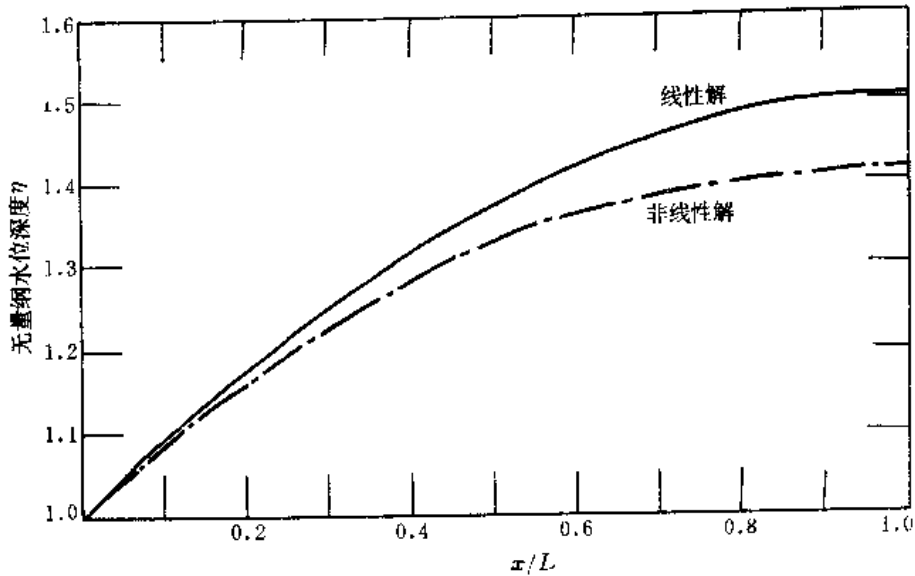


图 3.5 线性情况和非线性稳定状态情况的解析解

两种解最大相差8%。这种偏差随着水平坐标 x/L 的递增而增加。总之，在稳定状态的非线性系统内， α_0 是基本的非线性参数。

非线性的简单评价

由于非线性方程一般没有解析解，所以难于直接评价非线性效应。然而，以线性解为基础，通过研究非线性效应对输入参数 α_0 、 β_0 、 α 、 β 变化的敏感程度，可以得到粗略的估计。补给的平均值 α_0 在前面的章节中已被识别，而 β_0 对所有情况都固定为1。 α 、 β 和 Ω 可以依据有补给和有河流作用两种情况的非稳定状态的解进行评价。

在没有补给而有河流作用的情况下，方程为：

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\eta \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right) \quad (3.1.34)$$

上式可展开为：

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)^2 + \eta \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \quad (3.1.35)$$

$$\text{令 } \eta = 1 + f \quad (3.1.36)$$

并代入式2.5.2中，则得到

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \quad (3.1.37)$$

上式右边第一项是著名的线性裘布依方程，即

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \quad (3.1.38)$$

或

$$\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}}{\frac{\partial f}{\partial \tau}} = 1$$

其余两个非线性项则可用 f 的线性解进行研究。此种评价所依据的假设是，真正的非线性解与线性解同样为正弦曲线形式，而且在两种解之间只有很小的相位滞后。该假设的有效性将用正弦曲线型输入作非线性模拟来校验。

依据线性解方程3.1.13，上面所说的第一个非线性项对 $\partial f/\partial \tau$ 之比为

$$\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial \tau}\right)} = \beta \frac{\sinh^2[\sqrt{i\Omega_\beta}(1-\xi)]e^{i\Omega_\beta\tau}}{\cosh[\sqrt{i\Omega_\beta}(1-\xi)]\cosh\sqrt{i\Omega_\beta}} \quad (3.1.39)$$

而第二个非线性项对 $\partial f/\partial \tau$ 之比为

$$\frac{\left(f\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial \tau}\right)} = \beta \frac{\cosh[(1-\xi)\sqrt{i\Omega_\beta}]e^{i\Omega_\beta\tau}}{\cosh\sqrt{i\Omega_\beta}} \quad (3.1.40)$$

显而易见，两个非线性项都与波动的振幅 β 成比例。关于和频率的关系方面，计算了 $\beta=1$ 时两项的振幅，并分别表示在图3.6和图3.2(a)中，正如可以见到的，在高频（特别是 $\Omega > 50$ ）时，两个非线性项的振幅都减小。对距离河流较远的水井来说，非线性项更明显地减小。同样可以注意到，如图3.6所示，第一个非线性项 $|\partial f/\partial \xi|^2/(\partial f/\partial \tau)$ 的振幅在低频 $\Omega=0.1$ 处是递增的，直到 Ω 约为8时达到极大值。综上所述，可以得出结论为：对小的振幅 β 和较高的频率而言，线性近似式是一种令人满意的近似式。

在有补给的情况下，方程为

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \nu + \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^2 + f\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \quad (3.1.41)$$

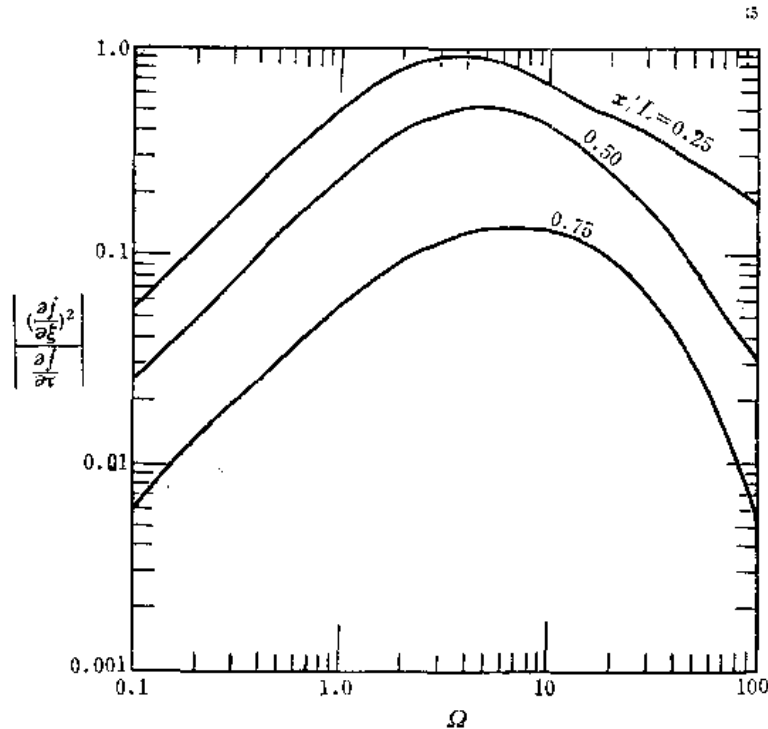


图 3.6 在有河流作用的情况下， $\beta=1$ 时第一个非线性项的振幅比

依据解式2.3.10, 两个非线性项变为:

$$\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial \tau}\right)} = \frac{i\alpha}{\Omega\alpha} \left\{ \frac{\sin h^2 \sqrt{i\Omega\alpha} (1-\xi)}{\cosh \sqrt{i\Omega\alpha} (1-\xi) - \cosh \sqrt{i\Omega\alpha}} \right\} \frac{e^{i\Omega\tau}}{\cosh \sqrt{i\Omega\alpha}} \quad (3.1.42)$$

$$\frac{\left(f \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial \tau}\right)} = \frac{i\alpha}{\Omega\alpha} \left\{ \frac{\cosh(1-\xi) \sqrt{i\Omega\alpha}}{\cosh \sqrt{i\Omega\alpha}} \right\} e^{i\Omega\tau} \quad (3.1.43)$$

上述两式的振幅分别表示于图3.7和图3.8中。与有河流作用的情况相同, 两个非线性项直接与振幅 α 成比例。然而, 它们对频率的变化是相当灵敏的。在较低频时($\Omega=0.1$ 到 $\Omega=1$), 非线性项仍然比较大, 而在较高频时, 则显著地减少了。

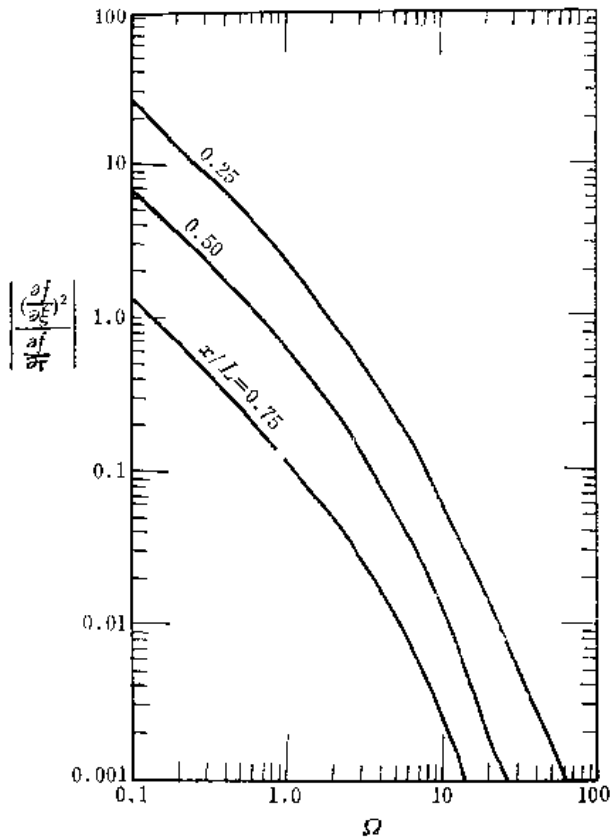


图 3.7 在有补给的情况下, $\alpha=1$ 时第一个非线性项的振幅比

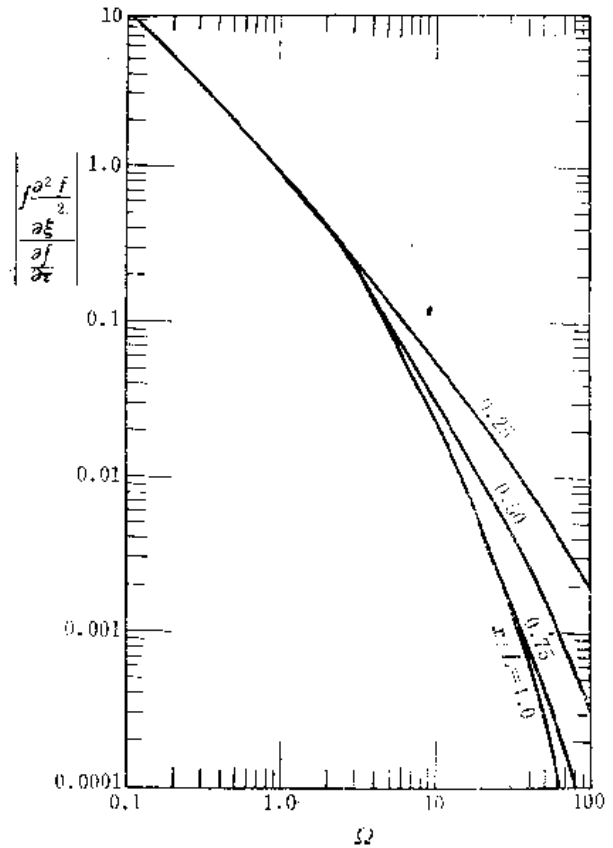


图 3.8 在有补给的情况下, $\alpha=1$ 时第二个非线性项的振幅比

总之, 对有补给的情况来说, 在频率较低的范围非线性效应显著。相反, 对有河流作用的情况来说, 效应小到可以忽略不计。而且, 非线性效应直接与补给的振幅和河流水位变化的振幅成比例关系。

具有空间分布的输入的线性理论

地面植被、地形和潜水面(示意图见图2.2)以上非饱和带内多孔介质特性的不规则随机分布, 构成了另一种复杂的变换系统。因此, 在实际情况中难以把到达潜水面的补给

看成在空间上是均匀的。

把以前讨论过的简单线性模型，在补给输入上补充空间分布参数，成为：

$$\rho(\xi, \tau) = \alpha' e^{i(\Omega\tau - k\xi)} \quad (3.1.44)$$

式中， α' ——空间变化的振幅；

k ——以弧度表示的无量纲波数；

Ω ——无量纲频率。

此方程表示在水平方向上从 $\xi=0$ 到 $\xi=1$ 的滑动谐波 (moving harmonic wave)，方程中并有频率 Ω 和波数 k 。取 $\eta_0=0$ ，以式 3.1.7 为边界条件，求解线性方程 3.1.6，得

$$\begin{aligned} \eta(\xi, \tau) = & -\frac{\alpha'}{k^2 + i\Omega} \left[\frac{\cosh\sqrt{i\Omega}(1-\xi)}{\cosh\sqrt{i\Omega}} e^{ik\xi} \right. \\ & \left. - 1 - \frac{ik}{\sqrt{i\Omega}} \frac{\sinh\sqrt{i\Omega}\xi}{\cosh\sqrt{i\Omega}} e^{-ik(1-\xi)} \right] e^{i(\Omega\tau - k\xi)} \end{aligned} \quad (3.1.45)$$

可以看出， $k=0$ 时，上面的解可简化成没有空间变化的形式 (式 3.1.13)。然而，目前的解对本研究的应用来说有一些限制，包括：

(a) 输入谐波只在一个方向运动；

(b) 没有波数 k 的详细规定；

(c) 没有随时间波动的空间变化的振幅与空间上均匀的时间变化振幅之间的对比。

为了克服上述困难，把输入波变为驻波：

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{2} (\alpha' e^{i\Omega\tau - k\xi} + \alpha e^{i\Omega\tau + k\xi}) \\ &= \alpha' e^{i\Omega\tau} \cos k\xi \end{aligned} \quad (3.1.46)$$

因此，其解可由式 2.6.2 叠加得出：

$$\eta(\xi, \tau) = -\frac{\alpha'}{k^2 + i\Omega} \left(F - \cos k\xi - \frac{k \sinh\sqrt{i\Omega}\xi}{\sqrt{i\Omega} \cosh\sqrt{i\Omega}} \sin k \right) e^{i\Omega\tau} \quad (3.1.47)$$

式中， $F = \frac{\cosh\sqrt{i\Omega}(1-\xi)}{\cosh\sqrt{i\Omega}}$

为了使补给的平均值在所有情况中都保持为常量，波数 k 必须满足条件 $k=2\pi N$ ，式中的 N 为整数。因此方程式 2.6.4 成为

$$\eta(\xi, \tau) = -\frac{\alpha}{k^2 + i\Omega} (F - \cos k\xi) e^{i\Omega\tau} \quad (3.1.48)$$

可以假定补给输入是由下列分量组成的：

$$\rho = \alpha_0 + \alpha e^{i\Omega\tau} + \alpha' e^{i\Omega\tau} \cos k\xi$$

稳定的 空间上均匀 空间上有变化
的时间变化 的时间变化

式中， α_0 ——补给的平均值；

α ——时间变化的振幅；

α' ——空间变化的振幅。

因此，输出的非稳定部分由下式给出：

$$\eta(\xi, \tau) = \alpha \left[\frac{i}{\Omega} (F-1) - \frac{\alpha'}{\alpha} \left(\frac{1}{k^2 + i\Omega} \right) (F - \cos k\xi) \right] e^{i\Omega\tau} \quad (3.1.49)$$

把输出与空间上均匀的输入加以比较，可以计算此系统的转换函数。这由下式给出：

$$G = \frac{\eta}{\alpha e^{i\Omega\tau}} \quad (3.1.50)$$

转换函数振幅的平方如下：

$$\begin{aligned} |G|^2 = GG^* = & \frac{(F-1)(F^*-1)}{\Omega^2} - \frac{\alpha'}{\alpha} \left\{ \frac{i(F-1)(F^* - \cos k\xi)}{\Omega(k^2 - i\Omega)} \right. \\ & \left. + \frac{i(F^*-1)(F - \cos k\xi)}{\Omega(k^2 + i\Omega)} \right\} + \left(\frac{\alpha'}{\alpha} \right) \frac{(F - \cos k\xi)(F^* - \cos k\xi)}{k^2 + \Omega^2} \end{aligned} \quad (3.1.51)$$

式中， G^* 和 F^* 分别为 G 和 F 的复共轭。

在此系统中必须识别两个主要参数，它们是波数 k 和比值 α'/α 。后者是补给的空间变化分量对空间上均匀的分量之间的振幅比。波数用来度量补给的空间变化强度，即波数 k 越高，变化程度就越大。然而整个含水层补给的总量在任何时候都等同于空间上均匀输入的总补给量。另一方面， α'/α 用来度量空间的补给变化总量。可以认为它是对空间上均匀的时间变化的偏离。波数在概念上与频率相类似，一个系统的最大波数 k_c 可以依据频率域的抽样定理确定为

$$k_c = 2\pi \left(\frac{1}{2\Delta\xi} \right) = \frac{\pi}{\Delta\xi} \quad (3.1.52)$$

式中， $\Delta\xi$ 为补给有明显变化的最小空间区间。在以后叙述的数值模型中或实际情况中， $\Delta\xi$ 可以被确定或估算。因此，最大波数可以与系统的物理性质联系起来。最小的可能出现的最大波数为 2π 。

可以看到，式3.1.51的右边第一项是没有空间变化的解，而其他项则乘以比值 α'/α 。例如，图3.9上表示 $k=2\pi$ ， $x/L=0.5$ ， α'/α 取不同数值时的空间变化情况，它表明在所有频率内，当 α'/α 增加时转换函数的振幅都减小。

波数对引起差异没有显著作用。对低的波数（ 2π 或 4π ）来说，在有空间变化和没有空间变化这两种情况之间，只有微小的差别。而对较高的波数来说，则实际上没有差异。如图3.10中所示的例子， $\alpha'/\alpha=0.707$ ， $k=10\pi$ ，画出的曲线实质上与图3.1(b)中没有空间变化的情形一致。波数愈高，则表示这个系统的空间变化愈大。

具有空间变化补给的非线性裘布依方程可用前面给出的方法计算。根据3.1.49式来看，非线性项 $(\partial f/\partial \xi)^2$ 和 $f(\partial f/\partial \xi)$ 除了 α 以外还取决于 α'/α 。这意味着比值 α'/α 是另一个非线性参数。当这个参数增大时，可以预计非线性效应将会增加。

总之，在有空间变化补给情况下的转换函数与没有空间变化时相差甚微。这种使偏离增加的基本参数是比值 α'/α ，波数 k 对于这种对比无关紧要。而且，对于小的 α'/α 和高的 k 来说，这类系统的非线性效应小到可以忽略不计。因此，补给没有空间变化的简单线性系统可以用来表示各种各样的情况。

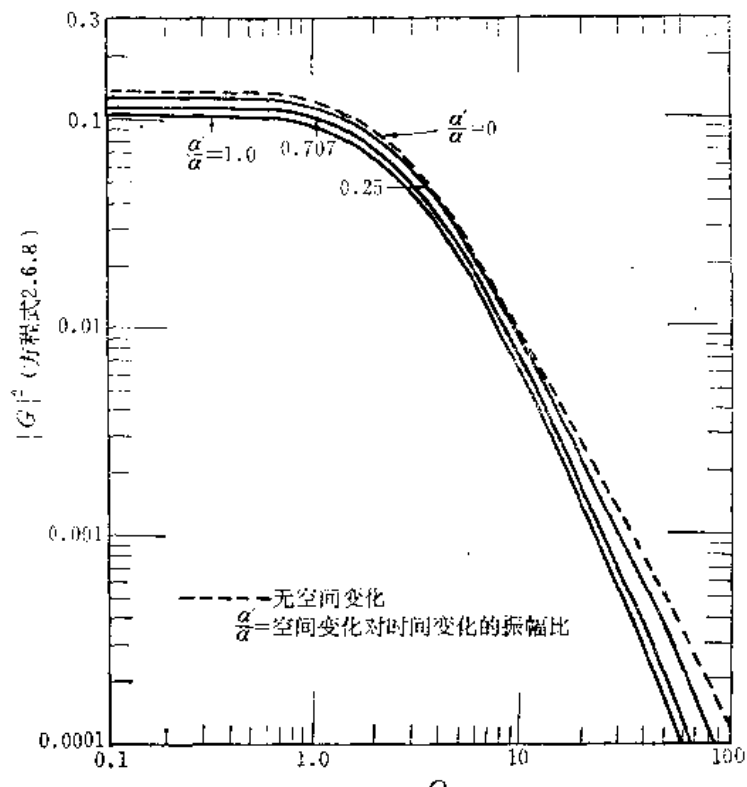


图 3.9 具有空间变化的补给输入系统, 当 $x/L=0.5$ 时, 其转换函数的振幅平方

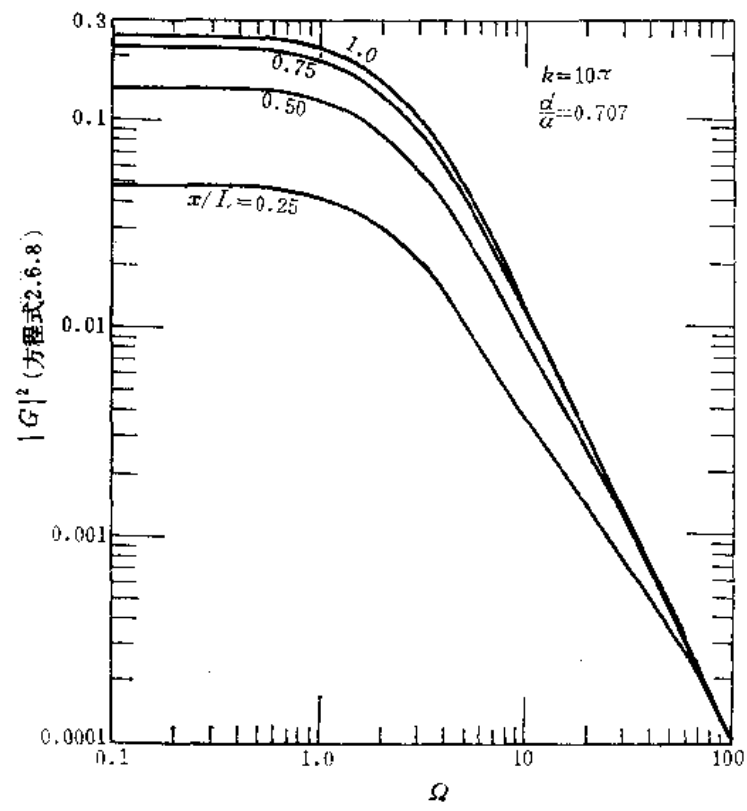


图 3.10 $k=10\pi, \alpha'/\alpha=0.707$ 的具有空间变化的补给输入系统, 其转换函数的振幅平方

3.2 数值模型：频谱响应的确定性模拟

引言

本节的目的在于用数值模型讨论裘布依方程的非线性问题。这类模型的优点是：在下节描述的随机模拟中易于运用，能够探索某些在线性解析研究中不能完成的复杂任务。但是另一方面，解数值问题费用昂贵，而且在模型的精度和效率方面要作谨慎的分析。在本研究中对确定性的线性和非线性模拟的许多情况都作了探讨；前者仅供程序的检验和作精度试验之用，后者则为随机模拟的非线性计算提供了基础。

有限差分近似

用连带差分方程 (associated difference equation) 的逐步解可以获得解裘布依方程的数值近似式。在本研究中，使用的是皮塞曼 (Peaceman) 和拉什福德 1955年提出的、在普里克特和朗奎斯特编写的基本计算程序 (1971) 中修订的交替方向隐式法。

按照普里克特和朗奎斯特的著作，裘布依方程的二维表示式为：

$$S \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \varepsilon(x, y, t) \quad (3.2.1)$$

对这一方程的有限差分近似式可以从两个方面获得，即：从物理观点，可遵照质量守恒原理和达西定律求得；从数学观点，用有限差分近似式代替方程 3.2.1 中的导数。本研究将对物理观点加以叙述。这种方法利用图 3.11 所示的有限差分网格，把含水层细分为具有面积 $\Delta x \Delta y$ 的一些体积，并分别用 Δx 和 Δy 近似表示微分 ∂x 和 ∂y 。网格交叉形成结点，这是含水层上一些位置不相连的点。流量 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 和 Q_6 分别如图 3.11 所示。 Q_1, Q_2, Q_3 和 Q_4 表示水从结点到结点的流量。

应用达西定律，

$$\begin{aligned} Q_1 &= T_{i-1,j,2} (h_{i-1,j} - h_{i,j}) \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ Q_2 &= T_{i,j,2} (h_{i,j} - h_{i+1,j}) \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ Q_3 &= T_{i,j,1} (h_{i,j+1} - h_{i,j}) \frac{\Delta x}{\Delta y} \\ Q_4 &= T_{i,j-1,1} (h_{i,j} - h_{i,j-1}) \frac{\Delta x}{\Delta y} \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

式中， $T_{i,j,1}$ —— 在结点 i, j 和 $i, j+1$ 之间的导水系数；

$T_{i,j,2}$ —— 在结点 i, j 和 $i+1, j$

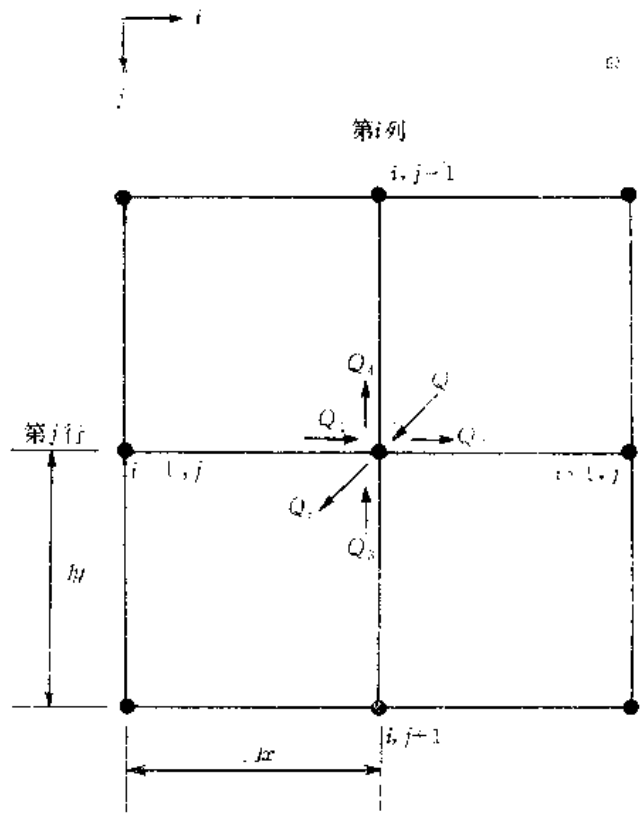


图 3.11 有限差分网格

之间的导水系数；

$h_{i,j}$ ——在时间增量终结时，从任意参考平面算起的计算水头。

Q_5 是在单位时间增量 Δt 内，与总水量一起进入含水层贮存或从中放释出去的流量。

$$Q_5 = \frac{S\Delta x\Delta y(h_{i,j} - h\phi_{i,j})}{\Delta t} \quad (3.2.3)$$

式中， S ——贮水系数；

$h\phi_{i,j}$ ——在前面的时间增量终结时，结点 i, j 上的计算水头。

Q_6 是结点 i, j 处的补给量。

$$Q_6 = \epsilon_{i,j}\Delta x\Delta y \quad (3.2.4)$$

式中， $\epsilon_{i,j}$ ——补给强度。

利用全部流量的连续性方程，得

$$Q_1 + Q_3 + Q_6 = Q_2 + Q_4 + Q_5 \quad (3.2.5)$$

将 3.2.2, 3.2.3 和 3.2.4 式代入 3.2.5 式，重新排列各项，就得到微分方程的有限差分形式。

$$\begin{aligned} & \frac{T_{i-1,j,2}(h_{i-1,j} - h_{i,j})}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j,2}(h_{i+1,j} - h_{i,j})}{\Delta x^2} \\ & + \frac{T_{i,j,1}(h_{i,j+1} - h_{i,j})}{\Delta y^2} + \frac{T_{i,j-1,1}(h_{i,j-1} - h_{i,j})}{\Delta y^2} \\ & + \epsilon_{i,j} = \frac{S(h_{i,j} - h\phi_{i,j})}{\Delta t} \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

用交替方向隐式的迭代解法解这种差分方程，它可使一个大的联立方程组简化为给定时间增量的若干个小的方程组。关于较详细的说明，见皮塞曼和拉什福德（1955）对这种解法的理论推导，以及普里克特和朗奎斯特（1977）的改进。应用这种方法的优点在于方程解的快速收敛和不管时间增量有多大都能无条件稳定。

在本研究中始终采用了普里克特和朗奎斯特所编的含水层模拟程序，并作了一些修改。这些修改包括以下项目：

(a) 一维情况——在数值模型中，我们所研究的方程式为一维形式而不是二维形式。这种变动在于采用沿 y 轴方向保持最小结点数。在这一程序中， y 轴的最小结点数是两个。

(b) 沿含水层（ x 轴）的结点数——结点的选择取决于结点的精度和需要的成本之间的综合平衡。在一个类似的问题中，雷姆森（Remson, 1971）在有限差分模型中采用 21 个结点。事实上，在这一程序中已经试验过选择 31 个结点，但并未有效地增加精度（0.1%），而计算机成本却显著增加（超过 20%）。因此，选取 21 个结点被认为是合适的。给予 21 个结点，则有 20 个分段，即 $\Delta x = 1/20$ 。为了简化起见，可使另一增量 Δy 等于这个水平增量。

(c) 边界条件——根据系统的物理模式，可见有四条实际边界，即河流和含水层之间的边界，在上面的潜水面，底板处的隔水边界和含水层终端的垂向隔水边界。在差分方程模型中，河流的升降变化 $H(t)$ 表示为：

$$h(i, j) = H(t) \quad i=1, j=1 \text{ 或 } 2$$

另外，必须确保没有因含水层中的水流而使边界结点处的水位发生变化。这种条件可以通

过沿边界给出大的存储因子值，在计算程序中处理之。存储因子的定义为贮水系数和含水层单位面积的乘积。在数值研究中，始终假定存储因子值为 10^8 。补给条件中包含着潜水面边界条件，而补给条件易于用时间和空间的相关值表示。模型中表示含水层水平轴终端无水流的条件是：

$$h_{n-1,j} = h_{n+1,j} \quad j=1 \text{ 或 } 2$$

(d) 潜水面条件——这是有关非线性裘布依模型的条件，在模型中导水系数取决于含水层厚度，即 $T = Kh$ 。对于线性化的裘布依模型来说，可把全部导水系数固定为常数。有两种主要方法可近似求出水头 h ，这两种方法是几何平均数法和算术平均数法。选取第二种方法的理由很简单，就是在随机边界条件下，潜水面不同，而我们并不确切知道潜水面的形状。算术平均数法按两个结点之间水头的算术平均值，确定两个结点之间的导水系数，即

$$T_{i,j,2} = \text{PERM}_{i,j,2} \left(\frac{h_{i,j} + h_{i+1,j}}{2} \right)$$

$$T_{i,j,1} = \text{PERM}_{i,j,1} \left(\frac{h_{i,j} + h_{i,j+1}}{2} \right)$$

式中， $\text{PERM}_{i,j,2}$ ——结点 (i, j) 和 $(i+1, j)$ 之间含水层的渗透系数；

$\text{PERM}_{i,j,1}$ ——结点 (i, j) 和 $(i, j+1)$ 之间含水层的渗透系数。

模型评价

本研究中的重要问题之一是数值模型的精度。由于系统和边界条件的复杂性不能进行直接的数学误差分析。其结果的直接检验是以具有确定性正弦曲线型输入、且已有解析解的线性化数值模型为根据的。

微分方程的数值模型受到两种主要误差的影响：截断误差和数值误差（舍入误差）。截断误差取决于所选择的网格间距的大小 $(\Delta x \text{ 和 } \Delta y)$ 。在这种数值格式中，差分方程的求解取决于中心差分近似式，式中的导水系数是按加权分配给逐次的结点的，即：

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial h}{\partial x} \right) \approx \frac{T_{i-1,j,2} h_{i-1,j} - T_{i-1,j,2} h_{i,j} - T_{i,j,2} h_{i,j} + T_{i,j,2} h_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} \quad (3.2.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial h}{\partial y} \right) \approx \frac{T_{i,j-1,1} h_{i,j-1} - T_{i,j-1,1} h_{i,j} - T_{i,j,1} h_{i,j} + T_{i,j,1} h_{i,j+1}}{(\Delta y)^2} \quad (3.2.8)$$

因此，象这样一种格式的截断误差在 $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ 的数量级内。在模型中若选取 21 个结点，则这种误差在 0.005 的数量级内。

舍入误差是由于精确地解差分方程和用计算机计算数值模型之间的差别引起的。稳定的条件是在方程式解的全部范围内这种误差趋向于零。这种数值模型，正如 1955 年皮塞曼和拉什福德所指出的，不论时间增量大小都有无条件稳定的优点。

模型的总误差由截断误差和舍入误差构成。截断误差是由于所选的有限差分方程的形式产生的，而且通常为总误差的较大部分。然而，像这样一种输送到系统里来的输入是外因变量的特定模型，需要把总误差作为输入参数的一个函数来进行更加直接的评价。这些参数是振幅、平均数和频率。使用这些参数的代表值，有可能计算线性模拟研究的误差。在讨论这些结果以前，了解这种数值模型的效率是重要的。这是一个选择适当的时间步长

Δt 的问题，解决好这一问题便可快速求解。通常 Δt 越小，使数值解达到预先确定的误差标准 (E) 的迭代次数也越少 (见 Prickett 和 Lonquist, 1971)。这个误差标准控制着整个模型在迭代过程中水头变化的总量，并保证计算水头收敛在规定的允许范围内。而这是取决于时间步长的。

正弦曲线型输入的频率直接与时间步长有关。对于一个给定的时间步长来说，频率越高，由于数值模型的时间步长是离散的，于是得到的信息越少。为了保持这种信息就必须按比例减少时间步长。为了提高模型的效率，要求按计算机模型的运转成本保持为最小这样的原则来选择时间步长。在对模型作一些初始运转的估算时， Δt 可以近似地选择为：

$$\Delta t \approx \frac{0.1}{\Omega} \quad \text{当 } \Omega > 1 \text{ 时} \quad (3.2.9)$$

若 $\Omega < 1$ ， Δt 都选为 0.1。误差标准 E 今后可按模型中给定的 Δt 进行估算。由图 3.1(a) 和 3.2(a) 可见振幅响应 $\Omega \leq 1$ 的数量级趋近于 1。从式 3.2.9 可知， Δt 趋近于 0.1。为了使误差标准 E 为 1% 数量级， E 和 Δt 的关系可按下式估算：

$$E \approx \frac{1}{10} \Delta t$$

或

$$\approx \frac{1}{100\Omega} \quad (3.2.10)$$

当 Ω 增加时这种误差标准减少，但是相应地，响应函数的振幅也以同样速度或较小的速度减小。因此，在 Ω 为 0.1 到 100 的范围内，我们有 1% 的误差标准。

在模拟研究中，为了解题常常取一定时间以达到拟稳定形态。对于正弦曲线型的输入来说，发现取四周或五周可达到这种状态。图 3.12 中表示了一个典型例子，这是在输入频率等于 20，位于 $x/L = 0.5$ 处，振幅为 1，有河流作用的情况下的模拟结果。把具有某些典

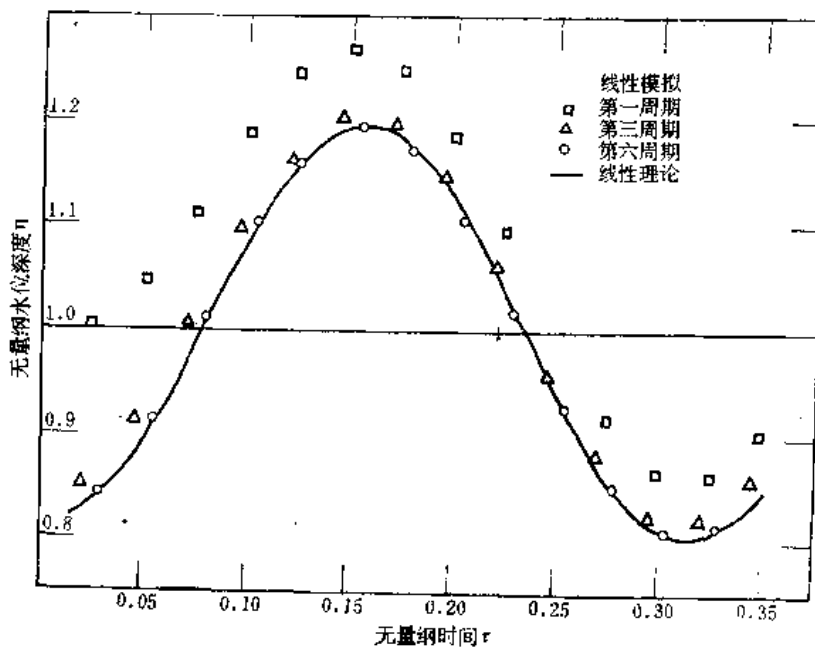


图 3.12 河流水位输入 $\eta_0 = 1 + \beta \sin \Omega_s \tau$, $\beta = 0.5$, $\Omega_s = 20$ 时，线性模拟与线性理论之间的比较

型的频率、振幅和平均数的输入的线性模拟，与解析解进行比较。另一些线性模拟表明其结果并不取决于振幅和频率。图3.13(a)和(b)分别表示一种模拟结果。结果说明距河流的距离与误差呈函数关系，距河愈远，误差稍有增加。在所有的模拟结果中，误差都少于1%。另一方面，如图3.14所示，补给的平均值使误差稍有增加。然而，这些结果表示所

52

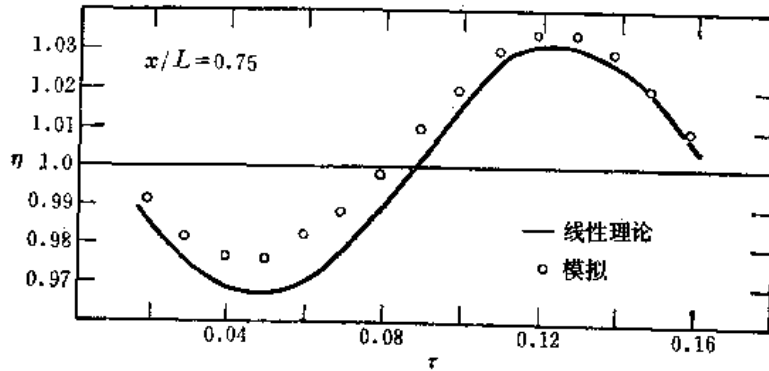


图 3.13(a) 河流水位输入 $\eta_0 = 1 + \beta \sin Q_\beta \tau$, $\beta = 0.5$, $Q_\beta = 40$ 时, 线性模拟与线性理论之间的比较

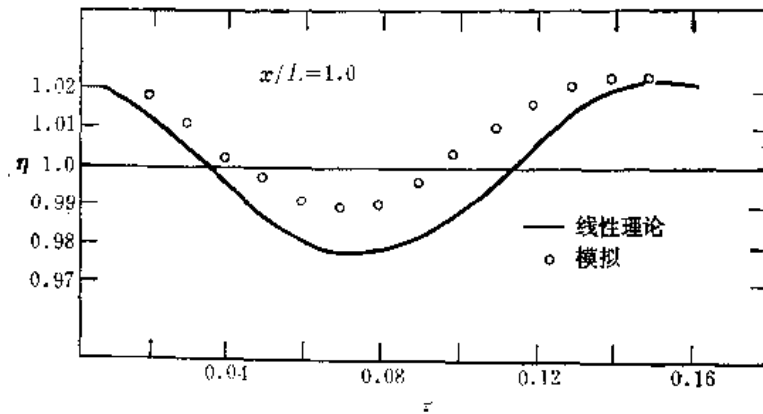


图 3.13(b) 河流水位输入 $\eta_0 = 1 + \beta \sin Q_\beta \tau$, $\beta = 0.5$, $Q_\beta = 40$ 时, 线性模拟与线性理论之间的比较

54

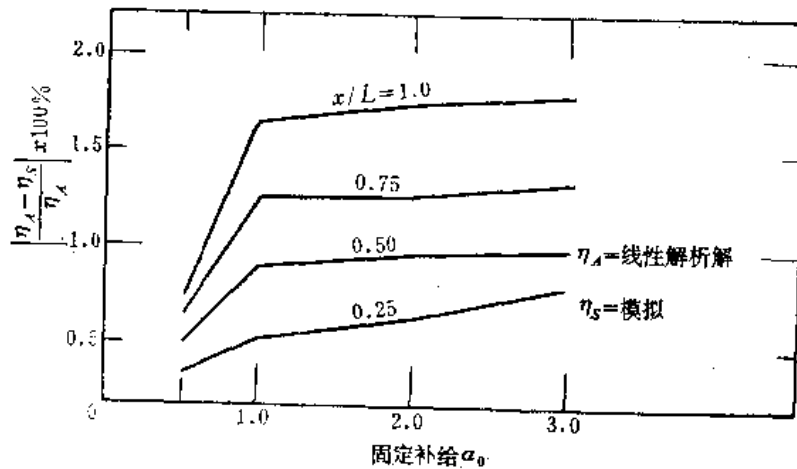


图 3.14 稳定态恒定补给状况下，线性模拟的数值误差

有的误差均小于 2%，这就足以满足此研究的目的了。总之，会稍微增加数值模型误差的唯一参数是距河流的空间水平距离。在 α_0 从零到 3 的范围内，只有非常小的误差，按研究目的来说可以忽略不计。附录 A 中列有计算机的程序表。

确定性输入的非线性模拟

本节的目的是讨论非线性模拟的结果及其对线性理论的偏离。非线性数值模型除了网格上每个结点处的导水系数按条件给定不同的数值外，完全和以前讨论的线性模型一样。两种模型的条件都取无量纲形式（这意味着无量纲水头大约为 1 的数量级）。假设非线性模型的数值误差和线性模型的数值误差相似是合理的。因为这种误差非常小，我们更可以假定非线性模拟的结果和线性理论之间的差别主要是由于非线性效应或偏差造成的，而不是由数值误差造成的。对于有固定补给的稳态情况来说，线性和非线性两种情况都有解析解，非线性模拟的数值误差看来较小，而且趋势与线性模拟的数值误差相似（见图 3.15，与图 3.14 相比）*。这些结果更加证实了我们的假设。另一方面，在图 3.16 中表示了有固定补给的稳态状况下的明显的非线性效应。必须注意的是，当补给的平均数 α_0 大于 1 时，

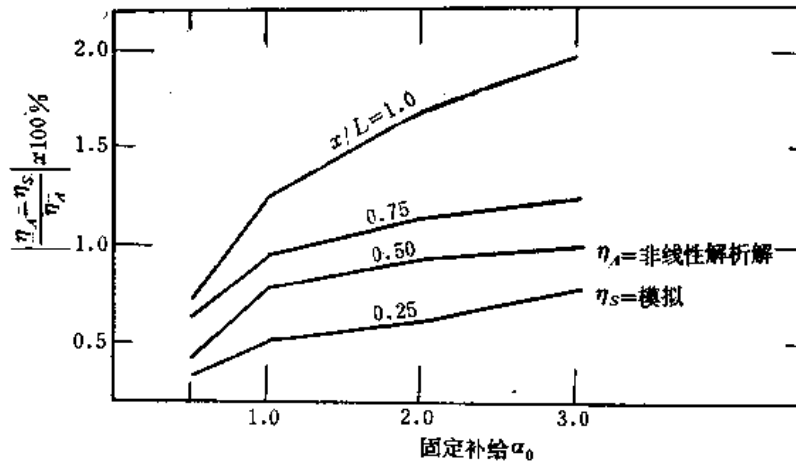


图 3.15 稳态恒定补给状况下，非线性模拟的数值误差

这种偏差会明显增加。在系统中这是主要的非线性参数之一。

对于解不稳定态的非线性模拟（包括具有补给和具有河流作用两种情况），我们采用具有代表性的振幅和频率的简单正弦曲线型输入进行试验。试验的目的有两个方面：（1）了解非线性系统的一般性能；（2）验证 3.1 节中提出的关于评价非线性项的简单理论。在表 3.1 和图 3.17—3.25 中，表示了对两种确定性输入进行试验的各种情况：

有补给时：

$$\theta(\tau) = \alpha_0 + \alpha \sin Q_\alpha \tau \quad (3.2.11)$$

有河流作用时：

$$\eta_0(\tau) = \beta_0 + \beta \sin Q_\beta \tau \quad (3.2.12)$$

这些都是用无量纲形式表示的。对有河流作用的情况，平均数 β_0 设为 1。因此，就全部情况而言， β 的极大值也等于 1。

* 原文有误，原书 148 页第 3 行的“(See 2.1 and 3.15)”未译，根据上下文的意义改按“and”译出；第 5 行的括号中添加“Figure 3.15,”后译出。——编者

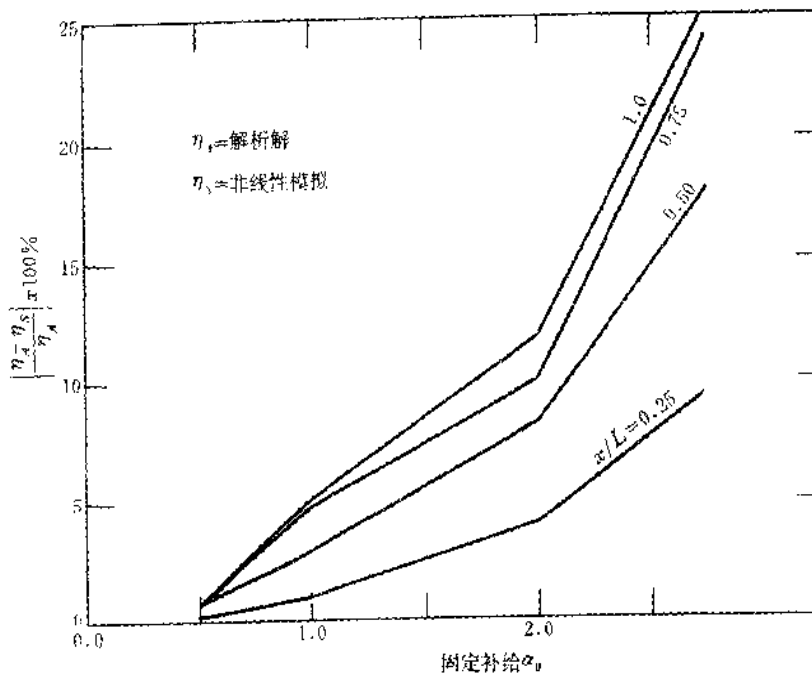


图 3.16 在稳态恒定补给状况下，非线性模拟和线性理论比较

表 3.1 $x/L=0.5$ 时，具有确定性正弦曲线型输入的非线性模拟

图 号	有河流作用或有补给的状况	α_0	α	β	Q_0 或 Q_A
3.17	有河流作用	0	0	0.5	0.5
3.18	有河流作用	0	0	0.5	10, 20, 50
3.19	有河流作用	0	0	0.2	10, 20, 50
3.20	有补给	1	1	0	0.5
3.21	有补给	2	1	0	0.5
3.22	有补给	0	1	0	10, 50
3.23	有补给	1	1	0	10, 20, 50
3.24	有补给	1	2	0	10, 20, 50
3.25	有补给	2	1	0	10, 50

从图 3.17—3.25 中可以看到，非线性解与线性解的图形类似，都为正弦曲线型。因此，可以得出结论，响应的频率非常接近输入的频率。而且，在非线性解与线性解之间，几乎没有可以观察到的相位滞后。唯一的主要差别是平均数的上移与下移。这些结果都说明 3.1 节中对非线性项评价的假设是合理的。这些结果更加证实了下述几点：

(a) 在有补给的情况下，低频范围内的非线性偏差显著，但是在有河流作用的情况下，非线性偏差很小，可忽略不计，见图 3.20，3.21 和 3.17。

(b) 在有补给和有河流作用两种情况下，高频时的非线性偏差接近相同。在前一种情况下，非线性的成果大于线性理论，而在后一种情况下，则小于线性理论，见图 3.18 和 3.23。

(c) 在有河流作用的情况下，波动的振幅增加时，非线性偏差较大。在图 3.18 和图

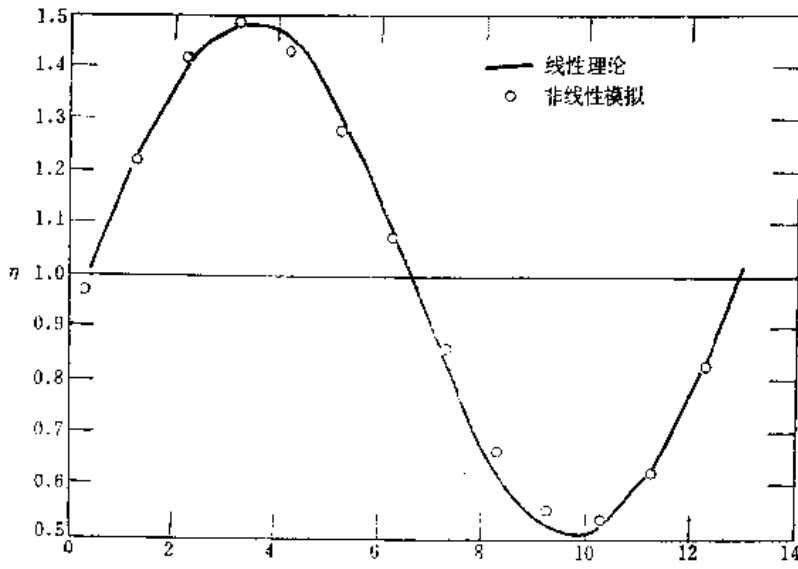


图 3.17 $x/L=0.50$, 河流水位输入 $\eta_0 = 1 + \beta \sin \Omega_\beta \tau$, $\beta = 0.5$, $\Omega_\beta = 0.50$ 时, 非线性模拟与线性理论比较

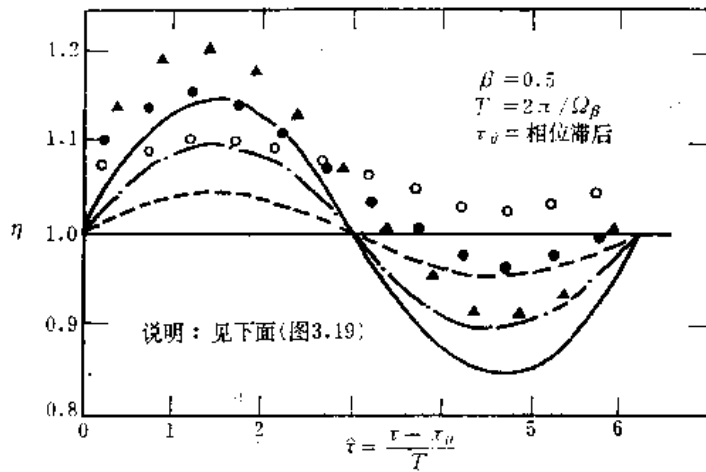


图 3.18 河流水位输入 $\eta_0 = 1 + \beta \sin \Omega_\beta \tau$ 在 $x/L = 0.50$ 处的非线性模拟

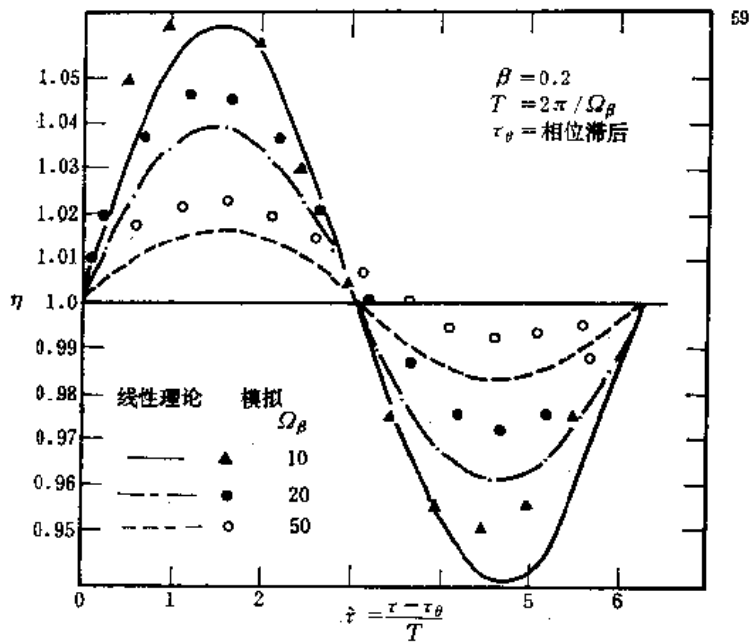


图 3.19 河流水位输入 $\eta_0 = 1 + \beta \sin \Omega_\beta \tau$ 在 $x/L = 0.50$ 时的非线性模拟

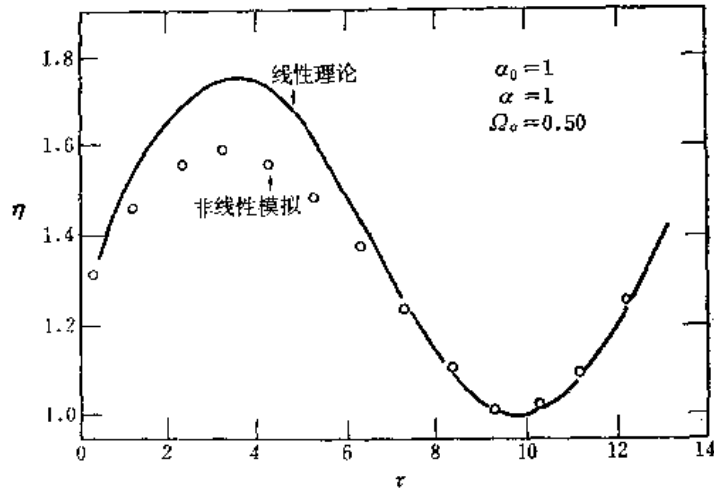


图 3.20 $x/L = 0.50$, 补给输入 $\rho = \alpha_0 + \alpha \sin \Omega_a \tau$ 时非线性模拟与线性理论比较

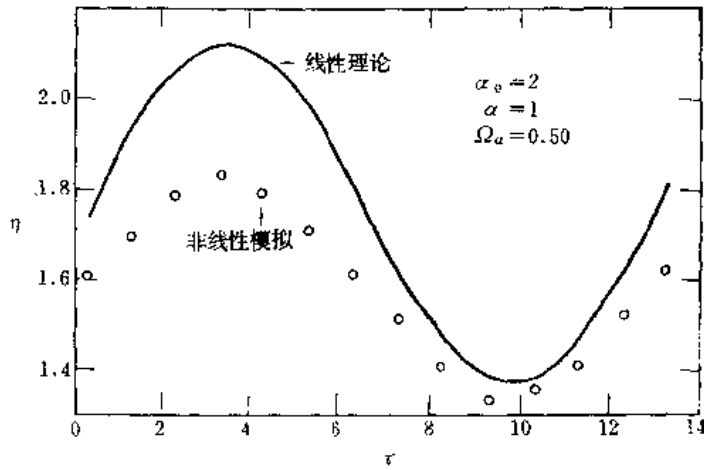


图 3.21 $x/L = 0.50$, 具有补给输入 $\rho = \alpha_0 + \alpha \sin \Omega_a \tau$ 时非线性模拟与线性理论比较

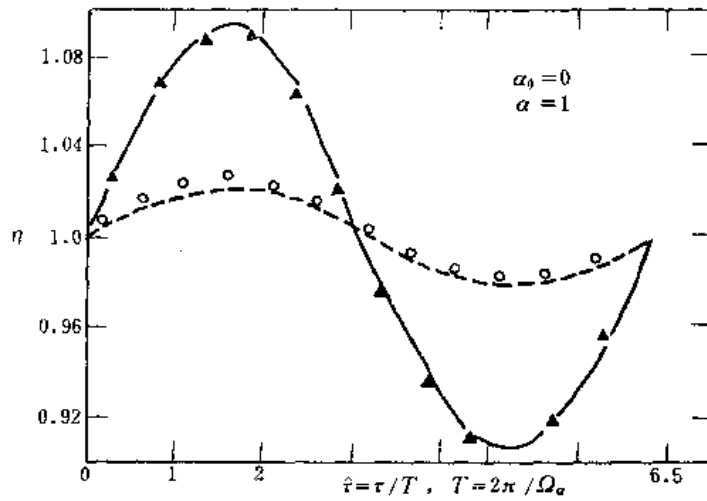


图 3.22 具有补给输入 $\rho = \alpha_0 + \alpha \sin \Omega_a \tau$ 时, 非线性模拟与线性理论比较

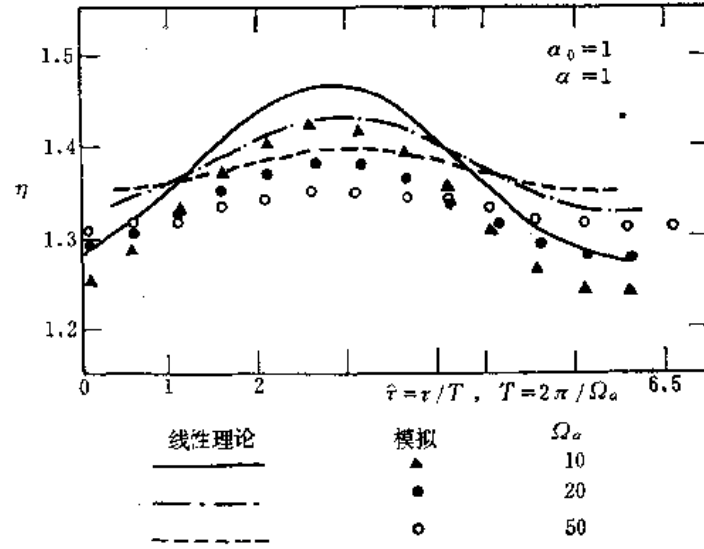


图 3.23 $x/L = 0.50$, 具有输入补给 $\rho = \alpha_0 + \alpha \sin \Omega_a \tau$ 时, 非线性模拟与线性理论比较

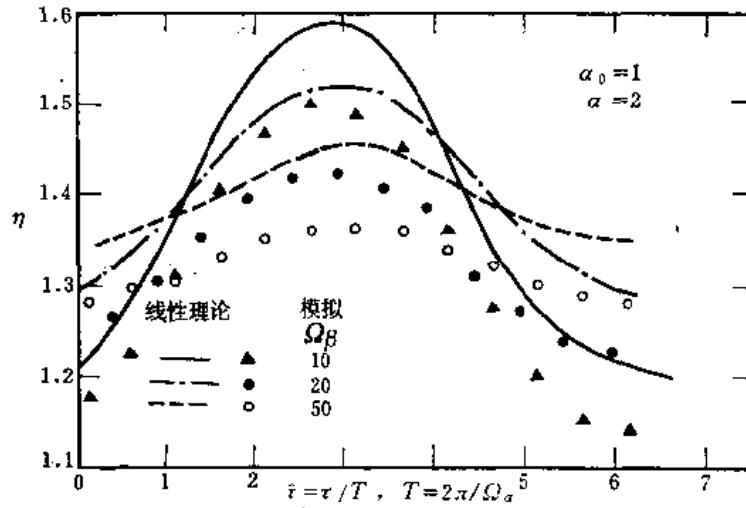


图 3.24 $x/L = 0.50$, 具有输入补给 $\rho = \alpha_0 + \alpha \sin \Omega_a \tau$ 时, 非线性模拟与线性理论比较

65

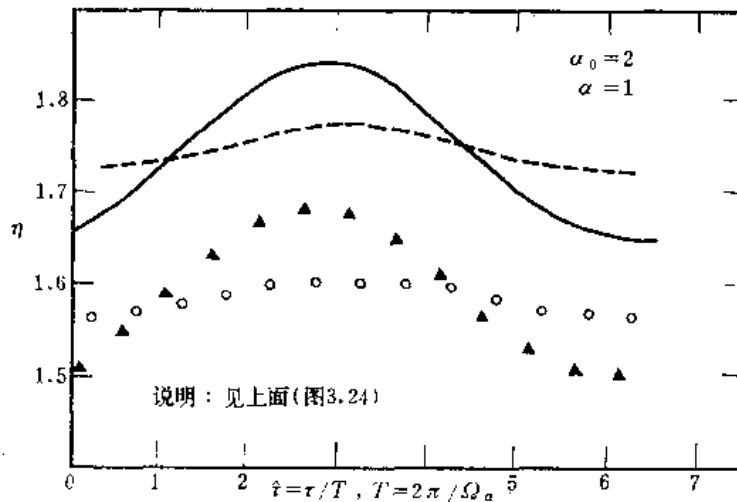


图 3.25 $x/L = 0.50$, 具有补给输入 $\rho = \alpha_0 + \alpha \sin \Omega_a \tau$ 时, 非线性模拟与线性理论比较

3.19中可以看到, $\beta=0.2$ 时, 偏差的百分比约为1%, 而在 $\beta=0.5$ 时, 偏差的百分比多达5%。

(d) 在有补给的情况下, 波动的振幅增加时, 非线性偏差较大。在图3.23和3.24中, 可以看到当振幅 $\alpha=1$ 时, 偏差的百分比少于5%, 但是当 $\alpha=2$ 时, 偏差的百分比高达10%。

(e) 当补给的平均值 α_0 增加时, 非线性偏差明显。在图3.23和3.25中, 可以看到偏差从 $\alpha_0=1$ 时的5%, 增加到 $\alpha_0=2$ 时的17%。比较图3.23到3.25, 可以看到平均值增加时的非线性偏差比振幅增大时的非线性偏差更为明显。

总之, 研究具有正弦型输入的非线性模拟, 发现了一些非线性参数, 这对以后的随机模拟分析来说是很重要的。这些参数包括补给的平均值和振幅, 以及河流水位升降的振幅。其中, 看来以补给的平均值所起的作用最明显。

3.3 频谱响应的非线性模拟

引言

本节的主要目的是研究潜水含水层随机系统非线性模拟的频谱特征, 着重论述转换函数而不是系统的相位谱, 因为以前已经发现在线性和非线性系统之间, 相位滞后很小(见3.1节和3.2节)。利用模拟确定的转换函数, 在给定一组输入统计参数下, 可以对非线性裘布依模型进行更直接的评价。这种模拟方法也有利于我们去研究更复杂的模型, 例如补给强度或渗透系数具有空间变化等。另外, 模拟需要数值模型某些特性的详细说明, 这些都与系统的物理参数有关, 从而有助于人们评价非线性效应。

频谱响应模拟的特征

非线性模拟的基本特点是数值模型中无量纲时间间隔 $\Delta\tau$ 的确定问题。在本研究中 $\Delta\tau$ 占有重要地位, 因为它反映了频谱分析的物理和统计两个方面的关系。线性和非线性两种裘布依方程式的无量纲参数都表示如下:

$$\text{无量纲时间 } \tau = \frac{T}{SL^2}t$$

$$\text{无量纲补给 } \rho = \frac{L^2}{Tm} \varepsilon(t)$$

$$\text{无量纲河流水位 } \eta_0 = \frac{H(t)}{m}$$

式中, m 为具有一定特征的含水层厚度。在线性化的模型中, T 为常数, 而在非线性模型中, $T=Kh$ 。

模拟需要确定时间步长间隔 $\Delta\tau$ 。只要它为已知时, 也就蕴涵有潜水含水层的物理参数 S 和 T , 从而可获得输出结果。这种时间步长间隔由下式给出:

$$\Delta\tau = \frac{T}{SL^2} \Delta t \quad (3.3.1)$$

式中, Δt 为用日、周、月或年表示的实际时间步长间隔。

首先, 确定 $\Delta\tau$ 看来需要对系统有明确的物理特性说明。也就是说, 我们必须逐个了解 S , T , m 和 L 等物理参数。然而, $\Delta\tau$ 也能够利用频谱分析中的抽样理论按比较绝对的方法估算。抽样理论指出, 最小周期在理论上可按给定的抽样间距求解, 它和抽样间距的两倍

一样大。用抽样间距确定的最大无量纲频率 Ω_c 可由下式给出(见Bendat和Piersol,1971),

$$\Omega_c = \left(\frac{1}{2\Delta\tau}\right) 2\pi = \frac{\pi}{\Delta\tau} \quad (3.3.2)$$

确定无量纲最大频率,要求了解系统的物理特性。前面已经讲过(见3.2节),无量纲频率 Ω 与含水层物理性质的关系为:

$$\Omega = \left(\frac{SL^2}{T}\right)\omega$$

当 $\Omega=100$ 时,它表示一个具有响应频率近似于3周期/月的典型含水层系统,其频率略高于水文过程的天然频率。在本研究中,选取的最大无量纲频率 Ω_c 为100弧度/无量纲时间 $=100/2\pi$ 周期。利用式3.3.2

$$\Delta\tau = \frac{\pi}{100} \cong 0.031416$$

在非线形系统中,无量纲时间步长 $\Delta\tau_N$ 选取相同的数值。因此,我们有

$$\Delta\tau_N = \Delta\tau$$

而且两种情况的频率也一样。换句话说,非线性系统和线性系统具有同样的无量纲频率标度。选定这样的 $\Delta\tau$,在两种系统中的无量纲补给也一样。只要确定时间步长间隔,则计算机模型的其它参数也就可以确定了。例如,误差标准 E 由 $\Delta\tau/10$ 给出。

在每个时间步长上,把输入引进到模型中去的做法与在确定性模拟中的做法一样。模拟时由于平稳随机时间序列输入而引起的数值误差可以视为时间序列的平均数和方差的函数。从非线性确定性模拟可以看出,当无量纲补给的平均数 α_0 增加时,这种误差微有增加。这意味着时间序列的平均数在随机模拟中会有同样的作用。为了表示频谱分析中这种数值误差的重要性,我们考虑用下述粗略的估算:

$$\text{令:} \quad \eta' = (1+a)\eta$$

式中, η' ——数值输出;

η ——理论输出;

a ——数值误差。

η' 的频谱函数为

$$S_{\eta'\eta'} = (1+a)^2 S_{\eta\eta}$$

因为输入的补给频谱用 S_{pp} 给出,则

$$\frac{S_{\eta'\eta'}}{S_{pp}} = (1+a)^2 \frac{S_{\eta\eta}}{S_{pp}}$$

依据确定性模拟,在稳定补给的情况下, $\alpha_0=3$ 时的数值误差约为2%。因此,数值和理论的转换函数的关系如下:

$$\frac{S_{\eta'\eta'}}{S_{pp}} \cong 1.04 \frac{S_{\eta\eta}}{S_{pp}}$$

就本研究的目的来说,4%的数值误差是足够小的。

用BMD02T程序(生物医药计算机程序——自协方差和功率谱分析)(见Dixon,1973)分析模拟程序的输出和输入时间序列,后者是根据野外的历史资料或编制的合成数据(generated synthetic data)获得的。由此而产生的主要误差是频谱估计的误差。附录B内有置信界限的评价。估计的方差由下式给出:

$$\text{Var}[\hat{S}_{xx}(\omega)] \sim \frac{MS_{xx}^2(\omega)}{T} \quad (3.3.3)$$

式中, $S_{xx}(\omega)$ —— X 的理论谱;

$\hat{S}_{xx}(\omega)$ —— X 的估算谱;

M —— 谱分析选定的滞后数;

T —— 总的记录长度。

所以, 在一般情况下, 一个较大的滞后数可得出一个较好的解。但是, 减小了估计的置信度。 M 的合理选择是近似于总记录长度 T 的 $1/10$ 或更小的数。在本研究中, 用 30 天间隔的历史资料, 其总记录长度是 405 个单位, 而 M 选定为 36。因为系统的无量纲输入谱和输出谱属于 0.1 数量级 (无量纲含水层厚度 η 和补给 ρ 或河流水位 η_0 近似于 0.1 到 1.0 的数量级), 所以, 根据方程 3.3.3, 可以看到估算的频谱方差近似于 0.0001, 标准差约为 1%。由此, 在本研究中可以得出这样的结论: 由数值模型和由频谱估算产生的误差都是比较小的。

我们已经叙述了数值模型作为转换系统的基本特征 (即 $\Delta\tau$ 的确定), 现在再来研究输入的性质。这是一些对系统的非线性起控制作用的参数。这些“非线性”参数的选择构成模拟的转换函数和线性理论的转换函数之间进行比较的基础。通过确定性模拟对非线性效应的简单评价, 已经表明 α_0 , α 和 β 都是基本的非线性参数。在随机平稳时间序列的分析中, 相应的参数为平均数和标准差。要估计这些参数的数量级, 需要在物理系统的性质和量纲方面有一定的信息量。利用前节中无量纲补给的表达式, 可以把非线性参数、补给的平均数 α_0 和它的振幅 α 联系起来给定如下:

$$\alpha_0 = \bar{\rho} = \frac{L^2}{Km} \epsilon \quad (3.3.4)$$

$$\alpha^2 \approx \sigma_\rho^2 = \frac{L^4}{K^2 m^2} \sigma_\epsilon^2 \quad (3.3.5)$$

式中, σ_ϵ^2 表示 ρ 的理论方差。

一个典型的含水层系统, 其长度为 1 英里, 渗透系数为 10^4 加仑/日/英尺, 含水层靠近河流处的厚度为 30 英尺和月平均降水量为 3 英寸, 其补给的无量纲平均数 $\bar{\rho}$ 近似于 4。但是这个数字必须经过校正, 因为不是所有的水都能达到潜水面上的; 有些被地上的植物吸收了, 有些留在潜水面以上的非饱和带内了, 有些被蒸发了, 等等。雅各布 (1943) 提出, 补给强度与降水量成正比。这个比例常数取决于系统的地质结构, 但还没有测定它的简单方法。在本研究中, 这一常数假定在 10% 到 50% 的范围内。因此, 在模拟研究中, 典型含水层系统选择的无量纲补给的平均数为 0.5 到 2。

由式 3.3.1*, 无量纲补给 $\bar{\rho}$ 可以写为:

$$\bar{\rho} = \frac{1}{Sm} \frac{\Delta t}{\Delta \tau} \epsilon \quad (3.3.6)$$

又利用式 3.3.2**, 则有

* 原文为式 4.2.1。——编者

** 原文为式 4.2.2。——编者

$$\bar{\rho} = \frac{2\Omega_c}{S_m} \Delta t \quad (3.3.7)$$

式中, $\bar{\varepsilon} = \gamma \bar{P}$;

γ —— 进入补给的降水量的百分比;

P —— 降水量。

可见, $\bar{\rho}$ 与系统中的最大频率成比例。正如我们已经讨论过的, 频率的选取是以系统的物理参数和响应的特征频率为依据的。响应的特征频率指的是由水文过程引起的频率, 而不是噪音造成的。实际时间步长 Δt 的选择取决于我们需要从水文过程中取得的信息总量。在本研究中, 地下水系统有一个比较缓慢的响应, 另外, 我们有一个比较长的记录时间 (约36年)。因此, 我们考虑选取30天或1个月为时间间隔是适合的。

时间序列的无量纲方差与无量纲平均数之比为 $\sigma_{\rho}/\bar{\rho}$ 。依据式3.3.4和3.3.5, 这个比值等于 $\sigma_{\varepsilon}/\bar{\varepsilon}$, 它对历史资料模拟来说是固定的, 但在综合资料中是可变的。在实际情况中, 假定比值的变动范围从0.5—1.5。在有河流作用的情况下, 无量纲河流水位 η_0 由下式给出:

$$\eta_0 = H/m$$

因此

$$\bar{\eta}_0 = \bar{H}/m$$

$$\sigma_{\eta_0} = \sigma_H/m$$

$$\sigma_{\eta_0}/\bar{\eta}_0 = \sigma_H/\bar{H}$$

不论河流水位记录根据何种基准, 非线性参数似乎应该用比值 $\sigma_{\eta_0}/\bar{\eta}_0$ 来给定。于是比值 $\sigma_{\eta_0} = \sigma_H/m$ 较之 σ_H/\bar{H} (它随任意值 \bar{H} 的改变而变动) 更适合作为非线性参数。

总之, 可以看出, 上面讨论的水文过程的平均数与系统的物理量纲和性质有比较密切的关系, 而方差与系统的统计特性有较密切关系。综合两个方面的特点就构成基本的非线性参数。

历史资料的非线性模拟

此节的目的是评价具有野外历史资料输入的数值模型, 将由此而得到的转换函数与从线性频谱理论或从正弦曲线型理论获得的转换函数进行比较。

整个这一节使用的野外资料为一组河畔水文测高记录, 以及从1938年1月到1971年9月的堪萨斯州威奇塔市的降水量。这些输入资料的一览表见于附录A的计算机程序的末尾。在第四章中有其地理位置和更详细的说明。对这36年的记录选取的实际时间间隔 Δt 为30天。河流水位与降水量两种输入的时间序列假定是平稳的, 一阶矩和二阶矩的抽样统计资料在表4.1中给出。

单输入情况

在这种模拟研究中, 需要河流处的含水层厚度 m 以便完整描述无量纲河流水位。根据

表 3.2 堪萨斯资料的抽样统计

输入 \ 参数	抽样平均数 \bar{X}	抽样方差 s_x^2	抽样标准差 s_x	s_x/\bar{X}
降水量	2.557英寸	5.411平方英寸	2.33英寸	0.9112
河流水位	2.739英尺	5.426平方英尺	2.34英尺	0.8543

美国地质调查所堪萨斯州办事处的资料，那个特定地点的特征厚度估计约为25英尺。河流水位变化和补给量的规格化都使用这个估计值。

在对非线性模拟进行详细研究之前，值得注意与同一情况的线性模拟相对比。以后的理论与其说是表明数值误差，不如说是表明谱估算的精度和识别非线性效应。这表示在图3.26上。图中对有河流水位作用情况下的线性理论、线性模拟和非线性模拟进行了对比。可以看出，线性模拟的结果很接近线性理论，在高频范围内更是这样。非线性模拟的振幅则在线性理论和线性模拟之上。因为线性模拟和线性理论之间没有明显差别，我们可以直接把线性理论与非线性模拟进行比较。

在非线性模拟研究中，主要的非线性参数是 $\bar{\rho}$ ，它与扰动参数 μ 有关， μ 的非线性特征可在第二章中找到。它们的关系用下式给出：

$$\bar{\rho} = 2\mu$$

无量纲平均数可以变化，但是用于历史资料模拟的 $\sigma_0/\bar{\rho}$ 比值保持不变，而且等于表3.2中所给出的数值。表3.3列出了在不同参数范围内的一些非线性模拟的结果。

在有补给的情况下（图3.27—3.28），模拟的结果表明，频率范围内较低部分的转换函数振幅对无量纲补给的平均数 $\bar{\rho}$ （或扰动参数 μ ）的变化很敏感。

当 ρ 或 μ 增加时，在较低频范围内转换函数的振幅减小。但是， $\bar{\rho}$ 小于0.5时，非线性模拟的结果接近于理论的线性谱。还要注意，当与河流的距离增加时，非线性效应增加。频率比较高时（ $\Omega > 10$ ），不管 $\bar{\rho}$ 值如何，模拟结果都非常接近于理论的线性谱。这些结果

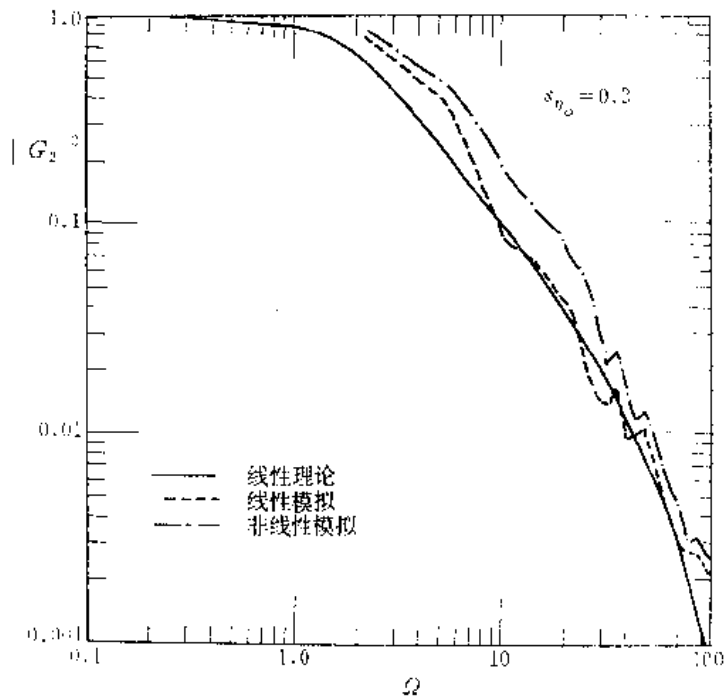


图 3.26 依据河流水位在 $x/L=0.5$ 处的响应，有关转换函数的振幅平方的线性理论、线性模拟和非线性模拟的比较

表 3.3

图 号	无量纲补给强度 $\bar{\rho}$	扰动参数 μ	样本标准差与补给 平均数之比 $\sigma_0/\bar{\rho}$	样本标准差 σ_0	有补给或向河流 作用的条件
3.27	0.4589	0.22945	0.9112	—	有补给
3.28	1.2785	0.63925	0.9112	—	有补给
3.29	2	1.0	0.9112	—	有补给
3.30	4	2.0	0.9112	—	有补给
3.31	—	—	—	0.0168	有河流作用
3.32	—	—	—	0.0936	有河流作用
3.33	—	—	—	0.1872	有河流作用

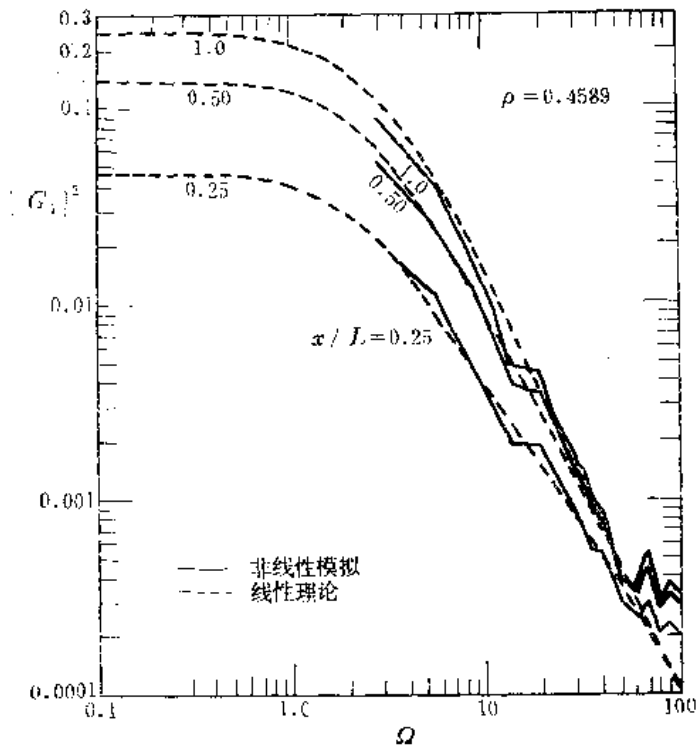


图 3.27 具有补给输入 $\bar{\rho} = 0.4589$ 的含水层系统，其非线性模拟转换函数的振幅平方

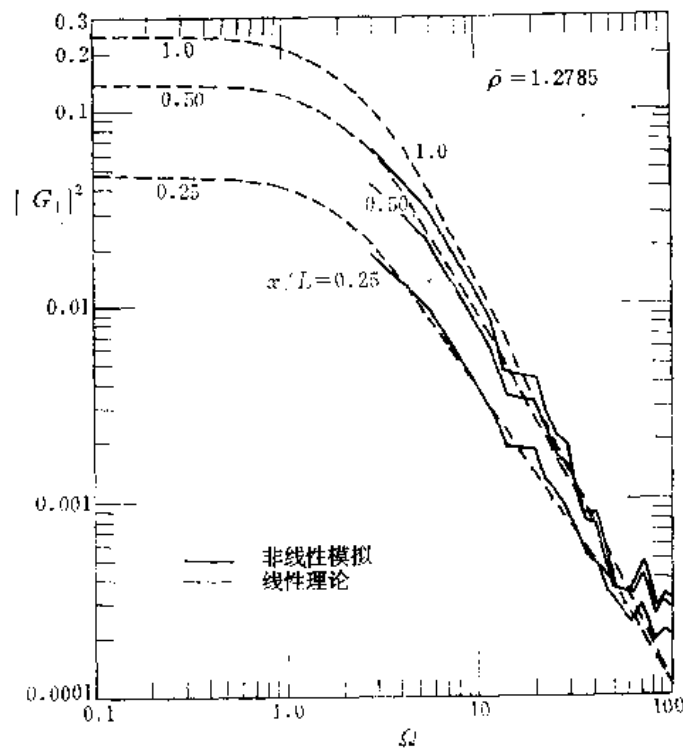


图 3.28 具有补给输入 $\bar{\rho} = 1.2785$ 的含水层系统，其非线性模拟转换函数的振幅平方

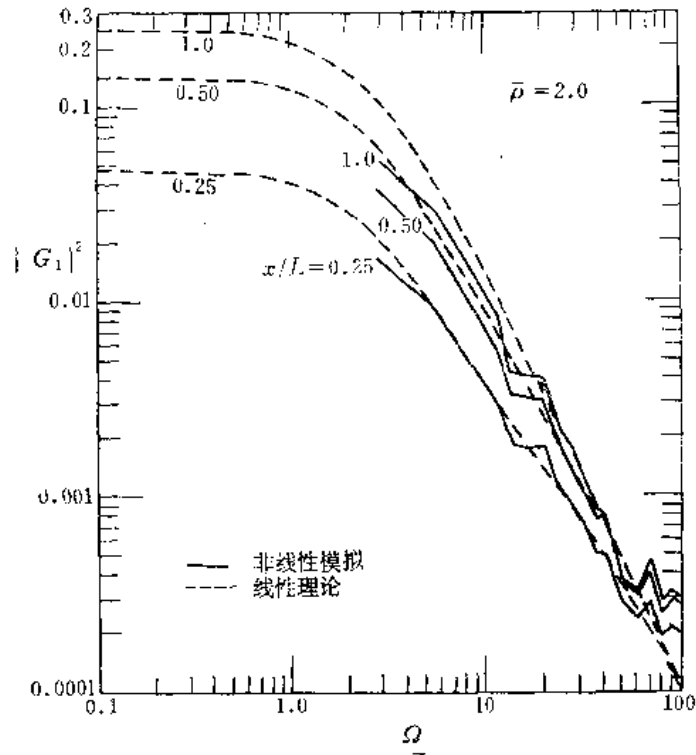


图 3.29 具有补给输入 $\bar{\rho}=2.0$ 的含水层系统，其非线性模拟
转换函数的振幅平方

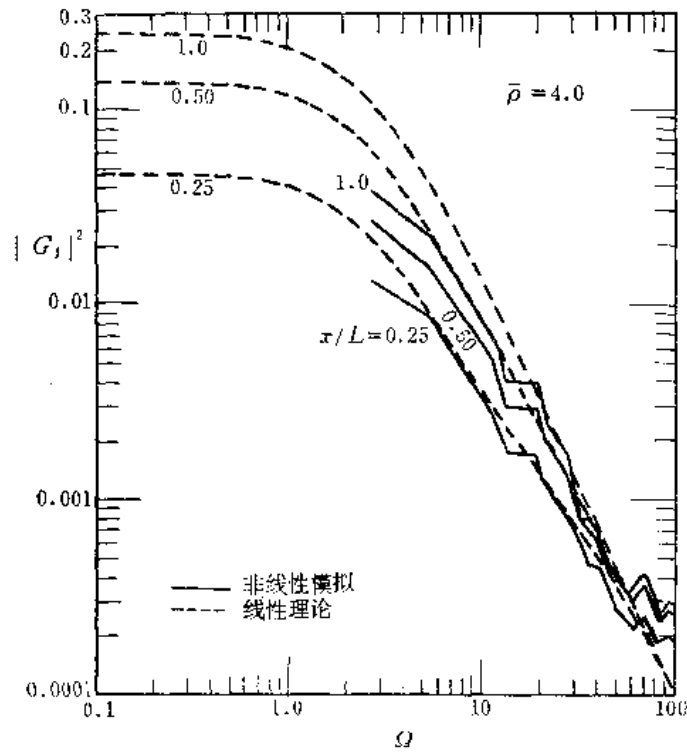


图 3.30 具有补给输入 $\bar{\rho}=4.0$ 的含水层系统，其非线性模拟
转换函数的振幅平方

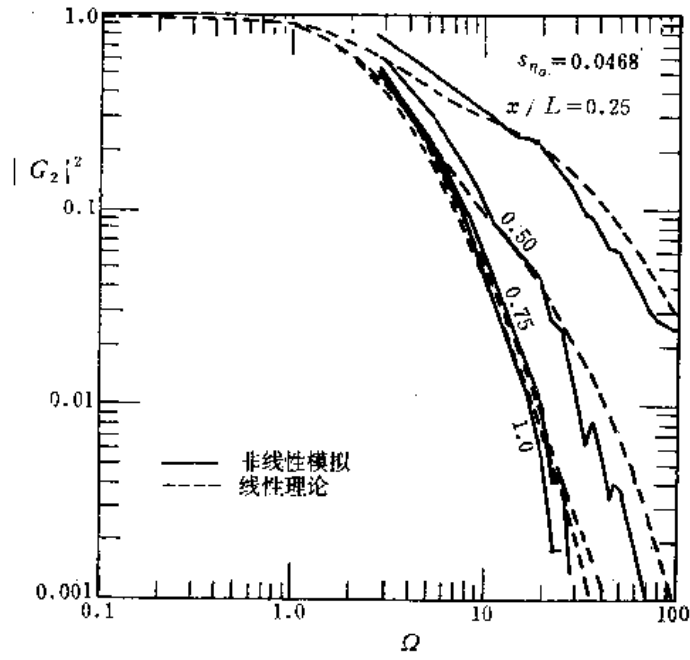


图 3.31 具有河流水位输入 ($s_{n_0} = 0.0468$) 的含水层系统, 其非线性模拟转换函数的振幅平方

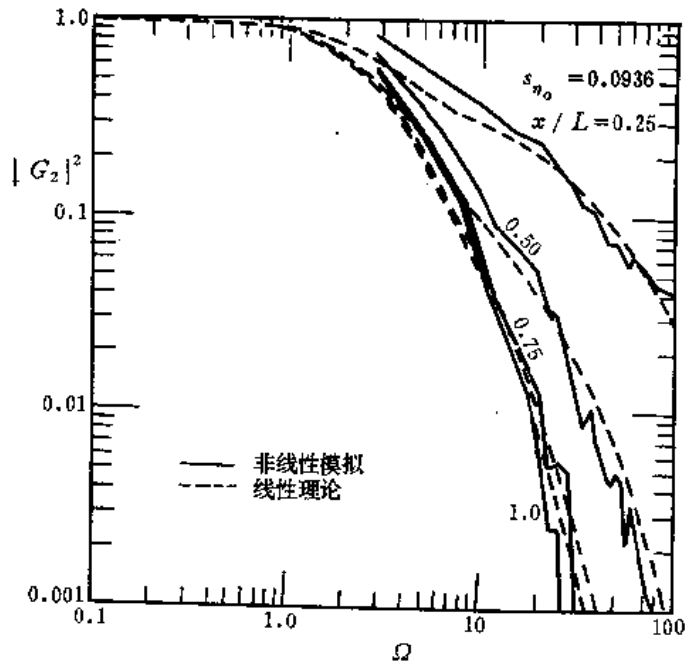


图 3.32 具有河流水位输入 ($s_{n_0} = 0.0936$) 的含水层系统, 其非线性模拟转换函数的振幅平方

中有些与确定性模拟(见3.2节*)和第二章的非线性扰动分析非常吻合。

值得注意的是在频率很高时($\Omega > 60$)，模拟与线性理论有某些偏离。这可能是由于数值模拟中和谱估计中的误差造成的。

在有河流作用的情况下，非线性参数 s_{r_0} 或 s_H/m 对非线性效应来说相当不灵敏。分别取 s_{r_0} 近似于0.05, 0.1和0.2三种情况进行了试验。第二种情况代表堪萨斯州实例的无量纲标准差。第一种情况和第三种情况代表同一数据资料成倍扩大或缩小后得出的标准差(在原数值之上和之下)。

可见,当输入变动的振幅增加时,在所有频率上谱振幅都增加。从

这些模拟的结果看来,当 s_{r_0} 或 s_H/m 大于0.2时,非线性效应更为明显。在这种情况下,它意味着或者是河流处的含水层厚度比较小,或者是河流水位升降的变化非常大。系统的统计特性 s_H 和物理特征 m 相结合,即可确定这一非线性参数的大小。在实际情况中, s_H 的变动范围与含水层的特征饱和厚度 m 相比起来比较小,比方说 s_H 约为2—5英尺,从确定非线性化的重要性来看, m 则更为重要。

在涉及河流水位变动的单输入情况下,可以比较非线性系统和线性系统的导水系数来评价非线性效应。因为系统的多孔介质是均质的,所以可假定一种场合和另一种场合相比,滞后响应时间 τ_D (见3.1节)是成反比的**。(见Eagleson, 1970, 第十四章)。于是非线性系统和线性系统的导水系数之比由下式给出:

$$\frac{T_N}{T_L} = \frac{\tau_D^L}{\tau_D^N}$$

式中, L 表示线性系统; N 表示非线性系统。 $x/L=0.5$ 处滞后响应的线性和非线性模拟表示在图3.34中,图中无量纲河流水位的样本标准差 s_{r_0} 约为0.1。结果表明线性导水系数比非线性导水系数低5%至10%。在其他地方可以看出上述比值大致相同。当 s_{r_0} 增加时,偏差可能增加。这种方法仅在有河流作用的情况下使用,因为在这种模型中假定含水层内的水流主要为水平的。在有补给的情况下,垂直补给在水平方向上只有小的相位效应。

双重输入情况

在此系统中,把河流水位和补给均作为数值模型的输入。对于线性系统来说,这种双

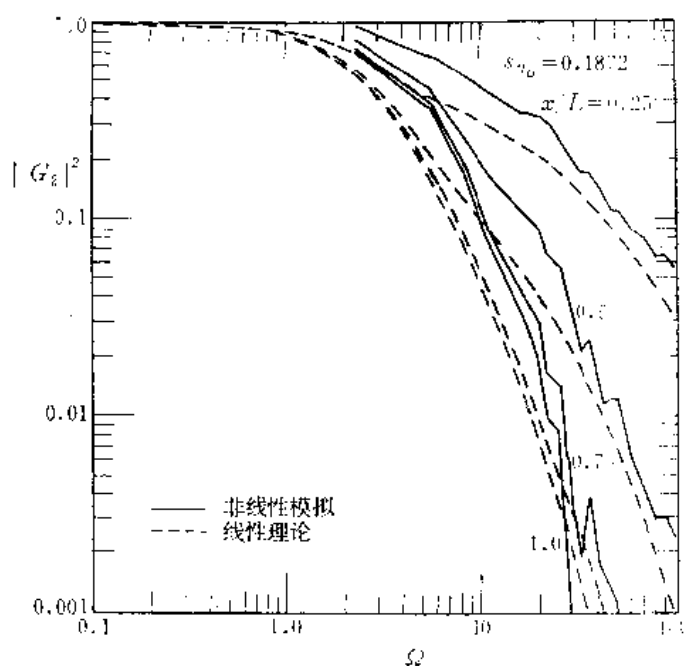


图 3.33 具有河流水位输入 ($s_{r_0} = 0.1872$) 的含水层系统, 其非线性模拟转换函数的振幅平方

* 原文为3.3节。——编者

** 这句话原文的后半部份是“the delay response time (See section 3.1) is inversely one location to the other”。

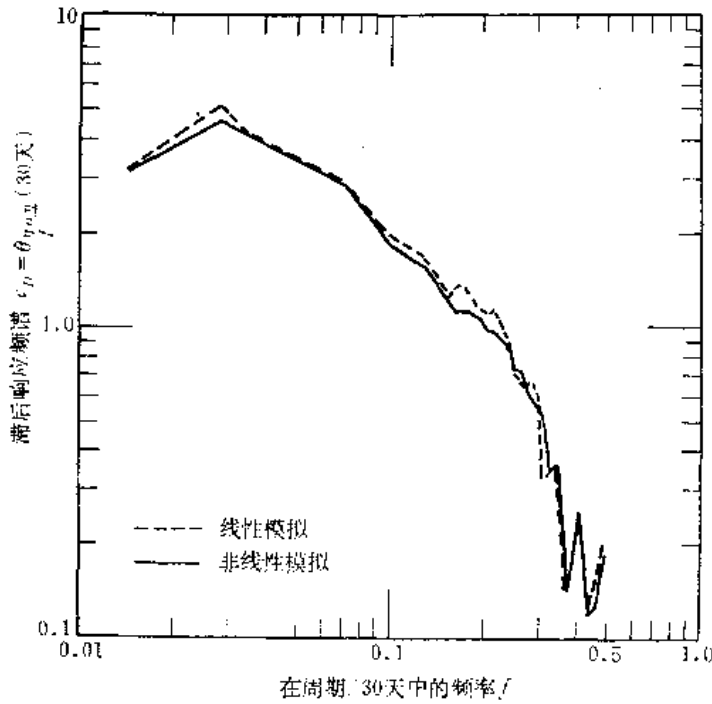


图 3.34 线性和非线性河流水位输入系统的滞后响应谱

重系统的输出可简化为两个输入系统各自产生的输出的叠加, 即

$$Y = Y_1 + Y_2 \quad (3.3.8)$$

式中, Y ——双重输出;

Y_1, Y_2 ——单输入系统的输出。

在本研究中, Y_1 表示由补给输入产生的输出, Y_2 表示由河流水位输入产生的输出。其相应的转换函数已被求出 (见 3.1 节) 为:

$$G_1 = \frac{i(F-1)}{Q} \quad (3.3.9)$$

$$G_2 = F \quad (3.3.10)$$

式中,

$$F = \frac{\cosh \sqrt{i\Omega} (1-\xi)}{\cosh \sqrt{i\Omega}}$$

假定双重系统是由两个集中参数系统组成的, 即可容易地获得双重谱输出 (dual spectral output)。所得的结果将与得自分布参数者相同。

由式 4.3.1*, 得到双重谱输出 S_{YY} 为:

$$S_{YY} = S_{Y_1 Y_1} + S_{Y_2 Y_2} + S_{Y_1 Y_2} + S_{Y_2 Y_1} \quad (3.3.11)$$

然后, 在上式中**使用下列关系式 (见 Papoulis, 1965, 第十章):

$$S_{Y_1 Y_1} = |G_1|^2 S_{X_1 X_1}$$

$$S_{Y_2 Y_2} = |G_2|^2 S_{X_2 X_2}$$

$$S_{Y_1 Y_2} = G_1 G_2^* S_{X_1 X_2}$$

$$S_{Y_2 Y_1} = G_1^* G_2 S_{X_2 X_1}$$

得到

$$S_{YY} = |G_1|^2 S_{X_1 X_1} + |G_2|^2 S_{X_2 X_2} + G_1 G_2^* S_{X_1 X_2} + G_1^* G_2 S_{X_2 X_1} \quad (3.3.12)$$

两种输入 X_1 和 X_2 的转象谱 $Q_{X_1 X_2}$ 和同相谱 $Co_{X_1 X_2}$ 与交叉谱 $S_{X_1 X_2}$ 和 $S_{X_2 X_1}$ 的关系为:

$$S_{X_1 X_2} = Co_{X_2 X_1} + iQ_{X_2 X_1}$$

$$S_{X_2 X_1} = Co_{X_2 X_1} - iQ_{X_2 X_1} \quad (3.3.13)$$

将式 3.3.11 和 3.3.13 代入式 3.3.12 中, 得到具有

$$\bar{v} = Y, \quad \bar{\rho} = X_1 \text{ 和 } \bar{\eta}_0 = X_2$$

的无量纲形式的频谱双重输出

* 原文如此, 似应为式 3.3.8。——编者

** 原文误为 4.3.4 式。——编者

$$S_{\eta\eta}(\omega, \xi) = \frac{(F-1)(F^*-1)}{\Omega^2} S_{\rho\rho}(\Omega) + FF^* S_{\tau_0\tau_0}(\Omega) - \frac{1}{\Omega} [2FF^* - (F+F^*)] Q_{\tau_0\rho}(\Omega) + \frac{i}{\Omega} (F-F^*) C_{\tau_0\rho}(\Omega) \quad (3.3.14)$$

双重输入系统的转换函数 G_1 和 G_2 可以按下面的式子求得 (参阅第四章或 Bendat 和 Piersol, 1971, 第五章):

$$G_1 = \frac{S_{x_1y} \left[1 - \frac{S_{x_1x_2} S_{x_2y}}{S_{x_2x_2} S_{x_1y}} \right]}{S_{x_1x_1} [1 - \gamma^2_{x_1x_2}]} \quad (3.3.15)$$

$$G_2 = \frac{S_{x_2y} \left[1 - \frac{S_{x_2x_1} S_{x_1y}}{S_{x_1x_1} S_{x_2y}} \right]}{S_{x_2x_2} [1 - \gamma^2_{x_1x_2}]} \quad (3.3.16)$$

式中, $\gamma^2_{x_1x_2}$ —— 输入 X_1 和 X_2 之间的相干平方函数 (coherence square function)。

但是, 叠加原理不复适用于非线性裘布依方程, 因此, 所提出的理论至今并未完全应用。将双重输入系统 $\eta_1 + \eta_2$ 用在裘布依方程

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\eta \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right) + \rho$$

中, 得

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial \tau} + \frac{\partial \eta_2}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\eta_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi} + \eta_2 \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi} + \eta_2 \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi} \right) + \rho \quad (3.3.17)$$

在单输入系统中则得

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\eta_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi} \right) + \rho$$

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\eta_2 \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi} \right)$$

把上面两式相加则有

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial \tau} + \frac{\partial \eta_2}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\eta_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi} + \eta_2 \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi} \right) + \rho \quad (3.3.18)$$

显然 $Y \neq Y_1 + Y_2$

事实上,

$$Y = Y_1 + Y_2 + f(Y_1, Y_2) \quad (3.3.19)$$

在这种双重输入系统的非线性模拟中, 我们用两种方法来评价非线性效应。第一种方法是依据线性理论以 G_1 和 G_2 为基础计算 4.3.6 式或 4.3.8 式中的频谱双重输出 $S_{\eta\eta}$, 并将其与直接从非线性模拟得到的 $S_{\eta\eta}$ 相比较。第二种方法是将由线性理论得到的转换函数 G_1 和 G_2 (式 3.3.9 和 3.3.10), 与那些根据非线性模拟得到的结果进行对比, 后者是以用叠加原理导出的式 3.3.15 和 3.3.16 为基础的。如果双重系统的转换函数接近于线性理论, 则函数 $f(Y_1, Y_2)$ 将会小得可以忽略不计。另一方面, 若 $f(Y_1, Y_2)$ 增加, 则在线性理论的转换函数和非线性转换函数之间进行比较, 更能识别系统的非线性效应。通常, 由式 3.3.19 可以看到, 当两种简单输出的振幅乘积增加时, 非线性增加。此乘积与输入的乘积成正比。因此, 双重输入系统基本的非线性参数是振幅乘积的函数和输入的平均数。

表 3.4 列举了应用所提的两种方法，进行双重系统非线性模拟的一些典型例子。

表 3.4 双重输入系统的非线性模拟参数表

图 号	对比的依据	无量纲补给平均数 $\bar{\rho}$	计算位置 x/L
3.35	$S_{\eta\eta}$ (3.3.14式)	1.0	0.25, 0.50, 1.0
3.36	$S_{\eta\eta}$ (3.3.14式)	1.0	0.50
3.37	$S_{\eta\eta}$ (3.3.14式)	2.0	0.50
3.38	$ G_1 ^2$ (3.3.15式)	0.50	0.50
3.39	$ G_1 ^2$ (3.3.15式)	2.0	0.50
3.40	$ G_1 ^2$ (3.3.15式)	1.0	0.25, 0.50, 1.0
3.41	$ G_2 ^2$ (3.3.16式)	0.50	0.50
3.42	$ G_2 ^2$ (3.3.16式)	2.0	0.50
3.43	$ G_2 ^2$ (3.3.16式)	1.0	0.25, 0.50, 1.0

在双重输入系统模拟的各种情况下，非线性参数 s_{η_0} 都是固定的。根据堪萨斯州的资料，此参数选择为0.1左右。其关系是以河流的情况为依据的。而河流情况对应于参数变化的非线性效应是比较不灵敏的。

由图3.35可以看到当空间坐标 x/L 增加时，非线性效应增加。这与稳定的和非稳定的确定性模型有同样的趋势（见3.2节）。因此，非线性的程度是空间参数 x/L 的函数。另外，与单输入系统的情况一样，无量纲补给的平均数 $\bar{\rho}$ 对双重输入系统也有显著的非线性效应。当这个参数增大时，非线性偏差也增加。这在低频范围内尤为显著，此时非线性输出谱 $s_{\eta\eta}$ 降到线性的输出谱之下。（比较图3.27和3.37）

在双重输入的集中线性系统情况下计算转换函数的第二种分析方法的成果图表示在图3.38—3.43中。这些模拟结果表明与单输入系统非常吻合，而且在 $\bar{\rho}$ 和 s_{η_0} 小时与线性理论

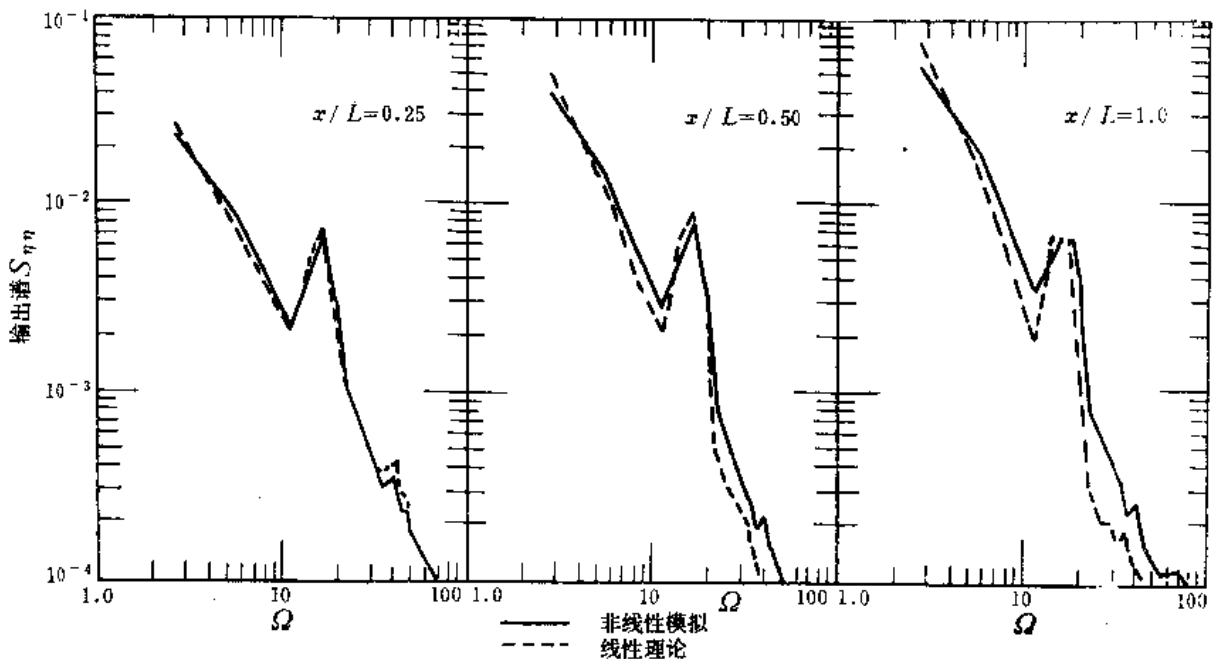


图 3.35 $\bar{\rho} = 1.0$ 的双重输入系统，在三种位置上非线性模拟的输出谱

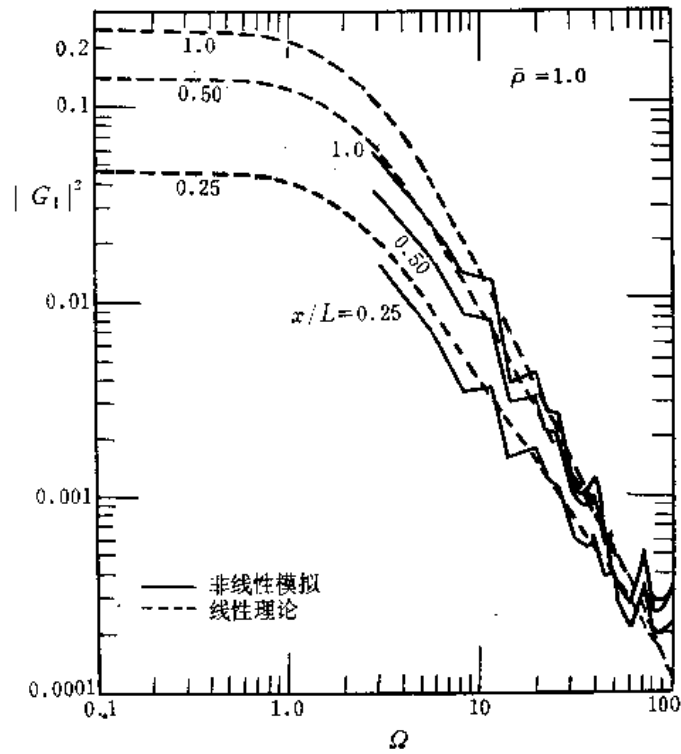


图 3.40 双重输入系统非线性模拟的转换函数的振幅平方
(按 $x/L=0.25, 0.50, 1.0, \rho=1.0$ 时的补给响应)

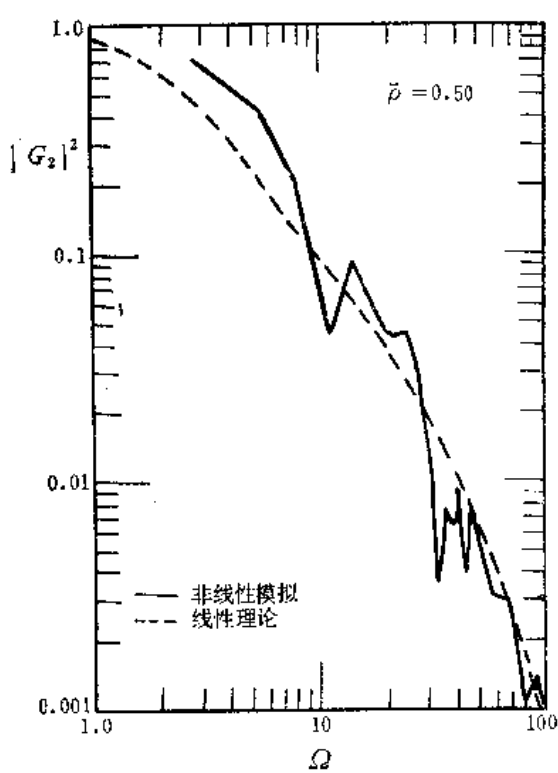


图 3.41

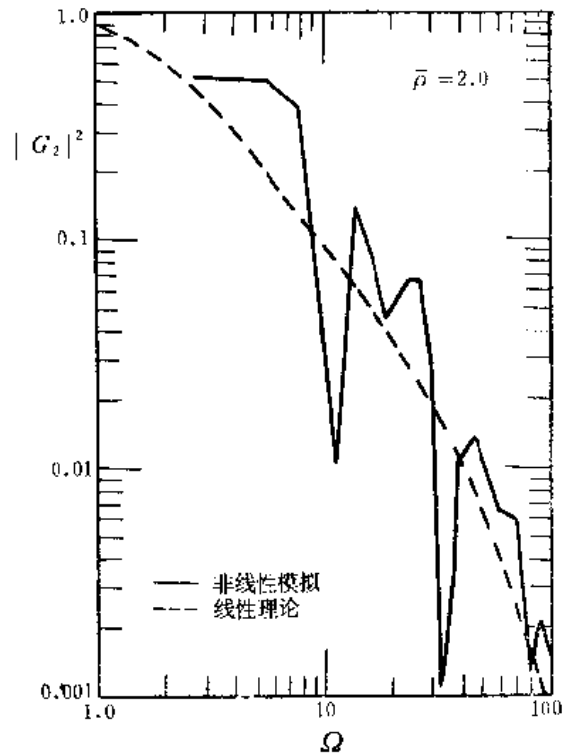


图 3.42

图 3.41—3.42 双重输入系统非线性模拟的转换函数的振幅平方
(按 $x/L=0.50, \rho=0.50$ 和 $\rho=2.0$ 时的河流水位响应)

(c) 补给的空间变化的研究。

合成数据可以使我们去探索一个更复杂的模型，即兼具时间和空间变化的补给输入。

水文过程合成数据的编制需要对问题有实际方面的了解和对可以利用的历史资料进行分析。在本研究中，把合成的时间序列看作平稳随机过程。认为这类随机时间序列 $X(\tau)$ 由两个分量组成，即确定性分量 $D(\tau)$ 和随机性分量 $S(\tau)$ ，也就是：

$$X(\tau) = D(\tau) + S(\tau) \quad (3.3.20)$$

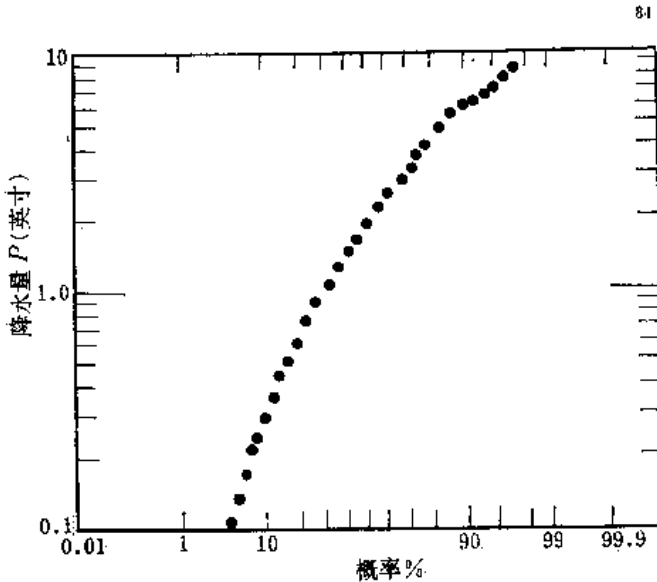


图 3.44 画在对数正态概率纸上的堪萨斯州降水资料

确定性分量说明水文过程的趋势，而随机性分量计及过程中许多未知的变量。水文过程趋势的特性之一就是系统的周期性。对于平稳过程来说， $D(\tau)$ 和 $S(\tau)$ 的平均数为常数。确定性分量可由正弦曲线型过程生成，而随机性分量则由某种随机过程生成，对于这种随机过程需要说明其分布性质的概率。换句话说，也就是必须知道分布的类型和它的平均数、方差以及自相关。

对于补给与河流水位两种输入，首先要用历史资料进行分析。这样做是为了找出分布特征和这

两种时间序列的抽样统计。在对数正态概率纸上检验输入数据(见图3.44和3.45)，可以发现降水量近似对数正态分布。降水量的平均数和方差以及河流水位已在上一节中给出。它们的自相关函数分别表示在图3.46和3.47中。在两份相关图中可以看到，特别是在降水情况下，在一个滞后单位之后，相关函数显著下降，直至趋近于零。这意味着当时间间隔大于一个滞后时间单位(30天)时，时序记录之间很少有相关性。过程具有这种性质时可以看作为独立过程。此外，降水量相关图表示出此过程有一个年周期分量。

在本研究中，因为补给输入比非线性河流水位输入更具有重要意义，所以编制了它的合成输入。合成的时间序列具有下面的形式：

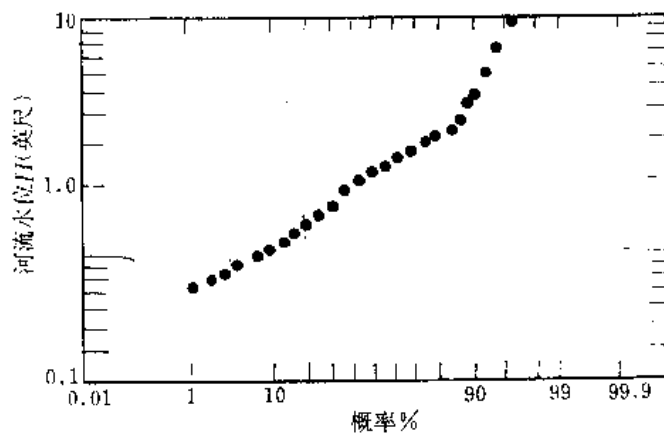


图 3.45 画在对数正态概率纸上的堪萨斯州河流水位资料

$$\rho(\tau) = A \cos Q\tau + e(\tau) \quad (3.3.21)$$

式中，类正余弦项表示确定性周期分量，而第二项则由独立的正态分布过程形成的随机

过程，其样本平均数为 \bar{e} ，样本方差为 s_e^2 。为便利起见，用正态分布简化代替对数正态分布，而且，这还可以用来对输入按不同的分布类型进行检验。

根据式3.3.21，无量纲补给的平均数和方差由下面的式子给出：

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &= \bar{e} \\ \sigma_\rho^2 &= \frac{A^2}{2} + \sigma_e^2 \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

式中假定确定性过程和随机过程是独立的。表3.5列举了具有各种方差的三种情况的非线性模拟参数。

在第一种和第三种情况下，编制的合成数据的数目为550个单位，滞后数为50，而在第二种情况下，输入时间记录的数目为1000，滞后数为100。很清楚，对于我们可以合成的数据总量并无限制，但是化费会太昂贵。图3.48—3.50表明，其结果与根据历史资料获得者相同。在历史资料中，有一个近似于1的固定的无量纲样本标准差 s_e 。比较图3.48和3.49，可以看到当输入的标准差从0.5增加到1.5时，非线性只有比较小的增加。在较低频范围内， s_e 增加时输出振幅减小，出现非线性。当标准差增加到3时则有某些显著的变化（比较图3.50和图3.29）。实际上，对补给作用来说，在一个很长的记录上的某一个特定位置，很少考虑把标准差定为3。因此可以得出结论，方差对含水层只有比较小的非线性效应。

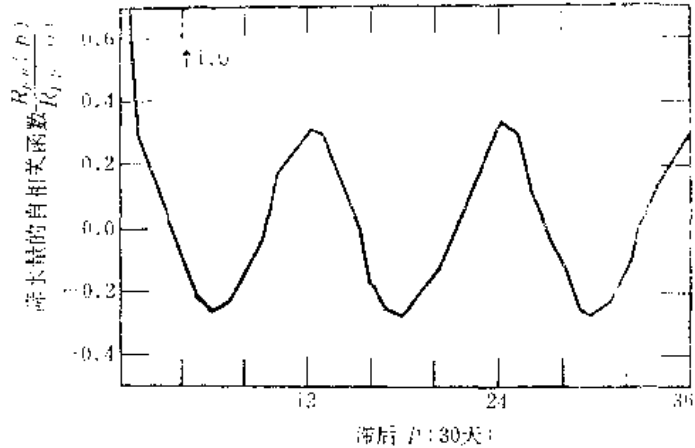


图 3.48 堪萨斯州降水资料的相关图

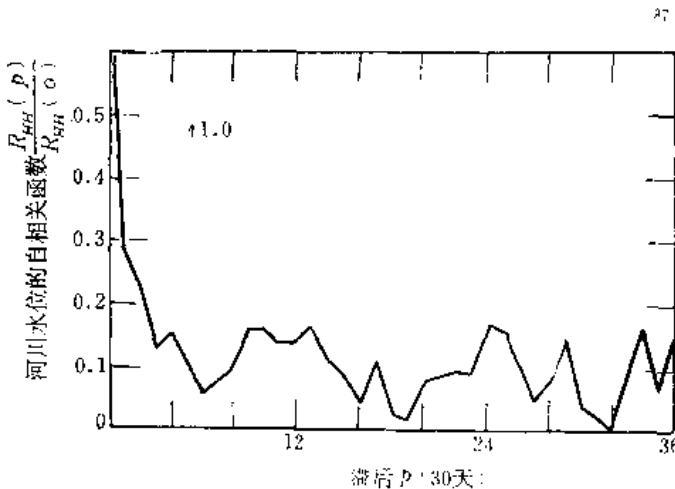


图 3.47 堪萨斯州河流水位资料的相关图

到目前为止，为了简化用现场的输入和输出时间记录进行频谱分析，已利用降水记录代表补给强度。事实上，由于水

表 3.5 使用合成数据的补给输入系统的非线性模拟参数表

图 号	随机分量的平均数 \bar{e}	随机分量的标准差 s_e	无量纲平均数 $\bar{\rho}$	确定性分量的振幅 A	无量纲频率 Ω
3.48	1	0.5	1	0.2	16
3.49	1	1.5	1	0.2	16
3.50	2	3.0	1	0.2	16

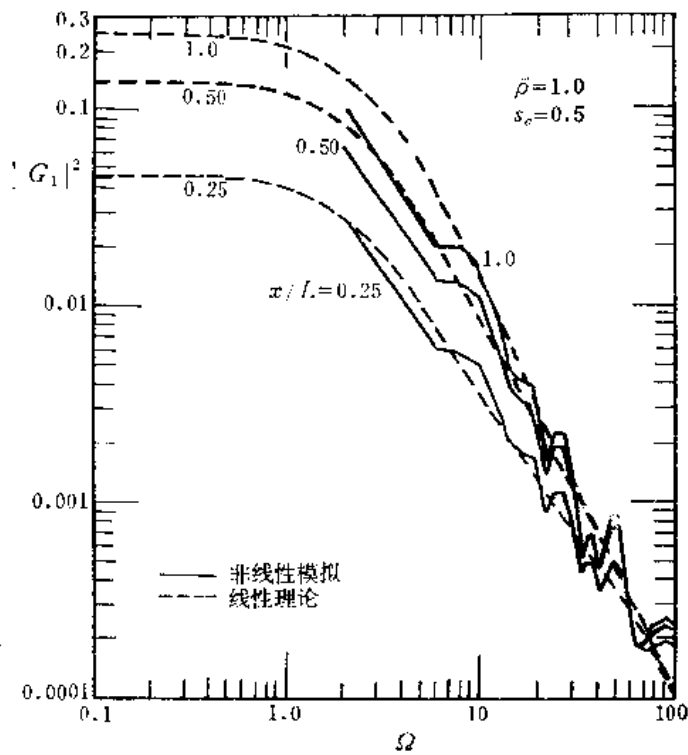


图 3.48 具有合成的补给输入 $\bar{\rho} = 1.0$ 和 $s_e = 0.5$ 的含水层系统，其非线性模拟转换函数的振幅平方

89

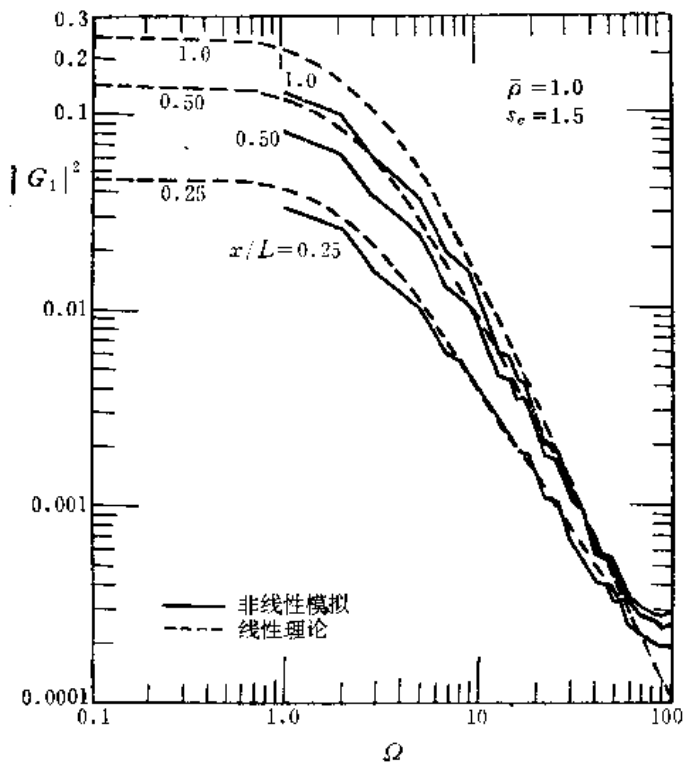


图 3.49 具有合成的补给输入 $\bar{\rho} = 1.0$ 和 $s_e = 1.5$ 的含水层系统，其非线性模拟转换函数的振幅平方

在渗入地下和穿过土壤饱和带时有着复杂的过程，所以降水与补给不但其大小不同，而且其时间和空间分布也不同。在模拟研究中，要考虑的两个主要问题是输入补给的时间和空间分布。

在图3.46中已反映出历史的降水记录具有相对来说不相关的时间结构。现在我们把一个任意的时间相关引入合成的补给时间序列，并研究这一系统的转换函数的特征。时间序列的构成方式是以前一时间步长期间的补给为依据的。依赖过去的强度由权数 w_i 选定。在数值模型中，合成的时间序列呈离散状态，为：

$$\rho(\tau_i) = A \cos \Omega \tau_i + \sum_{i=0}^n w_i e(\tau_i - i) \quad (3.3.23)$$

式中，

$$\sum_{i=0}^n w_i = 1$$

和

$$0 \leq w_i \leq 1$$

e 是前面所作的正态分布过程生成的。根据3.3.24式，可以找出时间序列的平均数与方差。

$$\sigma_\rho^2 = \frac{A^2}{2} + \sum_{i=0}^n w_i^2 \sigma_e^2 + \sum_i \sum_j, 2w_i w_j R_{ij} \quad (3.3.24)$$

式中， $i \neq j$

R_{ij} ——第 i 个和第 j 个时间步长之间 e 的自协方差；

σ_e^2 —— e 的理论方差。

因

$$\sum_{i=0}^n w_i = 1$$

有

$$\sigma_\rho^2 = \frac{A^2}{2} + \sigma_e^2 + \sum_i \sum_j 2w_i w_j (R_{ij} - \sigma_e^2)$$

可见在任意两个步长之间，如果过程有密切的相关性时，并且权数 w_i 如果也比较大，则对无量纲补给方差 σ_ρ^2 所起的作用必定也是大的。研究两种情况，并在表3.6中加以列出。

可以看到输入时间序列的相关性结构比之没有相关的结构具有稍微大一点的非线性效应（比较图3.51与3.48）。在低频范围内发生非线性效应，致使转换函数的振幅较低。对于这种情况的一种解释是：相关的时间序列的总方差（3.3.24式中的方差与自协方差之和）

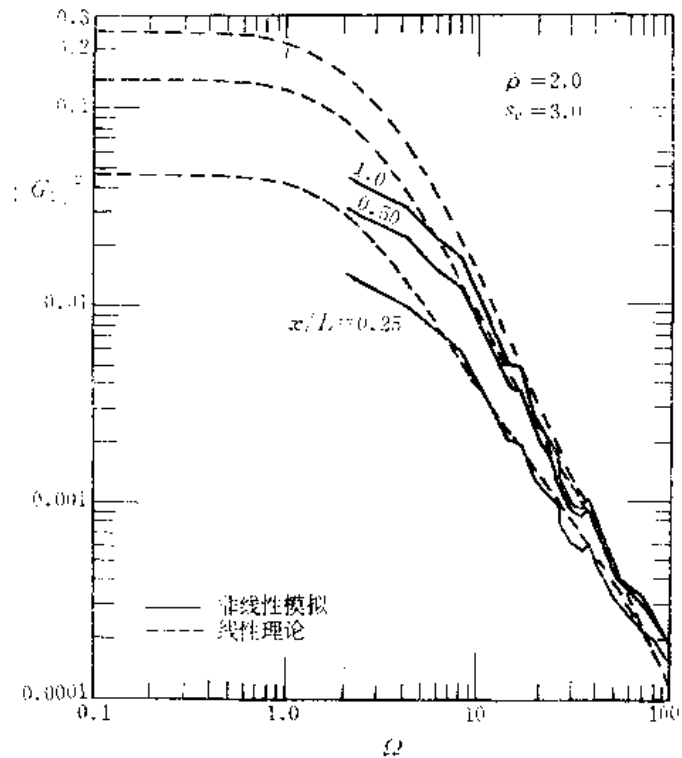


图 3.50 具有合成的补给输入 $\rho = 2.0$ 和 $s_0 = 3.0$ 的含水层系统，其非线性模拟转换函数的振幅平方

表 3.6 具有时间相关的合成补给系统非线性模拟参数表

图 号	无量纲补给平均数 $\bar{\rho}$	样本标准差 s_s	确定性分量的振幅 A	无量纲频率 Ω	权 数 w_i
3.51	1	0.5	0		$w_0 = 0.4$ $w_1 = 0.3$ $w_2 = 0.3$
3.52	1	0.5	0.2	16	$w_1 = 0.4$ $w_1 = 0.3$ $w_2 = 0.3$

通 2 8 2 号

比之非相关者具有较大的值。当输入通过也具有相关结构的转换系统时，输入序列的协方差的相互作用更是有影响的。换句话说，即使输入是白噪音，输出时间序列也具有相关结构。相关的强度将取决于输入系列的结构。从图3.51和3.52上可以作出的另一种判断是在高频部分 ($\Omega > 50$) 有一些大的波动。在这样的高频下，非线性模拟的结果表明，其转换函数的振幅要显著地高于线性理论的。可能造成这类效应的原因有好几种，包括数值误差、混淆误差 (aliasing error) 和系统的时间相关结构。从历史资料的分析以及从无时间相关的合成数据的分析来看，在较高频部分并不存在这些波动。因为用于这些时间相关情况中的参数是相同的 (比较表3.5和表3.6)，看来数值误差或混淆误差都不会影响这些变化。直观地来看，这种情况可以解释为：由于输入系列和转换系统之间的相互影响，使得在高频部分的相关补给引起了有波动的系统响应。

在本研究中，补给的空间分布与时间分布具有重大的现实意义。考虑有四种可能的情况：第一种，假定空间分布在全部时间内都是固定的，并且是由具有给定的平均数和方差的正态随机过程生成的。第二种，假定空间分布随时间而发生随机性变化，并有与均匀的时间变化相当的平均值。第三种和第四种，在上述两种情况中引入了任意的空间相关结构。此种结构与时间结构相似，即空间分布取决于权数 w_i ，后者是由上述的空间坐标 (从 $x/L=0$ 到 1) 给定的。因此，输入补给时间序列与 $\sum_{k=1}^n w_k e^{i(i-k)}$ 成比例。其中， n 是所依据的水平空间节点的数目， i 是代表空间水平坐标的数字。下面用表列出四种情况 (表3.7)。

这四种情况的时间分布与历史资料的时间分布相同。固定型的空间分布由如图3.57所示的一个平均数为1、标准差为0.5的正态过程生成。在3.1节中提出的空间分布补给输入的线性理论可以用来和非线性模拟的结果相比较。为了进行比较，有两种基本的参数可供选择。这就是波数 k 空间变化与时间变化的振幅比 α'/α 。 k 的选择取决于如图3.57所示的空间变化的强度。在此图中，可以估计 k 值处于从 8π 到 10π 的范围内。比较的基础是假设空间变化属于类正余弦波 $(\alpha'/\alpha) \cos k\xi$ 的形式。这种类正余弦过程的方差为 $0.5(\alpha'/\alpha)^2$ ，而模拟的正态过程的样本方差是相等的，为

$$s^2 = 0.5(\alpha'/\alpha)^2$$

$$\therefore \alpha'/\alpha = \sqrt{2s}$$

既然 $s=0.5$ ，因此 $\alpha'/\alpha=0.707$ 。 $k=10\pi$ ， $\alpha'/\alpha=0.707$ 的一个例子的转换函数的振幅平方已表示在图3.10中。实际上这与没有空间变化的情况并无差别。固定型空间分布的非线性模拟结果 (见图3.53和3.55) 与线性理论的稍有差别。第一，所有频率的转换函数振幅较

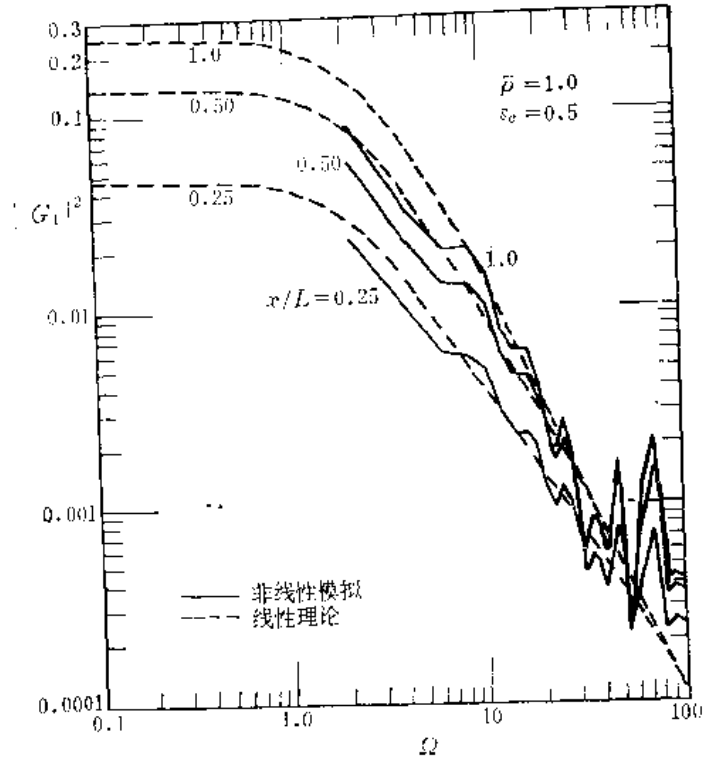


图 3.51 含水层系统具有与时间相关的合成补给输入, $\bar{\rho} = 1.0$, $\epsilon_c = 0.5$, 其非线性模拟转换函数的振幅平方

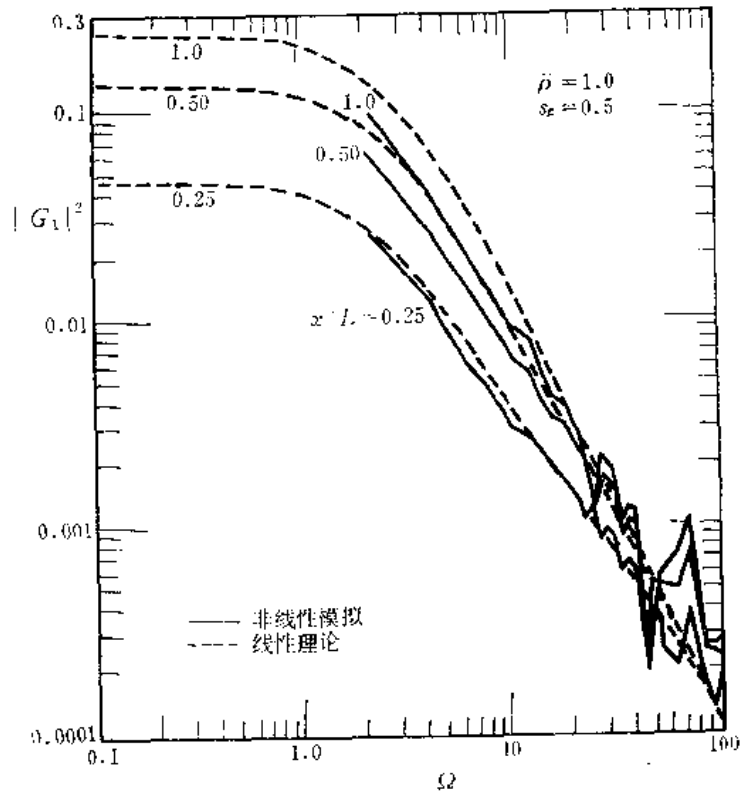


图 3.52 含水层系统具有与时间相关的合成补给输入, $\bar{\rho} = 1.0$, $\epsilon_c = 0.5$, 其非线性模拟转换函数的振幅平方

表 3.7 具有空间分布的补给输入系统的非线性模拟参数表

图 号	空间分布的类型	空间相关结构	权 数 ω_R	无量纲补给平均数 $\bar{\rho}$
3.53	固定型	非 相 关		2
3.54	时间变动型	非 相 关		2
3.55	固定型	相 关	$\omega_1 = 0.4, \omega_2 = 0.3$ $\omega_3 = 0.2, \omega_4 = 0.1$	2
3.56	时间变动型	相 关	$\omega_1 = 0.4, \omega_2 = 0.3$ $\omega_3 = 0.2, \omega_4 = 0.1$	2

低。这种效应在空间分布补给输入的线性理论中也可以观察到(见图3.9),但不如在非线性系统中明显。第二,可以观察到模拟结果表现出比较强的局部空间效应。在这个例子中,可以看到 $x/L=1$ 处的振幅明显下降,在较高频时($\Omega > 30$)低于其他地点的振幅。这是由于系统的特殊空间结构产生的(见图3.57,图上反映的样本平均数低于1,而且 $x/L=1$ 处的空间分布强度显然小于其他地点)。在线性理论中不预测这种效应。另一方面,随时间变化的空间分布情况与线性理论相比时更为接近(见图3.54和3.56)。由于随机分布具有与均匀的时间分布相同的平均数,这种情况看来是合理的。这种系统在空间相关的条件下,与没有相关的情况相比只有小的差别。在较高频范围内则有较明显的差别。

在固定型空间结构和随时间变动的空间结构两种情况的研究中,前者可能是更加典型

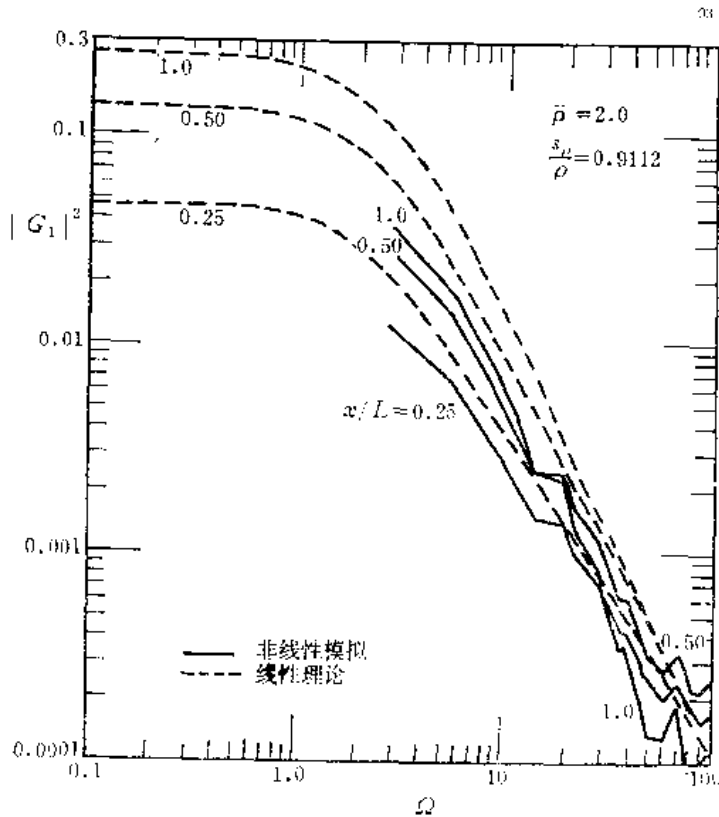


图 3.53 具有非相关空间结构的固定型补给输入系统,其非线性模拟转换函数的振幅平方

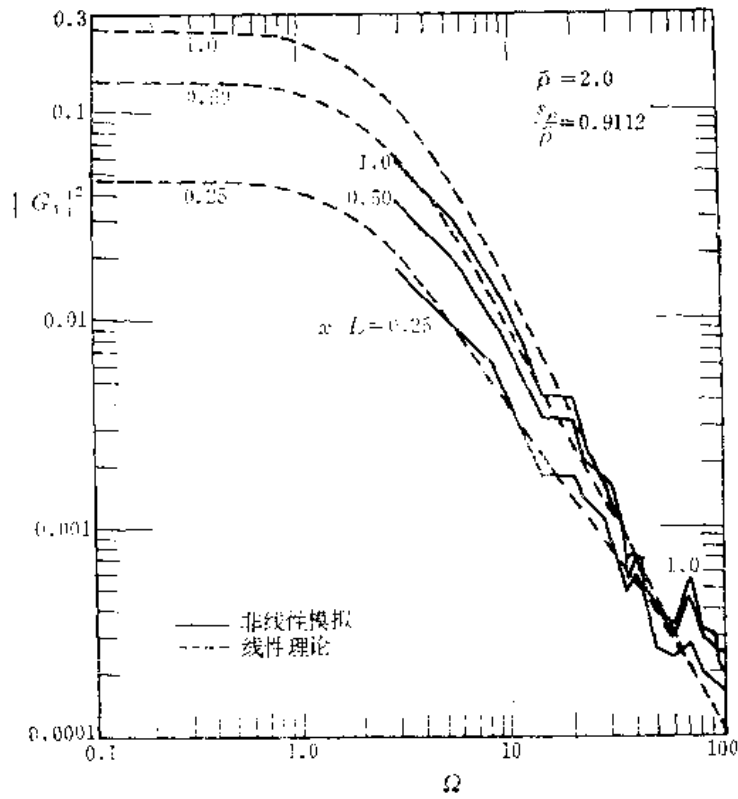


图 3.54 随时间变化并具有非相关空间结构的补给输入系统，其非线性模拟转换函数的振幅平方

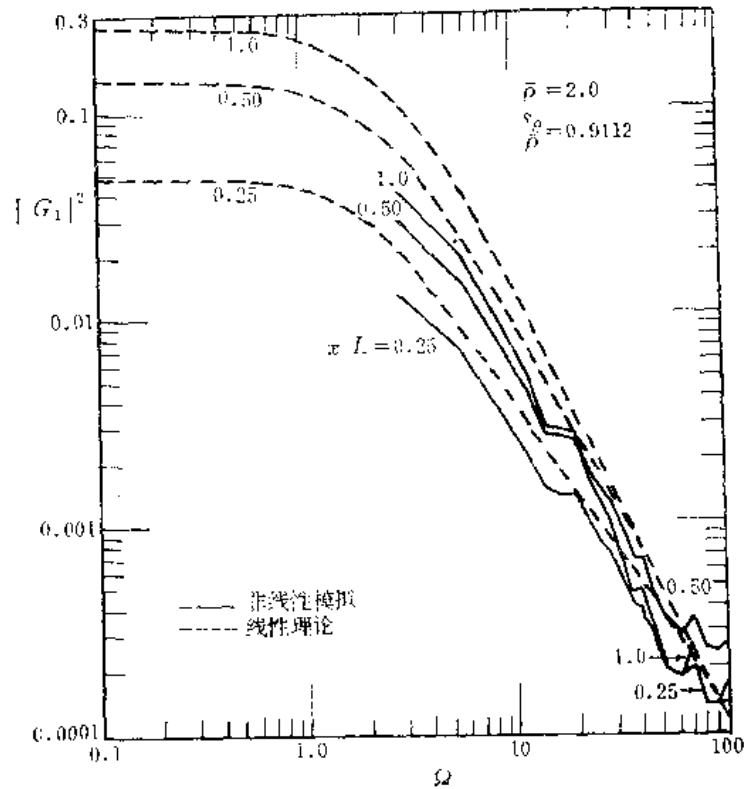


图 3.55 具有相关的空间结构的固定型补给输入系统，其非线性模拟转换函数的振幅平方

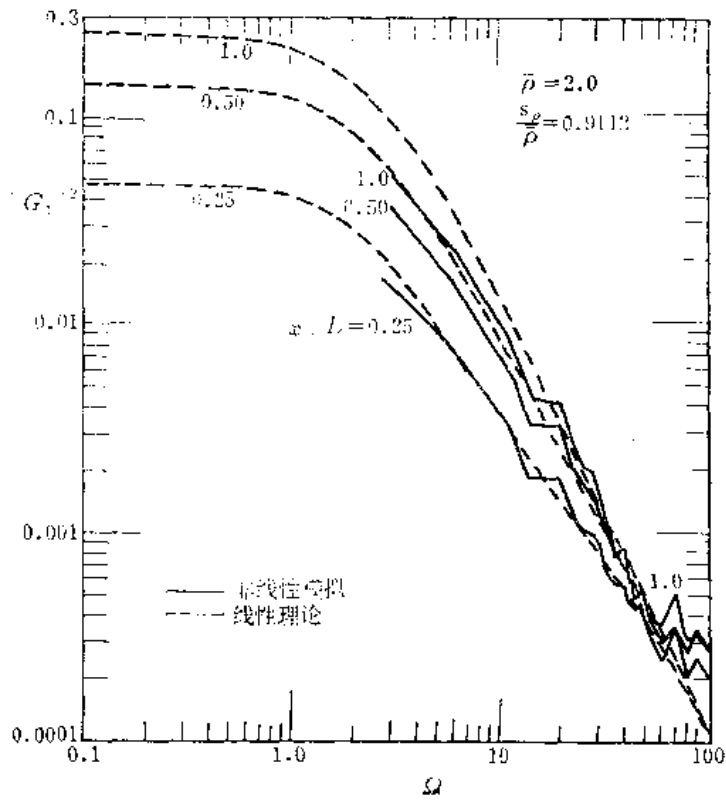


图 3.56 随时间变化并具有相关的空间结构的补给输入系统，其非线性模拟转换函数的振幅平方

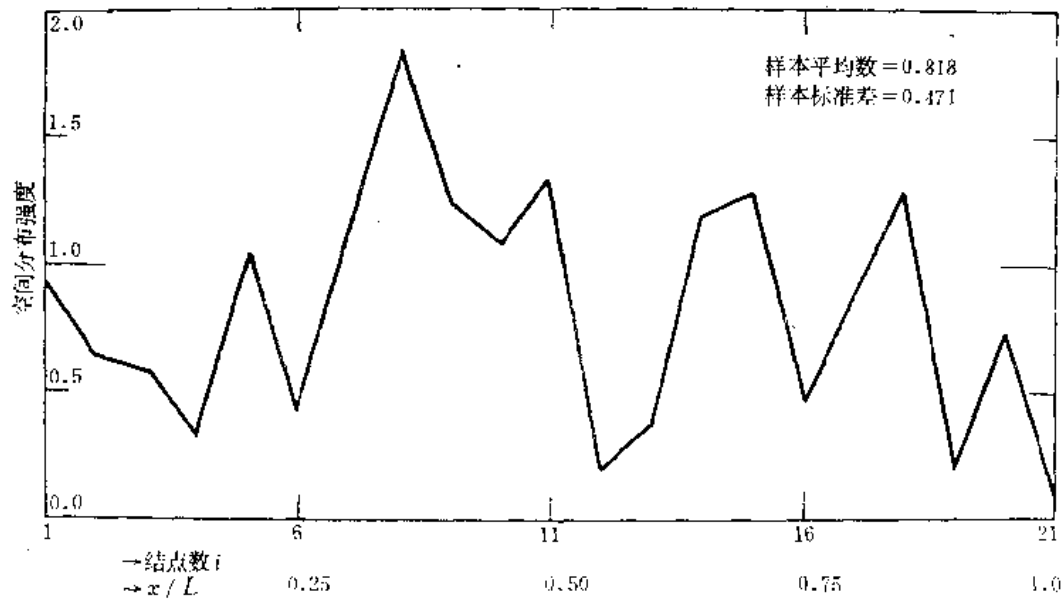


图 3.57 含水层系统进行非线性模拟时补给的固定型空间分布

的野外情况，因为补给的变化必将与土壤条件和植被有关系。随时间变动的空间结构与补给的变化有关，而后者是与不同的降水模式有联系的，这种结构在本研究的初始试验中是有用的。

总之，从空间变化补给输入系统得出的转换函数与在没有空间变化的条件下得出者差别不大。这与以前提出的空间分布输入的线性理论颇为一致。然而，看来在特定的位置上空间分布强度特别大时，则对那个位置的较高频的频谱响应来说，可能有显著的效应。对这些局部效应的本质需要作进一步的研究。

在这种合成的时间序列研究中，我们看到方差对非线性效应来说是比较不重要的。只有在空间分布的补给输入遭受急剧的局部变化时，空间参数 x/L 才可能起重要的作用。

模拟模型可以按更加复杂的条件作进一步的研究。最使人感兴趣的项目应该是引入渗透系数的空间变化和系统的二维空间的表达问题。这些情况使用数值模型都是能容易地加以补充的，但是将会耗费昂贵，尤其是后一种情况更是如此。可以预计，在渗透系数有空间变化的条件下，比之补给有空间变化的情况，转换函数的性能对于输入参数的变化可能会具有更大的灵敏性。在表达二维条件的模拟中，可以获得系统的二维空间分布特征方面的一些认识。

3.4 小 结

本章在潜水含水层系统非线性模拟的研究中，把有限差分模型当作转换系统，输入时间序列或者得之于野外历史资料，或者由合成数据生成。把根据模拟成果的频谱分析获得的非线性系统的转换函数，与根据线性理论得到的转换函数进行比较，则是本章的重点。

本章首先提出了裘布依模型的线性理论，着重对确定性的正弦曲线型输入，讨论了非线性的简单评价问题。然后引进数值模型，并且对一些具有正弦曲线型输入的简单情况作了检验。发现数值误差相当微小，而且对非线性的简单评价是很合理的。这就进一步证实了对那些在确定性模型中控制非线性的参数的鉴别。在随机系统中，这些参数相应地是输入平稳时间序列的平均数、方差和自协方差。这些研究导致了对潜水含水层的物理和统计上的重要解释。无量纲平均数与系统的实际大小和物理特性有关，而方差和自协方差则和输入水文过程的分布特点有关。这些参数的结合可以对非线性系统作出评价。

发现无量纲补给的平均数是所有非线性效应中的主要因素。在较低频范围内，非线性系统转换函数的振幅较小，此种效应明显，而且在无量纲平均数增加时偏差增大。在实际情况中，得知无量纲平均数在 0.1 到 2 的范围内，非线性模拟的结果与线性理论相比只有较小的偏差。并且，还发现在空间参数——离河流的距离——增加时，偏差略有增加。

对于一个具有一定大小和固定的物理性质的给定系统来说，河水位和补给变化的概率分布特征是非线性比较重要的确定因素。发现无量纲补给的标准差和无量纲平均数的情况一样，对转换函数的振幅具有相似的效应，但在 0.5 到 1.5 范围内较不明显。当标准差高达 3 时，有着明显的差别，但这对长期记录的水文过程来说是罕见的。在有河流作用的情况下，从 0.05 到 0.2 的范围内（这在实际情况中能代表好多例子）无量纲河流水位变化的标准差相对来说是不重要的。

对兼有时间和空间分布的补给输入来说，发现其空间效应可忽略不计。然而，看来当

某个位置上有极大的空间分布强度时，可能在这个特定位置上，较高频的频谱响应有明显的效应。识别这种系统的非线性效应需要做进一步的研究。

随机地下水系统的全部研究是使用频谱分析利用现有资料评价含水层参数的一种探索性的试验。这一部分的研究成果证明了整个频谱模拟的合理性。这是因为，输入已经通过数值模型和频谱估计过程，由这种输入获得的转换函数显得与线性理论极为吻合。这种模拟研究进一步证实了，线性化的裘布依模型在典型含水层的实际大小和物理特性，以及输入的概率分布性质方面，是非线性模型的良好近似。以后可以进行的研究，诸如渗透系数的空间变化和二维空间的表示等，都能容易地补充到数值模型中去，并将对系统提供更深的理解。

第四章 资料分析和参数确定

4.1 集中参数线性系统谱分析的一般描述

单输入线性系统

一个系统，如果而且只要它仅仅具有一个输入和一个输出，这个输入和输出假如又能用卷积积分，即

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) x(t-\tau) d\tau \quad (4.1.1)$$

来表示其关系时，则称此系统为单变量系统。例如，一阶线性系统可以用下式说明：

$$C \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) \quad (4.1.2)$$

式中， C 称为时间常数。已经假定系统在 $t \leq \infty$ 时最初是松弛的 (initially relaxed)。那就是说输出受以后所加输入的单独而唯一的激发。

卷积定理

在傅里叶变换和卷积积分之间最有用的关系是卷积定理。对式4.1.1所列的卷积积分，取傅里叶变换，得：

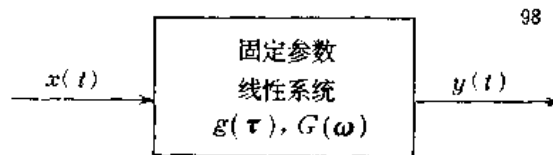


图 4.1 单输入线性系统

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) x(t-\tau) d\tau \quad (4.1.3)$$

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) x(t-\tau) e^{-i\omega t} d\tau dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{-i\omega\tau} x(t-\tau) e^{-i\omega(t-\tau)} d\tau dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{-i\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) e^{-i\omega(t-\tau)} dt d\tau \end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{-i\omega\tau} X(\omega) d\tau$$

$$Y(\omega) = G(\omega) X(\omega) \quad (4.1.4)$$

式中, $Y(\omega)$, $G(\omega)$ 和 $X(\omega)$ 分别为 $y(t)$, $g(t)$ 和 $x(t)$ 的傅里叶变换。因此, 两个函数的卷积的傅里叶变换, 是它们的变换的乘积。

单输入线性系统的谱关系式

如式4.1.1所给出的形式, 取 $y(t)$ 和 $y(t+\tau)$ 的乘积, 则有

$$y(t)y(t+\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\eta)x(t-\eta)g(\xi)x(t+\tau-\xi)d\eta d\xi \quad (4.1.5)$$

式4.1.5的期望值给出时间域中输入和输出的协方差函数之间的关系;

$$\mu_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\eta)g(\xi)\mu_X(\tau+\eta-\xi)d\eta d\xi \quad (4.1.6)$$

同样, 取 $x(t)$ 和 $y(t+\tau)$ 乘积的期望值, 则在时间域中有

$$E[x(t)y(t+\tau)] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\eta)x(t)x(t+\tau-\eta)d\eta\right]$$

$$\mu_{XY}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\eta)\mu_X(\tau-\eta)d\eta \quad (4.1.7)$$

应用卷积定理、方程2.1.8和2.1.23, 可将式4.1.6和4.1.7转换到具有下列关系的频率域中:

$$S_{YY}(\omega) = |G(\omega)|^2 S_{XX}(\omega) \quad (4.1.8)$$

$$S_{XY}(\omega) = G(\omega) S_{XX}(\omega) \quad (4.1.9)$$

式4.1.8表示输入和输出频谱之间的关系, 且为一实函数, 而式4.1.9则表示输入序列和输出序列二者的输入谱和交叉谱之间的关系。注意 $|G(\omega)|$ 为放大因子或转换函数的振幅。若 $S_{XX}(\omega)$, $S_{YY}(\omega)$ 和 $S_{XY}(\omega)$ 分别用 $\hat{S}_{XX}(\omega)$, $\hat{S}_{YY}(\omega)$ 和 $\hat{S}_{XY}(\omega)$ 进行估算, 则此放大因子 $|G(\omega)|$ 与式2.1.26等效, 式4.1.8和4.1.9变为

$$\hat{S}_Y(\omega) = |G(\omega)|^2 \hat{S}_X(\omega) \quad (4.1.10)$$

$$\hat{S}_{XY}(\omega) = G(\omega) \hat{S}_X(\omega) \quad (4.1.11)$$

多重输入线性系统及其谱关系式

对式4.1.1加以直接推广, 可把序列 $y(t)$, $g(\tau)$ 和 $x(t-\tau)$ 认为是矢量。于是, 我们有

$$y_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_i(\tau) x_i(t-\tau) d\tau \quad i=1, \dots, n \quad (4.1.12)$$

如果输入 $\{x_i(t), i=1, \dots, n\}$ 完全相互独立, 则式4.1.8, 4.1.9, 4.1.10 和 4.1.11 可以简单地分别推广为:

$$S_{Y_i}(\omega) = |G_i(\omega)|^2 S_{X_i}(\omega) \quad (4.1.13)$$

$$S_{X_i Y_i}(\omega) = G_i(\omega) S_{X_i}(\omega) \quad (4.1.14)$$

$$\hat{S}_{Y_i}(\omega) = |G_i(\omega)|^2 \hat{S}_{X_i}(\omega) \quad (4.1.15)$$

$$\hat{S}_{X_i Y_i}(\omega) = G_i(\omega) \hat{S}_{X_i}(\omega) \quad (4.1.16)$$

$$i=1, \dots, n$$

由于系统的线性化，最后输出的谱 $y(t)$ 可用 i 项简单求和得出，即

$$S_Y(\omega) = \sum_{i=1}^n |G_i(\omega)|^2 S_{x_i}(\omega) \quad (4.1.17)$$

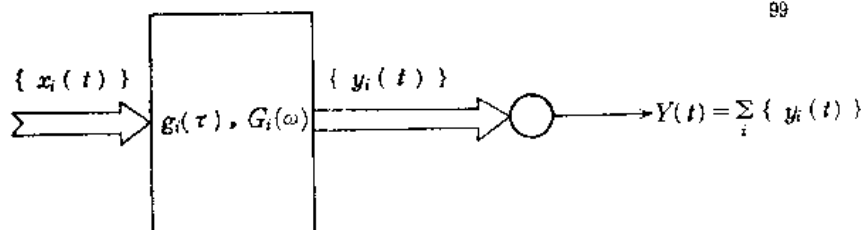


图 4.2 多重输入线性系统

对于互相关输入，自相关函数 $\mu_y(\tau)$ 可计算如下：

$$\begin{aligned} \mu_y(\tau) &= E[y(t)y(t+\tau)] = E\left[\sum_{i=1}^n y_i(t) \sum_{j=1}^n y_j(t+\tau)\right] \\ &= E\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_i(\eta)x_i(t-\eta)g_j(\xi)x_j(t+\tau-\xi)d\eta d\xi\right] \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_i(\eta)g_j(\xi)\mu_{x_i x_j}(\tau+\eta-\xi)d\eta d\xi \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

用 $e^{-i\omega(\eta-\xi)} e^{i\omega(\eta-\xi)} = 1$ 乘式 4.1.18，并取傅里叶变换，于是可求得输入序列和输出 $y(t)$ 之间的关系式：

$$\begin{aligned} S_Y(\omega) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_i(\eta)g_j(\xi)\mu_{x_i x_j}(\tau+\eta-\xi) e^{-i\omega(\eta-\xi)} e^{i\omega(\eta-\xi)} e^{-i\omega\tau} d\eta d\xi d\tau \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_i(\eta)g_j(\xi)\mu_{x_i x_j}(\tau+\eta-\xi) e^{-i\omega\eta} e^{i\omega\xi} e^{-i\omega(\tau+\eta-\xi)} d\eta d\xi d\tau \\ S_Y(\omega) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} g_i(\eta) e^{-i\omega\eta} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} g_j(\xi) e^{i\omega\xi} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \mu_{x_i x_j}(\tau+\eta-\xi) \times \\ &\quad \times e^{-i\omega(\tau+\eta-\xi)} d\tau \\ S_Y(\omega) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n G_i(\omega)G_j^*(\omega)S_{x_i x_j}(\omega) \end{aligned} \quad (4.1.19)$$

用同样方式，可以计算交叉-相关函数如下：

$$\begin{aligned} \mu_{x_i y}(\tau) &= E[x_i(t)y(t+\tau)] = E\left[x_i(t) \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} g_j(\eta)x_j(t+\tau-\eta)d\eta\right] \\ &= \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \mu_{x_i x_j}(\tau-\eta)g_j(\eta)d\eta \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

取式4.1.20的傅里叶变换, 可表示出交叉谱和输入谱之间的关系如下:

$$\begin{aligned}
 S_{x_i y}(\omega) &= \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_i(\eta) \mu_{x_i x_i}(\tau - \eta) e^{-i\omega\tau} d\eta d\tau \\
 &= \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_i(\eta) e^{-i\omega\eta} \mu_{x_i x_i}(\tau - \eta) e^{-i\omega(\tau - \eta)} d\eta d\tau \\
 S_{x_i y}(\omega) &= \sum_{i=1}^n G_i(\omega) S_{x_i x_i}(\omega)
 \end{aligned} \tag{4.1.21}$$

注意若 $S_{x_i x_j}(\omega) = 0$, 而 $i \neq j$, 亦即 X_i 和 X_j 相互独立, 则式4.1.19和4.1.21可简化为式4.1.13和4.1.14。也注意到交叉谱的特征为

$$S_{x_i x_j}(\omega) = S_{x_j x_i}^*(\omega) \tag{4.1.22}$$

而且, 式4.1.19和4.1.20中的 $S_Y(\omega)$, $S_{x_i y_j}(\omega)$, $S_{x_i y}(\omega)$ 和 $S_{x_i x_j}(\omega)$ 在实际计算时分别用 $\hat{S}_Y(\omega)$, $\hat{S}_{x_i y_j}(\omega)$, $\hat{S}_{x_i y}(\omega)$ 和 $\hat{S}_{x_i x_j}(\omega)$ 进行估算。对于双相关输入 $X_1(t)$ 和 $X_2(t)$ 的特殊情况, 可用式4.1.19给出下式,

$$\begin{aligned}
 S_Y(\omega) &= |G_1(\omega)|^2 S_{x_1 x_1}(\omega) + G_1(\omega) G_2^*(\omega) S_{x_1 x_2}(\omega) \\
 &\quad + G_1^*(\omega) G_2(\omega) S_{x_2 x_1}(\omega) + |G_2(\omega)|^2 S_{x_2 x_2}(\omega)
 \end{aligned} \tag{4.1.23}$$

由4.1.21式给出下式,

$$\begin{aligned}
 S_{x_1 y}(\omega) &= G_1(\omega) S_{x_1 x_1}(\omega) + G_2(\omega) S_{x_1 x_2}(\omega) \\
 S_{x_2 y}(\omega) &= G_1(\omega) S_{x_2 x_1}(\omega) + G_2(\omega) S_{x_2 x_2}(\omega)
 \end{aligned} \tag{4.1.24}$$

$$G_1(\omega) = \frac{\begin{vmatrix} S_{x_1 y}(\omega) & S_{x_1 x_2}(\omega) \\ S_{x_2 y}(\omega) & S_{x_2 x_2}(\omega) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_{x_1 x_1}(\omega) & S_{x_1 x_2}(\omega) \\ S_{x_2 x_1}(\omega) & S_{x_2 x_2}(\omega) \end{vmatrix}} \tag{4.1.25}$$

和

$$G_2(\omega) = \frac{\begin{vmatrix} S_{x_1 x_1}(\omega) & S_{x_1 y}(\omega) \\ S_{x_2 x_1}(\omega) & S_{x_2 y}(\omega) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_{x_1 x_1}(\omega) & S_{x_1 x_2}(\omega) \\ S_{x_2 x_1}(\omega) & S_{x_2 x_2}(\omega) \end{vmatrix}} \tag{4.1.26}$$

展开式4.1.25和4.1.26, 得

$$G_1(\omega) = \frac{S_{x_1 y}(\omega) \left(1 - \frac{S_{x_1 x_2}(\omega) S_{x_2 y}(\omega)}{S_{x_1 y}(\omega) S_{x_2 x_2}(\omega)} \right)}{S_{x_1 x_1}(\omega) \left(1 - \frac{S_{x_2 x_1}(\omega) S_{x_1 x_2}(\omega)}{S_{x_1 x_1}(\omega) S_{x_2 x_2}(\omega)} \right)} \tag{4.1.27}$$

和

$$G_2(\omega) = \frac{S_{x_2 y}(\omega) \left(1 - \frac{S_{x_2 x_1}(\omega) S_{x_1 y}(\omega)}{S_{x_1 x_1}(\omega) S_{x_2 y}(\omega)} \right)}{S_{x_2 x_2}(\omega) \left(1 - \frac{S_{x_2 x_1}(\omega) S_{x_1 x_2}(\omega)}{S_{x_1 x_1}(\omega) S_{x_2 x_2}(\omega)} \right)} \tag{4.1.28}$$

注意到 $S_{x_2 x_1}(\omega) = S_{x_1 x_2}^*(\omega)$, 因而把式2.1.24用在4.1.27和4.1.28式的分母中,

$$\frac{S_{x_2 x_1}(\omega) S_{x_1 x_2}(\omega)}{S_{x_1 x_1}(\omega) S_{x_2 x_2}(\omega)} = \gamma^2_{x_1 x_2}(\omega) \quad (4.1.29)$$

注意式4.1.23有一种和线性裘布依含水层模型的式2.3.9等同的形式，这就使它有可能在资料分析中应用这些结果。

4.2 谱估计的计算方案

为了利用上面4.1节中所概括的关系式，我们必须根据有限长度的等距时间序列资料，估算输入和输出序列的功率谱，以及每个输入和输出序列之间的交叉谱，即 $\hat{S}_{x_i y}$ ，和输入序列之间的交叉谱，即 $\hat{S}_{x_i x_j}$ 。首先，对这些资料序列进行统一检验，办法是分别减去其平均值，并除以各个序列的标准差。然后，可按下式计算自协方差：

$$\hat{R}_{xx}(p\Delta t) = \frac{1}{n-p} \sum_{k=1}^{n-p} x_k x_{k+p} \quad p=0, 1, 2, 3, \dots, k_m \quad (4.2.1)$$

式中， n ——在固定的时间间距 Δt 内，离散数据的点数；

k_m ——最大滞后数。

于是依据离散的余弦变换，能够得到功率谱的粗略估计：

$$\tilde{S}_{xx}(\omega_h) = \frac{2\Delta t}{\pi} \sum_{p=0}^{k_m} \alpha_p P_{xx}(p\Delta t) \cos \frac{h p \pi}{k_m} \quad (4.2.2)$$

$$h=0, 1, \dots, k_m$$

式中，

$$\alpha_p = \begin{cases} 1 & 0 < p < k_m \\ \frac{1}{2} & p=0, k_m \end{cases}$$

和

$$\omega_h = \frac{h\pi}{k_m \Delta t}$$

然后用下列的“汉明加权”窗(“hamming”window)修匀这些功率谱的粗略估计。

$$\begin{aligned} \hat{S}_{xx}(0) &= 0.54 \tilde{S}_{xx}(0) + 0.46 \tilde{S}_{xx}(\omega_1) \\ \hat{S}_{xx}(\omega_h) &= 0.23 \tilde{S}_{xx}(\omega_{h-1}) + 0.54 \tilde{S}_{xx}(\omega_h) + 0.23 \tilde{S}_{xx}(\omega_{h+1}) \\ \hat{S}_{xx}(\omega_{k_m}) &= 0.54 \tilde{S}_{xx}(\omega_{k_m}) + 0.46 \tilde{S}_{xx}(\omega_{k_m-1}) \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

功率谱的修匀估计可以用下面的等式校正，以达到允许的截断误差精度。

$$\hat{R}_{xx}(0) = \frac{\pi}{k_m \Delta t} \left\{ \frac{1}{2} [\hat{S}_{xx}(0) + \hat{S}_{xx}(\omega_{k_m})] + \sum_{h=1}^{k_m-1} \hat{S}_{xx}(\omega_h) \right\} \quad (4.2.4)$$

在计算交叉谱时也可以用同样的步骤。计算交叉协方差的公式为：

$$\begin{aligned} \hat{R}_{xy}(p\Delta t) &= \frac{1}{n-p} \sum_{k=1}^{n-p} x_k y_{k+p} \quad p=0, 1, 2, \dots, k_m \\ \hat{R}_{xy}(-p\Delta t) &= \frac{1}{n-p} \sum_{k=1}^{n-p} x_{k+p} y_k \quad p=0, 1, 2, \dots, k_m \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

取式4.2.5的离散的余弦和正弦变换, 分别得到同相谱 $C_{O_{XY}}$ 和转象谱 Q_{XY} 的粗略估计。

$$\bar{C}_{O_{XY}}(\omega_h) = \frac{\Delta t}{\pi} \sum_{p=0}^{k_m} \alpha_p [\hat{R}_{XY}(p\Delta t) + \hat{R}_{XY}(-p\Delta t)] \cos\left(\frac{hp\pi}{k_m}\right) \quad (4.2.6)$$

$$\bar{Q}_{XY}(\omega_h) = \frac{\Delta t}{\pi} \sum_{p=0}^{k_m} \alpha_p [\hat{R}_{XY}(p\Delta t) + \hat{R}_{XY}(-p\Delta t)] \sin\left(\frac{hp\pi}{k_m}\right)$$

$h=0, 1, 2, 3, \dots, k_m$

式中,

$$\alpha_p = \begin{cases} 1 & 0 < p < k_m \\ \frac{1}{2} & p = 0, k_m \end{cases}$$

和

$$\omega_h = \frac{h\pi}{k_m \Delta t}$$

这些粗略的估计再用式4.2.3给出的“汉明加权”窗修匀成同相谱 $C_{O_{XY}}(\omega_h)$ 和转象谱 $Q_{XY}(\omega_h)$ 。于是得 X 和 Y 的交叉谱, 即

$$S_{XY}(\omega_h) = C_{O_{XY}}(\omega_h) + iQ_{XY}(\omega_h) \quad (4.2.7)$$

因此, 转换函数的放大因子或振幅可按下式计算:

$$|G(\omega_h)| = \frac{\sqrt{C_{O_{XY}}^2(\omega_h) + Q_{XY}^2(\omega_h)}}{S_{XX}(\omega_h)} \quad (4.2.8)$$

而序列 Y 相对于序列 X 的相位移为

$$\theta_{XY}(\omega_h) = \tan^{-1} \frac{Q_{XY}(\omega_h)}{C_{O_{XY}}(\omega_h)} \quad (4.2.9)$$

最后, 序列 X 和 Y 之间的凝聚函数的平方为

$$\gamma^2_{XY} = \frac{C_{O_{XY}}^2(\omega_h) + Q_{XY}^2(\omega_h)}{S_{XX}(\omega_h) S_{YY}(\omega_h)} \quad (4.2.10)$$

为了应用方便起见, 已经使用了洛杉矶加利福尼亚大学卫生科学计算研究所的BMDT程序, 特别是BMD02T程序。

4.3 含水层参数的估算

现场情况描述

通过美国地质调查所堪萨斯州劳伦斯的地区办事处, 我们得以取到了一套比较完整的地下水位变化、附近的河流测高和堪萨斯州威奇塔市的月降水量记录。1937年以来, 在威奇塔市地下水开采区的周围, 都有观测井记录了地下水位的动态。地下水开采区主要位于阿肯色河与小阿肯色河之间, 在威奇塔市西北大约20英里。井群开凿在冲积物中, 后者在堪萨斯州中南部称为*Equus*层。含水层由更新世的砂、砾石、粉砂和粘土等松散沉积物组成。虽然流向开采区的水大部份为抽水所拦截, 但是开采区潜水面的水力坡度仍倾向小阿肯色河, 并有一部份水排入了河中。开采区水的主要补给来源是当地的降水。威廉斯和洛曼(1949)曾经对这个地区的地质和水文情况作过广泛的研究。对此区更详细的资料, 读者可参考堪萨斯州地质调查所1949年的第79号通报。在下面的资料分析中, 由于12号(79号通报中为557号)和812号(79号通报中为558号)井的记录长度分别为1938年1

月至1971年9月和1937年2月至1962年12月，且记录的间隔连续一致，所以选中了它们。按威廉斯和洛曼的报告（1949），此区的平均导水系数为 10^4 英尺²/日，按12号井的现场试验，给水度或贮水系数为0.33（美国地质调查所79号通报，表7，1949）。812号井没有报导。图4.3是复制的12号井和812号井的相对位置图。

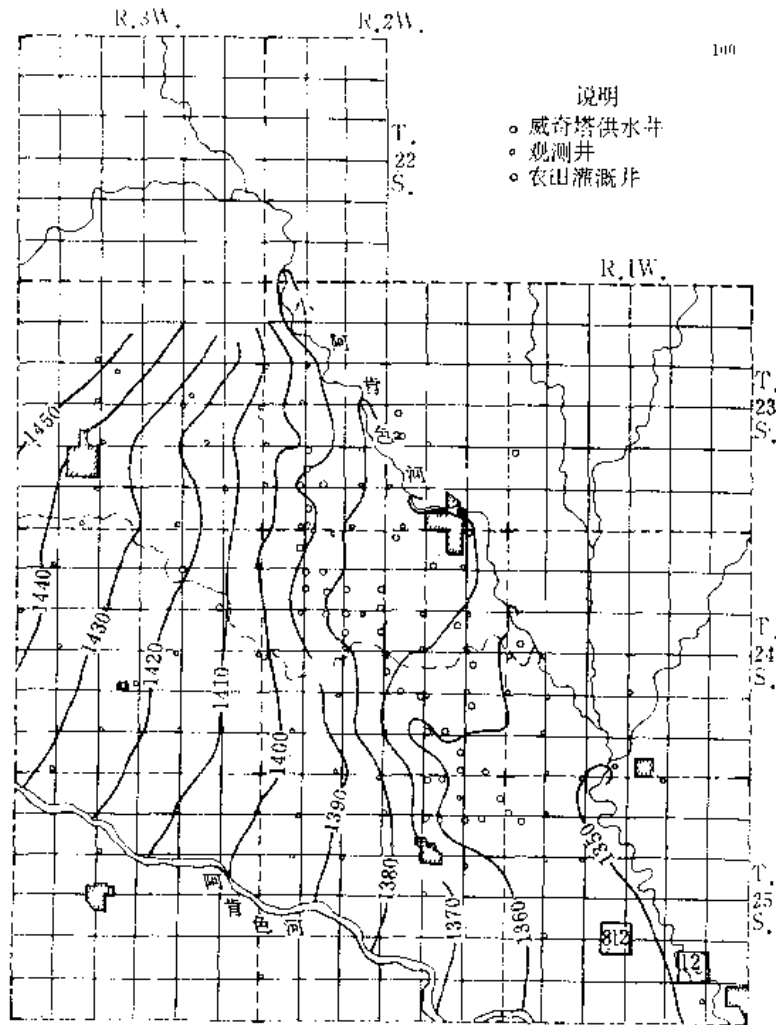


图 4.3 威奇塔井群分布图
(按1956年堪萨斯州地质调查所119号通报复制)

含水层参数的估算

根据从美国地质调查所得来的一套记录，可以估算功率谱，交叉谱和放大因子或转换函数的振幅。其结果表示在表4.1和4.2中。数据是按大约30天的间隔选取的，因此，12号井我们取了405个点，而812号井取了228个点。时间序列表示在图4.4和4.5内。进行谱计算时的时间滞后数为36。在图4.6和4.7内，表示了置信区间相当于95%的时间序列的功率谱。对独立的输入来说，转换函数与谱的关系为4.1.11式，即

$$\hat{S}_{xy} = G \hat{S}_x \quad (4.1.11)$$

式中， $|G|^2$ 为转换函数的振幅平方*；而在相关输入的情况下，则为式4.1.23，即

* 上式中只有G，并无 $|G|^2$ ，后者见于式4.1.10，即 $\hat{S}_y(\omega) = |G(\omega)|^2 \hat{S}_x(\omega)$ 。——编者

表 4.1 12号井的谱结果
(1—降水量; 2—河水位; 3—12号井的标高)

频率 (周期/月)	序列 1 的功率谱估计值	序列 2 的功率谱估计值	序列 3 的功率谱估计值
0.0	0.4616737	1.7660618	6.3718882
0.014	0.4000797	1.0752516	4.0993395
0.028	0.2904645	1.4770669	1.4086533
0.042	0.2214662	0.3459418	0.5118937
0.056	0.1947339	0.2733959	0.2931146
0.069	1.0026560	0.4343947	0.3065982
0.083	2.0223532	0.5964674	0.3467798
0.097	0.9835154	0.4179369	0.2075664
0.111	0.2144480	0.3081986	0.1272072
0.125	0.2025025	0.2775461	0.1014004
0.139	0.1956762	0.2285815	0.0675949
0.153	0.2378010	0.1841076	0.0640080
0.167	0.2310787	0.2085326	0.0532608
0.181	0.1398047	0.2119500	0.0421772
0.194	0.1842604	0.2290967	0.0534783
0.208	0.2663485	0.2831765	0.0497491
0.222	0.2188570	0.2618389	0.0323070
0.236	0.2043062	0.3369848	0.0342543
0.250	0.2299384	0.2514219	0.0231870
0.264	0.1922260	0.1547332	0.0221578
0.278	0.2175524	0.2183325	0.0324012
0.292	0.2326224	0.2502179	0.0343981
0.306	0.1975353	0.2251956	0.0235781
0.319	0.2578394	0.1837316	0.0261787
0.333	0.2502195	0.1927730	0.0353565
0.347	0.1914660	0.2193381	0.0281800
0.361	0.1985738	0.2041160	0.0136057
0.375	0.1933311	0.1819236	0.0113552
0.389	0.2222458	0.2101920	0.0131103
0.403	0.2479103	0.2472190	0.0129041
0.417	0.2183966	0.2956147	0.0122605
0.431	0.1810870	0.2315451	0.0155184
0.444	0.1769220	0.2715925	0.0110891
0.458	0.2118729	0.3244346	0.0127715
0.472	0.2450640	0.3240425	0.0237436
0.486	0.2150671	0.2789896	0.0238384
0.500	0.2178805	0.2635271	0.0167610

续表

频率 (周期/月)	序列1和2的 同相谱	序列1和2的 转象谱	序列1和3的 同相谱	序列1和3的 转象谱
0.0	0.5492625	0.0190047	-1.3272820	-0.3691775
0.014	0.4258815	0.0409466	-0.8723028	-0.5002798
0.028	0.2929254	0.0623291	-0.3176955	-0.4022828
0.042	0.2050447	0.0568162	-0.1274777	-0.2336676
0.056	0.1630077	0.0814800	-0.0614405	-0.1642944
0.069	0.4975184	0.0516860	-0.2204819	-0.2940277
0.083	0.8724203	-0.0576502	-0.4402660	-0.4511888
0.097	0.4163976	0.0143365	-0.2205715	-0.2465901
0.111	0.0912592	0.1368528	-0.0219914	-0.1096165
0.125	0.0492253	0.1719483	-0.0026751	-0.1040836
0.139	0.0277932	0.1387198	-0.0055513	-0.0575611
0.153	0.0117510	0.1152524	-0.0024248	-0.0359793
0.167	0.0453719	0.1413517	-0.0128043	-0.0481883
0.181	0.0410284	0.1088744	0.0024166	-0.0482872
0.194	0.0314140	0.1569433	0.0002797	-0.0719635
0.208	0.0165044	0.2065336	-0.0130033	-0.0898153
0.222	-0.0184029	0.1244329	-0.0222607	-0.0453012
0.236	-0.0553098	0.1468871	-0.0127094	-0.0314737
0.250	-0.0655937	0.1148209	-0.0072512	-0.0268367
0.264	-0.0151332	0.0498227	-0.0159597	-0.0284687
0.278	0.0110108	0.1243101	-0.0208474	-0.0476412
0.292	-0.0168739	0.1777741	-0.0124151	-0.0509917
0.306	-0.0497818	0.1211966	-0.0125382	-0.0155203
0.319	-0.0575510	0.0980981	-0.0287273	-0.0397460
0.333	-0.0601420	0.0893154	-0.0201196	-0.0504260
0.347	-0.0819513	0.0625255	0.0009166	-0.0190706
0.361	-0.0805233	0.0856179	-0.0104990	-0.0059157
0.375	-0.0741898	0.0874989	-0.0123814	-0.0072091
0.389	-0.1267378	0.0530410	0.0024627	-0.0108114
0.403	-0.0959663	0.0686592	-0.0033342	-0.0080163
0.417	-0.0748286	0.0624296	-0.0084673	-0.0072584
0.431	-0.0829571	0.0160047	-0.0000064	-0.0118076
0.444	-0.1208206	-0.0151884	0.0033890	-0.0036404
0.458	-0.1331828	0.0012722	-0.0078615	-0.0014138
0.472	-0.1406332	0.0790018	-0.0104317	-0.0104023
0.486	-0.0947788	0.0520430	-0.0103639	-0.0021318
0.500	-0.0630650	0.0120707	-0.0181379	0.0033710

续表

频率 (周期/月)	序列 2 和 3 的 同相谱	序列 2 和 3 的 转象谱	序列 2 和 3 的 凝聚函数平方	(独立输入) 从序列 2 到 3 的转换函数振幅
0.0	-2.3253059	-0.3414624	0.4908533	1.3307819
0.014	-1.4926214	-0.4778031	0.5572397	1.4575481
0.028	-0.6113302	-0.4120255	0.8087377	1.5453119
0.042	-0.3007802	-0.2325832	0.8163494	1.0990725
0.056	-0.1719019	-0.1271662	0.5705467	0.7821108
0.069	-0.2081547	-0.1934170	0.6062143	0.6541175
0.083	-0.2597960	-0.2857448	0.7210500	0.6474648
0.097	-0.1691552	-0.1709676	0.6667858	0.5754615
0.111	-0.1437123	-0.0873871	0.7215837	0.5457374
0.125	-0.1104409	-0.0591654	0.5577835	0.4514245
0.139	-0.0583700	-0.0390752	0.3193281	0.3072946
0.153	-0.0590453	-0.0331152	0.3889020	0.3677066
0.167	-0.0753202	-0.0100388	0.5198600	0.3643841
0.181	-0.0624012	-0.0150806	0.4610268	0.3028902
0.194	-0.0902450	-0.0059112	0.6675885	0.3947607
0.208	-0.0947670	0.0006206	0.6375157	0.3346643
0.222	-0.0447346	0.0046611	0.2391362	0.1717726
0.236	-0.0360813	-0.0028283	0.1134749	0.1073995
0.250	-0.0252776	0.0062354	0.1162730	0.1035524
0.264	-0.0276535	0.0091424	0.2474220	0.1882309
0.278	-0.0468663	0.0097296	0.3238675	0.2192326
0.292	-0.0533637	0.0101923	0.3429253	0.2171241
0.306	-0.0255318	0.0126216	0.1527733	0.1264729
0.319	-0.0174880	0.0227974	0.1716382	0.1563827
0.333	-0.0322433	0.0320734	0.3034629	0.2359198
0.347	-0.0261183	0.0164261	0.1540189	0.1408695
0.361	-0.0088574	0.0080624	0.0516556	0.0586787
0.375	-0.0160190	0.0139899	0.2190973	0.1169421
0.389	-0.0226512	0.0085038	0.2124309	0.1151085
0.403	-0.0137318	0.0110983	0.0977185	0.0714185
0.417	-0.0170807	0.0138131	0.1331409	0.0743098
0.431	-0.0232923	0.0021455	0.1522694	0.1010211
0.444	-0.0153798	-0.0034149	0.0824112	0.0580074
0.458	-0.0130669	0.0096555	0.0637072	0.0500786
0.472	-0.0291670	0.0155243	0.1418933	0.1019654
0.486	-0.0133483	-0.0025389	0.0277600	0.0487028
0.500	0.0089366	-0.0087820	0.0355416	0.0475450

续表

频率 (周期/月)	序列 1 和 3 的 凝聚函数平	方从序列 1 到 3 的 转换函数振幅	(相关输入) 从序列 1 到 3 的 转换函数振幅	(相关输入) 从序列 2 到 3 的 转换函数振幅
0.0	0.6451867	2.9840708	2.2456646	.6586387
0.0139	0.6165560	2.5134487	1.7085054	.8321352
0.0278	0.6421922	1.7647696	.6785883	1.2940954
0.0417	0.6249697	1.2018919	.5308164	.9341296
0.0556	0.5390319	0.9007518	.5101726	.5245961
0.0694	0.4393591	0.3665377	.1125131	.5531303
0.0833	0.5666733	0.3117200	.0902898	.5221896
0.0972	0.5361804	0.3363903	.1609497	.4157517
0.1111	0.4582002	0.5213417	.2132902	.4644513
0.1250	0.5279362	0.5141564	.3666456	.3512720
0.1389	0.2528291	0.2955299	.2605913	.3061283
0.1528	0.0854329	0.1516432	.1190538	.4128620
0.1667	0.2019978	0.2157727	.0477656	.3900475
0.1806	0.3964162	0.3458227	.1965711	.2217188
0.1944	0.5255594	0.3905565	.1752162	.3301909
0.2083	0.6215476	0.3407254	.1907774	.2018524
0.2222	0.3603274	0.2306305	.2093571	.1264077
0.2361	0.1646279	0.1661377	.1954183	.1227025
0.2500	0.1449451	0.1208978	.1093718	.0845524
0.2639	0.2500818	0.1697847	.1397069	.1543639
0.2778	0.3836453	0.2390362	.1713266	.1266851
0.2917	0.3442098	0.2256073	.1443399	.1377625
0.3056	0.0854715	0.1010948	.0942609	.1388107
0.3194	0.3563027	0.1901991	.1709629	.0694463
0.3333	0.3331769	0.2169759	.1564174	.1567894
0.3472	0.0675613	0.0997180	.0481469	.1299758
0.3611	0.0537518	0.0606871	.0814133	.0789694
0.3750	0.0935044	0.0741075	.1129819	.1615283
0.3889	0.0421975	0.0498923	.0683258	.1508430
0.4028	0.0235626	0.0350209	.0291423	.0765520
0.4167	0.0463427	0.0510060	.0530125	.0793536
0.4306	0.0496121	0.0652038	.0831754	.1170568
0.4444	0.0126091	0.0281125	.0560938	.0785681
0.4583	0.0235785	0.0377000	.0855098	.0830916
0.4722	0.0372985	0.0601145	.1190172	.1486994
0.4861	0.0218368	0.0491978	.0888220	.0819165
0.5000	0.0931974	0.0846725	.0812124	.0387596

表 4.2 812 号井的谱结果
(1—降水量; 2—河水位; 3—812 号井的标高)

频率 (周期/月)	序列1的功率谱 估计值	序列2的功率谱 估计值	序列3的功率谱 估计值
0.0	0.5374808	1.2685280	7.5446291
0.014	0.3837751	0.8597792	4.7825747
0.028	0.2173141	0.4381955	1.3861294
0.042	0.2153191	0.2512252	0.2511411
0.056	0.2332733	0.2239184	0.1932182
0.069	0.9996482	0.4708245	0.2120602
0.083	1.8161268	0.6250646	0.1392409
0.097	0.8645156	0.4285473	0.1139002
0.111	0.2524533	0.3583584	0.0873989
0.125	0.2644855	0.3161583	0.0598572
0.139	0.2270136	0.2389400	0.0474303
0.153	0.2797019	0.1821527	0.0314855
0.167	0.2960474	0.2133330	0.0311634
0.181	0.1716580	0.2338951	0.0242400
0.194	0.1944860	0.2702937	0.0244891
0.208	0.2838922	0.3319917	0.0234363
0.222	0.2465112	0.2963898	0.0192297
0.236	0.2317605	0.3909397	0.0146210
0.250	0.2459462	0.2833095	0.0118639
0.264	0.2086559	0.1864448	0.0106318
0.278	0.2216164	0.2646199	0.0079679
0.292	0.2031941	0.2625701	0.0084282
0.306	0.1393378	0.2096615	0.0095010
0.319	0.1768278	0.1573682	0.0103075
0.333	0.1921526	0.1958976	0.0117814
0.347	0.1662740	0.2520531	0.0109710
0.361	0.1730999	0.2030430	0.0108849
0.375	0.1717070	0.1653225	0.0099507
0.389	0.2172809	0.2151617	0.0081530
0.403	0.2540575	0.2459328	0.0058417
0.417	0.2455114	0.3216650	0.0083650
0.431	0.2244685	0.2708046	0.0097426
0.444	0.2079843	0.2879887	0.0130381
0.458	0.2432668	0.3442047	0.0153065
0.472	0.3040683	0.3669876	0.0149631
0.486	0.2521988	0.2921533	0.0175279
0.500	0.2480691	0.2584540	0.0166986

续表

频率 (周期/月)	序列1和2的 同相谱	序列1和2的 转象谱	序列1和3的 同相谱	序列1和3的 转象谱
0.0	0.5934544	0.0424455	-0.6505423	-0.5859277
0.014	0.4387881	0.0494298	-0.4209118	-0.6331782
0.028	0.2601902	0.0354270	-0.1225896	-0.2342375
0.042	0.1715844	0.0433205	-0.0064758	-0.0924887
0.056	0.1445757	0.0817950	0.0096685	-0.0959550
0.069	0.4998999	0.0509909	-0.0634411	-0.1000934
0.083	0.8613555	-0.0939633	-0.1846801	-0.0312619
0.097	0.4302959	0.0235687	-0.1069716	-0.0615308
0.111	0.1171054	0.1816434	0.0036852	-0.0480823
0.125	0.0554643	0.2089986	0.0148437	-0.0791034
0.139	0.0144547	0.1554420	0.0128739	-0.0429738
0.153	0.0064282	0.1237102	0.0161403	0.0004009
0.167	0.0589046	0.1547029	0.0003234	0.0012260
0.181	0.0438863	0.1351151	-0.0140864	-0.0218559
0.194	0.0351257	0.1939378	-0.0204440	0.0017919
0.208	0.0250411	0.2494217	-0.0203728	-0.0301657
0.222	-0.0208642	0.1474465	-0.0208998	-0.0345286
0.236	-0.0487455	0.1672570	-0.0245328	-0.0260277
0.250	-0.0657021	0.1113451	-0.0156738	-0.0233513
0.264	-0.0280692	0.0572293	-0.0066228	-0.0230150
0.278	0.0060719	0.1508234	-0.0121342	-0.0068546
0.292	-0.0091965	0.1765762	-0.0089311	-0.0138725
0.306	-0.0596035	0.0746194	-0.0108804	-0.0111758
0.319	-0.0558303	0.0447262	-0.0118123	-0.0172102
0.333	-0.0613305	0.0722870	-0.0131461	-0.0143624
0.347	-0.1011285	0.0930349	-0.0058837	-0.0070227
0.361	-0.0947801	0.0889423	-0.0038905	-0.0062667
0.375	-0.0919228	0.0643825	-0.0046817	-0.0047634
0.389	-0.1569659	0.0274889	-0.0076724	-0.0002818
0.403	-0.1139014	0.0479721	-0.0069335	-0.0114090
0.417	-0.0918743	0.0520705	-0.0009366	-0.0156151
0.431	-0.1046796	0.0092081	-0.0051403	-0.0126108
0.444	-0.1472512	-0.0286996	-0.0104580	-0.0215347
0.458	-0.1739575	0.0075133	-0.0182949	-0.0176749
0.472	-0.1837862	0.1228960	-0.0336563	-0.0184147
0.486	-0.1046023	0.0963448	-0.0363462	-0.0208492
0.500	-0.0651873	0.0384422	-0.0334923	-0.0146030

续表

频率 (周期/月)	序列 2 和 3 的 同相谱	序列 2 和 3 的 转象谱	序列 2 和 3 的 凝聚函数平方	(独立输入) 从序列 2 到 3 的 转换函数振幅
0.0	-2.2237883	-0.6888822	0.5662975	1.8352327
0.014	-1.3068628	-0.7961345	0.5694900	1.7798376
0.028	-0.3706064	-0.3770931	0.4602407	1.2065916
0.042	-0.0964719	-0.1002972	0.3069494	0.5539374
0.056	-0.0555385	-0.0430381	0.1141055	0.3137853
0.069	-0.0468276	-0.0855252	0.0952231	0.2070958
0.083	-0.0753059	-0.0563346	0.1016214	0.1504573
0.097	-0.0939134	-0.0574369	0.2482753	0.2568796
0.111	-0.0568609	-0.0282074	0.1286336	0.1771215
0.125	-0.0492156	-0.0541159	0.2827422	0.2313668
0.139	-0.0607753	-0.0365445	0.4437608	0.2967959
0.153	-0.0342762	-0.0341464	0.4081544	0.2656132
0.167	-0.0373897	-0.0011319	0.2104747	0.1753448
0.181	-0.0366297	0.0054816	0.2419537	0.1583513
0.194	-0.0099176	0.0317633	0.1672795	0.1231091
0.208	-0.0062384	0.0147100	0.0328123	0.0481282
0.222	-0.0002690	0.0378836	0.2518187	0.1278199
0.236	-0.0015383	0.0483079	0.4086855	0.1296312
0.250	-0.0072838	0.0359889	0.4011306	0.1298060
0.264	-0.0102035	0.0193590	0.2415853	0.1173717
0.278	-0.0158025	0.0225160	0.3588821	0.1039526
0.292	-0.0147248	0.0087558	0.1326499	0.0652449
0.306	-0.0056080	0.0112550	0.0793805	0.0599767
0.319	-0.0059049	0.0009023	0.0219977	0.0379582
0.333	-0.0137206	0.0157414	0.1889328	0.1065951
0.347	-0.0056710	0.0112043	0.0570268	0.0488215
0.361	0.0009507	0.0113620	0.0588206	0.0561543
0.375	0.0042891	-0.0078742	0.0488728	0.0542370
0.389	0.0096779	-0.0000056	0.0533927	0.0449798
0.403	0.0094477	0.0128159	0.1764547	0.0647408
0.417	0.0167387	0.0272489	0.3800777	0.0994187
0.431	0.0130876	0.0193366	0.2066409	0.0862218
0.444	0.0063050	0.0346488	0.3303198	0.1222889
0.458	0.0149681	0.0224903	0.1385306	0.0784878
0.472	0.0038127	0.0107906	0.0238513	0.0311847
0.486	0.0017760	0.0011884	0.0008825	0.0072763
0.500	0.0122587	-0.0036199	0.0378559	0.0494555

续表

频率 (周期/月)	序列 1 和 3 的 凝聚函数平方	从序列 1 到 3 的 转换函数振幅	(相关输入) 从序列 1 到 3 的 转换函数振幅	(相关输入) 从序列 2 到 3 的 转换函数振幅
0.0	0.1890255	1.6289120	2.2456646	.6586387
0.0139	0.3149563	1.9811506	1.7085054	.8321352
0.0278	0.2320367	1.2165680	.6785883	1.2940054
0.0417	0.1589648	0.4305941	.5308164	.9341296
0.0556	0.2063518	0.4134241	.5101726	.5245961
0.0694	0.0662472	0.1185467	.1125131	.5531303
0.0833	0.1387384	0.1031356	.0902898	.5221896
0.0972	0.1546583	0.1427454	.1609497	.4157547
0.1111	0.1053969	0.1910189	.2132902	.4644513
0.1250	0.4091610	0.3042993	.3666456	.3512720
0.1389	0.1869070	0.1976125	.2605913	.3061283
0.1528	0.0295997	0.0577233	.1190538	.4128620
0.1667	0.0001742	0.0042828	.0477656	.3900475
0.1806	0.1624870	0.1514758	.1965711	.2217188
0.1944	0.0884288	0.1055211	.1752162	.3301909
0.2083	0.1991499	0.1282206	.1907774	.2018524
0.2222	0.3436520	0.1637296	.2093571	.1264077
0.2361	0.3775325	0.1543285	.1954183	.1227025
0.2500	0.2710705	0.1143494	.1093718	.0845524
0.2639	0.2585449	0.1147773	.1397069	.1543839
0.2778	0.1099910	0.0628853	.1713266	.1266851
0.2917	0.1589867	0.0811970	.1443399	.1377625
0.3056	0.1837670	0.1119397	.0942609	.1388107
0.3194	0.2390589	0.1180465	.1709629	.0694463
0.3333	0.1674582	0.1013277	.1564174	.1567894
0.3472	0.0460128	0.0550999	.0481469	.1299758
0.3611	0.0238759	0.0426120	.0814133	.0789694
0.3750	0.0261074	0.0388970	.1129819	.1615283
0.3889	0.0332743	0.0353348	.0683268	.1508430
0.4028	0.1200966	0.0525496	.0291423	.0765520
0.4167	0.1191548	0.0637168	.0530125	.0793536
0.4306	0.0848027	0.0686687	.0831754	.1170568
0.4444	0.2113463	0.1151038	.0560938	.0785681
0.4583	0.1737868	0.1045695	.0855098	.0830916
0.4722	0.3234970	0.1261712	.1190172	.1486994
0.4861	0.3971792	0.1661445	.0888220	.0819165
0.5000	0.3222738	0.1472874	.0812124	.0387596

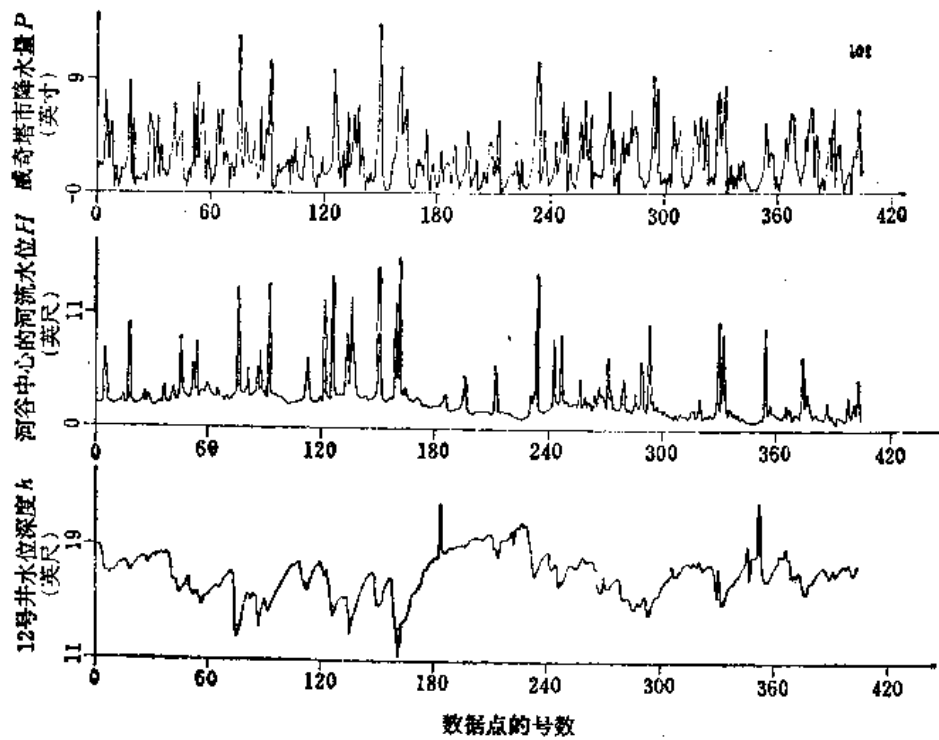


图 4.4 从1938年1月到1971年9月大致按月取的输入资料
(12号井)

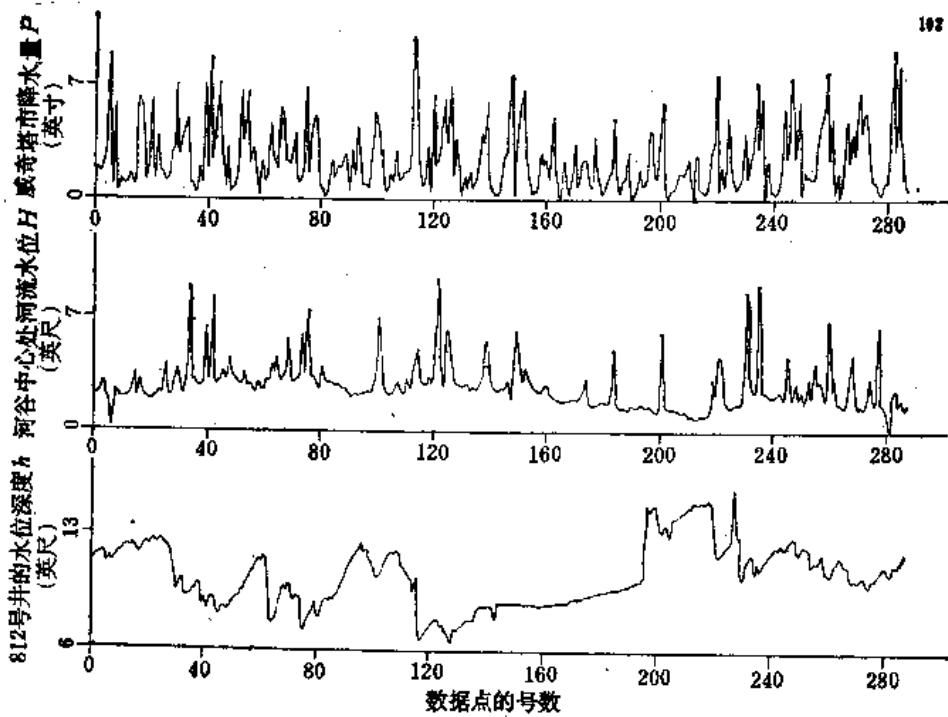


图 4.5 从1937年2月到1962年12月大致按月取的输入资料
(812号井)

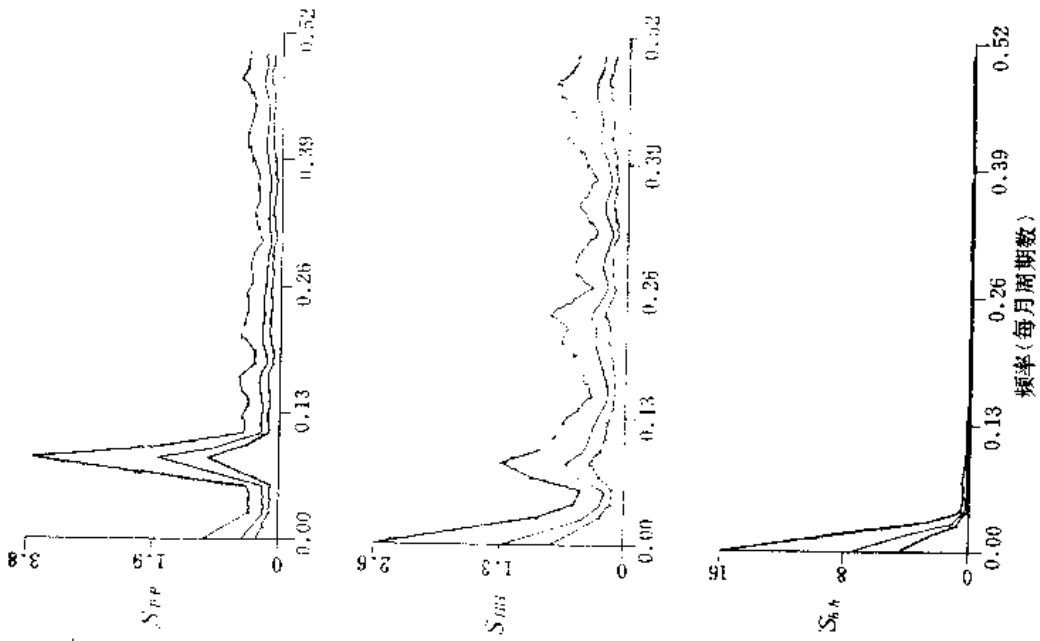


图 4.7 812号井置信区间相当于95%的输入系列的功率谱

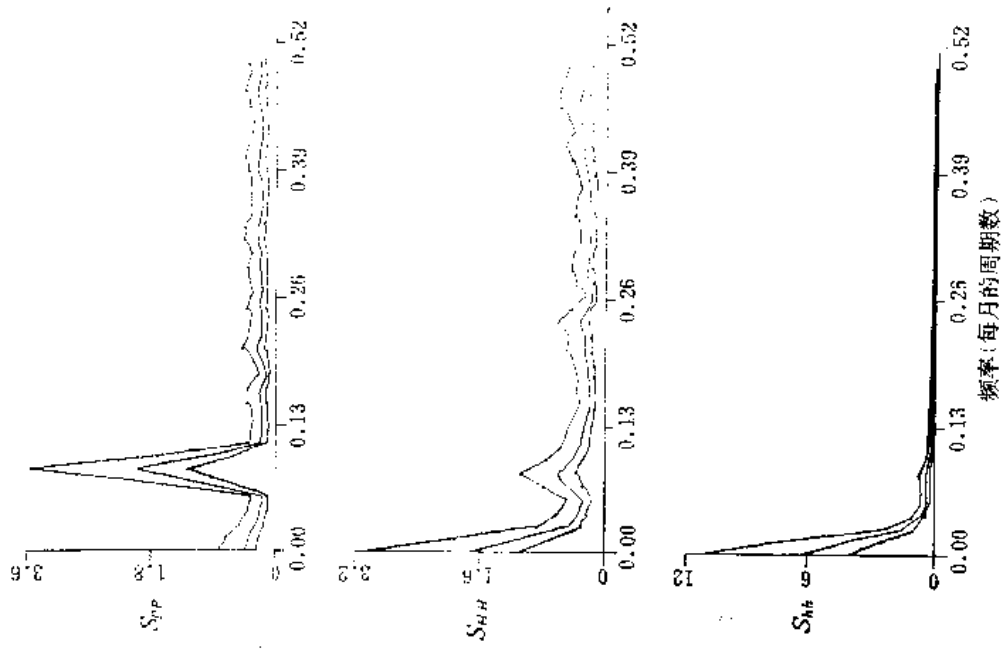


图 4.6 12号井置信区间相当于95%的输入系列的功率谱

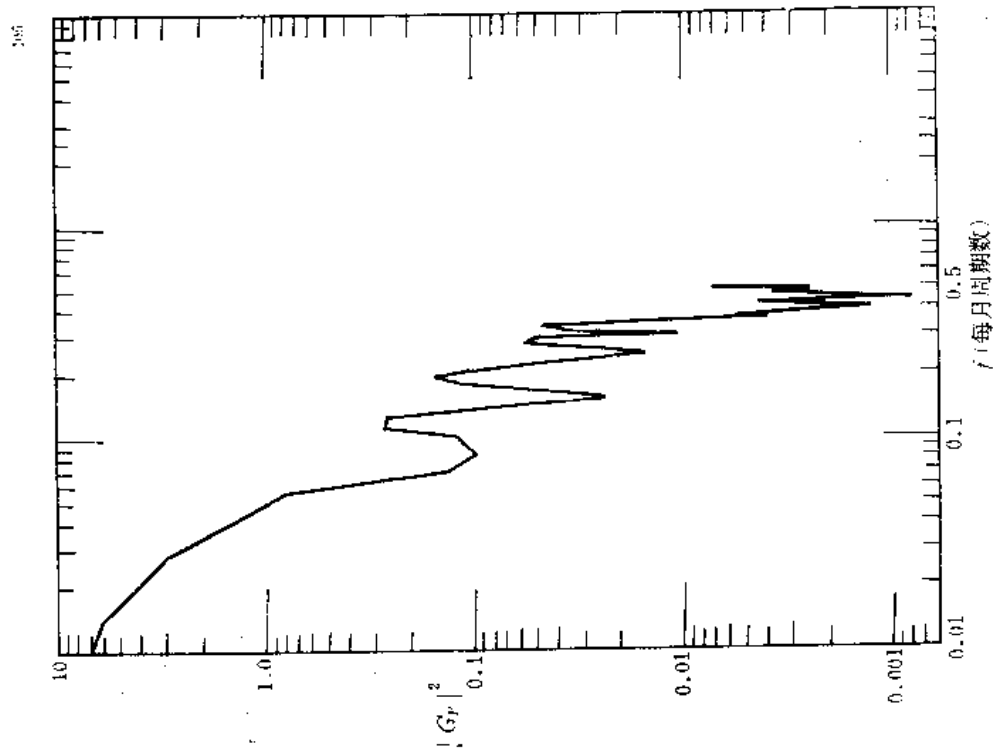


图 4.8 12号井在独立输入情况下, 从序列 1 (降水量) 到序列 3 (地下水动态) 的转换函数振幅平方

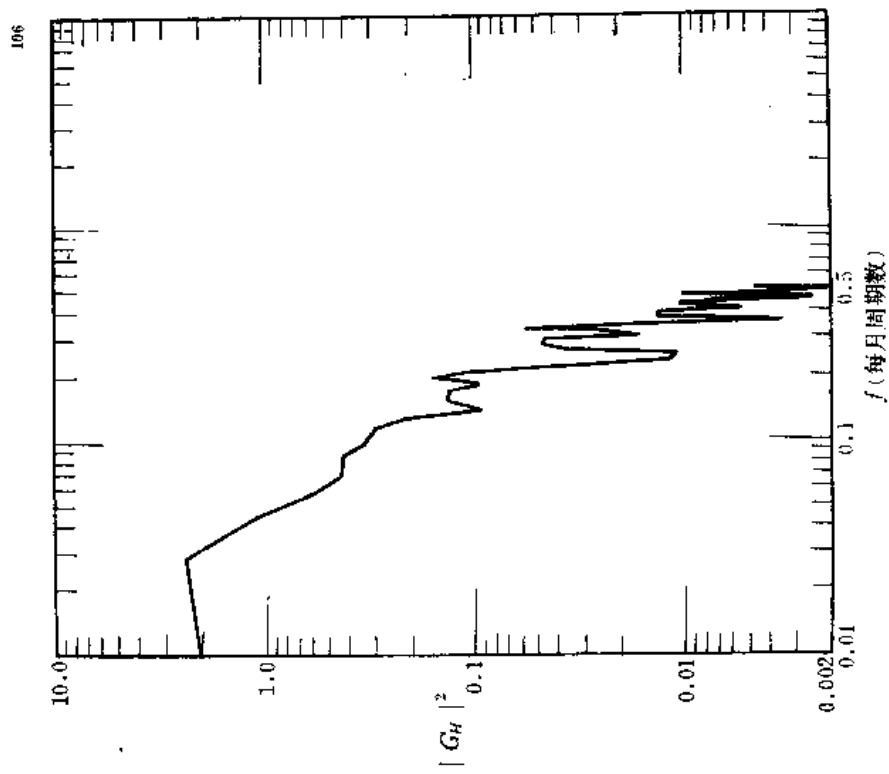


图 4.9 12号井在独立输入情况下, 从序列 2 (河流水位) 到序列 3 (地下水动态) 的转换函数振幅平方

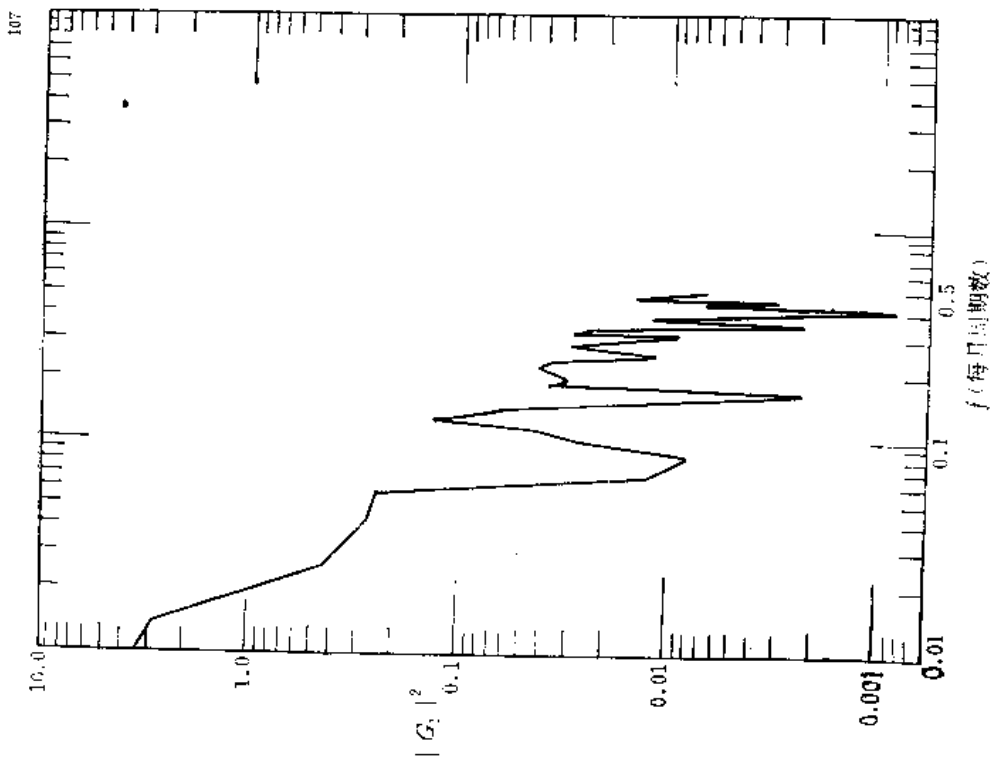


图 4.10 12号井在相关输入情况下, 从序列 1 (降水量) 到序列 3 (地下水动态) 的转换函数振幅平方

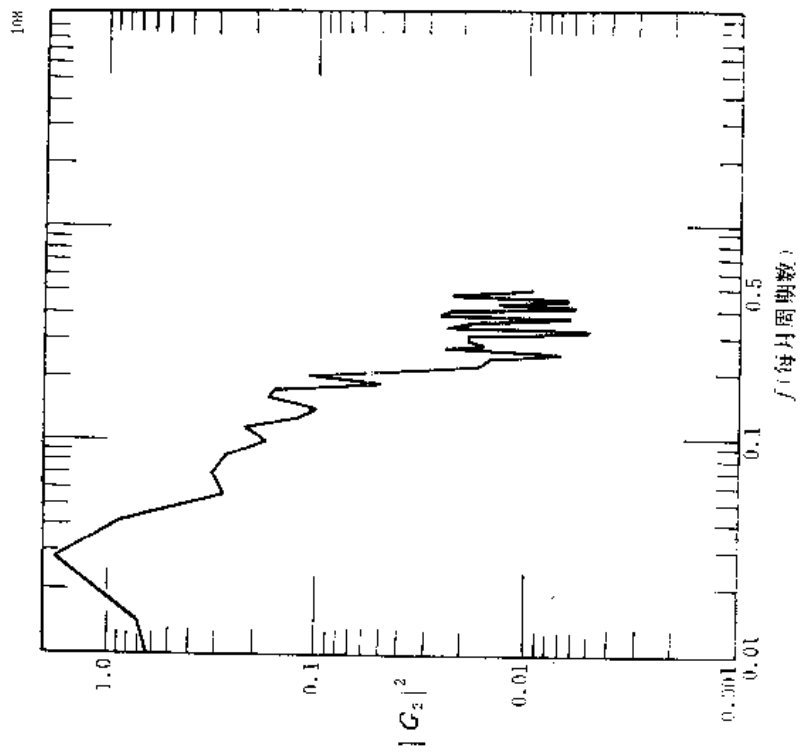


图 4.11 12号井在相关输入情况下, 从序列 2 (河流水位) 到序列 3 (地下水动态) 的转换函数振幅平方

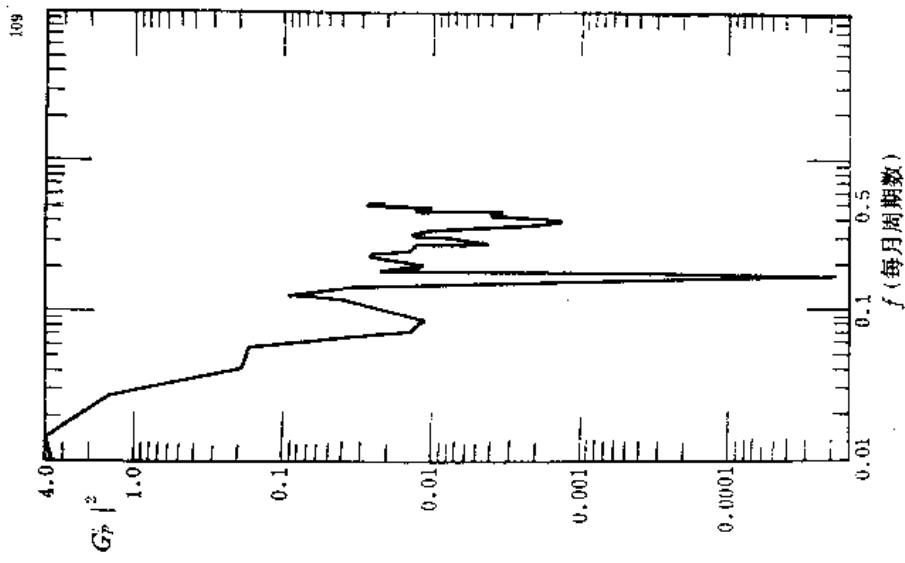


图 4.12 812号井在独立输入情况下, 从序列 1 (降水量) 到序列 3 (地下水动态) 的转换函数振幅平方

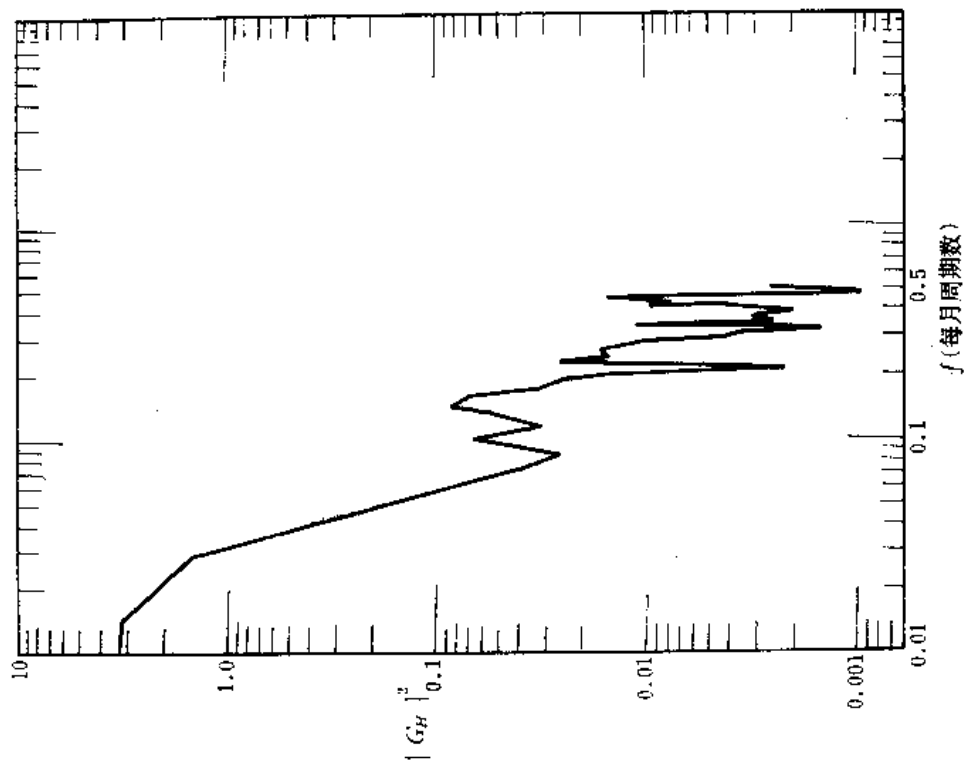


图 4.13 812号井在独立输入情况下, 从序列 2 (河流水位) 到序列 3 (地下水动态) 的转换函数振幅平方

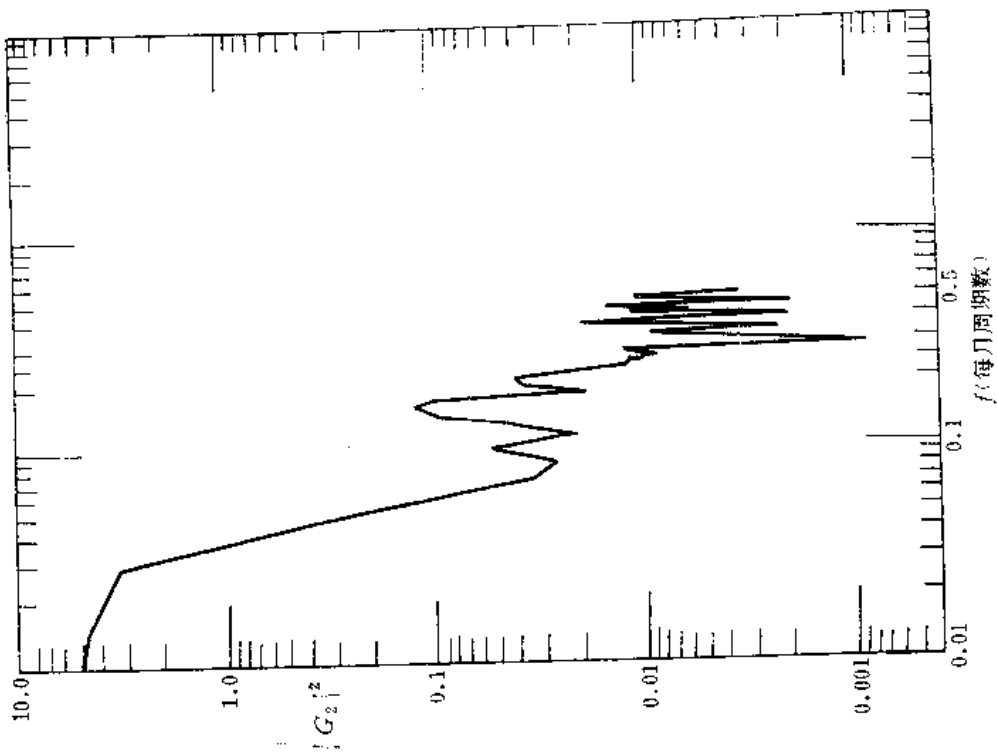


图 4.15 812 号井在相关输入情况下, 从序列 2 (河流水位) 到序列 3 (地下水动态) 的转换函数振幅平方

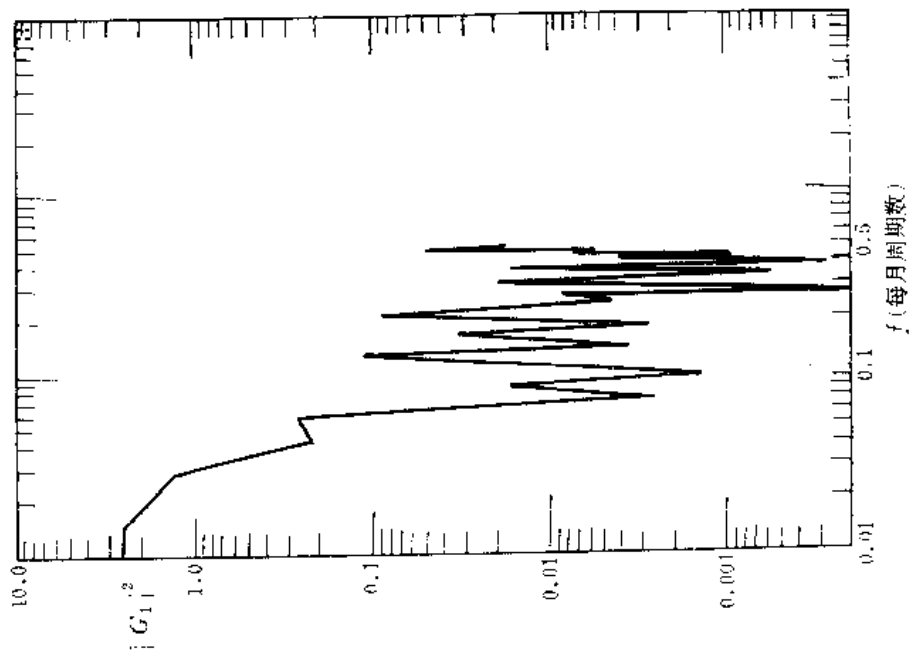


图 4.14 812 号井在相关输入情况下, 从序列 1 (降水量) 到序列 3 (地下水动态) 的转换函数振幅平方

$$\hat{S}_Y = |G_1|^2 \hat{S}_{X_1 X_1} + G_1 G_2^* S_{X_1 X_2} + G_1^* G_2 \hat{S}_{X_2 X_1} + |G_2|^2 \hat{S}_{X_2 X_2} \quad (4.1.23)$$

式中, G_1 和 G_2 由式4.1.27和4.1.28给出。在两种情况中,都把 Y 作为输出,把 X_i 作为输入。 $|G_p|^2$, $|G_H|^2$, $|G_1|^2$ 和 $|G_2|^2$ 值与频率的关系曲线分别画在图4.8—4.11 (12号井)和图4.12—4.15 (812号井)中。

考虑到线性化的裘布依近似式的水平底板的情况。根据2.3.9式,得:

$$S_{hh} = \frac{(1-F)(1-F^*)}{\omega^2 S^2} S_{..} - \frac{i}{\omega S} [(1-F)F^* S_{.H} - (1-F^*)F S_{H.}] + FF^* S_{HH} \quad (4.3.1)$$

式中,

$$F = \frac{\cosh\left[bL\left(\frac{x}{L} - 1\right)\right]}{\cosh(bL)}$$

$$bL = \frac{(1+i)}{\sqrt{2}} \left(\frac{\omega L^2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}$$

和

$$\alpha = \frac{T}{S}$$

无量纲参数 $\frac{\omega L^2}{\alpha} \equiv \Omega$ (4.3.2)

被称作无量纲频率。注意,如果 $X_1 = \epsilon$, $X_2 = H$, 在下述的相等条件

$$G_1 \equiv \frac{-i(1-F)}{\omega S} \quad (4.3.3)$$

$$G_2 \equiv F \quad (4.3.4)$$

下,式4.3.1正好与式4.1.23具有相同的形式。在独立的输入情况下, G 取两种形式中的哪一种都可以,取决于所使用的输入序列。注意, ϵ 是用来表示净补给的,而我们只有降水记录可资利用。所以有必要假设总降水量和补给之间的关系。最简单的方法是假设补给与降水量有一个固定的比值,即

$$\epsilon = \gamma P \quad (P \text{ 表示降水量}) \quad (4.3.5)$$

式中, $\gamma = \text{常数} < 1$

把这个关系引进线性化的裘布依近似式,可以看到式4.3.1即变为:

$$S_{hh} = \frac{(1-F)(1-F^*)}{\omega^2 S^2} \gamma^2 S_{PP} - \frac{i\gamma}{\omega S} [(1-F)F^* S_{.H} - (1-F^*)F S_{H.}] + FF^* S_{HH} \quad (4.3.6)$$

式中, F , Ω 和 α 与过去所定义的一样,而 S_{PP} 是降水量的功率谱。用 X_1 作为降水量,则4.1.23式和4.3.6式对比起来是一致的。然而,仍然不能计算函数 $\frac{(1-F)(1-F^*)\gamma^2}{\omega^2 S^2}$ 。代

之以计算 $\frac{(1-F)(1-F^*)}{\Omega^2} = g(\Omega)$ 和 $FF^* = f(\Omega)$,并在图4.16和4.17中按给定的 x/L 值绘

出曲线。那么就得到下列的关系式:

$$\frac{(1-F)(1-F^*)\gamma^2}{\omega^2 S^2} = g(\Omega) \frac{\gamma^2 L^4}{T^2} \quad (4.3.7)$$

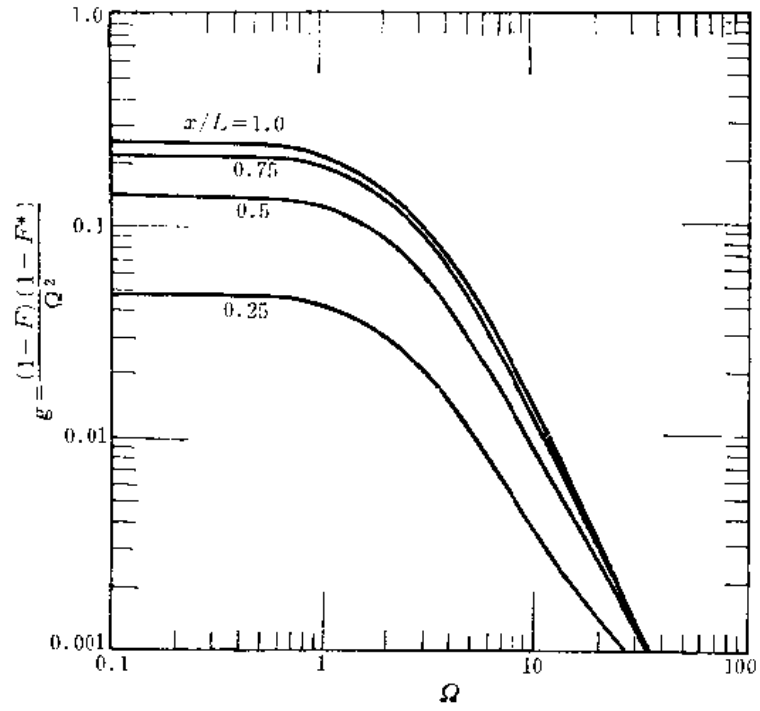


图 4.16 具有水平底板的含水层 ($\Gamma = 0$) 对补给的响应; 沿含水层方向的 g 曲线

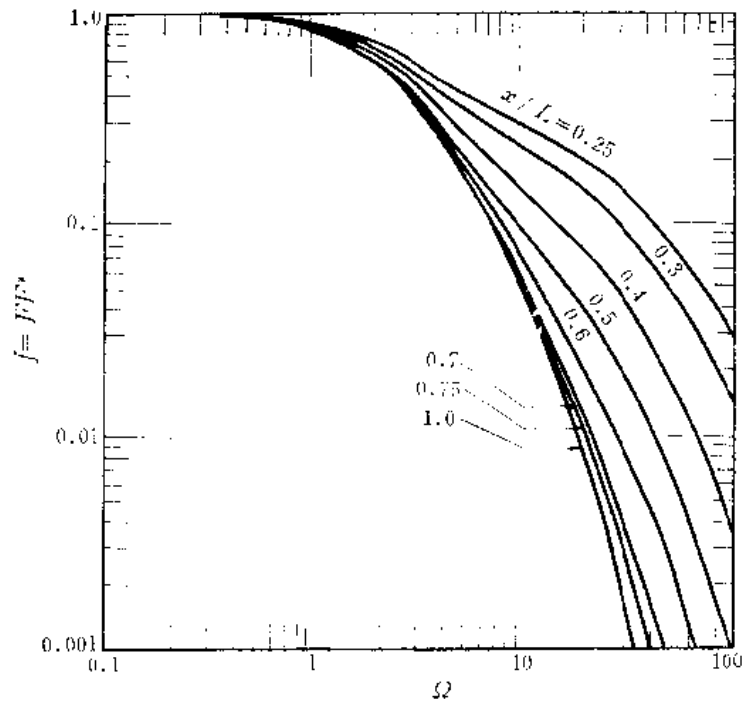


图 4.17 具有水平底板的含水层 ($\Gamma = 0$) 对河水位的响应; 沿含水层方向的 f 曲线

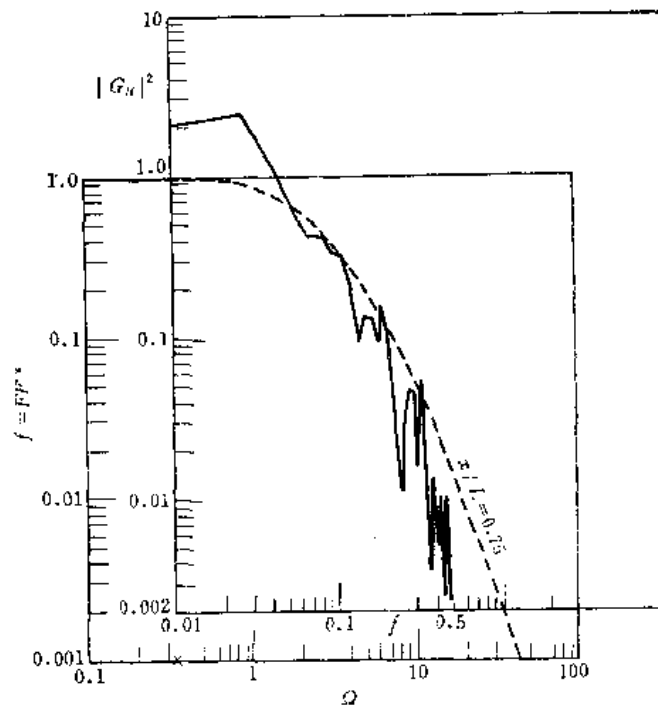


图 4.18 在独立输入的情况下，图4.9和图4.17 的样本拟合。 \times 用来作为12号井的参数计算点

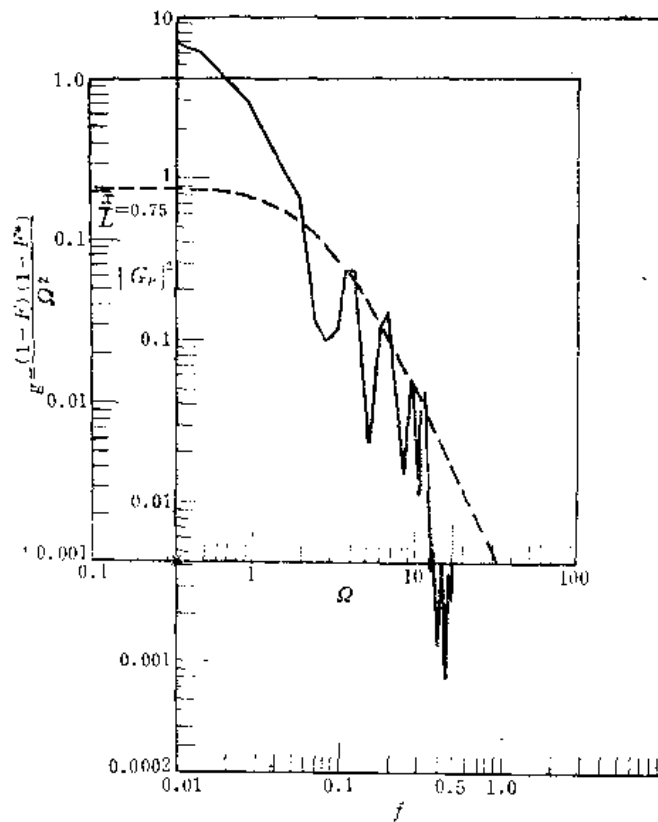


图 4.19 在独立输入的情况下，图4.8和图 4.16的样本拟合。 \times 用来作为12号井的参数计算点

4.3.7 式的右侧在单独的降水输入情况下可以看到与 $|G|^2$ 相等，而在相关的输入情况下，则与 4.1.23 式的 $|G_1|^2$ 相等。

独立输入的拟合方法

如果假设降水量和河流水位这两种输入是独立的，那么按 4.1.11 式的形式计算转换函数。

$$\widehat{S}_{Hh} = G_H \widehat{S}_H \quad (4.3.8)$$

$$\widehat{S}_{PH} = G_P \widehat{S}_P \quad (4.3.9)$$

这不过是 4.1.24 式在 $S_{x_1, x_2} = S_{x_2, x_1} = 0$ 时的特殊情况。从表 4.1 和 4.2 来看，这些资料的输入显然不是独立的；序列 1 和 2 的同相谱和转象谱不是零。但是，下面的分析可以说明独立情况下的方法，并且证明提出这种假设的意义。理论上的转换函数为：

$$|G_H|^2 = f(\omega) = FF^* \quad (4.3.10)$$

$$|G_P|^2 = g(\omega) \gamma^2 L^4 / T^2 \quad (4.3.11)$$

于是，对 12 号井，用拟合图 4.9 和 4.17 的方法，沿横坐标加以移动，选出相应于某一 x/L 值的最佳拟合曲线。就可以找到与特定的 f 值对应的 ω 值。然后拟合图 4.8 和 4.16，沿横坐标按相同的 x/L 值保持相同的相对位置，用只沿纵坐标移动的办法可以确定与 $|G_P|^2$ 的特定值相对应的 $g(\omega)$ 值。对 812 号井也采用同样的步骤。在图 4.18 和 4.19 中可找出 12 号井的一组样本拟合位置，而在图 4.20 和 4.21 中可找到 812 号井的样本拟合位置。根据 12 号井的拟合方法，有：

$$\lg\left(\frac{\omega L^2}{\alpha}\right) = \lg(f) + \lg\left(\frac{2\pi L^2}{\alpha}\right)$$

$$\frac{T}{S} = \frac{2\pi L^2}{34} \quad (4.3.12)$$

$$\lg[g(\omega)] + \lg\left[\frac{\gamma^2 L^4}{T^2}\right] = \lg|G_P|^2$$

$$\frac{\gamma L^2}{T} = 2 \quad (4.3.13)$$

12 号井离河流的距离从地形图上可以量出为 1200 英尺（图 4.22）。于是可以算出

$$L = \frac{x}{0.75} \approx 1600 \text{ 英尺}$$

采用 $\gamma = 0.05$ ， S 和 T 分别由 4.3.12 式和 4.3.13 式确定为 0.135 和 0.212×10^4 英尺²/日。同样，对 812 号井，有：

$$\frac{T}{S} = \frac{2\pi L^2}{70}$$

和

$$\frac{\gamma L^2}{T} = 1.949$$

其中的

$$L = 6000 \text{ 英尺}$$

采用 $\gamma = 0.05$ ， S 和 T 可以分别确定为 0.285 和 3.078×10^4 英尺²/日。

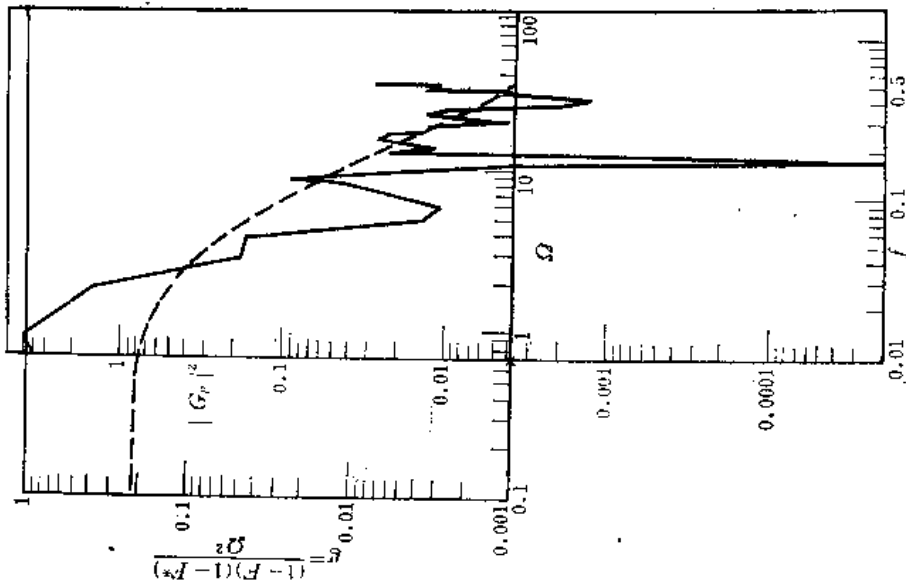


图 4.21 在独立输入的情况下, 图4.12和图4.16的样本拟合。×用来作为812号井的参数计算点

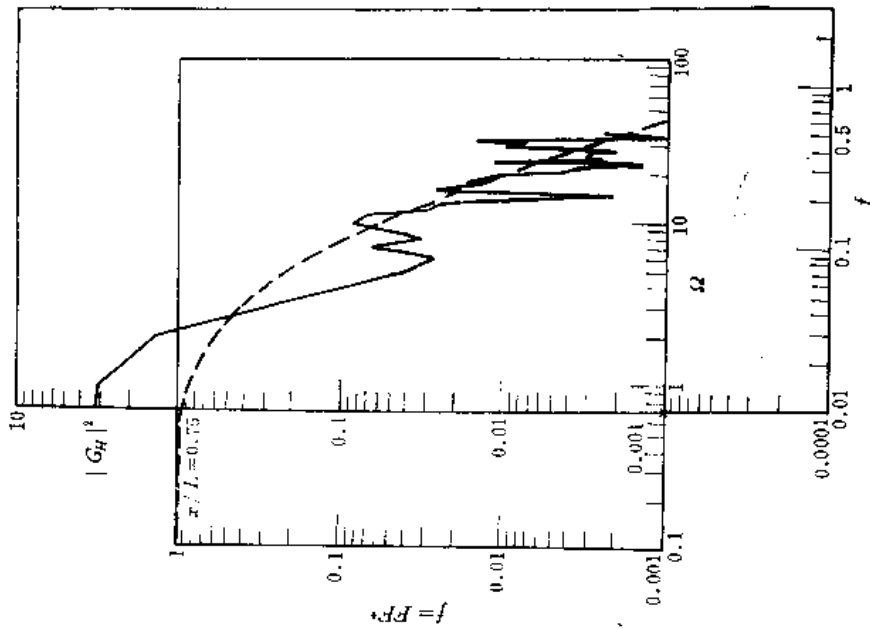


图 4.20 在独立输入的情况下, 图4.13和图4.17的样本拟合。×用来作为812号井的参数计算点

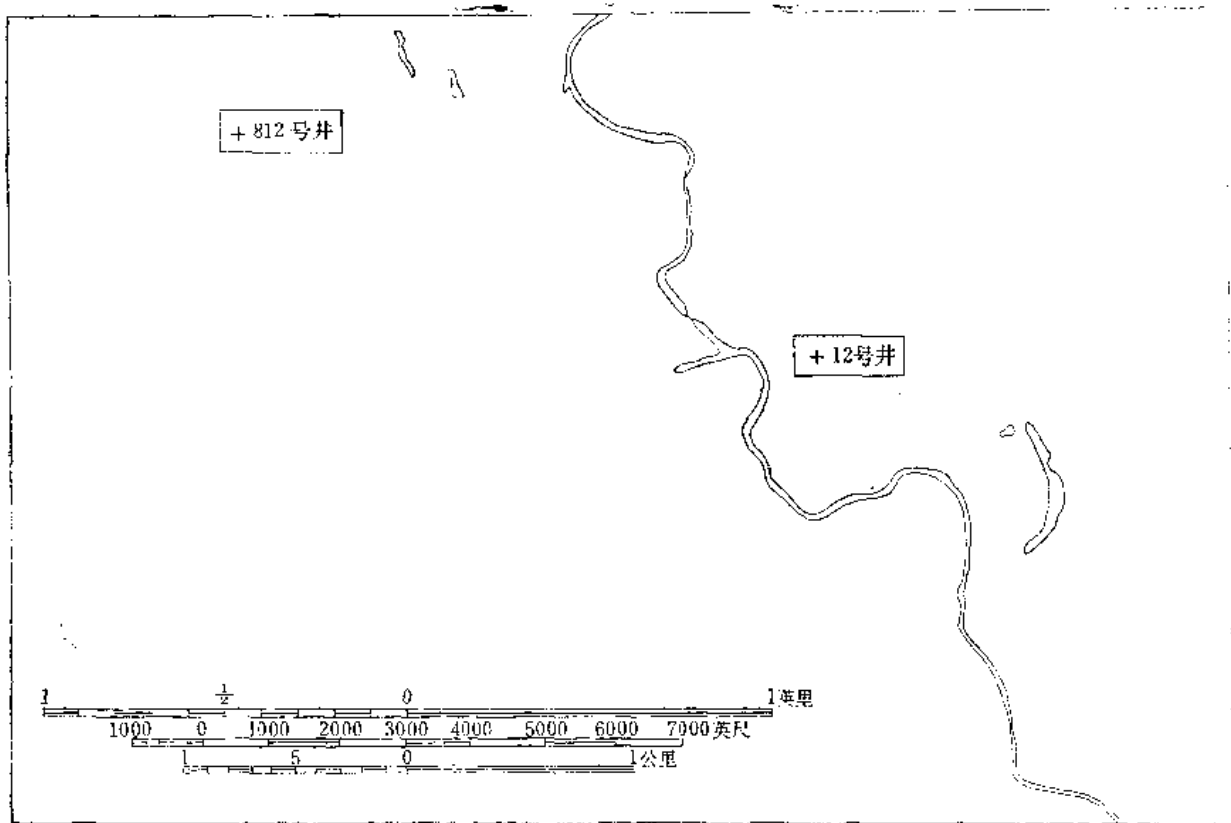


图 4.22 12 号井、812号井和水文站位置图

相关输入的拟合方法

根据式4.1.23, 有:

$$S_{hh} = |G_1|^2 S_{PP} + G_1 G_2^* S_{PH} + G_1^* G_2 S_{HP} + |G_2|^2 S_{HH} \quad (4.3.14)$$

与 4.3.6 式相比, 可以看出下列的相当部分:

$$\frac{(1-F)(1-F^*)\gamma^2}{\omega^2 S^2} \equiv |G_1|^2 \quad (4.3.15)$$

$$FF^* \equiv |G_2|^2 \quad (4.3.16)$$

对图4.10, 4.11, 4.16和4.17, 可以应用与独立输入同样的方法。在图4.23和4.24中可以求得12号井的一组样本拟合位置, 在图4.25和4.26中可求得812号井的一组样本拟合位置。从而, 对12号井, 有:

$$\lg[g(\omega)] + \lg \frac{\gamma^2 L^4}{T^2} = \lg |G_1|^2$$

$$\frac{\gamma^2 L^4}{T^2} = 1.8$$

$$\frac{\gamma L^2}{T} = 1.341 \quad (4.3.17)$$

和

$$\lg\left(\frac{\omega L^2}{\alpha}\right) = \lg(f) + \lg\left(\frac{2\pi L^2}{\alpha}\right)$$

$$\frac{T}{S} = \frac{2\pi L^2}{46} \quad (4.3.18)$$

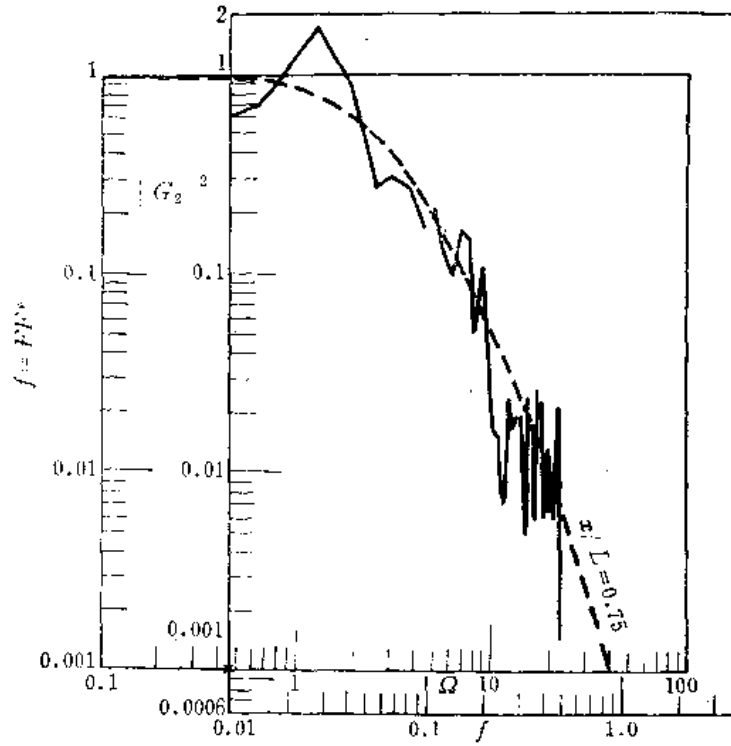


图 4.23 在相关输入的情况下，图4.10和4.16的样本拟合。×用来作为12号井的参数计算点

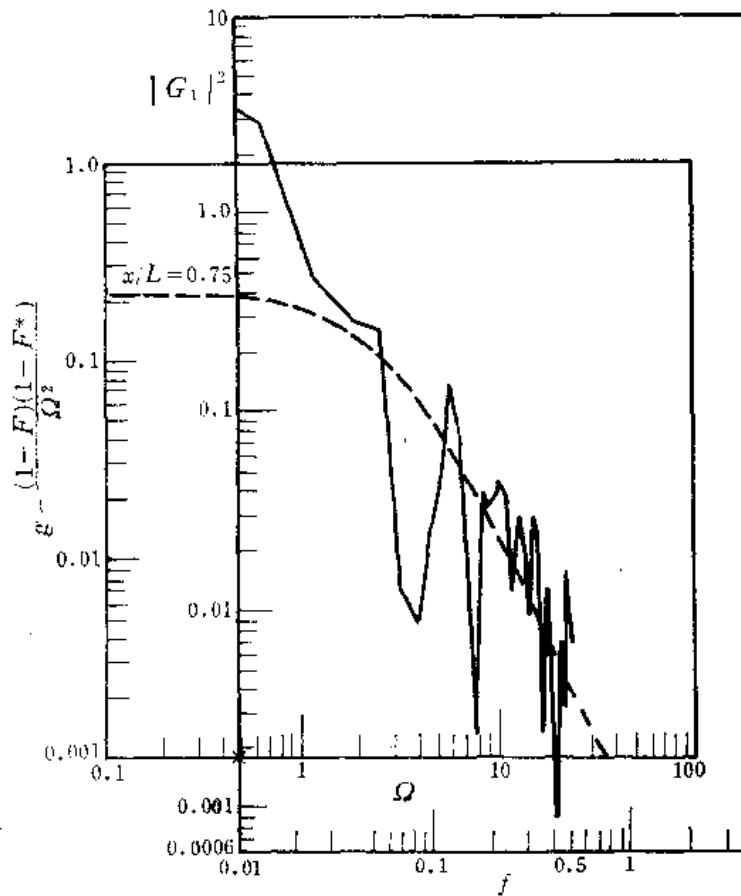


图 4.24 在相关输入的情况下，图4.11和4.17的样本拟合。×用来作为12号井的参数计算点

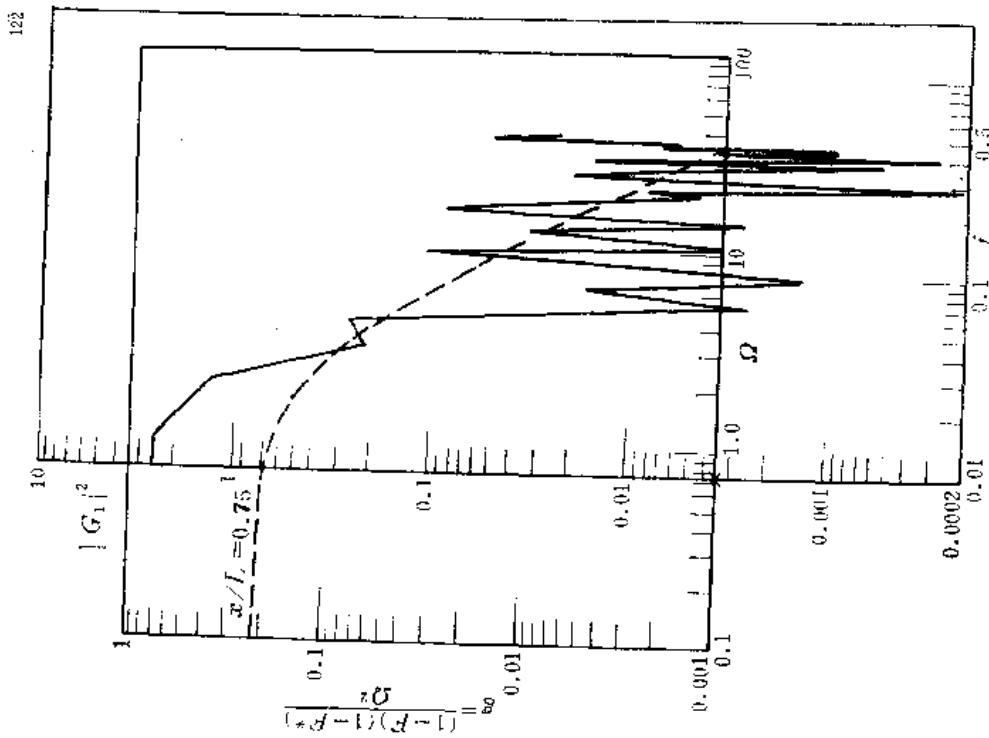


图 4.25 在相关输入的情况下, 图 4.14 和 4.16 的样本拟合。× 用来作为 812 号井的参数计算点

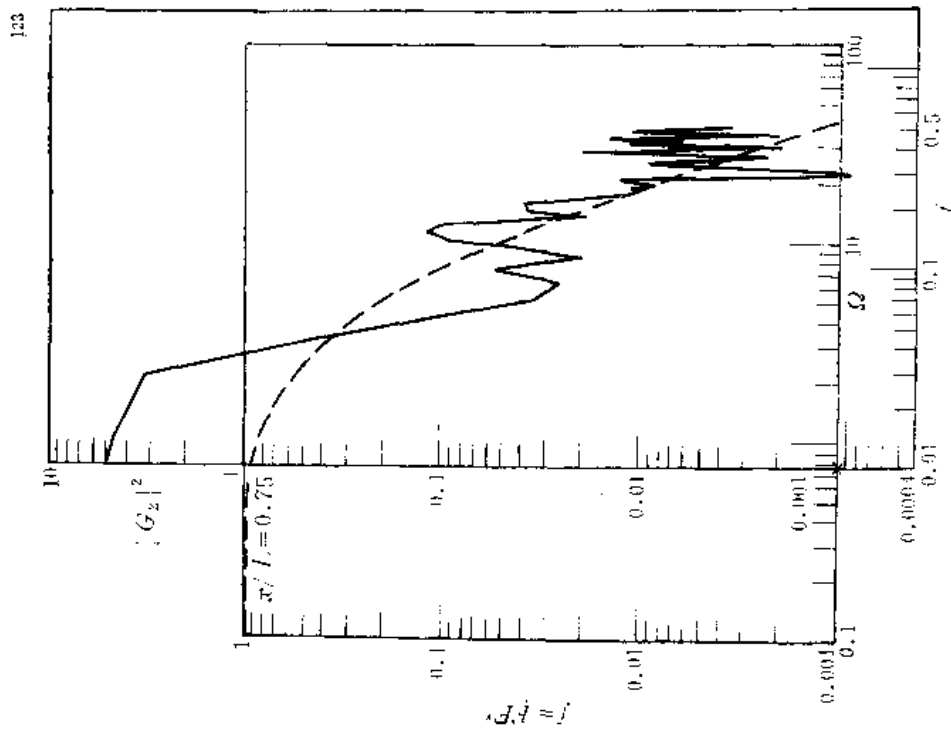


图 4.26 在相关输入的情况下, 图 4.15 和 4.17 的样本拟合。× 用来作为 812 号井的参数计算点

取 $x=1200$ 英尺, $L=1600$ 英尺, $\gamma=0.05$, S 和 T 可以分别确定为 0.27 和 0.32×10^4 英尺²/日。同样, 对812号井, 有:

$$\frac{\gamma L^2}{T} = 1.844$$

和

$$\frac{T}{S} = \frac{2\pi L^2}{75}$$

其中的

$$L = 6000 \text{ 英尺}$$

采用 $\gamma=0.05$, S 和 T 可以分别确定为 0.32 和 3.25×10^4 英尺²/日。注意, 在这些计算中 S 是直接和 γ 成比例的, 所以 γ 的测定值减小, 必将引起 S 的相应减小。但是, S 与 L 的测定值无关。用两种近似法测定的 S 和 T 值的概况, 以及威廉斯和洛曼(1949)求得的数值都列在表4.3中。

表 4.3 含水层参数一览表

资料来源	井号	导水系数 T (英尺 ² /日)	贮水系数 S	γ	含水层长度 L (英尺)
独立输入情况	12	0.212×10^4	0.135	0.05	1600
	812	3.08×10^4	0.285	0.05	6000
相关输入情况	12	0.32×10^4	0.27	0.05	1600
	812	3.25×10^4	0.32	0.05	6000
第79号通报 (威廉斯和洛曼, 1949)		0.615×10^4 至 4.41×10^4	0.33 (12号井)		

4.4 讨 论

上述结果说明频谱分析对复杂的自然环境能提供比较好的含水层参数计算值。应该着重指出, 这种分析的地点和资料的选择主要依据有无比长的观测记录可用, 而且这种记录类型应是很多地点都适用的。为了用实际情况论证这种方法, 我们有意选择了一个含水层结构不清的复杂地区, 而不是那种限制条件严密、结构清楚的含水层, 因为后者会是理论模型理想化几何形状的重现。目的是说明这种技术适合于野外实际情况。并不认为模型需要用理想化的几乎形状来验证, 因为含水层的基本方程(2.3.1)已经建立得很好, 而且在随机情况下线性化的有效性也已在第三章的模拟中说明了。

对河水位和含水层水位来说, 数值谱计算的输入时间序列, 其数值是以月为间隔抽样的, 这对从头至尾所用资料的时间来说, 是最小的时段。然而, 对降水资料来说, 用的是全月总值(实际上是全月的平均率)。采用月平均降水量虽然表现出不协调, 但是, 不论从理论方面或物理方面来看, 实际上都比使用离散值更为适宜。从理论上讲, 使用时间序列的平均数, 可以象使用线性系统理论的滤波那样, 用分析平均过程的方法来评价其效应(参看例如 Jenkins 和 Watts 1968的著作, 第二章)。这种分析表明频谱的振幅衰减达到接近尼奎斯特频率(Nyquist frequency, 0.5周期/月)*, 但在较低频处频谱并不失真。

* 尼奎斯特频率是和取样有关的折叠频率, 等于取样频率的一半。——译者

此种效应与图2.33中所说明的非饱和带内的贮水效应非常相似。从物理方面看，因为有非饱和带的贮水效应，可以肯定补给输入与瞬时降水率不成比例。使用平均降水率含蓄地说明非饱和带的贮水，在某种程度上说，理论上是可行的，因而也是适宜的。

根据马萨诸塞州威尔明顿的日降水量和一个水井的地下水位所作的初步数值谱分析来看，我们的经验是，月度资料将足以表征大多数潜水含水层系统的频谱响应。较高频（ > 0.5 周期/月）的能量值很小，对计算的转换函数没有影响。威尔明顿含水层的响应时间（式2.2.4中的 S/a ）为三个月左右；堪萨斯地区的响应时间也属于同样大小（据4.3.18式，响应时间 $= SL^2/3T$ ）。仅仅在响应时间很短（比方说，小于一个月）时，即含水层规模小而透水性强时，才需要比较小的取样间隔。

由于所计算的转换函数的波动，拟合过程可能显得有些主观。我们的经验是，充分不受干扰的拟合分析基本上产生相同的结果；即使如此，也还可以使用更为客观的方法，诸如最小二乘法拟合等等。在谱计算时，引入较多的修匀（例如，较少的延滞），可以消除所计算的转换函数的波动；但是，这会有在谱估计中引入偏差的危险。这就是在谱估计中人们所熟知的在稳定性和精确性之间的权衡（Jenkins 和 Watts，第七章）。我们选择了一种图，它保留了频谱的细节，虽然也可能有一些波动是乱真的。由于引入了较多的修匀，理论上的比较可以显得更为良好。代表4.3上的结果来看，相关输入的效应相当重要，应该包括进去。

在本书的资料分析中，假设在补给和降水之间为简单的线性关系，这被认为可以当作实际补给过程的粗略近似式。企图解决补给预测这个困难问题，超出了本书的范围。大多数水文学家认为，这作为一个尚未解决的基本问题来说，只要改进的预测方法得以应用，就可以容易地把它包括到谱模型中来。用降水、温度和其他气象资料对补给定出一个函数关系，就要用这些附加的输入序列进行多重输入分析。在2.6节中关于蒸发-蒸腾损失与温度的线性关系问题提到过这种方法。蒸发-蒸腾损失的季节效应在有些情况下会是相当重要的，应该在将来的研究中加以探讨。作为一种根据地下水位变化计算地下水补给的方法来说，也应该对谱分析的应用加以探讨。

虽然有如上所述的自然环境的复杂性，但是在堪萨斯地区使用谱方法相当良好的结果表明，这种方法在说明地下水位的天然变化方面有很大的潜力。地下水位已有的大量资料，通过谱分析可以提供更多的数量信息，如果资料处理得易于为计算机接受，就能定期地进行分析。随着经验的积累，地下水系统的一些描述性现象，也可能用谱检验来识别。其他资料解释方法也是有用的；例如，可以用比较简单的线性贮水体模型（2.2节）解某些问题（Gelhar 和 Wilson, 1974）。用频谱转换函数分析能够求得这种集中参数模型的参数（式2.2.4中的 S 和 a ），只是理论的转换函数比较简单（见2.2.9式）。根据一个含水层中几口井的水位进行交叉谱分析的方法，也是令人感兴趣的。

第五章 结 论

确定了几项与地下水系统的时间变化有关的结果。它们是下列各项：

1. 线性含水层模型 可以用来给一些潜水含水层结构的频谱响应特征作理论预测。对含水层坡度、径流带增厚和垂向流的效应等进行了分析，并且确定了可以略去这些因素的条件。在许多野外条件下，应用水平的裘布依模型是合理的，但若已经弄清了含水层的结构形状，可以把其他效应也计算进去。

2. 非线性含水层模拟 可以预测潜水含水层频谱响应的所有非线性效应。对野外条件来说，非线性效应一般都相当小，因此，线性分析模型就为解释野外观测资料提供了良好的基础。补给强度的空间变化对频谱的影响也是很小的。

3. 含水层参数 把观测到的含水层频谱响应与线性理论进行比较，可以确定含水层参数。根据降水量、河流水位和含水层的水位资料，使用频谱拟合方法，可以计算与河流联通的含水层的贮水系数和导水系数。

另外，还证实了取样间隔为一个月或更长时间时，在潜水面以上的非饱和带内，与流动现象有关的频谱失真是相当小的。

在设计简单的水流观测网时，发现用空间相关函数反映其特征的渗透系数的空间变化，是一个应该包括进去的重要因素。

依据地下水位的天然变化计算含水层参数，在这方面必将广泛应用本研究的成果。因此，应该有可能更好地应用这类目前广泛存在的资料去评价地下水资源。在将来的研究中，应该探索的重要项目是：与非平稳含水层响应有关的处理技术，以及在复杂的多井观测网设计中把水文参数的空间变化包括进去的方法问题。考虑到温度对蒸发-蒸腾损失有何影响的更为合理的补给模型，也应该加以研究。

参 考 文 献

- Bear, J., Dynamics of Fluids in Porous Media, American-Elsevier Publishing Co., Inc., 1972.
- Bendat, J. S. and Piersol, A. G., Random Data: Analysis and Measurement Procedures, Wiley-Interscience, John Wiley & Sons, Inc., 1971.
- Brooks, R. H., "Unsteady Flow of Groundwater into Drain Tile", J. Irr. and Drain. Div., ASCE, Vol. 87, IR2, pp. 27-37, 1961.
- Buyevick, Y. A., Leonov, A. I. and Safrai, V. M., "Variations in Filtration Velocity Due to Random Large-Scale Fluctuations of Porosity", J. Fluid Mech., Vol. 37, pp. 371-381, 1969.
- Cooper, H. H., Jr., and Rorabaugh, M. I., "Changes in Ground-Water Movement and Bank Storage Caused by Flood Waves in Surface Streams", U.S.G.S. Prof. Paper 475-B, B192-195, 1963.
- Dagan, G., "Linearized Solution of Unsteady Deep Flow toward an Array of Horizontal Drains", J. Geophys. Res., Vol. 69, No. 16, pp. 3361-3369, 1964.
- Dixon, W. J. (editor), BMD Biomedical Computer Programs, University of California Press, 1973.
- Dooge, J. C. I., "The Routing of Groundwater Recharge through Typical Elements of Linear Storage", International Association of Scientific Hydrology, Publication No. 52, General Assembly of Helsinki, pp. 286-300, 1960.
- Eagleson, P. S., Dynamic Hydrology. McGraw-Hill, New York, 1970.

- Eriksson, E., "Groundwater Time-Series: An Exercise in Stochastic Hydrology", J. Nordic Hydrol., Vol. 3, pp. 181-205, 1970a.
- Eriksson, E., "Cross-Spectrum Analysis of Groundwater Levels in an Esker", J. Nordic Hydrol., Vol. 4, pp. 245-259, 1970b.
- Freeze, R. A. and Banner, J., "The Mechanism of Natural-Ground-Water Recharge and Discharge 2. Laboratory Column Experiments and Field Measurements", Water Resour. Res., Vol. 6, pp. 138-155, 1970.
- Gardner, W. R., "Gravity Drainage of Soils", Soil Sci. Soc. Am. Proc., Vol. 26, pp. 129-132, 1962.
- Gelhar, L. W., "Stochastic Analysis of Phreatic Aquifers", Water Resour. Res., Vol. 10, pp. 539-545, 1974.
- Gelhar, L. W. and Wilson, J. L., "Ground-Water Quality Modeling", Ground Water, Vol. 12, pp. 399-408, 1974.
- Glover, R. E. and Bittinger, N. W., "Drawdown Due to Pumping from an Unconfined Aquifer", Transactions, ASCE, Vol. 26, pp. 176-183, 1961
- Glover, R. E., "Seasonal Fluctuations of Return Flows", Proc. National Symposium on Ground-Water Hydrology, American Water Resources Association, Proc. Series No. 4, pp. 272-278, 1967.
- Granger, C. W. J. and Hatanaka, M., Spectral Analysis of Economic Time Series, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1964.
- Hall, F. R. and Moench, A. F., "Application of the Convolution Equation to Stream-Aquifer Relationships", Water Resour. Res., Vol. 8, pp. 487-493, 1972.
- Hannan, E. J., Time Series Analysis, Science Paperbacks, Methuen & Co., Ltd., London, 1960.

- Haushild, W. and Krusa, G., "Unsteady Flow of Groundwater into a Surface Reservoir", J. Hydraul. Div., ASCE, Vol. 86, HY7, pp. 13-20, 1960.
- Hornberger, G., Ebert, J. and Remson, I., "Numerical Solution of the Boussinesq Equation for Aquifer-Stream Interaction", Water Resour. Res., Vol. 6, pp. 601-608, 1970.
- Hunt, B. W., "Vertical Recharge of Unconfined Aquifer", J. Hydraul. Div., ASCE, Vol. 97, HY7, pp. 1017-1030, 1971.
- Jackson, R. E., Gilliland, J. A. and Adamowski, K., "Time Series Analysis of the Hydrologic Regimen of a Groundwater Discharge Area", Water Resour. Res., Vol. 9, pp. 1411-1419, 1973.
- Jacob, C. E., "Correlation of Ground-Water Levels and Precipitation on Long Island, New York", Transactions, A.G.U., Vol. 24, pp. 564-572, 1943.
- Jenkins, G. M. and Watts, D. G., Spectral Analysis and Its Applications, Holden-Day, Inc., 1968.
- Karadi, G., Krizek, R. and Elnaggar, H., "Unsteady Seepage Flow Between Fully Penetrating Trenches", J. Hydrol., Vol. 6, pp. 417-430, 1968.
- Kraijenhoff van de Leur, D. A., "A Study of Non-Steady Groundwater Flow with Special Reference to a Reservoir-Coefficient", De Ingenieur, No. 19, pp. 87-94, 1958.
- Kriz, G. J., "Determination of Unconfined Aquifer Characteristics", J. Irr. and Drain. Div., ASCE, Vol. 93, IR2, pp. 37-47, 1967.
- Kriz, G. J., Scott, V. H. and Burgy, R. H., "Analysis of Parameters of an Unconfined Aquifer", J. Hydraul. Div., ASCE, Vol. 92, HY5, pp. 49-56, 1966.

- Murray, W. A. and Monkmeier, P. L., "Validity of Dupuit-Forchheimer Equation", J. Hydraul. Div., ASCE, HY9, pp. 1573-1577, 1973.
- Papoulis, A., Probability, Random Variables and Stochastic Processes, McGraw-Hill, New York, 1965.
- Peaceman, D. W. and Rachford, H. H., Jr., "The Numerical Solution of Parabolic and Elliptic Differential Equations", J. Soc. Ind. and Appl. Math., Vol. 3, pp. 28-41, 1955.
- Pinder, G. F., Bredehoeft, J. D. and Cooper, H. H., Jr., "Determination of Aquifer Diffusivity from Aquifer Response to Fluctuations in River Stage", Water Resour. Res., Vol. 5, pp. 850-855, 1969.
- Polubarinova-Kochina, P. Y., Theory of Ground Water Movement, Translated by R. J. M. DeWiest, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1962.
- Prickett, T. A. and Lonquist, C. G., Selected Digital Computer Techniques for Groundwater Resource Evaluation, Illinois State Water Survey, Urbana, 1971.
- Remson, I., Hornberger, G. M. and Moltz, F. J., Numerical Methods in Subsurface Hydrology, Wiley-Interscience, John Wiley & Sons, Inc., 1971
- Singh, K. P., "Theoretical Baseflow Curves", J. of Hydraul. Div., ASCE, Vol. 95, HY6, pp. 2029-2048, 1969.
- Stramel, G. J., "Progress Report on the Ground-Water Hydrology of the Equus Beds Area, Kansas", State Geological Survey of Kansas, Bulletin 119, Part 1, 1956.

- Stramel, G. J., "Progress report on the Ground-Water Hydrology of the Equus Beds Area, Kansas - 1966", State Geological Survey of Kansas, Bulletin 187, Part 2, 1967.
- Swartzendruber, D., "The Flow of Water in Unsaturated Soils", in Flow in Porous Media, R. J. M. DeWiest, Ed., Academic Press, New York, 1969.
- Thorntwaite, C. W., "An Approach Toward a Rational Classification of Climate", American Geographical Review, Vol. 38, pp. 55-94, 1948.
- Tison, G., Jr., "Fluctuations of Ground-Water Levels", in Advances in Geophysics, Vol. 2, pp. 303-325, 1965.
- van Schilfgaarde, J., "Transient Design of Drainage Systems", ASCE Water Resources Engineering Conference Preprint 172, Mobile, Alabama, March 8-12, 1965.
- Venetis, C., "Estimating Infiltration and/or the Parameters of Unconfined Aquifers from Groundwater Level Observations", J. Hydrol., Vol. 12, pp. 161-169, 1971.
- Williams, C. C. and Lohman, S. W., "Geology and Ground-Water Resources of a Part of South-Central Kansas with Special Reference to the Wichita Municipal Water Supply", State Geological Survey of Kansas Bulletin 79, 1949.
- Yeh, W., "Nonsteady Flow to Surface Reservoir", J. Hydraul. Div., ASCE, Vol. 96, HY6, pp. 609-618, 1970.
- Youngs, E. G., "The Drainage of Liquids from Porous Materials", J. Geophys. Res., Vol. 65, pp. 4025-4030, 1960.

附录A 计算机程序表

本程序的基础是：普里克特和朗奎斯特1971年编写的潜水含水层模拟程序。略加修改之处包括引入特有的边界条件和一维表达式。本表适合于具有河流水位输入和补给输入这种双重输入的特殊情况。资料得自威奇塔的堪萨斯州的美国地质调查所，在程序末尾列出了这些资料。将 BMD02-T 程序（生物医学的计算程序，自协方差和功率谱分析）也列成了表，这是用于输入和输出时间序列的资料分析的，其后面的部分直接取自数值模拟程序。

BASP0001
 BASP0002
 BASP0003
 BASP0004
 BASP0005
 BASP0006
 BASP0007
 BASP0008
 BASP0009
 BASP0010
 BASP0011
 BASP0012
 BASP0013
 BASP0014
 BASP0015
 BASP0016
 BASP0017
 BASP0018
 BASP0019
 BASP0020
 BASP0021
 BASP0022
 BASP0023
 BASP0024
 BASP0025
 BASP0026
 BASP0027
 BASP0028
 BASP0029
 BASP0030
 BASP0031
 BASP0032
 BASP0033
 BASP0034
 BASP0035
 BASP0036

C BASIC AQUIFER SIMULATION PROGRAM
 C WITH WATER-TABLE CONDITIONS
 C DEFINITION OF VARIABLES
 C HO(I,J)-----HEADS AT START OF TIME
 C INCREMENT (I,J)
 C H(I,J)-----HEADS AT END OF TIME
 C SF2(I,J)-----STORAGE FACTOR FOR WATER-
 C TABLE CONDITIONS
 C INCREMENT
 C Q(I,J)-----CONSTANT WITHDRAWAL
 C RATES
 C T(I,J,1)-----AQUIFER TRANSMISSIVITY
 C BETWEEN I,J AND I,J+1
 C T(I,J,2)-----AQUIFER TRANSMISSIVITY
 C BETWEEN I,J AND I+1,J
 C AA,BB,CC,DD--COEFFICIENTS IN WATER
 C BALANCE EQUATIONS
 C NR-----NO. OF ROWS IN MODEL
 C NC-----NO. OF COLUMNS IN MODEL
 C NSTEPS-----NO. OF TIME INCREMENTS
 C DELTA-----TIME INCREMENTS
 C HH,SZ,QO,TT--DEFAULT VALUES
 C PERM(I,J,1)--AQUIFER PERMEABILITY
 C BETWEEN I, J AND I, J+1
 C PERM(I,J,2)--AQUIFER PERMEABILITY
 C BETWEEN I, J AND I+1, J
 C BOT(I,J)-----ELEVATION OF BOTTOM OF
 C AQUIFER
 C RR(I,STEP)----ACRETION RATE AT TIME STEP I STEP
 C HX(I,STEP)----PRECIPITATION DATA AT EACH TIME STEP
 C HXL(I,STEP)---STREAM GAUGE DATA AT EACH TIME STEP
 C HY(I,STEP)---DIMENSIONLESS ACCRETION RATE
 C RO-----PARAMETER OF DIMENSIONLESS ACCRETION MEAN
 C UM-----COEFFICIENT OF WITHDRAWAL RATES
 C DIMENSION H(50,50),O(50,50),HO(50,50),
 C ISF2(50,50),Q(50,50),T(50,50,2),

BASP0037
 BASP0038
 BASP0039
 BASP0040
 BASP0041
 BASP0042
 BASP0043
 BASP0044
 BASP0045
 BASP0046
 BASP0047
 BASP0048
 BASP0049
 BASP0050
 BASP0051
 BASP0052
 BASP0053
 BASP0054
 BASP0055
 BASP0056
 BASP0057
 BASP0058
 BASP0059
 BASP0060
 BASP0061
 BASP0062
 BASP0063
 BASP0064
 BASP0065
 BASP0066
 BASP0067
 BASP0068
 BASP0069
 BASP0070
 BASP0071
 BASP0072

```

28(50),G(50),DL(50,50),HY(1000),HX1(1000)
3,PERM(50,50,2),BOT(50,50),HX(1000),RR(1000)
C TURN OFF UNDERFLOW TRAP
C DEFINE INPUT AND OUTPUT DEVICE NUMBERS
INTEGER OUT
IN=5
CUT=6
C READ PARAMETER CARD AND
C DEFAULT VALUE CARD
READ(IN,10)NSTEPS,DELTA,ERROR,
INC,NR,TT,HH,QQ,S2,PP,BOTT
10 FORMAT(16,2F8.0,2I6.0,1F6.0,6X,2F6.0
1,18X,1F6.0,6X,2F6.0)
C FILL ARRAYS WITH DEFAULT VALUES
DO 20 I=1,NC
DO 20 J=1,NR
SF2(I,J)=S2
PERM(I,J,I)=PP
PERM(I,J,2)=PP
BOT(I,J)=BOTT
T(I,J,1)=TT
T(I,J,2)=TT
H(I,J)=HH
HO(I,J)=HH
Q(I,J)=QQ
20 C READ NODE CARDS
DO 30 I=1,NC
DO 30 J=1,NP
READ(5,40) I,J,T(I,J,1),
IT(I,J,2),H(I,J),Q(I,J),
2SF2(I,J),PERM(I,J,1),PERM(I,J,2),BOT(I,J)
40 FORMAT(2I3,2F6.0,2F4.0,F10.0,3F6.0)
C READ PRECIPITATION DATA
READ(5,45)(HX(K),K=1,405)
C READ STREAM GAUGE DATA
READ(5,45)(HX1(K),K=1,405)
  
```

45 FORMAT(8X,12F6.2)
 C START OF SIMULATION
 50 TIME=0
 C DIMENSIONLESS ACCRETION INPUT
 HY(I,STEP)=HX(I,STEP)/2.557
 RO=1.
 C RR(I,STEP)=.0025*RO*HY(I,STEP)
 DIMENSIONLESS STREAM INPUT
 H(1,1)=1.+HX1(I,STEP)/25.
 H(1,2)=H(1,1)
 C NO FLOW BOUNDARY CONDITIONS
 H(22,1)=H(20,1)
 H(22,2)=H(20,2)
 C PREDICT HEADS FOR NEXT
 C TIME INCREMENT
 DO 70 I=1,NC
 DO 70 J=1,NR
 D=H(I,J)-HO(I,J)
 HO(I,J)=H(I,J)
 F=1.0
 IF(DL(I,J).EQ.0.0)GO TO 60
 IF(I,STEP.GT.2)F=D/DL(I,J)
 IF(F.GT.5)F=5.0
 IF(F.LT.0.0)F=0.0
 DL(I,J)=D
 H(I,J)=H(I,J)+D*F
 IF(H(I,J).LE.BOT(I,J))H(I,J)=BOT(I,J)+0.01
 C REFINE ESTIMATES OF HEADS BY IADI METHOD
 ITER=0
 E=0.0
 ITER=ITER+1
 C TRANSMISSIVITY CONTROL
 DC 83 I=1,NC
 DO 83 J=1,NR
 IF(J,L,MC)T(I,J,2)=PERM(I,J,2)*(H(I,J)+H(I+1,J))/2
 IF(J,L,NR)T(I,J,1)=PERM(I,J,1)*(H(I,J)+H(I,J+1))/2
 60
 70
 C
 80
 C
 83

BASP0109
 BASP0110
 BASP0111
 BASP0112
 BASP0113
 BASP0114
 BASP0115
 BASP0116
 BASP0117
 BASP0118
 BASP0119
 BASP0120
 BASP0121
 BASP0122
 BASP0123
 BASP0124
 BASP0125
 BASP0126
 BASP0127
 BASP0128
 BASP0129
 BASP0130
 BASP0131
 BASP0132
 BASP0133
 BASP0134
 BASP0135
 BASP0136
 BASP0137
 BASP0138
 BASP0139
 BASP0140
 BASP0141
 BASP0142
 BASP0143
 BASP0144

```

C COLUMN CALCULATIONS
DO 190 I=1,NC
  I=I
  IF(MOD(I,STEP+1)*ER,2).EQ.1) I=NC-I+1
DO 170 J=1,NR
  CALCULATE B AND G ARRAYS
  BB=SF2(I,J)/DELTA
  UM=0.
  DD=HQ(I,J)*SF2(I,J)/DELTA+RR(I,STEP)-UM*O(I,J)
  AA=0.0
  CC=0.0
  IF(J-1)90,100,90
  AA=I(I,J-1)
  BB=BB+T(I,J-1,I)
  IF(J-NR)110,120,110
  CC=-T(I,J,I)
  BB=BB+T(I,J,J-1)
  IF(I-1)130,140,130
  BB=BB+T(I-1,J,2)
  DD=DD+H(I-1,J)*T(I-1,J,2)
  IF(I-NC)150,160,150
  BB=BB+T(I,J,2)
  DD=DD+H(I+1,J)*T(I,J,2)
  W=BB-AA*B(J-1)
  B(J)=CC/W
  G(J)=(DD-AA*G(J-1))/W
  RE=ESTIMATE HEADS
  E=E+ABS(H(I, NR))-G(NR)
  H(I, NR)=G(NR)
  N=NR-1
  HA=G(N)-E(N)≠H(I, N+1)
  E=E+ABS(HA-H(I, N))
  H(I, N)=HA
  N=N-1
  IF(N.GT.0)GO TO 180
DO 190 N-1, NR
  
```

90
 100
 110
 120
 130
 140
 150
 160
 170
 C
 180

```

190 IF (H(I,N).GT.80T(I,N))GO TO 190
    F=E+80T(I,N)+0.01-H(I,N)
    H(I,N)=80T(I,N)+G.01
    CONTINUE
    C
    TRANSMISSIVITY CONTROL
    DO 193 J=1,NR
    DO 193 I=1,NC
    IF(I.LT.NC)T(I,J,2)=PFRM(I,J,2)*(H(I,J)+H(I+1,J))/2
    IF(J.LT.NR)T(I,J,1)=PERM(I,J,1)*(H(I,J)+H(I,J+1))/2
    C
    ROW CALCULATIONS
    DO 300 JJ=1,NR
    J=JJ
    IF(M00(ISTEP+ITER,2).EQ.1) J=NR-J+1
    DO 280 I=1,NC
    BB=SF2(I,J)/DELTA
    DD=H0(I,J)*SF2(I,J)/DELTA+RR(ISTEP)-UM*Q(I,J)
    AA=0.0
    CC=0.0
    IF(I-1)200,210,200
    BB=BB+T(I,J-1,1)
    DD=DD+H(I,J-1)*T(I,J-1,1
    200 IF(J-NR)220,230,220
    210 DD=DD+H(I,J+1)*T(I,J,1)
    220 BB=BB+T(I,J,1)
    IF(I-1)240,250,240
    RR=RR+T(I-1,J,2)
    230 AA=-T(I-1,J,2)
    240 IF(I-NC)260,270,260
    BB=BB+T(I,J,2)
    250 CC=-T(I,J,2)
    260 W=BB-AA+R(I-1)
    C
    GO TO 275
    270 W=RR-(AA+CC)*H(I-1)
    275 B(I)=CC/W
    280 G(I)=(DD-AA*G(I-1))/W
    C
    RE-ESTIMATE HEADS
    BASP0145
    BASP0146
    BASP0147
    BASP0148
    BASP0149
    BASP0150
    BASP0151
    BASP0152
    BASP0153
    BASP0154
    BASP0155
    BASP0156
    BASP0157
    BASP0158
    BASP0159
    BASP0160
    BASP0161
    BASP0162
    BASP0163
    BASP0164
    BASP0165
    BASP0166
    BASP0167
    BASP0168
    BASP0169
    BASP0170
    BASP0171
    BASP0172
    BASP0173
    BASP0174
    BASP0175
    BASP0176
    BASP0177
    BASP0178
    BASP0179
    BASP0180

```

```

E=E+ABS(H(NC,J)-G(NC))
H(NC,J)=G(NC)
N=NC-1
290 HA=G(N)-B(N)*H(N+1,J)
E=E+ABS(H(N,J)-HA)
H(N,J)=HA
N=N-1
IF(N.GT.0)GO TO 290
DO 300 N=1,NC
IF(H(N,J).GT.BOT(N,J))GO TO 300
E=E+BOT(N,J)+D.01-H(N,J)
H(N,J)=BOT(N,J)+D.01
300 CONTINUE
C PRINT RESULTS
C IF(E.GT.ERROR) GO TO 80
315 DO 320 J=1,I
WRITE(6,330)ISTEP,HY(ISTEP),(H(I,J),I=1,NC,5)
C STORE DATA IN TAPE
320 WRITE(12,330)ISTEP,HY(ISTEP),(H(I,J),I=1,NC,5)
330 FORMAT(I6,6F12.5)
340 CONTINUE
STOP
END
C CONTROL CARDS(OMITTED) FOR GENERATED DATA IN TAPE
C TO BE USED IN THE BMD 02T PROGRAM
C LISTING OF DATA
+05 0.0314 0.003
21 2 1.0 1.0 0.0 1.0 0.0 1.0 0.0 90000000.0 1.0 1.0 0.0
C NODE CARDS
1 1 1.0 1.0 1.0 0.0 1.0 0.0 90000000.0 1.0 1.0 0.0
1 2 1.0 1.0 1.0 0.0 90000000.0 1.0 1.0 0.0
2 1 1.0 1.0 1.0 0.0 0.0025 1.0 1.0 0.0
2 2 1.0 1.0 1.0 0.0 0.0025 1.0 1.0 0.0
3 1 1.0 1.0 1.0 0.0 0.0025 1.0 1.0 0.0
3 2 1.0 1.0 1.0 0.0 0.0025 1.0 1.0 0.0
4 1 1.0 1.0 1.0 0.0 0.0025 1.0 1.0 0.0

```

BASP0181
 BASP0182
 BASP0183
 BASP0184
 BASP0185
 BASP0186
 BASP0187
 BASP0188
 BASP0189
 BASP0190
 BASP0191
 BASP0192
 BASP0193
 BASP0194
 BASP0195
 BASP0196
 BASP0197
 BASP0198
 BASP0199
 BASP0200
 BASP0201
 BASP0202
 BASP0203
 BASP0204
 BASP0205
 BASP0206
 BASP0207
 BASP0208
 BASP0209
 BASP0210
 BASP0211
 BASP0212
 BASP0213
 BASP0214
 BASP0215
 BASP0216

4	2	1.0	1.0	0.0	0.0025	1.0	1.0	1.0	0.0	0.0
5	1	1.0	1.0	0.0	0.0025	1.0	1.0	1.0	1.0	0.0
5	2	1.0	1.0	0.0	0.0025	1.0	1.0	1.0	1.0	0.0
6	1	1.0	1.0	0.0	0.0025	1.0	1.0	1.0	1.0	0.0
6	2	1.0	1.0	0.0	0.0025	1.0	1.0	1.0	1.0	0.0
7	1	1.0	1.0	0.0	0.0025	1.0	1.0	1.0	1.0	0.0
7	2	1.0	1.0	0.0	0.0025	1.0	1.0	1.0	1.0	0.0
8	1	1.0	1.0	0.0	0.0025	1.0	1.0	1.0	1.0	0.0
8	2	1.0	1.0	0.0	0.0025	1.0	1.0	1.0	1.0	0.0
9	1	1.0	1.0	0.0	0.0025	1.0	1.0	1.0	1.0	0.0
9	2	1.0	1.0	0.0	0.0025	1.0	1.0	1.0	1.0	0.0
10	1	1.0	1.0	0.0	0.0025	1.0	1.0	1.0	1.0	0.0
10	2	1.0	1.0	0.0	0.0025	1.0	1.0	1.0	1.0	0.0
11	1	1.0	1.0	0.0	0.0025	1.0	1.0	1.0	1.0	0.0
11	2	1.0	1.0	0.0	0.0025	1.0	1.0	1.0	1.0	0.0
12	1	1.0	1.0	0.0	0.0025	1.0	1.0	1.0	1.0	0.0
12	2	1.0	1.0	0.0	0.0025	1.0	1.0	1.0	1.0	0.0
13	1	1.0	1.0	0.0	0.0025	1.0	1.0	1.0	1.0	0.0
13	2	1.0	1.0	0.0	0.0025	1.0	1.0	1.0	1.0	0.0
14	1	1.0	1.0	0.0	0.0025	1.0	1.0	1.0	1.0	0.0
14	2	1.0	1.0	0.0	0.0025	1.0	1.0	1.0	1.0	0.0
15	1	1.0	1.0	0.0	0.0025	1.0	1.0	1.0	1.0	0.0
15	2	1.0	1.0	0.0	0.0025	1.0	1.0	1.0	1.0	0.0
16	1	1.0	1.0	0.0	0.0025	1.0	1.0	1.0	1.0	0.0
16	2	1.0	1.0	0.0	0.0025	1.0	1.0	1.0	1.0	0.0
17	1	1.0	1.0	0.0	0.0025	1.0	1.0	1.0	1.0	0.0
17	2	1.0	1.0	0.0	0.0025	1.0	1.0	1.0	1.0	0.0
18	1	1.0	1.0	0.0	0.0025	1.0	1.0	1.0	1.0	0.0
18	2	1.0	1.0	0.0	0.0025	1.0	1.0	1.0	1.0	0.0
19	1	1.0	1.0	0.0	0.0025	1.0	1.0	1.0	1.0	0.0
19	2	1.0	1.0	0.0	0.0025	1.0	1.0	1.0	1.0	0.0
20	1	1.0	1.0	0.0	0.0025	1.0	1.0	1.0	1.0	0.0
20	2	1.0	1.0	0.0	0.0025	1.0	1.0	1.0	1.0	0.0
21	1	1.0	1.0	0.0	0.0025	1.0	1.0	1.0	1.0	0.0
21	2	1.0	1.0	0.0	0.0025	1.0	1.0	1.0	1.0	0.0

C 30 DAYS-INTERVAL DATA OF PRECIPITATION FROM 1938 TO 1971

1938	0.12	2.48	1.91	2.83	8.14	4.49	2.24	5.60	2.62	0.16	2.05	0.15	HASPO253
1939	1.09	1.93	1.57	2.14	3.25	8.90	0.72	5.84	0.30	1.14	0.81	0.95	BASPO254
1940	1.40	1.43	0.74	6.15	5.82	4.83	0.94	2.87	6.14	1.05	3.82	1.56	BASPO255
1941	1.53	1.09	1.11	2.83	2.89	7.03	2.41	3.54	4.29	4.81	0.78	0.92	BASPO256
1942	0.23	1.93	0.83	7.08	1.67	8.69	2.34	4.51	7.21	3.77	0.68	3.14	BASPO257
1943	0.27	0.67	1.21	1.94	6.59	3.43	6.51	1.95	3.14	1.83	0.07	2.33	BASPO258
1944	1.01	1.34	4.55	12.42	2.04	1.60	5.49	4.77	2.20	2.20	1.93	3.98	BASPO259
1945	1.07	0.84	1.85	6.79	1.28	4.00	5.01	4.11	10.58	0.51	0.05	0.62	BASPO260
1946	2.21	1.23	1.81	1.87	2.11	2.71	0.32	2.90	1.27	4.32	2.14	0.78	BASPO261
1947	0.71	0.52	2.91	5.20	4.69	2.57	2.89	0.82	0.25	1.50	0.89	2.98	BASPO262
1948	1.00	1.19	1.51	1.65	1.86	9.76	6.39	2.72	1.05	0.67	3.30	0.23	BASPO263
1949	6.29	1.80	2.01	3.83	6.15	3.16	6.97	1.13	3.62	1.91	0.06	1.22	BASPO264
1950	0.52	1.61	0.50	0.88	2.24	4.02	13.37	5.93	1.04	0.48	0.26	0.02	BASPO265
1951	1.03	2.58	2.69	6.33	7.60	10.07	4.45	5.38	6.59	2.05	1.47	0.24	BASPO266
1952	0.41	0.35	2.68	1.97	2.31	1.08	4.94	2.52	0.28	0.00	2.40	1.09	BASPO267
1953	0.15	0.82	3.35	0.57	2.02	2.17	2.9	0.82	0.53	3.77	1.46	1.06	BASPO268
1954	0.09	0.57	1.30	1.54	4.84	0.94	0.19	0.56	1.09	2.83	0.00	0.18	BASPO269
1955	0.61	1.71	0.68	0.72	4.02	3.98	1.30	1.06	3.79	5.84	0.03	0.03	BASPO270
1956	0.43	0.45	0.91	1.46	1.40	1.28	2.51	0.70	0.03	2.69	0.48	0.39	BASPO271
1957	0.19	0.77	2.60	3.31	7.57	10.46	1.99	0.59	5.05	2.72	1.45	0.45	BASPO272
1958	0.81	1.03	4.07	1.23	2.44	3.00	7.19	2.93	6.11	0.00	2.39	0.46	BASPO273
1959	0.53	0.23	0.85	2.17	5.53	2.35	7.38	4.20	2.31	6.13	0.30	1.60	BASPO274
1960	1.37	1.41	1.16	1.28	4.10	4.59	5.57	7.91	2.25	5.03	0.37	1.73	BASPO275
1961	0.02	1.51	4.83	2.00	4.02	2.61	6.56	3.80	5.24	4.87	2.80	1.01	BASPO276
1962	1.07	0.47	0.26	1.02	0.99	4.80	9.22	2.95	8.23	1.32	1.62	0.60	BASPO277
1963	1.22	0.02	1.67	0.22	6.15	4.51	2.70	2.86	4.90	2.47	1.04	0.34	BASPO278
1964	0.71	0.53	0.89	2.97	5.84	3.73	2.23	6.10	2.66	1.64	5.88	1.03	BASPO279
1965	0.56	1.39	0.48	2.63	6.26	8.00	3.62	4.91	8.44	0.32	0.11	2.25	BASPO280
1966	0.23	1.44	0.26	2.21	0.76	2.67	1.78	1.09	0.72	0.47	0.09	0.43	BASPO281
1967	0.28	0.09	0.57	1.30	1.42	5.62	4.28	1.91	3.19	2.98	0.39	1.41	BASPO282
1968	0.14	0.20	1.36	2.16	4.37	2.38	3.65	6.41	5.91	3.06	2.47	1.31	BASPO283
1969	0.45	1.35	1.73	4.30	3.28	6.82	6.23	1.07	4.77	2.80	0.01	1.36	BASPO284
1970	0.28	0.21	2.70	4.49	1.58	6.72	0.47	2.37	4.04	1.88	0.05	0.49	BASPO285
1971	0.98	1.70	0.01	2.35	3.02	2.70	6.65	1.49	1.73	5.54	2.49	0.95	BASPO286
C	2.09	2.19	2.22	2.08	2.05	7.77	4.46	2.20	2.31	2.14	2.10	2.27	BASPO287
1938													BASPO288

30 DAYS-INTERVAL DATA OF STREAM GAUGE FROM 1938 TO 1971

1939	2.23	2.26	2.30	3.07	2.20	2.08	10.18	2.34	2.42	2.10	2.06	2.15	BASPO289
1940	2.16	2.29	3.43	2.14	3.26	2.48	2.11	1.96	1.98	2.04	2.06	2.48	BASPO290
1941	2.21	4.02	2.20	2.22	2.18	3.21	3.88	2.65	2.20	3.27	8.83	3.15	BASPO291
1942	3.14	2.78	2.75	2.69	6.40	3.18	8.40	2.85	3.01	3.08	3.60	3.13	BASPO292
1943	4.48	3.36	3.12	2.94	2.78	3.56	2.76	2.86	2.54	2.39	2.98	2.50	BASPO293
1944	2.43	3.03	2.94	3.96	13.52	4.47	3.08	3.18	3.53	5.66	2.84	3.07	BASPO294
1945	3.21	3.26	5.86	3.29	7.37	3.28	3.39	2.93	2.50	13.90	3.05	2.87	BASPO295
1946	2.87	2.80	2.69	2.70	2.52	2.41	2.35	2.07	2.21	2.12	2.25	2.31	BASPO296
1947	2.34	2.29	2.26	2.60	3.33	6.87	4.46	2.47	2.24	2.18	2.25	2.25	BASPO297
1948	2.93	2.31	12.36	3.07	2.68	2.44	14.34	5.05	2.97	2.90	2.74	3.31	BASPO298
1949	2.84	4.86	9.31	3.90	12.58	6.22	5.88	3.32	2.85	2.72	2.72	2.71	BASPO299
1950	2.84	2.59	2.66	2.60	2.53	2.97	3.48	15.43	4.47	2.72	2.48	2.46	BASPO300
1951	2.42	2.62	2.59	3.11	11.88	4.42	16.16	3.77	2.96	3.78	3.50	2.72	BASPO301
1952	2.52	2.45	2.39	2.62	2.80	2.46	2.09	1.98	1.89	1.81	1.90	1.94	BASPO302
1953	1.95	1.98	2.02	1.94	1.92	2.33	3.20	1.65	1.56	1.55	1.66	1.74	BASPO303
1954	1.74	1.72	1.74	1.72	5.09	1.64	1.51	1.34	1.44	1.35	1.49	1.49	BASPO304
1955	1.53	1.62	1.57	1.62	1.46	1.58	1.34	1.28	1.21	6.04	1.45	1.36	BASPO305
1956	1.39	1.41	1.31	1.25	1.17	1.25	1.01	0.96	0.80	0.81	0.92	0.99	BASPO306
1957	1.01	1.08	1.10	3.29	2.25	4.53	14.66	2.14	1.51	1.47	1.61	1.58	BASPO307
1958	1.60	1.73	2.01	8.62	3.24	2.37	2.33	9.12	2.45	2.60	2.32	2.20	BASPO308
1959	2.19	2.22	2.11	2.54	1.92	4.72	1.96	7.11	3.04	1.92	2.65	1.77	BASPO309
1960	2.00	3.33	2.05	4.30	3.17	3.25	2.53	1.82	6.93	2.56	3.20	1.75	BASPO310
1961	1.78	1.61	1.66	3.32	4.79	2.25	1.55	1.79	1.44	1.92	3.48	1.98	BASPO311
1962	1.70	6.66	1.76	1.64	1.45	10.04	2.29	2.71	1.73	2.08	1.60	1.68	BASPO312
1963	1.45	1.64	1.40	1.42	1.21	1.25	0.95	1.19	0.98	1.07	1.49	1.16	BASPO313
1964	1.13	1.20	1.12	1.08	1.71	1.83	1.06	0.83	3.00	0.92	0.85	1.35	BASPO314
1965	1.25	1.11	1.44	1.03	0.99	3.28	10.34	1.63	9.24	3.12	1.46	1.34	BASPO315
1966	2.02	1.38	1.41	1.14	1.47	0.96	1.10	1.01	0.76	0.70	0.71	0.75	BASPO316
1967	0.80	0.83	0.78	1.00	0.84	0.82	9.75	3.07	1.29	2.58	1.56	1.30	BASPO317
1968	1.23	1.25	1.15	0.95	1.12	2.39	0.97	2.01	1.87	0.66	1.48	1.28	BASPO318
1969	1.47	1.13	7.11	2.01	3.66	3.23	2.00	1.15	1.23	1.39	1.60	1.05	BASPO319
1970	1.09	1.08	0.95	2.88	1.58	1.05	1.40	0.73	0.54	1.40	1.13	0.97	BASPO320
1971	0.90	0.96	3.32	1.29	1.68	2.61	1.35	4.99	0.94	.	.	.	BASPO321
C													BASPO322
C													BASPO323
C													BASPO324

CONTROL CARDS(OMITTED) FOR THE BMD 02T PROGRAM

NUMBER OF INPUT DATA FOR EACH SERIES IS 405

NUMBER OF LAGS IS 36

附录B 谱的置信区间

谱的修匀估计(smoothed estimate)的样本分布近似为具有 ν 自由度的 χ^2 。对谱密度 $S_{xx}(\omega)$ ——以按滞后数 M 和总记录长度 T 量测的 $\hat{S}_{xx}(\omega)$ 为依据——来说, $1-\alpha$ 置信区间由下式给出:

$$\frac{\nu S_{xx}(\omega)}{\chi^2_{\nu, 1-\alpha/2}} \leq S_{xx}(\omega) \leq \frac{\nu \hat{S}_{xx}(\omega)}{\chi^2_{\nu, 1-\alpha/2}} \quad (\text{B1})$$

式中, ν ——本程序中使用的土耳其窗 (Turkey window) 为 $2.667T/M$ (参阅 Jenkins 和 Watts 的著作, 252 页, 1968)。

附录B 谱的置信区间

谱的修匀估计(smoothed estimate)的样本分布近似为具有 ν 自由度的 χ^2 。对谱密度 $S_{xx}(\omega)$ ——以按滞后数 M 和总记录长度 T 量测的 $\hat{S}_{xx}(\omega)$ 为依据——来说, $1-\alpha$ 置信区间由下式给出:

$$\frac{\nu S_{xx}(\omega)}{\chi^2_{\nu, 1-\alpha/2}} \leq S_{xx}(\omega) \leq \frac{\nu \hat{S}_{xx}(\omega)}{\chi^2_{\nu, 1-\alpha/2}} \quad (\text{B1})$$

式中, ν ——本程序中使用的土耳其窗 (Turkey window) 为 $2.667T/M$ (参阅 Jenkins 和 Watts 的著作, 252 页, 1968)。

附录B 谱的置信区间

谱的修匀估计(smoothed estimate)的样本分布近似为具有 ν 自由度的 χ^2 。对谱密度 $S_{xx}(\omega)$ ——以按滞后数 M 和总记录长度 T 量测的 $\hat{S}_{xx}(\omega)$ 为依据——来说, $1-\alpha$ 置信区间由下式给出:

$$\frac{\nu S_{xx}(\omega)}{\chi^2_{\nu, 1-\alpha/2}} \leq S_{xx}(\omega) \leq \frac{\nu \hat{S}_{xx}(\omega)}{\chi^2_{\nu, 1-\alpha/2}} \quad (\text{B1})$$

式中, ν ——本程序中使用的土耳其窗 (Turkey window) 为 $2.667T/M$ (参阅 Jenkins 和 Watts 的著作, 252 页, 1968)。

附录B 谱的置信区间

谱的修匀估计(smoothed estimate)的样本分布近似为具有 ν 自由度的 χ^2 。对谱密度 $S_{xx}(\omega)$ ——以按滞后数 M 和总记录长度 T 量测的 $\hat{S}_{xx}(\omega)$ 为依据——来说, $1-\alpha$ 置信区间由下式给出:

$$\frac{\nu S_{xx}(\omega)}{\chi^2_{\nu, 1-\alpha/2}} \leq S_{xx}(\omega) \leq \frac{\nu \hat{S}_{xx}(\omega)}{\chi^2_{\nu, 1-\alpha/2}} \quad (\text{B1})$$

式中, ν ——本程序中使用的土耳其窗 (Turkey window) 为 $2.667T/M$ (参阅 Jenkins 和 Watts 的著作, 252 页, 1968)。

附录B 谱的置信区间

谱的修匀估计(smoothed estimate)的样本分布近似为具有 ν 自由度的 χ^2 。对谱密度 $S_{xx}(\omega)$ ——以按滞后数 M 和总记录长度 T 量测的 $\hat{S}_{xx}(\omega)$ 为依据——来说, $1-\alpha$ 置信区间由下式给出:

$$\frac{\nu S_{xx}(\omega)}{\chi^2_{\nu, 1-\alpha/2}} \leq S_{xx}(\omega) \leq \frac{\nu \hat{S}_{xx}(\omega)}{\chi^2_{\nu, 1-\alpha/2}} \quad (\text{B1})$$

式中, ν ——本程序中使用的土耳其窗 (Turkey window) 为 $2.667T/M$ (参阅 Jenkins 和 Watts 的著作, 252 页, 1968)。

附录B 谱的置信区间

谱的修匀估计(smoothed estimate)的样本分布近似为具有 ν 自由度的 χ^2 。对谱密度 $S_{xx}(\omega)$ ——以按滞后数 M 和总记录长度 T 量测的 $\hat{S}_{xx}(\omega)$ 为依据——来说, $1-\alpha$ 置信区间由下式给出:

$$\frac{\nu S_{xx}(\omega)}{\chi^2_{\nu, 1-\alpha/2}} \leq S_{xx}(\omega) \leq \frac{\nu \hat{S}_{xx}(\omega)}{\chi^2_{\nu, 1-\alpha/2}} \quad (\text{B1})$$

式中, ν ——本程序中使用的土耳其窗 (Turkey window) 为 $2.667T/M$ (参阅 Jenkins 和 Watts 的著作, 252 页, 1968)。

附录B 谱的置信区间

谱的修匀估计(smoothed estimate)的样本分布近似为具有 ν 自由度的 χ^2 。对谱密度 $S_{xx}(\omega)$ ——以按滞后数 M 和总记录长度 T 量测的 $\hat{S}_{xx}(\omega)$ 为依据——来说, $1-\alpha$ 置信区间由下式给出:

$$\frac{\nu S_{xx}(\omega)}{\chi^2_{\nu, 1-\alpha/2}} \leq S_{xx}(\omega) \leq \frac{\nu \hat{S}_{xx}(\omega)}{\chi^2_{\nu, 1-\alpha/2}} \quad (\text{B1})$$

式中, ν ——本程序中使用的土耳其窗 (Turkey window) 为 $2.667T/M$ (参阅Jenkins和Watts的著作, 252 页, 1968)。

附录B 谱的置信区间

谱的修匀估计(smoothed estimate)的样本分布近似为具有 ν 自由度的 χ^2 。对谱密度 $S_{xx}(\omega)$ ——以按滞后数 M 和总记录长度 T 量测的 $\hat{S}_{xx}(\omega)$ 为依据——来说, $1-\alpha$ 置信区间由下式给出:

$$\frac{\nu S_{xx}(\omega)}{\chi^2_{\nu, 1-\alpha/2}} \leq S_{xx}(\omega) \leq \frac{\nu \hat{S}_{xx}(\omega)}{\chi^2_{\nu, 1-\alpha/2}} \quad (\text{B1})$$

式中, ν ——本程序中使用的土耳其窗 (Turkey window) 为 $2.667T/M$ (参阅 Jenkins 和 Watts 的著作, 252 页, 1968)。

附录B 谱的置信区间

谱的修匀估计(smoothed estimate)的样本分布近似为具有 ν 自由度的 χ^2 。对谱密度 $S_{xx}(\omega)$ ——以按滞后数 M 和总记录长度 T 量测的 $\hat{S}_{xx}(\omega)$ 为依据——来说, $1-\alpha$ 置信区间由下式给出:

$$\frac{\nu S_{xx}(\omega)}{\chi^2_{\nu, 1-\alpha/2}} \leq S_{xx}(\omega) \leq \frac{\nu \hat{S}_{xx}(\omega)}{\chi^2_{\nu, 1-\alpha/2}} \quad (\text{B1})$$

式中, ν ——本程序中使用的土耳其窗 (Turkey window) 为 $2.667T/M$ (参阅 Jenkins 和 Watts 的著作, 252 页, 1968)。