# 强夯夯锤与土接触时间的计算探讨

杨泽平 张天太 罗嗣海　　龚晓南
（华东地质学院，临川，344000）（浙江大学岩土工程研究所，杭州，310027）

**提　要**　总结了夯锤与土之间接触时间的现有计算方法，提出了一个计算接触时间的公式，用若干工程实例对不同方法与公式的计算结果作了比较。

## 一　引言

对强夯时地基的动力反应分析，接触面应力确定是必须的边界条件。在理论计算中一般假设接触面应力沿锤底均布、随时间呈三角形或正弦分布；因此，接触面应力确定需计算接触面应力峰值和接触时间。本文讨论接触时间的计算问题。首先总结接触时间的现有计算公式，然后推导了一个计算接触时间的公式，最后用若干实例比较了不同公式计算结果的差异并对接触时间的一般规律作了总结。

## 二　接触时间的现有计算公式

许多学者进行了接触时间的计算研究。R.Scott 等(1975)、赵维炳等(1986、1987)、孔令伟等(1998)、 P.W.Mayne 等(1983)、刘惠珊(1996)分别依据不同的原理、从不同的途径提出了可用于估算接触时间的计算公式。

R.Scott 等[1]用集总参数法，将锤—土视为一维质点—弹簧—粘壶，得出接触时间为：

$$t=\frac{\frac{\pi}{2}+\cos^{-1}\frac{R\omega}{S}}{\omega} \tag{1}$$

式中：$R$ 为阻尼常数，$\omega$ 为角频率。

赵维炳等[2]对 Scott 公式修正为：

$$t=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{M}{S}}+\frac{1}{\omega'}\tan^{-1}\sqrt{\frac{4MS'}{R'^2}-1} \tag{2}$$

式中 $R'$ 、$\omega'$ 与 $R$、$\omega$表达式相同，但用卸荷模量 $E_r$代替加荷模量 $E$。

P.W.Mayne 等[3]（1983）视锤—土为弹—质体系、相互作用时间用自振周期之半来考虑,故有：

$$\Delta t=\sqrt{\frac{M}{S}} \tag{3}$$

刘惠珊[4]（1996）分别从重力做功和动量定理导出接触时间与夯坑深度有如下关系：

$$\Delta t=\sqrt{\frac{2}{gH}}h \tag{4}$$

另外，根据边界元法或孔令伟方法也可得出接触时间。

## 三　基于弹性碰撞的计算公式

为简化分析，与其它计算理论一样，本文在高度简化的基础上，从小球的弹性碰撞出发，提出一个计算接触时间的公式。设球1和球2，其杨氏模量和泊松比分别为$E_1$、$\upsilon_1$和$E_2$、$\upsilon_2$，两球半径分别为$r_1$和$r_2$，碰撞前的相对速度为$V_{r0}$；设两球发生对心碰撞，由弹性力学关于两球间接触压力的讨论可知[5]：

$$p=\frac{4}{3\pi(k_1+k_2)}\sqrt{\frac{r_1r_2}{r_1+r_2}}a^{3/2}=na^{3/2} \tag{5}$$

式中$a$为两球心压缩距离，$p$为两球间的接触压力，而：$k_1=\frac{1-\upsilon_1^2}{\pi E_1}$　$k_2=\frac{1-\upsilon_2^2}{\pi E_2}$

两球心正碰时，接触压力$p$使两球减速运动，某时刻两球的速度各为$V_{1t}$和$V_{2t}$，根据牛顿第二定律分别建立两球的运动微分方程为：

$$M_1\frac{dV_{1t}}{dt}=-R \qquad M_2\frac{dV_{2t}}{dt}=-p \tag{6}$$

而两球的相对速度应该和两球心的缩短速度相等：

$$V_n=\frac{da}{dt}=V_{1t}+V_{2t} \tag{7}$$

将(7)式两边对时间求导数并将(5)式和(6)式代入得：

$$\frac{d^2a}{dt^2}=-\frac{na^{3/2}}{\mu} \tag{8}$$

式中$\mu$为两球的折合变量,即　$\frac{M_1+M_2}{M_1M_2}=1/\mu$

将(8)式两边乘以$\frac{da}{dt}$后得：

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}[(\frac{da}{dt})^2]=-\frac{na^{3/2}}{\mu}da \tag{9}$$

碰撞开始时，其压缩距离 $a$ 为零，相对速度为 $V_{r0}$，当压缩阶段进行到某一压缩距离 $a$ 时，其相对速度为 $V_r=da/dt$，积分(9)式得：

$$\frac{1}{2}[(\frac{da}{dt})^2-V_{r0}^2]=-\frac{2na^{5/2}}{5\mu} \tag{10}$$

压缩结束时，相对速度 $V_{r0}$ 为零，则由(10)式可算得两球心的最大压缩距离为：

$$a_{\max}=(\frac{5\mu}{4n}V_{r0}^2)^{2/5} \tag{11}$$

将式(10)积分可得压缩阶段所需的时间：

$$dt=\frac{da}{\sqrt{V_{r0}^2-\frac{4n}{5\mu}a^{5/2}}}=\frac{da}{V_{r0}\sqrt{1-\frac{4n}{5\mu V_{r0}^2}a^{5/2}}} \tag{12}$$

故在两球碰撞时，其压缩所需时间为：

$$\Delta t=\int_0^{\Delta t}dt=\int_0^{a_{\max}}\frac{da}{V_{r0}\sqrt{1-\frac{4n}{5\mu V_{r0}^2}a^{5/2}}}=1.47\left(\frac{5\mu}{4n}\right)^{5/2}\frac{1}{V_{r0}^{1/5}} \tag{13}$$

对强夯时的情况，视地基为球 1，其半径和质量无限大，但刚度较小；近似地把夯锤视为球 2，其刚度很大，质量和半径为有限值，将其半径取为夯锤底面半径，故令 $r_1\to\infty$, $M_1\to\infty$, $k_2\to\infty$, $k=k_1$, $V_{r0}=V_0$，代入得：

$$\Delta t=1.47\left(\frac{5M}{4n_1}\right)^{2/5}\frac{1}{V_0^{1/5}} \tag{14}$$

式中 $M$ 为夯锤的质量，$n_1=\frac{4\sqrt{r}}{3\pi(k_1+k_2)}$，$r=r_2$ 为夯锤半径，$V_0$ 为夯锤落地速度。上式即为从小球碰撞理论推出的近似用于计算强夯锤—土作用时间的计算公式。

## 四　接触时间的一般规律

不同公式的计算结果见表 1，我们可以总结出如下规律：

1. 从 R.Scott、刘惠珊以及本文所推导的公式来看，接触时间与夯锤的质量成正比，与土的弹模和锤径成反比。

2. 接触时间一般在 0.01~0.1s 之间，而且无粘性土较粘性土接触时间短。接触时间随击数的增加而缩短，尤其在无粘性土中表现更为明显。

3. 不同公式计算的接触时间有较大差异，R.Scott、赵维炳、孔令伟、帅方生和本文的计算结果较接近，并且更接近于实测结果，P.W.Mayne 和刘惠珊公式计算结果偏小。

表 1 不同公式计算出的接触时间比较　　单位:ms

| 土 | 算例 | 能量 (kN·m) | 击数 | R.Scott (1) | 赵维炳 (2) | 孔令伟 (3) | 帅方生 (4) | P.W.Mayne (5) | 刘惠珊 (6) | 本文 (7) | 实测 (8) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 无粘性土 | 秦皇码头 | 98×13 | 1 | 62.3 | 43.6 | 77 | | 24.7 | 13.8 | 57.5 | |
| | | | 2 | 52.3 | 35.8 | 64 | | 20.7 | 10 | 50.0 | |
| | | | 3 | 47.2 | 32.3 | 58 | | 18.6 | 8.8 | 46.1 | |
| | | | 4 | 43.9 | 30 | 53 | | 17.4 | 7.5 | 43.5 | |
| 粘性填土 | 扬子乙烯 | 147×16 | 1 | 90.1 | 67.1 | 115 | | 35.3 | 28.2 | 74.5 | |
| | | | 2 | 86.5 | 65.4 | 112 | | 33.9 | 25.9 | 72.0 | |
| | | | 3 | 84.4 | 64.5 | 109 | | 33.1 | 25.4 | 70.6 | |
| | | | 4 | 83 | 63.8 | 107 | | 32.5 | 24.8 | 69.7 | |
| 黄土 | 山西化肥厂 | 150×13 | 1 | 86.5 | 63 | | | 33.0 | 73.9 | 71.8 | |
| | | | 3 | 81.0 | 60.5 | | | 30.9 | 42 | 69.2 | |
| | | | 7 | 77.0 | 58.9 | | 105 | 29.4 | 28.8 | 66.4 | 100 |
| | | 250×25 | 1 | 93.9 | 70.0 | | | 36.9 | 87.8 | 78.1 | |
| | | | 3 | 87.8 | 67.3 | | | 34.6 | 30.2 | 75.1 | |
| | | | 7 | 83.5 | 65.4 | | | 32.9 | 19.4 | 72.1 | |

## 参考文献


[1] Scott, R. And Pearce, R.W.. Soil Compaction by impact. Geotechnique, 1975, 25(1):1-19.

[2] 钱家欢，钱学德等：《动力固结的理论与实践》，载《岩土工程学报》，1986, Vol.8(6):1-17。

[3] Mayne, P.W. and Jones, S. et al. Impact Stress During Dynamic Compaction. Journal of geotechnical Engineering. 1983, 109(10):1342-1346。

[4] 刘惠珊，饶志华：《强夯置换的设计方法与参数》，载《地基基础工程》，1996(2):6-13。

[5] 徐芝纶：《弹性力学》（第三版）北京，高等教育出版社，1990。