

目 录

前 言	
符号及量纲索引	
绪 论	1
第一章 矩阵运算及线性代数方程组的常用解法简介	3
第一节 与数值法有关的矩阵运算	3
第二节 线性代数方程组的常用解法简介	10
第二章 有限差分法及其在水文地质计算中的应用	23
第一节 概述	23
第二节 有限差分法在水文地质计算中的应用	24
第三节 边界条件的处理	35
第四节 有限差分计算实例	37
第三章 有限单元法及其在水文地质计算中的应用	47
第一节 变分有限单元法在解地下水稳定流问题中的应用	47
第二节 非稳定流问题的有限单元法	56
第三节 水文地质参数反分析	73
第四节 计算实例	77
第四章 边界单元法及其在水文地质计算中的应用	92
第一节 稳定流问题的边界单元法	92
第二节 非稳定流问题的边界单元法	105
第三节 渗流问题边界单元法中若干问题的讨论	108
第四节 边界单元法程序及算例	111
第五章 有限分析法及其在水文地质计算中的应用	126
第一节 有限分析法的基本原理	126
第二节 渗流问题的有限分析法	128
第三节 计算机程序及算例	133
参考文献	141

绪 论

随着科学技术水平的不断提高,水文地质计算方法也不断发展。目前水文地质计算方法大致有:解析解法,物理模拟法,数值解法,系统分析方法,概率统计方法等等。

一、解析解法

60年代以前,解含水层地下水的水头和流量问题,多偏重于解析解法。如“地下水动力学”课程中所述,无论是以稳定流为基础的裘布衣公式,还是以非稳定流为基础的泰斯公式,它们的推导都有许多假设,在水文地质条件满足这些假设时,当然没有问题。但要解决大范围的地下水系统计算时,由于水文地质条件的复杂性,解析解法就无能为力了。

在求解水库或坝基渗漏量及计算地下水位时,过去常用的解析法公式有巴甫洛夫斯基、卡明斯基或其他人的计算公式,这些公式都是根据冲积层情况得出的,而裂隙岩体和岩溶岩体的情况则要复杂得多。因为裂隙和岩溶岩体的分布受地层和构造条件控制,边界形状很复杂,漏水岩体的分布和形状都很不规则,即使是同一岩体,由于构造条件的差异,裂隙和岩溶发育程度相差很大,因而渗透性也有很大的不同。所以非均质性比第四系冲积层明显得多,这些都增加了应用现有解析解的困难。因此,目前它多应用于简单条件下的水文地质计算以及确定水文地质试验参数。有时为了验证数值解的正确性,也需要用解析解进行对比计算。

二、物理模拟法

物理模拟有电模拟、水力模拟、粘滞流模拟、薄膜模拟等等,以电模拟应用较多。早在本世纪的20年代,苏联的巴甫洛夫斯基提出了电解液模拟(ЭГЛ А),它成为当时研究水工建筑物地区渗漏问题的重要手段。以后又发展到电阻网模拟,在50年代和60年代,R-C网络和R-R网络模拟也得到发展。60年代中期又出现了与计算机结合在一起的混合机。

模拟时边界形状可以根据实际情况来制作,因而可以处理复杂的边界形状以及非均质问题。电解液和R网络模拟只能解决稳定流问题,对于非稳定流问题,尤其是大系统的地下水资源评价问题,可用R-C网络和R-R网络进行计算。

电网络模拟,原理上和数值模拟相似,但制作的成本较高,操作也不如电子计算机方便,80年代以来有逐步被数值模拟代替的趋势。

三、数值解法

60年代后期随着电子计算机的发展,人们把数值模拟应用到水文地质计算中来。由于电模拟制作和参数调试都比数值法麻烦,所以目前应用更多的是数值解法。

目前在水文地质计算中应用的数值方法可大致归纳为5类。①有限差分法(简称有限差分法);②有限单元法(简称有限元法);③边界单元法(简称边界元法);④特征线法;⑤有限分析法。

有限差分法从60年代初就开始应用于水文地质计算。最初多用正规网格和松弛解法,1968年引入交替方向隐式差分法,以后又引入强隐式法,1973年被推广到变格距情况,兰马

特(Lemard)于1979年提出了上游加权有限差分法。

有限单元法从1968年开始应用于水文地质计算,1972年引入等参数有限单元法,1977年休延康(Huyakorn)和尼尔康卡(Nilkuka)等提出了上风有限单元法。

目前,有限差分法和有限单元法是水文地质计算中最常用的数值计算方法。

边界单元法是70年代中期发展起来的一种新的数值方法,该方法不需要对整个计算区域进行网格剖分,而只要剖分区域边界(见图1)。在求出边界上的物理量以后,计算区域内部任一点的未知量可通过边界上的已知量求出。因此,所需准备的输入数据比有限差分法和有限单元法少,不易出错。

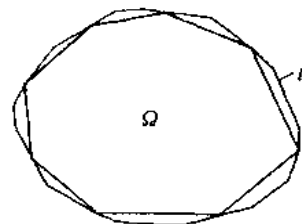


图1 边界单元剖分图

Ω—计算区域;Γ—计算区域的边界

在水文地质计算中,常常会遇到无限边界的情况,该情况下若用有限差分或有限单元法计算,都需要人为地划出一条不受开采(或补给)影响的边界,但划出的这条边界常与实际情况有所差异,而且在地下水资源评价时要计算流量,有限单元法难以直接算出流量边界上的 $\partial H/\partial n$ 值,所算出的流量只是一个近似值,和实际值有一定的出入。边界单元法处理这些问题则比较容易,因而求得的流量也比较准确。

边界单元法对于求解均质区域的稳定流问题(拉普拉斯方程,泊松方程)比较快速,有效。但当非均质区很多时,尤其是非均质区域的非稳定流问题,计算会变得相当复杂,优越性就不明显了。

特征线法用来解双曲型偏微分方程比较有效。将特征线法和有限单元法相结合的特征有限单元法以及和有限差分法相结合的特征有限差法是目前求解水质模型的一种有效方法,尤其是用来求解对流占优势的污染物运移问题极为方便。

所有上述的数值计算方法,都首先是把渗流区(解区域)进行离散化,然后认为每一单元内含水层是均质的,具有同一参数。同时,把原来的偏微分方程化为结点方程(组),这一方程组一般是线性的。求解这个线性方程组,即可得到每一结点的水头近似值,进而可算出流量或其他项目。

有限分析法是80年代发展起来的一种新的数值计算方法。它也是一种区域离散方法,它是通过某种解析途径进行离散化,得到一组方程,然后求得每一结点的水头近似值和进一步算出流量。

四、其它方法

系统分析方法,是结合数学模型及计算机技术来进行分析的一种方法,在地下水资源管理中得到迅速发展。目前,许多国家,正在用此方法实行大规模和大范围的河水调用,以达到地下水和河水资源互相调剂,统一运行。系统方法可以根据所在地区的气象、地质、地貌等自然地理条件与系统的关系以及经济、政治等社会环境条件,根据需要与可能,为该系统确定一个最优目标。

目前,随机模型也在地下水资源管理中广泛应用。如时间序列分析,也开始应用于地下水计算中。随着计算机科学的发展,将使更多更新的方法应用于实际生产中去。

第一章 矩阵运算及线性代数方程组的常用解法简介

第一节 与数值法有关的矩阵运算

一、矩阵定义

如绪论所述,本书重点介绍数值法中的有限差分法和有限单元法,这两种方法的最终结果都可以化为线性代数方程组的求解。

可以把任何一组线性代数方程组用矩阵的形式表示出来。设方程组为

$$\left. \begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned} \right\} \quad (1-1)$$

其左端的系数排列成一个数组,即

$$\left. \begin{aligned} a_1 \quad b_1 \quad c_1 \\ a_2 \quad b_2 \quad c_2 \\ a_3 \quad b_3 \quad c_3 \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

而 x, y 和 z 则可以当作一个三维向量的分量。为了便于研究像式(1-2)这样的数组,以及这种数组和向量之间的运算,我们把数组式(1-2)的整体当作一个抽象的量,用方括号把它括起来,记作

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad (1-3)$$

我们称式(1-3)为一个三阶方阵。如果是含有 n 个未知量 x_1, x_2, \dots, x_n 的线性方程组

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m &= b_n \end{aligned} \right\}$$

左端的系数矩阵为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots\dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots\dots\dots & a_{2m} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots\dots\dots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad (1-4)$$

它是由 n 行 m 列组成的系数矩阵,记为 $(a_{ij})_{nm}$ 。在上面的矩阵中,横排称行,纵排称列;而 a_{ij} 则表示矩阵中的 i 行 j 列的元素。我们称式(1-4)式为 $m \times n$ 阶矩阵。

(一) 对称矩阵

若矩阵的对角线两侧的元素是对称的方阵称为对称矩阵。在对称矩阵中, $a_{ij} = a_{ji}$ 。例如

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

对称矩阵行和列互换则矩阵不变。

(二) 对角矩阵

一个方阵, 对角线上元素为非零元素, 其余的元素都为零, 即当 $i \neq j$ 时, $a_{ij} = 0$, 则为对角矩阵。

例如三阶对角线矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \quad (1-5)$$

(三) 么矩阵(单位矩阵)

一个方阵, 若对角线上的元素等于 1, 其它元素均为零, 即 $i \neq j$ 时, $a_{ij} = 0$, $i = j$ 时, $a_{ii} = 1$, 则此矩阵为么矩阵(单位矩阵), 如式(1-6)。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-6)$$

(四) 上三角矩阵

对角线以下元素均为零的方阵为上三角矩阵。

例如, 上三角阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \quad (1-7)$$

(五) 下三角矩阵

对角线以上元素均为零的方阵为下三角矩阵。

例如, 下三角阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (1-8)$$

(六) 转置矩阵

把矩阵 $[A]$ 的行和列进行交换, 即将 a_{ij} 和 a_{ji} 位置互换便得转置矩阵 $[A]^T$ 。

例如

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (1-9)$$

$$[A]^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (1-10)$$

二、矩阵运算

矩阵不是一个数,而是按照一定的方式排列的一组数的集合。矩阵的运算不同于通常数的运算,具有特殊性质。

(一)矩阵的加减法

若两个矩阵的行、列数相同,则它们可以相加或相减。

设有二个同为 $m \times n$ 阶的矩阵 $[A]$ 和 $[B]$,把它每一个对应的元素进行加减,得到一个新的 $m \times n$ 阶矩阵,称为矩阵的加减。若 $[c] = [A] \pm [B]$,则 $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$ 。即下式

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (a_{11} + b_{11}) & (a_{12} + b_{12}) & (a_{13} + b_{13}) \\ (a_{21} + b_{21}) & (a_{22} + b_{22}) & (a_{23} + b_{23}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1-11)$$

例如

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4 & 2+8 \\ 4+2 & 3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

(二)矩阵的数乘

矩阵与数相乘,就是将一个数 k 遍乘矩阵 $[A]$ 中每一元素,记作 $k[A] = [c]$ 。

例如

$$5 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \times 1 & 5 \times 3 \\ 5 \times 2 & 5 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 10 & 20 \end{bmatrix}$$

(三)矩阵的乘法

若矩阵 $[A]$ 的列数等于矩阵 $[B]$ 的行数,则它们可以相乘。设 $[A]$ 有 n 行 m 列, $[B]$ 有 m 行 k 列,则 $[A]$ 、 $[B]$ 相乘可得

$$[A]_{n \times m} [B]_{m \times k} = [c]_{n \times k}$$

即

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2 \times 3} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}_{3 \times 2} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{bmatrix}_{2 \times 2} \end{aligned} \quad (1-12)$$

例如

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \\ &= \begin{bmatrix} (1 \times 5) + (2 \times 8) & (1 \times 6) + (2 \times 9) & (1 \times 7) + (2 \times 0) \\ (3 \times 5) + (4 \times 8) & (3 \times 6) + (4 \times 9) & (3 \times 7) + (4 \times 0) \end{bmatrix}_{2 \times 3} \\ &= \begin{bmatrix} 21 & 24 & 7 \\ 47 & 54 & 21 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \end{aligned}$$

矩阵的乘法不满足交换律,即 $[A][B] \neq [B][A]$ 。

(四) 矩阵的行列式

对于一个 2 阶方阵 $[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, 其行列式为

$$\det[A] = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (1-13)$$

对于一个 3 阶方阵

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \text{ 其行列式为}$$

$$\begin{aligned} \det[A] &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

也可用 2 阶行列式确定

$$\begin{aligned} \det[A] &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

上式右边的 3 个 2 阶行列式称为 3 阶行列式的子行列式, 也分别称为 a_{11}, a_{12}, a_{13} 的余子式 (Cofactor)。

(五) 伴随矩阵

矩阵 $[A]$ 的余子矩阵的转置, 叫做 A 的伴随 (Adjoint) 矩阵。

$$\text{adj}[A] = [\text{cof} A]^T \quad (1-14)$$

$$\text{cof}[A] = \text{cof}(a_{ij}) = (-1)^{i+j}(\text{minor} a_{ij}) \quad (1-15)$$

其中 minor 即从原矩阵中划去 i 行和 j 列后的子矩阵的行列式。以 3×3 的矩阵 $[A]$ 为例, $[A]$ 的余子矩阵为

$$\text{cof}[A] = \text{cof}(a_{ij}) = \begin{bmatrix} \text{cof}(a_{11}) & \text{cof}(a_{12}) & \text{cof}(a_{13}) \\ \text{cof}(a_{21}) & \text{cof}(a_{22}) & \text{cof}(a_{23}) \\ \text{cof}(a_{31}) & \text{cof}(a_{32}) & \text{cof}(a_{33}) \end{bmatrix}$$

由余子式的定义

$$\text{cof}[A] = \begin{bmatrix} (a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) & -(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) & (a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) \\ -(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) & (a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) & -(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}) \\ (a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) & -(a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}) & (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) \end{bmatrix}$$

因 $\text{adj}[A] = [\text{cof} A]^T$

所以

$$\text{adj}[A] = \begin{bmatrix} (a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) & -(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) & (a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) \\ -(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) & (a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) & -(a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}) \\ (a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) & -(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}) & (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) \end{bmatrix}$$

(六)逆矩阵

设 $[A]$ 为 n 阶方阵, 并满足

$$[A][C] = [I]$$

则称矩阵 $[C]$ 是矩阵 $[A]$ 的逆矩阵。式中 $[I]$ 为单位阵。记作

$$[C] = [A]^{-1}$$

于是

$$[A][A]^{-1} = [I]$$

对于线性代数方程组

$$[A]\{X\} = \{C\}$$

当 $n=m$ 时, 未知的列矩阵为

$$\{X\} = [A]^{-1}\{C\} \quad (1-16)$$

由(1-16)式可知, 可利用逆矩阵解线性代数方程组。

若 $[A]$ 的行列式

$$\det[A] \neq 0$$

说明 $[A]$ 是可逆的。设 A_{ij} 是 A 中元素 a_{ij} 的代数余子式, 则 $[A]$ 的逆矩阵为

$$[A]^{-1} = \frac{\text{adj}[A]}{|A|} \quad (1-17)$$

且称 $[A]$ 为非奇异方阵。如果行列式 $|A| = 0$, 方阵 $[A]$ 没有逆阵, 称为奇异方阵。

例如有一个二阶方阵

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

其行列式为

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

余子式为

$$A_{11} = a_{22}$$

$$A_{12} = -a_{21}$$

$$A_{21} = -a_{12}$$

$$A_{22} = a_{11}$$

其逆矩阵为

$$[A]^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

(七) 矩阵分块

把一个大矩阵分成小块,即将大矩阵看成是由一些小矩阵组成的,在运算中,这些小矩阵可当作数一样来处理,称为矩阵分块。例如

$$[A] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} [I_2] & [0] \\ [A_{21}] & [I_2] \end{bmatrix}$$

其中, I_2 是 2 阶单位矩阵,而

$$[A_{21}] = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad [0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$[B] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} [B_{11}] & [B_{12}] \\ [B_{21}] & [B_{22}] \end{bmatrix}$$

其中

$$[B_{11}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad [B_{12}] = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$[B_{21}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad [B_{22}] = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

于是,按 2 阶方阵的乘法规则进行运算,得

$$[A][B] = \begin{bmatrix} [I_2] & [0] \\ [A_{21}] & [I_2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [B_{11}] & [B_{12}] \\ [B_{21}] & [B_{22}] \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} [B_{11}] & [B_{12}] \\ [A_{21}][B_{11}] + [B_{21}] & [A_{21}][B_{12}] + [B_{22}] \end{bmatrix}$$

而

$$[A_{21}][B_{11}] + [B_{21}] = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[A_{21}][B_{12}] + [B_{22}] = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

最后得

$$[A][B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

应当指出,在对 $[A]$ 、 $[B]$ 进行分块时, $[A]$ 的列分法要与 $[B]$ 的行分法一致。

(八) 对称正定矩阵

设有一对称方阵 $[A]$,如它的各阶主子式均大于零,则称为对称正定矩阵。设 n 阶对称矩阵

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

其各阶的主子式都大于零,即

$$a_{11} > 0 \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \cdots$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

则称矩阵 $[A]$ 为对称正定矩阵。

例如

$$[A] = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$5 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 24 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 112 > 0$$

故上式为对称正定矩阵。凡对称正定矩阵,对角线上所有元素都应大于零。即

$$a_{ii} > 0, i = 1, 2, \dots, n$$

因 $\det[A] > 0$, 故 $[A]$ 是可逆的, 则

$$[A]\{X\} = \{B\}$$

必有唯一解。

第二节 线性代数方程组的常用解法简介

一、高斯消去法

高斯消去法求解线性代数方程组, 有消元和回代两大过程。先举一算例如下:

第一步: 消元过程

$$2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6 \quad (1-18a)$$

$$x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \quad (1-18b)$$

$$4x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 \quad (1-18c)$$

解上述的方程组, 首先用式(1-18b)减去式(1-18a)乘 $1/2$, 消去式(1-18b)中的 x_1 。并且用式(1-18c)减去式(1-18a)乘 $4/2$, 消去式(1-18c)中 x_1 , 得到

$$2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6 \quad (1-19a)$$

$$0 - 3x_2 + 6x_3 = -3 \quad (1-19b)$$

$$0 - 7x_2 + x_3 = -10 \quad (1-19c)$$

然后, 从式(1-19c)减去 $7/3$ 乘式(1-19b), (1-19a)和(1-19b)保持原状, 得到一个上三角形方程组

$$2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6 \quad (1-20a)$$

$$0 - 3x_2 + 6x_3 = -3 \quad (1-20b)$$

$$0 + 0 - 13x_3 = -3 \quad (1-20c)$$

上述将原方程组化为上三角形方程组的计算过程称为消元过程。

第二步: 回代过程

对于上述的上三角形方程组, 求解 x 就比较方便, 由式(1-20c)中, 可得

$$x_3 = \frac{3}{13}$$

代入式(1-20b)中, 得

$$x_2 = \frac{19}{13}$$

再代入式(1-20a)中, 得

$$x_1 = \frac{4}{13}$$

上述求解 x_3, x_2, x_1 的过程称为回代过程。

下面考虑 n 阶线性方程组的情况

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= f_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= f_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= f_3 \\ &\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n &= f_n \end{aligned} \right\} \quad (1-21)$$

上式可简写成矩阵形式

$$[A]\{X\} = \{F\} \quad (1-22)$$

式中

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (1-23)$$

$$\{X\} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^T \quad (1-24)$$

$$\{F\} = (f_1, f_2, f_3, \dots, f_n)^T \quad (1-25)$$

$[A]$ 称为系数方阵, $\{X\}$ 和 $\{F\}$ 称为列向量。

求解 n 阶的线性方程组时, 设 $a_{11} \neq 0$, 保留方程组中第一个方程, 并利用它将其余 $n-1$ 个方程中的第一个未知元素 x_1 消去。消去的办法是取

$$\left. \begin{aligned} L_{21} &= \frac{a_{21}}{a_{11}} \\ L_{31} &= \frac{a_{31}}{a_{11}} \\ &\dots\dots\dots \\ L_{n1} &= \frac{a_{n1}}{a_{11}} \end{aligned} \right\} \quad (1-26)$$

再用(第 i 个方程) $- L_{i1} \times$ (第一个方程) ($i=2, 3, \dots, n$) 于是得到新的等价方程组

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= f_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n &= f_2^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{3n}^{(1)}x_n &= f_3^{(1)} \\ &\dots\dots\dots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{nn}^{(1)}x_n &= f_n^{(1)} \end{aligned} \right\} \quad (1-27)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} a_{ij}^{(1)} &= a_{ij} - L_{i1}a_{1j} \quad i=2, 3, \dots, n; j=2, 3, \dots, n \\ f_i^{(1)} &= f_i - L_{i1}f_1 \quad i=2, 3, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (1-28)$$

在式(1-27)中, 如 $a_{22}^{(1)} \neq 0$, 我们不仅保留其中第一个方程, 而且还保留第二个方程。利用类似方法消去其余 $n-2$ 个方程中的未知元 x_2 , 即取

$$\left. \begin{aligned} L_{32} &= \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \\ &\dots\dots \\ L_{n2} &= \frac{a_{n2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \end{aligned} \right\} \quad (1-29)$$

再用(第 i 个方程) $-L_{i2} \times$ (第二个方程) ($i=3, 4, \dots, n$) 得到新的等价方程组

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= f_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= f_2^{(1)} \\ a_{33}^{(2)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(2)}x_n &= f_3^{(2)} \\ &\dots\dots \\ a_{n3}^{(2)}x_3 + \dots + a_{nn}^{(2)}x_n &= f_n^{(2)} \end{aligned} \right\} \quad (1-30)$$

同理, 式中的

$$\left. \begin{aligned} a_{ij}^{(2)} &= a_{ij}^{(1)} - L_{i2}a_{2j}^{(1)} \quad (i=3, 4, \dots, n; j=3, 4, \dots, n) \\ f_i^{(2)} &= f_i^{(1)} - L_{i2}f_2^{(1)} \quad (i=3, 4, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (1-31)$$

用完全类似的办法依次做下去, 得到最后的等价方程组

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= f_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= f_2^{(1)} \\ a_{33}^{(2)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(2)}x_n &= f_3^{(2)} \\ &\dots\dots \\ a_{n-1,n-1}^{(n-2)}x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(n-2)}x_n &= f_{n-1}^{(n-2)} \\ a_{nn}^{(n-1)}x_n &= f_n^{(n-1)} \end{aligned} \right\} \quad (1-32)$$

这样完成了消元过程。方程组(1-32)的系数方阵是一个上三角方阵, 主对角线以下的所有元素都为零。位于主对角线上的元素 $a_{11}, a_{22}^{(1)}, a_{33}^{(2)}, \dots, a_{kk}^{(k-1)}, \dots, a_{nn}^{(n-1)}$ 为主元。该方程组很易求解, 只要 $a_{nn}^{(n-1)} \neq 0$, 就可从最后一个方程组解起, 求出 x_n , 然后逐步上推求解。即顺次代入如下公式

$$\left. \begin{aligned} x_n &= f_n^{(n-1)} / a_{nn}^{(n-1)} \\ x_{n-1} &= (f_{n-1}^{(n-2)} - a_{n-1,n}^{(n-2)}x_n) / a_{n-1,n-1}^{(n-2)} \\ &\dots\dots \\ x_k &= (f_k^{(k-1)} - \sum_{j=k+1}^n a_{kj}^{(k-1)}x_j) / a_{kk}^{(k-1)} \\ k &= n-2, n-3, \dots, 1 \end{aligned} \right\} \quad (1-33)$$

上面介绍的简单消去法是按自然顺序逐个消元的, 即依次消去 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 。在消第 i 个方程的 x_k 时, 用

$$-L_{ik} = -a_{ik}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)} \quad i > k \quad (1-34)$$

作为组合系数, 其分母正好是主元 $a_{kk}^{(k-1)}$ 。如要第 k 步消元能够进行, 必须要求主元素 $a_{kk}^{(k-1)}$ 不为零。所以要使简单消去法能进行到底, 必须要求各步的主元都不为零。这一点并不是总

能做到的。而且当 $a_{kk}^{(k-1)}$ 值很小时,造成 L_{ik} 的数值会很大,可能发生溢出停机,消元中断,或者误差传播激烈造成求出的解面目全非。因此按顺序消元(或者说顺主对角线取主元)的简单消去法是有较大缺陷的。

选取绝对值最大的元素作为主元来进行消元可避免上述缺点,通常有如下两种方法:

(一)列主元高斯消去法

该法仍按 x_1, x_2, \dots, x_n 的顺序消元。在每一次消元过程中,例如第 k 步消 x_k 时,选取 k 列所有待消元素 $a_{rk}^{(k-1)} (r \geq k)$ 中的绝对值最大者作为主元,把所选主元按行对换移到 (k, k) 位置。即令

$$|a_{rk}| = \max_{i \geq k} |a_{ik}| \quad (1-35)$$

只要交换当时的系数矩阵的 r 和 k 两行以及列向量元素 f_r 和 f_k 即可。然后再按简单消去法计算下一步。

(二)全主元高斯消去法

全主元消去法和列主元消去法不同之处在于不再按 x_1, x_2, \dots, x_n 的自然顺序消元。消元过程中的每一步(例如第 k 步)都要就 $a_{rs}^{(k-1)} (r \geq k, s \geq k)$ 的全体来考虑选取其中绝对值最大者作为主元,再经行的对换和列的对换把主元移到 (k, k) 位置。其余的计算方法和前述相同。

(三)消去法与矩阵的三角分解

用高斯消去法逐次消元,最后得到等价方程组(1-32),其系数矩阵为一上三角阵。当主元 $a_{11}, a_{22}^{(1)}, a_{33}^{(2)}, \dots, a_{nn}^{(n-1)}$ 均不为零时,数学上可以证明,系数方阵 $[A]$ 可分解为一个下三角阵 $[L]$ 和一个上三角阵 $[U]$ 的乘积。原方程

$$[A]\{X\} = \{F\}$$

变为

$$[L][U]\{X\} = \{F\} \quad (1-36)$$

于是,求解原方程的问题可看作是相继求解具有三角状系数矩阵的方程组

$$[L]\{Y\} = \{F\} \quad (1-37)$$

$$[U]\{X\} = \{Y\} \quad (1-38)$$

的问题。

二、三对角方程组的解法(追赶法)

三对角线方程组的一般形式为

$$\left. \begin{aligned} b_1 x_1 + c_1 x_2 &= f_1 \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 &= f_2 \\ a_3 x_2 + b_3 x_3 + c_3 x_4 &= f_3 \\ &\vdots \\ a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} &= f_i \\ &\vdots \\ a_{n-1} x_{n-2} + b_{n-1} x_{n-1} + c_{n-1} x_n &= f_{n-1} \\ a_n x_{n-1} + b_n x_n &= f_n \end{aligned} \right\} \quad (1-39)$$

令

$$[A] = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & \\ & & \dots & & \\ & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \quad \{X\} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \quad \{F\} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{bmatrix} \quad (1-40)$$

于是,方程组(1-39)可写成

$$[A]\{X\} = \{F\}$$

为了直接求解方程组(1-40),将[A]分解为两个两对角线矩阵的乘积,即

$$[A] = [L][U]$$

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & a_n & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & & \\ L_2 & \alpha_2 & & & \\ & L_3 & \alpha_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & L_n & \alpha_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \beta_1 & & & \\ & 1 & \beta_2 & & \\ & & 1 & \beta_3 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & 1 & \beta_{n-1} \end{bmatrix} \quad (1-41)$$

由式(1-41)可看出

$$L_i = a_i \quad (i = 2, 3, \dots, n)$$

故式(1-41)可改写如下

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & a_n & b_n & c_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & & \\ a_2 & \alpha_2 & & & \\ & a_3 & \alpha_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a_n & \alpha_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \beta_1 & & & \\ & 1 & \beta_2 & & \\ & & 1 & \beta_3 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & 1 & \beta_{n-1} \end{bmatrix} \quad (1-42)$$

上式中的系数之间有下列关系

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= b_1 \\ \beta_1 &= \frac{c_1}{b_1} \\ \alpha_2 &= b_2 - a_2 \beta_1 \\ \beta_2 &= \frac{c_2}{\alpha_2} \\ &\dots\dots \\ \alpha_i &= b_i - a_i \beta_{i-1} \\ \beta_i &= \frac{c_i}{\alpha_i} \\ &\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (1-43)$$

因为

$$a_i (i=2, 3, \dots, n),$$

$$b_i (i=1, 2, \dots, n),$$

$c_i (i=1, 2, \dots, n-1)$ 为已知, 所以很容易求出 α_i 和 β_i 的值。原方程化为

$$[L][U]\{X\} = \{F\} \quad (1-44)$$

令

$$[U]\{X\} = \{Y\} \quad (1-45)$$

则

$$[L]\{Y\} = \{F\} \quad (1-46)$$

即

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & & & & \\ a_2 & \alpha_2 & & & \\ & a_3 & \alpha_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a_n & \alpha_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix}$$

由式(1-46)可解出中间变量 y , 计算公式如下

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \frac{f_1}{b_1} \\ y_2 &= \frac{f_2 - a_2 y_1}{\alpha_2} \\ &\dots\dots \\ y_i &= \frac{f_i - a_i y_{i-1}}{\alpha_i} \end{aligned} \right\} \quad (1-47)$$

$$(i = 3, \dots, n)$$

从上述由小到大的递推公式求出 $\{Y\}$ 以后,代入式(1-45),即

$$\begin{bmatrix} 1 & \beta_1 & & & \\ & 1 & \beta_2 & & \\ & & 1 & \beta_3 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & 1 & \beta_{n-1} \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix}$$

很易看出

$$\left. \begin{aligned} x_n &= y_n \\ x_{n-1} &= y_{n-1} - \beta_{n-1}x_n \\ &\dots\dots\dots \\ x_i &= y_i - \beta_i x_{i+1} \end{aligned} \right\} \quad (1-48)$$

$(i = n-2, \dots, 1)$

利用上述由大到小的递推公式,很易解出全部的 x_i 。

追赶法要比消去法方便且速度快。常用于解有限差分方程。

三、对称正定方阵的三角分解和改进平方根法

设有一组线性代数方程组

$$\left. \begin{aligned} a_{11}H_1 + a_{12}H_2 + \dots + a_{1n}H_n &= f_1 \\ a_{21}H_1 + a_{22}H_2 + \dots + a_{2n}H_n &= f_2 \\ &\dots\dots\dots \\ a_{n1}H_1 + a_{n2}H_2 + \dots + a_{nn}H_n &= f_n \end{aligned} \right\} \quad (1-49)$$

令

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots\dots\dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \{H\} = \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_n \end{Bmatrix} \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix} \quad (1-50)$$

则方程组可简写为

$$[A]\{H\} = \{F\}$$

其中 $[A]$ 为 n 阶对称正定方阵,一般系数方阵 $[A]$ 可分解为一个下三角阵 $[L]$ 和一个上三角阵 $[U]$ 的乘积。如果 $[A]$ 是对称正定方阵,则可分解为

$$[A] = [L][D][L]^T \quad (1-51)$$

式中 $[L]$ 为下三角阵

$$[L] = \begin{bmatrix} I_{11} & & & \\ I_{21} & I_{22} & & \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ I_{n1} & I_{n2} & I_{n3} & \dots & I_{nn} \end{bmatrix} \quad (1-52)$$

$[D]$ 为对角阵

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_{11}} & & & & \\ & \frac{1}{L_{22}} & & & \\ & & \frac{1}{L_{33}} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \frac{1}{L_{nn}} \end{bmatrix} \quad (1-53)$$

$[L]^T$ 为 $[L]$ 的转置方阵

$$[L]^T = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{21} & L_{31} & \cdots & L_{n1} \\ & L_{22} & L_{32} & \cdots & L_{n2} \\ & & L_{33} & \cdots & L_{n3} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & L_{nn} \end{bmatrix} \quad (1-54)$$

$$[L_1] = [D][L]^T = \begin{bmatrix} 1 & \frac{L_{21}}{L_{11}} & \frac{L_{31}}{L_{11}} & \cdots & \frac{L_{n1}}{L_{11}} \\ & 1 & \frac{L_{32}}{L_{22}} & \cdots & \frac{L_{n2}}{L_{22}} \\ & & 1 & \cdots & \frac{L_{n3}}{L_{33}} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (1-55)$$

故式(1-51)可改写为

$$[A] = [L][L_1] \quad (1-56)$$

即

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ & & \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & & & & \\ L_{21} & L_{22} & & & \\ & & \cdots & & \\ L_{i1} & L_{i2} & \cdots & L_{ii} & \\ & & \cdots & & \\ L_{n1} & L_{n2} & \cdots & & L_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{L_{21}}{L_{11}} & \cdots & \frac{L_{n1}}{L_{11}} \\ & 1 & \cdots & \frac{L_{n2}}{L_{22}} \\ & & \cdots & \\ & & & 1 & \cdots & \frac{L_{ni}}{L_{ii}} \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (1-57)$$

比较式(1-57)等号两边,就可找出原矩阵系数 a_{ij} 和新的三角阵元素 L_{ij} 之间的关系。因为方阵是对称的,因此只要求出一半即可。比较第一行第一列,得

$$a_{11} = L_{11} \quad \text{故 } L_{11} = a_{11}$$

比较第一行第二列,得

$$a_{12} = a_{21} = L_{11} \times \frac{L_{21}}{L_{11}} + 0 = L_{21} \quad \text{故 } L_{21} = a_{21}$$

比较第二行第二列,得

$$a_{22} = L_{21} \times \frac{L_{21}}{L_{11}} + L_{22} \quad \text{故 } L_{22} = a_{22} - \frac{L_{21}L_{21}}{L_{11}}$$

因为 L_{11} 和 L_{21} 已经求出,可解出 L_{22} 。由此可得出一般的求 L_{ij} 的递推公式

$$L_{ij} = a_{ij} - \sum_{p=1}^{i-1} \frac{L_{ip}L_{jp}}{L_{pp}} \quad (j \leq i \leq n) \quad (1-58)$$

利用上式可解出全部的 L_{ij} 。于是求解方程组

$$[A]\{H\} = \{F\}$$

的问题转变为解

$$[L][L_1]\{H\} = \{F\} \quad (1-59)$$

的问题。令

$$[L_1]\{H\} = \{Y\} \quad (1-60)$$

则方程组式(1-59)变为

$$[L]\{Y\} = \{F\} \quad (1-61)$$

即

$$\begin{bmatrix} L_{11} & & & & \\ & L_{21} & L_{22} & & \\ & & \dots & & \\ & & & L_{i1} & L_{i2} & \dots & L_{in} \\ & & & & \dots & & \\ & & & & & L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{ni} & \dots & L_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix} \quad (1-62)$$

比较等式两端,可解出中间变量 $\{Y\}$

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \frac{f_1}{L_{11}} \\ y_2 &= \frac{1}{L_{22}}[f_2 - L_{21}y_1] \\ &\dots\dots\dots \\ y_i &= \frac{1}{L_{ii}}[f_i - \sum_{p=1}^{i-1} L_{ip}y_p] \\ &\dots\dots\dots \\ y_n &= \frac{1}{L_{nn}}[f_n - \sum_{p=1}^{n-1} L_{np}y_p] \end{aligned} \right\} \quad (1-63)$$

$$(i = 3, 4, \dots, n)$$

由式(1-63)求出中间变量后,代入式(1-60)得

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{L_{21}}{L_{11}} & \frac{L_{31}}{L_{11}} & \cdots & \frac{L_{n1}}{L_{11}} \\ & 1 & \frac{L_{32}}{L_{22}} & \cdots & \frac{L_{n2}}{L_{22}} \\ & & 1 & \cdots & \frac{L_{n3}}{L_{33}} \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 & \cdots & \frac{L_{ni}}{L_{ii}} \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ \vdots \\ H_i \\ \vdots \\ H_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad (1-64)$$

比较等式的两端,利用向后递推公式

$$\left. \begin{aligned} H_n &= y_n \\ H_{n-1} &= y_{n-1} - \frac{L_{n,n-1}}{L_{n-1,n-1}} H_n \\ &\dots\dots\dots \\ H_i &= y_i - \sum_{j=i+1}^n \frac{L_{ij}}{L_{jj}} H_j \end{aligned} \right\} \quad (1-65)$$

即可逐个求出未知量 $H_n, H_{n-1}, \dots, H_2, H_1$ 。即为原方程组 $[A]\{H\} = \{F\}$ 的解。

四、迭代法

首先举例说明迭代法的基本思路。

已知方程组

$$\begin{cases} 5x + 2y = 8 \\ 3x - 20y = 26 \end{cases} \quad (1-66)$$

求出该方程的精确解为

$$x = 2; \quad y = -1$$

将式(1-66)改写为

$$\begin{cases} x = 0 - 0.4y + 1.6 \\ y = 0.15x + 0 - 1.3 \end{cases} \quad (1-67)$$

取 $x=0, y=0$ 作为初值,代入式(1-67)的右端,记作 $x^{(0)}=0, y^{(0)}=0$ 。上角码括号内的数字表示迭代次数。算出迭代一次后的值

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= -0.4y^{(0)} + 1.6 = 1.6 \\ y^{(1)} &= 0.15x^{(0)} - 1.3 = -1.3 \end{aligned}$$

再把算出的 $x^{(1)}$ 和 $y^{(1)}$ 代入(1-67)式右端,得

$$\begin{aligned} x^{(2)} &= -0.4y^{(1)} + 1.6 = 2.12 \\ y^{(2)} &= 0.15x^{(1)} - 1.3 = -1.06 \end{aligned}$$

重复上述步骤,第 m 次迭代的算式为

$$\begin{aligned}x^{(m)} &= -0.4 y^{(m-1)} + 1.6 \\y^{(m)} &= 0.15 x^{(m-1)} - 1.3\end{aligned}$$

计算结果见表 1-1。

由表 1-1 不难看出,迭代的过程就是逐步向 $x=2, y=1$ 逼近的过程。如果下面极限存在

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = x$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} y^{(m)} = y$$

就说明迭代过程是收敛的。如果两次迭代所得数值之差的绝对值均小于某一给定的数 ϵ , 即

$$|x^{(m)} - x^{(m-1)}| < \epsilon$$

$$|y^{(m)} - y^{(m-1)}| < \epsilon$$

时,我们就把 $x^{(m)}$ 和 $y^{(m)}$ 作为解 x, y 的近似值。 ϵ 称为允许误差或收敛标准,由所解物理问题的性质给定。例如在地下水资源评价或计算坝基扬压力时,通常要预报水头 H , 水头测量的精度常取 $\epsilon = 0.01 \sim 0.001$ 米。下面介绍几种常用的迭代方法。

(一)雅可比迭代法

设一线性代数方程组

$$\left. \begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= f_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= f_2 \\&\vdots \\a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n &= f_i \\&\vdots \\a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= f_n\end{aligned} \right\}$$

将以上各式中等号左端除对角线项以外各项均移至等号右端,有

$$\left. \begin{aligned}a_{11}x_1 &= 0 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n + f_1 \\a_{22}x_2 &= -a_{21}x_1 - 0 - \cdots - a_{2n}x_n + f_2 \\&\vdots \\a_{ii}x_i &= -a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \cdots - a_{in}x_n + f_i \\&\vdots \\a_{nn}x_n &= -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - 0 + f_n\end{aligned} \right\} \quad (1-68)$$

开始取任一向量 $\{x^{(0)}\} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})^T$ 作为初值,代入式(1-68)右端算出一个新向量 $\{x^{(1)}\} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots, x_n^{(1)})^T$,再由 $\{x^{(1)}\}$ 算出 $\{x^{(2)}\}$,继续做下去,得到一个向量序列

表 1-1 迭代法计算表

k	x	y
0	0	0
1	1.60000	-1.30000
2	2.12000	-1.06000
3	2.02400	-0.98200
4	1.99280	-0.99640
5	1.99586	-1.00108
6	2.00043	-1.00022
7	2.00009	-0.99994
8	1.99997	-0.99999
9	1.99999	-1.00000
...

$$\{x^{(0)}\}, \{x^{(1)}\}, \{x^{(2)}\}, \dots, \{x^{(m)}\}, \{x^{(m+1)}\}, \dots$$

如果这一序列收敛于真解 $\{x\}$,则可用迭代法求解该方程组。实际上只要向量 $\{x^{(m)}\}$ 和 $\{x^{(m+1)}\}$ 中每一个对应元素之差均小于 ϵ ,就可把 $\{x^{(m)}\}$ 当作方程组式(1-68)的解。

数学上可以证明,只要系数方阵 $[A]$ 是按行(或按列)严格对角占优,即每一行(或列)非对角元素的绝对值之和小于该行(或列)的对角元素的绝对值,即

$$|a_{i1}| + |a_{i2}| + \dots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \dots + |a_{in}| < |a_{ii}| \quad (1-69)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

时,雅可比迭代是收敛的。雅可比迭代法解方程组的计算公式如下。

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1^{(m+1)} &= 0 - a_{12}x_2^{(m)} - \dots - a_{1n}x_n^{(m)} + f_1 \\ a_{22}x_2^{(m+1)} &= -a_{21}x_1^{(m)} - 0 - \dots - a_{2n}x_n^{(m)} + f_2 \\ &\dots\dots\dots \\ a_{ii}x_i^{(m+1)} &= -a_{i1}x_1^{(m)} - a_{i2}x_2^{(m)} - \dots - a_{in}x_n^{(m)} + f_i \\ &\dots\dots\dots \\ a_{nn}x_n^{(m+1)} &= -a_{n1}x_1^{(m)} - a_{n2}x_2^{(m)} - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(m)} - 0 + f_n \end{aligned} \right\} \quad (1-70)$$

只要 $a_{ii} \neq 0$ ($i=1, 2, \dots, n$)

迭代就可进行下去。式(1-70)也可写成

$$x_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left\{ f_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(m)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(m)} \right\} \quad (1-71)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n; m = 1, 2, \dots,)$$

或

$$x_i^{(m+1)} = x_i^{(m)} + \frac{1}{a_{ii}} \left\{ f_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^{(m)} \right\} \quad (1-72)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n; m = 1, 2, \dots)$$

(二) 高斯—塞德尔迭代法

利用式(1-72)进行迭代计算,简单迭代法在计算 $x_i^{(m+1)}$ 时,等式右端的 $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n$,全部用第 m 次迭代的近似值,即式(1-70)。实际上,当计算 $x_i^{(m+1)}$ 时,第 $m+1$ 次迭代近似值 $x_1^{(m+1)}, x_2^{(m+1)}, \dots, x_{i-1}^{(m+1)}$ 均已算出,而它们比 $x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_{i-1}^{(m)}$ 更接近于真解。如果将式(1-70)的形式稍加改变,在式(1-68)的右端,只要有可能,都用刚算出的 $m+1$ 次的迭代值进行计算,则迭代收敛加快,计算效率提高。从这一思想出发,得到高斯—塞德尔迭代公式

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1^{(m+1)} &= 0 - a_{12}x_2^{(m)} - \dots - a_{1n}x_n^{(m)} + f_1 \\ a_{22}x_2^{(m+1)} &= -a_{21}x_1^{(m+1)} - 0 - \dots - a_{2n}x_n^{(m)} + f_2 \\ &\dots\dots\dots \\ a_{ii}x_i^{(m+1)} &= -a_{i1}x_1^{(m+1)} - a_{i2}x_2^{(m+1)} - \dots - a_{in}x_n^{(m)} + f_i \\ &\dots\dots\dots \\ a_{nn}x_n^{(m+1)} &= -a_{n1}x_1^{(m+1)} - a_{n2}x_2^{(m+1)} - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(m+1)} - 0 + f_n \end{aligned} \right\} \quad (1-73)$$

或写作

$$\left. \begin{aligned} x_i^{(m+1)} &= \frac{1}{a_{ii}} \left\{ f_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(m)} \right\} \\ \text{或} \quad x_i^{(m+1)} &= x_i^{(m)} + \frac{1}{a_{ii}} \left\{ f_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(m)} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (1-74)$$

($i = 1, 2, \dots, n; m = 1, 2, \dots$)

同样可以证明,当系数方阵按行(或按列)严格对角占优或为对称正定方阵时,高斯—塞德尔迭代是收敛的。

(三) 逐个超松弛法(SOR 法)

可以把高斯—塞德尔迭代公式(1-74)式右端第二项看作对前一次迭代结果的修正,并记作 C ,则式(1-74)可改写为

$$x_i^{(m+1)} = x_i^{(m)} + C \quad (1-75)$$

因为近似解 $\{x\} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 不是精确解。其分量 x_i 和精确解之间存在着一个残差。每叠代一次,残差可消除 C ,向精确解更接近一步,可认为方程被松弛了。如果将 C 乘以一个因子 ω ,将式(1-75)修改为

$$\hat{x}_i^{(m+1)} = x_i^{(m)} + \omega C \quad (1-76)$$

或

$$\begin{aligned} \hat{x}_i^{(m+1)} &= x_i^{(m)} + \omega \frac{1}{a_{ii}} (f_i - a_{i1} x_1^{(m+1)} - \dots \\ &\quad - a_{i, i-1} x_{i-1}^{(m+1)} - a_{in} x_n^{(m)} - \dots - a_{in} x_n^{(m)}) \\ &\quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (1-77)$$

式中的 ω 称为松弛因子。一般 $0 < \omega \leq 2$ 。如果 $0 < \omega < 1$ 称为亚松弛法, $\omega = 1$ 时就是高斯—塞德尔迭代法。如 $\omega > 1$ 称为超松弛法。

将式(1-75)代入式(1-76),得

$$\hat{x}_i^{(m+1)} = (1 - \omega) x_i^{(m)} + \omega x_i^{(m+1)} \quad (1-78)$$

当 $0 < \omega < 1$ 时,上式代表 $x_i^{(m)}$ 和 $x_i^{(m+1)}$ 的权平均公式。利用亚松弛法算得的下一个 $\hat{x}_i^{(m+1)}$ 值是在老的 $x_i^{(m)}$ 值和高斯—塞德尔计算值 $x_i^{(m+1)}$ 之间。因此用亚松弛法每一次修改值比高斯—塞德尔法小。当 $1 < \omega \leq 2$ 时,可把式(1-78)改变成如下形式

$$\hat{x}_i^{(m+1)} = x_i^{(m)} + \omega (x_i^{(m+1)} - x_i^{(m)}) \quad (1-79)$$

是一个外插公式。 $\hat{x}_i^{(m+1)}$ 和 ω 之间的关系为一直线关系。超松弛法的每一次修改值大于高斯—塞德尔迭代法。当先前的估计值 $x_i^{(m)}$ 仍远离真解时,用较大的 ω 值能使迭代较快地收敛。一般说来 ω 值在 1 与 2 之间较好。

第二章 有限差分法及其在水文地质计算中的应用

第一节 概 述

有限差分法就是把微分近似地用差分来代替,同时对边界条件、初始条件进行相应的处理,把定解问题的求解化为一组代数方程组的求解问题。概括一点讲,有限差分法就是用有限差分近似地表示导数。由导数的定义出发,可写成如下形式。

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (2-1)$$

当 Δx 充分小时,可以用函数的差商(差分)来近似地表示导数。

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (2-2)$$

这样,必然会带来一定的误差,因此,必须对由此而引起的误差进行估计。

设任一足够光滑的函数 $f(x)$,把 $f(x)$ 沿 x 的正向(即向 x 轴的方向)展开为泰勒(Taylor)级数

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x f'(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f''(x) + \frac{(\Delta x)^3}{3!} f'''(x) + \dots \quad (2-3)$$

我们把 $f'(x)$ 后面的余项 $\frac{(\Delta x)^2}{2!} f''(x) + \dots$ 用符号 $O(\Delta x)$ 表示,于是

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (2-4)$$

(2-2)式和(2-4)式相比,相差一个 $O(\Delta x)$,这 $O(\Delta x)$ 即为误差。在数学上把截掉泰勒级数的余项所产生的误差称为截断误差。

差分的形式有三种。

(1)向前差分。即沿 x 的正向展开的泰勒级数(截去余项)

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (2-5)$$

(2)向后差分。即 $f(x)$ 沿 x 的负向展开的泰勒级数(截去余项)

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} \quad (2-6)$$

(3)中心差分。

$$f'(x) \approx \frac{1}{2} \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} \right] \quad (2-7)$$

若为二阶导数,可写成

$$f''(x) \approx \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} \right]$$

$$= \frac{f(x + \Delta x) + f(x - \Delta x) - 2f(x)}{(\Delta x)^2} \quad (2-8)$$

若把 $f(x)$ 写成 $H(x)$ 即可将向前差分、向后差分及中心差分写成如下形式。

$$\frac{dH}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{H(x + \Delta x) - H(x)}{\Delta x} \approx \frac{H(x + \Delta x) - H(x)}{\Delta x} \quad (\text{向前差分}) \quad (2-9)$$

$$\frac{dH}{dx} \approx \frac{H(x) - H(x - \Delta x)}{\Delta x} \quad (\text{向后差分}) \quad (2-10)$$

$$\frac{dH}{dx} \approx \frac{1}{2} \left[\frac{H(x + \Delta x) - H(x)}{\Delta x} - \frac{H(x) - H(x - \Delta x)}{\Delta x} \right] \quad (\text{中心差分}) \quad (2-11)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2H}{dx^2} &\approx \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{H(x + \Delta x) - H(x)}{\Delta x} - \frac{H(x) - H(x - \Delta x)}{\Delta x} \right] \\ &= \frac{H(x + \Delta x) + H(x - \Delta x) - 2H(x)}{(\Delta x)^2} \end{aligned} \quad (2-12)$$

对于二元函数 $H = H(x, t)$ 有

$$\frac{\partial H(x, t)}{\partial t} = \frac{H(x, t + \Delta t) - H(x, t)}{\Delta t} \quad (2-13)$$

$$\frac{\partial^2 H(x, t)}{\partial x^2} = \frac{H(x + \Delta x, t) + H(x - \Delta x, t) - 2H(x, t)}{(\Delta x)^2} \quad (2-14)$$

将边界条件用相应的差分形式来代替。这样,微分方程就为差分方程所代替,定解问题的求解化为一组代数方程组的求解问题。由于可用不同的差商形式来代替导数,因此定解问题可以化为不同形式的差分方程。

第二节 有限差分法在水文地质计算中的应用

一、在解拉普拉斯方程中的应用

有限差分法通常把计算区域离散成为许多矩形(或正方形)的网格,同时还要把该区域内水头所满足的微分方程转化为差分方程。区域剖分状况如图 2-1,使结点编号的方法和矩阵元素的编号方法一致, i 代表行号,即 y 轴方向的编号,由上而下为编号增加的方向(即编号增加的方向和 y 轴方向相反), j 代表列号,即 x 轴方向的编号,由左向右为编号增加方向(和 x 轴方向一致)。设空间步长在 x 轴方向为 Δx , y 轴方向为 Δy ,各网格的空间步长是相等的。则水头 $H_{i,j}$ 代表离起始点(1,1)沿 x 轴方向距离为 $(j-1)\Delta x$ 和 y 轴方向距离为 $(i-1)\Delta y$ 的那一点的水头,其余如 $H_{i-1,j}$, $H_{i,j-1}$ 等依此类推。

由式(2-14)可知

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \Big|_{i,j} \approx \frac{H_{i,j+1} + H_{i,j-1} - 2H_{i,j}}{(\Delta x)^2} \quad (2-15)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \Big|_{i,j} \approx \frac{H_{i-1,j} + H_{i+1,j} - 2H_{i,j}}{(\Delta y)^2} \quad (2-16)$$

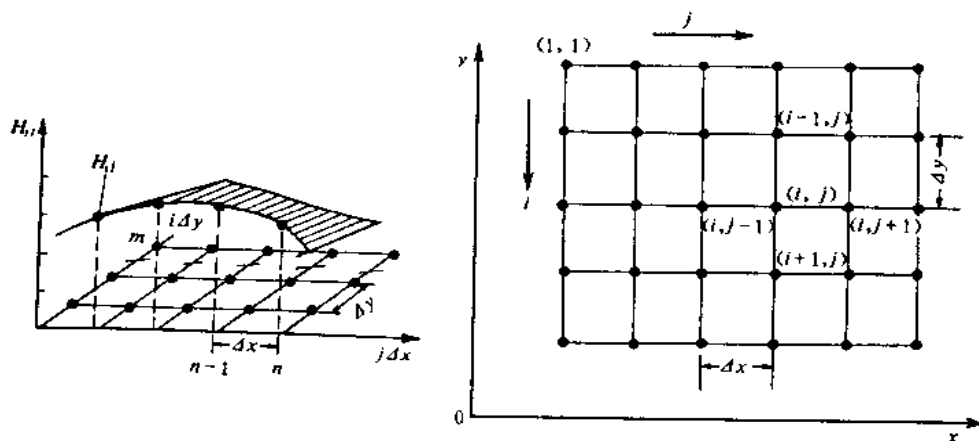


图 2-1 有限差分网格和编号约定

因此,当 $\Delta x = \Delta y$,即为正方形网格时,拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0 \quad (2-17)$$

的差分格式为

$$H_{i-1,j} + H_{i+1,j} + H_{i,j-1} + H_{i,j+1} + 4H_{i,j} = 0 \quad (2-18)$$

或

$$H_{i,j} = \frac{H_{i-1,j} + H_{i+1,j} + H_{i,j-1} + H_{i,j+1}}{4} \quad (2-19)$$

上式即为拉普拉斯方程的有限差分格式(也称五点格式),它表明当地下水作稳定运动时,某一结点的水头为相邻 4 个结点的水头的平均值。

二、在解泊松方程(Poisson's Equation)中的应用

拉普拉斯方程要求计算区域内没有源汇项,即没有垂直方向的补给和抽水,这在地下水开采资源评价中并不多见。经常遇到的情况是假定地下水运动是稳定的,含水层底板水平,水头变化比起含水层厚度相对很小,垂直向入渗补给量 N 为常数,有一眼抽水井位于 (x_0, y_0) 以定流量 Q 抽水。则方程可写为

$$T \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + T \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + N - Q\delta(x - x_0, y - y_0) = 0 \quad (2-20)$$

$$\text{令 } R = \begin{cases} N - \frac{Q}{\Delta x \Delta y} & \text{对抽水井位置上的结点} \\ N & \text{其它结点} \end{cases}$$

式中 T ——导水系数 $[L^2 T^{-1}]$;

N ——单位时间单位面积的入渗补给量(取正值)或蒸发消耗量(取负值), $[LT^{-1}]$;

Q ——单位时间水井的开采量,在非开采区 $Q=0 [L^3 T^{-1}]$;

δ ——二维狄拉克(Delta)函数。

这样的处理方法就是把水井的抽水量化为水井附近一个单元面积上的抽水强度(见图 2-2)。

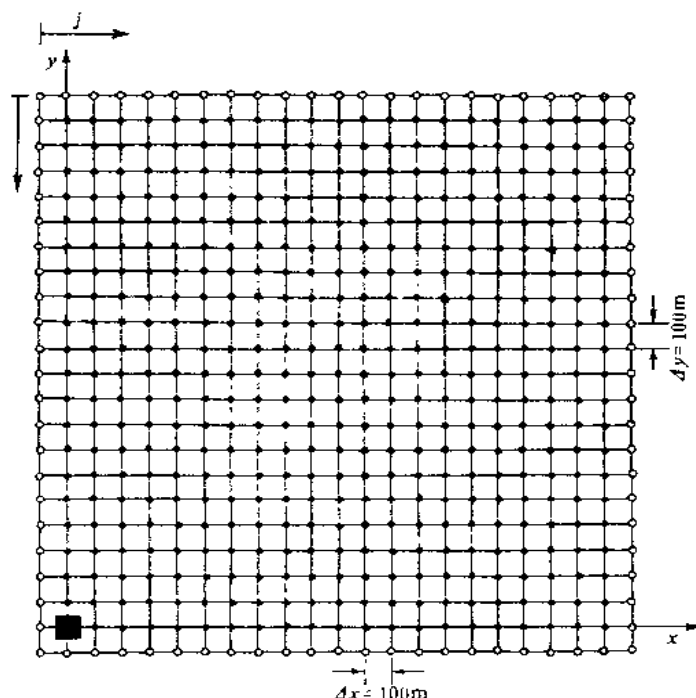


图 2-2 存在隔水边界时水井抽水的有限差分网格的例子

图中阴影部分代表抽水井所在位置;黑点代表
结点;空心圆点代表虚结点

于是公式(2-20)可改写为

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = -\frac{R}{T} \quad (2-21)$$

上式为泊松方程(Poisson's Equation),该方程的差分格式(当 $\Delta x = \Delta y$ 时)为

$$H_{i,j} = \frac{H_{i-1,j} + H_{i+1,j} + H_{i,j-1} + H_{i,j+1} + ((\Delta x)^2 R/T)}{4} \quad (2-22)$$

当潜水含水层降深较大时,即使含水层的隔水底板水平,渗透系数 K 为常数,导水系数 T 仍不是常数。由隔水底板算起的含水层水头 H 等于含水层厚度 h ,可写成

$$K \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right] = -R \quad (2-23)$$

令 $u = h^2$, 上式化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{2R}{K} \quad (2-24)$$

对 u 可写出如下的差分方程

$$u_{i,j} = \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} + 2(\Delta x)^2 R/K}{4} \quad (2-25)$$

求出 u 后,其平方根即为 h 。

三、在解地下水非稳定运动方程中的应用

为了便于讨论,我们假设含水层的隔水底板水平,含水层为承压的,或者虽为无压水,但水位降深比含水层厚度小得多,其方程可写成

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \frac{S_T}{T} \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{R(x, y, t)}{T} \quad (2-26)$$

式中: S_T 为贮水系数,其余符号同前。上式中包含有水头 H 对于时间的偏导数,象空间区域一样,我们对时间也进行离散化,时间步长为 Δt ,时间段用上角码 k 表示,类似地可写出对时间的向前差分,向后差分和中心差分的表达式

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{H_{i,j}^{k+1} - H_{i,j}^k}{\Delta t} \quad (2-27)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{H_{i,j}^k - H_{i,j}^{k-1}}{\Delta t} \quad (2-28)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{H_{i,j}^{k+1} - H_{i,j}^{k-1}}{2\Delta t} \quad (2-29)$$

在解有限差分方程的时候,地下水位不仅随 x 而变,而且随时间 t 而变。我们究竟采用什么时间段,是取初始时刻的 t ,还是取终了时刻的 t ,或是中间时刻的 t ? 正是这种差别导致产生了不同的差分格式。

(一)显式差分格式

显式差分格式,水头值取 k (初始)时刻的已知水头,若 $\partial H / \partial t$ 取向前差分,则可写成

$$\begin{aligned} & \frac{H_{i,j+1}^k - 2H_{i,j}^k + H_{i,j-1}^k}{(\Delta x)^2} + \frac{H_{i-1,j}^k - 2H_{i,j}^k + H_{i+1,j}^k}{(\Delta y)^2} \\ &= \frac{S_T}{T} \frac{H_{i,j}^{k+1} - H_{i,j}^k}{\Delta t} - \frac{R_{i,j}^k}{T} \end{aligned} \quad (2-30)$$

式中 $S_T = \begin{cases} \mu & \text{对于潜水} \\ S & \text{对于承压水} \end{cases}$

$T = \begin{cases} Kh_0 & \text{对于潜水} \\ Kb & \text{对于承压水} \end{cases}$

μ ——给水度;

S ——贮水系数;

h_0 ——潜水含水层的初始厚度;

b ——承压含水层的厚度。

上式称为显式差分格式。将 k 时刻的已知水头移到等式右端,且使 $\Delta x = \Delta y = a$,得到

$$\begin{aligned} H_{i,j}^{k+1} &= \left(1 - \frac{4T\Delta t}{S_T a^2} \right) H_{i,j}^k + \left(\frac{4T\Delta t}{S_T a^2} \right) \\ &\quad \times \left(\frac{H_{i+1,j}^k + H_{i-1,j}^k + H_{i,j+1}^k + H_{i,j-1}^k}{4} \right) + \frac{R_{i,j}^k \Delta t}{S_T} \end{aligned} \quad (2-31)$$

如果垂直方向的水交换量 $R_{i,j}^k = 0$,并且令

$$\omega = \frac{4T\Delta t}{S_T a^2}$$

则式(2-31)即为超松弛法的式(1-78)。

显然,我们希望差分方程的解趋近于精确解。当空间步长 $\Delta x, \Delta y$, 和时间步长 Δt 取得充分小时, 即 $\Delta x, \Delta y, \Delta t \rightarrow 0$, 并且

$$\frac{T \Delta t}{S_T (\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2} \quad (2-32)$$

时, 差分解趋近于精确解, 我们说差分格式是收敛的, 反之是发散的。当我们一个一个时间水平算下去时, 若计算误差能得到控制, 我们称之为稳定的; 反之是不稳定的。

(二) 隐式差分格式

由显式差分格式可知, 它是有条件收敛和稳定的。当空间步长 Δx 取定以后, 对于不同的参数 T 和 S_T ; 时间步长 Δt 必须小于一定的数值。尤其当 T 很大而 S_T 很小时, Δt 也必须取得很小, 增加了工作量。所以目前比较常用的差分格式为隐式差分。

隐式差分取水头值时, 不再用前一时间水平 k 时刻的值, 而取 k 时刻和 $k+1$ 时刻的加权平均值, 如

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = & \alpha \frac{H_{i,j+1}^{k+1} - 2H_{i,j}^{k+1} + H_{i,j-1}^{k+1}}{(\Delta x)^2} \\ & + (1 - \alpha) \frac{H_{i,j+1}^k - 2H_{i,j}^k + H_{i,j-1}^k}{(\Delta x)^2} \end{aligned} \quad (2-33)$$

式中 α 为权重, 其值在 0~1 之间。

$\partial^2 H / \partial y^2$ 也类似处理, 当 $\alpha=0$ 时, 即为显式格式。当 $\alpha=1$ 时, $\partial^2 H / \partial x^2$ 和 $\partial^2 H / \partial y^2$ 中的 H 完全取 $k+1$ 时刻的未知水头, 称全隐式格式。当 $\alpha=1/2$ 时, 称克兰克—尼柯尔松 (Crank—Nicolson) 格式。

在二维情况下, 如令

$$\hat{H}_{i,j}^k = \frac{H_{i-1,j}^k + H_{i+1,j}^k + H_{i,j-1}^k + H_{i,j+1}^k}{4} \quad (2-34)$$

$$\hat{H}_{i,j}^{k+1} = \frac{H_{i-1,j}^{k+1} + H_{i+1,j}^{k+1} + H_{i,j-1}^{k+1} + H_{i,j+1}^{k+1}}{4} \quad (2-35)$$

则微分方程式(2-26)的隐式差分表达式为

$$\begin{aligned} & \alpha(\hat{H}_{i,j}^{k+1} - H_{i,j}^{k+1}) + (1 - \alpha)(\hat{H}_{i,j}^k - H_{i,j}^k) \\ & = \frac{\alpha^2 S_T}{4T} \frac{H_{i,j}^{k+1} - H_{i,j}^k}{\Delta t} - \frac{\alpha^2 R_{i,j}^k}{4T} \end{aligned} \quad (2-36)$$

由方程式(2-36)和式(2-35)可知, 在二维条件下, 式(2-36)包含有 5 个未知数 $H_{i,j}^{k+1}$, $H_{i,j+1}^{k+1}$, $H_{i,j-1}^{k+1}$, $H_{i+1,j}^{k+1}$ 和 $H_{i-1,j}^{k+1}$, 不能直接求解。而必须对每一时间水平上所有结点都写出类似式(2-36)的方程, 形成一个线性代数方程组, 然后用迭代法或消去法求解。在一维条件下, 上式包含三个未知数 $H_{i,j}^{k+1}$, $H_{i,j+1}^{k+1}$ 和 $H_{i,j-1}^{k+1}$, 所形成的线性代数方程组可用追赶法或迭代法求解。

(三) 交替方向隐式差分(ADI 法)和迭代交替方向隐式差分(IADI 法)

一维隐式差分格式得到的方程组为三对角方程组, 故可用追赶法求解。前已述及, 二维隐式格式得到的方程组, 每一方程的未知数有 5 个, 不是三对角方程组, 不能直接用追赶法。

但如用叠代法,由前面算例可知,愈到后来叠代次数愈多,效率不高。所以必须用其他有效的方法。

交替方向隐式差分,简称 ADI 法,是一种常用的解二维隐式差分的方法。其基本思想是:在每一时间段 Δt 的中间设置一个中间水平时刻 $\left(k + \frac{1}{2}\right) \Delta t$ 。每一时间段的计算分两步进行。第一步由 k 时刻的已知水头求出 $\left(k + \frac{1}{2}\right) \Delta t$ 时刻的水头,此时沿着 x 方向一行一行地扫描, x 方向水头取隐式, y 方向取显式(见图 2-3)。

例如对如下的水井抽水模型

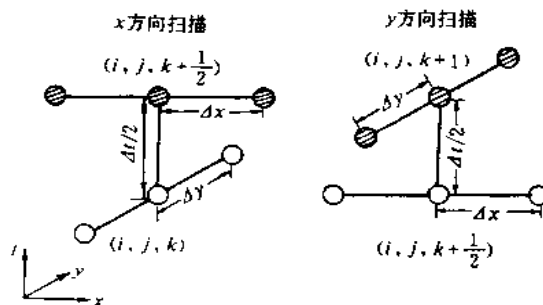


图 2-3 ADI 法计算示意图

图中黑圈表示未知结点,白圈表示已知结点
(根据 P. S. 休延康和 G. F. 品特修改)

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} - \frac{S_T}{T} \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{R}{T} \quad (2-37)$$

$$R = \begin{cases} -\frac{Q}{\Delta x \Delta y} & \text{在结点}(x_0, y_0) \\ 0 & \text{在其他结点} \end{cases}$$

令 $\Delta x = \Delta y = a$ 可得

$$\begin{aligned} H_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + \left(-4 - 2 \frac{Sa^2}{T\Delta t} \right) H_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + H_{i,j+1}^{k+\frac{1}{2}} \\ = -2 \frac{Sa^2}{T\Delta t} H_{i,j}^k - H_{i-1,j}^k - H_{i+1,j}^k - \frac{a^2 R_{i,j}^k}{T} \end{aligned} \quad (2-38)$$

上式左端的未知数只有三个,均在第 i 行。对第 i 行的所有结点写出式(2-38),得到一个三对角方程组,可用追赶法求解。假定计算区域离散为 $N \times M$ 个结点,四周的边界结点都是已知结点,一共可得 $(N-2)$ 个三对角方程组,每一方程组对应于一行结点。且有 $(M-2)$ 个未知数。用追赶法求解全部方程组,可得出计算区域中间时刻 $\left(k + \frac{1}{2}\right) \Delta t$ 的全部结点水头 $H_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} (i=2, \dots, N-1; j=2, \dots, M-1)$ 。第二步由 $\left(k + \frac{1}{2}\right) \Delta t$ 时刻的已知水头 $H_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}$ 求得了 $(k+1)\Delta t$ 时刻的水头 $H_{i,j}^{k+1}$ 。此时沿着 y 方向一列一列地扫描(见图 2-3)。 y 方向水头取隐式, x 方向取显式。此时的差分方程为

$$\begin{aligned} H_{i+1,j}^{k+1} + \left(-4 - \frac{2Sa^2}{T\Delta t} \right) H_{i+1,j}^{k+1} + H_{i+1,j+1}^{k+1} \\ = -\frac{2Sa^2}{T\Delta t} H_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - H_{i,j+1}^{k+\frac{1}{2}} - H_{i+2,j+1}^{k+\frac{1}{2}} - \frac{a^2 R_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}}}{T} \end{aligned} \quad (2-39)$$

同理,对第 j 列的所有结点写出式(2-39),可得一个三对角方程组。一共可得 $(M-2)$ 个三对角方程组,每一方程组对应于一列结点。且有 $(N-2)$ 个未知数。全部方程组都可用追赶法求解,便得到 $(k+1)\Delta t$ 时刻的全部水头 $H_{i,j}^{k+1}$ ($i=2,3,\dots,N-1; j=2,3,\dots,M-1$)。

ADI 法的每一次扫描都是有条件稳定的,但整个计算过程则是无条件稳定。

ADI 法是解二维有限差分问题的常用方法,但有时在某些结点和时间水平可能导致较大的误差。如果联合应用 ADI 法和迭代法可使误差减小。这种联合应用的方法称为迭代交替方向隐式差分,简称 IADI 法。

普赖克特和郎阔斯特(Prickett and Lonnguist, 1971),将 ADI 法和高斯—塞德尔迭代法结合起来,在求解某一时间水平 $(k+1)\Delta t$ 的水头 $H_{i,j}^{k+1}$ 时要进行若干次迭代,直至误差小于某一范围为止。每一次迭代也分为二步,第一步沿行扫描,第二步沿列扫描。为方便起见,现在把时间水平 k 也记作下角码,上角码表示迭代次数(m)。迭代计算的第一步见下式。

$$\begin{aligned} H_{i,j-1,k+1}^{(m+\frac{1}{2})} &+ \left(-4 - \frac{Sa^2}{T\Delta t} \right) H_{i,j,k+1}^{(m+\frac{1}{2})} + H_{i,j+1,k+1}^{(m+\frac{1}{2})} \\ &= -\frac{Sa^2}{T\Delta t} H_{i,j,k} - H_{i,j-1,k+1}^{(m+\frac{1}{2})} - H_{i,j+1,k+1}^{(m+\frac{1}{2})} - \frac{a^2 R_{i,j,k}}{T} \end{aligned} \quad (2-40)$$

用高斯—塞德尔法进行第 i 行迭代时,第 $i-1$ 行的迭代值已经算出,而第 $i+1$ 行尚未算出,故式(2-40)右端 $H_{i,j-1,k+1}$ 取第 $m+\frac{1}{2}$ 次迭代值而 $H_{i,j+1,k+1}$ 取第 m 次迭代值。第二步的计算公式为

$$\begin{aligned} H_{i-1,j,k+1}^{(m+1)} &+ \left(-4 - \frac{Sa^2}{T\Delta t} \right) H_{i,j,k+1}^{(m+1)} + H_{i+1,j,k+1}^{(m+1)} \\ &= -\frac{Sa^2}{T\Delta t} H_{i,j,k} - H_{i,j-1,k+1}^{(m+1)} - H_{i,j+1,k+1}^{(m+1)} - \frac{a^2 R_{i,j,k}}{T} \end{aligned} \quad (2-41)$$

从迭代水平 $m+1$ 到 $m+2$,同样也分成两步走。每一步都解一系列的三对角方程组。每一次迭代后都要进行收敛性检查,直至满足要求为止。因此 IADI 法的工作量较 ADI 法为大。

(四)强隐式差分法(SIP 法)

强隐式差分法(The Strongly Implicit Procedure)是一种不完全的因子分解方法。常用于解某些复杂问题。

例如式(2-26)的微分方程为

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \frac{S_T}{T} \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{R(x,y,t)}{T}$$

当 $\Delta x = \Delta y = a$ 时,均质、各向同性岩层的隐式差分格式为

$$\begin{aligned} H_{i,j-1}^{k+1} + H_{i,j+1}^{k+1} + H_{i-1,j}^{k+1} + H_{i+1,j}^{k+1} &+ \left(-4 - \frac{S_T a^2}{T\Delta t} \right) H_{i,j}^{k+1} \\ &= -\frac{S_T a^2}{T\Delta t} H_{i,j}^k - \frac{a^2 R_{i,j}}{T} \end{aligned} \quad (2-42)$$

此式可写成更一般的表达式

$$b_{ij} H_{i-1,j} + d_{ij} H_{i,j-1} + e_{ij} H_{i,j} + f_{ij} H_{i,j+1} + h_{ij} H_{i+1,j} = q_{ij} \quad (2-43)$$

该情况下

$$b_{ij}=1; d_{ij}=1;$$

$$e_{ij}=-4-\frac{S_T a^2}{T \Delta t^2}; f_{ij}=1;$$

$$h_{ij}=1; q_{ij}=-\frac{S_T a^2}{T \Delta t} H_{i,j}^* - \frac{a^2 R_{i,j}}{T}$$

对于比较复杂的情况,表达式(2-43)依然成立。只是系数 $b_{ij}, d_{ij}, e_{ij}, f_{ij}, h_{ij}, q_{ij}$ 等取值不同而已。如果对每一结点按一行一行顺序写出上述方程式(2-43),则得到一个线性方程组

$$[A]\{H\} = \{q\} \quad (2-44)$$

现举例如下。

有一个 3×3 的块中心结点的例子(见图 2-4)。建立的线性方程组如下。

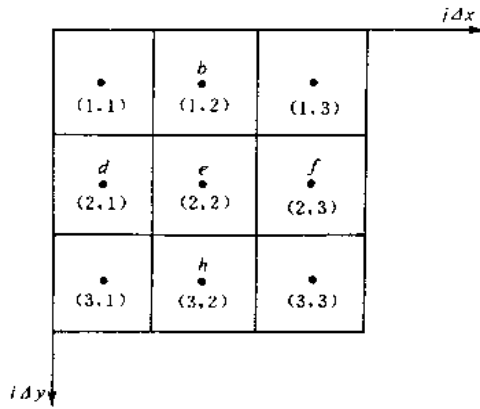


图 2-4 强隐式法示意图

图中的系数是考虑(2,2)结点时的相应系数。

(根据朱学愚、钱×星等)

$$\begin{bmatrix} e_{11} & f_{11} & 0 & h_{11} & & & & & \\ d_{12} & e_{12} & f_{12} & 0 & h_{12} & & & & \\ 0 & d_{13} & e_{13} & 0 & 0 & h_{13} & & & \\ b_{21} & 0 & 0 & e_{21} & f_{21} & 0 & h_{21} & & \\ & b_{22} & 0 & d_{22} & e_{22} & f_{22} & 0 & h_{22} & \\ & & b_{23} & 0 & d_{23} & e_{23} & 0 & 0 & h_{23} \\ & & & b_{31} & 0 & 0 & e_{31} & f_{31} & 0 \\ & & & & b_{32} & 0 & d_{32} & e_{32} & f_{32} \\ & & & & & b_{33} & 0 & d_{33} & e_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{11} \\ H_{12} \\ H_{13} \\ \dots \\ H_{21} \\ H_{22} \\ H_{23} \\ \dots \\ H_{31} \\ H_{32} \\ H_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{12} \\ q_{13} \\ \dots \\ q_{21} \\ q_{22} \\ q_{23} \\ \dots \\ q_{31} \\ q_{32} \\ q_{33} \end{bmatrix} \quad (2-45)$$

该方程组的系数矩阵的非零元素都集中在 5 条对角线上,而且有

$$d_{ij} = f_{ij} = 0; b_{ij} = h_{ij} = 0. (i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, N; N = 3)$$

为了求解上述线性方程组,假设存在一个和系数矩阵 $[A]$ 非常相似的矩阵 $[A']$, $[A']$ 易于分解成一个下三角矩阵 $[L']$ 和一个上三角矩阵 $[U']$ 的乘积,即

$$[A'] = [L'] [U'] \quad (2-46)$$

其中

$$[L'] = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & & & & & & & \\ \beta_{12} & \gamma_{12} & & & & & & \\ 0 & \beta_{13} & \gamma_{13} & & & & & \\ \alpha_{21} & 0 & 0 & \gamma_{21} & & & & \\ & \alpha_{22} & 0 & \beta_{22} & \gamma_{22} & & & \\ & & \alpha_{23} & 0 & \beta_{23} & \gamma_{23} & & \\ & & & \alpha_{31} & 0 & 0 & \gamma_{31} & \\ & & & & \alpha_{32} & 0 & \beta_{32} & \gamma_{32} \\ & & & & & \alpha_{33} & 0 & \beta_{33} & \gamma_{33} \end{bmatrix} \quad (2-47)$$

$$[U'] = \begin{bmatrix} 1 & \delta_{11} & 0 & \eta_{11} & & & & \\ & 1 & \delta_{12} & 0 & \eta_{12} & & & \\ & & 1 & 0 & 0 & \eta_{13} & & \\ & & & 1 & \delta_{21} & 0 & \eta_{21} & \\ & & & & 1 & \delta_{22} & 0 & \eta_{22} \\ & & & & & 1 & 0 & 0 & \eta_{23} \\ & & & & & & 1 & \delta_{31} & 0 \\ & & & & & & & 1 & \delta_{32} \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (2-48)$$

$[L']$ 和 $[U']$ 相乘,得到

$$[A'] = \begin{bmatrix} e'_{11} & f'_{11} & 0 & h'_{11} & & & & \\ d'_{12} & e'_{12} & f'_{12} & g'_{12} & h'_{12} & & & \\ 0 & d'_{13} & e'_{13} & 0 & g'_{13} & h'_{13} & & \\ b'_{21} & c'_{21} & 0 & e'_{21} & f'_{21} & 0 & h'_{21} & \\ & b'_{22} & c'_{22} & d'_{22} & e'_{22} & f'_{22} & g'_{22} & h'_{22} \\ & & b'_{23} & 0 & d'_{23} & e'_{23} & 0 & g'_{23} & h'_{23} \\ & & & b'_{31} & c'_{31} & 0 & e'_{31} & f'_{31} & 0 \\ & & & & b'_{32} & c'_{32} & d'_{32} & e'_{32} & f'_{32} \\ & & & & & b'_{33} & 0 & d'_{33} & e'_{33} \end{bmatrix} \quad (2-49)$$

因此,可以找出各矩阵元素之间的关系

$$b'_{ij} = \alpha_{ij} \quad (2-50)$$

$$c'_{ij} = \alpha_{ij} \delta_{i-1,j} \quad (2-51)$$

$$d'_{ij} = \beta_{ij} \quad (2-52)$$

$$e'_{ij} = \gamma_{ij} + \alpha_{ij} \eta_{i-1,j} + \beta_{ij} \delta_{i,j-1} \quad (2-53)$$

$$f'_{ij} = \gamma_{ij} \delta_{i,j} \quad (2-54)$$

$$g'_{ij} = \beta_{ij} \eta_{i,j} \quad (2-55)$$

$$h'_{ij} = \gamma_{ij} \eta_{ij} \quad (2-56)$$

式(2-50)至式(2-56)建立了矩阵 $[A']$ 的元素和 $[L']$ 及 $[U']$ 的矩阵元素之间的关系。但 $[L']$ 和 $[U']$ 的矩阵元素的具体数值,依然是未知的。为了求得 $[L']$ 和 $[U']$ 的矩阵元素 a_{ij} , β_{ij} , γ_{ij} , δ_{ij} 和 η_{ij} 的数值,以便求解方程组,必须找出原系数矩阵 $[A]$ 和 $[A']$ 之间的关系。方程组

$$[A']\{H\} = \{q\} \quad (2-57)$$

中每一方程的形式为

$$\begin{aligned} b'_{ij}H_{i-1,j} + c'_{ij}H_{i-1,j+1} + d'_{ij}H_{i,j-1} + e'_{ij}H_{i,j} \\ + f'_{ij}H_{i,j+1} + g'_{ij}H_{i+1,j-1} + h'_{ij}H_{i+1,j} = q_{ij} \end{aligned} \quad (2-58)$$

把方程式(2-58)和式(2-43)相比较,多了二个额外的未知数 $H_{i-1,j+1}$ 和 $H_{i+1,j-1}$ 及其系数(见图2-5)。即系数矩阵式(2-49)多了两条对角线 c'_{ij} 和 g'_{ij} 。为了估算这两个额外的未知数,我们将函数 H 在 (i,j) 点邻域用泰勒(Taylor)级数展开得

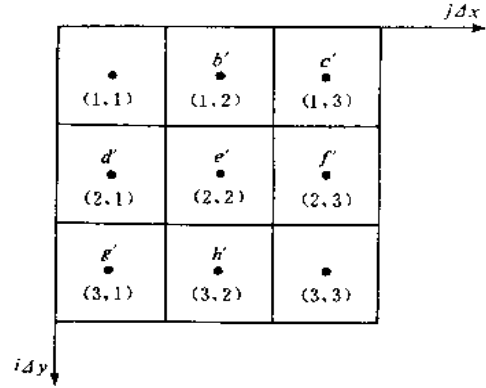


图 2-5 矩阵 $[A']$ 元素示意图

$$\begin{aligned} H_{i-1,j+1} = H_{i,j} + \frac{\partial H_{i,j}}{\partial x}[(j+1)\Delta x - j\Delta x] \\ + \frac{\partial H_{i,j}}{\partial y}[(i\Delta y - (i-1)\Delta y)] + O[(\Delta x)^2] + O[(\Delta y)^2] \end{aligned} \quad (2-59)$$

$$H_{i-1,j} = H_{i,j} + \frac{\partial H_{i,j}}{\partial y}[i\Delta y - (i-1)\Delta y] + O[(\Delta y)^2] \quad (2-60)$$

$$H_{i,j+1} = H_{i,j} + \frac{\partial H_{i,j}}{\partial x}[(j+1)\Delta x - j\Delta x] + O[(\Delta x)^2] \quad (2-61)$$

用式(2-59)减去式(2-60)和式(2-61),得下列近似式:

$$H_{i-1,j+1} \approx -H_{i,j} + H_{i-1,j} + H_{i,j+1} \quad (2-62)$$

同理可得

$$H_{i+1,j-1} \approx -H_{i,j} + H_{i+1,j} + H_{i,j-1} \quad (2-63)$$

将式(2-62)和(2-63)代入式(2-58)中,经整理后得

$$\begin{aligned} (b'_{ij} + c'_{ij})H_{i-1,j} + (d'_{ij} + g'_{ij})H_{i,j-1} + (e'_{ij} - c'_{ij} - g'_{ij})H_{i,j} \\ + (f'_{ij} + c'_{ij})H_{i,j+1} + (h'_{ij} + g'_{ij})H_{i+1,j} = q_{ij} \end{aligned} \quad (2-64)$$

将式(2-64)和式(2-43)比较,得

$$\left. \begin{aligned} b_{ij} &= b'_{ij} + c'_{ij} \\ d_{ij} &= d'_{ij} + g'_{ij} \\ e_{ij} &= e'_{ij} - c'_{ij} - g'_{ij} \\ f_{ij} &= f'_{ij} + c'_{ij} \\ h_{ij} &= h'_{ij} + g'_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (2-65)$$

在实际计算时,常引进加速参数 $\omega(0 < \omega < 1)$,则方程式(2-65)改变成如下形式

$$\left. \begin{aligned} b'_{ij} &= b_{ij} - \omega c'_{ij} \\ d'_{ij} &= d_{ij} - \omega g'_{ij} \\ e'_{ij} &= e_{ij} + \omega c'_{ij} + \omega g'_{ij} \\ f'_{ij} &= f_{ij} - \omega c'_{ij} \\ h'_{ij} &= h_{ij} - \omega g'_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (2-66)$$

将式(2-66)代入式(2-50)至式(2-56)中,可以得到 $[L']$ 和 $[U']$ 的矩阵元素

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{ij} &= b'_{ij} / (1 + \omega \delta_{i-1,j}) \\ \beta_{ij} &= d'_{ij} / (1 + \omega \eta_{i,j-1}) \\ \gamma_{ij} &= e'_{ij} + \omega \alpha_{ij} \delta_{i-1,j} + \omega \beta_{ij} \eta_{i,j-1} - \alpha_{ij} \eta_{i-1,j} \\ &\quad - \beta_{ij} \delta_{i,j-1} \\ \delta_{ij} &= (f'_{ij} - \omega \alpha_{ij} \delta_{i-1,j}) / \gamma_{ij} \\ \eta_{ij} &= (h'_{ij} - \omega \beta_{ij} \eta_{i,j-1}) / \gamma_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (2-67)$$

因为 b_{1j} 和 d_{i1} 等于零,式(2-67)很易顺序求解。我们用下面的迭代程序来解方程组式(2-44)。

$$[A']\{H\}^{(m+1)} = [A']\{H\}^{(m)} - \lambda([A]\{H\}^{(m)} - \{q\}) \quad (2-68)$$

式中的上角码 $(m+1)$ 和 (m) 代表迭代水平, λ 为迭代参数。为了提高解的精度,可用求解增量的方法,即定义增量为

$$\{\xi\}^{(m+1)} = \{H\}^{(m+1)} - \{H\}^{(m)} \quad (2-69)$$

将式(2-68)变为

$$[A']\{\xi\}^{(m+1)} = \lambda\{r\}^{(m)} \quad (2-70)$$

式中的向量 $\{r\}^{(m)}$ 用下式定义

$$\{r\}^{(m)} = \{q\} - [A]\{H\}^{(m)} \quad (2-71)$$

将式(2-46)代入式(2-70),得

$$[L']\{U'\}\{\xi\}^{(m+1)} = \lambda\{r\}^{(m)} \quad (2-72)$$

如果令 $\{W\}^{(m+1)} = [U']\{\xi\}^{(m+1)}$ 作为中间向量,则可将式(2-72)分成两步的程序求解,即

$$[L']\{W\}^{(m+1)} = \lambda\{r\}^{(m)} \quad (2-73)$$

$$[U']\{\xi\}^{(m+1)} = \{W\}^{(m+1)} \quad (2-74)$$

第一步求解式(2-73),每一个方程的形式为

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} W_{i-1,j}^{(m+1)} + \beta_{ij} W_{i,j-1}^{(m+1)} + \gamma_{ij} W_{i,j}^{(m+1)} &= \lambda r_{ij}^{(m)} \\ (1 \leq i \leq M; 1 \leq j \leq N) \end{aligned} \quad (2-75)$$

因为 δ_{iN} 和 η_{Mj} 均为零,我们可用顺序减小 i 和 j 的办法依次求出全部的 $\xi_{ij}^{(m+1)}$ 值。这一步称作回代过程。因为

$$\{H\}^{(m+1)} = \{\xi\}^{(m+1)} + \{H\}^{(m)} \quad (2-76)$$

故由前一次迭代的 $H_{ij}^{(m)}$ 和 $\xi_{ij}^{(m+1)}$,即可求得本次迭代的 $H_{ij}^{(m+1)}$ 值。当全部的 $\xi_{ij}^{(m+1)}$ 都足够小时,则 $H_{ij}^{(m+1)}$ 为方程式(2-44)的解。

第三节 边界条件的处理

有限差分网格的结点布置,有块中心结点和网格中心结点之分,两者边界条件的处理上略有差别,兹介绍如下。

一、第一类边界条件

第一类边界条件在水文地质上也称已知水头边界条件,在数学上称为狄义克利(Dirichlet)条件。即边界上的水头已经给出,对于网格中心结点,如果 j 列结点位于边界上,则有

$$H_{i,j} = H_b \quad (2-77)$$

式中 H_b 为已知水头。

对于块中心结点,处理要稍微复杂些。如果区域边界和块边界一致,则要在区域外半个空间步长($\Delta x/2$)处引进一列虚结点,如图 2-6(b)。如区域内靠近边界处的一列结点为 j 列,区域外的虚结点为 $j+1$ 列,则有

$$\frac{1}{2}(H_{i,j} + H_{i,j+1}) = H_b \quad (2-78)$$

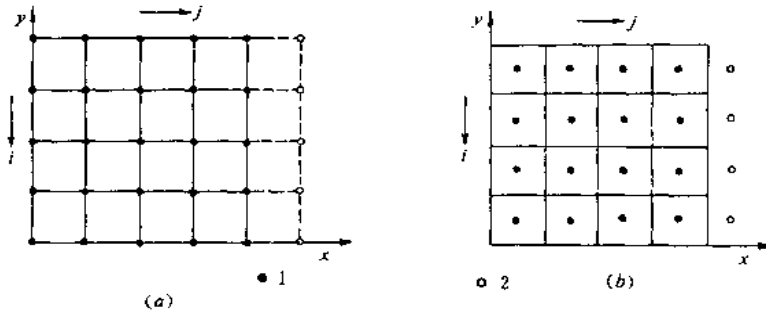


图 2-6 有限差分法的边界条件处理
(a)网格中心结点的处理;(b)块中心结点的处理
1—结点;2—虚结点

二、第二类边界条件

第二类边界条件即已知流量边界条件,在数学上称为牛曼(Neumann)条件。

先考虑网格中心结点的情况。如果区域边界和最右面一列结点吻合,边界条件为:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{1}{T} q_b \quad (2-79)$$

式中 q_b 为已知的单宽流量。

则在右面边界外要映射出一列虚结点(见图 2-6(a))。设右面边界结点为 j 列,则虚结点为 $j+1$ 列,式(2-79)的差分则可表示为

$$\frac{H_{i,j+1} - H_{i,j-1}}{2\Delta x} = \frac{1}{T} q_b \quad (2-80)$$

如为不透水边界,则 $q_b = 0$,式(2-80)变为

$$H_{i,j-1} = H_{i,j-1} \quad (2-81)$$

如为块中心结点,和第一类边界条件类似,在区域外 $\Delta x/2$ 处映射一系列虚结点,如果虚结点亦为 $j+1$ 列,于是边界条件式(2-79)的差分形式为

$$\frac{H_{i,j+1} - H_{i,j}}{\Delta x} = \frac{1}{T} q_0 \quad (2-82)$$

对于不透水边界有

$$H_{i,j+1} = H_{i,j} \quad (2-83)$$

三、第三类边界条件

第三类边界条件亦称混合边界条件,表达式为

$$\frac{\partial H}{\partial x} + aH = c \quad (2-84)$$

式中的 a 和 c 均为已知常数。和上述类似,对于网格中心结点,有

$$\frac{H_{i,j+1} - H_{i,j-1}}{2\Delta x} + aH_{i,j} = c \quad (2-85)$$

下面举例说明。设从托斯的区域稳定地下水流模型中,切出从地下水分水岭到河谷中轴线的一个块段。右边为与地形最高点相应的地下水分水岭,左边为与河谷中轴线相应的地下水分水线,底部为不透水的基岩(见图 2-7(a))。顶部的地下水水头按线性规律变化。边界条件列在图 2-7(b)中。流动区域的左侧和右侧边界都是分水线,没有水流通过,故

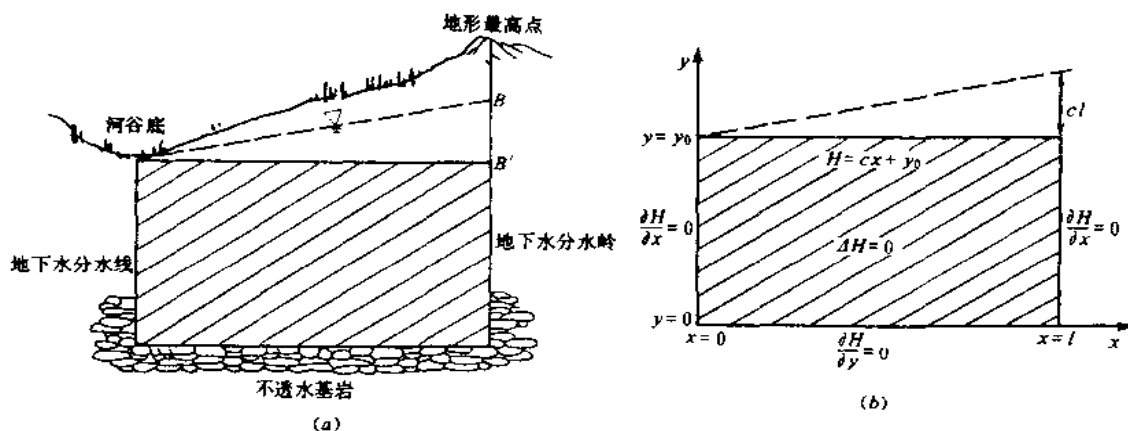


图 2-7 区域稳定地下水流的模型示意图

(a)水文地质模型;(b)计算模型

(根据 H. F. E 和 M. P. 安德森)

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad \text{当 } x = \begin{cases} 0 \\ l \end{cases} \text{ 时} \quad (2-86)$$

底部为不透水基岩,有

$$\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \quad \text{当 } y = 0 \text{ 时} \quad (2-87)$$

顶面的水头变化规律为

$$H = cx + y_0 \quad (2-88)$$

有限差分网格剖分表示于图 2-8 中, $L=200 \text{ m}$, $y_0=100 \text{ m}$, 取 $\Delta x=\Delta y=20 \text{ m}$, 故区域内的结点数为 6×11 。因为左、右、下三面均为不透水边界, 故映射出二列、一行虚结点。结点总数为 7×13 。取 $c=0.02$, 故顶部边界条件为

$$H = 100 + 0.02x \quad (2-89)$$

其他三面边界的边界条件如下。

$$H_{i,1} = H_{i,3}$$

$$H_{i,13} = H_{i,1} \quad (i = 1, 2, \dots, 7)$$

$$H_{7,j} = H_{5,j} \quad (j = 2, 3, \dots, 12)$$

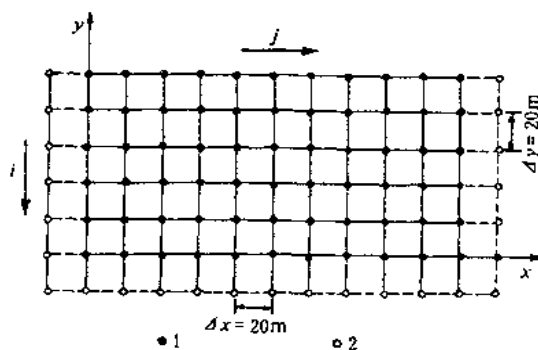


图 2-8 区域稳定地下水流的有限差分网格

1—结点; 2—虚结点

(根据 H. F. E 和 M. P. 安德森)

第四节 有限差分计算实例

一、稳定渗流问题

首先看图 2-9 和图 2-10。

设水库水位为 4 m, 进水池处水位为 3 m, 坝体底部为不透水层, 因此用有限差分解一

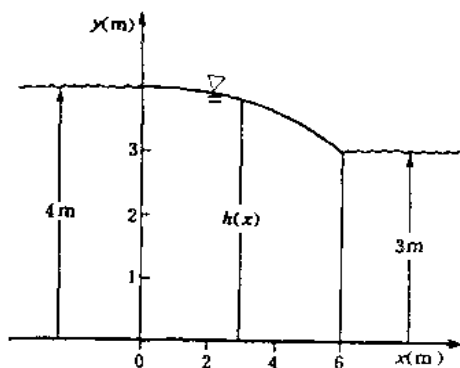


图 2-9 通过坝体渗透的水面边界情况示意图

(根据 H. F. E 和 M. P. 安德森)

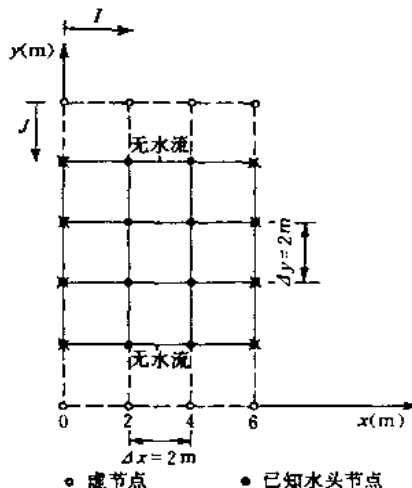


图 2-10 通过坝体渗透的有限差分网格

(根据 H. F. E 和 M. P. 安德森)

维问题时,它的上部边界取自由水面,下部边界为底部不透水层,左、右二边为定水头边界。取 $\Delta x = \Delta y = 2 \text{ m}$,用在裘布衣假定基础上,解通过坝体渗流的一维问题的计算程序如下。

Computer program to solve the one-dimensional version of the seepage through a dam problem under Dupuit assumptions.

```

1.  C SEEPAGE THROUGH DAM UNDER DUPUIT ASSUMPTIONS
2.      DIMENSION V(11,11),H(11,11)
3.      TOL=0.01
4.      N=3
5.      N1=N+1
6.      N2=N+2
7.      N3=N+3
8.  C SET CONSTANT HEAD BOUNDARY CONDITIONS IN TERMS OF V=H * H
9.  1      DO 5 J=1,N3
10.      V(1,J)=4 * 4
11.      V(N1,J)=3 * 3
12.  5      CONTINUE
13.  C SET INITIAL GUESSES FOR REMAINING NODES
14.      DO 10 I=2,N
15.      DO 10 J=1,N3
16.      V(I,J)=4 * 4
17.  10      CONTINUE
18.      NUMIT=0
19.  35      AMAX=0.
20.      NUMIT=NUMIT+1
21.  C NO-FLOW BOUNDARY CONDITIONS PARALLEL TO X-AXIS
22.      DO 40 I=2,N
23.      V(I,1)=V(I,3)
24.      V(I,N3)=V(I,N1)
25.  40      CONTINUE
26.  C ITERATE THROUGH INTERIOR NODES
27.      DO 50 J=2,N2
28.      DO 50 I=2,N
29.      OLDVAL=V(I,J)
30.      V(I,J)=(V(I-1,J)+V(I+1,J)+V(I,J-1)+V(I,J+1))/4.
31.      ERR=ABS(V(I,J)-OLDVAL)
32.      IF(ERR.GT. AMAX)AMAX=ERR
33.  50      CONTINUE
34.      IF (AMAX.GT. TOL)GO TO 35

```

```

35. C TAKE SQUARE ROOTS OF V TO GET HEADS
36.      DO 60 I=1,N1
37.      DO 60 J=1,N3
38.      H(I,J)=SQRT(V(I,J))
39. 60    CONTINUE
40.      PRINT 70,NUMIT
41. 70    FORMAT(1H1,'NUMBER OF ITERATIONS IS',I4)
42.      PRINT 75,((H(I,J),I=1,N1),J=2,N2)
43. 75    FORMAT(1X,///4(4F8.2///))
44.      STOP
45.      END

```

计算结果如下,单位为米。

4.00	3.70	3.37	3.00
4.00	3.70	3.37	3.00
4.00	3.70	3.37	3.00
4.00	3.70	3.37	3.00

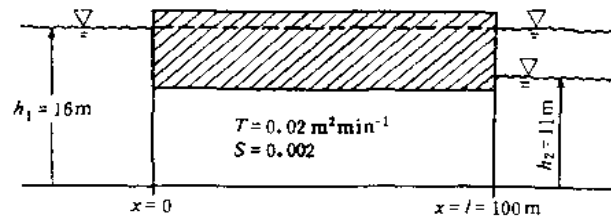


图 2-11 河间地块承压水非稳定运动简图
(根据 H. F. E 和 M. P. 安德森)

二、非稳定流问题

用显式差分格式解图 2-11 的河间地块承压水的非稳定运动,并检查其收敛性及稳定性。由图中所给条件,其控制方程为

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{S}{T} \frac{\partial H}{\partial t} \quad (2-90)$$

其显式差分格式为

$$H_j^{t+1} = H_j^t + \frac{T\Delta t}{S} \left(\frac{H_{j-1}^t - 2H_j^t + H_{j+1}^t}{(\Delta x)^2} \right) \quad (2-91)$$

取空间步长 $\Delta x=10$ m,时间步长 $\Delta t=5$ min,此时 $T\Delta t/S(\Delta x)^2=0.5$ 。计算程序如下。

```

1. C RESERVOIR EXAMPLE
2.      DIMENSION HOLD(25),HNEW(25)
3. C HOLD IS HEAD AT THE TIME STEP N
4. C HNEW IS HEAD AT THE TIME STEP N+1
5. C DEFINE PARAMETERS
6.      DT=5.
7.      DX=10.
8.      T=0.02

```



```

9.      S=0.002
10.     NX=11
11.     NLX=NX-1
12. C  DEFINE INITIAL AND BOUNDARY CONDITIONS
13. C  HO IS THE INITIAL HEAD
14.     HO=16.
15.     DO 10 I=1,NX
16.     HOLD(I)=HO
17.     HNEW(I)=HO
18. 10  CONTINUE
19. C  CHANGE HEAD AT BOUNDARY FOR TIME GREATER THAN ZERO
20.     HOLD(NX)=11.
21. C  COMPUTE HEADS THROUGH TIME
22.     PRINT 120
23. 120 FORMAT(1H1,31X,'HEAD',36X',TIME',//)
24.     KOUNT=1
25.     KPRINT=2
26.     TIME=DT
27.     NEND=100.
28.     DO 50 N=1,NEND
29.     DO 20 I=2,NLX
30.     F1=DT * T/S
31.     D2H=(HOLD(I+1)-2. * HOLD(I)+HOLD(I-1))/(DX * DX)
32.     HNEW(I)=HOLD(I)+(F1 * D2H)
33. 20  CONTINUE
34.     DO 30 I=1,NLX
35.     HOLD(I)=HNEW(I)
36. 30  CONTINUE
37. C  PRINT RESULTS FOR EVERY OTHER TIME STEP
38.     IF(KOUNT.NE.KPRINT) GO TO 49
39.     WRITE(6,40) (HOLD(I),I=1,NX),TIME
40.     KOUNT=0
41. 49  TIME=TIME+DT
42.     KOUNT=KOUNT+1
43. 50  CONTINUE
44. 40  FORMAT(1X,11F6.2,1F10.2)
45.     STOP
46.     END

```

其计算结果如下：

HEAD(水头)											TIME(时间)
16.00	16.00	16.00	16.00	16.00	16.00	16.00	16.00	14.75	13.50	11.00	10.00
16.00	16.00	16.00	16.00	16.00	16.00	15.69	15.38	14.13	12.88	11.00	20.00
16.00	16.00	16.00	16.00	15.92	15.84	15.38	14.91	13.73	12.56	11.00	30.00
16.00	16.00	15.98	15.96	15.80	15.65	15.10	14.55	13.46	12.37	11.00	40.00
16.00	15.99	15.94	15.89	15.67	15.45	14.87	14.28	13.26	12.23	11.00	50.00
16.00	15.97	15.89	15.81	15.54	15.27	14.67	14.06	13.09	12.13	11.00	60.00
16.00	15.94	15.83	15.71	15.41	15.10	14.49	13.88	12.96	12.05	11.00	70.00
16.00	15.91	15.77	15.62	15.28	14.95	14.34	13.73	12.85	11.98	11.00	80.00
16.00	15.88	15.70	15.53	15.17	14.81	14.20	13.60	12.76	11.93	11.00	90.00
16.00	15.85	15.64	15.44	15.06	14.69	14.08	13.48	12.68	11.88	11.00	100.00
16.00	15.82	15.59	15.35	14.96	14.57	13.98	13.38	12.61	11.84	11.00	110.00
16.00	15.79	15.53	15.28	14.87	14.47	13.88	13.30	12.55	11.81	11.00	120.00
16.00	15.77	15.49	15.20	14.79	14.38	13.80	13.22	12.50	11.78	11.00	130.00
16.00	15.74	15.44	15.14	14.72	14.29	13.72	13.15	12.45	11.75	11.00	140.00
16.00	15.72	15.40	15.08	14.65	14.22	13.65	13.08	12.40	11.72	11.00	150.00
16.00	15.70	15.36	15.02	14.59	14.15	13.59	13.03	12.36	11.70	11.00	160.00
16.00	15.68	15.33	14.97	14.53	14.09	13.53	12.98	12.33	11.68	11.00	170.00
16.00	15.66	15.30	14.93	14.48	14.03	13.48	12.93	12.30	11.66	11.00	180.00
16.00	15.65	15.27	14.89	14.43	13.98	13.44	12.89	12.27	11.65	11.00	190.00
16.00	15.63	15.24	14.85	14.39	13.93	13.39	12.85	12.24	11.63	11.00	200.00
16.00	15.62	15.22	14.82	14.36	13.89	13.36	12.82	12.22	11.62	11.00	210.00
16.00	15.61	15.20	14.79	14.32	13.86	13.32	12.79	12.20	11.61	11.00	220.00
16.00	15.60	15.18	14.76	14.29	13.82	13.29	12.76	12.18	11.60	11.00	230.00
16.00	15.59	15.16	14.74	14.26	13.79	13.26	12.74	12.16	11.59	11.00	240.00
16.00	15.58	15.15	14.71	14.24	13.76	13.24	12.71	12.15	11.58	11.00	250.00
16.00	15.57	15.13	14.69	14.22	13.74	13.22	12.69	12.13	11.57	11.00	260.00
16.00	15.57	15.12	14.67	14.19	13.72	13.19	12.67	12.12	11.57	11.00	270.00
16.00	15.56	15.11	14.66	14.18	13.69	13.18	12.66	12.11	11.56	11.00	280.00
16.00	15.55	15.10	14.64	14.16	13.68	13.16	12.64	12.10	11.55	11.00	290.00
16.00	15.55	15.09	14.63	14.14	13.66	13.14	12.63	12.09	11.55	11.00	300.00

HEAD(水头)											TIME(时间)
16.00	15.54	15.08	14.62	14.13	13.64	13.13	12.62	12.08	11.54	11.00	310.00
16.00	15.54	15.07	14.61	14.12	13.63	13.12	12.61	12.07	11.54	11.00	320.00
16.00	15.54	15.07	14.60	14.11	13.62	13.11	12.60	12.07	11.54	11.00	330.00
16.00	15.53	15.06	14.59	14.10	13.61	13.10	12.59	12.06	11.53	11.00	340.00
16.00	15.53	15.05	14.58	14.09	13.60	13.09	12.58	12.05	11.53	11.00	350.00
16.00	15.53	15.05	14.57	14.08	13.59	13.08	12.57	12.05	11.53	11.00	360.00
16.00	15.52	15.04	14.56	14.07	13.58	13.07	12.56	12.04	11.52	11.00	370.00
16.00	15.52	15.04	14.56	14.06	13.57	13.06	12.56	12.04	11.52	11.00	380.00
16.00	15.52	15.04	14.55	14.06	13.56	13.06	12.55	12.04	11.52	11.00	390.00
16.00	15.52	15.03	14.55	14.05	13.56	13.05	12.55	12.03	11.52	11.00	400.00
16.00	15.52	15.03	14.54	14.05	13.55	13.05	12.54	12.03	11.52	11.00	410.00
16.00	15.51	15.03	14.54	14.04	13.55	13.04	12.54	12.03	11.51	11.00	420.00
16.00	15.51	15.02	14.53	14.04	13.54	13.04	12.53	12.02	11.51	11.00	430.00
16.00	15.51	15.02	14.53	14.04	13.54	13.04	12.53	12.02	11.51	11.00	440.00
16.00	15.51	15.02	14.53	14.03	13.54	13.03	12.53	12.02	11.51	11.00	450.00
16.00	15.51	15.02	14.53	14.03	13.53	13.03	12.53	12.02	11.51	11.00	460.00
16.00	15.51	15.02	14.52	14.03	13.53	13.03	12.52	12.02	11.51	11.00	470.00
16.00	15.51	15.01	14.52	14.02	13.53	13.02	12.52	12.01	11.51	11.00	480.00
16.00	15.51	15.01	14.52	14.02	13.52	13.02	12.52	12.01	11.51	11.00	490.00
16.00	15.51	15.01	14.52	14.02	13.52	13.02	12.52	12.01	11.51	11.00	500.00

$t=10\text{ min}$ 、 $t=100\text{ min}$ 和 $t=400\text{ min}$ 时的 h (水头)和 x (距离)相关图,见图 2-12(a)。时间步长 $\Delta t=5\text{ min}$ 和 $\Delta t=8\text{ min}$ 时计算结果的比较见图 2-12(b),由图可见, $\Delta t=5\text{ min}$ 的计算结果很好,但是当 $\Delta t=8\text{ min}$ 时,随着计算时段的增加,解的振荡幅度愈来愈大,因此解是不稳定的。

雷姆森等人(Remson, et al, 1971)指出,在一维条件下, $T\Delta t/S(\Delta x)^2 \leq 0.5$ 时解是稳定的。卢须顿和雷德肖(Rusiton and Redshow, 1976)证明,在二维条件下 $T\Delta t/Sa^2 \leq 0.25$ 时解是稳定的。同时,在上述条件下,解也是收敛的。

三、用隐式差分格式求解水井抽水问题

设有一方形含水层,四周均为隔水边界,含水层中心有一眼井以固定流量 Q 抽水。由于水流对于 x 轴和 y 轴是对称的,我们只需取第一象限(即含水层的四分之一)进行研究。取空间步长 $\Delta x=\Delta y=a=100\text{ m}$,网格剖分见图 2-2,因为垂直 y 轴和 x 轴均无水流通过,可看作隔水边界。故四周都是隔水边界,在计算区域的四周映射出一圈虚结点。结点总数为 23×23 ,含水层参数为 $T=300\text{ m}^2/\text{d}$ 。 $S=0.002$,抽水流量 $Q=2000\text{ m}^3/\text{d}$,求解该问题的计算程序如下。

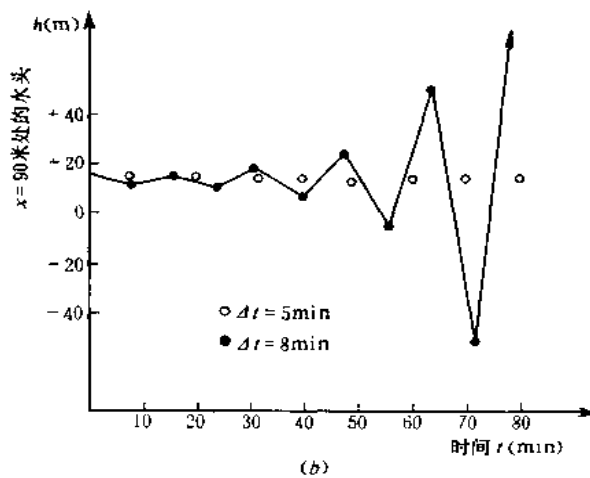
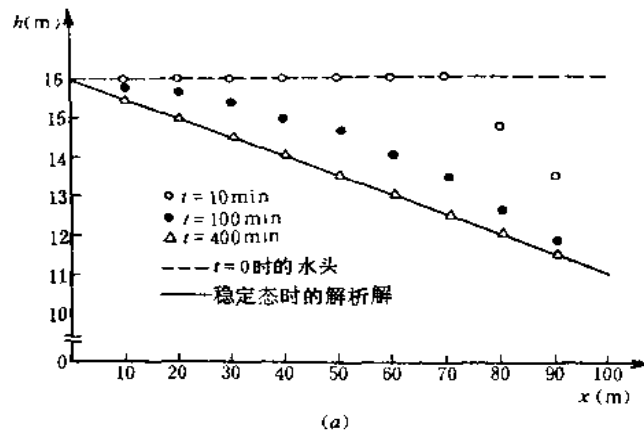


图 2-12 河间地块承压水非稳定运动的有限差分计算结果
 (a)不同时刻水头随距离 x 的变化;
 (b) $x=90$ m 处不同时间步长求得的解的比较
 (根据 H. F. E 和 M. P. 安德森)

1. C DRAWDOWN EXAMPLE - CONFINED AQUIFER - TRANSIENT CONDITIONS
2. DIMENSION HNEW(23,23),HOLD(23,23),R(23,23),DD(23,23)
3. C DEFINE INPUT PARAMETERS
4. S=0.002
5. T=300.
6. C HO IS INITIAL HEAD
7. HO=10.
8. DX=100.

```

9.      DT=0.01
10. C USE CRANK-NICOLSON APPROXIMATION
11.      ALPHA=0.5
12. C SET ERROR TOLERANCE
13.      TOL=0.001
14. C INITIALIZE ARRAYS
15. C HOLD IS HEAD AT THE TIME STEP N
16. C HNEW IS HEAD AT THE TIME STEP N+1
17.      DO 4 I=1,23
18.      DO 4 J=1,23
19.      HNEW(I,J)=HO
20.      HOLD(I,J)=HO
21.      R(I,J)=0.
22.      4 CONTINUE
23. C DEFINE PUMPING RATE AS RECHARGE TO CELL AT ORIGIN
24.      R(2,22)=-2000./DX/DX
25.      TIME=0.
26. C START TIME STEPS
27. C AT EACH TIME STEP SOLVE SYSTEM OF EQUATIONS BY ITERATION
28.      NEND=30
29.      DO 5 N=1,NEND
30.      NUMIT=0
31.      TIME=TIME+DT
32.      10 AMAX=0.
33.      NUMIT=NUMIT+1
34.      DO 15 I=2,22
35.      DO 15 J=2,22
36.      OLDVAL=HNEW(I,J)
37.      H1=(HOLD(I,J+1)+HOLD(I,J-1)+HOLD(I+1,J)+HOLD(I-1,
38.      J))/4.
39.      H2=(HNEW(I,J+1)+HNEW(I,J-1)+HNEW(I+1,J)+HNEW(I-1,
40.      J))/4.
41.      F1=DX * DX * S/(4. * T * DT)
42.      F2=1./(F1+ALPHA)
43.      HNEW(I,J)=((F1 * HOLD(I,J))+(1.-ALPHA) * (H1-HOLD(I,J))
44.      +(ALPHA * H2)
45.      1+(R(I,J) * DX * DX/(4. * T)) * F2
46.      ERR=ABS(HNEW(I,J)-OLDVAL)

```

```

44.      IF(ERR.GT.AMAX)  AMAX=ERR
45.      15  CONTINUE
46.  C  ADJUST NO FLOW BOUNDARIES
47.      DO 16  I=2,22
48.      HNEW(I,1)=HNEW(I,3)
49.      HNEW(I,23)=HNEW(I,21)
50.      16  CONTINUE
51.      DO 17  J=2,22
52.      HNEW(1,J)=HNEW(3,J)
53.      HNEW(23,J)=HNEW(21,J)
54.      17  CONTINUE
55.      IF(ALPHA.LT.0.1)  GO TO 18
56.      IF(AMAX.GT.TOL)  GO TO 10
57.      18  CONTINUE
58.  C  PREPARE FOR NEXT TIME STEP
59.  C  PUT HNEW VALUES INTO HOLD ARRAY
60.      DO 20  I=1,23
61.      DO 20  J=1,23
62.      20  HOLD(I,J)=HNEW(I,J)
63.  C  COMPUTE DRAWDOWN
64.      DO 25  I=2,22
65.      DO 25  J=2,22
66.      DD(I,J)=HO-HNEW(I,J)
67.      25  CONTINUE
68.  C  PRINT RESULTS
69.      WRITE(6,29)  TIME,DT,NUMIT
70.      29  FORMAT(1X,'TIME=',F6.2,5X,'DT=',F6.2,5X,'NUMIT=',I4,/)
71.      WRITE(6,31)  ((DD(I,J),I=2,22),J=2,22)
72.      31  FORMAT (1X,21F5.2/)
73.  C  INCREASE TIME STEP
74.      DT=DT * 1.5
75.      IF(DT.GT.5.0)  DT=5.0
76.      5  CONTINUE
77.      STOP
78.      END

```

计算结果如下。

TIME=13.12 DT=4.38 NUMIT=101

.50	.50	.50	.49	.49	.48	.46	.45	.44	.43	.41	.40	.38	.37	.36	.35	.34	.34	.33	.33
.51	.51	.50	.50	.49	.48	.47	.46	.44	.43	.41	.40	.39	.37	.36	.35	.34	.34	.33	.33
.52	.52	.51	.51	.50	.49	.48	.46	.45	.43	.42	.41	.39	.38	.37	.36	.35	.34	.34	.33
.53	.53	.53	.52	.51	.50	.49	.48	.46	.45	.43	.41	.40	.39	.37	.36	.35	.34	.34	.34
.56	.56	.55	.54	.53	.52	.51	.49	.48	.46	.44	.43	.41	.40	.38	.37	.36	.35	.34	.34
.59	.59	.58	.57	.56	.55	.53	.52	.50	.48	.46	.44	.43	.41	.40	.38	.37	.36	.35	.35
.63	.63	.62	.61	.60	.58	.56	.54	.52	.50	.48	.46	.44	.43	.41	.40	.38	.37	.36	.35
.67	.67	.67	.65	.64	.62	.60	.58	.55	.53	.51	.48	.46	.44	.43	.41	.40	.39	.38	.37
.73	.73	.72	.71	.69	.67	.64	.62	.59	.56	.53	.51	.49	.46	.44	.43	.41	.40	.39	.39
.80	.79	.78	.77	.75	.72	.69	.66	.63	.60	.57	.54	.51	.48	.46	.44	.43	.42	.41	.40
.88	.87	.86	.84	.81	.78	.74	.71	.67	.63	.60	.57	.54	.51	.48	.46	.45	.43	.42	.41
.97	.96	.94	.92	.88	.85	.80	.76	.72	.67	.63	.60	.56	.53	.50	.48	.46	.45	.44	.43
1.07	1.07	1.04	1.01	.97	.92	.87	.82	.77	.72	.67	.63	.59	.56	.53	.50	.48	.46	.45	.44
1.20	1.19	1.16	1.12	1.06	1.00	.94	.88	.82	.76	.71	.66	.62	.58	.55	.52	.50	.48	.47	.46
1.35	1.33	1.29	1.24	1.17	1.09	1.01	.94	.87	.81	.75	.69	.64	.60	.57	.54	.51	.49	.48	.47
1.53	1.51	1.45	1.37	1.28	1.18	1.09	1.00	.92	.85	.78	.72	.67	.62	.59	.55	.53	.51	.49	.48
1.76	1.73	1.64	1.52	1.40	1.28	1.17	1.06	.97	.89	.81	.75	.69	.64	.60	.57	.54	.52	.50	.49
2.06	2.00	1.86	1.69	1.53	1.37	1.24	1.12	1.01	.92	.84	.77	.71	.66	.61	.58	.55	.53	.51	.50
2.51	2.35	2.10	1.86	1.64	1.45	1.30	1.16	1.05	.95	.86	.79	.72	.67	.62	.59	.56	.53	.52	.51
3.26	2.80	2.35	2.00	1.73	1.51	1.34	1.19	1.07	.96	.87	.80	.73	.68	.63	.59	.56	.54	.52	.51
4.92	3.26	2.51	2.07	1.76	1.53	1.35	1.20	1.08	.97	.88	.80	.74	.68	.63	.59	.56	.54	.52	.51

第三章 有限单元法及其在水文地质计算中的应用

有限单元法是采用“分片逼近”的手段来求解偏微分方程的一种数值方法。根据不同的原理,可分为变分法,伽辽金法,均衡有限元法等。

一个物理问题的有限元分析大致可按下列步骤进行。

(1)把求解的区域划分成一系列的数目有限的单元,它一般采用简单的形状(如三角形,四边形等)。单元的顶点称结点(或节点),单元与单元之间通过结点相互联系。这一过程称为离散化或网格剖分(见图3-1)。

(2)找出每一单元的结点变量之间的相互关系,建立一个矩阵表达式,通常称为单元刚度矩阵或单元渗透矩阵。

(3)把单元矩阵集合起来,形成一套描述整个系统的代数方程组。这个最终的方程组的系数矩阵称为总刚度矩阵。

(4)引入边界条件。

(5)求解线性方程组。找出所要求的物理问题的解答。

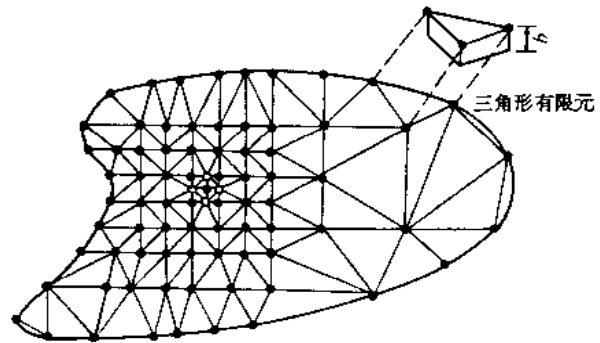


图 3-1 有限单元法三角剖分示意图

(根据 H. F. E 和 M. P. 安德森)

第一节 变分有限单元法在解地下水稳定流问题中的应用

变分法也称瑞里—里兹(Rayleigh—Ritz)法。是以变分原理和剖分插值为基础的,也从变分原理出发,把偏微分方程的求解等价变换为求某个泛函的极小值问题,再用剖分插值把求泛函的极小问题化成求解线性代数方程组的问题。

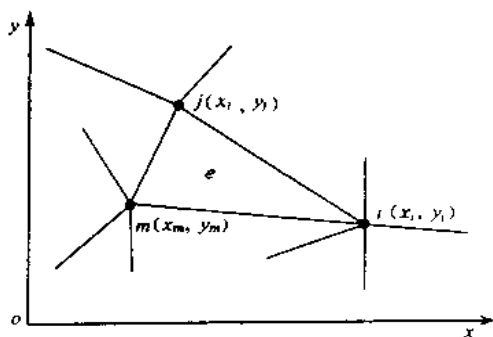


图 3-2 三角形单元示意图

假设我们已将某个稳定渗流区 D 剖分成有限个三角形单元,设在其中任取一单元 e (见图3-2),其三角形的三个顶点即结点(也称节点)按逆时针的方向分别为 i, j, m 。并设该单元的线性插值函数为 $\bar{H}(x, y)$,为一空间的平面方程,即

$$\tilde{H}(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (3-1)$$

因为平面过 i, j, m 三点, 则这三点的坐标满足这个方程, 从而有

$$\left. \begin{aligned} \tilde{H}(x_i, y_i) &= \tilde{H}_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i = H_i \\ \tilde{H}(x_j, y_j) &= \tilde{H}_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j = H_j \\ \tilde{H}(x_m, y_m) &= \tilde{H}_m = \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m = H_m \end{aligned} \right\} \quad (3-2)$$

在这里, 为了求出插值函数 $\tilde{H}(x, y)$, 必须求出参数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 。在式(3-2)中, 把 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 当作未知数, $x_i, y_i, H_i, x_j, y_j, H_j, x_m, y_m, H_m$ 作为已知数, 利用三个方程可解出三个未知数。由代数可知

$$\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} H_i & x_i & y_i \\ H_j & x_j & y_j \\ H_m & x_m & y_m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}} = \frac{(x_j y_m - x_m y_j) H_i + (x_m y_i - x_i y_m) H_j + (x_i y_j - x_j y_i) H_m}{2 \times \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}}$$

令

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}$$

$$a_i = x_j y_m - x_m y_j$$

$$a_j = x_m y_i - x_i y_m$$

$$a_m = x_i y_j - x_j y_i$$

则

$$\alpha_1 = \frac{(a_i H_i + a_j H_j + a_m H_m)}{2A} \quad (3-3)$$

同理

$$\alpha_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & H_i & y_i \\ 1 & H_j & y_j \\ 1 & H_m & y_m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}} = \frac{(y_j - y_m) H_i + (y_m - y_i) H_j + (y_i - y_j) H_m}{2A}$$

令

$$b_i = y_j - y_m$$

$$b_j = y_m - y_i$$

$$b_m = y_i - y_j$$

则

$$\alpha_2 = \frac{1}{2A} (b_i H_i + b_j H_j + b_m H_m) \quad (3-4)$$

$$\alpha_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_i & H_i \\ 1 & x_j & H_j \\ 1 & x_m & H_m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}} = \frac{(x_m - x_j)H_i + (x_i - x_m)H_j + (x_j - x_i)H_m}{2A}$$

令

$$c_i = x_m - x_j$$

$$c_j = x_i - x_m$$

$$c_m = x_j - x_i$$

$$\text{则} \quad \alpha_3 = \frac{c_i H_i + c_j H_j + c_m H_m}{2A} \quad (3-5)$$

式中 A ——三角形单元 e 的面积。

将已求得的 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 代入式(3-1)中,得

$$\begin{aligned} \bar{H}(x, y) &= \frac{1}{2A} \left[a_i H_i + a_j H_j + a_m H_m + (b_i H_i + b_j H_j + b_m H_m)x \right. \\ &\quad \left. + (c_i H_i + c_j H_j + c_m H_m)y \right] \\ &= \frac{1}{2A} \left[(a_i + b_i x + c_i y)H_i + (a_j + b_j x + c_j y)H_j \right. \\ &\quad \left. + (a_m + b_m x + c_m y)H_m \right] \\ &= N_i H_i + N_j H_j + N_m H_m \end{aligned} \quad (3-6)$$

其中

$$\begin{aligned} N_i(x, y) &= \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2A} \\ &= \frac{x_j y_m - x_m y_j + (y_j - y_m)x + (x_m - x_j)y}{2A} \\ &= \frac{1}{2A} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (3-7a)$$

因为

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}$$

代表顶点为 i, j, m 的三角形面积 A , 则

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}$$

代表顶点为 p, j, m 的三角形面积 A_i (见图 3-3)。

所以

$$N_i = \frac{A_i}{A} \quad (3-7b)$$

同理

$$\begin{aligned} N_j(x, y) &= \frac{a_j + b_j x + c_j y}{2A} \\ &= \frac{1}{2A} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_m & y_m \\ 1 & x_i & y_i \end{vmatrix} \\ &= \frac{A_j}{A} \end{aligned} \quad (3-8)$$

$$\begin{aligned} N_m(x, y) &= \frac{a_m + b_m x + c_m y}{2A} \\ &= \frac{1}{2A} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \end{vmatrix} \\ &= \frac{A_m}{A} \end{aligned} \quad (3-9)$$

由 $A_i + A_j + A_m = A$

则 $N_i + N_j + N_m = 1$

式中: N_i, N_j, N_m 称为 i, j, m 点的基函数。

如果把 p 点移到 i 点 ($x=x_i, y=y_i$) 时,

则

$$\left. \begin{aligned} A_i &= A, & A_j &= A_m = 0 \\ N_i &= 1, & N_j &= N_m = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-10)$$

同理, 当 p 点移到 j 点时

$$\left. \begin{aligned} A_j &= A, & A_i &= A_m = 0 \\ N_j &= 1, & N_i &= N_m = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-11)$$

若将 p 点移到 m 点时

$$\left. \begin{aligned} A_m &= A, & A_i &= A_j = 0 \\ N_m &= 1, & N_i &= N_j = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-12)$$

将式(3-10), 式(3-11), 式(3-12)分别代入式(3-6)中, 得

$$\begin{aligned} \tilde{H}(x_i, y_i) &= H_i \\ \tilde{H}(x_j, y_j) &= H_j \\ \tilde{H}(x_m, y_m) &= H_m \end{aligned}$$

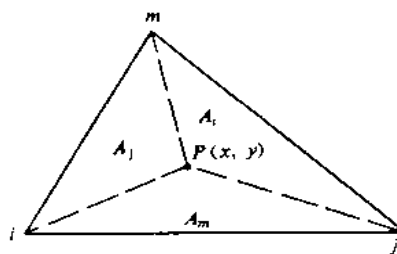


图 3-3 任意的三角形单元

即插值函数在结点上等于水头值。以上讨论的是剖分插值问题,下面将讨论泛函极值问题。

在一个各向同性含水层中的二维水平流动,其数学模型为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial H}{\partial y} \right) &= 0 && \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ H &= H_b(x, y) && \text{在 } \Gamma_1 \text{ 上} \\ T \frac{\partial H}{\partial x} \cos(n, x) + T \frac{\partial H}{\partial y} \cos(n, y) &= q_b && \text{在 } \Gamma_2 \text{ 上} \end{aligned} \right\} \quad (3-13)$$

式中 Ω ——计算区域;

Γ_1 ——第一类边界;

Γ_2 ——第二类边界;

H_b ——第一类边界上的已知水头;

n ——第二类边界的外法线方向;

q_b ——第二类边界上法向单宽流量,流入为正,流出为负。

方程式(3-12)的变分形式为

$$E = \iint_{\Omega} \frac{T}{2} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy - \int_{\Gamma_2} q_b H ds \quad (3-14)$$

由前述可知,我们将渗流区域 Ω 剖分成 M 个三角形单元, NN 个结点,在每一个单元内,基函数如式(3-6)形式,即

$$\tilde{H}(x, y) \approx N_i H_i + N_j H_j + N_m H_m$$

用各单元泛函 E^e 之和代替总的泛函,即

$$\begin{aligned} E &= \sum_{e=1}^M E^e \\ E^e &= \iint_{\sigma} \frac{T^e}{2} \left[\left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy - \int_{\Gamma_2^e} q_b \tilde{H} ds \end{aligned} \quad (3-15)$$

由式(3-6)可知

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial x} H_i + \frac{\partial N_j}{\partial x} H_j + \frac{\partial N_m}{\partial x} H_m \quad (3-16)$$

将基函数的表达式(3-7a),式(3-8),式(3-9)代入上述式(3-16),得

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} = \frac{1}{2A} (b_i H_i + b_j H_j + b_m H_m) \quad (3-17a)$$

同理可得

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial y} = \frac{1}{2A} (c_i H_i + c_j H_j + c_m H_m) \quad (3-17b)$$

将上述结果代入式(3-14)中,得单元泛函表达式

$$\begin{aligned} E^e &= \iint_{\sigma} \frac{T^e}{2} \cdot \frac{1}{4A^2} \left[(b_i H_i + b_j H_j + b_m H_m)^2 + (c_i H_i + c_j H_j + c_m H_m)^2 \right] dx dy \\ &\quad - \int_{\Gamma_2^e} q_b (N_i H_i + N_j H_j + N_m H_m) ds \end{aligned} \quad (3-18)$$

将式(3-18)对单元上各结点的水头 H_i, H_j, H_m 求导,得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E^*}{\partial H_i} &= \iint_{\Omega^e} \frac{T^*}{2} \cdot \frac{2}{4A^2} [(b_i H_i + b_j H_j + b_m H_m) b_i \\
&\quad + (c_i H_i + c_j H_j + c_m H_m) c_i] dx dy - \int_{\Gamma_2^e} q_b N_i ds \\
&= \frac{T^*}{4A^2} (b_i b_i H_i + b_i b_j H_j + b_i b_m H_m) \iint_{\Omega^e} dx dy \\
&\quad + \frac{T^*}{4A^2} (c_i c_i H_i + c_i c_j H_j + c_i c_m H_m) \iint_{\Omega^e} dx dy - \int_{\Gamma_2^e} q_b N_i ds
\end{aligned}$$

因为

$$\iint_{\Omega^e} dx dy = A$$

故

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E^*}{\partial H_i} &= \frac{T^*}{4A} [(b_i b_i + c_i c_i) H_i + (b_i b_j + c_i c_j) H_j \\
&\quad + (b_i b_m + c_i c_m) H_m] - \int_{\Gamma_2^e} q_b N_i ds
\end{aligned} \quad (3-19)$$

同理可得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E^*}{\partial H_j} &= \frac{T^*}{4A} [(b_j b_i + c_j c_i) H_i + (b_j b_j + c_j c_j) H_j \\
&\quad + (b_j b_m + c_j c_m) H_m] - \int_{\Gamma_2^e} q_b N_j ds
\end{aligned} \quad (3-20)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E^*}{\partial H_m} &= \frac{T^*}{4A} [(b_m b_i + c_m c_i) H_i + (b_m b_j + c_m c_j) H_j \\
&\quad + (b_m b_m + c_m c_m) H_m] - \int_{\Gamma_2^e} q_b N_m ds
\end{aligned} \quad (3-21)$$

综合式(3-19),式(3-20),式(3-21)可写成如下的矩阵形式。

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial E^*}{\partial H_i} \\ \frac{\partial E^*}{\partial H_j} \\ \frac{\partial E^*}{\partial H_m} \end{Bmatrix} = \frac{T^*}{4A} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_m + c_i c_m \\ b_j b_i + c_j c_i & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_m + c_j c_m \\ b_m b_i + c_m c_i & b_m b_j + c_m c_j & b_m b_m + c_m c_m \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} H_i \\ H_j \\ H_m \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \\ F_m \end{Bmatrix} \quad (3-22)$$

或简记为

$$\left\{ \frac{\partial E^*}{\partial H} \right\} = [G]^e \{H\}^e - \{F\}^e \quad (3-23)$$

其中

$$F_L = \int_{\Gamma_2^e} q_b N_L ds \quad (L = i, j, m) \quad (3-24)$$

当三角形单元e的一个边和第二类边界重合,或者说该单元有二个结点位于第二类边界上时,向量 $\{F\}^e$ 表示边界结点的水流通量。当e为内部单元时,向量 $\{F\}^e$ 为零向量。

系数矩阵 $[G]^e$ 称为单元渗透矩阵,其矩阵元素为

$$G_{i,j}^e = \frac{T^*}{4A} (b_i b_j + c_i c_j) \quad (K = i, j, m, L = i, j, m) \quad (3-25)$$

可以看出,它是一个对称矩阵。

上面我们已经用变分方法导出单元渗透矩阵。但还没有得到最终的有限元方程。对于变分方法,要使微分方程的定解问题等价于泛函 E 的极小问题,则泛函 E 在区域 Ω 上必须满足

$$\frac{\partial E}{\partial H_L} = \sum_{e=1}^M \frac{\partial E^e}{\partial H_L} = 0 \quad (L = 1, 2, \dots, NN) \quad (3-26)$$

即

$$\sum_{e=1}^M [G]^e \{H\}^e = \sum_{e=1}^M \{F\}^e \quad (3-27)$$

上式的左端就是把各单元渗透矩阵集合起来,形成总渗透矩阵。(3-27)式可简写为

$$[G]\{H\} = \{F\} \quad (3-28)$$

由单元渗透矩阵形成总渗透矩阵的例子见图 3-4。该例共有 6 个单元,8 个结点,边界上均为第二类边界结点。图的右下方为各单元的逆时针结点编号表。把每一单元的渗透矩阵计算出来,并安放到总渗透矩阵的相应位置上,然后相加,便得到总渗透矩阵。

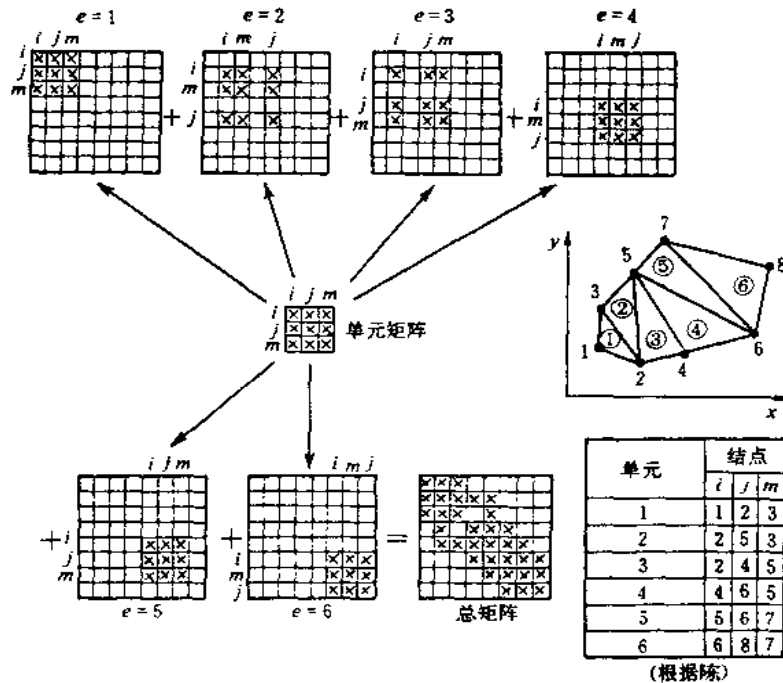


图 3-4 由单元渗透矩阵形成总渗透矩阵示意图

由图中还可以看出总渗透矩阵也是对称的方阵,方阵的阶数等于内结点数和第二类边界结点数之和,即 NN 阶。矩阵元素都集中在主对角线的两侧,是稀疏矩阵。可以证明,总渗透矩阵是正定的。这样得到一个 NN 阶线性方程组,可解出 NN 个结点的水头。

最后讨论一下边界条件的处理。在方程式(3-22)的右端第二项是列向量 $\{F\}$ 。其中每一元素可用式(3-24)表示

$$F_L^* = \int_{\Gamma_2} q_b N_L ds$$

与结点 L 有关的单元只有 e_1 和 e_2 (见图 3-5), 故总渗透矩阵中的

$$F_L = \int_i^L q_1 N_L ds + \int_L^m q_2 N_L ds \quad (3-29)$$

当 q_1 和 q_2 为常数时上式变为

$$F_L = q_1 \int_0^{L_1} (1 - \frac{s}{L_1}) ds + q_2 \int_0^{L_2} (1 - \frac{s}{L_2}) ds \quad (3-30)$$

式中 L_1 ——单元 e_1 的 iL 边的长度;

L_2 ——单元 e_2 的 Lm 边的长度;

s ——由点 L 算起的距离。

积分后得到

$$F_L = \frac{1}{2} q_1 L_1 + \frac{1}{2} q_2 L_2 = \frac{1}{2} (q_1 L_1 + q_2 L_2) \quad (3-31)$$

上式表明, 当三角形单元的边界和第二类边界重合时, 通过该边界的流量平均分配给边界两端的两个结点。

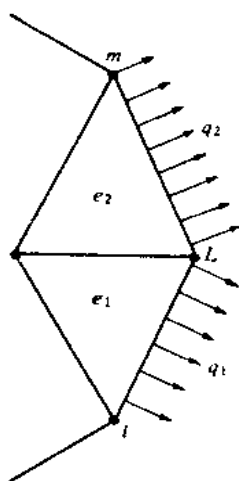


图 3-5 有限单元法处理
第二类边界之一

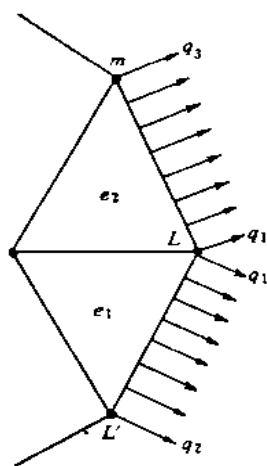


图 3-6 有限单元法处理
第二类边界之二

如果通过边界的流量不是常数, 而是按线性变化, 在 iL 段有

$$q_b = q_1 + \frac{s}{L_1} (q_2 - q_1)$$

基函数

$$N_L = 1 - \frac{s}{L_1}$$

则

$$F_L^* = \int_i^L q_b N_L ds$$

$$\int_0^{L_1} [q_1 + \frac{s}{L_1} (q_2 - q_1)] \times [1 - \frac{s}{L_1}] ds = \frac{L_1}{2} [q_1 + \frac{q_2 - q_1}{3}]$$

同理可得

$$F_L^* = \int_L^m q_b N_L ds = \frac{L_2}{2} [q_1 + \frac{q_2 - q_1}{3}]$$

故

$$\begin{aligned} F_L &= F_L^{*1} + F_L^{*2} \\ &= \frac{L_1}{2} \left(q_1 + \frac{q_2 - q_1}{3} \right) + \frac{L_2}{2} \left(q_1 + \frac{q_3 - q_1}{3} \right) \end{aligned} \quad (3-32)$$

在第一类边界上的结点水头 H 是给定的, 不需要计算。

迦辽金方法解稳定流问题的最终结果与变分法一致, 这里限于篇幅, 不再作介绍。为了帮助理解, 举一例子来说明。该例是求均质各向同性含水层中拉普拉斯方程在下列边界条件下的解。

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0$$

$$H(0, y) = H(100, y) = 0 \quad 0 \leq y \leq 100\text{m}$$

$$H(x, 0) = 0 \quad 0 \leq x \leq 100\text{m}$$

$$H(x, 100) = \frac{4.5x}{10000}(100 - x)\text{m} \quad 0 \leq x \leq 100\text{m}$$

单元划分见图 3-7, 结点和单元编号也表示在图上。由前述可知, 此定解问题等价于下述泛函

$$E(H) = \iint_{\Omega} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

的极小值问题。

根据题意, H 在结点 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 取已知值, 即

$$\begin{aligned} H_5 &= H_6 = H_7 = H_8 = H_{11} = H_{12} = H_{13} \\ &= H_{14} = H_{15} = H_{16} = 0\text{m} \end{aligned}$$

1, 2, 3, 4 为未知结点, 其相应的水头值 H_1 , H_2 , H_3 , H_4 是未知的。首先, 我们来建立有关 H_1 的代数方程组 $\frac{\partial E}{\partial H_1} = 0$, 即

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(\tilde{H})}{\partial H_1} &= \frac{\partial}{\partial H_1} \left\{ \sum_{e=1}^{18} \iint_{\Omega_e} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial H_1} \left\{ \left[\iint_{e_5} + \iint_{e_6} + \iint_{e_{11}} + \iint_{e_{10}} + \iint_{e_9} + \iint_{e_4} \right] \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \right\} \end{aligned}$$

按单元分别计算。

在单元 e_5 上, 三个结点坐标依次为 $i \left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3} \right)$, $j \left(0, \frac{100}{3} \right)$, $m(0, 0)$ 。 $H_i = H_1$, $H_j = H_6 = 0$, $H_m = H_5 = 0$ 。相应地

$$b_i = y_j - y_m = \frac{100}{3}, \quad b_j = y_m - y_i = -\frac{100}{3}, \quad b_m = y_i - y_j = 0$$

$$c_i = x_m - x_j = 0, \quad c_j = x_i - x_m = \frac{100}{3}, \quad c_m = x_j - x_i = -\frac{100}{3}$$

$$\text{三角形面积 } A_5 = \frac{1}{18} \times 10000$$

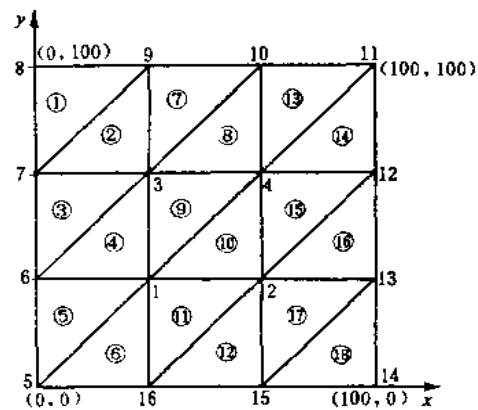


图 3-7 例题的单元剖分图

(根据薛禹群、朱学愚)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial H_1} \iint_{e_5} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \\
&= \frac{1}{4A_5} \left[(b_1 b_1 + c_1 c_1) H_1 + (b_1 b_1 + c_1 c_1) H_1 + (b_m b_1 + c_m c_1) H_m \right] \\
&= \frac{1}{2} H_1
\end{aligned}$$

同理可知,在单元 e_6 上

$$\frac{\partial}{\partial H_1} \iint_{e_6} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \frac{1}{2} H_1$$

在单元 e_{11} 上

$$\frac{\partial}{\partial H_1} \iint_{e_{11}} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = H_1 - \frac{1}{2} H_2$$

在单元 e_4 上

$$\frac{\partial}{\partial H_1} \iint_{e_4} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = H_1 - \frac{1}{2} H_3$$

在单元 e_9 上

$$\frac{\partial}{\partial H_1} \iint_{e_9} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \frac{1}{2} H_1 - \frac{1}{2} H_3$$

在单元 e_{10} 上

$$\frac{\partial}{\partial H_1} \iint_{e_{10}} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \frac{1}{2} H_1 - \frac{1}{2} H_2$$

则

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E(\tilde{H})}{\partial H_1} &= \frac{1}{2} H_1 + \frac{1}{2} H_1 + H_1 - \frac{1}{2} H_2 + H_1 - \frac{1}{2} H_3 + \frac{1}{2} H_1 \\
&\quad - \frac{1}{2} H_3 + \frac{1}{2} H_1 - \frac{1}{2} H_2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

加以整理,即得有关 H_1 的方程

$$4H_1 - H_2 - H_3 = 0$$

同理,可得其它几个未知结点的方程为

$$-H_1 + 4H_2 - H_4 = 0$$

$$-H_1 + 4H_3 - H_4 = 1$$

$$-H_2 - H_3 + 4H_4 = 1$$

解此代数方程组得

$$H_1 = 0.125 \text{ m}, H_2 = 0.125 \text{ m}, H_3 = 0.375 \text{ m}, H_4 = 0.375 \text{ m}.$$

第二节 非稳定流问题的有限单元法

一、变分方法

首先我们考虑如下的地下水非稳定运动的数学模型。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial H}{\partial y} \right) + R &= S \frac{\partial H}{\partial t} \quad (\text{在 } \Omega \text{ 内}) \\ H &= H_0(x, y) \quad (\text{当 } t = 0 \text{ 时}) \\ H &= H_0(x, y, t) \quad (\text{在 } P_1 \text{ 上}) \\ T \frac{\partial H}{\partial x} \cos(n, x) + T \frac{\partial H}{\partial y} \cos(n, y) &= q_b \quad (\text{在 } P_2 \text{ 上}) \end{aligned} \right\} \quad (3-33)$$

式中 R ——单位时间、单位面积上垂直方向的水交换量,包括各种入渗补给,潜水蒸发和面平均的水井抽水量 $[LT^{-1}]$;

S ——贮水系数,无量纲;

H_0 ——初始水头 $[L]$;

其余符号同前。

由方程式(3-33)的变分形式,可写成

$$E = \iint_{\Omega} \left\{ \frac{T}{2} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)^2 \right] + \left[\left(S \frac{\partial H}{\partial t} \right) - R \right] H \right\} dx dy - \int_{P_2} q_b H ds \quad (3-34)$$

同样把区域 Ω 剖分成 M 个三角形单元,单元内基函数取如下形式

$$H(x, y, t) = N_i(x, y)H_i(t) + N_j(x, y)H_j(t) + N_m(x, y)H_m(t) \quad (3-35)$$

然后令泛函 E 取极小值,即令

$$\frac{\partial E}{\partial H_i} = \sum_{i=1}^M \frac{\partial E^*}{\partial H_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, NN)$$

和稳定流的推导类似,在单元泛函 E^* 中,以试函数 \hat{H} 代替 H ,求得单元泛函 E^* 对单元的三个结点水头 H_i, H_j, H_m 求导的矩阵表达式如下。

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial E^*}{\partial H_i} \\ \frac{\partial E^*}{\partial H_j} \\ \frac{\partial E^*}{\partial H_m} \end{aligned} \right\} &= \frac{T^*}{4A} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_m + c_i c_m \\ b_j b_i + c_j c_i & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_m + c_j c_m \\ b_m b_i + c_m c_i & b_m b_j + c_m c_j & b_m b_m + c_m c_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_i(t) \\ H_j(t) \\ H_m(t) \end{bmatrix} \\ &+ S^* \begin{bmatrix} \iint_{\sigma^*} N_i N_i dx dy & \iint_{\sigma^*} N_i N_j dx dy & \iint_{\sigma^*} N_i N_m dx dy \\ \iint_{\sigma^*} N_j N_i dx dy & \iint_{\sigma^*} N_j N_j dx dy & \iint_{\sigma^*} N_j N_m dx dy \\ \iint_{\sigma^*} N_m N_i dx dy & \iint_{\sigma^*} N_m N_j dx dy & \iint_{\sigma^*} N_m N_m dx dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dH_i(t)}{dt} \\ \frac{dH_j(t)}{dt} \\ \frac{dH_m(t)}{dt} \end{bmatrix} \\ &- R^* \begin{bmatrix} \iint_{\sigma^*} N_i dx dy \\ \iint_{\sigma^*} N_j dx dy \\ \iint_{\sigma^*} N_m dx dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i \\ F_j \\ F_m \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3-36)$$

式中的 $b_i, b_j, b_m, c_i, c_j, c_m, F_i, F_j, F_m$ 等符号的含义,和稳定流情况下相同。

二、伽辽金方法

由式(3-33)知

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial H}{\partial y} \right) + R = S \frac{\partial H}{\partial t}$$

为了叙述方便,先假设 $R=0$

$$\text{则} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial H}{\partial y} \right) = S \frac{\partial H}{\partial t} \quad (3-37)$$

和里茨法类似,也对区域进行三角形剖分,并且对结点和单元进行编号。

伽辽金方法中引入一个权函数,它的定义为一个函数在围绕某一结点 i 所构成的多边形 D_i 上,在结点 i 处其值为 1,在它周围的每一个结点上,即多边形的周界上其值都为 0,此函数的近似表达式叫做权函数,用 $\Omega_i(x, y)$ 来表示。由 i 到边界,函数值由 1 到 0 线性地变化,权函数的图象如图 3-8。

在图 3-8 的六个单元中取单元 I,顶点为 i, j, m 。因为权函数 Ω 为线性变化,因而满足空间中的某一平面方程

$$\Omega_i = \alpha + \beta x_i + \gamma y_i \quad (3-38)$$

然后把三个结点上的权函数值代入得

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha + \beta x_i + \gamma y_i \\ 0 &= \alpha + \beta x_j + \gamma y_j \\ 0 &= \alpha + \beta x_m + \gamma y_m \end{aligned}$$

由上述方程可解出待定系数 α, β, γ 。

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 0 & x_j & y_j \\ 0 & x_m & y_m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}}$$

由

$$\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = 2A$$

得

$$\alpha = \frac{1}{2A} (x_j y_m - x_m y_j) \quad (3-39)$$

同理

$$\beta = \frac{1}{2A} (y_i - y_m) \quad (3-40)$$

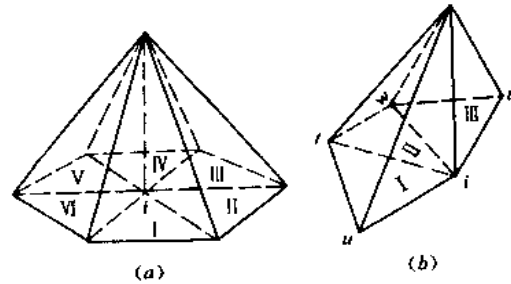


图 3-8 对应于内结点和边界结点的权函数图象

(根据薛禹群、朱学愚)

(a) i 为内结点; (b) i 为边界结点

$$\gamma = \frac{1}{2A}(x_m - x_j) \quad (3-41)$$

令 $a_i = x_j y_m - x_m y_j$; $a_j = x_m y_i - x_i y_m$; $a_m = x_i y_j - x_j y_i$ 。

$b_i = y_j - y_m$; $b_j = y_m - y_i$; $b_m = y_i - y_j$ 。

$c_i = x_m - x_j$; $c_j = x_i - x_m$; $c_m = x_j - x_i$ 。

则 $\alpha = \frac{a_i}{2A}$; $\beta = \frac{b_i}{2A}$; $\gamma = \frac{c_i}{2A}$

权函数
$$\Omega_i = \alpha + \beta x + \gamma y$$

$$= \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y) = N_i \quad (3-42)$$

对于和结点 i 相邻的其它几个单元,也可以得到类似的表达式,因为单元的结点号不同,所以 A, a_i, b_i, c_i 的值也不相同。由式(3-42)可知,权函数 Ω_i 等于前节所述的基函数 N_i 。同理可得

$$\Omega_j = \frac{1}{2A}(a_j + b_j x + c_j y) = N_j \quad (3-43)$$

$$\Omega_m = \frac{1}{2A}(a_m + b_m x + c_m y) = N_m \quad (3-44)$$

上面我们讨论了权函数以及权函数和基函数的关系,下面讨论非稳定流情况下的方程,即

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial H}{\partial y} \right) = S \frac{\partial H}{\partial t}$$

两边乘以权函数 Ω_i 并求积分

$$\begin{aligned} & \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial H}{\partial y} \right) \right] \Omega_i dx dy \\ &= \iint_D S \frac{\partial H}{\partial t} \Omega_i dx dy \end{aligned} \quad (3-45)$$

因为 Ω_i 仅在多边形 D_i 内不为 0,在区域 D 的其余部分为 0,上式变为

$$\begin{aligned} & \iint_{D_i} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial H}{\partial y} \right) \right] \Omega_i dx dy \\ &= \iint_{D_i} S \frac{\partial H}{\partial t} \Omega_i dx dy \end{aligned} \quad (3-46)$$

即

$$\begin{aligned} & \iint_{D_i} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \Omega_i \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial H}{\partial y} \Omega_i \right) \right] dx dy \\ & - \iint_{D_i} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \Omega_i}{\partial x} + T \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial \Omega_i}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \iint_{D_i} S \frac{\partial H}{\partial t} \Omega_i dx dy \end{aligned} \quad (3-47)$$

左边第一项应用格林公式得

$$\iint_{D_i} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \Omega_i \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial H}{\partial y} \Omega_i \right) \right] dx dy$$

$$\begin{aligned}
&= \oint_l T \Omega_i \left[\frac{\partial H}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial H}{\partial y} \cos(n, y) \right] ds \\
&= \oint_l T \Omega_i \frac{\partial H}{\partial n} ds
\end{aligned} \quad (3-48)$$

式中 l ——多边形 D_i 的周界；

n —— l 的外法线方向。

由于权函数 Ω_i 在 D_i 周界上为零，故

$$\oint_l T \Omega_i \frac{\partial H}{\partial n} ds = 0 \quad (3-49)$$

$$- \iint_{D_i} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \Omega_i}{\partial x} + T \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial \Omega_i}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{D_i} S \frac{\partial H}{\partial t} \Omega_i dx dy \quad (3-50)$$

$$\text{或} \quad \iint_{D_i} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \Omega_i}{\partial x} + T \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial \Omega_i}{\partial y} \right) dx dy + \iint_{D_i} S \frac{\partial H}{\partial t} \Omega_i dx dy = 0 \quad (3-51)$$

这个方程还有待于进一步离散化。由于 H 和 Ω_i 在不同的三角形单元上有不同的表达式，所以上式积分必需按三角形单元（设 D_i 区域内共有 m 个三角形单元）逐个进行计算，然后求和。即

$$\sum_{i=1}^m \iint_{D_i} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \Omega_i}{\partial x} + T \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial \Omega_i}{\partial y} \right) dx dy + \sum_{i=1}^m \iint_{D_i} S \frac{\partial H}{\partial t} \Omega_i dx dy = 0 \quad (3-52)$$

下面分别求上述方程中的各项。

$$\frac{\partial \Omega_i}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y) \right] = \frac{b_i}{2A} \quad (3-53)$$

$$\frac{\partial \Omega_i}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y) \right] = \frac{c_i}{2A} \quad (3-54)$$

H 用权函数的线性组合

$$\tilde{H} = \Omega_1 H_1 + \Omega_2 H_2 + \Omega_m H_m \quad (3-55)$$

作为近似值代入方程

$$\frac{\partial H}{\partial x} \approx \frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} = \frac{1}{2A} (b_1 H_1 + b_2 H_2 + b_m H_m) \quad (3-56)$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} \approx \frac{\partial \tilde{H}}{\partial y} = \frac{1}{2A} (c_1 H_1 + c_2 H_2 + c_m H_m) \quad (3-57)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} \approx \frac{\partial \tilde{H}}{\partial t} = \Omega_1 \frac{dH_1}{dt} + \Omega_2 \frac{dH_2}{dt} + \Omega_m \frac{dH_m}{dt} \quad (3-58)$$

因而对任意三角形单元有

$$\begin{aligned}
&\iint_{D_i} T \left(\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \Omega_i}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial \Omega_i}{\partial y} \right) dx dy \\
&\approx \iint_{D_i} T \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} \frac{\partial \Omega_i}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial y} \frac{\partial \Omega_i}{\partial y} \right) dx dy \\
&= \iint_{D_i} T \left[\frac{1}{2A} (b_1 H_1 + b_2 H_2 + b_m H_m) \frac{b_i}{2A} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2A} (c_1 H_1 + c_2 H_2 + c_m H_m) \frac{c_i}{2A} \right] dx dy
\end{aligned}$$

$$= \frac{T}{4A} \left[(b_i b_i + c_i c_i) H_i + (b_i b_j + c_i c_j) H_j + (b_i b_m + c_i c_m) H_m \right] \quad (3-59)$$

代入式(3-52)第二部分,并引用下列各式的结果,即

$$\iint_e N_i N_j dx dy = \frac{A}{12} \quad (i, j, m) \quad (3-60)$$

$$\iint_e N_i^2 dx dy = \frac{A}{6} \quad (i, j, m) \quad (3-61)$$

$$\iint_e N_i dx dy = \frac{A}{3} \quad (i, j, m) \quad (3-62)$$

$$N_i = \Omega_i$$

得

$$\begin{aligned} \iint_e S \frac{\partial H}{\partial t} \Omega_i dx dy &\approx \iint_e S \frac{\partial \tilde{H}}{\partial t} \Omega_i dx dy \\ &= \iint_e S \left(\Omega_i \frac{dH_i}{dt} + \Omega_j \frac{dH_j}{dt} + \Omega_m \frac{dH_m}{dt} \right) \Omega_i dx dy \\ &= \frac{A}{6} S \frac{dH_i}{dt} + \frac{A}{12} S \frac{dH_j}{dt} + \frac{A}{12} S \frac{dH_m}{dt} \end{aligned}$$

因此,对应于单元 e 上的内结点 i (设单元 e 内 T, S 为常数,并用 T^*, S^* 表示)有

$$\begin{aligned} \frac{T^*}{4A^*} \left[(b_i b_i + c_i c_i) H_i + (b_i b_j + c_i c_j) H_j + (b_i b_m + c_i c_m) H_m \right. \\ \left. + \frac{A}{12} S^* \left(2 \frac{dH_i}{dt} + \frac{dH_j}{dt} + \frac{dH_m}{dt} \right) \right] \end{aligned} \quad (3-63)$$

用同样的方法可以列出 D_i 中其它三角形单元(设共有 m 个)上有关结点 i 的表达式。如前述, i 是多边形 D_i 上的公共结点。根据式(3-52)把有关 i 的表达式累加起来并使其总和等于零,即得内结点 i 的方程

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^m \frac{T^*}{4A^*} \left[(b_i b_i + c_i c_i) H_i + (b_i b_j + c_i c_j) H_j + (b_i b_m + c_i c_m) H_m \right] \\ + \sum_{e=1}^m \frac{A^*}{12} S^* \left(2 \frac{dH_i}{dt} + \frac{dH_j}{dt} + \frac{dH_m}{dt} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3-64)$$

同理,对其它 $(n_1 - 1)$ 个内结点用类似的方法也可以分别列出它们的方程式。这样一共可以得到 n_1 个方程。

对于第二类边界结点 i ,也可以同样地构造权函数 Ω_i ,其值在 i 结点上为 1,在和 i 有关的单元 I, II, III 的其他结点 u, v, w, t 处为零[见图 3-8(b)]。和内结点类似有

$$\begin{aligned} \iint_{D_i} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial H}{\partial y} \right) \right] \Omega_i dx dy \\ = \iint_{D_i} S \frac{\partial H}{\partial t} \Omega_i dx dy \end{aligned}$$

或

$$\oint_L T \Omega_i \frac{\partial H}{\partial n} ds - \iint_{D_i} T \left(\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \Omega_i}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial \Omega_i}{\partial y} \right) dx dy$$

$$= \iint_{D_i} S \frac{\partial H}{\partial t} \Omega_i dx dy \quad (3-65)$$

和内结点不同,边界上 Ω_i 不为零,即

$$\oint_L T \Omega_i \frac{\partial H}{\partial n} ds = \iint_{uwv} T \Omega_i \frac{\partial H}{\partial n} ds + \int_{uiv} T \Omega_i \frac{\partial H}{\partial n} ds$$

在边界 uwv 处 Ω_i 为零,而在 uiv 处不为零,则

$$\oint_L T \Omega_i \frac{\partial H}{\partial n} ds = \int_{uiv} T \Omega_i \frac{\partial H}{\partial n} ds = \int_{u_i+v_i} T \Omega_i \frac{\partial H}{\partial n} ds$$

因为单宽流量 $T \frac{\partial H}{\partial n} = q_b$ 为常数,而且权函数 Ω_i 在边界上从 0 到 1,再到 0 作线性变化,有

$$\Omega_i = 1 - \frac{1}{L_{ui}} s \quad (s \text{ 由 } u \text{ 或 } v \text{ 算起})$$

$$\begin{aligned} \oint_L T \Omega_i \frac{\partial H}{\partial n} ds &= q_b \int_0^{L_{ui}} \left(1 - \frac{s}{L_{ui}}\right) ds + q_b \int_0^{L_{vi}} \left(1 - \frac{s}{L_{vi}}\right) ds \\ &= \frac{1}{2} q_b (L_{ui} + L_{vi}) \end{aligned}$$

$$\text{如令 } f_i = \frac{1}{2} q_b (L_{ui} + L_{vi})$$

那么和前面作类似处理,可得

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^m \left\{ \frac{T_e}{4A_e} [(b_i b_e + c_i c_e) H_i + (b_i b_e + c_i c_e) H_j + (b_i b_m + c_i c_m) H_m] \right. \\ \left. + S_e \left(\frac{A'}{6} \frac{dH_i}{dt} + \frac{A'}{12} \frac{dH_j}{dt} + \frac{A'}{12} \frac{dH_m}{dt} \right) \right\} = f_i \end{aligned} \quad (3-66)$$

简写之,为

$$[G]\{H\} + [B]\left\{\frac{dH}{dt}\right\} = \{F\} \quad (3-67)$$

若 $R \neq 0$,则式(3-67)可改写成

$$[G]\{H\} + [B]\left\{\frac{dH}{dt}\right\} = \{R\} + \{F\} \quad (3-68)$$

如果第二类边界结点有 n_2 个,则可建立 n_2 个方程,由内结点方程和边界结点方程组合成 $n = n_1 + n_2$ 个方程,就可解 n 个结点的未知水头。

方程式(3-68)为总体矩阵,对于某一结点 i 有方程

$$G_L H_i(t) + B_L \frac{dH_i(t)}{dt} = R_i + F_i, \quad L = 1, 2, \dots, NN \quad (3-69)$$

这样共有 NN 个方程,形成一个 NN 阶的线性方程组。式中的 R_i 为对 i 结点的垂向水交换量。假设以 i 为公共结点的拼块由 M_i 个单元组成,则

$$R_i = \sum_{e=1}^{M_i} \frac{1}{3} A' R_e \quad (3-70)$$

如果 i 为内结点,则 $F_i = 0$,如 i 为第二类边界结点,则根据式(3-31)有

$$F_i = \frac{1}{2} (q_1 L_1 + q_2 L_2)$$

三、时间近似

对于非稳定流问题,水头是时间的函数,即 $H=H(t)$, 所以不仅对空间要进行离散,对时间也要进行离散。下面简单介绍有限差分法时间近似。

式(3-69)的左端有水头 $H_i(t)$,它是时间 t 的连续函数。近似求解时,要把 $H_i(t)$ 对时间进行离散。当时间取等步长 Δt 时,离散情况如图 3-9(a)所示。因为初始条件是给定的,故时间值 $t=0$ 或时间水平为 1 时的水头值是已知的,可用它求出 $t=\Delta t$ 或时间水平 2 时的水头值,如此重复做下去,即可求得全部时间水平的水头值。一般地,可以假设时间水平 k 的水头为已知水头, $k+1$ 水平的水头为待求的水头。我们把时间水平记为上角码,并把式(3-69)写成离散化形式

$$G_L H_i^{k+\alpha} + B_L \left(\frac{dH_i}{dt} \right)^{k+\alpha} = R_i^{k+\alpha} + F_i^{k+\alpha} \quad (3-71)$$

式中的 α 为时间数因子,其值为 $0 \leq \alpha \leq 1$ 。

假设在时间水平 k 和 $k+1$ 之间,水头为线性变化,如图 3-9(b)所示,则有

$$\left(\frac{dH_i}{dt} \right)^{k+\alpha} = \frac{H_i^{k+1} - H_i^k}{\Delta t} \quad (3-72)$$

$$H_i^{k+\alpha} = (1 - \alpha)H_i^k + \alpha H_i^{k+1} \quad (3-73)$$

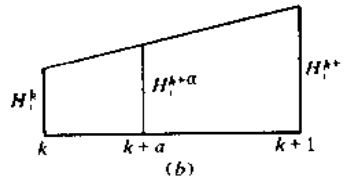
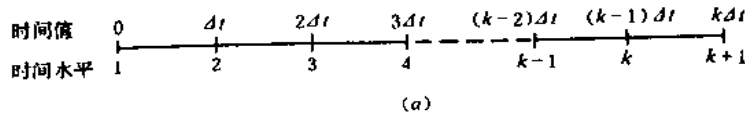


图 3-9 时间近似

(a)离散化; (b) $H_i^{k+\alpha}$ 值的估计

(根据 P. S. 休延康和 G. F. 品特)

将式(3-72)和式(3-73)代入式(3-71)中,得

$$\begin{aligned} & G_L [\alpha H_i^{k+1} + (1 - \alpha)H_i^k] + \frac{B_L}{\Delta t} [H_i^{k+1} - H_i^k] \\ &= [\alpha R_i^{k+1} + (1 - \alpha)R_i^k] + [\alpha F_i^{k+1} + (1 - \alpha)F_i^k] \end{aligned} \quad (3-74)$$

如果垂向水交换量 R 和边界流量 q 随时间变化不大,上式可简化为

$$G_L [\alpha H_i^{k+1} + (1 - \alpha)H_i^k] + \frac{B_L}{\Delta t} [H_i^{k+1} - H_i^k] = R_i + F_i \quad (3-75)$$

$$\text{或} \quad \alpha G_L H_i^{k+1} + \frac{1}{\Delta t} B_L H_i^{k+1} = \frac{1}{\Delta t} B_L H_i^k - (1 - \alpha)G_L H_i^k + R_i + F_i \quad (3-76)$$

如写成总矩阵形式,则为

$$\begin{aligned} & \alpha[G]\{H^{k+1}\} + \frac{1}{\Delta t}[B]\{H^{k+1}\} \\ &= \frac{1}{\Delta t}[B]\{H^k\} - (1-\alpha)[G]\{H^k\} + \{R\} + \{F\} \end{aligned} \quad (3-77)$$

当 α 取不同值时,可以得到不同格式的时间近似。

(1) 当 $\alpha=0$ 时为显式格式,式(3-77)变为

$$\frac{1}{\Delta t}[B]\{H^{k+1}\} = \left(\frac{1}{\Delta t}[B] - [G] \right) \{H^k\} + \{R\} + \{F\} \quad (3-78)$$

(2) 当 $\alpha=1$ 时为全隐式格式,此时有

$$([G] + \frac{1}{\Delta t}[B])\{H^{k+1}\} = \frac{1}{\Delta t}[B]\{H^k\} + \{R\} + \{F\} \quad (3-79)$$

(3) 当 $\alpha=\frac{1}{2}$ 时,为克兰克—尼柯尔松格式,有

$$\left(\frac{1}{2}[G] + \frac{1}{\Delta t}[B] \right) \{H^{k+1}\} = \left(\frac{1}{\Delta t}[B] - \frac{1}{2}[G] \right) \{H^k\} + \{R\} + \{F\} \quad (3-80)$$

可以证明,显式格式是有条件稳定的。当时间步长 Δt 大于某一数值后,解将变得不稳定。而隐式格式和克兰克—尼柯尔松格式则是无条件稳定的。所以用有限元解非稳定流问题时,常用后两种格式。

最后得到的有限元方程式(3-79)或式(3-80)为 NN 阶的线性方程组。 NN 为区域 Ω 上的内结点和第二类边界结点的总数。求解该方程组,便可求出 $k+1$ 时间水平上各结点水头的唯一解。

四、四边形单元解非稳定流问题

(一) 单元族和插值函数简介

前面我们介绍了三角形单元和线性插值函数问题。实际上单元的形状可以是多种多样的。图 3-10 列出了有限单元法中几种典型的单元。一维单元为一直线段,线性单元在直线段两端有二个结点,二次单元有三个结点,三次单元为 4 个结点〔见图 3-10(a)〕。二维单元主要为三角形和四边形。三维单元为四面体,六面体和三角棱柱。在特殊情况下,如果计算区域是轴对称的,可用环形三维单元。环形单元是由旋转平面三角形或四边形产生的〔见图 3-10(d)〕。

插值函数一般用各次多项式表示。

一维的情况下,一个完全的 m 阶多项式为

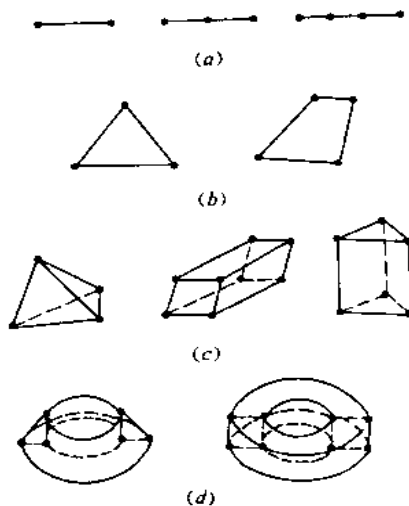


图 3-10 典型的有限单元
(a) 一维单元; (b) 二维单元;
(c) 三维单元; (d) 三维环状单元
(根据 P. S. 休延康和 G. F. 品特)

$$P_m(x) = \sum_{i=1}^m a_i x^{i-1} \quad (3-81)$$

当 $m=1$ 时,即为前述的一维线性插值公式。此时

$$P_1(x) = \hat{H} = a_1 + a_2 x$$

二维的情况下

$$P_m(x, y) = \sum_{i+j \leq m} a_{ij} x^i y^j \quad (3-82)$$

式中 n ——多项式的项数;

i, j ——非负的整数指数。

当 $m=1$ 时,为二维的线性插值公式,即

$$P_1(x, y) = \hat{H}(x, y) = a_1 + a_2 x + a_3 y$$

当然,也可以取二次或三次多项式,但一般用得较少。

(二) 四边形单元

四边形单元有两种处理方法。这里介绍拉格朗日单元族(Lagrange Elements)中的双线性单元,即四个结点的单元(见图 3-11(a))。在导出单元基函数之前,我们先引进局部坐标 (ξ, η) 。

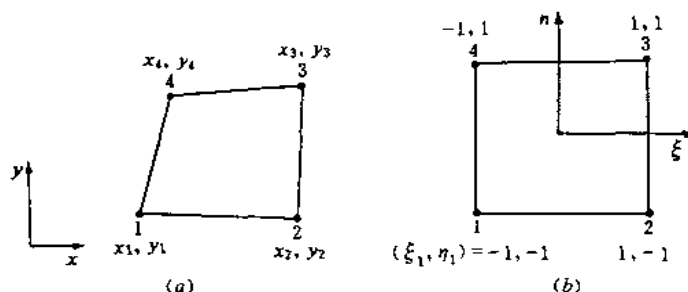


图 3-11 双线性的四边形单元

(a) 总体坐标; (b) 局部坐标

(根据 P. S. 休延康和 G. F. 品特)

该坐标也可称为“等参”坐标。把总体坐标中形状不规则的四边形变换成局部坐标中 2×2 的正方形区域。正方形的四个角点位于 $\xi = \pm 1, \eta = \pm 1$ 处,它分别和原来四边形的四个角点 1, 2, 3, 4 相对应(见图 3-11(b))。总体坐标和局部坐标之间的变换公式为

$$\left. \begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) x_i \\ y &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) y_i \end{aligned} \right\} \quad (3-83)$$

和前述相同,基函数也应具有如下性质。

$$N_i = \begin{cases} 1 & \text{在 } i \text{ 结点} \\ 0 & \text{在其它结点} \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{N_e} N_i = 1$$

N_i 为各单元的结点数目。

利用拉格朗日插值公式,可得

$$N_1(\xi, \eta) = \left(\frac{\xi_1 - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} \right) \left(\frac{\eta - \eta_4}{\eta_1 - \eta_4} \right) \quad (3-84)$$

将 $\xi_1 = -1, \xi_2 = 1, \eta_1 = -1, \eta_4 = 1$ 代入上式,得

$$\left. \begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\ N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \\ N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{aligned} \right\} \quad (3-85a)$$

写成一般的表达式为

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) \quad (i = 1, \dots, 4) \quad (3-85b)$$

下面考虑一种最简单的四边形单元,即矩形单元。设矩形的四个边平行于总体坐标的坐标轴(见图 3-12(b))。矩形单元的结点编号和三角形单元一样,也是逆时针的。编号从左下角开始,依次为 i, j, m, n 。该情况下,可用直观的,简单的方法进行总体坐标和局部坐标之间的变换。即先进行坐标平移,使原点 o 位于矩形的中心,见图 3-12(a)。此时的坐标 (x', y') 和原坐标 (x, y) 存在如下的关系。

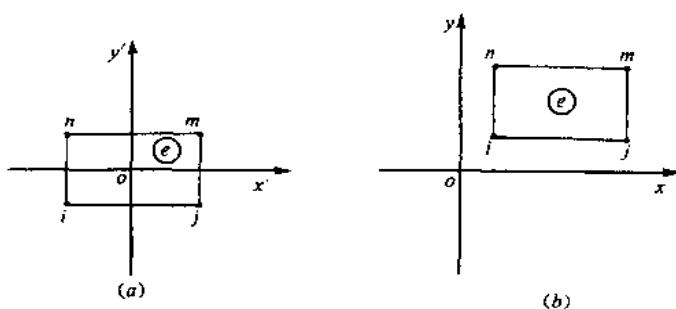


图 3-12 矩形单元

(a) 平移后的单元位置; (b) 原来单元位置

(根据 H. F. E 和 M. P. 安德森)

$$\left. \begin{aligned} x' &= x - \frac{1}{2}(x_i + x_j) = x - \frac{1}{2}(x_m + x_n) \\ y' &= y - \frac{1}{2}(y_i + y_n) = y - \frac{1}{2}(y_j - y_m) \end{aligned} \right\} \quad (3-86)$$

再令

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{x'}{a} \\ \eta &= \frac{y'}{b} \end{aligned} \right\} \quad (3-87)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} 2a &= x_j - x_i = x_m - x_n \\ 2b &= y_n - y_i = y_m - y_j \end{aligned} \right\} \quad (3-88)$$

即可把表示单元基函数的式(3-84)化为如下的表达式。

$$\left. \begin{aligned} N_i(x, y) &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x'}{a} \right) \left(1 - \frac{y'}{b} \right) \\ N_j(x, y) &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{x'}{a} \right) \left(1 - \frac{y'}{b} \right) \\ N_m(x, y) &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{x'}{a} \right) \left(1 + \frac{y'}{b} \right) \\ N_n(x, y) &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x'}{a} \right) \left(1 + \frac{y'}{b} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3-89)$$

矩形单元的基函数图形如图 3-13 所示。 $N_L(x, y)$ 在 L 结点上为 1, 在以 L 结点为公共角点的四个矩形内不为零, 在四个矩形的拼块边界上及边界以外为零, 形状为一角锥。

在矩形单元内, 水头 H 的试函数 $\hat{H}(x, y, t)$ 可用下式表示。

$$\begin{aligned} \hat{H}(x, y, t) &= N_i(x, y)H_i(t) + N_j(x, y)H_j(t) \\ &+ N_m(x, y)H_m(t) + N_n(x, y)H_n(t) \end{aligned} \quad (3-90)$$

同理有

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial t} = N_i(x, y) \frac{dH_i}{dt} + N_j(x, y) \frac{dH_j}{dt} + N_m(x, y) \frac{dH_m}{dt} + N_n(x, y) \frac{dH_n}{dt} \quad (3-91)$$

和三角形单元的推导类似, 可导出单元矩阵方程

$$[G]^e \{H(t)\}^e + [B]^e \left\{ \frac{dH(t)}{dt} \right\}^e = \{F\}^e + \{R\}^e \quad (3-92)$$

式中的单元渗透矩阵 $[G]^e$ 和单元贮水系数矩阵 $[B]^e$ 都是 4×4 的方阵。这两个矩阵的 L 行 ($L=i, j, m, n$) 的矩阵元素为

$$\left. \begin{aligned} G_{L,i} &= \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_L}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_L}{\partial y} \right) dx dy \\ G_{L,j} &= \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left(\frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_L}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial N_L}{\partial y} \right) dx dy \\ G_{L,m} &= \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left(\frac{\partial N_m}{\partial x} \frac{\partial N_L}{\partial x} + \frac{\partial N_m}{\partial y} \frac{\partial N_L}{\partial y} \right) dx dy \\ G_{L,n} &= \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left(\frac{\partial N_n}{\partial x} \frac{\partial N_L}{\partial x} + \frac{\partial N_n}{\partial y} \frac{\partial N_L}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned} \right\} \quad (3-93)$$

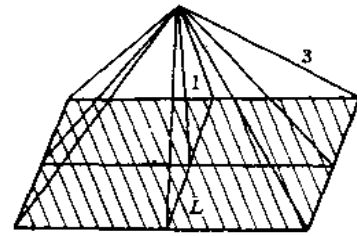


图 3-13 矩形单元的基函数

$$\left. \begin{aligned} B_{L,i} &= \frac{S}{T} \int_{-a}^a \int_{-b}^b N_i N_L dx dy \\ B_{L,j} &= \frac{S}{T} \int_{-a}^a \int_{-b}^b N_j N_L dx dy \\ B_{L,m} &= \frac{S}{T} \int_{-a}^a \int_{-b}^b N_m N_L dx dy \\ B_{L,n} &= \frac{S}{T} \int_{-a}^a \int_{-b}^b N_n N_L dx dy \end{aligned} \right\} \quad (3-94)$$

方程式(3-92)在形式上和三角形单元的方程相同,但矩阵的阶数和矩阵元素的表达式不同。

集合所有的单元矩阵,并且对 $dH(t)/dt$ 取隐式差分,也可得到总矩阵方程(3-77)。如取全隐式差分,则为式(3-79)。

(三) 高斯求积公式

在计算四边形单元的渗透矩阵和贮水系数矩阵时,都要计算式(3-93)和式(3-94)的定积分。上述积分通常用数值积分的方法求值。最常用的数值积分之一便是高斯求积公式。对于函数 $f(\xi)$ 在 -1 到 1 的区间内的积分有下式

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^m w_i f(\xi_i) \quad (3-95)$$

式中 $f(\xi_i)$ ——在高斯点 ξ_i 上的函数值;

$w_i (i=1, 2, \dots, m)$ ——权系数;

m ——高斯点的数目。

一维的高斯求积公式中的基点(即高斯点)和权系数的值见表 3-1。如两个高斯点时,

$$\xi_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -0.57735;$$

$$\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.57735;$$

$$w_1 = w_2 = 1$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi &= 1.0 \times f(-0.57735) \\ &\quad + 1.0 f(0.57735) \end{aligned}$$

表 3-1 一维高斯求积公式的基点和权系数

$\pm \xi_i$	m	w_i
0.577350269189626	2	1.0
0.774596669241483	3	0.555555555555556
0.000000000000000		0.888888888888889
0.861136311594053	4	0.347854845137454
0.339981043584856		0.652145154862546

如果积分限不是 $[-1, 1]$ 而是 $[a, b]$,

我们可用变量代换的方法,令

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}$$

$$\text{则} \quad \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2}(b-a) \int_{-1}^1 g(t) dt \quad (3-96)$$

仍可用高斯求积分式。

对于二维情况下的高斯求积公式,可由以下导出。

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{-1}^1 \left[\sum_{j=1}^n w_j f(\xi, \eta_j) \right] d\eta$$

$$= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n w_i w_j f(\xi_j, \eta_i)$$

如果仍取两个高斯点,则

$$\xi_1 = \eta_1 = -0.57735; \quad \xi_2 = \eta_2 = 0.57735;$$

$$w_1 = w_2 = 1$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta &= f(\xi_1, \eta_1) + f(\xi_1, \eta_2) \\ &\quad + f(\xi_2, \eta_1) + f(\xi_2, \eta_2) \end{aligned} \quad (3-97)$$

$$\text{而} \quad \int_{-a}^a \int_{-b}^b f(x, y) dx dy = ab \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (3-98)$$

五、一些具体问题的处理方法

(一) 稀疏对称方阵的变带宽一维存贮

有限元法得到的线性方程组,其系数方阵不仅是对称的,还有高度的稀疏性,非零元素都分布在主对角线的两侧,呈带状,其他位置的矩阵元素都为零。在该情况下,如果仍用 $N \times N$ 的二维数组存放矩阵元素,则零元素占用太多的存贮空间,显得太浪费了。因此有必要寻找比较节省的存贮方式。此处介绍的变带宽一维存贮方式,就是较好的存贮方式之一。

所谓带宽是指每一行(或列)中从第一个非零元素起到对角线元素为止的元素个数(实际上是半带宽,简称为带宽)。一般说来,各行(或列)的带宽是不等的,故称变带宽。设第 i 行的带宽为 $nn(i)$ 。带宽必定小于或等于方阵的阶 N ,即有

$$nn(i) \leq N$$

方阵 $[A]$ 中各行(或列)带宽的总和称为总带宽,记作 MR ,则有

$$MR = \sum_{i=1}^n nn(i) \quad (3-99)$$

MR 为需要存贮的元素总数或方阵 $[A]$ 的总存贮量。 MR 实际上只存贮了方阵 $[A]$ 中的下三角部分的非零元素,由于 $[A]$ 的对称性,上三角部分的非零元素很易求得。如果用一维数组 $G(MR)$ 存贮带状区域内的元素,摒弃带外的零元素,则比起二维数组 $A(N, N)$ 来,可以大大节省存贮量和计算量。变带宽一维存贮时,按行(或列)的次序,从每行最左边(或每列最上边)的第一个非零元素起到对角线元素为止(包括带内的零元素),逐个顺序编号,一行接一行地排成一维数组,存入计算机中。

为便于理解,我们举一个 5 阶方阵的例子(见图 3-14)。其中 a_{ij} 处表示为非零元素。各行的带宽分别为

$nn(1)=1; nn(2)=2; nn(3)=1; nn(4)=3; nn(5)=4$ 。其总带宽为 $MR=11$ 。此即需要存贮的元素个数。我们将待存的 11 个元素先按行后按列统一编号,写在圆圈内注在矩阵元素的上方(见图 3-14)。带宽范围内的零元素也要编号。然后用一维数组 $G(11)$ 按

$$[A] = \begin{pmatrix} \textcircled{1} a_{11} & & & & \\ \textcircled{2} a_{21} & \textcircled{3} a_{22} & & & \\ & 0 & \textcircled{4} a_{33} & & \\ 0 & \textcircled{5} a_{42} & \textcircled{6} a_{43} & \textcircled{7} a_{44} & \\ 0 & \textcircled{8} a_{52} & \textcircled{9} a_{53} & \textcircled{10} 0 & \textcircled{11} a_{55} \end{pmatrix}$$

图 3-14 5 阶方阵一维存贮的例子

次序存放这些编号元素,即

$$G(1)=a_{11}; G(2)=a_{21}; G(3)=a_{22}; G(4)=a_{31}; \dots; G(11)=a_{55}。$$

为了建立一维数组 $G(11)$ 和二维数组 $A(5,5)$ 之间的一一对应关系(即如果已知一维数组元素的编号 m 即可求得它在二维数组中的行和列,反之亦然),就要寻找一维数组 G 的下标 m 和二维数组 A 的下标 i, j 之间的关系。需要引进一个辅助的数组 $M(N)$ 存放对角线元素的编号,在本例中数组 $M(5)$ 的各元素为

$$M(1) = 1; M(2) = 3; M(3) = 4; M(4) = 7; M(5) = 11。$$

数组 $M(i)$ 和 $nn(j)$ 的关系为

$$M(i) = \sum_{j=1}^i nn(j) \quad (3-100)$$

下面通过实例来说明这种对应关系。设一维数组中有一元素 $G(9)$,问它在矩阵中的第几行第几列? 因为 $7 < 9 < 11$, 即

$$M(4) < 9 < M(5)$$

表明该元素在第 5 行, 即 $i=5$ 。再看该元素位于第几列, $M(5)$ 位于对角线上, $i=j=5$, 而编

号为 11, 编号为 9 的元素在它之前, 因为 $11 - 9 = 2$, 所以元素 $G(9)$ 位于第 $5 - (11 - 9) = 3$ 列, 即 $j=3$ 。一般情况下, 一维数组元素 $G(m)$ 在系数方阵中的位置可这样求出(见图 3-15), 若

$$M(i-1) < m \leq M(i)$$

则它位于第 i 行第 j 列, 且

$$j = i - [M(i) - m] = i - M(i) + m \quad (3-101)$$

反之, 如求方阵 $[A]$ 中的元素 a_{43} 在一维数组 G 中的位置, 因 a_{43} 在 a_{44} 之前 a_{33} 之后, 而对角线元素 a_{44} 的编号 $M(4)=7$, a_{33} 编号为 $M(3)=4$ 。故知 a_{43} 的编号应为 $5 \sim 6$ 。此外, a_{43} 和 a_{44} 的列号相差 $4-3=1$, 应为 $M(4)$

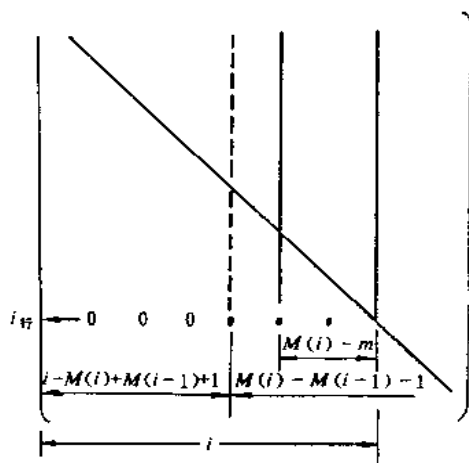


图 3-15 一维存贮计算示意图

前面一个元素。所以它在一维数组 G 中的编号为 $m=7-1=6$, 一般应有

$$m = M(i) - (i - j) = M(i) - i + j \quad (3-102)$$

由前述的式(1-58)可以看出, 对于方阵 $[A]$ 中的带外零元素, 在三角阵 $[L]$ 中仍为零元素, 不必进行计算。每一行的递推计算只要从该行的第一个非零元素开始。从图 3-15 中同样可以看出, i 行的第一个非零元素的列号为

$$L = i - [M(i) - M(i-1) - 1] = i - M(i) + M(i-1) + 1 \quad (3-103)$$

以上我们介绍了带宽计算问题。在地下水开采资源评价中, 特别对计算区的形状很不规则、条件相当复杂的情况, 通常用改进平方根法求解, 这就需要用一维存贮的方法, 由以上方法可知, 数组元素是按带宽存贮的, 所以要计算每一结点的带宽。设 i 结点的带宽为 $M(i)$ 。

则 $M(i)$ 等于以 i 为公共顶点的各个单元的其他结点编号与 i 的差值之最大者加 1 (如图 3-16)。结点 5 的带宽应为⑥号单元的 9 号结点和它的差值加 1, 即

$$M(5) = 9 - 5 + 1 = 5$$

(二) 单元的剖分和结点的编号

为了说明问题, 我们所举例子中的单元都是大小相等的直角三角形。实际上, 剖分单元的大小、形状可以是任意的。为了逼近地下水面, 在水头变化大的地方, 单元剖分得小一些, 而在地下水面平缓或不重要的区域, 单元可剖分得大一些。三角形单元的三个角最好都是锐角, 如不得已有一个角为钝角时, 角度也不要太大。

单元的编号可以是任意的, 编号的方式和顺序对计算没有多大的影响。

结点的编号有两种方式。一种是未知结点 (内结点和第二类边界结点) 先编, 已知结点后编, 即第一类边界结点的号码放在最后。另一种是不分未知结点和已知结点混合编号, 即编号是任意的。这一种编号方式要在程序中区分已知结点和未知结点, 并加以重新编号。

由前面的带宽计算方法可知, 如同一单元的结点号码相差很大, 就有很大的带宽, 在一维存贮时要占用相当多的存贮单元, 并影响运算的速度。所以结点最好顺序编号, 不要跳编。

(三) 初始条件

初始条件为 $t=0$ 时的条件, 即本次开采 (或抽水) 开始时区域内的水头分布。而不是地下水开采前的初始状态。根据我国的实际情况, 要取得开采前的地下水资料是相当困难的, 同时也没有这个必要。

为了取得初始条件, 通常要有本次开采 (或抽水) 前的地下水等水位线图。根据各结点的位置, 在等水位线图上进行插值, 取得各结点的初始水头。如果没有初始时刻的等水位线图, 则所根据初始时刻的边界条件, 垂向补给量和抽水量, 进行一次稳定流计算, 把算出的各结点的稳定水头作为初始水头。即在非稳定流计算之前, 先进行一次稳定流计算, 用来求得初始条件。当然, 这样做要求开始时刻的地下水流相对稳定 (如非降雨季节或原有的开采量比较稳定等等情况)。否则, 初始时刻区域内的水头分布和边界条件不相适应, 会对计算结果带来一定的误差。

(四) 流量计算

对地下水开采资源的评价或进行坝下渗流计算时, 一般都要计算流量, 所以用有限元法算出水头以后, 还要进行流量计算。

用有限元计算流量时, 一般不能直接算出通过井壁或坑 (渠、巷) 道壁的流量, 而要在井或坑道外围, 沿单元边界画出一道闭合周界, 把井或坑道包围在其中, 如图 3-17 (a) 的 1 2 3 4 5 6 线和图 3-17 (b) 的 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 线, 计算通过这些周界的流量。根据水流连续性原理, 当周界范围内的水位变动很小时, 疏干含水层的水量或弹性释水量很小,

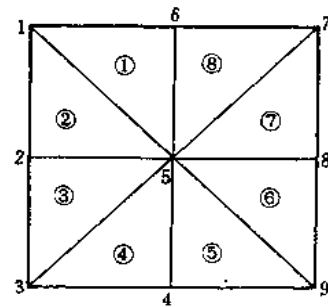


图 3-16 带宽计算图示
(根据朱学愚、钱孝星等)

可认为通过周界的流量就是周界内的水井或坑道的流量。

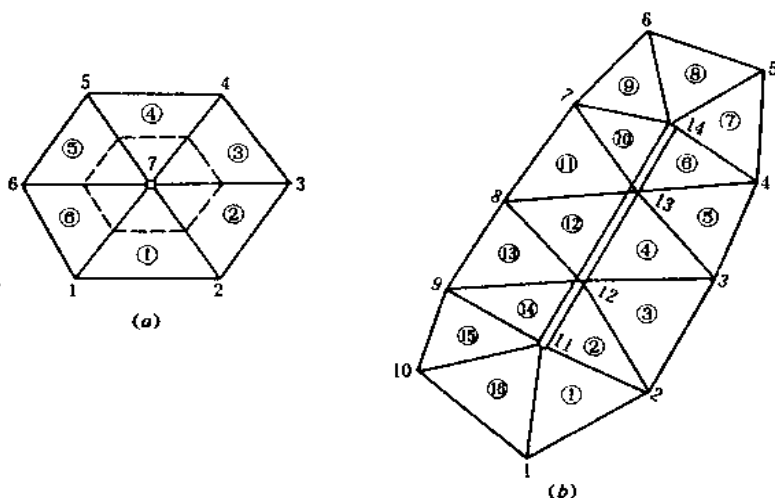


图 3-17 有限单元法计算流量示意图

(a) 水井; (b) 坑道

(根据朱学愚、钱孝星等)

通过周界的流量等于组成周界的各个单元的流量之和, 即

$$Q = \sum_{e=1}^{N_e} Q_e \quad (3-104)$$

式中 Q ——水井或坑道的流量;

Q_e ——各单元的流量;

N_e ——计算流量的单元数。

计算流量的单元编号有一定的规定, 即结点 j 和 m 应当位于计算流量的周界上。如图 3-17 (a) 中单元①的结点编号应为 7, 1, 2, 单元④的结点编号应为 7, 4, 5; 图 3-17 (b) 中单元③的结点编号应为 12, 2, 3; 图 3-17 (b) 中, 并非全部单元都要进行流量计算, 单元②, ④, ⑥, ⑩, ⑫, ⑭和计算流量的周界没有共同边界, 不必计算单元流量。

单元流量的计算公式如下。

$$Q_e = -\frac{T}{2A} [(b_i H_i + b_j H_j + b_m H_m) \times (y_m - y_j) + (c_i H_i + c_j H_j + c_m H_m) \times (x_j - x_m)] \quad (3-105)$$

用本方法计算流量时有两点不足。

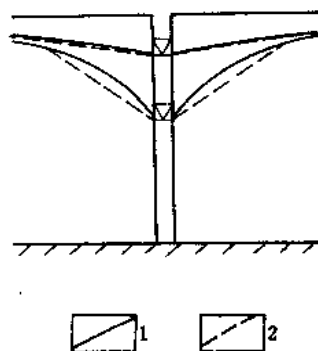


图 3-18 水井附近的实际水力坡度和计算用的水力坡度

1—实际水力坡度; 2—计算用的水力坡度, 即线性插值平面的坡度
(根据朱学愚、钱孝星等)

(1) 计算流量时,过水断面选用单元的边界断面,而水力坡度则用插值平面的坡度。由图3-18可以看出,当水头变化较小时,插值平面的坡度和实际的水力坡度是比较接近的,计算的误差也不大。但是水井附近往往有较大的水力坡度,这时周界附近的水力坡度和插值平面的坡度不一致,造成计算的流量偏大。为了减少误差,有时可这样处理:水力坡度仍取插值平面的坡度,但过水断面取单元的中断面。如图3-17(a)中的虚线。即使这样,计算出来的流量仍不是精确的实际流量值,若用流量拟合的方法反求参数,然后用求出的参数进行流量预报,误差将可抵消一部分,仍然是可行的。

(2) 用周界流量代替水井或坑道流量时,要求周界以内设有另外的源和汇,同时要求在周界内的含水层体积中没有水的贮存和释放,即水流是稳定的,周界流量和水井(或坑道)的流量才能相等。所以当计算流量的单元面积较大时,在抽水的初期,水头变化比较急剧,不能用此法计算流量。

第三节 水文地质参数反分析

一、概述

(一) 解逆问题的必要性

利用数值法进行地下水资源评价或计算与水工建筑有关的地下水问题时,通常分两个阶段进行,第一阶段为解逆问题(也称反演)。即根据大型的抽水试验或实际开采的流量和水位资料,进行数值计算,求出水文地质参数,验证数学模型。第二阶段为解正问题(也称正演)。利用解逆问题求得的参数,计算不同开采方案时的水头和流量,进行方案对比和预报。

确定水文地质参数可以用野外抽水试验方法。而数值计算的解逆问题主要有以下特点。

① 解逆问题不仅可以反求参数,还可以验证数学模型,加深对水文地质条件的认识。② 野外抽水试验的求参数公式,附加了很多限制,如含水层均质、各向同性、等厚、无限延伸等等,和实际情况有较大的出入。③ 野外抽水试验求得的参数,严格说来只能代表试验点附近一个很小的区域。事实上限于勘察的时间和经费,不可能做很多野外试验,几个点的试验资料,很难代表整个区域的情况。

(二) 逆问题的适定性

数学物理问题可区分为适定问题和不适定问题。许多数学物理问题都是按给定的原始资料 u 求出其解 z 。设 u 的度量空间为 U , z 的度量空间为 F 。元素间的距离记为 $\rho_U(u_1, u_2)$, $\rho_F(z_1, z_2)$, $u_1, u_2 \in U$; $z_1, z_2 \in F$ 。如满足如下条件,则该数学物理问题称为适定的。

(1) 对所有元素 $u \in U$ 均存在解 z 于空间 F 中。

(2) 求得的解是唯一的。

(3) 解是稳定的。即对于任一个数 $\epsilon > 0$ 都存在数 $\delta(\epsilon) > 0$, 只要 $\rho_U(u_1, u_2) \leq \delta(\epsilon)$, 就有 $\rho_F(z_1, z_2) \leq \epsilon$ 。

不满足上述三个条件的问题称为不适定问题。那么数值法求解逆问题是否适定呢? 虽

然给出水头分布以后,一般能解出水文地质参数,解是存在的。但水文地质参数不同时,仍可能出现相同的水头分布。仅仅根据水头分布解出的参数往往不是唯一的,现举一个最简单的例子。均质含水层中地下水的稳定运动,当不存在源汇项时,水头都满足拉普拉斯方程。在同一区域同一边界条件下,不管导水系数 T 取何值,水头分布都是相同的。亦即仅根据水头分布无法唯一地确定 T 值。对于有入渗时非均质含水层中的稳定运动方程

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial H}{\partial y} \right) + N = 0 \quad (3-106)$$

如果区域内水头 $H(x, y)$ 的分布及入渗补给量 N 已知, T 为待求参数,则有

$$\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right) T = -N \quad (3-107)$$

这是关于 T 的一阶非齐次线性方程,方程的通解包含任意常数,故求出的 T 值不是唯一的。

此外,解地下水的逆问题也不能保证是稳定的。实测的水头是通过仪器或工具测出的,免不了有误差,既使水头测量误差较小,仍不能保证求出的参数误差也足够小。例如对如下的均质岩层中有入渗 N 时的稳定运动问题

$$T \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right) + N = 0 \quad (3-108)$$

$$T = - \frac{N}{\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}}$$

如果实测水头 H^* 和水头真值 H 之间存在误差 ϵ , 即 $H^* = H + \epsilon$, 利用实测的 H^* 算出的导水系数 T^* 为

$$T^* = - \frac{N}{\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial y^2} \right)}$$

则它和真实导水系数 T 之间的差值为

$$T - T^* = - \frac{N \left(\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial y^2} \right)}{\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right)} \quad (3-109)$$

既使 ϵ 很小,但 $\partial^2 \epsilon / \partial x^2$ 和 $\partial^2 \epsilon / \partial y^2$ 仍有可能相当大。因此由上式可以看出,参数误差的绝对值 $|T - T^*|$ 有可能相当大。

因为逆问题的不适定性,求解时常加上约束条件,以避免出现不合理的情况。例如,由水文地质常识可知,渗透系数和导水系数都是非负的,即 $K \geq 0, T \geq 0$ 。贮水系数和给水度不能大于 1; 即 $\mu \leq 1, S \leq 1$ 等等。

(三) 解逆问题的方法分类

解逆问题的方法可分两类,直接解法和间接解法。直接解法是从联系水头和水文地质参数的偏微分方程或其离散形式出发,把水头的实际观测值作为已知数,把水文地质参数作为待求的未知数,直接求解。具体方法有局部直接求逆法,数学规划法等。实际上,利用裘布衣公式或蒂姆公式计算渗透系数,也是一种直接解法,直接解法由于计算上稳定性差,在实际计算中应用较少。

间接解法利用正问题的解是适定的这一重要性质,把解逆问题化为解一系列的正问题。其基本思想是先假设一组水文地质参数作为初值,用数值法计算水头,求出水头的计算值和实测值之间的误差,不断修改水文地质参数,反复计算水头,直到水头的计算值和实测值很好拟合时为止,此时的水文地质参数值就是所求的水文地质参数值。

设共有 n 个水文地质参数,用符号 k_1, k_2, \dots, k_n 来代表。例如,用 k_1 代表导水系数 T , k_2 代表贮水系数 S , k_n 代表越流因素 B 等等。同时假设在 j 号观测点上 i 时刻的计算水头为 $H_j^c(t_i)$, 实测水头为 $H_j^o(t_i)$, 比较的观测点总数为 N 个,比较的时间段为 M 个。通常用误差平方和来表示拟合的程度,称为评价函数(也称目标函数) E 。显然, E 是所给出的参数值的函数。评价函数的表达式如下。

$$E(k_1, k_2, \dots, k_n) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N [H_j^c(t_i) - H_j^o(t_i)]^2 \quad (3-110)$$

由上式很易看出,评价函数愈小,拟合得愈好。为了提高精度,也可在式(3-110)右端乘上权因子 w_{ij} , 该式变为

$$E(k_1, k_2, \dots, k_n) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N w_{ij} [H_j^c(t_i) - H_j^o(t_i)]^2 \quad (3-111)$$

只要改变水文地质参数 k_1, k_2, \dots, k_n 的值,可得出不同的评价函数值。所以解逆问题实质上就是寻找一组水文地质参数,使评价函数为极小。

寻找最优参数的方法,可以是人工的,也可以利用计算机。人工方法就是充分利用计算者的水文地质知识,对每一次的计算结果进行水文地质分析和判断,人为地修改参数,以达到最优的结果。当待求的参数不多,而且水文地质规律明显时,人工调整参数也可得到很好的拟合结果。用计算机寻找使评价函数达到极小的参数是一个最优化问题。最优化的方法很多,常用的有一维寻查法,非线性最小二乘法 and 单纯形法等等。下面仅介绍单纯形法。

二、单纯形法

单纯形法的基本思想是:先给出若干组水文地质参数,算出评价函数值。根据这些评价函数的大小关系,找出评价函数下降的方向。在下降的方向再找出一组水文地质参数,计算该组参数的评价函数值。把新值和原来的评价函数值相比较,寻找新的函数下降方向。如此继续进行,不断探索,直到评价函数的大小满足要求时为止。为了理解单纯形法的原理,下面举一个简单的二维例子。

设待定的水文地质参数为 2 个,即 k_1 和 k_2 。如果在平面上取 k_1, k_2 为坐标轴,则每一组参数代表平面上的一个点。评价函数记为

$$E(k_1, k_2) = E(P)$$

黑体字 P 代表 $k_1 k_2$ 平面上的一个点。在平面上取三个不在一条直线上的点,用三点的坐标 k_1, k_2 分别计算水头,求出评价函数。评价函数最大者为 E_H , 在平面上相应点为 $P_H(k_{1H}, k_{2H})$; 次大者为 E_G , 相应点为 $P_G(k_{1G}, k_{2G})$; 最小者为 E_L , 相应点为 $P_L(k_{1L}, k_{2L})$ 。 P_H, P_G, P_L 组成一个三角形(见图3-19)。该三角形称为单纯形。

为了寻找评价函数下降的方向,连结 P_H 点和 $P_G P_L$ 的中点 P_C , 则 $P_H P_C$ 方向可能是评

价函数下降的方向, 延长 $P_H P_C$, 在延长线上取点 P_R , 使得

$$P_H P_C = P_C P_R$$

P_R 点称为 P_H 关于 P_C 的反射点, P_R 点的坐标为

$$\begin{cases} k_{1R} = 2k_{1C} - k_{1H} \\ k_{2R} = 2k_{2C} - k_{2H} \end{cases} \quad (3-112)$$

计算 P_R 点的评价函数 E_R 。如果 $E_R \geq E_G$, 表明可能前进得太远了, 要适当后退 (压缩)。如果 $E_R < E_G$, 表明沿 $P_H P_R$ 方向还可走得更远一些, 即扩张。扩张

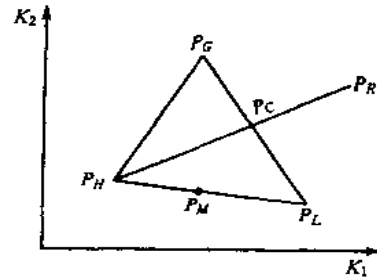


图 3-19 二维的单纯形法示意图

后的点为 P_E , 若 $E_E < E_R$, 表明扩张成功, 将扩张后的点取为新点 P_S , 若不成功, 取 P_R 点为 P_S 。如需要收缩, 则取收缩后的点为 P_S 。相应于 P_S 点的评价函数为 E_S 。将 E_S 和 E_G 进行比较, 若 $E_S < E_G$, 表示我们找出的新点是比较好的, 用 P_S 点代替 P_H , 得到一个新的三角形 (单纯形) $P_G P_E P_S$ 。在新的单纯形上重复以上步骤进行探索。如果 $E_S \geq E_G$, 表明探索不成功, 要缩小原来的单纯形。即抛弃原来评价函数较大的二个点 P_H 和 P_G , 由 $P_H P_L$ 的中点 P_M , P_C 和 P_L 构成新的单纯形, 进行探索。

实际上, 待求的水文地质参数往往不止 2 个, 而是 n 个, 即 k_1, k_2, \dots, k_n 。我们可把一组参数看作 n 维空间的一个点。和二维的情况类似, 要取 $n+1$ 组参数, 它在 n 维空间中代表 $n+1$ 个点 $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ 。如果取 P_0 点为坐标原点, 向量 $P_1 P_0, P_2 P_0, \dots, P_n P_0$ 线性独立, 则这 $n+1$ 个点构成一个单纯形。 $n+1$ 个线性独立的点可以这样来选取:

$$\begin{aligned} P_0 &= (k_1, k_2, \dots, k_n) \\ P_1 &= (k_1 + \Delta k_1, k_2, \dots, k_n) \\ P_2 &= (k_1, k_2 + \Delta k_2, \dots, k_n) \\ &\dots\dots\dots \\ P_n &= (k_1, k_2, \dots, k_n + \Delta k_n) \end{aligned}$$

分别计算各点的评价函数。设其值最大者为 E_H , 相应点为 P_H 。次大者为 E_G , 相应点为 P_G 。评价函数的最小值为 E_L , 点为 P_L 。

算出除点 P_H 以外的 n 个点的形心 P_C (相当于二维情况下的 P_C 点)。计算公式为

$$P_C = \frac{1}{n} \left[\sum_{i=0}^n P_i - P_H \right] \quad (3-113)$$

P_C 点的每一分量为

$$k_j = \frac{1}{n} \left[\sum_{i=0}^n k_{ji} - k_{jH} \right] \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (3-114)$$

再求出 P_H 的反射点 P_R

$$P_R = 2P_C - P_H \quad (3-115)$$

反射点在各坐标轴上的分量为

$$k_{jR} = 2k_{jC} - k_{jH} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (3-116)$$

算出 P_R 点的相应评价函数 E_R 。

若 $E_R \geq E_G$, 按下式进行压缩

$$P_S = (1 - \lambda)P_H + \lambda P_R \quad 0 < \lambda < 1 \quad \lambda \neq 0.5 \quad (3-117)$$

若 $E_R < E_G$, 按下式进行扩张

$$P_E = (1 - \mu)P_H + \mu P_R \quad \mu > 1 \quad (3-118)$$

计算相应的评价函数 E_E , 如 $E_E < E_R$, 表示扩张是成功的, 取 P_E 为 P_S , $E_S = E_E$ 。如 $E_E \geq E_R$, 扩张不成功, 取 P_R 为 P_S , $E_S = E_R$ 。

求出新点 P_S 以后, 把 E_S 和 E_G 进行比较。如 $E_S < E_G$, 则用 P_S 点换掉原来的 P_H 点, 由 P_S 点和其余 n 个点组成新的单纯形, 继续进行探索。如 $E_S \geq E_G$, 则缩小原来的单纯形, 令

$$P_{M_i} = \frac{P_i + P_L}{2} \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad i \neq L \quad (3-119)$$

由 P_{M_i} 和 P_L 组成新的单纯形, 继续探索。

在上述反射, 压缩, 扩张计算时, 参数都必须满足约束条件

$$\alpha_i \leq k_i \leq \beta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3-120)$$

式中 α_i ——参数的下限;

β_i ——参数的上限。

探索的过程反复进行, 直到满足

$$|E_H - E_L| \leq \epsilon |E_L|$$

时为止。 ϵ 为事先给定的允许误差范围。取评价函数值最小的一组参数作为所求的水文地质参数。

第四节 计 算 实 例

【例 1】 均质含水层中的地下水稳定运动。该情况下, 地下水运动满足拉普拉斯方程。

因为含水层中导水系数 T 为常数, 因此得到的单元渗透矩阵和总渗透矩阵中都不包含导水系数 T , 有方程

$$[G]\{H\} = \{F\}$$

假定边界都是第一类边界。区域的剖分以及单元和结点的编号参看图 3-20。

现给出其计算程序。程序共分三部分。第一部分为第 6~21 行, 给出各结点坐标, 第一类边界结点的水头和内结点水头的初始猜测。第二部分为第 23~53 行, 功用为构成总渗透矩阵 $[G]$ 。标识符 K 代表单元的代码。 N_x 代表 $\partial N_L / \partial x$, 即

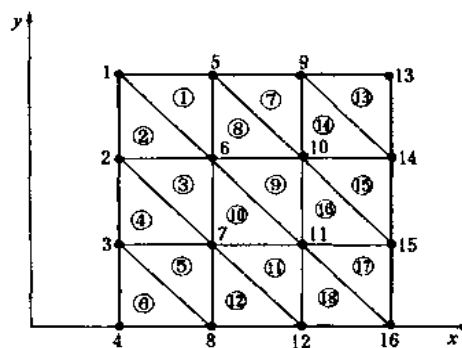


图 3-20 均质含水层中稳定流动算例的有限单元剖分图

(根据 H. F. E 和 M. P. 安德森)

$$Nx(1) = \frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{1}{2A}b_i = \frac{1}{2A}(y_j - y_m)$$

$$Nx(2) = \frac{\partial N_j}{\partial x} = \frac{1}{2A}b_j = \frac{1}{2A}(y_m - y_i)$$

$$Nx(3) = \frac{\partial N_m}{\partial x} = \frac{1}{2A}b_m = \frac{1}{2A}(y_i - y_j)$$

同理

$$Ny(1) = \frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{1}{2A}c_i = \frac{1}{2A}(x_m - x_j)$$

$$Ny(2) = \frac{\partial N_j}{\partial y} = \frac{1}{2A}c_j = \frac{1}{2A}(x_i - x_m)$$

$$Ny(3) = \frac{\partial N_m}{\partial y} = \frac{1}{2A}c_m = \frac{1}{2A}(x_j - x_i)$$

通过第 25 行的循环语句, 分别求出各单元渗透矩阵 $[G]$, 然后集成总渗透矩阵 $[G]$ 。第三部分为第 54~77 行, 用迭代法解所形成的线性方程组。因为该定解问题没有第二类边界, 故列向量 $\{F\} = 0$, 故

$$[G]\{H\} = 0 \quad (3-121)$$

其中每一方程为

$$\sum_{j=1}^{NN} G_{L,j} H_j = 0 \quad (L = 1, 2, \dots, NN) \quad (3-122)$$

用迭代法求解式 (3-122), 可得出节点 L 的水头

$$H_L = -\frac{1}{G_{L,L}} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq L}}^{NN} G_{L,j} H_j \right) \quad (3-123)$$

标识符 SUM 代表圆括号内的求和结果。第 59~65 行为高斯—塞德尔迭代。

```

0001    C FINITE ELEMENT PROGRAM FOR LAPLACE
0002    C THE FORM ELEMENT IS TRIANGULAR
0003          REAL NX,NY
0004          DIMENSION X(25),Y(25),H(25),G(25,25),
0005          &  KODE(25),NX(3),NY(3),NODE(3)
0006    C BLOCK 1
0007    C OBTAIN NODAL COORDINATES
0008    C OBTAIN INITIALIZE ARRAYS
0009    C
0010    C NUMBER OF NODES AND ELEMENTS

```



```

0011      READ ( *,5) NN,MM
0012      WRITE ( *,5) NN,MM
0013      5  FORMAT (2I10)
0014      DO 10 L=1,NN
0015  C NODAL COORDINATES, TYPE,
0016  C NODAL SPECIFIED OR DEFAULT VALUE
0017      10 WRITE ( *,11) X(L),Y(J),KODE(L),H(L)
0018      11 FORMAT (2F10.2,I10,F10.2)
0019      DO 20 L=1,NN
0020      DO 20 JJ=1,NN
0021      20 G(L,JJ)=0.0
0022  C
0023  C BLOCK 2. CONSTRUCT THE CONDUCTANCE MATRIX
0024  C
0025      DO 100 K=1,MM
0026  C NODE NUMBERS OF ELEMENT K.
0027      READ( *,31) I,J,M
0028      WRITE ( *,31) I,J,M
0029      31 FORMAT (3I10)
0030      A=0.5 * ((X(I) * Y(J)-X(J) * Y(I))+(X(M) * Y(I)
0031      &-X(I) * Y(M)+(X(J) * Y(M)-X(M) * Y(J)))
0032  C NX AND NY ARE SPATIAL DERIVATIVES
0033      NX(1)=0.5 * (Y(J)-Y(M))/A
0034      NX(2)=0.5 * (Y(M)-Y(I))/A
0035      NX(3)=0.5 * (Y(I)-Y(J))/A
0036      NY(1)=0.5 * (X(M)-X(J))/A
0037      NY(2)=0.5 * (X(I)-X(M))/A
0038      NY(3)=0.5 * (X(J)-X(I))/A
0039      NODE(1)=I
0040      NODE(2)=J
0041      NODE(3)=M
0042      DO 40 KK=1,3
0043      L=NODE(KK)
0044      GX=NX(KK)
0045      GY=NY(KK)
0046      G(L,I)=G(L,I)+A * (NX(1) * GX+NY(1) * GY)
0047      G(L,J)=G(L,J)+A * (NX(2) * GX+NY(2) * GY)

```



```

0048      G(L,M)=G(L,M)+A*(NX(3)*GX+NY(3)*GY)
0049      40 CONTINUE
0050      100 CONTINUE
0051      WRITE(*,999)((G(I,J),J=1,NN),I=1,NN)
0052      999 FORMAT(1H1,'CONDUCTANCE MATRIX'//
0053      &,16(16F8.3//))
0054      C BLOCK 3
0055      C SOLVE SYSTEM OF EQUATIONS BY ITERATION
0056      200 AMAX=0.0
0057      DO 400 L=1,NN
0058      C EXCLUDE FIXED BOUNDARY HEADS FROM ITERATION
0059      IF (KODE(L).EQ.1)GO TO 400
0060      OLDVAL=H(L)
0061      SUM=0.0
0062      DO 300 JJ=1,NN
0063      IF (JJ.EQ.L) GO TO 300
0064      SUM=SUM+G(L,JJ)*H(JJ)
0065      300 CONTINUE
0066      H(L)=-SUM/G(L,L)
0067      ERR=ABS(OLDVAL-H(L))
0068      IF (ERR.GT.AMAX) AMAX=ERR
0069      400 CONTINUE
0070      IF (AMAX.GT.0.01) GO TO 200
0071      WRITE(*,405)
0072      405 FORMAT(////,1X,'NODE NUMBER',6X,'HEAD')
0073      DO 410 L=1,NN
0074      410 WRITE(*,411) L,H(L)
0075      411 FORMAT(17,5X,F10.2)
0076      STOP
0077      END

```

输入的资料及其格式如下:

16	18		
100.00	300.00	1	8.04
100.00	200.00	1	7.68
100.00	100.00	1	7.19
100.00	.00	1	6.82

200.00	300.00	1	8.18
200.00	200.00	0	.00
200.00	100.00	0	.00
200.00	.00	1	7.56
300.00	300.00	1	8.36
300.00	200.00	0	.00
300.00	100.00	0	.00
300.00	.00	1	7.99
400.00	300.00	1	8.53
400.00	200.00	1	8.41
400.00	100.00	1	8.33
400.00	.00	1	8.29
1	6	5	
1	2	6	
2	7	6	
2	3	7	
3	8	7	
3	4	8	
5	10	9	
5	6	10	
6	11	10	
6	7	11	
7	12	11	
7	8	12	
9	14	13	
9	10	14	
10	15	14	
10	11	15	
11	16	15	
11	12	16	

第1行为结点数 NN 和单元数 M 。第2~17行按结点编号的顺序,输入每一结点的 x 坐标, y 坐标,结点代码 $KODE$ 和结点水头 H 。当结点为已知水头结点时, $KODE=1$,未知水头结点, $KODE=0$ 。第18~35行为各单元的结点编号,按单元编号次序按行输入,每一单元按逆时针的顺序记为 i, j, m 。

下面为按程序第51行的打印语句打出的总渗透矩阵,可以看出它是对称矩阵,而且非零元素都集中在主对角线及其两侧。

CONDUCTANCE MATRIX

1.0	-0.5	0.0	0.0	-0.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
-0.5	2.0	-0.5	0.0	0.0	-1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	-0.5	2.0	-0.5	0.0	0.0	-1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	-0.5	1.0	0.0	0.0	0.0	-0.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
-0.5	0.0	0.0	0.0	2.0	-1.0	0.0	0.0	-0.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	-1.0	0.0	0.0	-1.0	4.0	-1.0	0.0	0.0	-1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	-1.0	0.0	0.0	-1.0	4.0	-1.0	0.0	0.0	-1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	-0.5	0.0	0.0	-1.0	2.0	0.0	0.0	0.0	-0.5	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	-0.5	0.0	0.0	0.0	2.0	-1.0	0.0	0.0	-0.5	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-1.0	0.0	0.0	-1.0	4.0	-1.0	0.0	0.0	-1.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-1.0	0.0	0.0	-1.0	4.0	-1.0	0.0	0.0	-1.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.5	0.0	0.0	-1.0	2.0	0.0	0.0	0.0	-0.5
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.5	0.0	0.0	0.0	1.0	-0.5	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-1.0	0.0	0.0	-0.5	2.0	-0.5	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-1.0	0.0	0.0	-0.5	2.0	-0.5
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.5	0.0	0.0	-0.5	1.0

计算结果如下:

NODE NUMBER	HEAD
1	8.04
2	7.68
3	7.19
4	6.82
5	8.18
6	7.93
7	7.68
8	7.56
9	8.36
10	8.19
11	8.05
12	7.99
13	8.53
14	8.41
15	8.33
16	8.29

【例 2】 某承压含水层均质各向同性, 导水系数 $T=10000\text{m}^2/\text{d}$, 含水层四周均为定水头边界, 边界水头为 6m, 含水层内有 2 口井, 开采量分别为 $Q_1=1024\text{m}^3/\text{d}$, $Q_2=1616\text{m}^3/\text{d}$, 含水层中地下水运动满足泊松方程。要求用有限单元法求解含水层内各结点的水头分布。

泊松方程为 $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = -\frac{R}{T}$, 单元剖分见图 3-21, 其程序如下:

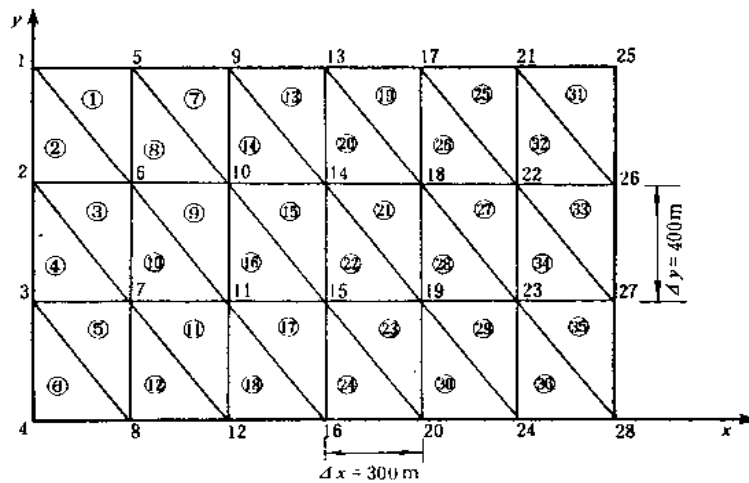


图 3-21 例 2 的单元剖分图

```

REAL NX,NY
DIMENSION X(50),Y(50),H(50),G(50,50),KODE(50),NX(3),
* NY(3),NODE(3),B(50)
OPEN(5,FILE='A1.DAT',STATUS='OLD')
OPEN(6,FILE='A2.DAT',STATUS='NEW')
READ (5,*) NN,MM
WRITE (6,5) NN,MM
5  FORMAT (2I10)
T=1000.
WRITE(6,*) 'T=',T
DO 10 L=1,NN
READ(5,*) X(L),Y(L),KODE(L),H(L)
10  WRITE(*,11) X(L),Y(L),KODE(L),H(L)
11  FORMAT(2F10.2,1I0,F10.2)
DO 30 L=1,NN
30  B(L)=0.0
B(11)=-1616
B(22)=-1024
DO 20 I=1,NN
DO 20 JJ=1,NN
20  G(L,JJ)=0.0
DO 100 K=1,MM
READ(5,*) I,J,M

```

```

WRITE (6,31)I,J,M
31  FORMAT (3I10)
    A=0.5 * ((X(I) * Y(J)-X(J) * Y(I))+(X(M) * Y(I)-X(I) * Y(M))
* +(X(J) * Y(M)-X(M) * Y(J)))
    NX(1)=0.5 * (Y(J)-Y(M))/A
    NX(2)=0.5 * (Y(M)-Y(I))/A
    NX(3)=0.5 * (Y(I)-Y(J))/A
    NY(1)=0.5 * (X(M)-X(J))/A
    NY(2)=0.5 * (X(I)-X(M))/A
    NY(3)=0.5 * (X(J)-X(I))/A
    NODE(1)=I
    NODE(2)=J
    NODE(3)=M
    DO 40 KK=1,3
    L=NODE(KK)
    GX=NX(KK)
    GY=NY(KK)
    G(L,I)=G(L,I)+A * (NX(1) * GX+NY(1) * GY)
    G(L,J)=G(L,J)+A * (NX(2) * GX+NY(2) * GY)
    G(L,M)=G(L,M)+A * (NX(3) * GX+NY(3) * GY)
40  CONTINUE
100  CONTINUE
C    WRITE (* ,999)((G(I,J),J=1,NN),I=1,NN)
C999  FORMAT(1H1,'CONDUCTANCE MATRIX'//28(28F8.3//))
200  AMAX=0.0
    DO 400 L=1,NN
    IF (KODE(L).EQ.1)GO TO 400
    OLDUAL=H(L)
    SUM=0.0
    DO 300 JJ=1,NN
    (IF(JJ.EQ.L)GO TO 300
    SUM=SUM+G(L,JJ) * H(JJ)
300  CONTINUE
    H(L)=(-SUM+B(L)/T)/G(L,L)
    ERR=ABS(OLDUAL-H(L))
    IF(ERR.GT.AMAX)  AMAX=ERR
400  CONTINUE
    IF(AMAX.GT.0.01)  GO TO 200

```

```

        WRITE(6,405)
405    FORMAT(////,1X,'NODE NUMBER',10X,'X',12X,'Y',15X,'HEAD',15X,'Q
        DO 410 L=1,NN
410    WRITE (6,411) L,X(L),Y(L),H(L),B(L)
411    FORMAT (I5,5X,4(4X,F12.5))
        STOP
        END

```

输入资料及格式:

	28	36	
T=	1000.0000000		
	1	6	5
	1	2	6
	2	7	6
	2	3	7
	3	8	7
	3	4	8
	5	10	9
	5	6	10
	6	11	10
	6	7	11
	7	12	11
	7	8	12
	9	14	13
	9	10	14
	10	15	14
	10	11	15
	11	16	15
	11	12	16
	13	18	17
	13	14	18
	14	19	18
	14	15	19
	15	20	19
	15	16	20
	17	22	21
	17	18	22
	18	23	22

18	19	23
19	24	23
19	20	24
21	26	25
21	22	26
22	27	26
22	23	27
23	28	27
23	24	28

计算结果:

NODE NUMBER	X	Y	HEAD	Q
1	0.00000	2400.00000	6.00000	0.00000
2	0.00000	1600.00000	6.00000	0.00000
3	0.00000	800.00000	6.00000	0.00000
4	0.00000	0.00000	6.00000	0.00000
5	600.00000	2400.00000	6.00000	0.00000
6	600.00000	1600.00000	5.90943	0.00000
7	600.00000	800.00000	5.83564	0.00000
8	600.00000	0.00000	6.00000	0.00000
9	1400.00000	2400.00000	6.00000	0.00000
10	1400.00000	1600.00000	5.78251	0.00000
11	1400.00000	800.00000	5.41288	-1616.00000
12	1400.00000	0.00000	6.00000	0.00000
13	1800.00000	2400.00000	6.00000	0.00000
14	1800.00000	1600.00000	5.78341	0.00000
15	1800.00000	800.00000	5.65501	0.00000
16	1800.00000	0.00000	6.00000	0.00000
17	2400.00000	2400.00000	6.00000	0.00000
18	2400.00000	1600.00000	5.74932	0.00000
19	2400.00000	800.00000	5.79930	0.00000
20	2400.00000	0.00000	6.00000	0.00000
21	2800.00000	2400.00000	6.00000	0.00000
22	2800.00000	1600.00000	5.63576	-1024.00000
23	2800.00000	800.00000	5.85009	0.00000
24	2800.00000	0.00000	6.00000	0.00000
25	3600.00000	2400.00000	6.00000	0.00000
26	3600.00000	1600.00000	6.00000	0.00000
27	3600.00000	800.00000	6.00000	0.00000
28	3600.00000	0.00000	6.00000	0.00000

【例3】 求一个通过隔水底板上的土坝渗漏的自由面的稳定流动问题。已知坝宽 6m。横断面及剖分情况参看图 3-22。此时的潜水面必须满足两个条件。① 没有水流通过自由面，故把它看作隔水边界；② 该边界上每一点的水头等于它的位置高程。此时的未知量为自由面的位置 $y_5 = H_5$, $y_9 = H_9$ 和 $y_{13} = H_{13}$ 以及内结点的水头 H_6, H_7, H_{10}, H_{11} 。计算时，先假定自由面的位置，例如令 $y_5 = 3.70\text{m}$, $y_9 = 3.36\text{m}$, $y_{13} = 3.00\text{m}$ 。然后用有限元法算出结点 5, 9, 13 各点的水头 H_5, H_9 和 H_{13} 。将 H_5 和 y_5 , H_9 和 y_9 , H_{13} 和 y_{13} 进行比较，如它们之间差异大于给定的误差范围，则令 $y_5 = H_5$, $y_9 = H_9$, $y_{13} = H_{13}$ ，重复进行迭代计算。通常存在着渗出面，即 $y_{13} > 3.00\text{m}$ ，于是在结点 13 和 14 之间存在出流边界。出流量可由上一步算出的水头计算出来。直到 $y_5 \approx H_5$, $y_9 \approx H_9$ 和 $y_{13} \approx H_{13}$ 时，计算结束。对于自由面问题，迭代计算的每一步都要改变渗流区域，重新确定 5, 9, 13 各结点的坐标，所以比用有限差方便。

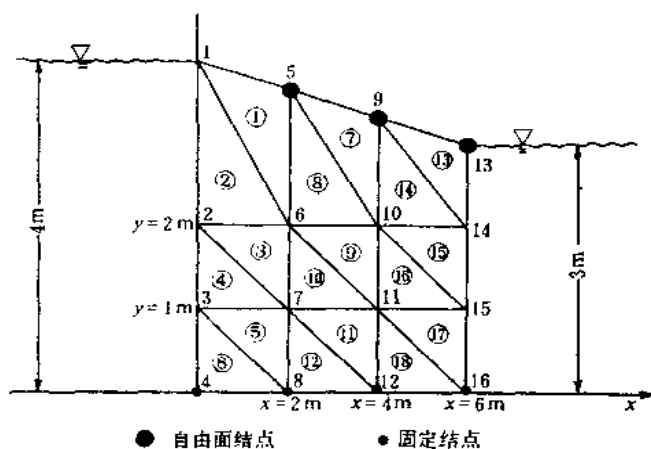


图 3-22 例 3 的单元剖分图
(根据 H. F. E 和 M. P. 安德森)

下面给出其计算程序和例一的程序相比，主要的差别是增加了第四部分，即第 79~100 行，把自由面结点的水头和标高加以比较，直到一致时为止。此外，因为结点 13 和 14 之间存在渗出面，故要引进一个列向量 F

$$F = \begin{cases} q_x \cdot \frac{L}{2} & \text{在 13, 14 结点} \\ 0 & \text{其余结点} \end{cases}$$

这一变化反映在第 45~50 行。其中的 q_x 为沿渗出面的平均单位长度 (y 轴方向) 的出流量， L 为 13 结点至 14 结点的距离。

```
0001 C FINITE ELEMENT MODEL FOR FREE SURFACE
0002 REAL NX,NY
0003 DIMENSION X(25),Y(25),H(25),G(25,25),
0004 & F(25),KODE(25),NX(3),NY(3),NODE(25,3)
0005 NLOOP=0
0006 C BLOCK 1
```



```

0007      C OBTAIN NODAL COORDINATES.
0008      C OBTAIN INITIALIZE ARRAYS.
0009          WRITE( *,1)
0010          1 FORMAT (1H1,'ECHO OF INPUT CARDS'//)
0011      C NUMBER OF NODES AND ELEMENTS.
0012          READ( *,5) NN,MM
0013          WRITE ( *,5) NN,MM
0014          5 FORMAT (2I10)
0015          DO 10 L=1,NN
0016      C NODAL COORDINATES,TYPE
0017      C SPECIFID OR DEFAULT VALUE
0018          READ ( *,11) X(L),Y(L),KODE(L),H(L)
0019          10 WRITE ( *,11) X(L),Y(L),KODE(L),H(L)
0020          11 FORMAT (2F10.2,I10,F10.2)
0021          DO 20 L=1,NN
0022          F(L)=0.0
0023          DO 20 JJ=1,NN
0024          20 G(L,JJ)=0.0
0025      C BLOCK 2
0026      C CONSTRUCT THE CONDUCTANCE MATRIX.
0027      C
0028          30 DO 100 K=1,MM
0029          IF (NLOOP.GT.0) GO TO 32
0030      C NODE NUMBERS OF ELEMENT K
0031          READ ( *,31) NODE(K,1),NODE(K,2),NODE(K,3)
0032          31 FORMAT (3I10)
0033          32 I=NODE(K,1)
0034          J=NODE(K,2)
0035          M=NODE(K,3)
0036          A=0.5*((X(I)*Y(J)-X(J)*Y(I))+(X(M)*Y(I)
0037          &-X(I)*Y(M))+(X(J)*Y(M)-X(M)*Y(I)))
0038      C NX AND NY ARE SPATIAL DERIVATIVES
0039          NX(1)=0.5*(Y(J)-Y(M))/A
0040          NX(2)=0.5*(Y(M)-Y(I))/A
0041          NX(3)=0.5*(Y(I)-Y(J))/A
0042          NY(1)=0.5*(X(M)-X(J))/A
0043          NY(2)=0.5*(X(I)-X(M))/A

```

```

0044         NY(3)=0.5*(X(J)-X(I))/A
0045     C SEEPAGE FACE IS IN ELEMENT 13
0046     C NODES ARE 9,14,13
0047         IF (K.NE.13) GO TO 35
0048         QX=NX(1)*H(I)+NX(2)*H(J)+NX(3)*H(M)
0049         F(13)=QX*(Y(13)-Y(14))/2.0
0050         F(14)=F(13)
0051     35 DO 40 KK=1,3
0052         L=NODE(K,KK)
0053         GX=NX(KK)
0054         GY=NY(KK)
0055         G(L,I)=G(L,I)+A*(NX(1)*GX+NY(1)*GY)
0056         G(L,J)=G(L,J)+A*(NX(2)*GX+NY(2)*GY)
0057         G(L,M)=G(L,M)+A*(NX(3)*GX+NY(3)*GY)
0058     40 CONTINUE
0059     100 CONTINUE
0060     C BLOCK 3
0061     C SOLVE SYSTEM OF EQUATIONS BY ITERATION
0062     C
0063     200 AMAX=0.0
0064     DO 400 L=1,NN
0065     C EXCLUDE FIXED BOUNDARY HEAD FROM ITERATION
0066         IF (KODE(L).EQ.1) GO TO 400
0067         OLDVAL=H(L)
0068         SUM=0.0
0069         DO 300 JJ=1,NN
0070             IF (JJ.EQ.L) GO TO 300
0071             SUM=SUM+G(L,JJ)*H(JJ)
0072     300 CONTINUE
0073         H(L)=(-SUM+F(L))/G(L,L)
0074         ERR=ABS(OLDVAL-H(L))
0075         IF (ERR.GT.AMAX) AMAX=ERR
0076     400 CONTINUE
0077         IF (AMAX.GT.0.01) GO TO 200
0078     C
0079     C BLOCK 4. COMPARE TOP BOUNDARY HEADS
0080     C

```

```

0081      AMAX=0.0
0082      NLOOP=NLOOP+1
0083      DO 405 L=5,13,4
0084      OLDVAL=Y(L)
0085      Y(L)=H(L)
0086      ERR=ABS(OLDVAL-Y(L))
0087      IF (ERR.GT.0.0) AMAX=ERR
0088 405 CONTINUE
0089      IF (AMAX.GT.0.01) GO TO 30
0090      WRITE(*,605) NLOOP
0091 605 FORMAT (1H1,'NUMBER OF ITERATIONS',
0092      &'NLOOP=',15)
0093      WRITE(*,606)
0094 606 FORMAT (////,1X,'NODE NUMBER',6X,'HEAD')
0095      DO 610 L=1,NN
0096      WRITE(*,611) L,H(L)
0097 611 FORMAT (I7,5X,F10.2)
0098 610 CONTINUE
0099      STOP
0100      END

```

输入资料及格式为：

16	18		
.00	4.00	1	4.00
.00	2.00	1	4.00
.00	1.00	1	4.00
.00	.00	1	4.00
2.00	3.70	0	.00
2.00	2.00	0	.00
2.00	1.00	0	.00
2.00	.00	0	.00
4.00	3.36	0	.00
4.00	2.00	0	.00
4.00	1.00	0	.00
4.00	.00	0	.00
6.00	3.00	0	.00
6.00	2.00	1	3.00
6.00	1.00	1	3.00

6.00	.00	1	3.00
1	6	5	
1	2	6	
2	7	6	
2	3	7	
3	8	7	
3	4	8	
5	10	9	
5	6	10	
6	11	10	
6	7	11	
7	12	11	
7	8	12	
9	14	13	
9	10	14	
10	15	14	
10	11	15	
11	16	15	
11	12	16	

叠代次数为 4, 计算结果如下。

结点号	水头
1	4.00
2	4.00
3	4.00
4	4.00
5	3.72
6	3.69
7	3.68
8	3.68
9	3.40
10	3.37
11	3.36
12	3.35
13	3.08
14	3.00
15	3.00
16	3.00

第四章 边界单元法及其在水文地质计算中的应用

边界单元法是水文地质数值计算中较为成熟和有效的计算方法之一。这种方法与有限差分法和有限单元法不同，它不需要把所研究的整个区域离散为许多单元或网格，而是把问题域的边界离散化，并对边界积分方程求解。因此，对于二维问题它只需要剖分边界线，求线积分值；对于三维问题只要剖分边界面，求面积分。这就是说，边界单元法相对于有限差分法或有限单元法“降低一维”剖分。因而大大简化了输入的网格数据并节省大量计算机的计算时间和内存。

在水文地质计算中，无论是平面问题还是剖面问题，常会遇到无限边界的情况。该情况下用有限差分法或有限单元法计算时，要人为地划出一条不受开采（或补给）影响的边界，但要划出这样一条边界是不容易的，而边界单元法处理无限边界就比较容易。而且边界单元法解答的精度通常比有限单元法高。一般来说，有限单元法计算成果对于所考察的原始变量（水头）是较精确的，但水文地质计算中经常要计算流量。有限单元法难以直接计算出流量边界（如井壁、河渠道壁、坝上下游面壁等）上的法向水力梯度，因此只能用该边界附近各单元上的法向水力梯度的平均值代替，算出的流量精度就会大大降低。而边界单元法可直接算出各点的水力梯度，故求出的流量精度较高。对于求解均质区域的稳定流问题（拉普拉斯方程）边界单元法更能显示出快速、有效的优点。但边界单元法也有它的不足。当非均质区很多时，尤其是非均质区域的非稳定流问题，计算变得相当复杂，优越性就不那么明显了。

第一节 稳定流问题的边界单元法

最简单的地下水运动形式是稳定流问题，也就是流场中地下水水头的分布满足拉普拉斯方程或泊松方程。在本节中将介绍这些问题的边界单元解答。边界元类型有常量单元、线性单元和二次单元。在以后推导中，还将用到一个很有用的格林第二公式

$$\iint_{\Omega} (v \cdot \nabla^2 u - u \cdot \nabla^2 v) dA - \int_{\Gamma} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds \quad (4-1)$$

其中， u 、 v 为两个任意的连续函数， Ω 为计算的区域， Γ 为计算区域的边界， n 为边界的外法线方向。

一、边界积分方程的建立

考察在区域 Ω 上的水头 H ，它满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{在 } \Omega \text{ 上}) \quad (4-2)$$

$$\text{简记为} \quad \nabla^2 H = 0 \quad (\text{在 } \Omega \text{ 上}) \quad (4-3)$$

相应的边界条件有两类 (如图 4-1), 即第一类边界 (狄义克利) 条件

$$H = H_b \quad (\text{在 } \Gamma_1 \text{ 上}) \quad (4-4)$$

第二类边界 (牛曼) 条件

$$T \frac{\partial H}{\partial n} = q_b \quad (\text{在 } \Gamma_2 \text{ 上}) \quad (4-5)$$

$$\text{或} \quad \frac{\partial H}{\partial n} = \frac{q_b}{T} = \bar{q} \quad (\text{在 } \Gamma_2 \text{ 上}) \quad (4-6)$$

式中 H ——水头;

Γ ——研究区域 Ω 的边界, 注意 $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$;

n ——表面边界 Γ 的外法线;

H_b ——边界 Γ_1 上给定的水头值;

\bar{q} ——边界 Γ_2 上给定的水头一阶导数值。

下面用加权余量法导出有关的公式。首先引入一个权函数 H^* , 它具有连续一阶导数, 以后还要求这个权函数满足拉普拉斯方程。在区域内部用近似解来代替 H 和 q 所产生的误差可以采用下面的加权余量表达式

$$\iint_{\Omega} (\nabla^2 H) \cdot H^* dA = \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q}) H^* ds - \int_{\Gamma_1} (H - H_b) q^* ds \quad (4-7)$$

$$\text{其中} \quad q = \frac{\partial H}{\partial n} \quad q^* = \frac{\partial H^*}{\partial n} \quad (4-8)$$

由格林公式 (4-1), 可将式 (4-7) 等号左边的积分写成

$$\iint_{\Omega} (\nabla^2 H) H^* dA = \iint_{\Omega} H (\nabla^2 H^*) dA + \int_{\Gamma} H^* q ds - \int_{\Gamma} H q^* ds \quad (4-9)$$

将式 (4-9) 代入式 (4-7), 有

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} H (\nabla^2 H^*) dA + \int_{\Gamma} H^* q ds - \int_{\Gamma} H q^* ds \\ &= \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q}) H^* ds - \int_{\Gamma_1} (H - H_b) q^* ds \end{aligned} \quad (4-10)$$

整理后, 得

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} H (\nabla^2 H^*) dA &= - \int_{\Gamma_1} q H^* ds - \int_{\Gamma_2} \bar{q} H^* ds \\ &+ \int_{\Gamma_2} H q^* ds + \int_{\Gamma_1} H_b q^* ds \end{aligned} \quad (4-11)$$

或写成更简洁形式为

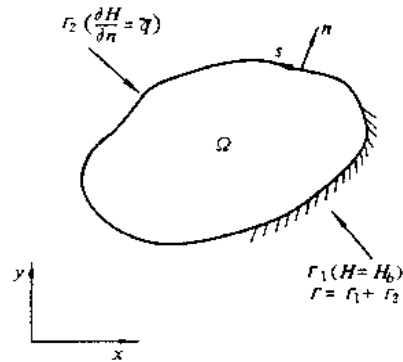


图 4-1 定义边界类型

$$\iint_{\Omega} H(\nabla^2 H^*) dA = - \int_{\Gamma} q H^* ds + \int_{\Gamma} H q^* ds \quad (4-12)$$

其中, $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, 并且假定在 Γ_1 上有 $H = H_b$; 在 Γ_2 上有 $q = \bar{q}$ 。式 (4-11) 或式 (4-12) 为边界单元法的基本关系式。该式右边已都是沿边界的积分, 下面的目的是要将式 (4-11) 或式 (4-12) 左边的函数 H 从区域积分号中分离出来, 使式 (4-11) 各项都化为沿边界的积分。为此, 这里要引进基本解的概念。

假定在研究区域内某点 “ i ” 上作用着集中势, 那么满足控制方程

$$\nabla^2 \omega + \Delta^i = 0 \quad (4-13)$$

的 ω 就是基本解。其中 Δ^i 是狄拉克— δ 函数, 对于区域内任意一点 “ k ”, 它具有下列性质

$$\left. \begin{aligned} \Delta_k^i &= 0 & \text{当 } i \neq k \text{ 时} \\ \Delta_k^i &= \infty & \text{当 } i = k \text{ 时} \end{aligned} \right\} \quad (4-14)$$

和

$$\iint_{\Omega} H_k \Delta^i dA = H_i \quad (4-15)$$

在数学上已给出, 对于二维问题式 (4-13) 的基本解是

$$\omega = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \quad (4-16)$$

其中 r 是从单位势的作用点到所考察点的距离。对于三维问题式 (4-13) 的基本解是

$$\omega = \frac{1}{4\pi r} \quad (4-17)$$

其中 r 的意义同上。

对于式 (4-13) 等号两边乘以水头函数 H , 并在整个研究区域上取积分, 得

$$\iint_{\Omega} H(\nabla^2 \omega + \Delta^i) dA = 0 \quad (4-18)$$

展开后有

$$\iint_{\Omega} H \nabla^2 \omega dA + \iint_{\Omega} H \Delta^i dA = 0 \quad (4-19)$$

利用 Δ^i 函数的性质, 有

$$\iint_{\Omega} H \nabla^2 \omega dA + H_i = 0 \quad (4-20)$$

即

$$H_i = - \iint_{\Omega} H \nabla^2 \omega dA \quad (4-21)$$

在式 (4-11) 中, 设加权函数 H^* 就等于式 (4-13) 的基本解, 即令 $H^* = \omega$, 则式 (4-11) 变为

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} H \nabla^2 \omega dA &= \int_{\Gamma_1} H_b \frac{\partial \omega}{\partial n} ds + \int_{\Gamma_2} H \frac{\partial \omega}{\partial n} ds \\ &\quad - \int_{\Gamma_1} \omega \frac{\partial H}{\partial n} ds - \int_{\Gamma_2} \omega \bar{q} ds \end{aligned} \quad (4-22)$$

将式 (4-21) 代入上式左边, 则有

$$-H_i = \int_{\Gamma_1} H_b \frac{\partial \omega}{\partial n} ds + \int_{\Gamma_2} H \frac{\partial \omega}{\partial n} ds - \int_{\Gamma_1} \omega \frac{\partial H}{\partial n} ds - \int_{\Gamma_2} \omega \bar{q} ds \quad (4-23)$$

因此

$$H_i = \int_{\Gamma_1} \omega \frac{\partial H}{\partial n} ds + \int_{\Gamma_2} \omega \bar{q} ds - \int_{\Gamma_1} H_b \frac{\partial \omega}{\partial n} ds - \int_{\Gamma_2} H \frac{\partial \omega}{\partial n} ds \quad (4-24)$$

上式中的“ i ”是研究区域 Ω 内的任意一点，要求解其值，必须首先知道等式右边边界上的未知数。为此，先将“ i ”点移到研究区域的边界上，这时积分方程式 (4-24) 为

$$C_i H_i = \int_{\Gamma_1} \omega \frac{\partial H}{\partial n} ds + \int_{\Gamma_2} \omega \bar{q} ds - \int_{\Gamma_1} H_b \frac{\partial \omega}{\partial n} ds - \int_{\Gamma_2} H \frac{\partial \omega}{\partial n} ds \quad (4-25)$$

C_i 是个系数，下面以二维问题为例，介绍该系数的求解方法，对于三维问题也是成立的。

在研究区域边界 Γ 上有一点 ξ ，以 ξ 点为中心， ϵ 为半径，在区域边界 Γ 外侧作圆弧 Γ_ϵ (如图 4-2)。首先考察 ξ 点的圆弧边界 Γ_ϵ ，然后让半径“ ϵ ”缩小到零。于是该圆弧边界就成为边界点 ξ 了。若假定该点位于 Γ_2 边界上 (在 Γ_1 边界上，处理方法是类似的)，研究式 (4-25) 中的积分项

$$\int_{\Gamma_2} H \frac{\partial \omega}{\partial n} ds$$

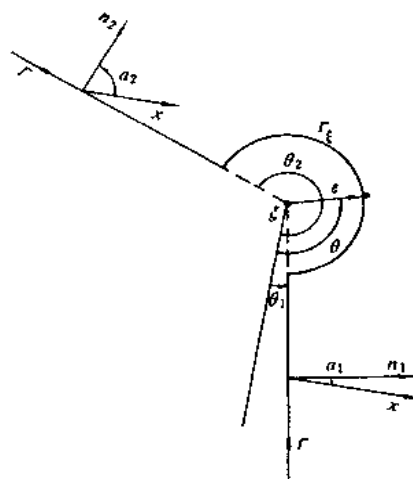


图 4-2 ξ 点位于边界的情况

为了进一步分析，将 Γ_2 边界分为二部分，即

$$\int_{\Gamma_2} H \frac{\partial \omega}{\partial n} ds = \int_{\Gamma_2 - \Gamma_\epsilon} H \frac{\partial \omega}{\partial n} ds + \int_{\Gamma_\epsilon} H \frac{\partial \omega}{\partial n} ds \quad (4-26)$$

将基本解 ω 的表达式 (4-16) 代入式 (4-26) 右端的第二个积分项内，并取极限

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\epsilon} H \frac{\partial \omega}{\partial n} ds \right\} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\epsilon} H \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \right) ds \right\} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ -\frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} H \frac{1}{\epsilon} \cdot \epsilon d\theta \right\} \\ &= -\frac{1}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1) \cdot H \\ &= -\frac{1}{2\pi} (\pi + \alpha_2 - \alpha_1) \cdot H \end{aligned} \quad (4-27)$$

其中 α_1 和 α_2 分别为 ξ 点两侧边界外法线方向与 x 轴之间的夹角。注意到，由于 ϵ 现已为零，边界 $\Gamma_2 - \Gamma_\epsilon$ 重新成为 Γ_2 。

对于式 (4-25) 中的另一个积分项

$$\int_{\Gamma_2} \omega \bar{q} ds$$

可以类似地处理,但此时由于

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_1} q \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\varepsilon} ds \right\} = 0$$

因此,这个极限并没有在式(4-25)中引进任何新项。将式(4-27)代入式(4-24),便可得到边界点的方程为

$$\begin{aligned} \left[1 - \frac{1}{2\pi}(\pi + \alpha_2 - \alpha_1) \right] H_i = & \int_{\Gamma_1} \omega \frac{\partial H}{\partial n} ds + \int_{\Gamma_2} \omega \bar{q} ds \\ & - \int_{\Gamma_1} H_b \frac{\partial \omega}{\partial n} ds - \int_{\Gamma_2} H \frac{\partial \omega}{\partial n} ds \end{aligned} \quad (4-28)$$

比较式(4-28)与式(4-25),不难看出

$$\begin{aligned} C_i = & 1 - \frac{1}{2\pi}(\pi + \alpha_2 - \alpha_1) \\ = & \frac{1}{2\pi}(\pi + \alpha_1 - \alpha_2) \end{aligned} \quad (4-29)$$

对于光滑边界, $\alpha_1 = \alpha_2$, 则有 $C_i = \frac{1}{2}$, 式(4-28)变为

$$\frac{1}{2} H_i = \int_{\Gamma_1} \omega \frac{\partial H}{\partial n} ds + \int_{\Gamma_2} \omega \bar{q} ds - \int_{\Gamma_1} H_b \frac{\partial \omega}{\partial n} ds - \int_{\Gamma_2} H \frac{\partial \omega}{\partial n} ds \quad (4-30)$$

简记为

$$\frac{1}{2} H_i = \int_{\Gamma} \omega q ds - \int_{\Gamma} H \frac{\partial \omega}{\partial n} ds \quad (4-31)$$

注意,在式(4-30)或式(4-31)中,“ i ”为区域边界上的任意一点。

这样以上已完成了使微分方程转化为沿边界的积分方程,下面的任务是使这个积分方程进一步转化为代数方程。如果要求解牛曼问题,方程式(4-31)右边的第一项是已知的,这样由式(4-31)便可得到求解边界上未知水头 H 的方程。如果要求解狄义克利问题,在整个边界上, H 的值是给定的,因此由式(4-31)便可得到求解未知法向导数 q 边界值的方程。若解柯西(混合)边值问题,则得到边界未知数据的混合型积分方程。

一般情况下,对于 Γ_1 边界, $H = H_b$ 已知, $\frac{\partial H}{\partial n}$ 未知; Γ_2 边界, $\frac{\partial H}{\partial n} = \bar{q}$ 已知, H 未知。边界每个结点上只有一个未知数, N 个结点就有 N 个未知数 $\left(H \text{ 或 } \frac{\partial H}{\partial n} \right)$ 。为了求得这 N 个未知数必须建立 N 个代数方程。为此,应在研究区域 Ω 的边界上划分 N 个单元。

二、边界单元

在所考察的边界上研究二维的情形,将研究的区域边界划分为 N 段或 N 个边界单元(如图4-3),把有未知量的点称为结点。有三种离散模式。

- (1) 常量元。取单元中点为结点,直线段作为单元。
- (2) 线性元。取单元端点为结点,直线段作为单元。
- (3) 二次元。取单元中点和端点为结点,曲线段作为单元。

(一) 常量单元

中间结点的常量单元把边界离散为 N 个单元, 其中 N_1 个单元属于 Γ_1 , N_2 个单元属于 Γ_2 。在每个单元上, H 和 $\frac{\partial H}{\partial n}(q)$ 的值假定为常量, 并且就等于单元中结点处的值。对于任一结点 “ i ”, 式 (4-25) 离散形式为

$$C_i H_i = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} q_j \omega ds - \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} H_j \frac{\partial \omega}{\partial n} ds \quad (4-32)$$

Γ_j 是单元 j 的长度。方程式 (4-32) 以离散形式表示了结点 “ i ” 的基本解 ω 和边界上全部单元 j ($j=1, 2, \dots, N$) 之间的关系 (如图4-4)。注意到, 在常量单元上, 每个单元的 H_j 和 q_j 都是个常数, 所以可以提到积分号的外面。另外, 常量元边界单元为直线段, 且结点在单元的中点。所以 $\alpha_1 = \alpha_2$, 即 $C_i = \frac{1}{2}$, 因此有

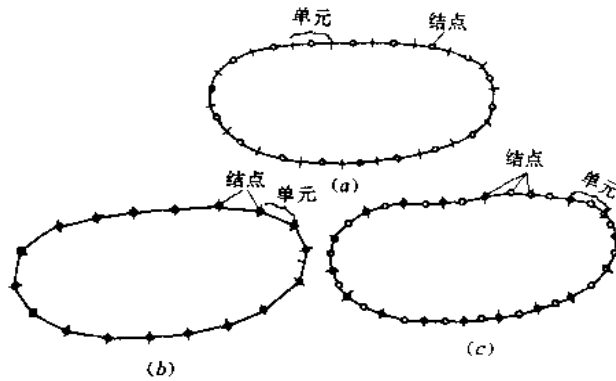


图 4-3 不同形式的边界单元

(a) 常量单元; (b) 线性单元; (c) 二次单元

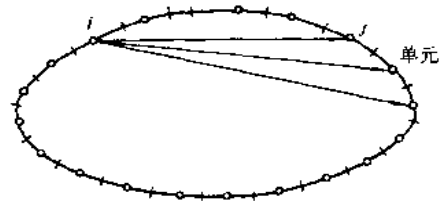


图 4-4 常量元离散示意图

$$\frac{1}{2} H_i = \sum_{j=1}^N q_j \int_{\Gamma_j} \omega ds - \sum_{j=1}^N H_j \int_{\Gamma_j} \frac{\partial \omega}{\partial n} ds \quad (4-33)$$

设

$$\bar{A}_{ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial \omega}{\partial n} ds \quad G_{ij} = \int_{\Gamma_j} \omega ds \quad (4-34)$$

则式 (4-33) 变为

$$\frac{1}{2} H_i = \sum_{j=1}^N q_j G_{ij} - \sum_{j=1}^N H_j \bar{A}_{ij} \quad (4-35)$$

记

$$A_{ij} = \begin{cases} \bar{A}_{ij} & \text{当 } i \neq j \text{ 时} \\ \bar{A}_{ij} + \frac{1}{2} & \text{当 } i = j \text{ 时} \end{cases} \quad (4-36)$$

式 (4-35) 可以写成

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} H_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j \quad (4-37)$$

对于 N 个结点的方程组, 用矩阵形式表示为

$$AH = GQ \quad (4-38)$$

这里在 Γ 上 H 的 N_1 个值和 q 的 N_2 个值是已知的。因此式 (4-38) 中只有 N 个未知数。按未知数重新排列式 (4-38)，把全部未知数置于等号左边，而把矩阵元素乘以已知的 H 和 q 值所得到的向量置于等号右边，这时式 (4-38) 可以改写成

$$BX = F \quad (4-39)$$

其中 X 是由未知的 H 和 q 组成的向量， B 是 N 阶稠密系数矩阵，在计算时， A_{ij} 和 G_{ij} 可以直接装配到 B 中，而不需要形成方程式 (4-38)。

一旦求出了整个边界上的 H 和 q 值，便可以用式 (4-24) 计算区域内任意一点的 H 值。离散化后的式 (4-24) 为

$$H_i = \sum_{j=1}^N q_j G_{ij} - \sum_{j=1}^N H_j \bar{A}_{ij} \quad (4-40)$$

上述方程表示内部点 “ i ” 和边界上各单元 j ($j=1, 2, \dots, N$) 的 H 和 q 之间的积分关系。如果要求区域内某点 “ i ” 的流量 $q_x \left(= \frac{\partial H}{\partial x} \right)$ 或 $q_y \left(= \frac{\partial H}{\partial y} \right)$ ，可以通过对式 (4-24) 求导计算出来，即

$$\begin{aligned} (q_x)_i &= \int_{\Gamma_1} \frac{\partial H}{\partial n} \frac{\partial \omega}{\partial x} ds + \int_{\Gamma_2} \bar{q} \frac{\partial \omega}{\partial x} ds \\ &\quad - \int_{\Gamma_1} H_b \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \omega}{\partial n} \right) ds - \int_{\Gamma_2} H \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \omega}{\partial n} \right) ds \end{aligned} \quad (4-41)$$

$$\begin{aligned} (q_y)_i &= \int_{\Gamma_1} \frac{\partial H}{\partial n} \frac{\partial \omega}{\partial y} ds + \int_{\Gamma_2} \bar{q} \frac{\partial \omega}{\partial y} ds \\ &\quad - \int_{\Gamma_1} H_b \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \omega}{\partial n} \right) ds - \int_{\Gamma_2} H \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \omega}{\partial n} \right) ds \end{aligned} \quad (4-42)$$

以上已完成了将边界上的积分方程化为代数方程组，但代数方程中仍有二个积分

$$\bar{A}_{ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial \omega}{\partial n} ds$$

$$G_{ij} = \int_{\Gamma_j} \omega ds$$

需要计算。除了考察结点所在的那个单元之外，所有的单元都可以用数值积分（高斯积分法）来计算积分值，即

$$\bar{A}_{ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial \omega}{\partial n} ds = \frac{l_j}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \omega}{\partial n} \right)_k w_k \quad (4-43)$$

$$G_{ij} = \int_{\Gamma_j} \omega ds = \frac{l_j}{2} \sum_{k=1}^n \omega_k w_k \quad (4-44)$$

式中， l_j 是 j 单元的长度，而 w_k 是与数值积分点 k 有关的权。函数 $\frac{\partial \omega}{\partial n}$ 或 ω 必须在同一点进行计算。长度 l_j 被 2 除是因为数值积分的积分限通常是由 -1 到 +1，其总权数为 2。对于二维问题，一般四个积分点就足以满足所需求的精度。

对于考察结点所在的那个单元 \bar{A}_{ii} 为零。因为 r 方向和 n 的方向在所考察结点的那个单

元上正交, 故有

$$\begin{aligned}\bar{A}_n &= \int_{r_i} \frac{\partial \omega}{\partial n} ds \\ &= \int_{r_i} \frac{\partial \omega}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial n} ds = 0 \quad (4-45)\end{aligned}$$

对于考察结点所在的那个单元的 G_n , 可以积出解析式

$$\begin{aligned}G_n &= \int_{r_i} \omega ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{r_i} \ln \left(\frac{1}{r} \right) ds \quad (4-46)\end{aligned}$$

现在采用图 4-5 所示的局部坐标 ξ , 有

$$G_n = \frac{1}{2\pi} \int_{(1)}^{(2)} \ln \left(\frac{1}{r} \right) ds = \frac{1}{\pi} \int_{(0)}^{(2)} \ln \left(\frac{1}{r} \right) ds \quad (4-47)$$

积分上下限括号内的数字表示相应的点号, 作坐标变换, 并注意到 $r = \xi \cdot |r_1|$, 其中 $|r_1| = |r_2|$, 因而

$$\begin{aligned}G_n &= \frac{1}{\pi} \int_{(0)}^{(2)} \ln \left(\frac{1}{r} \right) dr = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \ln \left(\frac{1}{\xi \cdot |r_1|} \right) d(\xi \cdot |r_1|) \\ &= \frac{1}{\pi} |r_1| \cdot \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{|r_1|} + \ln \frac{1}{\xi} \right) d\xi \\ &= \frac{1}{\pi} |r_1| \cdot \left(\ln \frac{1}{|r_1|} + \int_0^1 \ln \frac{1}{\xi} d\xi \right) \\ &= \frac{1}{\pi} |r_1| \cdot \left(\ln \frac{1}{|r_1|} + 1 \right) \quad (4-48)\end{aligned}$$

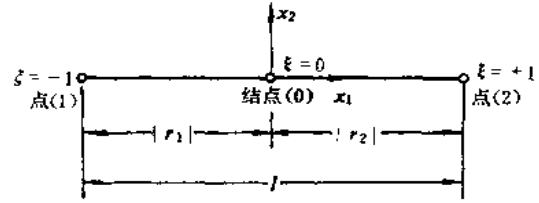


图 4-5 单元整体坐标与局部坐标

(二) 线性单元

现在假定在每个单元内的 H 和 q 是线性变化的。结点是两个直线单元之间的交点, 如图 4-3 (b) 所示, 即图中已注明的端结点。

对于 N 个单元, 式 (4-25) 可写成

$$C_i H_i + \sum_{j=1}^N \int_{r_j} H_j \frac{\partial \omega}{\partial n} ds = \sum_{j=1}^N \int_{r_j} q_j \omega ds \quad (4-49)$$

注意到, 和常量元不一样, 由于 H_j 、 q_j 在单元上线性变化, 所以不能将它们从积分式中取出来。为此, 考察如图 4-6 所示的一个任意单元, 该单元任意一点的 H 值和 q 值可以根据它们结点值以及线性插

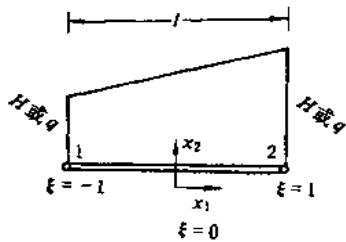


图 4-6 线性单元整体坐标与局部坐标

值函数 ϕ_1 和 ϕ_2 而求得。于是, 两个线性变化的变量可以写成

$$(H)\xi = \phi_1 H_1 + \phi_2 H_2 = [\phi_1 \phi_2] \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{Bmatrix} \quad (4-50)$$

$$q(\xi) = \phi_1 q_1 + \phi_2 q_2 = [\phi_1 \quad \phi_2] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \quad (4-51)$$

式中 $\phi_1 = \frac{1}{2} (1 - \xi)$

$$\phi_2 = \frac{1}{2} (1 + \xi)$$

$$\xi = x_1 / \left(\frac{l}{2} \right)$$

因此，式 (4-50)、式 (4-51) 在某个 “j” 单元上的积分为

$$\begin{aligned} \int_{r_j} H_j \frac{\partial \omega}{\partial n} ds &= \int_{r_j} [\phi_1 \quad \phi_2] \frac{\partial \omega}{\partial n} ds \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{Bmatrix} \\ &= [h_{j1} \quad h_{j2}] \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4-52)$$

其中 $h_{j1} = \int_{r_j} \phi_1 \frac{\partial \omega}{\partial n} ds$

$$h_{j2} = \int_{r_j} \phi_2 \frac{\partial \omega}{\partial n} ds$$

对于 $\int_{r_j} q_j \omega ds = \int_{r_j} [\phi_1 \quad \phi_2] \omega ds \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}$

$$= [q_{j1} \quad q_{j2}] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \quad (4-53)$$

其中 $q_{j1} = \int_{r_j} \phi_1 \omega ds$

$$q_{j2} = \int_{r_j} \phi_2 \omega ds$$

将所有的 “j” 单元的式 (4-52)、式 (4-53) 都代入式 (4-49) 中，则结点 i 的总体方程为

$$\begin{aligned} C_i H_i + [\bar{A}_{i1} \quad \bar{A}_{i2} \quad \dots \quad \bar{A}_{iN}] \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_N \end{Bmatrix} \\ = [G_{i1} \quad G_{i2} \quad \dots \quad G_{iN}] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4-54)$$

其中 \bar{A}_{ij} 等于 “j” 单元的 h_{i1} 项加上 “j-1” 单元的 h_{i2} 项。 G_{ij} 也类似，即

$$\bar{A}_{ij} = h_{i1}|_j + h_{i2}|_{j-1} \quad (4-55)$$

$$G_{ij} = q_{i1}|_j + q_{i2}|_{j-1} \quad (4-56)$$

$$\text{式 (4-54) 可写成} \quad C_i H_i + \sum_{j=1}^N \bar{A}_{ij} H_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j, \quad (4-57)$$

$$\text{同样有} \quad \sum_{j=1}^N A_{ij} H_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j, \quad (4-58)$$

$$\text{其中} \quad A_{ij} = \begin{cases} \bar{A}_{ij}, & \text{当 } i \neq j \text{ 时} \\ \bar{A}_{ij} + C_i, & \text{当 } i = j \text{ 时} \end{cases}$$

整个方程组的矩阵形式为

$$AH = GQ \quad (4-59)$$

(三) 二次单元

对于比较复杂的流场边界，可以采用二次单元（或其它更高阶的单元）来模拟（如图 4-7）对于二次单元，式（4-25）中 H 和 q 两个函数可以表示为

$$\begin{aligned} H(\xi) &= \phi_1 H_1 + \phi_2 H_2 + \phi_3 H_3 \\ &= [\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3] \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4-60)$$

$$q(\xi) = \phi_1 q_1 + \phi_2 q_2 + \phi_3 q_3 = [\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} \quad (4-61)$$

$$\phi_1 = \frac{1}{2} \xi (\xi - 1)$$

式中

$$\phi_2 = \frac{1}{2} \xi (\xi + 1)$$

$$\phi_3 = (1 - \xi) (1 + \xi)$$

这些函数在结点上的函数值是已知的，并按二次形式变化（如图 4-8）。

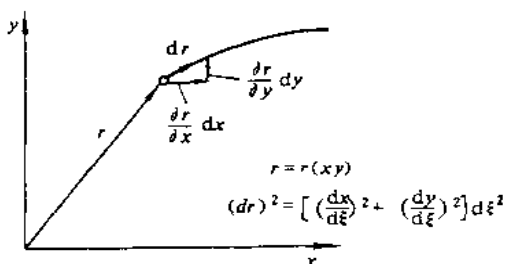


图 4-7 曲线边界的几何意义

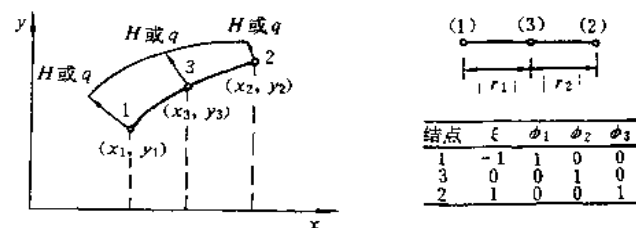


图 4-8 二次单元

沿着“j”单元的一个典型积分为

$$\int_{\Gamma_j} H_j \frac{\partial \omega}{\partial n} ds = [h_{j1} \ h_{j2} \ h_{j3}] \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{Bmatrix} \quad (4-62)$$

式中

$$h_{i1} = \int_{\Gamma} \phi_1 \frac{\partial \omega}{\partial n} ds$$

$$h_{i2} = \int_{\Gamma} \phi_2 \frac{\partial \omega}{\partial n} ds$$

$$h_{i3} = \int_{\Gamma} \phi_3 \frac{\partial \omega}{\partial n} ds$$

求积分式 (4-62), 通常要用到雅可比变换, 这是由于 ϕ_{1-3} 是 ξ 的函数, 而积分是沿着边界 Γ 的。对于二维问题, 由于雅可比变换较简单, 有

$$|J| = \frac{ds}{d\xi} = \left[\left(\frac{dx}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (4-63)$$

因此

$$ds = |J| d\xi \quad (4-64)$$

代入 H 的积分式便有

$$h_{ik} = \int_{(1)}^{(2)} \phi_k(\xi) \frac{\partial \omega}{\partial n} |J| d\xi \quad k = 1, 2, 3 \quad (4-65)$$

该式现在就可以通过数值积分来计算。 q_{ik} ($k=1, 2, 3$) 的确定与此相同。最后的方程组显然就是

$$AH = GQ \quad (4-66)$$

这里值得指出的是, 由于二次单元的边界一般都是非光滑的曲边, 因此无法根据式 (4-29) 计算 C_i 。但我们可以基于下面这个事实来计算 A 的对角线项。这就是当一个均匀的位势场作用在整个边界上时, 边界法向导数 (q 值) 总和必定为零。因此式 (4-66) 成为

$$AH = 0 \quad (4-67)$$

所以 A 的任何一行中的所有元素总和必为零, 并且一旦对角线之外的元素全知道的话, 在对角线上的元素值就可以很容易地计算出来, 即

$$A_{ii} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N A_{ij} \quad (4-68)$$

这样就无须直接计算 C_i 的值。

必须指出, 在计算式 (4-63) 时, 必须用 ξ 来表示 x 和 y 的函数, 为此可采用跟表示 H 和 q 两个函数一样的形式来表示它们, 即

$$\left. \begin{aligned} x &= \phi_1 x_1 + \phi_2 x_2 + \phi_3 x_3 \\ y &= \phi_1 y_1 + \phi_2 y_2 + \phi_3 y_3 \end{aligned} \right\} \quad (4-69)$$

式中 x_i, y_i ($i=1, 2, 3$) 是整体坐标系 xOy 内单元的结点坐标。

另外, 为了解能反映出常量位势的条件, 函数 H 的阶次至少必须跟描述流场边界几何形状所用的函数的阶次一样高。

三、泊松 (Poisson) 方程的边界单元法

现在来考察函数 H 在研究区域内满足泊松方程的情形, 即

$$\nabla^2 H + R = 0 \quad (4-70)$$

和前面一样, 对应于这个问题的边界条件是

$$\left. \begin{array}{ll} \text{第一类边界 (狄义克利) 条件} & H=H_b \quad (\text{在 } \Gamma_1 \text{ 上}) \\ \text{第二类边界 (牛曼) 条件} & \frac{\partial H}{\partial n}=\bar{q} \quad (\text{在 } \Gamma_2 \text{ 上}) \end{array} \right\} \quad (4-71)$$

总的边界是 $\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2$ 。

和推导拉普拉斯方程情况下的式 (4-24) 一样, 在此很容易得到研究区域 Ω 内任意一点 “i” 的水头表达式

$$\begin{aligned} H_i + \iint_{\Omega} R \cdot \omega dA &= \int_{\Gamma_1} \omega \frac{\partial H}{\partial n} ds + \int_{\Gamma_2} \omega \bar{q} ds \\ &\quad - \int_{\Gamma_1} H_b \frac{\partial \omega}{\partial n} ds - \int_{\Gamma_2} H \frac{\partial \omega}{\partial n} ds \end{aligned} \quad (4-72)$$

当 “i” 点取在边界上时, 同样有

$$\begin{aligned} C_i H_i + \iint_{\Omega} R \omega dA &= \int_{\Gamma_1} \omega \frac{\partial H}{\partial n} ds + \int_{\Gamma_2} \omega \bar{q} ds \\ &\quad - \int_{\Gamma_1} H_b \frac{\partial \omega}{\partial n} ds - \int_{\Gamma_2} H \frac{\partial \omega}{\partial n} ds \end{aligned} \quad (4-73)$$

用常量元离散后得

$$C_i H_i + \iint_{\Omega} R \omega dA + \sum_{j=1}^N H_j \int_{\Gamma_j} \frac{\partial \omega}{\partial n} ds = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial H}{\partial n} \right)_{,j} \int_{\Gamma_j} \omega ds \quad (4-74)$$

该式可表示为

$$C_i H_i + E_i - \sum_{j=1}^N \bar{A}_{ij} H_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j \quad (4-75)$$

或

$$E_i + \sum_{j=1}^N A_{ij} H_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j \quad (4-76)$$

其中

$$E_i = \iint_{\Omega} R \omega dA$$

这个积分可以通过将区域 Ω 划分为一系列单元来计算, 它和有限单元法中的单元极其相似 (如图 4-9), 但概念上有所不同。在每个单元上应用数值积分, 得

$$E_i = \sum_{L=1}^{NE} \left[\sum_{j=1}^k w_j (R \omega)_j \right] \cdot A_L \quad (4-77)$$

式中 NE ——区域内部单元数;

k ——在每个单元上的积分点数;

w_j ——加权系数;

A_L ——单元的面积。

N 个节点的完整方程组可以用矩阵形式表示为

$$E + AH = GQ \quad (4-78)$$

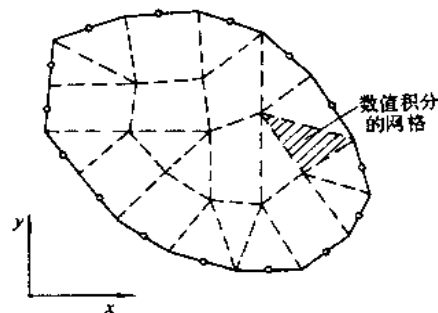


图 4-9 边界单元与内部单元

因为在边界上 N_1 个 H 值和 N_2 个 q 值是已知的, 因此可以重新排列式 (4-78) 使得所有未知量位于左边, 即

$$BX = F \quad (4-79)$$

其中 X 是 N_1 个未知 q 和 N_2 个未知 H 的向量。一旦整个边界上的 H 和 q 值均已知, 就可以计算任一内点的 H 值, 即

$$H_i = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j - \sum_{j=1}^N \bar{A}_{ij} H_j - E_i \quad (4-80)$$

四、计算步骤

求解稳定流问题, 边界单元法的计算步骤一般如下。

(1) 对区域 Ω 的边界 Γ 进行剖分离散。有三种离散模式, 视问题需要选择其中的一种。对单元节点进行沿边界逆时针顺序编号。

(2) 计算各结点 M_i ($i=1, 2, \dots, N$) 的系数 C_i 。对于常量元恒有 $C_i = \frac{1}{2}$ 。对于线性元, 只需计算出点 M_i 两侧边界单元的夹角 α_i , 然后利用式 (4-29) 便可得 C_i 。设结点 M_i 两侧二个单元的另一个端结点为 $M_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$ 和 $M_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1})$, 则根据两向量的内积表达式, 可求得

$$\alpha_i = \cos^{-1} \left\{ \frac{(x_{i-1} - x_i)(x_{i+1} - x_i) + (y_{i-1} - y_i)(y_{i+1} - y_i)}{|M_{i+1}M_i| \cdot |M_{i-1}M_i|} \right\} \quad (4-81)$$

式中的 $|M_{i+1}M_i|$ 和 $|M_{i-1}M_i|$ 分别为单元 $M_{i-1}M_i$ 和 M_iM_{i+1} 的长度。

对于二次单元, 可以直接根据式 (4-68) 求出 A_n , 这样就无须计算 C_i 。其实线性单元亦可采用类似的方法。

(3) 建立线性方程组。依次把 M_1, M_2, \dots, M_N 取作 M_i 点, 代入式 (4-37) 或 (4-58) 便可得到 N 个方程。

(4) 求解线性代数方程组, 对于

$$[B] \{X\} = \{F\} \quad (4-82)$$

式中 $[B]$ —— 系数矩阵;

$\{X\}$ —— 未知数列向量;

$\{F\}$ —— 常数项列向量。

可以用高斯列主元消去法或全主元消去法求解, 即可求得未知数 X 。也就是说, 对于第一类边界解出了 $\partial H / \partial n$, 对于第二类边界解出了 H 。求解后, 在全部边界上的水头 H 和水头的一阶导数 $\partial H / \partial n$ 就都是已知的了。

(5) 求出计算区域内部任一点 i 的水头 H_i 和流入集水建筑物的流量。把上面求得的边界上的 H_j 和 $(\partial H / \partial n)_j$ 代入方程式 (4-40), 即可求出 H_i 。区域内部任一点 i 的流量可按式 (4-41) 和 (4-42) 计算。至于河道或渠道等集水建筑物的侧壁流量计算, 实际上它们就是区域的内边界, 对于常量元来说, 内边界上各单元结点的 $\partial H / \partial n$ 在解方程组时已经求出, 且在单元上是均匀分布的。对于线性元, 结点的值代表两侧单元的 $1/2$ 值, 故可按式计算

$$Q = T_1 \left\{ \frac{\partial H}{\partial n} \right\}_1 \frac{l_i + l_m}{2} + \sum_{i=2}^m T_i \left\{ \frac{\partial H}{\partial n} \right\}_i \frac{l_i + l_{i-1}}{2} \quad (4-83)$$

式中 m ——内边界上的单元数;
 l_i ——第 i 单元的长度;
 T_i ——第 i 结点的导水系数。

对于二次单元, 与此相类似, 也不难得到流量的计算公式。

第二节 非稳定流问题的边界单元法

自然界地下水运动的基本要素大多与时间 t 有关。这时地下水运动的基本微分方程为

$$\nabla^2 H = \frac{\mu^*}{T} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} \quad (\text{在 } \Omega \text{ 上, } t > 0) \quad (4-84)$$

式中 μ^* ——贮水系数;
 T ——导水系数。

令
$$a = \frac{T}{\mu^*}$$

则
$$\nabla^2 H = \frac{1}{a} \frac{\partial H}{\partial t} \quad (\text{在 } \Omega \text{ 上, } t > 0) \quad (4-85)$$

对应两类边界条件为

$$\left. \begin{array}{l} \text{第一类边界(狄义克利)条件 } H = H_b \text{ (在 } \Gamma_1 \text{ 上, } t > 0) \\ \text{第二类边界(牛曼)条件 } \frac{\partial H}{\partial n} = q \text{ (在 } \Gamma_2 \text{ 上, } t > 0) \end{array} \right\} \quad (4-86)$$

初始条件为 $H = H_0$ (在 Ω 上, $t = 0$)

实现数学模型式 (4-85)、式 (4-86) 的边界单元法求解有多种不同的途径, 在此主要介绍两种方法, 即拉普拉斯变换法和耦合边界单元——有限差分法。

一、拉普拉斯变换法

当函数 H 的拉普拉斯变换存在时, 记为

$$L(H) = \bar{H} = \int_0^\infty H e^{-\lambda t} dt \quad (4-87)$$

并假定变换参数是正实数。

由分部积分法, 可以证明

$$L\left\{\frac{\partial H}{\partial t}\right\} = \lambda \bar{H} - H_0 \quad (4-88)$$

拉普拉斯变换后, 方程式 (4-85) 变为

$$\nabla^2 \bar{H} - \frac{\lambda}{a} \bar{H} + \frac{1}{a} H_0 = 0 \quad (4-89)$$

边界条件式 (4-86) 也进行变换, 于是有

$$\left. \begin{array}{l} \bar{H} = \frac{H_b}{\lambda} = \bar{H}_b \text{ (在 } \Gamma_1 \text{ 上)} \\ \bar{q} = \frac{q}{\lambda} = \bar{q}_b \text{ (在 } \Gamma_2 \text{ 上)} \end{array} \right\} \quad (4-90)$$

经过拉普变换以后的定解问题式 (4-89)、式 (4-90) 为椭圆型方程的边值问题, 可用边界

单元法求解。为此，和前节讨论泊松方程时相类似，取加权余量方程

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \left(\nabla^2 H - \frac{\lambda}{a} H + \frac{1}{a} H_0 \right) \cdot \omega dA \\ &= \int_{r_2} (\bar{q} - \bar{q}_s) \omega ds - \int_{r_1} (H - H_s) \frac{\partial \omega}{\partial n} ds \end{aligned} \quad (4-91)$$

分部积分上述方程中的拉普拉斯算子后，得

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \left(\nabla^2 \omega - \frac{\lambda}{a} \omega \right) H dA + \frac{1}{a} \iint_{\Omega} H_0 \omega dA \\ &= - \int_{r_2} \bar{q} \omega ds + \int_{r_1} H \frac{\partial \omega}{\partial n} ds \end{aligned} \quad (4-92)$$

假定 ω 是方程 (4-85) 的基本解，它满足关系

$$a \nabla^2 \omega - \lambda \omega = -\Delta' \quad (4-93)$$

这样，方程式 (4-92) 变为

$$H_s + a \int_{r_1} H \frac{\partial \omega}{\partial n} ds = a \int_{r_2} \bar{q} \omega ds + \iint_{\Omega} H_0 \omega ds \quad (4-94)$$

三维问题的基本解 ω 为

$$\omega = \frac{(a\lambda)^{1/4}}{r^{1/2} (2\pi a)^{3/2}} K_{1/2} \left[\left(\frac{\lambda}{a} \right)^{1/2} r \right] \quad (4-95)$$

而二维问题的基本解 ω 为

$$\omega = \frac{1}{2\pi a} K_0 \left[\left(\frac{\lambda}{a} \right)^{1/2} r \right] \quad (4-96)$$

式中， K_ν 是第二类 ν 阶修正贝塞尔函数。

现在讨论一下上述基本解的奇异性。

当 $r \rightarrow 0$ 时，修正的贝塞尔函数宗量也趋于零。当 $Z \rightarrow 0$ ， $K_{1/2}(Z)$ 的极限为

$$K_{1/2}(Z) = \left(\frac{\pi}{2Z} \right)^{1/2} \quad (4-97)$$

结果有

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{(a\lambda)^{1/4}}{r^{1/2} (2\pi a)^{3/2}} \cdot \left(\frac{\pi}{2r} \right)^{1/2} \left(\frac{a}{\lambda} \right)^{1/4} \\ &= \frac{1}{4\pi a r} \quad (\text{当 } r \rightarrow 0 \text{ 时}) \end{aligned} \quad (4-98)$$

上式说明，三维基本解的奇异性和拉普拉斯方程的奇异性具有相同的形式。

同理，当 $Z \rightarrow 0$ 时， $K_0(Z)$ 的极限为

$$K_0(Z) = -\ln(Z) \quad (4-99)$$

于是

$$\omega = \frac{1}{2\pi a} \ln \frac{1}{r} - \frac{1}{4\pi a} \ln \frac{\lambda}{a} \quad (\text{当 } r \rightarrow 0 \text{ 时}) \quad (4-100)$$

上式第一项是二维拉普拉斯方程的基本解，第二项为常数，它对解并不产生影响。

取方程式 (4-94) 中的 i 在边界上，使得方程

$$C_i \bar{H}_i + a \int_r \bar{H} \frac{\partial \omega}{\partial n} ds = a \int_r \bar{q} \omega ds + \iint_{\Omega} H_0 \omega dA \quad (4-101)$$

式中,系数 C 与第一节的取值相同。

离散上述方程,并对变换参数 λ 任意选取 N 个系列值 $\lambda_k (k=1,2,3,\dots,N)$ 对于某一固定点 i ,可以得到一组象函数 \bar{H} 的值,即象函数 \bar{H} 不仅是固定点 i 位置的函数,也是变换参数 λ 的函数。

为了求得象原函数 H ,要进行反演,反演时不是采用求拉普拉斯变换的逆变换的方法,而是采用数值反演。原定解问题式(4-85)、式(4-86)的解具有如下形式

$$H = H_s + \sum_{j=1}^{\infty} b_j e^{-a_j t} \quad (4-102)$$

式中 H_s ——稳定时($t \rightarrow \infty$)的水头;

a_j, b_j ——待定常数。

式(4-102)右端第二项的级数是收敛的,一般取 N 项即可,故该式简化为

$$H = H_s + \sum_{j=1}^N b_j e^{-a_j t} \quad (4-103)$$

为了求得水头 H ,只要确定出(4-103)中的待定常数 a_j 和 b_j 即可。为此,对(4-103)式进行拉普拉斯变换,得到

$$\bar{H} = \frac{H_s}{\lambda} + \sum_{j=1}^N \frac{b_j}{a_j + \lambda} \quad (4-104)$$

取 $a_j = \lambda_j (j=1,2,\dots,N)$,则有

$$\bar{H} = \frac{H_s}{\lambda} + \sum_{j=1}^N \frac{b_j}{\lambda_j + \lambda} \quad (4-105)$$

如果在边界上的“ i ”点,分别取 $\lambda = \lambda_1, \lambda = \lambda_2, \dots, \lambda = \lambda_N$,代入式(4-105),得方程

$$\bar{H}_i = \frac{H_s}{\lambda_i} + \sum_{j=1}^N \frac{b_j}{\lambda_j + \lambda_i} \quad (i=1,2,\dots,N) \quad (4-106)$$

将区域边界离散成 N 个单元,把式(4-106)代入式(4-101),这样便可得到含有 N 个未知数 b_1, b_2, \dots, b_N 的 N 个方程,故可求得 $b_j (j=1,2,\dots,N)$ 的唯一一组解。

将求出的 b_j 回代到式(4-103),得到

$$H_i = H_s + \sum_{j=1}^N b_j e^{-\lambda_j t} \quad (4-107)$$

即可求出区域 Ω 上任意点“ i ”任一时刻 t 的近似水头值。这里应指出,对于式(4-94)或式(4-101)中给定的初始条件得到区域 Ω 内的积分,它的计算和泊松方程相类似,把整个区域划分为许多网格,在每个网格上进行数值积分。拉普拉斯变换参数 λ 只要在对数轴上均匀取值即可,例如取 0.0001, 0.001, 0.01, 0.1, 1, 10, 100, 1000, 10000 等。

二、耦合边界单元——有限差分法

假定在式(4-85)中的时间导数可用有限差分来逼近,对于充分小的时间步长 Δt ,有

$$\frac{\partial H}{\partial t} \approx \frac{H(t + \Delta t) - H(t)}{\Delta t} \quad (4-108)$$

那么,方程式(4-85)改写为

$$\nabla^2 H(t + \Delta t) - \frac{1}{a\Delta t}H(t + \Delta t) + \frac{1}{a\Delta t}H(t) = 0 \quad (4-109)$$

上述方程类似于方程式(4-89)的形式,所以它的基本解与式(4-95)及式(4-96)形式相同,只须用 $1/\Delta t$ 代替 λ 即可。

采用加权余量法可以得到方程式(4-109)的边界积分方程,即

$$\begin{aligned} & H_i(t + \Delta t) + a \int_r H(t + \Delta t) \frac{\partial \omega}{\partial n} ds \\ &= a \int_r q(t + \Delta t) \omega ds + \frac{1}{\Delta t} \iint_{\Omega} H(t) \omega dA \end{aligned} \quad (4-110)$$

将点“ i ”移到边界上,有

$$\begin{aligned} & C_i H_i(t + \Delta t) + a \int_r H(t + \Delta t) \frac{\partial \omega}{\partial n} ds \\ &= a \int_r q(t + \Delta t) \omega ds + \frac{1}{\Delta t} \iint_{\Omega} H(t) \omega ds \end{aligned} \quad (4-111)$$

设 $t=t_0$ 为初始时刻,相应的 $H(t)=H(t_0)$ 为初始值,在整个研究区域 Ω 上是已知的。选取适当的 Δt ,由式(4-110)和式(4-111)采用数值求解,便得到 $t=t_0+\Delta t$ 时刻的水头 H 。将此作为下一时间步长的伪初始值,又可求得下一时刻整个流场的 H 。以此类推,即可求得不同时间段流场内水头 H 的变化。计算表明,欲使式(4-110)或式(4-111)得到满意的结果,必须采用很小的时间步长。

第三节 渗流问题边界单元法中若干问题的讨论

以上我们研究了有限区域、均质、各向同性介质情况下,渗流问题的边界单元法。实际工程中碰到的具体问题往往更为复杂(例如渗流的区域有可能是无限的、渗流介质为非均质的和各向异性的)。所以在本节主要介绍边界单元法对非均质问题、各向异性问题和无限域问题的处理方法。

另外,边界单元法中,在不同类型边界或不同透水性介质相交的角点上会出现所谓的“角点问题”,即在这些角点处水头的法向导数不连续,有两个数值。因此,在这些点上 H 和 $\partial H/\partial n$ 这两个变量中的哪一个被给定及两个法向导数值究竟取哪一个等问题都将在本节中进行讨论。

一、非均匀介质

如果研究的区域是非均质的,我们就将它分为一系列的子区域,在每个子区域具有同样的性质,即使整个研究区域分片均匀(如图 4-10)。这样每个子区域都可认为是相互独立的均匀介质,在每个子区域上应用边界单元的方法形成一组方程,然后,利用水流的连续性原理(平衡)及交界面上水头值相等的条件(相容),将这些子区域的方程组都集合在一起,由此形成整个研究区域上求解未知水头或流量的方程组。

为了简单起见,考察如图 4-11 所示的只有两个子区域 D_1 和 D_2 组成的区域 D 。在子区域 D_1 上定义如下函数。

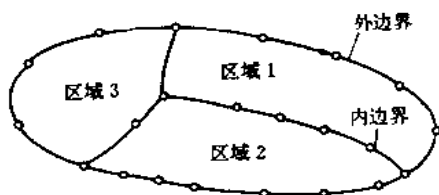


图 4-10 非均质介质的子区域划分

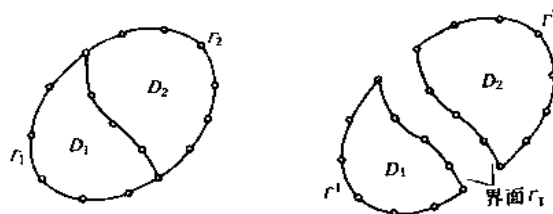


图 4-11 分为两个子区域的渗流域

H^1, Q^1 ——在外部边界 Γ^1 上的结点水头和流量 $\left(q_1 = k_1 \frac{\partial H}{\partial n}\right)$;

H_1^1, Q_1^1 ——在界面 Γ_1 上的结点水头和流量,并认为 Γ_1 属于 D_1 ;

H^2, Q^2 ——在外部边界 Γ^2 上的结点水头和流量 $\left(q_2 = k_2 \frac{\partial H}{\partial n}\right)$;

H_1^2, Q_1^2 ——在界面 Γ_1 上的结点水头和流量,并认为 Γ_1 属于 D_2 。

相应于子区域 D_1 的方程组可以写为

$$[A^1 \ A_1^1] \begin{Bmatrix} H^1 \\ H_1^1 \end{Bmatrix} = [G^1 \ G_1^1] \begin{Bmatrix} Q^1 \\ Q_1^1 \end{Bmatrix} \quad (4-112)$$

对于子区域 D_2 ,有

$$[A^2 \ A_1^2] \begin{Bmatrix} H^2 \\ H_1^2 \end{Bmatrix} = [G^2 \ G_1^2] \begin{Bmatrix} Q^2 \\ Q_1^2 \end{Bmatrix} \quad (4-113)$$

在 D_1 和 D_2 之间的界面 Γ_1 上应用相容和平衡条件

$$H_1^1 = H_1^2 = H_1 \quad \text{相容} \quad (4-114)$$

$$Q_1^1 = -Q_1^2 = Q_1 \quad \text{平衡} \quad (4-115)$$

可以组合方程式(4-112)~(4-115),形成下列方程组

$$\begin{bmatrix} A^1 & A_1^1 & 0 \\ 0 & A_1^2 & A^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H^1 \\ H_1^1 \\ H^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G^1 & G_1^1 & 0 \\ 0 & -G_1^2 & G^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q^1 \\ Q_1^1 \\ Q^2 \end{Bmatrix} \quad (4-116)$$

或简记为

$$AH = GQ \quad (4-117)$$

这个方程组形式上类似方程(4-38),但这里的矩阵 A 和 G 是带状的。引进问题的边界条件,并注意到在交界面上的水头和流量都是未知的,那么方程组(4-116)变为

$$\begin{bmatrix} A^1 & A_1^1 & -G_1^1 & 0 \\ 0 & A_1^2 & G_1^2 & A^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H^1 \\ H_1^1 \\ Q_1^1 \\ H^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G^1 & 0 \\ -0 & G^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q^1 \\ Q^2 \end{Bmatrix} \quad (4-118)$$

如果不是在边界上给定所有的流量函数值,而是一个混合问题,为使所有未知值在等式左边,而已知值在右边,我们就需要重新安排方程组(4-118)。对于具有两个以上子区域的渗流场也可采用类似的处理方法。

二、各向异性介质

在许多渗流问题中,介质的性质不能看作各向同性的,而是各向异性的。下面我们考察图 4-12 所示的正交各向异性介质中,渗流边界单元法的实施。对于非正交的各向异性介质,可以通过坐标轴旋转变换化为正交各向异性问题来解决。在正交各向异性方向上,地下水运动的微分方程为

$$K_1 \frac{\partial^2 H}{\partial y_1^2} + K_2 \frac{\partial^2 H}{\partial y_2^2} = 0 \quad (4-119)$$

式中 K_i 定义为在第 i 个正交各向异性方向上的主渗透系数, y_i 是正交各向异性方向(主渗透系数方向)上的坐标轴。上述方程的基本解为

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{K_1 \cdot K_2}} \ln \frac{1}{r} \quad (4-120)$$

其中 $r = \left[\frac{1}{K_1} (y_1' - y_1)^2 + \frac{1}{K_2} (y_2' - y_2)^2 \right]^{1/2}$

应用格林公式有

$$\iint_D \left(K_1 \frac{\partial^2 H}{\partial y_1^2} + K_2 \frac{\partial^2 H}{\partial y_2^2} \right) dA = \int_{\Gamma} \left(K_1 \frac{\partial H}{\partial y_1} n_{y_1} + K_2 \frac{\partial H}{\partial y_2} n_{y_2} \right) ds \quad (4-121)$$

式中, n_{y_1} 和 n_{y_2} 是表面 Γ 上的外法线 n 的方向余弦(如图 4-12)。在右边积分中包含在圆括号中的项是法向边界流量 q 。同理,可以定义

$$\frac{\partial \omega}{\partial n} = K_1 \frac{\partial \omega}{\partial y_1} n_{y_1} + K_2 \frac{\partial \omega}{\partial y_2} n_{y_2} \quad (4-122)$$

这样,可用各向同性问题中同样的方法解这个问题,即把方程式(4-119)及其边界条件转换成类似于方程(4-25)的边界积分方程。

三、无限域

虽然边界积分方程(4-25)是考虑区域为有界时得到的。但是,以上所提出的所有概念对无限域同样是成立的。

令 $\bar{\Gamma}$ 是半径为 R , 包围表面 Γ , 中心在点 ξ 的圆(如图 4-13)。在由实际表面 Γ 和虚设表面 $\bar{\Gamma}$ 所封闭的有限区域 D 上,类似于方程(4-25)的边界积分方程可以写出

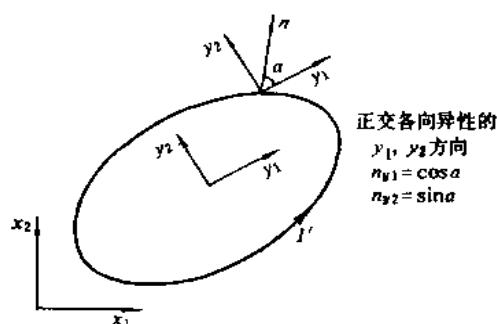


图 4-12 正交各向异性介质

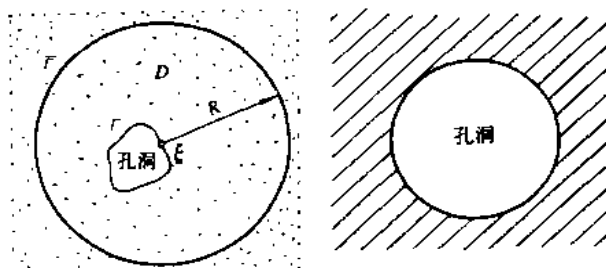


图 4-13 带孔洞的无限域

$$C_i H_i + \int_r H \frac{\partial \omega}{\partial n} ds + \int_r H \frac{\partial \omega}{\partial n} ds = \int_r \omega \frac{\partial H}{\partial n} ds + \int_r \omega \frac{\partial H}{\partial n} ds \quad (4-123)$$

可以证明,当半径 $R \rightarrow \infty$ 时,方程式(4-123)仅对 Γ 上的点成立,即

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_r \left(\omega \frac{\partial H}{\partial n} - H \frac{\partial \omega}{\partial n} \right) ds = 0 \quad (4-124)$$

因此有

$$C_i H_i = \int_r \omega \frac{\partial H}{\partial n} ds - \int_r H \frac{\partial \omega}{\partial n} ds \quad (4-125)$$

显然,对于无限域的内表面 Γ 上的点而得到的边界积分方程和有限区域的方程式(4-25)具有相同的形式,对于无限区域内部点的积分方程也同样成立。在无限含水层中,集水建筑物(如集水渠、集水井)的流量或水头计算,可以用上述方法处理。

四、角点的处理

如果在我们研究的渗流场边界上出现了“角点问题”,这种角点处可能有两个法向导数 $\left(\frac{\partial H}{\partial n} \right)_+$ 和 $\left(\frac{\partial H}{\partial n} \right)_-$,这样角点处的 $\partial H / \partial n$ 不能唯一地确定,属奇异点。通常都选择给定 H ,但会使角点处导数的计算值不十分精确。因此,必须对这种角点进行处理。

角点的处理通常有二种方法。①多重结点法。在角点附近设置两个相互非常靠近的结点,使它们分属于不同的边,把奇异点排除在计算区域之外。②结点多值法。在角点上水头 H 取一个值,而 $\frac{\partial H}{\partial n}$ 当分别由不同的边趋近角点时分别取 $\left(\frac{\partial H}{\partial n} \right)_+$ 和 $\left(\frac{\partial H}{\partial n} \right)_-$ 值,两个值可以不同,只要在计算程序上加以适当的处理,可以给出一个较为满意的结果。

这里要指出的是,角点问题对于常量单元是不存在的。因为常量元的结点在单元的中点,每个单元上的 $\frac{\partial H}{\partial n}$ 为常量,等于结点的值,因此每个单元上 $\frac{\partial H}{\partial n}$ 总是连续的。

第四节 边界单元法程序及算例

一、计算程序

1. 常量单元计算机程序

常量单元计算机程序由 FORTRAN 语言编制,在 IBM-PC 机上调试通过。主程序 BE-MD2.FOR 规定了方程组的最大维数,开设了通道号分别为 5 和 6 的输入输出数据文件 ZFA.DAT、ZFB.DAT,用来存放输入的数据和输出的成果,主程序调用了下列五个子程序。

(1)LINPCT。输入数据用的子程序。除了单元总数和内点总数之外,所有其它输入量都在 LINPCT 子程序中按次序以自由格式形式读入。需要注意的是,在读入单元端点坐标时,外表面和内表面是有所区别的(如图4-14)。对于外表面应按图4-14(a)所示情形逆时针方向顺序读入端点坐标,对于内表面应按图4-14(b)以顺时针方向读入端点坐标。

(2)LFMAT。形成式(4-39)中的总矩阵 B 及其右端向量 F 。首先它调用了另外两个子程序 LINTE 及 LINLO 来计算式(4-38)中的矩阵 G 和 A (放在 H 内),然后重新按排方程组以形成矩阵 B (放在 G 内)以及式(4-39)右端的向量 F (放在 DFI 内)。

LINTE 这个子程序借助于沿着边界单元的数值积分来计算 A (程序中的 H)和 G 两个矩阵的元素,它可以计算出除对角线元素之外的所有元素。变量 $DIST$ 是从所考察的点到边界单元的距离,如图 4-15 所示,如果它的方向跟法线的方向一致,规定为正,否则为负。 G 和 A 各项的计算形式为

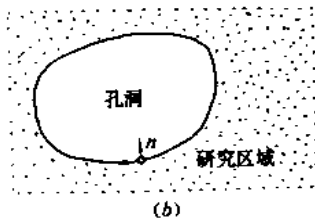
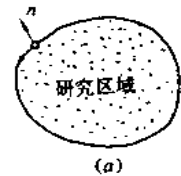


图 4-14 端点编号方向
(a)外表面,(b)内表面

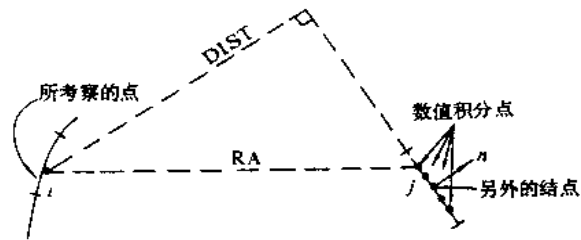


图 4-15 几何上的定义

$$G = \sum_{i=1}^{\phi} \ln \frac{1}{(RA)_i} \cdot P_i \cdot \frac{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}{2}$$

$$A = \sum_{i=1}^{\phi} \frac{d}{dn} \left[\ln \frac{1}{(RA)_i} \right] \cdot P_i \cdot \frac{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}{2}$$

$$= \sum_{i=1}^{\phi} - \frac{1}{(RA)_i} (DIST) \cdot P_i \cdot \frac{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}{2}$$

其中 ϕ 为数值积分点总数, P_i 为积分点 i 的权值。

LINLO 这个子程序用来计算式(4-38)中的矩阵 G 的对角线元素,即

$$G_{ii} = \frac{1}{\pi} |r_i| \cdot \left(\ln \frac{1}{|r_i|} + 1 \right)$$

(3)LSLNPD。用高斯消去法解方程组,计算成果是一个包括未知边界水头及流量的向量,它存放在 DFI 内。

(4)LINTER。重新按排 FI (边界条件向量)和 DFI (未知值向量),使得所有水头值存贮在 FI 内,所有的流量值存贮在 DFI 内。另外,这个子程序还用式(4-40)计算内点的水头值,结果存放在 SOI 中。

(5)LOUTPT。输出计算成果。这个子程序列出了边界结点的坐标、水头及流量值,还列出了所需内点的水头值。

程序中的主要标识符及其含义列于表 4-1 中。

表 4-1

常量元源程序标识符说明

变量类型	标识符	说 明
整 型	N	边界单元数
	L	内点数
	KODE	表示单元结点处边界条件类型的一维数组。KODE=0 指水头已知, KODE=1 指边界流量已知
实 型	X、Y	存放边界单元端点坐标的一维数组
	XM、YM	存放边界单元结点坐标的一维数组
	G	存放式(4-38)中 G 矩阵的二维数组
	H	存放式(4-38)中 A 矩阵的二维数组
	FI	边界条件的给定值, FI(J) 存放 J 结点上给定的边界值。如果 KODE=0 存放给定的水头值, 如果 KODE=1 存放给定的流量值
	DFI	式(4-39)中等号右边的向量, 在求解后, 它存放边界节点的未知值。
	CX、CY	欲求水头值的内点坐标
	SOL	内点水头值组成的向量

计算机源程序如下。

```

MAIN PROGRAM,BEMD2.FOR(FORTRAN)
DIMENSION GL(12,12)
COMMON N,L,CX(40),CY(40),X(200),Y(200)
COMMON/COMNL/FI(125),DFI(125),KODE(125)/COMNG/G(12,12)
OPEN(5,FILE='ZFA,DAT')
OPEN(6,FILE='ZFB,DAT')
READ(5,*)N,L
WRITE(*,20)N,L
20  FORMAT(2X,2HN=,I4,7X,2HL=,I4)
CALL LINPUT
CALL IFMAT
DO 200 I=1,N
DO 200 J=1,N
200 GL(I,J)=G(I,J)
CALL LSLNPD(GL,DFI,D,N)
CALL LLINTER(SOL)
CALL LOUTPT(SOL,D)
STOP
END
SUBROUTINE LINPUT

```

```

COMMON N, L, OX(40), CY(40), X(200), Y(200)
COMMON/COMNL/FI(125), DFI(125), KODE(125)
WRITE(*, 300)
300  FORMAT(/2X, 4HDATA, 10X, 2HCX, 18X, 2HCY)
DO 40 I=1, L
READ(5, *) CX(I), CY(I)
40  WRITE(*, 450) I, CX(I), CY(I)
450  FORMAT(5X, I3, 2(5X, E14.7))
WRITE(*, 500)
500  FORMAT(/2X, 5HPOINT, 10X, 1HX, 18X, 1HY)
DO 20 I=1, N
FEAD(5, *) X(I), Y(I)
20  WRITE(*, 700) I, X(I), Y(I)
700  FORMAT(2X, I3, 2(5X, E14.7))
DO 30 I=1, N
READ(5, *) KODE(I), FI(I)
30  WRITE(*, 950) I, KODE(I), FI(I)
950  FORMAT(5X, I3, 8X, I1, 8X, E14.7)
RETURN
END
SUBROUTINE IFMAT
COMMON N, L, CX(40), CY(40), X(200), Y(200)
COMMON/COMNL/FI(125), DFI(125), KODE(125)
COMMON/COMNG/G(12,12)/COMNH/H(12,12)
COMMON/COMN2/XM(125), YM(125)
DIMENSION DDC(125)
X(N+1)=X(1)
Y(N+1)=Y(1)
DO 10 I=1, N
XM(I)=(X(I)+X(I+1))/2.0
10  YM(I)=(Y(I)+Y(I+1))/2.0
DO 30 I=1, N
DO 30 J=1, N
IF(I-J) 20, 25, 20
20  CALL INTE(XM(I), YM(I), X(J), Y(J), X(J+1), Y(J+1), H(I,J), G(I,J))
GOTO 30
25  CALL INLO(X(J), Y(J), X(J+1), Y(J+1), G(I,J))

```

```

      H(I,J)=3.1415926
30    CONTINUE
      DO 100 I=1,N
      DDC(I)=0.0
      DO 100 J=1,N
100   DDC(I)=DDC(I)+H(I,J)
      WRITE(*,200)(DDC(I),I=1,N)
200   FORMAT(2X,'==DDC(N)=='/6(1X,F10.4))
      WRITE(*,300)((G(I,J),J=1,N),I=1,N)
300   FORMAT(2X,'==G(N,N)=='/6(1X,F10.4))
      DO 55 J=1,N
      IF(KODE(J))55,55,40
40    DO 50 I=1,N
      CH=G(I,J)
      G(I,J)=-H(I,J)
      H(I,J)=-CH
50    CONTINUE
55    CONTINUE
      DO 60 I=1,N
      DFI(I)=0.0
      DO 60 J=1,N
      DFI(I)=DFI(I)+H(I,J)*FI(J)
60    CONTINUE
      FETURN
      END
      SUBROUTINE INTE(XP,YP,X1,Y1,X2,Y2,H,G)
      DIMENSION XCO(4),YCO(4),GI(4),OME(4)
      GI(1)=0.86113631
      GI(2)=-GI(1)
      GI(3)=0.33998104
      GI(4)=-GI(3)
      OME(1)=0.34785485
      OME(2)=OME(1)
      OME(3)=0.65214515
      OME(4)=OME(3)
      AX=(X2-X1)/2.
      BX=(X2+X1)/2.

```

```

      AY=(Y2-Y1)/2.
      BY=(Y2+Y1)/2.
      IF(AX)10,20,10
10    TA=AY/AX
      DIST=ABS(TA * XP-YP+YL-AT * XL)/SQRT(TA * * 2+1.)
      GOTO 30
20    DIST=ABS(XP-XL)
30    SIG=(XL-XP) * (Y2-YP)-(X2-XP) * (Y1-YP)
      IF(SIG)31,32,32
31    DIST=-DIST
32    G=0.
      H=0.
      DO 40 I=1,4
      XCO(I)=AX * GI(I)+BX
      YCO(I)=AY * GI(I)+BY
      RA=SQRT((XP-XCO(I)) * * 2+(YP-YCO(I)) * * 2)
      G=G+ALOG(1./RA) * OME(I) * SQRT(AX * * 2+AY * * 2)
40    H=H-(DIST * OME(I) * SQRT(AX * * 2+AY * * 2)/(RA * * 2))
      RETURN
      END
      SUBROUTINE INLO(X1,Y1,X2,Y2,G)
      AX=(X2-X1)/2.
      AY=(Y2-Y1)/2.
      SQ=SQRT(AX * * 2+AY * * 2)
      G=2.0 * SQ * (ALOG(1.0/SQ)+1.0)
      RETURN
      END
      SUBROUTINE ILSLNP(A,B,D,NE)
      DIMENSION A(12,12),B(125)
      NL=NE-1
      DO 100 K=1,NL
      KL=K+1
      C=A(K,K)
      IF(ABS(C)-0.000001)10,10,30
10    DO 70 J=K1,NE
      IF(ABS(A(J,K))-0.000001)70,70,50
50    DO 60 L=K,NE

```

```

      C=A(K,L)
      A(K,L)=A(J,L)
60    A(J,L)=C
      C=B(K)
      B(K)=B(J)
      B(J)=C
      C=A(K,K)
      GOTO 30
70    CONTINUE
      GOTO 80
30    C=A(K,K)
      DO 40 J=K1,NE
40    A (K,J)=A(K,J)/C
      B(K)=B(K)/C
      DO 101 I=K1,NE
      C=A(I,K)
      DO 90 J=K1,NE
90    A(I,J)=A(I,J)-C * A(K,J)
101   B(I)=B(I)-C * B(K)
100   CONTINUE
      WRITE( *,20)K
20    FORMAT(/2X,23H * * * * * SINGULARITY IN ROW,I5)
      IF(ABS(A(NE,NE))-0.000001)80,80,110
80    D=0,
      GOTO 300
110   B(NE)=B(NE)/A(NE,NE)
      DO 200 L=1,NL
      K=NE-1
      K1=K+1
      DO 200 J=K1,NE
200   B(K)=B(K)-A(K,J) * B(J)
      D=1.
      DO 250 I=1,N
250   D=D * A(I,I)
300   RETURN
      END
      SUBROUTINE LINTER(SOL)

```

```

COMMON N,L,CX(40),CY(40),X(200),Y(200)
COMMON/COMNL/FI(125),DFI(125),KODE(125)
DIMENSION SOL(40)
DO 20 I=1,N
  IF(KODE(I))20,20,10
10  CH=FI(I)
    FI(I)=DFI(I)
    DFI(I)=CH
20  CONTINUE
    DO 40 K=1,L
      SOL(K)=0.0
      DO 30 J=1,N
        CALL INTE(CX(K),CY(K),X(J),Y(J),X(J+1),Y(J+1),A,B)
30    SOL(K)=SOL(K)+DFI(J)*B-FI(J)*A
40    SOL(K)=SOL(K)/(2.0*3.1415926)
      RETURN
    END
  SUBROUTINE LOUPT(SOL,D)
    COMMON N, L,CX(40),XY(40),X(200),Y(200)
    COMMON/COMN1/FI(125),DFI(125),KODE(125)
    COMMON/COMN2/XM(125),YM(125)
    DIMENSION SOL(40)
    WRITE(6,100)
100  FORMAT(/2X,10H* * * * * ,5X,1HO,5X,7H* * * * *
      * * * //1X,7HRESULTS
      * //2X,17HBOUNDARY ELEMENTS//5X,5HNODES,8X,2HXM,14X,
      * 2HYM,
      * 10X,9HPOTENTIAL,8X,10HDERIVATIVE)
    DO 10 I=1,N
10    WRITE(6,200)I,XM(I),YM(I),FI(I),DFI(I)
200  FORMAT(5X,I3,2(2X,E14.7),2(3X,E14.7))
    WRITE(6,300)
300  FORMAT(/2X,15HINTERNAL POINTS//5X,8X,2HCX,14X,
      * 2HCY,18X,9HPOTENTIAL)
    DO 20 K=1,L
20    WRITE(6,400)CX(K),CY(K),SOL(K)
400  FORMAT(3(5X,E14.7))

```

```

WRITE(6,777)D
777  FORMAT(//2X,2HD=,E14.7)
WRITE(6,800)
800  FORMAT(//2X,20H***** STOP ***** )
RETURN
END

```

为了说明上述程序的应用,试考察如图 4-16 所示的渗流场。边界单元数为 12,并有 5 个内点需计算水头值。

输入的数据文件 ZFA·DAT 格式如下。

12,5

2,2

2,4

4,2

4,4

3,3

0,0

2,0

4,0

6,0

6,2

6,4

6,6

4,6

2,6

0,6

0,4

0,2

1,0

1,0

1,0

0,0

0,0

0,0

1,0

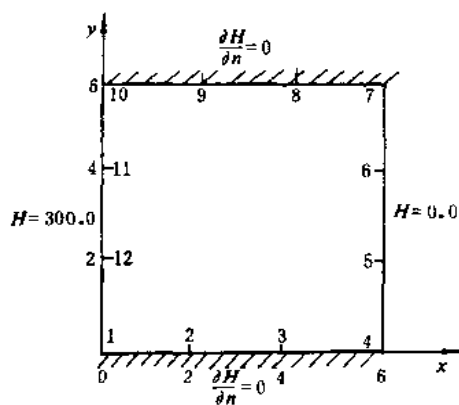


图 4-16 研究的渗流场

1,0
1,0
0,300
0,300
0,300

输出的成果文件 ZFB.DAT 格式如下。

n= 12 L=5

boundary elements

nodes	xm	ym	potential	derivative
1	• 1000000E+01	• 0000000E+00	• 2522493E+03	• 0000000E+00
2	• 3000000E+01	• 0000000E+00	• 1500188E+03	• 0000000E+00
3	• 5000000E+01	• 0000000E+00	• 4775042E+02	• 0000000E+00
4	• 6000000E+01	• 1000000E+01	• 0000000E+00	— • 5296168E+02
5	• 6000000E+01	• 3000000E+01	• 0000000E+00	— • 4877110E+02
6	• 6000000E+01	• 5000000E+01	• 0000000E+00	— • 5296152E+02
7	• 5000000E+01	• 6000000E+01	• 4775037E+02	• 0000000E+00
8	• 3000000E+01	• 6000000E+01	• 1500186E+03	• 0000000E+00
9	• 1000000E+01	• 6000000E+01	• 2522491E+03	• 0000000E+00
10	• 0000000E+00	• 5000000E+01	• 3000000E+03	• 5296941E+02
11	• 0000000E+00	• 3000000E+01	• 3000000E+03	• 4873692E+02
12	• 0000000E+00	• 1000000E+01	• 3000000E+03	• 5296948E+02

internal points

cx	cy	potential
• 2000000E+01	• 2000000E+01	• 2002799E+03
• 2000000E+01	• 4000000E+01	• 2002799E+03
• 4000000E+01	• 2000000E+01	• 9973998E+02
• 4000000E+01	• 4000000E+01	• 9973998E+02
• 3000000E+01	• 3000000E+01	• 1500094E+03

d= .1000000E+01

2. 线性单元的计算机程序

线性单元的计算机程序与常量单元的程序相比,程序设计的步骤基本上是一样的,而且 LINPUT 和 LSLNPD 这两个子程序和常量单元也完全相同。由于在线性单元中,结点是单元的交点,就无需存放单元中点坐标 XM、YM 两个数组。因此,在子程序 LOUTPT 中,结点坐标不是打印 XM 和 YM 数组,而是打印 X 和 Y 数组,其他部分无需变动。其余的子程序都要作些修改,修改后的几个子程序如下。

SUBROUTINE LFMAT

```

COMMON N,L,CX(40),CY(40),X(200),Y(200)
COMMON/COMNL/FI(125),DFI(125),KODE(125)
COMMON/COMNG/G/(12,12)/COMNH/H(12,12)
DIMENSION DDC(125)
DO 10 I=1,N
DO 10 J=1,N
G(I,J)=0.
10 H(I,J)=0.
X(N+1)=X(1)
Y(N+1)=Y(1)
DO 110 I=1,N
NF=I+1
NS=I+N-2
DO 50 JJ=NF,NS
IF(JJ-N)30,30,20
20 J=JJ-N
GOTO 40
30 J=JJ
40 CALL LINTE(X(I),Y(I),X(J),Y(J),X(J+1),Y(J+1),
* A1, A2,B1,B2)
IF(J-N)42,43,43
42 H(I,J+1)=H(I,J+1)+A2
G(I,J+1)=G(I,J+1)+B2
GOTO 44
43 H(I,1)=H(I,1)+A2
G(I,1)=G(I,1)+B2
44 H(I,J)=H(I,J)+A1
G(I,J)=G(I,J)+B1
50 H(I,I)=H(I,I)-A1-A2
NF=I+N-1
NS=I+N
DO 95 JJ=NF,NS
IF(JJ-N)70,70,60
60 J=JJ-N
GOTO 80
70 J=JJ
80 CALL LINLO(X(J),Y(J),X(J+1),Y(J+1),B1,B2)

```

```

      IF(JJ-NF)82,82,83
82    CH=B1
      B1=B2
      B2=CH
83    IF(J-N)85,90,90
85    G(I,J+1)=G(I,J+1)+B2
      GOTO 95
90    G(I,1)=G(I,1)+B2
95    G(I,J)=G(I,J)+B1
110   CONTINUE
      DO 150 J=1,N
      IF(KODE(J))150,150,140
140   DO 150 I=1,N
      CH=G(I,J)
      G(I,J)=-H(I,J)
      H(I,J)=-CH
150   CONTINUE
      DO 160 I=1,N
      DFI(I)=0.
      DO 160 J=1,N
      DFI(I)=DFI(I)+H(I,J)*FI(J)
160   CONTINUE
      RETURN
      END

      SUBROUTINE LINTE(XP,YP,X1,Y1,X2,Y2,A1,A2,
*  B1,B2)
      DIMENSION XCO(4),YCO(4),GI(4),OME(4)
      GI(1)=0.86113631
      GI(2)=-GI(1)
      GI(3)=0.33998104
      GI(4)=-GI(3)
      OME(1)=0.34785485
      OME(2)=OME(1)
      OME(3)=0.65214515
      OME(4)=OME(3)
      AX=(X2-X1)/2.

```

```

        BX=(X2+X1)/2.
        AY=(Y2-Y1)/2.
        BY=(Y2+Y1)/2.
        IF(AX)10,20,10
10      TA=AY/AX
        DIST=ABS((TA * XP-YP+Y1-YA * X1)/SQRT(TA * * 2+1))
        GOTO 30
20      DIST=ABS(XP-X1)
30      SIG=(X1-XP) * (Y2-YP)-(X2-XP) * (Y1-YP)
        IF(SIG)31,32,32
31      DIST=-DIST
32      A1=0.
        A2=0.
        B1=0.
        B2=0.
        DO 40 I=1,4
        XCO(I)=AX * GI(I)+BX
        YCO(I)=AY * GI(I)+BY
        RA=SQRT((XP-XCO(I)) * * 2+(YP-YCO(I)) * * 2)
        H=DIST * OME(I) * SQRT(AX * * 2+AY * * 2)/RA * * 2
        G=ALOG(1/RA) * OME(I) * SQRT(AX * * 2+AY * * 2)
        A1=A1+(CI(I)-1) * H/2.
        A2=A2-(GI(I)+1) * H/2.
        B1=B1-(GI(I)-1) * G/2.
        B2=B2+(GI(I)+1) * G/2.
40      CONTINUE
        RETURN
        END

        SUBROUTINE LINLO (X1,Y1,X2,Y2,B1,B2)
        SEP=SQRT((X2-X1) * * 2+(Y2-Y1) * * 2)
        B1=SEP * (1.5-ALOG(SEP))/2.
        B2=SEP * (0.5-ALOG(SEP))/2.
        RETURN
        END

        SUBROUTINE LINTER(SOL)

```

```

COMMON N,L,CX(40),CY(40),X(200),Y(200)
COMMON/COMNL/FI(125),DFI(125),KODE(125)
DIMENSION SOL(40)
DO 20 I=1,N
IF(KODE(1))20,20,10
10  CH=FI(I)
    FI(I)=DFI(I)
    DFI(I)=CH
20  CONTINUE
    DO 40 K=1,L
        SOL(K)=0.
        DO 30 J=1,N
            CALL LINTE(CX(K),CY(K),X(J),Y(J),X(J+1),
* Y(J+1),A1,A2,B1,B2)
            IF(J=N)32,33,33
32  SOL(K)=SOL(K)+DFI(J)*B1+DFI(J+1)*B2-
* FI(J)*A1-FI(J+1)*A2
            GOTO 30
33  SOL(K)=SOL(K)+DFI(J)*B1+DFI(J)*B2-
* FI(J)*A1-FI(J)*A2
30  CONTINUE
40  SOL(K)=SOL(K)/(2.0*3.1415926)
    RETURN
END

```

二、算例

【例 1】 为了进一步了解不同类型的单元及其对计算成果的影响,现在以图 4-17 所示的渗流问题为例,分别采用常量单元和线性单元求解。

采用常量单元计算的成果如图 4-17(a)。显然,在边界上以及区域内,常量单元的解与解析解是基本一致的。

采用线性单元计算的成果如图 4-17(b)。从图中看出,未经角点处理的线性单元的解明显偏离解析解,有较大的误差。尤其是在角点处,误差很大。因此,必须对角点进行处理。处理以后,线性单元的计算成果如图 4-17(c)。显然,这一计算成果有较高的精度。

【例 2】 计算如图 4-18 所示的坝基渗流情况,坝体认为是不透水的。据勘测,坝下有两层水平产状的透水岩体,且透水性各异,具有明显的方向性。下层岩层厚 40m,两个主渗透系数方向分别为水平向和垂直向,大小为 $k_1=0.25 \times 10^{-5} \text{m/s}$ 和 $k_2=0.075 \text{m/s}$;上层岩层厚 50m,主渗透系数方向和水平线成 45° 角,大小为 $k_1=4.0 \times 10^{-5} \text{m/s}$ 和 $k_2=1.0 \times 10^{-5} \text{m/s}$ 。坝上、下游的水位标高分别为 110m 和 95m。

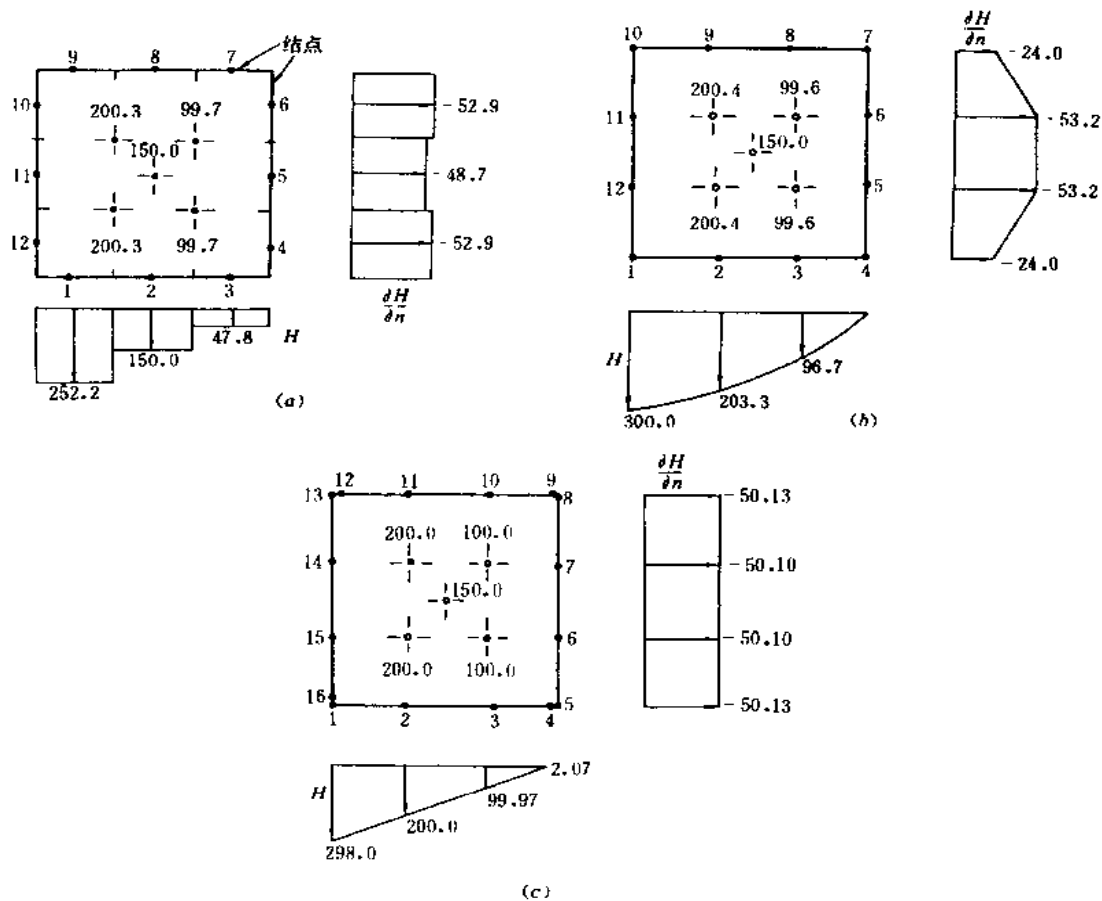


图 4-17 不同类型单元的解

(a)常量单元;(b)线性单元;(c)角点处理后的线性单元

将研究区域划分为二个子区域,整个内外边界划分了 74 个常量单元,计算得到的坝底压力分布和坝基等势线如图 4-18 所示。

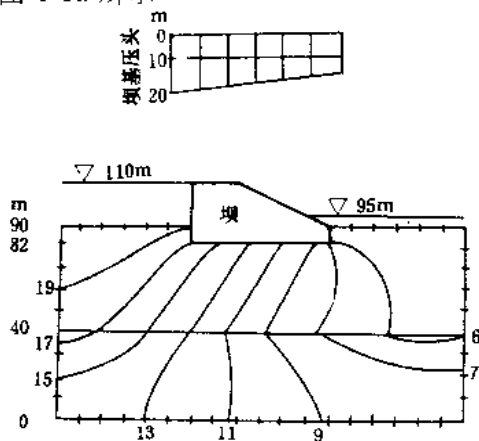


图 4-18 坝基有两个正交各向异性岩层的渗流

第五章 有限分析法及其在水文地质计算中的应用

有限分析法是 80 年代才发展起来的一种较新的数值计算方法。前面已经叙述了,有限差分法是将微分方程进行差分近似来得到离散化的代数方程组;有限单元法是通过小单元上用低阶多项式作为近似解,然后使构成的近似解或形状函数满足微分方程的变分形式或加权积分形式来达到离散化的目的。和有限差分法与有限单元法一样,有限分析法也是一种区域的离散方法,然而,有限分析法是力图通过某种解析途径进行离散化,得到代数方程组,即先把总体区域划分为许多小区域,在这些小区域上求满足某种近似边界条件下的局部解析解,然后从局部解析解建立起离散结点上函数之间的代数关系式。这样的求解方法实质上是把数学物理方程中的解析方法结合到偏微分方程的数值解中去。因此,有限分析法又叫做半解析的方法。一般说来,对于椭圆型方程和抛物线型方程采用有限分析法常常是很有效的。因此,在水文地质数值计算中,有限分析法有一定的发展前景。

第一节 有限分析法的基本原理

为了便于理解,首先考察如图 5-1 所示的矩形区域,假定地下水运动满足泊松方程

$$\nabla^2 H + R = 0 \quad (5-1)$$

把区域划分为若干正交网格,相邻的四个网格就构成一个单元(如图 5-1(a))。任取其中一个单元,其中心结点 p 被单元的其余八个结点所包围。为了免去网格线序号 i, j 的麻烦,而以东(E)、西(W)、南(S)、北(N)、中(C)来标记,于是这八个点记为 NE 、 EC 、 SE 、 SC 、 SW 、 WC 、 NW 、 NC (如图 5-1(b))。结点间的距离分别用 h 和 l 来表示。

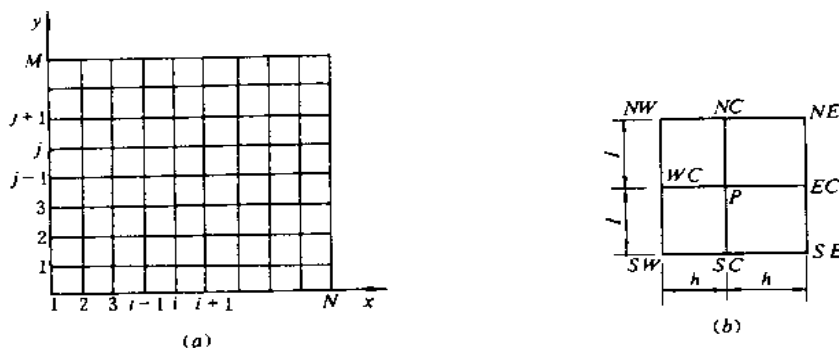


图 5-1 研究区域及剖分形式

(a)区域部分;(b)典型单元

一、一个单元的解析解

区域 D 划分成简单的矩形网格后,只要每个矩形单元上的边界条件给得适当,就容易求得这些矩形单元上的局部解析解,然后通过局部解析解的汇集,便可以得到总体上的近似解。为此,对所取的某个单元,作两个假设。①局部线性化;②边界近似。根据假设①,可将区域内地下水运动的偏微分方程在考察单元上变成线性偏微分方程。由假设②,单元四条边的边界条件可以写成函数形式(如图 5-1(b)) $f_N(x)$ 、 $f_S(x)$ 、 $f_E(y)$ 、 $f_W(y)$,上述边界函数的近似表达式可以为(二次多项式)

$$f_E(y) = a_0 + a_1y + a_2y^2 \quad (5-2)$$

或者(线性—指数型函数)

$$f_E(y) = a_0 + a_1y + a_2e^{a_3y} \quad (5-3)$$

其中系数 a_0 、 a_1 、 a_2 由东边界三个结点 NE 、 EC 、 SE 的结点水头 H 值确定。其余三边的边界近似方法类同。

线性化后的偏微分方程,用分离变量法求得解析解,其形式为

$$H(x, y) = f(f_E(y), f_W(y), f_S(x), f_N(x), x, y, h, l, R) \quad (5-4)$$

另外,边界函数 f_N, f_S, f_E, f_W , 可以近似地用边界上的结点值来表示,如

$$f_E(y) = f_E(H_{NE}, H_{EC}, H_{SE}, y) \quad (5-5)$$

其中 H_{NE}, H_{EC}, H_{SE} 表示东边三个结点上的水头 H 值。将所有类似于式(5-5)的边界条件代入式(5-4),可得局部解析解为

$$H(x, y) = f(H_{EC}, H_{WC}, H_{NC}, H_{SC}, H_{NE}, H_{NW}, H_{SW}, H_{SE}, x, y, h, l, R) \quad (5-6)$$

二、代数方程的建立

式(5-6)是在一个单元内满足的解,若以单元内中心结点 $p(i, j)$ 来表示(如图 5-2),则

$$\begin{aligned} H_p = & C_{EC}H_{EC} + C_{NE}H_{NE} \\ & + C_{SE}H_{SE} + C_{NC}H_{NC} \\ & + C_{NW}H_{NW} + C_{WC}H_{WC} \\ & + C_{SW}H_{SW} + C_{SC}H_{SC} \\ & + C_p R_p \end{aligned} \quad (5-7)$$

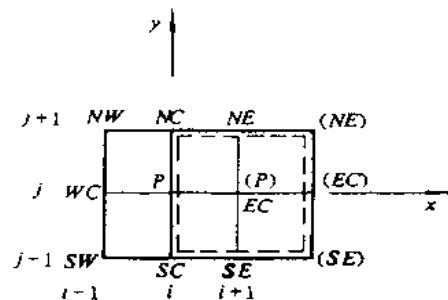


图 5-2 新单元将前一单元覆盖一半

若以离散点的坐标来表示式(5-7),有

$$\begin{aligned} H_{i,j} = & C_{i+1,j}H_{i+1,j} + C_{i+1,j+1}H_{i+1,j+1} + C_{i+1,j-1}H_{i+1,j-1} \\ & + \dots + C_{i,j-1}H_{i,j-1} + C_{p,j}R_p \end{aligned} \quad (5-8)$$

为了对下一个结点 EC 建立方程(见图 5-2),把单元向东移动半个单元(图 5-2 中的虚

线所围的单元),这个新的单元覆盖了前一单元的一半。

一般而言,所有内部网格中的各个未知结点 $p(i, j)$ 皆可导出方程式(5-8)。解代数方程组(5-8)就能给出指定问题的有限分析解。

第二节 渗流问题的有限分析法

为了求得每个单元上的解析解,有限分析法要求单元的网格必须是矩形,对于不规则的求解区域是无法满足这一剖分要求的。为此,可以采用边界拟合坐标变换,将不规则的区域较换成矩形区域,然后再用有限分析法求解。另外,采用局部坐标变换的方法,首先将总体坐标下的任意四边形单元转换成局部坐标下的正方形网格,然后同样可以实施有限分析法求解。两种方法的求解结果是完全一样的。下面主要讨论求解稳定与非稳定流问题的局部坐标有限分析法。

一、稳定流问题的有限分析法

在不规则区域 D 上,定解问题为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial H}{\partial y} \right) &= 0 & (\text{在 } D \text{ 上}) \\ H &= H_0 & (\text{在 } \Gamma_1 \text{ 上}) \\ K_x \frac{\partial H}{\partial x} \cos(n, x) + K_y \frac{\partial H}{\partial y} \cos(n, y) &= q_0 & (\text{在 } \Gamma_2 \text{ 上}) \end{aligned} \right\} \quad (5-9)$$

其中 K_x, K_y —— x 轴方向和 y 轴方向上的主渗透系数;

Γ_1, Γ_2 ——研究区域 D 的第一、二类边界;

H_0, q_0 ——已知的水头和流量;

(n, x) ——边界外法线方向与 x 轴之间的夹角;

(n, y) ——边界外法线方向与 y 轴之间的夹角。

1. 局部坐标变换

为了实现总体坐标 $x-y$ 平面上的任意四边形单元 e 变换到 $\xi-\eta$ 局部坐标平面的正方形单元 E (如图 5-3),并保持所有结点一一对应,取如下的局部坐标变换

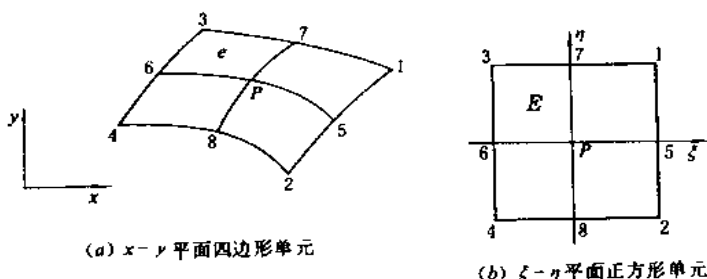


图 5-3 局部坐标变换

$$\left. \begin{aligned} x &= \sum_{k=1}^9 N_k(\xi, \eta) x_k \\ y &= \sum_{k=1}^9 N_k(\xi, \eta) y_k \end{aligned} \right\} \quad (5-10)$$

其中, x_k, y_k 为结点 k 的坐标, $N_k(\xi, \eta)$ 为形状函数, 其表达式为

$$\left. \begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} \xi \eta (\xi + 1) (\eta + 1) \\ N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} \xi \eta (\xi + 1) (\eta - 1) \\ N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} \xi \eta (\xi - 1) (\eta + 1) \\ N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} \xi \eta (\xi - 1) (\eta - 1) \\ N_5(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} \xi (\xi + 1) (1 - \eta^2) \\ N_6(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} \xi (\xi - 1) (1 - \eta^2) \\ N_7(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} \eta (1 - \xi^2) (\eta + 1) \\ N_8(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} \eta (1 - \xi^2) (\eta - 1) \\ N_9(\xi, \eta) &= (1 - \xi^2) (1 - \eta^2) \end{aligned} \right\} \quad (5-11)$$

式(5-10)的右端实际上是一个关于 ξ, η 的双二次式。因此, 在中心点 $p(\xi=0, \eta=0)$ 处有

$$\left. \begin{aligned} x_\xi &= \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{1}{2} (x_5 - x_6), x_\eta = \frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{1}{2} (x_7 - x_8) \\ y_\xi &= \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{1}{2} (y_5 - y_6), y_\eta = \frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{1}{2} (y_7 - y_8) \\ x_{\xi\xi} &= \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} = x_5 - 2x_6 + x_6, x_{\eta\eta} = \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} = x_7 - 2x_8 + x_8 \\ y_{\xi\xi} &= \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} = y_5 - 2y_6 + y_6, y_{\eta\eta} = \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} = y_7 - 2y_8 + y_8 \\ x_{\xi\eta} &= \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{4} (x_1 - x_2 - x_3 + x_4), y_{\xi\eta} = \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{4} (y_1 - y_2 - y_3 + y_4) \end{aligned} \right\} \quad (5-12)$$

再由求导法则, 不难推得

$$\left. \begin{aligned} H_x &= \frac{\partial H}{\partial x} = (y_\eta H_\xi - y_\xi H_\eta) / J \\ H_y &= \frac{\partial H}{\partial y} = (x_\xi H_\eta - x_\eta H_\xi) / J \end{aligned} \right\} \quad (5-13)$$

进而有

$$\left. \begin{aligned} H_{xx} &= \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = (y_\eta^2 H_{\xi\xi} - 2y_\xi y_\eta H_{\xi\eta} + y_\xi^2 H_{\eta\eta})/J^2 \\ &\quad + [(y_{\xi\xi} y_\eta^2 - 2y_{\xi\eta} y_\xi y_\eta + y_{\eta\eta} y_\xi^2) \cdot (x_\eta H_\xi - x_\xi H_\eta) \\ &\quad + (x_{\xi\xi} y_\eta^2 - 2x_{\xi\eta} y_\xi y_\eta + x_{\eta\eta} y_\xi^2) (y_\xi H_\eta - y_\eta H_\xi)]/J^3 \\ H_{yy} &= \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = (x_\eta^2 H_{\xi\xi} - 2x_\xi x_\eta H_{\xi\eta} + x_\xi^2 H_{\eta\eta})/J^2 \\ &\quad + [(y_{\xi\xi} x_\eta^2 - 2y_{\xi\eta} x_\xi x_\eta + y_{\eta\eta} x_\xi^2) \cdot (x_\eta H_\xi - x_\xi H_\eta) \\ &\quad + (x_{\xi\xi} \cdot x_\eta^2 - 2x_{\xi\eta} x_\xi x_\eta + x_{\eta\eta} x_\xi^2) \cdot (y_\xi H_\eta + y_\eta H_\xi)]/J^3 \\ J &= x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \end{aligned} \right\} \quad (5-14)$$

将式(5-14)代入方程式(5-9),并注意到在单元上, K_x 、 K_y 可近似看作常量,因而可以从式(5-9)的微分中取出。故有

$$\alpha_1 H_{\xi\xi} - 2\alpha_2 H_{\xi\eta} + \alpha_3 H_{\eta\eta} + \beta_1 H_\xi + \beta_2 H_\eta = 0 \text{ (在 } E \text{ 上)} \quad (5-15)$$

其中

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (K_x y_\eta^2 + K_y x_\eta^2)/J^2 \\ \alpha_2 &= (K_x y_\xi y_\eta + K_y x_\xi x_\eta)/J^2 \\ \alpha_3 &= (K_x y_\xi^2 + K_y x_\xi^2)/J^2 \\ \beta_1 &= [(K_y x_\eta^2 + K_x y_\eta^2)(x_\eta y_{\xi\xi} - y_\eta x_{\xi\xi}) \\ &\quad - 2(K_y x_\xi x_\eta + K_x y_\xi y_\eta)(x_\eta y_{\xi\eta} - y_\eta x_{\xi\eta}) \\ &\quad + (K_y x_\xi^2 + K_x y_\xi^2)(x_\eta y_{\eta\eta} - y_\eta x_{\eta\eta})]/J^3 \\ \beta_2 &= -[(K_y x_\eta^2 + K_x y_\eta^2)(x_\xi y_{\xi\xi} - y_\xi x_{\xi\xi}) \\ &\quad - 2(K_y x_\xi x_\eta + K_x y_\xi y_\eta)(x_\xi y_{\xi\eta} - y_\xi x_{\xi\eta}) \\ &\quad + (K_y x_\xi^2 + K_x y_\xi^2)(x_\xi y_{\eta\eta} - y_\xi x_{\eta\eta})]/J^3 \end{aligned}$$

只要利用式(5-12)就可以求得在中心点 p 处的 α_1 、 α_2 、 α_3 、 β_1 和 β_2 值,记为 $\alpha_{1,p}$ 、 $\alpha_{2,p}$ 、 $\alpha_{3,p}$ 、 $\beta_{1,p}$ 和 $\beta_{2,p}$ 。

2. 有限分析数值解

为了建立微分方程式(5-9)的有限分析格式,假定单元 e 足够小,于是利用中心点的 $\alpha_{1,p}$ 、 $\alpha_{2,p}$ 、 $\alpha_{3,p}$ 、 $\beta_{1,p}$ 和 $\beta_{2,p}$ 值将变系数方程(5-15)常系数化,并且把 $H_{\xi\eta}$ 进行差分近似,从而在单元 E 上得方程

$$H_{\xi\xi} + C_p H_{\eta\eta} - 2A_p H_\xi - 2B_p C_p H_\eta = -f_p \text{ (在 } E \text{ 上)} \quad (5-16)$$

其中 $A_p = -\frac{\beta_{1,p}}{2\alpha_{1,p}}$, $B_p = -\frac{\beta_{2,p}}{2\alpha_{2,p}}$, $C_p = \frac{\alpha_{3,p}}{\alpha_{1,p}}$ 均为常数,而

$$f_p = -\frac{\alpha_{2,p}}{2\alpha_{1,p}}(H_1 - H_2 - H_3 + H_4)$$

含有待定的函数值。

为了把非齐次方程(5-16)齐次化,引入变换

$$H(\xi, \eta) = \dot{H}(\xi, \eta) + \frac{f_p \cdot (A_p \xi + B_p \eta)}{2(A_p^2 + B_p^2 \cdot C_p)} \quad (5-17)$$

将式(5-17)代入式(5-16),得

$$\hat{H}_{\xi\xi} + C_p \hat{H}_{\eta\eta} - 2A_p \hat{H}_{\xi} - 2B_p C_p \hat{H}_p = 0 \quad (\text{在 } E \text{ 上}) \quad (5-18)$$

为了能在单元 E 上求得方程(5-18)的解析解,可以利用单元边界结点处的待定函数值构造四条边上近似的边界条件。比如,北边的边界条件可取如下的分段指数常数型函数

$$\hat{H}(\xi, 1) = \begin{cases} \frac{e^{2A_p \xi} \hat{H}_7 - \hat{H}_1}{e^{2A_p} - 1} + \frac{\hat{H}_1 - \hat{H}_7}{e^{2A_p} - 1} e^{2A_p \cdot \xi} & \xi \in [0, 1] \\ \frac{e^{2A_p \xi} \hat{H}_3 - \hat{H}_7}{e^{2A_p} - 1} + \frac{e^{2A_p}(\hat{H}_7 - \hat{H}_3)}{e^{2A_p} - 1} \cdot e^{2A_p \xi} & \xi \in [-1, 0] \end{cases} \quad (5-19)$$

类似地可以构造出南边、东边和西边的边界条件。

利用分离变量法,求得方程(5-18)的解析解

$$\begin{aligned} \hat{H}_{(\xi, \eta)} = e^{A_p \xi - B_p \eta} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \{ [D_{1n} \text{sh} \mu_n(\eta+1) + D_{2n} \text{sh} \mu_n(\eta-1)] \sin \lambda_n(\xi+1) \\ + [D_{3n} \text{sh} \mu'_n(\xi+1) + D_{4n} \text{sh} \mu'_n(\xi-1)] \cdot \sin \lambda_n(\eta+1) \} \quad (\text{在 } E \text{ 上}) \end{aligned} \quad (5-20)$$

$$\text{其中 } \lambda_n = \frac{(2n-1)}{2} \pi$$

$$\mu_n = \sqrt{(A_p^2 + B_p^2 C_p + \lambda_n^2) / C_p}$$

$$\mu'_n = \sqrt{A_p^2 + B_p^2 C_p + \lambda_n^2 C_p}$$

而 Fourier 系数 $D_{1n}, D_{2n}, D_{3n}, D_{4n}$ 可由形如(5-19)的四个边界条件求得,不过内含有单元边界结点待定的函数值。

现在,我们只要在单元中心点 p 处($\xi=0, \eta=0$)计算式(5-20),再利用变换式(5-17),便得到离散的代数方程

$$H_p = \sum_{i=1}^8 C_i H_i \quad (5-21)$$

称之为有限分析格式,其中 C_i 称为有限分析系数,确切表示为

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= e^{-A_p - B_p} \cdot G - \frac{\alpha_{2,p}}{2\alpha_{1,p}} \cdot C_f \\ C_2 &= e^{-A_p + B_p} \cdot G + \frac{\alpha_{2,p}}{2 \cdot \alpha_{1,p}} \cdot C_f \\ C_3 &= e^{A_p - B_p} G + \frac{\alpha_{1,p}}{2\alpha_{2,p}} C_f \\ C_4 &= e^{A_p + B_p} G - \frac{\alpha_{2,p}}{2\alpha_{1,p}} C_f \\ C_5 &= e^{-A_p} \cdot G_B \\ C_6 &= e^{A_p} \cdot G_H \\ C_7 &= e^{-B_p} \cdot G_A \\ C_8 &= e^{B_p} \cdot G_A \end{aligned} \right\} \quad (5-22)$$

$$\text{而 } C_f = \frac{1}{A_p^2 + B_p^2 C_p} [A_p \text{sh} A_p (2G \text{ch} B_p + G_B) + B_p \text{sh} B_p (2G \text{ch} A_p + G_A)]$$

$$G = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2 \text{ch} A_p \text{ch} B_p} - \left(\frac{A_p}{\text{sh} A_p} E_2 + \frac{B_p}{\text{sh} B_p} E'_2 \right) \right]$$

$$G_A = A_p \coth A_p \cdot E_2$$

$$G_B = B_p \coth B_p \cdot E'_2$$

$$\left. \begin{aligned} E_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} \mu_n (A_p^2 + \lambda_n^2)} \\ E'_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} \mu'_n (B_p^2 + \lambda_n^2)} \end{aligned} \right\} \quad (5-23)$$

式(5-23)中的级数收敛得很快, n 一般取 12~20 已足够。有限分析系数 $C_i (i=1, 2, \dots, 8)$ 的物理意义代表着单元周围 8 个结点对中心点 p 所做的“贡献”。每个内结点都可以列出形如(5-21)的方程, 然后在全区域上求解线性代数方程组, 便获得整个问题的数值解。

3. 边界的处理

对于给定水头边界, 显然只要将边界上的已知水头值代入方程式(5-21)的对应边界结点上即可。对于已知流量的边界, 可以采取向边界外映射一系列虚结点(如图 5-4), 如果区域内靠近边界处一系列结点为 $M-1$ 列, 区域外的虚结点为 $M+1$ 列, 则由达西定律

$$T_x \frac{\partial H}{\partial x} = q_0 \quad (5-24)$$

得

$$\frac{H_{M-1} - H_{M+1}}{2\Delta x} = \frac{q_0}{T_x} \quad (5-25)$$

其中 q_0 ——边界已知法向单宽流量;

T_x ——边界水平方向导水系数。

当边界为隔水边界或流线边界时, $q_0 = 0$, 则

$$H_{M+1} = H_{M-1} \quad (5-26)$$

二、非稳定流问题的有限分析法

在区域 D 上考察下列定解问题

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_y \frac{\partial H}{\partial y} \right) = \mu \cdot \frac{\partial H}{\partial t} \quad (\text{在 } D \text{ 上}, t > 0) \quad (5-27)$$

$$\left. \begin{aligned} H &= H_1 && (\text{在 } \Gamma_1 \text{ 上}, t > 0) \\ T_x \frac{\partial H}{\partial x} \cos(n, x) + T_y \frac{\partial H}{\partial y} \cos(n, y) &= q && (\text{在 } \Gamma_2 \text{ 上}, t > 0) \\ H &= H_0 && (\text{在 } D \text{ 上}, t = 0) \end{aligned} \right\} \quad (5-28)$$

其中 μ 为贮水系数。

对于方程式(5-27)左边和稳定流问题的有限分析法相类似, 可以推得 $(t + \Delta t)$ 时刻的有限分析格式为

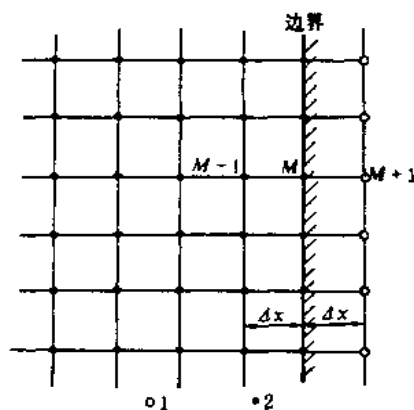


图 5-4 虚拟边界示意

1—虚拟结点; 2—结点

$$H_p^{(k+1)} = \sum_{i=1}^8 C_i H_i^{(k+1)} \quad (5-29)$$

而对于方程式(5-27)右边的 $\frac{\partial H}{\partial t}$ 项,在中心点 p 处用差分近似代替,即

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{H_p^{k+1} - H_p^k}{\Delta t} \quad (5-30)$$

将式(5-29)和式(5-30)分别代入式(5-27)的左、右边,得到非稳定流问题的有限差分格式为

$$H_p^{(k+1)} = \left[\sum_{i=1}^8 C_i H_i^{(k+1)} + \frac{c + \mu^*}{\Delta t \cdot \alpha_{1,p}} \cdot H_p^{(k)} \right] / \left(1 + \frac{c_f \mu^*}{\Delta t \alpha_{1,p}} \right) \quad (5-31)$$

式中所有系数与前相同。式(5-31)表明已知某一时刻($t = k\Delta t$)结点水头分布,就可求出下一时刻($t = (k+1)\Delta t$)的结点水头分布。已经证明,当时间步长满足

$$\Delta t < \frac{1}{2\text{MAX}|\alpha_{2,p}|} \quad (5-32)$$

时,有限分析格式(5-31)是 L_∞ 稳定的。

第三节 计算机程序及算例

一、计算程序

有限分析法计算机程序 ZEF01.FOR 由 FORTRAN 语言编制,在 IBM—PC 机上调试通过。程序中开设了通道号分别为 5 和 6 的输入输出数据文件 ZFA.DAT、ZFB.DAT,用来存放输入的数据和输出的成果。程序中的主要标识符及其含义列于表 5-1 中。

表 5-1 稳定流有限分析法源程序标识符说明

变量类型	标识符	说 明
整 型	NNO	结点总数
	MMO	单元总数(未知水头结点总数)
	NE	存放单元结点编号的二维数组 NE(I,9)表示存放第 I 个单元的 9 个结点的编号(包括中心点)
实 型	XY	存放结点坐标的二维数组。XY(I,J),当 J=1,表示存放第 I 个结点的横坐标;当 J=2 表示存放第 I 个结点的纵坐标
	A	存放线性方程组系数的二维数组
	HO	存放水头的一维数组。输入部分存放边界结点的已知水头和内结点的假定水头,输出部分存放计算出的各结点水头
	TK	存放渗透系数的一维数组。 $T_k(1)$ 表示 x 轴方向上的渗透系数, $T_k(2)$ 表示 y 轴方向上的渗透系数

计算机源程序如下。

ZEF 01.FOR(FORTRAN—IBM—PC)

```

COMMON NNO,MMO
COMMON/ZNE/NE(200,9)
COMMON/ZXY/XY(200,2),HO(200)
COMMON/ZA/A(200,200)
COMMON/TK/TK(2)
DIMENSION NODE(9),FI(200),KODE(200)
OPEN(5,FILE='ZFA.DAT')
OPEN(6,FILE='ZFB.DAT')
READ(5,*)NNO,MMO
WRITE(*,800)NNO,MMO
WRITE(6,800)NNO,MMO
800  FORMAT(5X,'NNO=',I3,8X,'MMO=',I3)
    READ(5,*)((XY(I,J),J=1,2),I=1,NNO)
    WRITE(*,810)
C      WRITE(6,810)
810  FORMAT(5X,'I',23X,'X',18X,'Y')
    DO 820 I=1,NNO
C      WRITE(6,830)I,(XY(I,J),J=1,2)
820  WRITE(*,830)I,(XY(I,J),J=1,2)
830  FORMAT(5X,I3,15X,F10.4,15X,F10.4)
    READ(5,*)((NE(I,J),J=1,9),I=1,MMO)
    WRITE(*,840)
C      WRITE(6,840)
840  FORMAT(5X,'I',5X,'I1',5X,'I2',5X,'I3',5X,'I4',5X,'I5',5X,'
*  I6',5X,'I7',5X,'I8',5X,'I9')
    DO 850 I=1,MMO
C      WRITE(6,860)I,(NE(I,J),J=1,9)
850  WRITE(*,860)I,(NE(I,J),J=1,9)
860  FORMAT(3X,I3,3(4X,I3),3(4X,I3),3(4X,I3))
    READ(5,*)(HO(I),I=1,NNO)
    WRITE(*,900)(I,HO(I),I=1,NNO)
C      WRITE(6,900)(I,HO(I),I=1,NNO)
900  FORMAT(3('## ',I3,8X,'HO=',F10.4))
    READ(5,*)(TK(I),I=1,2)
    WRITE(*,870)(TK(I),I=1,2)
    WRITE(6,870)(TK(I),I=1,2)
870  FORMAT(/5X,'TK(1)=',F10.4,8X,'TK(2)=',F10.4)

```

```

DO 30 I=1,NNO
DO 30 J=1,NNO
30  A(I,J)=0.0
DO 10 K=1,MMO
I1=NE(K,1)
I2=NE(K,2)
I3=NE(K,3)
I4=NE(K,4)
I5=NE(K,5)
I6=NE(K,6)
I7=NE(K,7)
I8=NE(K,8)
I9=NE(K,9)
X1=XY(I1,1)
Y1=XY(I1,2)
X2=XY(I2,1)
Y2=XY(I2,2)
X3=XY(I3,1)
Y3=XY(I3,2)
X4=XY(I4,1)
Y4=XY(I4,2)
X5=XY(I5,1)
Y5=XY(I5,2)
X6=XY(I6,1)
Y6=XY(I6,2)
X7=XY(I7,1)
Y7=XY(I7,2)
X8=XY(I8,1)
Y8=XY(I8,2)
X9=XY(I9,1)
Y9=XY(I9,2)
XM=0.5*(X5-X6)
XN=0.5*(X7-X8)
YM=0.5*(Y5-Y6)
YN=0.5*(Y7-Y8)
XMM=X5-2.0*X9+X6
XNN=X7-2.0*X9+X8

```



```

XMN=0.25*(X1-X2-X3+X4)
YMM=Y5-2.0*Y9+Y6
YNN=Y7-2.0*Y9+Y8
YMN=0.25*(Y1-Y2-Y3+Y4)
BJ=XM*YN-XN*YM
A1=(TK(1)*YN**2+TK(2)*XN**2)/BJ**2
A2=(TK(1)*YM*YN+TK(2)*XM*XN)/BJ**2
A3=(TK(1)*YM**2+TK(2)*XM**2)/BJ**2
B1=((TK(2)*XN**2+TK(1)*YN**2)*(XN*YMM-YN*
* XMM)-2.0*(TK(2)*XM*XN+TK(1)*YM*YN)*(XN*YMN-
* YN*XMN)+(TK(2)*XM**2+TK(1)*YM**2)*(XN*YNN-
* YN*XNN)/BJ**3
B2=-((TK(2)*XN**2+TK(1)*YN**2)*(XM*YMM-YM*
* XMM)-2.0*(TK(2)*XM*XN+TK(1)*YM*YN)*(XM*YMN-
* YM*XMN)+(TK(2)*XM**2+TK(1)*YM**2)*(XM*YNN-
* YM*XNN))/BJ**3
AM=-0.5*B1/A1
BM=-0.5*B2/A3
CM=A3/A1
EA=0.0
EB=0.0
DO 101 I=1,20
W=0.5*(2.0*REAL(I)-1.0)*3.1415926
U1=SQRT((AM**2+BM**2*CM+W**2)/CM)
U2=SQRT(AM**2+BM**2*CM+W**2*CM)
IF(U1*(AM**2+W**2)-50.)621,621,622
621 EA=EA+1./COSH(U1*(AM**2+W**2))
622 EA=EA+0.0
IF(U2*(BM**2+W**2)-50.)623,623,624
623 EB=EB+1./COSH(U2*(BM**2+W**2))
624 EB=EB+0.0
101 CONTINUE
IF(AM-0.0)301,302,301
301 GA=AM*EA/TANH(AM)
GOTO 303
302 GA=0.0
303 IF(BM-0.0)304,305,304

```

```

304      GB=BM * EB/TANH(BM)
      GOTO 306
305      GB=0.0
306      IF(AM-0.0)701,702,701
701      GAM=AM * EA/SINH(AM)
702      GAM=0.0
      IF(BM-0.0)703,704,703
703      GBM=BM * EB/SINH(BM)
704      GBM=0.0
      G=0.5 * (0.5/(COSH(AM) * COSH(BM))-(GAM+GBM))
      IF(AM.NE.0.0)GOTO 555
      IF(BM.NE.0.0)GOTO 555
      CT=0.0
      GOTO 505
555      CT=(AM * SINH(AM) * (2.0 * C * COSH(BM)+GB)
*      +BM * SINH(BM) * (2.0 * G * COSH(AM)+GA))/(AM * * 2+BM * *
*      2 * CM)
505      C1=EXP(-AM-BM) * G-0.5 * A2 * CT/A1
      C2=EXP(-AM+BM) * G+0.5 * A2 * CT/A1
      C3=EXP(AM-BM) * G+0.5 * A2 * CT/A1
      C4=EXP(AM+BM) * G-0.5 * A2 * CT/A1
      C5=EXP(-AM) * GB
      C6=EXP(AM) * GB
      C7=EXP(-BM) * GA
      C8=EXP(BM) * GA
      C9=-1.
      A(I9,I1)=C1
      A(I9,I2)=C2
      A(I9,I3)=C3
      A(I9,I4)=C4
      A(I9,I5)=C5
      A(I9,I6)=C6
      A(I9,I7)=C7
      A(I9,I8)=C8
      A(I9,I9)=C9
10      CONTINUE
      KNM=0

```

```

200      AMAX=0.0
        KNM=KNM+1
        00 400 L=1,MMO
        OLDVAL=HO(L)
        SUM=0.0
        DO 300 JJ=1,NNO
        IF (JJ.EQ.L) GOTO 300
        SUM=SUM+A(L,JJ)*HO(JJ)
300      CONTINUE
        HO(L)=-SUM/A(L,L)
        ERR=ABS(OLDVAL-HO(L))
        IF(ERR.GT.AMAX) AMAX=ERR
400      CONTINUE
        WRITE(*,909)KNM,AMAX
909      FORMAT(5X,'KNM=',I3,8X,'AMAX=',F10.5)
        IF(AMAX.GT.0.01)GOTO 200
        HO(4)=HO(2)
        HO(5)=HO(2)
        WRITE(*,405)
        WRITE(6,405)
405      FORMAT(/,1X,'NODE NUMBER',8X,'X',12X,'Y',13X,'HEAD')
        DO 410 I=1,NNO
        WRITE(6,411)L,(XY(L,J),J=1,2),HO(L)
410      WRITE(*,411)L,(XY(L,J),J=1,2),HO(L)
411      FORMAT(1X,I3,8X,F10.4,5X,F10.4,5X,F10.4)
        STOP
        END

```

二、算例

为了说明上述程序的应用,试考察如图 5-5 所示的流场。结点总数为 12,单元总数为 2,计算 2 个内结点水头值。

输入的数据文件 ZFA.DAT 格式如下。

结点总数和单元总数

12,2

结点坐标

10,10,

10,20,

10,30,

10,0,
20,0,
20,10,
20,20,
20,30,
0,0,
0,10,
0,20,
0,30,

单元结点编号

7,5,11,9,6,10,2,4,1,
8,6,12,10,7,11,3,1,2,

内结点假定水头和边界结点已知水头

10,10,20,20,
0,0,0,0,
40,40,40,40,

渗透系数

1,1,

输出的数据文件 ZFB.DAT 格式如下。

NNO=12

MMO= 2

I	X	Y
1	10.0000	10.0000
2	10.0000	20.0000
3	10.0000	30.0000
4	10.0000	.0000
5	20.0000	.0000
6	20.0000	10.0000
7	20.0000	20.0000
8	20.0000	30.0000
9	.0000	.0000
10	.0000	10.0000
11	.0000	20.0000
12	.0000	30.0000

I	I1	I2	I3	I4	I5	I6	I7	I8	I9
1	7	5	11	9	6	10	2	4	1
2	8	6	12	10	7	11	3	1	2

TK(1)= 1.0000

TK(2)= 1.0000

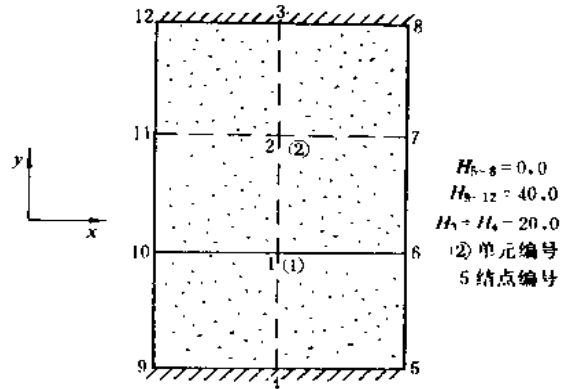


图 5-5 算例的渗流场

L	X	Y	HO
1	10.0000	10.0000	20.0000
2	10.0000	20.0000	20.0000
3	10.0000	30.0000	20.0000
4	10.0000	.0000	20.0000
5	20.0000	.0000	.0000
6	20.0000	10.0000	.0000
7	20.0000	20.0000	.0000
8	20.0000	30.0000	.0000
9	.0000	.0000	40.0000
10	.0000	10.0000	40.0000
11	.0000	20.0000	40.0000
12	.0000	30.0000	40.0000

参 考 文 献

- 1 朱学愚,钱孝星,刘新仁. 地下水资源评价. 南京:南京大学出版社,1987
- 2 朱学愚,谢春红. 地下水运移模型. 北京:中国建筑工业出版社,1990
- 3 薛禹群,朱学愚. 地下水动力学. 北京:地质出版社,1979
- 4 罗焕炎,陈雨孙. 地下水运动的数值模拟. 北京:中国建筑工业出版社,1988
- 5 陈雨孙. 地下水运动与资源评价. 北京:中国建筑工业出版社,1986
- 6 陈崇希,唐仲华. 地下水流动问题数值方法. 北京:中国地质大学出版社,1990
- 7 李俊亨. 地下水流数值模拟. 北京:地质出版社,1988
- 8 孙纳正. 地下水流的数学模型和数值方法. 地质出版社,1981
- 9 薛禹群,谢春红. 水文地质学的数值方法. 北京:煤炭工业出版社,1980
- 10 陈景仁. 流体力学及传热学. 北京:国防工业出版社,1984
- 11 方保镕. 边界拟合坐标与有限分析方法. 南京:河海大学,1988
- 12 布莱比亚. 工程师用的边界单元法. 北京:科学出版社,1986
- 13 布莱比亚等. 边界单元法的理论和工程应用. 北京:国防工业出版社,1988
- 14 孙纳正. 地下水污染——数学模型和数值方法. 北京:地质出版社,1989
- 15 方保镕. 用边界拟合坐标有限分析法解闸坝地基有压渗流. 岩土工程学报,1988,10(4)
- 16 谢春红,朱学愚. 用边界单元法计算地下水流时节点多值法在处理奇点中的应用. 岩土工程学报,1987,9(2)
- 17 朱学愚,谢春红,邹泽远. 承压含水层中地下水向井群非稳定流动的边界元分析. 地质学报,1989,63(3)
- 18 朱学愚,仰步雨,朱国荣等. 湖南斗笠山煤矿裂隙岩溶水涌水量的计算. 中国岩溶,1983,2(2)
- 19 钱孝星,蔡升华. 岩溶裂隙水地区某水库的渗漏计算. 河海大学学报,1989,17(3)
- 20 钱孝星,周志方. 坝基块状岩体内渗透性及其渗透力的定量评价. 第三届工程勘察学术交流会议论文选集. 北京:中国建筑工业出版社,1988
- 21 Huyakorn, P. S. & Pinder, G. F. Computational Methods in Subsurface Flow. New York: ACADEMIC PRESS, 1983
- 22 Wang, H. F. & Anderson, M. P. Introduction to Groundwater Modeling. San Francisco: W. H. FREEMAN AND COMPANY, 1982
- 23 Remson, I., Hornberger, G. M. & Molz, F. J. Numerical Methods in Subsurface Hydrology. New York: WILEY-INTERSCIENCE, 1971
- 24 Liggett, J. A. & Liu, P. L-F. The Boundary Integral Equation Method for Porous Media Flow. London: GEORGE ALLEN & UNWIN, 1983
- 25 Qian X-X. & Zhou Z-F. 3-Dimensional Boundary Element Analysis of Fracture Flow in a Rock Mass. Boundary Elements XII. Southampton: COMPUTATIONAL MECHANICS PUBLICATION and SPRINGER-VERLAG, 1990
- 26 Qian X-X. & Jiao, C-Y. Prediction of Groundwater Pollution Caused by Grand Canal in Yangzhou City. Environmental Hydraulics. Rotterdam: A. A. BALKEMA, 1991
- 27 Qian Xiaoxing & Zhou Zhifang. A Case Study on the Computation of Uplift in a Dam Foundation by