第一章　数学和弹性理论基础知识

§1　复变函数概要

1-1　复变函数的定义

设有一复数 $z=x+iy$ 的集合 g。对于集合 g 中的每一个复数 z 都有对应的复数值

$$w=u+iv \qquad (i=\sqrt{-1})$$

则称 w 是 z 的复变函数，记作

$$w=f(z)$$

如果 z 的一个值对应着一个 w 值，那么我们说函数 $f(z)$ 是单值函数；如果 z 的一个值对应着两个或两个以上的 w 值，我们就说函数 $f(z)$ 是多值函数。集合 g 称为 $f(z)$ 的定义集合。对应于 g 中所有 z 的一切 w 值所组成的集合 G，称为函数集合。

给定了一个复变函数，也就是说在点 (x,y) 与 (u,v) 之间给出了一个对应。因此，u 与 v 均随 x 与 y 而确定，也就是说给定了一个复变函数和两个实变函数

$$u=u(x,y),\quad v=v(x,y)$$

是等价的。而且

$$w=u(x,y)+iv(x,y)$$

复变对数函数 $w=\ln z$ 是多值的。为了便于了解，我们取 $z=re^{i\theta}$ 为例，则

$$\begin{aligned}\ln z &= \ln|z|+i(\theta+2k\pi)\\ &= \ln r+i(\theta+2k\pi)\end{aligned}\qquad (1\text{-}1\text{-}1)$$

方程(1-1-1)对于 z 的所有异于零的复数值定义了函数 $\ln z$。这个式子不仅对于正数，而且对于负数和复数都给出了对数的定义。在这个方程中包含有一个任意的整数 k。这就是说 $\ln z$ 是一个多值

函数。对于 k 的任一整数值，我们就得到函数 $\ln z$ 的一个分支。通常我们取 $k=0$ 的那一支叫做 $\ln z$ 的主值，并写为 $\ln z$。于是得到

$$\ln z = \ln r + i\theta \qquad (-\pi < \theta \leqslant \pi)$$

这里的 $\ln z$ 就是单值函数了。

1-2 区域和边界

满足下列条件的平面点集合 g 叫做区域，并以 B 表示。

a） g 中每一点 z_0 是一个圆的中心，这个圆（z_0 的一邻域）的内部属于 g（开集性）；

b） g 的任意两点可以用一条折线连起来，这条折线整个属于 g（连通性），见图1-1。

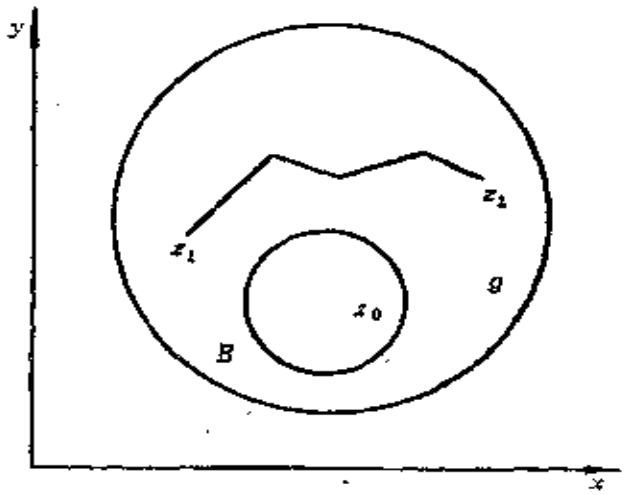


图 1-1

如果一个区域 B 可以被包含在一个以原点为中心的圆里面，那么 B 叫做有界的；否则叫做无界的。

对于平面内不属于区域 B 的点来说，可能有这样的点 A，在 A 的任意小的邻域内，总包含 B 中的点。我们把这种点 A 叫做区域 B 的边界点。B 的全部边界点构成一个点集 D，把 D 叫做 B 的边界。一个有界区域 B 加上它的边界 D，叫做闭域，写作 $\overline{B}=B+D$。

区域 B 的边界，可能是由 n 条曲线与一些孤立的点所组成。

在 a 和 b 之间，取一串数

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b \qquad (1\text{-}2\text{-}1)$$

$z = z(t)$ 在区间 $a \leqslant t \leqslant b$ 上连续（图1-2）。设

$$z_j = z(t_j) \quad (j = 0, 1, 2 \cdots n)$$

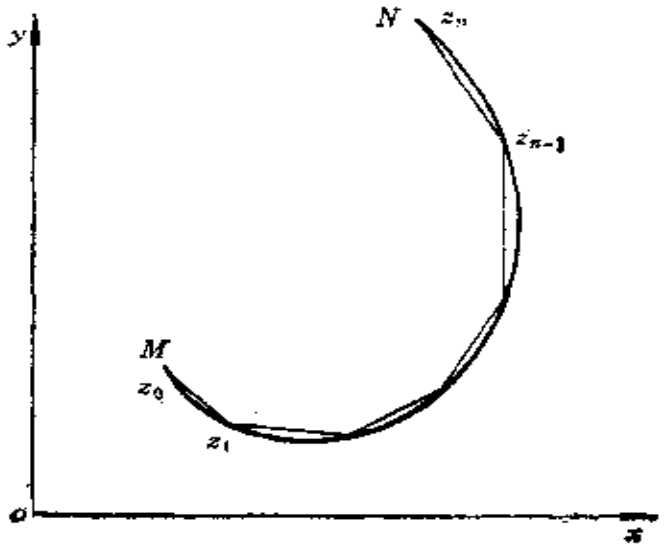


图 1-2

若连接这些点的折线的长度

$$L = \sum_{j=1}^{n} |z(t_j) - z(t_{j-1})|$$

对于所有数列（1-2-1）有上界，则 MN 弧叫做可度长的。此时，L 的上确界称为 MN 弧的长度。

由几段光滑弧所组成的曲线，称为逐段光滑的，并且是可度长的。

一条连续曲线 C：$z = z(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$，如果 $z(a) = z(b)$ 且当 $t_1 \neq t_2$（除非 t_1 及 t_2 两值中一个是 a，另一个是 b）时，$z(t_1) \neq z(t_2)$，则此曲线称为简单闭曲线。

一个简单闭曲线将平面分为两个区域，其中一个是有界的，称为 C 的内部，另外一个是无界的，称为 C 的外部。沿简单闭曲线 C 逆时针方向前进，在前进方向的左侧是 C 的内部，在前进方向的右侧是 C 的外部。这个方向叫做沿 C 的正向。

一个区域B称为单连通的，如果凡属于B的简单闭曲线的内部（或外部）仍然属于B。如果一个区域不是单连通域，就叫做多连通的。

1-3 解析函数的概念

复变函数的导数与实变函数的导数是一样定义的。因此，关于实变函数的一系列微分公式与法则，可以完全照搬到复变函数上；不过现在指的是复变量，不是实变量。

值得指出的是，实变函数的可导性，要求当$x=x_0+\Delta x$由左右两方趋于点x_0时，增比$\Delta y/\Delta x$的极限都存在而且相等。复变函数的可导性，要求当点$z=z_0+\Delta z$在复平面上沿任意路径趋于点z_0时，增比$\Delta w/\Delta z$的极限都存在，而且这些极限都相等（图1-3）。

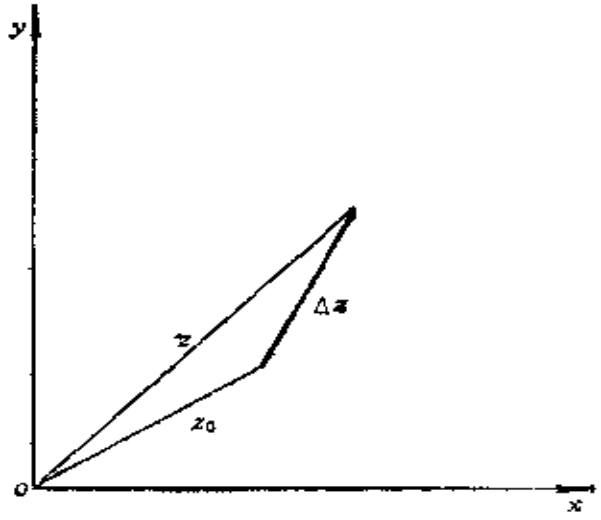


图 1-3

现在来讨论点z沿x轴的方向和沿y轴的方向趋于z_0的这两种情况（图1-4）。

在第一种情况下，由于$\Delta y=0$，故有$\Delta z=\Delta x$，而

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+i\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

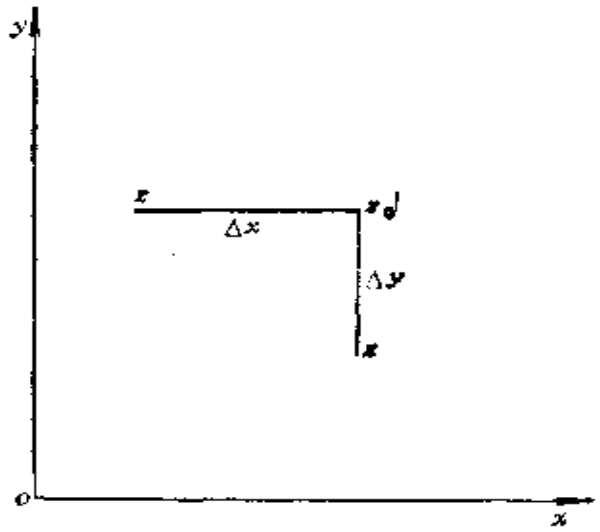


图 1-4

令 $\Delta x \to 0$，取极限时，则有

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

在第二种情况下，由于 $\Delta x = 0$，故有 $\Delta z = i\Delta y$，而

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta u + i\Delta v}{i\Delta y} = \frac{\Delta v}{\Delta y} - i\frac{\Delta u}{\Delta y}$$

令 $\Delta y \to 0$，取极限时，则有

$$f'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

因此，若 $f'(z_0)$ 存在，则应有以下关系：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1-3-1}$$

这就是柯西—黎曼（Cauchy-Riemann）条件。

函数 $f(z)$ 在一区域 B 的每一点都可以求导时，我们称它为 B 上的解析函数。

我们讨论解析函数

$$w = u(x, y) + iv(x, y)$$

的实部 $u(x, y)$ 与虚部 $v(x, y)$，由于它们满足柯西—黎曼条件，即

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\ ;\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

则

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y};\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$$

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad (1-3-2)$$

同样可得

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0 \qquad (1-3-2)'$$

这是平面上的拉普拉斯（Laplac）方程。这个方程的解为调和函数。

1-4 保角变换

函数$w=f(z)$的定义集合是平面上的一个点集合，而把函数集合G看成是另一平面（w平面）上的一个点集合，那么，$w=f(z)$在几何上就是把集合g变到集合G的一个变换（映射）。

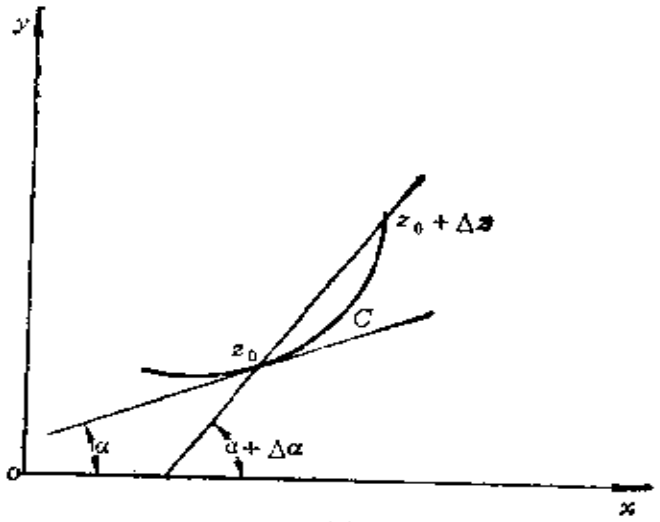
设解析函数$w=f(z)$把z平面上的点z_0变到w平面上的点$w_0=f(z_0)$，把过点z_0的曲线C变到过点w_0的曲线C_1。点$z_0+\Delta z$为C上点z_0的邻近点，点$w_0+\Delta w$则为C_1上点w_0的邻近点且为点$z_0+\Delta z$的对应点。这时，Δz为从点z_0到点$z_0+\Delta z$的矢量，而Δw则为从点w_0到点$w_0+\Delta w$的对应矢量（图1-5）。由$f(z)$的解析性可知，当$\Delta z\to 0$时，有$\Delta w\to 0$，而且$\Delta w/\Delta z\to f'(z_0)$，不论曲线$C$如何选取，这都成立。取模则有

$$|\Delta w/\Delta z|\longrightarrow|f'(z_0)|$$

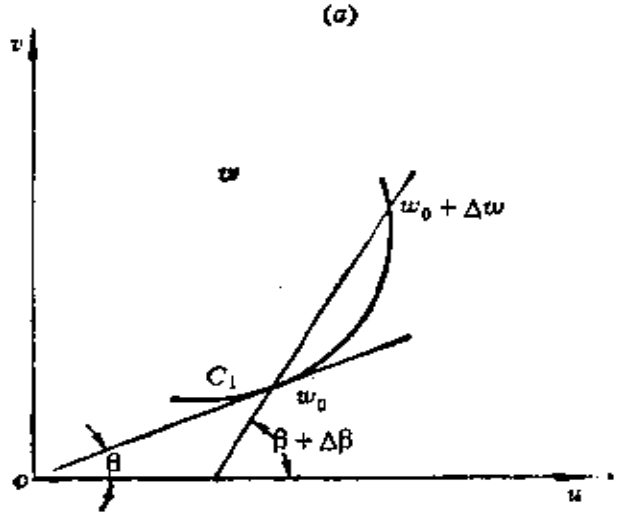
它表示在w平面上的线素与z平面上在所给点z_0的线素之比与从点z_0所引的曲线无关。

量$|f'(z_0)|$代表w平面上的线素对于z平面上线素的倍数。因此，把它叫做变换的伸长系数。

又取幅角，我们有



(a)



(b)

图 1-5

$$\arg\frac{\Delta w}{\Delta z}\longrightarrow\arg f'(z_0)$$

这里设 $f'(z_0)\neq 0$，否则无确定幅角。

因为商的幅角等于被除数的幅角减去除数的幅角，故有

$$\arg\frac{\Delta w}{\Delta z}=\arg\Delta w-\arg\Delta z$$

$$\arg\Delta z=\alpha+\Delta\alpha$$

$$\arg\Delta w=\beta+\Delta\beta$$

当 $\Delta z\to 0$ 时，$\Delta\alpha\to 0$，$\Delta\beta\to 0$，所以

$$\arg \Delta z \to \alpha, \quad \arg \Delta w \to \beta$$

α，β 是曲线 C 与 C_1 在对应点的切线与实轴的交角。因此，有

$$\arg f'(z_0) = \beta - \alpha$$

它代表在 z 平面上过点 z_0 的任一条曲线的切线变到 w 平面上都转过同一个角度，这个角度的大小就是 $\arg f'(z_0)$。由于这个性质，我们把 $\arg f'(z_0)$ 叫做变换的旋转角。

由此可见，若 C_1 与 C_2 是从 z_0 出发的两条曲线，C_1' 与 C_2' 为从 w_0 出发的两条相应曲线，则 C_1' 与 C_2' 在 w_0 所成的交角必等于 C_1 与 C_2 在点 z_0 所成的交角。曲线的交角在这个变换下是不变的。

总之，当 $f'(z_0) \neq 0$ 时，解析函数 $w = f(z)$ 在点 z_0 所实现的变换，是把点 z_0 处的所有线素皆按同一比例伸长，而且任二曲线间的交角保持不变。具有这种性质的变换叫做保角变换。解析函数所实现的变换在其导数不为零的一切点处都是保角的。

在导数为零的点处，保角性一般是要受到破坏的。导数为零的点叫做变换的驻点。

在实际计算中，常用分式线性变换和幂级数等表示变换函数。

1-5 复变函数积分的概念

复变函数沿曲线求积这一概念相当于实变函数的线积分的概念。

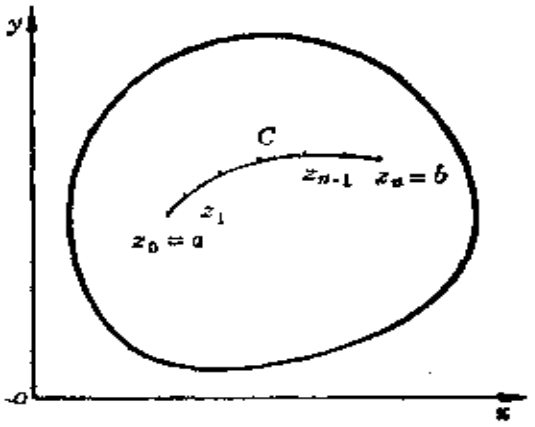


图 1-6

令设有从点 a 到点 b 的一条曲线 C 和一个复变函数 $f(z)$，此函数在包含 C 的一个域内有定义（图1-6）。

将曲线 C 用点

$$a = z_0, \quad z_1, \quad \cdots z_{n-1}, \quad z_n = b$$

分成若干小段，而且

$$z_0<z_1<z_2<\cdots<z_{n-1}<z_n$$

取和数

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} f(z_k)(z_k-z_{k-1}) \qquad (1\text{-}5\text{-}1)$$

若函数 $f(z)$ 是连续的，曲线 C 是分段光滑的，则和数 S_n 当 n 无限增大，而每两相邻分点之间的距离趋于零时（即 $|\Delta z_k|=|z_k-z_{k-1}|\to 0$），有完全确定的极限：

$$\lim_{|\Delta z_k|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(z_k)\,\Delta z_k=\int_C f(z)dz \qquad (1\text{-}5\text{-}2)$$

这个极限叫做 $f(z)$ 沿 C 的积分。当始点 a 和终点 b 重合时，曲线 C 是封闭的。

我们知道

$$f(z)=u+iv$$
$$z=x+iy$$

所以

$$\int_C f(z)dz=\int_C (udx-vdy)+i\int_C (vdx+udy) \qquad (1\text{-}5\text{-}3)$$

若

$$z=z(t)$$

则有

$$\int_C f(z)dz=\int_{t_a}^{t_b} f[z(t)]z'(t)dt \qquad (1\text{-}5\text{-}4)$$

这里 t_a、t_b 分别是与曲线 C 的始点 a 和终点 b 对应的 t 值。

1-6 解析函数的积分

若 $f(z)=u+iv$ 在单连通区 B 内解析，因此在 B 内，它的实部 u 与虚部 v 满足柯西—黎曼条件：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

又知道沿任一闭曲线 C 的积分为：

$$\int_C f(z)dz=\int_C(udx-vdy)+i\int_C(vdx+udy)$$

由格林（Green）定理和柯西—黎曼条件，可知

$$\int_C f(z)dz=\iint_\Delta-\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy$$

$$+i\iint_\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy=0$$

式中Δ为曲线C所包围的区域。于是，若$f(z)$在单连通区域B内解析，则$f(z)$沿此域内任一闭曲线C的积分为零。这就是单连通区域的柯西积分定理。

推论：在单连通区域B内，解析函数$f(z)$的积分

$$\int_{z_0}^{z_1}f(z)dz$$

由点z_0与点z_1完全确定，而与路径的选择无关。而

$$F(z)=\int_{z_0}^{z}f(z)dz$$

也是解析函数，它是$f(z)$的原函数，并且有

$$F'(z)=f(z)$$

多连通区域的柯西积分定理：若$f(z)$在以闭曲线C_1与C_2所围成的双连通区域内解析，则

$$\int_{C_1}f(z)dz=\int_{C_2}f(z)dz$$

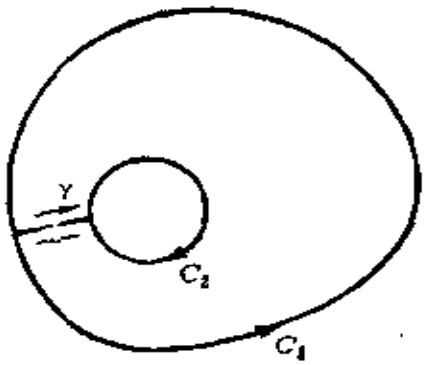


图 1-7

证明：如图1-7所示双连通区域，在C_1和C_2之间作一割缝Υ。这样就把双连通区域割成单连通区域了。于是

$$\int_{C_1} f(z)dz+\int_{\Upsilon\rightarrow} f(z)dz-\int_{C_2} f(z)dz+\int_{\Upsilon\leftarrow} f(z)dz=0$$

但是

$$\int_{\Upsilon\rightarrow} f(z)dz+\int_{\Upsilon\leftarrow} f(z)dz=\int_{\Upsilon\rightarrow} f(z)dz-\int_{\Upsilon\rightarrow} f(z)dz=0$$

所以

$$\int_{C_1} f(z)dz=\int_{C_2} f(z)dz \qquad (1-6-1)$$

一般，若$f(z)$在C_0为外闭路，以互不相包而在C_0内的C_1，$C_2,\cdots C_n$为内闭路的多连通区域内解析（图1-8），则

$$\int_{C_0} f(z)dz=\sum_{j=1}^{n}\int_{C_j} f(z)dz \qquad (1-6-2)$$

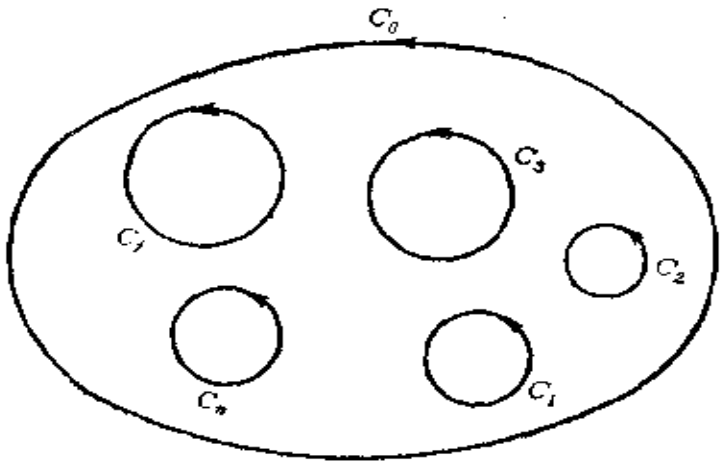


图 1-8

1-7 柯西积分公式

设函数$f(t)$在区域B处处解析，C为B内任一简单闭曲线，它的内部完全属于B，z为包含在C内的任一点，于是

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{t-z}dt \qquad (1-7-1)$$

t 是 C 上的点。这个公式就是柯西积分公式。式（1-7-1）右侧叫做柯西积分。这个式子说明，区域内的解析函数可以用区域边界上的积分来表示。

根据柯西积分公式，我们可以得出解析函数的一个重要性质：解析函数具有各阶导数而且这些导数也都是解析函数。

事实上，在闭路 C 内，我们的函数用柯西积分表示为 z 的解析函数，因之在积分号下可以求导，于是

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{(t-z)^2}dt \qquad (1\text{-}7\text{-}2)$$

式（1-7-2）在积分号下的又是一个 z 的解析函数，因此对它可以再求导数，如此，继续进行就得到

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)dt}{(t-z)^{n+1}} \qquad (1\text{-}7\text{-}3)$$

由此，我们可以计算任何阶导数。由于各阶导数都存在，自然各阶导数均为解析函数。

如果 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 外的区域是解析的（图1-9）。作

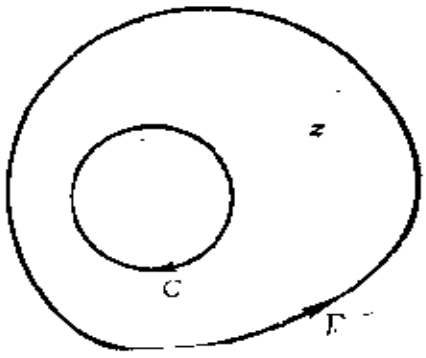


图 1-9

充分大的封闭曲线 Γ 包括曲线 C 于其内。令 z 为 Γ 内的一点。对 C 和 Γ 间的区域应用柯西积分，则

$$Kf(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{t-z}dt+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(t)}{t-z}dt \qquad (1\text{-}7\text{-}4)$$

这里如果 z 在 C 与 Γ 之间，$K=1$。如果 z 在 C 内，$K=0$。

式（1-7-4）中的项

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(t)}{t-z}dt$$

与 R 无关。所以当取 $t=Re^{i\theta}$ 时，

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(Re^{i\theta})iRe^{i\theta}d\theta}{1-z/Re^{i\theta}}=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(Re^{i\theta})d\theta$$

$$=f(\infty)$$

因为 $f(t)$ 在 C 外包括无穷远点是解析的，所以由式（1-7-4）得出

$$f(z)=f(\infty)+\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(t)}{t-z}dt \qquad (z\text{在}C\text{外})$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(t)dt}{t-z}=-f(\infty) \qquad (z\text{在}C\text{内})$$

为了以后写出方便，在曲线正方向运动的左侧记为 S^+，在曲线的另一侧就记为 S^-（图 1-10）。

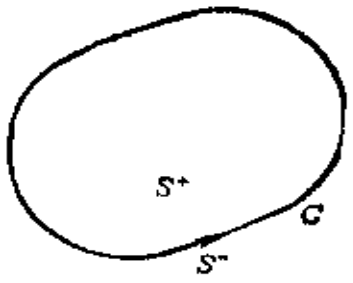


图 1-10

一个在曲线 C 上的连续函数 $\varphi(t)$ 是 S^+ 内解析函数 $\varphi(z)$ 一直连续到边界上的函数，必须在 $z\in S^-$ 时有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(t)}{t-z}dt=0$$

一个在曲线 C 上的连续函数 $\varphi(t)$ 是 S^- 内并在无穷远点有界的解析函数 $\varphi(z)$ 一直连续到边界上的函数，必须在 $z\in S^+$ 时有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(t)}{t-z}dt=\varphi(\infty)$$

若在 S^+ 内的解析函数 $\varphi(z)$ 为

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(t)}{t-z}dt \qquad (z\in S^+)$$

那么，有一个在 C 外解析（在无穷远点 $g(\infty)=0$）的函数 $g(z)$，

且 $g(z)$ 一直连续到边界上并取值为 $g(t)$。则有

$$f(t)=\Phi(t)+g(t)$$

在圆周 C ($|t|=R$) 上的连续函数 $f(t)$ 是 C 内某解析函数 $\Phi(z)$ 一直连续到边界上的函数，其充要条件是对于所有 C 内的 z 值要满足

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\overline{f(t)}}{t-z}dt=\overline{\Phi(0)}$$

$\overline{f(t)}$ 与 $f(t)$ 共轭。在圆周 C 上连续的函数 $f(t)$ 是 C 外并在无穷远处解析的函数一直连续到边界上的函数，其充要条件是对于所有 C 外的 z 点要满足

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\overline{f(t)}}{t-z}dt=0$$

以上的证明，可参考复变函数论著作。

1-8 已知某函数在边界上的实部求此函数

已知圆周 C ($|t|=R$)，某函数 $f(z)$ 在 S^+ 解析，在圆周上其实部 $f_1(t)$ 为已知。于是

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\left[\frac{2f_1(t)}{t-z}-\frac{f_1(t)}{t}\right]dt+i\beta$$

式中 β 为任一实数。

证明：在圆周上 $t\bar{t}=R^2$，所以

$$f(t)+\bar{f}\left(\frac{R^2}{t}\right)=2f_1(t)$$

于是

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(t)}{t-z}dt+\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\bar{f}(R^2/t)}{t-z}dt$$
$$=\frac{1}{\pi i}\int_C\frac{f_1(t)}{t-z}dt$$

第一种情况：如圆周 C 为逆时针方向的，则有

$$f(z)+\bar{f}(0)=\frac{1}{\pi i}\int_C\frac{f_1(t)}{t-z}dt \qquad (z\in S^+)$$

令 $z=0$，那么

$$f(0)+\bar{f}(0)=\frac{1}{\pi i}\int_C \frac{f(t)}{t}dt$$

取 $f(0)=\alpha+i\beta$，则 $\bar{f}(0)=\alpha-i\beta$，所以

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\left[\frac{2f_1(t)}{t-z}-\frac{f_1(t)}{t}\right]dt+i\beta$$

第二种情况：如圆周 C 是顺时针方向的，则有

$$f(z)-f(\infty)=\frac{1}{\pi i}\int_C\frac{f_1(t)}{t-z}dt \quad (z\in S^+)$$

$$-f(\infty)-\bar{f}\left(\frac{R^2}{z}\right)=\frac{1}{\pi i}\int_C\frac{f_1(t)}{t-z}dt \quad (z\in S^-)$$

令 $z=0$，则

$$-f(\infty)-\bar{f}(\infty)=\frac{1}{\pi i}\int_C\frac{f_1(t)}{t}dt$$

取 $f(\infty)=\alpha+i\beta$，则

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\left[\frac{2f_1(t)}{t-z}-\frac{f_1(t)}{t}\right]dt+i\beta$$

以上两种情况的方程，可以改写为

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C f_1(t)\frac{t+z}{t-z}\frac{dt}{t}+i\beta$$

而且我们知道

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f_1(t)}{t}dt=f(0)-i\beta \quad (z=0\in S^+)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f_1(t)}{t}dt=i\beta-f(\infty) \quad (z=0\subset S^-)$$

1-9 Hölder条件（H条件）

已知 $a\leqslant x\leqslant b$，如果有两个正数 M 和 μ（$0<\mu\leqslant 1$）存在，对于〔a，b〕内任意两点 x_1，x_2，有如下的关系式

$$|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant M|x_2-x_1|^{\mu}$$

则认为 $f(x)$ 在〔a，b〕内满足 Hölder 条件（以后简称为 H 条件）。

每一个在〔a，b〕内连续的函数都在〔a，b〕内满足H条件。差不多几乎在实际上遇到的连续函数都满足H条件。

在曲线C上对t有连续导数的函数$f(t)$在C上满足H条件。

若K是曲线C上的一段弧，t_0是弧上的一个内点，当K上所有的点t都满足

$$|f(t)-f(t_0)|\leqslant M|t-t_0|^{\mu}$$

则函数$f(t)$在t_0点满足H条件。

若$f(t)$在t_0点满足H条件，t_0是弧K上任意一个内点，则$f(t)$在K上满足H条件。

在t_0点邻域满足H条件的函数$f(t)$，在t_0点它也满足H条件。

1-10 积分主值

$f(x)$在〔a，b〕内除C点外是连续的，在这一点的邻域函数是无界的，我们取极限值

$$\lim_{\delta\to 0}\left[\int_a^{c-\delta} f(x)dx+\int_{c+\delta}^{b} f(x)dx\right]$$

为积分

$$\int_a^b f(x)dx$$

的主值。

设t和t_0是简单闭曲线C上的两点，$f(t)$在t_0连续，当$f(t_0)\neq 0$时，按普通意义积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{t-t_0}dt$$

是没有意义。如果在t_0点的邻域，$f(t)$满足H条件，那么上式存在积分主值，而且

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{t-t_0}dt=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}dt+\frac{1}{2}f(t_0)$$

在许多情况下，$f(t)$ 在C上有一导数，那么$f(t)$在C上满足H条件。而且$[f(t)-f(t_0)]/t-t_0$是有界的，积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}dt$$

是可求值的，积分主值是存在的，并且已知。

$$\int_C \frac{dt}{t-t_0}=\pi i$$

1-11 Plemelj 公式

设$\Phi(z)$是定义于弧K的邻域内的复变函数。设弧K有一定的方向，那么对K上任一点t_0（不是弧的端点）可以定义t_0点的左邻域和右邻域。若$\Phi(z)$在z沿t_0点左邻域内任一条路径趋向于t_0有唯一极限，我们取此极限值为$\Phi^+(t_0)$，同样可以得到右邻域内的极限值为$\Phi^-(t_0)$。一个函数在K的邻域内连续，而且对K内所有内点存在$\Phi^+(t_0)$和$\Phi^-(t_0)$，可以把它称为K邻域内分段连续函数。

在z平面上用弧C连接a点和b点，并且给出它的正向。那么弧C分出S^+和S^-，用B表示包括a和b两点在内的z平面区域，$B-C$代表沿弧C割开的z平面区域。

如果$\Phi(z)$满足下列条件，它就叫做B区域内分段全纯函数。

a）$\Phi(z)$在$B-C$区域内处处解析；

b）除端点外，从弧C的左侧和右侧可一直连续到它上的点；

c）如果$\Phi(z)$在弧C的端点有奇点，这个奇点是可去奇点。

如果t_0是某简单闭曲线C上的一点（图1-11）。积分

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\Phi(t)dt}{t-z}$$

若在全平面（包括曲线C）上都是解析的，由刘维耳(Liouville)定理可知$\Phi(z)$必为一常数。

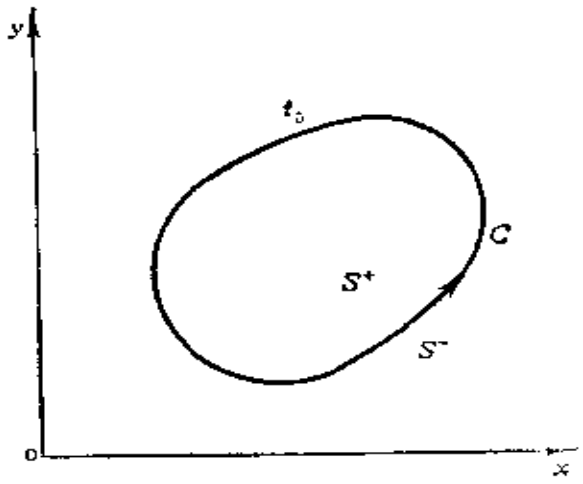


图 1-11

但是我们又知道

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(t)-\varphi(z)}{t-z}dt+\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(z)}{t-z}dt$$

如果 $z\in S^+$，则

$$\Phi_{s^+}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(t)-\varphi(z)}{t-z}dt+\varphi(z)$$

如果 $z\to t_0$ 点，由下式定义 $\Phi_{s^+}(t_0)$

$$\Phi_{s^+}(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}dt+\varphi(t_0)$$

若 $z\in S^-$，则

$$\Phi_{s^-}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(t)-\varphi(z)}{t-z}dt$$

我们定义 $\Phi_{s^-}(t_0)$ 如下：

$$\Phi_{s^-}(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}dt$$

$\Phi_{s^+}(t_0)$ 和 $\Phi_{s^-}(t_0)$ 分别代表 z 由左侧和由右侧趋向于 t_0 时的 $\Phi(z)$ 值。

又因为

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{dt}{t-t_0}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(t_0)}{t-t_0}dt=\frac{1}{2}\varphi(t_0)$$

所以

$$\Phi_S^+(t_0)=\frac{1}{2}\varphi(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}$$

$$\Phi_S^-(t_0)=-\frac{1}{2}\varphi(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}$$

合并这两个式子后，得到

$$\Phi_S^+(t_0)-\Phi_S^-(t_0)=\varphi(t_0)$$

$$\Phi_S^+(t_0)+\Phi_S^-(t_0)=\frac{1}{\pi i}\int_C \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}$$

这就是 J. Plemelj 公式。这个公式对于非封闭的弧线也适用。但 t_0 不能是弧的端点。

1-12 半平面情况

如图1-12 所示，C 是复平面上的实轴，用 t 代表它上的点，C 轴的正向是由左向右，S^+ 是上半平面的区域，S^- 是下半平面区域。

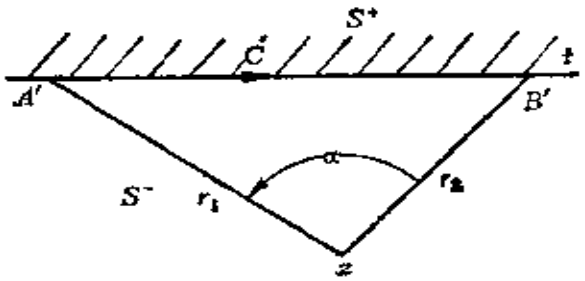


图 1-12

设 $\varphi(t)$ 是个实变量 t 的复函数，并在 C 轴上任一有限范围内可求积的。z 是下半平面中的任一点。

设当 t 很大的时候 $\varphi(t)$ 的量级为 $0\left(\frac{1}{|t|^a}\right)$，$a>0$，则积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)}{t-z}dt$$

按普通意义是存在的。

设$|t|$很大的时候，研究如下的方程

$$\varphi(t)=K+0\left(\frac{1}{|t|^{a}}\right),\quad a>0$$

$$\int_{A'}^{B'}\frac{\varphi(t)}{t-z}dt=\int_{A'}^{B'}\frac{\varphi(t)-K}{t-z}dt+K\int_{A'}^{B'}\frac{dt}{t-z}$$

$$=\int_{A'}^{B'}\frac{\varphi(t)-K}{t-z}dt$$

因为$\varphi(t)-K=0\left(\frac{1}{|t|^{a}}\right)$，那么当$A'$和$B'$任意趋向于负无穷远点和正无穷远点时，上式中等号右侧第一项积分以普通意义趋向于积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)-K}{t-z}dt$$

但是第二项积分按普通意义是不存在的，因为

$$K\int_{A'}^{B'}\frac{dt}{t-z}=K\left(\ln\frac{r_2}{r_1}-i\alpha\right)$$

中的$\ln(r_2/r_1)$是个任意数，只有当$r_2=r_1$时，它才有意义。即

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}\frac{\varphi(t)dt}{t-z}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)-K}{t-z}dt-K\pi i$$

这是柯西积分主值。也就是说当积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)dt}{t-z}$$

以普通意义存在时，其值等于柯西积分主值。

若函数$f(t)$在实轴上某t_0点邻域满足H条件，则积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}$$

存在，并且等于

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}=\lim_{\substack{N\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\left[\int_{-N}^{t_0-\varepsilon}\frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}+\int_{t_0+\varepsilon}^{N}\frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}\right]$$

令

$$\Phi^+(z)=\Phi_{S^+}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)dt}{t-z}\quad(z\in S^+)$$

$$\Phi^-(z)=\Phi_{S^-}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)dt}{t-z}\quad(z\in S^-)$$

而且

$$\Phi^{(n)+}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)dt}{(t-z)^{n+1}}\quad(z\in S^+)$$

$$\Phi^{(n)-}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)dt}{(t-z)^{n+1}}\quad(z\in S^-)$$

函数$\varphi(t)$在t_0点的邻域满足H条件。由上半平面（或下半平面）连续到C轴上一点t_0的函数值$\Phi^+(t_0)$(或$\Phi^-(t_0)$)为：

$$\Phi^+(t_0)=\frac{1}{2}\varphi(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}$$

$$\Phi^-(t_0)=-\frac{1}{2}\varphi(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}$$

如满足以下关系，当$|t_0|$和$|t_1|$充分大的时候，我们说函数$\varphi(t)$在无穷远处的邻域满足H条件。

$$|\varphi(t_1)-\varphi(t_0)|\leqslant M\left|\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_0}\right|^{\mu}$$

式中$M>0$，$0<\mu\leqslant 1$。

如果有一点列z_n（在S^+或在S^-），以$z=\infty$为极限，而$\Phi^+(z_n)$，$\Phi^-(z_n)$收敛于确定的极限值$\Phi^+(\infty)$，$\Phi^-(\infty)$，那么$\Phi(z)$连续到点$z=\infty$。

在无穷远处的邻域，$\varphi(t)$满足H条件，于是$\Phi^+(z)$(或$\Phi^-(z)$)一直连续到点$z=\infty$。

若在实轴上每点$\Phi^+(t)$(或$\Phi^-(t)$)以及$\Phi^+(\infty)$(或$\Phi^-(\infty)$)存在，而且$\Phi^+(\infty)$(或$\Phi^-(\infty)$)是有限的，那么我们说包括$z=\infty$在内，$\Phi^+(z)$(或$\Phi^-(z)$)一直连续到C轴上（或说一直连续到t上）。

于是若$\varphi_1(z)$(或$\varphi_2(z)$)是S^+(或S^-)中全纯(单值解析)

的并且一直连续到（包括 $z=\infty$） t 轴（C 上）上的函数，则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi_1(t)dt}{t-z}=\varphi_1(z)-\frac{1}{2}\varphi_1(\infty)\quad(z\in S^+)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi_1(t)dt}{t-z}=-\frac{1}{2}\varphi_1(\infty)\quad(z\in S^-)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi_2(t)dt}{t-z}=\frac{1}{2}\varphi_2(\infty)\quad(z\in S^+)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi_2(t)dt}{t-z}=-\varphi_2(z)+\frac{1}{2}\varphi_2(\infty)\quad(z\in S^-)$$

在 C 轴（t 上）上连续并当 $|t|$ 充分大时为 $K+0\left(\frac{1}{|t|^a}\right)$（$a>0$）的函数 $f(t)$ 是某函数 $\varphi_1(z)$（或 $\varphi_2(z)$）的连续延拓，其充要条件是

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)dt}{t-z}=+\frac{K}{2}\qquad(z\in S^+)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\overline{f(t)}dt}{t-z}=+\frac{\overline{K}}{2}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)dt}{t-z}=-\frac{K}{2}\qquad(z\in S^-)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\overline{f(t)}dt}{t-z}=-\frac{\overline{K}}{2}$$

1-13 解析函数的幂级数表示

解析函数不仅可以用积分表示，而且也可以用幂级数表示。

幂级数的和 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-b)^n$ 在收敛圆的内部是一个解析函数。

在收敛圆内部，$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-b)^n$ 可以逐项求导及

逐项积分。

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-b)^{n-1}$$

$$\int_{z_0}^{z} f(z)dz=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{z_0}^{z} a_n(z-b)^n dz$$

泰勒（Taylor）定理：若$f(z)$在圆域$|z-b|<R$内解析，则$f(z)$可展成幂级数

$$f(z)=f(b)+\frac{f'(b)}{1!}(z-b)+\frac{f''(b)}{2!}(z-b)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(b)}{n!}(z-b)^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(b)}{n!}(z-b)^n$$

一般说，凡使函数非解析的点称为函数的奇点。对于有奇点的解析函数$f(z)$，若取它的解析点b做为圆心，则泰勒级数的收敛圆半径R等于从b点到此函数最近一个奇点的距离。由此可知，一解析函数在解析点的邻域内，可以用泰勒级数表示。任何解析函数展开成幂级数的结果就是泰勒级数，因而也是唯一的。

罗朗（Laurent）级数：若$f(z)$在圆环域$r<|z-b|<R$内解析，则$f(z)$可展成如下的级数

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}a_n(z-b)^n$$

式中

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(t)dt}{(t-b)^{n+1}}\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

这里的C代表圆环域内的一个同心圆周。此级数在圆环域内收敛于函数$f(z)$。

对于有奇点的解析函数$f(z)$，当点b选为解析点时，那么总有某个以b为中心的圆环域，在其中$f(z)$为解析，在其边界的每一个圆周上至少有$f(z)$的一个奇点。这时$f(z)$的罗

朗级数的收敛域就是以 b 为中心的这样两个同心圆之间的圆环域。同一个函数在不同的圆环域中当然应该有不同的罗朗级数。

若 b 点取在 $f(z)$ 的奇点，则其罗朗级数在以奇点 b 为中心的圆环域内收敛于 $f(z)$。此圆环域的内半径为零，外半径等于奇点 b 到另一个最近奇点的距离。这时称此级数为 $f(z)$ 在奇点邻域内的罗朗级数。

1-14 留数及其应用

我们知道，一个函数的奇点是指那些非解析的点。若除此一个奇点外，在其邻域中无其它奇点，我们说这个点是此函数的孤立奇点。如

$$f(z)=\frac{1}{(z-2)}$$

中的点 $z=2$ 是函数的孤立奇点。又如函数

$$f(z)=e^{\frac{1}{z}}$$

中的点 $z=0$ 是它的孤立奇点。但是

$$\lim_{z\to 2}\frac{1}{(z-2)}=\infty$$

$$\lim_{z\to 0}e^{\frac{1}{z}}\text{ 不存在}$$

这说明 $z=2$ 和 $z=0$ 虽然都是孤立奇点，但在奇点处，函数的变化性态却是不同的。又

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1$$

这种奇点通常叫做可去奇点。我们把可去奇点当做解析点而不算是奇点。因为在可去奇点处，函数有极限值。

这样，孤立奇点可分为两类。设 $z=b$ 为函数 $\varphi(z)$ 的一个孤立奇点。

若 $\lim_{z\to b}\varphi(z)=\infty$，则称 $z=b$ 为 $\varphi(z)$ 的一个极点。

若 $\lim_{z\to b}\varphi(z)$ 不存在，则称 $z=b$ 为 $\varphi(z)$ 的一个本性奇点。

一般，若 $\varphi(z)=(z-b)^m\varphi_1(z)$，而且 $\varphi_1(b)\neq 0$，则称 $z=b$ 为 $\varphi(z)$ 的 m 级零点。这时 $z=b$ 当然就是

$$f(z)=\frac{1}{\varphi(z)}$$

的极点，此极点称为 $f(z)$ 的 m 级极点。

一般，若点 $z=b$ 为 $f(z)$ 的 m 级极点，则 $f(z)$ 在 $z=b$ 的邻域内的罗朗级数的主要部分（由负幂次组成的级数）只有有限项，而且在主要部分中，分母的最高方次就是 m。若点 $z=b$ 为 $f(z)$ 的本性奇点，则 $f(z)$ 在 $z=b$ 的邻域内的罗朗级数中主要部分有无穷多项。

如果 $f(z)$ 和 $\varphi(z)\neq 0$ 是在给定区域 B 上的两个单值解析函数，则函数 $F(z)=f(z)/\varphi(z)$ 在区域 B 中只在函数 $\varphi(z)$ 的零点处可能有奇点，此点是 $F(z)$ 的极点。设 z_0 是函数 $\varphi(z)$ 的 K 级零点（$K\geqslant 1$）而且是函数 $f(z)$ 的 l 级零点（$l\geqslant 0$）。在 $K>l$ 时，$F(z)$ 在点 z_0 有 $K-l$ 级极点。在 $K\leqslant l$ 时，$F(z)$ 有 $l-K$ 级零点。

如果 $f(z)$ 和 $\varphi(z)$ 是在区域 B 中除了极点外没有别的奇点的两个函数，则它们的和、差、积和商（只考虑 $\varphi(z)\neq 0$ 的情况）也没有极点以外的奇点。

设 $\varphi(z)$ 是单值函数，在区域 B 除极点外没有别的奇点，于是它的导数 $\varphi'(z)$ 在区域 B 除了有极点外，也不可能有别的奇点。而且其级数比 $\varphi(z)$ 的极点的级数大 1。若 $A\neq\infty$ 是任意的复数。这时

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)-A}=\frac{d}{dz}\{\ln[\varphi(z)-A]\}$$

在区域 B 除有极点外没有其它的奇点。

设 $\varphi(z)$ 是在以原点为中心的某个圆的外部 $|z|>R$ 的所有

点（无穷远点可能除外）上的解析函数，作如下变换

$$z = \frac{1}{\zeta}$$

则

$$\varphi(z) = \varphi\left(\frac{1}{\zeta}\right) = f(\zeta)$$

下面我们研究 $\zeta = 0$ 是 $f(\zeta)$ 的解析点、K 级极点或本性奇点的问题。

若 $\zeta = 0$ 是 $f(\zeta)$ 的解析点，则

$$f(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \cdots + a_n\zeta^n + \cdots$$

若 $\zeta = 0$ 是 $f(\zeta)$ 的 K 级极点，则

$$f(\zeta) = a_K\zeta^{-K} + \cdots + a_1\zeta^{-1} + a_0 + a_{-1}\zeta + \cdots \quad (a_K \neq 0)$$

若 $\zeta = 0$ 是 $f(\zeta)$ 的本性奇点，则

$$f(\zeta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n\zeta^{-n}$$

整函数在有限平面上没有奇点，在无穷远点可能有奇点。

若点 $z = \infty$ 是整函数 $f(z)$ 的解析点，由刘维耳定理推出 $f(z)$ 为常数。

若点 $z = \infty$ 是 $f(z)$ 的 K 级极点时，则

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_K z^K$$

即 $f(z)$ 是 K 次多项式。

若点 $z = \infty$ 是 $f(z)$ 的本性奇点时，$f(z)$ 不是多项式而是超越整函数。如 e^z，$\sin z$，$\cos z$ …。

在有限平面上的半纯函数是可以表成两个整函数的商的函数。

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{g(z)}, \quad g(z) \neq 0$$

它在平面上的有限点除极点外，不能有别的奇点。

如果半纯函数 $f(z)$ 在有限平面上只有有限个极点，而且无穷远点是它的解析点或极点，则 $f(z)$ 是有理函数，它可以展成

如下的表达式：

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_Kz^K+\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{a_{-a}^{(j)}}{(z-z_j)^{\alpha j}}+\cdots+\frac{a_{-1}^{(j)}}{(z-z_j)}\right]$$

在 b 点邻域内函数的罗朗级数中 $(z-b)^{-1}$ 这一项的系数，称为函数 $f(z)$ 关于单值性孤立奇点 b 的留数。

留数基本定理：若 $f(z)$ 在闭曲线 C 内有 n 个孤立奇点 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\alpha_n$，则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz=\sum_{j=1}^{n}\operatorname{res}f(\alpha_j)$$

计算留数的法则 I：若 $z=b$ 是 $f(z)$ 的一级极点，则

$$\operatorname{res}f(b)=\lim_{z\to b}(z-b)f(z)$$

法则 II：若 $z=b$ 是 $f(z)$ 的 m 级极点，则

$$\operatorname{res}f(b)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to b}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-b)^m f(z)]$$

法则 III：设 $f(z)=\varphi_1(z)/\varphi_2(z)$，$\varphi_1(z)$ 和 $\varphi_2(z)$ 都在点 $z=b$ 是解析的，若 $\varphi_1(b)\neq 0$，而 $z=b$ 是 $\varphi_2(z)$ 的单级零点，则 $z=b$ 是 $f(z)$ 的一级极点，而且

$$\operatorname{res}f(b)=\frac{\varphi_1(b)}{\varphi_2'(b)}$$

函数 $f(z)$ 在扩充平面上除去有穷个点 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\alpha_n, \infty$ 外为解析，则 $f(z)$ 在 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\alpha_n, \infty$ 的留数之和等于零，即

$$\sum_{j=1}^{n}\operatorname{res}(\alpha_j)+\operatorname{res}(\infty)=0$$

若 $f(z)$ 给定在任意一条曲线（闭的或非闭的）C 上，这函数在 C 上，最多除去有限个点外为连续，并且在 C 上有界，则积分

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{t-z}dt$$

叫做柯西型积分。

$t=z$ 以及函数 $f(z)$ 在 C 内的所有极点都是函数 $\varphi(t)=f(t)/t-z$ 的极点。

现在，我们计算函数 $\varphi(t)$ 关于 $t=z$，α_0，α_1，$\cdots\alpha_n$ 的留数。α_0，α_1，$\cdots\alpha_n$ 是 $f(z)$ 在 C 内的极点。首先我们得到

$$\operatorname*{res}_{t\to z}\varphi(t)=f(z)$$

其次，在 β_j 点邻域内以相应的罗朗级数代替 $f(t)$，即

$$f(t)=\frac{a_{-\alpha}^{(j)}}{(t-\beta_j)^{\alpha_j}}+\cdots+\frac{a_{-1}^{(j)}}{(t-\beta_j)}+a_0^{(j)}+a_1^{(j)}(t-\beta_j)+\cdots=G_j(t)+H_j(t)$$

式中 $G_j(t)$ 和 $H_j(t)$ 分别为展开式的主要部分和正则部分。

我们知道 $\sum_{j=0}^{n}G_j(t)$ 是一个有理函数，它在无穷远处为零；它的所有极点都在 C 内。函数（z 在 C 内）$\sum_{j=0}^{n}G_j(t)/(t-z)$ 没有改变原来极点，并且在无穷远处有至少是二级的零点。所以它在无穷远点的留数等于零，因此

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\sum_{j=0}^{n}G_j(t)}{t-z}dt=0$$

由此可知

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(t)}{t-z}dt=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(t)-\sum_{j=0}^{n}G_j(t)}{t-z}dt$$

但函数 $f(t)-\sum_{j=0}^{n}G_j(t)$ 在 C 内所有点上都解析，对此可应用

柯西积分公式，于是我们得到

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{t-z}dt = f(z) - \sum_{j=0}^{n} G_j(z)$$

即

$$f(z) = \sum_{j=0}^{n} G_j(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{t-z}dt$$

§2 积分方程和积分变换概要

1-15 平方可积函数

在许多数学物理问题中，引出如下形式的积分方程

$$\varphi(x) - \int_a^b K(x, s)\varphi(s)ds = f(x)$$

其中$K(x, s)$是个已知函数并定义于$a \leqslant x \leqslant b$及$a \leqslant s \leqslant b$，把它叫做积分方程的核，$f(x)$是定义于$[a, b]$的已知函数。$\varphi(x)$是未知函数。

积分

$$\int_a^b |\varphi(x)|^2 dx$$

存在并且有限，则认为函数$\varphi(x)$在$[a, b]$内是平方可积的。$\varphi(x)$，$K(x, s)$和$f(x)$可以是实变函数，也可以是复变函数。

当$\varphi(x)$在$[a, b]$内是平方可积的，积分

$$\int_a^b |\varphi(x)|dx$$

是存在的，也就是$\varphi(x)$在$[a, b]$内绝对可积的。这是因为

$$|\varphi(x)| \leqslant \frac{1}{2}[1 + |\varphi(x)|^2]$$

若$\varphi(x)$和$\psi(x)$在$[a, b]$内平方可积，于是得出以下性质

a) 积分 $\int_a^b |\varphi(x)\psi(x)|dx$ 存在

这是因为

$$|\varphi(x)\psi(x)| \leqslant \frac{1}{2}(|\varphi(x)|^2 + |\psi(x)|^2)$$

b) $\varphi(x) \pm \psi(x)$ 是 $[a, b]$ 内的平方可积函数

这是因为 $|\varphi(x) \pm \psi(x)|^2 \leqslant (|\varphi(x)| + |\psi(x)|)^2 \leqslant 2(|\varphi(x)|^2 + |\psi(x)|^2)$

取如下的符号作为在 $[a, b]$ 间平方可积函数 $\varphi(x)$ 的范数

$$\|D\| = \sqrt{\int_a^b |\varphi(x)|^2 dx}$$

若 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 在 $[a, b]$ 间是平方可积的，函数 $\varphi(x) - \psi(x)$ 的范数为

$$\|\varphi(x) - \psi(x)\| = \sqrt{\int_a^b |\varphi(x) - \psi(x)|^2 dx}$$

而 $\|\varphi(x) - \psi(x)\|$ 可看作是 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 间的距离。

若函数 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 内平方可积，则 $\varphi(x) \in L_2(a, b)$。

施瓦茨 (Schwarz) 不等式：若 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x) \in L_2$，则

$$\left(\int_R \varphi(x)\psi(x)dx\right)^2 \leqslant \int_R \varphi^2(x)dx \int_R \psi^2(x)dx$$

积分符号下的 R 表示一维欧氏空间。

柯西不等式：若 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x) \in L_2$，则

$$\sqrt{\int_R [\varphi(x) + \psi(x)]^2 dx} \leqslant \sqrt{\int_R \varphi^2(x)dx} + \sqrt{\int_R \psi^2(x)dx}$$

若已知 $[a, b]$ 内某函数列 $\varphi_n(x)$，并且 $\varphi_n(x) \in L_2(a, b)$。

若有一函数$\varphi(x)\in L_2(a,\ b)$存在，并且

$$\lim_{n\to\infty}\|\varphi-\varphi_n\|=0$$

我们说函数列$\varphi_n(x)$平均收敛于函数$\varphi(x)$，并记作$\varphi_n\to\varphi$。

与上述一维情况相似，我们可以定义多维区域内的平方可积函数。如二维空间，用R^2表示。

用符号$K\in L_2(R^2)$代表有限积分$\iint_{R^2}|K(x,\ s)|^2dxds$存在。

如积分方程$\varphi(x)-\int_a^b K(x,\ s)\varphi(s)ds=f(x)$中的核$K$在区域（$a\leqslant x\leqslant b$，$a\leqslant s\leqslant b$）中连续，则弗列德霍姆(Fredholm)交比定理适用，即

a）当自由项$f(x)\equiv 0$时，积分方程有一非零解。

b）对于任意的函数$f(x)$，积分方程只有一个唯一解$\varphi(x)\in L_2(R^2)$。除在使$f(x)$为无限或不能定义的有限点外，$\varphi(x)$是满足积分方程的唯一解。

如$K(x,s)$在R^2内是平方可积的，则积分

$$\int_a^b K(x,\ s)\varphi(s)ds$$

无需是x的连续函数。

1-16 用逐次逼近法解积分方程

若 $\int_a^b|K(x,\ s)|^2ds<$常数，$\int_a^b|f(x)|^2dx<\infty$，

令积分方程为

$$\varphi(x)=f(x)+\int_a^b K(x,\ s)\varphi(s)ds \quad (1\text{-}16\text{-}1)$$

取自由项$f(x)$为零次近似解为

$$\varphi_0(x)=f(x) \quad (1\text{-}16\text{-}2)$$

把式(1-16-2)代入式(1-16-1)的右边，得到

$$\varphi_1(x)=f(x)+\int_a^b K(x,\ s)\varphi_0(s)ds$$

如此反复代入后，得到

$$\varphi(x)=f(x)+\int_a^b f(s)\sum_{m=1}^{\infty}K_m(x,\ s)ds \quad (1-16-3)$$

这里

$$K_1(x,\ s)=K(x,\ s)$$

$$K_2(x,\ s)=\int_a^b K(x,\ t)K_1(t,\ s)dt$$

$$K_3(x,\ s)=\int_a^b K(x,\ t)K_2(t,\ s)dt$$

$$\cdots\cdots$$

令 $\Gamma(x,\ s)=\sum_{m=1}^{\infty}K_m(x,\ s)$，则得到

$$\varphi(x)=f(x)+\int_a^b f(x)\Gamma(x,\ s)ds$$

若积分方程为

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,\ s)\varphi(s)ds=f(x) \quad (1-16-4)$$

我们找按 λ 的乘幂排列成的级数形式的解：

$$\varphi(x)=\varphi_0(x)+\lambda\varphi_1(x)+\lambda^2\varphi_2(x)+\cdots \quad (1-16-5)$$

把式(1-16-5)代入式(1-16-4)中，得到：

$$\varphi_0(x)+\lambda\varphi_1(x)+\lambda^2\varphi_2(x)+\cdots$$

$$=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\ s)[\varphi_0(x)+\lambda\varphi_1(x)$$

$$+\lambda^2\varphi_2(x)+\cdots]ds$$

使 λ 同次幂的系数相等，得到：

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_0(x)=f(x)\\&\varphi_1(x)=\int_a^b K(x,\ s)\varphi_0(s)ds\\&\varphi_2(x)=\int_a^b K(x,\ s)\varphi_1(s)ds\\&\cdots\cdots\end{aligned}\right\} \quad (1-16-6)$$

由以上这些等式可以依次地确定出所有的函数$\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …, 若引入上述迭核

$$\left.\begin{aligned} K_1(x,s) &= K(x,s) \\ K_2(x,s) &= \int_a^b K(x,t)K_1(t,s)\,dt \\ K_3(x,s) &= \int_a^b K(x,t)K_2(t,s)\,dt \\ &\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}16\text{-}7)$$

则函数$\varphi_n(x)$可以写为下列表示式:

$$\varphi_0(x) = f(x),$$

$$\cdots\cdots$$

$$\varphi_n(x) = \int_a^b K_n(x,s)\,f(s)\,ds \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

于是级数(1-16-5)现在可以写为形式:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= f(x) + \lambda\int_a^b K_1(x,s)\,f(s)\,ds \\ &\quad + \lambda^2\int_a^b K_2(x,s)\,f(s)\,ds + \cdots \\ &= f(x) + \lambda\int_a^b \Gamma(x,s,\lambda)\,f(s)\,ds \end{aligned} \qquad (1\text{-}16\text{-}8)$$

式中

$$\Gamma(x,s,\lambda) = K_1(x,s) + \lambda K_2(x,s) + \cdots \qquad (1\text{-}16\text{-}9)$$

函数$\Gamma(x,s,\lambda)$称为方程(1-16-4)的预解式。若核$K(x,s)$有界: $|K(x,s)|\leqslant M$, 则可证明, 只要λ足够小, 更确切地说, 只要λ满足条件:

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)} \qquad (1\text{-}16\text{-}10)$$

级数(1-16-9)、式(1-16-8)与式(1-16-5)就一致收敛, 同时$\varphi(x)$是方程(1-16-4)的解。若在级数(1-16-5)中限取n项, 其误差是可以估计出来的。级数(1-16-5)在n项之后的余项为

$$|\lambda^n\varphi_n(x)+\lambda^{n+1}\varphi_{n+1}(x)+\cdots|<|\lambda|^nNM^n(b-a)^n$$
$$+|\lambda|^{n+1}NM^{n+1}(b-a)^{n+1}+\cdots=\frac{NM^n(b-a)^n|\lambda|^n}{1-M(b-a)|\lambda|}$$

这里$|f(x)|\leqslant N$，$|K(x,\ s)|\leqslant M$。

1-17　以有限线性方程组代替积分方程

设给定的积分方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds=f(x)$$

我们可以用任意一种近似积分公式把这个等式中的积分近似地换为某些不包括积分号的简单的表达式。事实上，可以取

$$\int_a^b \psi(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n}A_k\psi(x_k)+\rho \qquad (1\text{-}17\text{-}1)$$

此处A_k和x_k对于给定的区间与给定的数值公式来说是常数，而ρ为误差。一般在这种情况下$A_k\geqslant 0$且$\sum_{k=1}^{n}A_k=b-a$。

对于积分方程(1-16-4)的左边的积分应用式(1-17-1)后，我们得到等式

$$\varphi(x)-\lambda\sum_{k=1}^{n}A_kK(x,x_k)\varphi(x_k)=f(x)+\lambda\rho(x) \qquad (1\text{-}17\text{-}2)$$

在式(1-17-2)中依次令

$$x=x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,$$

我们得出下面的方程组，所求函数在点x_i的值$\varphi(x_i)$满足这个方程组：

$$\varphi(x_i)-\lambda\sum_{k=1}^{n}A_kK(x_i,\ x_k)\varphi(x_k)=f(x_i)+\lambda\rho_i \qquad (1\text{-}17\text{-}3)$$

若略去$\rho_i=\rho(x_i)$。我们得到具有n个未知数$\tilde{\varphi}(x_1)$，$\tilde{\varphi}(x_2)$，$\cdots$，$\tilde{\varphi}(x_n)$的n个方程的方程组：

$$\tilde{\varphi}(x_i)-\lambda\sum_{k=1}^{n}A_kK(x_i,\ x_k)\tilde{\varphi}(x_k)=f(x_i) \qquad (1\text{-}17\text{-}4)$$
$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

它的展开形式为：

$$\tilde{\varphi}(x_1)[1-\lambda A_1K(x_1,\ x_1)]-\lambda\tilde{\varphi}(x_2)A_2K(x_1,\ x_2)-\cdots$$
$$-\lambda\tilde{\varphi}(x_n)A_nK(x_1,\ x_n)=f(x_1),$$
$$-\lambda\tilde{\varphi}(x_1)A_1K(x_2,\ x_1)+\tilde{\varphi}(x_2)[1-\lambda A_2K(x_2,\ x_2)]-\cdots$$
$$-\lambda\tilde{\varphi}(x_n)A_nK(x_2,\ x_n)=f(x_2),$$
$$\cdots\cdots$$
$$-\lambda\tilde{\varphi}(x_1)A_1K(x_n,\ x_1)-\lambda\tilde{\varphi}(x_2)A_2K(x_n,\ x_2)-\cdots$$
$$+\tilde{\varphi}(x_n)[1-\lambda A_nK(x_n,\ x_n)]=f(x_n)$$

解出这个方程组，我们就得到所求函数值$\varphi(x_1)$，$\varphi(x_2)$，…，$\varphi(x_n)$的近似值$\tilde{\varphi}(x_1)$，$\tilde{\varphi}(x_2)$，…，$\tilde{\varphi}(x_n)$。根据这些值，函数本身的近似值可以用某一插值法求得。目前，求出值$\tilde{\varphi}(x)$最方便的方法是从等式(1-7-2)出发，舍去其中的$\rho(x)$，且以$\tilde{\varphi}(x_i)$代替$\varphi(x_i)$。于是$\tilde{\varphi}(x)$可写成下列形式：

$$\tilde{\varphi}(x)=f(x)+\lambda\sum_{k=1}^{n}A_kK(x,\ x_k)\tilde{\varphi}(x_k)$$

显然，如果以和数代替积分时误差愈小，则以线性方程组代替积分方程时所得结果的误差也就愈小。

关于误差的估计详见Л.В.康脱洛维奇和В.И.克雷洛夫著《高等分析近似方法》，科学出版社，1966年中译本上册。

1-18 有退化核的积分方程

若方程的核可用有限项的和表示如下：

$$K(x,s)=\sum_{i=1}^{n}a_i(x)b_i(s)$$

则这样的核叫做退化核，其中$a_i(x)$及$b_i(s)$只依赖于x及s。n个函数$a_i(x)$以及$b_i(x)$是线性无关的。于是

$$\varphi(x)=f(x)+\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\int_a^b b_i(s)\varphi(s)ds$$

令

$$c_i=\int_a^b b_i(s)\varphi(s)ds$$

我们得到

$$\varphi(x)=f(x)+\sum_{i=1}^{n}c_ia_i(x)$$

那么，代回原积分方程后，解出c_i求出方程的解$\varphi(x)$。

退化核的积分方程容易求解这一事实，自然导致这样的想法：在解任意核的方程时，把这个核近似地换成退化核，再解相应于退化核的方程来代替原来的积分方程。找近似于原有核的退化核有许多种方法。如取泰勒级数的若干项以及福里叶级数的若干项作为退化核。

例如求解积分方程

$$\varphi(x)-\int_0^{1/2}\sin xs\varphi(s)ds=f(x)$$

用求解

$$\tilde{\varphi}(x)-\int_0^{1/2}\left(xs-\frac{1}{6}x^3s^3\right)\tilde{\varphi}(s)ds=f(x)$$

来代替。这里把$\sin xs$展开为

$$\sin xs=xs-\frac{x^3s^3}{6}+\frac{x^5s^5}{120}-\cdots$$

1-19 积分方程组

我们可以把如下的积分方程组化为一个积分方程

$$\varphi_j(x)-\sum_{k=1}^{n}\int_a^b K_{jk}(x,s)\varphi_k(s)ds=f_j(x)$$

$$(j=1,\ 2,\cdots n)$$

我们使x和s的变动区间是$[a,\ nb-(n-1)a]$。用以下的关系来确定在所指区间内的函数$\Phi(x)$，$F(x)$和$K(x,s)$：

若 $(j-1)b-(j-2)a\leqslant x<jb-(j-1)a$

则令 $\Phi(x)=\varphi_j[x-(j-1)(b-a)]$

$F(x)=f_j[x-(j-1)(b-a)]$

若 $(j-1)b-(j-2)a \leqslant x < jb-(j-1)a$

$(k-1)b-(k-2)a \leqslant s < kb-(k-1)a$

则令

$K(x,s)=K_{jk}[x-(j-1)(b-a),\ s-(k-1)(b-a)]$

由以上的规定，则方程组改为如下的一个方程

$$\Phi(x)-\int_a^{nb-(n-1)a} K(x,s)\Phi(s)ds=F(x)$$

解劳瑞西拉—谢尔曼积分方程

$$\omega(t_0)-\frac{2}{\pi}\int_C \omega(t)\vartheta'(t_0,\ t)dt + \frac{2}{\pi}\int_C \overline{\omega(t)}e^{-2i\delta(t_0,t)}\vartheta'(t_0,\ t)dt=f(t_0)$$

时，可以把它化为积分方程组。

这里C是充分光滑的闭曲线。$\omega(t)$是所求在C上的复变量t的函数。$\vartheta'(t_0,\ t)$和$e^{-2i\delta(t_0,t)}$是在C上复变量t_0，t的连续函数。令

$$-\frac{2}{\pi}\vartheta'(t_0,\ t)=K_1(t_0,\ t)$$

$$-\frac{2}{\pi}e^{-2i\delta(t_0,t)}=K_2(t_0,\ t)$$

于是得出

$$\omega(t_0)-\int_C K_1(t_0,\ t)\omega(t)dt - \int_C K_2(t_0,\ t)\overline{\omega(t)}dt=f(t_0)$$

式中$K_1(t_0,\ t)$和$K_2(t_0,\ t)$是t_0和t的连续函数。取$t=t(s)$，s代表弧长。并且$dt/ds=t'(s)$在C上是连续的。于是

$$\omega(s_0)-\int_0^l K_1(s_0,\ s)t'(s)\omega(s)ds - \int_0^l K_2(s_0,\ s)t'(s)\overline{\omega(s)}ds=f(s_0)$$

式中 $\omega(s)$ 是复变函数。

令
$$\omega(s)=\omega_1(s)+i\omega_2(s)$$
$$K_1(s_0, s)\omega(s)=K_{11}(s_0, s)+iK_{12}(s_0, s)$$
$$K_2(s_0, s)\omega(s)=K_{21}(s_0, s)+iK_{22}(s_0, s)$$
$$f(s)=f_1(s)+if_2(s)$$

把它们代入上述积分方程后，得到积分方程组

$$\omega_1(s_0)-\int_0^l \widetilde{K}_1(s_0, s)\omega_1(s)ds$$
$$-\int_0^l \widetilde{K}_2(s_0, s)\omega_2(s)ds=f_1(s_0)$$
$$\omega_2(s_0)-\int_0^l \widetilde{K}_3(s_0, s)\omega_1(s)ds$$
$$-\int_0^l \widetilde{K}_4(s_0, s)\omega_2(s)ds=f_2(s_0)$$

式中

$$\widetilde{K}_1(s_0, s)=K_{11}(s_0, s)-K_{21}(s_0, s)$$
$$\widetilde{K}_2(s_0, s)=-K_{21}(s_0, s)+K_{22}(s_0, s)$$
$$\widetilde{K}_3(s_0, s)=K_{12}(s_0, s)-K_{22}(s_0, s)$$
$$\widetilde{K}_4(s_0, s)=K_{11}(s_0, s)-K_{21}(s_0, s)$$

这两个积分方程与原积分方程是等价的。

因为在区间〔$0\leqslant s_0\leqslant l$，$0\leqslant s\leqslant l$〕，$\widetilde{K}_1$，$\widetilde{K}_2$，$\widetilde{K}_3$ 和 $\widetilde{K}_4$ 是连续的。按前面的法则可知

当 $0\leqslant s_0\leqslant l$ 时，　$F(s_0)=\omega_1(s_0)$

当 $l<s_0\leqslant 2l$ 时，　$F(s_0)=\omega_2[s_0-l]$

同样可以定义

当 $0\leqslant s_0\leqslant l$ 时，　$G(s_0)=f_1(s_0)$

当 $l<s_0\leqslant l$ 时，　$G(s_0)=f_2[s_0-l]$

同样设

当 $0\leqslant s_0\leqslant l$，$0\leqslant s\leqslant l$ 时，

$$\widetilde{K}(s_0, s)=\widetilde{K}_1(s_0, s)$$

当 $0 \leqslant s_0 \leqslant l$， $l \leqslant s \leqslant 2l$ 时，

$$\widetilde{K}(s_0, \quad s) = \widetilde{K}_2(s_0, \quad s - l)$$

当 $l \leqslant s_0 \leqslant 2l$， $0 \leqslant s \leqslant l$ 时，

$$\widetilde{K}(s_0, \quad s) = \widetilde{K}_3(s_0 - l, \quad s)$$

当 $l \leqslant s_0 \leqslant 2l$， $l \leqslant s \leqslant 2l$ 时，

$$\widetilde{K}(s_0, \quad s) = \widetilde{K}_4(s_0 - l, \quad s - l)$$

在 $R^2(0 \leqslant s_0 \leqslant 2l, \quad 0 \leqslant s \leqslant 2l)$ 中 $\widetilde{K}(s_0, \quad s)$ 是分段连续的。于是上述积分方程组合并为一个积分方程如下：

$$F(s_0) - \int_0^{2l} \widetilde{K}(s_0, \quad s) F(s) ds = G(s_0)$$

因为劳瑞西拉—谢尔曼方程是满足弗列德霍姆交比定理，故这个方程也满足弗列德霍姆交比定理。

1-20 拉普拉斯和黎曼—梅林积分变换

设有一函数 $f(x) \in L_2(0, \infty)$，并且 $\zeta = \xi + i\eta$。表达式

$$\varphi(\zeta) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-\zeta x} dx$$

叫做拉普拉斯积分。一般说，它在 $\mathrm{Re}[\zeta] > 0$ 内是解析的，当 $\zeta \to \infty$， $\varphi(\zeta) \to 0$。

按照梅林公式， $f(x)$ 用 $\varphi(\zeta)$ 表示如下

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi - i\infty}^{\xi + i\infty} \varphi(\zeta) e^{\zeta x} d\zeta$$

这里 ξ 是很大的正数。当 $x < 0$ 时， $f(x) = 0$。

黎曼—梅林积分变换由以下方程确定

$$F(\zeta) = \int_0^{\infty} f(x) x^{\zeta - 1} dx$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi - i\infty}^{\xi + i\infty} F(\zeta) x^{-\zeta} d\zeta$$

设

$$\psi(\zeta) = \int_0^{\infty} g(x) e^{-\zeta x} dx$$

$$\varphi(\xi)\psi(\xi)=\int_0^\infty e^{-\xi x}\left[\int_0^x f(x-t)g(t)dt\right]dx$$

而

$$\int_0^x f(x-t)g(t)dt=\frac{1}{2\pi i}\int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty}\varphi(\zeta)\psi(\zeta)e^{\zeta x}d\zeta$$

设

$$H(\xi)=\int_0^\infty h(x)x^{\xi-1}dx$$

而

$$\int_0^\infty f(x)h(x)x^{\xi-1}dx=\frac{1}{2\pi i}\int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty}F(w)H(\xi-w)dw$$

a）黎曼—勒贝格定理●

设 $f(x)\in L(-\infty,\ \infty)$，当 $\lambda\to\pm\infty$ 时，积分式 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\times e^{i\lambda x}dx\to 0$。

b）设 $f(y)=g(y)/y^\alpha$，$0<\alpha<1$ 并且 $g(y)$ 在 $(0,\ \infty)$ 上有限变化。

$$\varphi_c(x)=\int_0^\infty\frac{g(y)}{y^\alpha}\cos xydy\sim g(+0)\Gamma(1-\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{2}x^{\alpha-1}\quad(x\to\infty)$$

$$\varphi_c(x)\sim g(\infty)\Gamma(1-\alpha)\sin\pi\alpha/2\cdot x^{\alpha-1}\quad(x\to 0)$$

而且

$$\varphi_s(x)=\int_0^\infty\frac{g(y)}{y^\alpha}\sin xydy$$

满足与以上相似的情况，只不过把$\sin\pi\alpha/2$换上$\cos\pi\alpha/2$。

c）设 $f(y)$ 和 $f'(y)$ 除端点 $y=0$ 外，在每一有限间隔是可积的。再设 $y^{\alpha+1}f'(y)$ 对于所有的 y 值有限，当 $y\to\infty$ $(y\to 0)$ 时，$f(y)\sim 1/y^\alpha$。

当 $x\to 0$ $(x\to\infty)$ 时

● 本节以下内容仅介绍结论，不加证明。

$$\varphi_c(x)=\int_0^\infty f(y)\cos xy\,dy\sim\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Gamma(1-\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{2}x^{\alpha-1}$$

$$\varphi_s(x)=\int_0^\infty f(y)\sin xy\,dy\sim\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Gamma(1-\alpha)\cos\frac{\pi\alpha}{2}x^{\alpha-1}$$

d）若 $(1+|y|^n)f(y)\in L(-\infty,\infty)$，则如下方程可以微分 n 次。

$$\varphi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)e^{ixy}dy$$

由此可知，当$x\to\pm\infty$时，$\varphi(x)$，$\varphi'(x)$，…，$\varphi^{(n)}(x)$是连续的并且趋向于零。

若是当$y\to\pm\infty$，$f(y)$，$f'(y)$，…，$f^{(n)}(y)$连续并且趋向于零，而$f^{(n)}(y)\in L$，重复分部积分就得到

$$\varphi(x)=\left(\frac{i}{x}\right)^n\int_{-\infty}^{+\infty}f^{(n)}(y)e^{ixy}dy$$

所以，当$x\to\pm\infty$时，$x^n\varphi(x)\to 0$。

与此相似，若$(1+|y|^n)f(y)\in L^2(-\infty,\infty)$，当$x\to\pm\infty$，$\varphi(x)$，$\varphi'(x)$，…，$\varphi^{(n-1)}(x)$连续并且趋向于零。$\varphi^{(n)}(x)\in L^2(-\infty,\infty)$。反之亦然。

1-21 积分变换的某些特殊性质

设$\varphi(\zeta)$在无穷远点的邻域是解析的。当$|\zeta|>R$时，它按ζ^{-1}展为

$$\varphi(\zeta)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k}{\zeta^k}$$

由梅林变换，可知

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty}\varphi(\zeta)e^{\zeta x}dx=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$$

这个级数对所有有限值x是绝对收敛的并且可以任意求导多少次。这也就是说对于所有大于零的有限值x，$f(x)$是解析

函数。

设对于所有有限值 $x>0$，$f(x)$ 是解析函数。在 $x=0$ 的右边，$f(x)$可以求导任意次，并且 $f(x)$所有次的导式当 $x=0$ 时都满足下式

$$|f^{(k)}(0)|<\lambda^k M$$

式中 λ 和M是与 k 无关的常数；当$x\to\infty$时，$f^{(k)}(x)$ 单调趋向于零。则 $\varphi(\zeta)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k/\zeta^k$ 当 $|\zeta|<\lambda$ 时收敛。此时 $\varphi(\zeta)=\int_0^{\infty}f(x)e^{-\zeta x}dx$。由此式得到

$$\varphi(\zeta)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{\zeta^{k+1}}$$

因为$|f^{(k)}(0)|<M\lambda^k$，所以当$|\zeta|>\lambda$ 时，$f(x)$是绝对收敛。

设 $\varphi(i\eta)$是连续的并且有分段连续导式。它有有限个第一类间断点 $\eta_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$。当$|\eta|\to\infty$，$\varphi(i\eta)$和它的所有各次导式$\varphi^{(k)}(i\eta)$单调趋向于零，其速度不低于$M|\eta|^{1-k}$趋向于零的速度。函数

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(i\eta)e^{i\eta x}d\eta$$

和所有它的导式$f^{(m)}(x)(m=1,\ 2,\ \cdots)$ 当 $x\to\infty$时是趋向于零。

因为当$|\eta|\to\infty$，$\eta^m\varphi^{(2+m)}(i\eta)$单调趋向于零，可由此证明当 $x\to\infty$时，$f(x)$及 $f^{(m)}(x)$ 是趋向于零的。

若 $\varphi(\zeta)$在圆$|\zeta|=R$以外的区域解析，当有限值时，$\eta\varphi(i\eta)$连续并满足H条件，则柯西型积分

$$\varphi(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(i\eta)}{\zeta-i\eta}d\eta$$

是在无穷远点邻域的解析函数。它在$|\zeta|>R$ 外可以写为如下形式

$$\varphi(\zeta)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k}{\zeta^k}$$

在虚轴上$\varphi(ir)$满足H条件。所谓$\varphi(i\eta)$在无穷远点邻域满足H条件，也就是说当$|\eta_1|$和$|\eta_2|$很大时，要满足如下条件：

$$|\varphi(i\eta_2)-\varphi(i\eta_1)|\leqslant M\left|\frac{1}{\eta_1}-\frac{1}{\eta_2}\right|^{\mu},\quad 0<\mu\leqslant 1$$

满足这个条件时，则

$$\lim_{|\zeta|\to\infty}\varphi(\zeta)=\pm\frac{1}{2}\varphi(\infty)$$

ζ在左半平面趋向于无穷，则上式取“+”号，反之则取“−”号。

§3 弹性力学的基本方程

1-22 物体

我们令开集代表一物体。它的边界由有限多的分段光滑简单有限曲线或由简单无限曲线所组成，如图 1-13 到图 1-17 所示。

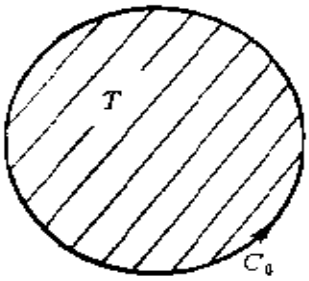


图1-13 有限物体

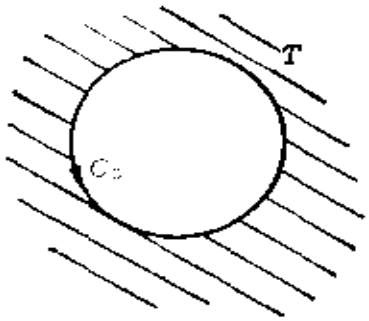


图1-14 无限物体

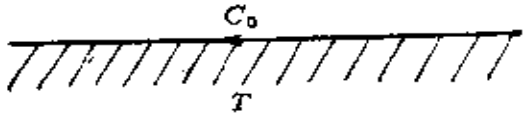


图1-15 半平面

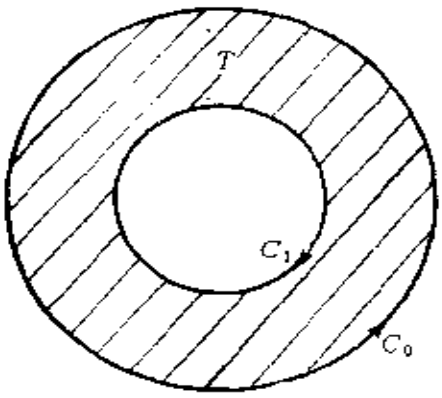


图1-16　有限双连通物体

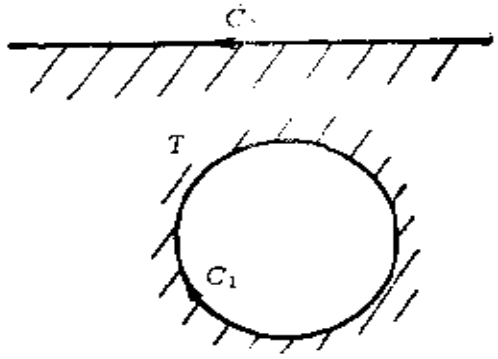


图1-17　无限双连通物体

这里我们没有把边界算做物体。在以后的研究中需要把边界也计入物体时，我们以符号 $\bar{T}$ 表示此“封闭物体”。当沿边界前进而点集（物体）在前进方向的左侧，这个方向叫作正向。

在许多实际问题中，我们要研究物体间相互作用。所谓两个物体 T_1 和 T_2 接触，$\bar{T}_1$ 和 $\bar{T}_2$ 在其边界上，必有公共的边界（一些公共的点）。实际上，两个物体互相发生作用后，不可能是一个点接触。

1-23　外力

作用于物体上的外力有两种

a）作用于物体单元体积上的外力，例如吸引力，离心力等。设在物体 T 中的任一点，由分量为 $g_x(x,y)$ 和 $g_y(x,y)$ 的矢量所确定的力就叫做体力，它是作用于单元体积中的。$g_x(x,y)$ 和 $g_y(x,y)$ 是 T 中点 (x,y) 的连续函数。那么，一部分体积作用于另一部分体积的体积力为

$$X=\iint g_x(x,y)\,dxdy$$

$$Y=\iint g_y(x,y)\,dxdy$$

这是二维的情况。若是三维时，则

$$X=\iiint g_x(x,y,z)\,dxdydz$$

$$Y=\iiint g_y(x,y,z)dxdydz$$

$$Z=\iiint g_z(x,y,z)dxdydz$$

b）作用于物体单元面积上的外力，例如压力。若某物体T（图 1-18）被$\overset{\frown}{AB}$弧分为两部分T_1和T_2。物体受力而处于平衡。用主矢量p代表沿$\overset{\frown}{AB}$弧T_2对T_1的作用力。若在物体T中一点z并沿任一方向n定义两个连续函数$f_x(z,n)$和$f_y(z,n)$。我们可以把函数偶〔$f_x(z,n)$，$f_y(z,n)$〕称之为“应力矢量”。设$\overset{\frown}{AB}$的坐标为：

$$x=x(s);\quad y=y(s)$$

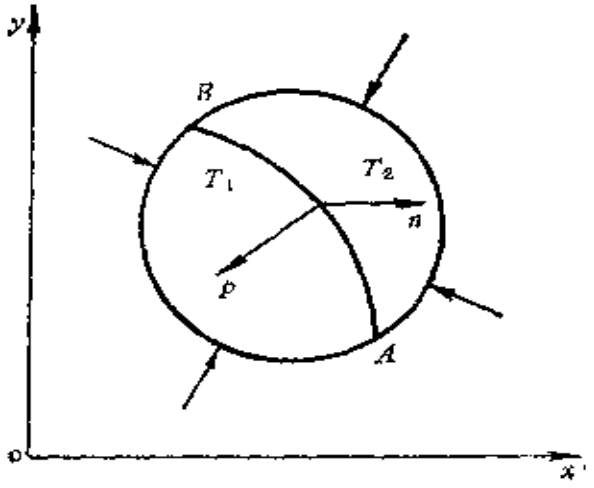


图 1-18

于是沿$\overset{\frown}{AB}$弧的应力矢量场定义为

$$\varphi_x(s)=f_x[z(s),n(s)]$$

$$\varphi_y(s)=f_y[z(s),n(s)]$$

那么，p力在坐标系中的分量分别为：

$$p_x=\int_{\overset{\frown}{AB}}\varphi_x(s)ds$$

$$p_y=\int_{\overset{\frown}{AB}}\varphi_y(s)ds$$

主矢量 p 是作用于面上的内力。它表示在正法线方向那一边的物体对负法线方向那一边的物体的作用。同样也可以表示作用于物体外表面上的力，这就是面力。这时，$\overset{\frown}{AB}$ 弧是物体边界的弧线。

1-24 内应力及一点的应力状况的分析

物体受外力作用时，其形状和大小发生改变，外力的作用传遍整个物体。若在物体中取一微小面积，通过此微小面积有内力的传递。我们用单位面积上的内力来表示应力。因此，在任一点处的某一微小面积 $\Delta x\Delta y=\Delta A$ 上的应力，就可用下列的极限来定义

$$\text{应力}=\lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta p}{\Delta A}$$

式中 Δp 是作用该点周围微小面积 ΔA 上的内力。这里对 ΔA 和 Δp 并没有进一步的描述。按照上节的定义，$\varphi_x(s)$ 和 $\varphi_y(s)$ 是连续而且 p_x 和 p_y 是存在的，自然 $\varphi(s)=\varphi_x(s)+i\varphi_y(s)$ 就表示应力矢量。

设微小面积 ΔA 与三个坐标轴的方向余弦为：

$$l=\cos(n,x),\ m=\cos(n,y),\ n=\cos(n,z)$$

自然内应力与 l，m，n 有关。如图 1-19 所示，为了简单取二维情

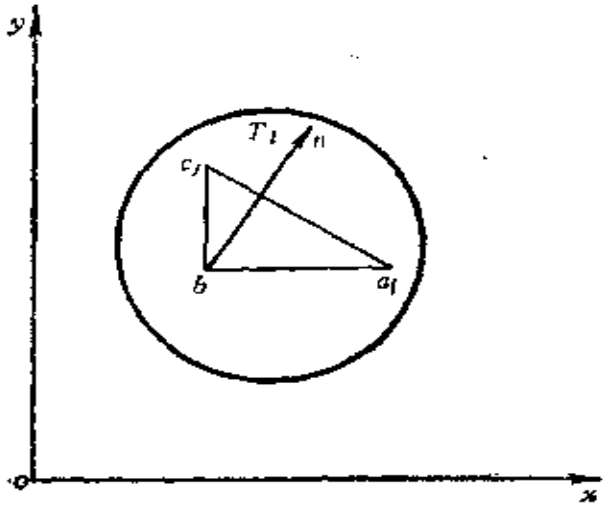


图 1-19

况来分析。在物体 T_1 中，取三角形 a_jbc_j。$j=1,2,3,\cdots,\infty$。当 $j\to\infty$ 时，三角形 a_jbc_j 趋向于一点。n 表示 a_jc_j 的法线方向。随着 n 的改变，$f_x(z,n)$，$f_y(z,n)$ 也改变。那么，当法线转变了 π 角时，应力矢量改变为：

$$f_x(z,-n)=-f_x(z,n)$$
$$f_y(z,-n)=-f_y(z,n)$$

我们令 n_x 和 n_y 代表正 x 轴和正 y 轴的法线方向。而 n 与正 x 轴和正 y 轴的锐夹角为 $\angle nx$ 和 $\angle ny$。而且有

$$0<\angle nx<\frac{\pi}{2};\quad 0<\angle ny<\frac{\pi}{2}$$

设 ba_j 和 bc_j 分别与正 x 轴和正 y 轴平行。取 $a_jc_j=\lambda/j$，当 $j=1$ 时，$\lambda=a_1c_1$。在 T_1 中，b 点的坐标是 z。由力的平衡可知

$$\int_{ba_j}f_x(z,n)ds+\int_{a_jc_j}f_x(z,n)ds+\int_{c_jb}f_x(z,n)ds+\iint_{a_jbc_j}g_x(x,y)dxdy=0$$

在 ba_j 边上，$f_x(z,n)=f_x(z,-n_y)$，而 $ba_j=\frac{\lambda}{j}-\cos(n,y)$；在 a_jc_j 边上为 $f_x(z,n)$；在 bc_j 边上，$f(z,n)=f_x(z,-n_x)$，$bc_j=\lambda/j\cos(n,x)$。于是

$$\frac{\lambda}{j}[f_x(z_1,-n_y)\cos(n,y)+f_x(z_2,n)+f_x(z_3,-n_x)\cos(n,x)]+\frac{\Delta v}{j^2}g_x(z_4)=0$$

这里 z_1,z_2 和 z_3 表示 ba_j，a_jc_j 和 bc_j 边中的某一点坐标，z_4 是 a_jcb_j 中某一点坐标。$\Delta v/j^2$ 是三角形 a_jbc_j 的面积。那么，当 $j\to\infty$ 时，则有

$$f_x(z,n)=f_x(z,n_x)\cos(n,x)+f_x(z,n_y)\cos(n,y)$$

我们知道 f 和 g 在 T_1 中都是连续的。同样可得到

$$f_y(z,n)=f_y(z,n_x)\cos(n,x)+f_y(z,n_y)\cos(n,y)$$

这是由力的平衡所得到的结果。下面分析由力矩平衡得到的结果。如图 1-20 所示，有一四方形体 T_{1j}，$j=1,2,\cdots,\infty$，其中心点为 O_1，边角为 $a_jb_jc_jd_j$。$a_jb_j//y$ 轴，$a_jb_j=\lambda/j$。而且 $d_ja_j//x$ 轴。

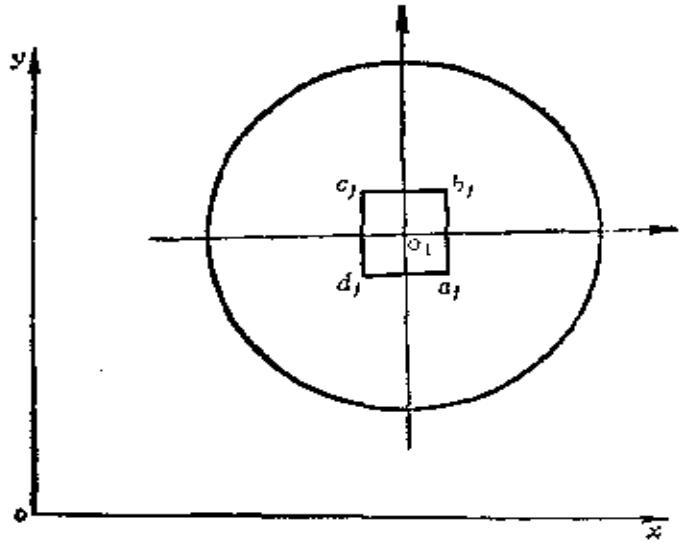


图 1-20

由力矩平衡得到

$$\int_{a_jb_j}[f_y(z,n_x)x(s)-f_x(z,n_x)y(s)]ds$$
$$+\int_{b_jc_j}[f_y(z,n_y)x(s)-f_x(z,n_y)y(s)]ds$$
$$+\int_{c_jd_j}[f_y(z,-n_x)x(s)-f_x(z,-n_x)y(s)]ds$$
$$+\int_{d_ja_j}[f_y(z,-n_y)x(s)-f_x(z,-n_y)y(s)]ds$$
$$=\iint_{T_{1j}}[g_y(s)x(s)-g_x(s)y(s)]dxdy$$

这里 z 是积分限内的动点，s 是距某起始点的弧长。令

$$\varphi_1(y)=f_y[z(s),n_x]-\varphi_2(y)$$
$$=f_y[z(s),-n_x]=-f_y[z(s),n_x]$$
$$\varphi(y)=\varphi_1(y)+\varphi_2(y)$$

在 a_jb_j 和 c_jd_j 边，x 是常量，于是

$$\int_{a_jb_j} f_y[z, n_x]x ds + \int_{c_jd_j} f_y[z, -n_x]x ds$$

$$= \int_{-\frac{\lambda}{2j}}^{\frac{\lambda}{2j}} \varphi_1(y)\frac{\lambda}{2j}\,dy + \int_{-\frac{\lambda}{2j}}^{\frac{\lambda}{2j}} \varphi_2(y)\frac{\lambda}{2j}dy$$

$$= -\frac{\lambda}{2j}\int_{-\frac{\lambda}{2j}}^{\frac{\lambda}{2j}} \varphi(y)dy = \frac{\lambda^2}{2j^2}\varphi(y_0)$$

y_0 是 $-\lambda/2j$ 到 $\lambda/2j$ 中间的某个值。若令 z_1, z_5 和 z_3, z_7 分别在 a_jb_j 和 c_jd_j 之间并有同样的 $\tilde{y}$ 值。z_2, z_4 和 z_6, z_8 分别在 b_jc_j 和 d_ja_j 之间并有相同的 $\tilde{x}$ 值。于是令

$$\varphi(y_0) = \varphi_1(y_0) + \varphi_2(y_0)$$
$$= f_y(z_1, n_x) + f_y(z_3, n_x)$$

依此，得到类似的结果。那么，就得出

$$\frac{\lambda^2}{2j^2}[f_y(z_1, n_x) + f_y(z_3, n_x)] + \frac{\lambda}{j}\tilde{x}[f_y(z_2, n_y)$$

$$- f_y(z_4, n_y)] - \frac{\lambda}{j}\tilde{y}[f_x(z_5, n_x) - f_x(z_7, n_x)]$$

$$- \frac{\lambda^2}{2j^2}[f_x(z_6, n_y) + f_x(z_8, n_y)]$$

$$= -\frac{\lambda^2}{j^2}[g_y(z')x' - g_x(z')y']$$

这里 x' 和 y' 是点 z' 的坐标。$f_x(z, n)$，$f_y(z, n)$，$g_x(z)$ 和 $g_y(z)$ 是连续函数。当 $j \to \infty$ 时，则有

$$z_1, z_2, \cdots, z_8 \text{ 和 } z' \longrightarrow z$$

而且

$$\tilde{x}, \tilde{y} \longrightarrow 0$$

于是我们得到

$$\lim_{j\to\infty}[f_y(z_1, n_x) + f_y(z_3, n_x)] = \lim_{j\to\infty}[f_x(z_6, n_y) + f_x(z_8, n_y)]$$

即

$$f_y(z, n_x) = f_x(z, n_y)$$

这表明，物体处于受力平衡时，在它里面一点 z 都需要满足上述条件。

由此，在物体中可以定义三个连续函数为 $X_x(z)$，$X_y(z)$ 和 $Y_y(z)$，而且

$$f_x(z, n_x) = X_x(z)$$
$$f_y(z, n_y) = Y_y(z)$$
$$f_x(z, n_y) = X_y(z)$$
$$f_y(z, n_x) = Y_x(z)$$

那么，由这些量可以确定 T 中方向为 n 的任一点处的应力矢量。利用上述结果，如图 1-21 所示，C 为一光滑曲线。X_n, Y_n 为点 M' 上的应力。M' 在 C 上。可知

$$X_n = f_x(z, n) = X_x\cos(n, x) + Y_x\cos(n, y)$$
$$Y_n = f_y(z, n) = X_y\cos(n, x) + Y_y\cos(n, y)$$

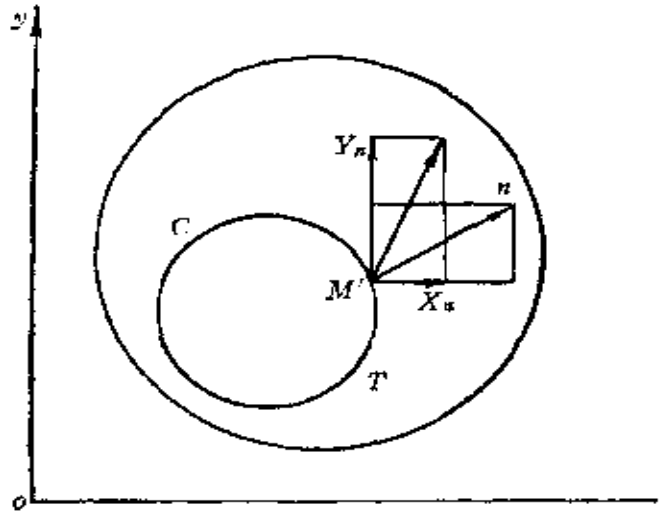


图 1-21

这表明，若给定 X_x, X_y 和 Y_y，则可决定任一方向的应力矢量。同样，可以求出三维问题相应的结果

$$\left.\begin{aligned} X_n &= f_x(\tilde{z},\ n) = lX_x + mY_x + nZ_x \\ Y_n &= f_y(\tilde{z},\ n) = lX_y + mY_y + nZ_y \\ Z_n &= f_z(\tilde{z},\ n) = lX_z + mY_z + nZ_z \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}24\text{-}1)$$

式中 $\tilde{z}$ 表示物体中的任一点坐标。

如果我们知道当物体受外力及体积力而处于平衡时，可知

$$p_x = \int X_n ds + \iint g_x dxdy = \int [X_x\cos(n, x) + X_y\cos(n, y)]ds$$

$$+ \iint g_x dxdy = \iint \left(-\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + g_x\right)dxdy$$

同样可知

$$p_y = \iint \left(\frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_x}{\partial x} + g_y\right)dxdy$$

又知道

$$M = \int (xY_n - yX_n)ds + \iint (xg_y - yg_x)dxdy$$

$$= \int \{x[Y_x\cos(n, x) + Y_y\cos(n, y)]$$

$$- y[X_x\cos(n, x) + X_y\cos(n, y)]\}ds$$

$$+ \iint (xg_y - yg_x)dxdy$$

$$= \int [(xY_x - yX_x)\cos(n, x)$$

$$+ (xY_y - yX_y)\cos(n, y)]ds$$

$$+ \iint (xg_y - yg_x)dxdy$$

$$= \iint \left[\frac{\partial}{\partial x}(xY_x - yX_x) + \frac{\partial}{\partial y}(xY_y - yX_y)\right]dxdy$$

$$+ \iint (xg_y - yg_x)dxdy$$

$$= \iint \left[(Y_x - X_y) + x\left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + g_y\right)\right.$$

$$\left. - y\left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + g_x\right)\right]dxdy$$

由静力平衡可知$M=p_x=p_y=0$，于是得到平衡方程为

$$\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+g_x=0$$

$$\frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+g_y=0$$

$$X_y=Y_x$$

反过来也可以证明，当满足以上三个条件时，M、p_x和p_y也必为零。由此，可知以上三个条件是平衡的充要条件。

同样对于三维问题也可以得出如下结果

$$\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}+g_x=0$$

$$\frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}+g_y=0$$

$$\frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}+g_z=0$$

而且

$$X_y=Y_x,\quad X_z=Z_x,\quad Y_z=Z_y$$

1-25 应变及一点的应变状况的分析

当物体中各点的相对位置改变时，则该物体即处于变形状态。在物体中任一点处都有一个质点。在变形前，该质点的坐标为x，y，z。形状改变后，这个质点在x，y，z方向上产生了位移u，v，w，并具有新的坐标$x+u$，$y+v$，$z+w$。我们认为材料是连续的，物体中的位移u，v，w是逐点变化的，所以可以取u，v，w是x，y，z的函数。变形前物体上的直线在变形后可以变成光滑曲线。

首先研究二维的情况，如平面应变情况的应变。所谓平面应变，即原在同一平面内的质点变形后仍位于同一平面内。

设在物体T中已知函数$u(x,y)$和$v(x,y)$。它们有到三阶的偏导数。函数$u(x,y)$和$v(x,y)$叫做位移，它是点(x,y)位移矢量的分量。

我们分析在物体T中任一点(x_0,y_0)邻域内的微小变形。由

于 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 是连续的，那么，由泰勒展开式可知：

$$u(x, y)=u(x_0, y_0)+\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_u(x, y)$$

$$v(x, y)=v(x_0, y_0)+\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_v(x, y)$$

式中 $$\Delta x=x-x_0,\quad \Delta y=y-y_0$$

$\varepsilon_u(x, y)$ 和 $\varepsilon_v(x, y)$ 代表高阶小量。于是在点（0，0）邻域内的微小位移可写为：

$$u(x, y)=u(0, 0)+a_{11}x+a_{12}y$$

$$v(x, y)=v(0, 0)+a_{21}x+a_{22}y$$

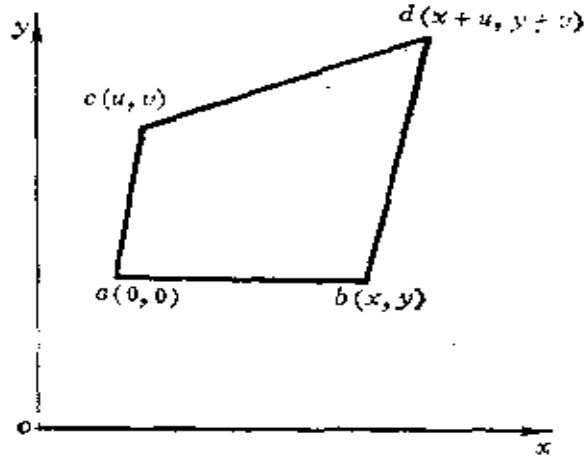


图 1-22

由图 1-22 可以看出，在任意一点邻域内，一段短线 $\overline{ab}$ 变到另一个位置 $\overline{cd}$。那么，我们可以得到

$$u(x, y)-u(0, 0)=a_{11}x+a_{12}y=\Delta u$$

$$v(x, y)-v(0, 0)=a_{21}x+a_{22}y=\Delta v$$

我们把 Δu 和 Δv 叫做线段的变形矢量沿 x 和 y 方向的分量。这里

$$a_{11}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \qquad a_{12}=\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$$

$$a_{21}=\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \qquad a_{22}=\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$$

我们把以下的矩阵叫做小形变（应变）张量。

$$D=\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

又因为

$$D=\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}=D_0+R$$

这里矩阵 D_0 叫做纯形变（张量）矩阵，R 叫做旋转（张量）矩阵。

$$D_0=\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$R=\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right) & 0 \end{vmatrix}$$

令

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e_{xx},\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=e_{yy}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=e_{xy},\qquad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\omega$$

于是 D_0 也可以写为

$$D_0=\begin{vmatrix} e_{xx} & e_{xy} \\ e_{xy} & e_{yy} \end{vmatrix}$$

同样

$$R=\begin{vmatrix} 0 & +\omega \\ -\omega & 0 \end{vmatrix}$$

e_{xx}, e_{yy}, e_{xy} 就叫做应变（形变）分量。因为 u 和 v 有三阶连续导数，故 e_{xx}, e_{yy}, e_{xy} 和 ω 有二阶连续导数。

对于三维问题，同样可得

$$\Delta u = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z$$
$$\Delta v = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z$$
$$\Delta w = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z$$

而且

$$a_{13} = \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0\\z=z_0}} \qquad a_{23} = \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0\\z=z_0}}$$

$$a_{31} = \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0\\z=z_0}} \qquad a_{32} = \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0\\z=z_0}}$$

$$a_{33} = \left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0\\z=z_0}}$$

其余 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 同前，只不过添加 $z = z_0$。

设

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$
$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$
$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

而且令

$$\frac{\partial w}{\partial z} = e_{zz}, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) = e_{xz}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = e_{zy}$$

于是可得如下纯形变矩阵 D_0 和旋转矩阵 R。

$$D_0=\begin{vmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{vmatrix}$$

$$R=\begin{vmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{vmatrix}$$

若物体刚性平移，则 $u(x, y)$，$v(x, y)$ = 常量，自然可知

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

若物体没有旋转，则 $\omega=0$，即

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

若物体绕点（0，0）旋转一个很小的角度 θ，由图 1-23 可以得出

$$x_1=x+u=r\cos(\theta+\alpha),\quad y_1=y+v=r\sin(\theta+\alpha)$$

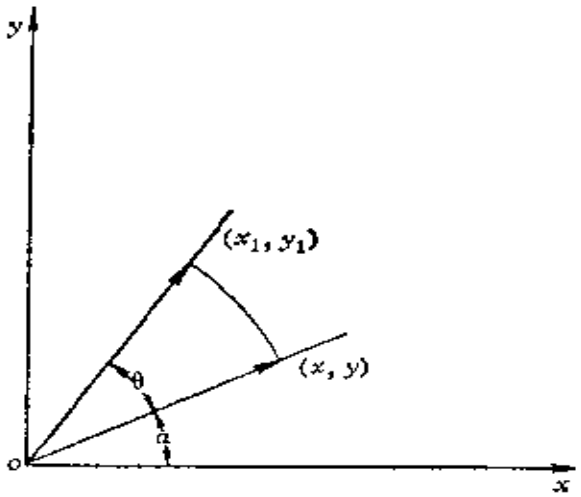


图 1-23

因为 $x=r\cos\alpha,\quad y=r\sin\alpha$

所以 $u=x(\cos\theta-1)-y\sin\theta$

$v=x\sin\theta+y(\cos\theta-1)$

当 θ 很小时，可取

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\approx-\theta,\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\approx 0$$

由这个结果，可知 $D_0=0$。而

$$\omega=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)=+\frac{\partial u}{\partial y}\approx-\theta$$

于是旋转矩阵 R 为

$$R=\begin{vmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{vmatrix}$$

若是变形很小，以致在物体中每点的纯形变分量为零。此时物体的变形为旋转，其矩阵为

$$R=\begin{vmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{vmatrix}$$

因为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

若是 θ 很小，$\cos\theta\approx 1$，$\sin\theta\approx\theta$，则绕 x_0，y_0 点旋转 θ 后的位移为

$$u=-(y-y_0)\theta,\quad v=\theta(x-x_0)。$$

这里 x_0，y_0，θ 都是常数。

图1-24 所示为某微小物体变形的情况。若令 A 点坐标为 (0，0)，B 点坐标为 $(\Delta x, 0)$，并且令

$$u(0,0)=v(0,0)=0$$

那么在 B 点有如下位移

$$u(\Delta x,0)=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}\Delta x$$

$$v(\Delta x,0)=\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}\Delta x$$

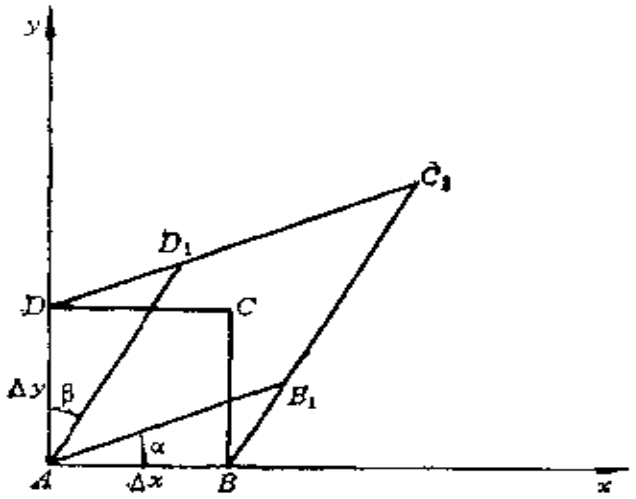


图 1-24

在 B_1 点的坐标为

$$\Delta x + u(\Delta x, 0) = \Delta x\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}\right)$$

$$v(\Delta x, 0) = \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} \Delta x$$

由定义

$$e_{xx} = \frac{\overline{AB_1} - \overline{AB}}{\overline{AB}} = \frac{\Delta x\sqrt{(1+\partial u/\partial x)^2 + (\partial v/\partial x)^2} - \Delta x}{\Delta x}$$

$$= \sqrt{1 + 2\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} - 1 \approx \frac{\partial u}{\partial x}$$

同样可得

$$e_{yy} \approx \frac{\partial v}{\partial y}$$

得到这个结果，不但要假设 u 和 v 很小，而且 $(\partial u/\partial x)$ 和 $(\partial v/\partial x)$ 以及 $(\partial u/\partial y)$ 和 $(\partial v/\partial y)$ 都要很小。

1-26 协调方程式

我们由以位移分量表示的应变（形变）分量表达式

$$\left.\begin{aligned} &e_{xx}=\partial u/\partial x,\quad e_{yy}=\partial v/\partial y,\quad e_{zz}=\partial w/\partial z,\\ &2e_{xy}=\partial u/\partial y+\partial v/\partial x,\quad 2e_{yz}=\partial v/\partial z+\partial w/\partial y,\\ &2e_{zx}=\partial w/\partial x+\partial u/\partial z。\end{aligned}\right\}\quad(1-26-1)$$

可以看出，六个应变分量可用三个位移分量表示出来。当应变分量 $e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{xy}, e_{yz}, e_{zx}$ 为 x，y，z 的已知函数时，上述六个式子可以看成为确定位移 u，v，w 的偏微分方程组。因为对三个未知数有六个方程式，所以当应变分量任意给定时，一般说来这个方程组不会有解。因此，必须给各应变分量附加某些条件，以便能由这六个方程式得到一组三个位移分量的单值连续解。

假设研究单连通区域 T。因为

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2}=\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2},\quad \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2}=\frac{\partial^3 v}{\partial y\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x\partial y}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3 v}{\partial y\partial x^2}\right)$$

于是可以得到

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2}=2\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x\partial y}$$

这个式子说明，由任意独立的 u 和 v 推导出的 e_{xx}，e_{xy} 和 e_{yy} 须满足这个关系式。

若在 T 中任取两点 $A(x_0, y_0)$ 及 $B(x_1, y_1)$ 并用可求长的弧 $\overset{\frown}{AB}$ 连接这两点。于是可知

$$u(x_1, y_1)-u(x_0, y_0)=\int_{\overset{\frown}{AB}}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)$$

$$=\int_{\overset{\frown}{AB}}[e_{xx}dx+(e_{xy}-\omega)dy]$$

又知道

$$d\omega=\frac{\partial\omega}{\partial x}dx+\frac{\partial\omega}{\partial y}dy=\left(-\frac{\partial e_{xx}}{\partial y}+\frac{\partial e_{xy}}{\partial x}\right)dx$$

$$+\left(\frac{\partial e_{xy}}{\partial x}-\frac{\partial e_{xy}}{\partial y}\right)dy$$

$$\omega=\int_{\overset{\frown}{AB}}\left[\left(-\frac{\partial e_{xx}}{\partial y}+\frac{\partial e_{xy}}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial e_{yy}}{\partial x}-\frac{\partial e_{xy}}{\partial y}\right)dy\right]$$

ω 应与积分路径 $\overset{\frown}{AB}$ 无关，即应满足如下关系。

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial e_{xx}}{\partial y}+\frac{\partial e_{xy}}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial e_{yy}}{\partial x}-\frac{\partial e_{xy}}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2}=2\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x\partial y}$$

这样就可以定义 ω。

我们又知道

$$\frac{\partial e_{xx}}{\partial y}=\frac{\partial e_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial e_{xx}}{\partial y}-\frac{\partial e_{xy}}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(e_{xy}-\omega)$$

这样 $u(x,y)$ 与积分路径无关，可以定义函数 $u(x,y)$。同样可以定义 $v(x,y)$，而且

$$v(x_1,y_1)-v(x_0,y_0)=\int_{\overset{\frown}{AB}}[(e_{xy}+\omega)dx+e_{yy}dy]$$

以上的演证说明，在一单连通区 T 内，有连续二阶偏导数的 e_{xx}，e_{yx}，e_{yy} 是纯形变分量的充要条件是

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2}=2\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x\partial y}$$

这个方程叫做应变协调方程（应变协调条件）。这也是单连通区中 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 存在的充要条件。但在多连通区域中，这是 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 存在的必要条件而不是充分条件，因为如上所求的 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 是多值的。在多连通区域内，要求位移也是单值的。

对于三维情况，同样可得应变协调方程如下：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2}&=2\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2}&=2\frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial y\partial z}\\ \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial z^2}&=2\frac{\partial^2 e_{zx}}{\partial z\partial x}\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}26\text{-}2)$$

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y \partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial e_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial e_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial e_{xy}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z \partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial e_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial e_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial e_{xy}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x \partial y}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial e_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial e_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial e_{xy}}{\partial z}\right)$$

这些就是三维问题的形变协调方程。它们必须为形变（应变）分量所满足，以保证与形变（应变）分量相关联的 u，v，w 为单值连续函数。

1-27 广义胡克定律

物体受力后均产生应变。胡克首先提出变形与作用力之间的关系。一个细杆受拉应力作用时的平均伸长与所受外力成比例关系就是胡克定律。胡克定律可写成如下的形式：

应力＝常数 · 应变

但在实际上，物体受力的情况比较复杂，物体中的应变分量也多于一个。物体中任意一点上，六个应力分量中的每一个分量，都可以用六个应变分量的线性函数表示，反之亦然。这就是广义胡克定律。

先从二维问题开始，设 e_{xx}，e_{xy}，e_{yy} 是应变分量，X_x，X_y，Y_y 是应力分量。用数学式子来表示，我们得到下列应力-应变关系式：

$$X_x=a_{11}e_{xx}+a_{12}e_{yy}+a_{13}e_{xy}$$

$$Y_y=a_{21}e_{xx}+a_{22}e_{yy}+a_{23}e_{xy}$$

$$X_y=a_{31}e_{xx}+a_{32}e_{yy}+a_{33}e_{xy}$$

或者，得到下列应变-应力关系式：

$$e_{xx}=a'_{11}X_x+a'_{12}Y_y+a'_{13}X_y$$

$$e_{yy}=a'_{21}X_x+a'_{22}Y_y+a'_{23}X_y$$

$$e_{xy}=a'_{31}X_x+a'_{32}Y_y+a'_{33}X_y$$

式中 a_{11}，…，和 a'_{11}，…确定材料的弹性性质。对于均匀的材料，a_{11}，…和 a'_{11}，…都是与坐标 x，y，z 无关的常数。应力与应变

之间是线性关系。这些材料常数并不都是各自独立的。我们可以证明：对于各向同性材料而言，把它们可以简化为两个独立的材料常数。基于应力与应变是线性关系的弹性理论叫做线弹性理论，反之叫做非线性弹性理论。

对于三维问题，我们可以得出应力-应变关系为：

$$\left.\begin{aligned}
X_x &= a_{11}e_{xx}+a_{12}e_{yy}+a_{13}e_{zz}+a_{14}e_{yz}+a_{15}e_{zx}+a_{16}e_{xy}\\
Y_y &= a_{21}e_{xx}+a_{22}e_{yy}+a_{23}e_{zz}+a_{24}e_{yz}+a_{25}e_{zx}+a_{26}e_{xy}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
Y_z &= a_{41}e_{xx}+a_{42}e_{yy}+a_{43}e_{zz}+a_{44}e_{yz}+a_{45}e_{zx}+a_{46}e_{xy}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
X_y &= a_{61}e_{xx}+a_{62}e_{yy}+a_{63}e_{zz}+a_{64}e_{zy}+a_{65}e_{zx}+a_{66}e_{xy}
\end{aligned}\right\} \quad (1\text{-}27\text{-}1)$$

同样也可以得到应变-应力关系。

首先证明主应力方向与主应变方向一致。设 x，y，z 轴是物体中一点变形的主方向，则

$$e_{yz}=e_{zx}=e_{xy}=0$$

由式（1-27-1）中第六式，可知

$$X_y=a_{61}e_{xx}+a_{62}e_{yy}+a_{63}e_{zz} \qquad (1\text{-}27\text{-}2)$$

再引入新坐标系 x'，y'，z'，它是由坐标系 x，y，z 绕轴 y 旋转 180° 而得到的（见图 1-25）。这样，轴 x' 和 z' 的方向将分别与轴 x 和 z 的方向相反，而轴 y' 的方向与轴 y 的方向一致。轴 x'，y' 和 z' 的方向余弦由下表确定：

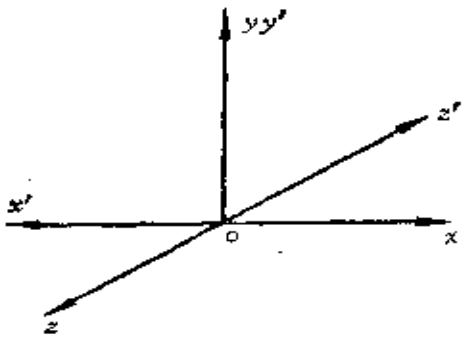


图 1-25

	x	y	z
x'	l_x	m_x	n_x
y'	l_y	m_y	n_y
z'	l_z	m_z	n_z

针对图 1-25 的情况，这些方向余弦的数值为：

$$l_x = n_z = \cos\pi = -1$$

$$m_y = \cos 0^\circ = 1$$

$$l_y = l_z = m_x = m_z = n_x = n_z = \cos 90^\circ = 0$$

对于各向同性材料而言，a_{61}，a_{62}，a_{63} 这些材料常数不随方向的改变而改变。因为新坐标轴仍为应变的主方向。因此，对这些新方向而言，式（1-27-2）变为

$$X'_{y'} = a_{61}e_{x'x'} + a_{62}e_{y'y'} + a_{63}e_{z'x'} \tag{1-27-3}$$

由以下应力分量的变换公式

$$\left.\begin{aligned}
X'_{x'} &= l_x^2 X_x + m_x^2 Y_y + n_x^2 Z_z + 2l_x m_x X_y + 2m_x n_x Y_z + 2n_x l_x Z_x \\
Y'_{y'} &= l_y^2 X_x + m_y^2 Y_y + n_y^2 Z_z + 2l_y m_y X_y + 2m_y n_y Y_z + 2n_y l_y Z_x \\
Z'_{z'} &= l_z^2 X_x + m_z^2 Y_y + n_z^2 Z_z + 2l_z m_z X_y + 2m_z n_z Y_z + 2n_z l_z Z_x \\
X'_{y'} &= l_x l_y X_x + m_x m_y Y_y + n_x n_y Z_z + (l_x m_y + m_x l_y) X_y \\
&\quad + (m_x n_y + m_y n_x) Y_z + (n_x l_y + l_x n_y) Z_x \\
Y'_{z'} &= l_y l_z X_x + m_y m_z Y_y + n_y n_z Z_z + (l_y m_z + m_y l_z) X_y \\
&\quad + (m_y n_z + m_z n_y) Y_z + (n_y l_z + n_z l_y) Z_x \\
Z'_{z'} &= l_z l_x X_x + m_z m_x Y_y + n_z n_x Z_z + (l_z m_x + l_x m_z) X_y \\
&\quad + (m_z n_x + m_x n_z) Y_z + (n_z l_x + l_x n_z) Z_x
\end{aligned}\right\} \tag{1-27-4}$$

可以看出，只一个方向余弦的乘积 $l_x m_y$ 不等于零，于是由式（1-27-4）可得到

$$X'_{y'} = l_x m_y X_y = -X_y \tag{1-27-5}$$

又由以下应变分量的变换公式

$$\left.\begin{aligned}
e_{x'x'} &= l_x^2 e_{xx} + m_x^2 e_{yy} + n_x^2 e_{zz} + 2l_x m_x e_{xy} + 2m_x n_x e_{yz} + 2n_x l_x e_{zx} \\
e_{y'y'} &= l_y^2 e_{xx} + m_y^2 e_{yy} + n_y^2 e_{zz} + 2l_y m_y e_{xy} + 2m_y n_y e_{yz} + 2n_y l_y e_{zx} \\
e_{z'z'} &= l_z^2 e_{xx} + m_z^2 e_{yy} + n_z^2 e_{zz} + 2l_z m_z e_{xy} + 2m_z n_z e_{yz} + 2n_z l_z e_{zx} \\
e_{x'y'} &= l_x l_y e_{xx} + m_x m_y e_{yy} + n_x n_y e_{zz} + (l_x m_y + l_y m_x) e_{xy} \\
&\quad + (m_x n_y + m_y n_x) e_{yz} + (n_x l_y + n_y l_x) e_{zx} \\
e_{y'z'} &= l_y l_z e_{xx} + m_y m_z e_{yy} + n_y n_z e_{zz} + (l_y m_z + l_z m_y) e_{xy} \\
&\quad + (m_y n_z + m_z n_y) e_{yz} + (n_y l_z + n_z l_y) e_{zx} \\
e_{z'x'} &= l_z l_x e_{xx} + m_z m_x e_{yy} + n_z n_x e_{zz} + (l_z m_x + l_x m_z) e_{xy} \\
&\quad + (m_z n_x + m_x n_z) e_{yz} + (n_z l_x + n_x l_z) e_{zx}
\end{aligned}\right\} \tag{1-27-6}$$

可以看出

$$\left.\begin{aligned} &e_{x'x'}=l_x^2e_{xx}=e_{xx},\quad e_{y'y'}=m_y^2e_{yy}=e_{yy}\\ &e_{z'z'}=n_z^2e_{zz}=e_{zz}\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}27\text{-}7)$$

把式（1-27-5）和式（1-27-7）代入式（1-27-3）后，便得到

$$-X_y=a_{61}e_{xx}+a_{62}e_{yy}+a_{63}e_{zz}\qquad(1\text{-}27\text{-}8)$$

把式（1-27-8）与式（1-27-2）相比较，可知它们的右边项相等，于是得到以下关系：

$$X_y=-X_y$$

这只有当 $X_y=0$ 时，才能成立。同理可以证明 $Y_z=Z_x=0$。这就说明：如果轴 x，y，z 是应变的主方向，则对应于这个坐标系的剪应力分量必等于零，换言之，x，y，z 也是应力的主方向。对于主方向来说，我们得到应力与应变的关系为：

$$\left.\begin{aligned} X_x&=a_{11}e_{xx}+a_{12}e_{yy}+a_{13}e_{zz}\\ Y_y&=a_{21}e_{xx}+a_{22}e_{yy}+a_{23}e_{zz}\\ Z_z&=a_{31}e_{xx}+a_{32}e_{yy}+a_{33}e_{zz}\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}27\text{-}9)$$

这里我们知道常数 C_{ij} 是表示 i 方向的应力和 j 方向的应变之间的弹性性质。对各向同性材料而言，应变 e_{xx} 对应力 X_x 的影响必等于 e_{yy} 对应力 Y_y 或 e_{zz} 对应力 Z_z 的影响。所以我们得出 $a_{11}=a_{22}=a_{33}$。应变 e_{yy} 和 e_{zz} 对 X_x 的影响是一样的，于是 $a_{12}=a_{13}$。余类推，可以得到如下结果，即

$$\left.\begin{aligned} &a_{12}=a_{21}=a_{13}=a_{31}=a_{23}=a_{32}\\ &a_{11}=a_{22}=a_{33}\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}27\text{-}10)$$

由式（1-27-10）可知对于主轴方向只须引入两个弹性常数 μ 和 λ。于是，方程（1-27-9）变为：

$$\left.\begin{aligned} X_x&=\lambda e+2\mu e_{xx}\\ Y_y&=\lambda e+2\mu e_{yy}\\ Z_z&=\lambda e+2\mu e_{zz}\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}27\text{-}11)$$

常数 λ 和 μ 称为拉梅（Lame）常数。

方程（1-27-11）表示主应力分量和主应变分量间的关系。对于平面应变情况，可得

$$X_x=\lambda e+2\mu e_{xx}$$
$$Y_y=\lambda e+2\mu e_{yy}$$

这里 $e=e_{xx}+e_{yy}$。

在任意直角坐标系中的应力-应变关系式可以由应力和应变分量的变换公式求到。取新的任意直角坐标系为 x''，y''，z''。于是可以得出相对于主应力轴 x，y，z 的诸应变分量为：

$$\left.\begin{aligned}
e_{x''x''}&=l_x^2e_{xx}+m_x^2e_{yy}+n_x^2e_{zz}\\
e_{y''y''}&=l_y^2e_{xx}+m_y^2e_{yy}+n_y^2e_{zz}\\
e_{z''z''}&=l_z^2e_{xx}+m_z^2e_{yy}+n_z^2e_{zz}\\
e_{y''z''}&=2\,(l_yl_ze_{xx}+m_ym_ze_{yy}+n_yn_ze_{zz})\\
e_{z''x''}&=2\,(l_xl_ze_{xx}+m_xm_ze_{yy}+n_xn_ze_{zz})\\
e_{x''y''}&=2\,(l_xl_ye_{xx}+m_xm_ye_{yy}+n_xn_ye_{zz})
\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}27\text{-}12)$$

同时得出新坐标系中诸应力分量与主应力之间的关系为：

$$\left.\begin{aligned}
X_{x''}''&=l_x^2X_x+m_x^2Y_y+n_x^2Z_z\\
Y_{y''}''&=l_y^2X_x+m_y^2Y_y+n_y^2Z_z\\
Z_{z''}''&=l_z^2X_x+m_z^2Y_y+n_z^2Z_z\\
Y_{z''}''&=l_yl_zX_x+m_ym_zY_y+n_yn_zZ_z\\
X_{z''}''&=l_xl_zX_x+m_xm_zY_y+n_xn_zZ_z\\
X_{y''}''&=l_xl_yX_x+m_xm_yY_y+n_xn_yZ_z
\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}27\text{-}13)$$

把式（1-27-11）代入式（1-27-13）并利用如下诸已知关系

$$l_x^2+m_x^2+n_x^2=1$$
$$l_xl_y+m_xm_y+n_xn_y=0$$
$$\cdots\cdots$$

我们又得出

$$\left.\begin{aligned}
X''_{x''} &= \lambda e + 2\mu e_{x''x''} \\
Y''_{y''} &= \lambda e + 2\mu e_{y''y''} \\
Z''_{z''} &= \lambda e + 2\mu e_{z''z''} \\
Y''_{z''} &= \mu e_{y''z''} \\
X''_{z''} &= \mu e_{x''z''} \\
X''_{y''} &= \mu e_{x''y''} \\
e &= e_{x''x''} + e_{y''y''} + e_{z''z''}
\end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}27\text{-}14)$$

由此可以证明，这种形式的方程与坐标系的选择无关。

由式（1-27-14）中前三个表达式，来解 $e_{z''z''}$，$e_{y''y''}$，$e_{z''z''}$，可得

$$\left.\begin{aligned}
e_{x''x''} &= \frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)} X''_{x''} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}(Y''_{y''} + Z''_{z''}) \\
e_{y''y''} &= \frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)} Y''_{y''} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}(Z''_{z''} + X''_{x''}) \\
e_{z''z''} &= \frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)} Z''_{z''} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}(X''_{x''} + Y''_{y''})
\end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}27\text{-}15)$$

1-28 各向同性材料的弹性模量

设各向同性材料的杆沿轴 x 受到拉伸作用。设杆中每点的应力状况为

$$X_x \neq 0, \quad Y_y = Z_z = Y_z = X_z = X_y = 0$$

于是由上节式（1-27-14）可得

$$\left.\begin{aligned}
\lambda e + 2\mu e_{xx} &= X_x \\
\lambda e + 2\mu e_{yy} &= 0 \\
\lambda e + 2\mu e_{zz} &= 0
\end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}28\text{-}1)$$

$$e = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} \qquad (1\text{-}28\text{-}2)$$

把式（1-28-1）中各式相加，并利用式（1-28-2）的关系，我们得到

$$e = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} X_x \qquad (1\text{-}28\text{-}3)$$

把式（1-28-3）代入式（1-28-1）中的一式，则得到

$$X_x=\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}e_{xx} \qquad (1\text{-}28\text{-}4)$$

但是我们知道 $X_x=Ee_{xx}$，所以

$$E=\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} \qquad (1\text{-}28\text{-}5)$$

由式（1-28-1）中其余二式得到

$$e_{yy}=e_{zz}=-\frac{\lambda}{2\mu}e=-\frac{\lambda X_x}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \qquad (1\text{-}28\text{-}6)$$

把式（1-28-3）代入式（1-28-6），得到

$$e_{yy}=e_{zz}=-\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}e_{xx} \qquad (1\text{-}28\text{-}7)$$

但是我们又知道 $e_{yy}=e_{zz}=-\nu e_{xx}$，于是由式（1-28-7）可知

$$\nu=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \qquad (1\text{-}28\text{-}8)$$

这里 E 是弹性模量，而 ν 是泊松（Poisson）比。由式（1-28-5）和式（1-28-8）可得

$$\lambda=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad (1\text{-}28\text{-}9)$$

$$\mu=\frac{E}{2(1+\nu)}=G \qquad (1\text{-}28\text{-}10)$$

因为我们知道

$$\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}>0,\quad \frac{E}{2(1+\nu)}>0 \qquad (1\text{-}28\text{-}11)$$

而且 $E>0$，所以要满足式（1-28-11）的关系，必须满足以下的关系，即：

$$1+\nu\geqslant 0,\quad 1-2\nu\geqslant 0$$

于是可知对于 ν 值须在下列范围之内

$$-1\leqslant\nu\leqslant 1/2$$

1-29 用工程弹性常数表示的广义胡克定律

在工程应用上，常习惯于用工程弹性常数 E、G（$G=\mu$，为习惯，故这里用G）和 ν。把式（1-28-5）和式（1-28-8）代入式（1-27-15）后，得到用工程弹性常数表示的广义胡克定律如下：

$$\left.\begin{aligned}
e_{xx}&=\frac{1}{E}[X_x-\nu(Y_y+Z_z)]\\
e_{yy}&=\frac{1}{E}[Y_y-\nu(Z_z+X_x)]\\
e_{zz}&=\frac{1}{E}[Z_z-\nu(X_x+Y_y)]\\
e_{xy}&=\frac{1-\nu}{E}X_y=\frac{1}{2G}X_y\\
e_{yz}&=\frac{1+\nu}{E}Y_z=\frac{1}{2G}Y_z\\
e_{zx}&=\frac{1+\nu}{E}Z_x=\frac{1}{2G}Z_x
\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}29\text{-}1)$$

若取 $2e_{xy}=\gamma_{xy}$，$2e_{yz}=\gamma_{yz}$，$2e_{zx}=\gamma_{zx}$，则式（1-29-1）中后三个式子可改写为：

$$\gamma_{xy}=\frac{X_y}{G},\quad \gamma_{yz}=\frac{Y_z}{G},\quad \gamma_{zx}=\frac{Z_x}{G}$$

若是利用应变分量来表示应力，则有

$$\left.\begin{aligned}
X_x&=\frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}Ee+\frac{E}{1+\nu}e_{xx}\\
Y_y&=\frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}Ee+\frac{E}{1+\nu}e_{yy}\\
Z_z&=\frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}Ee+\frac{E}{1+\nu}e_{zz}\\
X_y&=G\gamma_{xy},\quad Y_z=G\gamma_{yz},\quad Z_x=G\gamma_{zx}
\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}29\text{-}2)$$

在平面应力的情况下，令式（1-29-1）中的 $Z_z=Y_z=Z_x=0$，于是得到应力与应变的关系式为：

$$
\left.\begin{aligned}
e_{xx}&=\frac{1}{E}(X_x-\nu Y_y)\\
e_{yy}&=\frac{1}{E}(Y_y-\nu X_x)\\
e_{zz}&=-\frac{\nu}{E}(X_x+Y_y)\\
\gamma_{xy}&=\frac{X_y}{G}
\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}29\text{-}3)
$$

而应变与应力的关系式为：

$$
\left.\begin{aligned}
X_x&=\frac{E}{1-\nu^2}(e_{xx}+\nu e_{yy})\\
Y_y&=\frac{E}{1-\nu^2}(e_{yy}+\nu e_{xx})\\
X_y&=G\gamma_{xy}
\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}29\text{-}4)
$$

在平面应变的情况下，令式（1-29-2）中的 $e_{zz}=\gamma_{yz}=\gamma_{zx}=0$，于是得到应变与应力的关系式为：

$$
\left.\begin{aligned}
X_x&=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)e_{xx}+\nu e_{yy}]\\
Y_y&=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[\nu e_{xx}+(1-\nu)e_{yy}]\\
Z_z&=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(e_{xx}+e_{yy})\\
X_y&=G\gamma_{xy}
\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}29\text{-}5)
$$

而应力与应变的关系式为：

$$
\left.\begin{aligned}
e_{xx}&=\frac{1+\nu}{E}[(1-\nu)X_x-\nu Y_y]\\
e_{yy}&=\frac{1+\nu}{E}[(1-\nu)Y_y-\nu X_x]\\
\gamma_{xy}&=\frac{X_y}{G}
\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}29\text{-}6)
$$

由式（1-29-3）到式（1-29-6）可以看出，在平面应力状态中，相应的应变状态不是平面的。在平面应变状态中，相应的应力状态不是平面的。

1-30 弹性理论的基本方程和解的可能方法

综合以上各节的内容，得到三组弹性理论的基本方程。

由平衡得到的静力方程

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}+g_x&=0\\ \frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}+g_y&=0\\ \frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}+g_z&=0\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}30\text{-}1)$$

若是考虑到动力问题，在方程（1-30-1）的等号右边用 $\rho\,\partial^2u/\partial t^2$，$\rho\,\partial^2v/\partial t^2$，$\rho\,\partial^2w/\partial t^2$ 代替零。

由变形得到的几何方程

$$\left.\begin{aligned}e_{xx}&=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \gamma_{xy}=2e_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\\ e_{yy}&=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \gamma_{yz}=2e_{yz}=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\\ e_{zz}&=\frac{\partial w}{\partial z},\quad \gamma_{zx}=2e_{zx}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}30\text{-}2)$$

由应力与应变关系得到的物理方程

$$\left.\begin{aligned}X_x&=\lambda e+2Ge_{xx},\quad X_y=G\gamma_{xy}\\ Y_y&=\lambda e+2Ge_{yy},\quad Y_z=G\gamma_{yz}\\ Z_z&=\lambda e+2Ge_{zz},\quad Z_x=G\gamma_{zx}\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}30\text{-}3)$$

在我们所列的 15 个方程中有 15 个未知量，它们是 6 个应力分量（X_x，Y_y，Z_z，X_y，Y_z，Z_x），6 个应变分量（e_{xx}，e_{yy}，e_{zz}，e_{xy}，e_{yz}，e_{zx}）和 3 个位移分量（u，v，w）。一般说来，从数学理论上讲这个方程组是足以求解弹性理论问题的。在物体的边界上解还要满足边界条件。如力的边界条件为

$$\left.\begin{aligned}X_n&=lX_x+mY_x+nZ_x\\ Y_n&=lX_y+mY_y+nZ_y\\ Z_n&=lX_z+mY_z+nZ_z\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}30\text{-}4)$$

若没有体积力，则方程（1-30-1）改为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}=0\\ \frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}=0\\ \frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}=0\end{aligned}\right\}\qquad (1\text{-}30\text{-}1)'$$

若求物体中的应力分量，可以把这组方程化简为只包含六个应力分量的六个方程式。此时我们并不求位移分量，所以要保证位移的单值性，由应力而生的应变就必须满足协调条件。

由式（1-29-1）可知

$$e_{xx}=\frac{1}{E}[X_x(1+\nu)-\nu\Theta]$$

$$e_{yy}=\frac{1}{E}[Y_y(1+\nu)-\nu\Theta]\qquad (1\text{-}30\text{-}5)$$

$$e_{zz}=\frac{1}{E}[Z_z(1+\nu)-\nu\Theta]$$

$$\Theta=X_x+Y_y+Z_z\qquad (1\text{-}30\text{-}6)$$

$$\gamma_{xy}=\frac{1}{G}X_y,\quad \gamma_{yz}=\frac{1}{G}Y_z,\quad \gamma_{zx}=\frac{1}{G}Z_x\qquad (1\text{-}30\text{-}7)$$

我们把式（1-30-5）和式（1-30-7）代入协调条件式（1-26-2）中的第一个式子后，便得到：

$$\frac{1+\nu}{E}\left(\frac{\partial^2 X_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 Y_y}{\partial x^2}\right)-\frac{\nu}{E}\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}\right)=\frac{1}{G}\cdot\frac{\partial^2 X_y}{\partial x\partial y}$$

把 $2G(1+\nu)=E$ 的关系式代入上式后，便得到：

$$(1+\nu)\left(\frac{\partial^2 X_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 Y_y}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 X_y}{\partial x\partial y}\right)-\nu\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}\right)=0$$

把式（1-30-1）中第一式对 x 求导和第二式对 y 求导，把求导后的结果相加再减去式（1-30-1）中第三式对 z 求导的结果，于是便得到

$$-2\frac{\partial^2 X_y}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 X_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Y_y}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 Z_z}{\partial z^2}+\left(\frac{\partial g_x}{\partial x}+\frac{\partial g_y}{\partial y}-\frac{\partial g_z}{\partial z}\right) \tag{1-30-8}$$

把式（1-30-8）代入式（1-30-7），便得到

$$(1+\nu)\left[\nabla^2(X_x+Y_y)-\frac{\partial^2(X_x+Y_y)}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 Z_z}{\partial z^2}\right]-\nu\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}\right)=(1+\nu)\left(\frac{\partial g_z}{\partial z}-\frac{\partial g_y}{\partial y}-\frac{\partial g_x}{\partial x}\right) \tag{1-30-9}$$

这里

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

利用关系式

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}=\nabla^2\Theta-\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}$$

把式（1-30-9）改变为

$$\nabla^2\Theta-(1+\nu)\nabla^2 Z_z-\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}=(1+\nu)\left(\frac{\partial g_z}{\partial z}-\frac{\partial g_y}{\partial y}-\frac{\partial g_x}{\partial x}\right) \tag{1-30-10}$$

同样得到另外两个方程为：

$$\nabla^2\Theta-(1+\nu)\nabla^2 X_x-\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}=(1+\nu)\left(\frac{\partial g_x}{\partial x}-\frac{\partial g_y}{\partial y}-\frac{\partial g_z}{\partial z}\right) \tag{1-30-11}$$

$$\nabla^2\Theta-(1+\nu)\nabla^2 Y_y-\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}=(1+\nu)\left(\frac{\partial g_y}{\partial y}-\frac{\partial g_x}{\partial x}-\frac{\partial g_z}{\partial z}\right) \tag{1-30-12}$$

把以上这三个式子相加，于是得到

$$\nabla^2\Theta=-\frac{1+\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial g_x}{\partial x}+\frac{\partial g_y}{\partial y}+\frac{\partial g_z}{\partial z}\right) \tag{1-30-13}$$

把式（1-30-13）代入式（1-30-10），（1-30-11），（1-30-12）中，我们就得到如下结果

$$\left.\begin{aligned}
(1+\nu)\nabla^2 X_x+\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} &= -2(1+\nu)\frac{\partial g_x}{\partial x} \\
&\quad -\frac{\nu(1+\nu)}{1-\nu}\left(\frac{\partial g_x}{\partial x}+\frac{\partial g_y}{\partial y}+\frac{\partial g_z}{\partial z}\right) \\
(1+\nu)\nabla^2 Y_y+\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2} &= -2(1+\nu)\frac{\partial g_y}{\partial y} \\
&\quad -\frac{\nu(1+\nu)}{1-\nu}\left(\frac{\partial g_x}{\partial x}+\frac{\partial g_y}{\partial y}+\frac{\partial g_z}{\partial z}\right) \\
(1+\nu)\nabla^2 Z_z+\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2} &= -2(1+\nu)\frac{\partial g_z}{\partial z} \\
&\quad -\frac{\nu(1+\nu)}{1-\nu}\left(\frac{\partial g_x}{\partial x}+\frac{\partial g_y}{\partial y}+\frac{\partial g_z}{\partial z}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (1\text{-}30\text{-}14)$$

我们把式（1-30-5）和式（1-30-7）代入协调条件（1-26-2）中的第四个式子，我们便得到

$$\frac{2(1+\nu)}{E}\left(-\frac{\partial^2 X_x}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 Y_z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 X_z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 X_y}{\partial x\partial z}\right)$$

$$-\frac{2\nu}{E}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y\partial z}=0 \qquad (1\text{-}30\text{-}15)$$

把方程（1-30-1）中第二个对 z 和第三个对 y 求导后，便得到以下结果：

$$\frac{\partial^2 X_y}{\partial x\partial z}=-\frac{\partial^2 Y_y}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 Y_z}{\partial z^2}-\frac{\partial g_y}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 X_z}{\partial x\partial y}=-\frac{\partial^2 Y_z}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 Z_z}{\partial y\partial z}-\frac{\partial g_z}{\partial y}$$

把这两个式子代入式（1-30-15），得出

$$(1+\nu)\nabla^2 Y_z+\frac{\partial^2\Theta}{\partial y\partial z}+(1+\nu)\left(\frac{\partial g_z}{\partial y}+\frac{\partial g_y}{\partial z}\right)=0 \qquad (1\text{-}30\text{-}16)$$

同样可得

$$(1+\nu)\nabla^2 X_y+\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial y}+(1+\nu)\left(\frac{\partial g_x}{\partial y}+\frac{\partial g_y}{\partial x}\right)=0 \qquad (1\text{-}30\text{-}17)$$

$$(1+\nu)\nabla^2 X_z+\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial z}+(1+\nu)\left(\frac{\partial g_x}{\partial x}+\frac{\partial g_z}{\partial z}\right)=0 \qquad (1\text{-}30\text{-}18)$$

如果没有体积力或体积力不变时，由式（1-30-14）和式（1-30-16），（1-30-17），（1-30-18）得到下列方程

$$\left.\begin{aligned}
(1+\nu)\nabla^2 X_x+\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}&=0\\
(1+\nu)\nabla^2 Y_y+\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}&=0\\
(1+\nu)\nabla^2 Z_z+\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}&=0\\
(1+\nu)\nabla^2 X_y+\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial y}&=0\\
(1+\nu)\nabla^2 X_z+\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial z}&=0\\
(1+\nu)\nabla^2 Y_z+\frac{\partial^2\Theta}{\partial y\partial z}&=0
\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}30\text{-}19)$$

这里$\Theta=X_x+Y_y+Z_z$。这正好是六个应力分量，六个方程式。利用式（1-30-1），（1-30-4）及（1-30-19）可解出应力。

我们也可以把原来的15个方程化为用三个位移分量表示的三个方程式。

把式（1-30-3）中的第一行的两个式子及最后的式子$Z_x=G\gamma_{zx}$代入式（1-30-1）中的第一个式子，便得到

$$\lambda\frac{\partial e}{\partial x}+G\left(2\frac{\partial e_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial z}\right)+g_x=0$$

把式（1-26-1）代入上式后，即得

$$(\lambda+G)\frac{\partial e}{\partial x}+G\nabla^2 u+g_x=0$$

用同样的方法可以得到其余两个式子，这样一来，就得到如下用位移表示的三个平衡方程式，即拉梅方程。

$$\left.\begin{aligned}
(\lambda+G)\frac{\partial e}{\partial x}+G\nabla^2 u+g_x&=0\\
(\lambda+G)\frac{\partial e}{\partial y}+G\nabla^2 v+g_y&=0\\
(\lambda+G)\frac{\partial e}{\partial z}+G\nabla^2 w+g_z&=0
\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}30\text{-}20)$$

我们把式（1-27-14）和式（1-26-1）代入式（1-30-4），就得到以位移表示的边界条件：

$$\left.\begin{aligned}
X_n &= \lambda e l + G\left[2l\frac{\partial u}{\partial x} + m\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + n\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right] \\
Y_n &= \lambda e m + G\left[l\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) + 2m\frac{\partial v}{\partial y} + n\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right] \\
Z_n &= \lambda e n + G\left[l\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) + m\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) + 2n\frac{\partial w}{\partial z}\right]
\end{aligned}\right\} \quad (1\text{-}30\text{-}21)$$

如果在边界上不给定表面力的分布，则弹性理论问题的边界条件也可以由边界上的已知位移 u，v，w 来给出。利用式（1-30-20）和式（1-30-21）可求出位移。

无论是解弹性理论问题中的应力或是位移，由基本方程组和边界条件所得的解是不是存在和唯一呢？哥因（A. Korn）和李希登斯登（L. Lichtenstein）已证明解的存在。关于解的唯一性，我们可以说，当研究无穷小应变和位移的弹性理论问题时，认为物体在受力前没有残存内应力，除体积力外在弹性体边界上不论给定表面力或表面位移，则弹性体中的应力和应变分布规律是唯一的。如果应变或位移不是无穷小的话，解就不是唯一的。关于解唯一性的证明可参考王启德著《应用弹性理论》等书。

1-31 圣维南原理

在解决实际问题时，外力或位移的真实分布情况是相当复杂的。如果按照如此复杂的边界条件求解问题，在数学上很困难，甚至会达到不能求解的程度。如果改一下边界条件，就可以求解了。圣维南（Saint-Venant）用弹性体上某一微小表面上的静力

等效力系来代替作用在同一微小表面上的力系，负荷的这种修改只在离负荷作用处很近的地方使应力产生本质变化，而在离负荷作用处较远的地方（其距离大于负荷作用发生变化的那块表面的线性尺寸），应力没有本质的变化。所谓“静力等效力系”的意思是指两种外力都具有相同的合力与合力矩。利用圣维南的这个原理来修改边界条件，可使问题得到解决。用这种方法将得到满意的结果。但在薄壁杆件中应用圣维南原理要注意。

第二章　平面问题

§1　单连通区与多连通区情况

2-1　艾雷（Airy）函数

在区域T内，有连续二阶偏导数并满足以下微分方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f=0 \text{ 或} \nabla^2 f=0$$

的函数$f(x, y)$叫做在T内的调和函数。

在区域T内，有连续四阶偏导数并满足以下微分方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)=0 \text{ 或} \nabla^2\nabla^2 f=0$$

的函数$f(x, y)$叫做在T内的重调和函数。

设在区域T内，已知某应力状态（即应力分量X_x, X_y, Y_y为已知时），就有一些重调和函数与之对应；反之，每一在T中定义的重调和函数对应一组确定的应力分量。

定理　若T是一个单连通区，在其中有满足以下方程（无体积力）

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}=0\\&\frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}=0\\&\nabla^2(X_x+Y_y)=0\end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}1\text{-}1)$$

并有连续二阶导数的函数X_x, X_y, Y_y存在；则在T中存在一重调合函数U，并由下式

$$\left.\begin{aligned} X_x=\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad Y_y=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \\ X_y=-\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \end{aligned}\right\} \tag{2-1-2}$$

唯一可求 X_x, X_y 及 Y_y。

反之，若在 T 中已知一重调和函数 U，则由式（2-1-2）求到的 X_x、X_y、Y_y 有连续二阶导数并满足方程（2-1-1）。

此重调和函数 U 叫做艾雷函数，或称应力函数。

证明：若已知有满足方程（2-1-1）并在 T 中有二阶连续导数的 X_x, X_y 和 Y_y。

在 T 中选任意一点 $A(x_0, y_0)$ 并取

$$B_1(x, y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}(X_x dy-X_y dx) \tag{2-1-3}$$

由全微分可知

$$B_1(x, y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\left(\frac{\partial B_1}{\partial x}dx+\frac{\partial B_1}{\partial y}dy\right)$$

与式（2-1-3）相比，可知

$$\frac{\partial B_1}{\partial x}=-X_y, \quad \frac{\partial B_1}{\partial y}=X_x \tag{2-1-4}$$

那么自然得到

$$\frac{\partial^2 B_1}{\partial x \partial y}=-\frac{\partial X_y}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 B_1}{\partial x \partial y}=\frac{\partial X_x}{\partial x}$$

于是

$$\frac{\partial X_x}{\partial x}=-\frac{\partial X_y}{\partial y}$$

这是满足平衡方程的，所以

$$B_1(x, y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}(X_x dy-X_y dx)$$

是个全微分。

$B_1(x,\ y)$ 是 T 中的单值解析函数，它与积分路径无关。T 是单连通区。

再取

$$C_1(x,\ y)=\int_{(x_0,\ y_0)}^{(x,\ y)}(Y_y dx-X_y dy)$$

同样可知

$$\frac{\partial C_1}{\partial x}=Y_y,\qquad \frac{\partial C_1}{\partial y}=-X_y \tag{2-1-5}$$

比较式（2-1-4）和式（2-1-5）可知

$$\frac{\partial B_1}{\partial x}=\frac{\partial C_1}{\partial y}$$

令

$$U(x,\ y)=\int_{(x_0,\ y_0)}^{(x,\ y)}(C_1 dx+B_1 dy) \tag{2-1-6}$$

若此式为全微分，则有

$$\frac{\partial U}{\partial x}=C_1,\qquad \frac{\partial U}{\partial y}=B_1$$

因为

$$\frac{\partial C_1}{\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}=\frac{\partial B_1}{\partial x}$$

所以可知 U 是 T 中的单值解析函数，于是

$$\left.\begin{aligned} &X_x=\frac{\partial^2 U}{\partial y^2},\qquad Y_y=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\\ &X_y=-\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}\\ &\nabla^2 U=X_x+Y_y \end{aligned}\right\} \tag{2-1-7}$$

因为由式（2-1-1）可知

$$\nabla^2(X_x+Y_y)=0$$

故

$$\nabla^2\nabla^2 U=0 \tag{2-1-8}$$

这就得到满足重调和方程（2-1-8）的重调和函数U。

若在T中已知有连续四阶的函数U，那么函数

$$\left.\begin{aligned} X_x&=\frac{\partial^2 U}{\partial y^2};\quad Y_y=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},\\ X_y&=-\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}\end{aligned}\right\}\qquad(2\text{-}1\text{-}9)$$

必满足式（2-1-1）。

$$\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}=\frac{\partial^3 U}{\partial x\partial y^2}-\frac{\partial^3 U}{\partial x\partial y^2}=0$$

$$\frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}=-\frac{\partial^3 U}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3 U}{\partial x^2\partial y}=0$$

因为 $X_x+Y_y=\nabla^2 U$

所以

$$\nabla^2(X_x+Y_y)=\nabla^2\nabla^2 U=0$$

U是重调和函数。

在T中已知重调和函数U，那么，由式（2-1-9）得到的X_x，X_y，Y_y是唯一的。反之，若已知诸应力分量后，反求得到的U是否是唯一的呢？

若U_1和U_2都是产生同一组应力分量的调和函数，它们的二次偏导式才等于应力分量，可见U_1与U_2之差必为：

$$U_0(x,\ y)=U_1(x,\ y)-U_2(x,\ y)=ax+by+c$$

式中a，b和c都是常数。

2-2 利用全纯函数表示应力函数

每一重调和函数都可以用两个复数的全纯函数来表示。谷尔萨（E. Goursat）于1898年已经证明这是可能的。

我们令

$$P(x,\ y)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)U(x,\ y)$$

自然可知

$$\nabla^2 P=\nabla^2\nabla^2 U=0$$

P 是调和函数。

在 T 中存在一个全纯函数

$$\varkappa(z)=P(x,\ y)+iQ(x,\ y)$$

而且写为

$$\mathrm{Re}[\varkappa(z)]=P(x,\ y)$$
$$\mathrm{Im}[\varkappa(z)]=Q(x,\ y)$$

令

$$4\varphi(z)=\int_{z_0}^{z}\varkappa(z)dz$$

因为 T 是单连通区，$\varphi(z)$ 也是 T 中解析函数。故可取

$$\varphi(z)=p(x,\ y)+iq(x,\ y)$$

令

$$U(x,y)=x\,p(x,y)+y\,q(x,y)+r(x,y)$$

这里 $r(x,\ y)$ 是调和函数。于是

$$\varphi'(z)=\frac{1}{4}\varkappa(z)=\frac{1}{4}[P(x,\ y)+iQ(x,\ y)]$$

又知道

$$\varphi'(z)=\frac{\partial p}{\partial x}+i\ \frac{\partial q}{\partial x}$$

所以得出

$$\frac{1}{4}P(x,\ y)=\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{1}{4}Q(x,\ y)=\frac{\partial q}{\partial x}$$

由于 $\varphi(z)$ 是单值解析函数，在 T 内必满足哥西—黎曼条件：

$$-\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial q}{\partial y};\quad \frac{\partial p}{\partial y}=-\frac{\partial q}{\partial x}$$

所以

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial q}{\partial y}=\frac{1}{4}P(x,\ y)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial q}{\partial x}=\frac{1}{4}Q(x,\ y)$$

又因为 $r(x,\ y)$ 是调和函数，故

$$\nabla^2[U(x,\ y)-xp-yq]=0$$

事实上，把上式展开后，可得如下结果

$$P-2\left(\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial y}\right)-x\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right)-y\left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 q}{\partial y^2}\right)$$
$$=P-P=0$$

根据假设 U 是个重调和函数，故 $\nabla^2\nabla^2U=0$，曾设 r 是调和函数，故 $\nabla^2\nabla^2r=0$。又 $p(x,\ y)$ 和 $q(x,\ y)$ 是调和函数，故

$$\nabla^2(xp+yq)=2\left(\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial y}\right)$$

并且

$$\nabla^2\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2 p)=0$$

$$\nabla^2\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2 q)=0$$

于是可以说，在 T 中存在一个解析函数 $\chi(z)$，而且 $\chi(z)$ 的实部为 $r(x,\ y)$，即

$$r(x,\ y)=\mathrm{Re}[\chi(z)]$$

又 $\bar{z}=x-iy$，则

$$\bar{z}\varphi(z)=(x-iy)(p+iq)=(xp+yq)+i(xq-yp)$$
$$\mathrm{Re}[\bar{z}\varphi(z)]=xp+yq$$

因为

$$U(x,\ y)=xp+yq+r=\mathrm{Re}[\bar{z}\varphi(z)]+\mathrm{Re}[\chi(z)]$$

所以利用在 T 中的两个解析函数 $\varphi(z)$ 和 $\chi(z)$ 可以表示 T 中一个重调和函数 U，即

$$U(x,\ y)=\mathrm{Re}[\bar{z}\varphi(z)+\chi(z)]$$

2-3 利用应力函数求 $\varphi(z)$ 和 $\chi(z)$

应力函数可由 $\varphi(z)$ 和 $\chi(z)$ 唯一确定。如何由应力函数

求 $\varphi(z)$ 和 $\chi(z)$ 呢?

设有两组解析函数 $\varphi_1(z)$, $\chi_1(z)$ 和 $\varphi_2(z)$, $\chi_2(z)$, 而且令应力函数 U 为:

$$U=\mathrm{Re}[\bar{z}\varphi_1+\chi_1]=\mathrm{Re}[\bar{z}\varphi_2+\chi_2]$$

令

$$\varphi_1-\varphi_2=p_1+iq_1,\quad \chi_1-\chi_2=r_1+is_1$$

$$\mathrm{Re}[\bar{z}(\varphi_1-\varphi_2)+\chi_1-\chi_2]=0$$

即

$$\mathrm{Re}[(x-iy)(p_1+iq_1)+r_1+is_1]=0$$

所以

$$xp_1+yq_1+r_1=0$$

因为 r_1 是解析函数, $\nabla^2 r_1=0$

所以

$$\nabla^2(x\cdot p_1+y\cdot q_1)=0$$

由此得出

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[p_1+x\frac{\partial p_1}{\partial x}+y\frac{\partial q_1}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[x\frac{\partial p_1}{\partial y}+q_1+y\frac{\partial q_1}{\partial y}\right]=0$$

$$2\frac{\partial p_1}{\partial x}+x\left(\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p_1}{\partial y^2}\right)+y\left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 q_1}{\partial y^2}\right)+2\frac{\partial q_1}{\partial y}=0$$

$$2\left(\frac{\partial p_1}{\partial x}+\frac{\partial q_1}{\partial y}\right)+x\nabla^2 p_1+y\nabla^2 q_1=0$$

因为 $\nabla^2 p_1=\nabla^2 q_1=0$, 所以得到

$$\left(\frac{\partial p_1}{\partial x}+\frac{\partial q_1}{\partial y}\right)=0$$

又 $\varphi_1(z)-\varphi_2(z)$ 也是 T 中的解析函数, 故

$$\frac{\partial p_1}{\partial x}=\frac{\partial q_1}{\partial y};\quad \frac{\partial p_1}{\partial y}=-\frac{\partial q_1}{\partial x}$$

所以, 可知

$$\frac{\partial p_1}{\partial x}=0;\quad \frac{\partial q_1}{\partial y}=0$$

于是

$$p_1=f_1(y),\quad q_1=f_2(x)$$

$$f_1'(y)=\frac{\partial p_1}{\partial y}=-\frac{\partial q_1}{\partial x}=-f_2'(x)$$

因为 $f_1(y)$ 是 y 的函数，$f_2(x)$ 是 x 的函数，所以只可能是

$$p_1=f_1(y)=-C_1y+C_2$$

$$q_1=f_2(x)=C_1x+C_3$$

才能满足上述条件，为此

$$\varphi_1(z)-\varphi_2(z)=iC_1z+C_2+iC_3 \qquad (2\text{-}3\text{-}1)$$

又知道

$$r_1=-(xp_1+yq_1)$$

所以

$$r_1=-C_2x-C_3y$$

又因为

$$\frac{\partial r_1}{\partial x}=-\frac{\partial s_1}{\partial y};\quad \frac{\partial r_1}{\partial y}=-\frac{\partial s_1}{\partial x}$$

所以

$$s_1=C_3x-C_2y+C_4$$

$$\chi_1(z)-\chi_2(z)=-(C_2-iC_3)z+iC_4 \qquad (2\text{-}3\text{-}2)$$

对于已知的应力分量，艾雷函数不是唯一确定的。同时对于已知的艾雷函数，$\varphi(z)$ 和 $\chi(z)$ 也不是唯一确定的。对于零应力状态，也可以有与之相应的艾雷函数和 $\varphi(z)$ 及 $\chi(z)$。

2-4 由应力分量求位移分量

由第一章内容，可知在平面问题中有

$$X_x=\frac{\partial^2U}{\partial y^2}=\lambda e+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$Y_y=\frac{\partial^2U}{\partial x^2}=\lambda e+2\mu\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$X_y=-\frac{\partial^2U}{\partial x\partial y}=\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = e_{xx} + e_{yy}$$

又知道

$$\nabla^2 U = 2e(\lambda + \mu)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2e(\lambda + \mu) - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 2e(\lambda + \mu) - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

$$2\mu \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \lambda e = -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + e(2\mu + \lambda)$$

但是

$$e = \frac{\nabla^2 U}{2(\lambda + \mu)}$$

所以

$$2\mu \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} \nabla^2 U$$

同样可得

$$2\mu \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} \nabla^2 U$$

曾假设

$$\nabla^2 U = P(x, y)$$

$$\varphi(z) = p(x, y) + iq(x, y)$$

$$4\frac{\partial p}{\partial x} = P; \quad 4\frac{\partial q}{\partial y} = P$$

于是得到

$$2\mu \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + k\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$2\mu \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + k\frac{\partial q}{\partial y}$$

式中 $k = 2(\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu)$。

把上式积分后，得出

$$2\mu u=-\frac{\partial U}{\partial x}+kp+f_1(y)$$

$$2\mu v=-\frac{\partial U}{\partial y}+kq+f_2(x)$$

于是

$$2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=-2\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}+k\left(\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial q}{\partial x}\right)+f_1'(y)+f_2'(x)$$

因为

$$\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial q}{\partial x}=0;\qquad 2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=-2\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}$$

所以得到如下结果

$$f_1'(y)+f_2'(x)=0$$

自然可取

$$f_1'(y)=-2\mu\varepsilon;\quad f_2'(x)=2\mu\varepsilon$$

$$f_1(y)=2\mu(-\varepsilon y+\alpha)$$

$$f_2(x)=2\mu(\varepsilon x+\beta)$$

这里α，β是任意实常数。于是得到以下结论：

若$U=\mathrm{Re}[\bar{z}\varphi(z)+\chi(z)]$是$T$中的艾雷函数，与应力分量

$$X_x=\frac{\partial^2 U}{\partial y^2},\qquad Y_y=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},\qquad Y_y=-\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}$$

相应的位移分量为：

$$2\mu u(x,\ y)=-\frac{\partial U}{\partial x}+k\,\mathrm{Re}[\varphi(z)]+2\mu(-\varepsilon y+\alpha)$$

$$2\mu v(x,\ y)=-\frac{\partial U}{\partial y}+k\,\mathrm{Im}[\varphi(z)]+2\mu(\varepsilon x+\beta)$$

这里ε、α、β是实常数。

从数学上看，ε、α、β是任意的，但从物理上看，ε要很小很小才合实际情况。数学上和物理上要统一起来，ε代表很小的转动。

在集中力和集中力矩作用点，出现奇点。为了数学与物理的一致，要研究集中力和力矩邻域的情况。

用复数表示位移如下：

$$u+iv=-\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)U+\frac{k}{2\mu}\varphi(z)$$
$$+(i\varepsilon z+\alpha+i\beta)$$

2-5 由艾雷函数求主力矢量

我们求在物体T中作用于$\overset{\frown}{AB}$上的主力矢量。若$\overset{\frown}{AB}\subset T$，用自某点算起的弧长$s$为参变数来表示$x$和$y$。于是写为

$$x=x(s),\quad y=y(s)$$

设$\overset{\frown}{AB}$弧是连续光滑的并有一定方向。$x'(s)$和$y'(s)$不能同时为零。取

$$X=\int_{\overset{\frown}{AB}}X_n(s)ds$$

$$Y=\int_{\overset{\frown}{AB}}Y_n(s)ds$$

但是

$$X_n=X_x\cos(n,\ x)+X_y\cos(n,\ y)$$
$$Y_n=X_y\cos(n,\ x)+Y_y\cos(n,\ y)$$

式中

$$\cos(n,\ x)=\frac{dy}{ds},\quad \cos(n,\ y)=-\frac{dx}{ds}$$

如图 2-1 所示。

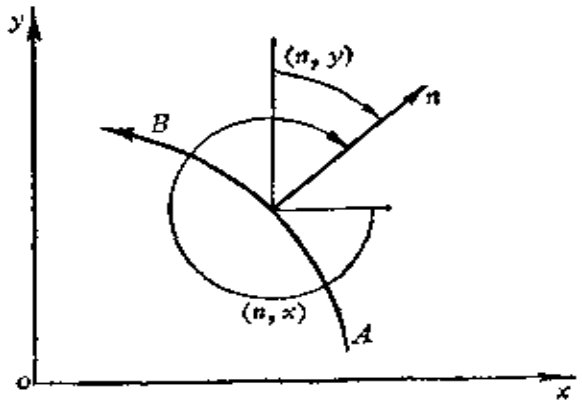


图 2-1

并令

$$X+iY=\int_{\widehat{AB}}[X_n(s)+iY_n(s)]ds$$

为$\widehat{AB}$上主力矢量。

而

$$M=\int_{\widehat{AB}}(xY_n-yX_n)ds$$

为$\widehat{AB}$上主力矩矢量。

$$X_n=\frac{\partial^2U}{\partial y^2}\cos(n,\ x)-\frac{\partial^2U}{\partial x\partial y}\cos(n,\ y)$$

$$Y_n=\frac{\partial^2U}{\partial x^2}\cos(n,\ y)-\frac{\partial^2U}{\partial x\partial y}\cos(n,\ x)$$

变为

$$X_n=\frac{\partial^2U}{\partial y^2}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial^2U}{\partial x\partial y}\frac{dx}{ds}=\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

$$Y_n=-\frac{\partial^2U}{\partial x^2}\frac{dx}{ds}-\frac{\partial^2U}{\partial x\partial y}\frac{dy}{ds}=-\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)$$

主力矢量

$$X+iY=\int_{\widehat{AB}}[X_n+iY_n]ds=\int_{\widehat{AB}}\left[-\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)-i\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)\right]ds=\left[\frac{\partial U}{\partial y}-i\frac{\partial U}{\partial x}\right]_A^B$$

$$=-i\left[\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}\right]_A^B$$

在T中，若已定义艾雷函数U，$\widehat{AB}$是不相交的连续光滑的曲线，那么，由A点到B点的主力矢量为：

$$X+iY=-i\left[\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}\right]_A^B$$

2-6 应力函数的不同表示法

若在T中，已定义应力函数$U(x,\ y)$，$\Phi(z)$，$\chi(z)$，

而且$U=\mathrm{Re}[\bar{z}\varphi(z)+\chi(z)]$，并令

$$\varphi'(z)=\Phi(z)$$
$$\chi'(z)=\psi(z)$$
$$\chi''(z)=\psi'(z)=\Psi(z)$$

那么，可以得出

a) $$-\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}=\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)}$$

b) $$\left[X+iY\right]_A^B=-i\left[\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)}\right]_A^B$$

c) $$2\mu(u+iv)=\nu^*\varphi(z)-z\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)}$$

$$\nu^*=\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}$$

d) $$X_x+Y_y=\nabla^2U=2[\varphi'(z)+\overline{\varphi'(z)}]$$
$$=4\mathrm{Re}[\varphi'(z)]=4\mathrm{Re}[\Phi(z)]$$

e) $$Y_y-X_x-2iX_y=2[z\overline{\varphi''(z)}+\psi'(z)]$$

证明：

因为 $U=\mathrm{Re}[\bar{z}\varphi(z)+\chi(z)]$

$$2U=\bar{z}\varphi(z)+z\overline{\varphi(z)}+\chi(z)+\overline{\chi(z)}$$

$$2\frac{\partial U}{\partial x}=\varphi(z)+\overline{\varphi(z)}+z\overline{\varphi'(z)}+\bar{z}\varphi'(z)+\chi'+\overline{\chi'}$$

$$2\frac{\partial^2U}{\partial x^2}=2\varphi'(z)+2\overline{\varphi'(z)}+\bar{z}\varphi''(z)+z\overline{\varphi''(z)}$$
$$+\chi''+\overline{\chi''}$$

$$2\frac{\partial U}{\partial y}+i[-\varphi(z)+\overline{\varphi(z)}+\bar{z}\varphi'(z)-z\overline{\varphi'(z)}$$
$$+\chi'-\overline{\chi'}]$$

$$2\frac{\partial^2U}{\partial y^2}=2\varphi'(z)+2\overline{\varphi'(z)}-\bar{z}\varphi''(z)-2\varphi''(z)-\chi''-\overline{\chi''}$$

$$2i\frac{\partial^2U}{\partial x\partial y}=z\overline{\varphi''(z)}-\bar{z}\varphi''(z)-\chi''+\overline{\chi''}$$

因为

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\varphi'(z),\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=i\varphi'(z),\quad \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x}=\overline{\varphi'(z)}$$

$$\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y}=-i\overline{\varphi'(z)},\quad \frac{\partial z}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=i$$

$$\frac{\partial\bar{z}}{\partial x}=1;\quad \frac{\partial\bar{z}}{\partial y}=-i$$

于是

$$\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2U}{\partial y^2}=X_x+X_y=2(\varphi'+\bar{\varphi}')=4\mathrm{Re}[\varphi'(z)]$$

$$\frac{\partial^2U}{\partial x^2}-\frac{\partial^2U}{\partial y^2}+2i\frac{\partial^2U}{\partial x\partial y}=Y_y-X_x-2iX_y=2[z\bar{\varphi}''+\overline{\chi''}]$$

$$\frac{\partial^2U}{\partial x^2}-\frac{\partial^2U}{\partial y^2}-2i\frac{\partial^2U}{\partial x\partial y}=Y_y-X_x+2iX_y=2[\bar{z}\varphi''+\chi'']$$

而且

$$\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}=\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)}$$

解以上诸方程后，可得出用应力函数表示的诸应力分量。

$$X_x=\mathrm{Re}[2\varphi'(z)-\bar{z}\varphi''(z)-\chi''(z)]$$

$$Y_y=\mathrm{Re}[2\varphi'(z)+\bar{z}\varphi''(z)+\chi''(z)]$$

$$X_y=\mathrm{Im}[\bar{z}\varphi''(z)+\chi''(z)]$$

这便是略去 z 的线性项及常数后，由应力函数所确定的应力分量

2-7 由应力分量求应力函数

若 T 中有两组解析函数 $\varphi_1(z)$，$\psi_1(z)$ 和 $\varphi_2(z)$，$\psi_2(z)$ 对应于同一的应力分量，那么

$$X_x+Y_y=4\mathrm{Re}[\varphi_1'(z)]=4\mathrm{Re}[\varphi_2'(z)]$$

$\varphi_1'(z)$ 和 $\varphi_2'(z)$ 有相同的实部，其虚部可以相差 ic，于是 $\varphi_1(z)$ 和 $\varphi_2(z)$ 最多可以相差 $icz+\Upsilon$。这里 c 是实数。

$$2[\bar{z}\varphi_1''(z)+\psi_1'(z)]=Y_y-X_x+2iX_y$$

$$=2[\bar{z}\varphi_2''(z)+\psi_2'(z)]$$

这里 $\varphi_1''(z)=\varphi_2''(z)$，故 $\psi_1(z)$ 与 $\psi_2(z)$ 最多相差为一常数。即

$$\psi_1(z)=\psi_2(z)+\gamma'$$

于是针对已知应力分量，可以完全确定 ψ' 及 φ''。不同 $\varphi(z)$ 相差为 $icz+\gamma$，不同 $\psi(z)$ 相差 γ'。

若 T 中有两组解析函数 $\varphi_1(z)$，$\psi_1(z)$ 和 $\varphi_2(z)$，$\psi_2(z)$ 对应同一应力分量和位移分量时，则有

$$\kappa\varphi_1(z)-z\overline{\varphi_1'(z)}-\overline{\psi_1(z)}=2\mu(u+iv)$$

$$=\kappa\varphi_2(z)-z\overline{\varphi_2'(z)}-\overline{\psi_2(z)}$$

但是

$$\varphi_2(z)=\varphi_1(z)+icz+\gamma$$

$$\psi_2(z)=\psi_1(z)+\gamma'$$

于是

$$\kappa\varphi_2(z)-z\overline{\varphi_1'(z)}-\overline{\psi_1(z)}=\kappa\varphi_1(z)+\kappa icz+\kappa\gamma$$

$$-z\overline{\varphi_1'(z)}+icz-\overline{\psi_1(z)}-\overline{\gamma'}$$

故得到

$$c=0,\quad \kappa\gamma-\overline{\gamma'}=0$$

此时，可以说针对同一应力及位移分量，$\varphi(z)$ 最多相差一常数，$\varphi'(z)$ 完全确定。$\psi(z)$ 最多相差一常数，而且 $\kappa\gamma-\overline{\gamma'}=0$。

若 $u=0$，$v=0$ 时，即

$$\kappa\varphi_1(z)-z\overline{\varphi_1'}-\overline{\psi_1}=\kappa\varphi_1+ic\kappa z+\kappa\gamma-z\overline{\varphi_1'}+icz$$

$$-\overline{\psi_1}-\overline{\gamma'}=0$$

则得到

$$c=0,\quad \kappa\gamma=0,\quad \overline{\gamma'}=0$$

2-8 多连通区的应力函数

若 T 是有限或无限的 $(m+1)$ 连通区。C_k 是内边界曲线

($k=1, 2, \cdots, m$)。z_k 是 C_k 中的任意固定点（图 2-2)。X_x, X_y, Y_y 是有连续二阶导数的函数，在 T 中它们满足下列方程组

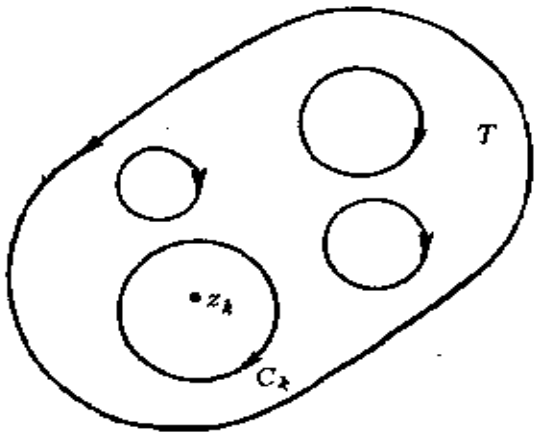


图 2-2

$$\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}=0$$

$$\nabla^2(X_x+Y_y)=0$$

于是在 T 中存在两个全纯函数 $\varphi_0(z)$ 和 $\psi_0(z)$，以致根据关系式

$$X_x+Y_y=4\mathrm{Re}[\varphi'(z)]$$

$$-X_x+Y_y+2iX_y=2(\bar{z}\varphi''+\upsilon')$$

可由函数

$$\varphi(z)=z\sum_{k=1}^{m}A_k\ln(z-z_k)+\sum_{k=1}^{m}\gamma_k\ln(z-z_k)+\varphi_0(z)$$

$$\psi(z)=\sum_{k=1}^{m}\gamma_k'\ln(z-z_k)+\psi_0(z)$$

唯一确定应力分量 X_x, Y_y, X_y。这里 A_k 为实常数，γ_k, γ_k' 为复常数。A_k 以及 γ_k—γ_k' 与点 z_k 的位置无关而与 X_x, X_y, Y_y 有关。

证明：

假设在 $\bar{T}$ 中，X_x，X_y，Y_y 有连续一阶偏导数。取 $\varphi'_R=\mathrm{Re}[\varphi'(z)]$，则

$$\frac{1}{4}(X_x+Y_y)=\varphi'_R$$

因为 $\nabla^2(X_x+Y_y)=0$，所以

$$\nabla^2\varphi'_R=0$$

φ'_R 是个调合函数，那么

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi'_R}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi'_R}{\partial y}\right)$$

由全微分

$$dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx-\frac{\partial F}{\partial y}dy$$

可知下式满足全微分条件

$$\frac{\partial\varphi'_R}{\partial x}dy-\frac{\partial\varphi'_R}{\partial y}dx$$

而且

$$\sum_{k=1}^{m}A_k\frac{\partial\,\mathrm{Re}[\ln(z-z_k)]}{\partial x}dy-\sum_{k}^{m}A_k\frac{\partial\,\mathrm{Re}[\ln(z-z_k)]}{\partial y}dx$$

也构成一个全微分。

按柯西—黎曼条件，函数 $\ln(z-z_k)$ 满足下列关系：

$$\frac{\partial\,\mathrm{Re}[\ln(z-z_k)]}{\partial x}=\frac{\partial\mathrm{Im}[\ln(z-z_k)]}{\partial y}$$

$$\frac{\partial\,\mathrm{Re}[\ln(z-z_k)]}{\partial y}=-\frac{\partial\mathrm{Im}[\ln(z-z_k)]}{\partial x}$$

而

$$d\,\mathrm{Im}[\ln(z-z_k)]=\frac{\partial\mathrm{Im}[\ln(z-z_k)]}{\partial x}dx+\frac{\partial\mathrm{Im}[\ln(z-z_k)]}{\partial y}dy$$

$$=-\frac{\partial\,\mathrm{Re}[\ln(z-z_k)]}{\partial y}dx+\frac{\partial\,\mathrm{Re}[\ln(z-z_k)]}{\partial x}dy$$

当然有

$$\int_{C_i}\left\{\sum_{k=1}^{m}A_k\frac{\partial\,\mathrm{Re}[\ln(z-z_k)]}{\partial x}dy-\sum_{k=1}^{m}A_k\frac{\partial\mathrm{Re}[\ln(z-z_k)]}{\partial y}dx\right\}$$

$$=-2\pi A_i$$

$(i=1,2,\cdots,m)$，$k=i$；若$k\neq i$，上式为零。

现在我们求

$$A_k=-\frac{1}{2\pi}\int_{C_k}\left(\frac{\partial\varphi'_R}{\partial x}dy-\frac{\partial\varphi'_R}{\partial y}dx\right)$$

下式也是一个全微分

$$\frac{\partial\varphi'_R}{\partial x}dy-\frac{\partial\varphi'_R}{\partial y}dx+\sum_{k=1}^{m}A_k\frac{\partial\,\mathrm{Re}[\ln(z-z_k)]}{\partial x}dy$$

$$-\sum_{k=1}^{m}A_k\frac{\partial\,\mathrm{Re}[\ln(z-z_k)]}{\partial y}dx$$

我们知道

$$\int_{z_0}^{z}\left(\sum_{k=1}^{m}A_k\frac{\partial\,\mathrm{Re}[\ln(z-z_k)]}{\partial x}dy\right.$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{m}A_k\frac{\partial\,\mathrm{Re}[\ln(z-z_k)]}{\partial y}dx\right)=\mathrm{Im}\sum_{k=1}^{m}A_k[\ln(z-z_k)]_{z_0}^{z}$$

z_0是$\bar{T}$中任意一点。

因为

$$\int_{C_i}\left\{\frac{\partial\varphi'_R}{\partial x}dy-\frac{\partial\varphi'_R}{\partial y}dx-\sum_{k=1}^{m}A_k\frac{\partial\,\mathrm{Re}[\ln(z-z_k)]}{\partial x}dy\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{m}A_k\frac{\partial\,\mathrm{Re}[\ln(z-z_k)]}{\partial y}dx\right\}=0$$

所以

$$\int_{z_0}^{z}\left\{\frac{\partial\varphi'_R}{\partial x}dy-\frac{\partial\varphi'_R}{\partial y}dx-\sum_{k=1}^{m}A_k\frac{\partial\,\mathrm{Re}[\ln(z-z_k)]}{\partial x}dy\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{m}A_k\frac{\partial\,\mathrm{Re}[\ln(z-z_k)]}{\partial y}dx\right\}=H^*$$

是个解析函数。于是

$$\mathrm{Im}\left[\sum_{k=1}^{m} A_k \ln(z-z_k)\right]$$

是解析函数，当然

$$\mathrm{Re}\left[\sum_{k=1}^{m} A_k \ln(z-z_k)\right]$$

也是个解析函数。于是

$$\varphi_R'(z)-\mathrm{Re}\left[\sum_{k=1}^{m} A_k \ln(z-z_k)\right]+iH^*$$

构成在 T 中全纯并且在 $\bar{T}$ 中连续的函数，令

$$\Phi_0=\varphi_R'(z)-\mathrm{Re}\left[\sum_{k=1}^{m} A_k \ln(z-z_k)\right]+iH^*$$

它要满足柯西—黎曼条件，即

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\varphi_R'(z)-\mathrm{Re}\left[\sum_{k=1}^{m} A_k \ln(z-z_k)\right]\right\}=-\frac{\partial}{\partial y}H^*$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\varphi_R'(z)-\mathrm{Re}\left[\sum_{k=1}^{m} A_k \ln(z-z_k)\right]\right\}=-\frac{\partial}{\partial x}H^*$$

于是

$$\varphi_R'(z)=\mathrm{Re}\left[\Phi_0+\sum_{k=1}^{m} A_k \ln(z-z_k)\right]=\mathrm{Re}[\varphi'(z)]$$

所以

$$\varphi'(z)=\Phi_0+\sum_{k=1}^{m} A_k \ln(z-z_k)$$

而 $\ln(z-z_k)$ 的原函数为 $(z-z_k)\ln(z-z_k)-(z-z_k)$。

令

$$\Phi^*=\Phi_0+\sum_{i=1}^{m} c_i\cdot\frac{1}{z-z_i}$$

这里 c_i 是复常数，选择 c_i 并令

$$\int_{C_k} \Phi^* dz = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, m)$$

于是

$$\int_{z_0}^{z} \Phi^* dz = \varphi_0(z)$$

为 T 中解析函数，并且

$$\varphi_0'(z) = \Phi^*(z)$$

$$\varphi_0(z) = \int_{z_0}^{z} \left(\Phi_0 dz + \sum_{i=1}^{m} \frac{c_i}{z - z_i} dz \right)$$

于是 $\varphi'(z)$ 的原函数 $\varphi(z)$ 为

$$\varphi(z) = z \sum_{k=1}^{m} A_k \ln(z - z_k) + \sum_{k=1}^{m} \gamma_k \ln(z - z_k) + \varphi_0(z)$$

$$\varphi''(z) = \Phi_0'(z) + \sum_{k=1}^{m} A_k \frac{1}{z - z_k}$$

这里 γ_k 是待定的复常数。

如果 $\varphi''(z)$ 是全纯函数，它满足柯西—黎曼条件。

$$\varphi''(z) = \mathrm{Re}[\varphi''] + i\,\mathrm{Im}[\varphi''] = \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Re}[\varphi'(z)]$$

$$+ i \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Im}[\varphi'(z)] = \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Re}[\varphi'(z)]$$

$$- i \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{Re}[\varphi'(z)] = \frac{1}{4}\left[\frac{\partial}{\partial x}(X_x + Y_y) \right.$$

$$\left. - i \frac{\partial}{\partial y}(X_x + Y_y) \right]$$

又知道它应满足柯西—黎曼条件，即

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}(X_x + Y_y) \right] &= -\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial y}(X_x + Y_y) \right] \\ \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}(X_x + Y_y) \right] &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}(X_x + Y_y) \right] \end{aligned}\right\}$$

所以得到

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(X_x+Y_y)=\nabla^2(X_x+Y_y)=0$$

$$\nabla^2(X_x+Y_y)=\nabla^2\nabla^2U=0$$

这是以前已经证明过的结论。所以，这完全证明了 $\varphi''(z)$ 是 T 中的解析函数。

我们令

$$p(x,y)=Y_y-X_x-2\mathrm{Re}[\bar{z}\varphi''(z)]$$

$$q(x,y)=2X_y-2\mathrm{Im}[\bar{z}\varphi''(z)]$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x}&=\frac{\partial Y_y}{\partial x}-\frac{\partial X_x}{\partial x}-2\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Re}[\bar{z}\varphi''(z)]\\&=\frac{\partial Y_y}{\partial x}-\frac{\partial X_x}{\partial x}-2\frac{\partial}{\partial x}[x\,\mathrm{Re}(\varphi'')+y\,\mathrm{Im}(\varphi'')]\\&=\frac{\partial Y_y}{\partial x}-\frac{\partial X_x}{\partial x}-2\mathrm{Re}[\varphi''(z)]-2x\frac{\partial\,\mathrm{Re}[\varphi''(z)]}{\partial x}\\&\quad-2y\frac{\partial\,\mathrm{Im}[\varphi''(z)]}{\partial x}\end{aligned}$$

因为 $\varphi''(z)$ 是 T 中解析函数，所以

$$\frac{\partial\,\mathrm{Re}[\varphi''(z)]}{\partial x}=\frac{\partial\,\mathrm{Im}[\varphi''(z)]}{\partial y}$$

$$\frac{\partial\,\mathrm{Re}[\varphi''(z)]}{\partial y}=-\frac{\partial\,\mathrm{Im}[\varphi''(z)]}{\partial x}$$

无体积力时，由力的平衡方程，可知

$$\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}=0,\quad\frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}=0$$

而且

$$4\mathrm{Re}[\varphi''(z)]=\frac{\partial}{\partial x}(X_x+Y_y)$$

$$4\mathrm{Im}[\varphi''(z)]=\frac{\partial}{\partial y}(X_x+Y_y)$$

代入上式后，得到

$$\frac{\partial p}{\partial x}=-2x\frac{\partial \operatorname{Im}[\varphi''(z)]}{\partial y}+2y\frac{\partial \operatorname{Re}[\varphi''(z)]}{\partial y}+2\operatorname{Re}[\varphi''(z)]$$
$$-\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}(X_x+Y_y)$$
$$=-2x\frac{\partial \operatorname{Im}[\varphi''(z)]}{\partial y}+2y\frac{\partial \operatorname{Re}[\varphi''(z)]}{\partial y}$$
$$+2\operatorname{Re}[\varphi''(z)]+2\frac{\partial X_y}{\partial y}$$
$$=-\frac{\partial q}{\partial y}$$

同样

$$\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial Y_y}{\partial y}-\frac{\partial X_x}{\partial y}-2\operatorname{Im}[\varphi''(z)]-2y\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{Im}[\varphi''(z)]$$
$$-2x\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{Re}[\varphi''(z)]$$
$$=-2\frac{\partial X_y}{\partial x}-\frac{\partial Y_y}{\partial y}-\frac{\partial X_x}{\partial y}-2\operatorname{Im}[\varphi''(z)]$$
$$+2x\frac{\partial \operatorname{Im}[\varphi''(z)]}{\partial x}-2y\frac{\partial \operatorname{Re}[\varphi''(z)]}{\partial x}$$
$$=2\frac{\partial X_y}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}(X_x+Y_y)+2\frac{\partial}{\partial x}[\bar{z}\varphi''(z)]-4\operatorname{Im}[\varphi''(z)]$$
$$=-2\frac{\partial X_y}{\partial x}+2\frac{\partial}{\partial x}[\bar{z}\varphi''(z)]$$
$$=-\frac{\partial q}{\partial x}$$

由以上两式，可知

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial q}{\partial y};\quad \frac{\partial p}{\partial y}=-\frac{\partial q}{\partial x}$$

若设 $2\Psi=p(x,y)+iq(x,y)$，则Ψ是个解析函数。于是

$$2\Psi=Y_y-X_x+2iX_y-2\bar{z}\varphi''(z)$$
$$Y_y-X_x+2iX_y=2[\bar{z}\varphi''+\Psi]$$
$$\Psi=\psi'$$

若取

$$\Psi=\Psi_0+\sum_{i=1}^{m}\frac{\gamma_i'}{z-z_i}$$

这里 γ_i' 是待定常数，Ψ_0 是解析函数。

$$\psi(z)=\int_{z_0}^{z}\Psi(z)dz$$

于是

$$\psi(z)=\int_{z_0}^{z}\Psi_0(z)\,dz+\sum_{i=1}^{m}\int_{z_0}^{z}\gamma_i'\frac{dz}{z-z_i}$$

$$=\psi_0+\sum_{k=1}^{m}\gamma_k'\ln(z-z_k)$$

ψ_0 也是个解析函数。

在以上的证明过程中，没有设位移是单值的。如果位移是单值的，应力分量在 $\overline{T}$ 中有连续的偏导数，那么

a) $A_k=0$

b) $\gamma_k=-\frac{X_k+iY_k}{2\pi(1+\nu^*)}$，$\gamma_k'=\frac{\nu^*(X_k-iY_k)}{2\pi(1+\nu^*)}$

$$X_k+iY_k=\int_{C_k}(X_n+iY_n)ds$$

并且应力函数为：

$$\varphi(z)=-\frac{1}{2\pi(1+\nu^*)}\sum_{k=1}^{m}(X_k+iY_k)\ln(z-z_k)+\varphi_0(z)$$

$$\psi(z)=\frac{\nu^*}{2\pi(1+\nu^*)}\sum_{k=1}^{m}(X_k-iY_k)\ln(z-z_k)+\psi_0(z)$$

这里 X_k+iY_k 表示为作用边界 C_k 上的主力矢量。$\varphi_0(z)$ 和 $\psi_0(z)$ 是解析函数，z_k 是 C_k 中任意一点。

证明：若在 T 中取一单连通子域 T^*，即 $T^*\subset T$。并且已知

$$2\mu(u+iv)=\nu^*\varphi(z)-z\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)}$$

取 C_k 上一点 z 绕正方向移动一周，那么上式改变的数值为：

$$-2\pi i\{(\nu^*+1)A_k z+\nu^*\gamma_k+\bar{\gamma}'_k\}$$

由此可知在 T 中位移为单值时，必须满足以下条件：

$$A_k=0;\quad \nu^*\gamma_k+\bar{\gamma}'_k=0$$

在以前的证明中已知

$$\int_{C_k}(X_n+iY_n)ds=-i\int_{C_k}[\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\bar{\psi}]ds$$

把 $\varphi(z)$，$\overline{\varphi'(z)}$，$\bar{\psi}$ 代入后，由于 $\varphi(z)$，$\psi(z)$ 中有 $\gamma_k\ln(z-z_k)$ 及 $\bar{\gamma}'_k\ln(z-z_k)$ 项，故

$$\int_{C_k}(X_n+iY_n)ds=-2\pi(\gamma_k-\bar{\gamma}'_k)$$

即得出

$$X_k+iY_k=-2\pi(\gamma_k-\bar{\gamma}'_k)$$
$$\nu^*\gamma_k+\bar{\gamma}'_k=0$$

由此解出 γ_k，$\bar{\gamma}'_k$ 为：

$$\gamma_k=-\frac{X_k+iY_k}{2\pi(1+\nu^*)};\quad \gamma'_k=\frac{\nu^*(X_k-iY_k)}{2\pi(1+\nu^*)}$$

若 T 是 $m+1$ 连通区，内边界曲线为 C_k，在 T 中存在满足平衡方程和协调条件的应力分量 X_n，X_y，Y_y 和与之相应的位移是单值时，其充要条件是在 T 中存在下列解析函数

$$\varphi(z)=-\frac{1}{2\pi(1+\nu^*)}\sum_{k=1}^{m}\beta_k\ln(z-z_k)+\varphi_0(z)$$

$$\psi(z)=\frac{\nu^*}{2\pi(1+\nu^*)}\sum_{k=1}^{m}\bar{\beta}_k\ln(z-z_k)+\psi_0(z)$$

z_k 为 T 外，C_k 内之任意点，β_k 与 C_k 无关是常数。

由以上叙述，可知，当给定位移时，不同解析函数 $\varphi(z)$ 的差值为 γ；不同 $\psi(z)$ 的差值为 γ' 而且 $\nu^*\gamma-\bar{\gamma}'=0$。当给定应力分量时，不同解析函数 $\varphi(z)$ 的差值为 $icz+\gamma$，不同 $\psi(z)$ 的差值为 γ'。

若有位错时，则 $A_k \neq 0$。于是无任何外负荷作用于物体上，当 z 点绕边界一周时，

$$u+iv=\frac{\nu^*+1}{2\mu}c\,[ix-y]+\frac{1}{2\mu}(i\nu^*\gamma-\gamma')$$

于是

$$u=\frac{1+\nu^*}{2\mu}cy-\frac{1}{2\mu}[\mathrm{Re}\,\gamma'+\nu^*\,\mathrm{Im}\,\gamma]$$

$$v=\frac{\nu^*+1}{2\mu}cx-\frac{1}{2\mu}[\mathrm{Im}\,\gamma'-\nu^*\,\mathrm{Re}\,\gamma]$$

由此得到位错分量 ω，ξ 和 η 为：

$$\omega=\frac{\nu^*+1}{2\mu}c$$

$$\xi=u+\omega y=-\frac{1}{2\mu}(\mathrm{Re}\,\gamma'+\nu^*\,\mathrm{Im}\,\gamma)$$

$$\eta=v-\omega x=-\frac{1}{2\mu}(\mathrm{Im}\,\gamma'-\nu^*\,\mathrm{Re}\,\gamma)$$

此时

$$U=\mathrm{Re}[\bar{z}(icz+\gamma)+\chi(z)]$$
$$=\mathrm{Re}[\gamma+\gamma']x+\mathrm{Im}[\gamma-\gamma']y+\mathrm{Re}\,\delta$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\mathrm{Re}[\gamma+\gamma'];\quad \frac{\partial U}{\partial y}=\mathrm{Im}[\gamma-\gamma']$$

$$\chi(z)=\gamma' z+\delta$$

这里 δ 表示复常数。$\mathrm{Re}\,\delta$ 表示力矩。由此可知 $\mathrm{Re}[\gamma+\gamma']$，$\mathrm{Im}[\gamma-\gamma']$ 的物理意义是力，c 的物理意义是转动。

为讨论有位错的情况，可设 $\varphi(z)$ 和 $\chi(z)$ 的形式为：

$$\varphi(z)=M_1 z\ln z+M_2\ln z+\varphi_0(z)$$

$$\chi(z)=\psi(z)=N_1 z\ln z+N_2\ln z+\chi_0(z)$$

$\varphi_0(z)$ 以及 $\chi_0(z)=\psi_0(z)$ 为区域内的单值解析函数。点 z 绕边界一周时，自然有

$$\varphi(z)=2\pi i M_1 z+2\pi i M_2$$

$$\chi(z)=2\pi i N_1 z+2\pi i N_2$$

于是位借分量为：

$$c = 2\pi M_1, \quad \gamma = 2\pi i M_2, \quad \gamma' = 2\pi i N_1$$

$$\delta = 2\pi i N_2$$

$$\omega = \frac{\pi}{\mu}(\nu^* - 1)M_1$$

$$\xi = -\frac{\pi}{\mu}(\nu^* \operatorname{Re} M_2 - \operatorname{Im} N_1)$$

$$\eta = -\frac{\pi}{\mu}(\operatorname{Re} N_1 - \nu^* \operatorname{Im} M_2)$$

§2 平面弹性力学的基本问题

这里有两类基本问题：

a）已知力的边界条件，求解重调和方程；

b）已知位移边界条件，求解重调和方程。

此外还有混合边界条件的问题。

2-9 用实数形式表明平面问题的解的唯一性

在一圆管内充有压力为 p 的气体，管内径为 r_1，管外径为 r_0（图 2-3）。用 C_1 表示管内表面圆弧，用 C_0 表示管外表面圆弧。在物体中的应力分量是连续的，在内边界面上压力为 p。

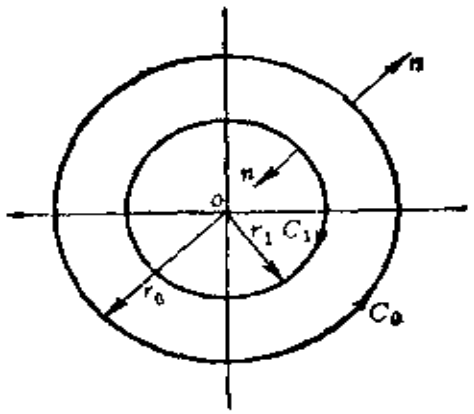


图 2-3

对于 $0 \leqslant s < 2\pi r_1$，

$$\cos(n, x) = -\cos s / r_1$$
$$\cos(n, y) = \sin s / r_1$$

对于 $2\pi r_1 \leqslant s < 2\pi(r_0 + r_1)$,

$$\cos(n, x) = \cos\frac{s - 2\pi r_1}{r_0}$$
$$\cos(n, y) = \sin\frac{s - 2\pi r_1}{r_0}$$

因为在 C_1 内表面上,

$$\left.\begin{aligned} X_n &= p\cos\frac{s}{r_1} \\ Y_n &= -p\sin\frac{s}{r_1} \end{aligned}\right\} 0 \leqslant s < 2\pi r_1$$

$$\left.\begin{aligned} X_n &= 0 \\ Y_n &= 0 \end{aligned}\right\} 2\pi r_1 \leqslant s < 2\pi(r_1 + r_0)$$

X_n, Y_n 的正向与坐标正方向相同。于是由方程

$$X_n = X_x\cos(n, x) + X_y\cos(n, y)$$
$$Y_n = X_y\cos(n, x) + Y_y\cos(n, y)$$

可知

$$\left.\begin{aligned} -X_x\cos\frac{s}{r_1} + X_y\sin\frac{s}{r_1} &= p\cos\frac{s}{r_1} \\ -X_y\cos\frac{s}{r_1} + Y_y\sin\frac{s}{r_1} &= -p\sin\frac{s}{r_1} \end{aligned}\right\} 0 \leqslant s < 2\pi r_1$$

$$\left.\begin{aligned} X_x\cos\frac{s - 2\pi r_1}{r_0} + X_y\sin\frac{s - 2\pi r_1}{r_0} &= 0 \\ X_y\cos\frac{s - 2\pi r_1}{r_0} + Y_y\sin\frac{s - 2\pi r_1}{r_0} &= 0 \end{aligned}\right\} 2\pi r_1 \leqslant s < 2\pi(r_1 + r_0)$$

$$\int_0^l X_n(s)\,ds = \int_0^{2\pi r_1}\left(-X_x\cos\frac{s}{r_1} - X_y\sin\frac{s}{r_1}\right)ds + \int_{2\pi r_1}^{2\pi(r_1 + r_0)}\left(X_x\cos\frac{s - 2\pi r_1}{r_0} + X_y\sin\frac{s - 2\pi r_1}{r_0}\right)ds,$$

$$=\left(-X_x r_1 \sin\frac{s}{r_1}-X_y r_1\cos\frac{s}{r_1}\right)_0^{2\pi r_1}$$
$$+\left(-X_y r_0\cos\frac{s-2\pi r_1}{r_0}+X_x r_0\sin\frac{s-2\pi r_1}{r_0}\right)_{2\pi r_1}^{2\pi(r_0+r_1)}$$
$$=0$$

同样可得到

$$\int_0^l Y_n(s)ds=0$$

$$\int_0^l [xY_n(s)-yX_n(s)]ds=0$$

这表明：当沿边界外负荷总和为零

$$\int_0^l [X_n(s)+iY_n(s)]ds=0$$

及沿边界外负荷力矩总和为零

$$\int_0^l [x(s)Y_n(s)-y(s)X_n(s)]ds=0$$

时，有 X_x，X_y，Y_y 存在，并且可利用力的平衡及协调条件确定。

可以把这个圆管的情况推广到一般情况。

若 T 是有限 $m+1$ 连通区，它边界是充分光滑的曲线 C_0，$C_1,\cdots,C_m$。边界总长为 l，作用于边界上的负荷是连续的。那么，确定在 T 中连续并满足下列方程

$$\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}=0;\quad \frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}=0$$
$$\nabla^2(X_x+Y_y)=0$$

在边界上等于已知应力 $X_n(s)$ 和 $Y_n(s)$ 的应力分量 X_x，X_y，Y_y 是第一基本问题。在边界上要满足力和力矩的平衡条件。

若 T 为 $m+1$ 连通区，边界为充分光滑，其总长为 l。已知在边界上的位移 $U(s)$ 及 $V(s)$ 为连续的。求在 T 中连续又满足平衡和协调条件的应力分量 X_x，X_y，Y_y 以及满足边界条件的位移 $u(s)$ 和 $v(s)$ 是第二个基本问题。

若T是有限$m+1$连通区，如果在$\bar{T}$中，无论是应力还是位移是连续的，针对一定的边界条件，其解是唯一的。

证明：若有两个解同时存在，它们都满足平衡条件和协调条件，其差值也应当满足这些条件；同时在边界上其应力矢量和位移矢量也应等于零。若能证明在$\bar{T}$中有连续的应力分量和位移分量并在边界上，其应力矢量和位移矢量为零的解亦为零，则证明了解的唯一性。

取能量积分W

$$W=\int_C(X_n\cdot u+Y_n\cdot v)ds$$

其中$C=C_1+C_2+\cdots+C_m+C_0$代表区域（物体）的总边界。

根据两个解的差值函数在边界上应满足应力分量X_n和Y_n或位移分量u和v为零的条件，则$W=0$。

利用格林定理

$$\begin{aligned}W&=\int_C[(X_x\cdot u+X_y\cdot v)\cos(n,x)\\&\quad+(X_y\cdot u+Y_y\cdot v)\cos(n,y)]ds\\&=\int_C\left[(X_x\cdot u+X_y\cdot v)\frac{dy}{ds}\right.\\&\quad\left.+(X_y\cdot u+Y_y\cdot v)\left(-\frac{dx}{ds}\right)\right]ds\\&=\int_C[(X_x\cdot u+X_y\cdot v)dy-(X_y\cdot u+Y_y\cdot v)dx]\\&=\iint_T\left[\frac{\partial}{\partial x}(X_x\cdot u+X_y\cdot v)+\frac{\partial}{\partial y}(X_y\cdot u+Y_y\cdot v)\right]dxdy\\&=\iint_T\left[u\left(\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}\right)+v\left(\frac{\partial X_y}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}\right)\right.\\&\quad\left.+X_x\frac{\partial u}{\partial x}+Y_y\frac{\partial v}{\partial y}+X_y\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]dxdy\end{aligned}$$

但由力的平衡条件，可知（无体积力）

$$\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}=0$$

由拉梅方程可知

$$X_x=\lambda e+2\mu\frac{\partial u}{\partial x};\quad Y_y=\lambda e+2\mu\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$X_y=2\mu e_{xy}$$

于是把它们代入W式中后，得到

$$W=\iint_T[\lambda e^2+2\mu(e_{xx}^2+2e_{xy}^2+e_{yy}^2)]dxdy$$

因为$W=0$，所以在T中，必须有

$$e_{xx}=e_{yy}=e_{xy}\equiv 0$$

同时也就是

$$X_x=Y_y=X_y\equiv 0$$

这说明解的差值函数表示此物体在边界上没有位移和物体中无应变，或是物体刚性位移为

$$u=-\varepsilon y+\alpha;\quad v=\varepsilon x+\beta$$

因为这时候

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e_{xx}=0;\quad \frac{\partial v}{\partial y}=e_{yy}=0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=e_{xy}=\varepsilon-\varepsilon=0$$

证明若有解，则解是唯一的。解的存在的证明过于冗长，不再写出。

以上的叙述也证明了克拉皮荣（Clapeyron）定理，即外负荷所作功等于物体的弹性能。

2-10 以复数形式表示第一个基本问题的解

连续负荷的情况

若有一个$m+1$连通区T，在其边界上有连续外负荷作用。我们先假设作用在边界上的外负荷的主矢量为零。即

$$\int_{C_k}(X_n+iY_n)ds=0$$

按照以前所作假设可知，在 T 中连续到边界上的应力主矢量应与外负荷主矢量相等，所以它也应等于零。

在 $\widehat{AB}$ 上作用的主矢量为：

$$\int_A^B(X_n+iY_n)ds=[X+iY]_A^B=-i[\varphi+z\bar{\varphi}'+\bar{\psi}]_A^B$$

$$=-i\left[\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}\right]_A^B$$

而主矢量函数为

$$f(s)=i\int(X_n+iY_n)ds$$

于是

$$f(b)-f(a)=[\varphi+z\bar{\varphi}'+\bar{\psi}]_A^B=\left[\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}\right]_A^B$$

即作用于边界上任一段 $\widehat{AB}$ 弧上的应力主矢量等于外负荷主矢量。因为 φ，φ' 及 ψ 在 $\bar{T}$ 中连续，所以应力主矢量一直连续到边界上。在第一个基本问题中，应求出在 T 中满足力平衡方程及应变协调方程，而在边界上 $\varphi+2\bar{\varphi}'+\psi$ 取定值的 φ，ψ 或 U 函数。$f(s)$ 可以相差到一个常数，对于不同的边界 $f(s)$ 是不同的。

我们设外负荷是连续的，其主矢量在每一个边界上都等于零，也就是说在边界上它们自相平衡。当然，应力函数 φ，φ' 和 ψ 是单值的，并且一直连续到边界上。

如果外负荷主矢量在每个边界上不等于零，那么函数 φ，φ' 及 ψ 就不是单值的了，但可以使之成为单值的。

当在边界曲线 C_k 上的外负荷主矢量等于 X_k+iY_k 时，函数 $\varphi(z)$，$\psi(z)$ 为

$$\varphi(z)=\varphi_1(z)+\varphi_0(z);\quad \psi(z)=\psi_1(z)+\psi_0(z)$$

$$\varphi_1(z)=-\frac{1}{2\pi(1+\nu^*)}\sum_{k=1}^{m}(X_k+iY_k)\ln(z-z_k)$$

$$\psi_1(z)=\frac{\nu^*}{2\pi(1+\nu^*)}\sum_{k=1}^{m}(X_k-iY_k)\ln(z-z_k)$$

$\varphi_0(z)$，$\psi_0(z)$ 为 T 中单值解析函数。

现仍以圆管受内压为例（图2-4）来说明。设内壁以 $A_1(r_1,0)$ 为始点，外壁以 $A_0(r_0,0)$ 为始点。因边界曲线的走向，故在内壁曲线上的点表示为：

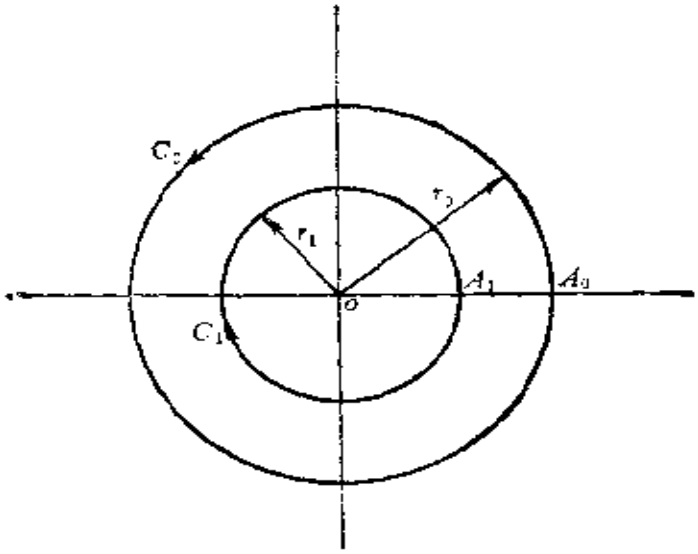


图 2-4

$$z=r_1e^{-i\frac{s}{r_1}}$$

在外壁曲线上的点为：

$$z=r_0e^{i\frac{s-2\pi r_1}{r_0}}$$

圆管所受负荷相当于应力函数 $\varphi=0$，$\psi=-\frac{i}{2}$。

$$\bar{\psi}=\frac{i}{\bar{z}}=\begin{cases}\dfrac{i}{r_1}e^{-is/r_1} & \text{在内壁}\\[2ex] \dfrac{i}{r_0}e^{i\frac{s-2\pi r_1}{r_0}} & \text{在外壁}\end{cases}$$

因为

$$f(2\pi r_1)-f(0)=[\bar{\psi}]_0^{2\pi r_1}=\frac{i}{r_1}[e^{-2\pi i}-1]=0$$

$$f[2\pi(r_1+r_0)]-f(2\pi r_1)=[\bar{\psi}]_{2\pi r_1}^{2\pi(r_0+r_1)}=\frac{i}{r_0}[e^{2\pi i}-1]=0$$

故作用于内外壁上的外负荷自相平衡。

因为在边界上，$f(s)$ 等于 $\varphi+z\bar{\psi}'+\bar{\psi}$ 可以相差常数。在 $s=0$ 和 $s=2\pi r_1$，$f(s)=0$。我们在这时可以选

$$\psi=-\frac{i}{z}+\frac{i}{r_0}$$

并设在外边界上的常数 $\beta_0=0$。于是得到

$$f(s)=\begin{cases}\dfrac{i}{r_1}\left(e^{-i\frac{s}{r_1}}-1\right) & \text{在内壁}\\ -\dfrac{i}{r_0}\left(e^{i\frac{s-2\pi r_1}{r_0}}-1\right) & \text{在外壁}\end{cases}$$

$$\bar{\psi}(s)=\begin{cases}\dfrac{i}{r_1}\left(e^{-i\frac{s}{r_1}}-1\right) & \text{在内壁}\\ -\dfrac{i}{r_0}\left(e^{i\frac{s-2\pi r_1}{r_0}}-1\right) & \text{在外壁}\end{cases}$$

于是在内壁上的常数为

$$\beta_1=\left(\frac{i}{r_1}+\frac{i}{r_0}\right)$$

一般在单连通区，我们可以令 $\beta_0=0$。但是在其它曲线上的常数不能一概为零。由上例可知，当取 $\varphi=0$，改变 ψ 相差常数，并没有使得不同边界上的常数相同，在这里 $\beta_0\neq\beta_1$。同理我们可以设想，若改变 φ 相差 $icz+\gamma$，也不能使 $\beta_0=\beta_1$。

负荷不连续的情况：实际情况中常有作用于任意一点小邻域上的负荷，负荷不连续。往往用作用于此点上的集中等效力来代替它。那么，在点小邻域内的应力分量改变了。我们可用图 2-5 所示来描述由小面积上的作用力用一点上集中力代替的过程。当

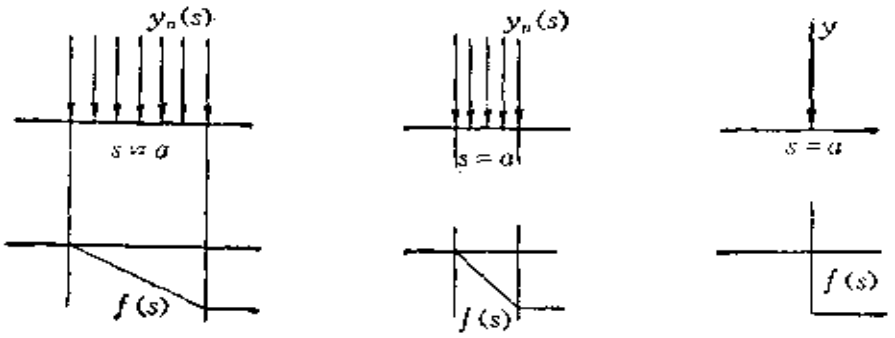


图 2-5

用集中于一点的力代替作用于小面积上的力时，主矢量函数 $f(s)$ 在 $s=a$ 点是跳跃的，在这里它等于 $-Y$。这也就是说，若在某一点上有大小为 $X+iY$ 的集中力作用时，在此点上主矢量函数 $f(s)$ 的跳跃为 $i(X+iY)$。为了使计算简单，我们常用这种代替，即把不连续的负荷（集中负荷）取为连续负荷的极限值。这样作就使不连续负荷（集中负荷）的解变为连续负荷的解的极限。

若 $f(s)$ 在区间（0，1）满足以下条件，就称它为分段充分光滑的：

a） $f(s)$ 在区间内有连续二阶导数；

b）在区间的端点邻域内，

$$|f(s)|\leqslant\left|\frac{1}{s-s_k}\right|^{\frac{1}{2}-\alpha}$$

$$|f'(s)|\leqslant\left|\frac{1}{s-s_k}\right|^{\frac{3}{2}-\alpha}\quad(\alpha>0)$$

若在某点上，$f(s)$ 没有连续二阶导数，我们称此点为例外点。

若 T 是有限 $m+1$ 连通区，它的边界曲线 C_0，C_1，…，C_m 是充分光滑的，在边界上主矢量函数是分段充分光滑的，求在 T 中全纯函数 $\varphi(z)$，$\psi(z)$ 并使

a） $F(z)=\varphi(z)+z\overline{\varphi'}+\overline{\psi}$，$\varphi(z)$，$\varphi'(z)$ 和 $\psi(z)$

除有限点 t_i（$i=1, 2, \cdots n$）外，均连续到边界上，在 t_i 点的邻域 $\varphi(z)$ 和 $F(z)$ 须满足以下条件

$$|\varphi(z)|\leqslant\left|\frac{1}{z-t_i}\right|^{\frac{1}{2}-\beta}$$

$$|F(z)|\leqslant\left|\frac{1}{z-t_i}\right|^{\frac{1}{2}-\beta}\quad(\beta>0)$$

b）函数 $F(z)$ 除点 t_i 外，连续到边界 C_0 上且处处等于 $f(s)$，但在 C_k 上等于 $f(s)+\beta_k$，β_k 是待定复常数。这就是第一个基本问题。对于单连通区，可令 $\beta_0=0$，但在多连通区，则不能任意选定 β_k。

这里已假设在 C_k 上作用的主矢量 X_k+iY_k 为零。如果主矢量不为零，则函数

$$\varphi=\varphi_1+\varphi_0;\quad \psi=\psi_1+\psi_0$$

$$\varphi_1(z)=-\frac{1}{2\pi(1+\nu^*)}\sum_{k=1}^{m}(X_k+iY_k)\ln(z-z_k)$$

$$\psi_1(z)=\frac{\nu^*}{2\pi(1+\nu^*)}\sum_{k=1}^{m}(X_k-iY_k)\ln(z-z_k)$$

z_k 是 C_k 内的任一点。$f_1(s)$ 与 $\varphi_1(s)$，$\psi_1(s)$ 对应。$\varphi_0(z)$ 和 $\psi_0(z)$ 是 T 中全纯函数。

按照工程上静力平衡的条件，如图2-6所示。作用在半径很小的圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上的应力分量总和都应等于外负荷 P。在边界

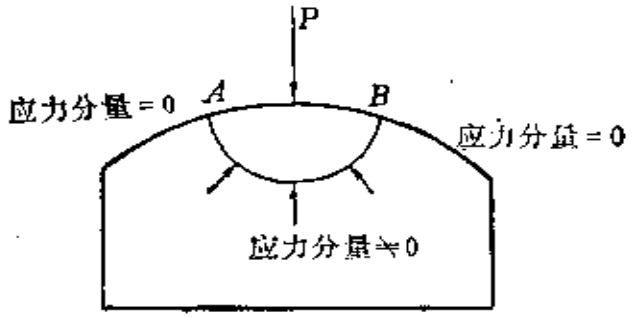


图 2-6

上的应力分量除在力P的作用点之外都应是零。当圆弧半径趋于无穷小时，应力分量将无穷增大。实际上力或力矩作用在一个微小区域上，在力和力矩作用区域周围的应力分量不可能是无穷大。微小区域上的力或力矩可以用在一点上的集中力或集中力矩来代替，这在讨论到较远区域的情况是可以的，但若由远处得到的应力分量向集中力作用点靠近而求其极限，就有问题了。根据圣维南原理，在集中力作点的小邻域内不讨论应力的分布。

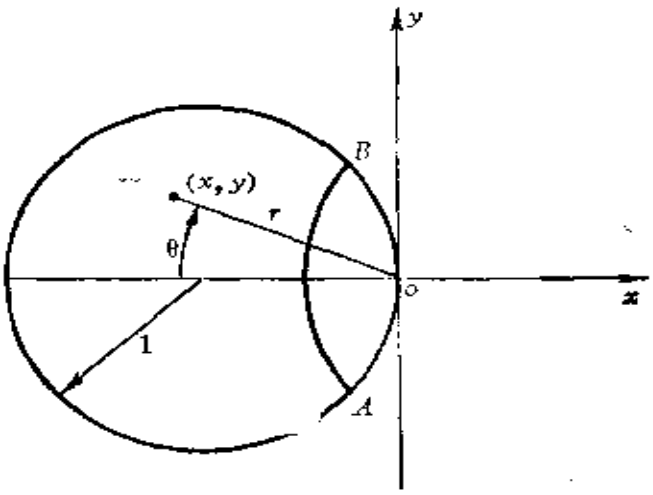


图 2-7

图2-7所示为一圆域，设已知应力函数$\Phi(z)$和$\psi(z)$为：

$$\Phi(z)=\frac{(z+1)(z+2)}{z},\quad \psi=1$$

由此得出

$$X_x=2\left[1-\frac{2}{r^2}(\cos2\theta-\cos4\theta)\right]$$

$$X_y=\frac{2}{r^2}\sin4\theta$$

$$Y_y=2\left[1-\frac{2}{r^2}(\cos2\theta-\cos4\theta)\right]$$

可以看出，由圆周上点A和点B所联曲线$\overset{\frown}{AB}$上的应力主矢量为零。这也就是相当零集中力的应力分布。若把以上的应力分量加到图2-6所示的应力分量上去之后，岂不是有了两个解了吗？为了保证解的唯一性和解与边界条件相关的连续性，必须使以下条件得到满足，即

$$|\varphi(z)|\leqslant\left|\frac{1}{z-t_i}\right|^{\frac{1}{2}-\beta}$$

$$|F(z)|\leqslant\left|\frac{1}{z-t_i}\right|^{\frac{1}{2}-\beta}\quad(\beta>0)$$

这里 t_i 是应力函数的例外点，而不是其它函数的例外点。关于这个问题在下章还要讨论。

有了这个条件，也就保证了根据静力等效用集中力或集中力矩代替微小面积上的力或力矩时，用连续边界条件的解可以用极限的方法得到有集中力或集中力矩时的解，而且也避免了在集中力或集中力矩处的无定义的情况。

2-11 有限区域内弹性力学第二个基本问题

若 T 是个有限 $m+1$ 连通区，边界是充分光滑的曲线 C_0，$C_1,\cdots,C_m$。并且它们 $(C_1, C_2,\cdots, C_m)$ 互不相包（图2-8）。在边界上定义有分段充分光滑的函数 $g(s)$。求在 T 中的全纯函数 $\varphi_0(z)$，$\psi_0(z)$ 以及复常数 $A_1, A_2,\cdots, A_m$，使

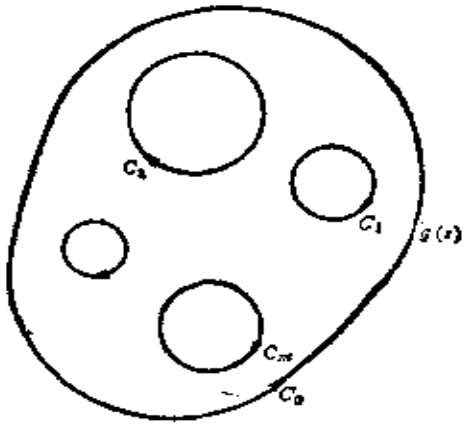


图 2-8

a）除最多有限点 t_i 外，$\varphi_0(z)$，$\varphi_0'(z)$ 和 $\psi_0(z)$，$G_0(z)$ 是连续到边界上的，在 t_i 点周围须满足以下条件：

$$|\varphi_0(z)|\leqslant\left|\frac{1}{z-t_i}\right|^{\frac{1}{2}-\beta}$$

$$|G_0(z)|\leqslant\left|\frac{1}{z-t_i}\right|^{\frac{1}{2}-\beta}\qquad(\beta>0)$$

$$G_0(z)=\nu^*\varphi_0(z)-z\overline{\varphi_0'(z)}-\overline{\psi_0(z)}$$

b）除 t_i 点外，连续到边界上的函数 $G_0(z)$ 等于 $g_0(t)$，并且

$$g_0(t)=g(t)+\frac{\nu^*}{2\pi(1+\nu^*)}\sum_{k=1}^{m}A_k\ln(t-z_k)\overline{(t-z_k)}$$

$$-\frac{t}{2\pi(1+\nu^*)}\sum_{k=1}^{m}\frac{\overline{A}_k}{t-z_k}$$

这就是弹性力学第二个基本问题。

在边界上，$g(s)=2\mu(u+iv)$。我们取

$$\varphi(z)=-\frac{1}{2\pi(1+\nu^*)}\sum_{k=1}^{m}A_k\ln(z-z_k)+\varphi_0(z)$$

$$\psi(z)=\frac{\nu^*}{2\pi(1+\nu^*)}\sum_{k=1}^{m}\overline{A}_k\ln(z-z_k)+\psi_0(z)$$

并把它们代入 $\nu^*\varphi(z)-z\varphi'(z)-\psi(z)$ 中后，即得到

$$\overline{\varphi'(z)}=-\frac{1}{2\pi(1+\nu^*)}\sum_{k=1}^{m}\overline{A}_k\frac{1}{z-z_k}+\overline{\varphi_0'(z)}$$

$$z\overline{\varphi'(z)}=-\frac{1}{2\pi(1+\nu^*)}\sum_{k=1}^{m}\overline{A}_k\frac{z}{z-z_k}+z\overline{\varphi_0'(z)}$$

$$g(s)=-\frac{\nu^*}{2\pi(1+\nu^*)}\sum_{k=1}^{m}A_k\ln(z-z_k)+\nu^*\varphi_0(z)$$

$$+\frac{1}{2\pi(1+\nu^*)}\sum_{k=1}^{m}\overline{A}_k\frac{z}{z-z_k}-z\overline{\varphi_0'(z)}$$

$$-\frac{\nu^*}{2\pi(1+\nu^*)}\sum_{k=1}^{m}A_k\ln\overline{(z-z_k)}-\overline{\psi_0(z)}$$

即得

$$g(s)=\frac{\nu^*}{2\pi(1+\nu^*)}\sum_{k=1}^{m}A_k\ln(z-z_k)\overline{(z-z_k)}$$

$$+\frac{1}{2\pi(1+\nu^*)}\sum_{k=1}^{m}\overline{A}_k\frac{z}{z-z_k}+\nu^*\varphi_0(z)$$

$$-z\overline{\varphi_0'(z)}-\overline{\psi_0(z)}$$

由此可见，和弹性力学第一个基本问题相似，对于单连通区，$A_k=0$；对于多连通区，须利用积分方程来确定常数。这里在C_k上的A_k为：$A_k=X_k+iY_k$，$\overline{A}_k=X_k-iY_k$。

2-12　弹性力学第二基本问题解的唯一性的证明

若T是个有限$m+1$连通区，其边界$C=C_0\cup C_1\cup\cdots\cup C_m$。$\varphi_0(z)$，$\varphi_0'(z)$，$\psi_0(z)$是连续到边界上的。在边界$C$上适合

$$G(z)\equiv\nu^*\varphi_0(z)-z\overline{\varphi_0'(z)}-\overline{\psi_0(z)}$$

$$-\frac{\nu^*}{2\pi(1+\nu^*)}\sum_{k=1}^{m}A_k\ln(z-z_k)\overline{(z-z_k)}$$

$$+\frac{1}{2\pi(1+\nu^*)}\sum_{k=1}^{m}\overline{A}_k\frac{z}{z-z_k}=0$$

也就是说在边界上，$u=0$，$v=0$，并且

$$A_1=A_2=\cdots=A_m=0$$

在T中，

$$\varphi_0(z)\equiv\alpha,\quad\psi_0(z)\equiv\nu^*\bar{\alpha}$$

并且

$$G(z)\equiv0$$

取积分

$$W=\int_C(\varphi'(z)\overline{G(z)}dz-\overline{\varphi'(z)}G(z)d\bar{z})=0$$

因为在C上，$G(z)=0$。

$$\int_C \varphi'(z)\overline{G}(\overline{z})\,dz = 2i\iint_T \frac{\partial}{\partial z}\left[\varphi'(z)\overline{G}(\overline{z})\right]ds$$

$$= i\iint_T \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi'(\nu^*\bar{\varphi} - \bar{z}\varphi' - \psi)\right] \right.$$

$$\left. + i\frac{\partial}{\partial y}\left[\varphi'(\nu^*\bar{\varphi} - \bar{z}\varphi' - \psi)\right] \right\} ds$$

$$= i\iint_T \{\varphi''(\nu^*\bar{\varphi} - \bar{z}\varphi' - \psi) + \varphi'(\nu\varphi' - \varphi' - \bar{z}\varphi'' - \psi')$$

$$+ i\left[i\varphi''\overline{G} + \varphi'(-\nu^* i\bar{\varphi}' - i\bar{z}\varphi'' + i\varphi' - i\psi')\right]\} ds$$

$$= 2i\iint_T \varphi'(\nu^*\bar{\varphi}' - \varphi')\,ds$$

同样可得

$$\int_C \bar{\varphi}' G\,d\bar{z} = \overline{2i\iint_T \frac{\partial}{\partial z}(\varphi'\overline{G})\,ds} = \overline{2i\iint_T \varphi'(\nu^*\varphi' - \varphi')\,ds}$$

$$= -2i\iint_T \bar{\varphi}'(\nu^*\varphi' - \bar{\varphi}')\,ds$$

那么，

$$W = -2i\iint_T \left[\varphi'^2 + \bar{\varphi}'^2 - 2\nu^*\varphi'\bar{\varphi}'\right]ds$$

取

$$\varphi'(z) = h_1(x, y) + ih_2(x, y)$$

代入上式，则

$$W = -2i\iint_T \left[2(h_1^2 - h_2^2) - 2\nu^*(h_1^2 + h_2^2)\right]ds$$

$$= 4i\iint_T \left[(\nu^* - 1)h_1^2 + (\nu^* + 1)h_2^2\right]ds$$

因为 $h_1(x,y)$，$h_2(x,y)$ 是实函数，$\nu^*>1$，所以当 $W=0$ 时，必须在 T 中有

$$h_1(x,y)=h_2(x,y)=0$$

所以得出

$$\varphi(z)=\alpha$$

又因为在 T 的边界上，

$$G(z)\equiv 0$$

自然可知

$$\nu^*\alpha-\bar{\psi}=0$$

得到

$$\psi=\nu^*\bar{\alpha}$$

但是我们知道，在此问题中

$$\varphi(z)=-\frac{1}{2\pi(1+\nu^*)}\sum_{k=1}^{m}A_k\ln(z-z_k)+\varphi_0(z)$$

$$\psi(z)=\frac{\nu^*}{2\pi(1+\nu^*)}\sum_{k=1}^{m}\overline{A}_k\ln(z-z_k)+\psi_0(z)$$

式中 A_k 是复常数，而 $\varphi_0(z)$，$\psi_0(z)$ 是 T 中的全纯函数，把它们代入 $G(z)$ 后，得

$$G(z)\equiv\nu^*\varphi_0(z)-z\overline{\varphi_0'(z)}-\overline{\psi_0(z)}$$
$$-\frac{\nu^*}{2\pi(1+\nu^*)}\sum_{k=1}^{m}A_k\ln(z-z_k)\overline{(z-z_k)}$$
$$+\frac{1}{2\pi(1+\nu^*)}\sum_{k=1}^{m}A_k\frac{z}{z-z_k}$$

为证明解的唯一性，必须是：

$$G(z)\equiv 0;\quad \varphi_0(z)=\alpha;\quad \psi_0(z)=\nu^*\bar{\alpha}$$

并且

$$A_1=A_2=\cdots=A_m=0$$

以上证明了有限区域中，第二个基本问题解的唯一性。用同样的方法，可以证明有限区域中，第一个基本问题解的唯一性。

设在同样的多连通区的边界上有

$$F(z)=\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)}=\beta_k$$

这里β_k是个常数，并且$\beta_0=0$。因为$\varphi(z)$和$\psi(z)$是有限$m+1$连通区T中的全纯函数，自然

$$W=\int_C(\varphi'\overline{F}dz-\overline{\varphi'}Fd\bar{z})=0$$

因为

$$\int_C\varphi'dz=0$$

由格林定理，可知

$$\int_C\varphi'\overline{F}dz=\iint_T\left[-\frac{\partial}{\partial y}(\varphi'\overline{F})+i\frac{\partial}{\partial x}(\varphi'\overline{F})\right]ds$$

我们又知道

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right];\quad\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right]$$

所以

$$\int\varphi'\cdot\overline{F}dz=2i\iint_T\frac{\partial}{\partial\bar{z}}(\varphi'\cdot\overline{F})ds$$

$$\int\overline{\varphi'}\cdot Fd\bar{z}=-2i\iint_T\frac{\partial}{\partial z}(\overline{\varphi'}\cdot F)ds$$

于是

$$W=2i\iint_T\left[\frac{\partial}{\partial\bar{z}}(\varphi'\cdot\overline{F})+\frac{\partial}{\partial z}(\overline{\varphi'}\cdot F)\right]ds$$

又知道

$$2\frac{\partial}{\partial\bar{z}}(\varphi'\cdot\overline{F})=\left[\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right](\varphi'\cdot\overline{F})$$

$$=\left[\varphi'\frac{\partial\overline{F}}{\partial x}+\varphi''\cdot\overline{F}+i\left(\varphi'\frac{\partial\overline{F}}{\partial y}+i\varphi''\overline{F}\right)\right]$$

$$=\varphi'\left[\frac{\partial\overline{F}}{\partial x}+i\frac{\partial\overline{F}}{\partial y}\right]$$

$$=2\varphi'\cdot\frac{\partial\overline{F}}{\partial\bar{z}}$$

同理可得

$$\frac{\partial}{\partial z}\bar{\varphi}'\cdot F=\bar{\varphi}'\cdot\frac{\partial}{\partial z}F$$

于是得到

$$\frac{\partial\overline{F}}{\partial x}+i\frac{\partial\overline{F}}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}[\bar{\varphi}+\bar{z}\varphi'(z)+\psi(z)]$$

$$+i\frac{\partial}{\partial y}[\overline{\varphi(z)}+\bar{z}\varphi'(z)+\psi(z)]$$

$$=2(\varphi'+\bar{\varphi}')$$

又知道

$$\frac{\partial\overline{F}}{\partial x}-i\frac{\partial\overline{F}}{\partial y}=2(\varphi'+\bar{\varphi}')$$

合并以上诸式后，得到

$$W=2i\iint_T[\varphi'(\varphi'+\bar{\varphi}')+\bar{\varphi}'(\varphi'+\bar{\varphi}')]ds$$

$$=2i\iint_T[2\mathrm{Re}(\varphi')]^2ds=0$$

所以，

$$\mathrm{Re}[\varphi'(z)]=0$$

于是得到

$$\varphi(z)=icz+\alpha$$

因为在 C_k 上

$$\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)}=\beta_k$$

自然可知

$$\overline{\psi(z)}=\beta_k-\varphi(z)-z\overline{\varphi'(z)}=\beta_k-(icz+\alpha)+icz$$
$$=\beta_k-\alpha$$

所以可知

$$\psi=\beta;\quad \varphi=icz+\alpha$$

这就证明了，若T为一有限$m+1$连通区，其边界为$C=C_0\cup C_1\cup\cdots\cup C_m$。函数$\varphi(z)$，$\varphi'(z)$，$\psi(z)$连续到边界上，并且在边界上有

$$F(z)=\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)}=\beta_k$$

且$\beta_0=0$，于是

$$\varphi(z)=icz+\alpha;\quad \psi=\beta$$

2-13 无限区域的概念及其分类

设$x=x(t)$，$y=y(t)$为某点的坐标，t是个参数，$x(t)$和$y(t)$有以下的特性：

在任一区间$[\alpha,\beta]$$(-\infty<\alpha<\beta<\infty)$，$x(t)$，$y(t)$是连续的，并且有分段连续导数。

没有一个t值，同时使$x'(t)=y'(t)=0$。

对于不同的t_1和t_2，不可能同时存在$x(t_1)=x(t_2)$及$y(t_1)=y(t_2)$。

$$\lim_{t\to\pm\infty}[x^2(t)+y^2(t)]=\infty$$

对不在曲线上的点$(x_0,\ y_0)$，存在一个在$(-\infty,\ +\infty)$区间内连续的函数$\alpha_{(x_0,y_0)}(t)$，以致

a）对于所有的t值

$$\operatorname{tg}\alpha_{(x_0,y_0)}(t)=\frac{y-y_0}{x-x_0}$$

b）当$0\leqslant\alpha_0<2\pi$时，下列极限存在

$$\lim_{t\to-\infty}\alpha_{(x_0,y_0)}(t)=\alpha_0;\quad \lim_{t\to+\infty}\alpha_{(x_0,y_0)}(t)=\beta_0$$

当 t 连续变化的时候，$\alpha(t)$ 也连续变化。当 $t\to\pm\infty$，$\alpha(t)$ 趋向 β_0 和 α_0 值。由这样的点集合组成的曲线是无限的简单分段光滑曲线。若 $t_1<t_2$，我们就令〔$x(t_1)$，$y(t_1)$〕$<$〔$x(t_2)$，$y(t_2)$〕。$\alpha(t)$ 角的表示见图2-9。

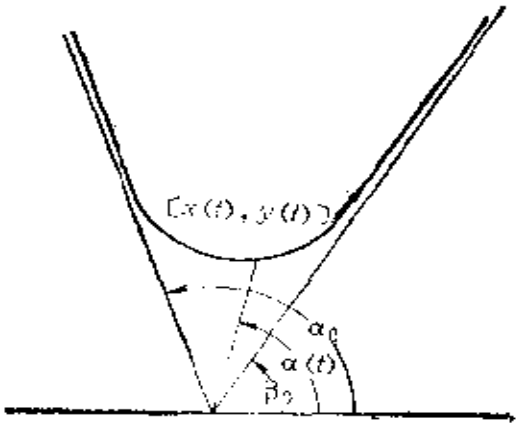


图 2-9

曲线是有方向的，它的切线也是有方向的。当沿曲线正向移动时，区域的内部在前进方向的左边。从某点算起的弧长 s 为参变量。当有一点 B 沿曲线 C_0 由 $-\infty$ 到 $+\infty$ 移动时，矢量 $\overrightarrow{AB}$ 与 x 轴正向的交角由 α_0 变到 β_0，并且 $\alpha_0\geqslant\beta_0$。我们把角 $\vartheta'=(\beta_0-\alpha_0)$ 叫作自区域外一点 A 起绕曲线 C_0 的视角。它满足

$$-2\pi\leqslant\vartheta'\leqslant 0$$

若取一点 N 在区域内部，弧 s 由 $-\infty$ 到 $+\infty$ 连续变化，则矢量 $\overrightarrow{NB}$ 与 x 轴正向的交角将由 α_0 变到 $\beta_0+2\pi$，把 $\vartheta=\beta_0+2\pi-\alpha_0$ 叫做绕点 N 的视角。此视角常为正值或等于零（$0\leqslant\vartheta\leqslant2\pi$）。$\vartheta-\vartheta'=2\pi$，$\vartheta$ 和 ϑ' 与点 A 和点 N 的位置无关。

我们把无限边界曲线 C_0 的无限区域分成以下几类。无限边界曲线 C_0 是充分光滑的。也就是说函数 $x(s)$，$y(s)$ 有连续三阶导数。

$\vartheta'<0$ 的无限区域 T 叫作第一类无限区域。如图 2-10 所示，在第一象限内的双曲线所围无限区域就是第一类无限区域。这里，

$$\alpha_0=\frac{\pi}{2},\quad \beta_0=0,\quad \vartheta=-\frac{\pi}{2},\quad \vartheta=-\frac{3\pi}{2}$$

图2-11所示半平面，也是第一类无限区域。若把 x 轴选作无限区域的边界曲线 C_0，那么，$\alpha_0=\pi$，$\beta_0=0$（图中 x 轴的方向与通

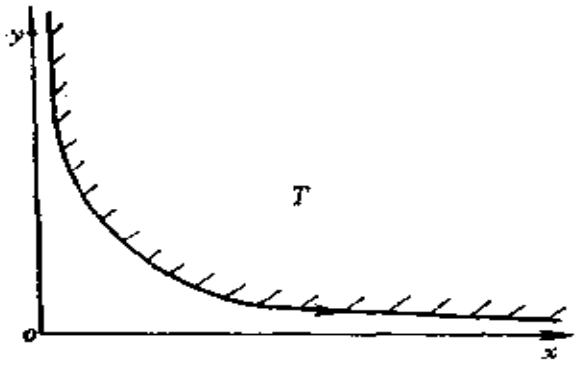


图 2-10

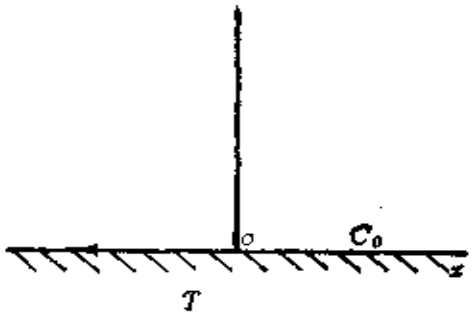


图 2-11

常所取相反，这样，在沿边界曲线正向移动时，可使区域在下面)。

$\vartheta = 0$ 的无限区域 T 叫作第二类无限区域。如图 2-12 所示半无限带域，就是第二类无限区域图2-13所示的抛物线也是第二类无限区域。

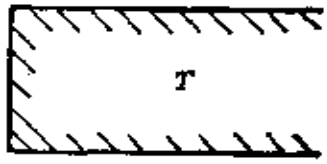


图 2-12

用有限曲线围成的无限区域 T 叫作第三类无限区域。图2-14所示圆弧线以外的区域就是第三类无限区域。

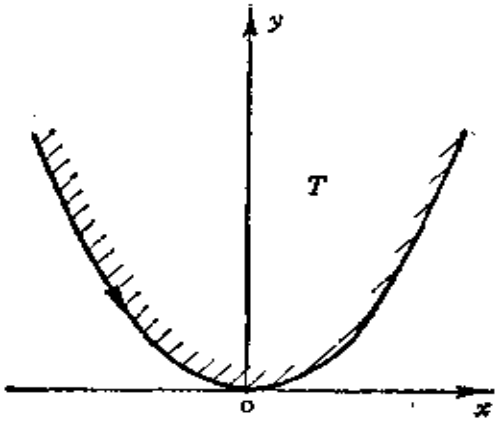


图 2-13

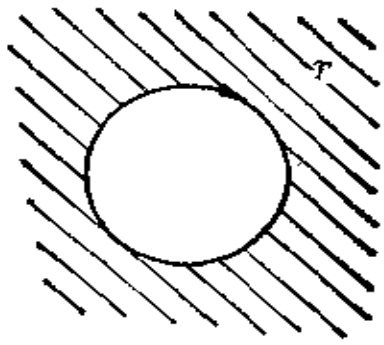


图 2-14

当 z 值很大时，$f(z) = o(z^n)$ 表 $f(z)$ 的阶是 $o(z^n)$，即

$$\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^n} = 0$$

当有任意 A，B 二有限值，并且当 $|z|>B$，

$$\left|\frac{f(z)}{z^n}\right|<A$$

则用 $f(z)=O(z^n)$ 表示。

当 $f(z)=o(z^n)$ 时，常可用 $f(z)=O(z^n)$ 表示，但是反过来不常用。

如 $\ln z=o(z)$，因为 $\lim\limits_{z\to\infty}\ln z/z=0$

因为

$$\lim_{z\to\infty} z\frac{K}{z\ln z}=0$$

所以

$$\frac{K}{z\ln z}=o\left(\frac{1}{z}\right)$$

K 是个常数。

如图2-15所示，在 T 内的圆弧长 $l(r)$，不但与半径 r 的大小有关，而且与无限区域的种类有关。对于第一类和第三类的无限区域来说，当 $r\to\infty$ 时，$l(r)\to\infty$。显然 $l(r)=O(r)$，但对第三类无限区域来说

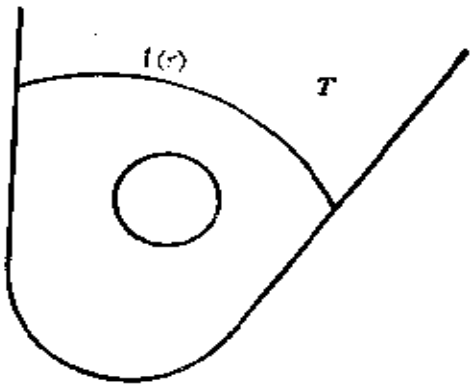


图 2-15

$$\lim_{r\to\infty}\frac{l(r)}{r}=\lim_{r\to\infty}\frac{2\pi r}{r}=2\pi$$

对第一类无限区域来说

$$\lim_{r\to\infty}\frac{l(r)}{r}=-\vartheta'$$

对第二类无限区域来说，不一定有 $l(r)=O(1)$，也就是说，

不一定在 r 很大时 $l(r)$ 是常数。在带形区域 $l(r)$ 是常数，对于抛物线形曲域，$l(r)$就不是常数。

2-14 无限区域中弹性力学第一个基本问题

如同在有限区域中一样，还要研究在无限区域中解的唯一性问题。

当 $f_0(s)$ 在无限曲线上的每个有限长的弧上是分段充分光滑的，并且当 s 无论是趋向于 $+\infty$ 或是 $-\infty$，$f_0(s)$ 都是有限的，则说 $f_0(s)$ 在无限曲线上是分段充分光滑的。

在 C_k 上作用的主矢量表示为

$$-\frac{1}{i}\left[\lim_{s\to t_k} f_k(s)-f_k(0)\right] \quad (k=1,\ 2,\cdots,\ m)$$

在 C_0 上，主矢量的表达式为

$$-\frac{1}{i}\left[\lim_{s\to\infty} f_0(s)-\lim_{s\to-\infty} f_0(s)\right]$$

为了与有限区域区别起见，在无限区域内的有限边界上的全部主矢量不必等于零。

若 T 是个 $m+1$ 连通无限区（第一、第二和第三类无限区），在其边界上定义分段充分光滑的函数 $f_k(s)$。求出在 T 中解析函数 $\varphi(z)$，$\psi(z)$ 并使

a) $\varphi(z)$，$\varphi'(z)$，$\psi(z)$ 和 $F(z)$〔$F(z)=\varphi+z\bar{\varphi}'+\bar{\psi}$〕除最多有限点 t_k（$k=1,\ 2,\cdots,\ n$）外都是连续到边界上的；在这些点的小邻域中 $\varphi(z)$ 和 $F(z)$ 必须满足下列关系，即

$$|\varphi(z)|\leqslant\left|\frac{1}{z-t_k}\right|^{-\frac{1}{2}-\beta}$$

$$|F(z)|\leqslant\left|\frac{1}{z-t_k}\right|^{-\frac{1}{2}-\beta} \qquad (\beta>0)$$

b) 除 t_k 点外，函数 $F(z)$ 连续到边界上并在 C_k 上等于 $f_k(s)+\beta_k$，β_k 是我们的待定复常数。

c）对于很大的 z 值，$F(z)$ 是有限的，并且 $\varphi'(z)=o(1/z)$。这就是说 $\lim_{z\to\infty} z\varphi'(z)=0$，这点保证了解的唯一性。

对于第一种无限区域，函数 $\varphi(z)$，$\varphi'(z)$，$\psi(z)$ 分别写为：

$$\varphi(z)=\gamma\ln(z-z_0)+o(1)+\text{常数}$$

$$\psi(z)=\gamma'\ln(z-z_0)+o(1)+\text{常数}$$

$$\varphi'(z)=\frac{\gamma}{z-z_0}+o\left(\frac{1}{z}\right)$$

式中 z_0 是 T 外的任一点。

对于第二种无限区域，因为 $l(r)=0(1)$，对于很大的 z 值，$\varphi'(z)=o(1)$，也就是 $\lim_{z\to\infty} f(z)=0$。

对于第三种无限区域或半平面上，当 $z\to\infty$ 时，应力分量应为有限值。

2-15　弹性力学第一个基本问题解的唯一性的充分条件

如图2-16所示，K_r 为半径 r 充分大的并能包括各曲线 C_1，C_2，…，C_m 的圆弧。各段弧线的标注如图所示。

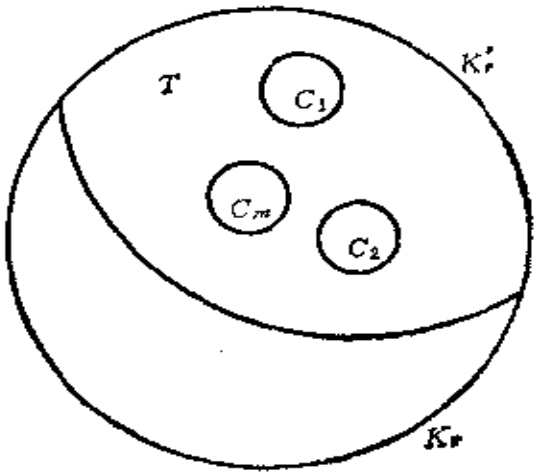


图　2-16

要证明解唯一性的充分条件，和有限区域相似，取积分如下：

$$|W|=\left|\int_{K_r}\left[\varphi'(\bar{F}-\bar{e}_0)dz-\bar{\varphi}'(F-e_0)d\bar{z}\right]\right|$$

在 K_r' 弧上，$F-e_0\neq 0$ （除 K_r 圆弧与 C_0 曲线交点外）。显然可知

$$|W|\leqslant 2\int_{K_r}|\varphi'|\,|F-e_0|dz\leqslant 2\max(|\varphi'||F-e_0|)\,l(r)$$

$$\leqslant 2\pi r\cdot 2\max(|\varphi'|\,|F-e_0|)$$

若是当 $r\to\infty(z\to\infty)$ 时，保证

$$\lim r\cdot|\varphi'| \text{ 或 } \lim z|\varphi'(z)|\to 0\text{，而且}$$

$$|F-e_0| \text{ 为有限，则 } \lim_{r\to\infty} W=0$$

若是 $W=0$，由前面对有限区域的证明，可知

$$\mathrm{Re}[\varphi'(z)]=0 \text{ 并且 } \psi=\beta$$

在此情况下，只能是在 T 中

$$\varphi(z)\equiv\alpha,\quad \psi\equiv\beta$$

这也就是说，若 T 是个第一或第三类无限区域，在 T 中的 $\varphi(z)$，$\varphi'(z)$ 和 $\psi(z)$ 最多除 $z=\infty$ 点外，均为连续到边界上的解析函数，并且在边界 C_k 上有

$$F(z)\equiv\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)}=\beta_k$$

若当 z 很大时，

$$\varphi'(z)=o(1/z),\quad F(z)=O(1)$$

那么，可知在 T 中必有如下结果

$$\varphi(z)\equiv\alpha,\quad \psi(z)\equiv\beta$$

α 和 β 一般是复常数。

2-16 第三类无限区域中的 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$ 函数形式

首先定义无限远处的全纯函数。把一个在某有限半径圆外的所有点有导数的单值函数叫作在无限远处邻域的全纯函数。若它在无限远处是有限的，则称此函数在无限远处全纯。

把 $f(z)$ 在一圆环域中展为罗朗级数，

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}a_kz^k$$

为了满足它在某个有限半径圆外的点是绝对收敛的并且在无限远处是全纯的，则

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^{-k}$$

我们从有限区域 T 开始，设想在无限区域中的无限远处的边界上，应力不能是无限大。参照有限区域的情况，可取 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$ 的函数有如下形式：

$$\varphi(z)=-\frac{X+iY}{2\pi(1+\nu^*)}\ln z+\varphi^*(z)$$

$$\psi(z)=\frac{\nu^*(X-iY)}{2\pi(1+\nu^*)}\ln z+\psi^*(z)$$

这里 $X+iY=\sum_{k=1}^{m}(X_k+iY_k)$，$\varphi^*(z)$ 和 $\psi'(z)$ 是在无穷远处的全纯函数。先令

$$\varphi^*(z)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}a_nz^n$$

$$\psi^*(z)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}b_nz^n$$

又因为 $$X_x+Y_y=2[\varphi'(z)+\overline{\varphi'(z)}]$$

所以

$$X_x+Y_y=2\left\{-\frac{X+iY}{2\pi(1+\nu^*)z}-\frac{\nu^*(X-iY)}{2\pi(1+\nu^*)\bar{z}}+\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}na_nz^{n-1}+\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}n\bar{a}_n\bar{z}^{n-1}\right\}$$

因为当 $z\to\infty$ 时，X_x+Y_y 应为有限，故 $n-1$ 不能为大于零的

数，即 $n=1$，0，-1，-2，…。故 $\varphi^*(z)$ 应写为

$$\varphi^*(z)=\sum_{-\infty}^{1}a_nz^n$$

又因为 $Y_y-X_x+2iX_y=2(\bar{z}\varphi''+\psi')$ 当 $z\to\infty$ 时亦应有限。所以同样可知 $\psi^*(z)$ 的形式为

$$\psi^*(z)=\sum_{-\infty}^{1}b_nz^n$$

如此，则

$$\varphi(z)=-\frac{X+iY}{2\pi(1+\nu^*)}\ln z+\Gamma z+\varphi_0^*(z)$$

$$\psi(z)=\frac{\nu^*(X-iY)}{2\pi(1+\nu^*)}\ln z+\Gamma' z+\psi_0^*(z)$$

式中 $a_1=\Gamma$，$b_1=\Gamma'$ 并且

$$\varphi_0^*(z)=\sum_{n=0}^{n=\infty}a_nz^{-n}$$

$$\psi_0^*(z)=\sum_{n=0}^{n=\infty}b_nz^{-n}$$

一般说来，a_1 和 b_1 都是复数，所以取

$$\Gamma=B+iC,\quad \Gamma'=B'+iC'$$

因为 $\varphi'(\infty)=\Gamma$，而且

$$\lim_{z\to\infty}(X_x+Y_y)=4\mathrm{Re}[\varphi'(\infty)]=4B$$

$$\lim_{z\to\infty}(Y_y-X_x+2iX_y)=2\Gamma'=2(B'-iC')$$

所以解出上两式后，得到

$$X_x(\infty)=2B-B'$$

$$Y_y(\infty)=2B+B'$$

$$X_y(\infty)=C'$$

从这里可知 $\varphi'(z)$ 和 $\psi'(z)$ 在无限远处全纯的物理意义是应力

分量为常量。B，B'和C'由很远处的应力分量来确定，但是C却应按下述确定：令

$$\omega=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\gamma_{xy}$$

我们知道

$$2\mu(u+iv)=\nu^*\varphi(z)-z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)}$$

$$2\mu\frac{\partial}{\partial x}(u+iv)=\nu^*\varphi'(z)-\varphi'(z)-z\overline{\varphi''(z)}-\overline{\psi'(z)}$$

$$2\mu\frac{\partial}{\partial y}(u+iv)=i\nu^*\varphi'(z)-i\overline{\varphi'(z)}+iz\overline{\varphi''(z)}+i\overline{\psi'(z)}$$

所以

$$2\mu\left[\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}+i\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]=2i\nu^*\varphi'(z)-2i\overline{\varphi'(z)}$$

与之共轭的表达式为：

$$2\mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)-i\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]=-2i\left(\nu^*\bar{\varphi}'-\varphi'\right)$$

把以上二式相加后，得到

$$4\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)=2(1+\nu^*)i(\varphi'-\bar{\varphi}')$$

所以

$$-8\mu\omega=2(1+\nu^*)i(\varphi'-\bar{\varphi}')$$

$$\omega=\frac{1+\nu^*}{2\mu}\left(\frac{\varphi'-\bar{\varphi}'}{2i}\right)$$

当$z\to\infty$时，$\varphi'-\bar{\varphi}'=2iC$，故

$$\omega=\frac{1+\nu^*}{2\mu}C$$

所以得到

$$C=\frac{2\mu}{1+\nu^*}\omega$$

于是可以说：

若T是一个第三类无限区域，并在无限远处，应力分量是有

限的充要条件是：在无限远处邻域的应力函数为：

$$\varphi(z)=-\frac{X+iY}{2\pi(1+\nu^*)}\ln z+\Gamma z+\varphi_0^*(z)$$

$$\psi(z)=\frac{\nu^*(X-iY)}{2\pi(1+\nu^*)}\ln z+\Gamma' z+\psi_0^*(z)$$

这里$X+iY$是作用于边界上的全部主矢量，φ_0^*和ψ_0^*是在无限远处的全纯函数。

在这里只提到在无限远处的应力分量为有限，并没有说明在无限远处的位移如何。在位移与应力函数的如下关系中

$$2\mu(u+iv)=\nu^*\varphi(z)-z\overline{\varphi(z)}-\psi(z)$$

代入$\varphi(z)$及$\psi(z)$后，得到

$$2\mu(u+iv)=-\frac{\nu^*(X+iY)}{2\pi(1+\nu^*)}\ln(z\cdot\bar{z})+(\nu^*\Gamma-\bar{\Gamma})z$$
$$-\bar{\Gamma}'\bar{z}+O(1)$$

若要求在无限远处，位移有限，则应有以下关系：

$$X+iY=0,\quad \Gamma=\Gamma'=0$$

若要求

$$i[X+iY]_k^k=[\varphi+z\bar{\varphi}'+\bar{\psi}]c_k=\beta_k$$

为一常量，并且当$z\to\infty$时，应力分量为零，

那么只能是

$$\varphi(z)=icz+\alpha,\quad \psi=\beta$$

也可以说，$[\varphi+z\bar{\varphi}'+\bar{\psi}]c_k=\beta_k$及$z\to\infty$时，应力分量趋向于零是$\varphi=icz+\alpha$，$\psi=\beta$的充要条件。因为由$\varphi=icz+\alpha$，$\psi=\beta$可直接证明这一点。反过来证明当$[\varphi+z\bar{\varphi}'+\bar{\psi}]c_k=\beta_k$时，有

$$\varphi=icz+\varphi_0^*(z),\quad \psi=\psi_0^*(z)$$

$\varphi_0^*(z)$，$\psi_0^*(z)$都应是在无限远处的全纯函数。把它们代入上述关系后，有

$$[\varphi_0^*+z\overline{\varphi'^*_0}+\bar{\psi}_0^*]=\beta_k$$

在此情况中，正如以前所述，

$$\varphi_0^*=\alpha,\quad \psi_0^*=\beta$$

因为 $\varphi_0'^*=o(1/z^2)$；$F(z)=\beta_k=O(1)$。

2-17 第一类无限区域中的应力函数

首先分析第一类单连通区域的情况。在这种区域中，φ 和 ψ 是单值解析函数。由前面第三类无限区域可以知道，当在无限远处，应力分量及转动 $\omega(\infty)$ 为零，则 $\Gamma=\Gamma'=0$，此时其应力函数 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$ 分别为：

$$\varphi(z)=A\ln z+\varphi_0^*(z)$$

$$\psi(z)=B\ln z+\psi_0^*(z)$$

这里 $\varphi_0^*(z)$，$\psi_0^*(z)$ 为在无限远处的全纯函数。

可以仿此，取函数为

$$\varphi(z)=\gamma\ln(z-z_0)+o(1)+\text{常数}$$

$$\psi(z)=\gamma'\ln(z-z_0)+o(1)+\text{常数}$$

z_0 是在 T 外的一点，$o(1)+$常数相当一个全纯函数 $\varphi_0(z)$。对于 $\varphi'(z)$，则取

$$\varphi'(z)=\frac{\gamma}{z-z_0}+o\left(\frac{1}{z}\right)$$

这样取法，保证在无限远处，应力分量为有限。

我们研究图2-17所示第一类单连通无限区域。在边界曲线 C_0 上的主矢量函数是分段充分光滑的。

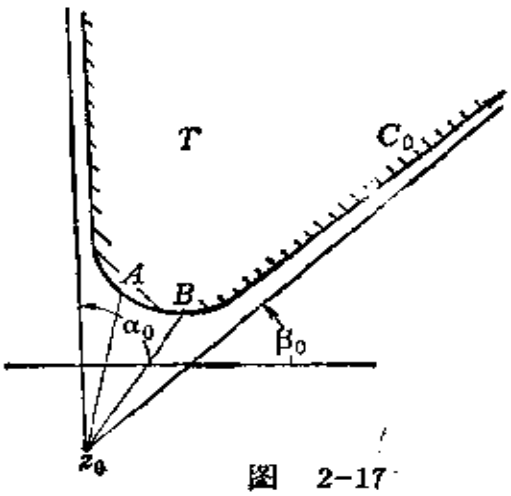


图 2-17

设在边界曲线 C_0 中一段 $\overset{\frown}{AB}$ 上的主矢量表示为：

$$i\,[X+iY]_A^B=[\varphi+z\bar{\varphi}'+\bar{\psi}]_A^B$$

把 $\varphi(z)$，$\varphi'(z)$ 和 $\psi(z)$ 代入此式后，得到

$$\begin{aligned}
i\,[X+iY]_A^B &= \gamma[\ln(B-z_0)-\ln(A-z_0)] \\
&\quad +\bar{\gamma}\left[\frac{B}{B-z_0}-\frac{A}{A-z_0}\right]+\bar{\gamma}'[\ln(\overline{B-z_0})-\ln(\overline{A-z_0})] \\
&\quad +o(1) \\
&= \gamma\ln\frac{|B-z_0|}{|A-z_0|}+i\gamma\arg\frac{B-z_0}{A-z_0} \\
&\quad +\bar{\gamma}'\ln\frac{|B-z_0|}{|A-z_0|}-i\bar{\gamma}'\arg\frac{B-z_0}{A-z_0}+o(1) \\
&\quad +\bar{\gamma}\left[\frac{B}{B-z_0}-\frac{A}{A-z_0}\right]
\end{aligned}$$

在 C_0 上，当 $B\to+\infty$，$A\to-\infty$，主矢量 $[X+iY]_A^B$ 是以某有限值为极限。那么由上式可知必须 $\gamma+\bar{\gamma}'=0$，因这时可能有（与 $\{A_n\}$ $\{B_n\}$ 的选择有关）

$$\ln\frac{|B-z_0|}{|A-z_0|}\longrightarrow\infty$$

因为 $\gamma+\bar{\gamma}'=0$，所以 $\gamma-\bar{\gamma}'=2\gamma$。但是

$$\lim_{\substack{A\to-\infty,\\ B\to\infty}}\arg\frac{B-z_0}{A-z_0}=[\arg(B-z_0)-\arg(A-z_0)]=\beta_0-\alpha_0=\vartheta'$$

当 $B\to+\infty$ 时，

$$\frac{B}{B-z_0}=\frac{e^{i\beta_0}}{e^{-i\beta_0}}=e^{2i\beta_0}$$

当 $A\to-\infty$ 时，

$$\frac{A}{A-z_0}=e^{2i\alpha_0}$$

把它们代入 $i\,[X+iY]_A^B$ 中后，则得到当 $A\to-\infty$，$B\to\infty$ 时，

$$X+iY=2\vartheta'\gamma-i(e^{2i\beta_0}-e^{2i\alpha_0})\bar{\gamma}$$

其共轭方程为：

$$X-iY=2\vartheta'\bar{\gamma}+i(e^{-2i\beta_0}-e^{-2i\alpha_0})\gamma$$

解出 γ 和 γ' 后，有

$$\gamma=\frac{2\vartheta'(X+iY)+i(e^{2i\beta_0}-e^{2i\alpha_0})(X-iY)}{4(\vartheta'^2-\sin^2\vartheta')}$$

$$\gamma'=\frac{2\vartheta'(X-iY)-i(e^{-2i\beta_0}-e^{-2i\alpha_0})(X+iY)}{4(\vartheta'^2-\sin^2\vartheta')}$$

注意 $\vartheta'\neq 0$，于是得到以下结论：

若 T 是一个第一类单连通无限区域，其边界曲线为 C_0，在 T 中的应力函数取如下的形式：

$$\varphi(z)=\gamma\ln(z-z_0)+o(1)+常数$$

$$\psi(z)=\gamma'\ln(z-z_0)+o(1)+常数$$

$$\varphi'(z)=\frac{\gamma}{z-z_0}+o\left(\frac{1}{z}\right)$$

注意 z_0 不在 T 上。

在 C_0 上的主矢量为 $X+iY$，主矢量函数是分段充分光滑的，于是 γ 及 γ' 由上述方程便唯一地确定了。

现在讨论多连通区的情况。若对于第一类 $m+1$ 连通无限区域（图2-18）的情况，已知 C_0 上的主矢量 X_0+iY_0 以及在内部曲线 C_k 上的主矢量 X_k+Y_k。那么，由以前有限区域的应力函数，可以设想在此情况下的应力函数应取如下形式：

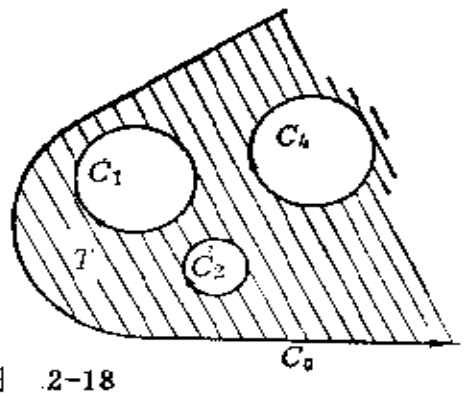


图 2-18

$$\Phi(z)=\sum_{k=1}^{m}A_k\ln(z-z_k)+\Phi_0(z)$$

$$\psi(z)=\sum_{k=1}^{m}B_k\ln(z-z_k)+\psi_0(z)$$

式中

$$A_k=-\frac{1}{2\pi(1+\nu^*)}(X_k+iY_k)$$

$$B_k=\frac{\nu^*}{2\pi(1+\nu^*)}(X_k-iY_k)$$

而且还假设

$$\Phi_0(z)=\gamma\ln(z-z_0)+o(1)+常数$$
$$\psi_0(z)=\gamma'\ln(z-z_0)+o(1)+常数$$
$$\Phi_0'(z)=\gamma/z-z_0+o(1/z)$$

在 C_0 上的主矢量函数当 $z\to\infty$ 以某有限值为极限时，求 γ 及 γ' 值。为此把 $\Phi(z)$，$\Phi'(z)$ 和 $\psi(z)$ 代入下式：

$$\begin{aligned}i\,[X_0+iY_0]_A^B=&\sum_{k=1}^{m}A_k[\ln(B-z_k)-\ln(A-z_k)]\\&+\gamma[\ln(B-z_0)-\ln(A-z_0)]+\bar{\gamma}\left(\frac{B}{\overline{B-z_0}}-\frac{A}{\overline{A-z_0}}\right)\\&+\sum_{k=1}^{m}\bar{a}_k\left(\frac{B}{\overline{B-z_k}}-\frac{A}{\overline{A-z_k}}\right)\\&+\sum_{k=1}^{m}\bar{B}_k\,[\ln\overline{(B-z_k)}-\ln\overline{(A-z_k)}]\\&+\bar{\gamma}'\,[\ln\overline{(B-z_0)}-\ln\overline{(A-z_0)}]+o(1)\\=&\sum_{k=1}^{m}(A_k+\bar{B}_k)\ln\frac{|B-z_k|}{|A-z_k|}+(\gamma+\bar{\gamma}')\ln\frac{|B-z_0|}{|A-z_0|}\\&+i\sum_{k=1}^{m}(A_k-\bar{B}_k)\arg\frac{B-z_k}{A-z_k}+i(\gamma\end{aligned}$$

$$-\bar{\gamma}')\arg\frac{B-z_0}{A-z_0}+\sum_{k=1}^{m}\bar{A}_k\left(\frac{B}{B-z_k}-\frac{A}{A-z_k}\right)$$

$$+\bar{\gamma}\left(\frac{B}{B-z_k}-\frac{A}{A-z_k}\right)+o(1)$$

化简并整理后，

$$i\,[X_0+iY_0]_A^B=\sum_{k=1}^{m}(A_k+\bar{B}_k)\left[\ln\left|\frac{B-z_0}{A-z_0}\right|-\ln\left|\frac{B-z_k}{A-z_k}\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot\frac{A-z_0}{B-z_0}\right|\right]+(\gamma+\bar{\gamma}')\ln\left|\frac{B-z_0}{A-z_0}\right|+i\sum_{k=1}^{m}(A_k$$

$$-\bar{B}_k)\vartheta+i(\gamma-\bar{\gamma}')\vartheta'+\sum_{k=1}^{m}A_k(e^{2i\beta_0}-e^{2i\alpha_0})$$

$$+\bar{\gamma}(e^{2i\beta_0}-e^{2i\alpha_0})+o(1)$$

$$=i\sum_{k=1}^{m}(A_k-\bar{B}_k)\vartheta+i(\gamma-\bar{\gamma}')\vartheta'$$

$$+\left(\sum_{k=1}^{m}\bar{A}_k+\bar{\gamma}\right)(e^{2i\beta_0}-e^{2i\alpha_0})+o(1)$$

因为当 $A\to-\infty$，$B\to\infty$时，

$$\ln\left|\frac{B-z_0}{A-z_0}\right|\text{不定(可能趋于无穷)}$$

$$\ln\left|\frac{B-z_k}{B-z_0}\cdot\frac{A-z_0}{A-z_k}\right|\to 0$$

所以必须令

$$\sum_{k=1}^{m}(A_k+\bar{B}_k+\gamma+\bar{\gamma}')=0$$

以保证 X_0+iY_0 在无限远处是有限的。若令

$$\sum_{k=1}^{m}(A_k+\bar{B}_k)=P^*$$

$$\sum_{k=1}^{m}(A_k-\overline{B}_k)=Q^*$$

$$\sum_{k=1}^{m}A_k=R^*$$

$$e^{2i\beta_0}-e^{2i\alpha_0}=S^*$$

于是

$$i(X_0+iY_0)=i\vartheta Q^*+i\vartheta'(\gamma-\overline{\gamma}')+S^*\overline{R}^*+S^*\overline{\gamma}$$

$$P^*+\gamma+\overline{\gamma}'=0$$

合并后，得到

$$2i\vartheta'\gamma+S^*\overline{\gamma}+S^*\overline{R}^*+i\vartheta'P^*+i\vartheta Q^*-i(X_0+iY_0)=0$$

共轭方程为

$$-2i\vartheta'\gamma+\overline{S}^*\gamma+\overline{S}^*\cdot R^*-i\vartheta'\overline{P}^*-i\vartheta Q^*$$

$$+i(X_0-iY_0)=0$$

由以上的式子得到

$$\gamma=\frac{2\vartheta'(X_0+iY_0)+iS^*(X_0-iY_0)+2i\vartheta'S^*\overline{R}^*+S^*\overline{S}^*R^*}{4\vartheta'^2-S^*\overline{S}^*}$$

$$-\frac{2\vartheta'^2P^*+i\vartheta'\overline{P}^*S^*+2\vartheta\vartheta'Q^*+i\vartheta S^*\overline{Q}^*}{4\vartheta'^2-S^*\overline{S}^*}$$

$$\gamma'=-(\overline{\gamma}+\overline{P})$$

注意以下关系

$$\arg\left|\frac{B-z_k}{A-z_k}\right|=2\pi-\vartheta'=\vartheta$$

z_k 是在 T 内的点。

若令 $A_k=B_k=0$ （$k=1,2,\cdots,m$），即得到与单连通区相同的结果。

由以上可知唯一地确定了 γ 和 γ' 值，当然由 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$ 的表达式就唯一地确定了应力函数。反之，若有两组解 $\varphi_1(z)$，$\psi_1(z)$ 及 $\varphi_2(z)$，$\psi_2(z)$。那么它们的差值 $\varphi=\varphi_1-\varphi_2$，$\psi=\psi_1-\psi_2$ 会满足如下关系：

$\varphi(z)=o(1)$，$\varphi'(z)=o(1/2)$，$\psi(z)=o(1)$，于是$F(z)$是有限的，此时φ及ψ分别为常量，这就证明了解的唯一性。

2-18 在半平面中的应力函数

我们取x轴为半平面的边线（图2-19），对于$|z|>r$，我



图 2-19

们取

$$\varphi(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nz^n$$

$$\psi(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_nz^n$$

对于很大的z值，应力分量X_x，X_y，Y_y应为有限。于是可令

$$\varphi(z)=icz-\alpha+\frac{a_{-1}}{z}+\cdots$$

$$\psi(z)=b_0+\frac{b_{-1}}{z}+\cdots$$

在$m+1$连通区中，无限边界曲线C_0为一直线。应力函数为φ及ψ并且$\varphi(z)$，$\varphi'(z)$，$\psi(z)$一直连续到边界上，在边界C_k上满足以下关系

$$F(z)=\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi}(z)=\beta_k$$

$$(k=0,1,2,\cdots,m)$$

当$z\to\infty$时，应力分量也趋向于零。则在T中

$$\varphi=icz+\alpha,\quad \psi=\beta$$

这里设$\beta_0=0$。

2-19 第三类无限区域的弹性力学第二个基本问题

若T是边界曲线为C_1，C_2，…，C_m的第三类无限区域。在边界上定义分段充分光滑的函数$g(s)$，我们求复常数$A_1, A_2, \cdots, A_m$及在T中全纯并在无限远处为零的函数$\varphi_0(z)$及$\psi_0(z)$，并且

a）函数$\varphi_0(z)$，$\varphi_0'(z)$，$\psi_0(z)$以及函数

$$G_0(z)=\nu^*\varphi_0(z)-z\varphi'(z)-\overline{\psi_0(z)}$$

除在有限点t_k处应满足下列关系

$$|\varphi_0(z)|\leqslant\left|z-\frac{1}{z_k}\right|^{-\frac{1}{2}-\beta}$$

$$|G_0(z)|\leqslant\left|z-\frac{1}{z_k}\right|^{-\frac{1}{2}-\beta}\quad(\beta>0)$$

外，是连续到边界上的。

b）除有限点t_k外，在边界上$G_0(z)$等于$g_0(t)$

$$g_0(t)=g(t)+\frac{\nu^*}{2\pi(1+\nu^*)}\sum_{k=1}^{m}A_k\ln(t-z_k)\overline{(t-z_k)}$$

$$-\frac{1}{2\pi(1+\nu^*)}\sum_{k=1}^{m}\overline{A_k}\,\frac{t}{t}\overline{z_k}+\text{常数}$$

c）$$\sum_{k=1}^{m}A_k=0$$

注意应力函数为

$$\varphi(z)=-\frac{1}{2\pi(1+\nu^*)}\sum_{k=1}^{m}A_k\ln(z-z_k)+\varphi_0(z)-\frac{\text{常数}}{\nu^*}$$

$$\psi(z)=\frac{\nu^*}{2\pi(1+\nu^*)}\sum_{k=1}^{m}\overline{A_k}\ln(z-z_k)+\psi_0(z)$$

引入常数项是因为在无限远处的位移未知。

2-20 第一类和第二类无限区域的弹性力学第二个基本问题

在此问题中，虽然边界是无限的，但在无限边界上，其位移是已知的（图2-20）。取 T^* 是 T 和曲线 C_k 中的区域，坐标原点在 T^* 之外，所以在 T 中 $\ln z$ 是全纯的。

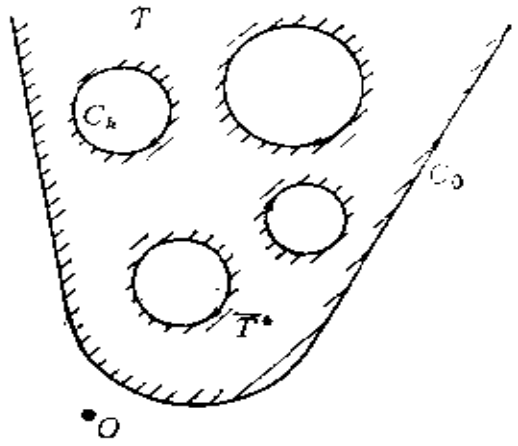


图 2-20

我们取应力函数 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 为：

$$\varphi(z)=\varphi_0(z)-\frac{1}{2\pi(1+\nu^*)}\sum_{k=1}^{m}A_k\ln\left(1-\frac{z_k}{z}\right)$$

$$\psi(z)=\psi_0(z)+\frac{\nu^*}{2\pi(1+\nu^*)}\sum_{k=1}^{m}A_k\ln\left(1-\frac{z_k}{z}\right)$$

$\varphi_0(z)$ 和 $\psi_0(z)$ 是 T 中全纯的，A_k 是待定的，z_k 是 C_k 中的任意一点。若 T 是 $m+1$ 连通的第一类和第二类无限区域，其边界曲线 C_0，$C_1,\cdots,C_m$ 是充分光滑的。取坐标原点在 T 和所有曲线 C_k 之外，在 T 的边界上定义分段充分光滑的函数 $g(s)$。我们求在 T 中全纯函数 $\varphi_0(z)$ 和 $\psi_0(z)$ 以及复常数 A_1，$A_2,\cdots,A_m$，并且

a）函数 φ_0，φ_0'，ψ_0 以及函数 $G_0(z)$ 最多除有限点 $t_k\neq\infty$ 外，连续到边界上（$G_0(z)=\nu^*\varphi_0(z)-z\varphi_0'(z)-\overline{\psi_0(z)}$），在 t_k 点邻域满足下列关系：

$$|\varphi_0(z)|\leqslant\left|\frac{1}{2-t_k}\right|^{\frac{1}{2}-\beta}$$

$$|G_0(z)|\leqslant\left|\frac{1}{z-t_k}\right|^{-\frac{1}{2}-\beta}\quad(\beta>0)$$

b）除 t_k 点外，在各边界上 $G_0(z)$ 等于 $g_0(t)$

$$g_0(t)=g(t)+\frac{\nu^*}{2\pi(1+\nu^*)}\sum_{k=1}^{m}A_k\ln\left(1-\frac{z_k}{t}\right)\overline{\left(1-\frac{z_k}{t}\right)}$$

$$-\frac{1}{2\pi(1+\nu^*)}\sum_{k=1}^{m}\overline{A}_k\frac{t}{\bar{t}}\cdot\frac{\bar{z}_k}{\bar{t}-\bar{z}_k}$$

z_k 是 C_k 中任意点。

c） z 很大时，$\varphi_0'(z)=o(1/z)$ 并且

$$G_0(z)=\nu^*\varphi_0(z)-z\overline{\varphi_0'(z)}-\overline{\psi_0(z)}$$

是有限的。

2-21 无限区域弹性力学第二个基本问题解的唯一性

如果有两组不同解，它们的差必为零。设 $\varphi_0(z)$，$\psi_0(z)$ 是两组不同解的差。

若 T 是一个第三类无限区域，其边界曲线为 C_1，C_2，…，C_m。$\varphi_0(z)$，$\varphi_0'(z)$，$\psi_0(z)$ 是 T 中全纯函数且一直连续到边界上，在无限远处它们等于零。若 A_1，A_2，…，A_m 及 C（常数）存在，在边界曲线 C_k 上有

$$\nu^*\varphi_0(z)-z\overline{\varphi_0'(z)}+\overline{\psi_0(z)}-\frac{\nu^*}{2\pi(1+\nu^*)}\sum_{k=1}^{m}A_k\ln(t-z_k)\overline{(t-z_k)}+\frac{1}{2\pi(1+\nu^*)}\sum_{k=1}^{m}\overline{A}_k\frac{t}{\bar{t}-\bar{z}_k}=C$$

并且有

$$\sum_{k=1}^{m}A_k=0$$

于是，在T中，$\varphi_0(z)=\psi_0(z)=0$，C(常数)$=0$

证明：取$\varphi_0^*(z)=\varphi_0(z)$；$\psi_0^*=\psi_0(z)+\bar{c}$

则

$$G^*(z)=\nu^*\varphi_0^*(z)-z\,\overline{\varphi_0'^*(z)}-\overline{\psi_0^*(z)}$$

$$-\frac{\nu^*}{2\pi(1+\nu^*)}\sum_{k=1}^{m}A_k\ln(z-z_k)\overline{(z-z_k)}$$

$$+\frac{1}{2\pi(1+\nu^*)}\sum_{k=1}^{m}\bar{A}_k\frac{z}{\bar{z}-\bar{z}_k}$$

在全部边界上$G^*(t)=0$（t是边界上的点)。因为$\varphi_0(z)$及$\psi_0(z)$在T中全纯，并且是两组解的差值，可以认为$G^*(z)=O(1)$，并且$\varphi_0(\infty)=0$，$\psi_0(\infty)=0$，也就是说$\varphi_0(z)=O(1/z)$，$\varphi_0'(z)=O(1/z^2)$和$\psi_0=O(1/z)$，又因为$\sum_{k=1}^{m}A_k=0$，对于大的z值

$$\sum_{k=1}^{m}A_k\ln(z-z_k)\overline{(z-z_k)}=O\left(\frac{1}{z}\right)$$

即

$$\sum_{k=1}^{m}\bar{A}_k\frac{z}{\bar{z}-\bar{z}_k}=O\left(\frac{1}{z}\right)$$

又取

$$\varphi(z)=-\frac{1}{2\pi(1+\nu^*)}\sum_{k=1}^{m}A_k\ln(z-z_k)+\varphi_0(z)-\frac{\text{常数}}{\nu^*}$$

积分

$$W=\int_{C'}(\varphi_0'\bar{G}^*dz-\bar{\varphi}_0'G^*d\bar{z})$$

这里C'表示包括所有$C_k(k=1,2,\cdots m)$的圆弧线。在C_k上$G^*(t)=0$，那么

$$|W_1|=\left|\int_{C'}(\varphi_0'\overline{G^*}dz-\overline{\varphi_0'}G^*dz)\right|\leqslant 4\pi r\cdot\max|\varphi'|\cdot\max|G^*|$$

r 是 C' 圆的半径，$\max|\varphi'|$ 和 $\max|G^*|$ 是在 C' 圆上的最大 $|\varphi'|$ 及 $|G^*|$ 值。当 z 很大，也就是 r 很大时，有

$$|\varphi_0'(r)|\leqslant\frac{\text{常数}}{r^2},\quad |G^*(r)|<\text{常数}$$

所以当 $r\to\infty$ 时，$W\to 0$。

又以前曾证明

$$W=4i\int[(\nu^*-1)h_1^2+(\nu^*+1)h_2^2]ds$$

$h_1=\mathrm{Re}[\varphi_0']$，$h_2=\mathrm{Im}[\varphi_0']$，$\nu^*>1$

故当 $W\to 0$ 时，在 T 中必有

$$\varphi_0'=0,\quad \varphi_0=\text{常数}$$

但 $\varphi_0(\infty)=0$，则 $\varphi_0=0$，于是

$$\psi_0=-\overline{C}$$

但 $\psi_0(\infty)=0$，则 $\psi_0=0$，C(常数)$=0$。若在边界上有奇点，还要进一步分析。

若 T 是 $m+1$ 第一类和第二类无限区域，其边界是 $C=C_0\cup C_1\cup C_2\cdots\cup C_m$。若可以连续到边界上的函数 $\varphi_0(z)$，$\varphi_0'(z)$，$\psi_0(z)$ 及常数 A_1，A_2，…，A_m 存在，并且

a）函数 $G_0(z)$ 在 T 中有限；

b）z 很大时，$\varphi_0'(z)=O(1/z)$；

c）在曲线 $C_k(k=0,1,2,\cdots,m)$ 上，有以下关系：

$$\nu^*\varphi_0-2\overline{\varphi_0'}-\overline{\psi_0}-\frac{\nu^*}{2\pi(1+\nu^*)}\sum_{k=1}^{m}A_k\ln\left(1-\frac{z_k}{t}\right)\left(1-\frac{\overline{z_k}}{t}\right)$$

$$+\frac{i}{2\pi(1+\nu^*)}\sum_{k=1}^{m}\overline{A_k}\left(\frac{t}{\bar{t}}\cdot t\frac{\overline{z_k}}{-\overline{z_k}}\right)=0$$

在 T 中，$A_1=A_2=\cdots=A_m=0$，并且 $\varphi_0(z)=\alpha$，$\psi_0=\nu^*\overline{\alpha}$。

我们知道

$$G_0(z)=\nu^*\varphi_0(z)-z\overline{\varphi_0'(z)}-\overline{\psi_0(z)}$$

在区域T中有限。同样可知

$$\sum_{k=1}^{m}A_k\ln\left(1-\frac{z_k}{z}\right)\overline{\left(1-\frac{z_k}{z}\right)}$$

和

$$\sum_{k=1}^{m}\overline{A}_k\frac{z}{\bar{z}}\cdot\frac{\bar{z}_k}{\bar{z}-\bar{z}_k}$$

也是有限的，于是在T中的函数

$$G(z)=G_0(z)-\frac{\nu^*}{2\pi(1+\nu^*)}\sum_{k=1}^{m}A_k\ln\left(1-\frac{z_k}{z}\right)\left(1-\frac{\bar{z}_k}{\bar{z}}\right)$$

$$+\frac{1}{2\pi(1+\nu^*)}\sum_{k=1}^{m}\overline{A}_k\frac{z}{\bar{z}}\frac{\bar{z}_k}{\bar{z}-\bar{z}_k}$$

及

$$\varphi'(z)=\varphi_0'(z)-\frac{1}{2\pi(1+\nu^*)}\sum_{k=1}^{m}A_k\frac{z_k}{z}\frac{1}{z-z_k}$$

也是有限的。

因为

$$\sum_{k=1}^{m}A_k=0$$

故当$|z|$很大时，$\varphi_0'(z)=o(1/z)$，$\varphi(z)=o(1/z)$。和以前相同，取

$$W=\int_{C'}(\varphi'\overline{G}dz-\bar{\varphi}'Gd\bar{z})=0$$

于是$\varphi'=0$，在T中，$\varphi=$常数。又因为$\varphi(z)$在T中全纯，在C_k上$\psi=\nu^*\bar{\alpha}$，$\psi_0=\nu^*\bar{\alpha}$。

2-22 有体积力时的情况

以上各节讨论中，都认为体积力等于零。若体积力不为零，其平衡方程为：

$$\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}=-g_x;\quad \frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}=-g_y$$

$$\nabla^2(X_x+Y_y)=-\frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\left(\frac{\partial g_x}{\partial x}+\frac{\partial g_y}{\partial y}\right)$$

其边界条件设为 f。

我们总可以设法找到相应于某边界条件 f_0 的上式的特解 $X_x^{(0)}$，$X_y^{(0)}$ 和 $Y_y^{(0)}$。那么，我们就可以去解相应边界条件的齐次方程的解 $X_x^{(1)}$，$X_y^{(1)}$，$Y_y^{(1)}$。由迭加原理，可得出方程的解为：

$$X_x=X_x^{(0)}+X_x^{(1)}$$
$$X_y=X_y^{(0)}+X_y^{(1)}$$
$$Y_y=Y_y^{(0)}+Y_y^{(1)}$$

如在 y 轴的负方向，考虑有地心引力的作用时，

$$g_x=0,\quad g_y=-\rho g$$

ρ 是材料单位体积的质量。此时平衡方程改为：

$$\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}=\rho g$$

$$\nabla^2(X_x+Y_y)=0$$

g 是重力加速度。则此方程的特解是

$$X_x^{(0)}=0,\quad X_y^{(0)}=0,\quad Y_y=\rho\cdot g\cdot y$$

又如受离心力作用时，设 $\dot\theta$ 为角速率，则

$$g_x=\rho\dot\theta^2 x,\quad g_y=\rho\dot\theta^2 y$$

相应特解为：

$$X_x^0=-\rho\dot\theta^2\left[\frac{2\lambda+\mu}{4(\lambda+2\mu)}-(x^2+y^2)+\frac{\mu}{2(\lambda+2\mu)}x^2\right]$$

$$Y_y^0=-\rho\dot\theta^2\left[\frac{2\lambda+\mu}{4(\lambda+2\mu)}(x^2+y^2)+\frac{\mu}{2(\lambda+2\mu)}y^2\right]$$

$$X_y^{(0)}=-\rho\dot\theta^2\frac{\mu}{2(\lambda+2\mu)}xy$$

第三章　平面问题的解

3-1　穆斯海里什维里积分方程

设 $f(t)$ 在 C_0 上定义并且是分段充分光滑的主矢量函数。$\Phi(z)$ 和 $\psi(z)$ 是 T 中解析函数。

t_i 是第二章中所提到的应力函数的例外点，在 t_i 点的邻域内，应满足以下条件。

$$|\Phi(z)|\leqslant\left|\frac{1}{z-t_i}\right|^{\frac{1}{2}-\beta},$$

$$|F(z)|\leqslant\left|\frac{1}{z-t_i}\right|^{\frac{1}{2}-\beta}\qquad(\beta>0)$$

t_k^* 是函数 $F(t)$ 的例外点。在 t_k^* 点，$F(t)$ 没有连续的二阶导数。

我们认为 t_k^* 与 t_i 无关。第一个基本问题有解。

在 C_0 上点 t_i 取邻域 ε（图 3-1）。

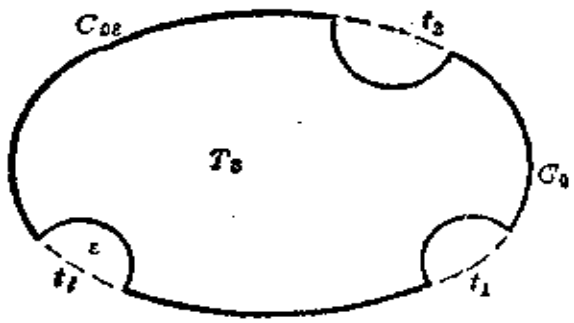


图　3-1

在 $\bar{T}$ 外，我们取点 z'。函数 $\Phi(z)$，$\Phi'(z)$ 及 $\psi(z)$ 在 T_0 中全纯并且一直连续到边界曲线 $C_{0\varepsilon}$ 上。那么，由柯西积分，可知

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{0\varepsilon}}\frac{\varphi(t)}{t-z'}dt\equiv 0\\&\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{0\varepsilon}}\frac{\varphi'(t)}{t-z'}dt\equiv 0\\&\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{0\varepsilon}}\frac{\psi(t)}{t-z'}dt\equiv 0\end{aligned}\right\}\qquad(3\text{-}1\text{-}1)$$

因为 $F(z)=\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)}$，则它的共轭方程为 $\overline{F(z)}=\overline{\varphi(z)}-\bar{z}\varphi'(z)+\psi(z)$。当然在 $C_{0\varepsilon}$ 上，有

$$\overline{F(t)}=\overline{\varphi(t)}+\bar{t}\varphi'(t)+\psi(t)\qquad(3\text{-}1\text{-}2)$$

于是用 $1/2\pi i(t-z')$ 乘式 (3-1-2) 的两边并沿 $C_{0\varepsilon}$ 积分，得到

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{0\varepsilon}}\frac{\overline{\varphi(t)}dt}{t-z'}+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{0\varepsilon}}\frac{\bar{t}\varphi'(t)dt}{t-z'}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{0\varepsilon}}\frac{\overline{F(t)}dt}{t-z'}=A_\varepsilon(z')\qquad(3\text{-}1\text{-}3)$$

由式 (3-1-1)得到

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{0\varepsilon}}\frac{\overline{\varphi(t)}}{\bar{t}-\bar{z}'}d\bar{t}\equiv 0$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{0\varepsilon}}\frac{\bar{z}\varphi'(t)dt}{t-z'}\equiv 0$$

于是式 (3-1-3) 改为

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{0\varepsilon}}\overline{\varphi(t)}\left(\frac{dt}{t-z'}-\frac{d\bar{t}}{\bar{t}-\bar{z}'}\right)$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{0\varepsilon}}\varphi'(t)\frac{\bar{t}-\bar{z}'}{t-z'}dt=A_\varepsilon(z')\qquad(3\text{-}1\text{-}4)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{0\varepsilon}}\overline{\varphi(t)}\left(\frac{dt}{t-z'}-\frac{d\bar{t}}{\bar{t}-\bar{z}'}\right)+\frac{1}{2\pi i}\varphi(t)\frac{\bar{t}-\bar{z}'}{t-z'}\Big|_{C_{0\varepsilon}}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{0\varepsilon}}\varphi(t)d\frac{\bar{t}-\bar{z}'}{t-z'}=A_\varepsilon(z')$$

因为

$$\frac{1}{2\pi i}\varphi(t)\frac{\bar{t}-\bar{z}'}{t-z}\Big|_{C_{0\varepsilon}}=0$$

所以式（3-1-4）改为

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{0\varepsilon}}\overline{\varphi(t)}\left(\frac{dt}{t-z'}-\frac{d\bar{t}}{\bar{t}-\bar{z}'}\right)$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{0\varepsilon}}\varphi(t)\,d\,\frac{\bar{t}-\bar{z}'}{t-z'}=A_0(z') \qquad (3\text{-}1\text{-}5)$$

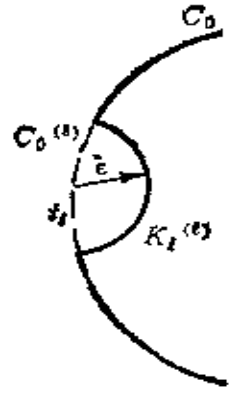


图 3-2

如图 3-2 所示，在 t_l 点邻域作圆弧 $K_l^{(\varepsilon)}$，其半径为 ε，在 C_0 上所割的弧线为 $C_0^{(\varepsilon)}$。于是

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{K_l^{(\varepsilon)}}|\overline{\varphi(t)}dt|\leqslant\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{K_l^{(\varepsilon)}}\left|\frac{1}{t-t_l}\right|^{\frac{1}{2}-\beta}|dt|$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{\frac{1}{2}+\beta}=0$$

同样，因为 C_0 是充分光滑的，故

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_0^{(\varepsilon)}}|\overline{\varphi(t)}dt|=0$$

而函数 $1/(t-z')$ 对于所有的 t 值都是连续的，当然可以说

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{K_l^{(\varepsilon)}}\left|\frac{\overline{\varphi(t)}}{t-z'}dt\right|=0;\quad\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_0^{(\varepsilon)}}\left|\frac{\overline{\varphi(t)}}{t-z'}dt\right|=0$$

那么，则有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_{0\varepsilon}}\varphi(\bar{t})\left(\frac{dt}{t-z'}-\frac{d\bar{t}}{\bar{t}-\bar{z}'}\right)$$

$$=\int_{C_0}\overline{\varphi(t)}\left(\frac{dt}{t-z'}-\frac{d\bar{t}}{\bar{t}-\bar{z}'}\right)$$

同样可得

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_{0\varepsilon}}\overline{\frac{F(t)}{t-z'}}dt=\int_{C_0}\overline{\frac{f(t)}{t-z'}}dt$$

因为

$$d\frac{\bar{t}-\bar{z}'}{t-z'}=\frac{d\bar{t}}{t-z'}-\frac{\bar{t}-\bar{z}'}{(t-z')^2}dt$$

对于任何 t 值，下式

$$\frac{1}{t-z'},\quad\frac{\bar{t}-\bar{z}'}{(t-z')^2}$$

都是连续的，因此我们得出以下结果

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_{0\varepsilon}}\varphi(t)\,d\frac{\bar{t}-\bar{z}'}{t-z'}=\int_{C_0}\varphi(t)\,d\frac{\bar{t}-\bar{z}'}{t-z'}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}A_\varepsilon(z')=A(z')$$

于是

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\overline{\varphi(t)}\left(\frac{dt}{t-z'}-\frac{d\bar{t}}{\bar{t}-\bar{z}'}\right)$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\varphi(t)\,d\frac{\bar{t}-\bar{z}'}{t-z'}=A(z')\qquad(3\text{-}1\text{-}6)$$

式中

$$A(z')=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\overline{\frac{f(t)}{t-z'}}dt$$

若 t_0 是 C_0 上与 t_1 不同的点，当 $z'\to t_0$ 时，则有

$$\left.\begin{aligned}\lim_{z'\to t_0}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\overline{\varphi(t)}}{t-z'}dt&=-\frac{1}{2}\overline{\varphi(t_0)}+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\overline{\varphi(t)}}{t-t_0}dt\\ \lim_{z'\to t_0}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\overline{\varphi(t)}}{\bar{t}-\bar{z}'}d\bar{t}&=\frac{1}{2}\overline{\varphi(t_0)}+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\varphi(t)}{t-\bar{t}_0}d\bar{t}\end{aligned}\right\}\tag{3-1-7}$$

上式的右边项叫作积分主值。

当 $z'\to t_0$ 时，又得到

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\varphi(t)\left(\frac{dt}{t-z'}-\frac{d\bar{t}}{\bar{t}-\bar{z}'}\right)$$

$$=-\overline{\varphi(t_0)}-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\overline{\varphi(t)}d\ln\frac{\bar{t}-\bar{t}_0}{t-t_0}$$

取 $t-z'=re^{i\vartheta(z',t)}$，$r=|t-z'|$。而 $\vartheta(z',\ t)$ 是 $\overrightarrow{z't}$ 与 x 轴正向的夹角（图 3-3）。

$$\ln\frac{\bar{t}-\bar{t}_0}{t-t_0}=-2i\vartheta(t_0,\ t)$$

于是

$$-\overline{\varphi(t_0)}-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\overline{\varphi(t)}d\ln\frac{\bar{t}-\bar{t}_0}{t-t_0}$$

$$=-\overline{\varphi(t_0)}+\frac{1}{\pi}\int_{C_0}\overline{\varphi(t)}d\vartheta(t_0,\ t)$$

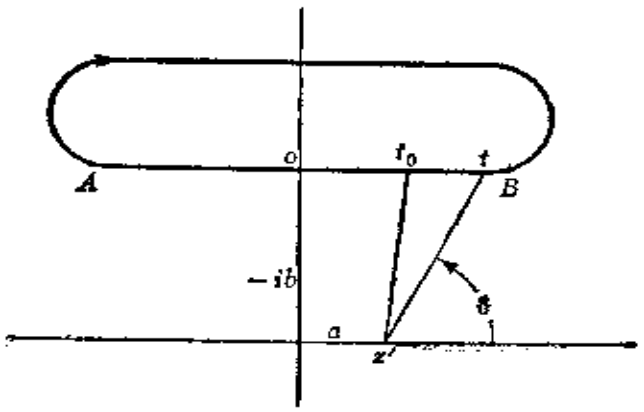


图 3-3

当 $t \geqslant a$ 时，可以看出

$$\vartheta = \operatorname{tg}^{-1}\frac{b}{t-a}$$

当 $t < a$ 时，由图 3-3 看出

$$\vartheta = \operatorname{tg}^{-1}\frac{b}{t-a} + \pi$$

这表示当 t 经过 t_0 时，ϑ 跳跃的值为 π。

图 3-4 所示为一单位圆。设 $t = e^{is}$，$t_0 = e^{is_0}$，$s_0 < s \leqslant 2\pi$ 时

$$\vartheta(s_0, s) = \frac{s_0 + s}{2} + \pi$$

当 $0 < s < s_0$ 时，

$$\vartheta(s_0, s) = \frac{s_0 + s}{2} + 3\pi$$

$$\lim_{z' \to t_0} \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} \overline{\varphi(t)}\left(\frac{dt}{t-z'} - \frac{d\bar{t}}{\bar{t}-\bar{z}'}\right)$$

$$= -\overline{\varphi(t_0)} + \frac{1}{\pi}\int_{C_0} \overline{\varphi(t)}\vartheta'(t_0, t)dt$$

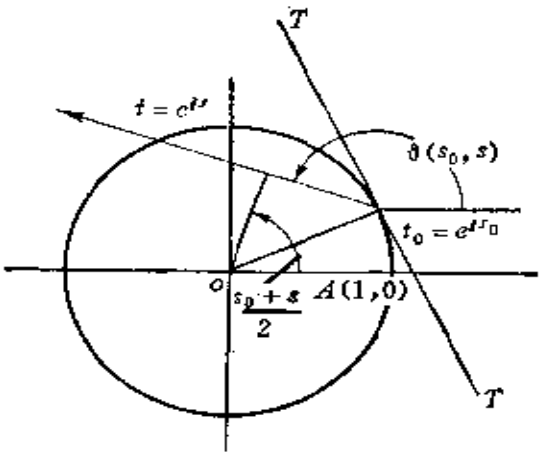


图 3-4

以 s 为参变量，由图 3-4 可知

$$d\vartheta(s_0, s) = \frac{\partial\vartheta(s_0, s)}{\partial s}ds, \quad \frac{\partial\vartheta}{\partial s} = \frac{1}{z}$$

则得到

$$\lim_{z'\to t_0}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\overline{\varphi(t)}\left(\frac{dt}{t-z'}-\frac{d\bar{t}}{t-z'}\right)$$

$$=-\overline{\varphi(s_0)}+\frac{1}{2\pi}\int_{C_0}\overline{\varphi(s)}ds$$

这里把 $\varphi(t)=\varphi(e^{is})$ 简写为 $\varphi(s)$。

$$\frac{\bar{t}-\bar{z}'}{t-z'}=e^{-2i\vartheta(z',t)}$$

$$d\left(\frac{\bar{t}-\bar{z}'}{t-z'}\right)=-2ie^{-2i\vartheta(z',t)}d\vartheta(z',t)$$

$e^{-2i\vartheta(t_0,t)}$是包括 t_0 在内的 C_0 曲线上 t 的连续函数，当 $t=t_0$ 时，$\vartheta(t_0,\ t)$ 的跳跃值是 π；但是我们知道当 $t=t_0$ 时，$e^{-2i\vartheta(t_0,t)}$ 还是连续的，其值不变。当 $z'\to t$ 时函数$e^{-2i\vartheta(z',t)}$ 是不连续的。因为当 $z'\to t$ 时，式

$$e^{-2i\vartheta(z',t)}=\frac{\bar{t}-\bar{z}'}{t-z'}$$

是不连续的（图 3-3)。若 $t=t_0=0$，$\lim_{z'\to t_0}e^{-2i\vartheta(z',t)}$的值与点$z'$如何趋向点 t_0 有关。$z'=a-ib$，当 $b=ka$ 时，则式

$$e^{-2i\vartheta(z',t)}=\frac{1+ik}{1-ik}$$

与 k 值有关。

$$\lim_{z'\to t_0}\int_{C_0}\overline{\varphi(t)}\,d\frac{\bar{t}-\bar{z}'}{t-z'}=\int_{C_0}\varphi(t)\,d\frac{\bar{t}-\bar{t}_0}{t-t_0}$$

$$=\int_{C_0}\varphi(t)\left[-2ie^{-2i\vartheta(t_0,t)}d\vartheta(t_0,\ t)\right]$$

因为 $z'\to t_0$，$(\bar{t}-\bar{z}')/(t-z')$是连续的，于是我们得到穆斯海里什维里方程如下：

$$\overline{\varphi(t_0)}-\frac{1}{\pi}\int_{C_0}\overline{\varphi(t)}d\vartheta(t_0,\ t)$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{C_0}\varphi(t)e^{-2i\theta(t_0,t)}d\vartheta(t_0,t)=-A(t_0)$$

若以弧长为参量时，上式改为

$$\overline{\varphi(s_0)}-\frac{1}{\pi}\int_{C_0}\overline{\varphi(s)}\vartheta'(s_0,s)ds$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{C_0}\varphi(s)e^{-2i\theta(s_0,s)}\vartheta'(s_0,s)ds=-A(s_0)$$

此方程有解的充要条件是：

$$\mathrm{Re}\left[\int_{C_0}\overline{f(t)}dt\right]=0$$

这里

$$f(s)=i\int_0^s[X_n(s)+iY_n(s)]ds$$

$f(t)$ 是分段光滑的。$\mathrm{Re}\left[\int_{C_0}\overline{f(t)}dt\right]$ 代表外力矩。在 $f(t)$ 的例外点 t_k 的邻域，须满足以下条件

$$|f(t)|\leqslant\left|\frac{1}{t-t_k}\right|^{\frac{1}{2}-\beta}\quad(\beta>0)$$

取极限，可以知道 $\mathrm{Re}\left[\int_{C_0}\overline{f(t)}dt\right]$ 仍是外力矩。

若 t_k^* 是 $f(t)$ 的例外点，$\varphi(z)$，$\varphi'(z)$ 和 $\psi(z)$ 最多除 t_k^* 外，处处连续到边界上。弹性力学第一基本问题若有两组解，则必是

$$\varphi_1(z)=\varphi(z)+icz+\alpha,\quad \psi_1(z)=\psi(z)+\beta$$

弹性力学第二基本问题若有两组解，则必是

$$\varphi_1(z)=\varphi(z)+\gamma,\quad \psi_1(z)=\psi(z)+\gamma'$$

同时，$\nu^*\gamma-\bar{\gamma}'=0$。当 T 是无限大的区域时，转动为零。

3-2 劳瑞西拉—谢尔曼方程

我们知道 $f(t)=\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}$，并且设存在

外力矩为零的关系

$$\mathrm{Re}\left[\int_{C_0}\overline{f(t)}dt\right]=0 \tag{3-2-1}$$

函数$\Phi(z)$和$\psi(z)$用柯西积分表示为：

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\omega(t)}{t-z}dt \tag{3-2-2}$$

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\overline{\omega(t)}}{t-z}dt-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\bar{t}\omega(t)}{(t-z)^2}dt$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\omega(t)}{t-z}d\bar{t} \tag{3-2-3}$$

这里$\omega(t)$是未知函数。

$\varphi(z)$，$\varphi'(z)$和$\psi(z)$除有限个点t_i外，处处一直连续到边界上，t_k是$f(t)$的例外点。

设$\omega(t)$除t_k外在边界曲线C_0上有处处连续的导数，并且在t_k的邻域是平方可积的。把$\varphi(z)$，$\varphi'(z)$，$\psi(z)$等代入$F(z)$，则得到

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\omega(t)}{t-z}dt-\frac{z}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\overline{\omega(t)}d\bar{t}}{(t-\bar{z})^2}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\omega(t)d\bar{t}}{\bar{t}-\bar{z}}+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{t\overline{\omega(t)}}{(t-z)^2}d\bar{t}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\overline{\omega(t)}}{\bar{t}-\bar{z}}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\omega(t)\left(\frac{dt}{t-z}-\frac{d\bar{t}}{\bar{t}-\bar{z}}\right)$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\overline{\omega(t)}\frac{t-z}{(t-z)^2}d\bar{t}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\overline{\omega(t)}dt}{\bar{t}-\bar{z}}$$

我们知道

$$\int_{C_0}\overline{\omega(t)}\frac{t-z}{(t-z)^2}d\bar{t}-\int_{C_0}\frac{\overline{\omega(t)}dt}{t-z}$$

$$=-\int_{C_0}\overline{\omega(t)}\,d\frac{t-z}{\bar{t}-\bar{z}}$$

当 $z\to t_0$，$t_0\neq t_k$，t_0 是 C_0 上的点。于是

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\omega(t)d\ln\frac{t-z}{\bar{t}-\bar{z}}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\overline{\omega(t)}\,d\frac{t-z}{\bar{t}-\bar{z}}$$

就变为

$$f(t_0)=\omega(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\omega(t)d\ln\frac{t-t_0}{\bar{t}-\bar{t}_0}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\overline{\omega(t)}\,d\frac{t-t_0}{\bar{t}-\bar{t}_0}\qquad(3\text{-}2\text{-}4)$$

这里注意到，当 z' 在 C_0 外时，则

$$\lim_{z'\to t_0}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\overline{\varphi(t)}}{t-z'}dt=-\frac{1}{2}\overline{\varphi(t_0)}+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\overline{\varphi(t)}}{t-t_0}dt$$

$$\lim_{z'\to t_0}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\overline{\varphi(t)}d\bar{t}}{\bar{t}-\bar{z}'}=\frac{1}{2}\overline{\varphi(t_0)}+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\overline{\varphi(t)}d\bar{t}}{\bar{t}-\bar{t}_0}$$

所以

$$\lim_{z'\to t_0}\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{C_0}\frac{\overline{\varphi(t)}d\bar{t}}{\bar{t}-\bar{z}'}-\int_{C_0}\frac{\overline{\varphi(t)}dt}{t-z'}\right]$$

$$=\overline{\varphi(t_0)}+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\overline{\varphi(t)}d\ln\frac{t-t_0}{\bar{t}-\bar{t}_0}$$

令 $t-t_0=re^{i\theta(t_0,t)}$ 代入上式后，则

$$\omega(t_0)+\frac{1}{\pi}\int_{C_0}\omega(t)d\theta(t_0,\ t)$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{C_0}\overline{\omega(t)}e^{2i\vartheta(t_0,t)}d\vartheta(t_0,t)=f(t_0) \qquad (3\text{-}2\text{-}5)$$

若此方程适合于与 t_k 不同的点 t_0。它是普通意义的积分，而不是司蒂吉斯（Stieltjes）积分。若取

$$\frac{\partial\vartheta(t_0,t)}{\partial t}=\vartheta'(t_0,t)$$

则方程改写为

$$\omega(t_0)+\frac{1}{\pi}\int_{C_0}\omega(t)\vartheta'(t_0,t)dt$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{C_0}\overline{\omega(t)}e^{2i\vartheta(t_0,t)}\vartheta'(t_0,t)dt=f(t_0) \qquad (3\text{-}2\text{-}6)$$

$\omega(t_0)$ 除 t_k 点外都有连续的导数。t_k 是 $f(t)$ 的例外点。若此方程的解 $\omega(t_0)$ 存在，则由柯西积分定义的 $\varphi(z)$，$\psi(z)$ 以及 $\varphi'(z)$

$$\varphi'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\omega(t)}{(t-z)^2}dt$$

除 t_k 点外，一直连续到边界上。在 t_k 点的邻域有

$$|f(t_0)|\leqslant\left|\frac{1}{t_0-t_k}\right|^{\frac{1}{2}-\beta}$$

$$|f'(t_0)|\leqslant\left|\frac{1}{t_0-t_k}\right|^{\frac{3}{2}-\beta} \qquad (\beta>0)$$

因而在 t_k 点的邻域有

$$|\omega(t_0)|\leqslant\left|\frac{1}{t_0-t_k}\right|^{\frac{1}{2}-\beta}$$

$$|\omega'(t_0)|\leqslant\left|\frac{1}{t_0-t_k}\right|^{\frac{3}{2}-\beta} \qquad (\beta>0)$$

于是得到

$$|\varphi(z)|\leqslant\left|\frac{1}{z-t_k}\right|^{\frac{1}{2}-\beta}$$

$$|F(z)|\leqslant\left|\frac{1}{z-t_k}\right|^{\frac{1}{2}-\beta}\quad(\beta>0)$$

这样可以说，若解$\omega(t_0)$存在，且满足对$\Phi(z)$和$\psi(z)$所提的要求，弹性力学第一基本问题有唯一解。

在方程（3-2-6）中的积分核$\vartheta'(t_0,\ t)$和$e^{2i\omega(t_0,t)}\cdot\vartheta(t_0,t)$对于所有在$C_0$上的$t$和$t_0$是连续的，函数$f(t)$是平方可积的。于是对于方程（3-2-6），弗列德霍姆交比定理是适用的。或是方程（3-2-6）的齐次式有非平凡解或是对于每个平方可积的右侧项有唯一解。

我们知道，由边界负荷所确定的应力函数$\Phi(z)$和$\psi(z)$不是唯一的。这里有对应于零负荷的应力函数

$$\Phi(z)=icz+\alpha,\quad\psi(z)=-\alpha$$

我们可以知道，方程(3-2-6)的齐次式可以有非平凡的解$\omega(t)$，由式（3-2-2）和式（3-2-3）得到上述形式的$\Phi(z)$和$\psi(z)$。这也就表明，方程（3-2-6）的齐次式有非平凡解。而只有当$f(t)$满足以下条件时

$$\mathrm{Re}\left[\int_{C_0}\overline{f(t)}dt\right]=0\qquad(3\text{-}2\text{-}7)$$

方程（3-2-6）有解。这是有解的充要条件。

我们假设存在一个函数$\omega(t)$，对于$f(t)$方程（3-2-6）得到满足。在T中存在全纯函数$\Phi(z)$和$\psi(z)$，并且函数

$$F(z)=\Phi(z)+z\overline{\Phi'(z)}+\overline{\psi(z)}$$

除t_k点外，连续到边界上。在t_k点的邻域也要满足以下条件

$$|F(z)|\leqslant\left|\frac{1}{z-t_k}\right|^{\frac{1}{2}-\beta}\quad(\beta>0)$$

$\Phi(z)$和$\psi(z)$在T中对应某一应力状态。在T中有一重调和方程$U(x,\ y)$，故在T中有

$$\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}=F(z)$$

或是

$$\int_{C_0}\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy\right)=\mathrm{Re}\left[\int_{C_0}\overline{F(t)}dt\right]$$

C_0 是 T 中的任一曲线。对于每一个闭曲线 C_0 来说

$$\int_{C_0}\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy\right)=0$$

因为函数 $U(x,\ y)$ 是单值解析的。我们在 t_i 点邻域 ε 取一小

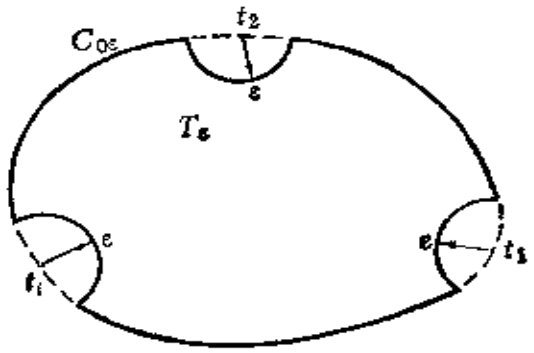


图 3-5

圆弧，则除 t_i 点邻域外的弧以 $C_{0\varepsilon}$ 表示（图 3-5）。因为 $\partial U/\partial x$ 和 $\partial U/\partial y$ 连续到 $C_{0\varepsilon}$ 上，所以

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_{0\varepsilon}}\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy\right)=0$$

故可知

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathrm{Re}\left[\int_{C_{0\varepsilon}}\overline{F(t)}dt\right]=0$$

又因为

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathrm{Re}\left[\int_{C_{0\varepsilon}}\overline{F(t)}dt\right]=\mathrm{Re}\left[\int_{C_0}\overline{f(t)}dt\right]$$

所以

$$\mathrm{Re}\left[\int_{C_0}\overline{f(t)}dt\right]=0$$

这就证明了若方程（3-2-6）有解，必须满足式（3-2-7）。

把式（3-2-6）加上如下的一项

$$b\left(\frac{1}{t_0-a}-\frac{1}{\bar{t}_0-\bar{a}}+\frac{t_0-a}{(\bar{t}_0-\bar{a})^2}\right)$$

这里 a 是 T 中任意一内点，并且

$$b=\frac{1}{\pi i}\mathrm{Re}\left[\int_{C_0}\frac{\omega(t)}{(t-a)^2}dt\right]$$

于是式（3-2-6）就改写为

$$\omega(t_0)+\frac{1}{\pi}\int_{C_0}\omega(t)d\vartheta(t_0,\ t)$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_{C_0}\overline{\omega(t)}e^{2i\vartheta(t_0,t)}d\vartheta(t_0,\ t)$$
$$+\left(\frac{1}{t_0-a}-\frac{1}{\bar{t}_0-\bar{a}}+\frac{t_0-a}{(\bar{t}_0-\bar{a})^2}\right)$$
$$\times\frac{1}{\pi i}\mathrm{Re}\left[\int_{C_0}\frac{\omega(t)}{(t-a)^2}dt\right]=f(t_0)\qquad(3\text{-}2\text{-}8)$$

方程（3-2-8）对于每一个右侧的函数有唯一解。

若 $f(t)$ 满足式（3-2-7），且 $b=0$，则方程（3-2-8）的解就是方程（3-2-6）的解。

我们知道

$$\frac{1}{t_0-a}-\frac{1}{\bar{t}_0-\bar{a}}+\frac{t_0-a}{(\bar{t}_0-\bar{a})^2}$$

在 C_0 上有对 t_0 的连续导数，在 C_0 上 $\omega(t_0)$ 也有对 t_0 的连续导数。可写出下式

$$\omega(t_0)+\frac{1}{\pi}\int_{C_0}\omega(t)d\vartheta-\frac{1}{\pi}\int_{C_0}\overline{\omega(t)}e^{2i\vartheta}d\vartheta$$
$$=\varphi(t_0)+t_0\overline{\varphi'(t_0)}+\overline{\psi(t_0)}$$

于是式（3-2-8）改写为：

$$\varphi(t_0)+t_0\overline{\varphi'(t_0)}+\overline{\psi(t_0)}+b\left(\frac{1}{t-a}-\frac{1}{\bar{t}-\bar{a}}+\frac{t-a}{(\bar{t}-\bar{a})^2}\right)$$
$$=f(t)\qquad(3\text{-}2\text{-}9)$$

我们在 T 中（除去点 a）定义如下函数

$$G(z)=F(z)+b\left(\frac{1}{z-a}-\frac{1}{\bar{z}-\bar{a}}+\frac{z-a}{(\bar{z}-\bar{a})^2}\right)$$

在 t_k 点，$G(z)$满足如下条件

$$|G(z)|\leqslant\left|\frac{1}{z-t_k}\right|^{\frac{1}{2}-\beta}\quad(\beta>0)$$

我们仍然和前面一样，取 $C_{0\varepsilon}$ 曲线，$G(z)$是一直连续到 $C_{0\varepsilon}$ 上的。在 $C_{0\varepsilon}$ 上，有

$$\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\psi(t)+b\left(\frac{1}{t-a}-\frac{1}{\bar{t}-\bar{a}}+\frac{t-a}{(\bar{t}-\bar{a})^2}\right)=G(t)\qquad(3\text{-}2\text{-}10)$$

自然在 $C_{0\varepsilon}$ 上，$G(t)=f(t)$。把式(3-2-10)乘 $d\bar{t}$ 并沿 $C_{0\varepsilon}$ 积分，我们得到

$$\int_{C_{0\varepsilon}}\bar{t}\varphi'(t)dt=-\int_{C_{0\varepsilon}}\varphi(t)d\bar{t}$$

取它的共轭方程为

$$\int_{C_{0\varepsilon}}t\overline{\varphi'(t)}d\bar{t}=-\int_{C_{0\varepsilon}}\overline{\varphi}(t)dt$$

又知道($\psi(z)$在 T_e 中全纯)

$$\int_{C_{0\varepsilon}}\psi(t)dt=0,\quad\int_{C_{0\varepsilon}}\overline{\psi(t)}d\bar{t}=0$$

$$\int_{C_{0\varepsilon}}\frac{dt}{t-a}=2\pi i,\quad\int_{C_{0\varepsilon}}\frac{d\bar{t}}{\bar{t}-\bar{a}}=-2\pi i$$

$$\int_{C_{0\varepsilon}}\frac{(t-a)d\bar{t}}{(\bar{t}-\bar{a})^2}=-\int_{C_{0\varepsilon}}(t-a)d\frac{1}{\bar{t}-\bar{a}}$$

$$=\int_{C_{0\varepsilon}}\frac{dt}{\bar{t}-\bar{a}}$$

由式(3-2-10)的积分式得到

$$\int_{C_{0\varepsilon}}[\varphi(t)dt-\overline{\varphi(t)}dt]+b\int_{C_{0\varepsilon}}\left(\frac{d\bar{t}}{t-a}+\frac{dt}{\bar{t}-\bar{a}}\right)+2\pi bi=\int_{C_{0\varepsilon}}G(t)d\bar{t}$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时，则由上式得到

$$\int_{C_0}\left[\varphi(t)d\bar{t}-\overline{\varphi(t)}dt\right]+b\int_{C_0}\left(\frac{d\bar{t}}{t-a}+\frac{dt}{\bar{t}-\bar{a}}\right)$$

$$+2\pi bi=\int_{C_0}f(t)d\bar{t}$$

我们由 b 的定义可知它是纯虚数，$2\pi bi$ 是实数。根据如下假设

$$\mathrm{Re}\left[\int_{C_0}f(\bar{t})dt\right]=0 \quad 或 \quad \mathrm{Re}\left[\int_{C_0}f(t)d\bar{t}\right]=0$$

可知 $b=0$。

也就是说，只要满足条件(3-2-7)，方程(3-2-8)的解也就是方程(3-2-6)的解。

由弗列德霍姆交比定理可知，当 $f(t)=0$ 时，齐次方程只有平凡解。为了表示是齐次方程，把 $\omega(t_0)$ 改为 $\omega_0(t_0)$。于是

$$\omega_0(t_0)+\frac{1}{\pi}\int_{C_0}\omega_0(t)d\vartheta-\frac{1}{\pi}\int_{C_0}\overline{\omega_0(t)}e^{2i\vartheta}d\vartheta$$

$$+b_0\left(\frac{1}{t_0-a}-\frac{1}{\bar{t}_0-\bar{a}}+\frac{t_0-a}{(\bar{t}_0-\bar{a})^2}\right)=0$$

$$b_0=\frac{1}{\pi i}\mathrm{Re}\left\{\int_{C_0}\frac{\omega_0(t)}{(t-a)^2}dt\right\}$$

因为已证明当满足条件(3-2-7)时，$b_0=0$。由柯西积分所得到的 $\varphi_0(z)$ 和 $\psi_0(z)$ 为

$$\varphi_0(z)=icz+\alpha,\quad \psi_0(z)=-\bar{a}$$

又

$$\varphi_0'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\omega_0(t)}{(t-z)^2}dt$$

由 b 的定义可知

$$b_0=\frac{1}{\pi i}\mathrm{Re}\left[\int_{C_0}\frac{\omega_0(t)}{(t-a)^2}dt\right]=2iI_m[\varphi_0'(a)]=2ic$$

所以 $c=0$。而 $\varphi_0(z)=\alpha$，$\psi_0(z)=-\bar{a}_0$。

我们现在求式(3-2-3)中的第二个积分如下：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\bar{t}\omega_0(t)}{(t-z)^2}dt=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\bar{t}\omega_0(t)\,d\frac{1}{t-z}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{d[\bar{t}\omega_0(t)]}{t-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\bar{t}\omega_0'(t)}{t-z}dt$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\omega_0(t)}{t-z}d\bar{t}$$

把这个式子代入式(3-2-3)中后，得到

$$\psi_0=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\overline{\omega_0(t)}-\bar{t}\omega_0'(t)}{t-z}\,dt$$

因为 $\varphi_0(z)=\alpha$，$\psi_0(z)=-\bar{\alpha}$。

于是

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\omega_0-\alpha}{t-z}dt\equiv 0$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\bar{\omega}_0-\bar{t}\omega_0'+\bar{\alpha}}{t-z}\,dt\equiv 0$$

根据柯西定理可知，$\omega_0-\alpha$ 以及 $\bar{\omega}_0-\bar{t}\omega_0'+\bar{\alpha}$ 是在 C_0 外的解析函数并在无穷远处为零。令

$$i\delta_1(t)=\omega_0(t)-\alpha$$

$$i\delta_2(t)=\overline{\omega_0(t)}-\bar{t}\omega_0'(t)+\bar{\alpha}$$

所以在 C_0 上得到

$$\bar{\delta}_1+\bar{t}\delta_1'+\delta_2+2i\alpha=0$$

函数 $\delta_1(z)$ 以及 $\delta_2(z)+2i\bar{\alpha}$ 在 C_0 外可写为

$$\delta_1(z)=ic'z+\alpha',\quad \delta_2(z)+2i\bar{\alpha}=-\bar{\alpha}'$$

因为在无穷远处，$\delta_1(z)=0$，所以 $c'=\alpha'=0$，又 $\delta_2=0$，所以 $\alpha=0$。由此得出 $\omega_0(t)=0$

所以可以说，若 C_0 是简单有限充分光滑封闭曲线，T 是其内部，在 C_0 上定义一分段充分光滑主矢量函数 $f(t)$ 并且 $\mathrm{Re}\left[\int_{C_0}\overline{f(t)}dt\right]=0$，就存在弹性力学第一基本问题的一个解，其应力函数如下：

$$\varphi(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\omega(t)}{t-z}dt$$

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\overline{\omega(t)}}{t-z}dt-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{t\overline{\omega(t)}}{(t-z)^2}dt$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\omega(t)d\bar{t}}{t-z}$$

其中$\omega(t)$是以下方程的解

$$\omega(t_0)+\frac{1}{\pi}\int_{C_0}\omega(t)\vartheta'(t_0,\ t)dt$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{C_0}\overline{\omega(t)}e^{2i\vartheta(t_0,t)}\vartheta'(t_0,\ t)dt$$

$$+\left(\frac{1}{t-a}-\frac{1}{\bar{t}-\bar{a}}+\frac{t-a}{(\bar{t}-\bar{a})^2}\right)$$

$$\times\frac{1}{\pi i}\mathrm{Re}\left[\int_{C_0}\frac{\omega(t)}{(t-a)^2}dt\right]=f(t_0)$$

a是T的任一内点。上述方程只有唯一解。

3-3 圆域中弹性力学第一个基本问题的解

设圆域的中心在坐标原点，其半径为一。于是在圆弧C_0上的点t与弧长s的关系为：

$$t=e^{is},\quad t_0=e^{is_0}$$

$$\vartheta(t_0,\ t)=\begin{cases}\frac{1}{2}(s+s_0+\pi) & s_0\leqslant s\leqslant 2\pi\\ \frac{1}{2}(s+s_0+3\pi) & 0\leqslant s<s_0\end{cases}$$

这样把方程(3-2-8)改写为

$$\omega(s_0)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega(s)ds+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{\omega(s)}e^{i(s+s_0)}ds$$

$$+(e^{-is_0}-e^{is_0}+e^{3is_0})\frac{1}{\pi i}\mathrm{Re}\left[i\int_0^{2\pi}\omega(s)e^{-is}ds\right]$$

$$=f(s_0)\qquad(3-3-1)$$

因为要求满足下列条件

$$\mathrm{Re}\left[\int_{C_0}\overline{f(t)}dt\right]=\mathrm{Re}\left[i\int_0^{2\pi}\overline{f(s)}e^{is}ds\right]=0$$

则 $b=0$，即

$$\mathrm{Re}\left[i\int_0^{2\pi}\omega(s)e^{-is}ds\right]=0$$

于是方程(3-3-1)变为退化核积分方程。我们取方程的解如下：

$$\omega(s_0)=f(s_0)+\alpha_1+\alpha_2e^{is_0} \qquad (3\text{-}3\text{-}2)$$

把式(3-3-2)代入式(3-3-1)，得到

$$\alpha_1+\alpha_2e^{is_0}+\frac{1}{2\pi}\int_{C_0}[f(s)+\alpha_1+\alpha_2e^{is}]ds$$

$$+\frac{1}{2\pi}e^{is_0}\int_{C_0}[\overline{f(s)}+\bar{\alpha}_1+\bar{\alpha}_2e^{-is}]e^{is}ds=0$$

于是

$$\alpha_1+\alpha_2e^{is_0}+\frac{1}{2\pi}\int_{C_0}f(s)ds+\alpha_1$$

$$+\frac{e^{is_0}}{2\pi}\int_{C_0}\overline{f(s)}e^{is}ds+\bar{\alpha}_2e^{is_0}=0 \qquad (3\text{-}3\text{-}3)$$

由式(3-3-3)得到

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1&=\frac{1}{4\pi}\int_{C_0}f(s)ds;\quad \alpha_2+\bar{\alpha}_2=-\frac{1}{2\pi}\int_{C_0}\overline{f(s)}e^{is}ds\\ \alpha_1&=-\frac{1}{4\pi i}\int_{C_0}\frac{f(t)}{t}dt;\quad \alpha_2+\bar{\alpha}_2=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\overline{f(t)}dt\end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}3\text{-}4)$$

因为满足 $\mathrm{Re}\left[\int_{C_0}\overline{f(t)}dt\right]=0$，所以由式(3-3-4)可知 $\alpha_2+\bar{\alpha}_2$ 是实数，可令 α_2 为实数。则

$$\alpha_2=\bar{\alpha}_2=-\frac{1}{4\pi i}\int_{C_0}\overline{f(t)}dt=\frac{1}{4\pi i}\int_{C_0}f(t)d\bar{t}$$

$$=-\frac{1}{4\pi i}\int_{C_0}\frac{f(t)}{t^2}dt$$

于是得到

$$\omega(t_0)=f(t_0)-\frac{t_0}{4\pi i}\int_{C_0}\frac{f(t)}{t^2}dt+\alpha_1$$

$$\varphi(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\omega(t)}{t-z}dt=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{f(t)}{t-z}dt$$

$$-\frac{z}{4\pi i}\int_{C_0}\frac{f(t)}{t^2}dt+\alpha_1$$

可以略去 α_1。

又知道

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\overline{\omega(t)}}{t-z}dt-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\bar{t}\omega(t)}{(t-z)^2}dt$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\omega(t)}{t-z}d\bar{t}$$

但是

$$\bar{t}=\frac{1}{t},\quad d\bar{t}=-\frac{1}{t^2}dt$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\bar{t}\omega(t)}{(t-z)^2}dt+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\omega(t)d\bar{t}}{t-z}$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{t\omega(t)dt}{(t-z)^2}-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\omega(t)dt}{t^2(t-z)}$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{z}\int_{C_0}\frac{\omega(t)dt}{(t-z)^2}-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\left[\frac{1}{t(t-z)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{t^2(t-z)}-\frac{1}{z(t-z)^2}\right]\omega(t)dt$$

$$=-\frac{1}{z}\varphi'(z)-\frac{1}{2\pi iz}\int_{C_0}\frac{\omega(t)}{t^2}dt$$

因为

$$\int_{C_0}\frac{\bar{t}}{t-z}dt=\int_{C_0}\frac{dt}{t(t-z)}=0$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{1}{t}dt=1,\quad\int_{C_0}\frac{dt}{t^2}=\int_{C_0}\frac{\bar{t}dt}{t}=0$$

和

$$\alpha_2=-\frac{1}{4\pi i}\int_{C_0}\frac{f(t)}{t^2}dt$$

把以上诸式代入$\psi(z)$中，得到

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\overline{\omega(t)}}{t-z}dt-\frac{1}{z}\varphi'(z)$$

$$+\frac{1}{2\pi iz}\int_{C_0}\frac{\omega(t)}{t^2}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\overline{f(t)}dt}{t-z}+\frac{1}{2\pi iz}\int_{C_0}\frac{f(t)}{t^2}dt$$

$$-\frac{1}{z}\varphi'(z)+\bar{\alpha}_1$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\overline{f(t)}}{t-z}dt-\frac{1}{z}\varphi'(z)-\frac{1}{z}\alpha_2+\bar{\alpha}_1$$

我们知道$\varphi'(z)$在圆内是解析的，所以可以把它展为泰勒级数。即

$$\varphi'(z)=b_0+b_1z+\cdots$$

$$\varphi'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{f(t)}{(t-z)^2}dt-\frac{1}{4\pi i}\int_{C_0}\frac{f(t)}{t^2}dt$$

$$\varphi'(0)=b_0=\frac{1}{4\pi i}\int_{C_0}\frac{f(t)dt}{t^2}=-\alpha_2$$

于是

$$\frac{\varphi'(z)}{z}+\frac{\alpha_2}{z}=b_1+b_2z+\cdots$$

自然得到应力函数为

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{f(t)dt}{t-z}-\frac{z}{4\pi i}\int_{C_0}\frac{f(t)}{t^2}dt$$

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\overline{f(t)}}{t-z}dt+\bar{\alpha}_1-(b_1+b_2z+\cdots)$$

〔例题 1〕 有一单位圆(图 3-6)。在它上面作用有集中力。

集中力的作用点为：

$$t_1=e^{i\alpha_1},\ t_2=e^{i\alpha_2},\ \cdots,\ t_n=e^{i\alpha_n}$$

$$(0\leqslant\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_n<2\pi)$$

边界上主矢量函数 $f(t)$ 在每个区间 $(t_j,\ t_{j+1})$ 中都是常量，此函数是分段充分光滑的。假设在区间 $(t_n,\ t_1)$ 中，$f(t)=0$。

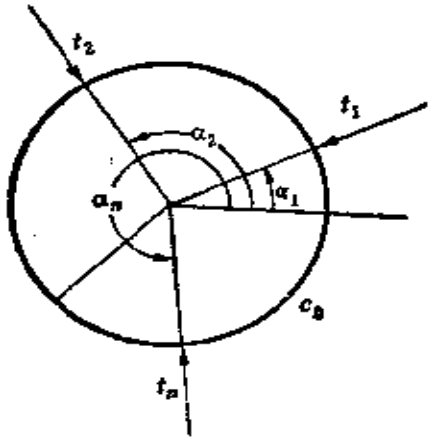


图 3-6

在区间 $(t_1,\ t_2)$ 中

$$f(t)=i(X_1+iY_1)$$

在区间 $(t_2,\ t_3)$ 中

$$f(t)=i(X_1+iY_1)+i(X_2+iY_2)$$

以下如此类推。

由力的平衡，可知

$$\Sigma X_j=0,\ \Sigma Y_j=0$$

因为 X_j，Y_j 是常数，故

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{f(t)}{t-z}dt=\frac{1}{2\pi i}\left[\Sigma\int_{\widehat{t_jt_{j+1}}}i\,\frac{X_j+iY_j}{t-z}\,dt\right]$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\Sigma(X_j+iY_j)\ln\frac{t_{j+1}-z}{t_j-z}$$

$$=-\frac{1}{2\pi}(X_1+iY_1)\ln\frac{t_2-z}{t_1-z}$$

$$+\frac{1}{2\pi}(X_1+iY_1+X_2+iY_2)\ln\frac{t_3-z}{t_2-z}$$

$$+\cdots+\frac{1}{2\pi}(X_1+iY_1+\cdots$$

$$+X_n+iY_n)\ln\frac{t_1-z}{t_n-z}$$

注意到 $t_{n+1}=t_1$，所以得到

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{f(t)dt}{t-z}=-\frac{1}{2\pi}\{(X_1+iY_1)\ln(t_1-z)+\cdots$$

$$+(X_n+iY_n)\ln(t_n-z)\}$$

$$=\frac{-1}{2\pi}\left\{\sum_{j=1}^{n}(X_j+iY_j)\ln(t_j-z)\right\}$$

同样可得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\overline{f(t)}dt}{t-z}=\frac{1}{2\pi}\left\{\sum_{j=1}^{n}(X_j-iY_j)\ln(t_j-z)\right\}$$

又因为

$$\alpha_2=\bar{\alpha}_2=-\frac{1}{4\pi i}\int_{C_0}\overline{f(t)}dt=-\frac{1}{4\pi i}\int_{C_0}\frac{f(t)}{t^2}dt$$

$$=-\frac{1}{4\pi i}\int_{C_0}\sum_{j=1}^{n}(X_j+iY_j)e^{-is}d(is)$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{n}(X_j+iY_j)\bar{t}_j$$

因为 α_2 是实数，故有

$$\sum_{j=1}^{n}(X_j\cdot y_j-Y_j\cdot x_j)=0$$

即

$$\mathrm{Re}\left[\int_{C_0}\overline{f(t)}dt\right]=0$$

把以上的结果代入 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 中后，则得到

$$\varphi(z)=-\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{n}(X_j+iY_j)\ln(t_j-z)+\frac{z}{4\pi i}\sum_{j=1}^{n}(X_j+iY_j)\bar{t}_j$$

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{n}(X_j-iY_j)\ln(t_j-z)-\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{n}(X_j+iY_j)\frac{t_j}{t_j-z}$$

注意这里

$$\varphi'(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{n}(X_j+iY_j)\frac{1}{t_j-z}+\frac{1}{4\pi i}\sum_{j=1}^{n}(X_j+iY_j)t_j$$

$$\alpha_z=\frac{1}{4\pi i}\sum_{j=1}^{n}(X_j+iY_j)\bar{t}_j$$

〔例题 2〕 如图 3-7 所示，有两个集中力 P_1 和 P_2。X_1+

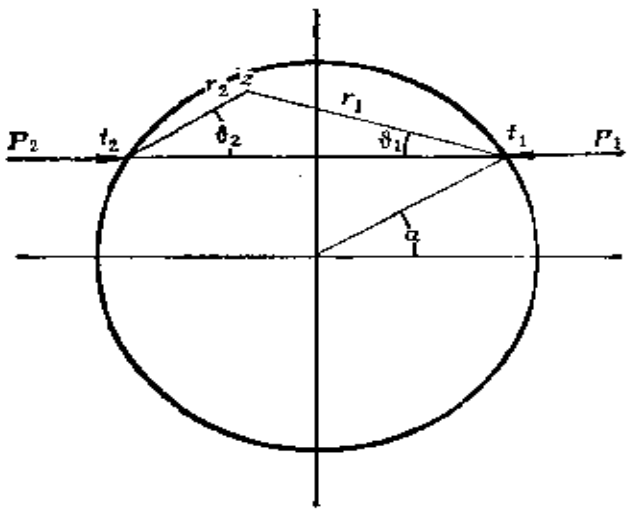


图 3-7

$iY_1=-P_1$，$X_2+iY_2=P_2$。$|P_1|=|P_2|=P$。把它们代入例题中所得结果，就得到

$$\varphi(z)=-\frac{P}{2\pi}\left[\ln(t_1-z)-\ln(t_2-z)-\frac{z}{2}(\bar{t}_1-\bar{t}_2)\right]$$

$$\psi(z)=-\frac{P}{2\pi}\left[\ln(t_1-z)-\ln(t_2-z)-\frac{t_1}{t_1-z}+\frac{\bar{t}_2}{t_2-z}\right]$$

由图 3-7 可知

$$t_1=e^{i\alpha},\quad t_2=e^{i(\pi-\alpha)}=-e^{-i\alpha}$$

$$z-t_1=r_1e^{i(\pi-\theta_1)}=-r_1e^{-i\theta_1}$$

$$z-t_2=r_2e^{i\theta_2}$$

由 $2\mu(u+iv)=\nu^*\varphi-z\bar{\varphi}'-\bar{\psi}$，可得位移 u 和 v。将

$$\nu^*\varphi(z)=\frac{\nu^*P}{2\pi}\left[\ln\frac{t_1-z}{t_2-z}-\frac{z}{2}(\bar{t}_1-\bar{t}_2)\right]$$

$$z\bar{\varphi}'(z)=\frac{zP}{2\pi}\left[\frac{1}{\bar{t}_2-\bar{z}}-\frac{1}{\bar{t}_1-\bar{z}}-\frac{1}{z}(t_1-t_2)\right]$$

$$\bar{\psi}(z)=-\frac{P}{2\pi}\left[\ln\frac{\bar{t}_1-\bar{z}}{\bar{t}_2-\bar{z}}-\frac{t_1}{\bar{t}_1-\bar{z}}+\frac{t_2}{\bar{t}_2-\bar{z}}\right]$$

代入 $2\mu(u+iv)$后，得到

$$2\mu(u+iv)=\frac{P}{2\pi}\left[\nu^*\ln\frac{t_1-z}{t_2-z}+\ln\frac{\bar{t}_1-\bar{z}}{\bar{t}_2-\bar{z}}-\frac{t_1-z}{\bar{t}_1-\bar{z}}+\frac{t_2-z}{\bar{t}_2-\bar{z}}-(\nu^*-1)z\cos\alpha\right]$$

把实部和虚部分开后，得到 u 和 v。

〔例题 3〕 受力情况如图3-8所示，求应力函数及位移。

由图3-8可知

$$X_1+iY_1=-P_1e^{i\alpha},\quad X_2+iY_2=P_1e^{-i\alpha},\quad X_3+iY_3=iP_2$$

于是应力函数如下：

$$\varphi(z)=\frac{P_1}{2\pi}\left[e^{i\alpha}\ln(t_1-z)-e^{-i\alpha}\ln(t_2-z)-\frac{z}{2}(\bar{t}_1e^{i\alpha}-\bar{t}_2e^{-i\alpha})\right]+\frac{i}{2\pi}P_2\ln(t_3-z)+\frac{z}{4\pi}iP_2\bar{t}_3$$

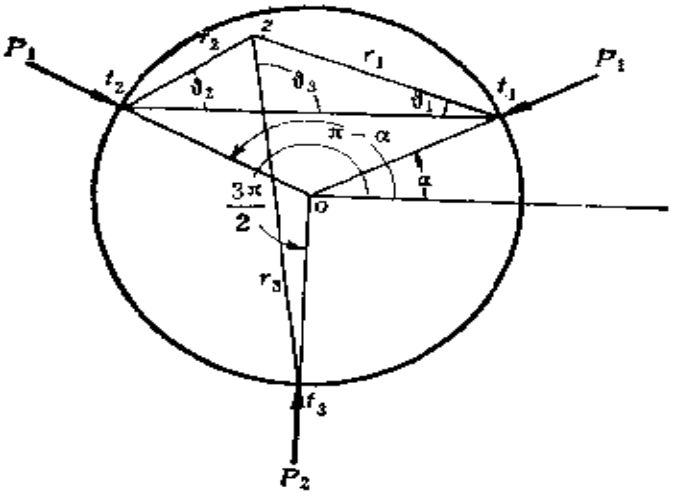


图 3-8

$$\psi(z)=\frac{P_1}{2\pi}\left[-e^{i\alpha}\ln(t_1-z)+e^{i\alpha}\ln(t_2-z)+\frac{\bar{t}_1}{t_1-z}e^{i\alpha}-\frac{\bar{t}_2}{t_2-z}e^{-i\alpha}\right]+i\frac{P_2}{2\pi}\left[-\ln(t_3-z)-\frac{\bar{t}_3}{t_3-z}\right]$$

这里取

$$t_1=e^{i\alpha},\quad t_2=-e^{-i\alpha},\quad t_3=e^{i3\pi/2}=-i$$

$$t_1-z=r_1e^{-i\vartheta_1},\quad t_2-z=-r_2e^{i\vartheta_2},\quad t_3-z=-r_3e^{i\vartheta_3}$$

又知道

$$z\overline{\varphi'(z)}=\frac{P_1}{2\pi}z\left[-\frac{e^{i\alpha}}{t_1-z}+\frac{e^{-i\alpha}}{t_2-z}-\frac{1}{2}(\bar{t}_1e^{i\alpha}-\bar{t}_2e^{-i\alpha})\right]+i\frac{P_2}{2\pi}z\left[-\frac{\bar{t}_3}{2}-\frac{1}{t_3-z}\right]$$

$$\overline{\psi(z)}=-\frac{P_1}{2\pi}\left[-e^{i\alpha}\ln(\bar{t}_1-\bar{z})+e^{-i\alpha}\ln(\bar{t}_2-\bar{z})+\frac{t_1}{\bar{t}_1-\bar{z}}e^{-i\alpha}-\frac{t_2}{\bar{t}_2-\bar{z}}e^{i\alpha}\right]+\frac{P_2}{2\pi}i\left[\ln(\bar{t}_3-\bar{z})+\frac{t_3}{\bar{t}_3-\bar{z}}\right]$$

$$\nu^*\varphi(z)=\frac{\nu^*P_1}{2\pi}\left[e^{i\alpha}\ln(t_1-z)-e^{-i\alpha}\ln(t_2-z)-\frac{z}{2}(\bar{t}_1e^{i\alpha}-\bar{t}_2e^{-i\alpha})\right]+\frac{iP_2\nu^*}{2\pi}\left[\ln(t_3-z)+\frac{z}{2}\bar{t}_3\right]$$

把它们代入$2\mu(u+iv)=\nu^*\varphi(z)-z\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi}(z)$中后，分解出实部及虚部。

$$2\mu u=\frac{P_1}{2\pi}\cdot\mathrm{Re}\left\{(1+\nu^*)(e^{i\alpha}\ln r_1e^{-i\vartheta_1}+e^{-i\alpha}\ln r_2e^{i\vartheta_2})\right.$$

$$-(\nu^*-1)(e^{i\alpha}-r_1e^{-i\vartheta_1})-\frac{1}{r_1e^{i\vartheta_1}}+\frac{e^{2i\alpha}-r_1e^{i(\alpha-\vartheta_1)}}{r_1e^{-i\vartheta_1}}$$

$$\left.+\frac{1}{r_2}e^{i\vartheta_2}+\frac{1-r_1e^{-i(\alpha+\vartheta_1)}}{r_2e^{i\vartheta_2}}\right\}+\frac{P_2}{2\pi}\cdot\mathrm{Re}\left\{-i\nu^*\ln r_3e^{i\vartheta_3}\right.$$

$$\left.+i\ln r_3e^{-i\vartheta_3}+\frac{1}{r_3}e^{i\vartheta_3}-\frac{1+ir_3e^{i\vartheta_3}}{r_3e^{i\vartheta_3}}\right\}$$

展开并整理后得到

$$u=\frac{1}{4\mu\pi}\left\{(1+\nu^*)(\ln r_1\cos\alpha+\vartheta_1\sin\alpha)-(\nu^*-1)(\cos\alpha\right.$$

$$-r_1\cos\vartheta_1)-\frac{\cos\vartheta_1}{r_1}+\frac{1}{r_1}\cos(2\alpha+\vartheta_1)-\cos\alpha$$

$$\left.+\frac{2}{r_2}\cos\vartheta_2-\frac{r_1}{r_2}\cos(\alpha+\vartheta_1+\vartheta_2)\right\}+\frac{P_2}{4\mu\pi}\{(1+\nu^*)\vartheta_3\}$$

$$v=\frac{1}{4\mu\pi}\left\{(1+\nu^*)(\ln r_1\sin\alpha-\vartheta_1\cos\alpha)-(\nu^*-1)(\sin\alpha\right.$$

$$+r_1\sin\vartheta_1)+\frac{1}{r_1}\sin\vartheta_1+\frac{1}{r_1}\sin(2\alpha+\vartheta_1)-\sin\alpha$$

$$\left.+\frac{r_1}{r_2}\sin(\alpha+\vartheta_1+\vartheta_2)\right\}$$

$$+\frac{P_2}{4\mu\pi}\left\{-\nu^*\ln r_3+\ln r_3-1+\frac{2}{r_3}\sin\vartheta_3\right\}$$

〔例题 4〕 受力情况如图3-9所示，求位移函数。

我们知道

$$f(s)=i\int_{C_0}[X(s)+iY(s)]ds$$

$$X(s)=-p\cos\alpha_1,\quad Y(s)=-p\sin\alpha_1$$

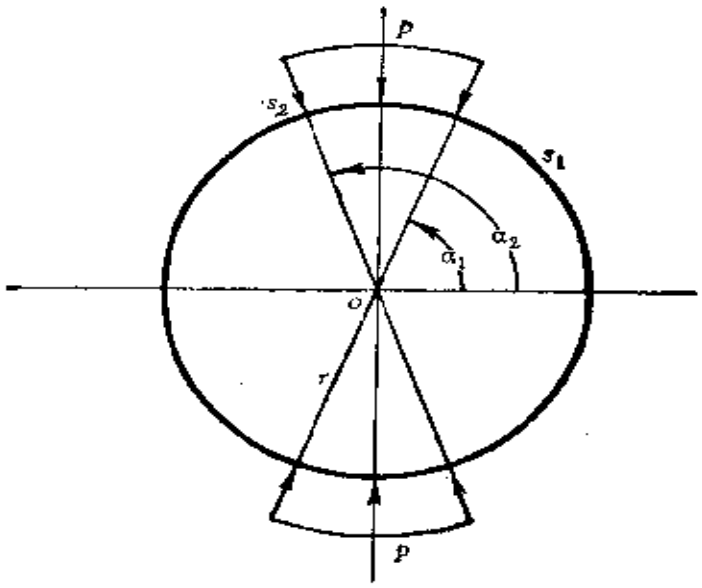


图 3-9

于是

$$f(s)=-rp(e^{i\alpha_2}-e^{i\alpha_1})$$

在计算时，我们取

$$f(s)=-pt=-rpe^{is/r}$$

把 $f(s)$ 代入求 $\Phi(z)$ 及 $\psi(z)$ 的式子，得到

$$\begin{aligned}\Phi(z)=&-\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{re^{-is_1/r}}^{re^{is_1/r}}\frac{f(t)}{t-z}dt+\int_{re^{is_2/r}}^{re^{is_2/r}}\frac{f(t)}{t-z}dt\right.\\&\left.+\int_{re^{is_2/r}}^{re^{i(\pi+s_1/r)}}\frac{f(t)}{t-z}dt+\int_{re^{i(\pi-s_2/r)}}^{re^{i(\pi+s_1/r)}}\frac{f(t)}{t-z}dt\right\}\\&-\frac{z}{4\pi i}\left\{\int_{re^{-is_1/r}}^{re^{is_1/r}}\frac{f(t)dt}{t^2}+\int_{re^{is_2/r}}^{re^{is_2/r}}\frac{f(t)dt}{t^2}\right.\\&\left.+\int_{re^{is_2/r}}^{re^{i(\pi+s_1/r)}}\frac{f(t)}{t^2}dt+\int_{re^{i(\pi+s_2/r)}}^{re^{i(\pi+s_1/r)}}\frac{f(t)}{t^2}dt\right\}\end{aligned}$$

在区间$(re^{-is_1/r},\ re^{is_1/r})$，$f(t)=0$

在区间$(re^{is_1/r},\ re^{is_2/r})$，$f(t)=-pt$

在区间$(re^{is_2/r},\ re^{i(\pi+s_1/r)})$，$f(t)=-pt$

在区间$(re^{i(\pi+s_1/r)},\ re^{i(\pi+s_2/r)})$，$f(t)=-pt$

把它们代入上述方程后，得到

$$\varphi(z)=\frac{p}{2\pi i}\left[2r(e^{i\alpha_1}-e^{i\alpha_2})+z\left(\ln\frac{re^{i\alpha_1}-z}{re^{i\alpha_2}-z}\right.\right.$$

$$\left.+\ln\frac{re^{i\alpha_2}+z}{re^{i\alpha_1}+z}\right)+\ln\frac{z-re^{i\alpha_2}}{re^{i\alpha_1}+z}$$

$$\left.+\frac{z}{2}\left(-\frac{1}{re^{i\alpha_2}}+\frac{1}{re^{i\alpha_1}}\right)\right]$$

$$\varphi'(z)=\frac{p}{2\pi i}\left[\ln\frac{re^{i\alpha_1}-z}{re^{i\alpha_2}-z}+\ln\frac{re^{i\alpha_2}+z}{re^{i\alpha_1}+z}+z\left(-\frac{1}{re^{i\alpha_1}-z}\right.\right.$$

$$+\frac{1}{re^{i\alpha_2}-z}-\frac{1}{re^{i\alpha_1}+z}+\frac{1}{re^{i\alpha_2}+z}\Big)+\frac{1}{z-re^{i\alpha_2}}$$

$$\left.-\frac{1}{re^{i\alpha_1}+z}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{re^{i\alpha_2}}+\frac{1}{re^{i\alpha_1}}\right)\right]$$

$$\alpha_2=-\frac{1}{4\pi i}\int_{C_0}\frac{f(t)}{t^2}dt=\frac{p}{4\pi i}\left[\frac{1}{re^{i\alpha_2}}+\frac{1}{re^{i\alpha_1}}\right]$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\overline{f(t)}}{t-z}dt=\frac{p}{2\pi i}\left[\frac{1}{z}\left(\ln\frac{t_1^2}{t_1^2-z^2}\right.\right.$$

$$\left.-\ln\frac{t_2^2}{t_2^2-z^2}\right)+\ln\frac{z-t_2}{z+t_1}\Big]$$

于是把它们代入 $\psi(z)$ 后，得到

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\overline{f}(t)}{t-z}dt-\frac{\varphi'(z)}{z}-\frac{\alpha_2}{z}$$

$$=\frac{p}{2\pi i}\left[\frac{1}{z}\left(\ln\frac{t_1^2}{t_1^2-z^2}-\ln\frac{t_2^2}{t_2^2-z^2}\right)+\ln\frac{z-t_2}{z+t_1}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{z}\ln\frac{t_1-z}{t_2-z}\cdot\frac{t_2+z}{t_1+z}+\left(\frac{2t_2}{t_2^2-z^2}-\frac{2t_1}{t_1^2-z^2}\right)\right.$$

$$+\frac{1}{t_2(z-t_2)}+\frac{1}{t_1(t_1+z)}\Big]$$

把$\varphi(z)$，$\varphi'(z)$，$\psi(z)$代入$2\mu(u+iv)$即可求u和v。

〔例题5〕 受力情况如图3-10所示，求应力函数。

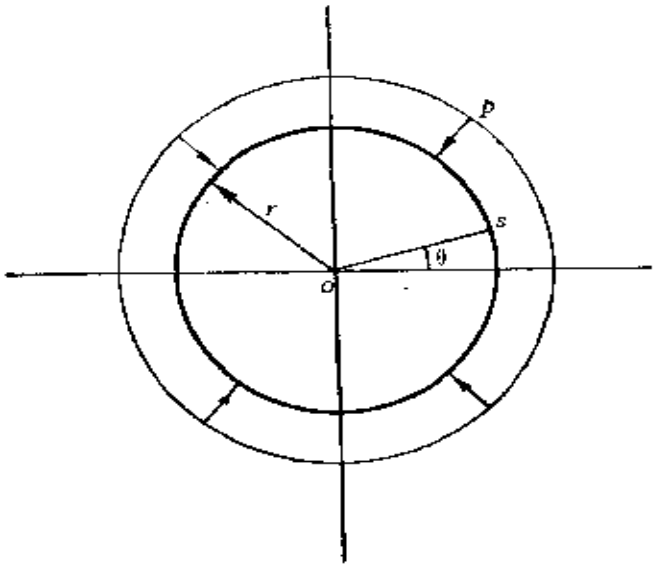


图 3-10

我们已知$f(s)=-pt$。 $t=re^{i\frac{s}{r}}$

于是

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{f(t)dt}{t-z}-\frac{z}{4\pi i}\int_{C_0}\frac{f(t)dt}{t^2}+\alpha_1$$

$$=-\frac{p}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{tdt}{t-z}+\frac{zp}{4\pi i}\int_{C_0}\frac{dt}{t}+\alpha_1$$

$$=-\frac{p}{2}z+\alpha_1$$

略去α_1，则$\varphi(z)=-pz/2$

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\overline{f(t)}dt}{t-z}-\frac{r^2}{z}[\varphi'(z)+\alpha_2]$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\overline{f(t)}dt}{t-z}=-\frac{p}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\bar{t}dt}{t-z}=0$$

$$\alpha_2=-\frac{1}{4\pi i}\int_{C_0}\frac{f(t)dt}{t^2}=\frac{p}{2}$$

所以把它们代入$\psi(z)$后，得到

$$\psi(z)=0$$

代入$2\mu(u+iv)=\nu^*\varphi(z)-z\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)}$

得到

$$u=(1-\nu^*)px/4\mu$$

$$v=(1-\nu^*)py/4\mu$$

3-4 圆域中弹性力学第二个基本问题的解

我们知道 $2\mu(u+iv)=\nu^*\varphi(z)-z\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)}$，令$G(z)=2\mu(u-iv)$，则$G(z)=\nu^*\varphi(z)-z\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)}$。在圆的边界上$G(z)=G(t)$。$G(t)$在边界上是单值连续的，$\varphi(t)$，$\psi(t)$是$|z|\leqslant a$内解析函数$\varphi(z)$，$\psi(z)$在边界上的值。$a$是圆域的半径。

我们知道

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\overline{\omega(t)}}{t-z}dt=\overline{\omega(0)}\qquad z\in s^+$$

若$\omega(0)=0$，于是

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{G(t)-\nu^*\varphi(t)+t\,\overline{\varphi'(t)}}{t-z}dt=0\qquad z\in s^+$$

因为

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\varphi(t)dt}{t-z}=\varphi(z)\qquad z\in s^+$$

在s^+内，$\varphi(z)$是解析的，可以展为级数。

$$\varphi(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots$$

$$\varphi'(z)=a_1+2a_2z+3a_3z^2+\cdots$$

$$t\,\overline{\varphi'(t)}=\bar{a}_1t+2\bar{a}_2a^2+3\bar{a}_3a^2\bar{t}+\cdots$$

这里$a^2=t\cdot\bar{t}$。

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{t\overline{\varphi'(t)}}{t-z}dt=\bar{a}_1 z+2\bar{a}_2 a^2$$

于是

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi\nu^* i}\int_{C_0}\frac{G(t)dt}{t-z}+(\bar{a}_1 z+2\bar{a}_2 a^2)\nu^{*-1} \qquad (3-4-1)$$

$$\nu^*\varphi(z)-\bar{a}_1 z-2\bar{a}_2 a^2=\nu^* a_0-2\bar{a}_2 a^2 +(\nu^* a_1-\bar{a}_1)z+\nu^* a_2 z^2+\cdots \qquad (3-4-2)$$

令

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{G(t)dt}{t-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{G(t)}{t}\left(1+\frac{z}{t}+\frac{z^2}{t^2}+\cdots\right)dt \qquad (3-4-3)$$

取式（3-4-3）和式（3-4-2）的右侧的 z 的同次幂系数相等，得到

$$\nu^* a_0-2\bar{a}_2 a^2=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{G(t)}{t}dt$$

$$\nu^* a_1-\bar{a}_1=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{G(t)}{t^2}dt$$

$$\nu^* a_2=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{G(t)}{t^3}dt$$

由此可以求到 a_0，a_1，a_2 之值。

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\psi(t)dt}{t-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\nu^*\overline{\varphi(t)}-\bar{t}\varphi'(t)-\overline{G(t)}}{t-z}dt \qquad (z\in s^+)$$

这里

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\nu^*\overline{\varphi(t)}}{t-z}dt=\nu^*\varphi(\overline{0})=\nu^*\bar{a}_0 \qquad (3-4-4)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\bar{t}\varphi'(t)}{t-z}dt=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{a^2\varphi'(t)}{t(t-z)}dt \qquad (3-4-5)$$

$$\frac{\varphi'(t)}{t}=\frac{a_1}{t}+2a_2+3a_3t+\cdots \qquad (3-4-6)$$

把式（3-4-6）代入式（3-4-5）后，得到

$$\psi(z)=\nu^*\bar{a}_0-\frac{a^2}{z}[\varphi'(z)-\varphi'(0)]-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\overline{G(t)}dt}{t-z} \qquad (3-4-7)$$

〔例题 6〕 如图3-11所示，已知在 θ_1 与 θ_2 之间在圆弧周边有变形 δ，求应力函数。

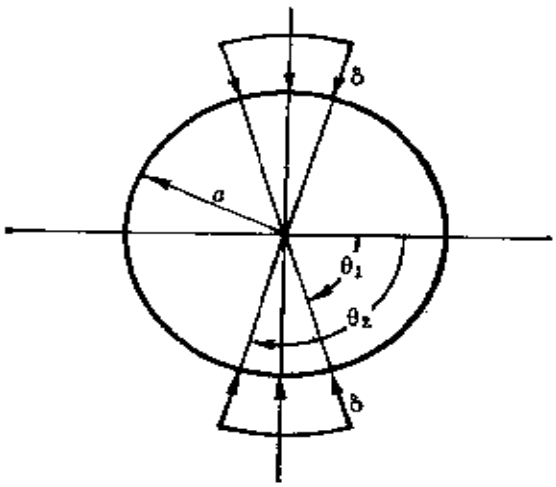


图 3-11

在上半圆域中有：

$$-\delta(t)=u+iv=-\delta e^{i\frac{s}{a}} \qquad \theta_1\leqslant s/a\leqslant\theta_2$$

$$-\delta(t)=0 \qquad \theta_1>s/a;\ \theta_2<s/a$$

下半圆域与上半圆域对称，所以

$$-2\mu\delta e^{i\frac{s}{a}}=G(t),\quad t=ae^{i\frac{s}{a}}$$

$$G(t)=-2\mu i\delta/a;\quad \overline{G(t)}=-2\mu\bar{i}\delta/a$$

取

$$\nu^*\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{G(t)dt}{t-z}+\bar{a}_1z \qquad (3-4-8)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{G(t)dt}{t-z}=-\frac{\mu\delta}{a\pi i}\left\{\int_{ae^{i\theta_1}}^{ae^{i\theta_2}}\frac{tdt}{t-z}-\int_{ae^{i(\pi+\theta_1)}}^{ae^{i(\pi+\theta_2)}}\frac{tdt}{t-z}\right\}$$

$$=-\frac{\mu\delta}{a\pi i}\left\{\left[t+z\ln(t-z)\right]_{ae^{i\theta_1}}^{ae^{i\theta_2}}\right.$$

$$\left.+\left[t+z\ln(t-z)\right]_{ae^{i(\pi+\theta_1)}}^{ae^{i(\pi+\theta_2)}}\right\}$$

$$=-\frac{\mu\delta z}{a\pi i}\left[\ln\frac{a^2e^{2i\theta_2}-z^2}{a^2e^{2i\theta_1}-z^2}\right] \tag{3-4-9}$$

$$\nu^*a_1-\bar{a}_1=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{G(t)dt}{t^2}=\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{C_0}-2\mu\frac{\delta}{a}\cdot\frac{dt}{t}\right]$$

$$=-\frac{2\mu\delta}{\pi a}(\theta_2-\theta_1)$$

由于 $a_1=\bar{a}_1$，于是

$$a_1=-\frac{2\mu\delta(\theta_2-\theta_1)}{\pi a(\nu^*-1)} \tag{3-4-10}$$

把式（3-4-10）和式（3-4-9）代入式（3-4-8）得到

$$\nu^*\varphi(z)=-\frac{\mu\delta z}{a\pi i}\ln\frac{a^2e^{2i\theta_2}-z^2}{a^2e^{2i\theta_1}-z^2}-\frac{2\mu\delta z(\theta_2-\theta_1)}{(\nu^*-1)\pi a} \tag{3-4-11}$$

又

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\overline{G(t)}dt}{t-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}-2\mu\frac{\delta}{a}\bar{t}\,\frac{dt}{t-z}$$

$$=\frac{-\mu\delta}{a\pi i}\left[\int_{C_0}\frac{a^2dt}{t(t-z)}\right]$$

$$=\frac{-a\mu}{\pi iz}\delta\left[\int_{C_0}\left(\frac{1}{t-z}-\frac{1}{t}\right)dt\right]$$

$$=-\frac{\mu\delta a}{\pi iz}\left\{\left[\ln(t-z)-\ln t\right]_{ae^{i\theta_1}}^{ae^{i\theta_2}}\right.$$

$$\left.+\left[\ln(t-z)-\ln t\right]_{ae^{i(\pi+\theta_1)}}^{ae^{i(\pi+\theta_2)}}\right\}$$

$$=-\frac{\mu\delta a}{\pi iz}\left[\ln\frac{a^2e^{2i\theta_2}-z^2}{a^2e^{2i\theta_1}-z^2}-2i(\theta_2-\theta_1)\right]$$

$$\nu^* a_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{G(t)dt}{t^3} = -\frac{\mu\delta}{\pi i a}\int\frac{dt}{t^2} = 0$$

$$\nu^* a_c = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} 2\mu\frac{\delta}{a}dt = 0$$

所以

$$\psi(z) = \frac{\mu\delta\alpha}{\pi i z}\left[\ln\frac{a^2e^{2i\theta_2}-z^2}{a^2e^{2i\theta_1}-z^2} - 2i(\theta_2-\theta_1)\right]$$

$$-\frac{a^2}{z}\left[\varphi'(z)-\varphi'(0)\right]$$

3-5 半无限平面弹性力学第一个及第二个基本问题的解

在半无限平面情况下，边界曲线 C_0 是一直线（图 3-12）。$\vartheta(t_0,\ t)$ 是一常量。于是得出

$$\omega(t_0) = f(t_0)$$

t_0 是边界上的点。我们研究下半平面，取 x 轴为其边界。

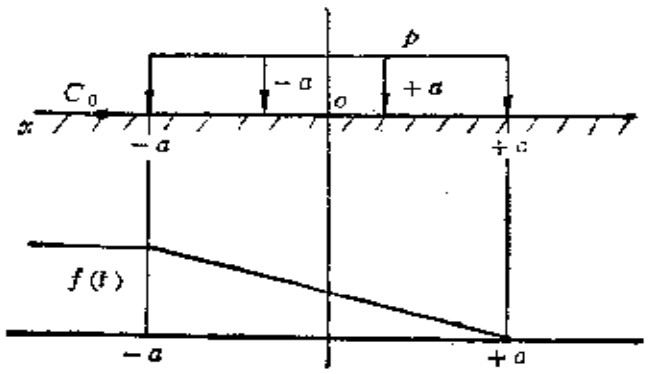


图 3-12

我们取原点（零点）为负荷的中点，以便于计算。

由谢尔曼方程得出

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{f(t)dt}{t-z};\qquad \varphi'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{f(t)dt}{(t-z)^2}$$

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\overline{f(t)}dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\bar{t}f(t)dt}{(t-z)^2}$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{f(t)d\bar{t}}{t-z}$$

$$\psi'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\overline{f(t)}dt}{(t-z)^2}-\frac{1}{\pi i}\int_{C_0}\frac{\bar{t}f(t)dt}{(t-z)^3}$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{f(t)d\bar{t}}{(t-z)^2}$$

$$\int_{C_0}\frac{f(t)dt}{(t-z)^2}=\int_{C_0}\frac{f'(t)dt}{t-z}-\frac{f(t)}{t-z}\Big|_{-\infty}^{\infty}-\int_{C_0}\frac{f'(t)dt}{t-z}$$

于是

$$\varphi'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{f'(t)dt}{t-z}=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f'(t)dt}{t-z}$$

$$\psi'(z)=-\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{\overline{f(t)}}{t-z}\right]_{-\infty}^{+\infty}-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\overline{f'(t)}}{t-z}dt$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{f(t)dt}{(t-z)^2}-\frac{1}{\pi i}\int_{C_0}\frac{tf(t)dt}{(t-z)^3}$$

$$=+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\overline{f'(t)}}{t-z}dt-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{f'(t)dt}{t-z}$$

$$-\frac{z}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{f'(t)}{(t-z)^2}dt$$

$$\psi'(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\overline{f'(t)}}{t-z}dt+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{tf'(t)dt}{(t-z)^2}$$

由图3-12可知

$$f'(t)=\frac{d}{dt}f(t)=\frac{d}{dt}\left\{i\int_{C_0}[X_n(t)+iY_n(t)]dt\right\}$$

因为 $X_n=0$，所以$f'(t)=-p$，于是把$f'(t)$代入φ'和ψ'中后，得到

$$\varphi'(z)=\frac{p}{2\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{dt}{t-z}=\frac{p}{2\pi i}\ln\frac{z-a}{z+a}$$

$$\psi'(z)=\frac{p}{2\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{dt}{t-z}-\frac{p}{2\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{tdt}{(t-z)^2}$$

$$=-\frac{zp}{2\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{dt}{(t-z)^2}=-\frac{zap}{\pi i(z^2-a^2)}$$

我们知道当 $a \to 0$，$2ap = P$，故

$$\varphi'(z) = \left(\frac{P}{2a}\right)\frac{1}{2\pi i}\ln\left[1 - \frac{2a}{z+a}\right]$$

$$= \left(\frac{P}{2a}\right)\frac{1}{2\pi i}\left[-\frac{2a}{z+a} + \frac{2a^2}{(z+a)^2}\cdots\right]$$

$$\lim_{a\to 0}\varphi'(z) = -\frac{P}{2\pi i z}$$

$$\lim_{a\to 0}\psi'(z) = -\frac{P}{2\pi i z}$$

若原点不是集中力作用点，而设集中力作用点为 z_0，则

$$\varphi'(z) = -\frac{P}{2\pi i(z-z_0)}, \qquad \psi'(z) = -\frac{P}{2\pi i(z-z_0)}$$

由 $\varphi'(z)$ 和 $\psi'(z)$ 求 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$，带来积分常数问题。我们知道当 $|z| \to \infty$ 时，$\varphi(z) \to 0$，$\psi(z) \to 0$，而且对于半无限平面问题，解的形式为：

$$\varphi(z) = \gamma\ln(z-z_0) + 0(1) + 常数$$

$$\psi(z) = \gamma'\ln(z-z_0) + 0(1) + 常数$$

式中

$$\gamma = -\frac{X+iY}{2\pi}, \qquad \gamma' = \frac{X-iY}{2\pi}$$

对于如图3-12所示的均布负荷

$$\int (X_n + iY_n)dt = \int_{-a}^{a} -ipdt = -2api$$

于是

$$\gamma = i\frac{pa}{\pi}, \qquad \gamma' = i\frac{pa}{\pi}$$

我们知道

$$\varphi(t) + t\,\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = f(t)$$

$$\varphi(z) = \gamma\ln(z-z_0) + \varphi_0(z)$$

$$\psi(z) = \gamma'\ln(z-z_0) + \psi_0(z)$$

所以

$$\varphi_0(t)+t\overline{\varphi_0'(t)}+\overline{\psi_0(t)}=f(t)-\gamma\ln(t-z_0)$$

$$-\bar{\gamma}'\ln(\overline{t-z_0})-t\frac{\bar{\gamma}}{\overline{t-z_0}}=f(t)$$

$$-\gamma\left[\ln\frac{t-z_0}{t-z_0}-\frac{t}{\overline{t-z_0}}\right]=h(t)$$

当$|t|\to\infty$，$h(t)\to 0$，t是边界上一点。而$t=\bar{t}$。

$$\lim_{t\to\infty}\ln\frac{t-z_0}{t-z_0}=0,\quad \lim_{t\to-\infty}\ln\frac{t-z_0}{t-z_0}=-2\pi i$$

这里z_0是半无限平面之外的点，也就是在上半平面中。

$$t>+a,\quad f(t)=-\gamma=-i\frac{pa}{\pi}$$

$$t<-a\text{时},\quad f(t)=-(2\pi i+1)\gamma=2pa-i\frac{pa}{\pi}$$

$$-a<t<a\text{时},\quad f(t)=-(t-a)p-i\frac{pa}{\pi}$$

若负荷向原点集中，以$2pa=P$代入γ和γ'后

$$\gamma=-\frac{P}{2\pi i}=\gamma'$$

若受力情况如图3-13所示，则

$$\varphi'(z)=-\frac{P}{2\pi i(z-b)};\qquad \psi'(z)=-\frac{P}{2\pi i(z-b)}$$

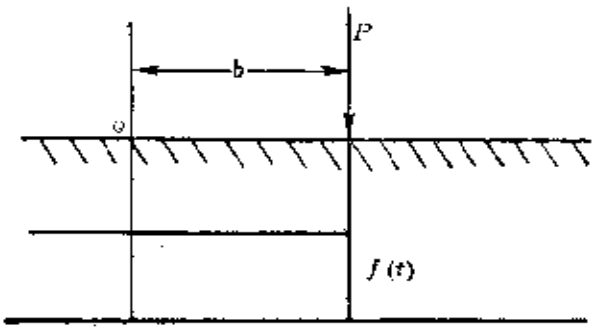


图 3-13

而且当 $t > +a \to a = 0$ 时，

$$f(t) = P/2\pi i$$

当 $t < -a \to a = 0$ 时，

$$f(t) = P + P/2\pi i$$

对集中负荷而言，$z > b$ 时，

$$F(t) = f(t) = P/2\pi i$$

$z < b$ 时，

$$F(t) = f(t) = P + P/2\pi i$$

这里$2a$是均布负荷的作用范围。

$$F(z) = -\frac{P}{2\pi i}\ln(z-b) + \frac{P}{2\pi i}\frac{z}{z-b}$$

$$+\frac{P}{2\pi i}\ln(\overline{z-b}) + A^*\frac{P}{2\pi i}$$

A^*是 z 的函数，$|z| \to \infty$时，$A^* \to 0$。当 $b \to 0$ 时，$A^* \to 0$。

当 $z > b$ 时，$|z| \to \infty$，$\ln[(\overline{z-b})/(z-b)] \to 0$，

$$\left[\ln\frac{\overline{z-b}}{z-b} + \frac{z}{\overline{z-b}} + A^*\right] = 1$$

所以得到

$$A^* = 1 - \frac{z}{\overline{z-b}} = \frac{-b}{\overline{z-b}} = \frac{-b}{z-b}$$

把A^*代入 $\psi(z)$是合适的，因为代入$\Phi(z)$后，$\Phi'(z)$包含$(z-b)^{-2}$项。于是

$$\Phi(z) = -\frac{P}{2\pi i}\ln(z-b)$$

$$\psi(z) = \frac{-P}{2\pi i}\left[\ln(z-b) + \frac{b}{z-b}\right]$$

当 $b \to 0$ 时，

$$\Phi(z) = -\frac{P}{2\pi i}\ln z; \quad \psi(z) = -\frac{P}{2\pi i}\ln z$$

注意当 $z<b$ 时，$\ln[(\overline{z-b})/(z-b)]=2\pi i$，结果不变。为了以简单关系把 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 相连，令

$$\varphi(z)=-\frac{P}{2\pi i}\ln\frac{b-z}{b}$$

$$\psi(z)=-\frac{P}{2\pi i}\ln\frac{b-z}{b}-\frac{P}{2\pi i}\frac{b}{b-\bar{z}}+\frac{P}{2\pi i}$$

因为在 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 中添加常数，对结果无影响。于是可得

$$\psi(z)=-z\varphi'(z)+\varphi(z)$$

可以利用迭加原理，求到相距原点不同距离处有集中力作用的情况。对有均布负荷作用的情况，也一样处理。

图3-14所示为半平面受集中负荷的情况。

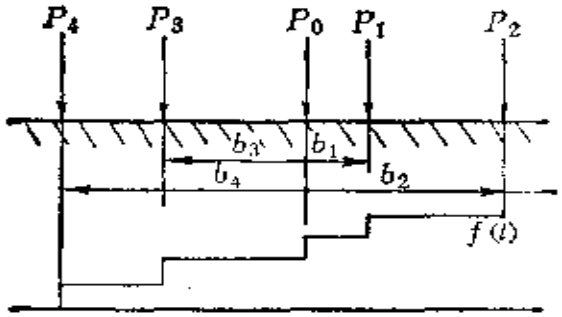


图 3-14

$$\varphi(z)=\frac{-1}{2\pi i}\left[P_0\ln z+P_1\ln\frac{b_1-z}{b_1}+P_2\ln\frac{b_2-z}{b_2}\right.$$
$$\left.+P_3\ln\frac{b_3+z}{b_3}+P_4\ln\frac{b_4+z}{b_4}\right]$$

$$\psi(z)=-z\varphi'(z)+\varphi(z)$$

图3-15所示为半平面受分段均布负荷情况。

由

$$\varphi'(z)=\frac{-1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f'(t)}{t-z}dt$$

$$\psi'(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\overline{f'(t)}dt}{t-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t\,f'(t)dt}{(t-z)^2}$$

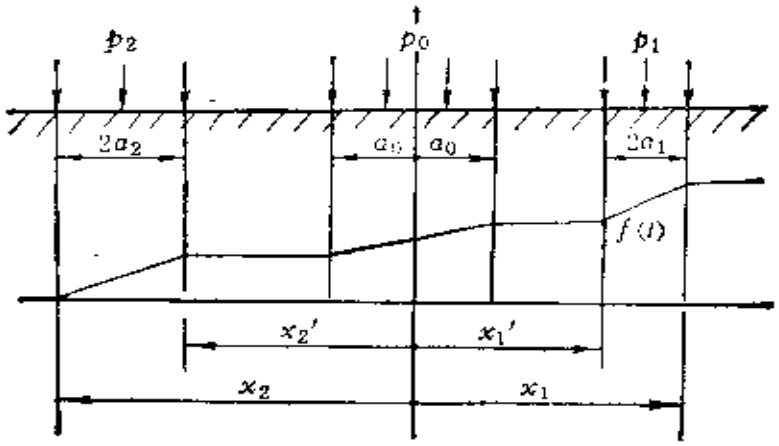


图 3-15

$$f(t)=-i\int_{-\infty}^{\infty}[X_n+iY_n]dt=i\int_{-\infty}^{\infty}ipdt$$

$$f'(t)=-p$$

于是将$f'(t)$代入$\varphi'(z)$式后，得到

$$\varphi'(z)=\frac{p}{2\pi i}\left[\ln\frac{z-x_2'}{z+x_2}+\ln\frac{z-a_0}{z+a_0}+\ln\frac{z-x_1}{z-x_1'}\right]$$

$$\psi'(z)=\frac{zp}{2\pi i}\left[\frac{1}{x_2+z}-\frac{1}{x_2'+z}+\frac{1}{a_0-z}+\frac{1}{a_0+z}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{x_1-z}-\frac{1}{x_1'-z}\right]$$

由$\varphi(z)$，$\varphi'(z)$，$\psi'(z)$可求应力分量或位移分量。

如果在边界上，已知 $G(z)=\nu^*\varphi(z)-z\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)}$，可以求解弹性力学第二个基本问题。我们知道

$$\frac{\partial z}{\partial x}=1,\quad f'(t)=\frac{\partial}{\partial x}f(t)$$

那么可知

$$G'(t)=\partial\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$G'(z)=\nu^*\varphi'(z)-\overline{\varphi'(z)}-z\overline{\varphi''(z)}-\overline{\psi'(z)}$$

那么

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{dt}{t-z}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} [\nu^*\varphi' - \bar{\varphi}' - 2\bar{\varphi}'' - \bar{\psi}'] \frac{dt}{t-z}$$

在边界上，$t=\bar{t}$，$\overline{\psi'(z)}$，$\overline{\varphi'(z)}$，$z\overline{\varphi''(z)}$ 都是在上半平面解析且一直连续到边界上的函数，那么就有下面结果：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{\psi}'(\bar{t})dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\varphi}'(t)dt}{t-z}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t\varphi''(t)dt}{t-z} = 0$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi'(t)dt}{t-z} = -\varphi'(z)$$

这里 z 表示下半平面中任一内点。

于是

$$\nu^*\varphi'(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} 2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{dt}{t-z}$$

又取 $2\mu(\partial u/\partial x + i\partial v/\partial x)$ 的共轭方程如下：

$$2\mu(\partial u/\partial x - i\,\partial v/\partial x) = \nu^*\bar{\varphi}' - \varphi' - \bar{z}\varphi'' - \psi'$$

$$-\psi'(t) = 2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial x}\right) - \nu^*\bar{\varphi}' + \varphi' + \bar{t}\varphi''$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi'(t)dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \left[2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial x}\right) - \nu^*\bar{\varphi}' + \varphi' + \bar{t}\varphi''\right]\frac{dt}{t-z}$$

$$\psi'(z) = \frac{2\mu}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi'(t)dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t\varphi''(t)dt}{t-z}$$

$$= \frac{2\mu}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{dt}{t-z} + \frac{2\mu}{2\pi\nu^* i}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{dt}{t-z} - z\varphi''(z)$$

$$= \frac{\mu}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\nu^*}\right)\frac{\partial\mu}{\partial x} - i\left(1-\frac{1}{\nu^*}\right)\frac{\partial v}{\partial x}\right]\frac{dt}{t-z}$$

$$+\frac{\mu z}{\pi i\nu^*}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{dt}{(t-z)^2}$$

所以

$$\psi'(z) = \frac{\mu}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{dt}{t-z}$$

$$+\frac{\mu}{\pi\nu^* i}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{tdt}{(t-z)^2}$$

这里 $\partial u/\partial x$ 和 $\partial v/\partial x$ 都是 t 的函数。

3-6 带状无限板

若带状板的长度较宽度大得多，在处理问题时，可以认为它是“无限”长的。当它受到局部负荷时，不考虑负荷对远处的影响。

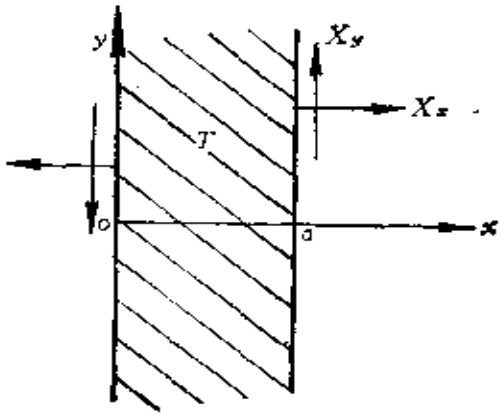


图 3-16

现在讨论图 3-16 所示的情况。带状板的一直线边为 y 轴（$x=0$），另一个直线边为直线 $x=a$（a 表示板宽）。取应力函数如下：

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-zt}A(t)dt$$

$$\psi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} -te^{-zt}B(t)dt$$

它们在带状区域内是单值解析的，它们随距负荷处，距离的增加迅速衰减到很小的值，以致在很远的地方可以不计。$A(t)$ 和 $B(t)$ 是复数值。

已知

$$X_x+Y_y = 4\mathrm{Re}[\varphi'(z)]$$

$$Y_y-X_x+2iX_y = 2[\bar{z}\varphi''(z)+\psi'(z)]$$

于是

$$X_x-iX_y=\varphi'(z)+\overline{\varphi'(z)}-[\bar{z}\varphi''(z)+\psi'(z)]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\bar{z}t}[-tA(t)-\bar{z}t^2A(t)-t^2B(t)]dt$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\bar{z}t}[-t\,\overline{A(t)}]dt$$

在直线 $x=0$ 的边界上，

$$[X_x-iX_y]_{x=0}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-iyt}[-tA(t)+iyt^2A(t)-t^2B(t)]dt$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}e^{iyt}[-t\,\overline{A(t)}]dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-iyt}\left[-tA(t)+\frac{d}{dt}t^2A(t)-t^2B(t)\right]dt$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}e^{iyt}[-t\,\overline{A(t)}]dt$$

$$=\int_{0}^{\infty}e^{-iyt}\left[-tA(t)+\frac{d}{dt}t^2A(t)-t^2B(t)\right]dt$$

$$-\int_{0}^{\infty}e^{iyt}\left[tA(-t)-\frac{d}{dt}t^2A(-t)-t^2B(-t)\right]dt$$

$$+\int_{0}^{\infty}e^{iyt}[-t\overline{A(t)}]dt+\int_{0}^{\infty}e^{-iyt}[t\overline{A(-t)}]dt$$

$$=\int_{0}^{\infty}e^{-iyt}\left[-tA(t)+\frac{d}{dt}t^2A(t)\right.$$

$$\left.-t^2B(t)+t\,\overline{A(-t)}\right]dt$$

$$-\int_{0}^{\infty}e^{iyt}\left[tA(-t)-\frac{d}{dt}t^2A(-t)\right.$$

$$\left.-t^2B(-t)-t\,\overline{A(t)}\right]dt$$

令

$$\frac{1}{2}[\overline{a(t)}-i\,\overline{b(t)}]=t\frac{d}{dt}[tA(-t)]$$

$$+t^2B(-t)-t\,\overline{A(t)}$$

$$\frac{1}{2}[\overline{a(t)}+i\,\overline{b(t)}]=t\frac{d}{dt}[tA(t)]$$

$$-t^2B(t)+t\,\overline{A(-t)}$$

则

$$[X_x-iX_y]_{x=0}=\int_0^\infty\left\{\frac{\overline{a(t)}-i\,\overline{b(t)}}{2}e^{iyt}\right.$$

$$\left.+\frac{\overline{a(t)}+i\,\overline{b(t)}}{2}e^{-iyt}\right\}dt$$

所以

$$[X_x-iX_y]_{x=0}=\int_0^\infty\{\overline{a(t)}\cos yt+\overline{b(t)}\sin yt\}dt$$

在直线 $x=a$ 的边界上

$$[X_x-iX_y]_{x=a}=\int_{-\infty}^\infty e^{-(a+iy)t}[-tA(t)-(a-iy)t^2A(t)$$

$$-t^2B(t)]dt+\int_{-\infty}^\infty e^{-(a-iy)t}[-t\,\overline{A(t)}]dt$$

同样可以得到

$$[X_x-iX_y]_{x=a}=\int_0^\infty\{\overline{c(t)}\cos yt+\overline{d(t)}\sin yt\}dt$$

这里

$$\frac{\overline{c(t)}}{2}-i\overline{d(t)}=e^{at}\left[-2at^2A(t)-t\frac{d}{dt}tA(-t)\right.$$

$$\left.-t^2B(-t)\right]-e^{-at}t\,\overline{A(t)}$$

$$\frac{\overline{c(t)}}{2}+i\,\overline{d(t)}=e^{-at}\left[-2at^2A(t)+t\frac{d}{dt}tA(t)\right.$$

$$\left.-t^2B(t)\right]+e^{at}t\,\overline{A(-t)}$$

解出 $A(t)$，$\overline{A(-t)}$，$B(t)$ 和 $\overline{B(-t)}$ 后代入 $\Phi(z)$ 及

$\psi(z)$中，得到

$$\varphi(z)=\int_0^\infty e^{-zt}\frac{1}{t\Delta t}\left\{-(1-e^{2at})\frac{a(t)+ib(t)}{2}\right.$$

$$+2at\,\frac{\overline{a(t)}+i\overline{b(t)}}{2}+(1-e^{2at})e^{-at}\,\frac{c(t)+id(t)}{2}$$

$$\left.-2ate^{at}\,\frac{\overline{c(t)}+i\,\overline{d(t)}}{2}\right\}dt+\int_0^\infty e^{zt}\frac{1}{t\Delta(t)}$$

$$\times\left\{2at\,\frac{\overline{a(t)}-i\,\overline{b(t)}}{2}+(1-e^{-2at})\,\frac{a(t)-ib(t)}{2}\right.$$

$$-2ate^{-at}\,\frac{\overline{c(t)}-i\,\overline{d(t)}}{2}-(1-e^{-2at})$$

$$\left.\times e^{at}\frac{c(t)-id(t)}{2}\right\}dt$$

$$\psi(z)=-z\int_0^\infty e^{-zt}t\Delta(t)dt+z\int_0^\infty e^{zt}t\Delta(-t)dt$$

$$+\int_0^\infty\frac{e^{-zt}}{t\Delta(t)}\left\{-2at\,\frac{a(t)+ib(t)}{2}\right.$$

$$+(1-e^{2at}+4a^2t^2)\frac{\overline{a(t)}+i\overline{b(t)}}{2}$$

$$+2ate^{-at}\,\frac{c(t)+id(t)}{2}$$

$$\left.+(1-e^{-2at})e^{at}\,\frac{\overline{c(t)}+i\overline{d(t)}}{2}\right\}dt+\int_0^\infty e^{zt}\frac{1}{t\Delta(t)}$$

$$\times\left\{2ate^{at}\,\frac{c(t)+id(t)}{2}-(1-e^{2at})e^{-at}\,\frac{\overline{c(t)}-i\overline{d(t)}}{2}\right.$$

$$-(1-e^{-2at}+4a^2t^2)\,\frac{\overline{a(t)}-i\,\overline{b(t)}}{2}$$

$$\left.-2at\,\frac{a(t)-ib(t)}{2}\right\}dt$$

式中　　$\Delta(t)=(1-e^{2at})(1-e^{-2at})+4a^2t^2$

如果在带状板上所加负荷或位移分布于局部，并且是自相平衡的，可用上述函数$\varphi(z)$和$\psi(z)$求应力分量或位移分量。

〔例题 7〕　如图3-17所示在带状板两侧的直线边上作用有集中力P，求应力分量。

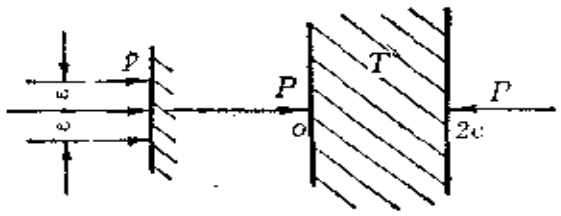


图　3-17

设P在宽度2ε之间均匀分布。当$\varepsilon\to 0$时，就得到集中力的情况。

由前面可知：

$$a(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[X_x+iX_y]_{x=0}\cos ty\,dy$$

$$b(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[X_x+iX_y]_{x=0}\sin ty\,dy$$

$$c(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[X_x+iX_y]_{x=a}\cos ty\,dy$$

$$d(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[X_x+iX_y]_{x=a}\sin ty\,dy$$

因为在$-\varepsilon$和$+\varepsilon$之间，均布压力为"$-p$"。

于是

$$a(t)=c(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}(-p)\cos ty\,dy=-\frac{2p}{\pi}\,\frac{\sin\varepsilon t}{t}$$

$$b(t)=d(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}(-p)\sin ty\,dy=0$$

所以得到

$$\varphi(z)=\int_0^{\infty}e^{-zt}\frac{1}{t\Delta(t)}\left\{-(1-e^{2at})\frac{1-e^{-at}}{2}+2at\,\frac{1-e^{at}}{2}\right\}$$

$$\cdot\left(-\frac{2}{\pi}p\right)\frac{\sin\varepsilon t}{t}dt+\int_0^\infty e^{zt}\frac{1}{t\Delta(t)}\left\{2at-\frac{1-e^{-at}}{2}\right.$$

$$\left.+(1-e^{-2at})\cdot\frac{1-e^{at}}{2}\right\}\left(-\frac{2p}{\pi}\right)\frac{\sin\varepsilon t}{t}dt$$

$$=\int_0^\infty\frac{\mathrm{sh}\frac{at}{2}\mathrm{sh}\left[\left(z-\frac{a}{2}\right)t\right]}{t(\mathrm{sh}at+at)}\left(-\frac{2p}{\pi}\right)\frac{\sin\varepsilon t}{t}dt$$

$$\varphi'(z)=\int_0^\infty\frac{\mathrm{sh}\frac{a}{2}t\,\mathrm{ch}\left[\left(z-\frac{a}{2}\right)t\right]}{\mathrm{sh}at+at}\left(-\frac{2p}{\pi}\right)\frac{\sin\varepsilon t}{t}dt$$

同样可以得到$\psi(z)$为：

$$\psi(z)=z\varphi'(z)+\int_0^\infty e^{-zt}\frac{1}{t\Delta(t)}\left\{-2at(1-e^{-at})\right.$$

$$\left.+4a^2t^2+(1-e^{at})(e^{at}-e^{-at})\right\}\times\left(-\frac{p}{\pi}\right)\frac{\sin\varepsilon t}{t}dt$$

$$+\int_0^\infty\frac{e^{zt}}{t\Delta(t)}\{2at(e^{at}-1)-4a^2t^2-(e^{at}-e^{-at})$$

$$\cdot(e^{-at}-1)\}\left(-\frac{p}{\pi}\right)\frac{\sin\varepsilon t}{t}dt$$

$$=z\varphi'(z)+\int_0^\infty\frac{\mathrm{sh}\frac{at}{2}\mathrm{sh}\left[\left(z-\frac{a}{2}\right)t\right]+at\mathrm{sh}zt}{t(\mathrm{sh}at+at)}$$

$$\cdot\left(\frac{2p}{\pi}\right)\frac{\sin\varepsilon t}{t}dt$$

当$\varepsilon\to 0$时，

$$\frac{2p}{\pi}\cdot\frac{\sin\varepsilon t}{t}\to\frac{P}{\pi}$$

由$\varphi(z)$和$\psi(z)$的式子可以看出，当$t\to 0$时，积分符号下的项是有限的。当$t\to 0$，不论$a(0)=c(0)=$常数，还是$a(0)\to 0$，$c(0)\to 0$，可以直接应出以上所求到的$\varphi(z)$和$\psi(z)$。

由以下诸式，可求应力分量

$$X_x=2\mathrm{Re}[\varphi'(z)]-\mathrm{Re}[\bar{z}\varphi''(z)+\psi'(z)]$$

$$Y_y=2\mathrm{Re}[\varphi'(z)]+\mathrm{Re}[\bar{z}\varphi''(z)+\psi'(z)]$$

$$X_y=\mathrm{Im}[\bar{z}\varphi''(z)+\psi'(z)]$$

于是得到

$$X_x=\frac{2p}{\pi}\left\{\int_0^\infty \frac{\mathrm{sh}\frac{a}{2}\,t\sin\varepsilon t}{t(\mathrm{sh}at+at)}\left[2xt\,\mathrm{sh}\left(x-\frac{a}{2}\right)t\right.\right.$$

$$\left.\left.-2\mathrm{ch}\left(x-\frac{a}{2}\right)t\right]\cos yt\,dt-\int_0^\infty \frac{a\sin\varepsilon t}{\mathrm{sh}at+at}\mathrm{ch}xt\cos yt\,dt\right\}$$

$$Y_y=-\frac{2p}{\pi}\left\{\int_0^\infty \frac{\mathrm{sh}\frac{a}{2}\,t\sin\varepsilon t}{t(\mathrm{sh}at+at)}\left[2xt\,\mathrm{sh}\left(x-\frac{a}{2}\right)t\right.\right.$$

$$\left.\left.+4\mathrm{ch}\left(x-\frac{a}{2}\right)t\right]\cos yt\,dt-\int_0^\infty \frac{a\sin\varepsilon t}{\mathrm{sh}at+at}\mathrm{ch}xt\cos yt\,dt\right\}$$

$$X_y=\frac{2p}{\pi}\int_0^\infty\left\{\frac{\mathrm{sh}\frac{a}{2}\,t\sin\varepsilon t}{t(\mathrm{sh}at+at)}\left[\mathrm{sh}\left(x-\frac{a}{2}\right)t\right.\right.$$

$$\left.\left.-2xt\,\mathrm{ch}\left(x-\frac{a}{2}\right)t\right]+\frac{a\sin\varepsilon t\,\mathrm{sh}xt}{\mathrm{sh}at+at}\right\}\sin yt\,dt$$

在 $y=0$ 的轴线上，

$$X_x=\frac{2p}{\pi}\int_0^\infty\left\{\frac{\mathrm{sh}\frac{a}{2}\,t\sin\varepsilon t}{t(\mathrm{sh}at+at)}\left[2xt\,\mathrm{sh}\left(x-\frac{a}{2}\right)t\right.\right.$$

$$\left.\left.-2\mathrm{ch}\left(x-\frac{a}{2}\right)t\right]-\frac{a\sin\varepsilon t\,\mathrm{ch}xt}{\mathrm{sh}at+at}\right\}dt$$

$$Y_y=-\frac{2p}{\pi}\int_0^\infty\left\{\frac{\mathrm{sh}\frac{a}{2}\,t\sin\varepsilon t}{t(\mathrm{sh}at+at)}\left[2xt\,\mathrm{sh}\left(x-\frac{a}{2}\right)t\right.\right.$$

$$\left.\left.+4\mathrm{ch}\left(x-\frac{a}{2}\right)t\right]-\frac{a\sin\varepsilon t\,\mathrm{ch}xt}{\mathrm{sh}at+at}\right\}dt$$

$$Y_x=0$$

若受集中负荷，取 $\varepsilon\to 0$ 的极限值，则在带内的应力分量为

$$X_x=\frac{2P}{\pi}\int_0^\infty\left\{\frac{\mathrm{sh}\frac{a}{2}t}{\mathrm{sh}at+at}\left[xt\mathrm{sh}\left(x-\frac{a}{2}\right)t-\mathrm{ch}\left(x-\frac{a}{2}\right)t\right]\right\}\cos ytdt$$

$$Y_y=-\frac{2P}{\pi}\int_0^\infty\left\{\frac{\mathrm{sh}\frac{a}{2}t}{\mathrm{sh}at+at}\left[xt\mathrm{sh}\left(x-\frac{a}{2}\right)t+2\mathrm{ch}\left(x-\frac{a}{2}\right)t\right]\right\}\cos ytdt$$

$$X_y=\frac{2P}{\pi}\int^\infty\left\{\frac{\mathrm{sh}\frac{a}{2}t}{\mathrm{sh}at+at}\left[\frac{1}{2}\mathrm{sh}\left(x-\frac{a}{2}\right)t-xt\mathrm{ch}\left(x-\frac{a}{2}\right)t\right]\right\}\sin ytdt$$

〔例题 8〕 带状板受力的情况如图 3-18 所示，求应力分量。

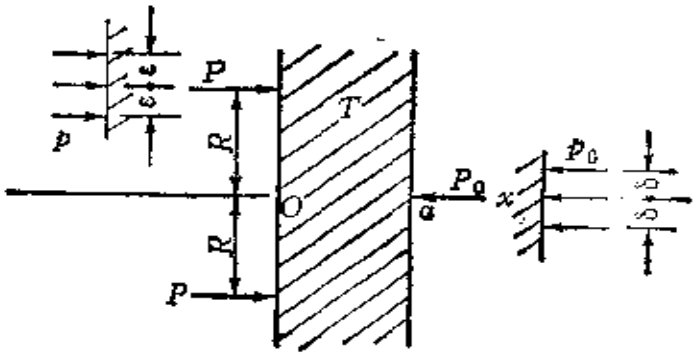


图 3-18

因为 $$a(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(X_x+iX_y)_{x=0}\cos tydy$$

$$=-2\frac{p}{\pi}\left(\frac{\sin C_1t-\sin C_0t}{t}\right)$$

$$C(t)=-\frac{2p_0}{\pi}\quad\frac{\sin\delta t}{t}$$

和前述例题相同，得到

$$\varphi(z)=\int_0^\infty e^{-zt}\frac{1}{t\Delta(t)}\left\{\frac{p}{\pi}(1-e^{2at})\frac{\sin C_1t-\sin C_0t}{t}\right.$$
$$-\frac{2p}{\pi}a(\sin C_1t-\sin C_0t)+\frac{2p_0}{\pi}ae^{at}\sin\delta t$$
$$\left.-\frac{p_0}{\pi}e^{-at}(1-e^{2at})\frac{\sin\delta t}{t}\right\}dt$$
$$+\int_0^\infty\frac{e^{zt}}{t\Delta(t)}\left\{2ae^{-at}\frac{p_0}{\pi}\sin\delta t+\frac{p_0}{\pi}(1-e^{-2at})\right.$$
$$\left.\cdot e^{at}\frac{\sin\delta t}{t}\right\}dt-\int_0^\infty\left\{2a\frac{p}{\pi}(\sin C_1t-\sin C_0t)\right.$$
$$\left.+\frac{p}{\pi t}(1-e^{-2at})(\sin C_1t-\sin C_0t)\right\}dt$$

$$\psi(z)=z\psi'(z)+\int_0^\infty\frac{e^{-zt}}{t\Delta(t)}\left\{\frac{2p}{\pi}a(\sin C_1t-\sin C_0t)\right.$$
$$-\frac{p}{\pi}(1-e^{2at}+4a^2t^2)\frac{\sin C_1t-\sin C_0t}{t}-\frac{2p_0}{\pi}\left[ate^{-at}\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{2}(e^{at}-e^{-at})\right]\frac{\sin\delta t}{t}\right\}dt+\int_0^\infty\frac{e^{zt}}{t\Delta(t)}\left\{(1-2at\right.$$
$$-e^{-2at}+4a^2t^2]\frac{p}{\pi t}(\sin C_1t-\sin C_0t)$$
$$\left.+[e^{-at}-e^{at}-2ate^{at}]\frac{p_0\sin\delta t}{\pi t}\right\}dt$$

若受集中负荷作用，即

$$\delta\to0,\quad\frac{2p_0}{\pi}\quad\frac{\sin\delta t}{t}\longrightarrow\frac{P_0}{\pi}$$

$$\varepsilon\to0,\quad\frac{p}{\pi}\quad\frac{\sin C_1t-\sin C_0t}{t}\longrightarrow\frac{P}{\pi}\cos Rt$$

这里　　$C_1=R+\varepsilon$，$C_0=R-\varepsilon$。

于是得到

$$\varphi(z)=\frac{2P_0}{\pi}\int_0^\infty\frac{1}{t\Delta(t)}\{(at-\mathrm{sh}at)\mathrm{ch}(z-a)t-(at\cos Rt-\mathrm{sh}at)\mathrm{ch}zt\}dt$$

$$\psi(z)=z\varphi'(z)+\frac{P_0}{\pi}\int_0^\infty\frac{1}{t\Delta(t)}\{[(1-2at+4a^2t^2)\mathrm{sh}zt-\mathrm{sh}(2a-z)t]\cos Rt-2at\mathrm{ch}(z+a)t-\mathrm{sh}(z+a)t+\mathrm{sh}(z-a)t\}dt$$

由此求到

$$X_x=\frac{P_0}{\pi}\int_0^\infty\{2[(at-\mathrm{sh}at)\mathrm{sh}(x-a)t-(at\cos Rt-\mathrm{sh}at)\mathrm{sh}xt]-4xt[(at-\mathrm{sh}at)\mathrm{ch}(x-a)t-(at\cos Rt-\mathrm{sh}at)\mathrm{ch}xt]-[(1-2at+4a^2t^2)\mathrm{ch}xt+\mathrm{ch}(2a-x)t]\cos Rt+2at\mathrm{sh}(x+a)t+\mathrm{ch}(x+a)t-\mathrm{ch}(x-a)t\}\frac{\cos yt}{\Delta(t)}dt$$

$$Y_y=-\frac{P_0}{\pi}\int_0^\infty\{6[(at-\mathrm{sh}at)\mathrm{sh}(x-a)t-(at\cos Rt-\mathrm{sh}at)\mathrm{sh}xt]+4xt[(at-\mathrm{sh}at)\mathrm{ch}(x-a)t-(at\cos Rt-\mathrm{sh}at)\mathrm{ch}xt]+[(1-2at+4a^2t^2)\mathrm{ch}xt+\mathrm{ch}(2a-x)t]\cos Rt-\mathrm{ch}(x+a)t+\mathrm{ch}(x-a)t-2at\mathrm{sh}(x+a)t\}\frac{\cos yt}{\Delta(t)}dt$$

$$X_y=\frac{P_0}{\pi}\int_0^\infty\{4xt[(at-\mathrm{sh}at)\mathrm{sh}(x-a)t-(at\cos Rt-\mathrm{sh}at)\mathrm{sh}xt]+2[(at-\mathrm{sh}at)\mathrm{ch}(x-a)t-(at\cos Rt-\mathrm{sh}at)\mathrm{ch}xt]+[(1-2at+4a^2t^2)\mathrm{sh}xt+\mathrm{sh}(2a-x)t]\cos Rt-2at\mathrm{ch}(x+a)t-\mathrm{sh}(x+a)t+\mathrm{sh}(x-a)t\}\frac{\sin yt}{\Delta(t)}dt$$

3-7 多连通区的劳瑞西拉—谢尔曼方程及其解

图 3-19 所示的多连通区中，设$\varphi(z)$和$\psi(z)$是T中的

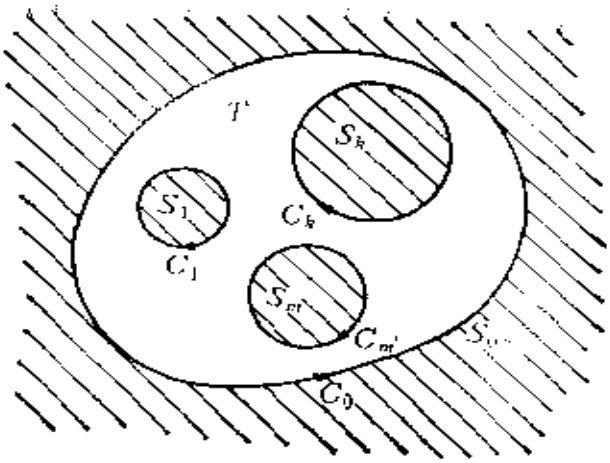


图 3-19

解析函数，它在边界曲线 C_k 上满足下列关系：

$$\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}=f(t)+\beta_k$$
$$(k=0,\ 1,2,\ \cdots,m)$$

$f(t)$ 是已知单值函数并在 C_k 上是充分光滑的。$\beta_1,\ \beta_2,\cdots,\beta_m$ 是待定复常数，只有其中任一个可以自由选定，一般取 $\beta_0=0$。

那么，按谢尔曼的设想，所求函数 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$ 可写为如下形式

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\omega(t)}{t-z}dt+\sum_{j=1}^{m}\frac{b_j}{z-z_j} \qquad (3\text{-}7\text{-}1)$$

$$\psi(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\overline{\omega(t)}dt}{t-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\omega(t)d\bar{t}}{t-z}$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\bar{t}\omega(t)dt}{(t-z)^2}+\sum_{j=1}^{m}\frac{b_j}{z-z_j}$$

$C=C_0\cup C_1\cup\cdots\cup C_m$ 代表全部边界曲线。z_j 是 S_j（$j=1,\ 2,\ \cdots,\ m$）中的任一点。z 是 T 中的点。$\omega(t)$ 是在 T 的边界上所求函数的值。b_j 是未知的。

$$b_j=i\int_{C_j}[\omega(t)d\bar{t}-\overline{\omega(t)}dt] \qquad (3\text{-}7\text{-}2)$$

而

$$\omega(t_0)+\frac{1}{\pi}\int_C \omega(t)\vartheta'(t_0,t)dt-\frac{1}{\pi}\int_C \overline{\omega(t)}e^{2i\theta(t_0,t)}\cdot\vartheta'(t_0,t)dt+\sum_{j=1}^{m}\left\{\frac{b_j}{t_0-z_j}+\frac{\bar{b}_j}{\bar{t}-\bar{z}_j}\left(1-\frac{t_0}{\bar{t}_0-\bar{z}_j}\right)\right\}-\beta_j=f(t_0) \tag{3-7-3}$$

若满足

$$\mathrm{Re}\left[\int_C \overline{f(t)}dt\right]=0$$

则方程（3-7-3）的解$\omega(t_0)$就是弹性力学第一个基本问题的解。

若引入另一项如下

$$\frac{b_0}{t_0}+\frac{\bar{b}_0}{\bar{t}_0}\left(1-\frac{t_0}{\bar{t}_0}\right)$$

其中b_0是个纯虚数，并且

$$b_0=\frac{1}{2\pi i}\int_C\left[\frac{\omega(t)}{t^2}dt+\frac{\overline{\omega(t)}}{\bar{t}^2}d\bar{t}\right] \tag{3-7-4}$$

这里t_0是边界上的点。取原点在T内，于是可以得到

$$\omega(t_0)+\frac{k}{\pi}\int_C \omega(t)\vartheta'(t_0,t)dt-\frac{1}{\pi}\int_C \omega(t)e^{2i\theta(t_0,t)}\cdot\vartheta'(t_0,t)dt+\sum_{j=0}^{m}\left\{\frac{b_j}{t_0-z_j}+\frac{\bar{b}_j}{\bar{t}_0-\bar{z}_j}\cdot\left(1-\frac{t_0}{\bar{t}_0-\bar{z}_j}\right)\right\}-\beta_k=f(t_0) \tag{3-7-5}$$

在C_k上（$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m$）（$z_0=0$），

$$\beta_k=-\int_{C_k}\omega(t)ds,\quad \beta_0=0$$

（$k=1,\ 2,\cdots,\ m$）

s表自某点算起的弧长。于是

a）对应于任何$f(t_0)$，方程（3-7-5）有唯一解。

b）当满足$R_e\left[\int_C \overline{f(t)}dt\right]=0$时，$b_0=0$而$\omega(t)$就是这种情况下谢尔曼方程（3-7-5）的解。这里$\theta(t_0,t)=\arg(t-t_0)$。略加修改后，方程（3-7-5）可以用于第三类无限区域。此时

$$b_0=\frac{1}{2\pi}\int_{C_0}\left(\frac{\omega(t)}{t^2}dt+\frac{\overline{\omega(t)}}{t^2}d\bar{t}\right) \qquad (3-7-6)$$

没有意义，因为没有C_0。

在C_k上，对于方程（3-7-5）可以写出

$$\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}+b_0\left\{\frac{1}{t}-\frac{1}{t}+\frac{t}{t^2}\right\}-\beta_k=f(t)$$

式中$\varphi(t)$，$\varphi'(t)$和$\psi(t)$是由方程（3-7-1）在边界上的值而得到的。把上式等号两侧乘以$d\bar{t}$并沿C积分，于是得出

$$\int_C\{\varphi(t)dt-\overline{\varphi(t)}d\bar{t}\}+b_0\int_C\left\{\frac{d\bar{t}}{t}+\frac{dt}{\bar{t}}\right\}$$

$$+2\pi ib_0=\int_C f(t)d\bar{t}$$

因为b_0是纯虚数，所以$2\pi ib_0$必是实数。其它项是纯虚数，于是$b_0=0$。

若是在C_k上没有外负荷，则

$$\varphi_0+t\bar{\varphi}_0'+\bar{\psi}_0-\beta_j^{(0)}=0 \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m,\ \beta_0^{(0)}=0)$$

φ_0表示没有外负荷时的$\varphi(t)$，$\beta_j^{(0)}$表示没有外负荷时的β_j。因为$\mathrm{Re}\left[\int_C\overline{f(t)}dt\right]=0$的条件是满足的。所以$b_0^{(0)}=0$。对于零负荷时，得到

$$\varphi_0(z)=i\varepsilon z+\gamma,\quad \psi_0(z)=-\bar{\gamma}$$

ε是实数。于是

$$i\varepsilon z+\gamma=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\omega_0(t)}{t-z}dt+\sum_{j=1}^{m}\frac{b_j^{(0)}}{z-z_j}$$

$$-\bar{\gamma}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\overline{\omega_0(t)}}{t-z}dt-\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\bar{t}\omega_0'(t)dt}{t-z}+\sum_{j=1}^{m}\frac{b_j^{(0)}}{z-z_j}\Bigg\}\quad(3\text{-}7\text{-}7)$$

我们引入新的函数如下：

$$\left.\begin{aligned}i\varphi^*(t)&=\omega_0(t)+\sum_{j=1}^{m}\frac{b_j^{(0)}}{t-z_j}-i\varepsilon t-\gamma\\ i\psi^*(t)&=\overline{\omega_0(t)}-\bar{t}\omega_0'(t)+\sum_{j=1}^{m}\frac{b_j^{(0)}}{t-z_j}+\bar{\gamma}\end{aligned}\right\}\quad(3\text{-}7\text{-}8)$$

$\varphi^*(t)$ 和 $\psi^*(t)$ 是 S_0，$S_1,\cdots,S_m$ 中的解析函数的边界值，$\varphi^*(\infty)=\psi^*(\infty)=0$。对于所有 $z\in T$，有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi^*(t)dt}{t-z}=0,\qquad\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\psi^*(t)dt}{t-z}=0$$

对于所有在 C_0 内的 z，有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{b_j}{(t-z)(t-z_j)}dt=0$$

我们知道 $b_j/z-z_j$ 是 C_0 外的全纯函数并且在无穷远处为零。$b_j/t-z_j$ 是 $b_j/z-z_j$ 在 C_0 上的边界值。把式（3-7-8）中的 $\omega_0(t)$ 代入式（3-7-6），注意到 $b_0^{(0)}=0$，必须使 $\varepsilon=0$。又对于所有在 C_0 内的 z，得到

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{i\varepsilon t dt}{t-z}=i\varepsilon z$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{i\varepsilon t dt}{(t-z)^2}=i\varepsilon$$

对于 $z=0$，可知

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{i\varepsilon t dt}{t^2}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{i\varepsilon dt}{t}=i\varepsilon$$

所以可知：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\gamma dt}{t-z}=\gamma,\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\gamma dt}{(t-z)^2}=0$$

对于 $z=0$，得到

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\gamma dt}{t^2}=0$$

由此得到 $2i\varepsilon=b_0^{(0)}=0$。

由方程（3-7-8）消去 $\omega_0(t)$，在 C 上得到

$$\varphi^*(t)+\bar{t}\varphi^{*\prime}(t)+\psi^*(t)$$

$$=i\sum_{j=1}^{m}b_j^{(0)}\left\{\frac{1}{\bar{t}-\bar{z}_j}-\frac{1}{t-z_j}+\frac{\bar{t}}{(t-z_j)^2}\right\}-2\bar{\gamma}i$$

把上式乘以 dt 并沿 C_j（$j=1, 2, \cdots, m$）积分后，我们得出

$$\int_{C_j}\{\varphi^*(t)dt-\varphi^*(t)d\bar{t}\}$$

$$=i\sum_{j=1}^{m}b_j^{(0)}\int_{C_j}\left\{\frac{dt}{t-\bar{z}_j}+\frac{d\bar{t}}{t-z_j}\right\}-2\pi b_j^{(0)}$$

因为上式中左侧及等号右侧第一项均为纯虚数，$b_j^{(0)}$ 是实数，所以 $b_j^{(0)}$ 必须为零。于是在 C_k（$k=0, 1, 2, \cdots m$）上必有如下关系

$$\overline{\varphi^*(t)}+\bar{t}\varphi^{*\prime}(t)+\psi^*(t)=-2i\bar{\gamma}$$

所以 $\varphi^*(z)$ 和 $\psi^*(z)$ 是相应于边界上负荷为零的解。又 $\varphi^*(\infty)=\psi^*(\infty)=0$，由解的唯一性可知 $\varphi^*(z)=\psi^*(z)=0$ 且 $\gamma=0$。同样对于边界 C_j 上无负荷时，可得

$$\varphi^*(z)=i\varepsilon_j z+\gamma_j,\quad \psi^*(z)=-\bar{\gamma}_j$$

而且 $\varepsilon_j=\gamma_j=0$ 和 $b_j^{(0)}=0$。于是由式（3-7-8）可知在全部边界上有 $\omega_0(t)=0$。这证明当 $f(t_0)=0$ 时，式（3-7-5）的齐次方程有平凡解。于是由弗列德霍姆交比定理可知：对于有任一右端项（在平方可积函数的定义域外），方程（3-7-8）唯一可解。

〔例题 9〕 解圆域外的弹性力学第一个基本问题。如图3-20所示圆域外区域。这里没有 C_0，只有 C_1。略去注脚“1”，于是

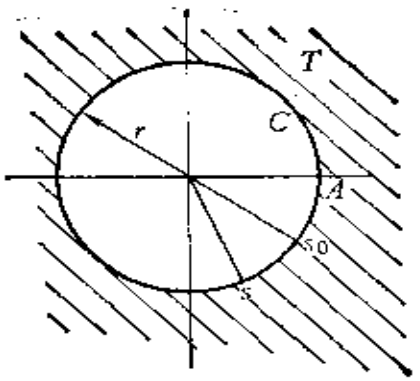


图 3-20

由上述$\varphi(z)$方程，可知

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\omega(t)}{t-z}dt+\frac{b}{z} \qquad (3\text{-}7\text{-}9)$$

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\overline{\omega(t)}dt}{t-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\omega(t)d\bar{t}}{t-z}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\bar{t}\omega(t)dt}{(t-z)^2}+\frac{b}{z}$$

此时T在C的左侧，C是顺时针方向，$z\in T$。

我们在劳瑞西拉—谢尔曼方程中，令$z_1=0$，于是得出如下方程

$$\omega(t_0)+\frac{1}{\pi}\int_C\omega(t)d\vartheta-\frac{1}{\pi}\int_C\omega(t)e^{2i\vartheta}d\vartheta$$

$$+\frac{b}{t_0}+\frac{\bar{b}}{\bar{t}_0}\left(1-\frac{t_0}{\bar{t}_0}\right)-\beta=f(t_0)$$

式中 $b=i\int_C[\omega(t)d\bar{t}-\overline{\omega(t)}dt]$，$\beta=-\int_C\omega(t)ds$

在圆弧C上，取$t=re^{i\theta}$，$\theta=s/r$，可知

$$\vartheta(t_0,\ t)=\begin{cases}-\dfrac{\theta+\theta_0+\pi}{2} & (\theta_0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)\\[2ex] -\dfrac{\theta+\theta_0+3\pi}{2} & (0<\theta<\theta_0)\end{cases}$$

取负号是因为它的方向与C相反。以θ作为变量，上述积分方程

改写为

$$\omega(\theta_0)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega(\theta)d\theta-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega(\overline{\theta})e^{-i(\theta+\theta_0)}d\theta$$
$$+b\left[\frac{1}{t_0}+\frac{1}{\bar{t}_0}\left(1-\frac{t_0}{\bar{t}_0}\right)\right]-\beta=f(\theta_0) \quad (3\text{-}7\text{-}10)$$

这是一个退化核的积分方程，令

$$\omega(\theta_0)=f(\theta_0)+\alpha_0+\alpha_1 t_0-b\left[\frac{1}{t_0}+\left(1-\frac{t_0}{\bar{t}_0}\right)\frac{1}{\bar{t}_0}\right] \quad (3\text{-}7\text{-}11)$$

把它代入式（3-7-10），并取 $t=re^{-i\theta}$，$\bar{t}=re^{i\theta}$，$t\bar{t}=r^2$

因为

$$\int_0^{2\pi}t^n d\theta=\int_0^{2\pi}r^n e^{-in\theta}d\theta=\begin{cases}2\pi & (n=0\text{ 时})\\ 0 & (n=\pm1,\ \pm2,\cdots\text{时})\end{cases}$$

这样

$$f(\theta_0)+\alpha_0+\alpha_1 t_0-b\left[\frac{1}{t_0}+\frac{1}{\bar{t}_0}\left(1-\frac{t_0}{\bar{t}_0}\right)\right]$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)d\theta-\alpha_0-\bar{\alpha}_1 t_0-\frac{t_0}{2\pi r^2}\int_0^{2\pi}t\overline{f(\theta)}d\theta$$
$$+\frac{t_0}{r^2}b+b\left[\frac{1}{t_0}+\frac{1}{\bar{t}_0}\left(1-\frac{t_0}{\bar{t}_0}\right)\right]-\beta=f(\theta_0)$$

取 t_0 系数相等，则

$$\alpha_1-\bar{\alpha}_1-\frac{1}{2\pi r^2}\int_0^{2\pi}t\,\overline{f(\theta)}d\theta+\frac{b}{r^2}=0$$

把 $\omega(\theta_0)$ 代入 $\varphi(z)$ 中，则

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(t)}{t-z}dt+\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\alpha_0+\alpha_1 t}{t-z}dt$$
$$-\frac{b}{2\pi i}\int_C\left[\frac{1}{t}+\frac{1}{\bar{t}}\left(1-\frac{t}{\bar{t}}\right)\right]\frac{dt}{t-z}+\frac{b}{z}$$

这里 $z\in T$。

由柯西积分可知：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\alpha_0+\alpha_1 t}{t-z}dt=0$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \left[\frac{1}{t}+\frac{1}{\bar{t}}\left(1-\frac{t}{\bar{t}}\right)\right]\frac{dt}{t-z}=\frac{1}{z}$$

于是得出如下结果：

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)dt}{t-z} \qquad (3\text{-}7\text{-}12)$$

把 $\psi(z)$ 经过分部积分后，得到

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\overline{\omega(t)}dt}{t-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\bar{t}\omega'(t)dt}{t-z}+\frac{b}{z}$$

把式（3-7-11）代入上式后，得到

$$\begin{aligned}\psi(z)=&\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\overline{f(t)}dt}{t-z}+\frac{\bar{\alpha}_1}{z}r^2-\frac{b}{z}+\frac{br^2}{z^3}+\frac{b}{z}\\&+\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\omega(t)d\bar{t}}{t-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\bar{t}\,\omega(t)dt}{(t-z)^2}\\=&\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\overline{f(t)}dt}{t-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{t-z}\left(-\frac{r^2}{t^2}\right)dt\\&-\frac{r^2}{2\pi i}\int_C \frac{\alpha_0+\alpha_1 t}{t^2(t-z)}dt\\&+\frac{b}{2\pi i}r^2\int_C \left[\frac{1}{t}+\frac{1}{\bar{t}}\left(1-\frac{t}{\bar{t}}\right)\right]\frac{dt}{t^2(t-z)}\\&-\frac{r^2}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)dt}{t(t-z)^2}-\frac{r^2}{2\pi i}\int_C \frac{\alpha_0+\alpha_1 t}{t(t-z)^2}dt\\&+\frac{br^2}{2\pi i}\int_C \left[\frac{1}{t}+\frac{1}{\bar{t}}\left(1-\frac{t}{\bar{t}}\right)\right]\frac{dt}{t(t-z)^2}\\&+\frac{\bar{\alpha}_1}{z}r^2+b\frac{r^2}{z^3}\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\psi(z)=&\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\overline{f(t)}dt}{t-z}-\frac{r^2}{z}\varphi'(z)\\&+\frac{r^2}{2\pi z i}\int_C \frac{f(t)}{t^2}dt+\frac{r^2}{z}(\bar{\alpha}_1-\alpha_1)+\frac{b}{z}\end{aligned}$$

已知 $(\bar{\alpha}_1-\alpha_1)r^2+\bar{b}=\dfrac{1}{2\pi}\int_C \bar{t}f(t)d\theta$

这里 $b=\bar{b}$，b 是实数，而且 $d\theta=idt/t$，于是

$$\frac{(\bar{\alpha}_1-\alpha_1)r^2+b}{z}=-\frac{r^2}{2\pi zi}\int_C \frac{f(t)dt}{t^2}$$

最后，得到 $\Phi(z)$ 及 $\psi(z)$ 如下：

$$\left.\begin{aligned}\Phi(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)dt}{t-z}\\ \psi(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\overline{f(t)}dt}{t-z}-\frac{r^2}{z}\Phi'(z)\end{aligned}\right\}(z\in T)$$

〔例题10〕 在半径为 r 的圆孔内，作用有互成 120° 的集中力 P，如图 3-21 所示。求应力函数 $\Phi(z)$ 及 $\psi(z)$。

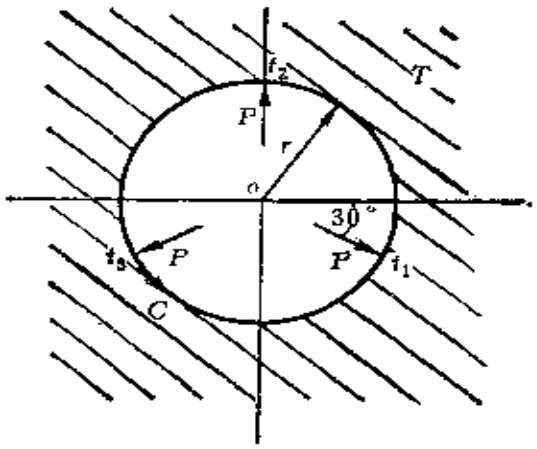


图 3-21

已知：

$$t_1=re^{-i\pi/6},\quad t_2=re^{-i\pi/2},\quad t_3=re^{i7\pi/6}$$

在 t_1 到 t_2 区间，$f=i(X_1+iY_1)=iPe^{-i\pi/6}$

在 t_2 到 t_3 区间，$f=i(X_1+iY_1)+i(X_2+iY_2)$

$$=iP(e^{-i\pi/6}+i)$$

在 t_3 到 t_1 区间，$f=i(X_1+iY_1)+i(X_2+iY_2)$

$$+i(X_3+iY_3)=iP[e^{-i\pi/6}+i+e^{i7\pi/6}]$$

把以上各值代入下式

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)\,dt}{t-z}$$

于是得到

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C iP\frac{e^{-i\frac{\pi}{6}}}{t-z}dt+\frac{1}{2\pi i}\int_C iP(e^{-i\frac{\pi}{6}}+i)\cdot\frac{dt}{t-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_C iP(e^{-i\frac{\pi}{6}}+i+e^{i\frac{7\pi}{6}})\frac{dt}{t-z}$$

$$=\frac{P}{2\pi}[(i+e^{i\frac{7\pi}{6}})\ln(t_1-z)-i\ln(t_2-z)-e^{i\frac{7\pi}{6}}\ln(t_3-z)]$$

$$=\frac{P}{2\pi}\left[i\ln\frac{t_1-z}{t_2-z}+e^{i\frac{7\pi}{6}}\ln\frac{t_1-z}{t_3-z}\right]$$

同时得到

$$\varphi'(z)=\frac{P}{2\pi}\left[i\left(\frac{1}{t_2-z}-\frac{1}{t_1-z}\right)+e^{i\frac{7\pi}{6}}\left(\frac{1}{t_3-z}-\frac{1}{t_1-z}\right)\right]$$

$$\psi(z)=\frac{P}{2\pi}\left\{e^{-i\frac{7\pi}{6}}\ln\frac{t_1-z}{t_3-z}-i\ln\frac{t_1-z}{t_2-z}-\frac{r^2}{z}\cdot\left[i\left(\frac{1}{t_2-z}-\frac{1}{t_1-z}\right)+e^{i\frac{7\pi}{6}}\left(\frac{1}{t_3-z}-\frac{1}{t_1-z}\right)\right]\right\}$$

〔例题11〕 如图 3-22 所示，在圆孔内只有在单侧作用的均布负荷。这是个受不平衡集中力作用的第三类无限大区域（圆孔外）的问题。这时

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(t)}{t-z}dt=\frac{1}{2\pi i}\int_{re^{i\theta_0}}^{re^{i\theta_0}}\frac{t\,dt}{t-z}$$

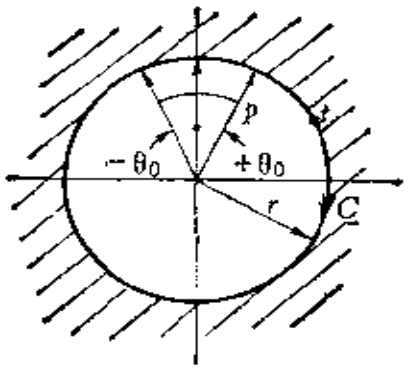


图 3-22

$$= \frac{p}{2\pi i}\left[(e^{i\theta_0}-e^{-i\theta_0})\,r + z\ln\frac{re^{i\theta_0}-z}{re^{-i\theta_0}-z}\right]$$

$$\varphi'(z) = \frac{p}{2\pi i}\left[\ln\frac{re^{i\theta_0}-z}{re^{-i\theta_0}-z} + \frac{z}{z-re^{i\theta_0}} - \frac{z}{z-re^{-i\theta_0}}\right]$$

又知道

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)\,dt}{t-z} = \frac{pr^2}{2\pi i}\int_{re^{-i\theta_0}}^{re^{i\theta_0}} \frac{dt}{t(t-z)}$$

$$= \frac{pr^2}{2\pi i}\int_{re^{-i\theta_0}}^{re^{i\theta_0}}\left(\frac{1}{t-z}-\frac{1}{t}\right)dt$$

$$= \frac{pr^2}{2\pi iz}\left[\ln\frac{z-re^{i\theta_0}}{z-re^{-i\theta_0}} - 2i\theta_0\right]$$

于是

$$\psi(z) = \frac{pr^2}{2\pi iz}\left[\frac{z}{z-re^{-i\theta_0}} - \frac{z}{z-re^{i\theta_0}} - 2i\theta_0\right]$$

$$\psi'(z) = \frac{pr^2}{2\pi i}\left[\frac{1}{(z-re^{i\theta_0})^2} - \frac{1}{(z-re^{-i\theta_0})^2} + \frac{2i\theta_0}{z^2}\right]$$

$$= \frac{(2r\theta_0 p)\,r}{2\pi i}\left[\frac{i}{z^2} + \left(z\,\frac{\sin\theta_0}{\theta_0} - r\,\frac{\sin 2\theta_0}{2\theta_0}\right)\right.$$

$$\left.\times\frac{2ir}{(z-re^{i\theta_0})^2(z-re^{-i\theta_0})^2}\right]$$

受集中负荷时，

$$\lim_{\theta_0 \to 0} \psi'(z) = \frac{P}{2\pi}\left[\frac{r}{z^2} + \frac{2r^2}{(z-r)^3}\right]$$

$$\lim_{\theta_0 \to 0} \varphi'(z) = \frac{P}{2\pi}\left[\frac{z}{(z-r)^2} - \frac{1}{z-r}\right] = \frac{P}{2\pi}\left[\frac{r}{(z-r)^2}\right]$$

$$\varphi''(z) = -\frac{P}{\pi}\left[\frac{r}{(z-r)^3}\right]$$

所以在受集中力的情况下，

$$\varphi(z) = -\frac{P}{2\pi}\left(\frac{r}{z-r}\right), \quad \psi(z) = -\frac{Pr}{2\pi}\left[\frac{1}{z} + \frac{r}{(z-r)^2}\right]$$

我们知道

$$X_x = \mathrm{Re}[2\varphi'(z) - \bar{z}\varphi''(z) - \psi'(z)]$$

$$= \frac{P}{2\pi}\mathrm{Re}\left[\frac{2(z-\bar{z})}{(z-r)^2} - \frac{r}{z^2} - \frac{2}{z-r} + \frac{2(z\bar{z}-r^2)}{(z-r)^3}\right]$$

$$= \frac{-P}{2\pi}\mathrm{Re}\left[2r\frac{r-R\cos\theta}{(z-r)^3} + \frac{r}{z^2}\right]$$

$$Y_y = \mathrm{Re}[2\varphi'(z) + \bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)]$$

$$= \frac{P}{2\pi}\mathrm{Re}\left[\frac{2(z+\bar{z})}{(z-r)^2} - \frac{2}{z-r} + \frac{r}{z^2} + \frac{2(r^2-z\bar{z})}{(z-r)^3}\right]$$

$$= \frac{P}{2\pi}\mathrm{Re}\left[\frac{4iRr}{(z-r)^3}\sin\theta + \frac{r}{z^2}\right]$$

$$X_y = \frac{P}{2\pi}\mathrm{Im}\left[\frac{2\bar{z}}{(z-r)^2} + \frac{r}{z^2}\right]$$

3-8 多连通区弹性力学第二个基本问题的解

设某有限多连通区T，它的边界曲线是充分光滑的。在边界上

$$2\mu[u(s)+iv(s)] = g(s) = \nu^*\varphi - z\bar{\varphi}' - \bar{\psi}$$

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2\pi(1+\nu^*)}\sum_{j=1}^{m} A_j \ln(z-z_j) + \varphi_0(z)$$

$$\psi(z)=\frac{\nu^*}{2\pi(1+\nu^*)}\sum_{j=1}^{m}\overline{A}_j\ln(z-z_j)+\psi_0(z)$$

于是

$$g(s)=-\frac{\nu^*}{2\pi(1+\nu^*)}\sum_{j=1}^{m}A_j\ln(z-z_j)\overline{(z-z_j)}$$

$$+\frac{z}{2\pi(1+\nu^*)}\frac{\overline{A}_j}{\bar{z}-\bar{z}_j}+\nu^*\varphi_0-z\overline{\varphi'_0}-\overline{\psi}_0$$

这里引用如下方程

$$\varphi_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\omega(t)dt}{t-z}$$

$$\psi_0(z)=-\frac{\nu^*}{2\pi i}\int_C\frac{\overline{\omega(t)}dt}{t-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\omega(t)d\bar{t}}{t-z}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\bar{t}\omega(t)dt}{(t-z)^2}$$

$$A_j=-2\pi(1+\nu^*)\int_{C_j}\omega(t)ds$$

$C=C_0\cup C_1\cup\cdots\cup C_m$，$C_0$，$C_1$，…，$C_m$是$T$的边界曲线。这里的$\omega(t)$由以下积分方程求出

$$\nu^*\omega(t_0)+\frac{\nu^*}{\pi}\int_C\omega(t)\vartheta'(t_0,\ t)dt$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_C\overline{\omega(t)}e^{2i\theta(t_0,t)}\cdot\vartheta'(t_0,\ t)dt$$

$$=g(t_0)-\nu^*\sum_{j=1}^{m}[\ln(t_0-z_j)(\bar{t}_0-\bar{z}_j)]\int_{C_j}\omega(t)ds$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\frac{t_0}{\bar{t}_0-\bar{z}_j}\int_{C_j}\overline{\omega(t)}ds$$

式中z_j是C_j中任一点。$\vartheta(t_0,\ t)=\arg(t-t_0)$。$s$为自某点起的弧长。这个方程有唯一解。关于这点的证明，思路与所用方法同多连通区第一基本问题，不再叙述。

若是第三类无限大区域，C_0 不存在。对于一个边界条件 $g(t)$，存在唯一解。其中

$$\varphi_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\omega(t)dt}{t-z}$$

$$\psi_0(z)=-\frac{\nu^*}{2\pi i}\int_C \frac{\overline{\omega(t)}d\bar{t}}{t-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\omega(t)d\bar{t}}{t-z}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\bar{t}\omega(t)dt}{(t-z)^2}$$

$$A_j=-2\pi(1+\nu^*)\int_{C_j}\omega(t)ds \qquad j=1,2,\cdots,m-1$$

$$A_m=-\sum_{j=1}^{m-1}A_j=2\pi(1+\nu^*)\int_{C_1\cup\cdots\cup C_{m-1}}\omega(t)ds$$

$$C=\int_{C_m}\omega(t)ds$$

$\omega(t)$ 由以下积分方程求出。

$$\nu^*\omega(t_0)+\frac{\nu^*}{\pi}\int_C \omega(t)\vartheta'dt+\frac{1}{\pi}\int_C \omega(\bar{t})e^{2i\theta}\vartheta'dt$$

$$-\int_{C_m}\omega(t)ds+\sum_{j=1}^{m-1}\nu^*\left[\ln\left(\frac{t_0-z_j}{t_0-z_m}\right)\left(\frac{\bar{t}_0-\bar{z}_j}{\bar{t}_0-\bar{z}_m}\right)\right]$$

$$\times\int_{C_m}\omega(t)ds-t_0\frac{\bar{z}_j-\bar{z}_m}{(t_0-\bar{z}_j)(t_0-\bar{z}_m)}$$

$$\times\int_{C_j}\overline{\omega(t)}ds=g(t_0)$$

不管主矢量 $X+iY$ 是零，还是任意值都可解。

3-9 弹性力学第一个基本问题的解与边界条件的关系

利用劳瑞西拉一谢尔曼方程可以研究在区域 T 内解和边界条件的关系。这对于数值计算是很重要的。

若 T 是有限单连通区，其边界曲线 C 是充分光滑的。设 f_n 是主矢量函数序列，若满足以下条件，我们说 f_n 平均收敛于 f。

$$\lim_{n\to\infty}\int_C |f_n - f|^2|dt| \to 0 \qquad (3\text{-}9\text{-}1)$$

这里 f_n 和 f 都是分段充分光滑函数，并且要满足条件

$$\mathrm{Re}\left[\int_C \overline{f_n(t)}\,dt\right] = 0 \qquad (3\text{-}9\text{-}2)$$

当 φ_n，ψ_n 及 φ，ψ 分别属于 f_n 和 f 时，于是有以下条件

$$\varphi_n' \to \varphi'', \quad \psi_n' \to \psi' \qquad (3\text{-}9\text{-}3)$$

这就是说在 T 中某一闭区域 T_1 中 φ_n' 和 ψ_n' 一致收敛于 φ'' 和 ψ'。

我们已经证明，对于任意的充分光滑的函数 f 和 f_n，第一个基本问题有解。而劳瑞西拉—谢尔曼方程的解 $\omega(t_0)$ 可以写为如下形式

$$\omega_n(t_0) = f_n(t_0) + \int_C \Gamma_{1,n}(t, t_0) f_n(t)\,dt + \int_C \Gamma_{2,n}(t, t_0)\overline{f_n(t)}\,dt$$

这里 $\Gamma_{1,n}$ 和 $\Gamma_{2,n}$ 在 C 上是两个变量的有限函数。所以 $\omega_n(t_0)$ 平均收敛于 $\omega(t)$。又因为 $\omega_n(t)$ 和 $\omega(t)$ 是属于边界条件 $f_n(t)$ 和 $f(t)$ 的，故在 T 中 φ_n' 和 ψ_n' 一致收敛于 φ'' 和 ψ'。

在这里，我们只给出应力函数的导数收敛于某极限函数，并没有讨论序列 φ_n 和 ψ_n 自己的收敛性。设 $\varphi_n^*(z)$，$\psi_n^*(z)$ 是相应于边界条件 $f_n(t)$ 由谢尔曼公式(3-3-1)得到的。自然可知，所有其它属于边界条件 f_n 的应力函数 $\varphi_n(z)$，$\psi_n(z)$ 与 $\varphi_n^*(z)$，$\psi_n^*(z)$ 相差为 $i\alpha_n z + \gamma_n$ 和 $-\bar{\gamma}_n$。自然，$\varphi_n''(z)$，ψ_n' 和 $\varphi_n^{*\prime\prime}(z)$，$\psi_n^{*\prime}(z)$ 是一样的。所以我们可以如此选取 $\varphi_n(z)$ 和 $\psi_n(z)$，对于每一个 n，在 T 中一点 $A^*(A^* \in T)$，有 $\varphi_n(A^*) = \alpha$，$\mathrm{Im}[\varphi_n'(A^*)] = \beta$。于是由 $f_n(t)$ 可知在边界曲线 C 上，由下式

$$\varphi_n(t) + t\overline{\varphi_n'(t)} + \overline{\psi_n(t)} = f_n$$

可唯一确定 $\varphi_n(z)$ 和 $\psi_n(z)$，并且

$$\left.\begin{aligned} \varphi_n^* - \varphi_n &= i\alpha_n z + \gamma_n \\ \psi_n^* - \psi &= -\bar{\gamma}_n \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}9\text{-}4)$$

函数 φ_n^* 和 ψ_n^* 在 T 中是一致收敛，自然在任一点 A^* 有 $\varphi_n^*(A^*)\to\varphi^*(A^*)$，$\psi_n^*(A^*)\to\psi^*(A^*)$。把 A^* 代入式 (3-9-4) 后，则

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_n^*(A^*)-\varphi_n(A^*)=i\alpha_n A^*+\gamma_n\\&\mathrm{Im}[\varphi_n^{*\prime}(A^*)]-\mathrm{Im}[\varphi_n'(A^*)]=\alpha_n\end{aligned}\right\}\qquad(3\text{-}9\text{-}5)$$

又因为

$$\varphi_n^{*\prime}(A^*)\to\varphi^{*\prime}(A^*)，\text{并且}\ \mathrm{Im}[\varphi_n'(A^*)]=\beta$$

所以数列 α_n 收敛于某确定值 α，同理 γ_n 将以某确定值 γ 为极限。φ_n^* 和 ψ_n^* 一致收敛于 φ^* 和 ψ^*。由式 (3-9-4) 可知，在 T 中 φ_n 和 ψ_n 一致收敛于 φ 和 ψ，$\varphi(A^*)=\alpha$；$\mathrm{Im}[\varphi'(A^*)]=\beta$。

若 $A^*\in T$，$\varphi_n(A^*)=\alpha$，$\mathrm{Im}[\varphi_n'(A^*)]=\beta$，并且式 (3-9-1) 到式 (3-9-3) 得到满足，则 $\varphi_n(z)\to\varphi(z)$，$\psi_n(z)\to\psi(z)$。

3-10 弹性力学第一个基本问题应力函数的近似计算

我们已知主矢量函数 $f(t)$ 有连续二阶导数时，$\varphi(t)$，$\varphi'(t)$ 和 $\psi(t)$ 连续到边界上。如果主矢量函数 $f(t)$ 用某一函数 $f_0(t)$ 代替，并且使

$$\int_C|f-f_0|^2|dt|\qquad(3\text{-}10\text{-}1)$$

充分小到满足误差要求，我们可以求近似解。我们知道，对于任意微小量 $\varepsilon>0$ 和任意平方可积函数 $f(t)$，可以找到一函数 $f_0(t)$，其实部和虚部在 C 上是解析的（例如多项式），并且式 (3-10-1)$<\varepsilon$。当满足

$$\mathrm{Re}\left[\int_C\overline{f(t)}\,dt\right]=0$$

时，$f_0(t)$ 也满足条件

$$\mathrm{Re}\left[\int_C\overline{f_0(t)}\,dt\right]=0$$

设函数 φ_0 和 ψ_0 是由边界上函数 f_0 求到的，并且 $\varphi_0(A^*)=\alpha$，$\mathrm{Im}[\varphi_0'(A^*)]=\beta$。$\varphi_0(t)$，$\varphi_0'(t)$ 和 $\psi_0(t)$ 是一直连续

到边界上的函数，并在 T 中有限。根据瓦耳希（Walsh）定理可知：对于任意小量 $\varepsilon>0$，当 n 充分大时，多项式

$$P_1^{(n)}(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$$
$$P_2^{(n)}(z)=b_0+b_1z+\cdots+b_nz^n$$

在 T 中满足以下条件：

$$|\varphi_0'-P_1^{(n)}|<\varepsilon$$
$$|\psi_0-P_2^{(n)}|<\varepsilon$$

于是在 T 的边界上，差值

$$|f_0-P_{1,0}^{(n)}-z\overline{P_{1,0}^{(n)}}'-\overline{P_2^{(n)}}|$$

可以是任意小值。这里

$$P_{1,0}^{(n)}=a_0^{(0)}+a_0z+\frac{a_1}{2}z^2+\cdots+\frac{a_n}{n+1}z^{n+1}$$

并且由此可知

$$P_1^{(n)}=\frac{dP_{1,0}^{(n)}}{dz}=P_{1,0}'^{(n)}$$

由上节可知

$$P_{1,0}^{(n)}(A^*)=\alpha,\quad \mathrm{Im}[P_1^{(n)}(A^*)]=\beta$$

因为 f_0 平均收敛于 f，于是在 T 的边界上，

$$P_{1,0}^{(n)}+z\overline{P_{1,0}'^{(n)}}+\overline{P_2^{(n)}}\to f\quad(\text{平均收敛})$$

则 $P_{1,0}^{(n)}(z)$，$P_2^{(n)}(z)$ 在 T 内一致收敛于 $\varphi(z)$，$\psi(z)$。在实际上，可取

$$\varphi_n=a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n$$
$$\psi_n=b_0+b_1z+\cdots+b_nz^n$$

并令 $0\in T$，a_1 是待定实数。$a_2,\cdots,a_n,b_0,b_1,\cdots,b_n$ 是待定复常数。在边界上，令

$$\int_C|\varphi_n+z\overline{\varphi_n'}+\overline{\psi}_n-f|^2ds=K$$

为最小，以求 a_i，b_i 之值。

我们知道 φ_n，ψ_n 收敛于 φ 和 ψ。φ 和 ψ 是属于边界条件 f

的解。这里要满足如下条件：

$$\Phi(0)=0,\quad \mathrm{Im}[\Phi'(0)]=0$$

令 $$a_j=\tilde{a}_j+i\hat{a}_j,\quad b_j=\tilde{b}_j+i\hat{b}_j$$

式中“～”代表实部，“^”代表虚部（以下均同此）。于是

$$K=\int_C\{[\mathrm{Re}(\Phi_n+t\bar{\Phi}'_n+\bar{\psi}_n-f)]^2$$

$$+[\mathrm{Im}(\Phi_n+t\bar{\Phi}'_n+\bar{\psi}_n-f)]^2\}ds$$

为最小的条件是：

$$\frac{\partial K}{\partial\tilde{a}_j}=\frac{\partial K}{\partial\hat{a}_j}=0,\quad \frac{\partial K}{\partial\tilde{b}_j}=\frac{\partial K}{\partial\hat{b}_j}=0$$

因为 $\hat{a}_1=0$（a_1 是实数），所以 $\mathrm{Im}[\Phi'(0)]=0$ 和 $\Phi(0)=0$ 是得到满足的。由此得到 $4n+1$ 个方程，以求 $4n+1$ 个未知系数：

$$\tilde{a}_1,\ \tilde{a}_2,\ \hat{a}_2,\cdots\tilde{a}_n,\ \hat{a}_n$$

$$\tilde{b}_0,\ \hat{b}_0,\ \tilde{b}_1,\ \hat{b}_1,\cdots\tilde{b}_n,\ \hat{b}_n$$

3-11 第一个基本问题的一种近似解法

上节所述方法的缺点在于方程数目很多。这里介绍一种较为方便的解法。

已知函数 $\Phi_j(z)$ 和 $\psi_j(z)$，可以作出与它们相应的主矢量函数

$$F_j(t)=\Phi_j(t)+t\overline{\Phi'_j(t)}+\overline{\psi_j(t)}$$

是 $L_2(C)$ 空间上的完全序列。这也就是说在 C 上平方可积且满足 $\mathrm{Re}\left[\int_C\overline{g(t)}dt\right]=0$ 的所有函数 $g(t)$ 的空间上，$F_j(t)$ 是完全序列。这也就是说，在 C 上的任一平方可积函数 $g(t)$ 可以用 $\sum_{j=1}^{n}\alpha_jF_j$ 任意平均逼近。确切地说，给任意 $\varepsilon>0$，我们能找到一组常数 $\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\alpha_n$，使得

$$\int_C |g(t)-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j F_j(t)|^2|dt|<\varepsilon$$

那么自然可以利用以上的方法，来求$\varphi_i(z)$和$\psi_i(z)$。若有$A^*\in T$，$\varphi_i(A^*)=\alpha$，$\mathrm{Im}[\varphi_i'(A^*)]=\beta$，选择$\alpha_j^{(n)}$使$\int_C|\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^{(n)}F_j-f|^2ds$最小。则有

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^{(n)}\varphi_j(z)\to\varphi(z)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^{(n)}\psi_j(z)\to\psi(z)$$

写$\alpha_j^{(n)}$的原因是当n变化时，$\alpha_j^{(n)}$也变。

我们按这个道理，求近似解。曾假设

$$\varphi_n(z)=a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n$$
$$\psi_n(z)=b_0+b_1z+\cdots+b_nz^n$$
$$F_n=\varphi_n+z\overline{\varphi_n'}+\overline{\psi_n}$$

可取

$$\varphi=0,\quad \psi=1,\quad \psi=z,\quad z^2,\quad \cdots z^n$$
$$\psi=i,\quad \psi=iz,\quad iz^2,\quad \cdots iz^n$$
$$\psi=0,\quad \varphi=z,\quad \varphi=z^2,\quad z^3,\quad \cdots z^n$$
$$\varphi=iz^2,\quad iz^3,\quad \cdots iz^n$$

把它们代入F_n的式中去，得到

$$F_1=1,\ F_2=-i,\ F_3=2z,\ F_4=\bar{z},\ F_5=-i\bar{z},$$
$$F_6=z^2+2z\bar{z},\cdots,\ F_{4n+2}=z^{n+1}+(n+1)z\bar{z}^n,$$
$$F_{4n+3}=iz^{n+1}-i(n+1)z\bar{z}^n,$$
$$F_{4n+4}=\bar{z}^{n+1},\ F_{4(n+1)+1}=-i\bar{z}^{n+1};\qquad (n=1,\ 2,\cdots)$$

我们取$0\in T$，$\varphi(0)=0$，$\mathrm{Im}[\varphi'(0)]=0$。取适当的参数$\alpha_k^{(j)}$，写出新的序列如下

$$F_j^*=\sum_{k=1}^{j}\alpha_k^{(j)}F_k \qquad (\alpha_k^{(j)}\text{ 为实数})$$

因为 F_k 是线性无关的，所以由此组成新的线性无关函数序列满足以下关系

$$\int_C (\overline{F}_i^*\cdot F_j^*+F_i^*\cdot\overline{F}_j^*)ds=\begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j\end{cases}$$

令边界曲线长为 l。我们选择

$$F_1^*=\alpha_1^{(1)}F_1$$

$$\alpha_1^{(1)}=\frac{1}{\sqrt{\int_C 2|F_1|^2ds}}=\frac{1}{\sqrt{2l}}$$

设已求出

$$F_1^*,\ F_2^*,\ \cdots,\ F_k^*$$

满足正交条件，欲求 F_{k+1}^*。

设 $F_{k+1}^{**}=F_{k+1}+\alpha_1^{(k+1)}F_1^*+\cdots+\alpha_k^{(k+1)}F_k^*$

这里 $\alpha_1^{(k+1)},\cdots,\alpha_k^{(k+1)}$ 为实数，并且

$$\int_C (F_{k+1}^{**}\cdot\overline{F}_j^*+\overline{F}_{k+1}^{**}\cdot F_j^*)ds=0 \qquad (j=1,\ 2,\cdots k)$$

于是

$$\int_C (F_{k+1}^{**}\cdot\overline{F}_j^*+\overline{F}_{k+1}^{**}\cdot F_j^*)ds=\int_C (F_{k+1}\cdot\overline{F}_j^*+\overline{F}_{k+1}\cdot F_j^*)ds$$

$$+\alpha_1^{(k+1)}\int_C (F_1^*\cdot\overline{F}_j^*+\overline{F}_1^*\cdot F_j^*)ds+\cdots+\alpha_j^{(k+1)}$$

$$\times\int_C (F_j^*\cdot\overline{F}_j^*+\overline{F}_j^*\cdot F_j^*)ds+\alpha_k^{(k+1)}\int_C (F_k^*\cdot\overline{F}_j^*+\overline{F}_k^*\cdot F_j^*)ds$$

由此得到

$$\int_C (F_{k+1}\overline{F}_j^*+\overline{F}_{k+1}\cdot F_j^*)ds+\alpha_j^{(k+1)}=0$$

我们可以取

$$\overline{F}^{*}_{k+1}=\frac{\overline{F}^{**}_{k+1}}{\sqrt{2\int_C |F^{**}_{k+1}|^2 ds}}$$

F^{**}_{k+1} 与 F^{*}_{1}, F^{*}_{2}, …, F^{*}_{k} 是正交的，而且 F^{*}_{1}, F^{*}_{2}, …, F^{*}_{k} 是线性无关的，当然 F^{**}_{k+1} 不是零。于是可以说我们构造了函数序列 F^{*}_{1}, F^{*}_{2}, …, F^{*}_{k+1}。

若在 C 上，已知 $f(t)$，并且 F^{*}_{j} 是已经求到的，那么可以使

$$I=\int_C \left| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j F^{*}_{j}- f \right|^2 ds$$

为最小，以求 α_j 之值。

$$I=\int_C \left| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j F^{*}_{j}- f \right| \overline{\left| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j F^{*}_{j}- f \right|} ds$$

$$=\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2}\alpha_j^2- \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \int_C (\overline{F}^{*}_{j}\cdot f+\bar{j}\cdot F^{*}_{j})ds+\int_C f\bar{f}ds$$

取

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha_j}=0$$

所以得到

$$\alpha_j=\int_C (\overline{F}^{*}_{j}\cdot f+\bar{j}\cdot F^{*}_{j})ds$$

这里 α_j 只与 F^{*}_{j} 有关，不牵涉到以前的数值，是很大的优点。当 α_j 的个数很多时，这点很重要。由 F_j 构成 F^{*}_{j} 的过程叫做葛拉姆—施密特（Gram-Schmidt）正交化过程。

关于弹性力学第二个基本问题的近似解，与此相似，只要求 $\varphi_n(A^*)=0$，$A^*\in T$。

若所研究的区域是第三类无限区域，则应取

$$\varphi_n(z)=a_1z^{-1}-a_2z^{-2}+\cdots+a_nz^{-n}$$

$$\psi_n(z)=b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_nz^{-n}$$

原点应在 T 外。

〔例题 12〕 以起重机挂钩为例，利用所述方法求应力分量。受力情况如图 3-23 所示。

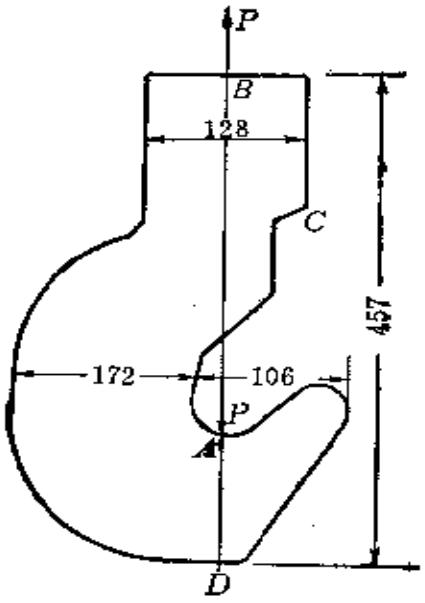


图 3-23

设 $$F_1=1,\ F_2=i,\ F_3=2z,\ F_4=\bar{z}$$
$$F_5=i\bar{z},\ F_6=z^2+2z\bar{z}$$

令 $F_1^*=\alpha_1 F_1$，于是

$$\alpha_1^{(1)}=\frac{1}{\sqrt{2\int_C |F_1|^2 ds}}$$

现在 $l=146$，则

$$F_1^*=\frac{1}{\sqrt{2l}}=\frac{1}{\sqrt{2\times 146}}=0.05852$$

$$F_2^{**}=F_2+\alpha_1^{(2)}F_1^*$$

$$\alpha_1^{(2)}=-\int_C (F_2\cdot\overline{F}_1^*+\overline{F}_2\cdot F_1^*)ds$$

因为 $F_2=-i$，$\overline{F}_2=+i$，故

$$\alpha_1^{(2)} = -\int_C (-i\overline{F}_1^* + i\overline{F}_1^*)ds = 0$$

这里 $F_1^* = \overline{F}_1^*$，于是 $F_2^{**} = -i$

$$F_2^* = \frac{F_2^{**}}{\sqrt{2\int_C |F_2^{**}|^2 ds}} = \frac{F_2^{**}}{\sqrt{2l}} = \frac{-i}{\sqrt{2\times 146}} = 0.05852\,i$$

同样可得出

$$F_3^{**} = F_3 + \alpha_1^{(3)} F_1^* + \alpha_2^{(3)} F_2^* = 2z + \alpha_1^{(3)} \times 0.05852 + \alpha_2^{(3)}(-0.05852\,i)$$

$$\alpha_1^{(3)} = -\int_C (F_3 \cdot \overline{F}_1^* + \overline{F}_3 \cdot F_1^*)ds = -\int_C 4 \times 0.05852\,x\,ds$$

$$\alpha_2^{(3)} = -\int_C (F_3 \cdot \overline{F}_2^* + \overline{F}_3 \cdot F_2^*)ds = +\int_C 4 \times 0.05852\,y\,ds$$

式中

$$F_3 \cdot \overline{F}_1^* + \overline{F}_3 \cdot F_1^* = 2\mathrm{Re}[F_3 \cdot F_1^*] = 4 \times 0.05852\,x$$

$$\int_C x\,ds = -373.0, \quad \int_C y\,ds = 893.2$$

可以用近似方法计算此积分，在负荷点附近要多计算几项。

$$F_3^{**} = X_{F_3^{**}} + iY_{F_3^{**}} = 2x + 5.12516 + i[2y - 12.3927]$$

$$F_3^* = \frac{F_3^{**}}{577.0552}$$

与上述作法一样可得

$$F_4^* = X_{F_4^{**}} + iY_{F_4^{**}} = x + 2.56258 + 0.24837 X_{F_3^{**}} + i[-y + 6.16935 + 0.24837 Y_{F_3^{**}}]$$

$$F_4^* = \frac{F_4^{**}}{250.4114}$$

$$F_5^{**} = X_{F_5^{**}} + iY_{F_5^{**}} = -y + 6.19639 + 0.0577 X_{F_3^{**}} + 0.0761066 X_{F_4^{**}} + i[-x - 2.56258 + 0.0577 Y_{F_3^{**}} + 0.0761066 X_{F_4^{**}}]$$

$$F_5^*=\frac{F_5^{**}}{285.95561}$$

$$F_6^{**}-X_{F_6^{**}}+iY_{F_6^{**}}=3x^2+y^2-486.66709+3.4486016X_{F_3^{**}}$$
$$+8.79716X_{F_4^{**}}+10.89998X_{F_5^{**}}+i\,[2xy-1.14286$$
$$+3.44860Y_{F_3^{**}}+8.79716Y_{F_4^{**}}+10.89998Y_{F_5^{**}}]$$

$$F_6^*=\frac{F_6^{**}}{4931.58}$$

还可以再求 F_7^*, …。现在求 α_j。

由图 3-23 可知：

在 ACB 部分，取 $f=1$

在 BDA 部分，取 $f=0$

由 $\alpha_j=\int_C (F_j^*\cdot\bar{j}+f\cdot\bar{F}_j^*)ds$ 可知

$$\alpha_1=\int_C (F_1^*\cdot\bar{j}+\bar{F}_1^*\cdot f)ds=\frac{1}{2}\int_A^B (0.05852$$
$$+0.05852)ds=2.69194$$

同样可得到

$$\alpha_2=0$$
$$\alpha_3=0.88296$$
$$\alpha_4=+1.52273$$
$$\alpha_5=-1.18842$$
$$\alpha_6=-0.59008$$

按已知 6 个结果，求得的近似式为：

$$F_a=\alpha_1F_1^*+\alpha_2F_2^*+\alpha_3F_3^*+\alpha_4F_4^*+\alpha_5F_5^*+\alpha_6F_6^*$$

代入 α_j 常数后，得到

$$F_a=-0.0003589x^2-0.0001196y^2+0.0054591y$$
$$+0.0085101x+0.1168745+i\,[-0.0002392xy$$
$$+0.0054639x-0.0007163y-0.0146315]$$

这只是大体近似在力作用点附近情况，应再多计算几项。最

好是 F_j^* 与 f 十分近似后再求 F_e，这样的结果比较满意。

因为　　$F=\partial u/\partial x+i\,\partial u/\partial y$，$\partial u/\partial x=\mathrm{Re}[F]$

$\partial u/\partial y=\mathrm{Im}[F]$

所以得到

$$X_x=-\frac{\partial \mathrm{Im}[F_e]}{\partial y}\ ,\quad X_y=-\frac{\partial \mathrm{Re}[F_e]}{\partial y}$$

$$Y_y=\frac{\partial \mathrm{Re}[F_e]}{\partial x}$$

3-12　多连通区弹性力学第一个（或第二个）基本问题的解

对于多连通区可以引用与上述内容基本相同的处理方法。

在多连通区中，令

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\omega(t)dt}{t-z}+\sum_{j=1}^{m}\frac{b_j}{z-z_j}$$

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\overline{\omega(t)}dt}{t-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\omega(t)d\bar{t}}{t-z}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\bar{t}\omega(t)dt}{(t-z)^2}+\sum_{j=1}^{m}\frac{b_j}{z-z_j}$$

其 $C=C_0\cup C_1\cup\cdots\cup C_m$。$C_0$，$C_1$，…，$C_m$ 是多连通区的边界曲线。它们是分段充分光滑的。

可取

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=0}^{m}\int_{C_j}\frac{\omega(t)}{t-z}dt+\sum_{j=1}^{m}\frac{b_j}{z-z_j}$$

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=0}^{m}\left\{\int_{C_j}\frac{\overline{\omega(t)}dt}{t-z}+\int_{C_j}\frac{\omega(t)d\bar{t}}{t-z}\right.$$

$$\left.-\int_{C_j}\frac{\bar{t}\omega(t)dt}{(t-z)^2}\right\}+\sum_{j=1}^{m}\frac{b_j}{z-z_j}$$

$\varphi_j(z)$，$\psi_j(z)$ 是 S_j 中的解析函数。S_0 在 C_0 以内，S_j 是 C_j 以外的区域（见图 3-24）。

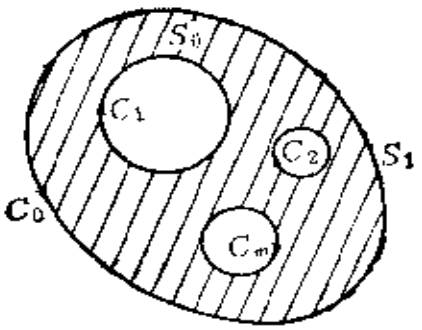


图 3-24

这里

$$\varphi_j(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_j}\frac{\omega(t)dt}{t-z}$$

$$\psi_j(z)=\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{C_j}\frac{\omega(t)dt}{t-z}+\int_{C_j}\frac{\omega(t)dt}{t-z}-\int_{C_j}\frac{\bar{t}\,\omega(t)dt}{t-z}\right]$$

我们选取

$$\varphi_n(z)=a_1^{(0)}z+a_2^{(0)}z^2+\cdots+a_n^{(0)}z^n$$
$$+\frac{a_1^{(1)}}{z-z_1}+\frac{a_2^{(1)}}{(z-z_1)^2}+\cdots+\frac{a_n^{(1)}}{(z-z_1)^n}$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{a_1^{(m)}}{z-z_m}+\frac{a_2^{(m)}}{(z-z_m)^2}+\cdots+\frac{a_n^{(m)}}{(z-z_m)^n}$$

$$\psi_n(z)=b_0^{(0)}+b_1^{(0)}z+b_2^{(0)}z^2+\cdots+b_n^{(0)}z^n$$
$$+\frac{b_1^{(1)}}{z-z_1}+\frac{b_2^{(1)}}{(z-z_1)^2}+\cdots+\frac{b_n^{(1)}}{(z-z_1)^n}$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{b_1^{(m)}}{z-z_m}+\frac{b_2^{(m)}}{(z-z_m)^2}+\cdots+\frac{b_n^{(m)}}{(z-z_m)^n}$$

式中 z_1，z_2，…，z_m 是 C_1，C_2，…，C_m 曲线内的任一点。$a_j^{(k)}$，$b_j^{(k)}$（$j=1,2,\cdots,n$，$k=0,1,\cdots,m$）是复常数。为了确定 $a_j^{(k)}$，$b_j^{(k)}$ 及 $\beta_n^{(k)}$ 之值，我们取下式最小

$$I=\int_C|\varphi_n+z\bar{\varphi}_n'+\bar{\psi}_n+\beta_n^{(k)}-f|^2ds$$

当 $z_0 \in T$ 时，且

$$\varphi_n(z_0) = 0, \quad \mathrm{Im}[\varphi_n'(z_0)] = 0$$

于是得出

$$\varphi_n(z) \to \varphi(z), \quad \psi_n(z) \to \psi(z)$$

这里 $\varphi(z)$, $\psi(z)$ 是方程的唯一解。其证明与单连通区情况相似，不再多述。这种方法在实际计算时是比较繁杂的。

3-13 利用求极值的方法近似解圆环的第二个基本问题

若有一同心圆环区域 T（图 3-25）。C_0 和 C_1 是圆环的边界，C_1 是内圆周，C_0 是外圆周，$C = C_0 \cup C_1$。在边界上有分段连续

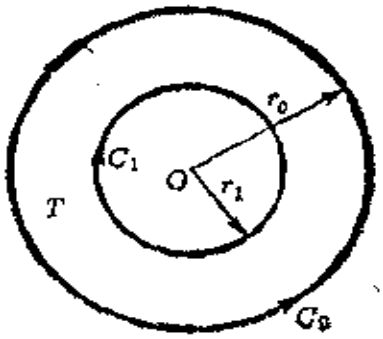


图 3-25

函数 $g(t) = u(t) + iv(t)$。用求极值的方法解此一般问题。此时

$$\nu^* \varphi(z) - t\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} = -\frac{\nu^*}{2\pi(1+\nu^*)} A \ln(t \cdot \bar{t}) - \frac{t}{2\pi(1+\nu^*)} \frac{\overline{A}}{\bar{t}} + 2\mu g(t) \qquad (3\text{-}13\text{-}1)$$

设

$$\left.\begin{aligned} \varphi_k(z) &= \sum_{j=-k}^{k} a_j^{(k)} z^j, \qquad a_0^{(k)} = 0 \\ \psi_k(z) &= \sum_{j=-k}^{k} b_j^{(k)} z^j \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}13\text{-}2)$$

因为在位移问题中，$\varphi_k(z)$ 相差一个复常量，故可令 $a_0^{(k)} = 0$。

于是，可在下列积分中取极值

$$I=\int_C\left|\nu^*\varphi_k-t\overline{\varphi_k'}-\overline{\psi_k}-\frac{\nu^*}{2\pi(1+\nu^*)}A\ln(t\cdot\bar{t})\right.$$
$$\left.+\frac{t}{2\pi(1+\nu^*)}\frac{\overline{A}}{\bar{t}}-2\mu g(t)\right|^2 ds \qquad (3\text{-}13\text{-}3)$$

已经证明函数 $\varphi_k''(z)$，$\psi_k'(z)$ 在圆环域中收敛于真实解函数 $\varphi''(z)$，$\psi'(z)$，为保证 $\varphi_k(z)$，$\psi_k(z)$ 也收敛于 $\varphi(z)$，$\psi(z)$，须令 $\varphi_k(A^*)=0$，$\mathrm{Im}[\varphi_k'(A^*)]=0$。$A^*$ 是区域中任一点。

把 $\varphi_k(z)$ 和 $\psi_k(z)$ 代入积分（3-13-3）中，直接求极值。

为解题方便，先计算以下各式，这里是圆周曲线，故令 $t=r_ie^{i\vartheta}$，（$i=0$，1）。

于是可知

$$\int_{C_i}t^k\cdot t^j d\vartheta=0,\quad k+j\neq 0$$

$$\int_{C_i}t^k\cdot t^{-k}d\vartheta=\begin{cases}2\pi, & i=0\\ -2\pi, & i=1\end{cases}$$

$$\int_C t^k\cdot t^{-k}d\vartheta=0$$

在 C_0 上，正向是反时针，在 C_1 上是顺时针方向。

$$\int_{C_i}t^k t^{-j}d\vartheta=0,\quad k\neq j,\quad i=0,\ 1$$

$$\int_{C_i}t^k\,\bar{t}^k d\vartheta=\begin{cases}2\pi r_0^{2k}, & i=0\\ -2\pi r_1^{2k}, & i=1\end{cases}$$

$$\int_C t^k\,\bar{t}^k d\vartheta=2\pi(r_0^{2k}-r_1^{2k})$$

此外，设

$$2\mu\int_C g(t)t^j d\vartheta=A_j,\quad 2\mu\int_C g(t)\bar{t}^j d\vartheta=B_j$$

而且

$$\int_C \varphi_k(t)t^j d\vartheta = 0, \quad j = -k, \cdots + k$$

$$\int_C t\overline{\varphi_k'(t)}\,t^j d\vartheta = \int_C [\bar{a}_1^{(k)} + 2\bar{a}_2^{(k)}\bar{t} + \cdots + k\bar{a}_k^{(k)}\bar{t}^{k-1}]t^{j+1}d\vartheta$$

$$+ \int_C (j+2)\bar{a}_{j+2}^{(k)} \cdot \bar{t}^{j+1} \cdot t^{j+1}d\vartheta$$

$$= \begin{cases} \bar{a}_{j+2}^{(k)} 2\pi(j+2)[r_0^{2(j+1)} - r_1^{2(j+1)}], & j = -k, \cdots, +k \\ & j+2 \neq 0 \\ 0, & j+2 = 0 \end{cases}$$

$$\int_C \overline{\psi_k(t)}\,t^j d\vartheta = 2\pi\bar{b}_j^{(k)}[r_0^{2j} - r_1^{2j}], \quad j = -k, \cdots, +k$$

$$\int \varphi_k(t)\bar{t}^j d\vartheta = 2\pi a_j^{(k)}[r_0^{2j} - r_1^{2j}] \qquad j = -k, \cdots, +k$$

$$\int_C t\overline{\varphi_k'(t)}\,\bar{t}^j d\vartheta = \int_C [\bar{a}_1^{(k)} + 2\bar{a}_2^{(k)}\bar{t} + \cdots$$

$$+ (-j+2)\bar{a}_{-j+2}^{(k)}\bar{t}^{-j+1} + \cdots + k\bar{a}_k^{(k)}t^{k-1}]\bar{t}^j \cdot t d\vartheta$$

$$= \begin{cases} 2\pi(-j+2)[r_0^2 - r_1^2]\bar{a}_{-j+2}^{(k)}, & j = -k, \cdots, +k \\ & j \neq 2 \\ 0, & j = 2 \end{cases}$$

$$\int_C \bar{\psi}_k \bar{t}^j d\vartheta = 0 \qquad j = -k, \cdots, +k$$

$$\int_C \ln|t|\,t^j d\vartheta = \begin{cases} 0 & j \neq 0 \\ 2\pi(\ln r_0 - \ln r_1) & j = 0 \end{cases}$$

$$\int_C \ln|t|\,\bar{t}^j d\vartheta = 0 \qquad j \neq 0$$

$$\int_C \frac{t}{\bar{t}} t^j d\vartheta = \int_C \frac{1}{r^2} t^{j+2} d\vartheta = \begin{cases} 0, & j \neq -2 \\ 2\pi(1/r_0^2 - 1/r_1^2), & j = -2 \end{cases}$$

$$\int_C \frac{t}{\bar{t}} \bar{t}^j d\vartheta = \begin{cases} 0 & j \neq 2 \\ 2\pi(1/r_0^2 - 1/r_1^2) & j = 2 \end{cases}$$

令

$$I = \int_C |G(t)|^2 ds$$

则

$$I=\int_C\{(\mathrm{Re}[G])^2+(\mathrm{Im}[G])^2\}ds=\int_C(G_1^2+G_2^2)ds$$

而且

$$a_j^{(k)}=\mathrm{Re}[a_j^{(k)}]+i\,\mathrm{Im}[a_j^{(k)}]=\tilde{a}_j^{(k)}+i\hat{a}_j^{(k)}$$
$$b_j^{(k)}=\mathrm{Re}[b_j^{(k)}]+i\,\mathrm{Im}[b_j^{(k)}]=\tilde{b}_j^{(k)}+i\hat{b}_j^{(k)}$$
$$A=\mathrm{Re}[A]+i\,\mathrm{Im}[A]=\tilde{A}+i\hat{A}$$

又取如下偏导数，

$$\frac{\partial}{\partial\tilde{a}_j^{(k)}}\int_C[G_1^2+G_2^2]ds=0,\ \cdots$$

$$\frac{\partial}{\partial\hat{A}}\int_C[G_1^2+G_2^2]ds=0$$

首先对 $\tilde{b}_j^{(k)}$ 和 $\hat{b}_j^{(k)}$ 求导。

我们知道：

$$\nu^*\varphi_k=\sum_{j=-k}^{k}\nu^*a_j^{(k)}t^j=\sum_{j=-k}^{k}\nu^*[(\tilde{a}_j^{(k)}\cdot\tilde{t}^j-\hat{a}_j^{(k)}\hat{t}^j)+i(\tilde{a}_j^{(k)}\cdot\hat{t}^j+\hat{a}_j^{(k)}\cdot\tilde{t}^j)]$$

$$t\bar{\varphi}_k'=\sum_{j=-k}^{k}j|t|^2[(\tilde{a}_j^{(k)}\tilde{t}^{j-2}-\hat{a}_j^{(k)}\hat{t}^{j-2})+i(\tilde{a}_j^{(k)}\hat{t}^{j-2}+\hat{a}_j^{(k)}\tilde{t}^{j-2})]$$

$$\bar{\psi}_k=\sum_{j=-k}^{k}\bar{b}_j^{(k)}\bar{t}^j=\sum_{j=-k}^{k}[(\tilde{b}_j^{(k)}\tilde{t}^j-\hat{b}_j^{(k)}\hat{t}^j)+i(\hat{b}_j^{(k)}\tilde{t}^j+\tilde{b}_j^{(k)}\hat{t}^j)]$$

$$-\frac{\nu^*}{2\pi(1+\nu^*)}A\ln t\,\bar{t}+\frac{t}{2\pi(1+\nu^*)}\frac{\bar{A}}{\bar{t}}$$
$$=\frac{\nu^*}{2\pi(1+\nu^*)}\left\{-\ln|t|^2(\tilde{A}+i\hat{A})+\frac{1}{\nu^*}\left(\left[\frac{\tilde{t}}{\bar{t}}\right]+i\left[\frac{\hat{t}}{\bar{t}}\right]\right)(\tilde{A}-i\hat{A})\right\}$$

$$=\frac{\nu^*}{2\pi(1+\nu^*)}\left\{\left(-\ln|t|^2\cdot\tilde{A}+\frac{1}{\nu^*}\left[\frac{\tilde{t}}{t}\right]\tilde{A}+\frac{1}{\nu^*}\left[\frac{\hat{t}}{t}\right]\hat{A}\right)\right.$$
$$\left.+i\left(-\ln|t|^2\hat{A}+\frac{1}{\nu^*}\left[\frac{\hat{t}}{t}\right]\tilde{A}-\frac{1}{\nu^*}\left[\frac{\tilde{t}}{t}\right]\hat{A}\right)\right\}$$

于是

$$G_1=\sum_{j=-k}^{k}\{\nu^*(\tilde{a}_j^{(k)}\tilde{t}^j-\hat{a}_j^{(k)}\hat{t}^j)-j|t|^2(\tilde{a}_j^{(k)}\tilde{t}^{j-2}-\hat{a}_j^{(k)}\hat{t}^{j-2})$$
$$-(\tilde{b}_j^{(k)}\tilde{t}^j-\hat{b}_j^{(k)}\hat{t}^j)\}+\frac{\nu^*}{2\pi(1+\nu^*)}$$
$$\times\left(-\tilde{A}\ln|t|^2+\frac{1}{\nu^*}\tilde{A}\left[\frac{\tilde{t}}{t}\right]+\frac{1}{\nu^*}\left[\frac{\hat{t}}{t}\right]\hat{A}\right)$$

$$G_2=\sum_{j=-k}^{k}\{\nu^*(\tilde{a}_j^{(k)}\hat{t}^j+\tilde{t}^j\hat{a}_j^{(k)})-j|t|^2(\tilde{a}_j^{(k)}\hat{t}^{j-2}+\hat{a}_j^{(k)}\tilde{t}^{j-2})$$
$$-(\hat{b}_j^{(k)}\tilde{t}^j+\tilde{b}_j^{(k)}\hat{t}^j)\}+\frac{\nu^*}{2\pi(1+\nu^*)}$$
$$\times\left(-\hat{A}\ln|t|^2+\frac{1}{\nu^*}\tilde{A}\left[\frac{\hat{t}}{t}\right]-\frac{1}{\nu^*}\left[\frac{\tilde{t}}{t}\right]\hat{A}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial\tilde{a}_j^{(k)}}\int_C(G_1^2+G_2^2)ds=\int_C G_1(\nu^*\tilde{t}^j-j|t|^2\tilde{t}^{j-2})ds$$
$$+\int_C G_2(\nu^*\hat{t}^j+j|t|^2\hat{t}^{j-2})ds=0$$

$$\frac{\partial}{\partial\hat{a}_j^{(k)}}\int_C(G_1^2+G_2^2)ds=\int_C G_1(-\nu^*\hat{t}^j+j|t|^2\hat{t}^{j-2})ds$$
$$+\int_C G_2(\nu^*\tilde{t}^j+j|t|^2\tilde{t}^{j-2})ds=0$$

$$\frac{\partial}{\partial\tilde{b}_j^{(k)}}\int_C(G_1^2+G_2^2)ds=\int_C(G_1\tilde{t}^j-G_2\hat{t}^j)ds=0$$

$$\frac{\partial}{\partial\hat{b}_j^{(k)}}\int_C(G_1^2+G_2^2)ds=\int_C(G_1\hat{t}^j+G_2\tilde{t}^j)ds=0$$

合并以上后二式，得到

$$\int_C(G_1+iG_2)(\tilde{t}^j+i\hat{t}^j)ds=0$$

即

$$\int_C Gt^j ds = 0 \quad (-k \leqslant j \leqslant -k)$$

合并以上前二式，得到

$$\int_C \nu^* G\bar{t}^j ds - \int_C j\,|t|^2 G\bar{t}^{j-2} ds = 0 \quad (\text{除 } j=0 \text{ 外，因为 } a_0^{(s)} = 0。)$$

与此相应，得到

$$\int_C G\bar{t}^j ds = 0，(\text{不适合于 } j=0 \text{ 的情况})。$$

为了明确，写为如下形式：

$$\int_C G ds = 0，\ \int_C Gt^j ds = 0，\ \int_C G\bar{t}^j ds = 0$$

最后得到

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{A}} \int_C (G_1^2 + G_2^2) ds = \int_C \left[G_1 \left(-\ln|t|^2 + \frac{1}{\nu^*}\left[\frac{\tilde{t}}{\bar{t}}\right]\right) + G_2 \frac{1}{\nu^*}\left[\frac{\hat{t}}{t}\right]\right] ds = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{A}} \int_C (G_1^2 + G_2^2) ds = \int_C \left[\frac{1}{\nu^*} G_1 \left[\frac{\hat{t}}{t}\right] - G_2 \left(\ln|t|^2 + \frac{1}{\nu^*}\left[\frac{\tilde{t}}{t}\right]\right)\right] ds = 0$$

合并这两个式子，得到

$$\int_C G(-\ln|t|^2) ds + \frac{1}{\nu^*} \int_C \bar{G} \frac{t}{t} ds = 0$$

又知道

$$\int_C \bar{G} \frac{t}{t} ds = \int_C \bar{G} \frac{t^2}{|t|^2} ds = 0$$

于是

$$\int_C G \ln|t| ds = \int_C (G \ln|t|)|t| d\vartheta = 0$$

若令

$$\int_{C_0} Gd\vartheta = a\,,\quad \int_{C_1} Gd\vartheta = b$$

积分

$$\int_C G|\,t\,|d\vartheta = r_0 a + r_1 b = 0$$

$$\int_C (G\ln|\,t\,|)|\,i\,|d\vartheta = |r_0|\ln|r_0|\,a + |r_1|\ln|r_1|\,b = 0$$

所以上式要满足时，必须是 $a = b = 0$。

我们知道 $a_0^{(k)} = 0$

$$\varphi_k(z) = \sum_{j=-k}^{k} a_j^{(k)} z^j \qquad (4k\text{ 个未知数})$$

$$\psi_k(z) = \sum_{j=-k}^{k} b_j^{(k)} z^j \qquad (4k+2\text{ 个未知数})$$

另外还有 $\widetilde{A}$ 和 $\hat{A}$ 两个未知数，总括起来为 $8k+4$ 个未知数，须要 $8k+4$ 个方程。

解这些方程如下：

由 $\int_C G\bar{t}^j d\vartheta = 0$ 及 $\int_C 2\mu g(t)\bar{t}^j d\vartheta = B_j \quad j \neq 0,\ j \neq 2$。

得到

$$2\pi\nu^* a_j^{(k)}(r_0^{2j} - r_1^{2j}) - 2\pi(2-j)\bar{a}_{2-j}^{(k)}(r_0^2 - r_1^2) = B_j$$

$$-2\pi(2-j)\bar{a}_{2-j}^{(k)}[r_0^{2-2j} - r_1^{2-2j}] - 2\pi\bar{b}_{-j}^{(k)}(r_0^{2j} - r_1^{2j}) = A_{-j}$$

由 $\int_C G\bar{t}^2 d\vartheta = 0$，得到

$$-2\pi b_{-2}^{(k)}(r_0^{-4} - r_1^{-4}) - \frac{\bar{A}}{(1+\nu^*)}(r_0^{-2} - r_1^{-2}) = A_{-2}$$

由 $\int_{C_0} Gd\vartheta = 0$，$\int_{C_1} Gd\vartheta = 0$，可知

$$-2\pi b_0^{(k)} - 4\pi\bar{a}_2^{(k)} r_0^2 - \frac{2\nu^*}{(1+\nu^*)} A\ln r_0 = A_0$$

$$+2\pi\bar{b}_0^{(k)} + 4\pi\bar{a}_2^{(k)} r_1^2 + \frac{2\nu^*}{(1+\nu^*)} A\ln r_1 = B_0$$

在这些式中，按 $g(t)$ 的积分可得 A_0，B_0，A_{-p}，B_p，A_{-j}, B_j。

令 $j=p$ 及 $j=-p+2$，代入 B_j 之式中，得到

$$\nu^* a_p^{(k)}(r_0^{2p}-r_1^{2p})-\bar{a}_{-p+2}^{(k)}(2-p)(r_0^2-r_1^2)=\frac{B_p}{2\pi}$$

$$\nu^* a_{-p+2}^{(k)}(r_0^{4-2p}-r_1^{4-2p})-\bar{a}_p^{(k)}p(r_0^2-r_1^2)=\frac{B_{2-p}}{2\pi}$$

由此可解出 $a_p^{(k)}$ 及 $a_{2-p}^{(k)}$ 如下：

$$a_p^{(k)}=\frac{2\pi}{\Delta}\{\nu^*(r_0^{4-2p}-r_1^{4-2p})B_p+(2-p)(r_0^2-r_1^2)\overline{B}_{2-p}\}$$

$$a_{2-p}^{(k)}=\frac{2\pi}{\Delta}\{B_{2-p}\nu^*(r_0^{2p}-r_1^{2p})+p\overline{B}_p(r_0^2-r_1^2)\}$$

于是得到

$$b_{-j}^{(k)}=\frac{-1}{2\pi(r_0^{-2j}-r_1^{-2j})}\{\overline{A}_{-j}+\frac{4\pi^2}{\Delta}(2-j)(r_0^{2-2j}-r_1^{2-2j})$$

$$\times[\overline{B}_{2-j}\nu^*(r_0^{2j}-r_1^{2j})+jB_j(r_0^2-r_1^2)]\}$$

式中

$$\Delta=4\pi^2[\nu^{*2}(r_0^{2p}-r_1^{2p})(r_0^{4-2p}-r_1^{4-2p})+p(p-2)(r_0^2-r_1^2)^2]$$

又得到

$$4\pi(r_1^2-r_0^2)a_2^{(k)}+\frac{2\nu^* A}{(1+\nu^*)}\ln\frac{r_1}{r_0}=A_0+B_0$$

$$2\pi(r_0^4-r_1^4)\nu^* a_2^{(k)}=\bar{B}_2+\frac{r_0^2-r_1^2}{(1+\nu^*)}A$$

令

$$\Lambda_1=\frac{4\pi}{1+\nu^*}\left[(r_1^2-r_0^2)^2+\nu^{*2}(r_1^4-r_0^4)\ln\frac{r_1}{r_0}\right]$$

则

$$a_2^{(k)}=\frac{1}{(1+\nu^*)\Lambda}\left[(A_0-B_0)(r_1^2-r_0^2)-2\nu^*\bar{B}_2\ln\frac{r_1}{r_2}\right]$$

$$A=2\pi(r_1^2-r_0^2)\{(A_0+B_0)\nu^*(r_1^2+r_0^2)-2\bar{B}_2\}/\Delta_1$$

$$b_0^{(k)}=\left[\overline{B}_0-4\pi a_2^{(k)}r_1^2-\frac{2\nu^*}{1+\nu^*}\ln r_1\cdot\overline{A}\right]/2\pi$$

$$b_{-2}^{(k)}=\frac{1}{2\pi(r_1^{-4}-r_0^{-4})}\left[\overline{A}_{-2}+\frac{A}{1+\nu^*}(r_0^{-2}-r_1^{-2})\right]$$

我们求得 $a_2^{(k)}$, $b_2^{(k)}$, $b_0^{(k)}$, A, $a_j^{(k)}$, $a_{2-j}^{(k)}$, $b_{-j}^{(k)}$, 但这些都与（k）无关，故可略去，由此得到

$$\varphi_k=\sum_{j=-k}^{k}a_j\cdot z^j,\quad a_0=0$$

$$\psi_k=\sum_{j=-k}^{k}b_j\cdot z^j$$

也可看出，这就是罗朗展开式。

〔例题 13〕 例如在边界 C_1 上有位移为 u_0，这时 $g(t)=u_0$，试求 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$。

此时，

$$2\mu\int_C g(t)t^j d\vartheta=A_j=0\qquad j\neq 0$$

$$2\mu\int_C g(t)\bar{t}^j d\vartheta=B_j=0$$

$$A_0=-4\pi\mu u_0,\quad B_0=-4\pi\mu u_0$$

由这些条件，可知

$$a_j=0\ (j\neq 2),\quad b_j=0\ (j\neq 0,\ j\neq 2)$$

于是

$$\varphi_k(z)=\varphi(z)=a_2z^2$$

$$\psi_k(z)=\psi(z)=b_{-2}z^{-2}+b_0\qquad k\geqslant 2$$

$$a_2=-\frac{2\mu}{\nu^{*2}(r_0^2+r_1^2)(\ln r_1-\ln r_0)+r_1^2-r_0^2}u_0$$

$$b_{-2}=\frac{\mu\nu^*r_1^2r_0^2}{r_1^2-r_0^2+\nu^{*2}(r_1^2+r_0^2)(\ln r_1-\ln r_0)}u_0$$

$$A=-\frac{4\pi\mu(1+\nu^*)}{\nu^*(\ln r_1-\ln r_0)+\frac{r_1^2-r_0^2}{\nu^*(r_1^2+r_0^2)}}u_0$$

$$b_0=\frac{4\mu\left[r_1^2+\nu^{*2}\ln r_1\cdot(r_1^2+r_0^2)\right]}{\nu^{*2}(r_0^2+r_1^2)(\ln r_1-\ln r_0)+r_1^2-r_0^2}u_0$$

于是应力函数为：

$$\varphi(z)=-\frac{A}{2\pi(1+\nu^*)}\ln z+a_2z^2$$

$$\psi(z)=-\frac{\nu^*}{2\pi(1+\nu^*)}\bar{A}\ln z+b_{-2}z^{-2}+b_0$$

为了维持边界上的位移，需要边界上的作用力为$A=X+iY$。即$\tilde{A}=X$，$\hat{A}=Y$。

〔例题 14〕 在边界 C_1 上，$g(t)=i\alpha t$，求应力函数。

因为 $u_0=0$，所以 $A=0$，$a_2=0$，$b_0=0$，$b_{-2}=0$。由

$$2\mu\int_C g(t)t^j d\vartheta=A_j,\qquad 2\mu\int_C g(t)\bar{t}^j d\vartheta=B_j$$

可知

$$2i\mu\alpha\int_C t\cdot t^j d\vartheta=A_j,\ 2i\mu\alpha\int_C t\cdot t^j d\vartheta=B_j$$

$j=-1$ 时，$A_{-1}=-4\pi i\mu\alpha$，

$j\neq -1$ 时，$A_j=0$，

$j=1$ 时，$B_1=-4\pi i\mu\alpha r_1^2$，

$j\neq 1$ 时，$B_j=0$。

于是

$$\Delta_2=4\pi^2(r_0^2-r_1^2)^2(\nu^{*2}-1)$$

$$a_1=-8\pi^2 i\left[(\nu^*-1)(r_0^2-r_1^2)\alpha\mu r_1^2\right]/\Delta_2$$

$$b_{-1}=i\frac{2\mu r_0^2 r_1^2\alpha}{(r_0^2-r_1^2)}$$

$j\neq 1$ 时，$a_j=0$，

$j\neq -1$ 时，$b_j=0$。

于是得到

$$\varphi(z)=a_1z,\quad \psi(z)=b_{-1}z^{-1}$$

若合并弹性力学第一个和第二个问题，统一用幂级数解，结

果如下：

在半径为 $r_1 \leqslant |z| \leqslant r_2$ 的圆环域中分析其应力函数，把它表示为罗朗级数形式如下：

$$\varphi(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}\alpha_n z^n, \quad \psi(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}\beta_n z^n$$

其边界条件为：

$$\gamma_1\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}=F_1(t) \qquad t=r_1e^{i\theta}$$

$$\gamma_2\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}=F_2(t) \qquad t=r_2e^{i\theta}$$

把 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 代入上式后，得到

$$\gamma_1\left(\sum_{-\infty}^{\infty}\alpha_n t^n\right)+t\sum_{-\infty}^{\infty}n\bar{\alpha}_n\bar{t}^{n-1}+\sum_{-\infty}^{\infty}\bar{\beta}_n\bar{t}^n=F_1(t)$$

$$\gamma_2\left(\sum_{-\infty}^{\infty}\alpha_n t^n\right)+t\sum_{-\infty}^{\infty}n\bar{\alpha}_n\bar{t}^{n-1}+\sum_{-\infty}^{\infty}\bar{\beta}_n\bar{t}^n=F_2(t)$$

把上式两侧乘以 $e^{-ip\theta}d\theta$ 沿 $-\pi$ 到 π 积分后，得到

$$\gamma_1\alpha_p r_1^{2p}+(2-p)r_1^2\bar{\alpha}_{2-p}+\bar{\beta}_{-p}=\frac{r_1^p}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_1(t)\,e^{-ip\theta}d\theta$$

同理得到

$$\gamma_2\alpha_p\gamma_2^{2p}+(2-p)r_2^2\bar{\alpha}_{2-p}+\bar{\beta}_{-p}=\frac{r_2^p}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_2(t)\,e^{-ip\theta}d\theta$$

这里 $-\infty<p<\infty$。

二式相减后，得到

$$(\gamma_1r_1^{2p}-\gamma_2r_2^{2p})\alpha_p+(2-p)(r_1^2-r_2^2)\bar{\alpha}_{2-p}=c_p$$

式中

$$c_p=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[r_1^pF_1(r_1e^{i\theta})-r_2^pF_2(r_2e^{i\theta})\right]e^{-ip\theta}d\theta$$

把上二式中 $-p$ 换为 p，取共轭方程相减后，得到

$$\beta_p=\frac{1}{r_1^{-2}-r_2^{-2}}\{[\gamma_2r_2^{-2(p+1)}-\gamma_1r_1^{-2(p+1)}]\bar{\alpha}_{-p}+d_p\}$$

$$d_p=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[r_1^{p-2}\overline{F_1(r_1e^{i\theta})}-r_2^{p-2}\overline{F_2(r_2e^{i\theta})}\right]e^{-ip\theta}d\theta$$

把 c_p 式中的 p 用 $2-p$ 替换后，得到

$$(\gamma_1 r_1^{2(2-p)}-\gamma_2 r_2^{2(2-p)})\alpha_{2-p}+p(r_1^2-r_2^2)\alpha_p=c_{2-p}$$

解出 α_p 为

$$\alpha_p=[(\gamma_1 r_1^{2(2-p)}-\gamma_2 r_2^{2(2-p)})c_p-(2-p)(r_1^2-r_2^2)\bar{c}_{2-p}]/\Delta_3$$

式中

$$\Delta_3=(\gamma_1 r_1^{2p}-\gamma_2 r_2^{2p})(\gamma_1 r_1^{2(2-p)}-\gamma_2 r_2^{2(2-p)})-p(2-p)(r_1^2-r_2^2)^2$$

把 p 改为 $2-p$ 后，由 α_p 得到 α_{2-p}。这里 $\Delta_3\neq 0$。在边界上已知应力边值时，$\gamma_1=\gamma_2=1$。当 $p=0$，$p=1$ 及 $p=2$ 时，$\Delta_3=0$。现在分析如下三种情况。

当 $p=0$ 或 $p=2$ 时，

$c_0=2(r_1^2-r_2^2)\bar{\alpha}_2$，$c_2=\alpha_2(r_1^4-r_2^4)$，$\alpha_0$ 不定。α_0 是常量在求应力时不起作用，它相当刚体位移。合并 c_0 和 c_2 后，得到

$$(r_1^2+r_2^2)\bar{c}_0=2c_2$$

当 $p=1$ 时，

$$(r_1^2-r_2^2)(\alpha_1+\bar{\alpha}_1)=c_1$$

所以 c_1 是实数。由于 c_1 是实数，可知 $\alpha_0\neq\infty$。

在边界只有位移的问题中，$\gamma_1=\gamma_2=-\nu^*$。

当 $p=0$ 或 $p=2$ （$\Delta_3=0$）时，

$$c_0=2(r_1^2-r_2^2)\bar{\alpha}_2,\quad c_2=-\nu^*(r_1^4-r_2^4)\alpha_2$$

合并后，得到 $-\nu^*(r_1^2+r_2^2)\bar{c}_0=2c_2$。

若 $g_1(t)$ 和 $g_2(t)$ 分别作用于 $|t|=r_1$ 和 $|t|=r_2$ 上，则

$$F_j(t)=-2\mu g_j(t)-\frac{\nu^*(X+iY)}{2\pi(1+\nu^*)}\ln|t|+\frac{X-iY}{2\pi(1+\nu^*)}e^{2i\theta}\qquad(j=1,2)$$

又因为

$$c_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[F_1(r_1e^{i\theta})-F_2(r_2e^{i\theta})\right]d\theta$$

$$c_2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[r_1^2F_1(r_1e^{i\theta})-r_2^2F_2(r_2e^{i\theta})\right]e^{-2i\theta}d\theta$$

3-14 多连通区的联立积分方程组的解

在多连通区所用的劳瑞西拉—谢尔曼方程为：

$$\omega(t_0)+\frac{1}{\pi}\int_C\omega(t)d\vartheta-\frac{1}{\pi}\int_C\omega(t)e^{2i\theta}d\vartheta+\sum_{j=0}^{m}\left[\frac{b_j}{t_0-z_j}+\frac{\bar{b}_j}{\bar{t}_0-\bar{z}_j}\left(1-\frac{t_0}{t_0-z_j}\right)\right]+\int_{C_k}\omega(t)ds=f(t_0)\qquad(3\text{-}14\text{-}1)$$

对于第三类无限区域，j，$k=1$，2，…，m。

设有一多连通区，T_0 是曲线 C_0 以内的区域，T_1，T_2，…，T_m 是曲线 C_1，C_2，…C_m 以外的区域，而区域 T 为

$$T=T_0\cap T_1\cap\cdots\cap T_m$$

图 3-26 是多连通区的一个局部。

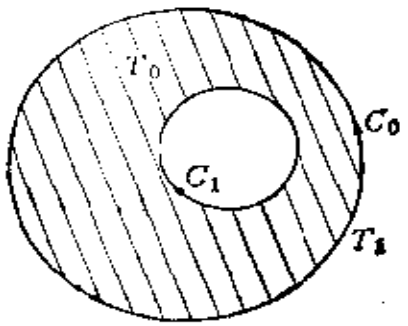


图 3-26

如同区域 T 是由区域 T_0，T_1，…等所构成的，对于区域 T 的解，也可以由区域 T_0，T_1，…等的解构成。每个区域 T_i 的解是容易求到的。在区域 T 中，除 T_i 外的任何一个区域都受到对 T_i 的解的影响。这个影响在区域的边界上以应力函数或位移函数的形式表示出来。如果原来的边界上有已知的应力函数或位移函数，那么，边界上新的函数就是已知原有函数与由其它区域单独求解后所得解对这个边界影响的和。

由谢尔曼方程可知

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\omega(t)dt}{t-z}+\sum_{j=1}^{m}\frac{b_j}{z-z_j}$$

$$\varphi(z)=\varphi_0(z)-\varphi_1(z)+\cdots+\varphi_m(z) \qquad (3\text{-}14\text{-}2)$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_0(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\omega(t)dt}{t-z}\\
\varphi_1(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{\omega(t)dt}{t-z}+\frac{b_1}{z-z_1}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\varphi_m(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_m}\frac{\omega(t)dt}{t-z}+\frac{b_m}{z-z_m}
\end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}14\text{-}3)$$

对于 $\psi(z)=\psi_0(z)+\psi_1(z)+\cdots+\psi_m(z)$ 也可以同样表示。而劳瑞西拉一谢尔曼方程为：

$$\begin{aligned}
&\omega(t_0)+\frac{1}{\pi}\int_{C_k}\omega(t)d\vartheta-\frac{1}{\pi}\int_{C_k}\overline{\omega(t)}e^{2i\vartheta}d\vartheta+\frac{b_k}{t_0-z_k}\\
&\quad+\frac{\bar{b}_k}{\bar{t}_0-\bar{z}_k}\left(1-\frac{t_0}{\bar{t}_0-\bar{z}_k}\right)+\int_{C_k}\omega(t)ds\\
&=-\frac{1}{\pi}\int_{C^{(k)}}\omega(t)d\vartheta+\frac{1}{\pi}\int_{C^{(k)}}\overline{\omega(t)}e^{2i\vartheta}d\vartheta\\
&\quad-\sum_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{m}\left\{\frac{b_j}{t_0-z_j}+\frac{\bar{b}_j}{\bar{t}_0-\bar{z}_j}\left(1-\frac{t_0}{\bar{t}_0-\bar{z}_j}\right)\right\}+f(t_0)
\end{aligned} \qquad (3\text{-}14\text{-}4)$$

式中 $C^{(k)}=C_0\cup C_1\cup\cdots\cup C_{k-1}\cup C_{k+1}\cup\cdots\cup C_m$。于是可知在 T_k 的边界上除 $f(t_0)$这个实际条件外，还存在“虚构负荷”项：

$$\begin{aligned}
g_k(t)=&-\frac{1}{\pi}\int_{C^{(k)}}\omega(t)d\vartheta+\frac{1}{\pi}\int_{C^{(k)}}\overline{\omega(t)}e^{2i\vartheta}d\vartheta\\
&-\sum\left\{\frac{b_j}{t_0-z_j}+\frac{\bar{b}_j}{\bar{t}_0-\bar{z}_j}\left(1-\frac{t_0}{\bar{t}_0-\bar{z}_j}\right)\right\}
\end{aligned} \qquad (3\text{-}14\text{-}5)$$

下面用 $g_k(t)$代表作用于边界 C_k 上的“虚构负荷”。$f_k(t)$代表已知实际负荷。

现以图3-26所示部分区域为例，分析边界上的负荷情况。我们已知总的边界条件，要求满足此条件的 $\varphi(z)$和 $\psi(z)$。若在 C_0 上为 $f_0(t)$，在 C_1 上为 $f_1(t)$。而 $g_0(t)$和$g_1(t)$分别代表 C_0 和 C_1 上的“虚构负荷”。

若 $\varphi_0(z)$及 $\psi_0(z)$是 T_0 中的应力函数，它们与 C_0 上的 $g_0(t)$是对应的。$\varphi_1(z)$和 $\psi_1(z)$是 T_1 中的应力函数，它们与 C_1 上的 $g_1(t)$ 相对应。于是在 C_0 上的实际负荷应为 g_0 与 g_1在 C_0 上的作用部分的和。同样在 C_1 上的实际负荷应为 g_1 与 g_0 在 C_1上的作用部分之和。这实际上就是由已知边界真实负荷求“虚构负荷”。

在劳瑞西拉—谢尔曼方程中，对于每一个等号右侧的项，都有唯一解。对于有限区域来说，当边界上的力矩平衡，即满足如下条件

$$\mathrm{Re}\left[\int_C \overline{f(t)}dt\right]=0 \qquad (3-14-6)$$

时，方程有解。

我们知道谢尔曼方程的解可表为如下形式：

$$\omega_k(t_0)=g_k(t_0)+\int_{C_k}[M_k^{(1)}(t_0,t)g_k(t)+M_k^{(2)}(t_0,t)\overline{g_k(t)}]dt$$

式中 $g_k(t_0)$ 是 C_k 边界上的“虚构负荷”。而且 $M_k^{(1)}(t_0,t)$ 及 $M_k^{(2)}(t_0,t)$在 C_k 上有连续导数（对 t_0 和 t 求导）。脚标 k 表示针对由边界 C_k 所围区域 T_k 的解。求到 $\omega_k(t_0)$ 后，就可求 $\varphi_k(t)$ 和 $\psi_k(t)$。由它们可求

$$F_k(z)=\varphi_k(z)+z\overline{\varphi_k'(z)}+\overline{\psi_k(z)}$$

我们把 $\omega_k(t_0)$ 代入 $F_k(z)$式中，得到

$$F_k(z)=\int_{C_k}[N_k^{(1)}(z,t)g_k(t)+N_k^{(2)}(z,t)\overline{g_k(t)}]dt \qquad (3-14-7)$$

式中 z 是 T_k 中一点，$N_k^{(1)}(z,t)$ 和 $N_k^{(2)}(z,t)$是两个变量的连续函数。

$F_k(z)$确定 T_k 中的已知应力，它是一直连续到边界上的，而且

$$F_k(z)=g_k(z)+\text{常数} \qquad (3-14-8)$$

自然可以得出下式，这是积分方程组。

$$g_j(t_0^{(j)})+\sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{m}\int_{C_k}[N_k^{(1)}(t_0^{(j)},t^{(k)})g_k(t^{(k)})+N_k^{(2)}(t_0^{(j)},t^{(k)})g_k\overline{(t^{(k)})}]dt$$
$$=f_j(t_0^{(j)})+\beta_j\quad(t^{(j)}\in C_j,\quad j=0,1,\cdots m)\qquad(3\text{-}14\text{-}9)$$

这里 β_j 是常数，f_j 是已知主矢量函数。若对于任一常数 α，有如下结果，则可略去 β_j。

$$F_0(z)=\int_C[N_0^{(1)}(z,t)\alpha+N_0^{(2)}(z,t)\bar{\alpha}]dt=0\qquad(3\text{-}14\text{-}10)$$

有一圆环形区域 T（图3-27），设在 C_0 上 $f_0=0$，在 C_1 上 $f_1=1$，求 g_0 及 g_1。

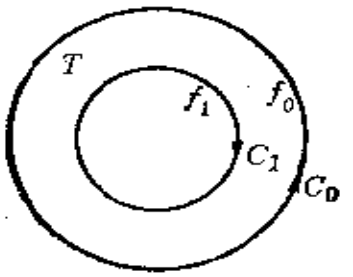


图 3-27

由谢尔曼公式，可知 $f_0=0$，在 T_0 中 $F_0\equiv 0$，所以在 C_1 上，有 $f_1=g_1+F_0(C_1)=g_1=1$，在 T_1 中的无限远处，应力函数为零，并在 C_1 上 $f_1=1$，所以 $F_1\equiv 0$，于是在 C_0 上有 $f_0=g_0+F_1(C_0)=g_0=0$。

由

$$g_0(t_0^{(0)})+\int_{C_1}[N_1^{(1)}(t_0^{(0)},t^{(1)})g_1(t^{(1)})+N_1^{(2)}(t_0^{(0)},t^{(1)})g_1\overline{(t^{(1)})}]dt^{(1)}=f_0+\beta_0$$

$$g_1(t_0^{(1)})+\int_{C_0}[N_0^{(1)}(t_0^{(1)},t^{(0)})g_0(t^{(0)})+N_0^{(2)}(t_0^{(1)},t^{(0)})g_0\overline{(t^{(0)})}]dt^{(0)}=f_1+\beta_1$$

因为 $g_0=0$，所以 $g_1=f_1+\beta_1$，又 $g_1=f_1=1$，所以 $\beta_1=0$；又

$F_1(t_0^{(0)})=\int_{C_1}[N_1^{(1)}(t_0^{(0)},t^{(1)})+N_1^{(2)}(t_0^{(0)},t^{(1)})]dt^{(1)}=0$，所以 $\beta_0=0$，$F_1\equiv 0$。这说明满足 F_0 的那个关系时，可以略去 β_1。

分两种情况，$k>0$ 和 $k=0$，研究 $N_k^{(1)}(z,t)$ 及 $N_k^{(2)}(z,t)$ 的特性。我们先分析 $k>0$ 的情况。

因为在无限远处，$F_k(z)$ 应为零，故

$$N_k^{(1)}(\infty,t)=N_k^{(2)}(\infty,t)=0$$

由平衡条件，$F_k(t)$ 满足如下条件

$$\mathrm{Re}\left[\int_{C_j}F_k(t)d\bar{t}\right]=0\quad(j\neq k\neq 0)$$

时，由式（3-14-7）得

$$\mathrm{Re}\left\{\int_{C_j}d\bar{t}^{(j)}\int_{C_k}[N_k^{(1)}(t^{(j)},t^{(k)})g_k(t^{(k)})+N_k^{(2)}(t^{(j)},t^{(k)})\overline{g_k(t^{(k)})}]dt^{(k)}\right\}=0 \qquad (3\text{-}14\text{-}11)$$

又因为

$$F_k=g_k+\text{常数}$$

$$\mathrm{Re}\left[\int_{C_k}F_k d\bar{t}^{(k)}\right]=\mathrm{Re}\left[\int_{C_k}g_k d\bar{t}^{(k)}\right]+\mathrm{Re}\left[\int_{C_k}\text{常数}\,d\bar{t}^{(k)}\right]$$

因为 $\mathrm{Re}\left[\int_{C_k}\text{常数}\,d\bar{t}^{(k)}\right]=0$，所以

$$\mathrm{Re}\left[\int_{C_k}F_k d\bar{t}^{(k)}\right]=\mathrm{Re}\left[\int_{C_k}g_k d\bar{t}^{(k)}\right]$$

即是

$$\mathrm{Re}\left[\int_{C_k}d\bar{t}^{(k)}\int_{C_k}(N_k^{(1)}\cdot g_k+N_k^{(2)}\cdot\bar{g}_k)dt^{(k)}\right]=\mathrm{Re}\left[\int_{C_k}g_k d\bar{t}^{(k)}\right] \qquad (3\text{-}14\text{-}12)$$

对于 $k=0$ 的情况，得到

$$F_0(z)=\int_{C_0}[N_0^{(1)}(z,t^{(0)})g_0(t^{(0)})+N_0^{(2)}(z,t^{(0)})\overline{g_0(t^{(0)})}]dt^{(0)} \qquad (3\text{-}14\text{-}13)$$

由应力函数的差值，可知 $F_0(z)$ 可以相差一个常数。取 T 中任一点 a^*，于是可得 $F_0(z)$ 为如下形式

$$F_0(z)=\int_{C_0}\{[N_0^{(1)}(z,t^{(0)})-N_0^{(1)}(a^*,t^{(0)})]g_0(t^{(0)})+[N_0^{(2)}(z,t^{(0)})-N_0^{(2)}(a^*,t^{(0)})]\overline{g_0(t^{(0)})}\}dt^{(0)}$$

$F_0(z)$是一直连续到边界上的，当满足边界上力矩平衡时，在边界上和 $g_0(t^{(0)})$相差一个常数，于是

$$\mathrm{Re}\left[\int_{C_k}g_0(\bar{t}^{(0)})dt^{(0)}\right]=0$$

这是因为在边界上，要满足力矩平衡条件。对分段充分光滑的函数 $g_0(t)$来说，自然有

$$\mathrm{Re}\left[\int_{C_0}g_0(t^{(0)})d\bar{t}^{(k)}\right]=0$$

也就是 $g_0(t)$ 在 C_0 外其它部分上存在力矩平衡条件。由此得出

$$\mathrm{Re}\left[\int_{C_k}d\bar{t}^{(k)}\int_{C_k}[N_0^{(1)}(t^{(k)},t^{(0)})g_0(t^{(0)})+N_0^{(2)}(t^{(k)},t^{(0)})\overline{g_0(t^{(0)})}]dt^{(0)}\right]=0 \qquad (3\text{-}14\text{-}14)$$

$$\mathrm{Re}\left\{\int_{C_0}d\bar{t}^{(0)}\int_{C_0}[N_k^{(1)}(t_1^{(k)}t^{(0)})g_k(t^{(k)})+N_k^{(2)}(t^{(k)},t^{(0)})\bar{g}_k(t^{(k)})]dt^{(k)}\right\}$$

$$+\mathrm{Re}\left\{\int_{C_k}d\bar{t}^{(k)}\int_{C_k}[N_k^{(2)}(t^{(k)},t^{(k)})g_k(t^{(k)})+N_k^{(2)}(t^{(k)},t^{(k)})\bar{g}_k(t^{(k)})]dt^{(k)}\right\}=0$$

也就是

$$\mathrm{Re}\left[\int_C F_k(t_0)d\bar{t}_0\right]=0 \qquad (3\text{-}14\text{-}15)$$

代替式（3-14-9），研究如下积分方程组：

$$g_j(t_0^{(j)})+\sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{m}\int_{C_k}\{[N_k^{(1)}(t_0^{(j)},t^{(k)})-N_k^{(2)}(a_k^*,t^{(k)})]g_k(t^{(k)})$$
$$+[N_k^{(2)}(t_0^{(j)},t^{(k)})-N_k^{(2)}(a_k^*,t^{(k)})]\overline{g_k(t^{(k)})}\}dt^{(k)}$$
$$=f_j(t_0^{(j)}) \qquad (3-14-16)$$

式中 $j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m$。当 $k\neq 0$，$i=1,\ 2$。则 $N_k^{(i)}(a_k^*,t)=0$。

如果对于每一个 $f_j(t_0^{(j)})$，满足以下条件，

$$\mathrm{Re}\left[\int_{C=C_0\cup C_1\cup\cdots\cup C_m} f_j(t)dt\right]=0 \qquad (3-14-17)$$

积分方程组（3-14-16）有解。于是

$$\mathrm{Re}\left[\int_{C_0} g_0(t^{(0)})\,\overline{dt}^{(0)}\right]=0 \qquad (3-14-18)$$

因为我们知道由式（3-14-16）可得下式

$$\int_{C_j} g_j(t_0^{(j)})d\bar{t}^{(j)}+\int_{C_j}\sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{m}\int_{C_k}\{[N_k^{(1)}(t_0^{(j)},t^{(k)})$$
$$-N_k^{(2)}(a_k^*,t^{(k)})]g_k(t^{(k)})+[N_k^{(2)}(t_0^{(j)},t^{(k)})$$
$$-N_k^{(2)}(a_k^*,t^{(k)})]\overline{g_k}(t^{(k)})\}dt^{(k)}\overline{dt}^{(j)}$$
$$=\int_{C_j} f_j(t_0^{(j)})d\bar{t}^{(j)} \qquad (3-14-19)$$

把上式左右两侧都取实部，可得

$$\mathrm{Re}\left\{\int_{C_0} g_0 d\bar{t}-\sum_{k\neq 0}\int_{C_k} g_k d\bar{t}+\sum_{k\neq 0}\int_{C_k} g_k d\bar{t}\right\}=0$$

即得

$$\mathrm{Re}\left[\int_{C_0} g_0 d\bar{t}\right]=0$$

满足此式就表明物体处于力矩平衡状态，而对每一个函数 $f_j(t_0^{(j)})$ 都存在解 $g_j(t_0^{(j)})$。式（3-14-12）是弗列德霍姆积分方程组，满足交比定理，齐次解应为平凡解。

令此方程组的平凡解为 g_j^0，于是齐次方程写为：

$$g_j^{(0)}(t^{(j)})+\sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{m}\int_{C_k}\{[N_k^{(1)}(t^{(j)},t^{(k)})-N_k^{(1)}(a_k^*,t^{(k)})]g_k^{(0)}(t^{(k)})+[N_k^{(2)}(t^{(j)},t^{(k)})-N_k^{(2)}(a_k^*,t^{(k)})]g_k^{(0)}(t^{(k)})\}dt^{(k)}=0 \qquad (3-14-20)$$

令 $F^{(0)}(z)=\sum_{k=0}^{m}F_k^{(0)}(z)$ 代表 T 中的应力函数，并且在 C_k 上其值为 β_k^*（注意，这是指 $f_j(t^{(j)})=0$ 的齐次情况），相应的有

$$\varphi^{(0)}(z)=\sum_{k=0}^{m}\varphi_k^{(0)}(z),\quad \psi^{(0)}(z)=\sum_{k=0}^{m}\psi_k^{(0)}(z)$$

它们表示对应于齐次方程的解。自然可知

$$\varphi^{(0)}=i\alpha z+\beta,\qquad \psi^{0}(z)=\gamma$$

即

$$\psi_j^{(0)}=i\alpha z+\beta-\sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{m}\varphi_k^{(0)}$$

$$\psi_j^{(0)}=\gamma-\sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{m}\psi_k^{(0)}$$

我们知道 $\varphi_j^{(0)}$ 是在 C_j 以外定义，并且在无穷远处是全纯的，但是 $i\alpha z+\beta-\sum_{k\neq j}\varphi_k^{(0)}$ 却在 C_j 以内是全纯的。所以说 $\varphi_j^{(0)}(z)$ 在全平面上是全纯的，根据刘维耳定理可知，$\varphi_j^{(0)}$ $(j=1,2,\cdots,m)$ 必为常数。又知道

$$F_j^{(0)}(z)=\varphi_j^{(0)}+z\overline{\varphi_j^{(0)}}+\overline{\psi_j^{(0)}}$$

当 $z\to\infty$ 时，有

$$F_j^{(0)}(\infty)=0$$

所以只能有以下结果，即

$$\varphi_j^{(0)}=\beta_j,\qquad \psi_j^{(0)}=-\bar{\beta}_j$$
$$F_j^{(0)}(z)=0,\quad (j=0,1,2,\cdots,m)$$

又知道

$$F_j^{(0)}(t^{(j)})=g_j^{(0)}(t^{(j)})+常数$$

所以可知

$$g_j^{(0)}(t^{(j)})=常数$$

由齐次方程组可知

$$g_0^{(0)}(t^{(0)})=-\sum_{k=1}^{m}\int_{C_k}[N_k^{(1)}(t^{(0)},t^{(k)})g_k(t^{(k)})+N_k^{(2)}(t^{(0)},t^{(k)})\overline{g_k(t^{(k)})}]dt^{(k)}$$

但是

$$F_k^{(0)}(t^{(0)})=\int_{C_k}[N_k^{(1)}(t^{(0)},t^{(k)})g_k(t^{(k)})+N_k^{(2)}(t^{(0)},t^{(k)})\overline{g_k(t^{(k)})}]dt^{(k)}=0$$

所以得出

$$g_0^{(0)}(t^{(0)})=0$$

又知道 $$F_0^{(0)}(t^{(0)})=g_0^{(0)}(t^{(0)})+常数$$

所以 $$F_0^{(0)}(t^{(t)})=常数$$

但是

$$F_0^{(0)}(z)=\int_{C_0}\{[N_0^{(1)}(z,t^{(0)})-N_0^{(1)}(a_0^*,t^{(0)})]g_0^{(0)}(t^{(0)})+[N_0^{(2)}(z,t^{(0)})-N_0^{(2)}(a_0^*,t^{(0)})]\overline{g_0^0(t^{(0)})}\}dt^{(0)}$$

所以当 $z=a_0^*$ 时，$F_0^{(0)}(a_0^*)=0$。由此可知

$$F_0^{(0)}(z)=0$$

于是可知

$$g_j^{(0)}(t^{(j)})=0\qquad (j=0,1,2,\cdots,m)$$

这就证明了齐次方程有平凡解，由交比定理也就证明了解的唯一性。对有限区域在边界上要满足

$$\mathrm{Re}\left[\int_C \bar{f}dt\right]=0$$

对于第三类无限区域而言，则

$$N_k^{(1)}(a_k^*,t)=N_k^{(2)}(a_k^*,t)=0$$

于是可以说，若T是个有限区或是第三类无限区，$C_0\cup C_1\cup\cdots\cup C_m$是$T$的充分光滑的边界。对于无限区域来说，$C_0$不存在，$T_k$是边界为$C_k$的有限区域或无限区域，区域$T$包含在诸$T_k$之中。设对于每一个区域$T_k$，都已知弹性力学第一个基本问题的解。属于在边界$C_k$上作用有负荷$g_k$的主矢量函数$F_k$（在区域$T_k$上）写为

$$F_k(z)=\varphi_k(z)+\overline{z}\overline{\varphi_k'(z)}+\overline{\psi_k(z)}=\int_{C_k}[N_k^{(1)}(z,t)g_k(t)+N_k^{(2)}(z,t)\overline{g_k(t)}]dt$$

如果在边界$C=C_0\cup C_1\cup\cdots\cup C_m$上满足如下条件

$$\mathrm{Re}\left[\int_C\overline{F(t)}dt\right]=0$$

那末在C_j上（$j=0,1,2,\cdots,m$）有如下的积分方程组：

$$g_j(t^{(j)})+\sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{m}\int_C\{[N_k^{(1)}(t^{(j)},t^{(k)})-N_k^{(2)}(a_k^*,t^{(k)})]g_k(t^{(k)})+[N_k^{(1)}(t^{(j)},t^{(k)})-N_k^{(2)}(a_k^*,t^{(k)})]\overline{g_k(t^{(k)})}\}dt^{(k)}=f_j(t^{(j)})$$

$k>0$，$i=1,2,N_k^{(j)}(a_k^*,t)=0$，$a_0^*$是$T$中任一点。此方程组有唯一解，并且

$$\mathrm{Re}\left[\int_{C_0}g_0(t)d\bar{t}\right]=0$$

在T_k中的应力函数为$\varphi_k(z)$，$\psi_k(z)$，它们对应于C_k上的主矢量函数为g_k，于是在T中所求之应力函数φ及ψ为

$$\varphi=\sum_{k=0}^{m}\varphi_k,\quad\psi=\sum_{k=0}^{m}\psi_k$$

从形式上看，这个方程组便于逐步逼近求解，无论对有限还是无限区域都适合。

〔例题15〕 求解有一圆孔的半无限平面弹性力学第一个基本问题（图3-28）。

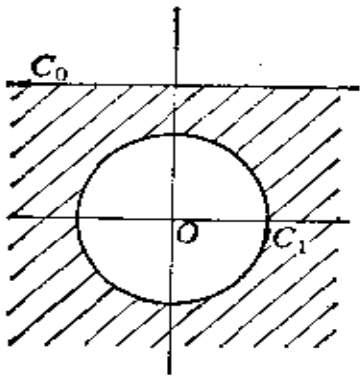


图 3-28

设圆孔半径为 1，边界的正向如图所示。在边界 C_1 上的负荷是平衡的，并以函数 f 表示。

我们有

$$\varphi(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(t)dt}{t-z}$$

$$\psi(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{\overline{f(t)}dt}{t-z}-\frac{1}{z}\varphi'(z)$$

$$F(z)=\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)}$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(t)dt}{t-z}+\frac{z}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{\overline{f(t)}d\bar{t}}{(t-z)^2}$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(t)d\bar{t}}{\bar{t}-\bar{z}}-\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{\bar{z}}\int_{C_1}\frac{\overline{f(t)}d\bar{t}}{(\bar{t}-\bar{z})^2}$$

因为 $t\cdot\bar{t}=1$，t 是圆孔周边上的点。

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\left\{\left[-\frac{1}{t-z}+\frac{1}{t^2(\bar{t}-\bar{z})}\right]f(t)dt\right.$$

$$\left.+\left(z-\frac{1}{z}\right)\frac{\overline{f(t)}}{(t-z)^2}d\bar{t}\right\}$$

为了一般，取圆孔中心在 $|b|$ 处。那末

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\left\{\left[\frac{1}{(t-b)^2(\overline{t}-z)}-\frac{1}{t-z}\right]f(t)dt\right.$$

$$\left.+\left[z-b-\frac{1}{\overline{z}-\overline{b}}\right]\frac{f(t)}{(t-z)^2}dt\right\}$$

但是我们知道，对于受负荷为 f 的半平面，第一个基本问题的解为：

$$\varphi(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)dt}{t-z}$$

$$-\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{f(t)dt}{t-z}+\frac{f(t)dt}{t-z}-\frac{f(t)dt}{(t-z)^2}\right]$$

因为半平面的边界是实轴，所以 $\overline{t}=t$。于是得到

$$F(z)=\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)}$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{t-z}-\frac{1}{t-\overline{z}}\right)f(t)dt\right.$$

$$\left.-\left[\frac{2}{(t-z)^2}+\frac{1}{t-\overline{z}}-\frac{t}{(t-\overline{z})^2}\right]f(t)dt\right\}$$

这里令

$$N_0^{(1)}=\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{1}{t-z}-\frac{1}{t-z}\right]=\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{z-\overline{z}}{(t-z)(t-\overline{z})}\right]$$

$$N_0^{(2)}=-\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{z-t}{(t-\overline{z})^2}+\frac{1}{t-z}\right]=\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{z-\overline{z}}{(t-\overline{z})^2}\right]$$

$$N_1^{(1)}=-\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{1}{t-z}+\frac{1}{(t-b)^2(t-z)}\right]$$

$$N_1^{(2)}=-\frac{1}{2\pi i}\left[z-b-\frac{1}{\overline{z}-\overline{b}}\right]\frac{1}{(t-b)(t-\overline{z})^2}$$

因为圆心在 $|b|$ 点（注意式中的 b 是个符号），则有

$$(t-b)\overline{(t-b)}=1,\quad d\overline{t}=-dt/(t-b)^2$$

把 N 值代入下列方程

$$g_j(t_0^{(j)})+\sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{m}\int_{C_k}\{[N_k^{(1)}(t_0^{(j)},t^{(k)})-N_k^{(1)}(a_k^*,t^{(k)})]g_k(t^{(k)})$$

$$+[N_k^{(2)}(t_0^{(j)},t^{(k)})-N_k^{(2)}(a_k^*,t^{(k)})]\overline{g_k(t^{(k)})}\}dt^{(k)}$$

$$=f_j(t_0^{(j)})$$

这里 $j=0,1,2,\cdots,m$，$k\neq 0$，$i=1,2$，$N_k^{(i)}(a_k^*,t)=0$

我们得到 $(\bar{t}_0=t_0)$

$$g_0(t^{(0)})+\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{C_1}\left[\frac{1}{t^{(0)}-t^{(1)}}+\frac{1}{(\bar{t}^{(1)}-t^{(1)})(t^{(1)}-b)^2}\right]\right.$$

$$\times g_1(t^{(1)})dt^{(1)}+\int_{C_1}\left[t^{(0)}-b-\frac{1}{t^{(0)}-b}\right]$$

$$\left.\times\frac{1}{(\bar{t}^{(1)}-t^{(0)})^2}\overline{g_1(t^{(1)})}d\bar{t}^{(1)}\right\}=0$$

这里 $t^{(0)}$ 表示在 C_0 上之点，$t^{(1)}$ 表示在 C_1 上之点。当 $a_0^*=\infty$，$N_0^{(1)}(a_0^*,t)=N_0^{(2)}(a_0^*,t)=0$。

$$g_1(t^{(1)})-\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}g_0(t^{(0)})\left[\frac{1}{t^{(0)}-t^{(1)}}-\frac{1}{t^{(0)}-\bar{t}^{(1)}}\right]dt^{(0)}\right.$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{g_0(t^{(0)})}\left[-\frac{t^{(0)}}{(t^{(0)}-\bar{t}^{(1)})^2}-\frac{1}{t^{(0)}-\bar{t}^{(1)}}\right.$$

$$\left.\left.-\frac{t_1}{(t^{(0)}-\bar{t}^{(1)})^2}\right]dt^{(0)}\right\}=f(t^{(1)})$$

把 $g_0(t^{(0)})$ 代入上式后，得到

$$g_1(t^{(1)})-\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{t^{(0)}-t^{(1)}}-\frac{1}{t^{(0)}-\bar{t}^{(1)}}\right]\right.$$

$$\times\left[\int_{C_1}\frac{1}{2\pi i}g_1(t^{(1)})\left[\frac{1}{t_1^{(1)}-t^{(0)}}+\frac{1}{(t_1^{(1)}-b)(\bar{t}_1^{(1)}-t^{(0)})}\right]dt_1^{(1)}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\overline{g_1(t_1^{(1)})}\left(t^{(0)}-b-\frac{1}{t^{(0)}-\bar{b}}\right)\frac{1}{(\bar{t}_1^{(1)}-t^{(0)})^2}dt_1^{(1)}\right]$$

$$\times dt^{(0)}-\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{t^{(0)}-t^{(1)}}{(t^{(0)}-\bar{t}^{(1)})^2}-\frac{1}{(t^{(0)}-\bar{t}^{(1)})}\right]$$

$$\left.\times\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\overline{g_1(t_1^{(1)})}\left(\frac{1}{t^{(0)}-\bar{t}_1^{(1)}}+\frac{1}{(t^{(0)}-t_1^{(1)})(\bar{t}_1^{(1)}-\bar{b})^2}\right)d\bar{t}_1^{(1)}\right.\right.$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} g_1(t_1^{(1)})\left(\bar{t}_0-\bar{b}-\frac{1}{t^{(1)}-b}\right)\overline{\left(t_1^{(1)}-\frac{1}{t^{(0)}}\right)^2}dt_1^{(1)}\Big]$$
$$\times dt^{(0)}\Big\}=f(t^{(1)})$$

为了区分积分变量，把 $t^{(1)}$ 有的改为 $t_1^{(1)}$。化简上式有关的项后，得到

$$g_1(t^{(1)})+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{g_1dt_1^{(1)}}{(t_1^{(1)}-b)^2(\bar{t}_1^{(1)}-t^{(1)})}+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{g_1dt_1^{(1)}}{t_1^{(1)}-\bar{t}^{(1)}}$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{(b-t^{(1)})\bar{g}_1d\bar{t}_1^{(1)}}{(\bar{t}_1^{(1)}-t^{(1)})^2}-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{\bar{g}_1d\bar{t}_1^{(1)}}{(\bar{t}_1^{(1)}-b)^2(\bar{b}-t^{(1)})}$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{2\bar{t}_1^{(1)}-\bar{b}-t^{(1)}}{(\bar{t}_1^{(1)}-t^{(1)})^2(\bar{t}_1^{(1)}-\bar{b})^2}\bar{g}_1d\bar{t}_1^{(1)}$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{t^{(1)}\bar{g}_1d\bar{t}_1^{(1)}}{(t_1^{(1)}-\bar{t}^{(1)})^2(\bar{t}_1^{(1)}-\bar{b})^2}$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{t_1^{(1)}\bar{g}_1d\bar{t}_1^{(1)}}{(\bar{t}_1^{(1)}-\bar{b})^2(t_1^{(1)}-\bar{t}^{(1)})^2}$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{\bar{g}_1d\bar{t}_1^{(1)}}{(t_1^{(1)}-\bar{t}^{(1)})(\bar{t}_1^{(1)}-\bar{b})^2}$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{t^{(1)}(t_1^{(1)}+\bar{t}^{(1)}-2\bar{b})}{(t_1^{(1)}-\bar{t}^{(1)})^3}g_1dt_1^{(1)}$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{(\bar{t}^{(1)}-\bar{b})g_1}{(t_1^{(1)}-\bar{t}^{(1)})^2}dt_1^{(1)}$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{t_1^{(1)}(\bar{b}-2\bar{t}^{(1)})+\bar{b}\bar{t}^{(1)}}{(\bar{t}^{(1)}-t_1^{(1)})^3}g_1dt_1^{(1)}$$
$$+\frac{1}{\pi i}\int_{C_1}\frac{t^{(1)}g_1dt_1^{(1)}}{(t_1^{(1)}-b)(t_1^{(1)}-\bar{t}^{(1)})^3}$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{g_1dt_1^{(1)}}{(t_1^{(1)}-b)(t_1^{(1)}-\bar{t}^{(1)})^2}$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{(t_1^{(1)}+\bar{t}^{(1)})g_1dt_1^{(1)}}{(t_1^{(1)}-b)(t_1^{(1)}-\bar{t}^{(1)})^3}=f(t^{(1)})$$

式中 $g_1=g_1(t_1^{(1)})$。

若在上式中取 $f(t^{(1)})=-p(t^{(1)}-b)$，可以用近似逐步逼近的方法或是由退化核积分方程求解。我们取逐步逼近解法。

第一次近似，取

$$g_1(t_1^{(1)}) = -p(t_1^{(1)}-b), \qquad t_1^{(1)}-b = 1/(\bar{t}_1^{(1)}-\bar{b})$$

$$\overline{g_1(t_1^{(1)})} = -p(t_1^{(1)}-b), \qquad \bar{t}_1^{(1)}-\bar{b} = 1/(t_1^{(1)}-b)$$

把 g_1 和 $\bar{g}_1$ 代入后，得到第一次近似解为：

$$g_1^{(1)}(t^{(1)}) = -p(t^{(1)}-b) - \frac{p}{\bar{b}-\bar{t}^{(1)}} + \frac{t^{(1)}-b}{(\bar{b}-\bar{t}^{(1)})^2}p + \frac{p}{(\bar{b}-\bar{t}^{(1)})^2}$$

这里 $g_1^{(1)}$ 中的上角（1）表示第一次近似解，同理上角（2）表示第二次近似解。把 $g_1^{(1)}(t^{(1)})$ 又代回原方程式得到第二次近似解。其结果如下：

$$g_1^{(2)}(t^{(1)}) = \frac{1}{(b-\bar{b})^2}\cdot\frac{p}{\bar{b}-b-\dfrac{1}{b-\bar{b}}+\dfrac{1}{t^{(1)}-\bar{b}}}$$

$$+\frac{(b-t^{(1)})}{\left(b-\bar{b}+\dfrac{1}{t^{(1)}-\bar{b}}\right)^2(t^{(1)}-\bar{b})}p + \frac{\bar{b}-\bar{\bar{b}}}{(t^{(1)}-\bar{b})^2}p$$

$$+\frac{p}{(\bar{b}-b)^2(b-\bar{t}^{(1)})} + \frac{(t^{(1)}-\bar{b})p}{[(b-\bar{b})(t^{(1)}-\bar{b})+1]^3}$$

$$\times\left\{(t^{(1)}-b)\left[\frac{1}{t^{(1)}-\bar{b}}(z_0-\bar{b})+\left(1+\frac{1}{t^{(1)}-\bar{b}}\right)\right.\right.$$

$$\left.\times\left(b-\bar{b}-\frac{1}{t^{(1)}-\bar{b}}\right)\right]+4\left(1+\frac{1}{t^{(1)}-\bar{b}}\right)-2\left(b-\bar{b}\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{t^{(1)}-\bar{b}}\right)\right\}-\frac{p(t^{(1)}-b)}{(b-\bar{b})^2(b-\bar{t}^{(1)})^2}+\frac{p}{(\bar{b}-b)^2(\bar{t}^{(1)}-b)}$$

$$+\frac{t^{(1)}(z'+\bar{t}^{(1)}-2\bar{b})}{(b-b)^2(\bar{z}'-\bar{t}^{(1)})^3}p$$

$$+\frac{p}{(\bar{b}-b)^2(\bar{t}^{(1)}-b)(z'-\bar{t}^{(1)})^2}+\frac{z'(\bar{b}-2\bar{t}^{(1)})+\bar{b}\bar{t}^{(1)}}{(b-b)^2(z'-\bar{t}^{(1)})^3}$$

$$\times p+\frac{2t^{(1)}p}{(b-\bar{b})(t^{(1)}-z')^3}+\frac{p}{(\bar{b}-b)(z'-\bar{t}^{(1)})^2}$$

$$-\frac{(z'-\bar{t}^{(1)})p}{(b-\bar{b})(z'-\bar{t}^{(1)})^3}-p(t^{(1)}-b)+\frac{p}{t^{(1)}-\bar{b}}$$

$$+\frac{(t^{(1)}-b)^2(t^{(1)}-b+1)}{(\bar{b}-b)^2(t^{(1)}-z')^2}p$$

$$-\frac{(t^{(1)}-\bar{b})^{-2}+(b-\bar{b})^{-1}\left(\frac{1}{b-\bar{b}}-\frac{2}{t^{(1)}-\bar{b}}\right)}{\left(\frac{1}{t^{(1)}-b}-\frac{1}{b-\bar{b}}\right)(\bar{b}-b)^2(t^{(1)}-\bar{b})}p$$

$$+\frac{(\bar{t}^{(1)}-b)^2+(b-\bar{b})^{-1}\left(2b+\frac{1}{b-\bar{b}}-2\bar{t}^{(1)}\right)}{(\bar{b}-b)^2(\bar{t}^{(1)}-z')^2}p$$

$$+\frac{t^{(1)}-b}{(t^{(1)}-\bar{b})^2}p\left[\frac{(t^{(1)}-\bar{b})^2}{(b-\bar{b})^2}-\frac{(t^{(1)}-\bar{b})^2}{\left(b-\bar{b}+\frac{1}{t^{(1)}-\bar{b}}\right)^2}\right.$$

$$\left.-\frac{2(t^{(1)}-\bar{b}+1)}{\left(b-\bar{b}+\frac{1}{t^{(1)}-\bar{b}}\right)^3}\right]-\frac{1}{(\bar{b}-b)^2(z'-\bar{t}^{(1)})^4}$$

$$\times\left\{\frac{1}{b-\bar{b}}(1+z'-b)(z'-2\bar{b}+\bar{t}^{(1)})(5z'-3b-2\bar{t}^{(1)})\right.$$

$$+\frac{z'-\bar{t}^{(1)}}{(b-\bar{b})^2}(z'-2\bar{b}+\bar{t}^{(1)})+\frac{1}{(b-\bar{b})^2}$$

$$\left.\times(1+z'-b)(z'-\bar{t}^{(1)})\right\}-p(\bar{t}^{(1)}-\bar{b})$$

$$\times\left\{\frac{1}{(b-\bar{b})^2}(2b-2-z'-\bar{t}^{(1)})+2(z'-b)(1+z'\right.$$

$$\left.-b)(z'-\bar{t}^{(1)})\right\}+\frac{p}{(b-\bar{b})^2}$$

$$\times\left\{\frac{3[\bar{b}\bar{t}^{(1)}+z'(\bar{b}-2\bar{t}^{(1)})](z'-b)^2(1+z'-b)}{(z'-\bar{t}^{(1)})^4}\right.$$

$$-\frac{[z'(\bar{b}-2\bar{t}^{(1)})+\bar{b}\bar{t}^{(1)}](z'-b)^2+(z'-b)^2(1+z'-b)(\bar{b}-2\bar{t}^{(1)})+(z'-b)(1+z'-b)[z'(\bar{b}-2\bar{t}^{(1)})+\bar{b}\bar{t}^{(1)}]}{1}\Big\}+\frac{2t^{(1)}p}{(\bar{b}-b)^3}$$

$$\times\left\{\frac{(z'-\bar{t}^{(1)})(1+2z'-2b)-3(z'-b)(1+z'-b)}{(z'-\bar{t}^{(1)})^4}\right\}$$

$$+\frac{p}{(\bar{b}-b)^2}\left\{\frac{(z'-\bar{t}^{(1)})(1+2z'-2b)-2(z'-b)(1+z'-b)}{(z'-\bar{t}^{(1)})^3}\right.$$

$$\left.\frac{1}{1}\right\}-\frac{p}{(\bar{b}-b)^2}$$

$$\times\left\{\frac{(1+z'-b)(2z'-b+\bar{t}^{(1)})+(z'-b)(z'+\bar{t}^{(1)})}{(z'-\bar{t}^{(1)})^3}\right.$$

$$\left.-3\frac{(z'+\bar{t}^{(1)})(z'-b)(1+z'-b)}{(z'-\bar{t}^{(1)})^4}\right\}$$

式中 $(z'-b)=1/(b-\bar{b})$，$z_0-b=1/(t^{(1)}-\bar{b})$，$A=b-\bar{b}$。

利用已知的$\varphi(z)$和$\psi(z)$，得到第一次的近似应力函数如下：

$$\varphi_1^{(1)}(z)=-\frac{p}{z+A}-\frac{p}{\left(A-\frac{1}{z}\right)^2}+\frac{p}{A^2}$$

$$-\frac{p}{A^2}\left(2\frac{1}{A}+3\frac{1}{zA^2}+4\frac{1}{z^2A^3}+\frac{5}{A^4z^3}+\cdots\right)$$

而

$$\psi_1^{(1)}(z)=-\frac{p}{z}-\frac{p}{A-\frac{1}{z}}+\frac{(z+1)p}{z(z+A)^2}-\frac{1}{z}\varphi_1'^{(1)}(z)$$

注意，z是以圆孔中心为原点时的点坐标。

第二次近似的应力函数为：

$$\varphi_1^{(2)}(z)=\frac{p}{A^2}\left(\frac{1}{K}-\frac{1}{K-\frac{1}{z}}\right)+\left(1+\frac{A}{z}\right)\left(A+\frac{1}{z+A}\right)^{p}-\frac{p}{A}$$

$$+\left(\frac{A}{z+A)^2}p+\frac{p}{A^2}\left(\frac{p}{z+A}\right)+\left[z\left(\frac{(z+A)p}{z+A)+1}\right)\right]^3$$

$$\times\left\{2\left(A+\frac{1}{A+z}\right)-4\left(1+\frac{1}{z+A}\right)-(z+A)\right.$$

$$\times\left[\frac{1}{z+A}\left(A+\frac{1}{z+A}\right)+\left(1+\frac{1}{z+A}\right)\right.$$

$$\left.\left.\times\left(A-\frac{1}{z+A}\right)\right]\right\}+\frac{p}{A^2\left(\frac{1}{z}-A\right)}-\frac{p}{A^3}$$

$$+\frac{p}{A^4}\left[2+\frac{3}{Az}+\frac{4}{A^2z^2}+\frac{5}{A^3z^3}+\cdots\right]-\frac{p}{A^2K^2}\left[\frac{3A}{A^2+1}\right.$$

$$\left.+\frac{6A^2}{(A^2+1)^2z}+\frac{10A^3}{(A^2+1)^3z^2}+\frac{15A^4}{(A^2+1)^4z^3}+\cdots\right]$$

$$-\frac{p}{A^2K^2}\left[b+\frac{1}{K}+\frac{b}{Kz}\right]\cdot\left(1-\frac{1}{Kz}\right)^{-3}$$

$$+\frac{p}{A^2K^2}\left[b+\frac{1}{K}\right]-\frac{p}{A^2z\left(K-\frac{1}{z}\right)^2}-\frac{2bp}{A\left(K-\frac{1}{z}\right)^3}$$

$$+\frac{\bar{b}(\bar{b}-z')}{A^2K^3}p-\frac{\bar{b}\left(\bar{b}+\frac{1}{z}\right)-z'\left(\bar{b}+\frac{2}{z}\right)}{A^2\left(K-\frac{1}{z}\right)^3}p$$

$$+\frac{2pb}{A\left(A+\frac{1}{A}\right)^3}-\frac{2p}{AK^3}\left[\frac{3}{K}+\frac{6}{K^2z}+\frac{10}{K^3z^2}\right.$$

$$\left.+\frac{15}{K^4z^3}+\cdots\right]-\frac{p}{A\left(K-\frac{1}{z}\right)^2}+\frac{p}{AK^3}$$

$$+\frac{\frac{1}{A}+\frac{1}{z}}{A\left(K-\frac{1}{z}\right)^3}p-\frac{p}{A^2K^3}-\frac{p}{A+z}-\frac{p}{\left(A-\frac{1}{z}\right)^2}$$

$$-\frac{p}{Az}\left[\frac{1}{(A+z)^2}+\frac{1}{A}\left(\frac{1}{A}-\frac{2}{(z+A)^2}\right)\right]$$

$$+\frac{p}{A^2}\left[\frac{\left(A-\frac{1}{z}\right)^2+\frac{1}{A}\left(2A+\frac{1}{A}-\frac{2}{z}\right)}{\left(K-\frac{1}{z}\right)^2}\right]$$

$$+\frac{2\left(1+\frac{A}{z}\right)\left(1+\frac{1+A}{z}\right)}{A^3\left(1+\frac{K}{z}\right)^3}+\frac{p}{A^3}\left[-2\frac{z}{A(z+A)}\right.$$

$$\left.+\frac{3z}{A^2(z+A)^2}-\frac{4z}{(z+A)^3A^3}+\cdots\right]$$

$$+\frac{pb}{A^2}\left\{\frac{1}{A}\left(1+\frac{1}{A}\right)\left(K-\frac{1}{z}\right)\left(\frac{5}{A}+2A-\frac{2}{z}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{A^2}\left(K+\frac{1}{z}\right)\left(K-\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{A^2}\left(1+\frac{1}{A}\right)\left(K-\frac{1}{z}\right)\right\}$$

$$\times\left(K-\frac{1}{z}\right)^{-4}-\frac{pb}{A^2K}\left\{\left[\frac{K}{A}\left(\frac{5}{A}+2A-\frac{2}{z}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{K-\frac{1}{2}}{A^2}\right]\times\left(K+\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{A^2}\left(1+\frac{1}{A}\right)\left(K-\frac{1}{z}\right)\right\}$$

$$\times\left[\frac{4}{K}+\frac{10}{K^2z}+\frac{20}{K^3z^2}+\frac{35}{K^4z^3}+\cdots\right]$$

$$-\frac{4pb}{A^2K^5}\left\{-\frac{K^2}{A}\left(\frac{5}{A}+2A\right)+\frac{K^2}{A^2}+\frac{1}{A^2}\left(1+\frac{1}{A}\right)K\right\}$$

$$+\frac{p}{A^2z}\left\{\frac{2}{A}\left(1+\frac{1}{A}\right)\left(K-\frac{1}{z}\right)-\frac{1}{A^2}\left(2-A+\frac{1}{A}\right.\right.$$

$$+\frac{1}{z}\Big)\Big\}\frac{1}{\Big(K-\frac{1}{z}\Big)^3}+\frac{p}{A^2}\Big\{\frac{3}{A^2}\Big(1+\frac{1}{A^2}\Big)$$

$$\times\Big[z'\Big(\bar{b}+\frac{2}{z}\Big)-\bar{b}\Big(\bar{b}+\frac{1}{z}\Big)\Big]\Big(K-\frac{1}{z}\Big)^{-4}$$

$$+\Big[-\frac{3}{A^2}\Big(b^2+\frac{\bar{b}}{z}-z'b-\frac{2z'}{z}\Big)-\frac{1}{A^2}\Big(1+\frac{1}{A}\Big)$$

$$\times\Big(\bar{b}+\frac{2}{z}\Big)\Big]\Big(K-\frac{1}{z}\Big)^{-3}\Big\}+\frac{p}{A^2}\Big\{-\frac{3}{A^2}\Big(1+\frac{1}{A}\Big)$$

$$\times\bar{b}(b-z')\,K^{-4}+\frac{1}{K^3}\Big[\frac{\bar{b}}{A^2}\Big(1+\frac{1}{A}\Big)$$

$$-\frac{3}{A^2}\,b(\bar{b}-z')\Big]\Big\}-\frac{2pb}{A^2K^4}\Big(1-\frac{1}{Kz}\Big)^{-4}$$

$$\times\Big\{\Big(K-\frac{1}{z}\Big)\Big(1+\frac{2}{A}\Big)-\frac{3}{A}\Big(1+\frac{1}{A}\Big)\Big\}$$

$$+\frac{2pb}{A^2K^4}\Big[K\Big(1+\frac{2}{A}\Big)-\frac{3}{A}\Big(1+\frac{1}{A}\Big)\Big]$$

$$-\frac{2p}{A^2K^4}\Big\{\Big(K-\frac{1}{z}\Big)\Big(1+\frac{2}{A}\Big)-\frac{3}{A}\Big(1+\frac{1}{A}\Big)\Big\}$$

$$\times\Big[\frac{4}{K}+\frac{10}{K^2z}+\frac{20}{z^2K^3}+\frac{35}{z^3K^4}+\cdots\Big]$$

$$+\frac{8p}{A^2K^5}\Big[K\Big(1+\frac{2}{A}\Big)-\frac{3}{A}\Big(1+\frac{1}{A}\Big)\Big]$$

$$+\frac{K\Big(1+\frac{2}{A}\Big)-\frac{2}{A}\Big(1+\frac{1}{A}\Big)}{A^2\Big(1+\frac{1}{A}\Big)^3}p$$

$$+\frac{\frac{2}{A}\Big(1+\frac{1}{A}\Big)-\Big(1+\frac{2}{A}\Big)\Big(K-\frac{1}{z}\Big)}{A^2\Big(K-\frac{1}{z}\Big)^3}p$$

$$+\frac{p}{A^2}\left\{\frac{\left(1+\frac{1}{A}\right)\left(\frac{2}{A}+2b-A-\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{A}\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{z}\right)}{\left(K-\frac{1}{z}\right)^3}\right.$$

$$\left.-\frac{3\left(1+\frac{1}{A}\right)\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{z}\right)}{A\left(K-\frac{1}{z}\right)^4}\right\}$$

$$-\frac{p}{A^2}\left\{\frac{\left(1+\frac{1}{A}\right)\left(\frac{2}{A}+2b-A+\frac{1}{A^2}\right)}{K^3}-\frac{3\left(1+\frac{1}{A}\right)}{A^2K^4}\right\}$$

同样求到

$$\psi_1^{(2)}(z)=-\frac{p}{A^2(K+z)}+\frac{p}{z\left(\frac{1}{z}-A\right)\left(\frac{z}{1-Az}-A\right)^2}$$

$$-\frac{Ap}{\left(A-\frac{1}{z}\right)^2}+\frac{p}{A}+\frac{2}{A^3}p+\frac{2p}{A^2\left(\frac{1}{z}-A\right)}$$

$$+\frac{\left(\frac{1}{z}-A\right)p}{\left[1-A\left(\frac{1}{z}-A\right)\right]^3}\left\{\left(\frac{1}{z}-A\right)\left[\frac{1}{\frac{1}{z}-A\left(\frac{1}{\frac{1}{z}-A}-A\right)}-\left(1+\frac{1}{\frac{1}{z}-A}\right)\left(A+\frac{1}{\frac{1}{z}-A}\right)\right]\right.$$

$$\left.+2\left(\frac{1}{\frac{1}{z}-A}-A\right)-4\left(1+\frac{1}{\frac{1}{z}-A}\right)\right\}$$

$$+\frac{Ap}{(1-A^2)^3}\left\{(A-1)\left(A-\frac{1}{A}\right)-3\left(A+\frac{1}{A}\right)\right.$$

$$\left.-4\left(1-\frac{1}{A}\right)\right\}+\frac{pz}{A^2(1-Az)^2}-\frac{zp}{A^2(K+z)^2}$$

$$-\frac{\left(\frac{1}{z}-b\right)(\bar{K}+z)p}{A^2(\bar{K}-z)^3}-\frac{b(z+b)-z'(2z+b)}{A^2(\bar{K}+z)^3}p$$

$$+\frac{2(1-bz)}{Az(\bar{K}+z)^3}p-\frac{p}{A(\bar{K}+z)^2}+\frac{z-\frac{1}{A}}{A(\bar{K}+z)^3}p$$

$$+\frac{p}{z}-\frac{p}{A}+\frac{p}{A-\frac{1}{z}}-\frac{z+1}{z(A+z)^2}p-\frac{1+\frac{2}{A}}{A^3}$$

$$\times\left[\frac{2}{A}+\frac{3}{A^2z}+\frac{4}{A^3z^2}+\frac{5}{A^4z^3}+\cdots\right]p$$

$$-\frac{p}{A^2(\bar{K}+z)^2}\left[(A+z)^2+\frac{1}{A}\left(\frac{1}{A}+2A+2z\right)\right]$$

$$+\frac{p}{A^2}-\frac{p}{z\left(\frac{1}{z}-A\right)^2}\left[\frac{1}{A^2}\left(\frac{1}{z}-A\right)^2\right.$$

$$\left.-\frac{\left(A-\frac{1}{z}\right)^2}{\left(A-\frac{1}{\frac{1}{z}-A}\right)^2}-2\frac{1+\frac{1}{z}-A}{\left(\frac{1}{\frac{1}{z}-A}-A\right)^3}\right]$$

$$+\frac{\frac{1}{z}-b}{A^2(\bar{K}-z)^4}p\left\{\frac{1}{A}\left(1-\frac{1}{A}\right)(\bar{K}+z)\left(\frac{5}{A}+2A+2z\right)\right.$$

$$+\frac{1}{A^2}(\bar{K}+z)(\bar{K}-z)+\frac{1}{A^2}\left(1-\frac{1}{A}\right)^2(\bar{K}-z)\Big\}$$

$$+\frac{p}{A^2}z\left\{\frac{1}{A^2}\left(\frac{1}{A}-2-A-z\right)\right.$$

$$\left.-\frac{2}{A}\left(1-\frac{1}{A}\right)(\bar{K}-z)\right\}\frac{1}{(\bar{K}-z)^3}$$

$$+\frac{p}{A^2(\overline{K}-z)^4}\left\{\frac{3}{A^2}\left(1-\frac{1}{A}\right)[\bar{z}'(2z+b)-b(z+b)]\right.$$

$$+\left[\left(1+\frac{2}{A^2}\right)(b(z+b)+bz'-2\bar{z}'(z+b))\right.$$

$$\left.\left.-(2z+b)\frac{1}{A^2}\left(1-\frac{1}{A}\right)\right]\frac{1}{(\overline{K}-z)^3}\right\}$$

$$+\frac{2p}{A^2(\overline{K}-z)^4}\left(b-\frac{1}{z}\right)\left[(\overline{K}-z)\left(1-\frac{2}{A}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{3}{A}\left(1-\frac{1}{A}\right)\right]-\frac{\frac{2}{A}\left(1-\frac{1}{A}\right)+(\overline{K}-z)\left(1-\frac{2}{A}\right)p}{A^2(\overline{K}-z)^3}$$

$$+\frac{p}{A^2}\left\{\frac{\left(1-\frac{1}{A}\right)\left(z+A-2b-\frac{2}{A}\right)-\frac{1}{A}\left(z-\frac{1}{A}\right)}{(\overline{K}-z)^3}\right.$$

$$\left.+3\frac{\frac{1}{A}\left(1-\frac{1}{A}\right)\left(z-\frac{1}{A}\right)}{(\overline{K}-z)^4}\right\}-\frac{1}{z}\varphi_1^{(2)}(z)$$

求到 $g_1^{(2)}(z)$ 后，代入下式以求 $g_0^{(2)}(z)$

$$g_0^{(2)}(t^{(0)})=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}g_1^{(2)}(t^{(1)})\left[\frac{1}{t^{(1)}-t^{(0)}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(t^{(1)}-b)^2(\bar{t}^{(1)}-t^{(0)})}\right]dt^{(1)}-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\overline{g_1^{(2)}(t^{(1)})}$$

$$\times\left[\frac{1}{(\bar{t}^{(1)}-t^{(0)})^2}\left(t^{(0)}-b-\frac{1}{t^{(0)}+b}\right)\right]d\bar{t}^{(1)}$$

$$\varphi_0^{(2)}(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g_0^{(2)}(t^{(0)})dt^{(0)}}{t^{(0)}-z}$$

$$\psi_0^{(2)}(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\overline{g_0^{(2)}(t^{(0)})}dt^{(0)}}{t^{(0)}-z}-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g_0^{(2)}(t^{(0)})dt^{(0)}}{t^{(1)}-z}$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g_0^{(2)}(t^{(0)})dt^{(0)}}{(t^{(0)}-z)^2}$$

于是得到第二次近似应力函数为：

$$\varphi^{(2)}(z)=\varphi_0^{(2)}(z)+\varphi_1^{(2)}(z)$$
$$\psi^{(2)}(z)=\psi_0^{(2)}(z)+\psi_1^{(2)}(z)$$

这里$K=A+1/A$。

3-15 逐次逼近法

在双连通区的情况，解两个方程。我们第一步取

$$g_1^{(0)}=f_1(t_1)$$

把它代入积分方程组，得到第一次近似解。把一次近似解再代入原积分方程组，得到第二次近似，如此反复代入，则得到一般表达式为：

$$g_2^{(2m-1)}(t_2)=f_2(t_2)-\int_{C_1}[N_1^{(1)}(t_2,t_1)g_1^{2m-2}(t_1)+N_1^{(2)}(t_2,t_1)\overline{g_1^{2m-2}(t_1)}]dt_1$$

$$g_1^{(2m)}(t_1)=f_1(t_1)-\int_{C_2}[N_2^{(1)}(t_1,t_2)g_2^{2m-1}(t_2)+N_2^{(2)}(t_1,t_2)\overline{g_2^{2m-1}(t_2)}]dt_2$$

我们希望

$$\lim_{m\to\infty}g_1^{(2m)}(t_1)=g_1(t_1);\quad \lim_{m\to\infty}g_2^{2m-1}(t_2)=g_2(t_2)$$

研究它们的差

$$g_1^{2m}(t_1)-g_1^{2(m-1)}(t_1)=\int_{C_2}\{N_2^{(1)}(t_1,t_2)[g_2^{2m-3}(t_2)-g_2^{2m-1}(t_2)]+[\overline{g_2^{2m-3}(t_2)}-\overline{g_2^{2m-1}(t_2)}]N_2^{(2)}(t_1,t_2)\}dt_2$$

$$\lim_{m\to\infty}|g_1^{2m}(t_1)-g_1^{2(m-1)}(t_1)|=0$$

我们知道

$$|g_1^{(2m)}(t_1)-g_1^{2(m-1)}(t_1)|\leqslant|\int_{C_2}N_2^{(1)}(t_1,t_2)[g_2^{2m-3}(t_2)-g_2^{2m-1}(t_2)]dt_2|+|\int_{C_2}N_2^{(2)}(t_1,t_2)[\overline{g_2^{2m-3}(t_2)}-\overline{g_2^{2m-1}(t_2)}]dt_2|$$

$$\leqslant|g_2^{2m-3}(t_2)-g_2^{2m-1}(t_2)|_{\max}|\int_{C_2}N_2^{(1)}dt_2|$$

$$+|\overline{g_2^{2m-2}(t_2)-g_2^{2m-1}(t_2)}|_{\max}\left|\int_{C_2}N_2^{(2)}dt_2\right|$$

若是

$$|g_2^{(2m-3)}(t_2)-g_2^{(2m-1)}(t_2)|_{\max}<K_1$$

则得到

$$|g_1^{(2m)}(t_1)-g_1^{(2m-1)}(t_1)|<K_1\left\{\left|\int_{C_2}N_2^{(1)}dt_2\right|+\left|\int_{C_2}N_2^{(2)}dt_2\right|\right\}$$

我们令

$$\left|\int_{C_2}N_2^{(1)}dt_2\right|+\left|\int_{C_2}N_2^{(2)}dt_2\right|=\alpha<1$$

可以取

$$\left|\int_{C_2}N_2^{(1)}(t_1,t_2)dt_2\right|<1/2,\quad \left|\int_{C_2}N_2^{(2)}(t_1,t_2)dt_2\right|<1/2$$

若取

$$|g_1^{(2m)}(t_1)-g_1^{(2m-2)}(t_1)|<K_2$$
$$|g_1^{(0)}(t_1)-g_1^{(2)}(t_1)|<M$$

同样可得

$$\left|\int_{C_1}N_1^{(1)}(t_2,t_1)dt_1\right|<1/2\quad \left|\int_{C_1}N_1^{(2)}(t_2,t_1)dt_1\right|<1/2$$

按以上情况，有

$$|g_2^{(3)}(t_2)-g_2^{(1)}(t_2)|<\alpha M;\quad |g_1^{(4)}(t_1)-g_1^{(2)}(t_1)|<\alpha^2M$$
$$|g_2^{(5)}(t_2)-g_2^{(3)}(t_2)|<\alpha^3M;\quad |g_1^{(6)}(t_1)-g_1^{(4)}(t_1)|<\alpha^4M$$

余类推，于是可得到

$$|g_1^{(2m)}(t_1)-g_1^{(2m-2)}(t_1)|<\alpha^{2(m-1)}\cdot M$$
$$|g_2^{(2m-1)}(t_2)-g_2^{(2m-3)}(t_2)|<\alpha^{2m-3}\cdot M$$

式中 $\alpha<1$，当 $m\to\infty$ 时，上两式趋向于零。

〔例题16〕 半平面中有两个圆孔，它们的半径分别为 r_1 和 r_2，如图3-29所示。

令 C_1 圆的圆心在原点，C_2 圆的圆心在 b 点。在边界 C_1 上的负荷以 f_1 表示，在 C_2 上的负荷以 f_2 表示。于是

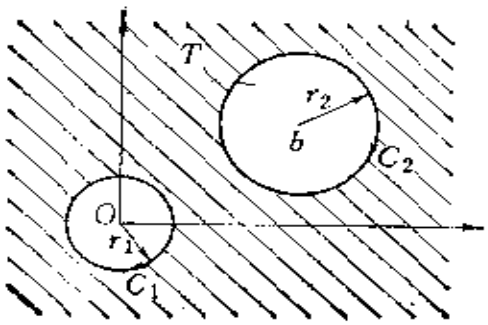


图 3-29

$$\varphi_1(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f_1(t_1)}{t_1-z}dt_1$$

$$\psi_1(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{\overline{f_1(t_1)}dt_1}{t_1-z}-\frac{r_1^2}{z}\varphi_1'(z)$$

$$\varphi_2(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f_2(t_2)dt_2}{t_2-z}$$

$$\psi_2(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{\overline{f_2(t_2)}dt_2}{t_2-z}-\frac{r_2^2}{z-b}\varphi_2'(z)$$

而且

$$F_1(z)=\varphi_1(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi_1(z)}$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f_1dt_1}{t_1-z}+\frac{z}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{\bar{f}_1d\bar{t}_1}{(\bar{t}_1-\bar{z})^2}$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f_1'd\bar{t}_1}{t_1-z}-\frac{r_1^2}{\bar{z}}\overline{\varphi_1'(z)}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{C_1}-\left(\frac{1}{t_1-z}+\frac{r_1^2}{t_1^2(t_1-z)}\right)f_1dt_1\right.$$

$$\left.+\int_{C_1}\left(z-\frac{r_1^2}{\bar{z}}\right)\frac{\bar{f}_1}{(t_1-z)^2}d\bar{t}_1\right\}$$

同样可得

$$F_2(z)=\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{C_2}-\left(\frac{1}{t_2-z}+\frac{r_2^2}{(t_2-b)^2(t_2-\bar{z})}\right)f_2dt_2\right.$$
$$\left.+\int_{C_2}\left(z-b-\frac{r_2^2}{\bar{z}-\bar{b}}\right)\frac{f}{(t_2-z)^2}d\bar{t}_2\right\}$$

我们取

$$N_1^{(1)}=-\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{t_1-z}+\frac{r_1^2}{t_1^2(\bar{t}_1-\bar{z})}\right)$$

$$N_1^{(2)}=-\frac{1}{2\pi i}\left(z-\frac{r_1^2}{\bar{z}}\right)\frac{r_1^2}{(\bar{t}_1-\bar{z})^2t_1^2}$$

$$N_2^{(1)}=-\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{t_2-z}+\frac{r_2^2}{(t_2-b)^2(\bar{t}_2-\bar{z})}\right)$$

$$N_2^{(2)}=-\frac{1}{2\pi i}\left(z-b-\frac{r_2^2}{\bar{z}-\bar{b}}\right)\frac{r_2^2}{(\bar{t}_2-\bar{z})^2(t_2-b)^2}$$

现在

$$\left|-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\left(\frac{1}{t_1-z}+\frac{r_1^2}{t_1^2(\bar{t}_1-\bar{z})}\right)dt_1\right|$$
$$=\left|-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{r_1^2dt_1}{t_1\bar{z}\left(\frac{r_1^2}{\bar{z}}-t_1\right)}\right|$$
$$=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{r_1^2dt_1}{t_1\bar{z}\left(t_1-\frac{r_1^2}{\bar{z}}\right)}\right|=0$$

同样可知

$$\left|-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\left(z-\frac{r_1^2}{\bar{z}}\right)\frac{r_1^2dt_1}{t_1^2(t_1-z)^2}\right|$$
$$=\left|-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\left(z-\frac{1}{\bar{z}}\right)\frac{r_1^2dt_1}{\bar{z}^2\left(\frac{r_1^2}{\bar{z}}-t_1\right)^2}\right|$$

$$= \left| -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\left(\frac{z}{\bar{z}^2}-\frac{r_1^2}{\bar{z}^3}\right)\frac{r_1^2 dt_1}{\left(t_1-\frac{r_1^2}{\bar{z}}\right)^2}\right| = 0$$

这表示

$$\left|\int_{C_1} N_1^{(1)} dt_1\right| < 1/2, \quad \left|\int_{C_1} N_1^{(2)} dt_1\right| < 1/2$$

同样可得到

$$\left|\int_{C_2} N_2^{(1)} dt_2\right| < 1/2, \quad \left|\int_{C_2} N_2^{(2)} dt_2\right| < 1/2$$

设此两圆孔受均布负荷 p_1 和 p_2，两圆孔的半径分别为 r_1 和 r_2。

由 $f_1 = i\int_{C_1}(X_n+iY_n)ds = p_1\int_{C_1} ir_1 e^{i\theta}d\theta = p_1 r_1 e^{i\theta}$

$= p_1 t_1$

同样 $$f_2 = p_2(t_2-b)$$

于是

$$g_2^{(1)}(t_2) = f_2(t_2) + \int_{C_1}\left[\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{t_1-z}+\frac{r_1^2}{t_1^2(t_1-z)}\right)f_1(t_1)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi i}\left(z-\frac{r_1^2}{\bar{z}}\right)\frac{r_1^2}{t_1^2(t_1-z)^2}\overline{f_1(t_1)}\right]dl_1$$

式中

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\left(\frac{1}{t_1-z}\right)p_1 t_1 dt_1 = 0$$

$$\frac{r_1^2}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{p_1 t_1 dt_1}{t_1^2(t_1-z)} = \frac{p_1}{\bar{z}}r_1^2$$

于是得到 $$g_2^{(1)}(t_2) = (t_2-b)p_2 - \frac{r_1^2}{t_2}p_1$$

而且我们知道

$$g_1^{(2)}(t_1) = p_1 t_1 + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\left[\left(\frac{1}{t_2-t_1}+\frac{r_2^2}{(t_2-b)^2(t_2-\overline{t_1})}\right)g_2^{(1)}(t_2)\right.$$

$$+\left(t_1-b-\frac{r_2^2}{\bar{t}_1-\bar{b}}\right)\frac{r_2^2}{(t_2-\bar{t}_1)^2(t_2-b)^2}\,\overline{g_2^{(1)}(t_2)}\Big]dt_2$$

把 $g_2^{(1)}(t_2)$ 代入上式，令 $\Delta_1=b-r_2^2/\bar{b}$

则

$$g_1^{(2)}(t_1)=p_1t_1+\frac{r_1^2r_2^2}{\bar{b}^2(t_1-\Delta_1)}p_1+\frac{r_2^2}{t_1-\bar{b}}p_2$$

又知

$$g_2^{(3)}(t_2)=f_2(t_2)-\int_{C_1}[N_1^{(1)}g_1^{(2)}dt_1+N_1^{(2)}g_1^{(2)}]dt_1$$

$$\int_{C_1}N_1^{(1)}g_1^{(2)}(t_1)dt_1=-\frac{p_1}{2\pi i}\int_{C_1}\left(\frac{1}{\bar{t}_1-t_2}+\frac{r_1^2}{t_1^2(\bar{t}_1-t_2)}\right)$$

$$\times\left(t_1+\frac{r_1^2r_2^2}{\bar{b}^2(t_1-\Delta_1)}+\frac{r_2^2}{t_1-b}\frac{p_2}{p_1}\right)dt_1$$

$$=-\frac{r_1^2}{\bar{t}_2}p_1-\frac{r_1^2r_2^2}{\bar{b}^2}\left[\frac{1}{\Delta_1}+\frac{\bar{t}_2}{r_1^2-\Delta_1\bar{t}_2}\right]p_1-\frac{r_1^2r_2^2}{\bar{b}(r_1^2-\bar{b}\bar{t}_2)}p_2$$

$$\int_{C_1}N_1^{(2)}g_1^{(2)}(\bar{t}_1)dt_1=-\frac{r_1^2}{2\pi i}\int_{C_1}\left(t_2-\frac{r_1^2}{\bar{t}_2}\right)$$

$$\times\left[\bar{t}_1+\frac{r_1^2r_2^2}{b^2(\bar{t}_1-\Delta_1)}+\frac{r_2^2}{t_1-b}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)\right]\frac{p_1dt_1}{(\bar{t}_1-\bar{t}_2)^2t_1^2}$$

$$=-\frac{r_1^2r_2^2\left(t_2-\frac{r_1^2}{\bar{t}_2}\right)}{b^2\left(\bar{t}_2-\frac{r_1^2}{b}\right)^2}p_2$$

于是

$$g_2^{(3)}(t_2)=(t_2-b)p_2+\frac{r_1^2}{\bar{t}_2}p_1+\frac{r_1^2r_2^2}{\bar{b}^2}p_1\left(\frac{1}{\Delta_1}-\frac{\bar{t}_2}{\Delta_1\bar{t}_2-r_1^2}\right)$$

$$-\frac{r_1^2r_2^2}{\bar{b}^2\left(t_2-\frac{r_1^2}{b}\right)}p_2+\frac{r_1^2r_2^2\left(t_2-\frac{r_1^2}{\bar{t}_2}\right)}{b^2\left(t_2-\frac{r_1^2}{b}\right)^2}p_2$$

同样

$$g_1^{(4)}(t_1)=f_1(t_1)-\int_{C_2}[N_1^{(1)}(t_1,t_2)g_2^{(3)}(t_2)+N_1^{(2)}(t_1,t_2)g_2^{(3)}(\bar{t}_2)]dt_2$$

式中

$$N_1^{(1)}(t_1,t_2)=-\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{1}{t_1-t_2}+\frac{(t_2-b)r_1^2}{t_1^2(t_1-b)(t_2-\Delta^{(0)})}\right]$$

$$N_1^{(2)}(t_1,t_2)=-\frac{r_1^2}{2\pi i}\left(t_2-\frac{r_1^2}{\bar{t}_2}\right)\left[\frac{(t_2-b)^2}{t_1^2(t_1-\bar{b})^2(t_2-\Delta^{(0)})^2}\right]$$

式中

$$\Delta^{(0)}=b+\frac{r_2^2}{t_1-\bar{b}}$$

经过计算后，得到

$$g_1^{(4)}(t_1)=p_1t_1-\frac{(\Delta^{(0)}-b)^2r_1^2}{t_1^2(t_1-\bar{b})}p_2+\frac{r_1^2}{\bar{b}}\left[\frac{b-\Delta_1}{t_1-\Delta_1}-\frac{r_1^2(\Delta^{(0)}-\Delta_1)(\Delta^{(0)}+\Delta_1-2b)}{t_1^2(t_1-b)(\Delta^{(0)}-\Delta_1)}\right]p_1+\frac{r_1^2r_2^2}{\Delta_1b^2}$$

$$\times\left\{\frac{(b-\Delta^{(0)})r_1^2}{t_1^2(t_1-\bar{b})}+\frac{\bar{b}(\Delta_0-\Delta_1)}{(t_1-\Delta_0)\left(\bar{b}-\frac{r_1^2}{\Delta_1}\right)}\right.$$

$$\left.-\frac{\bar{b}r_1^2[(\Delta^{(0)}-b)(\Delta^{(0)}-\Delta_1)-(\Delta_0-b)(\Delta_0-\Delta_1)]}{t_1^2(t_1-\bar{b})\left(\bar{b}-\frac{r_1^2}{\Delta_1}\right)(\Delta^{(0)}-\Delta_0)}\right\}$$

$$-\frac{r_1^4r_2^4p_2}{\bar{b}^2t_1^2(t_1-b)^2\left(\Delta^{(0)}-\frac{r_1^2}{b}\right)}+\frac{r_1^2r_2^2}{(b\bar{b}-r_1^2)^2}p_2$$

$$\times\left\{\frac{(3\Delta_7^2+4b\Delta_7-b^2)t_2-2b\frac{r_2^2\Delta_7^2}{b\bar{b}-r_1^2}}{(t_1-\Delta_7)^2}-\frac{r_1^2}{t_1^2(t_1-\bar{b})}\right.$$

$$\times\left[\frac{(\Lambda^{(0)}-b)^3\Delta^{(0)}}{(\Lambda^{(0)}-\Delta_7)^2}+\frac{(\Lambda_7-b)^3}{\Delta_7-\Delta^{(0)}}+3\frac{\Lambda_7(\Delta_7-b)^2}{\Lambda_7-\Lambda^{(0)}}\right.$$

$$\left.-\frac{\Lambda_7(\Lambda_7-b)^3}{(\Lambda_7-\Lambda^{(0)})^2}\right]+\frac{r_1^2(t_1-b)^3}{b(t_1-\Delta_1)(t_1-\Lambda_7)}-\frac{r_1^2}{b}$$

$$+\frac{r_1^4}{bt_1^3(t_1-b)}\left[\frac{(\Delta^{(0)}-b)^4}{(\Delta^{(0)}-\Delta_1)(\Delta^{(0)}-\Lambda_7)^2}\right.$$

$$+\frac{(\Lambda_1-b)^4}{(\Delta_1-\Lambda^{(0)})(\Delta_1-\Delta_7)^2}+\frac{4(\Lambda_7-b)^3}{(\Delta_7-\Delta^{(0)})(\Lambda_7-\Delta_1)}$$

$$\left.-\frac{(\Delta_7-b)^4}{(\Delta_7-\Lambda^{(0)})^2(\Delta_7-\Delta_1)}-\frac{(\Lambda_7-b)^4}{(\Delta_7-\Delta^{(0)})(\Delta_7-\Delta_1)}\right]\Bigg\}$$

$$-\frac{r_1^2r_2^2}{t_1^2(t_1-b)^2}\left(b+\frac{r_1^2}{b}+\frac{2r_2^2}{t_1-b}\right)p_2+\frac{r_1^4p_1}{t_1^2(t_1-b)^2}$$

$$\times\left\{\frac{r_1^2}{b}\left[\frac{(\Lambda_1-b)^3}{\Delta_1(\Delta_1-\Delta^{(0)})^2}+\frac{b^3}{\Delta_1\Lambda^{(0)2}}+\frac{3(\Delta^{(0)}-b)^2}{\Delta^{(0)}(\Lambda^{(0)}-\Delta_1)}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{(\Lambda^{(0)}-b)^3}{\Lambda^{(0)2}(\Lambda^{(0)}-\Delta_1)}-\frac{(\Delta^{(0)}-b)^3}{\Delta^{(0)}(\Lambda^{(0)}-\Delta_1)^2}\right]-2(\Delta^{(0)}-b)\right\}$$

$$+\frac{r_1^4r_2^2p_1}{\Delta_1b^2t_1^2(t_1-b)^2}\left\{(b-\Delta^{(0)})(3\Lambda^{(0)}-b)\right.$$

$$+\frac{2\Lambda^{(0)}(\Delta^{(0)}-b)^2}{\Lambda^{(0)}-\frac{r_1^2}{\Delta_1}}+\frac{2\Delta^{(0)2}(\Delta^{(0)}-b)}{\Delta^{(0)}-\frac{r_1^2}{\Delta_1}}-\frac{\Delta^{(0)2}(\Delta^{(0)}-b)^2}{\left(\Delta^{(0)}-\frac{r_1^2}{\Delta_1}\right)^2}$$

$$+\frac{r_1^2}{b}\left[\frac{(\Delta_1-b)^3}{(\Lambda_1-\Lambda^{(0)})^2}-\frac{(\Lambda^{(0)}-b)^3}{(\Delta^{(0)}-\Delta_1)^2}+\frac{3(\Lambda^{(0)}-b)^2}{(\Delta^{(0)}-\Delta_1)}\right]$$

$$-\frac{r_1^2}{b}\left[\frac{\Delta_1(\Delta_1-b)^3}{\left(\Delta_1-\frac{r_1^2}{\Delta_1}\right)(\Lambda_1-\Delta^{(0)})^2}+\frac{(\Delta^{(0)}-b)^2(4\Delta^{(0)}-b)}{\left(\Delta^{(0)}-\frac{r_1^2}{\Delta_1}\right)(\Delta^{(0)}-\Delta_1)}\right.$$

$$\left.-\frac{\Delta^{(0)}(\Lambda^{(0)}-b)^3}{\left(\Lambda^{(0)}-\frac{r_1^2}{\Delta_1}\right)^2(\Delta^{(0)}-\Delta_1)}\right.$$

$$-\frac{\Lambda^{(0)}(\Lambda^{(0)}-b)^3}{\left(\Delta^{(0)}-\frac{r_1^2}{\bar{b}}\right)(\Delta^{(0)}-\Delta_1)^2}\Bigg]\Bigg\}+\frac{r_1^4 r_2^2 p_2}{b^2 t_1^3(t_1-b)^2}$$

$$\times\left\{\frac{r_1^2}{\bar{b}}\left[\frac{(\Lambda_1-b)^4}{(\Delta_1-\Delta^{(0)})^2(\Delta_1-\Delta_7)}+\frac{(\Delta_7-b)^4}{(\Lambda_7-\Lambda_1)(\Delta_7-\Delta^{(0)})^2}\right.\right.$$

$$\left.-\frac{(\Lambda^{(0)}-b)^4}{(\Delta^{(0)}-\Delta_1)^2(\Delta^{(0)}-\Delta_7)}-\frac{(\Delta^{(0)}-b)^4}{(\Delta^{(0)}-\Lambda_1)(\Lambda^{(0)}-\Delta_7)^2}\right]$$

$$-\left[\frac{\Delta_7(\Delta_7-b)^3}{(\Delta_7-\Delta^{(0)})^2}+\frac{(\Delta^{(0)}-b)^2(4\Delta^{(0)}-b)}{\Delta^{(0)}-\Delta_7}\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\Lambda^{(0)}(\Lambda^{(0)}-b)^3}{(\Delta^{(0)}-\Delta_7)^2}\right]\right\}\frac{br_1^2}{\bar{b}b-r_1^2}-\frac{r_1^4 r_2^2 p_1}{\bar{b}^2 t_1^3(t_1-b)^2}$$

$$\times\left\{\frac{\bar{b}(\Delta^{(0)}-b)(\Delta^{(0)}-\Delta_1)}{\left(\Delta^{(0)}-\frac{r_1^2}{\bar{b}}\right)^2}+\frac{\Delta^{(0)}\bar{b}(\Delta^{(0)}-\Delta_1)}{\left(\Delta^{(0)}-\frac{r_1^2}{\bar{b}}\right)^2}\right.$$

$$+\frac{\Delta^{(0)}\bar{b}(\Lambda^{(0)}-b)}{\left(\Delta^{(0)}-\frac{r_1^2}{\bar{b}}\right)^2}-\frac{2\bar{b}\Delta^{(0)}(\Delta^{(0)}-b)(\Delta^{(0)}-\Lambda_1)}{\left(\Delta^{(0)}-\frac{r_1^2}{\bar{b}}\right)^3}$$

$$\left.-\frac{4r_1^2(\Delta^{(0)}-b)\left(b-\frac{r_1^2}{\bar{b}}\right)}{\left(\Delta^{(0)}-\frac{r_1^2}{\bar{b}}\right)^3}\right.$$

$$+\frac{r_1^4}{\bar{b}}\left[\frac{(\Delta_1-b)^3}{\Delta_1\left(\Delta_1-\frac{r_1^2}{\bar{b}}\right)^2(\Delta_1-\Delta^{(0)})^2}\right.$$

$$+\frac{3(\Delta^{(0)}-b)^2}{\Delta^{(0)}\left(\Delta^{(0)}-\frac{r_1^2}{\bar{b}}\right)^2(\Delta^{(0)}-\Delta_1)}$$

$$\left.-\frac{(\Lambda^{(0)}-b)^3}{\left(\Delta^{(0)}-\frac{r_1^2}{\bar{b}}\right)^2(\Delta^{(0)}-\Delta_1)\Delta^{(0)2}}\right.$$

$$-\frac{(\Delta^{(0)}-b)^3}{\Delta^{(0)}\left(\Delta^{(0)}-\frac{r_1^2}{\bar{b}}\right)^2(\Delta^{(0)}-\Lambda_1)^2}$$

$$-\left.\frac{2(\Delta^{(0)}-b)^3}{\left(\Delta^{(0)}-\frac{r_1^2}{\bar{b}}\right)^3(\Delta^{(0)}-\Lambda_1)\Lambda^{(0)}}\right]\Bigg\}$$

$$\Delta_0=b-\frac{r_2^2}{\bar{b}-\frac{r_1^2}{\Delta_1}},\quad \Delta_7=b\left(1-\frac{r_2^2}{bb-r_1^2}\right)$$

利用如下的公式

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(t)dt}{t-z},$$

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\overline{f(t)}dt}{t-z}-\frac{r^2}{z}\varphi'(z)$$

可以求到 $\varphi_1^{(3)}(z)$，$\psi_1^{(2)}(z)$，$\varphi_1^{(4)}(z)$ 和 $\psi_2^{(4)}$ 等，以及 $\varphi_2^{(1)}$，$\psi_2^{(1)}$，$\varphi_2^{(3)}$，$\psi_2^{(3)}$ 等。

$$\varphi_2^{(1)}(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{g_2^{(1)}(t_2)dt_2}{t_2-z}=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{t_2-b}{t_2-z}p_2dt_2$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{p_1r_1^2}{\bar{t}_2(t_2-z)}dt_2=r_1^2\left(\frac{1}{\bar{b}+\frac{r_2^2}{z-b}}-\frac{1}{\bar{b}}\right)p_1$$

$$\psi_2^{(1)}(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{\overline{g_2^{(1)}(t_2)}dt_2}{t_2-z}-\frac{r_2^2}{z-b}\varphi_2^{(1)}(z)$$

$$=-\frac{r_1^2}{z-b}p_2+\frac{r_1^2}{z}p_1-\frac{r_2^2r_1^2}{(z-b)^3}\left(\bar{b}+\frac{r_2^2}{z-b}\right)^2p_1$$

$$\varphi_1^{(2)}(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{g_1^{(2)}(t_1)d_1}{t_1-z}=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{p_1t_1dt_1}{t_1-z}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{r_1^2r_2^2p_1dt_1}{\bar{b}^2(t_1-\Delta_1)(t-z)}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{r_2^2 p_2 dt_1}{(t_1-b)(t_1-z)}=-\frac{r_1 r_2^2 p_1}{b^2(z-\Delta_1)}$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{t_1 r_2^2 p_2 dt_1}{\bar{b}\left(t_1-\frac{r_1^2}{\bar{b}}\right)(t_1-z)}$$

$$=-\frac{r_1^2 r_2^2 p_1}{\bar{b}^2(z-\Delta_1)}+\frac{r_2^2 z}{\bar{b}\left(z-\frac{r_1^2}{\bar{b}}\right)}p_2-\frac{r_2^2}{b}p_2$$

$$\psi_1^{(2)}(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{g_1^{(2)}(t_1)dt_1}{t_1-z}-\frac{r_1^2}{z}\varphi_1'^{(2)}(z)$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{p_1 r_1^2 dt_1}{t_1(t_1-z)}+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{r_1^2 r_2^2 p_1 t_1 dt_1}{b^2\Delta_1\left(t_1-\frac{r_1^2}{\Delta_1}\right)(t_1-z)}$$

$$-\frac{r_1^2}{z}\varphi_1'^{(2)}(z)-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{r_2^2 p_2 dt_1}{(t_1-b)(t_1-z)}$$

$$=-\frac{r_1^2}{z}p_1+\frac{r_1^2 r_2^2 z p_1}{b^2\Delta_1\left(z-\frac{r_1^2}{\Delta_1}\right)}-\frac{r_1^2 r_2^2}{b^2\Delta_1}p_1-\frac{r_2^2}{z-b}p_2$$

$$+\frac{r_1^2 r_2^2 z}{z\bar{b}\left(z-\frac{r_1^2}{\bar{b}}\right)^2}p_2-\frac{r_1^4 r_2^2 p_1}{\bar{b}^2 z(z-\Delta_1)^2}-\frac{r_1^2 r_2^2 \bar{p}_2}{z\bar{b}\left(z-\frac{r_1^2}{\bar{b}}\right)}$$

同样可得 $\varphi_2^{(3)}(z)$及 $\psi_2^{(3)}(z)$ 如下：

$$\varphi_2^{(3)}(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{g_2^{(3)}(t_2)dt_2}{t_2-z}=-\frac{r_1^2}{\bar{b}+\frac{r_2^2}{z-b}}p_1+\frac{r_1^2}{\bar{b}}p_1$$

$$+\frac{r_1^2 r_2^2}{\bar{b}^2}p_1\left[\frac{\bar{b}+\frac{r_2^2}{z-b}}{\Delta_1\left(\bar{b}+\frac{r_2^2}{z-b}\right)-r_1^2}-\frac{\bar{b}}{\Delta_1 b-r_1^2}\right]$$

$$+\frac{r_1^2r_2^2}{\bar{b}^2\left(z-\frac{r_1^2}{\bar{b}}\right)}p_2$$

$$\psi_2^{(3)}(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{\overline{g_2^{(3)}(t_2)}dt_2}{t_2-z}-\frac{r_2^2}{z-b}\varphi_2'^{(3)}(z)$$

$$=-\frac{r_2^2}{z-b}p_2-\frac{r_1^2}{z}p_1+\frac{r_1^2r_2^2}{b^2}\left[\frac{z}{\bar{\Delta}_1z-r_1^2}-\frac{1}{\Delta_1}\right]p_1$$

$$+\frac{r_1^2r_2^2}{b^2}\left[\frac{1}{\bar{b}-\frac{r_1^2}{b}+\frac{r_2^2}{z-b}}-\frac{1}{\bar{b}-\frac{r_1^2}{b}}\right]p_2$$

$$-\frac{r_1^2r_2^2}{b^2}\left[\frac{\bar{b}+\frac{r_2^2}{z-b}+\frac{r_1^2}{z}}{\left(z-\frac{r_1^2}{b}\right)^2}\right]p_2-\frac{r_2^2}{z-b}\varphi_2'^{(3)}(z)$$

于是得到应力函数如下：

$$\varphi(z)=\varphi_1^{(2)}(z)+\varphi_2^{(1)}(z)+\varphi_2^{(3)}(z)$$

$$\psi(z)=\psi_1^{(2)}(z)+\psi_2^{(1)}(z)+\psi_2^{(3)}(z)$$

把 $\varphi_1^{(2)}$，$\varphi_2^{(1)}$，$\varphi_2^{(3)}$，及 $\psi_1^{(2)}$，$\psi_2^{(1)}$，$\psi_2^{(3)}$ 代入上式后，得到最后结果。

$$\varphi(z)=\left\{-\frac{r_1^2r_2^2}{\bar{b}^2(z-\Delta_1)}-\frac{r_1^2}{\bar{b}+\frac{r_2^2}{z-b}}+\frac{r_1^2}{\bar{b}}\right.$$

$$+\frac{r_1^2r_2^2}{\bar{b}^2}\left[\frac{\bar{b}+\frac{r_2^2}{z-b}}{\Delta_1\left(\bar{b}+\frac{r_1^2}{z-b}\right)-r_1^2}-\frac{\bar{b}}{\Delta_1\bar{b}-r_1^2}\right]$$

$$\left.\times r_1^2\left(\frac{1}{\bar{b}+\frac{r_2^2}{z-b}}-\frac{1}{\bar{b}}\right)\right\}p_1+\left[-\frac{r_2^2z}{\bar{b}\left(z-\frac{r_1^2}{\bar{b}}\right)}\right.$$

$$-\frac{r_1^2}{b^2}+\frac{r_1^2r_2^2}{b^2\left(z-\frac{r_1^2}{\bar{b}}\right)}\Bigg]p_2$$

$$\psi(z)=\Bigg\{-2\frac{r_1^2}{z}+\frac{r_1^2r_2^2z}{\Delta_1b^2\left(z-\frac{r_1^2}{\Delta_1}\right)}-\frac{r_1^2r_2^2}{\Delta_1b^2}-\frac{r_1^4r_2^2}{zb^2(z-\Delta_1)^2}$$

$$+\frac{r_1^2r_2^2}{b^2}\left[\frac{z}{\Delta_1z-r_1^2}-\frac{1}{\Delta_1}\right]+\frac{r_1^2}{z}$$

$$-\frac{r_1^2r_2^4}{(z-b)^3\left(\bar{b}+\frac{r_2^2}{z-b}\right)^2}+\frac{r_1^2r_2^4}{(z-b)\bar{b}^2}$$

$$\times\Bigg[-\frac{\bar{b}^2}{\left(\bar{b}+\frac{r_2^2}{z-b}\right)^2(z-b)^2}$$

$$+\frac{\Delta_1\left(\bar{b}+\frac{r_2^2}{z-b}\right)r_1^2}{\left[\Delta_1\left(b+\frac{r_1^2}{z-b}\right)-r_1^2\right]^2(z-b)^2}$$

$$+\frac{\frac{r_2^2}{(z-b)^2}}{\Delta_1\left(b+\frac{r_1^2}{z-\bar{b}}\right)-r_1^2}\Bigg]\Bigg\}p_1+\Bigg\{\frac{r_1^2r_2^2}{b\left(z-\frac{r_1^2}{\bar{b}}\right)^2}$$

$$-\frac{r_1^3r_2^2}{z\bar{b}\left(z-\frac{r_1^2}{\bar{b}}\right)}-\frac{2r_2^2}{z-b}+\frac{r_1^2r_2^2}{b^2}\Bigg[b-\frac{r_1^2}{b}+\frac{r_2^2}{z-\bar{b}}$$

$$-\frac{1}{\bar{b}-\frac{r_1^2}{b}}\Bigg]-\frac{r_1^2r_2^4}{\bar{b}^2\left(z-\frac{r_1^2}{\bar{b}}\right)^2(z-b)}$$

$$-\frac{r_1^2r_2^2}{\bar{b}^2}\left[\frac{\bar{b}+\frac{r_2^2}{z-b}+\frac{r_1^2}{z}}{\left(z-\frac{r_1^2}{b}\right)^2}\right]-\frac{r_1^2}{z-b}\Bigg\}p_2$$

第四章　保角变换的应用

机械工程上用的板状零件要便于加工才好，一般不要有很复杂的外形。这就有可能用保角变换的方法把较为复杂但又有较为规则外形的区域处理成圆域来研究。这样，利用第三章的方法便可解决一些弹性力学问题。

4-1　解析函数所构成的变换

定理1　设$\zeta=f(z)$在区域B内解析，并且不是常数，则函数$\zeta=f(z)$将区域B变成一个区域D。

定理2　设$\zeta=f(z)$在区域B内是一个单叶解析函数，它的反函数$z=\omega(\zeta)$是在区域D内的一个单叶解析函数，它将区域D保角变换成区域B。区域D是由$\zeta=f(z)$保角变换区域B而来的。在区域B中，$f'(z)\neq 0$。

定理3　设z平面上单连通区D不含无穷远点，它的边界C至少有两个点，则在区域B内，存在唯一的单叶解析函数$\zeta=f(z)$将B保角变换到ζ平面上的单位圆$|\zeta|<1$，而$\zeta=f(z)$应满足下列条件：

$$z_0\in B,\quad f(z_0)=0;\quad \arg f'(z_0)=\varphi_0^*,\quad 0\leqslant\varphi_0^*<2\pi$$

这里φ_0^*为一常数。

在以上的假设下，若区域B的边界上有顺序的三点，按正方向规定变到单位圆周$|\zeta|=1$上的有相同顺序的三点，则上述结论仍然成立。

定理4　设B和D分别是两个简单闭曲线的内部。$\zeta=f(z)$满足下列条件：

a）$\zeta=f(z)$在$\overline{B}$内解析；

b）$\zeta=f(z)$将区域的边界双方单值变换，则$\zeta=f(z)$

在B内单叶并将B保角变换为D。

下面介绍两种函数构成的保角变换。

1. 在物理面上的椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (a>b)$$

由函数

$$z=\omega(\zeta)=c(\zeta^2+1)/2\zeta$$

变换到ζ面上的圆：

$$|\zeta|=R \qquad (R>1)$$

这里椭圆的长半轴a，短半轴b与参数c及R之间有以下关系：

$$a=\frac{c}{2}\left(R+\frac{1}{R}\right);\quad b=\frac{c}{2}\left(R-\frac{1}{R}\right)$$

$$c=\sqrt{a^2-b^2};\qquad R=\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$$

用这个函数将椭圆的外部区域B一对一地变为ζ面的区域D：

$$|\zeta|>R$$

如图 4-1 所示。

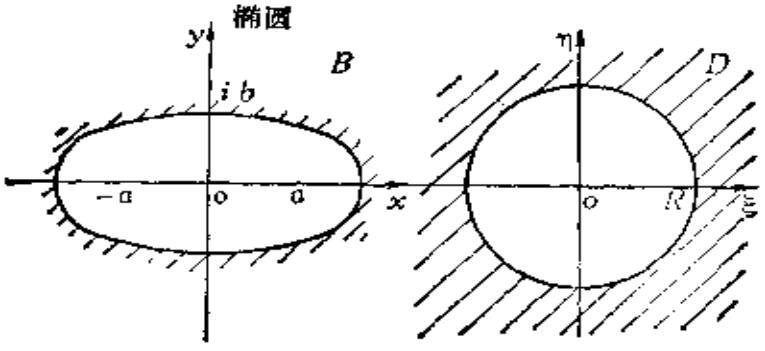


图 4-1

2. 物理面上的多边形对圆形的变换

在实际加工出的多边形孔或多边形体中，边与边的交界处由小圆弧组成。多边形的边界是连续曲线（图4-2）。

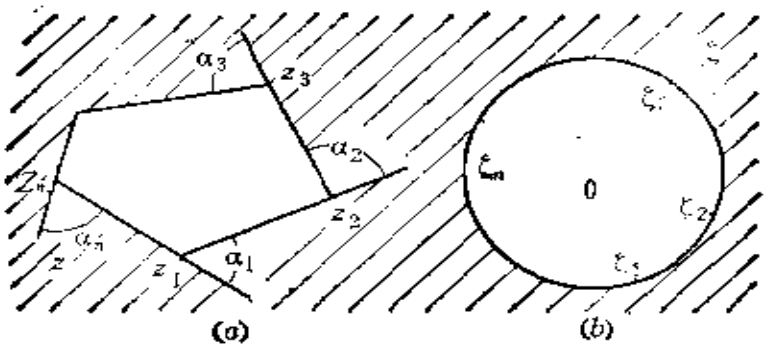


图 4-2

图 4-2 中多边形的外角为 α_1, α_2, …, α_n。并且它们的和为 2π。多边形角顶的点为 z_1, z_2, …, z_n。这些点相当于圆($|\zeta|=1$) 上诸点:

$$\zeta_k = e^{i\eta_k} \qquad (k = 1,\ 2,\ \cdots n)$$

由下列函数

$$\omega'(\zeta) = A\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\zeta_k}{\zeta}\right)^{\frac{\alpha_k}{\pi}}$$

可把多边界形外的区域变到$|\zeta|\geqslant 1$外的区域，这里A是常数，$z=\omega(\zeta)$。

下列函数在角顶诸点使 $\omega'(\zeta_k)=0$，破坏了保角

$$\omega'(\zeta) = A\left[1-\frac{1}{\pi\zeta}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\zeta_k+O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right)\right]$$

变换的一个条件。我们用 $1/\zeta$ 的多项式近似地把原多边形以连续边界的多边形来代替。如在 n 等边多边形，$\alpha_k=2\pi/n$。取点 ζ_k 是 $\zeta^n-1=0$ 的根，则

$$\omega'(\zeta) = A\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\zeta_k}{\zeta}\right)^{\frac{2}{n}} = \frac{A}{\zeta^2}\prod_{k=1}^{n}(\zeta-\zeta_k)^{\frac{2}{n}}$$

$$= \frac{A}{\zeta^2}(\zeta^n-1)^{\frac{2}{n}} = A(1-\zeta^{-n})^{\frac{2}{n}}$$

于是按 $1/\zeta$ 展开，对于较大的 $|\zeta|$ 有

$$\omega'(\zeta)=A\left(1-\frac{2}{n\zeta^{n}}+\frac{2(2-n)}{2n^{2}}\cdot\frac{1}{\zeta^{2n}}+\cdots\right)$$

而当略去常数项时，则

$$z=\omega(\zeta)=A\left[\zeta+\frac{2}{n(n-1)}\cdot\frac{1}{\zeta^{n-1}}-\frac{2(2-n)}{2n^{2}(2n-1)}\cdot\frac{1}{\zeta^{2n-1}}+\cdots\right]$$

当 $n=3$ 时，

$$z=\omega(\zeta)=A\left(\zeta+\frac{1}{3\zeta^{2}}+\frac{1}{45\zeta^{5}}+\cdots\right)$$

当 $n=4$ 时，

$$z=\omega(\zeta)=A\left(\zeta+\frac{1}{6\zeta^{3}}+\frac{1}{56\zeta^{7}}+\cdots\right)$$

常数 A 只影响多边形的方向和比例。

函数 $z=\zeta^{\alpha}$ 把尖劈区域变为半平面。尖劈区域的角度范围为 $-\alpha\pi/2<\arg z<+\alpha\pi/2$。我们只讨论 $\alpha<2$ 的情况。当 $\alpha=2$ 时，这时得到只有一割缝的平面。

函数 $\zeta=(z^{\alpha}-z^{-\alpha})/2$ 把焦点为 $\zeta=\pm1$，半轴 $a=\sin\pi\alpha/2$，$b=\cos\pi\alpha/2$ 的双曲线内区域变到 $\mathrm{Re}[z]>0$ 的半平面。

函数 $z=\ln\zeta$ 把带状区域（$-\infty<x<\infty$，$-\pi/2<y<\pi/2$）变为右半平面。

4-2 任意区域的保角变换的数值解

映射函数 $z=\omega(\zeta)$ 把物理面（z 面）中的某区域变为坐标面（ζ 面）上的单位圆，而且

$$z=\omega(0)=0,\quad z=\omega(1)=x。\qquad(4\text{-}2\text{-}1)$$

物理面和坐标面上的图形如图 4-3 所示。

取映射函数如下：

$$z=\omega(\zeta)=\sum_{n=1}^{m}C_n\zeta^{n};\qquad C_n=A_n+iB_n\qquad(4\text{-}2\text{-}2)$$

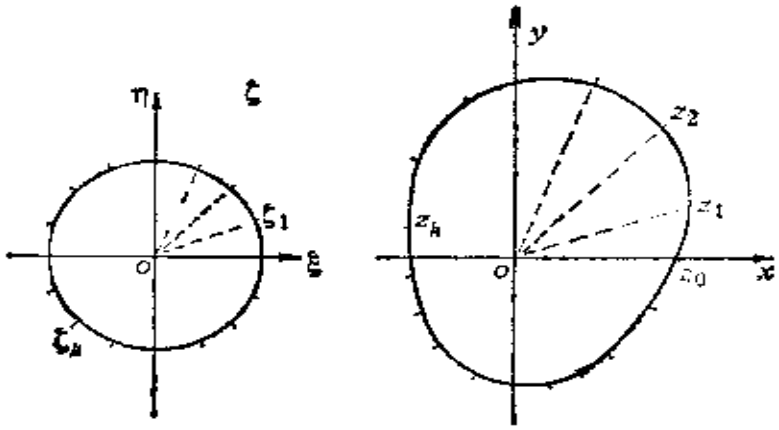


图 4-3

按照黎曼的理论，当 $m\to\infty$，式（4-2-2）可以实现准确的映射。

我们把图 4-3 中的单位圆周分成 $2m$ 等份。等分点的坐标为 $\zeta_n=e^{i\varphi_n}$，$\varphi_n=n\pi/m$。这里的 $n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 2m-1$。与之相应的在物理面上的 z 点坐标为 $z_n=x_n+iy_n$。

我们利用三角函数系的正交性，来分析此保角变换的方法。这里

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{m}\sin j\varphi_n\sin\nu\varphi_n=\begin{cases}0, & \text{当 } j\neq\nu\\ m/2, & \text{当 } j=\nu\end{cases}\\
&\sum_{n=1}^{m}\cos j\varphi_n\cos\nu\varphi_n=\begin{cases}0, & \text{当 } j\neq\nu\\ m/2, & \text{当 } j=\nu\end{cases}\\
&\sum_{n=1}^{m}\sin j\varphi_n\cos\nu\varphi_n=0 \qquad \text{对任何 } j
\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}2\text{-}3)$$

式（4-2-2）写为

$$z=x+iy=\sum_{\nu=1}^{m}(A_\nu+iB_\nu)(\cos\nu\varphi-i\sin\varphi)$$

分开实部和虚部后

$$\left.\begin{aligned} x &= \sum_{\nu=1}^{m} (A_\nu \cos\nu\varphi - B_\nu \sin\nu\varphi) \\ y &= \sum_{\nu=1}^{m} (A_\nu \sin\nu\varphi + B_\nu \cos\nu\varphi) \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}2\text{-}4)$$

对于不同的 z_n(节点)，可有

$$\left.\begin{aligned} x_n &= \sum_{\nu=1}^{m} (A_\nu \cos\nu\varphi_n - B_\nu \sin\nu\varphi_n) \\ y_n &= \sum_{\nu=1}^{m} (A_\nu \sin\nu\varphi_n + B_\nu \cos\nu\varphi_n) \\ \varphi_n &= n\pi/m \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}2\text{-}5)$$

我们已知的是 x_n 和 y_n，要求的是 A_ν 和 B_ν。所以改写式(4-2-5)如下：

$$\left.\begin{aligned} A_j &= -\frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} (x_n \cos j\varphi_n + y_n \sin j\varphi_n) \\ B_j &= -\frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} (y_n \cos j\varphi_n - x_n \sin j\varphi_n) \\ j &= 1,\ 2,\ \cdots,\ m。 \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}2\text{-}6)$$

我们把节点分成偶数和奇数两类。偶数 $n = 2\nu$、奇数 $k = 2\nu - 1$。$\nu = 1,\ 2,\ \cdots,\ m$。

按偶数节点所得 A_j 和 B_j 写为 $A_j^{(+m)}$ 和 $B_j^{(-m)}$、于是

$$\left.\begin{aligned} A_j^{(+m)} &= \frac{1}{m} \sum_{\nu=1}^{m} (x_{2\nu} \cos j\varphi_{2\nu} + y_{2\nu} \sin j\varphi_{2\nu}), \\ & \qquad j = 1,\ 2,\ \cdots,\ m; \\ B_j^{(-m)} &= \frac{1}{m} \sum_{\nu=1}^{m} (y_{2\nu} \cos j\varphi_{2\nu} - x_{2\nu} \sin j\varphi_{2\nu}), \\ & \qquad z_{2m} = z_0 \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}2\text{-}7)$$

按奇数节点所得写为

$$\left.\begin{aligned} A_j^{(-m)} &= \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{2m-1}(x_k\cos j\varphi_k + y_k\sin j\varphi_k) \\ B_j^{(-m)} &= \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{2m-1}(y_k\cos j\varphi_k - x_k\sin j\varphi_k) \end{aligned}\right\}$$

$$k = 1,\ 3,\ \cdots,\ 2m-1 \qquad (4\text{-}2\text{-}8)$$

把式（4-2-7）代入式（4-2-5），对于奇数 $k=2\nu-1$，得到

$$\left.\begin{aligned} x_k &= \sum_{j=1}^{m}(A_j^{(+m)}\cos j\varphi_k + B_j^{(+m)}\sin j\varphi_k) \\ y_k &= \sum_{j=1}^{m}(A^{(+m)}\sin j\varphi_k + B_j^{(+m)}\cos j\varphi_k) \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}2\text{-}9)$$

利用式（4-2-7）消去式（4-2-9）中的 A_j 和 B_j，得到如下结果：

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{m}[(x_{2\nu}\cos j\varphi_{2\nu} + y_{2\nu}\sin j\varphi_{2\nu})\cos j\varphi_k \\ &\quad + (x_{2\nu}\sin\varphi_{2\nu} - y_{2\nu}\cos j\varphi_{2\nu})\sin j\varphi_k] \\ &= \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{m}[x_{2\nu}\cos j\,(\varphi_{2\nu}-\varphi_k) \\ &\quad + y_{2\nu}\sin j\,(\varphi_{2\nu}-\varphi_k)] \end{aligned}$$

但是 $\varphi_n = n\pi/m$，$n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 2m-1$，所以

$$\left.\begin{aligned} x_k &= \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{m}[x_{2\nu}\cos j\varphi_{2\nu-k} + y_{2\nu}\sin j\varphi_{2\nu-k}] \\ y_k &= \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{m}[y_{2\nu}\cos j\varphi_{2\nu-k} - x_{2\nu}\sin j\varphi_{2\nu-k}] \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}2\text{-}10)$$

式中

$$\varphi_{2\nu-k}=\varphi_{2\nu}-\varphi_k=\frac{(2\nu-k)\pi}{m};\quad \nu=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

$$k=1,\ 3,\ 5,\ \cdots,\ 2m-1$$

又

$$(m-j)\varphi_{2\nu-k}=\frac{(m-j)(2\nu-k)\pi}{m}=(2\nu-k)\pi-j\varphi_{2\nu-k},$$

因为 $2\nu-k$ 永远是奇数，故有

$$\cos j\varphi_{2\nu-k}+\cos(m-j)\varphi_{2\nu-k}=0$$

$$\cos\frac{m}{2}\varphi_{2\nu-k}=0$$

$$\cos m\varphi_{2\nu-k}=\cos(2\nu-k)\pi=\cos\pi=-1$$

故

$$\sum_{j=1}^{m}\cos j\varphi_{2\nu-k}=\cos\frac{m}{2}\varphi_{2\nu-k}+\cos m\varphi_{2\nu-k}+\sum_{j=1}^{m/2-1}\left[\cos j\varphi_{2\nu-k}+\cos(m-1)\varphi_{2\nu-k}\right]$$

$$=-1$$

把这些值代入式（4-2-10）后，得到

$$x_k=-\frac{1}{m}\sum_{\nu=1}^{m}x_{2\nu}+\frac{1}{m}\sum_{\nu=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}y_{2\nu}\sin j\varphi_{2\nu-k},$$

$$y_k=-\frac{1}{m}\sum_{\nu=1}^{m}y_{2\nu}+\frac{1}{m}\sum_{\nu=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}x_{2\nu}\sin j\varphi_{2\nu-k}$$

最后写为

$$x_k=\sigma_x+\sum_{\nu=1}^{m}y_{2\nu}\gamma_{2\nu-k},\quad y_k=\sigma_y-\sum_{\nu=1}^{m}x_{2\nu}\gamma_{2\nu-k}$$

这里

$$\gamma_{2\nu-k}=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\sin j\varphi_{2\nu-k}=\frac{1}{m}\operatorname{ctg}\varphi_{2\nu-k}$$

$$\sigma_x=-\frac{1}{m}\sum_{\nu=1}^{m}x_{2\nu};\quad \sigma_y=-\frac{1}{m}\sum_{\nu=1}^{m}y_{2\nu}$$

经过类似的计算，得到偶数节点如下

$$x_{2\nu}=\sigma'_x-\sum_{k=1}^{2m-1}y_k\cdot\gamma_{2\nu-k},\quad y_{2\nu}=\sigma'_y-\sum_{k=1}^{2m-1}x_k\gamma_{2\nu-k}$$

式中

$$\sigma'_x=-\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{2m-1}x_k;\quad \sigma'_y=-\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{2m-1}y_k$$

$$k=1,\ 3,\ \cdots,\ 2m-1$$

而 $\gamma_{2\nu-k}$ 不变。$\gamma_{2\nu-k}$ 与物理面上的形状无关。对于不同的值得到的 $\gamma_{2\nu-k}$ 值列于表 (4-2-1)。

表 4-2-1

$2\nu k$	$m=4$	$m=8$	$m=16$	$m=32$	$2\nu-k$
	$\gamma_{2\nu-k}$	$\gamma_{2\nu-k}$	$\gamma_{2\nu-k}$	$\gamma_{2\nu-k}$	
1	0.60355339	0.62841744	0.63457315	0.63610836	1
3	0.10355339	0.18707572	0.20603489	0.21067039	3
5		0.08352233	0.11692928	0.12475699	5
7		0.02486405	0.07615647	0.08733790	7
9			0.05129242	0.06607257	9
11			0.03340695	0.05213748	11
13			0.01895917	0.04213575	13
15			0.00615571	0.03447906	15
17				0.02832335	17
19				0.02317658	19
21				0.01873053	21
23				0.01478015	23
25				0.01118143	25
27				0.00782772	27
29				0.00463550	29
				0.00153521	31

4-3 基本方程及其解

设物理面上的复坐标为 $z=x+iy$，坐标面上的复坐标是 ζ

$=\xi+i\eta$，两者的关系式为 $z=\omega(\zeta)$。设物理平面上的区域为“B”，坐标面上的区域为“D”。设 $\varphi_1(z)$，$\psi_1(z)$ 和 $\psi_1(z)$ 定义于“B”。则

$$\varphi_1(z)=\varphi_1[\omega(\zeta)]=\varphi(\zeta)$$

$$\psi_1(z)=\psi_1[\omega(\zeta)]=\psi(\zeta)$$

$$\frac{d\varphi_1}{dz}=\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)},\quad \frac{d\psi_1}{dz}=\frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}$$

在物理面上区域“B”中的主矢量函数在变换后的表达式为：

$$\varphi_1(z)+z\overline{\varphi_1'(z)}+\overline{\psi_1(z)}=\varphi(z)+\frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\overline{\varphi'(\zeta)}+\overline{\psi(\zeta)}$$

而边界条件为位移时，

$$2\mu(u+iv)=\nu^*\varphi(\zeta)-\frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\overline{\varphi'(\zeta)}-\overline{\psi(\zeta)}=2\mu g(\zeta)$$

对于第三类的无限区域，包括无穷远处时的应力函数表示为：

$$\varphi_1(z)=-\frac{X+iY}{2\pi(1+\nu^*)}\ln z+\Gamma z+\varphi_1^0(z)$$

$$\psi_1(z)=\frac{\nu^*(X-iY)}{2\pi(1+\nu^*)}\ln z+\Gamma' z+\psi_1^0(z)$$

$\varphi_1^0(z)$、$\psi_1^0(z)$ 是在无穷远处的解析函数。这在区域“B”中的应力分量是有限的。$X+iY$ 是作用在边界上的主矢量（外力的合力）。Γ 和 Γ' 是两个复常数。方程的坐标原点在物理面上的边界曲线 C 之内。

若取 $z=\omega(\zeta)=h\zeta+\omega^*(\zeta)$ 为保角变换的函数。h 是常数，$\omega^*(\zeta)$ 是在坐标面边界 C^* 外并在无穷远处解析的函数。C^* 是物理面上边界 C 保角变换后得到的坐标面上的边界。用此保角变换，把 C 外的区域变到 C^* 外的区域，而且当 $\zeta\to\infty$，$z\to\infty$。

因为 $z=0\notin\bar{B}$，所以 $\zeta=0\notin\bar{D}$。于是变换后的应力函数为

$$\varphi(\zeta)=-\frac{X+iY}{2\pi(1+\nu^*)}\ln\zeta+h\Gamma\zeta+\varphi_0(\zeta)$$

$$\psi(\zeta)=\frac{\nu^*(X-iY)}{2\pi(1+\nu^*)}\ln\zeta+h\Gamma'\zeta+\psi_0(\zeta)$$

$\varphi_0(\zeta)$，$\psi_0(\zeta)$ 是在 C^* 外并在无穷远处解析的函数。

若取 $z=\omega(\zeta)=h/\zeta+\omega^{**}(\zeta)$ 为保角变换的函数。它把物理面上曲线 C 外的区域变到 C^* 内的区域，也就是当 $\zeta\to 0$ 时，$z\to\infty$。$\omega^{**}(\zeta)$ 是在区域“D”内解析的函数。于是

$$\varphi(\zeta)=-\frac{X+iY}{2\pi(1+\nu^*)}\ln\zeta+h\frac{\Gamma}{\zeta}-\varphi_0(\zeta)$$

$$\psi(\zeta)=-\frac{(X-iY)\nu^*}{2\pi(1+\nu^*)}\ln\zeta+h\frac{\Gamma'}{\zeta}+\psi_0(\zeta)$$

$\varphi_0(\zeta)$，$\psi(\zeta)$ 是“D”中的解析函数。

设 $z=\omega(\zeta)$ 是把单位圆 $K_1(|\zeta|\leqslant 1)$ 变到区域 B 的函数。在单位圆周 K_1 上的点的复坐标为 σ，在“B”的边界上的点的复坐标为 t。于是变换后在单位圆周上的应力函数应满足下列关系：

$$\varphi(\sigma)+\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\varphi'(\sigma)}+\overline{\psi(\sigma)}=f(\sigma)$$

式中 $\overline{\omega'(\sigma)}\neq 0$，$f(\sigma)$ 在单位圆周 $c^{(1)}$ 上有连续二阶导数，并且是单值的。取上式的共轭方程为：

$$\overline{\varphi}(\sigma)+\frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\varphi'(\sigma)+\psi(\sigma)=\overline{f(\sigma)}$$

于是把上式乘以 $d\sigma/2\pi i(\sigma-\zeta)$，并沿 $c^{(1)}$ 积分，得到

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{\psi(\sigma)d\sigma}{\sigma-\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{\overline{f(\sigma)}d\sigma}{\sigma-\zeta}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{\omega\overline{(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\frac{\varphi'(\sigma)}{\sigma-\zeta}d\sigma$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{\overline{\varphi(\sigma)}d\sigma}{\sigma-\zeta}$$

则得到

$$\psi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{\overline{f(\sigma)}d\sigma}{\sigma-\zeta}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\frac{\varphi'(\sigma)}{\sigma-\zeta}d\sigma$$

因为

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{\overline{\varphi(\sigma)}d\sigma}{\sigma-\zeta}=\overline{\varphi(0)}=0$$

把下式乘以 $d\sigma/2\pi i(\sigma-\zeta)$，并沿 $C^{(1)}$ 积分。

$$\overline{\psi(\sigma)}=f(\sigma)-\varphi(\sigma)-\frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\overline{\varphi'(\sigma)}$$

可得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{\overline{\psi(\sigma)}d\sigma}{\sigma-\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{f(\sigma)d\sigma}{\sigma-\zeta}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{\varphi(\sigma)d\sigma}{\sigma-\zeta}-\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\frac{\overline{\varphi'(\sigma)}}{\sigma-\zeta}d\sigma$$

则

$$\varphi(\zeta)=A_*(\zeta)-\bar{a}-\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\frac{\overline{\varphi'(\sigma)}}{\sigma-\zeta}d\sigma$$

式中

$$A_*(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{f(\sigma)d\sigma}{\sigma-\zeta},$$

$$\bar{a}=\overline{\psi(0)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{\overline{\psi(\sigma)}d\sigma}{\sigma-\zeta}$$

以上是边界上的外力合力为零的情况。若边界上的外力合力不为零时，则为了满足边界上合力为零的条件，须要用 $f_0(\sigma)$ 代 $f(\sigma)$，$f_0(\sigma)$ 为：

$$f_0(\sigma)=f(\sigma)-\frac{X+iY}{2\pi(1+\nu^*)}\ln\sigma-\frac{h\Gamma}{\sigma}$$

$$-\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\left\{\frac{X-iY}{2\pi(1+\nu^*)}\sigma-\overline{\Gamma h}\sigma^2\right\}-\overline{\Gamma' h}\sigma$$

当B是曲线C的内部时，则$0\in B$，当B是曲线C的外部时，$0\notin B$。$\Phi_1(z)$和$\psi_1(z)$是B中相应于边界上已知充分光滑主矢量函数的应力函数。若B为无限区域，则$\Phi_1(z)$和$\psi_1(z)$应在无穷远处解析。取$z=\omega(\zeta)$是把单位圆K_1保角变换到B的函数，对于有限区域，$\omega(0)=0$，对于无限区域$\omega(0)=\infty$，于是变换到单位圆上的应力函数须满足下列方程

$$\Phi(\zeta)+\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\cdot\frac{\overline{\Phi'(\sigma)}}{\sigma-\zeta}d\sigma=A_*(\zeta)-\bar{a}$$

而$\Phi(0)$和$\mathrm{Im}[\Phi'(0)/\omega'(0)]$可以任意选取。当令$\Phi(0)=0$时，则

$$\psi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{\overline{f(\sigma)}d\sigma}{\sigma-\zeta}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\frac{\Phi'(\sigma)}{\sigma-\zeta}d\sigma$$

若$\Phi_1(z)$和$\psi_1(z)$是区域B中相应于边界上已知充分光滑的位移函数g的应力函数，于是变换到单位圆上的应力函数须满足下列方程

$$\nu^*\Phi(\zeta)-\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\frac{\overline{\Phi'(\sigma)}}{\sigma-\zeta}d\sigma=A_{**}(\zeta)+\bar{a}$$

$$\psi(\zeta)=\frac{\mu}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{2\overline{g(\sigma)}d\sigma}{\sigma-\zeta}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\frac{\Phi'(\sigma)}{\sigma-\zeta}d\sigma$$

式中

$$A_{**}(\zeta)=\frac{\mu}{\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{g(\sigma)d\sigma}{\sigma-\zeta}$$

$$\bar{a}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{\psi(\sigma)}{\sigma-\zeta}d\sigma=\overline{\psi(0)}$$

若在边界上的外力合力不为零时，则应以 $g_0(\sigma)$ 代替 $g(\sigma)$。

$$g_0(\sigma)=g(\sigma)-\frac{1}{2\mu}\left[\frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\left(\frac{X-iY}{2\pi(1+\nu^*)}\sigma-\overline{\Gamma h}\sigma^2\right)-\overline{\Gamma' h}\sigma-\nu^*\frac{\overline{\Gamma h}}{\sigma}\right]$$

在以上求 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 的积分方程中都包含 $\varphi'(\sigma)$，因此须要先解出 $\varphi'(\sigma)$。

下面对于弹性力学第一个基本问题进行讨论。

我们把 $\varphi(\zeta)$ 改写如下：

$$\varphi(\zeta)+\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{\omega(\sigma)-\omega(\zeta)+\omega(\zeta)}{\overline{\omega'(\sigma)}(\sigma-\zeta)}\overline{\varphi'(\sigma)}d\sigma+\bar{a}=A_*(\zeta)$$

令

$$M=\int_{C^{(1)}}\frac{\overline{\varphi'(\sigma)}d\sigma}{2\pi i\overline{\omega'(\sigma)}(\sigma-\zeta)}=-\frac{\overline{\varphi'(0)}}{\overline{\omega'(0)}}$$

则

$$\varphi(\zeta)+\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{\omega(\sigma)-\omega(\zeta)}{\overline{\omega'(\sigma)}(\sigma-\zeta)}\overline{\varphi'(\sigma)}d\sigma+M\omega(\zeta)+\bar{a}=A_*(\zeta)$$

于是

$$\varphi'(\zeta)+\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\omega(\sigma)-\omega(\zeta)}{\sigma-\zeta}\right)\frac{\overline{\varphi'(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}}\cdot\overline{\varphi'(\sigma)}d\sigma+M\omega'(\zeta)=A_*'(\zeta)$$

$\varphi'(\zeta)$ 在 K, 内是一直连续到边界 $C^{(1)}$ 上的函数。设 σ_0是边界上的某一点。曾设 $f(\sigma)$ 有连续二阶导数，又知道 $A'_*(\zeta)$为

$$A'_*(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{f(\sigma)}{(\sigma-\zeta)^2}d\sigma$$

所以

$$\varphi'(\sigma_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{\partial}{\partial\sigma_0}\left[\frac{\omega(\sigma)-\omega(\sigma_0)}{\sigma-\sigma_0}\right]\frac{\overline{\varphi'(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}}d\sigma$$

$$+M\omega'(\sigma_0)=A'_*(\sigma_0)$$

现在研究 $\varphi'(\sigma)$ 的积分方程解，在无限区域的情况，我们知道 $M=0$， $z=\omega(\zeta)=h/\zeta+\omega^{**}(\zeta)$。$\omega^{**}(\zeta)$ 是单位圆 K_1 内的解析函数。所以

$$\frac{\omega(\sigma)-\omega(\zeta)}{\sigma-\zeta}=\frac{\omega^{**}(\sigma)-\omega^{**}(\zeta)}{\sigma-\zeta}-\frac{h}{\sigma\zeta}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{\overline{\varphi'(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}}\frac{d\sigma}{\sigma}=0$$

于是得到

$$\varphi(\zeta)+\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{\omega^{**}(\sigma)-\omega^{**}(\zeta)}{\sigma-\zeta}\frac{\overline{\varphi'(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}}d\sigma$$

$$+\bar{a}=A_*(\zeta)$$

对上式 ζ 求导，并令 $\zeta\to\sigma_0$，则得到

$$\varphi'(\sigma_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{\partial}{\partial\sigma_0}\left\{\frac{\omega^{**}(\sigma)-\omega^{**}(\sigma_0)}{\sigma-\sigma_0}\right\}\frac{\overline{\varphi'(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}}d\sigma$$

$$=A'_*(\sigma_0)$$

利用弗列德霍姆交比定理，可以证明对于任意平方可积函数 $A'_*(\sigma_0)$，上式都有唯一解。我们又得到 $\psi(\zeta)$ 如下：

$$\psi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{\overline{f(\sigma)}d\sigma}{\sigma-\zeta}-\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{\overline{\omega(\sigma)}-\overline{\omega(\zeta)}}{\sigma-\zeta}$$

$$\cdot\frac{\varphi'(\sigma)}{\omega'(\sigma)}d\sigma-\frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\overline{\omega'(\zeta)}}\varphi'(\zeta)$$

所有应力分量以及转动在 $z=\infty$ 处，都应为零。否则应以 $f_0(\sigma)$ 代替 $f(\sigma)$。求到 $\varphi'(\sigma)$ 后代入下式求 $\varphi(\zeta)$。

$$\varphi(\zeta)+\frac{1}{2\pi i}\int_{C(1)}\frac{\omega^{**}(\sigma)-\omega^{**}(\zeta)}{\overline{\omega'(\sigma)}(\sigma-\zeta)}\overline{\varphi'(\sigma)}d\sigma$$

$$+\bar{a}=A_*(\zeta)$$

令 $\varphi(0)=0$，以求常数 $\bar{a}$ 之值。

在有限区域的情况，我们令

$$\varphi(\zeta)=\varphi^*(\zeta)-M\omega(\zeta)$$

则

$$\varphi^*(\zeta)+\frac{1}{2\pi i}\int_{C(1)}\frac{\omega(\sigma)-\omega(\zeta)}{\sigma-\zeta}\frac{\overline{\varphi'(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}}d\sigma$$

$$+\bar{a}=A_*(\zeta)$$

把上式对 ζ 求导，并令 $\zeta\to\sigma_0$，则

$$\varphi'^*(\zeta)+\frac{1}{2\pi i}\int_{C(1)}K(\sigma_0,\ \sigma)\overline{\varphi'(\sigma)}d\sigma=A'_*(\zeta)$$

式中

$$K(\sigma_0,\sigma)=\frac{1}{\overline{\omega'(\sigma)}}\frac{\partial}{\partial\sigma_0}\left\{\frac{\omega(\sigma)-\omega(\sigma_0)}{\sigma-\sigma_0}\right\}$$

又知道

$$M=\frac{\overline{\varphi'(0)}}{\overline{\omega'(0)}},\quad \overline{M}=\frac{\varphi'(0)}{\omega'(0)}$$

所以 $M-\overline{M}=\varphi'^*(0)/\overline{\omega'(0)}$，$\overline{\omega'(0)}\neq 0$。这表示 $\overline{\varphi'^*(0)}/\overline{\omega'(0)}$ 必须是实数。M的虚数可以是任意值，那末，求到 $\varphi^*(\zeta)$ 后，就求到 $\varphi(\zeta)$ 和 $\psi(\zeta)$。

$$\varphi^*(\sigma)+\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\varphi'^*(\sigma)}+\overline{\upsilon(\sigma)}$$

$$=f(\sigma)+\frac{\overline{\varphi'^*(0)}}{\overline{\omega'(0)}}\omega(\sigma)$$

$$\overline{\varphi^*(\sigma)}+\frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}}\cdot\varphi'^*(\sigma)+\psi(\sigma)=f(\sigma)+\frac{\varphi'^*(0)}{\omega'(0)}\overline{\omega(\sigma)}$$

把上两式中第一式乘以$\overline{\omega'(\sigma)}d\bar{\sigma}$，第二式乘以$\omega'(\sigma)d\sigma$并沿$C^{(1)}$边界积分得到下式

$$\int_{C^{(1)}}\varphi^*(\sigma)\,\overline{\omega'(\sigma)}d\bar{\sigma}+\int_{C^{(1)}}\omega(\sigma)\overline{\omega'(\sigma)}d\bar{\sigma}$$
$$+\int_{C^{(1)}}\overline{\psi(\sigma)}\;\overline{\omega'(\sigma)}d\bar{\sigma}=\int_{C^{(1)}}f(\sigma)\overline{\omega'(\sigma)}d\bar{\sigma}$$
$$+\int_{C^{(1)}}\frac{\overline{\varphi'^*(0)}}{\overline{\omega'(0)}}\,\overline{\omega'(\sigma)}d\bar{\sigma}$$

$$\int_{C^{(1)}}\overline{\varphi^*(\sigma)}\,\omega'(\sigma)d\sigma+\int_{C^{(1)}}\overline{\omega(\sigma)}\,\omega'(\sigma)d\sigma$$
$$+\int_{C^{(1)}}\psi(\sigma)\,\omega'(\sigma)\,d\sigma=\int_{C^{(1)}}\overline{f(\sigma)}\omega'(\sigma)d\sigma$$
$$+\int_{C^{(1)}}\frac{\varphi'^*(0)}{\omega'(0)}\omega'(\sigma)d\sigma$$

把以上两式相加，得出

$$2\mathrm{Re}\left[\int_{C^{(1)}}f(\bar{t})dt\right]+\left\{\frac{\overline{\varphi'^*(0)}}{\overline{\omega'(0)}}-\frac{\varphi'^*(0)}{\omega'(0)}\right\}\int_C t\,d\bar{t}=0$$

$$\int_{C^{(1)}}t\,d\bar{t}=-2iA_b$$

A_b是区域B的面积。所以

$$\mathrm{Re}\left[\int_{C^{(1)}}f(\bar{t})dt\right]=iA_b\left\{\frac{\overline{\varphi'^*(0)}}{\overline{\omega'(0)}}-\frac{\varphi'^*(0)}{\omega'(0)}\right\}$$

我们知道$\mathrm{Re}\left[\int_{C^{(1)}}\overline{f(\bar{t})}dt\right]=0$，所以必须满足以下条件，即

$$\mathrm{Im}\left[\frac{\varphi'^*(0)}{\omega'(0)}\right]=0$$

这也是外力矩合为零的条件。

对于弹性力学第二个基本问题，进行下述讨论。

区域B是有限或无限的，它有一个边界曲线。在边界上已知位移函数g和g'是分段充分光滑的。对于无限区域$\omega(0)=\infty$，对于有限区域$\omega(0)=0$。$z=\omega(\zeta)$是保角变换函数。在无限区域，应力函数$\varphi_1(z)$和$\psi_1(z)$在无限远处是解析的。第二个基本问题有唯一解存在，并且是：

$$\varphi(\zeta)=M\omega(\zeta)/\nu^*+\varphi^*(\zeta)$$

式中

$$\nu^*\varphi^*(\zeta)-\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{\omega^{**}(\sigma)-\omega^{**}(\zeta)}{\overline{\omega'(\sigma)}(\sigma-\zeta)}\overline{\varphi'^*(\sigma)}\,d\sigma$$

$$-\bar{a}=A_{**}(\zeta)$$

$$A_{**}(\zeta)=\frac{\mu}{\pi i}\int_{C^{(1)}}\overline{g(\sigma)}\,d\sigma$$

而且

$$\nu^*\varphi'^*(\zeta)-\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{\partial}{\partial\sigma_0}\left\{\frac{\omega^{**}(\sigma)-\omega^{**}(\sigma)}{\sigma-\sigma_0}\right\}\cdot\frac{\overline{\varphi'^*(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}}d\sigma=A'_{**}(\zeta)$$

对于有限区域而言，$\omega^{**}(\zeta)=\omega(\zeta)$，对于无限区域而言，$\omega^{**}=\omega(\zeta)-h/\zeta$。当求常数$\bar{a}$时，须令$\varphi(0)=0$，对无限区域，$M=0$，在有限区域中，则

$$M-\frac{\bar{M}}{\nu^*}=\frac{\overline{\varphi'^*(0)}}{\overline{\omega'(0)}}$$

而且函数$\psi(\zeta)$为：

$$\psi(\zeta)=\frac{\mu}{\pi i}\int_{C^{(1)}}\overline{g(\sigma)}\,d\sigma-\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{\overline{\omega(\sigma)}\varphi'(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}(\sigma-\zeta)}d\sigma$$

由以上的结果来看，无论是第一还是第二个基本问题，统一的方程形式可归纳为：

$$\varphi'^{*}(\sigma_0)\pm\frac{1}{2\varkappa_0\pi i}\int_{C^{(1)}}K(\sigma_0,\ \sigma)\overline{\varphi'^{*}(\sigma)}d\sigma$$
$$=C^{**}(\sigma_0) \tag{4-3-1}$$

对于第一个基本问题

$$\varkappa_0=-1,\ C^{**}(\zeta)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{f(\sigma)d\sigma}{(\sigma-\zeta)^2}$$

对于第二个基本问题

$$\varkappa_0=\nu^{*},\ C^{**}(\zeta)=\frac{\mu}{\nu^{*}\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{g(\sigma)d\sigma}{(\sigma-\zeta)^2}$$

我们可以利用解退化核积分方程的方法来解方程（4-3-1）。令 $\sigma=e^{i\theta}$，（$0\leqslant\theta<2\pi$）。于是方程（4-3-1）改为

$$\varphi'^{*}(\theta_0)\pm\frac{1}{2\pi\varkappa_0 i}\int_0^{2\pi}K(\theta_0,\ 0)ie^{i\theta}\overline{\varphi'^{*}(\theta)}d\theta=C^{**}(\theta_0) \tag{4-3-2}$$

令

$$\varphi'^{*}(\theta_0)=p^{*}(\theta_0)+iq^{*}(\theta_0),\ ie^{i\theta}K(\theta_0,\ 0)$$
$$=2\pi i[R^{*}+iS^{*}]$$
$$C^{**}(\theta_0)=\widetilde{C}^{**}(\theta_0)+i\hat{C}^{**}(\theta_0),\ \lambda=1/\varkappa_0$$

则方程（4-3-2）改为：

$$p^{*}(\theta_0)-\lambda\int_0^{2\pi}[R^{*}(\theta_0,\theta)p^{*}(\theta)+S^{*}(\theta_0,\theta)q^{*}(\theta)]d\theta$$
$$=\widetilde{C}^{**}(\theta_0)$$
$$q^{*}(\theta_0)-\lambda\int_0^{2\pi}[S^{*}(\theta_0,\theta)p^{*}(\theta)-R^{*}(\theta_0,\theta)q^{*}(\theta)]d\theta$$
$$=\hat{C}^{**}(\theta_0)$$

解此联立积分方程并不困难。

4-4 保角变换的函数为有理函数时积分方程的解

若物理面上的区域是有限区域，保角变换 $z=\omega(\zeta)$ 是有理函数，$\omega(\zeta)$ 表示为：

$$\omega(\zeta)=a(\zeta)/b(\zeta)$$

这里 $a(\zeta)$ 和 $b(\zeta)$ 是多项式，若物理面上的区域是无限的，$\omega^{**}(\zeta)$ 应是有理函数。

$$\frac{\omega(\sigma)-\omega(\sigma_0)}{\sigma-\sigma_0}=\frac{a(\sigma)b(\sigma)-a(\sigma_0)b(\sigma_0)}{(\sigma-\sigma_0)b(\sigma)b(\sigma_0)}$$

我们可以把它展开如下：

$$\frac{a(\sigma)b(\sigma)-a(\sigma_0)b(\sigma_0)}{b(\sigma)(\sigma-\sigma_0)b(\sigma_0)}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\sigma_0^j\delta_j(\sigma)}{b(\sigma_0)b(\sigma)}$$

把积分方程（4-3-1）的核写为：

$$K(\sigma_0,\ \sigma)=\sum_{j=1}^{n}\frac{d}{d\sigma_0}\left[\frac{\sigma_0^j}{b(\sigma_0)}\right]\frac{\delta_j(\sigma)}{b(\sigma)\omega'(\sigma)}$$

$$=h_1(\sigma_0)h_2(\sigma)$$

代回原方程后，写为一般的形式如下：

$$\varphi'^{*}(\sigma_0)\pm\frac{1}{2\pi\kappa_0 i}\int_{C(\Omega)}h_1(\sigma_0)h_2(\sigma)\overline{\varphi'^{*}(\sigma)}d\sigma$$

$$=C^{**}(\sigma_0)\qquad(4\text{-}4\text{-}1)$$

这是有退化核的积分方程。当 $\omega(\zeta)$ 为多项式时，分有限区域和无限区域两种情况，具体讨论方程（4-4-1）的解。

对于有限区域的情况，设

$$\omega(\zeta)=c_1\zeta+c_2\zeta^2+\cdots+c_n\zeta^n\qquad(c_1\neq 0,\ c_n\neq 0)\qquad(4\text{-}4\text{-}2)$$

于是

$$\frac{\omega(\zeta)}{\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)}=\zeta^n\frac{c_1+c_2\zeta+\cdots+c_n\zeta^{n-1}}{\bar{c}_1\zeta^{n-1}+\cdots+n\bar{c}_n}$$

$$=b_n\zeta^n+b_{n-1}\zeta^{n-1}+\cdots+b_1\zeta+b_0+\sum_{k=1}^{\infty}b_{-k}\zeta^{-k}$$

$$\left.\begin{aligned}&\varphi(\zeta)=a_1\zeta+a_2\zeta^2+\cdots+a_n\zeta^n+\cdots\qquad(|\zeta|<1)\\&\varphi'(\zeta)=a_1+2a_2\zeta+\cdots+na_n\zeta^{n-1}+\cdots\end{aligned}\right\}\qquad(4\text{-}4\text{-}3)$$

$$\left.\begin{aligned}\bar{\varphi}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)&=\bar{a}_1+2\frac{\bar{a}_2}{\zeta}+\cdots+n\frac{\bar{a}_n}{\zeta^{n-1}}+\cdots\quad(|\zeta|>1)\\ \frac{\omega(\sigma)\overline{\varphi'(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}}&=\frac{\omega(\sigma)}{\omega'\left(\frac{1}{\sigma}\right)}\bar{\varphi}'\left(\frac{1}{\sigma}\right)\\ &=\gamma_0+\gamma_1\sigma+\cdots+\gamma_n\sigma^n+\chi^*(\sigma)\end{aligned}\right\}\tag{4-4-4}$$

$\chi^*(\sigma)$ 是 $C^{(1)}$ 外（包括无限远点）的解析函数，当 $\sigma=\infty$ 时，$\chi^*(\infty)=0$，于是得到

$$\left.\begin{aligned}\gamma_1&=a_1b_1+2\bar{a}_2b_2+\cdots+n\bar{a}_n\bar{b}_n\\ \gamma_2&=a_1b_2+\cdots+(n-1)\bar{a}_{n-1}b_n\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \gamma_n&=\bar{a}_1b_n\end{aligned}\right\}\tag{4-4-5}$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{\omega(\sigma)\overline{\varphi'(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}(\sigma-\zeta)}d\sigma&=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{\chi^*(\sigma)d\sigma}{\sigma-\zeta}\\ &+\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}(\gamma_0+\gamma_1\sigma+\cdots+\gamma_n\sigma^n)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}\\ &=\gamma_0+\gamma_1\zeta+\cdots+\gamma_n\zeta^n\end{aligned}$$

由前述

$$\varphi(\zeta)=A(\zeta)-\bar{a}-\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\frac{\overline{\varphi'(\sigma)}}{\sigma-\zeta}h\sigma$$

得到

$$\varphi(\zeta)+\bar{a}+\gamma_0+\gamma_1\zeta+\cdots+\gamma_n\zeta^n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{f(\sigma)d\sigma}{\sigma-\zeta}\tag{4-4-6}$$

令

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{f(\sigma)d\sigma}{\sigma-\zeta}=d_0+d_1\zeta+d_2\zeta^2+\cdots+$$

自然把 $1/\sigma-\zeta$ 展成 ζ 的幂级数后，得到

$$d_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}} f(\sigma)\sigma^{-(k+1)}d\sigma$$

于是得到下列方程组

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{a}+\gamma_0=d_0\\
&a_1+\bar{a}_1b_1+2\bar{a}_2b_2+\cdots+n\bar{a}_nb_n=d_1\\
&a_2+\bar{a}_1b_2+\cdots+(n-1)\bar{a}_{n-1}b_n=d_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_n+a_1b_n=d_n
\end{aligned}\right\}\qquad(4-4-7)$$

这里 d_0，d_1，…，d_n 和 b_0，b_1，…，b_n 是已知的，解出此方程组后，可以由式（4-4-3）求到 $\varphi(\zeta)$。注意在物理面的区域上，$\varphi_1'(z)$ 有 $i\alpha$ 项，α 是实常数。

$$\mathrm{Im}[\varphi_1'(z)]=\alpha=\mathrm{Im}\left[\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\right]_{\zeta=0}=\mathrm{Im}\left[\frac{a_1}{\omega'(0)}\right]$$

由此可知 $\mathrm{Im}[a_1/\omega'(0)]$是任意的。所以式（4-4-7）的解是存在的但不是唯一的。从物理意义和解的存在与唯一方面来说，此代数方程组的解应存在且唯一。所以必须设 $\mathrm{Im}[\varphi'(0)/\omega'(0)]=0$。这样就不会有什么数值计算困难了。如果用退化核积分方程组来解，不会出现这个困难。

又知道

$$\frac{\omega\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)}\varphi'(\zeta)=\bar{\gamma}_1\zeta^{-1}+\cdots+\bar{\gamma}_n\zeta^{-n}+\chi^{**}(\zeta)$$

$\chi^{**}(\zeta)$是在 $C^{(1)}$ 内的解析函数。把上式代入下式

$$\psi(\sigma)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{\overline{f(\sigma)}d\sigma}{\sigma-\zeta}-\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\frac{\varphi'(\sigma)}{\sigma-\zeta}d\sigma$$

得到

$$\psi(\sigma)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{\overline{f(\sigma)}d\sigma}{\sigma-\zeta}-\frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)}\varphi'(\zeta)+\frac{\gamma_1}{\zeta}+\cdots+\frac{\bar{\gamma}_n}{\zeta^n}$$

当 $\zeta = 0$ 时，上式有奇点。

在无限区域的情况

设 $\omega^{**}(\zeta)=c_0+c_1\zeta+\cdots+c_n\zeta^n$，$\omega(\zeta)=h/\zeta+\omega^{**}(\zeta)$

$$\frac{\omega(\zeta)}{\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)}=\frac{h/\zeta+c_0+c_1\zeta+\cdots+c_n\zeta^n}{-h\zeta^2+\bar{c}_1+\cdots+n\bar{c}_n\zeta^{1-n}}$$

$$=e_{n-2}\zeta^{n-2}+\cdots+e_1\zeta+\sum_{k=0}^{\infty}e_{-k}\zeta^{-k}$$

$$\frac{\omega(\zeta)}{\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)}\varphi'(\zeta)=l_{n-2}\zeta^{n-2}+\cdots+l_1\zeta+l_0-\sum_{k=1}^{\infty}l_{-k}\zeta^{-k}$$

式中

$$l_{n-2}=\bar{a}_1e_{n-2}$$
$$l_{n-3}=a_1e_{n-3}+2\bar{a}_2e_{n-2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$l_1=\bar{a}_1e_1+2\bar{a}_2e_2+\cdots+(n-2)\bar{a}_{n-2}e_{n-2}$$

这样，和有限区域相似，得到

$$\varphi(\zeta)+\bar{a}+l_0+l_1\zeta+\cdots+l_{n-2}\zeta^{n-2}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{f(\sigma)d\sigma}{\sigma-\zeta}$$

把上式中等号右边项在单位圆内展开，并令等式两边 ζ 的同次幂系数相等，则得到

$$a_1+\bar{a}_1e_1+2\bar{a}_2e_2+\cdots+(n-2)\bar{a}_{n-2}e_{n-2}=d_1^*$$
$$a_2+\bar{a}_1e_2+2\bar{a}_2e_3+\cdots+(n-3)\bar{a}_{n-3}e_{n-2}=d_2^*$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n-2}+\bar{a}_1e_{n-2}=d_{n-2}^*$$

这里未知的是 e_1，…，e_{n-2}，解出后，可求 $\varphi(\zeta)$。又知道

$$\frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)}=\frac{\bar{h}\zeta+\bar{c}_0+\bar{c}_1\zeta^{-1}+\cdots+\bar{c}_n\zeta^{-n}}{-\frac{h}{\zeta^2}+c_1+2c_2\zeta+\cdots+nc_n\zeta^{n-1}}$$

$$=b_{n-2}^{*}\zeta^{-n+2}+\cdots+b_{1}^{*}\zeta^{-1}+\sum_{k=0}^{\infty}b_{k}^{*}\zeta^{k}$$

$$\frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)}\varphi'(\zeta)=l_{n-2}^{*}\zeta^{-n+2}+\cdots+l_{1}^{*}\zeta^{-1}+l_{0}+\sum_{k=1}^{\infty}l_{k}^{*}\zeta^{k}$$

与有限区域情况相同，得到

$$\psi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{\overline{f(\sigma)}d\sigma}{\sigma-\zeta}-\frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)}\varphi'(\zeta)+\frac{l_{1}^{*}}{\zeta}+\cdots+\frac{l_{n-2}^{*}}{\zeta^{n-2}}$$

对第二个基本问题可以用上述方法求解。

〔例题17〕 如图 4-4 所示，有一正方形板受 P 力作用，求应力分量及位移分量。

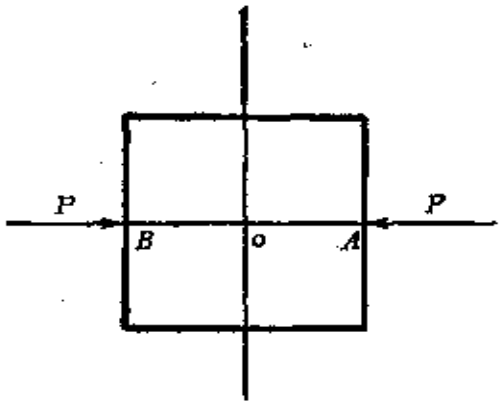


图 4-4

利用多项式由单位圆保角变换到物理面上的正方形的函数为

$$z=\omega(\zeta)=1.0807\zeta-0.1081\zeta^{5}+0.0450\zeta^{9}-0.0242\zeta^{13}+0.0174\zeta^{17}-0.0126\zeta^{21}$$

这是有限区域的变换，则

$$\frac{\omega(\zeta)}{\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)}=\zeta^{n}\left(b_{n}+\frac{b_{n-1}}{\zeta}+\cdots+\frac{b_{n-21}}{\zeta^{21}}\right)+\cdots$$

$$b_3=-0.0116, \quad b_{n-12}=+0.0280$$

$$b_{n-4}=+0.0103, \quad b_{n-16}=-0.0636$$

$$b_{n-8}=-0.0154, \quad b_{n-20}=0.09392$$

$$A_*(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(1)}\frac{f(\sigma)d\sigma}{\sigma-\zeta}=-\frac{P}{2\pi}\int_{C(1)}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}$$

$$=-\frac{P}{2\pi}\left[\zeta+\frac{\zeta^3}{3}+\frac{\zeta^5}{5}+\cdots\right]$$

所以得到

$$d_0=0 \qquad d_{17}=-\frac{P}{17\pi}$$

$$d_1=-\frac{P}{\pi} \qquad d_{19}=-\frac{P}{19\pi}$$

$$d_3=-\frac{P}{3\pi} \qquad d_{21}=-\frac{P}{21\pi}$$

$$d_5=-\frac{P}{5\pi}$$

……

因为负荷相对于正方形虚轴来说是对称的，故应力对实轴和虚轴都是对称的。于是 $\mathrm{Re}[\Phi_1'(z)]=\mathrm{Re}[\Phi'(\zeta)/\omega'(\zeta)]$ 应对实轴对称。$\Phi'(\zeta)/\omega'(\zeta)$ 的展开式只应有实系数项，$\omega'(\zeta)$ 的多项式是实系数的，所以 $\Phi'(\zeta)$ 的展开式也只有实系数项。由此求出：

$$a_1=-0.1739P, \qquad a_{13}=-0.3562(P/13)$$

$$a_3=-0.3920(P/3), \qquad a_{15}=-0.3030(P/15)$$

$$a_5=-0.3510(P/5), \qquad a_{17}=-0.3570(P/17)$$

$$a_7=-0.2632(P/7), \qquad a_{19}=-0.4047(P/19)$$

$$a_9=-0.3294(P/9), \qquad a_{21}=-0.3612(P/21)$$

$$a_{11}=-0.4070(P/11)$$

于是可得，

$$\Upsilon_1=-0.1442P, \quad \Upsilon_9=+0.0013P, \quad \Upsilon_{17}=+0.0023P$$

$$\gamma_3=+0.0255P,\quad \gamma_{11}=+0.0080P,\quad \gamma_{19}=+0.0045P$$
$$\gamma_5=+0.0068P,\quad \gamma_{13}=+0.0029P,\quad \gamma_{21}=+0.0020P$$
$$\gamma_7=-0.0076P,\quad \gamma_{15}=-0.0011P$$

又知道

$$\bar{a}+\gamma_0=0.5P$$

所以得到

$$\varphi(\zeta)=-\frac{P}{2\pi}\ln\frac{\zeta+1}{\zeta-1}-0.5P-\sum_{j=1,3,\cdots 21}\gamma_j\zeta^j$$

$$\psi(\zeta)=\frac{P}{2\pi}\ln\frac{\zeta+1}{\zeta-1}-\frac{\omega\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)}\varphi'(\zeta)+\sum_{j=1,3,5\cdots 21}\gamma_j\zeta^{-j}$$

$$\varphi'(\zeta)=-\frac{P}{2\pi}\left(\frac{1}{1+\zeta}-\frac{1}{\zeta-1}\right)-\sum_{j=1,3,\cdots 21}j\gamma_j\zeta^{j-1}$$

而应力分量为：

$$X_x=\mathrm{Re}\left[2\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}-\frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\zeta)}\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\right)-\frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\right]$$

$$X_y=\mathrm{Re}\left[2\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}+\frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\zeta)}\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\right)+\frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\right]$$

$$X_y=\mathrm{Im}\left[\frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\zeta)}\frac{1}{\omega'(\zeta)}\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\right)+\frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\right]$$

而位移由下式求出：

$$2\mu[u(\zeta)+iv(\zeta)]=\nu^*\varphi(\zeta)-\frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\overline{\varphi'(\zeta)}-\overline{\psi(\zeta)}$$

这是利用柯西积分求解应力函数并进而求出位移的方法。

把应力函数展成为区域内的收敛级数并代入边界条件中，再利用待定系数法求解应力函数中的系数，这就是级数解法。以下讨论这种解法。

对于坐标面上为有限区域的第一个基本问题，把应力函数展开如下：

$$\varphi(\zeta)=\sum_{j=1}^{\infty}a_j\zeta^j,\quad \psi(\zeta)=\sum_{j=0}^{\infty}b_j\zeta^j$$

用待定系数法求 a_j 和 b_j。把 $\omega(\zeta)/\overline{\omega'(\zeta)}$ 和 $f(\zeta)$ 展开如下：

$$\frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}}=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\alpha_j\zeta^j;\qquad f(\zeta)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\beta_j\zeta^j$$

把 $\omega/\bar{\omega}'$ 和 f 代入 $\varphi(\zeta)+\omega(\zeta)\overline{\varphi'(\zeta)}/\overline{\omega'(\zeta)}+\overline{\psi(\zeta)}=f(\zeta)$ 中后，得到

$$\sum_{j=1}^{\infty}a_j\zeta^j+\sum_{j=-\infty}^{\infty}\alpha_j\zeta^j\cdot\sum_{j=1}^{\infty}j\bar{a}_j\zeta^{-j+1}+\sum_{j=0}^{\infty}\bar{b}_j\zeta^{-j}=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\beta_j\zeta^j$$

令 ζ 的正幂次项的系数相等，得到

$$a_j+\sum_{i=1}^{\infty}i\bar{a}_i\alpha_{j+i-1}=\beta_j\quad(j=1,2,\cdots)$$

令 ζ 的负幂次项的系数相等，得到

$$\bar{b}_j+\sum_{i=1}^{\infty}i\bar{a}_i\alpha_{-j+i-1}=\beta_{-j}\quad(j=0,1,2,\cdots)$$

这里 α_j 和 β_j 是已知。这里假定 $\mathrm{Im}[a_1/\omega'(0)]$ 已知，否则方程有解但不唯一。

对于有限区域的情况

$$z=\omega(\zeta)=\sum_{j=1}^{n}c_j\zeta^j$$

于是得到

$$a_1+\bar{a}_1\alpha_1+2\bar{a}_2\alpha_2+\cdots+n\bar{a}_n\alpha_n=\beta_1$$

$$a_2+\bar{a}_1\alpha_2+2\bar{a}_2\alpha_3+\cdots+(n-1)\bar{a}_{n-1}\alpha_n=\beta_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n+\bar{a}_1\alpha_n=\beta_n$$

因为只计算到 n 项，故 α_{n+1}，$\alpha_{n+2}\cdots$ 都为零。所以当 $j\geqslant n+1$ 时，$a_j=\beta_j$。解出 a_j 再解 b_j。

〔例题18〕 设物理面为半径 R 的圆域，坐标面上为单位圆。求诸系数。

因为是圆域对圆域，只是大小不同，故令

$$z=\omega(\zeta)=R\zeta$$

$\dfrac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)}=\sigma$，则 $\alpha_1=1$，$\alpha_j=0$，当 $j\neq 1$ 时

于是 $a_1+\bar{a}_1=\beta_1$，$a_j=\beta_j$，当 $i\geqslant 2$ 时，我们取 $\mathrm{Im}(\beta_1)=0$，则 $a_1=\beta_1/2$，并令 $\mathrm{Im}(a_1)=0$。于是

$$\bar{b}_j+(j+2)\bar{a}_{j+2}=\beta_{-j}$$

$$b_j+(j+2)a_{j+2}=\bar{\beta}_{-j}$$

这样得到应力函数为：

$$\varphi(\zeta)=\beta_1\zeta/2+\beta_2\zeta^2+\cdots+\beta_n\zeta^n$$

$$\psi(\zeta)=\sum_{j=0}^{\infty}(\bar{\beta}_{-j}-(j+2)\beta_{j+2})\zeta^j$$

$$f(\sigma)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\beta_j\sigma^j$$

而

$$\beta_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\sigma)d\theta,\quad \beta_j=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\sigma)\sigma^{-j}d\theta$$

〔例题 19〕 保角变换为 $z=b\zeta(1+a\zeta)$，$b>0$，$0<a<1/2$。求应力函数。

取

$$\frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)}=\frac{\sigma(1+a\sigma)}{1+2a\bar{\sigma}}=\frac{a\sigma^3+\sigma^2}{\sigma+2a}=a\sigma^2+(1-2a^2)\sigma$$

$$-2a(1-2a^2)\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j(2a/\sigma)^j$$

所以　　$j>2$，$\alpha_j=0$；$\alpha_2=a$，$\alpha_1=(1-2a^2)$

$$\alpha_{-j}=(-1)^{j+1}(2a)^{j+1}(1-2a^2)\quad(j=0,1,2\cdots)$$

于是得到

$$a_1+\bar{a}_1(1-2a^2)+2a\bar{a}_2=\beta_1$$

$$a_2+\bar{a}_1\cdot a=\beta_2$$

$$a_j=\beta_j\quad(j\geqslant 3)$$

所以

$$a_1+\bar{a}_1=\frac{\beta_1-2a\bar{\beta}_2}{1-2a^2}$$

取　　$\mathrm{Im}[\beta_1-2a\bar{\beta}_2]=0$，$\mathrm{Im}[a_1]=0$

则

$$a_1=\frac{\beta_1-2a\beta_2}{2(1-2a^2)}$$

于是得到

$$a_2=\beta_2-\frac{(\beta_1-2a\beta_2)a}{2(1-2a^2)}=-\frac{a}{2(1-2a^2)}\beta_1+\frac{1+a^2}{1-2a^2}\beta_2$$

得到$\varphi(\zeta)$如下：

$$\varphi(\zeta)=\frac{\beta_1-2a\beta_2}{2(1-2a^2)}\zeta+\frac{2(1+a^2)\beta_2-a\beta_1}{2(1-2a^2)}\zeta^2+\beta_3\zeta^3+\cdots$$

由 a_j 再求 b_j，这里求解 b_j 比较繁杂：

$$\bar{b}_1+\bar{a}_1\alpha_{-1}+2\bar{a}_2\alpha_0+3\bar{a}_3\alpha_1+4\bar{a}_4\alpha_2=\beta_{-1}$$

$$\bar{b}_2+\bar{a}_1\alpha_{-2}+2\bar{a}_2\alpha_{-1}+3\bar{a}_3\alpha_0+4\bar{a}_4\alpha_1+5\bar{a}_5\alpha_2=\beta_{-2}$$

……

得到

$$b_1=\bar{\beta}_{-1}-a_1\alpha_{-1}-2\bar{a}_2\alpha_0-3\bar{a}_3\alpha_1-4\bar{a}_4\alpha_2$$

$$b_2=\beta_{-2}-a_1\alpha_{-2}-2\bar{a}_2\alpha_{-1}-3\bar{a}_3\alpha_0-4\bar{a}_4\alpha_1-5\bar{a}_5\alpha_2$$

……

由此 b_i 来求 $\psi(\zeta)$，其表达式是冗长的。

我们可以利用留数的方法，求下式的积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{\overline{\omega(\sigma)}\varphi'(\sigma)}{\omega'(\sigma)(\sigma-\zeta)}d\sigma$$

这里有两个奇点，一个是 $\sigma=\zeta$，一个是 $\sigma=0$。

$$\frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}=\frac{a+\sigma}{(1+2a\sigma)\sigma^2}$$

$$\frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\varphi'(\sigma)=\frac{a+\sigma}{(1+2a\sigma)\sigma^2}\sum_{j=1}^{\infty}ja_j\sigma^{j-1}$$

$$\operatorname{Res}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{\overline{\omega(\sigma)}\varphi'(\sigma)}{\omega'(\sigma)(\sigma-\zeta)}d\sigma\right\}_{\sigma=0}$$

$$=\frac{d}{d\sigma}\left[\frac{\overline{\omega(\sigma)}\varphi'(\sigma)}{\omega'(\sigma)(\sigma-\zeta)}\right]_{\sigma=0}$$

$$=-\frac{a_1(1-2a^2)+2aa_2}{\zeta}-\frac{aa_1}{\zeta^2}$$

故

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{\overline{\omega(\sigma)}\varphi'(\sigma)}{\omega'(\sigma)(\sigma-\zeta)}d\sigma=\frac{a+\zeta}{(1+2a\zeta)\zeta^2}\varphi'(\zeta)$$

$$-\frac{a_1(1-2a^2)+2aa_2}{\zeta}-\frac{aa_1}{\zeta^2}$$

所以得出 $\psi(\zeta)$ 如下：

$$\psi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{\overline{f(\sigma)}d\sigma}{\sigma-\zeta}-\frac{a+\zeta}{(1+2a\zeta)\zeta^2}\varphi'(\zeta)$$

$$+\frac{(1-2a^2)a_1+2aa_2}{\zeta}+\frac{aa_1}{\zeta^2}$$

这样作比较简便些。

现在再讨论无限区域的情况。

我们曾假设 $\omega(\zeta)=h/\zeta+\omega^{**}(\zeta)$

$$\frac{\omega(\zeta)}{\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)}=e_{n-2}\zeta^{n-2}+\cdots+e_1\zeta+\sum_{k=0}^{\infty}e_k\zeta^{-k}$$

与有限区域相类似，得到

$$a_1+\bar{a}_1e_1+2\bar{a}_2e_2+\cdots+(n-2)\bar{a}_{n-2}e_{n-2}=\beta_1$$
$$a_2+\bar{a}_1e_2+2\bar{a}_2e_3+\cdots+(n-3)\bar{a}_{n-3}e_{n-2}=\beta_2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n-2}+\bar{a}_1e_{n-2}=\beta_{n-2},\qquad a_j=\beta_j\quad(j\geqslant n-1)$$

由此求到 a_j 后，即可求到 $\varphi(\zeta)$，而

$$\psi(\zeta)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C^1}\frac{\overline{f(\sigma)}d\sigma}{\sigma-\zeta}-Res\left\{\frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)(\sigma-\zeta)}\right\}$$

〔例题20〕 物理面椭圆孔外的区域 B，其长半轴 $a=R(1+m)$，短半轴 $b=R(1-m)$，$R>0$，$0\leqslant m<1$。试求应力函数。

$$z=\omega(\zeta)=R(m\zeta+1/\zeta)$$

$$\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}=\frac{1+m\sigma^2}{\sigma(m-\sigma^2)}=-\frac{1+m\sigma^2}{\sigma^3}\cdot\left(1+\frac{m}{\sigma^2}+\frac{m^2}{\sigma^4}+\cdots\right)$$

由于 $\omega(\sigma)/\overline{\omega'(\sigma)}$ 的展开式没有 σ 的正幂次项，则

$$a_j=\beta_j$$

于是得到 $\varphi(\zeta)$ 为：

$$\varphi(\zeta)=\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j\zeta^j=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\zeta^j}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\sigma)\sigma^{-j}d\theta$$
$$=\frac{\zeta}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\sigma)\frac{d\theta}{\sigma-\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^1}\frac{\zeta f(\sigma)}{\sigma(\sigma-\zeta)}d\sigma$$
$$=f(\zeta)-f(0)$$

而

$$\psi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{\overline{f(\sigma)}d\sigma}{\sigma-\zeta}+\frac{\zeta(m+\zeta^2)}{1-m\zeta^2}\varphi'(\zeta)$$

若在边界上不是$X=Y=B=B'=C'=0$，而欲得一般解，则须以$f_0(\zeta)$代替$f(\zeta)$。

在第二个基本问题中仍作与第一个基本问题相同的假设，并代入如下方程

$$\nu^*\varphi(z)-\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\varphi'(\zeta)}-\overline{\psi(\zeta)}=2\mu g(\zeta)$$

对于有限区域而言，得到如下方程组

$$\nu^*a_j-\sum_{i=1}^{\infty}i\bar{a}_i\alpha_{j+i-1}=\beta_j$$

$$\bar{b}_j+\sum_{i=1}^{\infty}i\bar{a}_i\alpha_{i-j-1}=-\beta_{-j}$$

若$\omega(\zeta)/\overline{\omega'(\zeta)}$只包括有限项，则得到

$$\nu^*a_1-\bar{a}_1\alpha_1-2\bar{a}_2\alpha_2-\cdots-n\bar{a}_n\alpha_n=\beta_1$$

$$\nu^*a_2-\bar{a}_1\alpha_2-2\bar{a}_2\alpha_3-\cdots-(n-1)\bar{a}_{n-1}\alpha_n=\beta_2$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\nu^*a_n-\bar{a}_1\alpha_n=\beta_n$$

$$\nu^*a_j=\beta_j\quad(j\geqslant n+1)$$

解此方程求到a_j，即求到$\varphi(\zeta)$，而$\psi(\zeta)$由以下公式求出：

$$\psi(\zeta)=-\frac{\mu}{\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{\overline{g(\sigma)}}{\sigma-\zeta}d\sigma-2\mu Res\left[\frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\zeta)}g'(\zeta)\right]$$

对于无限区域，和前述相同。

将坐标面上的无限区域变到物理面上的无限区域。

我们取应力函数的级数形式如下：

$$\varphi(\zeta)=\sum_{j=0}^{\infty}a_{-j}\zeta^{-j};\quad\psi(\zeta)=\sum_{j=0}^{\infty}b_{-j}\zeta^{-j}$$

仍用待定系数法，求 a_{-j} 和 b_{-j}。

$$\frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)}=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\alpha_j\zeta^j,\quad f(\sigma)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\beta_j\zeta^j$$

与以前所述方法相同，得到

$$\bar{b}_{-j}-\sum_{i=1}^{\infty}i\bar{a}_{-i}\alpha_{j-i-1}=\beta_j\qquad(j=1,2,\cdots)$$

$$a_{-j}-\sum_{i=1}^{\infty}i\bar{a}_{-i}\alpha_{-j-i-1}=\beta_{-j}\qquad(j=0,1,2,\cdots)$$

α_j和β_j是已知的。设 $\mathrm{Im}[a_{-1}/\omega'(0)]$也已知。解出$a_{-j}$和$b_{-j}$后，得到$\Phi(\zeta)$和$\psi(\zeta)$。

〔例题 21〕 物理面上多边形孔外的区域为B，试求应力函数。

$$z=\omega(\zeta)=R(\zeta+m/\zeta^n)\quad\left(n>2,\quad 0\leqslant m<\frac{1}{n}\right)$$

代入$\omega(\sigma)/\omega'(\sigma)$中后，得到

$$\begin{aligned}\frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)}&=\left(\sigma+\frac{m}{\sigma^n}\right)(1-mn\sigma^{n+1})^{-1}\\&=m/\sigma^n+(1+m^2n)[\sigma+mn\sigma^{n-2}+m^2n^2\sigma^{2n+3}+\cdots]\\&=m/\sigma^n+(1+m^2n)\sigma[1+mn\sigma^{n+1}+m^2n^2\sigma^{2n+2}\\&\quad+m^3n^3\sigma^{3n+3}+\cdots]\\&=m/\sigma^n+(1+m^2n)\sigma/1-mn\sigma^{n+1}\quad(mn<1)\end{aligned}$$

于是得到

$$\alpha_{-n}=m,\quad\alpha_1=(1+m^2n),\quad\alpha_j=0\quad(j=0,2,\cdots n+1)$$
$$\alpha_j=(1+m^2n)(m+n)^k\quad(j=n+2,\ 2n+3,\cdots)$$
$$(k=1,2,\cdots)$$

所以，当 $n\geqslant j+1$ 时，

$$a_{j+1-n}-\sum_{j=1}^{\infty}j\bar{a}_{-j}\alpha_{-n}=\beta_{j+1-n}$$

当 $j+1>n$ 时，

$$-\sum_{j=1}^{\infty} j\bar{a}_{-j}\alpha_{-n}=\beta_{j+1-n}$$

$$-\sum_{j=1}^{\infty} j\bar{a}_{-j}\alpha_{1}=\beta_{j+2}$$

于是

$$a_0-(n-1)\bar{a}_{1-n}\alpha_{-n}=\beta_0$$

$$a_{-1}-(n-2)\bar{a}_{2-n}\alpha_{-n}=\beta_{-1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{2-n}-\bar{a}_{-1}\alpha_{-n}=\beta_{2-n}$$

$$-n\bar{a}_{-n}\alpha_{-n}=\beta_1$$

$$-(n+1)\bar{a}_{-(n+1)}\alpha_{-n}=\beta_2$$

$$-\bar{a}_{-1}\alpha_1=\beta_3$$

$$-\bar{a}_{-2}\alpha_1=\beta_4$$

所以得到

$$a_{-1}=-\bar{\beta}_3/\alpha_1,\quad a_{-2}=-\bar{\beta}_4/\alpha_1,\cdots$$

$$a_{-n}=-\frac{\bar{\beta}_1}{n\alpha_{-n}},\quad a_{-(n+1)}=-\frac{\bar{\beta}_2}{(n+1)\alpha_{-n}}$$

$$a_0=\beta_0+(n-1)\alpha_{-n}\cdot\bar{a}_{1-n}\cdots$$

于是可求到 $\varphi(\zeta)$。由下式求 $\psi(\zeta)$，注意积分路线方向为顺时针方向。

$$\psi(\zeta)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{\overline{f(\sigma)}d\sigma}{\sigma-\zeta}-Res\left[\frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\zeta)}\varphi'(\zeta)\right]$$

4-5 同心圆环区域的级数解法

对于有位错的圆环区域的问题，在第二章中曾取 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 如下：

$$\varphi(z)=M_1 z\ln z+M_2\ln z+\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n z^n$$

$$\chi(z)=N_1 z\ln z+N_2\ln z+\sum_{n=-\infty}^{\infty}B_n z^n \qquad (4\text{-}5\text{-}1)$$

式中的位错分量为：

$$\omega=\pi(\nu-1)M_2/\mu$$

$$\xi=-\pi(\nu^*\widetilde{M}_2-\hat{N}_1)/\mu$$

$$\eta=-\pi(\widetilde{N}_1-\nu^*\hat{M}_2)/\mu$$

如果三个位错分量为零，则有

$$M_1=0,\quad (3-\nu^*)M_2+(1+\nu^*)\bar{N}_1=0 \qquad (4\text{-}5\text{-}1)'$$

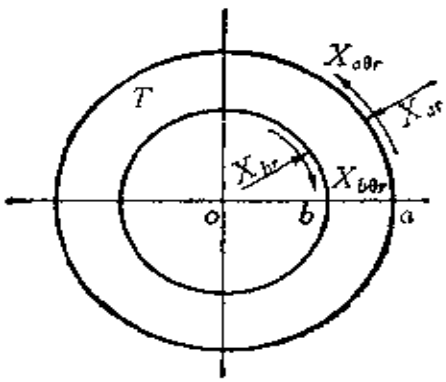


图 4-5

如图 4-5 所示，在外半径为 a 的周界上的应力分量为 X_{ar} 和 $X_{a\theta r}$，在内半径为 b 的周界上的应力分量为 X_{br} 和 $X_{b\theta r}$。把已知边界条件展为：

$$\left.\begin{aligned}X_{ar}-iX_{a\theta r}&=\bar{a}_0+\sum_{n=1}^{\infty}(\bar{a}_n\cos n\theta+\bar{b}_n\sin n\theta)\\ X_{br}-iX_{b\theta r}&=\bar{c}_0+\sum_{n=1}^{\infty}(\bar{c}_n\cos n\theta+\bar{d}_n\sin n\theta)\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}5\text{-}2)$$

由式(4-5-1)得到

$$\varphi'(z)=M_1\ln z+M_1+\frac{M_2}{z}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}nA_nz^{n-1}$$

$$\varphi''(z)=\frac{M_1}{z}-\frac{M_2}{z^2}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}n(n-1)A_nz^{n-2}$$

$$\chi''(z)=\frac{N_1}{z}-\frac{N_2}{z^2}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}n(n-1)B_nz^{n-2}$$

由 $X_r-iX_\theta=2\mathrm{Re}[\varphi'(z)]-[\bar{z}\varphi''(z)+\psi''(z)]e^{2i\theta}$，可知在半径为 a 的周界上有

$$\bar{a}_0+\sum_{n=1}^{\infty}(\bar{a}_n\cos n\theta+\bar{b}_n\sin n\theta)=\bar{a}_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-i\bar{b}_n}{2}e^{in\theta}+\frac{\bar{a}_n+i\bar{b}_n}{2}e^{-in\theta}\right)$$

$$=2\mathrm{Re}\left[M_2/z+M_1(1+\ln a)-\sum_{n=-\infty}^{\infty}nA_na^{n-1}e^{(n-1)i\theta}\right]$$

$$-\left[-\frac{M_2}{a}e^{-i\theta}+\sum_{-\infty}^{\infty}n(n-1)A_na^{n-1}e^{(n-1)i\theta}+M_1+\frac{N_1}{a}e^{i\theta}\right.$$

$$\left.-\frac{N_2}{a^2}+\sum_{-\infty}^{\infty}n(n-1)B_na^{n-2}e^{in\theta}\right]$$

$$=\left[(\bar{M}_2e^{i\theta}+M_2e^{-i\theta})/a+2M_1(1+\ln a)\right.$$

$$\left.+\sum_{n=-\infty}^{\infty}na^{n-1}(\bar{A}_ne^{-(n-1)i\theta}+A_ne^{(n-1)i\theta})\right]+\left[\frac{M_2}{a}e^{-i\theta}\right.$$

$$-M_1-\frac{N_1}{a}e^{i\theta}+\frac{N_2}{a^2}-\sum_{-\infty}^{\infty}n(n-1)A_na^{n-1}e^{(n-1)\theta}$$

$$\left.-\sum_{-\infty}^{\infty}n(n-1)\,B_na^{n-2}e^{in\theta}\right]$$

于是比较 $e^{i\theta}$ 的同次幂项，得到

$$\bar{a}_0 = 2M_1(1+\ln a) - M_1 + N_2/a^2 + A_1 + \overline{A}_1 \tag{4-5-3}$$

$$\frac{\bar{a}_1 - i\bar{b}_1}{2} = \frac{\bar{M}_2}{a} - \frac{N_2}{a} \tag{4-5-4}$$

$$\frac{\bar{a}_n - i\bar{b}_n}{2} = (n+1)a^n A_{n+1} - (n-1)\overline{A}_{-n+1}a^{-n} - n(n+1)A_{n+1}a^n - n(n-1)B_n a^{n-2} \tag{4-5-5}$$

$$\frac{\bar{a}_1 + i\bar{b}_1}{2} = 2\frac{M_2}{a} + 2a\overline{A}_2 - 2B_{-1}a^{-3} \tag{4-5-6}$$

$$\frac{\bar{a}_n + i\bar{b}_n}{2} = (n+1)a^n\overline{A}_{n+1} - (n-1)A_{-n+1}a^{-n} - n(n-1)a^{-n}A_{-n+1} - \frac{n(n+1)B_{-n}}{a^{n-2}} \tag{4-5-7}$$

同样，利用内圆周上的边界条件可以得到

$$\bar{c}_0 = 2M_1(1+\ln b) - M_1 + N_2/b^2 + A_1 + \overline{A}_1 \tag{4-5-8}$$

$$\bar{c}_1 - i\bar{d}_1 = 2(\overline{M}_2 - N_1)/b \tag{4-5-9}$$

$$\frac{\bar{c}_n - i\bar{d}_n}{2} = (n+1)b^n A_{n+1} - (n-1)\overline{A}_{-n+1}b^{-n} - n(n+1)A_{n+1}b^n - n(n-1)B_n b^{n-2} \tag{4-5-10}$$

$$\bar{c}_1 + i\bar{d}_1 = 4M_2/b + 4b\overline{A}_2 - 4B_{-1}b^{-3} \tag{4-5-11}$$

$$\frac{\bar{c}_n + i\bar{d}_n}{2} = (n+1)b^n\overline{A}_{n+1} - (n-1)A_{-n+1}b^{-n} - n(n-1)b^{-n}A_{-n+1} - n(n+1)B_{-n}b^{-n-2} \tag{4-5-12}$$

注意在 $\bar{a}_n - i\bar{b}_n$，$\bar{c}_n - i\bar{d}_n$ 的项中 $n \geqslant 2$。还要检查是否满足负荷的合力及合力矩为零的条件。由式(4-5-2)可以看到欲满足上述条件必须满足以下条件

$$a^2\hat{a}_0 = b^2\hat{c}_0 = -\hat{N}_2 \tag{4-5-13}$$

$$(\bar{a}_1 - i\bar{b}_1)a = (\bar{c}_1 - i\bar{d}_1)b = 2(\overline{M}_2 - N_1) \tag{4-5-14}$$

如果在圆环内没有位错，不计对应力分量无影响的附加项。取 $M_1 = 0$，由式(4-5-3)和式(4-5-8)得到

$$\widetilde{A}_1=-\frac{\widetilde{a}_0-(b/a)^2\widetilde{c}_0}{2-2(b/a)^2},\quad \widetilde{N}_2=a^2b^2\frac{\widetilde{c}_0-\widetilde{a}_0}{a^2-b^2},\qquad (4\text{-}5\text{-}15)$$

由式(4-5-14)和式(4-5-1)′得出

$$M_2=\frac{1+\nu^*}{8}a(a_1+ib_1),\quad N_1=-\frac{3-\nu^*}{8}a(\bar{a}_1-i\bar{b}_1)\qquad (4\text{-}5\text{-}16)$$

将 M_2 代入式(4-5-6)和(4-5-11)后，得到

$$A_2=\frac{1}{2(a^4-b^4)}\left\{\left(-\frac{a_1-ib_1}{2}-\frac{1+\nu^*}{2}\cdot\frac{a_1-i\bar{b}_1}{2}\right)a^3\right.$$
$$\left.-\left(\frac{c_1-id_1}{2}-\frac{1+\nu^*}{2}\cdot\frac{\bar{a}_1-i\bar{b}_1}{2}\cdot\frac{a}{b}\right)b^3\right\}$$

$$B_{-1}=\frac{a^3b^3}{2(a^4-b^4)}\left\{\left(\frac{\bar{a}_1+i\bar{b}_1}{2}-\frac{1+\nu^*}{2}\cdot\frac{a_1-ib_1}{2}\right)b\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\bar{c}_1+id_1}{2}-\frac{1+\nu^*}{2}\cdot\frac{a_1+ib_1}{2}\cdot\frac{a}{b}\right)a\right\}$$

由式(4-5-7)和(4-5-12)得到

$$\frac{a_n-ib_n}{2}=(n+1)a^nA_{n+1}-(n^2-1)a^{-n}\overline{A}_{-n+1}$$
$$-n(n+1)a^{-n-2}\overline{B}_{-n}$$

$$\frac{c_n-id_n}{2}=(n+1)b^nA_{n+1}-(n^2-1)b^{-n}\overline{A}_{-n+1}$$
$$-n(n+1)b^{-n-2}\overline{B}_{-n}$$

将式(4-5-5)和式(4-5-10)与上两式联立解出

$$A_{n+1}=\frac{a^{-n}}{\Delta_n}\left\{\lambda^{2n-2}(1-\lambda^2)\frac{a_n-i\bar{b}_n}{2}+\frac{1-\lambda^{2n-2}}{n+1}\cdot\frac{a_n-ib_n}{2}\right.$$
$$\left.-\lambda^n(1-\lambda^2)\frac{\bar{c}_n-i\bar{d}_n}{2}-\frac{\lambda^{n+2}(1-\lambda^{2n-2})}{n+1}\cdot\frac{c_n-id_n}{2}\right\}$$

$$A_{-n+1}=\frac{a^n}{\Delta_n}\left\{\lambda^{2n-2}(1-\lambda^{2n+2})\frac{(a_n+ib_n)}{2(n-1)}+\lambda^{2n-2}(1-\lambda^2)\frac{\bar{a}_n+i\bar{b}_n}{2}\right.$$
$$\left.-\frac{\lambda^n(1-\lambda^{2n+2})(c_n+id_n)}{2}-\frac{\lambda^{3n}(1-\lambda^2)(\bar{c}_n+i\bar{d}_n)}{2}\right\}$$

$$B_n=\frac{a^{-n+2}}{\Delta_n}\left\{-\frac{1+(n^2-1)\lambda^{2n}-n^2\lambda^{2n+2}}{n(n-1)}\left(\frac{\bar{a}_n-i\bar{b}_n}{2}\right)\right.$$
$$-\frac{(1-\lambda^{2n})(a_n-ib_n)}{2n}+\frac{\lambda^n[n^2-(n^2-1)\lambda^2-\lambda^{2n+2}](\bar{c}_n-i\bar{d}_n)}{2n(n-1)}$$
$$\left.+\frac{\lambda^{n+2}(1-\lambda^{2n})(c_n-id_n)}{2n}\right\}$$

$$B_{-n}=\frac{a^{n+2}}{\Delta_n}\left\{-\frac{\lambda^{2n}(1-\lambda^{2n})(a_n+ib_n)}{2n}\right.$$
$$-\frac{\lambda^{2n}[(n^2-1)-n^2\lambda^2+\lambda^{2n}](\bar{a}_n+i\bar{b}_n)}{2n(n+1)}$$
$$+\frac{\lambda^{n+2}(1-\lambda^{2n})(c_n+id_n)}{2n}$$
$$\left.-\frac{\lambda^{n+2}[1-n^2\lambda^{2n+2}+(n^2-1)\lambda^{2n}](\bar{c}_n-i\bar{d}_n)}{2n(n+1)}\right\}$$

式中 $\lambda=b/a<1$，$\Delta_n=(1-\lambda^{2n})^2-n^2\lambda^{2n-2}(1-\lambda^2)^2$。

若是 $\lambda\to 0$，则

$$A_{n+1}=-\frac{a_n-ib_n}{2(n+1)a^n},\quad A_{-n+1}=0$$

$$B_n=a^{2-n}\left[\frac{\bar{a}_n-i\bar{b}_n}{2n(1-n)}-\frac{a_n-ib_n}{2n}\right],\quad B_{-1}=0$$

$$A_2=-\frac{1}{2a}\left(\frac{a_1-ib_1}{2}-\frac{1+\nu^*}{2}\cdot\frac{a_1-i\bar{b}_1}{2}\right)$$

此时还有 $\hat{A}_1$，A_0，B_0，B_1 未定。

我们研究几种具体情况。

a）
$$X_{ar}=p_a(\theta),\quad X_{br}=p_b(\theta)$$
$$X_{a\theta r}=X_{b\theta r}=0$$

由
$$X_{ar}=\tilde{a}_0+\sum_{n=1}^{\infty}(\tilde{a}_n\cos n\theta+\tilde{b}_n\sin n\theta)=p_a(\theta)$$

$$X_{a\theta}=\hat{a}_0+\sum_{n=1}^{\infty}(\hat{a}_n\cos n\theta+\hat{b}_n\sin n\theta)=0$$

$$X_{br}=\tilde{c}_0+\sum_{n=1}^{\infty}(\tilde{c}_n\cos n\theta+\tilde{d}_n\sin n\theta)=p_b(\theta)$$

$$X_{b\theta}=\hat{c}_0+\sum_{n=1}^{\infty}(\hat{c}_n\cos n\theta+\hat{d}_n\sin n\theta)=0$$

于是得出

$$\tilde{a}_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}p_a(\theta)d\theta;$$

$$\tilde{a}_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}p_a(\theta)\cos n\theta d\theta;\quad \tilde{b}_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}p_a(\theta)\sin n\theta d\theta$$

$$(n\geqslant 1)$$

$$\tilde{c}_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}p_b(\theta)d\theta$$

$$\tilde{c}_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}p_b(\theta)\cos n\theta d\theta;\quad \tilde{d}_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}p_b(\theta)\sin n\theta d\theta$$

$$(n\geqslant 1)$$

$\hat{a}_0$, $\hat{a}_n$, $\hat{b}_n$, $\hat{c}_0$, $\hat{c}_n$, $\hat{d}_n$ 都为零。

我们知道

$$\tilde{A}_1=\frac{1}{4\pi(a^2-b^2)}\left(a^2\int_0^{2\pi}p_a(\theta)d\theta-b^2\int_0^{2\pi}p_b(\theta)d\theta\right)$$

$\hat{A}_1$不定。

$$\tilde{K}=\frac{a^2b^2}{a^2-b^2}\cdot\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}p_a(\theta)d\theta-\int_0^{2\pi}p_b(\theta)d\theta\right)$$

$$\hat{K}=0$$

$$A_2=\frac{1}{2(a^4-b^4)}\left\{\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}p_a(\theta)\cos\theta d\theta\right.\right.$$

$$-\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}p_a(\theta)\sin\theta d\theta-\frac{1+\nu^*}{4\pi}\int_0^{2\pi}p_a(\theta)e^{-i\theta}d\theta\Big]a^3$$

$$-b^3\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}p_b(\theta)e^{-i\theta}d\theta\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1+\nu^*}{4\pi\lambda}\int_0^{2\pi}p_a(\theta)e^{-i\theta}d\theta\right]\right\}$$

$$B_{-1}=\frac{a^3b^3}{2(a^4-b^4)}\left\{\frac{b(1-\nu^*)}{4\pi}\int_0^{2\pi} p_a(\theta)e^{i\theta}d\theta\right.$$
$$-a\left[\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} p_b(\theta)e^{i\theta}d\theta\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1+\nu^*}{4\pi\lambda}\int_0^{2\pi} p_a(\theta)e^{i\theta}d\theta\right]\right\}$$

$n>1$ 时，则

$$A_{n+1}=\frac{1}{\Delta_n a^n}\left\{\lambda^{2n-2}(1-\lambda^2)\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} p_a(\theta)e^{-i\theta}d\theta\right.$$
$$+\frac{1-\lambda^{2n-2}}{4\pi(n+1)}\int_0^{2\pi} p_a(\theta)e^{-i\theta}d\theta-\left[\lambda^n(1-\lambda^2)\right.$$
$$\left.+\frac{\lambda^{n+2}(1-\lambda^{2n-2})}{n+1}\right]\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} p_b(\theta)e^{-i\theta}d\theta\Big\}$$

$$A_{-n+1}=-\frac{a^n}{\Delta_n}\left\{\left[\frac{\lambda^{2n-2}(1-\lambda^{2n+2})}{n-1}+\lambda^{2n-2}(1-\lambda^2)\right]\right.$$
$$\times\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} p_a(\theta)e^{i\theta}d\theta-\left[\frac{\lambda^n(1-\lambda^{2n+2})}{n-1}\right.$$
$$\left.\left.+\lambda^{3n}(1-\lambda^2)\right]\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} p_b(\theta)e^{i\theta}d\theta\right\}$$

$$B_n=\frac{a^{-n+2}}{\Delta_n}\left\{-\left[\frac{1+(n^2-1)\lambda^{2n}-n^2\lambda^{2n+2}+(n-1)(1-\lambda^{2n})}{n(n-1)}\right]\right.$$
$$\times\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} p_a(\theta)e^{-i\theta}d\theta$$
$$+\left[\frac{\lambda^n(n^2-(n^2-1)\lambda^2-\lambda^{2n+2})+(n-1)\lambda^{n+2}(1-\lambda^{2n})}{n(n-1)}\right]$$
$$\left.\times\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} p_b(\theta)e^{-i\theta}d\theta\right\}$$

$$B_{-n}=\frac{a^{n+2}}{\Delta_n}\left\{-\frac{(n+1)\lambda^{2n}(1-\lambda^{2n})+\lambda^{2n}[(n^2-1)-n^2\lambda^2+\lambda^{2n}]}{4\pi n(n+1)}\right.$$
$$\times\int_0^{2\pi} p_a(\theta)e^{i\theta}d\theta$$
$$+\frac{(n+1)\lambda^{n+2}(1-\lambda^{2n})-\lambda^{n+2}[1-n^2\lambda^{2n+2}+(n^2-1)\lambda^{2n}]}{4\pi(n+1)n}$$
$$\left.\times\int_0^{2\pi} p_b(\theta)e^{i\theta}d\theta\right\}$$

在 $\theta=0$ 的地方，内外周界上有集中力 P 作用，则 $\int p_a(\theta)ad\theta=-P$；$\int p_b(\theta)bd\theta=-P$，而在其它地方没有力的作用。于是

$$\widetilde{A}_1=\frac{-P}{4\pi(a+b)},\quad \widetilde{K}=\frac{ab}{2\pi(a-b)}P$$

$$A_2=-\frac{P}{2\pi(b^4-a^4)}\left[\frac{1+\nu^*}{4}a^2-\frac{b^2}{2}+\frac{ab}{4}(1+\nu^*)\right]$$

$$B_{-1}=-\frac{a^3b^3}{8\pi(a^4-b^4)}\left\{(1-\nu^*)\lambda-\frac{1}{\lambda}+\frac{1+\nu^*}{\lambda}\right\}P$$

$$A_{n+1}=-\frac{P}{4\pi a^n}\left\{\frac{1}{a}\left[\lambda^{2n-2}(1-\lambda^2)+\frac{1-\lambda^{2n-2}}{n+1}\right]\right.$$
$$\left.-\frac{1}{b}\left[\lambda^n(1-\lambda^2)+\frac{\lambda^{n+2}(1-\lambda^{2n-2})}{n+1}\right]\right\}$$

$$A_{-n+1}=-P\frac{a^n}{4\pi}\left\{\frac{1}{a}\left[\frac{\lambda^{2n-2}(1-\lambda^{2n+2})}{n-1}+\lambda^{2n-2}(1-\lambda^2)\right]\right.$$
$$\left.-\frac{1}{b}\left[\lambda^{3n}(1-\lambda^2)+\frac{\lambda^n-\lambda^{3n+2}}{n-1}\right]\right\}$$

$$B_n=-\frac{a^{n+2}}{4\pi n(n-1)}P\left\{\frac{\lambda^n}{b}\left[n^2-(n^2-1)\lambda^2-\lambda^{2n+2}\right]\right.$$
$$+(n-1)(1-\lambda^{2n})\frac{\lambda^{n+2}}{b}-\frac{1}{a}\left[1+(n^2-1)\lambda^{2n}\right.$$
$$\left.\left.-n^2\lambda^{2n+2}+(n-1)(1-\lambda^{2n})\right]\right\}$$

$$B_{-n}=-\frac{a^{n+2}P}{4\pi n(n+1)}\left\{\frac{1}{b}(n+1)\lambda^{n+2}(1-\lambda^{2n})\right.$$
$$-\frac{\lambda^{n+2}}{b}\left[1-n^2\lambda^{2n+2}+(n^2-1)\lambda^{2n}\right]$$
$$-\frac{1}{a}(n+1)\lambda^{2n}(1-\lambda^{2n})$$
$$\left.+\frac{1}{a}\lambda^{2n}\left[(n^2-1)-n^2\lambda^2+\lambda^{2n}\right]\right\}$$

由式(4-5-16)，可得

$$M_2=\frac{1+\nu^*}{16\pi}a\int_0^{2\pi}p_a(\theta)e^{i\theta}d\theta,$$

$$N_1=\frac{\nu^*-3}{16\pi}6\int_0^{2\pi}p_b(\theta)e^{-i\theta}d\theta$$

若 $b\to 0$，即在圆心有一集中力 P 作用，则

$$\widetilde{A}_1=-\frac{P}{4\pi a},\quad \widetilde{K}=0,\quad A_2=-\frac{1-\nu}{8\pi a^2}P,\quad B_{-1}=0$$

$$B_{-n}=0,\quad A_{n-1}=-\frac{a^{-n-1}}{4\pi(1+n)}P,\quad A_{-n+1}=0$$

$$B_n=\frac{a^{-n+1}}{4\pi(n-1)}P$$

$$M_2=-(1+\nu^*)P/16\pi,\quad N_1=(3-\nu^*)P/16\pi,\quad K=0$$

把以上诸系数代入式（4-5-1）中后，得到

$$\varphi(z)=\left(-\frac{1+\nu^*}{16\pi}\ln z-\frac{z}{4\pi a}-\frac{1-\nu^*}{8\pi a^2}z^2-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{4\pi(n+1)a^{n+1}}\right)P+i\hat{A}_1z+A_0$$

$$\chi(z)=\left(\frac{3-\nu^*}{16\pi}z\ln z-\sum_{n=2}^{\infty}4\pi\frac{a^{-n+1}}{(n-1)}z^n\right)P+B_1z+B_0$$

这里注意 $\chi'(z)=\psi(z)$。这里 $\hat{A}_1$，A_0，B_1，B_0 是未知。

我们知道

$$\left.\begin{aligned}&X_r+X_\theta=4\mathrm{Re}[\varphi'(z)]\\&X_\theta-X_r+2iX_{r\theta}=2[\bar{z}\varphi''(z)+\psi'(z)]e^{2i\theta}\\&X_\theta+iX_{r\theta}=2\mathrm{Re}[\varphi'(z)]+[\bar{z}\varphi''(z)+\psi'(z)]e^{2i\theta}\\&X_r-iX_{r\theta}=2\mathrm{Re}[\varphi'(z)]-[z\varphi''(z)+\psi'(z)]e^{2i\theta}\end{aligned}\right\}(4\text{-}5\text{-}17)$$

现在研究在 0 = 0 时有集中力 P 作用的圆环的应力函数(图4-6)。

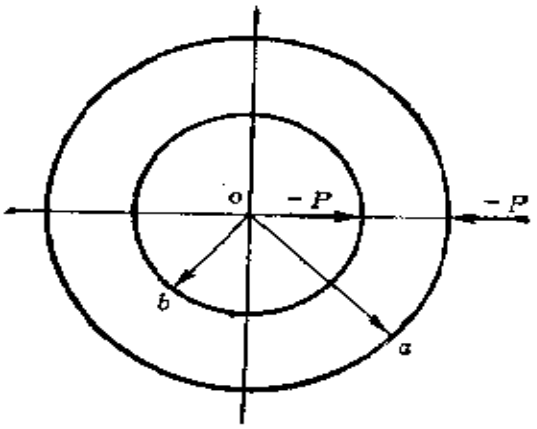


图 4-6

$$\varphi(z)=-\frac{1+\nu^*}{16\pi}P\ln z-\frac{z}{4\pi(a+\bar{b})}P$$
$$-\frac{z^2}{2(a^4-b^4)}\{0\}P-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{4\pi a^n}\{1\}P$$
$$-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a^n}{4\pi z^{n-1}}\{2\}P+iA_1z+A_0$$

$$\varphi'(z)=\left(-\frac{1+\nu^*}{16\pi z}-\frac{1}{4\pi(a+b)}-\frac{z}{a^4-b^4}\{0\}\right.$$
$$-\sum_{n=2}^{\infty}(n+1)\{1\}\frac{z^n}{4\pi a^n}$$
$$\left.+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n-1)a^n}{4\pi z^n}\{2\}\right)P-i\hat{A}_1$$

$$\chi(z)=P\frac{\nu^*-3}{16\pi}z\ln z+\frac{abP}{2\pi(a+b)}\ln z$$
$$+\frac{a^3b^3}{8\pi(a^4-b^4)}\left[(\nu^*-1)\lambda-\frac{\nu^*}{\lambda}\right]\frac{P}{z}+B_1z$$
$$-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^n}{4\pi n(n-1)a^{n-2}}\{3\}P$$
$$-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a^{n+2}}{4\pi n(n+1)z^n}\{4\}P+B_0$$

$$\chi''(z)=\psi'(z)=-\frac{3-\nu^*}{16\pi}\frac{P}{z}-\frac{ab}{2\pi(a+b)}\frac{P}{z^2}$$

$$+\frac{a^3b^3}{4\pi(a^4-b^4)}\left[(\nu^*-1)\lambda-\frac{\nu^*}{\lambda}\right]\frac{P}{z^3}$$

$$-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\{3\}}{4\pi}\left(\frac{z}{a}\right)^{n-2}P-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\{4\}}{4\pi}\left(\frac{a}{z}\right)^{n+2}P$$

于是把它们代入应力分量的方程中，解出

$$X_r=\frac{P}{2\pi(a+b)}\left[\frac{ab}{r^2}-1\right]-\left\{\frac{\nu^*}{4\pi r}-\frac{r}{a^4-b^4}\{0\}\right.$$

$$\left.+\frac{a^3b^3}{4\pi r^3(a^4-b^4)}\left[(\nu^*-1)\lambda-\frac{\nu^*}{\lambda}\right]\right\}P\cos\theta$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left\{(n+1)(n-2)\{1\}\left(\frac{r}{a}\right)^n\right.$$

$$+(n-1)(n+2)\{2\}\left(\frac{a}{r}\right)^n+\left(\frac{a}{r}\right)^{n+2}\{4\}$$

$$\left.+\left(\frac{r}{a}\right)^{n-2}\{3\}\right\}\frac{P}{4\pi}\cos n\theta$$

$$X_\theta=-\frac{P}{2\pi(a+b)}\left(1+\frac{ab}{r^2}\right)-\left\{\frac{1}{4\pi r}+\frac{3r}{a^4-b^4}\{0\}\right.$$

$$-\frac{a^3b^3}{4\pi(a^4-b^4)r^3}\left[(\nu^*-1)\lambda-\frac{\nu^*}{\lambda}\right]\left.\right\}P\cos\theta$$

$$-\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)\{1\}\left(\frac{r}{a}\right)^n\right.$$

$$+(n-1)(n-2)\{2\}\left(\frac{a}{r}\right)^n+\left(\frac{r}{a}\right)^{n-2}\{3\}$$

$$\left.+\left(\frac{a}{r}\right)^{n+2}\{4\}\right]\frac{P}{4\pi}\cos n\theta$$

$$X_{0r}=-\left\{\frac{1}{4\pi r}+\frac{r}{a^2-b^2}\{0\}+\frac{a^2b^2}{4\pi r^3(a^2-b^2)}\left[(\nu^*-1)\lambda\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\nu^*}{\lambda}\right]\right\}P\sin\theta+\sum_{n=2}^{\infty}\left\{n(n-1)\{2\}\left(\frac{a}{r}\right)^n\right.$$

$$+\{4\}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+2}-n(n+1)\{1\}\left(\frac{r}{a}\right)^n$$

$$\left.-\{3\}\left(\frac{r}{a}\right)^{n-2}\right\}\frac{P\sin n\theta}{4\pi}$$

式中

$$\{0\}=\frac{1-\nu^*}{4\pi}a^2-\frac{b^2}{2\pi}+\frac{ab}{4\pi}(1+\nu^*)$$

$$\{1\}=\frac{1}{a}\left[\lambda^{2n-2}(1-\lambda^2)+\frac{1-\lambda^{2n+2}}{n+1}\right]$$

$$-\frac{1}{b}\left[\lambda^n(1-\lambda^2)+\frac{\lambda^{n+2}(1-\lambda^{2n-2})}{n-1}\right]$$

$$\{2\}=\frac{1}{a}\left[\frac{\lambda^{2n-2}(1-\lambda^{2n+2})}{n-1}+\lambda^{2n-2}(1-\lambda^2)\right]$$

$$-\frac{1}{b}\left[\lambda^{3n}-\lambda^{3n-2}-\frac{\lambda^n-\lambda^{n+2}}{n-1}\right]$$

$$\{3\}=\frac{1}{b}\left[n^2-(n^2-1)\lambda^2-\lambda^{2n+2}-\lambda^{n+2}(n-1)(1-\lambda^{2n})\right]$$

$$-\frac{1}{a}\left[1+(n^2-1)\lambda^{2n}-n^2\lambda^{2n-2}+(n-1)(1-\lambda^{2n})\right]$$

$$\{4\}=\frac{1}{b}\left[(n+1)\lambda^{n+2}(1-\lambda^{2n})-\lambda^{n+2}+n^2\lambda^{3n+4}\right.$$

$$\left.-(n^2-1)\lambda^{3n+2}\right]-\frac{1}{a}\left[\lambda^{2n}(n^2-1-n^2\lambda^2+\lambda^{2n})\right.$$

$$\left.-(n+1)\lambda^{2n}(1-\lambda^{2n})\right]$$

若 $b\to 0$，也就是在圆盘中心有集中力 $-P$ 作用，求到应力分量如下：

$$X_r=-\frac{P}{2\pi a}-\frac{P}{4\pi r}\left\{\nu^*+(1-\nu^*)\left(\frac{r}{a}\right)^2\right\}\cos\theta$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{n-2}{a}\left(\frac{r}{a}\right)^n-\frac{n}{a}\left(\frac{r}{a}\right)^{n-2}\right]\frac{P}{4\pi}\cos n\theta$$

$$X_\theta=-\frac{P}{2\pi a}-\frac{P}{4\pi r}\left\{1+\frac{3}{a^2}r^2(1-\nu^*)\right\}\cos\theta$$
$$-\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{n+2}{a}\left(\frac{r}{a}\right)^n-\frac{n}{a}\left(\frac{r}{a}\right)^{n-2}\right]\frac{P}{4\pi}\cos n\theta$$

$$X_{r\theta}=-\left\{1+\frac{r^2}{a^2}(1-\nu^*)\right\}\frac{P}{4\pi r}\sin\theta$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left[-\frac{n}{a}\left(\frac{r}{a}\right)^{n-2}-\frac{n}{a}\left(\frac{r}{a}\right)^n\right]\frac{P}{4\pi}\sin n\theta$$

这里 $b\leqslant r\leqslant a$。

b）若是在圆环的内周界有均布切向负荷在外周界上受有与它平衡的切向力 P_0 时，求应力分布及内外圆周的相对位移（图 4-7）。

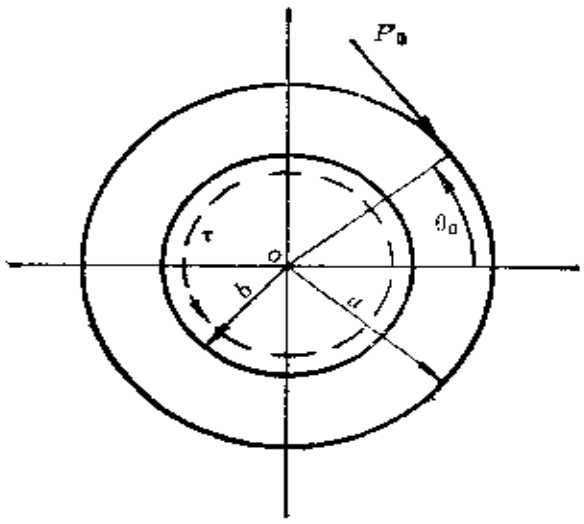


图 4-7

这时，$X_{ar}=X_{br}=0$，$X_{br\theta}=\tau$，$X_{ar\theta}=\tau_1(\theta)$ 由式（4-5-2）可知

$$\tau=\hat{c}_0,\quad \tilde{c}_0=0,\quad \bar{c}_n=\bar{d}_n=0,\quad n\geqslant 1$$

$$\hat{a}_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\tau_1(\theta)d\theta=\frac{P_0}{2\pi a},\quad \tilde{a}_0=\tilde{a}_n=\tilde{b}_n=0,\quad n\geqslant 1$$

$$\hat{a}_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\tau_1(\theta)\cos n\theta d\theta;\quad \hat{b}_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\tau_1(\theta)\sin n\theta d\theta$$

为了维持平衡，我们知道

$$2\pi b^2\tau=a^2\int_0^{2\pi}\tau_1(\theta)d\theta=aP_0$$

代入式(4-5-15)后，得到

$$\tilde{A}_1=0,\quad \tilde{K}=0,\quad \hat{K}=-P_0a/2\pi=-b^2\tau$$

$$M_2=(1+\nu)a(i\hat{a}_1-\hat{b}_1)/8$$

$$=-\frac{3-\nu^*}{8\pi}i\int_0^{2\pi}\tau_1(\theta)ae^{i\theta}d\theta$$

$$N_1=+\frac{3-\nu^*}{8}a(i\hat{a}_1+\hat{b}_1)=\frac{3-\nu^*}{8\pi}i\int_0^{2\pi}\tau_1(\theta)ae^{-i\theta}d\theta$$

$$A_2=\frac{1}{2(a^4-b^4)}\left\{\frac{1}{2}[(i\hat{a}_1+\hat{b}_1)+(1+\nu^*)(i\hat{a}_1+\hat{b}_1)]a^3\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}(1+\nu^*-i\hat{a}_1-\hat{b}_1)ab^2\right\}$$

$$=\frac{ia^3}{4\pi(a^4-b^4)}[(3+\nu^*)-\lambda^2(1+\nu^*)]\int_0^{2\pi}\tau_1(\theta)e^{-i\theta}d\theta$$

$$B_{-1}=\frac{a^3b^3i}{4\pi(a^4-b^4)}[(3+\nu^*)b-(1+\nu^*)a]\int_0^{2\pi}\tau_1(\theta)e^{i\theta}d\theta$$

同时得到

$$A_{n+1}=-\frac{1}{\Delta_n a^n}\left\{\frac{1-\lambda^{2n-2}}{(n+1)}-\lambda^{2n-2}(1-\lambda^2)\right\}$$

$$\times\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\tau_1(\theta)e^{-in\theta}d\theta$$

$$A_{-n+1}=-\frac{a^n}{\Delta_n}\left\{\frac{1-\lambda^{2n+2}}{n-1}+\lambda^2-1\right\}$$

$$\times\frac{\lambda^{2n-2}}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\tau_1(\theta)e^{in\theta}d\theta$$

$$B_n=-\frac{a^2}{\Delta_n a^n}\left\{\frac{1+(n^2-1)\lambda^{2n}-n^2\lambda^{2n+2}}{n(n-1)}-\frac{1-\lambda^{2n}}{n}\right\}$$
$$\times\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\tau_1(\theta)e^{-in\theta}d\theta$$
$$B_{-n}=\frac{-a^{n+2}}{\Delta_n}\left\{\frac{n^2-1-n^2\lambda^2+\lambda^{2n}}{n(n+1)}-\frac{1-\lambda^{2n}}{n}\right\}$$
$$\times\frac{\lambda^{2n}}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\tau_1(\theta)e^{in\theta}d\theta$$

但是又知道

$$\varphi(z)=-\frac{1+\nu^*}{8\pi i}\int_0^{2\pi}a\tau_1e^{i\theta}d\theta\cdot\ln z+\frac{a^3z^2i}{4\pi(a^4-b^4)}$$
$$\times[3+\nu^*-\lambda^2(1+\nu^*)]\int_0^{2\pi}\tau_1e^{-i\theta}d\theta$$
$$-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^{n+1}\cdot a^{-n}}{2\pi\Delta_n i}\left[\frac{1-\lambda^{2n-2}}{n+1}-\lambda^{2n-2}(1-\lambda^2)\right]$$
$$\times\int_0^{2\pi}\tau_1e^{-in\theta}d\theta+\sum_{n=2}^{\infty}A_{-n+1}z^{-n+1}+A_1z+A_0$$

$$\chi(z)=\frac{3-\nu^*}{8\pi}iz\ln z\int_0^{2\pi}\tau_1ae^{-i\theta}d\theta-b^2\tau\ln z+B_1z+B_0$$
$$+\frac{z^{-1}a^3b^3i}{4\pi(a^4-b^4)}[(3+\nu^*)b-(1+\nu^*)a]$$
$$\times\int_0^{2\pi}\tau_1e^{i\theta}d\theta+\frac{i}{2\pi\Delta_n}\sum_{n=2}^{\infty}\left\{a^{-n+2}\left[\frac{\lambda^{2n}-1}{n}\right.\right.$$
$$\left.+\frac{1+(n^2-1)\lambda^{2n}-n^2\lambda^{2n+2}}{n(n-1)}\right]\int_0^{2\pi}\tau_1e^{-in\theta}d\theta\cdot z^n$$
$$+z^{-n}a^{n+2}\left[-\frac{(\lambda^{2n}-1)\lambda^{2n}}{n}+\frac{\lambda^{2n}(n^2-1-n^2\lambda^2+\lambda^{2n})}{n(n+1)}\right]$$
$$\left.\times\int_0^{2\pi}\tau_1e^{in\theta}d\theta\right\}$$

若在 θ_0 处有一集中力 P_0 作用，则

$$\varphi(z)=\left\{\frac{1+\nu^*}{8\pi}e^{i\theta_0}\ln z+\frac{z^2a^2}{4\pi(a^4-b^4)}-e^{-i\theta_0}(3+\nu^*\right.$$

$$-\lambda^2(1+\nu^*))+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{2\pi\Delta_n n a^{n+1}}e^{-in\theta_0}$$

$$\times\left[\frac{1-\lambda^{2n-2}}{n+1}-\lambda^{2n-2}(1-\lambda^2)\right]+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a^{n-1}z^{1-n}}{2\pi\Delta_n n}$$

$$\left.\times\left[\frac{\lambda^{2n-2}(1-\lambda^{2n+2})}{n-1}-\lambda^{2n-2}(1-\lambda^2)\right]e^{in\theta_0}\right\}iP_0+A_0+A_1z$$

$$\chi(z)=i\frac{3-\nu^*}{8\pi}P_0e^{-i\theta_0}z\ln z-b^2\tau\ln z+B_0+B_1\tau$$

$$+\frac{a^3b^3ie^{i\theta_0}}{4\pi(a^4-b^4)z}P_0[(3+\nu^*)\lambda-(1+\nu^*)]$$

$$+\frac{i}{2\pi}P_0\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\Delta_n}\left\{\frac{z^n}{a^{n-1}}\left[\frac{\lambda^{2n}-1}{n}\right.\right.$$

$$+\frac{1+(n^2-1)\lambda^{2n}-n^2\lambda^{2n+2}}{n(n-1)}\Big]e^{in\theta_0}$$

$$\left.+\frac{a^{n+1}}{z^n}\left[\frac{n^2-1-n^2\lambda^2+\lambda^{2n}}{n+1}-1+\lambda^{2n}\right]\frac{\lambda^{2n}e^{-in\theta_0}}{n}\right\}$$

求到$\varphi'(z)$，$\varphi''(z)$，$\chi''(z)=\psi'(z)$后，代入式（4-5-17），并解出应力分量如下：

$$X_r=2\widetilde{A}_1-\frac{a}{2\pi r^2}P_0-\frac{P_0}{2\pi r}\left\{\frac{3+\nu^*}{2}-\frac{a^2r^2}{a^4-b^4}[3+\nu^*\right.$$

$$-\lambda^2(1+\nu^*)]+\frac{a^3b^3}{(a^4-b^4)r^2}[(3+\nu^*)\lambda-(1+\nu^*)]\Big\}$$

$$\times\sin(\theta_0-0)+\frac{P_0}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\Delta_n}\left\{\frac{r^n}{a^{n+1}}\left[\frac{1-\lambda^{2n-2}}{n+1}\right.\right.$$

$$-\lambda^{2n-2}(1-\lambda^2)\Big](n+1)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\right)$$

$$\left.+\frac{a^{n-1}}{r^n}\left[\frac{1-\lambda^{2n-2}}{n-1}-1+\lambda^2\right]\lambda^{2n-2}(n-1)\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$\times \sin n(\theta_0-\theta)+\frac{P_0}{2\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\Lambda_n}\left\{(n-1)\frac{r^{n-2}}{a^{n-1}}\right.$$

$$\times\left[\frac{1+(n^2-1)\lambda^{2n}-n^2\lambda^{2n-2}}{n(n-1)}-\frac{1-\lambda^{2n}}{n}\right]-\frac{(n+1)a^{n+1}}{nr^{n+2}}$$

$$\left.\times\left[\frac{n^2-1-n^2\lambda^2+\lambda^{2n}}{n+1}-1+\lambda^{2n}\right]\lambda^{2n}\right\}\sin n(\theta_0+\theta)$$

$$X_\theta=\frac{a}{2\pi r^2}P_0+\left\{\frac{1-\nu^*}{2}+\frac{3a^2r^2}{a^4-b^4}[3+\nu^*-\lambda^2(1+\nu^*)]\right.$$

$$\left.+\frac{a^3b^3}{(a^4-b^4)r^2}[(3+\nu^*)\lambda-(1+\nu^*)]\right\}\frac{P_0}{2\pi r}\sin(\theta_0-\theta)$$

$$+\frac{P_0}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\Delta_n}\left\{\left[\frac{r^n}{a^{n+1}}\left[\frac{1-\lambda^{2n-2}}{n+1}-\lambda^{2n-2}+\lambda^{2n}\right]\right.\right.$$

$$\times\frac{(n+1)(n+2)}{2n}+\frac{a^{n-1}}{r^n}\left[\frac{\lambda^{2n-2}-\lambda^{4n}}{n-1}-\lambda^{2n-2}\right.$$

$$\left.\left.+\lambda^{2n}\right]\frac{(n-1)(2-n)}{2n}\right\}\sin n(\theta_0-\theta)$$

$$+\frac{P_0}{2\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\Delta_n}\left\{\frac{n+1}{n}\left(\frac{a^{n+1}}{r^{n+2}}\right)\left[\frac{n^2-1-n^2\lambda^2+\lambda^{2n}}{n+1}\right.\right.$$

$$\left.-1+\lambda^{2n}\right]\lambda^{2n}-\frac{n-1}{n}\left(\frac{r^{n-2}}{a^{n-1}}\right)\left[1+\frac{(n^2-1)\lambda^{2n}-n^2\lambda^{2n+2}}{n-1}\right.$$

$$\left.\left.-1+\lambda^{2n}\right]\right\}\sin n(\theta_0+\theta)$$

$$X_{r\theta}=\left\{\frac{1-\nu^*}{2}+\frac{a^2r^2}{a^4-b^4}[3+\nu^*-\lambda^2(1+\nu^*)]-\frac{a^3b^3}{(a^4-b^4)r^2}\right.$$

$$\left.\times[(3+\nu^*)\lambda-(1+\nu^*)]\right\}\frac{P_0}{2\pi r}\cos(\theta_0-\theta)$$

$$+\frac{P_0}{2\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\Delta_n}\left\{\frac{(n-1)r^{n-2}}{na^{n-1}}\left[\frac{1+(n^2-1)\lambda^{2n}-n^2\lambda^{2n+2}}{n-1}\right.\right.$$

$$\left.-1+\lambda^{2n}\right]+\frac{(n+1)a^{n+1}}{nr^{n+2}}\left[\lambda^{2n}-1+\frac{n^2-1-n^2\lambda^2+\lambda^{2n}}{n+1}\right]\lambda^{2n}\right\}$$

$$\times\cos n(\theta_0+\theta)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{P_0}{2\pi\Delta_n}\left\{(n+1)\frac{r^n}{a^{n+1}}\left[\frac{1-\lambda^{2n-2}}{n+1}-\lambda^{2n-2}+\lambda^{2n}\right]+(n-1)\frac{a^{n-1}}{r^n}\left[\frac{\lambda^{2n-2}-\lambda^{4n}}{n-1}-\lambda^{2n-2}+\lambda^{2n}\right]\right\}$$

$$\times\cos n(\theta_0-\theta)$$

若是令 $\lambda\to 0$，则得到圆盘周边有作用力，在圆盘中心有一扭矩的情况。此时

$$X_r=2\widetilde{A}_1-\frac{a}{2\pi r^2}P_0-\frac{P_0}{2\pi r}\left\{\frac{3+\nu^*}{2}\left[1-\frac{2r^2}{a^2}\right]\right\}\sin(\theta_0-\theta)$$

$$+\frac{P_0}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\Delta_n}\left\{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\right)\frac{r^n}{a^{n+1}}\right\}\sin n(\theta_0-\theta)$$

$$+\frac{P_0}{2\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\Delta_n}\left\{\frac{r^{n-2}}{n^2a^{n-1}}\right\}\sin n(\theta_0+\theta)$$

$$X_\theta=\frac{a}{2\pi r^2}P_0+\left\{\frac{1-\nu^*}{2}+(3+\nu^*)\frac{3r^2}{a^2}\right\}\frac{P_0}{2\pi r}\sin(\theta_0-\theta)$$

$$+\frac{P_0}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\Delta_n}\left\{\frac{n+2}{2n}\cdot\frac{r^n}{a^{n+1}}\right\}\sin n(\theta_0-\theta)$$

$$+\frac{P_0}{2\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\Delta_n}\left\{\frac{n-2}{n}\left(\frac{r^{n-2}}{a^{n-1}}\right)\right\}\sin n(\theta_0+\theta)$$

$$X_{r\theta}=\left\{\frac{1-\nu^*}{2}+\frac{r^2}{a^2}(3+\nu^*)\right\}\frac{P_0}{2\pi r}\cos(\theta_0-\theta)$$

$$+\frac{P_0}{2\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\Delta_n}\left\{\frac{(2-n)r^{n-2}}{na^{n-1}}\right\}\cos n(\theta_0+\theta)$$

$$+\frac{P_0}{2\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\Delta_n}\left\{\frac{r^n}{a^{n+1}}\right\}\cos n(\theta_0-\theta)$$

4-6 非同心圆环区域问题

以圆弧和直线为边界的双连通区都能用适当选取的分式线性变换变到圆环区域。任意光滑曲线为边界的环形区域也可以利用

保角变换变到圆环区域。

先讨论分式线性变换。令

$$\zeta = \frac{z+a}{z-a} = e^{\xi+i\eta}$$

则

$$z = a\,\frac{\zeta+1}{\zeta-1} = x+iy = \omega(\zeta) = a + \frac{2a}{\zeta-1}$$

所以

$$\left|\frac{z+a}{z-a}\right| = e^{\xi},\quad \eta = \arg(z+a) - \arg(z-a)$$

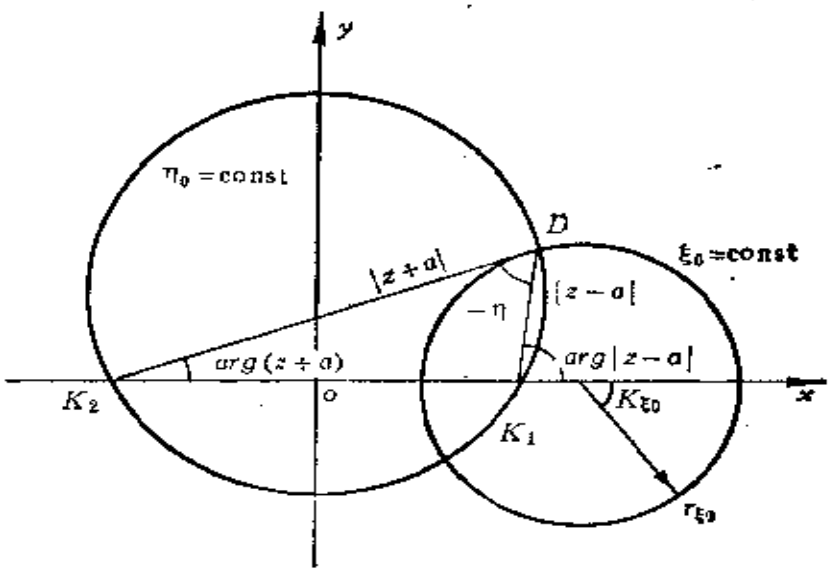


图 4-8

图 4-8 所示（ξ，η）是双极坐标。由此得到

$$(x - a\coth\xi_0)^2 + y^2 = a^2\operatorname{csch}^2\xi_0$$

$$x^2 + (y + a\cot\eta_0)^2 = a^2\operatorname{cse}^2\eta_0$$

于是由图 4-9 可知

$$K_{\xi_0} = a\coth\xi_0,\quad r_{\xi_0} = a\,|\operatorname{csch}\xi_0|$$

$\xi_0 > 0$，$K_{\xi_0} > 0$，$\xi_0 = 0$，$K_{\xi_0} = \infty$，$\xi_1 > \xi_0 > \xi_2$。以下分三种情况讨论。

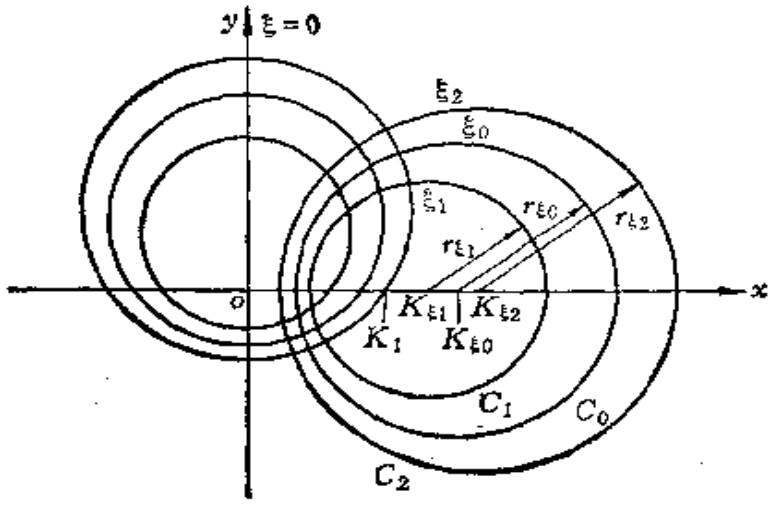


图 4-9

a) $0<\xi_0<\xi_1$ 时。物理面上区域是有偏心圆孔的圆板（图 4-10）。

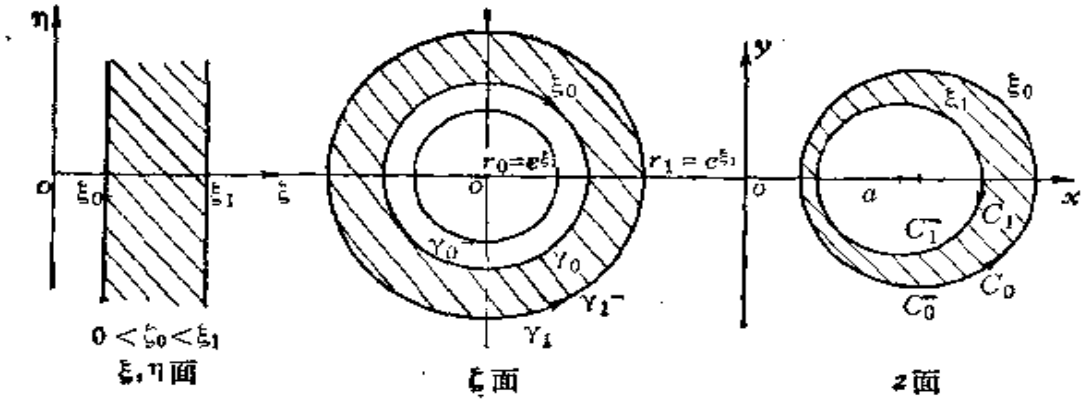


图 4-10

b) $0=\xi_0<\xi_1$ 时。物理面上区域是有圆孔的半无限板（图 4-11）。

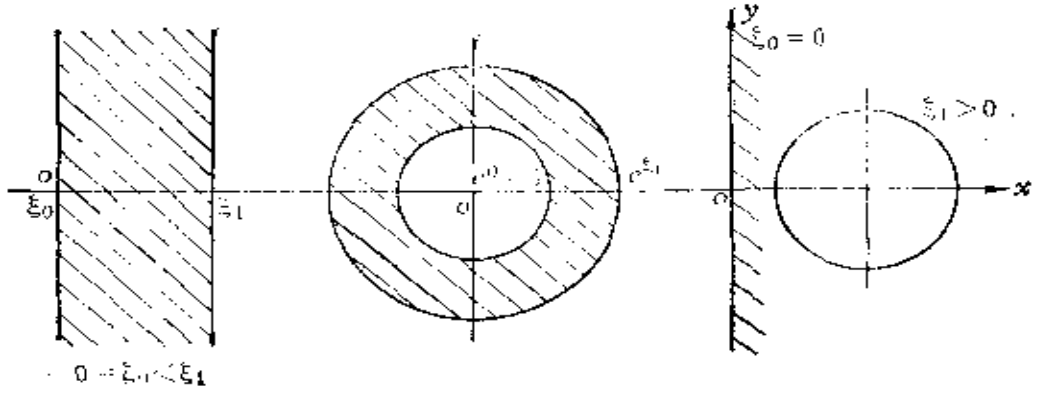


图 4-11

c）$\xi_0<0<\xi_1$ 时。物理面上区域是两圆孔的无限板（图4-12）。

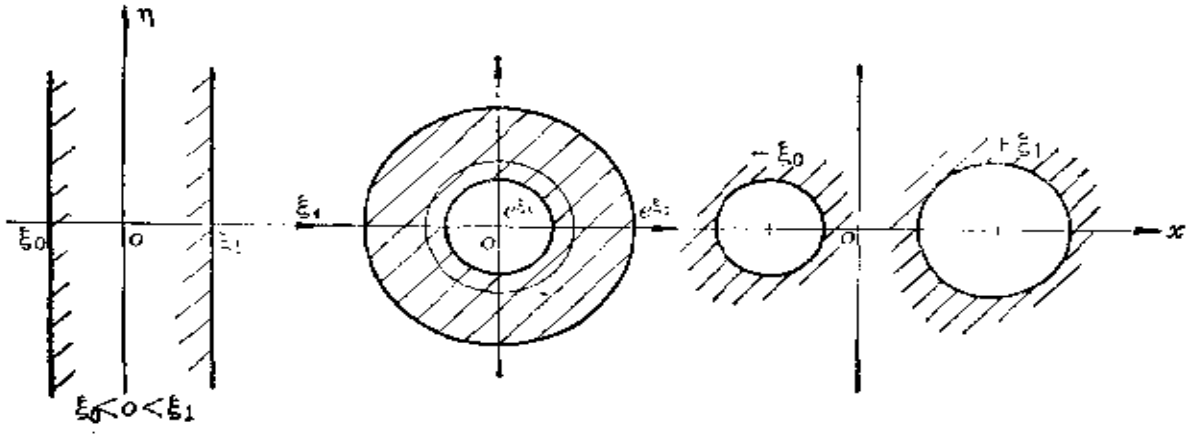


图 4-12

对于以上各种情况，在坐标面 ζ 上都是圆环：

$$e^{\xi_0}<|\zeta|<e^{\xi_1}$$

这时，与 $z=\infty$ 对应的点 $\zeta=1$ 只在 c）的情况下才包含在圆域中。

对于如图4-10所示偏心圆环

$$z=\omega(\zeta)=a+2a/(\zeta-1)$$

圆周 C_0 变到圆周 γ_0，C_0^- 区域变到 γ_0^- 区域。圆周 C_1 变到圆周 γ_1，

G_1 区域变到 γ_1 区域。偏心圆环区域变到同心圆环区域。

$$z' = \omega'(\zeta) = -2a/(\zeta - 1)^2$$

由前述结果，可知在第一个基本问题中的边界条件为：

在 γ_0 上已知：$X_{r0} + iX_{r\theta 0} = f_0(t)$

$$\varphi'^{+}(t) - \varphi'^{-}(t) = \omega'(t) f_0(t)$$

在 γ_1 上已知：$X_{r1} + iX_{r\theta 1} = f_1(t)$

$$\varphi'^{+}(t) - \varphi'^{-}(t) = \omega'(t) f_1(t)$$

这里 X_{r0} 和 $X_{r\theta 0}$ 表示在 γ_0 上的法向应力和切向应力。X_{r1} 和 $X_{r\theta 1}$ 表示在 γ_1 上的法向应力和切向应力。在 γ_0 和 γ_1 之间的区域中，$\varphi'(\zeta)$ 有如下的形式：

$$\varphi'(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0} \frac{\omega'(t) f_0(t)\,dt}{t-\zeta} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{\omega'(t) f_1(t)\,dt}{t-\zeta} + A + \frac{A_1}{\zeta} + \frac{A_2}{\zeta^2}$$

沿外负荷为零的边界解析开拓，则 $\varphi'(\zeta)$ 变为：

$$\varphi'(\zeta) = -\bar{\varphi}'\left(\frac{r^2}{\zeta}\right) + \frac{r^2}{\zeta}\bar{\varphi}''\left(\frac{r^2}{\zeta}\right) + \frac{r^2}{\zeta^2}\bar{\psi}'\left(\frac{r^2}{\zeta}\right)$$

ζ 在 $|\zeta| < r$ 内，r^2/ζ 在 r 外，$\bar{\varphi}'(r^2/\zeta)$、$\bar{\varphi}''(r^2/\zeta)$ 及 $\bar{\psi}'(r^2/\zeta)$ 是包含无穷远点在内解析的函数。故 $\varphi'(\zeta)$ 的主部为 $A + A_1/\zeta + A_2/\zeta^2$。

在 γ_0^+ 中

$$\psi'(\zeta) = \bar{\varphi}'\left(\frac{r_0^2}{\zeta}\right) \cdot \frac{r_0^2}{\zeta^2} - \frac{d}{d\zeta}\left\{\frac{\bar{\omega}(r_0^2/\zeta)}{\omega'(\zeta)}\varphi'(\zeta)\right\}$$

在 γ_1^+ 中

$$\psi'(\zeta) = \varphi'\left(\frac{r_1^2}{\zeta}\right) \cdot \frac{r_1^2}{\zeta^2} - \frac{d}{d\zeta}\left\{\frac{\omega(r_1^2/\zeta)}{\omega'(\zeta)}\varphi'(\zeta)\right\}$$

在 γ_0 与 γ_1 之间，$\psi'(\zeta) = \psi'(\zeta)$，故

$$\frac{r_0^2}{\zeta^2}\bar{\varphi}'\left(\frac{r_0^2}{\zeta}\right) - \frac{r_1^2}{\zeta^2}\bar{\varphi}'\left(\frac{r_1^2}{\zeta}\right) = -\frac{d}{d\zeta}\left\{\bar{\omega}\left(\frac{r_0^2}{\zeta}\right) - \bar{\omega}\left(\frac{r_1^2}{\zeta}\right)\right\}\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}$$

把 $\Phi'(\zeta)$ 代入上式，令 ζ 的同次幂项的系数相等，即可求到 A，A_1，A_2。这里作用于 γ_0 与 γ_1 边界上的合力及合力矩为零。若是如图4-11所示情况，在直线边或圆周边上的合力不一定为零。设在无穷远处的应力分量及转动为零。那末，当 $\xi_0=0$ 时，就成为这种情况：

在 γ_0 边界上

$$f_0(t)=X_{r0}+iX_{r\theta 0}+\frac{X_0+iY_0}{2\pi t}+\frac{(X_0-iY_0)\,t}{\pi(1+\nu^*)r_0^2}$$

在 γ_1 边界上

$$f_1(t)=X_{r1}+iX_{r\theta 1}+\frac{X_1+iY_1}{2\pi t}+\frac{(X_1-iY_1)\,t}{\pi(1+\nu^*)r_1^2}$$

式中 X_0，Y_0 和 X_1，Y_1 是作用于 γ_0 及 γ_1 边界上诸力之合力。这里 $\gamma_0=1$。

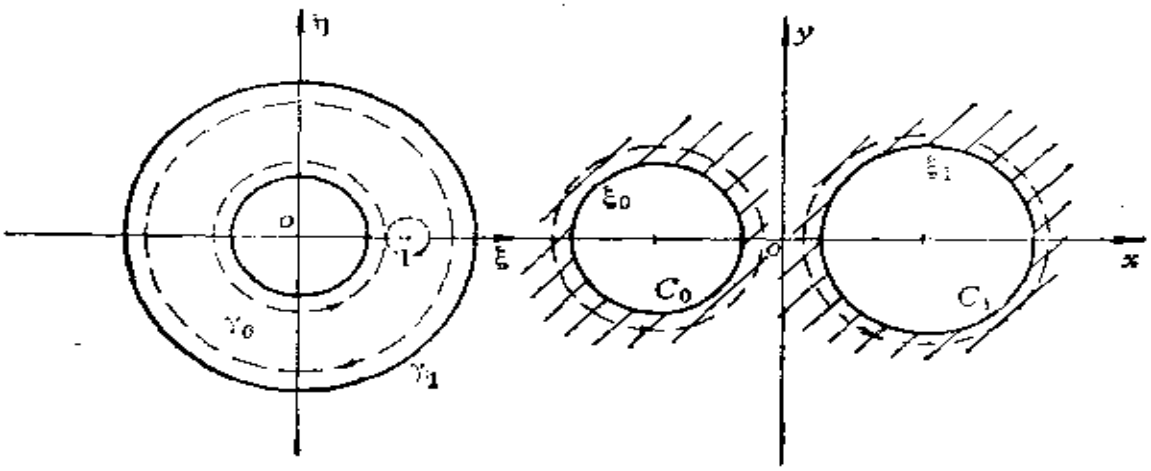


图 4-13

若是如图 4-13 所示情况，在物理面 z 中含有 $z=\infty$ 的点。在 ζ 面上有与之对应的 $\zeta=1$，所以要考虑其邻域的多值性。在 z 面上绕 $|z|=\infty$ 邻域反向一周，相当 ζ 面上绕 $|\zeta|=1$ 正向一周。设距负荷较远处的应力分量和转动为零。所以

在 γ_0 边界上

$$f_0(t_0)=X_{r0}+iX_{r00}+\frac{X_0+iY_0}{2\pi t_0}-\frac{X_0+iY_0}{2\pi(1+\nu^*)}\left\{\frac{1}{t_0-1}+\nu^*\left(-\frac{1}{t_0}+\frac{1}{r_0^2-t_0}\right)\right\}-\frac{X_1+iY_1}{2\pi(1+\nu^*)}\left\{\frac{1}{t_0-1}+\nu^*\left(\frac{1}{t_0}+\frac{1}{r_0^2-t_0}\right)\right\}$$

在 γ_1 边界上

$$f_1(t_1)=X_{r1}+iY_{r01}+\frac{X_1+iY_1}{2\pi t_1}-\left[\frac{X_1-iY_1}{2\pi(1+\nu^*)}+\frac{X_0+iY_0}{2\pi(1+\nu^*)}\right]\left[\frac{1}{t_1-1}+\nu^*\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{r_1^2-t_1}\right)\right]$$

若在边界上的外力合力为零，则

$$f_0(t)=X_{r0}+iY_{r00},\quad f_1(t)=X_{r1}+iX_{r01}$$

如果在区域内点 ζ_0 上有集中力 $X+iY$ 和力矩 M_0 作用时，则

$$\varphi'(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0}\frac{\omega'(t)f_0(t)dt}{t-\zeta}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{\omega'(t)f_1(t)dt}{t-\zeta}+A+\frac{A_1}{\zeta}+\frac{A^2}{\zeta^2}-\frac{X+iY}{2\pi(1+\nu^*)}\left(\frac{1}{\zeta-\zeta_0}\right)$$

在求到的 $\psi(\zeta)$ 上应附加下式

$$\frac{\nu^*(X-iY)}{2\pi(1+\nu^*)}\ln(\zeta-\zeta_0)+\frac{X+iY}{2\pi(1+\nu^*)}\left(\frac{\bar{\zeta}_0}{\zeta-\zeta_0}\right)+i\frac{M_0}{2\pi(\zeta-\zeta_0)}$$

若在不同的点，有不同的集中力和力矩作用，与上式相似，只多了几项。

〔例题22〕 在图4-14所示偏心圆环的圆孔内有均布压力 p 作用。求应力函数。

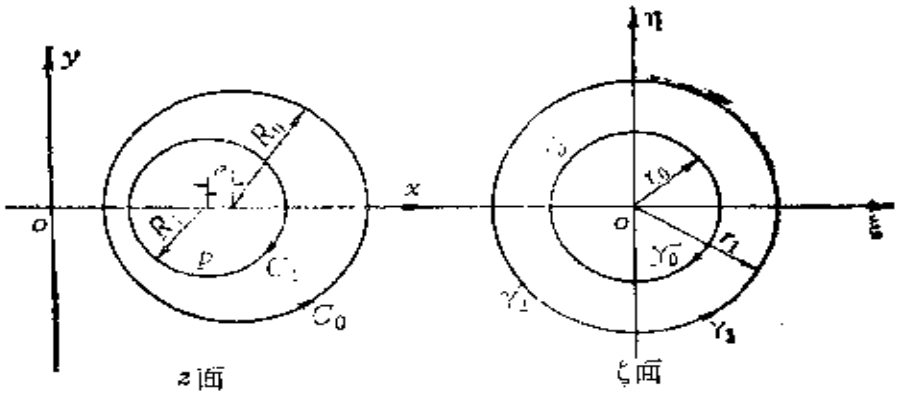


图 4-14

令 $z=\omega(\zeta)=a+2a/\zeta-1$

于是

$$C_0\to\gamma_0,\ |\zeta|=e^{\xi_0}=r_0,\ C_1\to\gamma_1,\ |\zeta|=e^{\xi_1}=r_1>r_0$$

$$\varphi'(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0}\frac{\omega'(t)f_0(t)dt}{t-\zeta}+A+\frac{A_1}{\zeta}+\frac{A_2}{\zeta^2}$$

$$\omega'(t)=-2a/(t-1)^2$$

若是 $f_1(t)=p$，则

$$\varphi'(\zeta)=\frac{-1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{2apdt}{(t-1)^2(t-\zeta)}+A+\frac{A_1}{\zeta}+\frac{A_2}{\zeta^2}$$

当 ζ 在 γ_1^- 中时，

$$\varphi'(\zeta)=2ap/(\zeta-1)^2+A+A_1\zeta^{-1}+A_2\zeta^{-2}$$

当 ζ 在圆环中时，

$$\varphi'(\zeta)=A+A_1/\zeta+A_2/\zeta^2$$

当 ζ 在 γ_0^- 中时，

$$\varphi'(\zeta)=A+A_1/\zeta+A_2/\zeta^2$$

由条件

$$\frac{r_0^2}{\zeta^2}\bar{\varphi}'\left(\frac{r_0^2}{\zeta}\right)-\frac{r_1^2}{\zeta^2}\bar{\varphi}'\left(\frac{r_1^2}{\zeta}\right)=\frac{d}{d\zeta}\left\{\bar{\omega}\left(\frac{r_0^2}{\zeta}\right)-\bar{\omega}\left(\frac{r_1^2}{\zeta}\right)\right\}\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}$$

可得

$$\zeta(r_0^2-r_1^2)z_0z_1(\zeta-1)^2\varphi''(\zeta)-[(r_0^2z_1^2-r_1^2z_0^2)(\zeta-1)^2+2\zeta(\zeta-1)(r_1^2-r_0^2)z_0z_1]\varphi'(\zeta)=(r_1^2-r_0^2)(\overline{A}_2/r_0^2r_1^2-\overline{A}/\zeta^2)z_0^2z_1^2-2r_1^3az_0^2z_1^2p/(r_1^2-\zeta)^2$$

把 $\varphi'(\zeta)=A+A_1\zeta^{-1}+A_2\zeta^{-2}$ 代入上式，得到

$$-\zeta(\lambda-\mu_0\zeta+\zeta^2)(\zeta-1)^2(A_1/\zeta^2+2A_2/\zeta^3)+(\zeta^3-(2\mu_0-1)\zeta^2+3\lambda\zeta-\lambda)(A+A_1/\zeta+A_2/\zeta^2)(\zeta-1)=(A/\zeta^2-A_2/\lambda_0)(r_0^2-\zeta)^2(r_1^2-\zeta)^2-2ar_1^2pz_0^2/r_0^2-r_1^2$$

于是比较上述方程两侧 ζ 同次幂项的系数，可得

$$A=-A_2/\lambda_0$$

$$A(2\lambda_0+2\mu_0\lambda_0-2\lambda_0^2-\mu_0^2)+A_1(\mu_0-2\lambda_0)=-2a\lambda_0r_0^2p/r_0^2-r_1^2$$

$$A(4\lambda_0-\mu_0-\lambda_0\mu_0)+A_1(1-\lambda_0)=2\lambda_0ap/r_1^2-r_0^2$$

$$A(2-2\lambda_0-2\mu_0+\mu_0^2)+A_1(\mu_0-2)=-2ar_1^2p/r_1^2-r_0^2$$

解以上方程组，得到

$$A=\frac{(1-\lambda_0)r_1^2ap/r_0^2-r_1^2+\lambda_0a(\mu_0-2)p/r_0^2-r_1^2}{(r_0^2-1)^2(r_1^2-1)^2}$$

$$A_1=\frac{(\lambda_0\mu_0+\mu_0-4\lambda_0)r_1^2a-2\lambda_0a(2-2\lambda_0-2\mu_0+\mu_0^2)}{(r_0^2-r_1^2)(r_0^2-1)^2(r_1^2-1)^2}p$$

$$A_2=-\lambda_0A$$

式中

$$\lambda_0=r_0^2r_1^2,\quad \mu_0=r_0^2+r_1^2$$

$$a=R_0\mathrm{sh}\xi_0=R_1\mathrm{sh}\xi_1$$

$$e=R_0\mathrm{ch}\xi_0-R_1\mathrm{ch}\xi_1$$

所以

$$\lambda_0=\left[\frac{(R_0^2-R_1^2+R^2)^2-e^4}{4R_0R_1e^2}\right]^2$$

$$\mu_0=\left[\frac{R_0^2-R_1^2+e^2+R^2}{2R_0e}\right]^2+\left[\frac{R_0^2-R_1^2-e^2+R^2}{2R_1e}\right]^2$$

$$R^4=(R_0+R_1+e)(R_0+R_1-e)(R_0-R_1+e)(R_0-R_1-e)$$

由此得到

$$\psi'(\zeta)=\varphi'\left(\frac{r_1^2}{\zeta}\right)\frac{r_1^2}{\zeta^2}-\frac{d}{d\zeta}\left\{\omega\left(\frac{r_1^2}{\zeta}\right)-\omega'(\zeta)\right\}-\varphi'(\zeta)\Big\}$$

〔例题23〕 如图4-15所示，在有偏心圆孔的圆盘有一对集中力P作用。求应力函数。

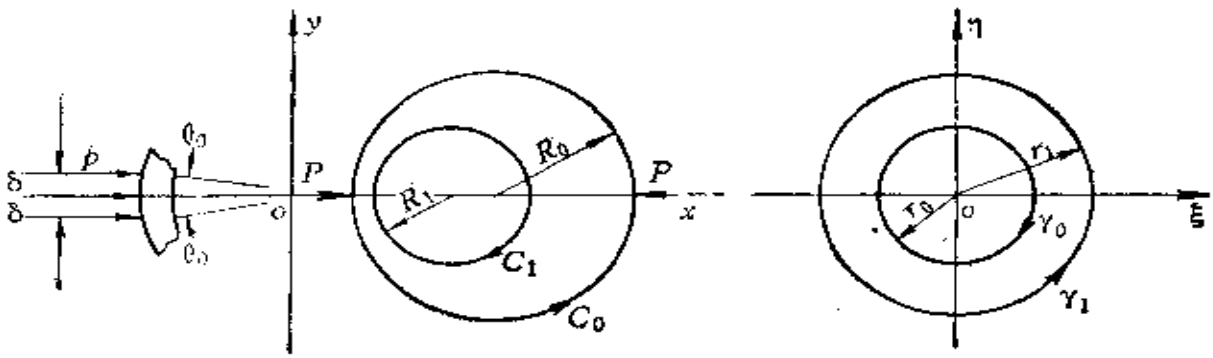


图 4-15

设在2δ区域内有均布负荷p作用。积分

$$f(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0}\frac{-2ap}{(t-1)^2(t-\zeta)}dt$$

$$=\frac{ap}{\pi i(1-\zeta)}\left\{-\frac{r_0(e^{-i\theta_0}-e^{i\theta_0})}{(r_0e^{i\theta_0}-1)(r_0e^{-i\theta_0}-1)}\right.$$

$$-\frac{r_0(e^{-i\theta_0}-e^{i\theta_0})}{(r_0e^{i\theta_0}+1)(r_0e^{-i\theta_0}+1)}+\frac{1}{\zeta-1}\left[\ln\frac{r_0e^{i\theta_0}-\zeta}{r_0e^{-i\theta_0}-\zeta}\right.$$

$$\left.\left.\cdot\frac{r_0e^{-i\theta_0}-1}{r_0e^{i\theta_0}-1}+\ln\frac{r_0e^{i\theta_0}+\zeta}{r_0e^{i\theta_0}+1}\cdot\frac{r_0e^{-i\theta_0}+1}{r_0e^{-i\theta_0}+\zeta}\right]\right\}$$

若ζ在γ_0^+中，$f(\zeta)$很小，当$\theta_0\to 0$，$f(\zeta)\to 0$，当$\theta_0=0$，$f(\zeta)=0$。若ζ在γ_0^-中，当$\theta_0\to 0$时，

$$\lim_{\theta_0 \to 0} f(\zeta) = \frac{2ar_0}{\pi(\zeta-1)}\left[\frac{2}{(r_0^2-1)^2} - \frac{\zeta+1}{(r_0^2-\zeta^2)(r_0^2-1)}\right]$$

于是当 $\zeta \in \gamma_1^-$ 时，

$$\varphi'(\zeta) = A + A_1/\zeta + A_2/\zeta^2$$

当 $\zeta \in \gamma_0^+$ 时，

$$\varphi'(\zeta) = A + A_1/\zeta + A_2/\zeta^2$$

当 $\zeta \in \gamma_0^-$ 时，

$$\varphi'(\zeta) = \frac{2Par_0}{\pi(\zeta-1)}\left[\frac{2}{(r_0^2-1)^2} - \frac{\zeta+1}{(r_0^2-\zeta^2)(r_0^2-1)}\right] + A + \frac{A_1}{\zeta} + \frac{A_2}{\zeta^2}$$

我们把 $\varphi'(\zeta)$，$\varphi''(\zeta)$ 等代入下式

$$\frac{r_0^2}{\zeta^2}\bar{\varphi}'\left(\frac{r_0^2}{\zeta}\right) - \frac{r_1^2}{\zeta^2}\bar{\varphi}'\left(\frac{r_1^2}{\zeta}\right) = \frac{d}{d\zeta}\left[\bar{\omega}\left(\frac{r_0^2}{\zeta}\right) - \bar{\omega}\left(\frac{r_1^2}{\zeta}\right)\right]\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}$$

解出如下结果：

$$A = -A_2/\lambda_0$$

$$A_1 = -\left[2/r_1^2 + 1/r_0^2\right]A_2/2\mu_0$$

$$A_2 = \frac{2ar_0^3(r_0^4-1)P}{\left[6\left(1+\frac{1}{r_1^2}\right) - 2(2+\mu_0^2)\frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{r_0^2} + 4\frac{r_0^2}{r_1^2}\right]} \times \frac{1}{\pi(r_0^2-r_1^2)r_0^2(r_0^2-1)^3}$$

式中 $r_0 = e^{\xi_1}$，$r_1 = e^{\xi_2}$，$\lambda_0 = r_0^2 r_1^2$，$\mu_0 = r_0^2 + r_1^2$

$$\mathrm{ch}\xi_1 = \left[e + R_1\mathrm{ch}\xi_2\right]/R_0$$

$$\mathrm{ch}\xi_2 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{R_0^2}{R_1^2}\right) - \frac{e^2}{4R_1^2}} - \frac{e}{2R_1}$$

〔例题24〕 有偏心圆孔的圆盘的受力情况如图4-16所示。求应力函数。

设在圆盘左侧2δ区域内（如图4-15），有均布负荷 P 的作用。

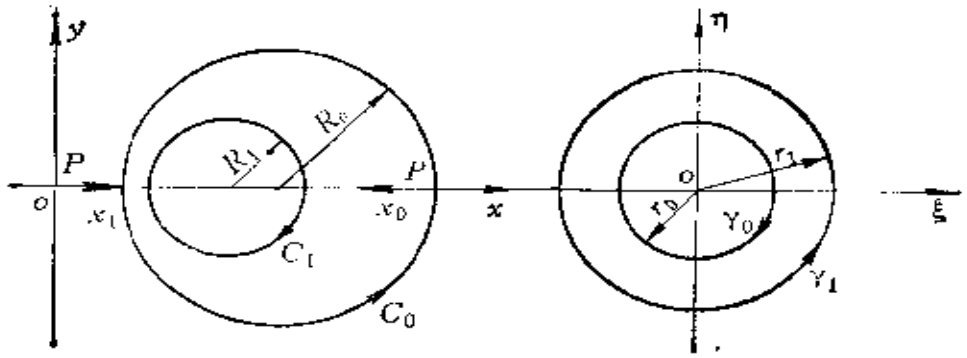


图 4-16

$$f_0(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0}\frac{-2ap}{(t-1)^2(t-\zeta)}dt$$

$$=-\frac{ar_0p}{\pi i(\zeta-1)}\left\{\frac{e^{-i\theta_0}-e^{i\theta_0}}{(r_0e^{i\theta_0}-1)(r_0e^{-i\theta_0}-1)}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\zeta-1}\ln\frac{r_0e^{i\theta_0}-\zeta}{r_0e^{-i\theta_0}-\zeta}\cdot\frac{r_0e^{-i\theta_0}-1}{r_0e^{i\theta_0}-1}\right\}$$

当$2\delta\to 0$，$2\delta p\to P$，则

$$f_0(\zeta)=-\frac{aP}{\pi(\zeta-1)}\left\{\frac{1}{(r_0-1)^2}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\zeta-1}\left(\frac{1}{r_0-\zeta}-\frac{1}{r_0-1}\right)\right\}$$

在边界上只有P的作用，与之平衡的力在γ_0^+中，故

$$f(\zeta)=f_0(\zeta)-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0}\left[\frac{2t}{r_0^2}+\frac{1}{t}\right.$$

$$\left.+\nu^*\frac{r_0^2}{t^2}\right]\frac{2adt}{(t-1)^2(t-\zeta)}$$

于是当$\zeta\in\gamma_1$时，

$$\varphi'(\zeta)=f_0(\zeta)-\frac{aP}{\pi(1+\nu^*)(\zeta-1)^2}\left[\frac{2\zeta}{r_0^2}+\frac{1}{\zeta}\right.$$

$$\left.+\nu^*\frac{r_0^2}{\zeta^2}\right]+A+\frac{A_1}{\zeta}+\frac{A_2}{\zeta^2}$$

当 $\zeta\in\gamma_0^+$ 时，

$$\varphi'(\zeta)=f_0(\zeta)-\frac{aP}{\pi(1+\nu^*)(\zeta-1)}\left[\frac{2\zeta}{r_0^2}+\frac{1}{\zeta}+\nu^*\frac{r_0^2}{\zeta^2}\right]+A+\frac{A_1}{\zeta}+\frac{A_2}{\zeta^2}$$

当 $\zeta\in\gamma_0^-$ 时，

$$\varphi'(\zeta)=f_2(\zeta)-\frac{2a\zeta P}{\pi(1+\nu^*)(\zeta-1)r_0^2}+A+\frac{A_1}{\zeta}+\frac{A_2}{\zeta^2}$$

仿照与上面所述相同方法，得到

$$\mu_1A+\lambda_1A_2=aP\nu^*/\pi(1+\nu^*)$$
$$\lambda_2A+\mu_1r_0A_1=aPs_1/\pi(1+\nu^*)$$
$$\lambda_3A-\lambda_4A_1=aPs_2/\pi(1+\nu^*)$$

式中

$$\lambda_1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ r_0^2 & r_1^2\end{pmatrix},\quad \mu_1=r_0^2-r_1^2,\quad r_0^2+r_1^2=k_0,\quad r_0^2r_1^2=-\frac{\mu_1}{\lambda_1}$$

$$\lambda_2=\mu_1[2r_0^3+3r_0^2+2r_0\mu_0(r_0-1)-2]$$
$$\lambda_3=\mu_1r_0^3[1-4\mu_1/\lambda_1-2\mu_0-\mu_0^2-4r_0\mu_0]$$
$$\lambda_4=\mu_1r_0[\mu_0(1+r_0)^2+r_0(1r_0+5)]$$
$$s_1=2\mu_1(1+r_0^{-1})-r_0^2(2r_1^{-2}-2\nu^*\mu_1-1)$$
$$s_2=-2\mu_1\mu_0/r_0-8\mu_1(\mu_0+r_0)+4\mu_0-2\mu_0r_0\mu_1-r_0\mu_0-3\nu^*\mu_1r_0^2/\lambda_1-2r_0\nu^*\mu_0^2+2r_0r_1^2\nu^*\mu_0-2r_1^4+\nu^*r_1^4-2r_0^2(1+r_0)(2\mu_0\nu^*+1-2\nu^*r_1^2)-\nu^*(\mu_0^2-2\lambda_1/\lambda_1)r_0^2-\pi(1+\nu^*)\mu_1(2-r_0)/(r_0-1)^2$$

由以上诸式可以求到 A，A_1 及 A_2，把它们代入下式，便得应力函数。

$$\varphi'(\zeta)=f_0(\zeta)-\frac{aP}{\pi(1+\nu^*)(\zeta-1)^2}\left[\frac{2\zeta}{r_0^2}+\frac{1}{\zeta}+\nu^*\frac{r_0^2}{\zeta^2}\right]+A+\frac{A_1}{\zeta}+\frac{A_2}{\zeta^2}$$

$$\psi'(\zeta)=\bar{\varphi}'\left(\frac{r_1^2}{\zeta}\right)\cdot\frac{r_1^2}{\zeta^2}-\frac{d}{d\zeta}\left\{\frac{\bar{\omega}(r_1^2/\zeta)}{\omega'(\zeta)}\varphi'(\zeta)\right\}$$

把 $\varphi'(\zeta)$ 和 $\psi'(\zeta)$ 变回到原物理面 z 上，把如下的函数 φ_1' 和 ψ_1' 再加到变回去的 $\varphi'(z)$ 和 $\psi'(z)$ 上，即得所求之应力函数

$$\varphi_1'(z)=-\frac{P}{2\pi(1+\nu^*)(z-z_0)}$$

$$\psi_1'(z)=-\frac{\nu^*P}{2\pi(1+\nu^*)(z-z_0)}-\frac{2P\bar{z}_0}{2\pi(1+\nu^*)(z-z_0)}$$

这里 z_0 是集中力 P 的作用点。

〔例题25〕 半平面中有圆孔的问题，如图4-17所示。在半径为 R_0 的圆孔内有均布压力 p 作用，求应力函数。

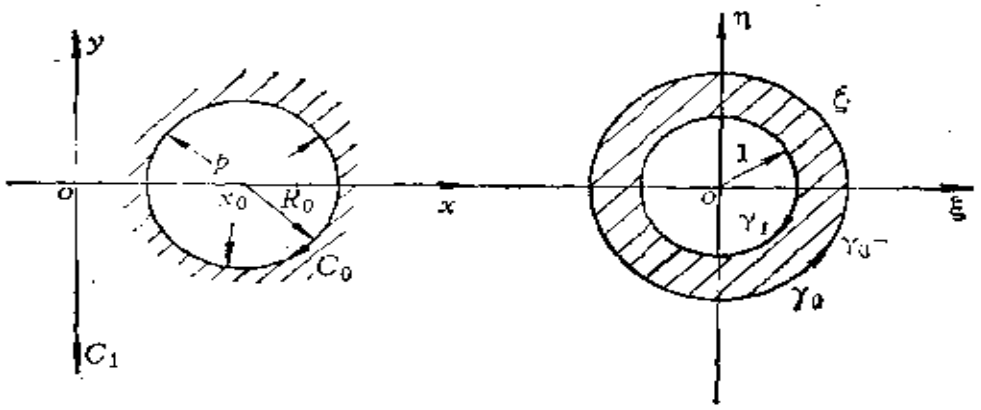


图 4-17

因为 $$z=\omega(\zeta)=a+2a/\zeta-1$$

$$z'=\omega'(\zeta)=-2a/(\zeta-1)^2$$

在 γ_0 上已知 $f_0(t)=-p$，在 γ_1 上 $f_1(t)=0$。t 表示边界上的点。于是可得

$$\varphi'(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0}\frac{2adt}{(t-1)^2(t-\zeta)}+A+\frac{A_1}{\zeta}+\frac{A_2}{\zeta^2}$$

当 $\zeta\in\gamma_0$ 时，

$$\varphi'(\zeta)=-\frac{2ap}{(\zeta-1)^2}+A+\frac{A_1}{\zeta}+\frac{A_2}{\zeta^2}$$

当 $\zeta\in\gamma_0^+$ 时，

$$\varphi'(\zeta)=-\frac{2ap}{(\zeta-1)^2}+A+\frac{A_1}{\zeta}+\frac{A_2}{\zeta^2}$$

当 $\zeta\in\gamma_1^-$ 时，

$$\varphi'(\zeta)=\frac{2ap}{(\zeta-1)^2}+A+\frac{A_1}{\zeta}+\frac{A_2}{\zeta^2}$$

与前面的作法相同，把 $\varphi'(\zeta)$，$\varphi''(\zeta)$ 等代入

$$r_0^2\varphi'\left(\frac{r_0^2}{\zeta}\right)-r_1^2\bar{\varphi}'\left(\frac{r_1^2}{\zeta}\right)=\zeta^2\frac{d}{d\zeta}\left[\omega\left(\frac{r_0^2}{\zeta}\right)-\bar{\omega}\left(\frac{r_1^2}{\zeta}\right)\right]\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}$$

令 ζ 同次幂项的系数相等，得到联立方程组，解此方程组，得到

$$\begin{aligned}A&=2a\mu_1^2P(-7+2\mu_0-2\mu_1/\lambda_1-4\mu_0^2)/\Delta^*\\A_1&=2a\mu_1P(5+9\mu_0+\mu_1\mu_0-6\mu_1/\lambda_1-15\mu_1\\&\quad-\mu_1\mu_0^2-26\mu_1^2/\lambda_1-16\mu_0^2-6\mu_0\mu_1/\lambda_1\\&\quad+\mu_1\mu_0^2+2\mu_1^2\mu_0/\lambda_1)/\Delta^*\\A_2&=\mu_1A/\lambda_1\end{aligned}$$

这里要注意 $r_1=1$。

$$\begin{aligned}-\Delta^*&=\mu_1(8+\mu_0+2\mu_1/\lambda_1)(5+16\mu_0\\&\quad+2\mu_1^2/\lambda_1-6\mu_1\mu_0-6\mu_1^2/\lambda_1-3\mu_1-\mu_1\mu_0^2)\\&\quad-(1+4\mu_0)\mu_1(6\mu_1-2\mu_1\mu_0+2\mu_0+14\mu_1^2/\lambda_1\\&\quad+3\mu_1\mu_0^2-2\mu_1^2\mu_0/\lambda_1)\end{aligned}$$

4-7 多连通区的近似解(非圆形)

我们已经讨论过多连通区第一和第二个基本问题的解，那是针对圆域的情况，没有讨论一般的情况。现在利用第三章的一些结果和保角变换的理论来讨论本节的内容。由式(4-3-1)知

$$\left.\begin{aligned}&\varphi'^*(\sigma_0)\pm\frac{1}{2\pi i\varkappa_0}\int_C K(\sigma_0,\sigma)\overline{\varphi'^*(\sigma)}\,d\sigma=C^{**}(\sigma_0)\\&K(\sigma_0,\ \sigma)=\frac{1}{\omega'(\sigma)}\frac{\partial}{\partial\sigma_0}\left[\frac{\omega(\sigma)-\omega(\sigma_0)}{\sigma-\sigma_0}\right]\end{aligned}\right\}\qquad(4\text{-}7\text{-}1)$$

对于 $z=\omega(\zeta)$，$\omega(\zeta)$在单位圆内解析。令

$$z=\omega(\zeta)=C_1\zeta+C_2\zeta^2+\cdots+C_n\zeta^n$$
$$(C_1\neq 0,\ C_n\neq 0)$$

可得到

$$K(\sigma_0,\ \sigma)=\sum_{j=1}^{n-1} ja_j\sigma_0^{j-1}$$

$$a_j=\frac{C_{j+1}+C_{j+2}\sigma+\cdots+C_n\sigma^{n-j+1}}{\overline{C}_1+2\overline{C}_2\bar{\sigma}+\cdots+n\overline{C}_n\bar{\sigma}^{n-1}}$$

这里σ是边界上的点。

对于 $z=\omega(\zeta)=h\zeta+\omega^*(\zeta)$，$\omega^*(\zeta)$ 是在半标面边界C^*外并在无穷远处解析的函数。令

$$\omega^*(\zeta)=\frac{C_1}{\zeta}+\frac{C_2}{\zeta^2}+\cdots+\frac{C_n}{\zeta^n}$$

则

$$K(\sigma_0,\ \sigma)=\sum_{j=1}^{n} ja_j\cdot\sigma_0^{-j-1}$$

$$a_j=\frac{C_1\sigma^{n-j}+C_{j+1}\sigma^{n-j-1}+\cdots+C_n}{\sigma^{n-j+1}(h-\overline{C}_1\sigma^2-2\overline{C}_2\sigma^3-\cdots-n\overline{C}_n\sigma^{n-1})}$$

对于 $z=\omega(\zeta)=h/\zeta+\omega^{**}(\zeta)$，$\omega^{**}(\zeta)$是在圆内解析函数，当选择 $\omega^{**}(\zeta)$ 与$\omega(\zeta)$相同时

$$K(\sigma_0,\ \sigma)=\sum_{j=1}^{n-1} ja_j\cdot\sigma_0^{j-1}$$

$$a_j=\frac{C_{j+1}\sigma^{n-1}+C_{j+2}\sigma^n+\cdots+C_n\sigma^{2n-j-2}}{-\bar{h}\sigma^{n+1}+\overline{C}_1\sigma^{n-1}+2\overline{C}_2\sigma^{n-2}+\cdots+n\overline{C}_n}$$

把$K(\sigma_0,\ \sigma)$代入式（4-7-1）变为有退化核的积分方程。此退化核的积分方程的解为：

$$\varkappa_0^2\Psi'^*(\sigma)=+\varkappa_0 C^{**}(\sigma)+\frac{1}{2\pi i}$$

$$\cdot\sum_{j=1}^{n} j\sigma_0^{-j-1}\int_{C^{(1)}} a_j(\sigma)\overline{C^{**}(\sigma)}\,d\sigma$$

$$\varkappa_0^2\varphi'^*(\sigma)=-\varkappa_0 C^{**}(\sigma)-\frac{1}{2\pi i}\cdot\sum_{j=1}^{n-1}j\sigma_0^{j-1}\int_{C^{(1)}}a_j(\sigma)\,\overline{C^{**}(\sigma)}\,d\sigma$$

这里 $\varkappa_0=-1$ 表示弹性力学第一个基本问题。

$\varkappa_0=+\nu^*$表示弹性力学第二个基本问题。

式中 $C^{**}(\sigma)$ 是与边界条件有关是已知的函数。作积分 $\int_{C^{(1)}}a_j(\sigma)\overline{C^{**}(\sigma)}d\sigma$是没有什么困难的。所以得到$\varphi^{1*}(\sigma)$是不很困难的。

在解决实际问题时，一般讨论以下两种情况就可以。

第一种情况 $z=\omega(\zeta)$

令

$$\varkappa_0\alpha_j=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}a_j(\sigma)\,\overline{C^{**}(\sigma)}\,d\sigma$$

则

$$\varkappa_0\varphi'^*(\sigma)=C^{**}(\sigma)+\sum_{j=1}^{n-1}j\alpha_j\sigma_0^{j-1}$$

把上式代入下式

$$-\varkappa_0\varphi^*(\zeta)+\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{\omega(\sigma)-\omega(\zeta)}{\sigma-\zeta}\,\overline{\frac{\varphi'^*(\sigma)}{\omega'(\sigma)}}d\sigma+\bar{a}=D_*(\zeta)$$

当 $\varkappa_0=-1$ 时，$D_*(\zeta)=A_*(\zeta)$，$\varkappa_0=\nu^*$时，$-D_*(\zeta)=A_{**}(\zeta)$

因为

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{\omega(\sigma)-\omega(\zeta)}{(\sigma-\zeta)\omega'(\sigma)}\,\overline{C^{**}(\sigma)}\,d\sigma=0$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{\omega(\sigma)-\omega(\zeta)}{(\sigma-\zeta)\overline{\omega'(\sigma)}}\sum_{j=1}^{n-1}j\bar{\alpha}_j\bar{\sigma}_0^{j-1}d\sigma=0$$

则得到

$$-\varkappa_0\varphi^*(\zeta)+\bar{a}=D_*(\zeta)$$

令 $\bar{a}=D_*(0)$，则得到

$$\varkappa_0\varphi(\zeta)=M\omega(\zeta)+\varkappa_0\varphi^*(\zeta)$$

$$\varkappa_0\varphi(\zeta)=M\omega(\zeta)+D_*(0)-D_*(\zeta)$$

当 $\varkappa_0=-1$ 时，

$$D_*(\zeta)-D_*(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\left[\frac{1}{\sigma-\zeta}-\frac{1}{\sigma}\right]f(\sigma)d\sigma$$

当 $\varkappa_0=\nu^*$ 时，

$$D_*(\zeta)-D_*(0)=\frac{\mu}{\pi i}\int_{C^{(1)}}\left[\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{\sigma-\zeta}\right]g(\sigma)d\sigma$$

$$\psi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{\overline{H(\sigma)}}{\sigma-\zeta}d\sigma$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\frac{\varphi'(\sigma)}{\sigma-\zeta}d\sigma$$

这里引用 $H(\sigma)$ 是为了以后的统一。当 $\varkappa_0=-1$ 时，$H(\sigma)=f(\sigma)$，当 $\varkappa_0=\nu^*$ 时，$H(\sigma)=2\mu g(\sigma)$。

若当 $z=\omega(\zeta)=\zeta$，也就是物理面上的区域是圆域，把 $\omega(\zeta)$ 及 $\omega'(\zeta)=1$ 等代入上式，得到的解如下

$$\varkappa_0\varphi(\zeta)=M\zeta+D_*(0)-D_*(\zeta)$$

$$\psi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{\overline{H(\sigma)}}{\sigma-\zeta}d\sigma-\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\bar{\sigma}\frac{\varphi'(\sigma)}{\sigma-\zeta}d\sigma$$

这正是圆域内的解。

第二种情况　$z=h\zeta+\omega^*(\zeta)=\omega(\zeta)$

与第一种情况相似，得到

$$-\varkappa_0\varphi(\zeta)+D_*(\zeta)=0$$

$$\psi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\frac{\varphi'(\sigma)}{\sigma-\zeta}d\sigma+\psi(\infty)$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{\overline{H(\sigma)}}{\sigma-\zeta}d\sigma$$

若作用于边界上之诸外力不平衡，则把 $f(\sigma)$ 代以 $f_0(\sigma)$ 或把 $g(\sigma)$代以 $g_0(\sigma)$。

$$f_0(\sigma)=f(\sigma)+\frac{X+iY}{2\pi(1+\nu^*)}(\ln\sigma-\nu^*\ln\bar{\sigma})$$

$$+\frac{X-iY}{2\pi(1+\nu^*)}\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}\sigma}$$

$$g_0(\sigma)=g(\sigma)+\frac{\nu^*(X+iY)}{2\pi(1+\nu^*)}\ln(\sigma\cdot\bar{\sigma})$$

$$-\frac{X-iY}{2\pi(1+\nu^*)}\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}\sigma}$$

利用以上求到的结果研究多连通区的问题。图4-18所示的左侧是物理平面，右侧是坐标面。在坐标面上的诸圆周以Γ表示。Γ_1，…，Γ_n是互不相包的圆周，它们的中心分别为e_1，e_2，…，e_n，并且它们都在Γ_0之内。在物理面上与它们一一对应的是互不相包的简单闭曲线O_1，…，O_n，后者都在O_0内。设在边界上的实际应力函数或位移函数以F_0，F_1，…，F_n表示。以G_0，G_1，…，G_n表示虚构应力函数或位移函数。令F_{jk}表示边界Γ_j上的虚构负荷或虚构位移所产生的、在Γ_k边界上的负荷或位移函

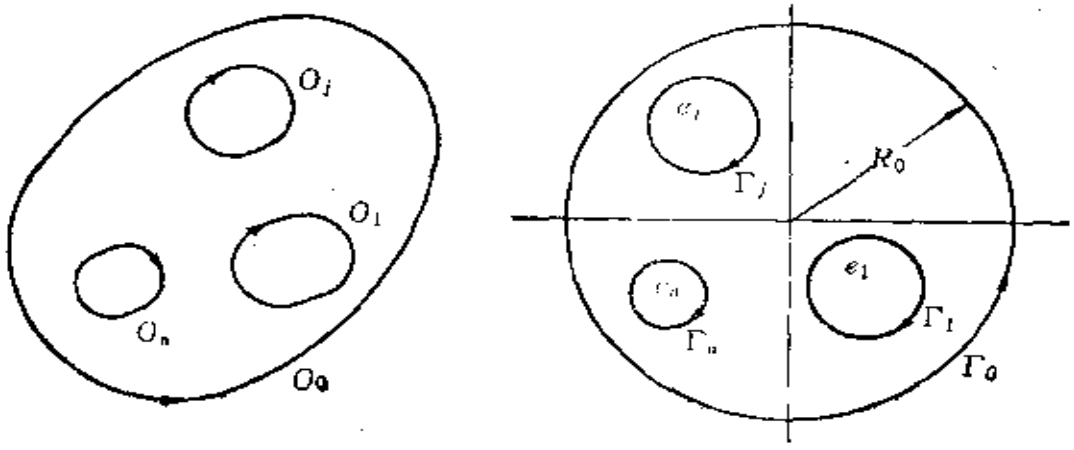


图 4-18

数。于是，$\sum_{j=0,j\neq k}^{n} F_{jk}$ 表示除 Γ_k 外所有其它边界上诸虚构负荷或位移函数 G_j 产生的、在 Γ_k 边界上的负荷或位移函数。自然，在 Γ_k 边界上的实际负荷或位移函数 F_k 为在 Γ_k 上的虚构负荷或位移函数 G_k 与 $\sum_{j=0,j\neq k}^{n} F_{jk}$ 之和。以方程表示如下：

$$G_k+\sum_{j=0,j\neq k}^{n} F_{jk}=F_k+\beta_k \qquad (4\text{-}7\text{-}2)$$

这里 β_k 是常数。β_k 不能任意选定，在单连通区内，可令 $\beta_0=0$。

首先用 $z=\omega(\zeta)$ 把简单闭曲线 O_0 内区域变为半径等于 R_0 的圆域 Γ_0 内的区域。

由第一个基本问题的 $\varphi(\zeta)$

$$\varphi(\zeta)+\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{\omega(\sigma)-\omega(\zeta)}{\overline{\omega'(\sigma)}(\sigma-\zeta)}\overline{\varphi'(\sigma)}d\sigma$$

$$+M\omega(\zeta)+\bar{a}=A_*(\zeta)$$

和第二个基本问题的 $\varphi(\zeta)$

$$\nu^*\varphi(\zeta)-\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(1)}}\frac{\omega^{**}(\sigma)-\omega^{**}(\zeta)}{\overline{\omega'(\sigma)}(\sigma-\zeta)}\overline{\varphi'(\sigma)}$$

$$-M\omega(\zeta)-\bar{a}=A_{**}(\zeta)$$

得出

$$-\left(M-\frac{\overline{M}}{\varkappa_0}\right)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0}N_0(\sigma_k,\ \sigma_0)G_0(\sigma_0)d\sigma_0$$

$$-\frac{\omega(\sigma_k)}{2\pi i\varkappa_0\overline{\omega'(\sigma_k)}}\int_{\Gamma_0}M_0(\sigma_k,\ \sigma_0)\overline{G_0(\sigma_0)}d\sigma_0=F_0(\sigma_k)+\beta_0$$

式中

$$N_0(\sigma_k,\ \sigma_0)=\frac{1}{\sigma_0-\sigma_k}-\frac{1}{\sigma_0-\dfrac{R_0^2}{\bar{\sigma}_k}}$$

$$M_0(\sigma_k,\ \sigma_0)=-\frac{R_0^2}{\bar{\sigma}_k^2\left(\sigma_0-\frac{R_0^2}{\bar{\sigma}_k}\right)^2}$$

$$M=\overline{\varphi'(0)}/\overline{\omega'(0)}$$

若是满足

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0}N_0(\sigma_k,\ \sigma_0)d\sigma_0=0,\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0}M_0(\sigma_k,\ \sigma_0)d\sigma_0=0$$

就可以略去 β_k。实际上一般是满足上两式。故以下计算，略去 β_k。σ_k 是 Γ_k 上的点。

其次用 $z=\omega(\zeta)=h_j\zeta+\omega_j^*(\zeta)$ 把简单闭曲线 Γ_j 外的区域变到半径为 R_j 的圆域 Γ_j 外区域。设 $\varphi_{0j}(\zeta)$，ψ_{0j} 是 Γ_j 外包括无穷远点的解析函数。则

$$\varphi_j(\zeta)=-\frac{(X+iY)_j}{2\pi(1+\nu^*)}\ln\zeta+\varphi_{0j}(\zeta)$$

$$\psi_j(\zeta)=\frac{\nu^*(X-iY)_j}{2\pi(1+\nu^*)}\ln\zeta+\psi_{0j}(\zeta)$$

这里 $(X+iY)_j$ 是作用于边界 Γ_j 上诸力之合力。又知道

$$-\varkappa_0\varphi_{0j}(\sigma_j)+\frac{\omega_j(\sigma_j)}{\overline{\omega_j'(\sigma_j)}}\overline{\varphi_j'(\sigma_j)}+\overline{\psi_j(\sigma_j)}=F_{0j}(\sigma_j)$$

当 $\varkappa_0=-1$ 时

$$F_{0j}(\sigma_j)=F_j(\sigma_j)+\frac{(X+iY)_j}{2\pi(1+\nu^*)}(\ln\sigma_j-\nu^*\ln\bar{\sigma}_j)+\frac{(X-iY)_j\omega_j(\sigma_j)}{2\pi(1+\nu^*)\overline{\omega_j'(\sigma_j)}\sigma_j}$$

$$F_j(\sigma_j)=i\int_{\Gamma_j}(X_n+iY_n)_j ds$$

当 $\varkappa_0=\nu^*$ 时

$$F_{0j}(\sigma_j)=F_j(\sigma_j)-\frac{\nu^*(X+iY)_j}{2\pi(1+\nu^*)}\ln(\sigma_j\bar{\sigma}_j)+\frac{(X-iY)_j\omega_j(\sigma_j)}{2\pi(1+\nu^*)\overline{\omega_j'(\sigma_j)}\sigma_j}$$

$$F_j(\sigma_j)=-2\mu(u+iv)_j$$

我们可以得到

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j}N_j(\sigma_j,\ \sigma_k)G_j(\sigma_j)d\sigma_j-\frac{\omega_j(\sigma_k)}{2\pi i\varkappa_0\overline{\omega_j'(\sigma_k)}}$$

$$\times\int_{\Gamma_j}M_j(\sigma_j,\ \sigma_k)\overline{G_j(\sigma_j)}d\sigma_j=F_{jk}(\sigma_k)$$

式中

$$N_j(\sigma_j,\ \sigma_k)=\frac{1}{\sigma_j-\zeta_j}-\frac{1}{\sigma_j-e_j}-\frac{1}{\sigma_j-\sigma_k}$$

$$M_j(\sigma_j,\ \sigma_k)=-\frac{R_j^2}{(\sigma_j-\zeta_j)^2(\bar{\sigma}_k-\bar{e}_j)^2}$$

$$\zeta_j=e_j+\frac{R_j^2}{\bar{\sigma}_k-\bar{e}_j}$$

ζ_j 是在 Γ_j 内的点。把 F_{jk} 代入式(4-7-2)，得到

$$G_k(\sigma_k)+\sum_{j=0}^{n}{}_{j\neq k}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j}(u_jG_j+v_j\overline{G}_j)d\sigma_j=F_k^{(0)}(\sigma_k)\qquad(4\text{-}7\text{-}3)$$

式中

$$u_j(\sigma_k,\ \sigma_j)=N_j(\sigma_k,\ \sigma_j)-N_j(\xi_0,\ \sigma_j)$$

$$v_j(\sigma_k,\ \sigma_j)=-\frac{\omega_j(\sigma_k)}{\varkappa_0\overline{\omega_j'(\sigma_k)}}[M_j(\sigma_k,\ \sigma_j)-M_j(\xi_0,\ \sigma_j)]$$

当 $j\neq 0$ 时，

$$N_j(\xi_0,\ \sigma_j)=0,\quad M_j(\xi_0,\ \sigma_j)=0$$

当 $k\neq 0$ 时，

$$F_k^{(0)}(\sigma_k)=F_k(\sigma_k)$$

当 $k=0$ 时，

$$F_k^{(0)}(\sigma_k)=F_0(\sigma_0)+(M-\overline{M}/\varkappa_0)\omega(\sigma_0)$$

方程（4-7-3）对任意 $F_k^0(\sigma_k)$ 有唯一解（见第三章中 3-13）。

当 $j=0$ 时

$$u_0(\sigma_k,\ \sigma_0)=\frac{1}{\sigma_0-\sigma_k}-\frac{1}{\sigma_0-\zeta_0}-\frac{1}{\sigma_0-\frac{R_0^2}{\bar{\sigma}_k}}+\frac{1}{\zeta_0-\frac{R_0^2}{\zeta_0}}$$

$$v_0(\sigma_k,\ \sigma_0)=\frac{-\omega(\sigma_k)}{\kappa_0\omega'(\sigma_k)}R_0^2\left\{\frac{1}{\sigma_k^2(\sigma_0-R_0^2/\sigma_k)^2}-\frac{1}{\zeta_0^2(\sigma_0-R_0^2/\zeta_0)^2}\right\}$$

为工程计算简便，可取

$$G_0(\sigma_0)=A_0\sigma_0$$

$$G_j(\sigma_j)=A_j(\sigma_j-e_j-R_j^2/\sigma_j-e_j)$$

把上式代入式（4-7-3）中，得到

$$\left.\begin{aligned}&A_0\sigma_0+\sum_{j=1}^{n}A_j\left[\frac{R_j^2}{\sigma_0-e_j}+\bar{e}_j-\bar{\sigma}_0-\frac{\omega_j(\sigma_0)R_j^2}{\kappa_0\omega_j'(\sigma_0)(\bar{e}_j-\bar{\sigma}_0)^2}\right]\\&=F_0^{(\omega)}(\sigma_0)\\&A_k\left(\sigma_k-e_k-\frac{R_k^2}{\sigma_k-e_k}\right)+A_0(\sigma_k-\zeta_0)+\sum_{j=1,\,j\neq 0,\,k}^{n}A_j\left[\frac{R_j^2}{\sigma_k-e_j}\right.\\&\left.+\bar{e}_j-\bar{\sigma}_k-\frac{\omega_j(\sigma_k)R_j^2}{\kappa_0\omega_j'(\sigma_k)(\sigma_k-e_j)^2}\right]=F_k(\sigma_k)\end{aligned}\right\}\tag{4-7-4}$$

ζ_0 为区域中任一点。解上两式可得 A_k 值。为了消去 A_k 中 σ_k 的影响可以把式子乘以相应的 $\int_0^{2\pi}e^{-i\theta}d\theta$。这样可以较方便地求到近似解。求到 A_k 后，就得到诸虚构负荷 G_k。而这些虚构负荷正好满足边界条件，并且在区内是解析的。由此诸虚构负荷而产生的应力场或位移场是满足边界条件的。总应力函数是由 G_k 产生的应力函数之和。以式子表示如下：

$$\varphi(\zeta)=\sum_{j=0}^{n}\varphi_j(\zeta),\quad \psi(\zeta)=\sum_{j=0}^{n}\psi_j(\zeta)$$

式中 $\varphi_j(\zeta)$ 和 $\psi_j(\zeta)$ 是由 G_j 产生的应力函数。为得到更精确的近似解可以取

$$G_0(\sigma_0)=\sum_{s=1}^{l_0}\alpha_{0s}\sigma_0^s$$

$$G_j(\sigma_j)=\sum_{s=-l}^{+l_1}\alpha_{js}(\sigma_j-e_j)^s$$

l_1 与 l 在数值上可以不相等。把上二式代入式 (4-7-3)中后，得到如下方程组

$$\sum_{s=1}^{l_0}\alpha_{0s}\sigma_0^s+\sum_{j=1}^{n}\left\{\sum_{s=1}^{l_0}\alpha_{js}\frac{R_j^{2s}}{(\bar{\sigma}_0-\bar{e}_j)^s}+\sum_{s=-1}^{-l}\alpha_{js}(\sigma_0-e_j)^s\right.$$

$$\left.-\frac{\omega_j(\sigma_0)}{\kappa_0\overline{\omega_j'(\sigma_0)}}\sum_{s=1}^{l_1}s\cdot\alpha_{js}\frac{R_j^{2s}}{(\bar{\sigma}_0-\bar{e}_j)^{s+1}}\right\}=F_0(\sigma_0)$$

$$+\left(M-\frac{\overline{M}}{\kappa_0}\right)\omega(\sigma_0)$$

$$\sum_{s=-l}^{+l_1}\alpha_{ks}(\sigma_k-e_k)^s+\sum_{j=1\ j\neq k}^{n}\left\{\sum_{s=-1}^{-l}\alpha_{js}(\sigma_k-e_j)^s\right.$$

$$\left.+\sum_{s=1}^{l_1}\alpha_{js}\frac{R_j^{2s}}{(\bar{\sigma}_k-\bar{e}_j)^s}-\frac{\omega_j(\sigma_k)}{\kappa_0\overline{\omega_j'(\sigma_k)}}\sum_{s=1}^{l_1}s\alpha_{js}\frac{R_j^{2s}}{(\bar{\sigma}_k-\bar{e}_j)^{s+1}}\right\}$$

$$+\sum_{s=1}^{l_1}\alpha_{0s}(\sigma_k^s-\zeta_0^s)-\frac{\omega(\sigma_k)}{\kappa_0\omega'(\sigma_k)}\sum_{s=1}^{l_1}s\alpha_{0s}\left[\left(\frac{R_0^2}{\bar{\zeta}_0}\right)^{s-1}\right.$$

$$\left.-\left(\frac{R_0^2}{\bar{\sigma}_k}\right)^{s-1}\right]=F_k^0(\sigma_k)$$

解上述方程，可以令方程等号左右 σ_k 同幂次项的系数相等。方程的数目要选择得与未知数 α_{ks} 的数目相同，是不容易的，但要使之尽可能相近。把多余的某些方程乘以 $\int_0^{2\pi}e^{ij\theta}d\theta$ 并作积分（注意这里要细心把影响大的未知数 α_{ks} 留下），这样使方程组的数目等于未知数的数目。

〔例题26〕 图 4-19 所示圆形区域在外边界受均布负荷 p 的作用，试求应力函数。

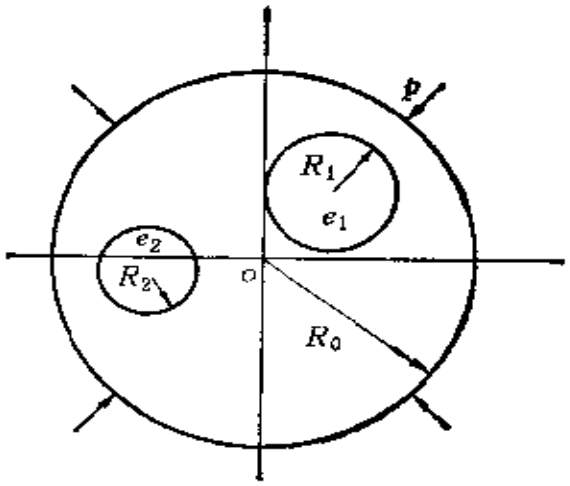


图 4-19

此时 $F_0(\sigma_0)=-p\sigma_0$, $F_1(\sigma_1)=F_2(\sigma_2)=0$

设
$$G_0=A_0\sigma_0$$
$$G_j=A_j\left(\sigma_j-e_j-\frac{R_j^2}{\sigma_j-e_j}\right)$$

把上述两式代入式（4-7-4）中，于是得到

$$A_0\sigma_0+\left[\frac{R_1^2}{\bar{\sigma}_0-\bar{e}_1}+\bar{e}_1-\bar{\sigma}_0+\frac{R_1^2}{(\bar{\sigma}_0-\bar{e}_1)^2}\sigma_0\right]A_1$$
$$+\left[\frac{R_2^2}{\bar{\sigma}_0-\bar{e}_2}+(\bar{e}_2-\bar{\sigma}_0)+\frac{R_2^2}{(\bar{\sigma}_0-\bar{e}_2)^2}\sigma_0\right]A_2=F_0(\sigma_0) \tag{4-7-5}$$

$$A_0(\sigma_1-\zeta_0)+\left[\sigma_1-e_1-\frac{R_1^2}{\sigma_1-e_1}\right]A_1+\left[\frac{R_2^2}{\bar{\sigma}_1-\bar{e}_2}+\bar{e}_2\right.$$
$$\left.-\bar{\sigma}_1+\frac{R_2^2}{(\bar{\sigma}_1-\bar{e}_2)^2}\sigma_1\right]A_2=0 \tag{4-7-6}$$

$$A_0(\sigma_2-\zeta_0)+\left[\frac{R_1^2}{\bar{\sigma}_2-\bar{e}_1}+\bar{e}_1-\bar{\sigma}_2+\frac{R_1^2}{(\bar{\sigma}_2-e_1)^2}\sigma_2\right]A_1$$
$$+\left[\sigma_2-e_2-\frac{R_2^2}{\sigma_2-e_2}\right]A_2=0 \tag{4-7-7}$$

把式（4-7-5）乘以$\int_0^{2\pi}e^{i\theta}d\theta$，作积分得到

$$A_0+\frac{R_1^2}{\bar{e}_1^2}A_1+\frac{R_2^2}{\bar{e}_2^2}A_2=2RM-p \qquad (4\text{-}7\text{-}8)$$

把式（4-7-6）乘以$\int_0^{2\pi}|\sigma_1-e_1|e^{i\theta}d\theta$，令$\zeta_0=0$，得到

$$A_0+A_1+A_2[W_2]=0 \qquad (4\text{-}7\text{-}9)$$

把式（4-7-7）乘以$\int_0^{2\pi}|\sigma_2-e_2|e^{-i\theta}d\theta$，得到

$$A_0+A_1[W_1]+A_2=0 \qquad (4\text{-}7\text{-}10)$$

由式（4-7-8）到式（4-7-10），解出A_0，A_1，A_2为：

$$A_0=(2RM-p)[1-\{R_1^2/\bar{e}_1^2\cdot(1-[W_2])+R_2^2/\bar{e}_2^2(1-[W_1])\}/\Delta]$$

$$A_1=(1-[W_2])(2RM-p)/\Delta$$

$$A_2=(1-[W_1])(2RM-p)/\Delta$$

$$\Delta=\left(\frac{R_1}{\bar{e}_2}\right)^2(1-[W_1])+\left(\frac{R_2}{\bar{e}_1}\right)^2(1-[W_2])+[W_1][W_2]-1$$

式中

$$[W_1]=\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2+\frac{1}{R_2^2}(\bar{e}_1-\bar{e}_2)^2\frac{\bar{e}_2}{\bar{e}_1-\bar{e}_2}$$

$$[W_2]=\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2+\frac{1}{R_1^2}(\bar{e}_1-\bar{e}_2)^2\frac{\bar{e}_1}{\bar{e}_1-\bar{e}_2}$$

于是得到诸虚构负荷为：

$$G_0=A_0\sigma_0$$

$$G_1=A_1(\sigma_1-e_1-R_1^2/\sigma_1-e_1)$$

$$G_2=A_2(\sigma_2-e_2-R_2^2/\sigma_2-e_2)$$

对于半径为R_0的圆域，代入

$$\varphi_0(\zeta)=-M\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0}\left[\frac{1}{\sigma_0-\zeta}-\frac{1}{\sigma_0}\right]G_0(\sigma_0)d\sigma_0$$

$$=-M\zeta+A_0\zeta$$

又

$$\psi_0(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0}\frac{\overline{G_0(\sigma_0)}d\sigma_0}{\sigma_0-\zeta}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0}\frac{\overline{\omega}(\sigma_0)}{\omega'(\sigma_0)}\frac{\varphi_0'(\sigma_0)}{\sigma_0-\zeta}d\sigma_0$$

因为 $\omega(\sigma_0)=\sigma_0$，所以把 $\overline{G_0(\sigma_0)}$，$\varphi_0'(\sigma_0)$ 等代入上式后，得到 $\psi_0(\zeta)=0$。这里 $2RM$ 为：

$$2RM=-\frac{\frac{R_1^2}{e_1^2}(1-\overline{(W_2)})+\frac{R_2^2}{e_2^2}(1-\overline{(W_1)})-2\Delta}{\frac{R_1^2}{e_1^2}(1-\overline{(W_2)})+\frac{R_2^2}{e_2^2}(1-\overline{(W_1)})}\cdot p$$

对于半径为 R_1 的圆以外的区域，得到

$$\varphi_1(\zeta)=-A_1\frac{R_1^2}{\zeta-e_1}$$

$$\psi_1(\zeta)=-A_1\frac{R_1^4}{\zeta(\zeta-e_1)^2}+A_1\frac{R_1^2}{\zeta-e_1}$$

对于半径为 R_2 的圆以外的区域，得到

$$\varphi_2(\zeta)=-A_2\frac{R_2^2}{\zeta-e_2}$$

$$\psi_2(\zeta)=+A_2\left[\frac{R_2^2}{\zeta-e_2}-\frac{R_2^4}{\zeta(\zeta-e_2)^2}\right]$$

得到这些结果利用了把 O_j 外区域变到 Γ_j 外区域的结果。这样得到的 $\varphi_1(\zeta)$，$\psi_1(\zeta)$，$\varphi_2(\zeta)$，$\psi_2(\zeta)$ 都在 Γ_j 外解析。而 $\varphi_0(\zeta)$ 在 Γ_0 内解析。于是在区域内的解析函数应为它们之和。即

$$\begin{aligned}\varphi(\zeta)&=\varphi_0(\zeta)+\varphi_1(\zeta)+\varphi_2(\zeta)\\&=(A_0-M)\zeta-A_1\frac{R_1^2}{\zeta-e_1}-A_2\frac{R_2^2}{\zeta-e_2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi(\zeta)&=\psi_0(\zeta)+\psi_1(\zeta)+\psi_2(\zeta)\\&=A_1\left[1-\frac{R_1^2}{\zeta(\zeta-e_1)}\right]\frac{R_1^2}{\zeta-e_1}\\&\quad+A_2\left[1-\frac{R_2^2}{\zeta(\zeta-e_2)}\right]\frac{R_2^2}{\zeta-e_2}\end{aligned}$$

4-8 尖劈问题的一般解

求两个函数 $\varphi_1(z)$ 和 $\psi_1(z)$ 在如下的尖劈内解析：

$$0<r<\infty;\quad -\alpha\pi/2<\theta<\alpha\pi/2;\quad \alpha>0$$

$$z=re^{i\theta}$$

并满足如下边界条件

$$\nu^*\varphi_1(z_1)-z_1\overline{\varphi_1'(z_1)}-\overline{\psi_1(z_1)}=-f(z_1) \quad (4-8-1)$$

这里 z_1 是边界上的点，

$$\arg z_1=\pm\alpha\pi/2,\quad 0<|z_1|<\infty$$

利用保角变换，把尖劈映射到右半平面 ζ。于是 $\mathrm{Re}[s]>0$，$z=\zeta^\alpha$，$\zeta=\xi+i\eta$，并令

$$\left.\begin{aligned}&\varphi(\zeta)=\varphi_1(\zeta^\alpha)\\&\psi(\zeta)=\psi_1(\zeta^\alpha)+\zeta\frac{e^{-i\pi\alpha}}{\alpha}\varphi'(\zeta)\\&m=\sin\pi\alpha/\pi\alpha\\&f(z_1)=f(\eta^\alpha e^{i\pi\alpha/2})=+f_1(\eta)+if_2(\eta)\end{aligned}\right\} \quad (4-8-2)$$

函数 $\varphi(\zeta)$ 和 $\psi(\zeta)$ 在右半平面内解析，在边界上满足如下条件

$$\nu^*\varphi(i\eta)-\delta(\eta)2\pi m\eta\overline{\varphi'(i\eta)}-\overline{\psi(i\eta)}=-f_1(\eta)-if_2(\eta) \quad (4-8-3)$$

这里

$$\delta(\eta)=\begin{cases}1, & \text{当 } \eta>0\\ 0, & \text{当 } \eta<0\end{cases}$$

令 $\varphi(\infty)=0$。按哈拉克（Harnack）定理，可知式(4-8-3)等效于两个如下的泛函：

$$\nu^*\varphi(\zeta)+m\int_0^{2\pi}\eta\frac{\overline{\varphi'(i\eta)}}{i\eta-\zeta}d\eta=\frac{-1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\eta)}{i\eta-\zeta}d\eta=A(\zeta) \quad (4-8-4)$$

$$\psi(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_1(\eta)-if_2(\eta)}{\zeta-i\eta}d\eta-m\int_0^{\infty}\eta\frac{\varphi'(i\eta)}{\zeta-i\eta}d\eta \quad (4-8-5)$$

现在要由这两个方程，求出 $\varphi(\zeta)$ 和 $\psi(\zeta)$。我们引入以下两个变换（拉氏变换）。

$$\left.\begin{aligned}\varphi(\zeta)&=\int_0^\infty u_0(x)e^{-\zeta x}dx\\ A(\zeta)&=\int_0^\infty F(x)e^{-\zeta x}dx\end{aligned}\right\}\qquad(4\text{-}8\text{-}6)$$

但是我们知道

$$\int_0^\infty \eta\frac{\overline{\varphi'(i\eta)}}{i\eta-\zeta}d\eta=-i\int_0^\infty\overline{\varphi(i\eta)}\frac{d}{d\eta}\left[\frac{\eta}{i\eta-\zeta}\right]d\eta$$

$$=i\zeta\frac{d}{d\zeta}\int_0^\infty\frac{\overline{\varphi(i\eta)}}{i\eta-\zeta}d\eta$$

于是把式（4-8-6）以及上述结果代入式（4-8-4），得到

$$\nu^*u_0(x)+im\frac{d}{dx}\left[x\int_0^\infty\overline{\varphi(i\eta)}\,e^{i\eta x}d\eta\right]=F(x)$$

$$\times\int_0^\infty\overline{\varphi(i\eta)}\,e^{i\eta x}d\eta=\int_0^1\overline{\varphi(i\eta)}\,e^{i\eta x}d\eta$$

$$+\frac{d}{dx}\int_1^\infty\frac{\overline{\varphi(i\eta)}e^{i\eta x}}{i\eta}d\eta=\int_0^\infty\overline{u_0(y)}\left[\int_0^1 e^{i\eta(x+y)}d\eta\right.$$

$$\left.+\frac{d}{dx}\int_1^\infty\frac{e^{i\eta(x+y)}}{i\eta}d\eta\right]dy=i\int_0^\infty\frac{\overline{u_0(y)}}{x+y}dy$$

于是得到积分方程如下：

$$\nu^*u_0(x)-m\frac{d}{dx}x\int_0^\infty\frac{\overline{u_0(y)}}{x+y}dy=F(x)$$

或是

$$\nu^*u_0(x)-m\int_0^\infty\frac{y\overline{u_0(y)}}{(x+y)^2}dy=F(x)\qquad(4\text{-}8\text{-}7)$$

把式（4-8-7）分成实部和虚部，并用黎曼—梅林变换，得到

$$\mathrm{Re}u_0(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\frac{F_1(\mu')}{\nu^*-m\dfrac{\pi\mu'}{\mathrm{sh}\pi\mu'}}x^{-i\mu'-1}d\mu'$$

$$(\pi\mu'=y)$$

$$\mathrm{Im}u_0(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F_2(\mu')}{\nu^*+m\dfrac{\pi\mu'}{\mathrm{sh}\pi\mu'}}x^{-i\mu'-1}d\mu'$$

式中

$$F_1(\mu')=\int_0^\infty x^{i\mu'}\mathrm{Re}F(x)dx,\quad F_2(\mu')=\int_0^\infty x^{i\mu'}\mathrm{Im}F(x)dx$$

由于

$$\frac{1}{\nu^*\pm m\dfrac{\pi\mu'}{\mathrm{sh}\pi\mu'}}=\frac{1}{\nu^*}\mp\frac{\dfrac{\pi\mu'}{\nu^*}}{\nu^*\left[\dfrac{\nu^*}{m}\mathrm{sh}\pi\mu'\pm\pi\mu'\right]}$$

所以式（4-8-7）可以写为：

$$\nu^*u_0(x)=F(x)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}x^{-i\mu-1}\frac{\pi\mu}{\dfrac{\nu^{*2}}{m^2}\mathrm{sh}^2\pi\mu'-\pi^2\mu'^2}\left\{-\frac{\nu^*}{m}\mathrm{sh}\pi\mu'\times\int_0^\infty\sigma^{i\mu'}F(\sigma)d\sigma+\pi\mu'\int_0^\infty\sigma^{i\mu'}F(\sigma)d\sigma\right\}d\mu$$

这里令$\sigma=tx$，改变上式积分的次序后，得到

$$\nu^*u_0(x)=F(x)+\int_0^\infty tF(tx)M(t)dt+\int_0^\infty t\,\overline{F(tx)}N(t)dt \qquad (4\text{-}8\text{-}8)$$

式中

$$\left.\begin{aligned}M(t)&=\frac{a^2}{\pi t}\int_0^\infty\frac{\pi\cos(\mu'\ln t)}{\left(\dfrac{\mathrm{sh}\pi\mu'}{\pi\mu'}\right)^2-a^2}d\mu'\\N(t)&=\frac{a^2}{\pi^2t}\int_0^\infty\frac{\dfrac{\mathrm{sh}\pi\mu'}{\pi\mu'}(\cos\mu'\ln t)}{\left(\dfrac{\mathrm{sh}\pi\mu'}{\pi\mu'}\right)^2-a^2}\pi d\mu'\\a&=m/\nu^*\quad(|a|<1)\end{aligned}\right\}\qquad(4\text{-}8\text{-}9)$$

直接积分式（4-8-6）和式（4-8-8），得到

$$\nu^*\varphi(\xi)=A(\xi)+\int_0^1\left[A\left(\frac{\xi}{t}\right)+A(\xi,\ t)\right]M(t)dt$$
$$+\int_0^1\left[\overline{A\left(\frac{\xi}{t}\right)}+\overline{A(\xi,\ t)}\right]N(t)dt \quad (4\text{-}8\text{-}10)$$

若是边界条件对横轴对称，则$f(\bar{z}_1)=\pm f(z_1)$，$\overline{A(\bar{s})}=\pm A(s)$，式(4-8-10)可以简化为：

$$\nu^*\varphi(\xi)=A(\xi)+\int_0^1\left[A\left(\frac{\xi}{t}\right)+A(\xi t)\right]$$
$$\times[M(t)\pm N(t)]dt \quad (4\text{-}8\text{-}10)'$$

函数$M(t)$和$N(t)$对于不同的a值制表如下：

表4-8-1　$M(t)$和$N(t)$数值表

t \ a	0.1	0.4	$2/\pi$	0.9	
0.1	0.0101	0.1878	0.6396	3.0971	M
	0.0836	0.4027	0.9150	3.4099	N
0.4	0.0039	0.0694	0.2237	0.9462	M
	0.0513	0.2272	0.4460	1.2252	N
0.7	0.0024	0.0424	0.1354	0.5601	M
	0.0348	0.1522	0.2921	0.7594	N
1.0	0.0016	0.0300	0.0958	0.3946	M
	0.0251	0.1098	0.2097	0.5399	N
	−0.0281	−0.0725	−0.0882	−0.0966	b_1

$M(t)$和$N(t)$表为

$$\left.\begin{aligned}M(t)&=Rt^{\beta-1}+M_0(t)\\(\operatorname{sign}a)N(t)&=Rt^{\beta-1}+N_0(t)\end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}8\text{-}11)$$

这里$M_0(t)$和$N_0(t)$是连续函数。β是如下方程中最小实根

$$\sin\pi\beta/\pi\beta=|a| \quad (0<\beta<1)$$

$$R=\frac{|a|\beta}{2(|a|-\cos\pi\beta)}$$

因此可以看出，当 $t=0$ 时，$M(t)$和$N(t)$ 有如上述形式的奇点。

在实际计算式（4-8-10）时，在所求应力分量与实际应力分量相比，其误差小于 5 ～10%时，可近似取

$$\left.\begin{aligned}
&M_0(t)\approx a_0=\frac{|a|}{2}\left(\frac{|a|}{1-a^2}-\frac{1}{|a|-\cos\pi\beta}\right)\\
&N_0(t)\approx b_0+b_1(2t-1)\\
&b_0=\frac{|a|}{2}\left(\frac{1}{1-a^2}-\frac{1}{|a|-\cos\pi\beta}\right)\\
&b_1=6|a|\int_0^{\infty}\frac{\frac{\mathrm{sh}\pi\mu'}{\mu'}d\mu'}{\left[\left(\frac{\mathrm{sh}\pi\mu'}{\pi\mu'}\right)^2-a^2\right](\pi^2+\pi^2\mu'^2)}\\
&\qquad-\frac{3\beta|a|}{(\beta+1)(|a|-\cos\pi\beta)}-3b_0
\end{aligned}\right\}\quad(4\text{-}8\text{-}12)$$

4-9 尖劈边界有力和力矩作用

如图 4-20 所示，在边界上有集中力P作用。力P与尖劈边界外法线方向的夹角为γ。用r_0表示力P作用点到尖劈顶的距离，在此情况下，$\nu^*=-1$。

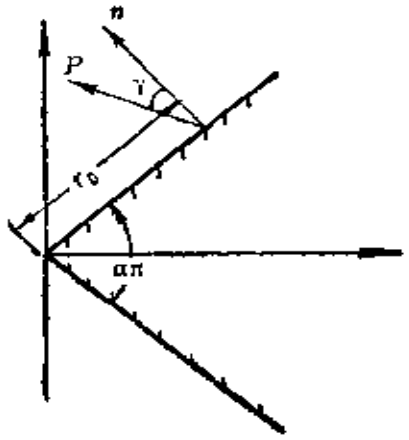


图 4-20

$$a=-\frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}=\begin{cases}-|a|, & \text{当 } \alpha<1\\ |a|, & \text{当 } \alpha>1\end{cases}$$

当 $\alpha<1$，$\beta=\alpha$，当 $\alpha>1$ 时，$\beta<\alpha$。

而且

$$f(z_1)=\begin{cases}-Pe^{i(\pi\alpha/2+\gamma)} & \text{当 } \mathrm{Im}\, z_1<r_0\sin\pi\alpha/2\\ 0 & \text{当 } \mathrm{Im}\, z_1>r_0\sin\pi\alpha/2\end{cases} \tag{4-9-1}$$

我们取函数 $B(\zeta)$，它在 $\mathrm{Re}[\zeta]<0$ 区域内解析，并且 $A(\zeta)$ 和 $B(\zeta)$ 满足如下共轭条件

$$A(i\eta)+\overline{B(i\eta)}=f[i\eta]$$

$A(\zeta)$ 在 $\mathrm{Re}[\zeta]>0$ 区域内解析。令

$$B(\zeta)=\frac{P}{2\pi i}[e^{-i(\pi\alpha/2+\gamma)}\cdot\ln(\zeta+\zeta_0)+\pi i]$$

$$A(\zeta)=-\frac{P}{2\pi i}e^{i(\pi\alpha/2+\gamma)}\cdot\ln(\zeta-\zeta_0)$$

这里 $\zeta_0=ir_0^{1/\alpha}=i\eta_0$。

由式 (4-8-10) 得到 $\varphi'(z)$ 如下：

$$\varphi'(z)=\frac{e^{i\gamma}}{2\pi\alpha r_0 i}P\rho^{1-\alpha}\left\{\frac{1}{\rho-1}+\int_0^1 M(t)\left[\frac{1}{\rho-t}+\frac{1}{t\rho-1}\right]dt-e^{-i(\pi\alpha+2\gamma)}\int_0^1 N(t)\left[\frac{1}{\rho+t}+\frac{t}{t\rho+1}\right]dt\right\} \tag{4-9-2}$$

这里

$$\rho=\frac{\zeta}{\zeta_0}=-i\left(\frac{r}{r_0}\right)^{1/\alpha}\cdot e^{i\theta/\alpha}$$

式(4-9-2) 与下式

$$\psi(\zeta)=B(\zeta)-m\int_0^\infty\frac{\eta\varphi'(i\eta)}{\zeta-i\eta}d\eta$$

满足边界条件 (4-8-3)。

如果 $\gamma=0$，因为在边界 $\theta=\pm\pi\alpha/2$ 上，已知应力分量 X_θ 和

$X_{r\theta}$ 为零，所以只计算正应力（法向应力）X_r。

$$X_r=4\mathrm{Re}[\varphi'(z)]$$

令

$$X_r=\frac{2P}{\pi\alpha r_0}q(\rho)$$

由式（4-9-1），当 $\rho>0$ （在 $\theta=\pi\alpha/2$ 上表面），

$$q(\rho)=\rho^{1-\alpha}\left\{\pi M(\rho)+\sin\pi\alpha\int_0^1 N(t)\left[\frac{1}{t+\rho}+\frac{t}{t\rho+1}\right]dt\right\} \tag{4-9-3}$$

当 $\rho=-\rho_0<0$ （在 $\theta=-\pi\alpha/2$ 下表面）

$$q(\rho)=\rho_0^{1-\alpha}\sin\pi\alpha\left\{\frac{1}{1+\rho_0}+\int_0^1 M(t)\left[\frac{1}{t-\rho_0}+\frac{t}{t\rho_0+1}\right]dt\right\}+\pi\rho_0^{1-\alpha}N(\rho_0) \tag{4-9-3}'$$

当 $\alpha=1/2$，这是直角尖劈。近似计算这种情况下的 $M(t)$ 和 $N(t)$ 值如下：

$$M(t)\approx\frac{1}{4\sqrt{t}}-0.1593$$

$$N(t)\approx-\frac{1}{4\sqrt{t}}-0.1235+0.1765\,t$$

由式（4-9-2），求到 $\varphi'(z)$ 的近似解为：

$$\frac{\pi r_0}{P}ie^{-i\gamma}\varphi'(z)=\frac{\sqrt{\rho}}{\rho-1}+\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{\rho}+1}{\sqrt{\rho}-1}\left[1-\frac{1}{\rho}\right]$$

$$+\frac{\pi i}{4\rho}+\frac{0.3407}{\sqrt{\rho}}+0.1593\sqrt{\rho}\ln(\rho_0-1)(1-\rho^{-2})$$

$$-0.3186\sqrt{\rho}\ln\sqrt{\rho}-i\frac{0.1593\,\pi}{\rho\sqrt{\rho}}$$

$$-ie^{-2i\gamma}\left\{\frac{i}{4}\ln\frac{\sqrt{\rho}-i}{\sqrt{\rho}+i}\left[1+\frac{1}{\rho}\right]-\frac{\pi}{4\rho}+\frac{0.1765}{\rho\sqrt{\rho}}\right.$$

$$\left.+\frac{0.5357}{\sqrt{\rho}}-0.1765\sqrt{\rho}+0.1235\sqrt{\rho}\ln(1+\rho)(1-\rho^{-2})\right.$$

$$-\sqrt{\rho}\,[0.2470+0.3530\rho]\ln\sqrt{\rho}+0.1765\ln(1+\rho)$$
$$\times\left[\rho\sqrt{\rho}-\frac{1}{\rho^5\sqrt{\rho}}\right]\Big\} \qquad (4\text{-}9\text{-}4)$$

表 4-9-1 列有当 $\gamma=0$ 时的 $q(\rho)$ 值。

表 4-9-1

$\lvert\rho\rvert$	$q(\zeta)$		$\lvert\rho\rvert$	$q(\zeta)$	
	$\rho>0$	$\rho<0$		$\rho>0$	$\rho<0$
0.1	−0.1027	−0.0655	1.3	−0.2375	0.2311
0.2	−0.1301	−0.0539	1.4	−0.2360	0.2479
0.3	−0.1483	−0.0373	1.5	−0.2355	0.2629
0.4	−0.1646	−0.0155	1.6	−0.2353	0.2746
0.5	−0.1801	0.0106	1.7	−0.2352	0.2872
0.6	−0.1949	0.0385	1.8	−0.2350	0.2997
0.7	−0.2091	0.0796	1.9	−0.23498	0.3099
0.8	−0.2232	0.1219	2.0	−0.23495	0.3199
0.9	−0.2369	0.1694	2.1	−0.2349	0.3290
1.0	−0.2503	0.2074	2.2	−0.2348	0.3372
1.1	−0.2438	0.2183	5.0	−0.2265	0.3990
1.2	−0.2398	0.2243	10.0	−0.2025	0.3601

当 $r_c\to 0$ 时，得到作用力在尖劈顶端的极限情况。此时

$$e^{-i(\pi\alpha/2+\gamma)}\,i\,\frac{2\pi\alpha}{P}\,z\varphi'(z)=1+2\int_0^1 M(t)\,dt$$
$$-2e^{-i(\pi\alpha+2\gamma)}\int_0^1 N(t)\,dt=\frac{1}{1-m^2}$$
$$+e^{-i(\pi\alpha+2\gamma)}\frac{m}{1-m^2}$$

利用 $M(t)$ 和 $N(t)$ 的近似函数，当 $\alpha=1/2$ 时，上式又简化为

$$\varphi'(z)\approx\frac{P}{\pi e^{i(\pi/4-\gamma)}z}(1.6814-1.0705ie^{-2i\gamma})$$

若 $\gamma=0$，则

$$\varphi'(z)\approx\frac{P}{\pi z e^{i\pi/4}}(1.6814-1.705\,i)$$

若在尖劈边界上是任意负荷。此任意负荷分解为沿尖劈边界

作用的切向负荷和在边界上的法向负荷。$\gamma=0$ 时，相当于有法向负荷，$\gamma=\pi/2$ 时，相当于有切向负荷（沿尖劈边界作用）。设

$$\Phi_0(\rho,\gamma)=\rho^{1-\alpha}\left\{\frac{1}{\rho-1}+\int_0^1 M(t)\left[\frac{1}{\rho-t}+\frac{t}{\rho t-1}\right]dt-e^{-i(\pi\alpha+2\gamma)}\int_0^1 N(t)\left[\frac{1}{\rho+t}+\frac{t}{\rho t+1}\right]dt\right\}\qquad(4\text{-}9\text{-}2)'$$

已知在尖劈表面上的应力用 $p(r_0,\gamma)$ 表示，那末，在这种情况下，$\varphi'(z)$ 的方程为：

$$2\pi\alpha i e^{-i\gamma}\varphi'(z)=\int_0^\infty p(r_0,\gamma)\Phi_0(\rho,\gamma)\frac{dr_0}{r_0}\qquad(4\text{-}9\text{-}5)$$

设 $\alpha=1/2$。针对不同的具体情况，研究 $\Phi_0(\rho,\gamma)$。

a）有均布压力 $p(r_0)=-p$ 作用于直角尖劈的上表面。由式（4-9-5），可得

$$4\varphi'(z)\approx-1.011p$$

精确解 $4\varphi'(z)=-1.00p$。

b）各种负荷情况如图 4-21 所示。

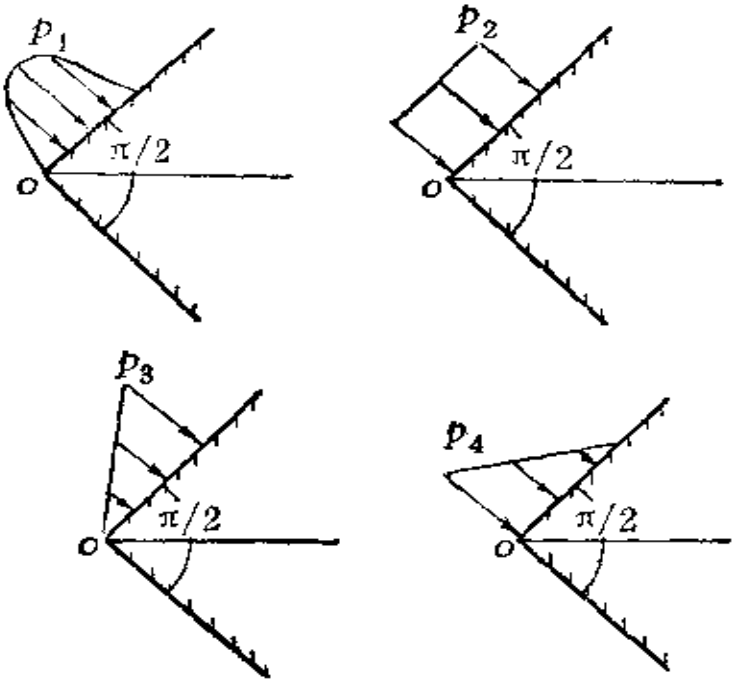


图 4-21

令

$$S_k(r)=\frac{4}{\pi}\int_0^1 p_k(x)\,q(\rho)\,\frac{dx}{x}$$

式中

$$p_1(x)=\sin\pi x,\qquad p_2(x)=1$$
$$p_3(x)=x,\qquad p_4(x)=1-x$$
$$\rho=\begin{cases}(r/x)^2, & \text{当 } \theta=\pi/4\\ -(r/x)^2, & \text{当 } \theta=-\pi/4\end{cases}$$

$q(\rho)$值列在表 4-9-1 中，当$\rho>10$时，

$$q(\rho)\approx-\frac{1.07}{\sqrt{\rho}}+\frac{1.57}{\rho}-\frac{0.668}{\rho^{3.2}}$$

当$\rho<-10$时，

$$q(\rho)\approx\frac{1.68}{\sqrt{|\rho|}}-\frac{1.57}{|\rho|}-\frac{0.448}{|\rho|^{3.2}}$$

在四种不同负荷情况下的X_r^k为：

$$X_r^k=\begin{cases}S_k(r)+p_k(r), & \theta=\pi/4\\ S_k(r), & \theta=-\pi/4\end{cases}$$

对于不同的ρ和r值，X_r^k值列于表 4-9-2 中。

表 4-9-2

r	$\rho>0$				$\rho<0$			
	X_r^1	X_r^2	X_r^3	X_r^4	X_r^1	X_r^2	X_r^3	X_r^4
0.25	0.307	0.069	0.066	−0.002	0.263	1.048	0.061	0.988
0.5	0.546	0.163	0.261	−0.104	0.531	1.107	0.200	0.908
0.7	0.384	0.231	0.446	−0.220	0.639	1.158	0.295	0.824
1.0	−0.407	0.326 −0.675	0.750 −0.250	−0.428	0.664	1.068	0.363	0.705
1.5	−0.345	−0.553	−0.225	−0.328	0.596	0.934	0.382	0.552
2.0	−0.295	−0.468	−0.202	−0.266	0.509	0.798	0.352	0.448
3.2	−0.217	−0.337	−0.154	−0.183	0.358	0.565	0.265	0.300
5.0	−0.150	−0.235	−0.111	−0.123	0.245	0.386	0.186	0.200
10.0	−0.081	−0.127	−0.062	−0.065	0.130	0.204	0.100	0.104

如果在 $z_0=r_0e^{i\pi\alpha/2}$ 邻域沿尖劈表面有法向负荷 p 作用（图4-22），而此负荷与力偶矩 M_0 等效。

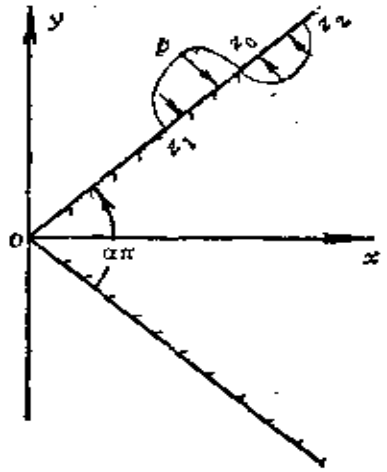


图 4-22

令 $z=re^{i\theta}$，$r_2-r_1=\varepsilon$（ε 是小量）

$r_1-r_0=-a\varepsilon$，$r_2-r_0=b\varepsilon$，$\rho_*-r_0=\lambda' e$

$p(\rho_*)=f(\lambda')/\varepsilon^2$

由于

$$\int_{-a}^{b} f(\lambda')d\lambda'=0,\quad \int_{-a}^{b}\lambda f(\lambda')d\lambda'=M_0$$

利用迭加原理，由式（4-9-2），得到函数 $\varphi'(z)$ 的表达式如下：

$$e^{-i\pi\alpha/2}z\,2\pi i\alpha\varphi'(z)=\frac{1}{\varepsilon}\int_{-a}^{b}f(\lambda')\rho\left\{\frac{1}{\rho-1}\right.$$
$$+\int_0^1 M(t)\left[\frac{1}{\rho-t}+\frac{t}{t\rho-1}\right]dt-e^{-i\pi\alpha}\int_0^1 N(t)$$
$$\left.\times\left[-\frac{1}{\rho+t}+\frac{t}{t\rho-1}\right]dt\right\}d\lambda'$$

$$\rho=-ie^{i\theta/\alpha}\left(\frac{r}{r_0+\lambda'\varepsilon}\right)^{1/\alpha}$$

这里取 $r_0>0$，当 $\varepsilon\to 0$ 时，取上式极值后，便得到在一点 z_0 有集中力偶矩的情况时的 $\varphi'(z)$ 如下：

$$e^{-i\pi\alpha/2}\cdot 2\pi z\alpha\varphi'(z)=-z^{1/\alpha}\cdot\frac{M_0}{\alpha r_0^{(1/\alpha+1)}}\left\{\frac{1}{(\rho_0-1)^2}\right.$$

$$+\int_0^1 M(t)\,t\left[\frac{1}{(\rho_0-t)^2}+\frac{1}{(t\rho_0-1)^2}\right]dt$$

$$\left.+e^{-i\pi\alpha}\int_0^1 tN(t)\left[\frac{1}{(\rho_0+t)^2}+\frac{1}{(t\rho_0+1)^2}\right]dt\right\}$$

式中　$\rho_0=(z/z_0)^{1/\alpha}$

若 $\alpha\leqslant 1$，当 $r_0\to 0$ 时，

$$M(t)=-\frac{\alpha\sin\pi\alpha}{2(\sin\pi\alpha-\pi\alpha\cos\pi\alpha)}t^{\alpha-1}+M_0^*(t)$$

$$N(t)=-\frac{\alpha\sin\pi\alpha}{2(\sin\pi\alpha-\pi\alpha\cos\pi\alpha)}t^{\alpha-1}-N_0^*(t)$$

式中　$M_0^*(t)$ 和 $N_0^*(t)$ 是连续函数，当 $t=0$ 时，$M_0^*(0)=N_0^*(0)=0$。于是得到 $\varphi'(z)$ 如下：

$$\varphi'(z)=-\frac{iM_0}{2(\sin\pi\alpha-\pi\alpha\cos\pi\alpha)z^2}$$

这里 $\alpha<1$。若是 $\alpha>1$，当集中力偶矩趋向于尖劈顶(尖坑角)，物理意义不存在。

4-10　尖塞区域

如图 4-23 所示尖塞。在它的边界 AB 段上有任意负荷 X_n 和

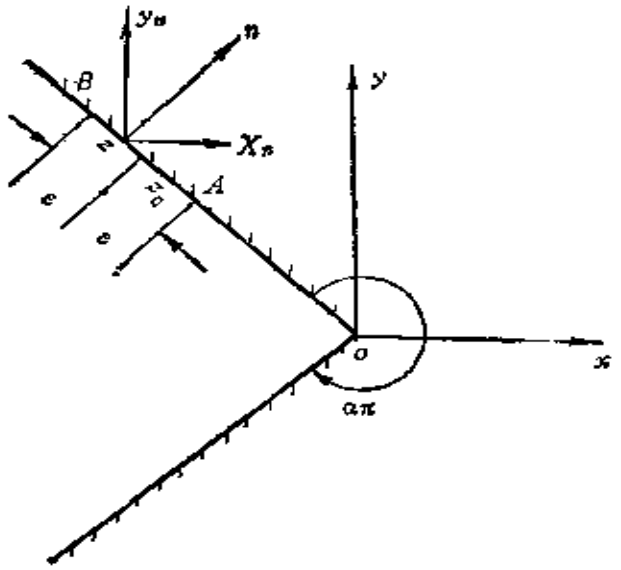


图　4-23

Y_n 作用。由迭加原理，得到

$$-2\pi\alpha z\varphi'(z)=\varepsilon Y\int_{-1}^{1}[X_n(r_0+\lambda'\varepsilon)+iY_n(r_0+\lambda'\varepsilon)]\rho$$
$$\times\left\{\frac{1}{\rho-1}+\int_0^1 M(t)\left(\frac{1}{\rho-1}+\frac{t}{t\rho-1}\right)dt\right\}d\lambda'+\varepsilon Y$$
$$\times\int_{-1}^{1}[X_n-iY_n]\rho\int_0^1 N(t)\left(\frac{1}{\rho+t}+\frac{t}{t\rho+1}\right)dtd\lambda'$$

这里
$$z=re^{i\theta}$$
$$\rho=-i\left(\frac{r}{r_0+\lambda'\varepsilon}\right)^{1/\alpha}e^{i\theta/\alpha}$$

分四种情况讨论，即 $\alpha<1$；$\pi<\alpha\pi<\pi\alpha^0$；$\alpha=\alpha^0$；$\alpha_0<\alpha<2$。

这里 $X=\varepsilon\int_{-1}^{1}X_n d\lambda'$，$Y=\varepsilon\int_{-1}^{1}Y_n d\lambda'$

a）当 $\alpha<1$ 时

$$-2\pi\alpha z\varphi'(z)=AX+iBY-2Ri\frac{\pi M^*}{2\sin\pi\alpha}+0(z^{-1})$$

式中

$$A=1+2\int_0^1[M(t)+N(t)]dt=1/n+1$$
$$B=1+2\int_0^1[M(t)-N(t)]dt=1/1-m$$
$$M^*=\frac{\sin\pi\alpha}{2}\varepsilon\int_{-1}^{1}(r_0+\lambda'\varepsilon)\left[\frac{Y_n}{\sin\pi\alpha/2}-\frac{X_n}{\cos\pi\alpha/2}\right]d\lambda'$$

M^* 是负荷相对于坐标原点的力矩。自然 X 和 Y 是沿 x 和 y 轴已知负荷的分量。

$$R=-\frac{\alpha\sin\pi\alpha}{\sin\pi\alpha-\pi\alpha\cos\pi\alpha}$$

b）当 $1<\alpha<\alpha^0$ 时 $(\pi\alpha^0=\mathrm{tg}\pi\alpha^0)$

$$-2\pi\alpha z\varphi'(z)=AX+iBY+\frac{S}{z^{\beta/\alpha}}-\frac{2\pi Ri M^*}{z\sin\pi\alpha}+0(z^{-1})$$

$$S=-\frac{\beta\sin\pi\alpha}{2(\sin\pi\alpha+\pi\alpha\cos\pi\beta)}\varepsilon\int_{-1}^{1}(r_0+\lambda'\varepsilon)^{\beta/\alpha}\cdot\left[\frac{X_n}{\sin\pi\beta/2}+\frac{Y_n}{\cos\pi\beta/2}\right]d\lambda'$$

若 ε 很小

$$(r_0+\lambda'\varepsilon)^{\beta/\alpha}=r_0^{\beta/\alpha}+\frac{\beta}{\alpha}\lambda'\varepsilon r_0^{\beta/\alpha-1}+\frac{\beta/\alpha(\beta/\alpha-1)}{2}\lambda'^2\varepsilon^2 r_0^{\beta/\alpha-2}+\cdots$$

若边界上的负荷 p 是垂直于边界的，则

$$X_n=-p\sin\pi\alpha/2,\quad Y_n=p\cos\pi\alpha/2$$

于是

$$S=K^{(0)}\varepsilon\int_{-1}^{1}p(r_0+\lambda'\varepsilon)\left[1+\frac{\beta}{\alpha r_0}\lambda'\varepsilon+\frac{\beta}{2\alpha}\left(\frac{\beta}{\alpha}-1\right)\frac{\lambda'^2\varepsilon^2}{r_0^2}+\cdots\right]d\lambda'$$

这里

$$K^{(0)}=\frac{\pi\beta\sin\pi\alpha r_0^{\beta/\alpha}}{2(\sin\pi\alpha+\pi\alpha\cos\pi\beta)}\left(\frac{\sin\pi\alpha/2}{\sin\pi\beta/2}-\frac{\cos\pi\alpha/2}{\cos\pi\beta/2}\right)$$

令

$$p(r_0+\sigma)=\frac{g_{-2}(\sigma)}{\varepsilon^2}+\frac{g_{-1}(\sigma)}{\varepsilon}+g_0(\sigma)+\varepsilon g_1(\sigma)+\cdots$$

这里

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}g_k(\sigma)d\sigma=0\quad(k\neq-1)$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}g_{-1}(\sigma)d\sigma=P,\quad-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\sigma g_{-2}(\sigma)d\sigma=m_1$$

在这种情况下

$$S=K^0(P+\beta m_1/\alpha r_0)+O(\varepsilon)$$

式中　P——已知负荷的主矢量；

m_1——相对于点 $z_0=r_0e^{i\pi\alpha/2}$ 的主力矩。

c）　$\alpha=\alpha^0$ 时

$$-2\pi\alpha z\varphi'(z)=AX+iBY+\frac{S+iT}{z^{\beta/\alpha}}+\frac{2iM^*(1-3\ln z)}{3\pi z\alpha\sin\pi\alpha}+O(z^{-1})$$

$$S+iT=\frac{2i\varepsilon}{\pi\alpha\sin\pi\alpha}\int_{-1}^{1}\ln(r_0+\lambda'\varepsilon)\left(Y_n\cos\frac{\pi\alpha}{2}-X_n\sin\frac{\pi\alpha}{2}\right)d\lambda'-\frac{2M^*}{\pi\alpha\sin\pi\alpha}\left(1-\frac{\pi\alpha}{2}\right)-\frac{i\varepsilon}{\sin\pi\alpha}\int_{-1}^{1}(r_0+\lambda'\varepsilon)\left(X_n\cos\frac{\pi\alpha}{2}+Y_n\sin\frac{\pi\alpha}{2}\right)d\lambda'$$

若 ε 较小，负荷垂直于边界，则

$$S+iT=\frac{M^*}{\sin\pi\alpha}\left(1-\frac{2}{\pi\alpha}\right)+\frac{i\varepsilon}{\pi\alpha}\ln r_0\int_{-1}^{1}p(r_0+\lambda'\varepsilon)\cdot\left[1+\frac{\lambda'\varepsilon}{r_0}+\frac{\lambda'^2\varepsilon^2}{2r_0^2}+\cdots\right]d\lambda'=\frac{M^*}{\sin\pi\alpha}\left(1-\frac{2}{\pi\alpha}\right)+\frac{i\ln r_0}{\pi\alpha r_0}(m_1+P)+O(\varepsilon)$$

d) $\alpha>\alpha^c$

$$-2\pi\alpha z\varphi'(z)=AX+iBY+\frac{S}{z^{\beta/\alpha}}-\frac{2\pi iRM^*}{z\sin\pi\alpha}+\frac{iQ}{z^{\beta'/\alpha}}+O(z^{-1})$$

这里的 S 与 b) 中的 S 一样。

$$Q=\frac{\varepsilon\pi\beta'\sin\pi\alpha}{\sin\pi\beta'(\pi\alpha\cos\pi\beta'-\sin\pi\alpha)}\int_{-1}^{1}\left(Y_n\cos\frac{\pi\beta'}{2}-X_n\sin\frac{\pi\beta'}{2}\right)(r_0+\lambda'\varepsilon)^{\beta'/\alpha}d\lambda'$$

若 ε 较小，负荷垂直于边界，则

$$Q=K_1\left[P+\frac{\beta'}{\alpha r_0}m_1\right]+O(\varepsilon)$$

式中

$$K_1=\frac{(\pi\beta'\sin\pi\alpha)r_0^{\beta'/\alpha}}{\sin\pi\beta'(\pi\alpha\cos\pi\beta'-\sin\pi\alpha)}$$

在以上的四种情况中，$\beta=\rho_r/\pi$。ρ_r是$0<\rho<\pi$时，下列方程的一个实根。

$$\left|\frac{\sin\rho}{\rho}\right|=\left|\frac{1}{\varkappa_0}\cdot\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}\right|<1$$

当$0<\alpha<1$，则$\alpha\leqslant\beta<1$，若$1<\alpha<2$，则$0<\beta<1<\alpha$。β'是下列方程的一个实根。

$$\frac{\sin\rho}{\rho}=-\alpha,\quad \alpha<-\cos\pi\beta_*$$

$\beta_*\approx1.43$，$1<\beta'<1.43$。当负荷不作用在尖劈顶或尖壑根部，以上讨论有意义。

〔例题27〕 若有一尖劈，在$\theta=\alpha\pi/2$的面上，在$0<r<r_1$的范围内，有均布负荷p作用。求应力分量。

已知 $0<r<\infty$，$-\alpha\pi/2<\theta<\alpha\pi/2$。此时函数$\varphi'(z)$为

$$\varphi'(z)=-\frac{1}{2\pi\alpha i}\int_0^{r_1}\Phi^*(\rho,\ 0)\frac{dr_0}{r_0}$$

这里

$$\rho=-i(r/r_0)^{1/\alpha}\cdot e^{i\theta/\alpha}$$

而$\Phi^*(\rho,\ 0)$相当于式(4-9-2)′在$\gamma=0$的情况。若当$\rho\to0$时，则$\Phi^*(\rho,\ 0)$可表示为如下的渐近式

$$\Phi^*(\rho,\ 0)\sim\rho^{1-\alpha}\left\{(\rho-1)+\frac{\pi R}{\sin\pi\beta}\rho^{\beta-1}\left[e^{i\pi\beta}+(\operatorname{sign}m)e^{-i\pi\alpha}\right]\right\}$$

式中

$$m=\sin\pi\alpha/\pi\alpha$$

$$R=|m|\beta/2(|m|-\cos\pi\beta)$$

其中 β是如下方程的最小实根

$$\frac{\sin\pi\beta}{\pi\beta}=\left|\frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}\right|$$

若 $\alpha \leqslant 1$，当 $r_1 \to \infty$ 时，$\varphi'(z)$ 是有限的。当 $\alpha > 1$ 时，$r_1 \to \infty$，不存在沿无穷长边界上有均布负荷的解。

若 $\alpha \leqslant 1$，当 $r_1 \to \infty$，相应于这种情况的应力分量为：

$$X_r = -p\{2\pi\alpha\cos\pi\alpha - \cos\pi\alpha\sin 2\theta_1 + \sin\pi\alpha\cos 2\theta_1 - 2\theta_1\cos\pi\alpha - \sin\pi\alpha\}/2K^0$$

$$X_\theta = -p\{2\pi\alpha\cos\pi\alpha + \cos\pi\alpha\sin 2\theta_1 - \sin\pi\alpha\cos 2\theta_1 - 2\theta_1\cos\pi\alpha - \sin\pi\alpha\}/2K^0$$

$$X_{r\theta} = p\{\cos\pi\alpha(\cos 2\theta_1 - 1) + \sin\pi\alpha\sin 2\theta_1\}/2K^0$$

$$K^0 = \pi\alpha\cos\pi\alpha - \sin\pi\alpha$$

$$\theta_1 = \theta + \pi\alpha/2$$

〔例题28〕 如果在 $\theta = \pi\alpha/2$ 面上，在 $0 < r < r_1$ 内，有按直线渐增分布的负荷 $p(r) = -kr$（k 是实常数）。试求应力分量。此时 $\alpha < 1/2$。

与上述例题相似，

$$\varphi'(z) = -\frac{k}{2\pi\alpha i}\int_0^{r_1}\Phi^*(\rho, 0)dr_0$$

当 ρ 较小时，$\Phi^*(\rho, 0)$ 表示为如下形式：

$$\Phi^*(\rho, 0) \sim \frac{\rho^{1-\alpha}}{\rho - 1} + 2\pi R\,\mathrm{ctg}\pi\alpha$$

令

$$\Phi_1^*(\rho) = \Phi^*(\rho, 0) - 2\pi R\,\mathrm{ctg}\,\pi\alpha$$

可以把 $\varphi'(z)$ 改写为

$$\varphi'(z) = -\frac{k}{2\pi\alpha i}\int_0^{r_1}\Phi_1^*(\rho)dr_0 + iC$$

式中

$$C = -\frac{kr_1}{\alpha}R\,\mathrm{ctg}\pi\alpha$$

我们知道常数 C 对应力分布无影响，可以略去。于是

$$\varphi'(z) = -\frac{k}{2\pi\alpha i}\int_0^{r_1}\Phi_1^*(\rho)dr_0$$

当 $r_1\to\infty$，上式对于 $\alpha<1/2$ 是收敛的。当 $\alpha>1/2$ 时，不存在问题的解。相当于 $r_1\to\infty$ 时的应力分量如下：

$$X_r=ar\left[\cos 3\left(\theta+\frac{\pi\alpha}{2}\right)-\cos\left(\theta+\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right]$$
$$+br\left[\sin 3\left(\theta+\frac{\pi\alpha}{2}\right)-\sin\left(\theta-\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right]$$
$$X_\theta=ar\left[\cos\left(\theta+\frac{\pi\alpha}{2}\right)-\cos 3\left(\theta+\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right]$$
$$+br\left[\sin 3\left(\theta+\frac{\pi\alpha}{2}\right)-\sin\left(\theta-\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right]$$
$$X_{r\theta}=ar\left[\sin\left(\theta+\frac{\pi\alpha}{2}\right)-\sin 3\left(\theta-\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right]$$
$$+br\left[\cos\left(\theta+\frac{\pi\alpha}{2}\right)-\cos 3\left(\theta+\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right]$$

式中

$$a=\frac{k(\cos 3\pi\alpha-\cos\pi\alpha)}{2(1-\cos 2\pi\alpha)},\quad b=\frac{k(\sin\pi\alpha-\sin 3\pi\alpha)}{2(1-\cos 2\pi\alpha)}$$

如果沿边界的负荷是以 r 的 n 阶多项式形式表示，若尖劈角 $\alpha\pi$ 满足以下不等式关系

$$\alpha\pi<\frac{\pi}{n+1}$$

仍然有解，若破坏这个条件，则无解。

4-11 用保角变换解无限长带状板问题

我们先讨论第二个基本问题。已知边界上有位移，求在下列区域内的两个解析函数 $\varphi_1(z)$ 和 $\psi_1(z)$

$$-\frac{\pi}{2}<\mathrm{Im}\,z<+\frac{\pi}{2},\quad -\infty<\mathrm{Re}\,z<+\infty$$

并且它们满足下列边界条件：

$$\nu^*\varphi_1(t_1)-t_1\overline{\varphi_1'(t_1)}-\overline{\psi_1(t_1)}=-f(t_1)$$

t_1 是边界上的点，$f(z_1)$ 是给定的函数，$\nu^*>0$。

我们把带状区域映射到右半平面 $\mathrm{Re}[\zeta]>0$，映射函数为

$z=\ln\zeta$，并且令

$$\varphi(\zeta)=\varphi_1(\ln\zeta)$$

$$\psi(\zeta)=\psi_1(\ln\zeta)+(\ln\zeta+\pi i)\zeta\varphi'(\zeta)$$

$$\zeta=\xi+i\eta$$

$$f(z_1)=f(\ln i\eta)=f_1(\eta)+if_2(\eta)$$

$$A(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_1(\eta)+if_2(\eta)}{i\eta-\zeta}d\eta$$

在右半平面内的解析函数$\varphi(\zeta)$和$\psi(\zeta)$，在半平面的边界上应满足如下条件：

$$\nu^*\varphi(i\eta)-\delta(\eta)2\pi\eta\overline{\varphi'(i\eta)}-\overline{\psi(i\eta)}=-f_1(\eta)-if_2(\eta)$$

$$\delta(\eta)=\begin{cases}1, & \text{当}\ \eta>0\\ 0, & \text{当}\ \eta<0\end{cases}$$

此时$\varphi(\zeta)$为：

$$\nu^*\varphi(\zeta)=A(\zeta)+\int_0^1\left[A\left(\frac{\zeta}{t}\right)+A(\zeta t)\right]M(t)dt$$

$$+\int_0^1\left[\overline{A\left(\frac{\bar{\zeta}}{t}\right)}+\overline{A(\bar{\zeta}t)}\right]N(t)dt \quad (4\text{-}11\text{-}1)$$

式中

$$M(t)=\frac{1}{\pi^2\nu^{*2}t}\int_0^{\infty}\frac{\cos(\mu'\ln t)}{\left(\frac{\mathrm{sh}\pi\mu'}{\pi\mu'}\right)^2-\frac{1}{\nu^{*2}}}d\pi\mu'$$

$$(\pi\mu'=y)$$

$$N(t)=\frac{1}{\pi^2\nu^*t}\int_0^{\infty}\frac{\frac{\mathrm{sh}\pi\mu'}{\pi\mu'}\cos(\mu'\ln t)}{\left(\frac{\mathrm{sh}\pi\mu'}{\pi\mu'}\right)^2-\frac{1}{\nu^{*2}}}d\pi\mu'$$

我们再来讨论第一个基本问题。已知边界上有应力，在边界上$\varphi(t_1)$和$\psi(t_1)$要满足如下条件：

$$\varphi'(t_1)+t_1\overline{\varphi''(t_1)}+\overline{\psi'(t_1)}+\overline{\varphi'(t_1)}=X_n-iY_n$$

这里X_n和Y_n是带状板边上的法向应力和切向应力，它们在无

穿远处为零。并且满足平衡条件

$$\int Y_n d\tilde{t}_1 = \int X_n d\tilde{t}_2 = \int (X_n \tilde{t}_1 - Y_n \tilde{t}_1) d\tilde{t}_1 = 0$$

令

$$\varphi(\zeta) = \varphi'(\ln \zeta) = \int_0^\infty u(x) e^{-\zeta x} dx$$

$$A(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X_n - iY_n}{i\eta - \zeta} d\eta = \int_0^\infty F(x) e^{-ix} dx$$

得到如下积分方程

$$u_0(x) + \int_0^\infty \frac{y\overline{u_0(y)}}{(x+y)^2} dy = -F(x)$$

这个方程是下述方程的特例

$$-\nu^* u_0(x) + \int_0^\infty \frac{y\overline{u_0(y)}}{(x+y)^2} dy = -F(x)$$

即 $\nu^* = -1$ 时的积分方程。

我们先讨论 $\nu^* < -1$ 的情况。此时，我们得到如式(4-11-1)那样的解 $\varphi(\zeta)$。在式 (4-11-1) 的右侧加和减下列表达式

$$I(\zeta, \nu^*) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \left\{ A\left(\frac{\zeta}{t}\right) - \overline{A\left(\frac{\bar{\zeta}}{t}\right)} \right\}$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^{iy/\pi - 1}}{1 + \nu^* + \frac{\nu^*}{6} y^2} dy dt = \frac{3}{2\pi\nu^*\nu_1} \int_0^1 \left\{ \left[A\left(\frac{\zeta}{t}\right) \right.\right.$$

$$\left.\left. - \overline{A\left(\frac{\bar{\zeta}}{t}\right)} \right] + \left[A(\zeta t) - \overline{A(\bar{\zeta} t)} \right] \right\} t^{\frac{\nu_1}{\pi} - 1} dt$$

式中

$$\nu_1 = \sqrt{6(1 + \sqrt{1/\nu^*})}$$

当 $\nu^* \to -1$，即 $\nu_1 \to +0$，求 $I(\zeta, \nu^*)$ 的极限：

$$I(\zeta, \nu^*) = -\frac{3}{2\pi x_1} \int_0^\infty \left[A\left(\frac{\zeta}{t}\right) - \overline{A\left(\frac{\bar{\zeta}}{t}\right)} \right] \frac{dt}{t}$$

$$-\frac{3}{2\pi^2}\int_0^1\left\{\left[A\left(\frac{\zeta}{t}\right)+A(\zeta t)\right]-\left[\overline{A\left(\frac{\bar{\zeta}}{t}\right)}+\overline{A(\bar{\zeta}t)}\right]\right\}$$

$$\times\frac{\ln t}{t}dt+O(\nu_1)$$

当 ζ 是实数时，下面的积分是零。

$$\int_0^\infty\left[A\left(\frac{\zeta}{t}\right)-\overline{A\left(\frac{\bar{\zeta}}{t}\right)}\right]\frac{dt}{t}=2i\,\mathrm{Im}\int_0^\infty A\left(\frac{\zeta}{t}\right)\frac{dt}{t}$$

$$=2i\,\mathrm{Im}\left[A(\sigma)\ln\sigma\Big|_0^\infty-\int_0^\infty A'(\sigma)\ln\sigma\,d\sigma\right]$$

$$=-2i\,\mathrm{Im}\int_0^\infty A'(\sigma)\ln\sigma d\sigma=\mathrm{Im}\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}(X_n-iY_n)$$

$$\times\int_0^\infty\frac{\ln\sigma d\sigma}{(i\eta-\sigma)^2}d\eta=\mathrm{Im}\left\{\frac{-1}{\pi}\int_L(X_n-iY_n)\bar{z}_1dz_1\right\}$$

$$=\frac{1}{\pi i}\int_L(X_n\bar{z}_1-Y_n\hat{z}_1)d\tilde{z}_1=0$$

因为外力合力矩应为零。所以 $\varkappa^*\to-1$ 时，得到 $\varphi(\zeta)$ 如下：

$$-\varphi(\zeta)=A(\zeta)+\int_0^1\left[A\left(\frac{\zeta}{t}\right)+A(st)\right]\left[M_0(t)\right.$$

$$\left.+\frac{3\ln t}{2\pi^2 t}\right]dt+\int_0^1\left[\overline{A\left(\frac{\bar{\zeta}}{t}\right)}+\overline{A(\bar{\zeta}t)}\right]\left[N_0(t)-\frac{3\ln t}{2\pi^2 t}\right]dt$$

式中

$$M_0(t)=\frac{1}{\pi^2 t}\int_0^\infty\left[\frac{1}{\left(\frac{\mathrm{sh}\pi\mu'}{\pi\mu'}\right)^2-1}-\frac{3}{\pi^2\mu'^2}\right]$$

$$\times\cos(\mu'\ln t)d\pi\mu'$$

$$N_0(t)=-\frac{1}{\pi^2 t}\int_0^\infty\left[\frac{\frac{\mathrm{sh}\pi\mu'}{\pi\mu'}}{\left(\frac{\mathrm{sh}\pi\mu'}{\pi\mu'}\right)^2-1}-\frac{3}{\pi^2\mu'^2}\right]$$

$$\times\cos(\mu'\ln t)d\pi\mu'$$

在区域内 $M_0(t)$，$N_0(t)$ 是解析的，当 $t=0$ 时 $M_0(t)$和 $N_0(t)=0$。

若负荷相对于 x 轴是对称的，此时

$$\overline{A(\bar{\xi})}=A(\xi)$$

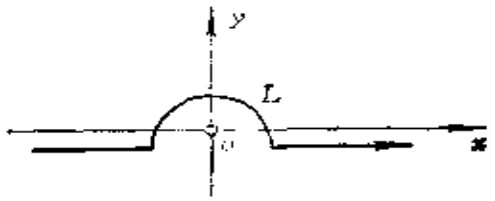


图 4-24

则 $\Phi(\xi)$ 简化为

$$-\Phi(\xi)=A(\xi)+\int_0^1\left[A\left(-\frac{\xi}{t}\right)+A(\xi t)\right](M_0(t)+N_0(t))dt$$

而

$$M_0(t)=\frac{1}{2\pi^2 i}\int_L\frac{t^{i\mu'}}{\left(\frac{\mathrm{sh}\,\pi\mu'}{\pi\mu'}\right)^2-1}d\pi\mu'-\frac{3\ln t}{2\pi^2 t}$$

$$N_0(t)=-\frac{1}{2\pi^2 t}\int_L\frac{\frac{\mathrm{sh}\,\pi\mu'}{\pi\mu'}t^{i\mu'}}{\left(\frac{\mathrm{sh}\,\pi\mu'}{\pi\mu'}\right)^2-1}d\pi\mu'-\frac{3\ln t}{2\pi^2 t}$$

沿 L 的积分如图 4-24 所示。

$M_0(t)$和 $N_0(t)$的值列在表 4-11-1 中。

表 4-11-1

t	M_0	N_0	t	M_0	N_0	t	M_0	N_0
0.0005	−0.023	0.023	0.025	0.063	−0.063	0.25	0.216	−0.125
0.001	−0.033	0.033	0.05	0.1204	−0.1142	0.30	0.220	−0.108
0.002	−0.037	0.037	0.08	0.158	−0.141	0.40	0.222	−0.076
0.003	−0.036	0.036	0.10	0.174	−0.148	0.55	0.218	−0.035
0.005	−0.026	0.026	0.125	—	−0.1514	0.70	0.212	−0.002
0.007	−0.0147	0.0147	0.15	0.198	−0.149	0.85	0.204	0.023
0.01	0.002	−0.002	0.20	0.210	−0.139	1.0	0.1975	0.042

第五章　解析延拓的应用(联结问题)

5-1　黎曼—施瓦茨对称原理

定理 1　设 B 和 B' 是 z 平面上半平面与下半平面对 x 轴对称的两个区域，并且它们的边界都包含 x 轴上一段线段 L（图 5-1）。

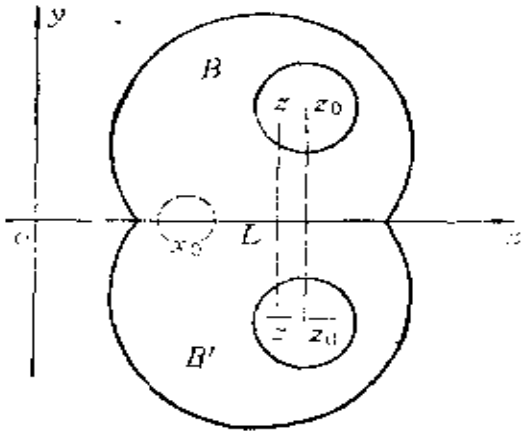


图　5-1

设函数 $f(z)$ 满足下列条件：

$f(z)$ 是 B 内单叶解析函数，

$f(z)$ 在 L 上取实数值，

则存在一个函数 $F(z)$ 满足下列条件：

$F(z)$ 是区域 $B+L+B'$ 内的单叶解析函数。

在 $B+L+B'$ 区域内的 $F(z)$ 有以下性质：当 $z\in B$ 时，$F(z)=f(z)$；当 $z\in L$ 时，$F(z)=f(z)$；当 $z\in B'$ 时，$F(z)=\overline{f}(z)$。

证明如下：

我们知道，在线段 L 上 $z=x$，$f(z)=f(x)$ 为实数函数。证明 $f(z)$ 在 B' 中解析并在 $B'+L$ 上是连续的。

令 $\bar{z}_0\in B'$，并且它的邻域 $|\bar{z}-\bar{z}_0|<\delta$ 包含在 B' 内，于是点 $z_0=\overline{\bar{z}_0}\in B$，它的邻域 $|z-z_0|<\delta$ 也在 B 内。

在 z_0 点的邻域内，$f(z)$ 可以展为幂级数如下：

$$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+\cdots+a_n(z-z_0)^n+\cdots$$

所以它的共轭方程也可以写为：

$$f(\bar{z})=\bar{a}_0+\bar{a}_1(\bar{z}-\bar{z}_0)+\cdots+\bar{a}_n(\bar{z}-\bar{z}_0)^n+\cdots$$

它是点 $\bar{z}_0$ 邻域内 $\overline{f(z)}$ 的展开式。$\bar{z}_0$ 是 B' 中与 B 中任一点 z_0 对称的点，$\overline{f(z)}$ 是 B' 中的解析函数。

我们在 B 内取 x_0 点的一个足够小的半邻域（$y>0$）。根据定理的条件，我们有

$$\lim_{z\to x_0,\ z\in B} f(z)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to 0,\ (y>0)}}[u(x,y)+iv(x,y)]$$
$$=f(x_0)=u(x_0,0)$$

由此推出

$$\lim_{z\to x_0,\ z\in B}\overline{f(z)}=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to 0,\ (y>0)}}[u(x,y)-iv(x,y)]=f(x_0)$$
$$=u(x_0,0)$$

我们又知道 $\bar{z}\to x_0$，$\overline{\bar{z}}\to x_0$，那么

$$\lim_{\bar{z}\to x_0,\ \bar{z}\in B'} f(\bar{z})=\lim_{\substack{z\to x_0\\ z\in B}}\overline{f(z)}=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to 0,\ (y>0)}}[u(x,y)$$
$$-iv(x,y)]=f(x_0)=\bar{f}(x_0)$$

这证明了 $\overline{f(z)}$ 在区域 $B'+L$ 上的连续性。于是可知 $\{B, f(z)\}$ 与 $\{B', \bar{f}(z)\}$ 互为直接解析开拓。

定理 2 设函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在 B 内是解析的，如 B 的边界的一部分是实轴上的一直线段 L。设 B 和 B' 是对实轴对称的，在 $B+L$ 上 $f(z)$ 和 $g(z)$ 是连续的，并且在 L 上满足

$f(z)=\overline{g(z)}$，则当 $z\in B'$ 时，有

$$f(z)=\bar{g}(z),\quad g(z)=\bar{f}(z)$$

定理 3 设 B 的一部分边界是单位圆周的一段圆弧 L，并且 B 在 L 的一侧（图5-2）。设函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在 B 内解析，在 L 上连续并且满足关系 $f(z)=\overline{g(z)}$，若 B' 表示 B 对于单位

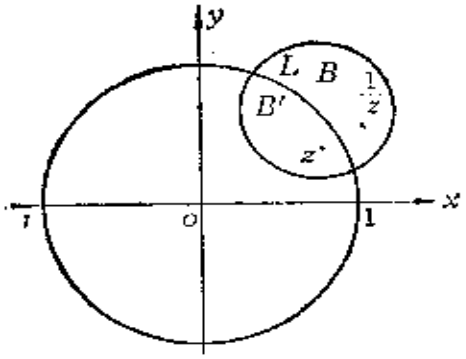


图 5-2

圆周的对称区域，则函数解析开拓 $f(z)=g(\overline{z})=\bar{g}\left(\frac{1}{z}\right)$ 且 $g(z)=\bar{f}(1/z)$。这里 $z\bar{z}=1$。

5-2 对于实轴的解析延拓

设弹性体落在实轴的一侧并以 B 表示，它在实轴上的边界用直线段 L 表示。以下讨论三种边界情况和复应力函数越过 L 的解析延拓。

a）自由边界的情况

复应力函数 $\varphi(z)$，$\psi(z)$ 在区域 B 内解析，在线段 L 上连续。因为若在边界上没有外力，所以在 L 上有以下条件

$$\overline{\varphi(z)}+\bar{z}\varphi'(z)+\psi(z)=0$$

若在边界上没有位移，有以下条件

$$\nu^*\overline{\varphi(z)}-\bar{z}\varphi'(z)-\psi(z)=0$$

综合以上两种情况，可以写为

$$\varkappa_0\overline{\varphi(z)}-\bar{z}\varphi(z)-\psi(z)=0$$

取 $\Phi^*(z)=z\varphi'(z)+\psi(z)$。所以在 $\varphi(z)$ 与 $\psi(z)$ 的解析点，$\Phi^*(z)$ 是解析的，同样在 $\varphi(z)$ 和 $\Phi^*(z)$ 的解析点，$\psi(z)$ 也是解析的。在 L 上 $z=\bar{z}$，所以在 L 上有 $\Phi^*(z)=\bar{z}\varphi'(z)+\psi(z)$，即

$$\kappa_0\overline{\varphi(z)}=\Phi^*(z)$$

如果 B 和 B' 是对于实轴的对称区域，由定理 2 可知，当 $z\in B'$ 时，有如下解析延拓（自由边界 $\kappa_0=-1$）

$$\Phi^*(z)=\kappa_0\bar{\varphi}(z),\quad \kappa_0\varphi(z)=\Phi^*(z)$$

b）固定边界的情况

这相当于 $\kappa_0=\nu^*$ 的情况。

c）滑动边界的情况

若垂直于 L 的方向没有位移，沿 L 的切线方向没有外力，允许沿 x 方向移动。也就是在 L 上，$v=0$，$P_x=0$（沿 x 方向的外力）。由此得出，在 L 上

$$\begin{aligned}&\nu^*\overline{\varphi(z)}-\bar{z}\varphi'(z)-\psi(z)\\&\quad=\nu^*\varphi(z)-z\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)}\\&\varphi(\bar{z})+\bar{z}\varphi'(z)+\psi(z)=\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)}\end{aligned}$$

则　　$\varphi(z)=\varphi(\bar{z})$，　$\Phi^*(z)=\overline{\Phi^*(\bar{z})}$

利用定理 1，可得

$$\varphi(z)=\bar{\varphi}(z),\quad \Phi^*(z)=\overline{\Phi}^*(z)$$

〔例题 29〕　在半无限板内的一点，作用着集中力 (X, Y)（图5-3）。求应力函数。

设在占有半平面 $y>0$ 的半无限板内的任一点 $(z_b=ib)$ 作用有集中力 (X, Y)，并且直线边界 $y=0$ 是自由的。

复应力函数 $\varphi(z)$，$\psi(z)$ 在 $z_b=ib$ 有孤立奇点。取 (x_1, y_1) 为新坐标系，其原点在 ib。新坐标系的复应力函数记为 $\varphi_1(z_1)$ 和 $\psi_1(z_1)$，它们在 $z_1=0$ 有孤立奇点。$z_1=z-ib$。于是

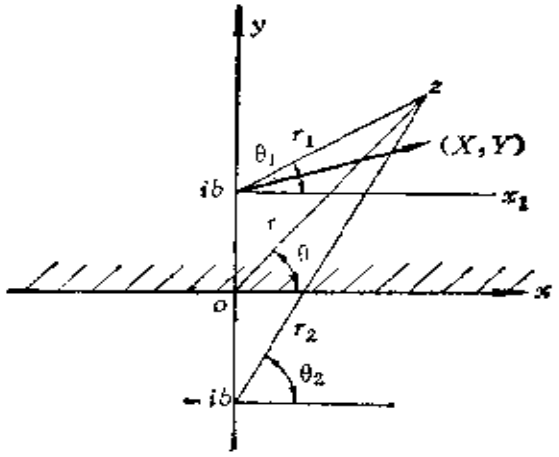


图 5-3

$$\varphi_1(z_1)=M_2\ln z_1,\quad \chi_1(z_1)=N_1 z_1\ln z_1$$

$$M_2=-(1+\nu^*)(X+iY)/8\pi$$

$$N_1=(3-\nu^*)(X-iY)/8\pi$$

由此可知$\varphi(z)$，$\chi(z)$ 的主部为 $(z_1=z-ib)$

$$\varphi(z)=M_2\ln(z-ib)$$

$$\chi(z)=N_1(z-ib)\ln(z-ib)+M_2(ib)\ln(z-ib)$$

那末，$\Phi^*(z)=z\varphi'(z)+\psi(z)$ 在 $z=ib$ 时有奇点，其主部为

$$\Phi^*(z)=N_1\ln(z-ib)+2M_2ib/(z-ib)$$

又因为实轴是自由边界，所以越过它的解析开拓可用 $\varphi(z)=-\overline{\Phi}^*(z)$，$\Phi^*(z)=-\bar{\varphi}(\bar{z})$ 表示。在开拓的区域中 $z=-ib$ 是它的奇点。故在此点解析开拓函数的主部为：

$$\varphi(z)=-\bar{\Phi}^*(z)=-\bar{N}_1\ln(z+ib)+\bar{M}_2(2ib)/(z+ib)$$

$$\Phi^*(z)=-\bar{\varphi}(z)=-\bar{M}_2\ln(z+ib)$$

在全平面内考虑如下的函数

$$\varphi_0(z)=\varphi(z)-\left\{M_2\ln(z-ib)-\bar{N}_1\ln(z+ib)+\frac{2bi\bar{M}_2}{2+ib}\right\}$$

$$\Phi_0^*(z)=\Phi^*(z)-\left\{N_1\ln(z-ib)+\frac{2biM_2}{z-ib}-\bar{M}_2\ln(z+ib)\right\}$$

它们对于有限的 z 是解析的，在 $z=ib$，与 $z=-ib$ 时的奇异性消失。在无穷远处，可知应力分量为零，因为离开受力点很远了。故在 $z=\infty$ 时不可能有奇点。由刘维耳定理可知 $\varphi_0(z)$ 及 $\Phi_0^*(z)$ 为常数。可以令此常数为零，故得

$$\varphi(z)=M_2\ln(z-ib)-\bar{N}_1\ln(z+ib)+M_2\frac{2bi}{z+ib}$$

$$\Phi^*(z)=N_1\ln(z-ib)+M_2\frac{2bi}{z-ib}-\bar{M}_2\ln(z+ib)$$

$X_x+Y_y=4\mathrm{Re}[\varphi'(z)]$，$Y_y-X_x+2iX_y=2[\bar{z}\varphi''(z)+\psi'(z)]$，把 $\varphi'(z)$，$\psi'(z)$ 等代入，解出应力分量。我们再把 $\varphi(z)$，$\varphi'(z)$ 和 $\psi(z)$ 代入下式，以求位移 u 和 v：

$$2\mu(u-iv)=[\nu^*\overline{\varphi(z)}-z\varphi'(z)-\psi(z)]$$
$$=[R_0X+S_0Y+i(R_1X+S_1Y)]+\text{常数}$$

式中

$$R_0=\frac{\nu^*-3}{4\pi}\ln r_1-\frac{5-2\nu^*+\nu^{*2}}{4\pi(1+\nu^*)}\ln r_2+\frac{1}{2\pi\Delta}\left[2\left(\frac{b}{r}\right)+(1-\nu^*)\sin\theta\right]\left(\frac{b}{r}-\sin\theta\right)-\frac{1+\nu^*}{4\pi\Delta^2}\left(\frac{b}{r}\right)A_0\sin\theta$$

$$S_0=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1-\nu^*}{1+\nu^*}\right)\theta_2-\frac{\cos\theta}{2\pi\Delta}(1-\nu^*)\left(\frac{b}{r}-\sin\theta\right)-\frac{1+\nu^*}{4\pi\Delta^2}\left(\frac{b}{r}\right)B_0\sin\theta$$

$$R_1=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1-\nu^*}{1+\nu^*}\right)\theta_2+\frac{\cos\theta}{2\pi\Delta}(1-\nu^*)\left(\frac{b}{r}-\sin\theta\right)-\frac{1+\nu^*}{4\pi\Delta^2}\left(\frac{b}{r}\right)B_0\sin\theta$$

$$S_1=\frac{3-\nu^*}{4\pi}\ln r_1-\frac{1-\nu^*}{\pi(1+\nu^*)}\ln r_2+\frac{1}{2\pi\Delta}\left[2-\frac{b}{r}\right.$$

$$\left.+(1-\nu^*)\sin\theta\right]\left(\sin\theta-\frac{b}{r}\right)$$

$$+\frac{1+\nu^*}{4\pi\Delta}A_0\left(\frac{b}{r}\right)\sin\theta$$

$$\Delta=r^2(\cos\theta+i\sin\theta)^2+b^2$$

$$A_0=\cos2\theta+2(b/r)\cdot\sin\theta-b^2/r^2$$

$$B_0=2\cos\theta(\sin\theta-b/r)$$

取 $\Phi(z)$ 和 $\psi(z)$ 的附加项（不影响应力分量）与此常数项相消，使 u 和 v 为单值。

5-3 对于圆弧的解析延拓

有一原点为中心的圆周（见图5-4）。$|z|=a$ 的全部或其中一段弧 L 为其边界。于是对于在边界上的点 z，则有

$$z\bar{z}=a^2,\quad \bar{z}=a^2/z$$

于是 $\Phi^*(z)=(a^2/z)\Phi'(z)+\psi(z)$，在自由边界的情况有：

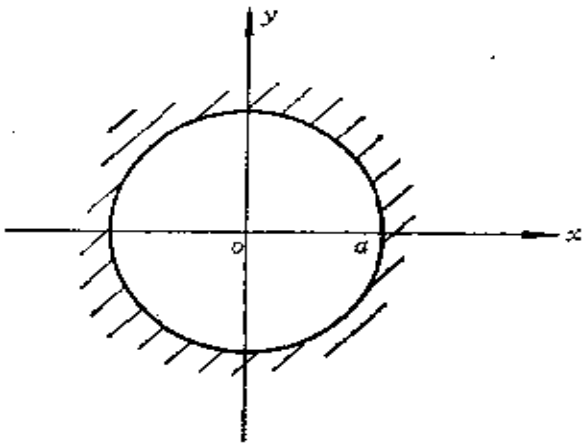


图 5-4

$$\Phi(z)=-\overline{\Phi}^*(a^2/z),\quad \Phi^*(z)=-\bar{\Phi}(a^2/z)$$

若边界 L 为固定时，

$$\nu^*\Phi(z)=\overline{\Phi}^*(a^2/z),\quad \Phi^*(z)=\nu^*\bar{\Phi}(a^2/z)$$

〔例题30〕 在具有自由圆孔的无限板内一点作用有集中力

(X, Y)，求应力函数。设圆孔的半径为 a，在点 b（$b>a$）有集中力（X，Y）作用，如图 5-5 所示。

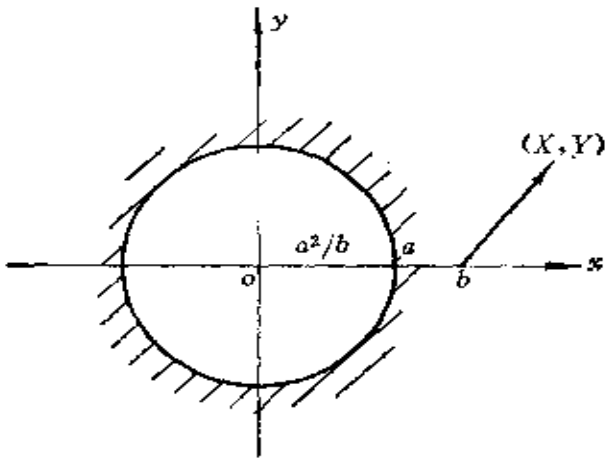


图 5-5

应力函数在 $z=b$ 有奇点。于是函数在点 b 的主部为：

$$\varphi(z)=M_2\ln(z-b)$$

$$\chi(z)=N_1(z-b)\ln(z-b)-M_2b\ln(z-b)$$

又知道 $\Phi^*(z)=(a^2/z)\varphi'(z)+\psi(z)$。那末，在 b 点 $\Phi^*(z)$ 的主部为

$$\Phi^*(z)=-\frac{M_2a^2}{z(z-b)}+N_1\ln(z-b)-M_2\frac{b}{z-b}$$

$$=N_1\ln(z-b)-M_2\frac{b-a^2/b}{z-b}-\frac{a^2}{zb}M_2$$

越过圆周到圆内解析延拓时，会在 a^2/b 点出现奇点。函数在 a^2/b 点的主部由 $\varphi(z)=-\overline{\Phi}^*(a^2/z)$ 得出

$$-\overline{\Phi}^*\left(\frac{a^2}{z}\right)=\varphi(z)=-\overline{N}_1\ln\left(z-\frac{a^2}{b}\right)+\overline{M}_2\frac{b-\frac{a^2}{b}}{\frac{a^2}{z}-b}$$

$$=-\overline{N}_1\ln\left(z-\frac{a^2}{b}\right)-\overline{M}_2\frac{\left(b-\frac{a^2}{b}\right)a^2/b^2}{z-b^2/a}+1-\frac{a^2}{b^2}$$

离开集中力作用点很远的地方的应力分量很小，但其合力须与(X, Y)平衡。在无穷远处，函数的主部表为：

$$\varphi(z)=M_2\ln z,\quad \chi(z)=N_1 z\ln z$$

所以
$$\Phi^*(z)=M_2a^2/z^2+N_1(1+\ln z)$$

于是在圆内，函数在原点的主部为

$$\varphi(z)=-\overline{\Phi}^*(a^2/z)=-\overline{N}_1\ln(a^2/z)$$

$$\Phi^*(z)=-\bar{\varphi}(a^2/z)=-\overline{M}_2\ln(a^2/z)$$

除上述各点外，$\varphi(z)$和$\chi(z)$不能再有其它奇点，于是

$$\varphi(z)=M_2\ln(z-b)-\overline{N}_1\ln\left(z-\frac{a^2}{b}\right)$$

$$-\overline{M}_2\frac{b-\dfrac{a^2}{b}}{z-\dfrac{a^2}{b}}\left(\frac{a^2}{b^2}\right)+\overline{N}_1\ln z$$

$$\chi(z)=N_1\ln(z-b)-M_2\frac{b-\dfrac{a^2}{b}}{z-\dfrac{a^2}{b}}$$

$$-\overline{M}_2\ln\left(z-\frac{a^2}{b}\right)+\overline{M}_2\ln z$$

注意这里已经略去不影响应力分量的项了。这几个例都是边界上没有负荷或位移的情况。在边界上有负荷或位移时，可以用Plemelj公式求解。

5-4 以实轴为界的半平面情况

若以$y>0$的上半平面为B，$y<0$的下半平面为B'。则有

$$\varphi(z)=\varphi(z)\qquad z\in B$$

$$\varphi(z)=-\bar{\varphi}(z)=-\{z\bar{\varphi}'(z)+\bar{\psi}(z)\}\qquad z\in B'$$

应力和位移分量分别表示如下：

$$X_x+Y_y=4\mathrm{Re}[\varphi'(z)]$$

$$Y_y-iX_y=\varphi'(z)-\varphi'(\bar{z})+(z-\bar{z})\varphi''(\overline{z})$$

$$2\mu(u+iv)=\nu^*\varphi(z)+\varphi(\bar{z})+(\bar{z}-z)\varphi'(\overline{z})$$

在无限远处的应力为零，则 $\varphi'(z)$ 表为 $1/z$ 的函数。在实轴上，位移和应力场分别为：

$$Y_y-iX_y=\varphi'^{+}(x)-\varphi'^{-}(x)$$

$$2\mu(u+iv)=\nu^*\varphi^{+}(x)+\varphi^{-}(x)$$

并且

$$2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\nu^*\varphi'^{+}(x)+\varphi'^{-}(x)$$

这里“+”表示 $y>0$ 的上半平面，“−”表示 $y<0$ 的下半平面。

1．半平面上的第一个基本问题

若在 $y=0$ 的边界上有 Y_y-iX_y。由 Plemelj 公式自然可知

$$Y_y-iX_y=\varphi'^{+}(x)-\varphi'^{-}(x)$$

的唯一解是

$$\varphi'(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{Y_y-iX_y}{t-z}dt$$

t 是边界上的点。这里 Y_y-iX_y 在有限 t 内要满足 H 条件，或在 $y=0$ 上的有限点有有限间断点。

若在 $|x|\leqslant a$，$Y_y-iX_y=$常量，则

$$\varphi'(z)=-\frac{Y_y-iX_y}{2\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{dt}{t-z}=-\frac{Y_y-iX_y}{2\pi i}\ln\left(\frac{z-a}{z+a}\right)$$

若是 $2aY_y\to Y$，$2aX_y\to X$，当 $a\to 0$ 时，则

$$\varphi'(z)=-\frac{X+iY}{2\pi z}$$

若在 B 内的点上有集中力和力矩的作用，在边界上没有外负荷。设与此力和力矩所产生的应力分量相对应的应力函数为 $\varphi_0(z)$ 和 $\psi_0(z)$。在边界上有

$$Y_y - iX_y = \varphi_0'(x) + \overline{\varphi_0'(x)} + x\,\overline{\varphi_0''(x)} + \overline{\psi_0(x)}$$

我们希望找到新的应力函数 $\varphi_1(z)$，使 $\varphi_1(z)$ 在 B 中无奇点并且在边界上还要满足以下条件：

$$\varphi_1^+(z) - \varphi_1^-(z) = -(Y_y - iX_y) = -\varphi_0'(x) - \overline{\varphi_0'(x)} - x\overline{\varphi_0''(x)} - \overline{\psi_0(x)}$$

函数 $z\overline{\varphi_0'(z)} + \overline{\psi_0(z)}$ 在 B 中是解析的。可以取

$$\varphi_1(z) = \begin{cases} -z\overline{\varphi_0'(\bar{z})} - \overline{\psi_0(\bar{z})}, & z \in B \\ \varphi_0(z), & z \in B' \end{cases}$$

于是 $$\psi_1(z) = -z\varphi_1'(z) - \bar{\varphi}_1(z), \quad z \in B$$

在半平面上的应力函数为

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) - z\overline{\varphi_0'}(z) - \bar{\psi}_0(z)$$

$$\psi(z) = \psi_0(z) + z\overline{\varphi_0'}(z) - \bar{\varphi}_0(z) + z\bar{\varphi}_0'(z) + z^2\overline{\varphi_0''}(z)$$

2．半平面上的第二个基本问题

若在 $y = 0$ 的边界上，有位移

$$u + iv = u(x) + iv(x)$$

作用。与第一个基本问题相似，可以得到

$$\nu^*\varphi^+(x) + \varphi^-(x) = 2\mu(u + iv)$$

这里假设 $\lim\limits_{y \to 0^+} y\varphi'(z) = 0$，当得到 $\varphi(z)$ 以后，可以说明这点。在 B^+ 和 B^- 内的 $\varphi(z)$ 通过上述边界条件而联在一起。我们设一个新函数 $\Omega(z)$，使它满足

$$\Omega(z) = \begin{cases} \nu^*\varphi(z) & z \in B \\ -\varphi(z) & z \in B' \end{cases}$$

于是边界条件改为

$$\Omega^+(z) - \Omega^-(z) = 2\mu[u(x) + iv(x)]$$

对于这个形式，可用如下公式求解

$$\Omega(z)=\frac{\mu}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u(t)+iv(t)}{t-z}\,dt$$

并且$|z|\to\infty$，$\Omega(z)=O(1/z)$。

若是在B内有集中力作用，此时当$|z|\to\infty$，而$\Omega(z)$与$\ln z$成比例，就不能用上述公式求$\Omega(z)$。我们取在$y=0$上位移的导数

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=u'(x)+iv'(x)$$

因为在边界上有$\Omega^+(z)-\Omega^-(z)=2\mu(u+iv)$，所以可以得到如下结果。

$$\Omega'^+(z)-\Omega'^-(z)=2\mu[u'(x)+iv'(x)]$$

自然

$$\Omega'(z)=\frac{\mu}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u'(x)+iv'(x)}{t-z}dt$$

当$|z|\to\infty$，$\Omega'(z)=O(1/z)$。这里$u'(x)+iv'(x)$在无限远处以及无限远处以内都要满足H条件。

5-5 以圆弧为边界的情况

设在$|z|=a$以内的区域叫B，在它以外的区域为B'。

1．弹性力学第一个基本问题

若在圆弧边界C上，有边界条件如下：

$$\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}=f(t)$$

这里$t=ae^{i\theta}$。a是圆弧半径。

$$f(t)=i\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}(X_r+iX_{r\theta})e^{i\theta}\cdot a\,d\theta$$

X_r和$X_{r\theta}$是作用于圆弧边上的径向应力与切向应力分量。

为了讨论经过边界的开拓，取边界是自由的，于是得到

$$\varphi(z)=-[z\varphi'(a^2/z)+\overline{\psi}(a^2/z)],\quad z\in B'$$

$$\psi(z)=-\overline{\varphi}(a^2/z)-(a^2/z)\varphi'(z),\quad z\in B$$

$\varphi(z)$和$\psi(z)$在B内是解析的。在B'内，$\varphi(z)$由上式确

定。$\varphi(z)$ 在 B' 内是解析的，所以当 $|z|$ 很大时，

$$\varphi'(z)=-\bar{\varphi}'(\overline{0})+O(1/z^2)$$

若是取 B 是 $|z|>a$ 的圆外区域，B' 是 $|z|<a$ 的圆内区域，则

$$\varphi'(z)=-\bar{\varphi}'(a^2/z)+\bar{\varphi}''(a^2/z)a^2/z+a^2\bar{\varphi}'(a^2/z)/z^2$$

当 $z\to 0$ 时

$$\bar{\varphi}'(a^2/z),\ \bar{\varphi}''(a^2/z)a^2/z\to 0$$

但是

$$\bar{\varphi}'(a^2/z)a^2/z^2=(B'-iC')a^2/z^2+\frac{\nu^*(X+iY)}{2z\pi(1+\nu^*)}+\text{常数}$$

在原点是上式的极点，于是

$$\varphi'(z)=(B'-iC')a^2/z^2+\frac{\nu^*(X+iY)}{2\pi z(1+\nu^*)}+\text{常数}$$

于是可以把 $\psi(z)$ 代以 $-\bar{\varphi}(a^2/z)-(a^2/z)\varphi'(z)$，就得到

$$2\mu(u_r+iv_\theta)=\left[\nu^*\varphi(z)+\bar{\varphi}(a^2/z)+\left(\frac{a^2}{z}-z\right)\bar{\varphi}'(\overline{z})\right]e^{-i\theta}$$

$$X_r+X_\theta=4\mathrm{Re}[\varphi'(z)]$$

$$X_r+iX_{r\theta}=\varphi'(z)-a^2\varphi'(a^2/\bar{z})+\left(1-\frac{a^2}{z\bar{z}}\right)[\overline{\varphi'(z)}-\bar{z}\ \varphi''(z)]$$

在边界上，$t\bar{t}=a^2$，于是

$$2\mu(u+iv)=\nu^*\varphi^+(t)+\varphi^-(t)$$

$$X_r+iX_{r\theta}=\varphi'^+(t)-\varphi'^-(t)$$

与应力边界条件相似，对于位移边界条件，可得

$$\varphi(z)=\frac{1}{\nu^*}\left\{z\bar{\varphi}'\left(\frac{a^2}{z}\right)+\bar{\psi}\left(\frac{a^2}{z}\right)\right\},\quad z\in B'$$

$$\psi(z)=\nu^*\bar{\varphi}(a^2/z)-a^2\varphi'(z)/z,\quad z\in B$$

在边界上已知 $X_r+iX_{r\theta}=\varphi'^+(t)-\varphi'^-(t)$，则解为：

$$\varphi'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=a}\frac{X_r+iX_{r\theta}}{t-z}\,dt+\varphi^*(z)$$

$\varphi^*(z)$ 除原点和无限远点外都是解析的，$\varphi'(z)$ 在原点和无限远点是有限的，所以 φ^*必为常数。令 $\varphi^*(z)=\alpha^*$。

$$\varphi'(\infty)=\alpha^*,\quad \varphi'(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=a}\frac{X_r+iX_{r\theta}}{t}dt+\alpha^*$$

又因为

$$\overline{\varphi'(\infty)}=-\varphi'(0)$$

所以可知

$$\alpha^*+\overline{\alpha^*}=-\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=a}\frac{X_r+iX_{r\theta}}{t}dt$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}[X_r(ae^{i\theta})+iX_{r\theta}(ae^{i\theta})]id\theta$$

这里边界上的诸力必须平衡，所以

$$\int_0^{2\pi}[X_r+iX_{r\theta}]d\theta=0$$

又知道当$|z|$很大时

$$\varphi'(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=a}\frac{1}{z}\left(1+\frac{t}{z}+\frac{t^2}{z^2}+\cdots\right)(X_r+iX_{r\theta})dt+\alpha^*$$

所以可知

$$\int_{|z|=a}(X_r+iX_{r\theta})dt=0$$

这是诸力的力矩和为零的条件。

下面研究圆孔外的无限区域。

已知在边界上的 $X_r+iX_{r\theta}$。又在圆孔外的区域中，

$$\varphi'(z)=-\frac{X+iY}{2\pi(1+\nu^*)}\left(\frac{1}{z}\right)+\Gamma+O(1/z^2)$$

$$\psi'(z)=\frac{\nu^*(X-iY)}{2\pi(1+\nu^*)}\left(\frac{1}{z}\right)+\Gamma'+O(1/z^2)$$

在圆孔内当$|z|$很小时，$\varphi'(z)$有二重极点。在边界上就有

$$\varphi'^+(t)-\varphi'^-(t)=X_r+iX_{r\theta}$$

这里“+”表圆孔外的区域，“−”表圆内区域。边界上 $t=ae^{i\theta}$。

$$\varphi'(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=a}\frac{X_r+iX_{r\theta}}{t-z}dl+\varphi^*(z)$$

于是可知

$$\varphi^*(z)=\alpha_0+\alpha_1/z+\alpha_2/z^2$$

因为 $\varphi'(z)$ 与 $\varphi^*(z)$ 的性质在原点和无限远点要一致，所以

$$\alpha_0=\Gamma,\quad \alpha_1=-\frac{\nu^*(X+iY)}{2\pi(1+\nu^*)},\quad \alpha_2=a^2\bar{\Gamma}'$$

$$X+iY=i\int_0^{2\pi}(X_r+iX_{r\theta})a\,d\theta$$

同时得到

$$\psi(z)=-\bar{\varphi}(a^2/z)-(a^2/z)\varphi'(z)$$

再来研究圆内有集中力及力矩作用的情况。

设在一圆盘内，周边没有应力而在圆盘中有力和力偶矩作用。力和力偶矩是平衡的。

令 $\varphi_0(z)$ 和 $\psi_0(z)$ 是与此集中力和力矩相应的应力函数，在盘中有奇点而在其它处是解析的。

于是当 $|z|$ 很大时，$\varphi_0(z)=O(1/z)$，$\psi_0(z)=Az^{-1}+O(1/z^2)$。$A$ 是实常数。

由 $\varphi_0(z)$ 和 $\psi_0(z)$ 而引起在 $|z|=a$ 周边上的应力场为

$$X_r+iX_{r\theta}=\varphi_0'(t)+\overline{\varphi_0'(t)}-\overline{t\varphi_0''(t)}-t^{-1}\overline{t\psi_0'(t)}$$

若在此应力场上加上某应力函数 $\varphi_1(z)$ 和 $\psi_1(z)$，令 $\varphi_1(z)+\varphi_0(z)$，$\psi_1(z)+\psi_2(z)$ 在 $|z|=a$ 的边界上产生的应力场为零，同时在 $|z|<a$ 内它不改变 $\varphi_0(z)$，$\psi_0(z)$ 的奇点（即不加也不减奇点数目）。于是

$$-(X_r+iX_{r\theta})=\varphi_0'(t)+\overline{\varphi_0'(t)}-\overline{t\varphi_0''(t)}-t^{-1}\overline{t\psi_0'(t)}$$
$$=-[\varphi_1'^{+}-\varphi_1'^{-}]$$

则

$$\varphi_1'^{+}(t)-\varphi_1'^{-}(t)=-\varphi_0'(t)-\overline{\varphi_0'(t)}+\frac{a^2}{t}\overline{\varphi_0''(t)}+\frac{a^2}{t^2}\overline{\psi_0'}\left(\frac{a^2}{t}\right)$$

而式中

$$\varphi_1'(z)=-\overline{\varphi_0'}\left(\frac{a^2}{z}\right)+\frac{a^2}{z}\overline{\varphi_0''}\left(\frac{a^2}{z}\right)+\frac{a^2}{z^2}\overline{\psi_0'}\left(\frac{a^2}{z}\right)+\varphi^*(z), \qquad |z|<a$$

$$\varphi_1'(z)=\varphi_0'(z)+\varphi^*(z), \qquad |z|>a$$

$\varphi^*(z)$ 除原点和无限远点外是解析的并在原点和无限远点与 $\varphi_1'(z)$ 的性质一样。于是 $\varphi^*(z)=\alpha^*$ 与前述相同，当 $|z|$ 很大时，

$$\varphi_1'(z)=-\overline{\varphi_1'(0)}+O(1/z^2)$$

利用 $|z|<a$ 和 $|z|>a$ 的 $\varphi_1'(z)$ 以及 $\psi_0(z)$，当 $z=0$ 和 $|z|=\infty$ 把 $\varphi_1'(z)$ 代入上式，即可求到

$$\alpha^*+\bar{\alpha}^*=A/a^2$$

把 $\varphi_1'(z)$ 积分后，得到

$$\varphi_1(z)=-z\overline{\varphi_0'}(a^2/z)-\bar{\psi}_0\left(\frac{a^2}{z}\right)+\frac{A}{2a^2}z, \qquad |z|<a$$

$$\varphi_1(z)=\varphi_0(z)+\frac{A}{2a^2}z, \qquad |z|>a$$

略去相当于刚体运动的项后，可得

$$\psi_1(z)=-\bar{\varphi}_1(a^2/z)-a^2/z\cdot\varphi_1'(z)$$

而函数

$$\varphi_0(z)=-\sum_{j=0}^{n}\frac{X_j+iY_j}{2\pi(1+\nu^*)}\ln(z-z_j)$$

$$\psi_0(z)=\sum_{j=0}^{n}\frac{\nu^*(X_j-iY_j)}{2\pi(1+\nu^*)}\ln(z-z_j)+\sum_{j=0}^{n}\frac{X_j+iY_j}{2\pi(1+\nu^*)}\frac{\bar{z}_j}{(z-z_j)}+\sum_{k=0}^{n}i\frac{M_k}{2\pi(z-z_k)}$$

于是总应力函数为 $\varphi(z)=\varphi_0(z)+\varphi_1(z)$，$\psi(z)=\psi_0(z)+\psi_1(z)$。式中 X_j+iY_j 是作用于 z_j 点的集中力，M_k 为作用于点 z_k 的集中力偶矩。

2. 弹性力学第二个基本问题

已知圆盘周界上的位移 $u+iv$，与第一个基本问题相似，可得

$$\varphi^+(t)-\varphi^-(t)=2\mu(u+iv)/\nu^*$$

由 Plemelj 公式可知

$$\varphi(z)=-\frac{\mu}{\nu^*\pi i}\int\frac{u+iv}{t-z}dt+\alpha_0+\alpha_1 z$$

又知道当 $z\in B$ 时

$$\psi(z)=\nu^*\bar{\varphi}(a^2/z)-a^2\varphi'(z)/z$$

取 $z=0$ 时，$\psi(0)=0$，由此得出

$$\nu^*\bar{\alpha}_1-\alpha_1=\frac{\mu}{\nu^*\pi i}\int\frac{u+iv}{t^2}dt$$

$$\nu^*\bar{\alpha}_0=\frac{2a^2\mu}{\nu^*\pi i}\int\frac{u+iv}{t^3}dt$$

这里是沿圆盘周界的积分。现在讨论圆盘内的情况。

若是在无限区域圆孔边上已知位移 $u+iv$，则由 Plemelj 公式可知

$$\varphi(z)=-\frac{1}{\nu^*\pi i}\int\frac{u+iv}{t-z}dt+\alpha_0+\frac{\alpha_1}{z}$$

这里沿圆周逆时针方向积分，故有“－”号。原点没有极点。与

$$\varphi(z)=\frac{1}{\nu^*}\left\{-\frac{\nu^*(X+iY)}{2\pi(1+\nu^*)}\ln z+\Gamma'\frac{a^2}{z}\right\}+\text{常数}$$

对照，因为没有外力，$X+iY$ 为零。故 $\alpha_1=a^2\bar{\Gamma}'/\nu^*$。$\Gamma'$ 的意义同前。

5-6 曲线边界

我们把曲线边界区域变为单位圆区域，再利用解析延拓的原理分析问题

在边界上的应力为零（自由边界）

$$\varphi^+(t)+\frac{\omega(t)}{\omega'(t)}\overline{\varphi'^+(t)}+\overline{\psi^+(t)}=0 \qquad \overline{t}=1$$

在边界上的位移为零（固定边界）

$$\nu^*\varphi^+(t)-\frac{\omega(t)}{\omega'(t)}\overline{\varphi'^+(t)}-\overline{\psi^+(t)}=0$$

1．弹性力学第一个基本问题

$$\varphi(\zeta)=\varphi(\zeta), \qquad \zeta\in B$$

$$\varphi(\zeta)=-\frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\bar{\varphi}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)-\bar{\psi}\left(\frac{1}{\zeta}\right), \quad \zeta\in B'$$

$$\psi(\zeta)=-\bar{\varphi}\left(\frac{1}{\zeta}\right)-\frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)}\varphi'(\zeta), \qquad \zeta\in B$$

这里 t 在圆周上，ζ 是圆内的点。B 是圆内区域。与此相应的位移为：

$$2\mu(u+iv)=\nu^*\varphi(\zeta)+\varphi\left(\frac{1}{\zeta}\right)-\left[\omega(\zeta)-\omega\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right]\frac{\overline{\varphi'(\zeta)}}{\omega'(\zeta)}$$

与此相应的应力为：

$$X_r+iX_\theta=\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}-\frac{\varphi'\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\zeta\bar{\zeta}\omega'(\zeta)}+\left(1-\frac{\omega'\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\zeta\bar{\zeta}\omega'(\zeta)}\right)\frac{\overline{\varphi'(\zeta)}}{\overline{\omega'(\zeta)}}+\left[\omega\left(\frac{1}{\zeta}\right)-\omega(\zeta)\right]\frac{\bar{\zeta}}{\zeta\omega'(\zeta)}\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{\overline{\varphi'(\zeta)}}{\omega'(\zeta)}\right)$$

在 $|\zeta|=1$ 的圆周上，

$$2\mu(u+iv)=\nu^*\varphi^+(t)+\varphi^-(t)$$

$$X_r+iX_\theta=[\varphi'^+(t)-\varphi'^-(t)]/\omega'(t)$$

若将物理面上的有限单连通区域变到坐标面上的单位圆内。$\omega(\zeta)$ 在 B' 内有有限个数的极点。$\omega(\zeta)$ 表为如下形式

$$\omega(\zeta)=\frac{\alpha_1'}{(\zeta-\zeta_1)^{m_1}}+\frac{\alpha_2'}{(\zeta-\zeta_2)^{m_2}}+\cdots+\frac{\alpha_s'}{(\zeta-\zeta_s)^{m_s}}+\alpha_n\zeta^n+\cdots+\alpha_1\zeta+\alpha_0$$

于是当 $\zeta\in B$ 时，

$$\varphi(\zeta)=a_0+a_1\zeta+\cdots,\quad \psi(\zeta)=b_0+b_1\zeta+\cdots$$

它们在 B 内解析。当 $\zeta\in B'$ 时，函数

$$\bar{\varphi}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)=a_1+2\bar{a}_2\left(\frac{1}{\zeta}\right)+\cdots,\quad \bar{\psi}\left(\frac{1}{\zeta}\right)=b_0+\bar{b}\left(\frac{1}{\zeta}\right)+\cdots$$

在 B' 内解析。并且

$$\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)=-\frac{m_1\overline{\alpha_1'}}{\left(\frac{1}{\zeta}-\zeta_1\right)^{m_1+1}}-\frac{m_2\overline{\alpha_2'}}{\left(\frac{1}{\zeta}-\zeta_2\right)^{m_2+1}}-\cdots-\frac{m_s\overline{\alpha_s'}}{\left(\frac{1}{\zeta}-\zeta_s\right)^{m_s+1}}+n\bar{\alpha}_n\bar{\zeta}^{n-1}+\cdots+\bar{\alpha}_1$$

所以 $|\zeta|>1$，$\bar{\omega}'(1/\zeta)\neq 0$。在 $|\zeta|>1$ 区域内，$\varphi(\zeta)$ 与 $\omega(\zeta)$ 有相同数目和重数的奇点。

若将物理面上无限区域变为单位圆外的区域。此时，用 B 表示 $|\zeta|>1$ 的区域，用 B' 表示 $|\zeta|<1$ 的区域。

我们知道 $z=h\zeta+O(1/\zeta)\qquad \zeta\in B$，则

$$\varphi(\zeta)=-\frac{X+iY}{2\pi(1+\nu^*)}\ln\zeta+\Gamma h\zeta+O(1)$$

$$\psi(\zeta)=\frac{\nu^*(X-iY)}{2\pi(1+\nu^*)}\ln\zeta+\Gamma' h\zeta+O(1)$$

当 $\zeta\in B'$ 时，有

$$\bar{\varphi}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)=-\frac{X-iY}{2\pi(1+\nu^*)}\zeta+1'h+O(\zeta^2)$$

所以 $\bar{\varphi}'(1/\zeta)$ 在 $|\zeta|\leqslant 1$ 和 $\zeta=0$ 是解析的。

$$\bar{\psi}\left(\frac{1}{\zeta}\right)=-\frac{\nu^*(X+iY)}{2\pi(1+\nu^*)}\ln\zeta+\overline{\Gamma'}\frac{h}{\zeta}+O(1),$$

所以 $\bar{\psi}(1/\zeta)$ 除 $\zeta=0$ 外在 $|\zeta|\leqslant 1$ 是解析的。又知道

$$z=\omega(\zeta)=h\zeta+O(\zeta^{-1})$$

在 $|\zeta|<1$ 内有极点。在 $|\zeta|\geqslant 1$

$$\omega'(\zeta)=h+O(\zeta^{-2})\neq 0$$

于是 $\varphi(\zeta)$, $\omega(\zeta)$ 和 $\bar{\psi}(1/\zeta)$ 在 $|\zeta|<1$ 的奇点一样, $\varphi'(\zeta)$, $\omega'(\zeta)$ 和下式

$$\overline{\Gamma'}\frac{h}{\zeta^2}+\frac{\nu^*(X+iY)}{2\pi(1+\nu^*)}\left(-\frac{1}{\zeta}\right)$$

在 $|\zeta|<1$ 内的奇点一样。

$\varphi'(\zeta)$ 和 $\psi'(\zeta)$ 在 $|\zeta|>1$ 中是解析的。则由 Plemelj 公式可得

$$\varphi'(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{X_t+iX_{t\theta}}{t-\zeta}\omega'(t)dt+\varphi^*(\zeta)$$

式中 $\varphi^*(\zeta)$ 与 $\varphi'(\zeta)$ 在 $|\zeta|<1$ 内的奇点要一样，把 $\varphi'(\zeta)$ 代入下式中：

$$\psi'(\zeta)=\frac{1}{\zeta^2}\overline{\varphi'}\left(\frac{1}{\zeta}\right)-\frac{d}{d\zeta}\left[\frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)}\varphi'(\zeta)\right]$$

而 $\psi'(\zeta)$ 应与 $\varphi'(\zeta)$ 在 $|\zeta|<1$ 中有相同的奇点。这样就可以求到 $\varphi^*(\zeta)$。

$\varphi'(\zeta)$ 和 $\psi'(\zeta)$ 在 $|\zeta|>1$ 有奇点。如在点 ζ_0 有集中力 $X+iY$ 和力偶矩 M 作用。于是

$$\varphi_1(\zeta)=-\frac{X+iY}{2\pi(1+\nu^*)}\ln(\zeta-\zeta_0)$$

$$\psi_1(\zeta)=\frac{\nu^*(X-iY)}{2\pi(1+\nu^*)}\ln(\zeta-\zeta_0)+\frac{X+iY}{2\pi(1+\nu^*)}\cdot\frac{\bar{\zeta}_0}{(\zeta-\zeta_0)}+\frac{iM}{2\pi(\zeta-\zeta_0)}$$

当 $\zeta \in B'$ 时，

$$\varphi_1(\zeta)=-\frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)}}\cdot\frac{X-iY}{2\pi(1+\nu^*)}\cdot\frac{\zeta}{1-\zeta\bar{\zeta}_0}$$

$$-\frac{\nu^*(X+iY)}{2\pi(1+\nu^*)}\ln\left(\frac{1-\zeta\bar{\zeta}_0}{\zeta}\right)$$

$$+\frac{X-iY}{2\pi(1+\nu^*)}\cdot\frac{\zeta\zeta_0}{1-\zeta\bar{\zeta}_0}-\frac{iM\zeta}{1-\zeta\bar{\zeta}_0}$$

在 B' 内，$\varphi_1(\zeta)$ 的主部如下：

$$\frac{O(\zeta^{-1})}{\overline{\omega'\left(\frac{1}{\zeta}\right)}}\cdot\frac{X-iY}{2\pi(1+\nu^*)}\cdot\frac{\zeta}{1-\zeta\zeta_0}-\frac{\nu^*(X+iY)}{2\pi(1+\nu^*)}\ln\left(\frac{1-\zeta\bar{\zeta}_0}{\zeta}\right)$$

$$+\frac{X-iY}{2\pi(1+\nu^*)}\cdot\frac{\zeta\zeta_0}{1-\zeta\bar{\zeta}_0}-\frac{iM\zeta}{1-\zeta\bar{\zeta}_0}$$

于是在 B' 外 $\varphi_1(\zeta)$ 的主部与 B' 内 $\varphi_1'(\zeta)$ 主部的导数为：

$$-\frac{X+iY}{2\pi(1+\nu^*)}\cdot\frac{1}{\zeta-\zeta_0}+\frac{d}{d\zeta}\left\{\frac{O(\zeta^{-1})}{\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)}\cdot\frac{X-iY}{2\pi(1+\nu^*)}\right.$$

$$\times\frac{\zeta}{1-\zeta\bar{\zeta}_0}-\frac{\nu^*(X+iY)}{2\pi(1+\nu^*)}\ln\left(\frac{1-\zeta\bar{\zeta}_0}{\zeta}\right)$$

$$\left.+\frac{X-iY}{2\pi(1+\nu^*)}\cdot\frac{\zeta\zeta_0}{1-\zeta\bar{\zeta}_0}-\frac{iM\zeta}{1-\zeta\bar{\zeta}_0}\right\}$$

把这项与上述 $\varphi'(\zeta)$ 相加后，即得所求应力函数的导数。若再有其它集中力和力偶矩作用时同此法。

2. 弹性力学第二个基本问题

若将物理面上有限区域变为坐标面上单位圆内区域。已知

$$z=\omega(\zeta)=h(\zeta+m\zeta^n)\qquad(0\leqslant m<1/n)$$

边界上的位移为 $u+iv$，与应力边界条件相似可知

$$\varphi^+(t)-\varphi^-(t)=\frac{2\mu}{\nu^*}(u+iv)$$

则

$$\varphi(\zeta)=\frac{\mu}{\nu^*\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{u+iv}{t-\zeta}dt+A_0+A_1\zeta+\cdots+A_n\zeta^n$$

把$\varphi(z)$代入下式

$$\psi(\zeta)=\nu^*\bar{\varphi}\left(\frac{1}{\zeta}\right)-\frac{\bar{\omega}(1/\zeta)}{\omega'(\zeta)}\varphi'(\zeta),\qquad \zeta\in B$$

$\psi(\zeta)$在B内是解析的。这样就得到相应的A_0，A_1，…，A_n之值。$\varphi(\zeta)$在$|\zeta|\leqslant 1$内是解析的。

将物理面上某闭曲线外的区域变为到坐标面上圆域外的区域。若在无限远处应力和旋转为零，且$X+iY=0$。设

$$z=\omega(\zeta)=h(\zeta+m/\zeta^n)\quad\left(n>2,\ 0\leqslant m<\frac{1}{n}\right)$$

则

$$\varphi(\zeta)=\frac{1}{\nu\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{u+iv}{t-\zeta}dt+B_0+\frac{B_1}{\zeta}+\frac{B_2}{\zeta^2}+\cdots+\frac{B_n}{\zeta^n}$$

把它代入下式

$$\psi(\zeta)=\nu^*\bar{\varphi}\left(\frac{1}{\zeta}\right)-\frac{\bar{\omega}(1/\zeta)}{\omega'(\zeta)}\varphi'(\zeta)$$

$\psi(\zeta)$在$|\zeta|\geqslant$应是解析的。

若在无限远处，应力及旋转为零，但$X+iY\neq 0$，则应求$\varphi'(\zeta)$。

$$\varphi'(\zeta)=\frac{1}{\nu^*\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{u'+iv'}{t-\zeta}dt+B_0+\frac{B_1}{\zeta}+\cdots+\frac{B_{n+1}}{\zeta^{n+1}}$$

代入下式

$$\psi(\zeta)=\nu^*\bar{\varphi}\left(\frac{1}{\zeta}\right)-\frac{\bar{\omega}(1/\zeta)}{\omega'(\zeta)}\varphi'(\zeta)$$

应使$\psi(\zeta)$在$|\zeta|\geqslant 1$内是解析的。

第六章　复变函数在空间问题中的应用

§1　二维与三维应力状态的关系

6-1　圆柱坐标系的基本方程

设柱坐标系 z'，r，θ，直角坐标系 x，y，z。于是柱坐标系内的平衡方程为：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial Z'_{z'}}{\partial z'}+\frac{\partial Z'_{r}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial Z'_{\theta}}{\partial \theta}+\frac{Z'_{r}}{r}+q_{z'}=0\\
&\frac{\partial Z'_{r}}{\partial z'}+\frac{\partial R_{r}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial R_{\theta}}{\partial \theta}+\frac{R_{r}-R_{\theta}}{r}+q_{r}=0\\
&\frac{\partial Z'_{\theta}}{\partial z'}+\frac{\partial R_{\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial R_{\theta}}{\partial \theta}+2\frac{R_{\theta}}{r}+q_{\theta}=0
\end{aligned}\right\}\qquad (6\text{-}1\text{-}1)$$

这里 $Z'_{z'}$，R_r，θ_0 是单元面积上沿 z'，r，θ 方向的正应力。Z'_{θ}，Z'_{r}，R_{θ} 是单元面积上的剪应力。$q_{z'}$，q_r，q_{θ} 是相应于坐标方向的体积力分量。

若令 w 代表 z' 方向的位移，u 代表径向位移，v 代表切向位移。则在柱坐标系中的应变分量为：

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_{z'}=\frac{\partial w}{\partial z'},\quad \varepsilon_{r}=\frac{\partial u}{\partial r},\quad \varepsilon_{\theta}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial \theta}+\frac{u}{r}。\\
&\gamma_{z'r}=\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial z'},\quad \gamma_{r\theta}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial \theta}+\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r};\\
&\gamma_{r\theta}=\frac{\partial v}{\partial z'}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial w}{\partial \theta}。
\end{aligned}\right\}\qquad (6\text{-}1\text{-}2)$$

应力与应变关系为：

$$\left.\begin{aligned}
&Z'_{z'}=\lambda e+(2\varepsilon_{z'}-\varepsilon_{T})\,\mu\\
&R_{r}=\lambda e+(2\varepsilon_{r}-\varepsilon_{T})\,\mu\\
&\theta_{\theta}=\lambda e+(2\varepsilon_{\theta}-\varepsilon_{T})\,\mu\\
&Z'_{r}=\mu\gamma_{z'r},\quad R_{\theta}=\mu\gamma_{r\theta},\quad R_{\theta}=\mu\gamma_{z'\theta}
\end{aligned}\right\}\qquad (6\text{-}1\text{-}3)$$

$$e=\varepsilon_{z'}+\varepsilon_r+\varepsilon_\theta=\frac{\partial w}{\partial z'}+\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial v}{r\partial\theta}+\frac{u}{r}$$

这里 ε_T 是由温度引起的应变。

拉梅方程为：

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla^2 w+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial\vartheta}{\partial z'}=-\frac{q_{z'}}{\mu}+\frac{\partial\varepsilon_T}{\partial z'}\\
&\left(\nabla^2 u-\frac{u}{r^2}\right)-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{1}{1-2\nu}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial r}=-\frac{q_r}{\mu}+\frac{\partial\varepsilon_T}{\partial r}\\
&\left(\nabla^2 v-\frac{v}{r^2}\right)+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial\vartheta}{r\partial\theta}=-\frac{q_\theta}{\mu}+\frac{\partial\varepsilon_T}{r\partial\theta}\\
&\left(\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)
\end{aligned}\right\}\qquad(6\text{-}1\text{-}4)$$

沿 z 方向，$u_z=u_z(x,y)$，$u_x=u_y=0$，在垂直 z 轴的 xy 面内产生翘曲。

$$\left.\begin{aligned}
&X_z=Y_y=Z_z=X_y=0,\quad q_z=q_y=0,\quad \vartheta=0\\
&X_z=\mu\frac{\partial u_z}{\partial x},\quad Y_z=\mu\frac{\partial u_z}{\partial y}\\
&\nabla^2 u_z=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u_z=-\frac{q_z}{\mu}
\end{aligned}\right\}\qquad(6\text{-}1\text{-}5)$$

若令 x 轴与 z' 重合，y 面与某子午面 $z'y_0$（圆柱坐标系）的二面角为 ω。圆柱坐标系的 θ 角皆自 $z'y_0$ 面算起（图 6-1）。由图可知

$$x=z',\quad y=r\cos\beta,\quad z=-r\sin\beta。$$

$$\beta=\omega-\theta$$

应用坐标系变换的已知关系得到

$$\left.\begin{aligned}
&w=u_x,\quad u=u_y\cos\beta-u_z\sin\beta\\
&v=u_y\sin\beta+u_z\cos\beta\\
&Z'_{z'}=X_x,\quad R_r-\theta_\theta=(Y_y-Z_z)\cos 2\beta\\
&\qquad\qquad -2Y_z\sin 2\beta
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &R_r+\theta_\theta=Y_y+Z_z,\quad R_\theta=(Y_y-Z_z)\sin 2\beta/2 \\ &\qquad\qquad +Y_z\cos 2\beta \\ &Z'_r=X_y\cos\beta-X_z\sin\beta \\ &Z'_\theta=X_y\sin\beta-X_z\cos\beta \\ &q_z=q_z,\quad q_r=q_y\cos\beta-q_z\sin\beta,\quad q_\theta=q_y\sin\beta \\ &\qquad\qquad +q_z\cos\beta \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}1\text{-}6)$$

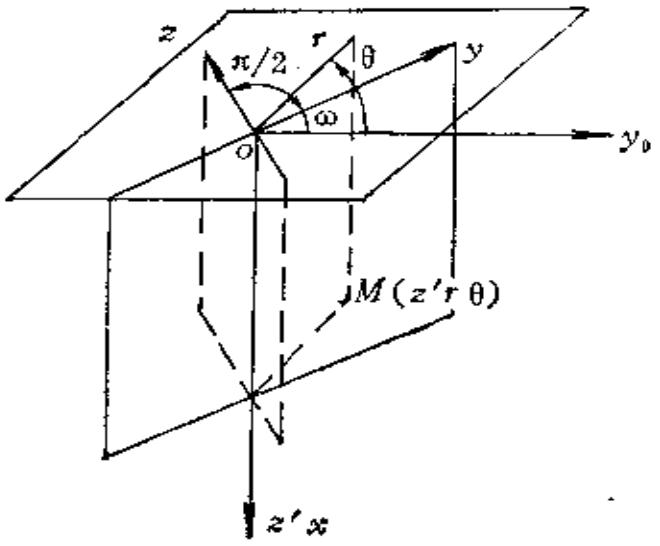


图 6-1

6-2 有限实体二维与三维状态的关系

任何有限实体可以包在很多很多方向不同的柱形体内。柱形体是二维状态的。那末，此实体是一系列二维状态的综合。为了以后讨论清楚起见，属于二维状态的应力与应变加注下角“p”，属于三维状态的没有特别标记。设每个柱形体相隔角度为 $\Delta\omega=2\pi/m$。m 是柱形体的数目，也就是二维状态的数目。于是综合状态的应力可表为：

$$Z'_{z'}=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}(Z'_{z'p})_k=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{m}(Z'_{z'p})_k\Delta\omega \qquad (6\text{-}2\text{-}1)$$

当$m\to\infty$，取上式极限后，得到

$$Z'_{z'}=Z'_{z'}(z',\ r,\ 0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}Z'_{z'p}(x,\ y,\ \omega)d\omega \quad (6-2-2)$$

对于其它的应力分量和位移分量也是一样。如位移可写为：

$$\left.\begin{aligned} u&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(u_{yp}\cos\beta-u_{xp}\sin\beta)d\omega\\ v&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(u_{yp}\sin\beta+u_{xp}\cos\beta)d\omega\\ w&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u_{xp}d\omega \end{aligned}\right\} \quad (6-2-3)$$

既然弹性力学的二维基本方程得到满足，那末，由以上关系得到的结果，弹性力学三维基本方程也应得到满足。

假设平面状态下的位移展为三角级数如下：

$$\left.\begin{aligned} u_{xp}(x,\ y,\ \omega)&=u^c_{x0}+\sum_{n=1}^{\infty}(u^c_{xn}\cos n\omega+u^s_{xn}\sin n\omega)\\ u_{yp}(x,\ y,\ \omega)&=u^c_{y0}+\sum_{n=1}^{\infty}(u^c_{yn}\cos n\omega+u^s_{yn}\sin n\omega)\\ u_{zp}(x,\ y,\ \omega)&=u^s_{z0}+\sum_{n=1}^{\infty}(-u^c_{zn}\sin n\omega+u^s_{zn}\cos n\omega) \end{aligned}\right\} \quad (6-2-4)$$

注意这里上角c和s只是标记没有其它意义。把式（6-2-4）代入式（6-2-3）后，得到

$$\left.\begin{aligned} w&=w^c_0+\sum_{n=1}^{\infty}[\omega^c_n\cos n\theta+\omega^s_n\sin n\theta]\\ u&=u^c_0+\sum_{n=1}^{\infty}[u^c_n\cos n\theta+u^s_n\sin n\theta]\\ v&=v^s_0+\sum_{n=1}^{\infty}[-v^c_n\sin n\theta+v^s_n\cos n\theta] \end{aligned}\right\} \quad (6-2-5)$$

式中

$$
\left.\begin{aligned}
w_n^{c,s}(z,r)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(u_{xn}^{c,s}\cos n\beta\pm u_{xn}^{s,c}\sin n\beta)d\beta\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u_{xn}^{c,s}(x,y)\cos n\beta d\beta\\
u_n^{c,s}+v_n^{c,s}&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(u_{yn}^{c,s}+u_{zn}^{c,s})\cos(n-1)\beta\,d\beta\\
u_n^{c,s}-v_n^{c,s}&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(u_{yn}^{c,s}-u_{zn}^{c,s})\cos(n+1)\beta d\beta\\
&(x=z',\quad y=r\cos\beta;\quad n=0,1,2,\cdots)
\end{aligned}\right\}\qquad(6\text{-}2\text{-}6)
$$

应力、体积力和温度也可以用三角级数表示。这里 $u_n^{c,s}$ 表示为 u_n^c 或 u_n^s。由式（6-2-6）可以看出式（6-2-5）中的各种系数能统一用下式表示：

$$
F_n(z',r)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f_n(x,y)\cos n\beta d\beta\qquad(6\text{-}2\text{-}7)
$$

若 $f_n(x,y)$ 为 $u_{xn}^{c,s}$，则 $F_n(z',r)$ 为 $w_n^{c,s}$。若令 $n-1$ 相当于 n，则原来的 n 就改写为 $n+1$。若令 $n+1$ 相当于 n，则原来的 n 就改写为 $n-1$。所以，$f_n(x,y)$ 为 $u_{y,n+1}^{c,s}+v_{z,n+1}^{c,s}$ 时，$F_n(z',r)$ 为 $u_{n+1}^{c,s}+v_{n+1}^{c,s}$，而 $\cos(n-1)\beta$ 就变为 $\cos n\beta$。以下就按这样的写法。

又知道

$$
\left.\begin{aligned}
\cos n\beta&=\cos\left(n\arccos\frac{y}{r}\right)=T_n\left(\frac{y}{r}\right)\\
d\beta&=-\frac{dy}{\sqrt{r^2-y^2}}
\end{aligned}\right\}\qquad(6\text{-}2\text{-}8)
$$

这里 $T_n(x)$——第一类切贝雪夫多项式。于是

$$
F_n(z',r)=-\frac{1}{\pi}\int_{-r}^{r}f_n(x,y)T_n\left(\frac{y}{r}\right)\frac{dy}{\sqrt{r^2-y^2}}\qquad(6\text{-}2\text{-}9)
$$

$$
(x=z',\quad r>0)
$$

对于 z' 轴上的点，容易得到

$$\left.\begin{aligned} &F_n(z',0)=0 \quad (|n|\geqslant 1), \quad F_0(z',0)=f_0(z',0),\\ &\frac{\partial^k}{\partial r^k}F_n(z',r)=0, \quad (k=1,2,\cdots,|n|-1;\ |n|\geqslant 1;) \end{aligned}\right\} \tag{6-2-9)'}$$

在旋转体对称变形的情况下，点的位移只在子午面内。应力和应变分量与 θ 无关。因此，得出

$$\left.\begin{aligned} &w=w_0^c, \quad u=u_0^c, \quad v=0,\\ &u_{xp}=u_{x0}^c, \quad u_{yp}=u_{y0}^c, \quad u_z^c=0 \end{aligned}\right\} \tag{6-2-10}$$

而旋转体对称变形的位移与柱形体平面变形之间的关系为：

$$w=-\frac{1}{\pi}\int_{-r}^{r}\frac{u_{xp}dy}{\sqrt{r^2-y^2}}, \quad u=\frac{1}{\pi}\int_{-r}^{r}\frac{u_{yp}dy}{\sqrt{r^2-y^2}}, \tag{6-2-11}$$

应力、体积力和温度可以同样表示。

对于 z 轴上的点（$r=y=0$），由式 (6-2-9)′得到

$$\left.\begin{aligned} &R_r=\theta_\theta=\frac{1}{2}(Y_{yp}+Z_{zp})\\ &\quad=-\frac{\nu}{2}X_{xp}+\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}Y_{yp}-\frac{1}{2}E\alpha T_p^0\\ &Z_z'=X_{xp}, \quad w=u_{xp}, \quad g_z'=g_{xp}, \quad T^0=T_p^0\\ &Z_r'=u=g_z=0 \end{aligned}\right\} \tag{6-2-12}$$

应该注意，我们用平面状态的各分量表示空间状态的各分量（如空间中某点$M(z',r)$），此时积分限由$M''(x=z', y=-r)$到$M'(x=z', y=r)$。M点和M'点重合。

我们知道，

$$F_n(z',r)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} f_n(x,r\cos\beta)\cos n\beta d\beta$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{0} f_n(x,-r\cos\beta_1)(-1)^n\cos n\beta_1 d\beta_1$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}[f_n(x,r\cos\beta)$$

$$+(-1)^n f_n(x,-r\cos\beta)]\cos n\beta d\beta \qquad (6\text{-}2\text{-}13)$$

式中 $\beta_1=\pi-\beta$。并不失去一般性，可取

$$f_n(x,y)=(-1)^n f_n(x,-y) \qquad (6\text{-}2\text{-}14)$$

由此得到

$$\left.\begin{aligned} u_{xn}^{c_i,r}(x,y)&=(-1)^n u_{xn}^{c_i,r}(x,-y)\\ u_{yn}^{c_i,r}(x,y)&=(-1)^{n+1}u_{yn}^{c_i,r}(x,-y)\\ u_{zn}^{c_i,r}(x,y)&=(-1)^{n+1}u_{zn}^{c_i,r}(x,-y)\end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}2\text{-}15)$$

把函数 $f_n(x,y)$ 按 y 展为麦克劳伦多项式，则

$$f_n(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\cdot\frac{\partial^k}{\partial y^k}f_n(x,y)\Big|_{y=0}\cdot y^k \qquad (6\text{-}2\text{-}16)$$

由式 (6-2-14) 可知 $n+k$ 应是偶数。

把式 (6-2-16) 代入式 (6-2-7) 后，得到

$$F_n(z',r)=\frac{2}{\pi}\int_0^r[f_n(x,y)$$

$$-f_{n0}(x,y)]T_n\left(\frac{y}{r}\right)\frac{dy}{\sqrt{r^2-y^2}} \qquad (6\text{-}2\text{-}17)$$

这里 $f_{n0}(x,y)$ 是展开式 (6-2-16) 的第一项和。令

$$J=\int_0^{y_1}F_n(z',r)T_n\left(\frac{y_1}{r}\right)\frac{rdr}{\sqrt{y_1^2-r^2}} \qquad (6\text{-}2\text{-}18)$$

把式 (6-2-17) 代入式 (6-2-18)，并改变积分次序，得到

$$J=\int_0^{y_1}K[f_n(x,y)-f_{n0}(x,y)]dy \qquad (6\text{-}2\text{-}19)$$

$$K=\frac{2}{\pi}\int_{y}^{y_1}T_n\left(\frac{y_1}{r}\right)T_n\left(\frac{y}{r}\right)\frac{rdr}{\sqrt{y_1^2-r^2}\sqrt{r^2-y^2}} \tag{6-2-20}$$

注意这里

$$\int_0^{\pi}y^k\cos n\beta d\beta=r^k\int_0^{\pi}\cos^k\beta\cos n\beta d\beta=0 \quad (k<|n|)$$

而且当 $y\leqslant r$，$y\to 0$ 时，$(f_n-f_{n0})y^{-|n|}$ 是连续的。令

$$\zeta=\frac{yy_1}{r^2}+\frac{i}{r^2}\sqrt{y_1^2-r^2}\sqrt{r^2-y^2} \tag{6-2-21}$$

可知

$$2T_n\left(\frac{y_1}{r}\right)T_n\left(\frac{y}{r}\right)=T_n(\zeta)+T_n(\bar{\zeta}) \tag{6-2-22}$$

$$K=\mathrm{Re}\left[\int_{y_1/y}^{y/y_1}\frac{T_n(\zeta)d\zeta}{1-\zeta^2}\right]=\frac{i}{\pi}\int_{\Gamma}\frac{T_n(\zeta)d\zeta}{1-\zeta^2} \tag{6-2-23}$$

这里 Γ 代表中心在实轴上并经过点 y/y_1 和 y_1/y 的圆周。若令 $\zeta=1$ 在 Γ 圆内，$\zeta=-1$ 在 Γ 圆外，利用留数定理，不难计算此积分。结果 $K=1$。把式（6-2-19）对 y_1 求导，得到

$$f_n(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\int_0^{y}F_n(z',r)T_n\left(\frac{y}{r}\right)\frac{rdr}{\sqrt{y^2-r^2}}$$

$$+f_{n0}(x,y)$$

这里 y_1 已写为 y。若 y 为负值，应使用关系式（6-2-14）。

由于轴对称变形，则

$$u_{xp}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\int_0^{y}\frac{w(z',r)rdr}{\sqrt{y^2-r^2}} \tag{6-2-24}$$

$$u_{yp}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\int_0^{y}\frac{u(z',r)ydr}{\sqrt{y^2-r^2}} \tag{6-2-25}$$

$$(x=z',\quad y>0)$$

按式（6-2-15）可取

$$\left.\begin{aligned} u_{xp}(x,y)&=u_{xp}(x,-y)\\ u_{yp}(x,y)&=u_{yp}(x,-y)\end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}2\text{-}25)$$

6-3 空腔尺寸有限的弹性空间、弹性层和弹性半空间二维状态和三维状态之间的关系

前节所列方程不用于有内空腔的弹性空间。

设弹性空间有一个内空腔，空间（三维）状态的诸分量用圆柱坐标表示（z'，r，θ）。直角坐标系仍为（x，y，z）。内空腔在 xy 面上的投影如图 6-2 a 所示。沿 zy 面取此空腔剖面如图 6-2 b 所示。认为沿 z 轴方向柱形空腔的长度是无限的，并且在

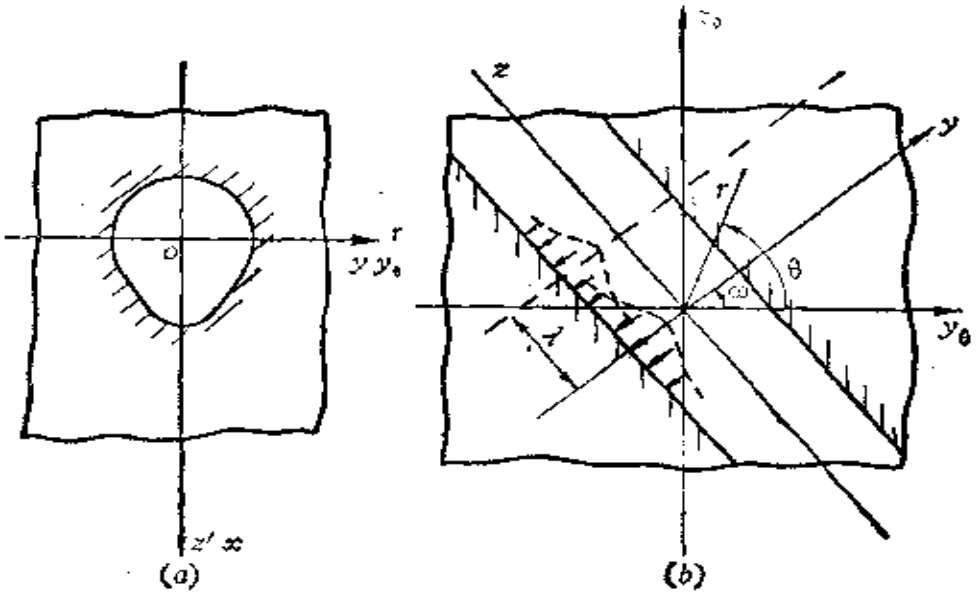


图 6-2

此剖面上有负荷作用。于是当 ω 角不变，由此外负荷而产生的位移 $\tilde{u}_x$ 可表为：

$$\tilde{u}_x(x,y,\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}u_x(x,y,z+\lambda,\omega)d\lambda \qquad (6\text{-}3\text{-}1)$$

但是为简便起见，可把上式改写为

$$\begin{aligned}\tilde{u}_x(x,y,\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}u_x(x,y,z,\omega)dz\\&=\int_{-\infty}^{\infty}w(z',\ r,\theta)dz\end{aligned} \qquad (6\text{-}3\text{-}2)$$

同样可得

$$\left.\begin{aligned}\tilde{u}_y(x,y,\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}[u\cos(\theta-\omega)-v\sin(\theta-\omega)]dz\\ \tilde{u}_z(x,y,\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}[u\sin(\theta-\omega)+v\cos(\theta-\omega)]dz\end{aligned}\right\}\tag{6-3-3}$$

式中

$$z'=x,\quad r=\sqrt{y^2+z^2},\quad \sin(\theta-\omega)=z/r,$$
$$\cos(\theta-\omega)=y/r。$$

这里认为这些积分至少在柯西积分主值意义下是存在的。对于应力也可以同样得到

$$\tilde{Z}'_{z'}(z',r,\theta)=\int_{-\infty}^{\infty}Z'_{z'}(x,y,z,\omega)dz\tag{6-3-4}$$

这样所得的结果，可以用于有几个空腔的弹性空间。由于柱形空腔有几个，可能在某个固定的ω角，某个空腔剖面不一定包括全部的空腔断面。在轴对称变形情况下，所有空腔都是绕z'轴的旋转腔。以上所提柱形空腔，其对称平面是xz面。这里所得结果只是针对某固定ω值，所以与ω无关。可以任取ω值，例如取$\omega=0$。对于旋转对称空腔，轴对称变形，当然在柱坐标系中诸状态分量也与θ无关。

假设弹性空间点的位移可用三角级数表示，并且

$z=\pm\sqrt{r^2-y^2}$，$dz=\pm rdr/\sqrt{r^2-y^2}$，$\theta=\omega\pm\beta$，

$\beta=\arccos y/r$。

当$z\geqslant 0$时，取“+”号，$z<0$时，取“−”号。于是得出

$$\begin{aligned}\tilde{u}_x(x,y,\omega)&=\int_{|y|}^{\infty}[w(z',r,\omega+\beta)\\ &\quad+w(z',r,\omega-\beta)]\frac{rdr}{\sqrt{r^2-y^2}}\\ &=u^c_{x0}+\sum_{n=1}^{\infty}(u^c_{xn}\cos n\omega+u^s_{xn}\sin n\omega)\end{aligned}\tag{6-3-5}$$

$$u_{xn}^{c_1'}(x,y)=2\int_{|y|}^{\infty}w_n^{c_1'}(z',r)T_n\left(\frac{y}{r}\right)\frac{rdr}{\sqrt{r^2-y^2}} \quad (6\text{-}3\text{-}6)$$

$$(z'=x,\ n=0,1,2,\cdots)$$

这样可以看出 $\tilde{u}_x(x,y,\omega)$ 展成的三角级数与 u_{xp} 所展成的三角级数是一样形式的。然而它们的系数并不一样。对于其它的应力，位移以及体积力等，以上的讨论也是一样正确。正因如此，所以又可以写成一般形式的方程如下：

$$f_n(x,y)=2\int_{|y|}^{\infty}F_n(z',r)T_n\left(\frac{y}{r}\right)\frac{rdr}{\sqrt{r^2-y^2}} \quad (6\text{-}3\text{-}7)$$

在轴对称的情况下，

$$\tilde{u}_x=2\int_{|y|}^{\infty}w\frac{rdr}{\sqrt{r^2-y^2}},\quad \tilde{u}_y=2\int_{y|}^{\infty}u\frac{rdr}{\sqrt{r^2-y^2}} \quad (6\text{-}3\text{-}8)$$

对于轴对称的空腔，垂直于轴 z' 的直线只与空腔剖面边界线交于两点，柱形腔的横剖面就是它的子午面内的剖面。在无穷远点，还要对位移与应力作出限制，这样就使以上的积分至少在积分主值意义下是存在的。

我们假设当 $r\to\infty$ 时，$F_n(z',r)\to\text{const}\cdot r^{-|n|-1-\alpha}$ $(0<\alpha<1)$，得到

$$F_n(z',r)=-\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial r}\int_r^{\infty}f_n(x,y)T_n\left(\frac{y}{r}\right)\frac{rdy}{y\sqrt{y^2-r^2}} \quad (6\text{-}3\text{-}9)$$

分部积分后再求导，得到

$$F_n(z',r)=-\frac{1}{\pi}\int_r^{\infty}\frac{\partial}{\partial y}f_n(x,y)T_n\left(\frac{y}{r}\right)\frac{dy}{\sqrt{y^2-r^2}} \quad (6\text{-}3\text{-}10)$$

在轴对称变形的情况下，位移表示为

$$w(z', r) = -\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial r}\int_r^\infty \tilde{u}_x(x, y)\frac{r\,dy}{y\sqrt{y^2-r^2}}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_r^\infty \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial y}\frac{dy}{\sqrt{y^2-r^2}} \qquad (6\text{-}3\text{-}11)$$

$$u(z', r) = -\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial r}\int_r^\infty \tilde{u}_y(x, y)\frac{dy}{\sqrt{y^2-r^2}}$$

$$= -\frac{1}{\pi r}\int_r^\infty \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial y}\frac{y\,dy}{\sqrt{y^2-r^2}} \qquad (6\text{-}3\text{-}12)$$

把式 (6-3-10)，(6-3-11)，(6-3-12) 与 § 6-2 中相应的方程比较，可以看出它们的结构是相似的。但积分限不同，用偏导式代替了原来的位移。有限和无限体公式的相似性，使得我们可以用同样的途径来解这两种情况的问题。

由两个平行平面所限的区域称为弹性层。自然由一个平面所限的区域叫半空间。弹性厚板就是有限尺寸的弹性层。

以上我们确定了适合于有限和无限平面与空间状态的两种类型的关系。如果 z' 轴垂直边界面，那末，对于半空间和弹性层这两种类型的关系都可以用，沿有限路径积分和沿无限路径积分都可以。与此半空间和弹性层相应的二维状态是半平面和带状平面。用以上所述的关系可以直接把半空间和弹性层的三维问题归结为二维半平面和带状板的问题。

现在研究轴对称的一个特殊情况。设在半空间的表面，有均布负荷 $p_{z'}(r)$ 和 $p_r(r)$，其方向分别为 z' 和 r 方向。这个负荷实质上就是应力 $Z'_{z'}$ 和 Z'_r。我们利用 § 6-2 中的关系，可得

$$\left.\begin{aligned} p_{xp}(y) = p_{zp}(-y) &= \frac{\partial}{\partial y}\int_0^y \frac{p_{z'}(r)r\,dr}{\sqrt{y^2-r^2}} \\ p_{yp}(y) = -p_{yp}(-y) &= \frac{\partial}{\partial y}\int_0^y \frac{p_r(r)y\,dr}{\sqrt{y^2-r^2}} \qquad (y>0) \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}3\text{-}13)$$

若利用§6-3中的关系，则

$$\left.\begin{aligned}\tilde{p}_x(y)&=2\int_{|y|}^{\infty}\frac{p_{xp}(r)rdr}{\sqrt{r^2-y^2}}\\ \tilde{p}_y(y)&=2\int_{|y|}^{\infty}\frac{p_{rp}(r)ydr}{\sqrt{r^2-y^2}}\end{aligned}\right\}\qquad(6\text{-}3\text{-}14)$$

很容易看出，它们不相同。因此，u_{xp}，u_{yp}，…和$\tilde{u}_x$，$\tilde{u}_y$，…是不同的。这样一来，对应于同一空间问题，应用第一类的关系和第二类的关系，归结为不同的平面问题。选择那一类关系取决于解题的方便。

例如，均匀分布于半径为$r=a$的圆面积上的垂直负荷p（图6-3 a）。

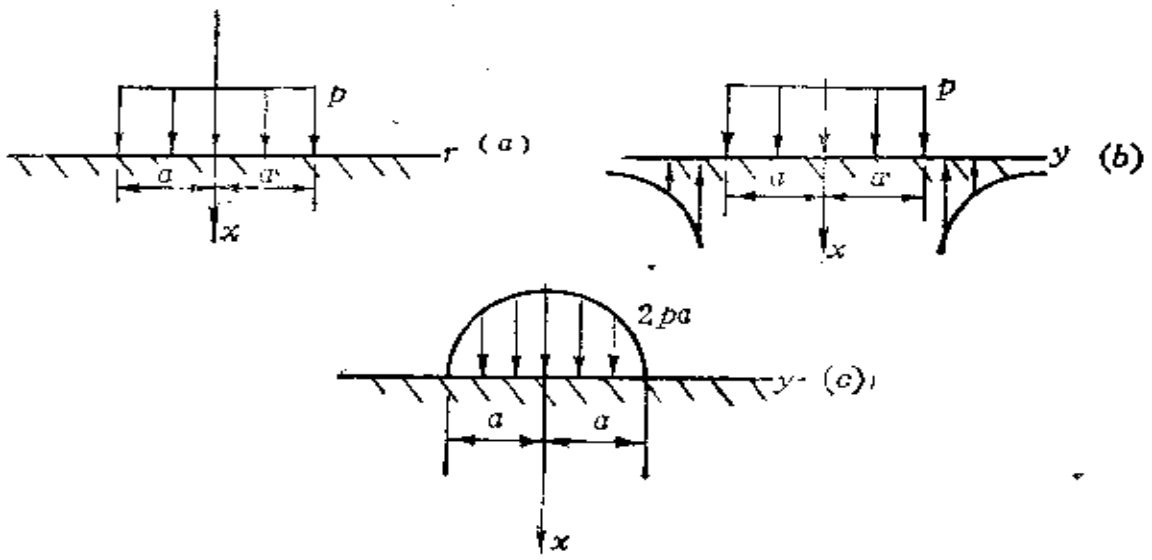


图 6-3

按照式（6-3-13），当$|y|<a$时，$p_{xp}=p$，当$|y|>a$时，$p_{xp}=p\left(1-|y|/\sqrt{y^2-a^2}\right)$（图6-3 b）。

按照式（6-3-14），当$|y|<a$时，$\tilde{p}_x=2p\sqrt{a^2-y^2}$，当$|y|>a$时，$\tilde{p}_x=0$（图6-3 c）。它是一个抛物线形，长半轴为$2pa$，短半轴为a，面积为πpa^2。因此，后一类变换对平面问题是比较简单的负荷情况。若$a\to 0$，这就是集中力的情况。所以，

在第二类（后一类）变换，轴对称状态的集中力与平面状态的集中力是一样的。当此相应的平面问题解出后，再利用§6-2和§6-3所述公式，把二维问题解转为三维问题解。

6-4 材料横向各向同性，纵向 $\nu=\nu(z')$，$E=E(z')$ 时的情况

在以上所讨论的公式中，并没有提到材料的均匀性质与各向同性性质。以上所述柱形空腔的母线是垂直 z' 轴的，在垂直于 z' 轴的平面内，弹性常数没有改变，但是沿 z' 方向，$\nu=\nu(z')$ 和 $E=E(z')$。我们讨论 $\nu=$常数，$E=E_0z'^k$（$0<k<1$，$E_0=$常数）时，受集中负荷 P 的半空间问题。

我们已知这时的平面问题解● 为

$$\left.\begin{aligned} &X_\rho=-\frac{PC_0}{\rho}\cos^k\vartheta\cos q\vartheta,\quad X_\vartheta=X_{\rho\vartheta}=0\\ &2\mu_0u_\rho=PC_0\frac{1-\nu}{k}\rho^{-k}\cos q\vartheta\\ &2\mu_0u_\vartheta=-PC_0\frac{q(1-\nu)}{k(1+k)}\rho^{-k}\sin q\vartheta \end{aligned}\right\}\qquad(6\text{-}4\text{-}1)$$

这里 ρ 和 ϑ 表示为极坐标。$\Gamma(x)$ 是伽玛函数。

$$\left.\begin{aligned} &\mu_0=\frac{E_0}{2(1+\nu)},\quad q=\sqrt{(1+k)\left(1-k\frac{\nu}{1-\nu}\right)}\\ &C_0=C(k+3,q),\ C=\frac{2^p}{4\pi\Gamma(p-1)}\\ &\qquad\times\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p-q}{2}\right) \end{aligned}\right\}\qquad(6\text{-}4\text{-}2)$$

我们要利用§6-3中的变换，平面问题与空间问题的集中力是一样的。把平面问题中的应力和位移分量表为直角坐标的并代入式(6-3-9)～式(6-3-12)中，得到

● 见Ростовцев Н. А., К Теории упругости неоднородной среды. ПММ, Т. 23, Вып. 4, стр. 601-611。

$$Z'_{z'}=\frac{z'}{r}\quad Z'_r=-\frac{P}{z'^2}[(k+3)\Phi_5^c+\Phi_5^s],\quad Z'_\theta=R_\theta=0$$

(6-4-3)

$$\left.\begin{aligned}Z'_{z'}+R_r+\vartheta_\theta&=\frac{1+\nu}{\nu}\left(\theta_\vartheta-2\frac{(z')^k}{r}\mu_0 u\right)\\&=-\frac{P(1+\nu)}{z^2}[(k+1)\Phi_3^c+\Phi_3^s]\\2\mu_0 w&=\frac{P}{z^{k+1}}\left(\frac{1-\nu}{1+k}\Phi_1^c+\Phi_3^c\right)\\2\mu_0 u&=\frac{P}{rz^k}[(1-\nu)\Phi_1^c-\Phi_3^c],\quad v=0\end{aligned}\right\}\quad(6\text{-}4\text{-}4)$$

式中

$$\left.\begin{aligned}\Phi_m^c=\Phi_m^c(\vartheta_0)&=\frac{C_0}{\pi z}\int_r^\infty\left(\frac{z'}{\rho}\right)^{k+m}\cos q\vartheta\frac{y\,dy}{\sqrt{y^2-r^2}}\\\Phi_m^s=\Phi_m^s(\vartheta_0)&=\frac{qC_0}{\pi}\int_0^\infty\left(\frac{z'}{\rho}\right)^{k+m}\sin q\vartheta\frac{y\,dy}{\sqrt{y^2-r^2}}\end{aligned}\right\}\quad(6\text{-}4\text{-}5)$$

$$\cos\vartheta=z'/\rho,\quad\cos\vartheta_0=z'/\rho_0$$

$$\rho=\sqrt{z'^2+y^2},\quad\rho_0=\sqrt{z'^2+r^2},\quad m=1,3,5$$

当$P=1$；$\nu=0.3$；$k=0.5$；$z'=1.0$时，计算出应力和位移如表6-4-1。

表 6-4-1

r/z'	$Z'_{z'}$	R_r	θ_θ	Z'_r	$2\mu_0 w$	$2\mu_0 u$
0.00	−0.5906	0.0149	0.0149	0	0.3075	0
0.25	−0.4975	0.0171	0.0123	−0.1244	0.2837	0.0321
0.50	−0.3138	−0.0666	0.0070	−0.1569	0.2298	0.0466
0.75	−0.1665	−0.0842	0.0024	−0.1249	0.1742	0.0448
1.00	−0.0824	−0.0751	−0.0003	−0.0824	0.1302	0.0361
1.25	−0.0405	−0.0577	−0.0016	−0.0507	0.0987	0.0268
1.50	−0.0205	−0.0417	−0.0021	−0.0307	0.0768	0.0191
1.75	−0.0107	−0.0294	−0.0022	−0.0188	0.0613	0.0133
2.00	−0.0059	−0.0207	−0.0021	−0.0177	0.0502	0.0091

图 6-4 用图形表示出弹性模量不变（虚线）与变弹性模量（实线）的应力 $Z'_{z'}$。

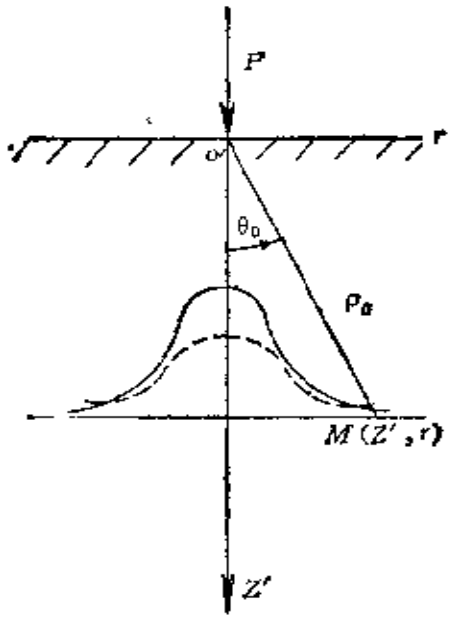


图 6-4

可以把对称轴上的应力表达式写成封闭的形式。应用如下积分式

$$\int_0^{\pi/2} (\cos\vartheta)^{p'-2}\cos q\vartheta d\vartheta = \frac{1}{2C(p', q)} \qquad (6-4-6)$$

得到

$$\Phi_1^c(0) = \frac{1}{2\pi(1-\nu)},\quad \Phi_3^c(0) = \frac{1}{2\pi}$$

$$\Phi_5^c(0) = \frac{(2+k)(3+k)}{2\pi[(k+3)^2-q^2]} \qquad (6-4-7)$$

计算函数 Φ_m^c，要利用富里叶正弦变换。

$$\Phi_m^s(0)=-\frac{qC_0}{\pi}\int_0^\infty f(y)\frac{dy}{y}$$

$$=-\frac{qC_0}{\pi}\int_0^\infty\left[\int_0^\infty f^*(\lambda')\sin\lambda' y d\lambda'\right]\frac{dy}{y}$$

$$=\frac{qC_0}{\pi}\lim_{l\to\infty}\int_0^\infty f^*(y)\left[\int_0^l\sin\lambda' y\frac{dy}{y}\right]d\lambda'$$

$$=\frac{qC_0}{2}\int_0^\infty f^*(\lambda')d\lambda' \qquad (6-4-8)$$

$$f(y)=\left(\frac{z'}{\rho}\right)^{k+m}\sin q\vartheta,\quad f^*(\lambda')=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(y)\sin\lambda' y dy \qquad (6-4-9)$$

在这个积分中，令 $y=z'\operatorname{tg}\vartheta$ 代入，则

$$f^*(\lambda')=\frac{2z'}{\pi}\int_0^{\pi/2}(\cos\vartheta)^{p'-2}\sin q\vartheta\sin(\lambda' z'\operatorname{tg}\vartheta)d\vartheta \qquad (p'=k+m)$$

但是

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}(\cos\vartheta)^{p'-2}\cos(\lambda' z'\operatorname{tg}\vartheta\mp q\vartheta)d\vartheta$$

$$=\frac{(\sqrt{\lambda' z'})^{p'-1}W_{s,r}(2\lambda' z')}{(\sqrt{2})^{p'}\Gamma(a+1)}$$

$$=\frac{2^a(\lambda' z')^{p'-1}e^{-\lambda' z'}}{2\pi\Gamma(p'-1)C(p',q)}\int_0^\infty e^{-\lambda' z' t}\cdot t^b\left(1+\frac{t}{2}\right)^a dt$$

式中

$s=\pm q/2$，　$r=p'-1/2$，　$a=(p'\pm q-2)/2$，

$b=(p'\mp q-2)/2$。

$W_{s,r}$——威梯克（Wittker）函数。

把 $f^*(\lambda')$ 代入式（6-4-9），得到

$$\Phi_m^s(0)=\frac{C_0 q(p'-1)}{2\pi C(p',q)}\left[\frac{1}{p'-q}F\left(1-\frac{p'+q}{2},\ 1;\ 1+\frac{p'-q}{2};\ -1\right)-\frac{1}{p'+q}F\left(1-\frac{p'-q}{2},\ 1;\ 1+\frac{p'+q}{2};\ -1\right)\right] \qquad (6-4-10)$$

式中

$$F(c,1;d;x)=1+\frac{c}{d}x+\frac{c(c+1)}{d(d+1)}x^2+\cdots \quad (6\text{-}4\text{-}11)$$

是超越几何函数。

在对称轴上的应力和位移为：

$$Z'_{z'}=-\frac{P\alpha'}{2\pi(z')^2},\quad R_r=\theta_\theta=\frac{P(1+\nu-\alpha'\nu)}{4\pi(z')^2}$$

$$2\mu_0 w=-\frac{P(\alpha'+\nu-\nu\alpha')}{2\pi(k+1)(z')^{k+1}}$$

$$\alpha'=2\pi[(k+3)\Phi_5^c(0)+\Phi_5^s(0)]$$

$$=K_1(k,q)+K_1(k,-q)$$

$$K_1(k,q)=\frac{(k+2)(k+3)}{(k+3)^2-q^2}\left[\frac{k+3}{2}+q\ \frac{k+4}{k-q+5}F\right.$$

$$\left.\times\left(-\frac{k+q+3}{2},\ 1;\ \frac{k-q+7}{2};\ -1\right)\right] \quad (6\text{-}4\text{-}12)$$

也可以用级数形式来解这个问题。令

$$\cos q\vartheta=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(\frac{z'}{\rho}\right)^n,\quad q\sin q\vartheta=\frac{y}{z'}\sum_{n=0}^{\infty}na_n\left(\frac{z'}{\rho}\right)^n$$

式中

$$a_0=\cos\frac{\pi q}{2},\quad a_1=q\sin\frac{\pi q}{2},\quad a_n=\frac{p'^2-q^2}{n(n-1)}a_{n-2}\quad (n\geqslant 2)$$

当 n 是偶数时，$p'=n-2$；当 n 是奇数时，$p'=n-1$。把这个级数式代入式 (6-4-5)。得到

$$Z'_{z'}=\frac{z'}{r}\quad Z'_r=P\frac{(z')^{k+2}}{\rho_0^{k+4}}\sum_{n=0}^{\infty}A_n(n+k+2)\left(\frac{z'}{\rho_0}\right)^n$$

$$Z'_{z'}+R_r+\theta_\vartheta$$

$$=-P\frac{(1+\nu)(z')^k}{\rho_0^{k+2}}\sum_{n=0}^{\infty}A_n(n+k+1)\left(\frac{z'}{\rho_0}\right)^n$$

$$
\left.\begin{aligned}
2\mu_0 w &= \frac{P}{\rho_0^{k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left[\frac{(1-\nu)n(n+k+1)}{(n+k)(k+1)} + \frac{(z')^2}{\rho_0^2} \right] \left(-\frac{z'}{\rho_0} \right)^{n-1} \\
2\mu_0 u &= \frac{P}{\rho_0^{k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left[\frac{(1-\nu)(n+k+1)}{n+k} - \frac{(z')^2}{\rho_0^2} \right] \left(-\frac{z'}{\rho_0} \right)^{n}
\end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}4\text{-}13)
$$

$$
A_n = \frac{C_0 a_n}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+k+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+k+3}{2}\right)} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)
$$

这个级数除对称轴上的点外是处处收敛的。对于半空间的边界 $z' = 0$，由式（6-4-13）可知，当 $k > 0$ 时，有

$$
Z'_{z'} = R_r = \theta_\theta = Z'_r = 0, \quad 2\mu_0 w = \frac{P\beta'}{2\pi r^{k+1}}
$$

$$
2\mu_0 u = -\frac{P\gamma'}{2\pi r^{k+1}}
$$

$$
\beta' = \frac{C_0\sqrt{\pi}(1-\nu)\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{(k+1)\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)} q \sin\frac{\pi q}{2}
$$

$$
\gamma' = \frac{C_0 2\sqrt{\pi}(1-\nu)\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}{k\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} \cos\frac{\pi q}{2}
$$

q，C_0，α'，β'，γ' 值列在表 6-4-2 中。

表 6-4-2

k	ν	q	C_0	α'	β'	γ'
0	0	1.0000	0.6366	3.0000	2.0000	1.0000
	0.15	1.0000	0.6366	3.0000	1.7000	0.7000
	0.30	1.0000	0.6366	3.0000	1.4000	0.4000
	0.45	1.0000	0.6366	3.0000	1.1000	0.1000
0.2	0	1.0954	0.6917	3.4428	1.7322	1.1698
	0.15	1.0759	0.6850	3.3900	1.4381	0.7845
	0.30	1.0474	0.6756	3.3159	1.1420	0.3987
	0.45	1.0018	0.6613	3.2042	0.8425	0.0117
0.4	0	1.1832	0.7442	3.8928	1.5113	1.3242
	0.15	1.1407	0.7288	3.7654	1.2310	0.8512
	0.30	1.0770	0.7074	3.5899	0.9476	0.3747
	0.45	0.9705	0.6759	3.3322	0.6450	−0.1080
0.6	0	1.2649	0.7945	4.3484	1.3209	1.4625
	0.15	1.1961	0.7684	4.1240	1.0698	0.9017
	0.30	1.0902	0.7330	3.8217	0.7958	0.3300
	0.45	0.9025	0.6821	3.3930	0.4809	−0.2606
0.8	0	1.3416	0.8425	4.8083	1.1521	1.5847
	0.15	1.2433	0.8041	4.4648	0.9351	0.9380
	0.30	1.0876	0.7530	4.0123	0.6734	0.2659
	0.45	1.7886	0.6814	3.3915	0.3313	−0.4496
1.0	0	1.4142	0.8887	5.2717	1.0000	1.6910
	0.15	1.2834	0.8364	4.7871	0.8235	0.9617
	0.30	1.0690	0.7681	4.1633	0.5714	0.1828
	0.45	0.6030	0.6753	3.3365	0.1818	−0.6813

当 q 是整数时，式（6-4-13）可以取一段。在最简单的情况 $q=0$（$k=1/\nu-1$）和 $q=1$（$k=1/\nu-2$）时，只保留级数的一项，这就是 Г. К. Клейна 的解

$$Z'_{z'}=\frac{z'}{r}\,Z'_r=-\frac{Pa}{2\pi}\,\frac{(z')^a}{\rho_0^{a+2}},\quad R_r=-\frac{Par^2(z')^{a-2}}{2\pi\rho_0^{a+2}},\quad \theta_\theta=0$$

$$2\mu_0\omega=\frac{P}{2\pi}\left[\frac{(z')^{q+1}}{\rho_0^q}+\frac{(1-\nu)(k+2)}{(k+1)^2\rho_0^{k+1}}q\right],\quad 2\mu_0 u=\frac{Pr(z')^q}{\rho_0^q}$$

半空间的布希涅斯克解为 $k \to 0$，（$q \to 1$），即

$$Z'_{z'} = -\frac{3P(z')^3}{2\pi\rho_0^5},\quad R_r = \frac{P}{2\pi}\left[\frac{1-2\nu}{\rho_0(\rho_0+z')} - \frac{3z'r^2}{\rho_0^5}\right]$$

$$\theta_\vartheta = \frac{P(1-2\nu)}{2\pi}\left[\frac{z'}{\rho_0^3} - \frac{1}{\rho_0(\rho_0+z')}\right],\quad Z'_r = -\frac{3Pr(z')^2}{2\pi\rho_0^5}$$

$$2\mu w = \frac{P}{2\pi}\left[\frac{(z')^2}{\rho_0^3} + \frac{2(1-\nu)}{\rho_0}\right]$$

$$2\mu u = \frac{Pr}{2\pi}\left[\frac{z'}{\rho_0^3} - \frac{1-2\nu}{\rho_0(\rho_0+z')}\right]$$

这里弹性模量沿 z' 方向是不变的。

§2 利用复变数解析函数解轴对称问题

解平面问题时所用复变函数的理论对解空间问题也有效。上节介绍了二维和三维状态之间的关系。既然平面问题的各状态分量可以用解析函数表示，自然三维问题的各状态分量也可以用解析函数表示。以下得到有限和无限体轴对称应力和位移的积分表达式。这些表达式可用于解球体，有球裂缝的或有球腔的弹性空间等问题，不论是弹性力学第一个还是第二个基本问题。

6-5 无空腔有限单连通旋转体的位移和应力的表达式

设无体积力和温度变化，则

$$2\mu(u_{xp}+iu_{yp}) = \nu^*\varphi(\zeta) - \zeta\overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi_0(\zeta)} \qquad (6\text{-}5\text{-}1)$$

式中

u_{xp}, u_{yp}——平面变形状态中柱体上点的位移；

$\varphi(\zeta)$，$\psi_0(\zeta)$——物体横断面所占区域中复变数 $\zeta = x+iy$ 的单值解析函数。

若取 $\psi_0(\zeta) = \psi(\zeta) + \zeta\varphi'(\zeta)$，则

$$\left.\begin{aligned} 2\mu u_{xp} &= \mathrm{Re}[\nu^*\varphi(\zeta) - 2x\varphi'(\zeta) - \psi(\zeta)] \\ 2\mu u_{yp} &= \mathrm{Im}[\nu^*\varphi(\zeta) + 2x\varphi'(\zeta) + \psi(\zeta)] \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}5\text{-}2)$$

我们可以认为平面状态相对 x 轴是对称的。于是

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{Re}\,\varphi(x+iy)=\mathrm{Re}\,\varphi(x-iy)\\&\mathrm{Im}\,\varphi(x+iy)=-\mathrm{Im}\,\varphi(x-iy)\end{aligned}\right\}\qquad(6\text{-}5\text{-}3)$$

$$\varphi(\zeta)=\overline{\varphi(\bar{\zeta})}$$

这称之为偶条件。$\varphi(\zeta)$，$\psi(\zeta)$，$\psi_0(\zeta)$ 及其导数都满足这些条件。这里

$$x=z',\quad \mathrm{Im}\varphi=\mathrm{Re}(\varphi/i)$$

而

$$\left.\begin{aligned}2\mu w&=-\frac{1}{\pi}\ \mathrm{Re}\int_{-r}^{+r}\left[\nu^*\varphi(\zeta)-2z'\varphi'(\zeta)\right.\\&\qquad\left.-\psi(\zeta)\right]\frac{dy}{\sqrt{r^2-y^2}}\\2\mu u&=\frac{1}{\pi}\ \mathrm{Re}\int_{-r}^{+r}\left[\nu^*\varphi(\zeta)+2z'\varphi'(\zeta)\right.\\&\qquad\left.+\psi(\zeta)\right]\frac{ydy}{ir\sqrt{r^2-y^2}}\end{aligned}\right\}\qquad(6\text{-}5\text{-}4)$$

由偶条件，可知积分是实数，故可略去 "Re"。引入以下符号

$$t=z'+ir,\quad R(\zeta,t)=\sqrt{(\zeta-t)(\zeta-\bar{t})}$$

注意到 $x=z'$，所以

$$y=-i(\zeta-z'),\quad dy=-id\zeta,\quad \sqrt{r^2-y^2}=R(\zeta,t)$$

于是最后得到

$$\left.\begin{aligned}2\mu w&=\frac{1}{\pi i}\int_{\bar{t}}^{t}\left[\nu^*\varphi(\zeta)-2z'\varphi'(\zeta)-\psi(\zeta)\right]\frac{d\zeta}{R(\zeta,t)}\\2\mu u&=-\frac{1}{\pi ir}\int_{\bar{t}}^{t}\left[\nu^*\varphi(\zeta)+2z'\varphi'(\zeta)+\psi(\zeta)\right]\frac{(\zeta-z')d\zeta}{R(\zeta,t)}\end{aligned}\right\}\qquad(6\text{-}5\text{-}5)$$

固定 t 时，$R(\zeta,t)$ 是复变数 ζ 的解析函数。这个函数不是单值的，它分成两支。每一支都在沿 $t\bar{t}$ 线割开的平面内单值解

析（全纯）。我们利用$R(\zeta,\ t)$在割缝下（图 6-5）在对称轴上为正值的那一支。

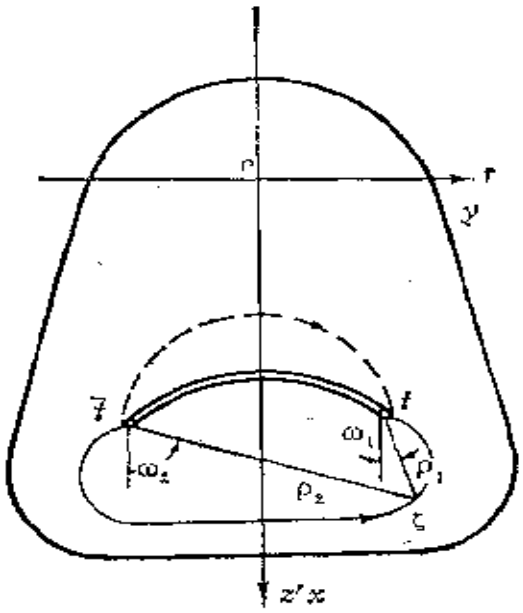


图 6-5

所以，令$\zeta - t = \rho_1 e^{i\omega_1}$，$\zeta - \bar{t} = \rho_2 e^{i\omega_2}$，则

$$R(\zeta,\ t) = \sqrt{\rho_1\rho_2}\, e^{i(\omega_1+\omega_2)/2} \qquad (6\text{-}5\text{-}6)$$

割缝下在对称轴上，$\omega_1 = -\omega_2$，$R(z',\ t) = |z' - t|$。在割缝上对称轴上，$\omega_1 = 2\pi - \omega_2$或$\omega_1 = -2\pi - \omega_2$（这取决于点$\zeta$从那一边包过割缝$t\bar{t}$），$R(\zeta, t)$值是负值。在割缝$t\bar{t}$不同的边上，$R(\zeta, t)$只相差符号。

式（6-5-5）中的被积函数相对于积分变量是全纯的，因此，积分值与积分路径无关。可以沿连接点t和$\bar{t}$并完全在区域内的任意路径积分。但此路径不能穿过割缝$t\bar{t}$。在$t\bar{t}$下可穿过z'轴。如果沿割缝上的路径积分，积分符号要变。割缝的形状没有规定，在图 6-5 中是用双线表示的。

确定式（6-5-5）与轴对称问题一般解的关系。我们引入下列函数

$$\left.\begin{aligned} B_{z'}(z',\ r) &= \frac{1}{\pi i}\int_t^t \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{R(\zeta,\ t)} \\ B_r(z',\ r) &= -\frac{1}{\pi i r}\int_t^t \frac{\varphi(\zeta)(\zeta-z')d\zeta}{R(\zeta,\ t)} \quad (r>0) \end{aligned}\right\} \tag{6-5-7}$$

$$B_{z'}(z',\ 0)=\varphi(z'),\ B_r(z',\ 0)=0 \tag{6-5-8}$$

把式（6-5-7）分部积分后，并对 z' 和 r 求导，得到偏导式如下：

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z'}B_{z'} &= \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(rB_r)=\frac{1}{\pi i}\int_t^t \frac{\varphi'(\zeta)d\zeta}{R(\zeta,\ t)} \\ \frac{\partial}{\partial z'}B_r &= -\frac{\partial}{\partial r}B_{z'}=-\frac{1}{\pi i r}\int_t^t \frac{\varphi'(\zeta)(\zeta-z')d\zeta}{R(\zeta,\ t)} \end{aligned}\right\} \tag{6-5-9}$$

我们可以看出

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2 B_{z'}=0,\ (\nabla^2-r^{-2})B_r=0 \\ &\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial z'^2}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \end{aligned}\right\} \tag{6-5-10}$$

这里 $B_{z'}(z',\ r)$ 是轴对称的调和函数，而 $B_r(z',\ r)$ 是与 $B_{z'}(z',\ r)$ 共轭的函数。

式（6-5-5）可以写为：

$$\left.\begin{aligned} 2\mu w &= \nu^* B_{z'}-2z'\frac{\partial}{\partial z'}B_{z'}-B_{z'}^{(0)} \\ 2\mu u &= \nu^* B_r+2z'\frac{\partial}{\partial z'}B_r+B_r^{(0)} \end{aligned}\right\} \tag{6-5-11}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} B_{z'}^{(0)} &= \frac{1}{\pi i}\int_t^t \frac{\psi(\zeta)d\zeta}{R(\zeta,\ t)} \\ B_r^{(0)} &= -\frac{1}{\pi i r}\int_t^t \frac{\psi(\zeta)(\zeta-z')d\zeta}{R(\zeta,\ t)} \quad (r>0) \end{aligned}\right\} \tag{6-5-12}$$

而

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z'}B_0 &= z'\frac{\partial}{\partial z'}B_{z'} - r\frac{\partial}{\partial z'}B_r + B_{z'}^{(0)}\\ \frac{\partial}{\partial r}B_0 &= z'\frac{\partial}{\partial r}B_{z'} - r\frac{\partial}{\partial r}B_r - B_r^{(0)}\end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}5\text{-}13)$$

于是得出

$$\left.\begin{aligned}2\mu w &= 4(1-\nu)B_{z'} - \frac{\partial}{\partial z'}(z'B_{z'} + rB_r - B_0)\\ 2\mu u &= 4(1-\nu)B_r - \frac{\partial}{\partial r}(z'B_{z'} + rB_r + B_0)\end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}5\text{-}14)$$

这里的函数 $B_{z'}$ 和 B_r 是调和矢量在 z' 轴和 r 上的投影，B_0 是调和标量。式（6-5-14）与 П. Ф. Папкович 的轴对称问题的一般解一致。

利用轴对称和平面状态的应力间的关系或是应力与位移之间的关系，得到应力公式。经过变换后，得到

$$Z'_{z'} + R_r + \theta_\theta = 4(1+\nu)\frac{\partial}{\partial z'}B_{z'}$$

$$\theta_\theta = 4\nu\frac{\partial}{\partial z'}B_{z'} + 2\mu\frac{u}{r}$$

$$\left.\begin{aligned}Z'_{z'} &= \frac{\partial}{\partial z'}B_{z'} - 2z'\frac{\partial^2}{\partial z^2}B_{z'} - \frac{\partial}{\partial z'}B_{z'}^0\\ Z'_r &= \frac{\partial}{\partial z'}B_r + 2z'\frac{\partial^2}{\partial z^2}B_r + \frac{\partial}{\partial z'}B_r^0\end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}5\text{-}15)$$

利用如下关系可以求到 θ_θ

$$\theta_0 = \lambda e + 2\mu\varepsilon_\theta = \frac{\nu}{1+\nu}(Z'_{z'} + R_r + \theta_\theta) + 2\mu\frac{u}{r} \qquad (6\text{-}5\text{-}16)$$

对于在对称轴上的点（$r=0$）容易得到

$$\left.\begin{aligned}2\mu w &= \nu^*\varphi(z') - 2z'\varphi'(z') - \psi(z')\\ u &= 0\\ Z'_{z'} + R_r + \theta_\theta &= 4(1+\nu)\varphi'(z')\\ Z'_{z'} &= \varphi'(z') - 2z'\varphi''(z') - \psi'(z')\\ Z'_r &= 0\\ R_r = \theta_\theta &= (Z'_{z'} + R_r + \theta_\theta)/2 - Z'_{z'}/2\end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}5\text{-}17)$$

由于偶条件，解析函数值都是实值。

我们分析在边界面上的情况。由图 6-6 可知，边界上的负荷与应力有如下关系。

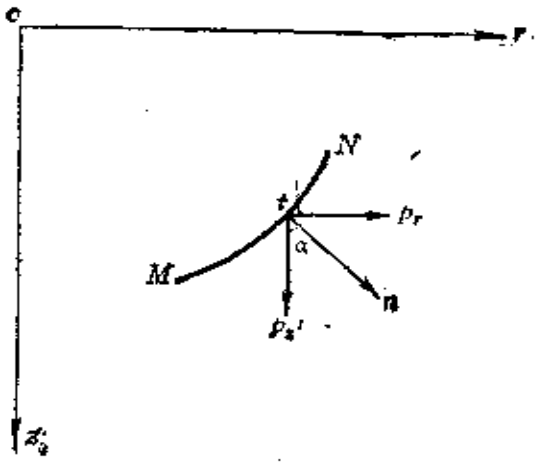


图 6-6

$$\left.\begin{aligned} p_{z'} &= Z'_{z'}\cos\alpha + Z'_r\sin\alpha \\ p_r &= Z'_r\cos\alpha + R_r\sin\alpha \end{aligned}\right\} \tag{6-5-18}$$

而且

$$\sin\alpha = -dz'/ds, \qquad \cos\alpha = dr/ds$$

所以

$$\left.\begin{aligned} Z'_{z'} &= -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(B_r - 2z\frac{\partial}{\partial z'}B_r - B_r^{(0)}\right)\right] \\ Z'_r &= -\frac{\partial}{\partial z'}\left(B_r - 2z'\frac{\partial}{\partial z'}B_r - B_r^{(0)}\right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial r}\left(B_{z'} + 2z'\frac{\partial}{\partial z'}B_{z'} + B_{z'}^{(0)}\right) \\ R_r &= \frac{\partial}{\partial z'}\left(B_{z'} + 2z'\frac{\partial}{\partial z'}B_{z'} + B_{z'}^{(0)}\right) - 2\mu\frac{u}{r} \\ p_{z'} &= \frac{1}{r}\frac{d}{ds}\left[r\left(B_r - 2z'\frac{\partial}{\partial z'}B_r - B_r^{(0)}\right)\right] \\ p_r &= -\frac{d}{ds}\left(B_{z'} + 2z'\frac{\partial}{\partial z'}B_{z'} + B_{z'}^{(0)}\right) + 2\mu\frac{u}{r}\frac{dz'}{ds} \end{aligned}\right\} \tag{6-5-19}$$

有时写成力的积分形式，即

$$\left.\begin{aligned} Z'(s_0) &= \int_0^{s_0} p_z' r ds \\ R(s_0) &= \int_0^{s_0}\left[p_r + \frac{1}{r^2} Z'(s)\frac{dz'}{ds}\right] ds \end{aligned}\right\} \tag{6-5-20}$$

积分是沿 MN 弧，s 是自点 M 算起的弧长。z' 和 r 是 s 的函数。把式（6-5-19）和式（6-5-18）代入式（6-5-20）后，得到

$$\left.\begin{aligned} Z' &= r\left(B_r - 2z'\frac{\partial}{\partial z'}B_r - B_r^{(0)}\right) + C'(1-\nu) \\ R &= -\left(B_{z'} + 2z'\frac{\partial}{\partial z'}B_{z'} + B_z^{(0)}\right) \\ &\quad + (\nu^* + 1)\int_0^{s_0}\left(-\frac{1}{r}B_r + \frac{C'}{4r^2}\right)\frac{dz'}{ds}ds + C \end{aligned}\right\} \tag{6-5-21}$$

这里 C 和 C' 是实常数。

把 $\varphi(\zeta)$，$\psi(\zeta)$ 解析函数代入式（6-5-21）后，得到

$$Z' = -\frac{1}{\pi i}\int_t^t [\varphi(\zeta) - 2z'\varphi'(\zeta) - \psi(\zeta)]\frac{(\zeta - z')d\zeta}{R(\zeta, t)} + C'(1-\nu) \tag{6-5-22}$$

$$\begin{aligned} R = &-\frac{1}{\pi i}\int_t^t [\varphi(\zeta) + 2z'\varphi'(\zeta) + \psi(\zeta)]\frac{d\zeta}{R(\zeta, t)} \\ &-\frac{1+\nu^*}{\pi i}\int_0^{s_0}\left[-\frac{1}{4}C' \right. \\ &\left. + \int_t^t \frac{\varphi(\zeta)(\zeta - z')d\zeta}{R(\zeta, t)}\right]\frac{1}{r^2}\frac{dz'}{ds}ds + C \end{aligned} \tag{6-5-23}$$

若旋转面与对称轴相交，并取此相交点为原点，则可取上式中之 $C' = 0$。这里可知 $2\pi Z'$ 是作用于表面上沿 z' 轴方向之合力。

6-6 有内空腔的有限和无限单连通体的应力和位移

设有轴对称内空腔的无限弹性空间。于是

$$2\mu(\tilde{u}_x + i\tilde{u}_y) = \nu^*\varphi_1(\zeta) - \zeta\overline{\varphi_1'(\zeta)} - \overline{\psi_1(\zeta)} \tag{6-6-1}$$

把式（6-6-1）等号的两侧对 y 求导并代入式（6-3-11）和式

(6-3-12)，得到

$$\left.\begin{aligned} 2\mu w(z',\ r) &= -\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{Im}[\nu^*\varphi(\zeta) \\ &\quad -2z'\varphi'(\zeta)-\psi(\zeta)]\frac{dy}{\sqrt{y^2-r^2}} \\ 2\mu u(z',\ r) &= \frac{2}{\pi r}\int_r^{\infty}\mathrm{Re}[\nu^*\varphi(\zeta) \\ &\quad +2z'\varphi'(\zeta)+\psi(\zeta)]\frac{ydy}{\sqrt{y^2-r^2}} \end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}6\text{-}2)$$

这里

$$\varphi_1'(\zeta)=-2\varphi(\zeta),\quad \psi_1'(\zeta)=-2[\psi(\zeta)+\varphi(\zeta)+\zeta\varphi'(\zeta)] \quad (6\text{-}6\text{-}3)$$

式（6-6-2）中的积分限由$-r$到$+r$经过无穷远点。注意到被积函数相对于y是非偶的，故有以下的关系

$$-2\int_r^{\infty} f(y)dy=\int_r^{\infty} f(-y)dy$$

$$+\int_{\infty}^{r} f(y)dy=\int_{-r}^{+r} f(y)\,\mathrm{sign}\,y\,dy$$

$$i\sqrt{y^2-r^2}\,\mathrm{sign}\ y=\sqrt{(\zeta-t)(\zeta-\bar{t})}=R(\zeta,\ t)$$

在式（6-5-5）中，积分是沿有限的弧。在这里积分沿直线$x=z'=\mathrm{Re}t=$常数经过无限远点与对称轴不相交。除了式（6-5-17）外，上节中的公式都对。

函数$\varphi_1(\zeta)$和$\psi_1(\zeta)$是有空腔的子午面内的解析函数，用它们表示平面状态的分量。利用它们在无穷远点邻域的性质，可知$\varphi(\zeta)$和$\psi(\zeta)$在有孔的平面内全纯并在很远的地方（$|\zeta|$很大）可展为：

$$\left.\begin{aligned} \varphi(\zeta) &= a_0+\frac{a_1}{\zeta}+\frac{a_2}{\zeta^2}+\cdots \\ \psi(\zeta) &= b_0+\frac{b_1}{\zeta}+\frac{b_2}{\zeta^2}+\cdots \end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}6\text{-}4)$$

其中的系数由于偶条件而为实数。

把式（6-5-5）中的两个被积函数分别用 $f_w(\zeta)$ 和 $f_u(\zeta)$ 表示。这些函数在沿 $t\bar{t}$ 有割缝的平面内是全纯的。在无穷远点，它们表示为：

$$\left.\begin{aligned} f_w(\zeta)&=(\nu^* a_0-b_0)\frac{1}{\zeta}+O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right)\\ f_u(\zeta)&=\nu^* a_0+b_0+(\nu^* a_1+b_1)\frac{1}{\zeta}+O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right)\end{aligned}\right\}\quad (6\text{-}6\text{-}5)$$

为使积分存在，其充要条件是

$$\nu^* a_1+b_1=0,\qquad a_0=b_0=0 \qquad (6\text{-}6\text{-}6)$$

把这些条件加到公式（6-5-5）上，就可以沿有限弧积分。

设沿 $x=z'=$常数经过 λ_0 这条路径积分。以坐标原点为圆心作圆弧交 λ_0 于 $\bar{t}_1$ 和 t_1 两点，此圆弧的半径 ρ 大到足以使 $\sin\gamma>0$（图6-7）。令 λ_1 代表在 $\bar{t}_1$ 到 t_1 间的圆弧部分，$\lambda_2=\lambda_2'+\lambda_2''$ 是在

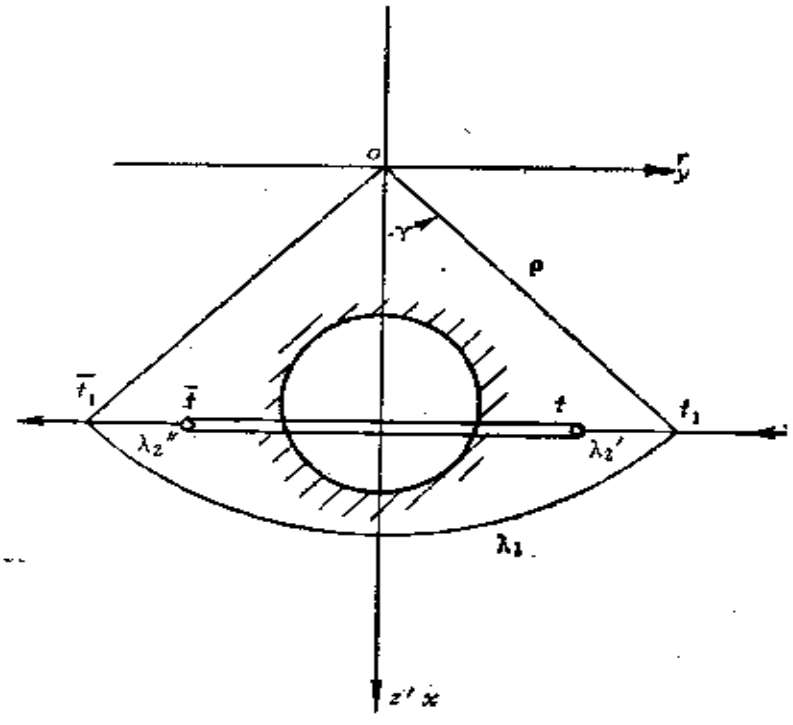


图 6-7

圆弧内 λ_0 的部分，λ_3 是 λ_0 的其余部分（无限部分），$\lambda_4=\lambda_1+\lambda_2$。

用 J_n 表示 $f_w(\zeta)$ 沿 λ_n（$n=0,1,2,4$）的积分。于是

$$2\mu w=\frac{1}{\pi i}J_0=\frac{1}{\pi i}(J_4+J_3-J_1) \tag{6-6-7}$$

当 $\zeta\in\lambda_1$ 和 $\zeta\in\lambda_3$ 时，得到以下的积分估计值

$$\left.\begin{aligned}|J_1|&\leqslant\frac{\text{const}}{\rho}\int_{-\gamma}^{+\gamma}d\theta\leqslant\frac{\text{const}}{\rho}\\ |J_3|&\leqslant\text{const}\int_{\rho\sin\gamma}^{\infty}\frac{dy}{y^2}\leqslant\frac{\text{const}}{\rho}\end{aligned}\right\} \tag{6-6-8}$$

积分 J_4 沿有限路径 λ_4 积分与 ρ 无关，因为此路径可以变为被积函数全纯平面内的任一联接 $\bar{t}_1$ 与 t_1 的路径。因此，J_3-J_1 的差值也应与 ρ 无关。由于上面积分值的估计式，此 J_3-J_1 的差值当 $\rho\to\infty$ 时应为零；所以，不论 ρ 为何值，它应为零。由此得出，即式（6-5-5）可以沿任意路径积分（不论是有限，还是无限）。

可以把 λ_1 取作补足以前的圆弧，积分值也不改变。那末，式（6-5-5）的积分路径可以在割缝 $t\bar{t}_1$ 以下空孔以上，可以在空孔以下或在它们二者之上。若积分路径在割缝与空孔之间，则积分前，符号与沿其它路径积分的符号相反。由于积分路径是任意的，所以也不限制空孔的形状必须是与垂直 z' 轴的直线最多有两个交点；但是空腔边界必须与对称轴 z' 相交。

把式（6-6-4）代入式（6-5-5）经计算后，可知在满足条件（6-6-6）时，应力和位移在无穷处为零。这相当外力作用于物体空腔表面，而物体又在很远处固定的情况。

若 t 在空腔下 z' 轴的邻域，取直线段 $\bar{t}t$ 为积分路径（$t\bar{t}$ 与 z' 相交）。这种情况与§6-5中所讨论的 $r\to 0$ 时一样，即式（6-5-17）。如果沿空腔之上、割缝之下的路径积分，其结果还是式（6-5-5），只是在右边改变符号（即“+”改为“−”，或“−”改为“+”）。

展开式（6-6-4）的系数 a_1 和 b_1 可以用作用在空腔上的外力

合力P表示。作包含空孔的闭曲线Γ（在子午面内，绕对称轴z'旋转Γ，则此旋转面必包含空腔）。于是得到

$$P=-2\pi Z'(a')=-2i\int_{\Gamma}[\Phi(\zeta)-2a'\Phi'(\zeta)-\psi(\zeta)]d\zeta \tag{6-6-9}$$

这里a'是Γ与z'轴的上交点坐标。把式（6-6-4）代入式(6-6-9)并保持条件（6-6-6），则得到

$$P=4\pi(a_1-b_1)=4\pi\lim_{\zeta\to\infty}\zeta[\Phi(\zeta)-\psi(\zeta)]$$

$$a_1=\lim_{\zeta\to\infty}\zeta\Phi(\zeta)=-\frac{b_1}{\nu^*}=-\frac{1}{\nu^*}\lim_{\zeta\to\infty}\zeta\psi(\zeta)$$

$$=\frac{P}{4\pi(1+\nu^*)} \tag{6-6-10}$$

在§6-5中所得的结果可以推广到有一个或几个空腔的有限或无限旋转体的情况。空腔与对称轴应相交。

设物体的子午面是$n+1$连通区B。C_0'是子午面内区域的外边界曲线，内空孔边界曲线分别为C_1'，C_2'，…，它们假设沿z'轴顺次排列（图6-8）。

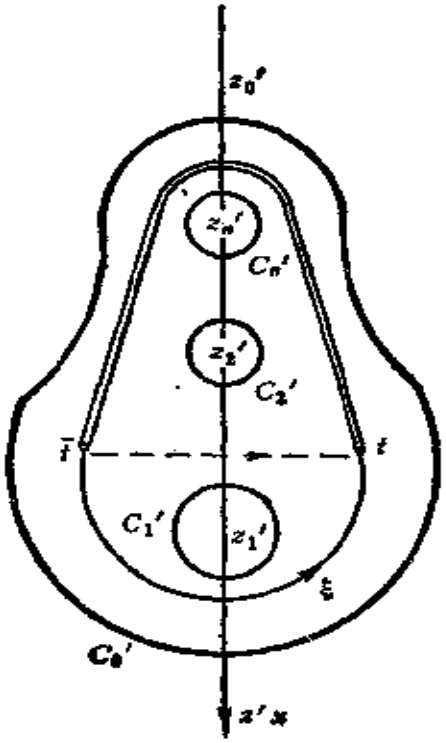


图 6-8

解析函数的形式如下：

$$\left.\begin{aligned}\varphi(\zeta)&=\varphi_0(\zeta)+\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(\zeta)\\ \psi(\zeta)&=\psi_0(\zeta)+\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(\zeta)\end{aligned}\right\}\qquad(6\text{-}6\text{-}11)$$

这里 $\varphi_0(\zeta)$ 和 $\psi_0(\zeta)$ 是 C_0' 内处处全纯的函数，$\varphi_j(\zeta)$ 和 $\psi_j(\zeta)$ 是 C_j' 外的全纯函数并在无限远处为零。

为使在对称轴上的位移是连续的，需要满足条件 (6-6-6)。由此得到

$$\lim_{\zeta\to\infty}\zeta[v^*\varphi_j(\zeta)+\psi_j(\zeta)]=0\qquad(j=1,2,\cdots,n)\qquad(6\text{-}6\text{-}12)$$

要研究积分路径，一般取积分路径在最下空孔的下面，而割缝 tt 在最高（最上）空孔的上面；也可以改变积分路径，如在 C_{k-1}' 与 C_k' 之间（$2\leqslant k\leqslant n$）。当 $k=2$ 时，如图 6-8 中虚线所示路径。我们知道式 (6-5-5) 中的 $\varphi_j(\zeta)$ 及 $\psi_j(\zeta)$ 当 $j=0$ 和 $j\geqslant k$ 时沿积分路径积分后仍为原函数值，因为所有这些函数在积分路径所在的区域内是全纯的。当 $1\leqslant j\leqslant k-1$ 时，$\varphi_j(\zeta)$ 和 $\psi_j(\zeta)$ 的积分要变符号(即“+”号改为“−”号，或反之)。为使结果不改变，在式 (6-5-5) 以及式 (6-5-7) 到式 (6-5-9) 中，把 $\varphi(\zeta)$ 和 $\psi(\zeta)$ 改为

$$\left.\begin{aligned}\varphi_*(\zeta)&=\varphi_0(\zeta)+\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(\zeta)\operatorname{sign}(j-k+1/2)\\ \psi_*(\zeta)&=\psi_0(\zeta)+\sum_{j=1}^{n}\psi_j(\zeta)\operatorname{sign}(j-k+1/2)\end{aligned}\right\}\qquad(6\text{-}6\text{-}13)$$

这些公式适合于积分路径在最上空孔边界曲线 C_n' 之上，但在 $R(\zeta,\ t)$ 的分支割缝之下（$k=n+1$）的情况。如果积

分路径在$R(\zeta,\ t)$分支割缝之上，则

$$\varphi_*(\zeta)=\varphi(\zeta)-2\varphi_0(\zeta),\quad \psi_*(\zeta)=\psi(\zeta)-2\psi_0(\zeta)$$

在对称轴上点的位移和应力的表达式为

$$2\mu w=\sum_{j=0}^{n}[\nu^*\varphi_j(z')-2z'\varphi_j'(z')-\psi_j(z')]\operatorname{sign}(z'-z_j')$$

$$Z'_{z'}=\sum_{j=0}^{n}[\varphi_j'(z')-2z'\varphi_j''(z')-\psi_j'(z')]\operatorname{sign}(z'-z_j')$$

$$R_r=\theta_\theta=2(1+\nu)\sum_{j=0}^{n}\varphi_j'(z')\operatorname{sign}(z'-z_j')-\frac{1}{2}Z'_{z'}$$

$$u=Z'_r=0$$

式中

$z_j'(j\geqslant 1)$——在C_j'内z'轴上的任一点；

$\operatorname{sign}(z'-z_0')=0$。

作用在第k个空腔上的外力合力P_k表示为

$$P_k=4\pi\lim_{\zeta\to\infty}\zeta[\varphi_k(\zeta)-\psi_k(\zeta)]=4\pi(\nu^*+1)\lim_{\zeta\to\infty}\zeta\varphi_k(\zeta)$$

$$=-4\pi\frac{1+\nu^*}{\nu^*}\lim_{\zeta\to\infty}\zeta\psi_k(\zeta)$$

自然作用于外表面上诸外力之合力应为$-\sum_{k=1}^{n}P_k$。所有这些讨论都适用于有某些内空腔的弹性空间，这些空腔都要与对称轴z'相交。在这种情况下，令$\varphi_0(\zeta)=\psi_0(\zeta)=0$。

6-7 有球形空腔的弹性空间和球体的对称问题的解

球体的问题已有解。这里作为前面所讲过理论的实例来介绍。

取弹性球的半径为ρ_0，球心在坐标原点。若是弹性空间的球形空腔，也取空腔心在坐标原点。

对于弹性球体内的问题，取

$$\varphi(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\zeta^n,\quad \psi(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\zeta^n \qquad (6\text{-}7\text{-}1)$$

这里由于偶条件，故 a_n 和 b_n 是实数。

对于空腔外的问题，应取

$$\varphi(\zeta)=\sum_{n=-\infty}^{-1}a_n\zeta^n,\quad \psi(\zeta)=\sum_{n=-\infty}^{-1}b_n\zeta^n \qquad (6\text{-}7\text{-}2)$$

$$\nu^* a_{-1}+b_{-1}=0$$

把式（6-7-1）和式（6-7-2）代入下式

$$B_r(z',\ r)=-\frac{1}{\pi i r}\int\frac{t}{t}\frac{\varphi(\zeta)(\zeta-z')d\zeta}{R(\zeta,\ t)} \qquad (r>0)$$

取积分路径为 $\rho=|t|=$常数。因此

$$\zeta=\rho e^{i\vartheta},\quad R(\zeta,\ t)=\rho e^{i\vartheta/2}\sqrt{2(\cos 0-\cos\vartheta)}$$

$$\rho=\sqrt{z'^2+r^2},\quad \vartheta=\arccos(z'/\rho)$$

ρ 与 ϑ 是 $t=z'+iy$ 在子午面内的极坐标。

球形区域示于图 6-9。

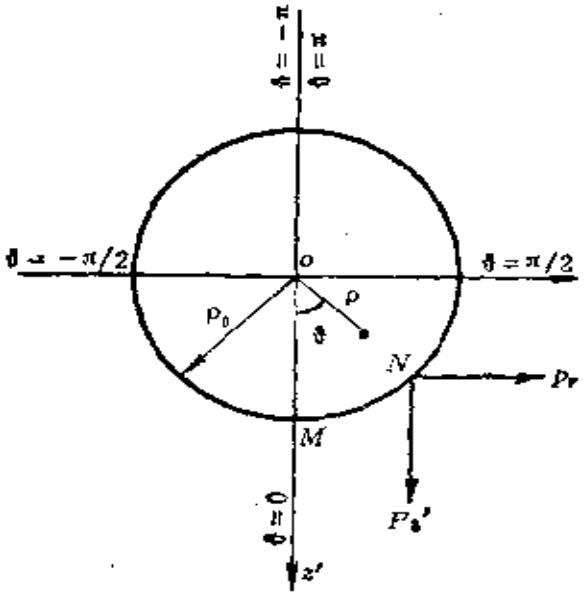


图 6-9

利用已知关系，可得

$$-\frac{1}{\pi i}\int_t^t \frac{\zeta^n d\zeta}{R(\zeta,\ t)} = \frac{2}{\pi}\rho^n \int_0^{\vartheta} \frac{\cos(n+0.5)\theta d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\vartheta)}}$$

$$=\rho^n P_{|n|-k}(\cos\vartheta) \tag{6-7-3}$$

$$\frac{1}{\pi i r}\int_t^t \frac{\zeta^n(\zeta-z')d\zeta}{R(\zeta,\ t)}$$

$$=\frac{\rho^n}{n+1}\ \frac{d}{d\vartheta}P_{n|-k}(\cos\vartheta)\quad (n\neq -1) \tag{6-7-4}$$

$$\frac{1}{\pi i r}\int_t^t \frac{(\zeta-z')d\zeta}{\zeta R(\zeta,\ t)} = -\frac{1-\cos\vartheta}{\rho\sin\vartheta} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} \tag{6-7-5}$$

当 $n\geqslant 0$，$k=0$。$n<0$，$k=1$。$P_n(\cos\vartheta)$ 是勒让特多项式。于是得到

$$\left.\begin{aligned} B_{z'} &= (1-k)a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_n\rho^n P_{|n|-k}(\cos\vartheta) \\ B_r &= \frac{1-k}{2}a_1 r - \frac{k}{\rho}a_{-1}\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} \\ &\quad - \sum_{m=2}^{\infty} a_n \frac{\rho^n}{1+n}\ \frac{d}{d\vartheta}P_{|n|-k}(\cos\vartheta) \end{aligned}\right\} \tag{6-7-6}$$

这里和下面的式中 $n=(-1)^k m$；在球体内部问题中 $k=0$，在球腔外部问题中 $k=1$。利用式（6-5-14）和式（6-5-15）可以得到位移和应力。

若在球形表面上，已知外力 $p_{z'}$ 和 p_r 表示为级数形式，即

$$\left.\begin{aligned} p_{z'} &= (-1)^k \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\cos\vartheta) \\ p_r &= (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{d}{d\vartheta}P_n(\cos\vartheta) \end{aligned}\right\} \tag{6-7-7}$$

由式（6-5-22）和式（6-5-23），得到

$$\left.\begin{aligned} Z' &= \rho_0^2 \int_0^{\vartheta} p_z' \sin\vartheta d\vartheta \\ &= (-1)^k \left[C_0 \rho_0^2 (1-\cos\vartheta) - r \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{d}{d\vartheta} P_n(\cos\vartheta) \right] \\ R &= \int_0^{\vartheta} \left(\rho_0 p_r - \frac{1}{r} Z' \right) d\vartheta \\ &= (-1)^k \left[C_0 \rho_0 \ln \frac{1+\cos\vartheta}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos\vartheta) \right] \end{aligned}\right\} \tag{6-7-8}$$

$$\left.\begin{aligned} A_n &= B_n + \rho_0 D_n, \quad A_0 = -\sum_{n=1}^{\infty} A_n \\ B_n &= -\frac{\rho_0 C_n}{n(n+1)} \quad (n \geqslant 1) \end{aligned}\right\} \tag{6-7-9}$$

这里的角度自图 6-9 中的M点算起（$\vartheta = 0$）。

把式（6-7-6）代入式（6-5-21）中，得到

$$\begin{aligned} (-1)^k Z' &= k(b_{-1} - a_{-1})(1-\cos\vartheta) + 0.5(1-k)(a_1 \\ &\quad - b_1 - 12\rho_0^2 a_3/5) r\rho_0 \sin\vartheta + r \sum_{m=2}^{\infty} \left[\left(-\frac{1}{1+n} + \frac{2n-2}{2n-1} \right) a_n \right. \\ &\quad \left. + \frac{b_n}{1+n} + \frac{2n+4}{2n+3} \rho_0^2 a_{n+2} \right] \rho_0^n \frac{d}{d\vartheta} P_{|n|-k}(\cos\vartheta) \end{aligned} \tag{6-7-10}$$

$$\begin{aligned} (-1)^k R &= -k(1+\nu^*) a_{-1} \rho_0^{-1} \ln \frac{1+\cos\vartheta}{2} \\ &\quad + (1-k) \left(\frac{\nu^*-5}{2} a_1 - b_1 - \frac{12}{5} \rho_0^2 a_3 \right) \rho_0 \cos\vartheta \\ &\quad + \sum_{m=2}^{\infty} \left[\left(\frac{\nu^*-n}{n+1} - \frac{2n^2}{2n-1} \right) a_n - b_n \right. \\ &\quad \left. - \frac{2(n+1)(n+2)}{2n+3} \rho_0^2 a_{n+2} \right] \rho_0^n P_{|n|-k}(\cos\vartheta) + \text{常数} \end{aligned} \tag{6-7-11}$$

$$n = (-1)^k m$$

比较式（6-7-8）与式（6-7-11）可知，$2\pi Z'=4\pi\rho_0^2C_0(\vartheta=\pi)$是外力的合力，在讨论球内部问题（$k=0$）时，它是零。于是得到方程组，解此方程组得到

$$a_n=\frac{A_{|n|-k}-(n+1)B_{|n|-k}\rho_0^{-n}}{\frac{\lambda+\nu^*}{n+1}-2\lambda-\frac{2}{2n-1}}\rho_0^{-n}$$

$$b_n=\left(\frac{\nu^*-\lambda n}{n+1}-\frac{2n^2}{2n-1}\right)a_n-\frac{2(n+1)(n+2)}{2n+3}$$
$$-\rho_0^2a_{n+2}-A_{|n|-k}\rho_0^{-n}$$

$$\lambda=1,\quad n\neq-1,\quad n\neq0 \tag{6-7-12}$$

$$a_{-1}=-\frac{b_{-1}}{\nu^*}=-\frac{1}{1+\nu^*}C_0\rho_0^2 \tag{6-7-13}$$

系数a_0和b_0是待定的。

如果在球面上已知位移如下：

$$2\mu w=\sum_{n=0}^{\infty}A_nP_n(\cos\vartheta),\quad 2\mu u=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{d}{d\vartheta}P_n(\cos\vartheta)$$

式（6-7-12）中的λ取为$-\nu^*$。式（6-7-13）改为

$$a_{-1}=-\frac{b_{-1}}{\nu^*}=\frac{1}{2\nu^*+2/3}A_0\rho_0$$

$$b_0=\nu^*a_0-\frac{4}{3}\rho_0^2a_2-A_0$$

a_0仍然是待定常数，但可以任意取。

6-8 积分法求解球体的对称问题

设在球表面（$\rho=\rho_0$）已知外力p_x'和p_r。设函数$\varphi(\zeta)$，$\varphi'(\zeta)$和$\psi(\zeta)$及其导数一直连续到周界。把式（6-5-7）代入式（6-5-19）中的p_x'中。于是

$$t=\rho_0e^{i\theta},\quad \zeta=\rho_0e^{i\theta},\quad -\vartheta\leqslant\theta\leqslant+\vartheta$$

$$R(\zeta,\ t)=\sqrt{\zeta^2-2\zeta z'+\rho_0^2}=e^{i\theta/2}\sqrt{2(\cos\theta-\cos\vartheta)} \tag{6-8-1}$$

引入两个解析函数$f(\zeta)$和$f_1(\zeta)$，它们与$\varphi(\zeta)$和$\psi(\zeta)$的

关系如下：

$$\varphi(\zeta)=2\zeta f'(\zeta)-f(\zeta)$$
$$\psi(\zeta)=f(\zeta)-2(\rho_0^2+\zeta^2)f''(\zeta)-f_1(\zeta) \tag{6-8-2}$$

经过变换整理后，得到 p_z' 的表达式为：

$$p_z'=-\frac{1}{\pi ir}\frac{d}{ds}\int_t^t\frac{f_1(\zeta)(\zeta-z')d\zeta}{R(\zeta,\ t)}$$
$$=\frac{1}{\pi ir}\frac{d}{ds}\int_t^t f_1'(\zeta)R(\zeta,\ t)d\zeta \tag{6-8-3}$$

这里 $s=\rho_0\vartheta$。把式（6-8-1）代入上式后，得到

$$p_z'=\frac{1}{\pi i\rho_0}\int_t^t\frac{f_1'(\zeta)\zeta}{R(\zeta,\ t)}d\zeta \tag{6-8-3}'$$

把式（6-5-19）中的 p_r 式改写如下：

$$p_r=-\frac{\partial}{\partial z'}\left(B_z'+2z'\frac{\partial}{\partial z'}B_z'+B_z'^{(0)}\right)\frac{dz}{ds}$$
$$-\frac{\partial}{\partial r}\left(B_z'+2z'\frac{\partial}{\partial z'}B_z'+B_z'^{(0)}\right)\frac{dr}{ds}$$
$$+2\mu\frac{u}{r}\frac{dz'}{ds} \tag{6-8-4}$$

把式（6-5-7）代入上式并利用式（6-5-9），于是得到

$$p_r\sin\vartheta=\frac{1}{\pi i\rho_0^2}\int_t^t f_2'(\zeta)R(\zeta,\ t)d\zeta \tag{6-8-5}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}f_2'(\zeta)&=4y'(\zeta)-\zeta f_1''(\zeta)-f_1'(\zeta)\\ y'(\zeta)&=\zeta^2f'''(\zeta)+2(1+\nu)\zeta f''(\zeta)\\ &\quad+(1+\nu)f'(\zeta)\end{aligned}\right\} \tag{6-8-6}$$

以上所引入的解析函数都满足偶条件。于是

$$p_z'(\vartheta)=\frac{2}{\pi}\int_0^\vartheta \mathrm{Re}[f_1'(\zeta)e^{3i\theta/2}]\frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\vartheta)}} \tag{6-8-7}$$

$$p_r(\vartheta)\sin\vartheta=\frac{2}{\pi}\int_0^{\vartheta}\mathrm{Re}[f_2'(\zeta)e^{3i\theta/2}]\sqrt{2(\cos\theta-\cos\vartheta)}d\theta \tag{6-8-8}$$

把式（6-8-7）等号的两侧乘以$[2(\cos\theta-\cos\gamma)]^{-1/2}\sin\vartheta d\vartheta$并在0到$\gamma$内积分。由于

$$\int_0^{\gamma}\frac{\sin\vartheta d\vartheta}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\vartheta)}\sqrt{2(\cos\theta-\cos\gamma)}}=\frac{\pi}{2}$$

所以得到

$$\int_0^{\gamma}p_z'(\vartheta)[2(\cos\theta-\cos\gamma)]^{-1/2}\sin\vartheta d\vartheta$$
$$=\int_0^{\vartheta}\mathrm{Re}[f_1'(\zeta)e^{3i\theta/2}]d\theta$$

把上式等号两侧对γ求导并乘以$2\rho_0e^{-i\gamma/2}$，就得到

$$2\rho_0e^{-i\gamma/2}\cdot\frac{d}{d\gamma}\int_0^{\gamma}\frac{p_z'(\vartheta)\sin\vartheta}{\sqrt{2(\cos\vartheta-\cos\gamma)}}d\vartheta$$
$$=2\rho_0e^{-i\gamma/2}\mathrm{Re}[f_1'(\zeta)e^{3i\gamma/2}] \tag{6-8-9}$$

令$\tau=\rho_0e^{i\gamma}(0<\gamma<\pi)$，又取

$$\varkappa_1(\tau)=\overline{\varkappa_1(\tau)}=2\rho_0e^{-i\gamma/2}\frac{d}{d\gamma}\int_0^{\gamma}\frac{p_z'(\vartheta)\sin\vartheta d\vartheta}{\sqrt{2(\cos\vartheta-\cos\gamma)}} \tag{6-8-10}$$

则

$$2\rho_0e^{-i\gamma/2}\mathrm{Re}[f_1'(\tau)e^{3i\gamma/2}]=\varkappa_1(\tau)=\tau f_1'(\tau)+\frac{\overline{\tau}^2}{\rho_0}\overline{f_1'(\tau)} \tag{6-8-11}$$

把式（6-8-11）等号两侧乘以$(\tau-\zeta)^{-1}d\tau$并沿半径ρ_0的圆周积分，得到

$$f_1'(\zeta)=\frac{1}{2\pi i\zeta}\int_{|\rho_0|}\frac{\varkappa_1(\tau)d\tau}{\tau-\zeta} \tag{6-8-12}$$

积分是沿逆时针方向进行。$|\rho_0|$表示圆周（半径为ρ_0）。若外负荷

是自相平衡，当 $\zeta=0$ 时，$f_1'(0)=0$。因此，$f_1'(\zeta)$ 当 $|\zeta|<\rho_0$ 时是全纯的。

用同样办法解式（6-8-8），得到

$$\left.\begin{aligned}&2\rho_0 e^{-i\gamma/2}\mathrm{Re}[f_2'(\tau)e^{3i\gamma/2}]\\&\quad=\tau f_2'(\tau)+\frac{\bar{\tau}^2}{\rho_0}\overline{f_2'(\tau)}=\varkappa_2(\tau)\\&\varkappa_2(\tau)=\overline{\varkappa_2(\bar{\tau})}\\&\quad=2\rho_0 e^{-i\gamma/2}\frac{d}{d\gamma}\left[\frac{1}{\sin\gamma}\frac{d}{d\gamma}\int_0^{\gamma}\frac{p_r(\vartheta)\sin^2\vartheta}{\sqrt{2}(\cos\vartheta-\cos\gamma)}d\vartheta\right]\end{aligned}\right\}\tag{6-8-13}$$

由此得到　　$$f_2'(\tau)=\frac{1}{2\pi i\zeta}\int_{|\rho_0|}\frac{\varkappa_2(\tau)d\tau}{\tau-\zeta}\tag{6-8-14}$$

当 $\zeta=0$ 时，$f_2'(0)=0$。$f_2'(\zeta)$ 求到后，就可以求到 $y'(\zeta)$。由微分方程（6-8-6）可以求到 $f(\zeta)$。解此微分方程后，得出

$$f'(\zeta)=\frac{1}{k_1-k_2}[J_1(\zeta)-J_2(\zeta)]\tag{6-8-15}$$

k_1 和 k_2 是方程　$k^2+(1+2\nu)k+1+\nu=0$

的两个复根。

$$\left.\begin{aligned}J_1(\zeta)&=\zeta^{k_1}\int_0^{\zeta}y'(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta^{k_1+1}}\\J_2(\zeta)&=\zeta^{k_2}\int_0^{\zeta}y'(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta^{k_2+1}}\end{aligned}\right\}\tag{6-8-16}$$

我们利用式（6-5-5）和式(6-5-15)求位移和应力。此时，$\varphi(\zeta)$ 和 $\psi(\zeta)$ 要利用式（6-8-2）。这里

$$f''(\zeta)=\frac{1}{(k_1-k_2)\zeta}[k_1J_1(\zeta)-k_2J_2(\zeta)]\tag{6-8-17}$$

$$f'''(\zeta)=-\frac{1+\nu}{\zeta^2}[2\zeta f''(\zeta)+f'(\zeta)]+\frac{1}{\zeta^2}y'(\zeta)\tag{6-8-18}$$

$$f(\zeta)=\frac{1}{1-\nu}[y(\zeta)-\zeta^2f''(\zeta)-2\nu\zeta f'(\zeta)]\tag{6-8-19}$$

当 $\zeta=0$ 时，取极限后，得到

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi(0)=-f(0)=\frac{1}{1-\nu}y(0),\quad \varphi'(0)\\
&\quad=f'(0)=-\frac{1}{1+\nu}y'(0)\\
&\varphi''(0)=3f''(0)=\frac{1}{1+\nu}y''(0),\quad f''(0)\\
&\quad=-\frac{1}{7+5\nu}y''(0)\\
&\psi(0)=f(0)-2\rho_0^2f''(0)-f_1(0)\\
&\psi'(0)=f'(0)-2\rho_0^2f'''(0)-f_1'(0)
\end{aligned}\right\}\quad(6\text{-}8\text{-}20)$$

当球体表面的位移已知时，仍然利用以前讨论，得到

$$\left.\begin{aligned}
2\mu w&=\frac{1}{\pi i}\int\frac{f_1^*(\zeta)d\zeta}{R(\zeta,\ t)}\\
2\mu u\sin\vartheta&=\frac{1}{\pi i\rho_0}\int\frac{t}{t}f_2^{*\prime}(\zeta)R(\zeta,\ t)d\zeta
\end{aligned}\right\}\quad(6\text{-}8\text{-}21)$$

这里 $f_1^*(\zeta)$ 和 $f_2^*(\zeta)$ 应满足以下关系

$$\left.\begin{aligned}
&\psi(\zeta)=\nu^*\varphi(\zeta)-2(\rho_0^2+\zeta^2)f''(\zeta)\\
&\qquad-2\zeta f'(\zeta)-f_1^*(\zeta)\\
&f_2^*(\zeta)=4\nu^*y^*(\zeta)-f_1^*(\zeta)\\
&y^*(\zeta)=\zeta f'(\zeta)-f(\zeta)(1+\nu^*)/2\nu^*
\end{aligned}\right\}\quad(6\text{-}8\text{-}22)$$

和以上所讨论的相似，得到

$$\left.\begin{aligned}
&f_1^*(\zeta)=\frac{1}{2\pi i\rho_0}\int_{|\rho_0|}\varkappa_1^*(\tau)\frac{d\tau}{\tau-\zeta}\\
&f(\zeta)=-\frac{\zeta^*}{k}\int_0^\zeta y^{*\prime}(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta^k}-\frac{1}{k}y^*(\zeta),\quad k=\frac{1+\nu^*}{2\nu^*}\\
&4\nu^*y^{*\prime}(\zeta)=f_1^{*\prime}(\zeta)+\frac{1}{2\pi i\zeta\rho_0}\int_{|\rho_0|}\varkappa_2^*(\tau)\frac{d\tau}{\tau-\zeta}
\end{aligned}\right\}\quad(6\text{-}8\text{-}23)$$

求函数 $\varkappa_n^*(\tau)$（$n=1$，2）与求 $\varkappa_n(\tau)$ 的公式一样，只不过用 $2\mu w$ 和 $2\mu u$ 分别代替 p_z' 和 p_r。

以上所述的方法可以用于有球腔的弹性空间。积分路径应在空腔的下面，角 ϑ 和 θ 还是按以前的顺序。式（6-8-2）、式（6-8-6），以及式（6-8-21）、式（6-8-22）保持不变。而式（6-8-3）、（6-8-5）、（6-8-8）、（6-8-10）和式（6-8-13）的右边要变号，因为外负荷作用在周边的左侧。

由式（6-8-12）和式（6-8-14）求函数 $f_1'(\zeta)$ 和 $f_2'(\zeta)$，注意按顺时针方向积分。在式（6-8-16）中，取无穷远点为下限。式（6-8-23）中的 $f(\zeta)$ 也取无穷远点为下限，其余两式不改变。所有解析函数在 $\rho=\rho_0$ 的圆外全纯。由式（6-6-10），可得

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{\zeta\to\infty}\zeta f(\zeta)=-\frac{1}{3(1+\nu^*)}\lim_{\zeta\to\infty}\zeta f_1(\zeta)=\frac{P}{4\pi(1+\nu^*)}\\&\lim_{\zeta\to\infty}\zeta f_2(\zeta)=\lim_{\zeta\to\infty}[4\nu^*\zeta y^*(\zeta)-\zeta f_1^*(\zeta)]=0\end{aligned}\right\}\tag{6-8-24}$$

这里 P 代表外力合力。

〔例题31〕 求在均布负荷 p 作用下单位半径球体中的应力函数。在所讨论的情况中

$$\left.\begin{aligned}&p_z'=-p\cos\vartheta,\qquad p_r=-p\sin\vartheta\\&\int_0^\gamma\frac{p_z'\sin\vartheta d\vartheta}{\sqrt{2(\cos\vartheta-\cos\gamma)}}=-p\left(2\sin\frac{\gamma}{2}-\frac{8}{3}\sin^3\frac{\gamma}{2}\right)\\&\int_0^\gamma\frac{p_r\sin^2\vartheta d\vartheta}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\gamma)}}=-p\left(\frac{16}{3}\sin^3\frac{\gamma}{2}-\frac{64}{15}\sin^5\frac{\gamma}{2}\right)\\&\varkappa_1(\tau)=-p(e^{-2i\gamma}+e^{i\gamma})=-p\left(\tau+\frac{1}{\tau^2}\right)\end{aligned}\right\}$$

$$\chi_2(\tau)=-2p\left(\tau+\frac{1}{\tau^2}\right),\quad f_1'(\zeta)=-p,$$

$$y'(\zeta)=-\frac{3}{4}p$$

$$J_1=\frac{3}{4k_1}p,\quad J_2=\frac{3}{4k_2},\quad f'(\zeta)=-\frac{3p}{4k_1k_2}$$

$$=-\frac{3p}{4(1+\nu)}$$

(6-8-25)

于是得到

$$\varphi(\zeta)=-\frac{3p}{4(1+\nu)}\zeta,\quad \psi(\zeta)=-\frac{1+4\nu}{4(1+\nu)}p\zeta$$

6-9 球体和球形空腔上有集中（沿圆周均布）负荷作用的情况

设有单位半径的球体或球形空腔。沿很狭的一周圈上有均布力作用（图6-10）。令P和Q是分布在$z'=z_0'=\cos\gamma_0$，$r=r_0=$

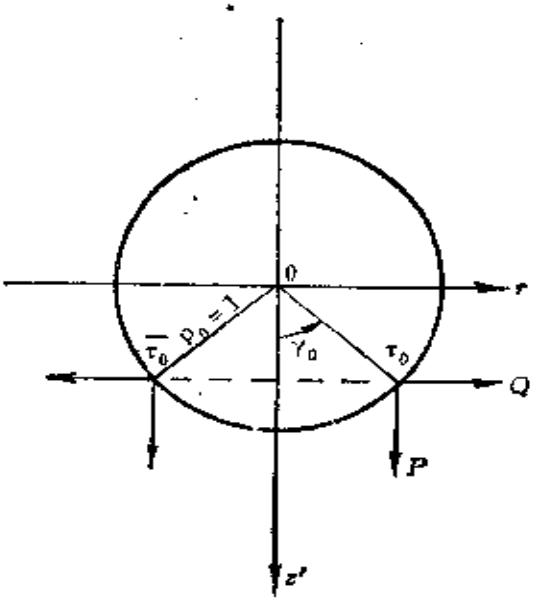


图 6-10

$\sin\gamma_0$ 的圆周上的力，周圈的宽度是 ε。当 $\gamma_0<\vartheta<\gamma_1=\gamma_0+\varepsilon$ 时，令

$$p_n'(\vartheta)=\frac{P}{\varepsilon},\quad p_\tau(\vartheta)=\frac{6Q(\cos\gamma_0-\cos\vartheta)(\cos\vartheta-\cos\gamma_1)}{\varepsilon^3\sin\gamma_0\sin\vartheta} \tag{6-9-1}$$

当 $0\leqslant\vartheta<\gamma_0$ 或是 $\gamma_1<\vartheta\leqslant\pi$ 时，$p_n'(\vartheta)=p_\tau(\vartheta)=0$。又设

$$R_\tau(\tau,\tau_n)=-R_n(\tau_1\tau_n)=ie^{i\gamma/2}\sqrt{2(\cos\gamma_n-\cos\gamma)}$$

由式（6-8-13）得到

$$\varkappa_1(\tau)=\frac{P(1-\tau^2)}{\varepsilon\tau}\left[\frac{h_0(\tau)}{R_\tau(\tau,\ \tau_0)}-\frac{h_1(\tau)}{R_n(\tau,\tau_1)}\right] \tag{6-9-2}$$

这里 $\tau=e^{i\gamma}$ 是单位圆周上任一点，$\tau_n=e^{i\gamma_n}$，“R_τ”和“R_n”分别表示割缝的上岸边和下岸边。当 τ 是上边弧 $\tau_n\bar{\tau}_n$ 上的点时，$h_n(\tau)$（$n=1$，2）等于 1，当 τ 是相应下边弧上的点，则 $h_n(\tau)=0$。这里 R_τ 和 R_n 是 $R(\tau,\tau_n)=\sqrt{(\tau-\tau_n)(\tau-\bar{\tau}_n)}$ 的边界值（$t=\tau_n$）。这个函数在沿 $\tau_n\bar{\tau}_n$ 上边弧割开的 ζ 平面内全纯。把 $\varkappa_1(\tau)$ 代入式（6-8-12）中。我们得到

$$f_1'(\zeta)=\frac{1}{2\pi i\zeta}\int_L\frac{\varkappa_1(\tau)}{\tau-\zeta}d\tau=\frac{Pr_0(1-\zeta^2)}{2\zeta R^3} \tag{6-9-3}$$

L 表示包含割缝 $\tau_n\bar{\tau}_n$，但不包含坐标原点和 ζ 点的闭封曲线，它的方向是逆时针的。

同样可得

$$y'(\zeta)=\frac{1}{8R^5}\{-Pr_0[2\zeta R^2+3(1-\zeta^2)(\zeta-z_0')]+3Qr_0^2(1-\zeta^2)\} \tag{6-9-4}$$

式中 $R=R(\zeta,\ \tau_0)=\sqrt{\zeta^2-2\zeta\tau_0+1}$，

在球体的中心邻域内，$f_1'(\zeta)$ 为

$$f_1'(\zeta)=\frac{1}{2\zeta}Pr_0+\text{全纯函数}$$

若在球体上有某些力作用（集中的或是分布的），要把它们合起来。若这些力是自平衡的，则合力为零。函数 $f_1'(\zeta)$ 就是全纯函数。积分 $f_1'(\zeta)$ 和 $y'(\zeta)$ 并去掉负荷自平衡时变为零的那些项。则

$$\left.\begin{aligned} f_1(\zeta) &= Pr_0\left[\frac{1}{R}-\frac{1}{2}\ln(1-\zeta z_0'+R)\right] \\ y(\zeta) &= \frac{1}{8R^3}\{Pr_0(1-\zeta^2)+Q[2r_0^2\zeta+(\zeta-z_0')R^2 \\ &\quad -R^3]\} \end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}9\text{-}5)$$

$R(\zeta,\tau_0)$ 的分支线经过 $\bar{\tau}_0$ 和 τ_0 点，为了在此圆之上与 z' 轴相交，应在单位圆外。在对称轴上 $R(\zeta,\tau_0)$ 值是正值，其对数值是实数。

用公式（6-8-2）、（6-8-15）～（6-8-19）求函数 $\Phi(\zeta)$，$\psi(\zeta)$ 时，式（6-8-16）要作近似积分（数值积分）。

用式（6-5-17）和（6-8-20）求出球体中心的应力和位移如下：

$$\left.\begin{aligned} Z'_{z'} &= \frac{15\nu}{2(7+5\nu)}Pr_0z_0'+\frac{21r_0}{4(7+5\nu)}(5z_0'^2 \\ &\quad -1)(Pz_0'+Qr_0) \\ R_r &= \theta_\theta = \frac{3}{4}r_0(Pz_0'+Qr_0)-\frac{1}{2}Z'_{z'} \\ Z'_r &= 0, \quad u=0 \\ 2\mu w &= Q(1+z_0')/2+5r_0z_0'(Pz_0'+Qr_0)/4(1+\nu) \end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}9\text{-}6)$$

求在 P 和 Q 作用点 $\tau_0=z_0'+ir_0$ 邻域内的应力的渐近表达式。由式（6-5-7）和式（6-5-15）可以看出，当 $\zeta\to\tau_0$，应消去 $\Phi'(\zeta)$ 和 $2z_0'\Phi''(\zeta)+\psi'(\zeta)$ 中有 1/2 或大于 1/2 阶的奇异性的项，$\Phi''(\zeta)$ 中有 3/2 或大于 3/2 阶的奇异性的项，则积分是有限的。当 $\zeta\to\tau_0$ 时，函数 $J_1(\zeta)$ 和 $J_2(\zeta)$ 的奇异性与

$\Phi'(\zeta)$ 的奇异性一样。

把式（6-9-4）代入式（6-8-16）并作分部积分，直到被积函数的奇异性的阶数不小于 1。于是，经变换整理后得到

$$J_n=\frac{1-\zeta^2}{8\zeta R}\left[\frac{Pr_0}{R^2}+\frac{P}{\zeta r_0}(1+k_n)(\zeta-z_0')+Q(\zeta-z_0')\left(\frac{1}{R^2}+\frac{2}{r_0^2}\right)\right]-\frac{Q}{8R}\left(\frac{1+k_n}{\zeta^2}-k_n+1\right)+O(1) \tag{6-9-7}$$

于是得到

$$2\Phi'(\zeta)=Pr_0\left[\frac{1}{R(\zeta,\tau_0)}\right]_{,\zeta}+Q\left[\frac{\zeta-z_0'}{R(\zeta,\tau_0)}-1\right]_{,\zeta}+\left[\mathrm{Re}(1-2\nu)(P+iQ)e^{-i\gamma_0}\right]\frac{r_0}{R(\zeta,\tau_0)}+\left[\frac{\zeta-\tau_0}{R(\zeta,\tau_0)}-1\right]\mathrm{Im}(1-2\nu)(P+iQ)e^{-i\gamma_0}+O(1) \tag{6-9-8}$$

$$4z_0'\Phi''(\zeta)+2\psi'(\zeta)=-Pr_0[R(\zeta,\tau_0)^{-1}]_{,\zeta}+Q[(\zeta-z_0')R(\zeta,\tau_0)^{-1}-1]_{,\zeta}+\frac{r_0}{R(\zeta,\tau_0)}\mathrm{Re}[(1-2\nu)(P+iQ)e^{-3i\gamma_0}]+\left[\frac{\zeta-\tau_0}{R(\zeta,\tau_0)}-1\right]\mathrm{Im}(1-2\nu)(P+iQ)e^{-3i\gamma_0}+O(1) \tag{6-9-9}$$

把式（6-9-8）代入式（6-5-7），结果得到应力分量如下：

$$\left.\begin{aligned}Z_z'&=Z_z^*-r_0\ln\rho_1\frac{1-2\nu}{\pi}[2PZ_0'r_0-Q(2Z_0'^2-1)]+O(1)\\R_r&=R_r^*-\left\{\frac{3Q}{\pi r_0}+2(1-\nu)\frac{1-2\nu}{\pi}(Pz_0'+Qr_0)-r_0\frac{1-2\nu}{\pi}[2Pz_0'r_0-Q(2z_0'^2-1)]\right\}\ln\rho_1+O(1)\end{aligned}\right\} \tag{6-9-10}$$

$$\left.\begin{aligned}\theta_\theta &= \theta_\theta^* - \left\{\frac{2-\nu}{\pi r_0}Q + 2\nu\frac{1-2\nu}{\pi}(Pz_0' + Q_{r_0})\right\}\ln\rho_1 + O(1)\\ Z_r' &= Z_r^* + r_c\ln\rho_1\frac{1-2\nu}{\pi}[2Pz_0'r_0 - Q(2z_0'^2 - 1)] + O(1)\end{aligned}\right\}$$

$$\rho_1 = |t - \tau_0|$$

这里Z_z^*，R_r^*，0_θ^*和Z_r^*是圆盘中受与圆球同样负荷时所产生的诸应力分量（参看1966年版穆斯海里什维里著“数学弹性理论中的若干基本问题”书，§80）。

除作用于球体上的诸外力外，还有作用于球体某任意极点上的集中力P_0。此时令

$$Pr_0 = P\sin\gamma_0 = P_0/2\pi = 常数$$

在上极点时$\gamma_0 \to \pi$，在下极点时$\gamma_0 \to 0$，取包括上式的项的极限后，得到

$$\left.\begin{aligned}f_1'(\zeta) &= -\frac{P_0}{4\pi\zeta}\frac{1\pm\zeta}{(1\mp\zeta)^2}\\ y'(\zeta) &= \frac{P_0}{16\pi}\frac{\zeta\pm 3}{(1\mp\zeta)^3}\end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}9\text{-}11)$$

当$\gamma_0 = 0$时，取式中上面的符号，当$\gamma_0 = \pi$时，取式中下面的符号。

对于$\gamma_0 = \pi$时有P_0作用的情况，得到

$$\left.\begin{aligned}\varphi'(\zeta) = -\frac{P_0}{4\pi}\Big[&\frac{1+(1-2\nu)(1+\zeta)}{(1+\zeta)^2}\\ &+\frac{1}{4}(1+12\nu-16\nu^2)\ln(1+\zeta)\Big]\\ &+O(1)\end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}9\text{-}12)$$

$$2\varphi''(\zeta)-\psi'(\zeta)=\frac{P_0}{4\pi}\left[-\frac{1}{4}(1+12\nu-16\nu^2)\ln(1+\zeta)-\frac{1-(1-2\nu)(1+\zeta)}{(1+\zeta)^2}\right]+O(1)$$

于是得到应力分量的表达式如下：

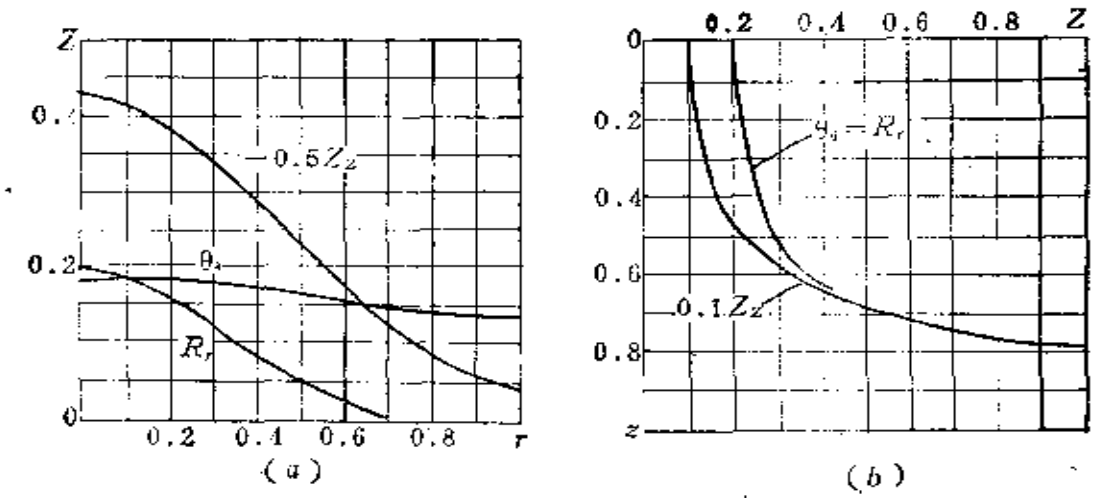
$$\left.\begin{aligned}
Z'_{z'}+R_r+\theta_\theta &= Z^*_z+R^*_r+\theta^*_\theta-\frac{P_0}{\pi\rho_1}(1-2\nu)(1+\nu)-\frac{P_0}{4\pi}(1+12\nu-16\nu^2)(1+\nu)\ln\rho_1+O(1)\\
Z'_{z'} &= Z^*_z-\frac{P_0}{2\pi\rho_1^3}(1-2\nu)(z'+1)^2+O(1)\\
\theta_\theta &= \theta^*_\theta+\frac{P_0(1-2\nu)}{2\pi}\left(\frac{1-2\nu}{\rho_1}-\frac{3-2\nu}{\rho_1+z'+1}\right)-\frac{P_0}{8\pi}(1+\nu)(1+12\nu-16\nu^2)\ln\rho_1+O(1)\\
Z'_r &= Z^*_r-\frac{P_0(1-2\nu)}{2\pi\rho_1}r_0\left(\frac{z'+1}{\rho_1^2}-\frac{1}{\rho_1+z'+1}\right)+O(1)
\end{aligned}\right\}\quad(6\text{-}9\text{-}13)$$

这里$\rho_1=|t+1|$；Z^*_z，R^*_r，θ^*_θ，Z^*_r相当于$z'\leqslant-1$时弹性半空间受集中力P_0作用而产生的应力分量。

若取P_0为单位力，球半径为1。在$z'=0$平面内的应力分量如图6-11 a所示。在对称轴上的应力分量如图6-11 b所示。

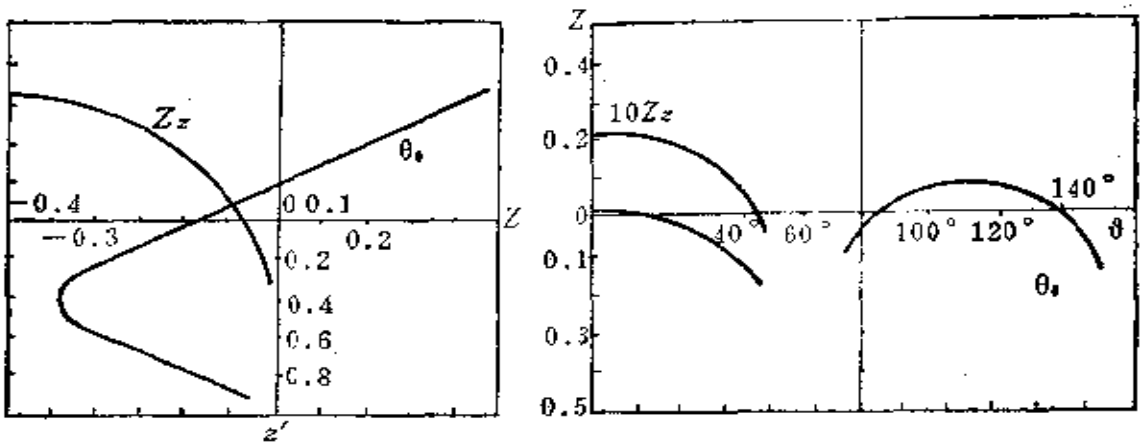
若有P和Q作用，此时$\gamma_0=\pi/3$；在上极点有P_0作用，所以$P=-1/\pi\sqrt{3}$，$Q=-1/\pi$。在$z'=0$的平面内，在对称轴上的应力分量如图6-12 a所示。图6-12b表示球面上的主应力θ_θ，Z_z。这里都取$\nu=0.25$。

所求到的解可以用于有任意轴对称负荷$p'_z(\gamma_0)$和$p_r(\gamma_0)$的



(a) (b)

图 6-11



(a) (b)

图 6-12

情况。于是在式 (6-9-1)～式 (6-9-6) 可取

$$P = p_{z'}(\gamma_0)d\gamma_0, \quad Q = p_r(\gamma_0)d\gamma_0 \qquad (6\text{-}9\text{-}14)$$

沿 γ_c 积分的上下限为 π 和 0 。

解弹性空间中球腔的问题时，$R(\xi, \tau_0)$ 的分支线在圆内经过 τ_0 和 $\bar{\tau}_0$ 两点。$R(\xi, \tau_0)$ 在空腔下的对称轴上为正值；在空腔上的对称轴上为负值。式 (6-9-3) 和式 (6-9-4)保持不变。而式 (6-9-5) 中第一式改变为

$$f_1(\zeta)=\frac{Pr_0}{2}\left[-\frac{2}{R}\mp\ln\frac{R\pm(1-\zeta z_0')}{\zeta(1\pm z_0')}\right] \qquad (6\text{-}9\text{-}15)$$

因在式（6-9-5）第一式中曾略去与 Pr_0 成比例的项。若在球腔内的极点（$\gamma_0=0$ 或 $\gamma_0=\pi$）有集中力 P_0 作用，则上式改为

$$f_1(\zeta)=\frac{P_0}{4\pi}\left[\frac{2}{\zeta\mp1}\pm\ln\frac{\zeta\mp1}{\zeta}\right] \qquad (6\text{-}9\text{-}16)$$

当 $\gamma_0=0$ 时，取上边的符号；当 $\gamma_0=\pi$ 时，取下边的符号。式（6-9-15）中的符号或全取上边的，或全取下边的。

若当 $r_0>0$，在集中力作用点应力的奇异性同前用式（6-9-10）表示。当集中力作用下极点，则公式（6-9-13）中的 $z'+1$ 应改为 $z'-1$，$\rho_1=|t-1|$，并改变等式右边第二项前的符号。

6-10 弹性空间中的球面裂缝

设弹性空间有一球面裂缝，球半径为 $\rho_0=1$，圆球心在坐标原点。在子午面内，裂缝为一圆弧 $\overset{\frown}{AMB}$。此圆弧在坐标原点之上（图 6-13），弧所对中心角为 $2\pi-2\gamma_0$。这里 A 和 B 对应 τ_0 和 $\bar{\tau}_0$，$\tau_0=z_0'+ir_0$，$z_0'=\cos\gamma_0$，$r_0=\sin\gamma_0$。

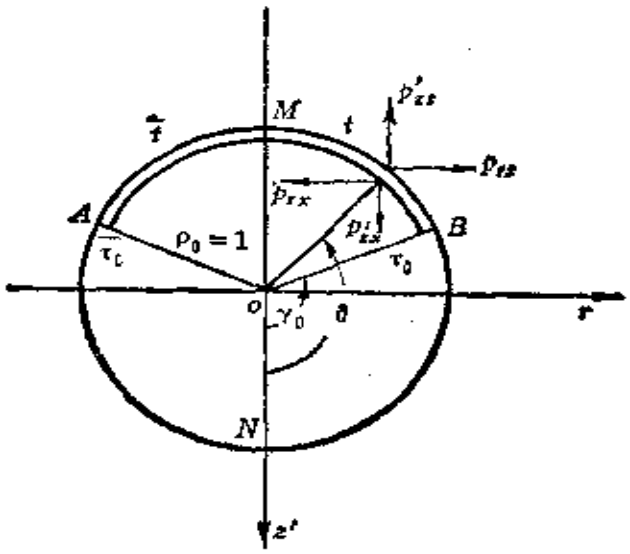


图 6-13

在裂缝的上岸和下岸的力分别用 $p_x'_s$, p_{rs} 和 $p_x'_x$, p_{rx} 表示。在无穷远处的应力和位移认为是零。可以把裂缝当作轴对称空腔的临界情况，并可利用§6-6中所述内容。函数 $\varphi(\zeta)$ 和 $\psi(\zeta)$ 在沿 $\overset{\frown}{AMB}$ 割开的平面内全纯，在无穷远点的展开式如式(6-6-4)和式（6-6-6）那样。

我们引入 $f(\zeta)$ 如式（6-8-2)。得到

$$f(\zeta)=\sqrt{\zeta}\int\varphi'(\zeta)\frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}}-\varphi(\zeta) \qquad (6\text{-}10\text{-}1)$$

若取积分下限为零，则上式为

$$f(\zeta)=\sqrt{\zeta}\int_0^{\zeta}\varphi'(\zeta)\frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}}-\varphi(\zeta)+C\sqrt{\zeta} \qquad (6\text{-}10\text{-}2)$$

C 是实常数（因为要满足偶条件)。

当 $|\zeta|<1$ 时，$\varphi(\zeta)$ 展开为

$$\varphi(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\zeta^n$$

把它代入式（6-10-2）后并积分，得到

$$f(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{2n-1}\zeta^n+C\sqrt{\zeta}$$

若 $|\zeta|>1$，则取

$$f(\zeta)=\sqrt{\zeta}\int_{\infty}^{\zeta}\varphi'(\zeta)\frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}}-\varphi(\zeta)+C'\sqrt{\zeta} \qquad (6\text{-}10\text{-}3)$$

由此可以看出，不含 $C\sqrt{\zeta}$ 的项在单位圆内全纯，不含 $C'\sqrt{\zeta}$ 的项在单位圆外全纯，并在无穷远处为零。

把式（6-10-2）和式（6-10-3）解析延拓到 $\overset{\frown}{AMB}$ 弧上后，它们应满足如下关系

$$\sqrt{\sigma}\int_0^{\sigma}\varphi'(\zeta)\frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}}-\varphi(\sigma)+C\sqrt{\sigma}$$

$$=\sqrt{\sigma}\int_{\infty}^{\sigma}\varphi'(\zeta)\frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}}-\varphi(\sigma)+C'\sqrt{\sigma}$$

由此得到

$$C-C'=-\int_0^{\infty}\varphi'(\zeta)\frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}} \qquad (6\text{-}10\text{-}4)$$

σ 是单位圆周上的点。式(6-10-4)的积分路径不能与割缝 $\overset{\frown}{AMB}$ 相交。因此，常数 C 与 C' 之中只能有一个是任意的。以后令 $C'=0$，$C\neq 0$。认为 $f(\zeta)$ 在单位圆外是全纯的。在圆内，$f(\zeta)-C\sqrt{\zeta}$ 是全纯的。$\sqrt{\zeta}$ 的分支线沿对称轴从0向上。

当 $\rho_0=1$ 时，由式（6-8-2）和式（6-8-6）所确定的 $f_1(\zeta)$ 和 $f_2(\zeta)$ 在 $|\zeta|=1$ 外是全纯的。而在单位圆内，则

$$f_n'(\zeta)=\frac{3}{8}(n+1)C\frac{\zeta^2-1}{\zeta^2\sqrt{\zeta}}+\text{全纯函数} \qquad (n=1,\ 2) \qquad (6\text{-}10\text{-}5)$$

由式（6-8-24），可得

$$\lim_{\zeta\to\infty}\zeta^n f_n'(\zeta)=0 \quad (n=1,\ 2) \qquad (6\text{-}10\text{-}6)$$

下面讨论边界条件，设在式（6-8-3）和（6-8-5）中的 t 是割缝 $\overset{\frown}{AMB}$ 的下岸，则

$$\left.\begin{aligned} p_{\alpha}'_{x}&=\frac{1}{\pi i}\int_t^{\bar{t}}\frac{f_1'(\zeta)\zeta d\zeta}{R(\zeta,\ t)}\\ p_{r\alpha}\sin\vartheta&=\frac{1}{\pi i}\int_t^{\bar{t}}f_2'(\zeta)R(\zeta,\ t)d\zeta\end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}10\text{-}7)$$

这里积分路径要从下面绕过坐标原点。

$p_{\alpha}'_{x}$ 又可写为：

$$p_{z'x}=\frac{1}{\pi i}\int\frac{t}{t}[f_1'(\zeta)-2Cg(\zeta)]\frac{\zeta d\zeta}{R(\zeta,\ t)}$$
$$+\frac{2C}{\pi i}\int\frac{t}{t}\frac{g(\zeta)\zeta d\zeta}{R(\zeta,\ t)} \qquad (6\text{-}10\text{-}8)$$

式中

$$g(\zeta)=\frac{3(\zeta^2-1)}{8\zeta^2\sqrt{\zeta}}$$

第二个积分的积分线与经过N点的圆周重合。利用式（6-8-7），可知此积分的值为零，因为

$$\mathrm{Re}[g(\sigma)e^{3i\theta/2}]=\frac{3}{8}\mathrm{Re}[(e^{2i\theta}-1)e^{i\theta}]=0$$

式（6-10-8）中第一个积分中的被积函数在圆$|\zeta|=1$内是全纯的。把积分路径与过M点的圆周重合。则

$$\zeta=\sigma=e^{i\vartheta}=-e^{-i\vartheta_1},\quad t=-e^{-i\vartheta_1}$$
$$\theta_1=\pi-\theta,\quad \vartheta_1=\pi-\vartheta。$$

$$\left.\begin{aligned}R_x(\sigma,\ t)&=e^{i\theta_1/2}\sqrt{2(\cos\theta_1-\cos\vartheta_1)}\\ p_{z'x}&=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\vartheta_1}\frac{\mathrm{Re}[f_{1x}'(\sigma)-2Cg(\sigma)]e^{-3i\theta_1/2}}{\sqrt{2(\cos\theta_1-\cos\vartheta_1)}}d\theta_1\end{aligned}\right\}\quad (6\text{-}10\text{-}9)$$

同样可得

$$p_{rx}\sin\vartheta_1=$$
$$=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\vartheta_1}\mathrm{Re}\{[f_{2x}'(\sigma)-3Cg(\sigma)]e^{-3i\theta_1/2}\}\sqrt{2(\cos\theta_1-\cos\vartheta_1)}\ d\theta_1$$
$$(6\text{-}10\text{-}10)$$

当满足沿割缝上岸的边界条件，在式（6-8-3）和式(6-8-5)中，积分沿在割缝和$R(\sigma,\ t)$分支线上的曲线。在公式中用相反的符号代入$p_{z'x}$和p_{rx}。于是

$$p_{z'x}=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\vartheta_1}\mathrm{Re}[f_{1x}'(\sigma)e^{-3i\theta_1/2}]\frac{d\theta_1}{\sqrt{2(\cos\theta_1-\cos\vartheta_1)}}$$

$$p_{r_s}\sin\vartheta_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\vartheta_1}\mathrm{Re}[f'_{2s}(\sigma)e^{-3i\theta_1/2}]\sqrt{2(\cos\theta-\cos\vartheta_2)}\,d\theta_1 \tag{6-10-11}$$

取函数 $f'_n(\zeta)$ 的形式如下：

$$f'_n(\zeta)=f'_{n0}(\zeta)+(n+1)C_1F_1(\zeta)+(n-1)C_2F_2(\zeta) \tag{6-10-12}$$

$C_1=C/4\pi$，C_2是实常数。

$$\left.\begin{aligned}F_1(\zeta)&=\frac{3(1-\zeta^2)}{4i\zeta^2\sqrt{\zeta}}L(\zeta)-\frac{3(1+\zeta)}{\zeta^2}\sin\frac{\gamma_0}{2}\\&\quad+\frac{4(1+\zeta)}{\zeta R^2(\zeta,\tau_0)}\sin^3\frac{\gamma_0}{2}\\F_2(\zeta)&=\frac{1+\zeta}{R^4(\zeta,\tau_0)},\quad L(\zeta)=\ln\left(\frac{\sqrt{\zeta}-\sqrt{\tau_0}}{\sqrt{\zeta}+\sqrt{\tau_0}}\right.\\&\quad\left.\times\frac{\sqrt{\zeta}+\sqrt{\tau_0}}{\sqrt{\zeta}-\sqrt{\tau_0}}\right)\end{aligned}\right\} \tag{6-10-13}$$

利用对数的展开式

$$L(\zeta)=-\frac{4i}{\sqrt{\zeta}}\left(\sin\frac{\gamma_0}{2}+\frac{1}{3\zeta}\sin\frac{3\gamma_0}{2}+\frac{1}{5\zeta^2}\sin\frac{5\gamma_0}{2}+\cdots\right)\quad(|\zeta|>1)$$

$$L(\zeta)=-2\pi i+4i\sqrt{\zeta}\left(\sin\frac{\gamma_0}{2}+\frac{\zeta}{3}\sin\frac{3\gamma_0}{2}+\frac{\zeta^2}{5}\sin\frac{5\gamma_0}{2}+\cdots\right)\quad(|\zeta|<1)$$

我们可以看出，在单位圆外，$F_1(\zeta)$ 是全纯的。$\zeta^2F_1(\zeta)$ 在无穷远处是零。在圆内 $F_1(\zeta)-4\pi g(\zeta)$ 是全纯的。$f'_{n0}(\zeta)$ 是在沿$\overset{\frown}{AMB}$割开的平面内全纯的。

把式（6-10-12）代入式（6-10-9）～式（6-10-11）中，由

于 $\mathrm{Im}L_x(\sigma)=-2\pi$，$\mathrm{Im}L_s(\sigma)=0$，$\mathrm{Im}L_x(\sigma)=0$，包含$C_1$和$C_2$的项取消，外力只与 $f'_{n0}(\zeta)$ 有关。解出后，得到

$$\left.\begin{aligned}&\tau f'_{nos}(\tau)-\tau^2\overline{f'_{nos}(\tau)}=\varkappa_{ns}(\tau)\\&\tau f'_{nox}(\tau)-\tau^2\overline{f'_{nox}(\tau)}=\varkappa_{nx}(\tau)\end{aligned}\right\}\quad(n=1,\ 2)\qquad(6\text{-}10\text{-}14)$$

式中

$$\varkappa_{1s}=2e^{i\gamma_1/2}\frac{d}{d\gamma_1}\int_0^{\gamma_1}\frac{p_{z's}(\vartheta_1)\sin\vartheta_1 d\vartheta}{\sqrt{2(\cos\vartheta_1-\cos\gamma_1)}}$$

$$\varkappa_{1x}=2e^{i\gamma_1/2}\frac{d}{d\gamma_1}\int_0^{\gamma_1}\frac{p_{z'x}(\vartheta_1)\sin\vartheta_1 d\vartheta_1}{\sqrt{2(\cos\vartheta_1-\cos\gamma_1)}}$$

$$\varkappa_{2s}=-2e^{i\gamma_1/2}\frac{d}{d\gamma_1}\left[\frac{1}{\sin\gamma_1}\frac{d}{d\gamma_1}\int_0^{\gamma_1}\frac{p_{rs}(\vartheta_1)\sin^2\vartheta_1 d\vartheta_1}{\sqrt{2(\cos\vartheta_1-\cos\gamma_1)}}\right]$$

$$\varkappa_{2x}=-2e^{i\gamma_1/2}\frac{d}{d\gamma_1}\left[\frac{1}{\sin\gamma_1}\frac{d}{d\gamma_1}\int_0^{\gamma_1}\frac{p_{rx}(\vartheta_1)\sin^2\vartheta_1 d\vartheta}{\sqrt{2(\cos\vartheta_1-\cos\gamma_1)}}\right.$$

$$\tau=e^{i\gamma}=-e^{-i\gamma_1},\quad\gamma_1=\pi-\gamma,\quad 0\leqslant\gamma_1<\pi-\gamma_0.$$

当 γ_1为负时，由条件 $\varkappa_{ns}(\tau)=\overline{\varkappa_{ns}(\bar{\tau})}$ 求得$\varkappa_{ns}(\tau)$值，由条件 $\varkappa_{nx}(\tau)=\overline{\varkappa_{nx}(\bar{\tau})}$ 求得 $\varkappa_{nx}(\tau)$ 值。

在A和B点的位移有限，但其应力则为无限，其奇异性的阶则小于 1。由此得出，当 $\zeta\to\tau_0$时，估计下式为

$$|f'_1(\zeta)|\leqslant\frac{\text{常数}}{|\zeta-\tau_0|^{1.5-\varepsilon}},\quad|f'_2(\zeta)|\leqslant\frac{\text{常数}}{|\zeta-\tau_0|^{2.5-\varepsilon}}$$

$$(\varepsilon>0)\qquad(6\text{-}10\text{-}15)$$

由于偶条件，当 $\zeta\to\bar{\tau}_0$时，也有如上的估计结果。

引入以下解析函数

$$\Phi_{nm}(\zeta)=\left[\zeta f'_{n0}(\zeta)+(-1)^m\frac{1}{\zeta^2}f'_{n0}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right]R^{m+2n-2}(\zeta,\ \tau_0)$$

$$(n,\ m=1,\ 2)\qquad(6\text{-}10\text{-}16)$$

它在有割缝$\overset{\frown}{AMB}$的平面内为全纯，在无穷远点有$n+m-2$级极点；在A和B点，奇异性的阶小于1。

在割缝$\overset{\frown}{AMB}$的上岸和下岸，这些函数的边界值为

$$\left.\begin{aligned}&\Phi_{nms}-\Phi_{nmx}=[(-1)^m\varkappa_{ns}(\tau)\\&\qquad-\varkappa_{nx}(\tau)][R_x(\tau,\ \tau_0)]^{m+2n-2}=X_{nm}(\tau)\\&R_x(\tau,\ \tau_0)=e^{-i\gamma_1/2}\sqrt{2(\cos\gamma_1+\cos\gamma_0)}\end{aligned}\right\}\quad(6\text{-}10\text{-}17)$$

$\zeta\to\tau$指的是在割缝上岸的情况；$1/\zeta\to\bar{\tau}$指的是在下岸的情况。由偶条件可知，$f'_{n0}(\bar{\tau})=\overline{f'_{n0}(\tau)}$，而在割缝不同岸边，$R(\tau,\ \tau_0)$只相差个符号。

由式（6-10-17）和在无穷远点的条件，得到如下表达式：

$$\Phi_{nm}(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\tau_0}^{\tau_0}X_{nm}(\tau)\frac{d\tau}{\tau-\zeta}+A_{nm}+(n+m-2)B_{nm}\zeta+(m-1)(n-1)C_{nm}\zeta(1+\zeta)\qquad(6\text{-}10\text{-}18)$$

由于$R(1/\zeta,\ \tau_0)=R(\zeta,\ \tau_0)/\zeta$，由式（6-10-16）得到如下结果：

$$f'_{n0}(\zeta)=\frac{\Phi_{n1}(\zeta)}{2\zeta R^{2n-1}(\zeta,\ \tau_0)}+\frac{\Phi_{n2}(\zeta)}{2\zeta R^{2n}(\zeta,\ \tau_0)}$$

$$f'_{n0}(\zeta)=\frac{\zeta^{2n-2}\Phi_{n2}(\zeta^{-1})}{2R^{2n}(\zeta,\ \tau_0)}-\frac{\zeta^{2n-3}\Phi_{n1}(\zeta^{-1})}{2R^{2n}(\zeta,\ \tau_0)}\qquad(6\text{-}10\text{-}19)$$

把式（6-10-18）代入式（6-10-19），注意到$f'_{n0}(\zeta)$的两个式子应得到同一结果，就得到式（6-10-18）中的系数值。经整理后，得到

$$\left.\begin{aligned}A_{1l}&=-\frac{1}{4\pi i}\int_{\tau_0}^{\tau_0}X_{11}(\tau)\frac{d\tau}{\tau}\\A_{12}=B_{12}&=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\tau_0}^{\tau_0}X_{12}(\tau)\frac{d\tau}{\tau}\\A_{2m}&=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\tau_0}^{\tau_0}X_{2m}(\tau)\frac{d\tau}{\tau}\\B_{2m}&=-\frac{1}{4\pi i}\int_{\tau_0}^{\tau_0}X_{2m}(\tau)\frac{d\tau}{\tau^2}\end{aligned}\right\}\quad(m=1,\ 2)\qquad(6\text{-}10\text{-}20)$$

当 $\zeta=0$ 时由 $f'_{10}(\zeta)$ 为全纯的条件，则知 $A_{11}=B_{110}$。在 B_{11}，C_{11}，C_{12}，C_{21}前的乘数为零，它们的值没有区别。C_{22}的值是待定的。与 C_{22}有关的函数 $f'_{20}(\zeta)$ 与 $F_2(\zeta)$ 相重合一致。而在式（6-10-12）中函数 $F_2(\zeta)$ 与常数 C_2 在一起，所以 C_{22} 可以任取。

结果得到

$$\left.\begin{aligned} f'_{10}(\zeta)&=\frac{1}{4\pi i}\sum_{m=1}^{2}\frac{1}{R^m(\zeta,\ \tau_0)}\int_{\tau_0}^{\tau_0}\frac{X_{1m}(\tau)d\tau}{\tau(\tau-\zeta)}\\ &\quad+A_{11}\frac{\zeta+1-R(\zeta,\ \tau_0)}{2\zeta R^2(\zeta,\ \tau_0)}\\ f'_{20}(\zeta)&=\frac{1}{4\pi i}\sum_{m=1}^{2}\frac{\zeta}{R^{m+2}(\zeta,\ \tau_0)}\int_{\tau_0}^{\tau_0}\frac{X_{2m}(\tau)d\tau}{\tau^2(\tau-\zeta)}\\ &\quad-\frac{B_{21}}{2R^3(\zeta,\ \tau_0)}+C_{22}\frac{\zeta+1}{R^4(\zeta,\ \tau_0)} \end{aligned}\right\} \tag{6-10-21}$$

解式（6-8-6）中第二式得到

$$f'(\zeta)=\frac{1}{k_1-k_2}\left[\zeta^{k_1}\int\frac{y'(\zeta)d\zeta}{\zeta^{k_1+1}}-\zeta^{k_2}\int\frac{y'(\zeta)d\zeta}{\zeta^{k_2+1}}\right] \tag{6-10-22}$$

式中 $y'(\zeta)$ 是式（6-8-6）中的第二式，k_1和 k_2是方程

$$k^2+(1+2\nu)k+1+\nu=0$$

的两根。

依次取坐标原点和无穷远点为积分下限，得到

$$\begin{aligned} f'(\zeta)-\frac{C}{2\sqrt{\zeta}}&=\frac{1}{k_1-k_2}\left[\zeta^{k_1}\int_0^{\zeta}\frac{y'_*(\zeta)d\zeta}{\zeta^{k_1+1}}\right.\\ &\quad\left.-\zeta^{k_2}\int_0^{\zeta}\frac{y'_*(\zeta)d\zeta}{\zeta^{k_2+1}}+D_1\zeta^{k_1}-D_2\zeta^{k_2}\right]\\ y'_*(\zeta)&=y'(\zeta)-3C/8\sqrt{\zeta} \end{aligned} \tag{6-10-23}$$

$$f'(\zeta)=\frac{1}{k_1-k_2}\left[\zeta^{k_1}\int_{\infty}^{\zeta}\frac{y'(\zeta)d\zeta}{\zeta^{k_1+1}}-\zeta^{k_2}\int_{\infty}^{\zeta}\frac{y'(\zeta)d\zeta}{\zeta^{k_2+1}}+D_1'\zeta^{k_1}-D_2'\zeta^{k_2}\right] \tag{6-10-24}$$

上式的左边分别是单位圆内和单位圆外的全纯函数。把上式右边被积函数展为级数，可以看出，右边的积分项也在相应的区域内全纯；由此得出 $D_1=D_2=D_1'=D_2'=0$。

当 $\zeta\to\sigma$（σ 在$\overset{\frown}{ANB}$上），由式（6-10-23）和式（6-10-24）所得 $f'(\sigma)$ 应一致，由此得到以下结果

$$\sigma^{k_1}\int_0^{\infty}\frac{y'(\zeta)d\zeta}{\zeta^{k_1+1}}-\sigma^{k_2}\int_0^{\infty}\frac{y'(\zeta)d\zeta}{\zeta^{k_2+1}}=0$$

只有当满足以下条件时，上式才能实现，即

$$\int_0^{\infty}\frac{y'(\zeta)d\zeta}{\zeta^{k_1+1}}=0,\quad \int_0^{\infty}\frac{y'(\zeta)d\zeta}{\zeta^{k_2+1}}=0$$

因为这些积分是常数值。

把式（6-8-6）中第一式 $y'(\zeta)$ 代入上式，而 $y'(\zeta)$ 中的 $f_n'(\zeta)$ 则用式（6-10-12），结果得到两个方程如下：

$$\left.\begin{aligned}C_1&=\frac{\delta_{12}\delta_{20}-\delta_{22}\delta_{10}}{\delta_{11}\delta_{22}-\delta_{12}\delta_{21}}=\frac{\mathrm{Im}(\delta_{12}\bar{\delta}_{10})}{\mathrm{Im}(\delta_{11}\bar{\delta}_{12})}\\ C_2&=\frac{\delta_{21}\delta_{10}-\delta_{11}\delta_{20}}{\delta_{11}\delta_{22}-\delta_{12}\delta_{21}}=\frac{\mathrm{Im}(\delta_{10}\bar{\delta}_{11})}{\mathrm{Im}(\delta_{11}\bar{\delta}_{12})}\end{aligned}\right\} \tag{6-10-25}$$

式中

$$\delta_{n0}=\int_0^{\infty}[\zeta f_{10}''(\zeta)+f_{10}'(\zeta)+f_{20}'(\zeta)]\frac{d\zeta}{\zeta^{k_n+1}}$$

$$=\int_0^{\infty}[(1+k_n)f_{10}(\zeta)+f_{20}'(\zeta)]\frac{d\zeta}{\zeta^{k_n+1}}$$

$$\delta_{n1}=\int_0^{\infty}[2\zeta F_1'(\zeta)+5F_1(\zeta)]\frac{d\zeta}{\zeta^{k_n+1}},\quad \delta_{n2}$$

$$=\int_0^{\infty}F_2(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta^{k_n+1}}$$

$$\delta_{1m}=\bar{\delta}_{2m},\quad (m=0,\ 1,\ 2;\ n=1,\ 2)$$

经过计算后，可得 δ_{n1} 和 δ_{n2} 的表达式如下：

$$\delta_{n1}=\frac{\pi}{\cos\frac{\gamma_0}{2}\sin k\pi}\left[(k+1)(S_3-S_1)+(k+4)(S_2-S_0)+6\frac{S_1-S_0}{2k+1}\right]$$

$$\delta_{n2}=\frac{\pi}{4\sin^2\gamma_0\sin k\pi}\left[(k+1)S_3-kS_2-(k+3)S_1+(k+2)S_0\right]$$

$$S_m=\sin\left[(k+m)(\pi-\gamma_0)\right]$$

$$k=k_n\quad(n=1,2;\ m=0,1,2,3)$$

这样就可以确定 $f_1'(\zeta)$ 和 $f_2'(\zeta)$。

按公式（6-8-3）和式（6-8-5）计算沿 $\overset{\frown}{ANB}$ 的应力 $p_{z'}$ 和 $p_r(\rho_0=1)$。计算其它的应力可按§6-8中的方法。

如果有球面裂缝的弹性空间在无穷远处有轴向力 p 和径向力 q 作用。在均匀的应力场

$$Z_{z'}'=p,\quad R_r=\theta_\theta=q,\quad Z_r'=0$$

中，还要加上在裂缝面由负荷

$$\left.\begin{aligned}p_{z'_1}&=-p\cos\vartheta_1,\quad p_{r_1}=+q\sin\vartheta_1\\p_{z'_2}&=p\cos\vartheta_1,\quad p_{r_2}=-q\sin\vartheta_1\end{aligned}\right\}\qquad(6\text{-}10\text{-}26)$$

面产生的力。

在此情况下（与式（6-8-25）比）

$$x_{1'}=p\left(\tau-\frac{1}{\tau^2}\right),\quad x_{2'}=2q\left(\tau-\frac{1}{\tau^2}\right)$$

$$x_{1x}=-p\left(\tau-\frac{1}{\tau^2}\right),\quad x_{2x}=-2q\left(\tau-\frac{1}{\tau^2}\right)$$

$$X_{11}=X_{21}=0$$

$$X_{12}=2p\left(\tau-\frac{1}{\tau^2}\right)\left[R_x(\tau,\tau_0)\right]^2,$$

$$X_{22}=4q\left(\tau-\frac{1}{\tau^2}\right)[R_x(\tau,\ \tau_0)]^4,$$

$$f'_{10}(\zeta)=pf_0(\zeta)$$

$$f'_{20}(\zeta)=2qf_0(\zeta)+[C_{22}-2qf_0(0)]F_2(\zeta),$$

$$f_0(0)=\frac{1}{\pi}\left(\gamma_0-\pi-r_0z'_0-\frac{2}{3}r_0^3\right) \qquad (6\text{-}10\text{-}27)$$

$$f_0(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}(1-\zeta^{-3})\ln\frac{\zeta-\tau_0}{\zeta-\bar{\tau}_0}-\frac{\pi-\gamma_0}{\pi\zeta^3}$$

$$+\frac{r_0}{\pi R^2(\zeta,\tau_0)}\left(\frac{1}{\zeta^2}-\frac{z'_0}{\zeta}+\zeta-z'_0\right)$$

由于 C_{22} 是任取的，故可取 $F_2(\zeta)$ 前的系数为零，即

$$f'_{20}(\zeta)=2qf_0(\zeta) \qquad (6\text{-}10\text{-}28)$$

于是

$$\delta_{n0}=[(k-1)p+2q]\int_0^{\infty}\frac{f_0(\zeta)d\zeta}{\zeta^{k+1}}$$

$$=\frac{(k+1)p+2q}{2\sin k\pi}\left(\frac{k+2}{k}S_0+S_1-S_2-\frac{k+1}{k+3}S_3\right)$$

$$(6\text{-}10\text{-}29)$$

C_1 和 C_2 之值列于表6-10-1。

表 6-10-1

γ_0	$p=1$ $q=0$		$p=0$ $q=1$	
	C_1	C_2	C_1	C_2
			$\nu=0$	
30°	0.04919	-0.00861	0.05699	0.06980
45°	0.04634	-0.02436	0.04715	0.20641
60°	0.04215	-0.04309	0.03658	0.40354
90°	0.02988	-0.04088	0.01674	0.71904
120°	0.01430	0.02278	0.00393	0.52607
135°	0.00733	0.03263	0.00116	0.29574
150°	0.00252	0.01886	0.00018	0.10598

（续）

γ_0	$p=1$ $q=0$		$p=0$ $q=1$	
	C_1	C_2	C_1	C_2
		$\nu=0.3$		
30°	0.04406	−0.02181	0.03916	0.07006
45°	0.04204	−0.06412	0.03234	0.20840
60°	0.03870	−0.12188	0.02195	0.40640
90°	0.02796	−0.18818	0.01124	0.71065
120°	0.01365	−0.09991	0.00263	0.51361
135°	0.00709	−0.04276	0.00079	0.28970
150°	0.00248	−0.01051	0.00012	0.10469
		$\nu=0.5$		
30°	0.04336	−0.03243	0.02956	0.07426
45°	0.04148	−0.09545	0.02429	0.21984
60°	0.03827	−0.18226	0.01859	0.42517
90°	0.02768	−0.29349	0.00819	0.72720
120°	0.01350	−0.18213	0.00188	0.51573
135°	0.00703	−0.09253	0.00056	0.28957
150°	0.00247	−0.02989	0.00009	0.10454

在裂缝边缘的应力为：

$$\left.\begin{aligned} Z'_z &= H_1[f'(\alpha)-8\sin\alpha]+H_2 f'(\alpha)+O(1)\\ R_r &= -H_1 f'(\alpha)-H_2[f'(\alpha)+8\cos\alpha]+O(1)\\ \theta_\theta &= -8\nu H_1\sin\alpha-8H_2\cos\alpha+O(1)\\ Z'_r &= -H_1 f'(\alpha)+H_2 f'(\alpha)+O(1) \end{aligned}\right\}\quad (6\text{-}10\text{-}30)$$

式中

$$H_1=\frac{2a^2(pb-2\pi C_2)}{2\pi\sqrt{2r_0\rho_1}},\quad H_2=\frac{C_2}{8ar_0\sqrt{2r_0\rho_1}}$$

$$a=\sin\gamma_0/2,\quad b=\cos\gamma_0/2$$

$$f'(\alpha)=2\sin\alpha+\sin(5\alpha-2\gamma_0)+\sin(\alpha+2\gamma_0),$$

$$f'(\alpha)=-2\cos\alpha+\cos(5\alpha-2\gamma_0)+\cos(\alpha+2\gamma_0)。$$

$$\alpha=\frac{1}{2}\left(\omega_1+\gamma_0+\frac{3}{2}\pi\right),\quad \rho_1 e^{i\omega_1}=t-\tau_0$$

如同在§6-9中一样，任意点的应力值都没有用初等函数表示。但沿$\overset{\frown}{ANB}$弧的应力$p_{z'}$和p_r可以表示为：

$$p_{z'}=-\frac{2}{\pi}p\left(z'Q-\frac{b}{2}R\right)+\frac{4}{R}\left(\frac{pb}{2\pi}-C_1\right)(3z'-2z'_0-1)$$

$$p_r=\frac{2q}{\pi r}[r^2Q+b(3-4z'_0+z')R-2r_0R^2]$$

$$+\frac{6}{r}C_1(3z'-3z'_0-1)(R-2a)-\frac{C_2(1-z')}{4a^3rR}$$

式中

$$Q=\arccos\frac{\cos(\gamma_0/2)}{\cos(\vartheta/2)},\quad R=\sqrt{2(z'-z'_0)},\quad z'=\cos\vartheta$$

6-11 用环积分表示位移和应力

可以把弹性理论的平面问题，很有效地用弗列德霍姆程分方程（第二类）来解。解轴对称问题，也可以用积分方程，然而这种情况下得到的是第一类积分方程。

现在讨论有与对称轴相交的内空腔的有限旋转体。物体的子午剖面为（$n+1$）连通区B，它的边界由简单光滑闭曲线C'_0，C'_1，…，C'_n组成。用C'表示全部边界。设解析函数$\varphi(\zeta)$和$\psi(\zeta)$在B内全纯并且一直连续到边界C'上，用柯西型积分表示如下：

$$\varphi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f(\sigma)d\sigma}{\sigma-\zeta},\quad \psi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f_0(\sigma)d\sigma}{\sigma-\zeta}\tag{6-11-1}$$

这里σ是边界上的点，$f(\sigma)$和$f_0(\sigma)$是给定在C'上的可导

函数。C'的正方向是区域B，在C'的左侧。

若令

$$f(\sigma)=\overline{f(\bar{\sigma})},\quad f_0(\sigma)=\overline{f_0(\bar{\sigma})} \tag{6-11-2}$$

则满足偶条件

对式（6-11-1）求导，则有

$$\varphi'(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f'(\sigma)d\sigma}{\sigma-\zeta},\quad \psi'(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f_0'(\sigma)d\sigma}{\sigma-\zeta} \tag{6-11-3}$$

这里$f'(\sigma)=df(\sigma)/d\sigma=df/ds:d\sigma/ds$，$ds$是弧长$s$的微分。

在式（6-6-11）中的$\varphi_j(\zeta)$和$\psi_j(\zeta)$表示为

$$\varphi_j(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_j}\frac{f(\sigma)d\sigma}{\sigma-\zeta},\quad \psi_j(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_j}\frac{f_0(\sigma)d\sigma}{\sigma-\zeta} \tag{6-11-4}$$

由式（6-6-12）得出

$$\int_{C_j}[\nu^* f(\sigma)+f_0(\sigma)]d\sigma=0\quad(j=1,2,\cdots,n) \tag{6-11-5}$$

作用于第k个空腔上外力的合力P_k表示为

$$\begin{aligned}P_k&=2i(1+\nu^*)\int_{C_k'}f(\sigma)d\sigma\\&=-\frac{2i}{\nu^*}(1+\nu^*)\int_{C_k'}f_0(\sigma)d\sigma\end{aligned} \tag{6-11-6}$$

把式（6-11-1）代入式（6-5-5），得到

$$\left.\begin{aligned}2\mu w&=\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}[\nu^* f(\sigma)-2z'f'(\sigma)\\&\quad -f_0(\sigma)]\frac{d\sigma}{R(\sigma,t)}\\2\mu u&=-\frac{1}{2\pi i r}\int_{C'}[\nu^* f(\sigma)+2z'f'(\sigma)\\&\quad +f_0(\sigma)]\left[\frac{\sigma-z'}{R(\sigma,t)}-1\right]d\sigma\end{aligned}\right\} \tag{6-11-7}$$

把此式与式（6-5-5）对照，可以看出，形式上把$\varphi(\zeta)$和$\psi(\zeta)$换为$f(\sigma)$和$f_0(\sigma)$，$(\zeta-z')R^{-1}(\zeta,\ t)$换为$[(\zeta-z')R^{-1}(\zeta,\ t)-1]$，$\zeta$换为$\sigma$，沿$C'$积分并在积分号前乘1/2。对于§6-5和§6-6中的其它表达式也用此变换。

当计算以下积分时

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\pi i}\int_{\bar{t}}^{t}\frac{d\zeta}{R(\zeta,\ t)(\sigma-\zeta)}&=\frac{1}{R(\sigma,\ t)}\\ \frac{1}{\pi i}\int_{\bar{t}}^{t}\frac{(\zeta-z')d\zeta}{R(\zeta,\ t)(\sigma-\zeta)}&=\frac{\sigma-z'}{R(\sigma,\ t)}-1\end{aligned}\right\}\quad(6\text{-}11\text{-}8)$$

$R(\zeta,\ t)$的分支线的下岸与积分线重合。因此，使式（6-11-7）中的$R(\zeta,\ t)$的分支线与式（6-5-5）的积分线重合，也就是在最下面的空腔边界曲线C_1'的下面（图6-14）。如把分支线改

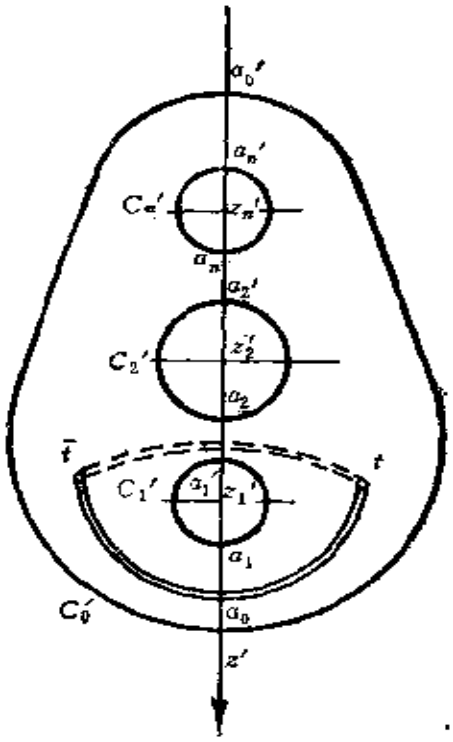


图 6-14

在别的地方，在原式（6-5-5）中也应改变积分线的位置，并把$\varphi(\zeta)$和$\psi(\zeta)$按式（6-6-13）改换为$\varphi_*(\zeta)$和$\psi_*(\zeta)$。把$R(\zeta,\ t)$的分支线放在C_{k-1}'与C_k'之间（如图6-14中虚线所

示)，则在式（6-11-7）中形式如下的积分

$$\int_{C'} f(\sigma)K(\sigma,\ t)d\sigma$$

应改为积分和，即

$$\int_{C_0} f(\sigma)K(\sigma,\ t)d\sigma+\sum_{j=1}^{n}\operatorname{sign}(j-k+1/2)\int_{C_j'} f(\sigma)K(\sigma,\ t)d\sigma \tag{6-11-9}$$

对于 $f_0(\sigma)$ 也是一样。

作用在绕 z' 轴任意弧 MN 所作表面上的外力 $Z'(s)$ 和 $R(s)$ 分别为：

$$\left.\begin{aligned}
Z'(s)=&-\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\{f(\sigma)-2z'f'(\sigma)\\
&-f_0(\sigma)\}\left[\frac{\sigma-z'}{R(\sigma,\ t)}-1\right]d\sigma+C_*'(1-\nu)\\
R(s)=&-\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\{f(\sigma)+2z'f'(\sigma)\\
&+f_0(\sigma)\}\frac{d\sigma}{R(\sigma,\ t)}\\
&-\frac{1+\nu^*}{2\pi i}\int_{C'}f(\sigma)d\sigma\int_0^s\left[\frac{\sigma-z^*}{R(\sigma,\ t^*)}\right.\\
&\left.-1\right]\frac{dz^*}{r^{*2}}+C_*'(1-\nu)\int_0^s\frac{dz^*}{r^{*2}}+C_*
\end{aligned}\right\} \tag{6-11-10}$$

如果弧 MN 的起始点在 a_0 与 a_1（见图6-14）之间并在对称轴上，则 $C_*'=0$。若起始点在 a_{k-1}' 与 a_k 之间并在对称轴 z' 上（$2\leqslant k\leqslant n$），只有当分支线与 z' 轴相交在这些点之间时，$C_*'=0$。

我们认为旋转体轴对称变形状态与柱体平面变形状态存在互相一一对应的关系。柱体的横截面就是旋转体子午面。平面状态的诸分量由式（6-5-2）确定，轴对称状态诸分量由式（6-5-5）

确定。在这两组式中，解析函数$\varphi(\zeta)$和$\psi(\zeta)$是一样的。当旋转体轴对称状态下的应力分量为零，平面状态下诸应力分量也是零；反之亦然。位移也和应力的情况一样。对于没有空腔的有限旋转体，其子午面边界曲线与垂直于对称轴的任何直线相交不超过两点，存在柱形体与旋转体对称变形状态之间的一一对应关系。对于一般情况（有空腔的）也存在这个一一对应的关系（利用广义解析函数及与式（6-5-5）相似的公式可以说明此点，这里不再证明）。

若在物体表面上已知位移w_0和u_0，先研究第二个基本问题。

谢尔曼给出已知位移时解柱形体平面变形的解析函数如下：

$$\left.\begin{aligned}
\varphi(\zeta)&=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f(\sigma)d\sigma}{\sigma-\zeta}+\sum_{j=1}^{n}A_j\ln(\zeta-z_j')\\
\psi(\zeta)&=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}[\nu^*f(\sigma)+\bar{\sigma}f'(\sigma)]\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}\\
&\quad-\sum_{j=1}^{n}\nu^*\overline{A}_j\ln(\zeta-z_j)\\
A_j&=\int_{C_j'}f(\sigma)ds
\end{aligned}\right\}\quad(6\text{-}11\text{-}11)$$

这里$f(\sigma)$满足如下的积分方程

$$\begin{aligned}
&\nu^*f(\sigma_0)+\frac{\nu^*}{\pi}\int_{C'}f(\sigma)\vartheta'(\sigma_0,\sigma)\,d\sigma\\
&\qquad+\frac{1}{\pi}\int_{C'}\overline{f(\sigma)}e^{2i\theta(\sigma_0,\sigma)}\vartheta'(\sigma_0,\sigma)d\sigma\\
&\quad=\hat{g}(\sigma_0)-\nu^*\sum_{k=1}^{n}[\ln(\sigma_0-z_k')\\
&\qquad+\ln(\overline{\sigma_0-z_k'})]\int_{C_k'}f(\sigma)ds\\
&\qquad+\sum_{k=1}^{n}\frac{\sigma_0}{\overline{\sigma_0-z_k'}}\int_{C_k'}\overline{f(\sigma)}ds
\end{aligned}$$

$$\vartheta(\sigma_0, \sigma) = \arg(\sigma - \sigma_0)$$

§3-7 中的 $\omega(t)$ 在这里写作 $f(\sigma)$。因为在空间问题中已用 ω 表示角度；又为了与平面问题有所区别，故用 $f(\sigma)$；所有 $f(\sigma)$ 都与第三章中的 $\omega(t)$ 相对应。那末在第三章对 $\omega(t)$ 的讨论也适合于 $f(\sigma)$。$f_0(\sigma)$ 相当于 $(\sigma+\bar{\sigma})f'(\sigma)+\nu^*\overline{f(\sigma)}$，解出 $f(\sigma)$ 后代入式 (6-11-7)，就可以得到 w 和 u。对于对称问题 $f(\sigma)$ 要满足偶条件。

对于第一个基本问题，$f(\sigma)$ 要满足如下方程式：

$$f(\sigma_0)+\frac{1}{\pi}\int_{C'} f(\sigma)\vartheta'(\sigma_0,\sigma)\,d\sigma - \frac{1}{\pi}\int_{C'}\overline{f(\sigma)}e^{2i\vartheta(\sigma_0,\sigma)}\vartheta'(\sigma_0,\sigma)\,d\sigma + \sum_{j=0}^{n}\left\{\frac{b_j}{\sigma_0-z_j'}+\frac{\bar{b}_j}{\bar{\sigma}_0-\bar{z}_j'}\left(1-\frac{\sigma_0}{\sigma_0-\bar{z}_j'}\right)\right\} + \int_{C_k'} f(\sigma)\,ds = g_1(\sigma_0)$$

式中 $g(\sigma_0)$ 和 $g_1(\sigma_0)$ 表示已知位移边界条件和力边界条件。z_j' 是 C_j' 中的点。而 $\varphi(\zeta)$ 和 $\psi(\zeta)$ 由式 (3-6-1) 求到。

§3 旋转体的非轴对称问题

6-12 用解析函数表示旋转体非轴对称负荷的应力与位移

二维状态位移分量 $u_{xn}^{c;r}(x,y)$，$u_{yn}^{c;r}(x,y)$，$u_{zn}^{c;r}(x,y)$ 用解析函数表示如下：

$$\begin{aligned}
2\mu u_{xn}^{c;r} &= \mathrm{Re}\{\nu^*\varphi_n^{c;r}(\zeta) - 2x[\varphi_n^{c;r}(\zeta)]' - \psi_n^{c;r}(\zeta)\}\\
2\mu u_{yn}^{c;r} &= -\mathrm{Re}i\{\nu^*\varphi_n^{c;r}(\zeta) + 2x[\varphi_n^{c;r}(\zeta)]' + \psi_n^{c;r}(\zeta)\}\\
2\mu u_{zn}^{c;r} &= \mathrm{Re}\chi_n^{c;r}(\zeta) \qquad (\zeta = x+iy)\\
\nu^* &= 3-4\nu
\end{aligned} \tag{6-12-1}$$

$\varphi_n^{c;r}(\zeta)$，$\psi_n^{c;r}(\zeta)$，$\chi_n^{c;r}(\zeta)$ 是旋转体子午面内的全纯

函数。

由条件（6-2-14）可得如下等式

$$\left.\begin{aligned}\varphi_n^{c,r}(\zeta)&=(-1)^n\overline{\varphi_n^{c,r}(\bar{\zeta})},\quad \psi_n^{c,r}=(-1)^n\overline{\psi_n^{c,r}(\bar{\zeta})}\\ \chi_n^{c,r}(\zeta)&=(-1)^{n+1}\overline{\chi_n^{c,r}(\bar{\zeta})}\end{aligned}\right\}\qquad(6\text{-}12\text{-}2)$$

把式（6-12-1）代入式（6-2-6）中后两式，得到位移为

$$\left.\begin{aligned}&2\mu w_n^{c,r}(z',r)\\&\quad=S_n[\nu^*\varphi_n^{c,r}-2z'(\varphi_n^{c,r})'-\psi_n^{c,r}]\\&2\mu(u_n^{c,r}+v_n^{c,r})\\&\quad=-iS_{n-1}[\nu^*\varphi_n^{c,r}+2z'(\varphi_n^{c,r})'+\psi_n^{c,r}+i\chi_n^{c,r}]\\&2\mu(u_n^{c,r}-v_n^{c,r})\\&\quad=-iS_{n+1}[\nu^*\varphi_n^{c,r}+2z'(\varphi_n^{c,r})'+\psi_n^{c,r}-i\chi_n^{c,r}]\end{aligned}\right\}\qquad(6\text{-}12\text{-}3)$$

这里引入算子如下：

$$S_nf=-\frac{1}{\pi i}\int_{\bar{t}}^{t}f(\zeta)Q_n(z',r,\zeta)d\zeta\qquad(6\text{-}12\text{-}4)$$

而且

$$Q_n=T_{|n|}\left(\frac{\zeta-z'}{ir}\right)\frac{1}{R(\zeta,t)},\quad R(\zeta,t)$$

$$=\sqrt{(\zeta-t)(\zeta-\bar{t})}\qquad(6\text{-}12\text{-}5)$$

T_n是第一类切贝雪夫多项式。$t=z'+ir$，积分路径以及$R(\zeta,t)$值同§6-5所述。因为式（6-12-2）、式（6-12-3）等号右侧是实值，故去消“Re”。

在式（6-12-3）左侧的函数是级数（6-2-5）中的系数。为了以后简便，令

$$\left.\begin{aligned}w(z',r,\theta)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}w_n(z',r)e^{in\theta}\\u(z',r,\theta)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}u_n(z',r)e^{in\theta}\\v(z',r,\theta)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}v_n(z',r)e^{in\theta}\end{aligned}\right\}\qquad(6\text{-}12\text{-}6)$$

$$
\left.\begin{aligned}
&w_n=(w_n^c-iw_n^s)/2,\quad u_n=(u_n^c-iu_n^s)/2,\\
&v_n=(v_n^s+iv_n^c)/2,\quad (n\geqslant 1)\\
&w_n=(w_{-n}^c+iw_{-n}^s)/2,\quad u_n=(u_{-n}^c+iu_{-n}^s)/2,\\
&v_n=(v_{-n}^s-iv_{-n}^c)/2,\quad (n\leqslant -1)\\
&w_0=w_0^c,\quad u_0=u_0^c,\quad v_0=v_0^s
\end{aligned}\right\}\qquad (6\text{-}12\text{-}7)
$$

平　　把式（6-12-3）代入式（6-12-7），并引入如下解析函数

$$
\left.\begin{aligned}
&\varphi_n=(\varphi_n^c-i\varphi_n^s)/2,\quad \psi_n=(\psi_n^c-i\psi_n^s)/2\\
&\chi_n=i\,(\chi_n^c-i\chi_n^s)/2,\quad (n\geqslant 1),\\
&\varphi_n=(\varphi_{-n}^c+i\varphi_{-n}^s)/2,\quad \psi_n=(\psi_{-n}^c+i\psi_{-n}^s)/2\\
&\chi_n=-\,i\,(\chi_{-n}^c+i\chi_{-n}^s)/2\quad (n\leqslant -1),\\
&\varphi_0=\varphi_0^c,\quad \psi_0=\psi_0^c,\quad \chi_0=\chi_0^s
\end{aligned}\right\}\qquad (6\text{-}12\text{-}8)
$$

于是空间状态的位移就表示为：

$$
\left.\begin{aligned}
&2\mu w(z',\ r,\ \theta)\\
&\quad=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{in\theta}S_n(\nu^*\varphi_n-2z'\varphi_n'-\psi_n)\\
&2\mu(u+iv)=-\,i\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{in\theta}S_{n+1}(\nu^*\varphi_n+2z'\varphi_n'\\
&\quad+\psi_n-\chi_n)
\end{aligned}\right\}\quad (r>0)
$$

(6-12-9)

容易得到在对称轴上的位移值，我们由式（6-2-9）′，可导出

$$
\left.\begin{aligned}
&2\mu w=\nu^*\varphi_0-2z'\varphi_0'-\psi_0,\\
&2\mu(u+iv)=-ie^{-i\theta}(\nu^*\varphi_{-1}+2z'\varphi_{-1}'\\
&\quad+\psi_{-1}-\chi_{-1})
\end{aligned}\right\}\quad (r=0,\ \ \zeta=z')
$$

(6-12-10)

如果除 $\varphi_0(\zeta)$ 和 $\psi_0(\zeta)$ 外，所有函数 $\varphi_n(\zeta)$，$\psi_n(\zeta)$，$\chi_n(\zeta)$ 为零，那末式（6-12-9）就变为式（6-5-5）；于是相应的空间状态就变成轴对称变形状态。

由式（6-12-2），得出以下等式

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_n(\zeta)=(-1)^n\overline{\varphi_{-n}(\bar{\zeta})},\quad \psi_n(\zeta)=(-1)^n\overline{\psi_{-n}(\bar{\zeta})}\\&\chi_n(\zeta)=(-1)^{n+1}\chi_{-n}(\bar{\zeta})\end{aligned}\right\}\quad(6\text{-}12\text{-}11)$$

设 z_0' 是旋转体内对称轴上的某一点。把函数 φ_n, ψ_n, χ_n 展成 $(\zeta-z_0')$ 的幂级数。把此幂级数代入式 (6-12-8)，再代入式 (6-12-1)，并把结果与式 (6-2-9)′对比；可令

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_n^{(k)}(z_0')=0\quad(k=0,1,2,\cdots,|n|;\ |n|\geqslant 0)\\&\psi_n^{(k)}(z_0')=0\quad(k=0,1,2,\cdots,|n|-1;\ |n|\geqslant 1)\\&\chi_n^{(k)}(z_0')=0\quad(k=0,1,2,\cdots,|n|-2;\ |n|\geqslant 2)\\&\chi_0(z_0)=0\end{aligned}\right\}$$

(6-12-12)

若坐标原点在物体内，可取 $z_0'=0$。

在式 (6-12-9) 中出现的积分要经过无穷远点，为了实现积分，须要满足以下条件

$$\left.\begin{aligned}&\lim\zeta^{|n|-1}\varphi_n(\zeta)=\lim\zeta^{|n|-1}\psi_n(\zeta)\\&\qquad=\lim\zeta^{|n|-1}\chi_n(\zeta)=0\quad(|n|\geqslant 1)\\&\lim\zeta^{|n|}\varphi_n(\zeta)=-\frac{1}{\nu^*}\lim\zeta^{|n|}\psi_n(\zeta)\\&\qquad=-\frac{\operatorname{sign}n}{2(1+\nu^*)}\lim\zeta^{|n|}\chi_n(\zeta)\\&\qquad=C_n\quad(|n|\geqslant 1)\\&\lim\{\zeta^{n+1}[\nu^*\varphi_n(\zeta)+\psi_n(\zeta)-\chi_n(\zeta)]+2C_n\zeta\}\\&\qquad=0\quad(n\geqslant 1)\\&\lim\varphi_0(\zeta)=\lim\psi_0(\zeta)=\lim\chi_0(\zeta)=0\\&\lim\zeta[\nu^*\varphi_0(\zeta)+\psi_0(\zeta)]=0,\ \lim\zeta\chi_0(\zeta)\\&\qquad=0\quad\zeta\to\infty,\ C_n=0。\end{aligned}\right\}\quad(6\text{-}12\text{-}13)$$

积分路径在分支线和空腔之下或在它们之上。

在空腔下对称轴上的位移值由式 (6-12-10) 确定。对于在

空腔上对称轴上的点，式（6-12-10）右侧的符号要改变为与原来相反的符号。在无穷远处的位移和转角都应为零。

这里所得的结果，都可以应用到有一个空腔或几个空腔的有限和无限旋转体，但空腔的对称轴线应与旋转体的对称轴线 z' 重合。

在圆柱坐标中，有以下结果：

$$\left.\begin{aligned} 2\mu w &= 4(1-\nu)B_{z'} - \frac{\partial}{\partial z'}(z'B_{z'} + rB_r + B_0) \\ 2\mu u &= 4(1-\nu)B_r - \frac{\partial}{\partial r}(z'B_{z'} + rB_r + B_0) \\ 2\mu v &= 4(1-\nu)B_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(z'B + rB_r + B_0) \end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}12\text{-}14)$$

若 $V_1 = B_{z'}$，$V_2 = (B_r + iB_\theta)e^{i\theta}$，$V_3 = B_0$，这里 $V_k(z', r, \theta)$ 是满足下式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z'^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 \theta}\right)V_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3) \qquad (6\text{-}12\text{-}15)$$

的调和函数。令

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} S_n \varphi_n \\ V_2 &= -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i(n+1)\theta} S_{n+1}\left(\varphi_n + \frac{1}{1+\nu^*}\chi_n\right) \\ V_3 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} S_n\left(\xi\varphi_n - \varphi_n^* + \psi_n^* + \frac{n}{1+\nu^*}\chi_n^*\right) \end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}12\text{-}16)$$

式中

$$\varphi_n^{*\prime}(\xi) = \varphi_n(\xi),\ \psi_n^{*\prime}(\xi) = \psi_n(\xi),$$
$$\chi_n^{*\prime}(\xi) = \chi_n(\xi)。$$

若方程（6-12-15）得到满足并利用式（6-12-11）的关系，则函

数 $B_{z'}$，B_r，B_θ，B_0是实数值，把这些函数代入式（6-12-14），就得到表达式（6-12-9）。

把式（6-12-9）代入式（6-1-3）中或是利用空间和平面应力之间的关系，得到应力分量公式如下：

$$\left.\begin{aligned}
Z'_{z'} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} S_n (\varphi'_n - 2z'\varphi''_n - \psi'_n), \\
R_r + \theta_\theta &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} S_n [(3+4\nu)\varphi'_n + 2z'\varphi''_n + \psi'_n], \\
R_r - \theta_\theta + 2iR_\theta &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} S_{n+2} (\nu^* \varphi'_n + 2z'\varphi''_n + \psi'_n - \chi'_n) \\
Z'_r + iZ'_\theta &= -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} S_{n+1} \left(\varphi'_n + 2z'\varphi''_n + \psi'_n - \frac{1}{2}\chi'_n\right)
\end{aligned}\right\} \quad (r > 0)$$

当 $r = 0$ 时，则有

$$Z'_{z'} = \varphi'_0 - 2z'\varphi''_0 - \psi'_0, \quad Z'_{z'} + R_r + \theta_\theta = 4(1-\nu)\varphi'_0$$

$$R_r - \theta_\theta + 2iR_\theta = e^{-2i\theta}(\nu^* \varphi'_{-2} + 2z'\varphi''_{-2} + \psi'_{-2} - \chi'_{-2}),$$

$$Z'_r + iZ'_\theta = -ie^{-i\theta}\left(\varphi'_{-1} + 2z'\varphi''_{-1} + \psi'_{-1} - \frac{1}{2}\chi'_{-1}\right) \quad (6\text{-}12\text{-}18)$$

对于有空腔的空间，式（6-12-18）适合于在空腔下对称轴上的点。对于在空腔上对称轴上的点，式（6-12-18）右侧的符号应与原符号相反。

作用在单元表面上的外力 $p_{z'}$，p_r，p_θ 与应力分量的关系为

$$\left.\begin{aligned}
p_{z'} &= Z'_{z'}\cos\alpha + Z'_r \sin\alpha \\
p_r &= Z'_r \cos\alpha + R_r \sin\alpha \\
p_t &= Z'_\theta \cos\alpha + R_\theta \sin\alpha
\end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}12\text{-}19)$$

此单元表面是平面弧线 MN 绕 z' 轴所形成的。α 角是弧 MN 右法线与 z' 轴的夹角。可以把式 (6-12-19) 改写为

$$\left.\begin{aligned} p_{z'} &= \mathrm{Re}[Z'_{z'}\cos\alpha + (Z'_r + iZ'_\theta)\sin\alpha] \\ p_r + ip_\theta &= (R_r + \theta_\theta)\sin\alpha/2 + (R_r - \theta_\theta \\ &\quad + 2iR_\theta)\sin\alpha/2 + (Z'_r + iZ'_\theta)\cos\alpha \end{aligned}\right\} \tag{6-12-20}$$

这里 $\cos\alpha = dr/ds$，$\sin\alpha = -dz'/ds$，ds 是弧长的微分。

把式 (6-12-17) 代入式 (6-12-20)，得到

$$\left.\begin{aligned} p_{z'} &= 2\mathrm{Re}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{ir^{n+1}} \frac{d}{ds}(r^{n+1}\Phi_{1n}), \\ p_r + ip_\theta &= -\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta}\left[r^n \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{r^n}\Phi_{0n}\right)\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r^{n+2}} \frac{d}{ds}(r^{n+3}\Phi_{2n})\right] \end{aligned}\right\} \tag{6-12-21}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{0n} &= \Phi_{0n}(s) = S_n[(1+4\nu)\varphi_n \\ &\quad + 2z'\varphi'_n + \psi_n]/2 \\ \Phi_{1n} &= \Phi_{1n}(s) = S_{n+1}[\varphi_n - 2z'\varphi'_n \\ &\quad - \psi_n + \chi_n/2]/2 \\ \Phi_{2n} &= \Phi_{2n}(s) = S_{n+2}[(1-4\nu)\varphi_n \\ &\quad + 2z'\varphi'_n + \psi_n - \chi_n]/2 \end{aligned}\right\} \tag{6-12-22}$$

令 Z 代表力在 z' 轴上的投影和；当 $\theta = 0$，$z' = 0$ 时，在 θ 轴上的力投影和为 T_0；当 $\theta = \pi/2$，$z' = 0$ 时，在 θ 轴上的力投影和为 $T_{\pi/2}$。于是

$$\left.\begin{aligned} Z &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^s p_{z'} r\,ds \\ T_0 + iT_{\pi/2} &= \int_0^{2\pi} e^{i\theta} d\theta \int_0^s (p_r + ip_\theta) r\,ds \end{aligned}\right\} \tag{6-12-23}$$

把式 (6-12-21) 和式 (6-12-22) 代入式 (6-12-23)，并取 MN 弧的起始点在对称轴上，则

$$\left.\begin{aligned} Z &= -2r\int_t^t \frac{1}{t}(\varphi_0 - 2z'\varphi_0' - \psi_0)Q_1 d\zeta \\ T_0 + iT_{\pi/2} &= 2ir\int_t^t \frac{1}{t}\Big(\varphi_{-1} + 2z'\varphi_{-1}' + \psi_{-1} \\ &\quad - -\frac{1}{2} - \chi_{-1}\Big)Q_1 d\zeta \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}12\text{-}24)$$

这里 $t = z' + ir$。

若 $M_{z'}$ 代表力相对于 z' 轴的力矩和，M_0 和 $M_{\pi/2}$ 代表相对于轴 $\theta = 0$，$z' = 0$ 和 $\theta = \pi/2$，$z' = 0$ 的力矩和（M_0 作用在 $\theta = 0$ 平面，$M_{\pi/2}$ 作用在 $\theta = \pi/2$ 平面）。则得到

$$\left.\begin{aligned} M_{z'} &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^s p_\theta r^2 ds \\ M_0 + iM_{\pi/2} &= \int_0^{2\pi} e^{i\theta} d\theta \int_0^s \{r p_{z'} - z'(p_r \\ &\quad + i p_\theta)\} r ds \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}12\text{-}25)$$

利用式（6-12-21）和式（6-12-22），把上式改为：

$$\left.\begin{aligned} M_{z'} &= -r^2\int_t^t \frac{1}{t}\chi_0 Q_2 d\zeta \\ M_0 + iM_{\pi/2} &= -2iz'r\int_t^t \frac{1}{t}[\varphi_{-1} + 2z'\varphi_{-1}' + \psi_{-1} + \chi_{-1}/2]Q_1 d\zeta \\ &\quad - 2r^2\int_t^t \frac{1}{t}[\varphi_{-1} - 2z'\varphi_{-1}' - \psi_{-1}]Q_2 d\zeta \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}12\text{-}26)$$

当弹性体是有轴对称空腔的无限空间，可以求作用于空腔内的力矩和主矢量。公式（6-12-24）和（6-12-26）中的 t 在对称轴上时，可以利用留数定理计算积分。利用式（6-12-13）得到

$$\left.\begin{aligned} Z^0 &= 2i\int_C [\varphi_0(\zeta) - \psi_0(\zeta)]d\zeta = -4\pi(1 \\ &\quad + \nu^*)\lim_{\zeta\to\infty} \zeta\varphi_0(\zeta) = \frac{4\pi}{\nu^*}(1 \end{aligned}\right.$$

$$
\begin{aligned}
&+\nu^*)\lim_{\zeta\to\infty}\zeta\psi_0(\zeta),\\
T_0^0+iT_{\pi/2}^0&=2\int_C[\varphi_{-1}(\zeta)+\psi_{-1}(\zeta)-\chi_{-1}/2]\,d\zeta\\
&=8\pi i\lim_{\zeta\to\infty}\zeta\varphi_{-1}(\zeta)=\frac{8\pi i}{\nu^*}(1\\
&+\nu^*)\lim_{\zeta\to\infty}\zeta\psi_{-1}(\zeta)=-4\pi i\lim_{\zeta\to\infty}\zeta\chi_{-1}(\zeta).\\
M_2^{(0)}&=2\int_C\zeta\chi_c(\zeta)d\zeta=4\pi i\lim_{\zeta\to\infty}\zeta^2\chi_c(\zeta)\\
M_0^{(0)}+iM_{\pi/2}^{(0)}&=4\int_C\zeta[\varphi_{-1}(\zeta)\\
&-\psi_{-1}(\zeta)]d\zeta=8\pi i\lim_{\zeta\to\infty}[\zeta^2\varphi_{-1}(\zeta)\\
&-\zeta^2\psi_{-1}(\zeta)+(\nu^*-1)\zeta\lim_{\zeta\to\infty}\zeta\varphi_{-1}(\zeta)]
\end{aligned}
\qquad (6\text{-}12\text{-}27)
$$

这里 C 代表子午面与空腔表面 S 相切割的封闭边界曲线。

设解析函数 $\varphi_n(\zeta)$，$\psi_n(\zeta)$，$\chi_n(\zeta)$ 可以用柯西型积分表示如下：

$$
\left.
\begin{aligned}
\varphi_n(\zeta)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f_n(\sigma)d\sigma}{\sigma-\zeta},\\
\psi_n&=\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{g_n(\sigma)d\sigma}{\sigma-\zeta}\\
\chi_n(\zeta)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{h_n(\sigma)d\sigma}{\sigma-\zeta}
\end{aligned}
\right\}
\qquad (6\text{-}12\text{-}28)
$$

这里 C' 表示为分段光滑边界曲线，$f_n(\sigma)$，$g_n(\sigma)$，$h_n(\sigma)$ 为 C' 上可积函数并满足以下条件

$$
\left.
\begin{aligned}
&f_n(\sigma)=(-1)^n\overline{f_{-n}(\bar\sigma)},\quad g_n(\sigma)=(-1)^n\overline{g_{-n}(\bar\sigma)},\\
&h_n(\sigma)=(-1)^{n+1}h_{-n}(\bar\sigma)
\end{aligned}
\right\}
\qquad (6\text{-}12\text{-}29)
$$

令

$$I=\int_{\bar{t}}^{t}\varphi_n(\zeta)Q_k(z',r,\zeta)d\zeta \qquad (6\text{-}12\text{-}30)$$

把 $\varphi_n(\zeta)$ 值代入式 (6-12-30)，并改变积分次序，利用留数定理得到下式

$$-\frac{1}{\pi i}R(\sigma,t)\int_{\bar{t}}^{t}Q_k(z',r,\zeta)\frac{d\zeta}{\sigma-\zeta}$$
$$=T_k\left(\frac{\sigma-z'}{ir}\right)+iU_k\left(\frac{\sigma-z'}{ir}\right)$$

式中 $U_k(x)=\sin(n\arccos x)$ 是第二类切贝雪夫多项式。于是

$$I=-\frac{1}{2}\int_{C'}\left[T_k\left(\frac{\sigma-z'}{ir}\right)+iU_k\left(\frac{\sigma-z'}{ir}\right)\right]\frac{f_n(\sigma)d\sigma}{R(\sigma,t)} \qquad (6\text{-}12\text{-}31)$$

也就是把沿 $\bar{t}t$ 积分的式 (6-12-30) 改变成沿 C' 积分的表达式 (6-12-31)。这样就可以把被积函数中的 ζ 用边界上的点 σ 代替，$\varphi_n(\zeta)$ 用 $f_n(\sigma)$ 代替，多项式 $T_k(\zeta-z'/ir)$ 用 $[T_k(\sigma-z'/ir)+iU_k(\sigma-z'/ir)]/2$ 代替。

若 C' 是封闭曲线，$f_n(\sigma)$ 是可微的函数，则

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_n'(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f_n'(\sigma)d\sigma}{\sigma-\zeta}\\&\int_{\bar{t}}^{t}\varphi_n'(\zeta)Q_k(z',r,\zeta)d\zeta\\&=-\frac{1}{2}\int_{C'}\left[T_k\left(\frac{\sigma-z'}{ir}\right)\right.\\&\left.+iU_k\left(\frac{\sigma-z'}{ir}\right)\right]\frac{f_n'(\sigma)d\sigma}{R(\sigma,t)}\end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}12\text{-}32)$$

由这样的讨论，可以把式 (6-12-9) 和式 (6-12-17) 改为沿 C' 积分。如式 (6-12-9) 中第一式改为

$$2\mu_{zw}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{in\theta}}{2\pi i}\int_{C'}\left[T_{|n|}\left(\frac{\sigma-z'}{ir}\right)\right.$$
$$\left.+iU_{|n|}\left(\frac{\sigma-z'}{ir}\right)\right]\frac{(\nu^*f_n-2z'f_n'-g_n)d\sigma}{R(\sigma,t)}$$

若 $f_n(\sigma)$ 不可微或 C' 不封闭，则

$$\int \frac{t}{t}\varphi_n'(\zeta)Q_k(z',r,\zeta)d\zeta$$

$$=\frac{\partial}{\partial z'}\int \frac{t}{t}\varphi_n(\zeta)Q_k(z',r,\zeta)d\zeta$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z'}\int_{C'}\left[T_k\left(\frac{\sigma-z'}{ir}\right)+iU_k\left(\frac{\sigma-z'}{ir}\right)\right]\frac{f_n(\sigma)d\xi}{R(\sigma,t)}$$

(6-12-33)

6-13 半空间弹性力学的第一个和第二个基本问题

设解析函数 $\varphi_n(\zeta)$, $\psi_n(\zeta)$, $\chi_n(\zeta)$ 在半空间 $x>0$ 是全纯的并在无穷远点为零；我们把它们表示为拉普拉斯变换形式如下：

$$\left.\begin{aligned}\varphi_n(\zeta)&=i^{|n|}\int_0^\infty a_n e^{-\lambda\zeta}d\lambda\\ \psi_n(\zeta)&=i^{|n|}\int_0^\infty b_n e^{-\lambda\zeta}d\lambda\\ \chi_n(\zeta)&=i^{|n|}\int_0^\infty c_n e^{-\lambda\zeta}d\lambda\end{aligned}\right\}\qquad(6\text{-}13\text{-}1)$$

这里 $a_n=a_n(\lambda)$, $b_n=b_n(\lambda)$, $c_n=c_n(\lambda)$。为满足条件 (6-12-11)，须要令

$$a_n(\lambda)=\overline{a_{-n}(\lambda)},\quad b_n(\lambda)=\overline{b_{-n}(\lambda)},\quad c_n(\lambda)=-\overline{c_{-n}(\lambda)}$$

(6-13-2)

把式 (6-13-1) 代入式 (6-12-9) 和式 (6-12-17) 并改变积分次序，得到

$$S_k e^{-\lambda\zeta}=e^{-i\lambda z'}\pi^{-1}\int_0^\pi e^{-i\lambda r\cos\beta}\cos k\beta d\beta=(-i)^k e^{-\lambda z'}J_k(\lambda r),$$

(6-13-3)

式中 J_k 是贝赛耳函数，$\zeta=z'+ir\cos\beta$，$k\geqslant 0$。

位移和应力的公式为：

$$2\mu w=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{in\theta}S_n^*[(\nu^*+2\lambda z')a_n-b_n].$$

$$
\left.\begin{aligned}
2\mu(u+iv) &= -\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta}\operatorname{sign}\left(n+\frac{1}{2}\right)S^{*}_{n-1}[(\nu^{*}-2\lambda z')a_n+b_n-c_n],\\
Z'_{z'} &= -\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta}S^{**}_{n}[(1+2\lambda z')a_n-b_n],\\
R_r+\Theta_\theta &= -\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta}S^{**}_{n}[(3+4\nu-2\lambda z')a_n+b_n],\\
R_r-\Theta_\theta+2iR_\theta &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta}\operatorname{sign}\left[|n+1|-\frac{1}{2}\right]S^{**}_{n+2}[(\nu^{*}-2\lambda z')a_n+b_n-c_n],\\
Z'_{r}+iR_\theta &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta}\operatorname{sign}\left(n+\frac{1}{2}\right)S^{**}_{n+1}\left[(1-2\lambda z')a_n+b_n-\frac{c_n}{2}\right]
\end{aligned}\right\}\qquad (6\text{-}13\text{-}4)
$$

式中

$$S^{*}_{n}f(\lambda)=\int_0^{\infty} f(\lambda)e^{-\lambda z'}J_{|n|}(\lambda r)d\lambda$$

$$S^{**}_{n}f(\lambda)=\int_0^{\infty} f(\lambda)e^{-\lambda z'}J_{|n|}(\lambda r)\lambda d\lambda$$

设在半空间表面上（$z'\geqslant 0$）已知外力（图 6-15）表示为富里叶多项式如下：

$$
\left.\begin{aligned}
p_{z'} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n(r)e^{in\theta},\\
p_r+ip_\theta &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n(r)e^{in\theta}
\end{aligned}\right\}\qquad (6\text{-}13\text{-}5)
$$

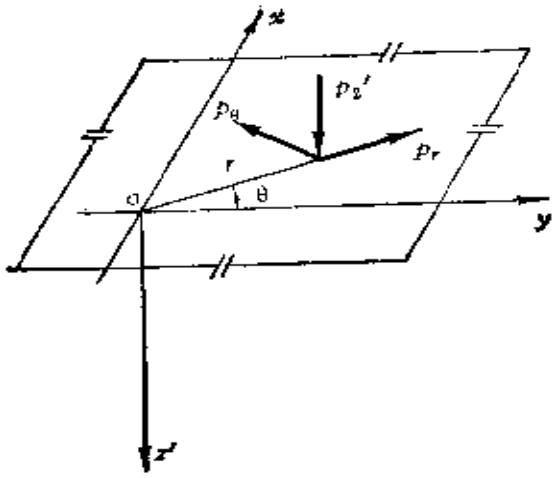


图 6-15

把 p_z'，p_r，p_θ 分别与相应的在半平面表面上的应力相等(由式(6-13-4))，得到

$$\left.\begin{aligned} p_n(\boldsymbol{r}) &= \overline{p_{-n}}(\bar{\boldsymbol{r}}) = \int_0^\infty (a_n - b_n) J_{|n|}(\lambda r)\lambda d\lambda \\ q_n(\boldsymbol{r}) &= -\operatorname{sign}\left(n+\frac{1}{2}\right)\int_0^\infty \left(a_n + b_n - \frac{c_n}{2}\right) J_{|n+1|}(\lambda r)\lambda d\lambda \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}13\text{-}6)$$

把上式的两侧取汉克变换，则

$$a_n - b_n = \int_0^\infty p_n(\boldsymbol{r}) J_{|n|}(\lambda r) r dr,$$

$$\left.\begin{aligned} a_n + b_n - \frac{c_n}{2} &= -\operatorname{sign}\left(n+\frac{1}{2}\right)\int_0^\infty q_n(r) J_{|n+1|}(\lambda r)\, r dr \\ a_n + b_n + \frac{c_n}{2} &= \operatorname{sign}\left(n-\frac{1}{2}\right)\int_0^\infty \overline{q_{-n}(\bar{\boldsymbol{r}})} J_{|n-1|}(\lambda r) r dr \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}13\text{-}7)$$

解此方程后，得到 a_n，b_n 和 c_n。

上述方法也可以用于解弹性层的问题。我们把式（6-13-1）改为

$$\varphi_n(\zeta)=\int_0^\infty a_n(\lambda)(e^{\lambda\zeta}\pm e^{-\lambda\zeta})\,d\lambda \tag{6-13-8}$$

计算积分（6-13-5）时，有

$$S_k'(e^{\lambda\zeta}\pm e^{-\lambda\zeta})=i^k[e^{\lambda z'}\pm(-1)^k e^{-\lambda z'}]J_k(\lambda r)$$

因此，所讨论的问题就变为利用汉克变换解半平面的边值问题。

我们把此边值问题变为联结问题。

讨论第一个基本问题。把式（6-13-5）中的外力等于式（6-12-17）中的应力分量，比较相应项 $e^{in\theta}$ 的系数．于是有

$$p_n(r)=\overline{p_{-n}(r)}=-S_n\omega_n'(\zeta),\quad q_n(r)=iS_{n+1}\omega_{n*}'(\zeta)$$

这里的算子 S_n 和 S_{n+1} 由式（6-12-4）确定（$z'=0$），取以下解析函数：

$$\left.\begin{aligned}\omega_n(\zeta)&=\lambda_*\varphi_n(\zeta)-\psi_n(\zeta),\\ \omega_{n*}(\zeta)&=\lambda\varphi_n(\zeta)+\psi_n(\zeta)-\lambda_0\chi_n(\zeta)\end{aligned}\right\} \tag{6-13-9}$$

$\lambda_*=1$，$\lambda_0=1/2$。

把它们代入式（6-12-4）沿 $\bar{t}t$ 积分，则

$$\begin{aligned}p_n(r)&=-\frac{1}{\pi}\int_0^r\left[T_n\left(\frac{y}{r}\right)\frac{\omega_n'(\sigma)}{\sqrt{r^2-y^2}}\right.\\&\qquad\left.+T_n\left(-\frac{y}{r}\right)\frac{\omega_n'(\bar{\sigma})}{\sqrt{r^2-y^2}}\right]dy\\&=-S_{n0}[\omega_n'(\sigma)+(-1)^n\omega_n'(\bar{\sigma})],\end{aligned} \tag{6-13-10}$$

$$q_n(r)=iS_{n+1,0}[\omega_{n*}'(\sigma)-(-1)^n\omega_{n*}'(\bar{\sigma})]\quad(\sigma=iy)$$

$$S_{n0}f(y)=\frac{1}{\pi}\int_0^r T_n\left(\frac{y}{r}\right)\frac{f(y)dy}{\sqrt{r^2-y^2}} \tag{6-13-11}$$

反演算子 S_{n0} 后，得到

$$\left.\begin{aligned}&\omega_n'(\sigma)+(-1)^n\omega_n'(\bar{\sigma})=-f_n'(y)\\&\omega_{n*}'(\sigma)-(-1)^n\omega_{n*}'(\bar{\sigma})=-iF_n'(y)\end{aligned}\right\}\quad(6\text{-}13\text{-}12)$$

在这些等式中

$$\left.\begin{aligned}f_n'(y)&=(-1)^nf_n'(-y)=\frac{d}{dy}S_{n1}p_n(r)\\&\quad+P_n(y),\\F_n'(y)&=(-1)^{n+1}F_n'(-y)\\&=\frac{d}{dy}S_{n+1,1}q_n(r)+Q_n(y)\\S_{n1}f(r)&=2\int_0^y T_n\left(\frac{y}{r}\right)\frac{f(r)rdr}{\sqrt{y^2-r^2}}\quad(y>0)\end{aligned}\right\}\quad(6\text{-}13\text{-}13)$$

$P_n(y)$ 和 $Q_n(y)$ 是系数待定的多项式

$$\left.\begin{aligned}P_n(y)&=a_{n,|n|-2}y^{|n|-2}+a_{n,|n|-4}y^{|n|-4}+\cdots\\Q_n(y)&=a_{n,|n+1|-2}y^{|n+1|-2}+a_{n,|n+1|-4}y^{|n+1|-4}+\cdots\end{aligned}\right\}\quad(6\text{-}13\text{-}14)$$

(去消包括 y 有负数阶的项)。

$\varphi_n(\zeta)$，$\psi_n(\zeta)$ 和 $\chi_n(\zeta)$ 在下半平面 ($\mathrm{Re}\zeta>0$)为已知。由以下关系求它们在上半平面之值。

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_n(\zeta)=(-1)^{n+1}\psi_n(-\zeta),\ \psi_n(\zeta)\\&\qquad=(-1)^{n+1}\varphi_n(-\zeta)\\&\chi_n(\zeta)=(-1)^{n+1}\chi_n(-\zeta)\quad(\mathrm{Re}\zeta<0)\end{aligned}\right\}\quad(6\text{-}13\text{-}15)$$

$\zeta\to\sigma=iy$(σ 在半平面的边界上)。当 ζ 从上面趋向于点 σ，$\zeta_1=-\zeta$ 由下面趋向于点 $\bar{\sigma}=-iy$，相反也是这样。取(+)和(−)表示从上面和由下面来的解，于是得到如下关系：

$$\varphi_n'(\sigma)=\varphi_n^{+-}(\sigma),\ \varphi_n'(\bar{\sigma})=(-1)^n\varphi_n^{+}(\sigma)\text{等等}$$

由式 (6-13-13) 得出

$$\omega_n'^{+}(\sigma)-\omega_n'^{-}(\sigma)=f_n'(y),$$
$$\omega_{n*}'^{+}(\sigma)-\omega_{n*}'^{-}(\sigma)=iF_n'(y) \qquad (6\text{-}13\text{-}16)$$

$f_n'(y)$ 和 $F_n'(y)$ 在 y 轴上（包括无穷远点的邻域）处处满足 H 条件。在有限个点 c_k 上，这些函数可以变为无穷大，但是它们与 $|y-c_k|^{\alpha}$ （$0<\alpha<1$）的乘积满足 H 条件。在无穷远点 $f_n'(y)$ 和 $F_n'(y)$ 如常数$\cdot|y|^{-\alpha}$ （$0<\alpha<1$）那样趋向于零，由此条件可求多项式（6-13-14）的系数。

等式（6-13-16）确定解析函数的线性联结问题。设在 ζ 平面内 $\omega_n'(\zeta)$ 和 $\omega_{n*}'(\zeta)$ 分段全纯。由式（6-13-16）得出

$$\omega_n'(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_n'(y)dy}{iy-\zeta},\quad \omega_{n*}'(\zeta)$$
$$=\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F_n'(y)dy}{iy-\zeta} \qquad (6\text{-}13\text{-}17)$$

考虑到如下关系（由式（6-12-11）得来）：

$$\lambda_*\varphi_n(\zeta)+\psi_n(\zeta)+\lambda_0\chi_n(\zeta)=(-1)^n\omega_{-n*}(\bar{\zeta}) \qquad (6\text{-}13\text{-}18)$$

利用关系（6-13-9）可以求到函数 $\varphi_n(\zeta)$，$\psi_n(\zeta)$，$\chi_n(\zeta)$。计算应力和位移可用 §6-12 中的方程。

有时要经过无穷远点积分式（6-12-17），积分路径要包括两段半直线：从点 $\bar{t}=-ir$ 到 $-i\infty$ 和由 $+i\infty$ 到 $t=ir$。在此情况下，等式（6-13-10）变为

$$p_n(r)=-\frac{1}{\pi i}\left(\int_{-\infty}^{-r}+\int_{r}^{\infty}\right)T_n\left(\frac{y}{r}\right)\frac{\omega_n'(\sigma)\operatorname{sign}y\,dy}{\sqrt{y^2-r^2}} \qquad (6\text{-}13\text{-}19)$$
$$=iS_{n0}^{*}[\omega_n'(\sigma)-(-1)^n\omega_n'(\bar{\sigma})]$$
$$q_n(r)=S_{n+1,0}^{*}[\omega_{n*}'(\sigma)+(-1)^n\omega_{n*}'(\bar{\sigma})]$$

经计算后，得到

$$\left.\begin{aligned}&\omega_n'(\sigma)-(-1)^n\omega_n'(\sigma)=-f_n'(y)\\&\omega_{n*}'(\sigma)+(-1)^n\omega_{n*}'(\sigma)=-iF_n'(y)\end{aligned}\right\}\qquad(6\text{-}13\text{-}20)$$

$$\left.\begin{aligned}f_n'(y)&=-(-1)^nf_n'(-y)\\&=-i\frac{d}{dy}S_{n,1}^*p_n(r)\\F_n'(y)&=(-1)^nF_n'(-y)\\&=-i\frac{d}{dy}S_{n+1,1}^*q_n(r)\end{aligned}\right\}\quad(y>0)\qquad(6\text{-}13\text{-}21)$$

算子 S_{n0}^* 和 S_{n1}^* 与 S_{n0} 和 S_{n1} 一致，但是要改变被积表达式中根号内的符号并且把积分限由零到 r 改为由∞到 r。式 (6-13-15)改变为

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_n(\zeta)=(-1)^n\psi_n(-\zeta)\\&\psi_n(\zeta)=(-1)^n\varphi_n(-\zeta)\\&\chi_n(\zeta)=(-1)^n\chi_n(-\zeta)\quad(\mathrm{Re}\zeta<0)\end{aligned}\right\}\qquad(6\text{-}13\text{-}22)$$

式 (6-13-17) 中的 $f_n'(y)$ 和 $F_n'(y)$ 就是式 (6-13-21) 中的 $f_n'(y)$ 和 $F_n'(y)$。当满足以下条件时，积分 (6-13-19) 存在。

$$\lim\sigma^{|n|+\alpha}[\varphi_n'(\sigma)-\psi_n'(\sigma)]=0\quad(\sigma\to\infty,\ 0<\alpha<1)$$

$$\lim\sigma^{|n+1|+\alpha}\left[\varphi_n'(\sigma)+\psi_n'(\sigma)-\frac{i}{2}\chi_n'(\sigma)\right]=0$$

$$\lim\sigma^{|n-1|+\alpha}\left[\varphi_n'(\sigma)+\psi_n'(\sigma)+\frac{1}{2}\chi_n'(\sigma)\right]=0$$

这给 $f_n'(y)$ 和 $F_n'(y)$ 带来一定限制，所以对负荷 $p_n(r)$ 和 $q_n(r)$ 也带来限制。

现在讨论第二个基本问题。当在半空间的表面上已知位移时，利用同样的分析，可知

$$\omega_n(\sigma)+(-1)^n\omega_n(\bar{\sigma})=-if_n(y)$$
$$\omega_{n*}(\sigma)-(-1)^n\omega_{n*}(\bar{\sigma})=F_n(y)$$

这里函数 $\omega_n(\zeta)$ 和 $\omega_{n*}(\zeta)$ 与 $\varphi_n(\zeta)$，$\psi_n(\zeta)$，$\chi_n(\zeta)$ 的关

系为式（6-13-9）和式（6-13-18）（当 $\lambda_*=\nu^*$ 和 $\lambda_0=1$）。

$$f_n(y)=(-1)^n f_n(-y)=2\mu i\frac{d}{dy}S_{n1}w_n+P_n(y)$$

$$F_n(y)=(-1)^{n+1}F_n(-y)$$

$$=2\mu i\frac{d}{dy}S_{n+1,1}(u_n+iv_n)+Q_n(y)$$

这里 $w_n=w_n(0,r)$，$u_n=u_n(0,r)$，$v_n=v_n(0,r)$ 是式（6-12-6）的系数，$P_n(y)$ 和 $Q_n(y)$ 是式（6-13-14）那样的多项式。多项式的系数由 $f_n(\infty)=F_n(\infty)=0$ 的条件得到。

利用如下关系，先确定在上半平面的解析函数

$$\nu^*\varphi_n(\zeta)=(-1)^n\psi_n(-\zeta)$$

$$\psi_n(\zeta)=(-1)^n\varphi_n(-\zeta)$$

$$\chi_n(\zeta)=(-1)^n\chi_n(-\zeta)\quad(\mathrm{Re}\zeta<0)$$

因此，解所得联结问题，于是得出

$$\omega_n(\zeta)=-\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_n(y)dy}{iy-\zeta}$$

$$\omega_{n*}(\zeta)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F_n(y)dy}{iy-\zeta}$$

若积分经过无穷远点，需把下式代入上式

$$f_n(y)=(-1)^{n+1}f_n(-y)=2\mu\frac{d}{dy}S^*_{n,1}w_n$$

$$F_n(y)=(-1)^n F_n(-y)=2\mu\frac{d}{dy}S^*_{n+1,1}(u_n+iv_n)\quad(y>0)$$

〔例题32〕 有一平面圆裂缝的弹性空间如图 6-16 所示。

设作用于裂缝上岸的外力为 $p_z^{(+)}r$，$p_r^{(+)}$，$p_\theta^{(+)}$。作用于裂缝下岸的外力为 $p_z^{(-)}r$，$p_r^{(-)}$，$\bar{p}_\theta$。我们认为它们可以展成为式（6-13-5）的形式，而把 $p_n(r)$ 和 $q_n(r)$ 也注上（+）和（−）。

弹性空间的位移和应力用式（6-12-9）和（6-12-17）表示，积分路径经过 $R(\zeta,t)$ 分支线和裂缝的下面或是经过它们的上面。

令 $t=x'+ir$ 趋向于在裂缝下岸上的点 σ^-。因此，公式（6-

13-9）到（6-13-14）仍然适用。

令 $t=z'+ir$ 趋向于在裂缝上岸上的点 σ^+。取积分线经过裂缝的上面但在 $R(\zeta,t)$ 分支线的下面如图 6-17 所示。我们重新又回到公式（6-13-9）到（6-13-14）。

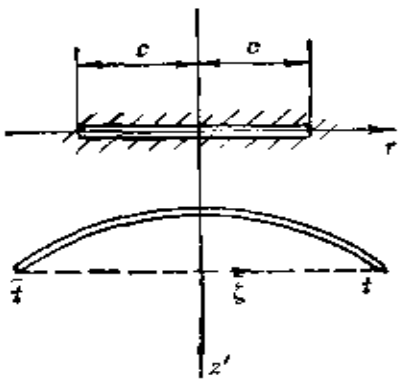


图 6-16

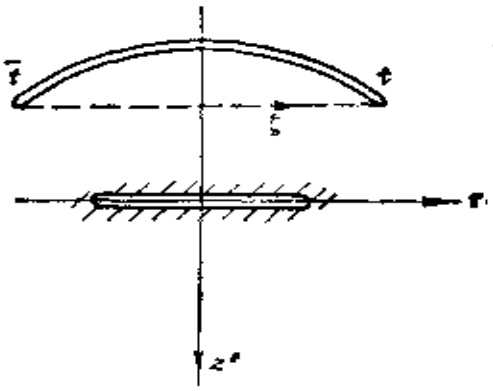


图 6-17

对 y 积分等式（6-13-12），得到

$$\omega_n^{\pm}(\sigma)-(-1)^n\omega_n^{\pm}(\bar{\sigma})=-if_n^{\pm}(y),$$

$$\omega_{n*}^{\pm}(\sigma)+(-1)^n\omega_{n*}^{\pm}(\bar{\sigma})=F_n^{\pm}(y)\quad(-c\leqslant y\leqslant c)$$

$$f_n^{\pm}(y)=(-1)^{n+1}f_n^{\pm}(-y)=S_{n1}p^{\pm}(y)-\int P_n^{\pm}(y)dy$$

$$F_n^{\pm}(y)=(-1)^nF_n^{\pm}(-y)=S_{n+1,1}q_n^{\pm}(y)+i\int Q_n^{\pm}(y)dy$$

$$(0<y\leqslant c)$$

这里都用上面的符号或者都用下面的符号。

令

$$\Omega_{n1}(\zeta)=\varphi_n(\zeta)-\psi_n(\zeta)-(-1)^n\varphi_n(-\zeta)+(-1)^n\psi_n(-\zeta)$$

$$\Omega_{n2}(\zeta)=\varphi_n(\zeta)-\psi_n(\zeta)+(-1)^n\varphi_n(-\zeta)-(-1)^n\psi_n(-\zeta)$$

它们在沿 $-ic$，$+ic$ 裂开的平面内（除无穷远点外）全纯。它们的边界值满足以下条件。

$$\Omega_{n1}^{+}(\sigma)+\Omega_{n1}^{-}(\sigma)=-if_n^{+}(y)-if_n^{-}(y)$$

$$\Omega_{n2}^{+}(\sigma)-\Omega_{n2}^{-}(\sigma)=-if_n^{+}(y)+if_n^{-}(y)$$

弹性空间的点的位移包括裂缝边缘在内是处处连续的。由式(6-12-9)可以看出，为此函数$\varphi_n(\zeta)$，$\psi_n(\zeta)$，$\chi_n(\zeta)$在点$\zeta=\pm ic$的奇异性的阶数要小于1/2；对于$\Omega_{nk}(\zeta)$（$k=1,2$）也是一样。

在此情况下，求解联结问题便得到

$$\Omega_{n1}(\zeta)=\frac{i}{2\pi}\sqrt{\zeta^2+c^2}\int_{-c}^{+c}\frac{f_n^{+}(y)+f_n^{-}(y)}{(iy-\zeta)\sqrt{c^2-y^2}}dy$$

$$\Omega_{n2}(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-c}^{+c}\frac{f_n^{+}(y)-f_n^{-}(y)}{iy-\zeta}dy$$

函数$\varphi_n(\zeta)$和$\psi_n(\zeta)$的差值如下：

$$\varphi_n(\zeta)-\psi_n(\zeta)=[\Omega_{n1}(\zeta)+\Omega_{n2}(\zeta)]/2$$

用同样的讨论可以得到

$$\varphi_n(\zeta)+\psi_n(\zeta)-\frac{1}{2}\chi_n(\zeta)$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\int_{-c}^{+c}\frac{F_n^{+}(y)-F_n^{-}(y)}{iy-\zeta}dy$$

$$-\frac{1}{4\pi}\sqrt{\zeta^2+c^2}\int_{-c}^{+c}\frac{F_n^{+}(y)+F_n^{-}(y)}{(iy-\zeta)\sqrt{c^2-y^2}}dy=\Psi_n(\zeta)$$

$$\varphi(\zeta)+\psi_n(\zeta)+\frac{1}{2}\chi_n(\zeta)=(-1)^n\overline{\Psi}_{-n}(\overline{\zeta})$$

当$C_n\neq 0$，由条件(6-12-13)可以求到$P_n^{\pm}(y)$和$Q_n^{\pm}(y)$中的待定系数和积分常数。C_n就是积分常数。

若裂缝承受均布压力p，则

$$\varphi_0(\zeta)=-\psi_0(\zeta)=\frac{p}{2\pi i}\left(2ic+\zeta\ln\frac{\zeta-ic}{\zeta+ic}\right)$$

其它函数为零。而应力分量表示为：

$$Z_{z'}'+R_r+\theta_\theta=2(1+\nu)I_1,\quad Z_{z'}'=I_1-z'\partial I_1/\partial z'$$

$$\theta_\theta = 2\nu I_1 + (1-2\nu)I_2 + z'\frac{\partial I_2}{\partial z'}, \quad Z'_r = z'_r \partial^2 I_2 / \partial z'^2$$

式中

$$I_1(z', r) = \frac{2p}{\pi}\,\mathrm{Im}[\ln(ic - z + R) - ic/R - \pi i]$$

$$I_2 = \frac{p}{\pi}\,\mathrm{Im}\left[\ln(ic - z' + R) - \frac{z' + ic}{r^2}R - \pi i\right]$$

$$R = R(ic, t), \quad t = z' + ic$$

当 $z' = 0$，$r > c$ 时，则

$$Z'_{z'} = \frac{2p}{\pi}\left(\frac{c}{\sqrt{r^2 - c^2}} - \arcsin\frac{c}{r}\right)$$

$$R_r = (1+2\nu)Z'_{z'} - \theta_\theta$$

$$\theta_\theta = \frac{1+2\nu}{2}Z'_{z'} - \frac{(1-2\nu)c^3}{\pi r^2\sqrt{r^2 - c^2}}\,p$$

若把应力 $Z'_{z'} = p$ 加到所求到的应力上，我们就会得到无穷大物体圆裂缝应力集中问题的解答。

参 考 文 献

〔1〕 北京大学数学分析与函数论教研室编，《复变函数论》，人民教育出版社，1961。

〔2〕 А. И. 马库雪维奇著，闻昌龄、吴望一译，《解析函数论简明教程》，人民教育出版社，1961。

〔3〕 С. Г. Михлин, «Лекции по Линейным Интегральным Уравнениям», Физматгиз, 1959.

〔4〕 Н. И. Мусхелишвили, «Некоторые Основные Задачи Математической Теории Упругости», Изд. «Наука», 1966.

〔5〕 Л. В. Канторович, В. И. Крылов, «Приближенные Методы Высшего Анализа», 1952.

〔6〕 A. H. England, «Complex Variable Methods in Elasticity», 1971.

〔7〕 L. M. Milne-Tomson, «Plane Elastic Systems», 1960.

〔8〕 «Концентрация Напряжений», Вып. 1, АН УССР, Институт Механики, 1965.

〔9〕 С. М. Белоносов, «Основные Плоские Статические Задачи Теории Упругости для Односвязных и Двухсвязных Областей», 1962.

[10] А.Я. Александров, Ю. И. Соловьев, «Пространственные Задачи Теории Упругости», Изд. «Наука», 1978.

[11] 森口繁一著，刘亦珩译，王开福校，《平面弹性论》，上海科学技术出版社，1962。

[12] IVO BABUŠKA-KARL REKTORYS, FRANTIŠEK, VYČICHLO, «MATEMATICKÁ THEORIE ROVINNÉ PRUŽNOSTI», NAKLADATELSTVÍČESKOSLOVENSKÉ AKADEMIE VĚD, PRAH, 1955.