# 目　录

非线性科学丛书出版说明
前言
第1章　分形的几何特征 ……1
§1　扩展对称性 ……1
§2　分形维数 ……2
§3　规则分形 ……4
§4　描述分形几何的其他参数 ……8
§5　非均匀规则分形 ……10
§6　无规分形 ……12
§7　测定分形维数的方法 ……19
§8　自仿射分形 ……25
第2章　分形上自旋系统的相变(I) ……26
§9　连续相变的基本知识 ……26
§10　科赫曲线上伊辛模型的相变 ……28
§11　重整化群方法 ……32
§12　准线性晶格上自旋模型的相变·重整化群方法 ……36
§13　塞尔宾斯基铺垫上的自旋统计模型 ……42
§14　伊辛模型的严格配分函数和关联函数 ……50
§15　塞尔宾斯基铺垫上渗流相变 ……57
§16　塞尔宾斯基铺垫上的电导 ……59
第3章　分形上自旋系统的相变(II) ……61
§17　梅格达尔-卡丹诺夫键移重整化群方法 ……61
§18　塞尔宾斯基地毯上伊辛模型的相变 ……65
§19　塞尔宾斯基地毯上的电阻网络 ……70

§ 20 相变的普适性 ……73
§ 21 金刚石型等级晶格上伊辛模型的相变 ……75
§ 22 反铁磁箝茨模型的相变 ……79
§ 23 金刚石型等级晶格上的反铁磁相变 ……83
§ 24 键稀释箝茨模型 ……90
**第4章 临界动力学 ……93**
§ 25 临界动力学的基本概念 ……93
§ 26 一维平移对称晶格上动力伊辛模型的严格解 ……95
§ 27 动力学实空间重整化群理论 ……100
§ 28 TDRG 应用于一维动力伊辛模型 ……103
§ 29 科赫曲线上动力伊辛模型的临界动力学 ……109
§ 30 塞尔宾斯基铺垫上动力伊辛模型 ……114
§ 31 在 TDRG 中的键移近似 ……116
§ 32 规则 DLA 集团上的动力伊辛模型 ……121
§ 33 动力学重整化群方法的分析 ……127
**第5章 分形上的动力学 ……131**
§ 34 渗流集团上的反常扩散 ……131
§ 35 扩散的谱密度·格林函数方法 ……134
§ 36 动力学标度理论 ……137
§ 37 分形晶格振动的谱结构 ……142
§ 38 分形上薛定谔方程的解 ……147
§ 39 弹性分形的临界指数和谱维数 ……154
**第6章 多重分形 ……162**
§ 40 基本概念 ……162
§ 41 重标变换群 ……164
§ 42 分形测度及其奇异性·理论框架 ……172
§ 43 精确可解的康托集 ……175
§ 44 动力系统 ……182
§ 45 渗流集团上的电阻网络 ……189

§46 DLA 生长概率测度·调和测度 ……192
§47 生长结构的几何多重分形性 ……198
§48 多重分形的热力学形式 ……202
§49 杨-李零点·朱莉亚集和它们的奇异谱 ……203
**第7章 分形生长 ……209**
§50 生长模型的基本概念 ……209
§51 生长模型与静模型 ……211
§52 生长模型的标度行为 ……213
§53 扩散置限聚集(DLA)模型 ……217
§54 介电击穿模型(DBM) ……220
§55 DLA 聚集的实验实现 ……222
§56 DLA 生长的理论处理 ……224
§57 集团-集团聚集 ……227
§58 集团-集团聚集的计算机模拟 ……228
§59 平均场理论·斯莫洛可夫斯基方程 ……231
§60 生长花样 ……233
**科学家中外译名对照表 ……235**
**参考文献 ……236**

# Contents

**Preface**

**Chapter 1 Fractal Geometry** ..... 1

§ 1 Dilation symmetry ..... 1

§ 2 Fractal dimension ..... 2

§ 3 Regular (deterministic) fractals ..... 4

§ 4 Geometric parameters of fractals ..... 8

§ 5 Non-uniform regular fractals ..... 10

§ 6 Random fractals ..... 12

§ 7 Methods of measuring fractal dimensions ..... 19

§ 8 Self-affine fractals ..... 25

**Chapter 2 Phase Transitions of Spin System on Fractal (I)** ..... 26

§ 9 Basic knowledge of continuous phase transitions ..... 26

§ 10 Phase transition of the Ising Model on Koch curves ..... 28

§ 11 Renormalization Group approach ..... 32

§ 12 Phase transitions of spin models on quasi-linear lattices Renormalization Group approach ..... 36

§ 13 Spin models on Sierpinski gaskets ..... 42

§ 14 Exact partition function and correlation function of the Ising model ..... 50

§ 15 Percolation on Sierpinski gaskets ..... 57

§ 16 Conductance on Sierpinski gaskets ..... 59

**Chapter 3 Phase Transitions of Spin System on Fractal (II)** ····· **61**

§ 17 Migdal-Kadanoffbond-moving renormalization group approach ····· 61

§ 18 Phase transition of the Ising Model on Sierpinski Carpets ····· 65

§ 19 Resistor network on Sierpinski Carpets ····· 70

§ 20 Universality of phase transitions ····· 73

§ 21 Phase transition of the Ising Model on diamond-type hierarchical lattices ····· 75

§ 22 Phase sransition of antiferromagnetic Potts model ····· 78

§ 23 Antiferromagnetic phase transitions on diamond-type hierarchical lattices ····· 83

§ 24 Bond-diluted Potts model ····· 90

**Chapter 4 Critical Dynamics** ····· **93**

§ 25 Basic concepts of critical dynamics ····· 93

§ 26 Exact solution of the Kinetic Isthg model on one-dimensional lattice ····· 95

§ 27 Dynamical real-space renoramlization group theory ····· 100

§ 28 Application of TDRG approach to 1-D Kinetic Ising model ····· 103

§ 29 Critical dynamics of the Kinetic Ising model on Koch Curve ····· 109

§ 30 The kinetic Ising model on Sierpinski gaskets ····· 114

§ 31 Bond-moving TDRG approach ····· 116

§ 32 The kinetic Ising model on regular DLA clusters

..... 121
§ 33 Analysis of a dynamic renormalization group technique ..... 127
**Chapter 5 Dynamics on Fractals ..... 131**
§ 34 Anomalous diffusion on percolation clusters ... 131
§ 35 Spectral density of diffusion Green's function method ..... 134
§ 36 Dynamical scaling theory ..... 137
§ 37 Spectral structure of fractal lattice vibration ..... 142
§ 38 Solution to the Schrodinger equation on fractals ..... 147
§ 39 Critical exponents and spectral dimension of elastic fractals ..... 154
**Chapter 6 Multifractal ..... 162**
§ 40 Basic concepts ..... 162
§ 41 Rescaling transformation group ..... 164
§ 42 Fractal measures and their singularities Theoretical framework ..... 172
§ 43 Exactly solvable Cantor sets ..... 175
§ 44 Dynamical systems ..... 182
§ 45 Resistor networks on percolation clusters ..... 189
§ 46 Growth probability measures of DLA Harmonic measure ..... 192
§ 47 Geometrical multifractality of growing structures ..... 198
§ 48 Thermodynamics formalism of multifractal ... 202
§ 49 Yang-Lee zeros, Julia sets and their singularity spectra ..... 203

**Chapter 7 Fractal growth** ..... **209**
§ 50 Basic concepts of growth models ..... 209
§ 51 Growth models and static models ..... 211
§ 52 Scaling behaviour of growth models ..... 213
§ 53 Diffusion-limited aggregation (DLA) model ... 217
§ 54 Dielectric breakdown model (DBM) ..... 220
§ 55 Experimental realizations of DLA ..... 222
§ 56 Theoretical treatments of DLA ..... 224
§ 57 Cluster-Cluster aggregation ..... 227
§ 58 Computer simulation of Cluster-cluster aggregation ..... 228
§ 59 Mean-field theories. Smoluchowski equation ... 231
§ 60 Growth patterns ..... 233
**References** ..... **237**

# 第 1 章

# 分形的几何特征

本章介绍分形几何的基本概念，主要涉及分形维数，同时也提到拓扑维数、分岔度及不均匀度．为了今后各章的需要，本章重点介绍几种规则分形和无规分形．最后介绍测定分形维数的方法．

## §1 扩展对称性

分形是具有扩展对称性的几何对象．扩展 (dilation) 对称性[1],[2]又称为自相似对称性，它指的是：对一类具有无穷嵌套的几何对象，适当地取出其一部分，并加以放大，观察者看到的结果与整体对象完全相同．换句话说，如果人们用不同倍数的放大镜去观察一类具有无穷嵌套的几何对象，观察者看到的结果均相同；观察者无法从观察结果去判断放大镜的倍数．据此可知，具有扩展对称性的对象在标度变换下是不变的．

图 1-1 是一种具有扩展对称性的几何对象，它由无穷次分割做成(在 §3 中将具体谈到，图中只画出它的三级分割图)．若取出其中一部分，放大 $2n$ 倍 ($n$ 为整数)，则获得与整体对象完全相同的图形．因而它是自相似的．



图 1-1

物理上也存在着具有自相似对称性的例子．一个典型例子是连续相变的卡丹诺夫 (L. P. Kadanoff) 图象：考虑一个伊辛 (E. Ising) 自旋系统．自旋间存在铁磁相互作用．在低温下，自旋成有序排列，序参量不为 0．当温度升至临界温度时，系统中存在着各种尺度(从晶格长度数量级至无穷大)的涨落区．这些涨落区互相嵌套，犬牙交错，出现形



图 1-2

如图 1-2 的图象. 如用不同倍数的放大镜去观察它，会发现每个局部区域的内部结构与整体相似.

## §2 分形维数

为了描述分形的自相似对称性的基本特征，将引入多个几何参数，其中最基本的便是分形维数. 分形维数的定义方法有多种，我们采用下列方法来定义.[2]

把分形看作是嵌置于欧几里得空间的点集. 为确定其维数，核心是如何测量一个点集的大小. 最简单的办法是用线元、面元或体元去覆盖它. 一条有限长的曲线段可用线元 $\delta$ 去覆盖它，如果用 $N(\delta)$ 次覆盖便耗尽了整个线段，便可记：

$$L=N(\delta)\delta \xrightarrow{\delta\to 0} L_0\delta^0. \tag{2.1}$$

显然，当 $\delta\to 0$ 时，$L_0$ 便代表曲线段 $L$ 的长度. 如果用 $\delta^2$ 的面元去覆盖它，便可形式地写出与 $L$ 相联系的面积的大小：

$$L_A=N(\delta)\delta^2 \xrightarrow{\delta\to 0} L_0\delta^1. \tag{2.2}$$

同样，也可写出与其相联系的体积的大小：

$$L_V=N(\delta)\delta^3 \xrightarrow{\delta\to 0} L_0\delta^2. \tag{2.3}$$

显然，对一条曲线来说，它的面积和体积均为 0，(2.2)和(2.3)恰

好反映了这一事实.

类似地，对一个曲面，我们可分别用线元、面元和体元去覆盖，得出与其相联系的长度、面积和体积：

$$A_L = N(\delta)\delta \xrightarrow{\delta\to 0} A_0\delta^{-1}, \tag{2.4}$$

$$A = N(\delta)\delta^2 \xrightarrow{\delta\to 0} A_0\delta^0, \tag{2.5}$$

$$A_V = N(\delta)\delta^3 \xrightarrow{\delta\to 0} A_0\delta^1. \tag{2.6}$$

当 $\delta\to 0$ 时测得曲面面积为 $A_0$，而与其相联系的曲线长为 $\infty$，体积为 0. 这也与我们已有的几何概念相符.

现在对某点集 $S$ 写出：

$$M_d = N(\delta)\delta^d \xrightarrow{\delta\to 0} \begin{cases} 0, & \text{当 } d>d_f \text{ 时;} \\ \infty, & \text{当 } d<d_f \text{ 时.} \end{cases} \tag{2.7}$$

集合 $S$ 的分形维数 $d_f$ 是由测量出 $M_d$ 从 0 过渡到 $\infty$ 的临界维数. 在临界维数，$M_d$ 具有有限值.

利用上述可求出 $d_f$：既然当 $d=d_f$ 时 $M_d$ 具有有限值，则当 $\delta\to 0$ 时有：

$$N(\delta) \propto \frac{1}{\delta^d} = \frac{1}{\delta^{d_f}}, \tag{2.8}$$

因而

$$d_f = -\frac{\ln N(\delta)}{\ln \delta} = \frac{\ln N(\delta)}{\ln\left(\frac{1}{\delta}\right)}. \tag{2.9}$$

(2.9)提供了一种计算分形维数的方法.

还有一种直接利用分形的自相似性来定义和计算分形维数的方法. 具有自相似结构的对象，它的均匀分布的物质质量满足如下齐次泛函方程：

$$M(bl) = b^{d_f}M(l) = KM(l), \tag{2.10}$$

这里 $M(l)$ 代表线度为 $l$ 的对象的物质质量，$M(bl)$ 是增大 $b$ 倍以后的物质质量. 这一方程存在唯一解：

$$M(l) \propto l^{d_f}. \tag{2.11}$$

借助(2.10)，可求出：

$$d_f=\frac{\ln K}{\ln b}. \tag{2.12}$$

这样确定的 $d_f$ 也称作**分形维数**. 容易发现，(2.9)和(2.12)确定的分形维数是一致的.

分形维数通常不是整数；在特殊情况下也可能是整数，但它总是不大于分形所嵌置的欧氏空间的维数. 此外，还需指出，在统计物理学中，当讨论重整化群理论时，也曾出现过非整数维数(如3.999维)，但它与分形的非整数维数毫无共同之处，前者没有自相似结构的几何背景，仅仅是整数维数的延拓.

## §3 规则分形

分形可分两类：一类是规则分形[1],[2]，又称决定论的(deterministic)分形，它是按一定规则构造出的具有严格自相似性的分形；另一类是无规的分形，它是在生长现象中和许多物理问题中产生的分形，其特点是不具有严格的自相似性，只是在统计意义上是自相似的.

本节介绍几种在现代文献中谈论最多的分形.

**1. 均匀康托集**(Cantor set)

取[0, 1]线段，分为三等分，挖去中段；剩下两段再各三等分，又舍去中段；如此无限重复，最终形成一个点集. 这样的点集称为**康托集**.

集合的构造过程见图3-1. $n$ 代表第 $n$ 级构造阶段，第1级图称为康托集的生成元，以后各级构造阶段均仿效生成元来形成.

康托集的分形维数可利用(2.9)或(2.12)来确定. 首先，利用(2.9)，当用 $\delta=\left(\frac{1}{3}\right)^n$ 来覆盖第 $n$ 级构造时，需用它覆盖 $2^n$ 次才能将集合耗尽，因此

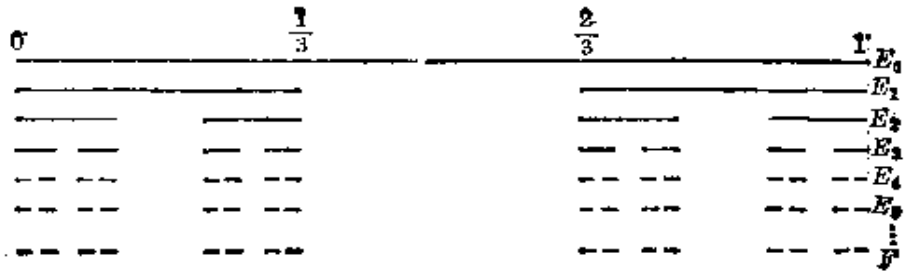



图 3-1

$$d_f=-\frac{\ln 2^n}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)^n}=\frac{\ln 2}{\ln 3}\approx 0.6309. \tag{3.1}$$

其次，如果采用(2.12)，可作如下分析：取$\left[0,\ \frac{1}{3}\right]$段，将尺度放大$b=3$倍，这样它又充满了[0, 1]区间；类似地，$\left[\frac{2}{3},\ 1\right]$段也作同样处理．因而这两段便形成与$n=0$级完全相同的两套对象，即$K=2$，因此

$$d_f=\frac{\ln K}{\ln b}=\frac{\ln 2}{\ln 3}\approx 0.6309. \tag{3.2}$$

两种作法求得完全相同的分形维数．

由康托集的构造过程，可以看出，康托集是自相似的．在$n=1$级构造中，在$\left[0,\ \frac{1}{3}\right]$和$\left[\frac{2}{3},\ 1\right]$内的康托集部分与整个康托集是相似的，在$n=2$级构造中，$\left[0,\ \frac{1}{9}\right]$，$\left[\frac{2}{9},\ \frac{1}{3}\right]$，$\left[\frac{2}{3},\ \frac{7}{9}\right]$，$\left[\frac{8}{9},\ 1\right]$内的部分也与整个集合相似．可见康托集包含许多不同比例的与自身相似的样本．

**2．科赫(H.V.Koch)曲线**

取一单位长直线段($n=0$级)，将其三等分，舍去中间的一段，而代之以底边在被舍去线段上的等边三角形的另两边，这样形成$n=1$级，即科赫曲线的生成元．继之，对$n=1$级的曲线中的每段，实施如前的步骤，这样便得到$n=2$级的曲线．以后仿此重复，便得到科赫曲线．图3-2(i)表示这一曲线的构造过程．显然，科

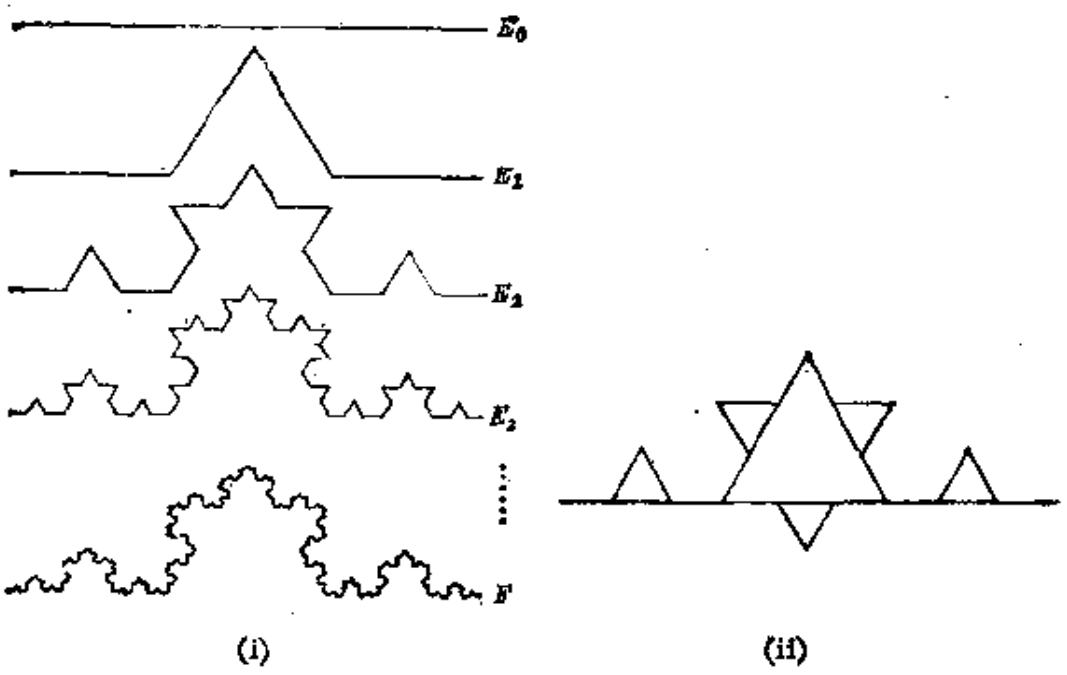



图 3-2

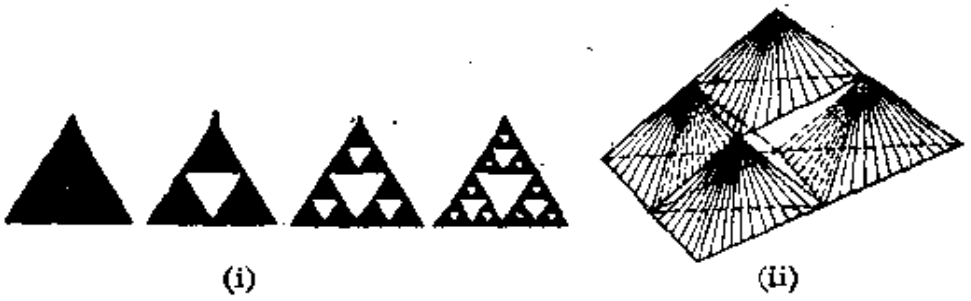
赫曲线上任一级的每条线段的"内部"结构均与整体相似.

科赫曲线的分形维数可利用 (2.9) 或 (2.12) 求得. 若采用 (2.9)式, 则 $\delta=\left(\frac{1}{3}\right)^n$, $N(\delta)=4^n$, 因而求得 $d_f=\frac{\ln 4}{\ln 3}\approx 1.2619$.

图 3-2(i)是无分支的科赫曲线. 也可类似地构造出有分支的科赫曲线, 如图 3-2(ii). 这两类科赫曲线均称为准线性的分形曲线, 因为它们具有直线的最主要特性, 即只要切割两个点就可将某部分图形从整体脱离开来.

**3. 塞尔宾斯基铺垫(Sierpinski gasket)**

首先看嵌置于二维欧氏空间的塞尔宾斯基铺垫. 它是用如下迭代过程得到的: 先取一单位边长的等边三角形(对应 $n=0$ 级), 将每边中点连接起来, 形成四个较小的等边三角形, 然后将中间一个挖去, 这样余下的三个边长为 $\frac{1}{2}$ 的等边三角形构成 $n=1$ 级结构(生成元). 继之, 对这些三角形实施同样的连接, 分割和取舍操作, 便得到 9 个边长为 $\frac{1}{4}$ 的等边三角形. 如此重复, 最终形成具



(i) (ii)

图 3-3

有各种大小空隙的等边三角形集合，这一集合称为**塞尔宾斯基铺垫**. 它的构造过程见图 3-3(i). 容易算出，它的分形维数为：

$$d_f=\frac{\ln 3}{\ln 2}\approx 1.585.$$

其次，考察嵌置于三维欧氏空间的塞尔宾斯基铺垫. 它的构造办法如下：从一个边长为单位长的正四面体出发，将每条棱的中点连接起来，使该正四面体分成 5 个棱长为 $\frac{1}{2}$ 的较小正四面体，然后挖去正中央的一个四面体. 将余下的 4 个较小正四面体重复上述操作，便得到 $n=2$ 级的构造. 继续同样过程，最终得到一个充满各种不同大小空隙的海绵状结构，结构的基本单元为边长为 $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 的正四面体. 这样获得的结构的分形维数为：

$$d_f=\frac{\ln 4}{\ln 2}=2.$$

这里看到一个分形维数为整数的例子，但显然 $d_f<d_e$. 图 3-3(ii) 是这种分形的构造过程.

综合前两个结果，可以写出塞尔宾斯基铺垫的分形维数为：

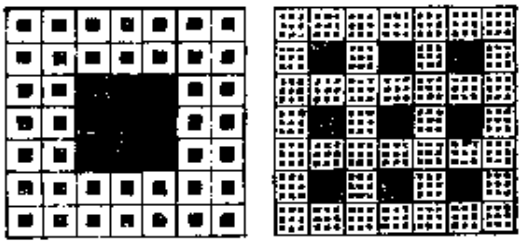
$$d_f=\frac{\ln(d+1)}{\ln 2}.$$

**4. 塞尔宾斯基地毯**(Sierpinski Carpet)

它也通过迭代过程产生. 首先取一单位边长的正方形，将其分为 $b^2$ 个相等的边长为 $\frac{1}{b}$ 的较小正方形，从中依一定的方式挖去 $l^2$ 个小正方形，这样便得到塞尔宾斯基地毯的 $n=1$ 级结构(生

成元). 剩下的$(b^2-l^2)$个小正方形中的每个，又仿照刚才的办法进行分割和取舍，直至最小正方形边长达到晶格常数数量级为止. 最后形成的集合叫塞尔宾斯基地毯.

前面谈到的挖去$l^2$个小正方形的方式可任意地规定，但一经规定，就应在整个各级构造过程中始终如一，不可随意更改. 图3-4(i)、(ii)分别是两种不同的挖去小正方块的方法，一种为集中挖去中心附近的小正方块，另一种则分散地挖去. 它们的分形维数可表为：



(i) (ii)

图 3-4

$$d_f=\frac{\ln(b^2-l^2)}{\ln b}.$$

## §4 描述分形几何的其他参数

本节介绍描述分形几何的其他参数[1],[4]. 这里只选取几个今后讨论问题所最必需的，而不是所有的参数. 此外，我们介绍这些参数将不拘泥于数学的严格性，而是采用物理学工作者最易接受的方式.

### 1. 拓扑维数 $D_T$

拓扑维数是用递推的方法来定义的：$D_T=D'_T+1$，这里 $D'_T$ 是"切割集"的拓扑维数. 一个集合的"切割集"是指将晶格分割为两个互相分离的部分的点集. 空集的 $D_T=-1$. 有限集和康托集的 $D_T=0$（因为不需要去掉任何东西(空集)就能使它们不相连). 所有前面提到的科赫曲线，二维欧氏空间的塞尔宾斯基铺垫和塞尔宾斯基地毯以及圆周等相连集，都可通过移掉有限个点而使它们分离成独立的两部分，因而按上面的递推关系，所有这些集合的拓扑维数均为 $D_T=D'_T+1=1$. 实际上，我们还可从另一方面来证

明它们的拓扑维数为1．由于 $D_T$ 为整数且 $D_T \leqslant d_f$（分形维数），而 $d_f$ 均小于2，意味着 $D_T$ 只能是1或0，但这些集合均为相连的，因而 $D_T$ 不能小于1，唯一的解便是 $D_T=1$．

$D_T=1$ 是标准曲线的特征．因而，上面提到的集合（晶格）从拓扑观点看是曲线．

**2．分岔度**（the order of ramification）

在一点 $p$ 的分岔度 $R$，定义为：[1],[4] 为了分离出连接点 $p$ 的任意有界点集所必须切断的重要的相互作用的数目，也即包含最少数目的点的切割集．

一种分形上的不同点的分岔度 $R$ 可能不同．可以证明，$R$ 的最大值与最小值遵守下列关系：

$$R_{\max} \geqslant 2R_{\min}-2.$$

对科赫曲线，其端点 $R=1$，分岔度最低，上式显然成立，这是平庸情况．即使不算端点，上式也成立．如 $R_{\max}=R_{\min}$，曲线称为均匀的．显然，必须使 $R=2$ 或 $R=\infty$，才能满足上述等式．具有 $R=2$ 的曲线叫无分支的．而当 $R_{\max}=2R_{\min}-2$ 时，曲线称为准均匀的．分支科赫曲线是准线性的，但不是均匀的，因为有些点而不是所有点 $R=2$，在曲线分岔处 $R>2$．

对塞尔宾斯基铺垫，晶格的分岔度 $R_{\max}=2d$，$R_{\min}=d+1$，它们分别是晶格格点和非晶格格点的分岔度．前者很易理解，后者则应考虑三角形的无穷系列（在 $d=2$ 情况下），第 $n$ 级结构所含的三角形都嵌置于第 $n-1$ 级的"前辈"三角形中，它通过三个切点外切于前一级的三角形，因而分岔度 $R_{\min}=d+1=3$．由于满足 $R_{\max}=2R_{\min}-2$，因而塞尔宾斯基是均匀的．

塞尔宾斯基地毯的分岔度 $R=\infty$，因为为了分离出某点附近的一个任意大的有界集必须切断的重要键（相互作用）的数目随该集大小呈幂律增长．按此，对正方形，三角形和六边形等具有平移对称性的晶格，它们的分岔度 $R$ 也等于无穷大．仅当考虑一个孤立格点时，它们的分岔度才分别为有限值4，6和3．对分岔度的

详细讨论，可参看文献[1].

**3. 连接性(Connectivity)和不均匀性(Lacunarity)**

对具有分岔度 $R=\infty$ 的分形，还引入两个参数：连接性 $Q$ 和不均匀性 $L$. 连接性 $Q$ 指的是为了分离出系统的一个有界部分，需要对其进行切割，所需"切割"的分形维数的最小值. 不均匀性 $L$ 描述一个分形对平移不变的偏离程度. 因此，例如图 3-4(i)、(ii) 虽然有相同的分形维数，但由于挖去的小正方块分布的情况不同，它们对平移对称晶格的偏离程度也不同，因而具有不同的不均匀性.

## §5 非均匀规则分形

§3 的例子都是均匀规则分形，意指构造过程中各级都只有一个约化参数 $l^{-1}=r>1$，因而构造出的分形为均匀的.

现假设有 $n$ 个约化参数 $r_i>1(i=1, 2, \cdots n)$，彼此不相等，仿照前面方法，用迭代造出的分形虽是规则的，但却是不均匀的. 图 5-1 显示一个具有两个约化参数 $r_1=\frac{1}{l_1}$、$r_2=\frac{1}{l_2}$ 的非均匀二标尺康托集的例子.

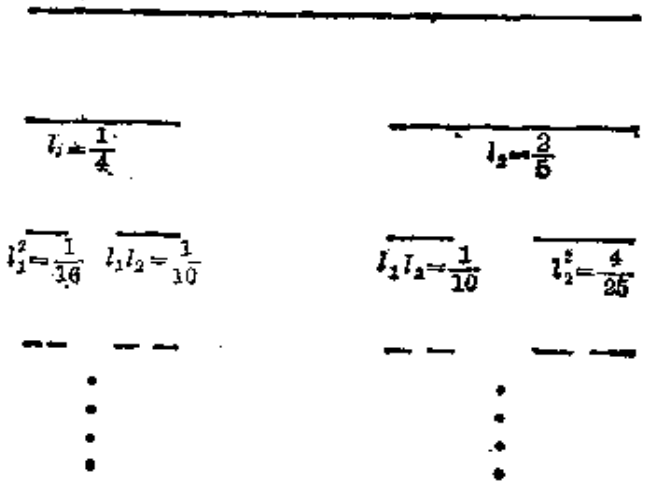



图 5-1

为确定非均匀规则分形[5]的分形维数 $d_f$，我们注意到它可分为 $n$ 部分，每部分在下一构造阶段用不同约化参数进行重标，因而进行重标后的每部分都是整个分形的一个翻版.

现用半径为 $\varepsilon$ 的球去覆盖第 $i$ 部分，设所需球数目为 $N_i(\varepsilon)$. 则覆盖整个分形所需的球数为：

$$N(\varepsilon)=\sum_{i=1}^{n}N_i(\varepsilon). \tag{5.1}$$

由于分形是自相似的，因而它的第 $i$ 部分在下一构造阶段若用半径为 $\varepsilon/r_i$ 的球去覆盖它，必定有

$$N_i\left(\frac{\varepsilon}{r_i}\right)=N(\varepsilon). \tag{5.2}$$

利用(2.8)，将其代入(5.2)和(5.1)，便得

$$\left(\frac{\varepsilon}{r_i}\right)^{-d_f}=\sum_{i=1}^{n}N_i(\varepsilon)=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^{-d_f}, \tag{5.3}$$

或写成：

$$\sum_{i=1}^{n}(r_i^{-1})^{d_f}=1. \tag{5.4}$$

由此便可确定 $d_f$. 例如，对图 5-1 的二标尺康托集，约化参数分别为 $r_1=l_1^{-1}=4$，$r_2=l_2^{-1}=\frac{5}{2}$，因而由(5.4)求得分形维数 $d_f\approx 0.61$.

下面是一个通过生长产生非均匀分形的例子：设初始生长位形如图 5-2(i)所示，短臂长 $b<1$，长臂长 1，下一步沿短臂的生长和长臂的生长如图 5-2(ii)所示，其中长臂与短臂分别被(i)图的生成元取代，但取代中保持原有的短臂与长臂之比为 $b$. 而图 5-2(iii)则为更下一步的生长位形. 同一生长阶段的短臂与长臂之比均保持为一不变常数 $b$，但注意生成元有一适当转动.

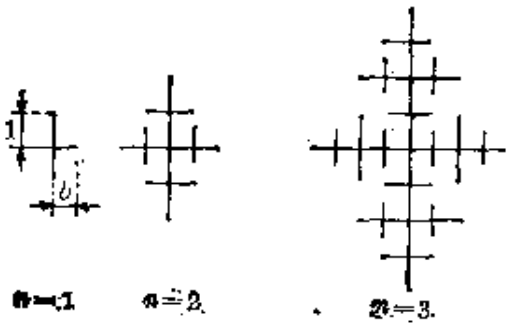


图 5-2

为了得到这种树型几何对象的分形维数，必须确定生成元四臂的约化参数. 由图可知，约化参数 $r_1=r_2=2$，(长臂)，$r_3=r_4=\frac{2}{b}$(短臂). 代入(5.4)可得：

$$2\left(\frac{1}{2}\right)^{d_f}+2\left(\frac{b}{2}\right)^{d_f}=1. \tag{5.5}$$

对任意确定的 $b$ 值，可用数值求解方程(5.5)求出 $d_f$ 值. 例如，当 $b=\frac{1}{2}$ 时，$d_f=1-\frac{\ln(\sqrt{3}-1)}{\ln 2}\approx 1.45$.

## §6 无规分形

自然界存在大量的对象，它们自身并不是严格数学意义上的分形，但它们具有分形的明显特征，如果对它的某些性质(例如，密度)作统计平均，便能找到一个量，它在双对数图上随长度标尺增大而线性地减少. 这样的对象称为**无规分形**.

为了检验一个对象是否是无规分形，主要的办法是检验它的标度不变性[6]. 一种有效办法是计算密度-密度关联函数(或对关联函数)：

$$c(\boldsymbol{r})=\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{r}'}\rho(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}'), \tag{6.1}$$

它代表相距为 $\boldsymbol{r}$ 的两个点的密度(这两个点均为对象内部的点)关联，它是数学期望值. 设集团内有 $N$ 个粒子(粒子数 $N$ 等于体积 $V$)，(6.1)给出了如果在 $\boldsymbol{r}'$ 处存在一个粒子，则在 $\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}'$ 处找到一个粒子的概率. 如果 $\boldsymbol{r}$ 属于集团，则应有 $\rho(\boldsymbol{r})=1$，否则便为 0. 通常的分形是各向同性的，关联不依赖于方向，因此意味着密度-密度关联函数只与 $r$ 有关，即 $c(\boldsymbol{r})=c(r)$.

现将(6.1)作为分形几何判据的出发点. 倘若由(6.1)决定的关联函数在一个任意因子 $b$ 的长度重标下是不变的(精确到一个常数)，这个对象便是非平庸标度不变的：

$$c(br) \propto b^{-\alpha}c(r), \tag{6.2}$$

此处 $\alpha$ 是大于 0 而小于欧氏维数 $d$ 的非整数. 显然, 只有当 $c(r)$ 函数对 $r$ 是幂律依赖关系时,

$$c(r) \propto r^{-\alpha} \tag{6.3}$$

才能满足(6.2)的泛函方程. (6.3)说明, 在无规分形内, 密度是代数衰减的, 因为密度-密度关联函数正比于围绕该点的密度分布.

现计算在一个对象中半径为 $L$ 的球内的粒子数 $N(L)$:

$$N(L) \propto \int_0^L c(r)d^dr \propto L^{d-\alpha}. \tag{6.4}$$

将其与分形维数的定义对照, 立即得出 $d_f=d-\alpha$. 这种确定 $d_f$ 的方法在无规分形内广泛地被采用. 例如, 在分形生长中, 为了检验生长集团是否为分形和确定分形维数, 便用此法.

下面将介绍几种常见的无规分形. 在现代统计物理文献中, 它们常常出现.

**1. 渗流集团[7]**

渗流是几何相变的著名模型, 在 60 年代、70 年代曾吸引了许多统计物理工作者的注意力. 由于它展示出简明的连续相变特性, 同时又与无序系统, 稀释系统的输运性质有关, 因此成为统计物理中相变与临界现象研究的一个重要分支.

渗流模型分为两类基本模型: 格点渗流和键渗流模型. 考虑一个无限大正方形晶格, 设每个格点(或键)的占据概率为 $p$, 概率越小, 被占格点(或键)只能零散地分布在整个晶格中, 很少有可能形成被占格点(或键)连成一集团. 这里的"格点集团"指的是在其内部, 每个被占格点的最近邻必有被占的格点, 而"键集团"指的在其内部每根被占键的两端, 至少有一端与其他被占键相连. 简言之, 集团(不管是格点集团还是键集团)是被占格点或键的相连集合. 随着概率 $p$ 增加, 晶格中可能出现有限大小集团, 这里集团的大小指集团中所含被占格点(或键)的多少. 计算机试验表明: 当

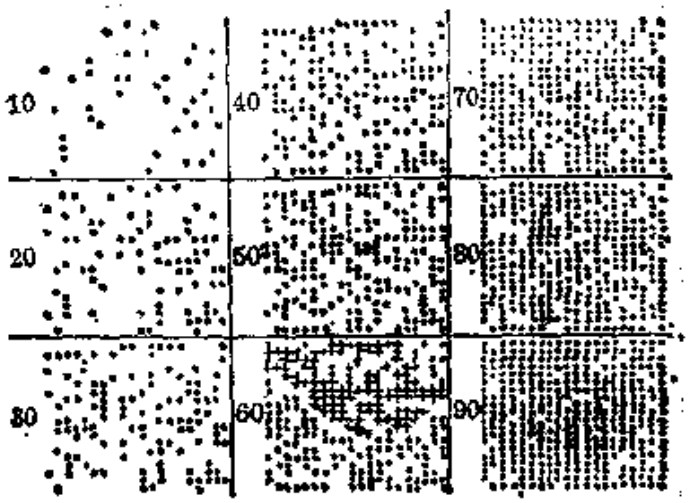



图 6-1

$p$ 增大到某个临界值 $p_c$ 时，便可能出现无限大集团，这个集团直延伸到晶格的上下(左右)端. 这样的无限大集团称为渗流集团. 图 3-1 给出典型的计算机模拟图，图中格点占据概率为 0.1, 0.2, …, 0.9. 图 6-2 给出渗流集团的份额 $P(p)$(或产生渗流集团的概率)与格点(或键)占据概率 $p$ 之间的关系曲线. 由这一曲线可看出，它非常类似顺磁相-铁磁相随温度变化的曲线，其中 $P(p)$ 与磁系统的自发磁化强度(序参量)相当，而 $p_c$ 相当于临界温度 $T_c$. 因此，从无渗流集团到有渗流集团的变化，相当于从顺磁相到铁磁相的转变，这是几何对象的连续相变. 按照相变理论，可将序参量的行为表示为

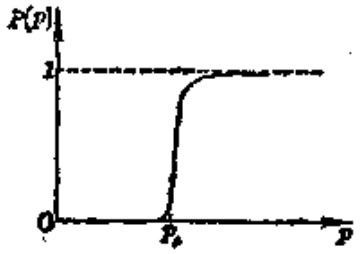



图 6-2

$$P(p) \propto |p-p_c|^{\beta} \propto \varepsilon^{\beta}, \qquad \left(\varepsilon \equiv \frac{p-p_c}{p_c}\right) \quad (6.5)$$

式中 $\beta$ 为表征在临界值 $p_c$ 附近序参量行为的临界指数.

通常，引入一个量——关联长度 $\xi$，来粗略地描述集团的平均尺寸. 如前分析，当 $p<p_c$ 时，只有有限大小集团，因而集团的平均尺寸较小，是有限值. 当 $p=p_c$ 时，出现无限大集团，集团平均尺寸达到无限大. 但当 $p>p_c$ 时，尽管仍存在渗流集团，但关联

长度 $\xi$ 却迅速地减小，这是由于在计算 $\xi$ 时已扣去渗流集团，只计及未连通的孤岛(关于这一点的论证，读者可参考渗流理论文献中有关关联函数的定义)。图 6-3 及图 6-4 给出关联长度 $\xi$ 与 $p$ 之间的关系曲线及集团大小示意图。关联长度 $\xi$ 在 $p_c$ 附近的行为可表为：

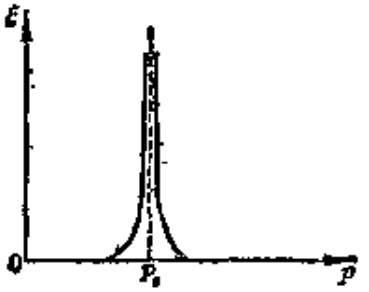


图 6-3

$$\xi \propto |p-p_c|^{-\nu} \propto s^{-\nu}, \tag{6.6}$$

$\nu$ 称为关联长度临界指数。



图 6-4

渗流集团的结构与输运性质有密切联系。因此，搞清它的结构特征是很重要的。关于集团的内部结构，存在着多种观点，目前最流行并被广泛接受的观点是"结点，链和小团模型"(nodes, links and blobs model)。我们来介绍这一模型。[6]

考虑当 $p$ 略大于 $p_c$ 时的渗流情况，系统中存在渗流集团，集团是非紧致的，集团的骨架(指例如，对键渗流除去只有键的一端与集团相连的那些键，这些键称为悬挂键，它们对输运过程没有贡献)是由结点(node)构成的超立方晶格，晶格常数为 $\xi$(关联长度)，结点由链线(link)连接，链上参杂着具有复连通性的小团，小团本身具有自相似的内部结构。这一模型如图 6-5 所示。由图看出，当距离大于关联长度 $\xi$ 时，集团呈均匀结

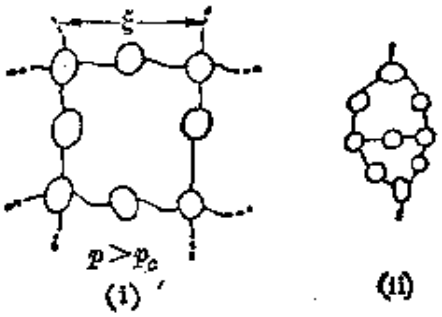


图 6-5

构；而当距离小于 $\xi$ 时，集团呈自相似结构(无规分形)．当 $p$ 正好等于 $p_c$ 时，关联长度 $\xi$ 趋于无限大，因此超立方晶格瓦解成一个分形．

以下给出关于这一模型的一个证明：定义被占格点密度 $\rho(L)$ 为

$$\rho(L)=M(L)/L^d, \tag{6.7}$$

$L$ 为集团的线度，$M(L)$ 为体积 $L^d$ 内被占格点总数．若线度为 $L$ 的集团为分形，则应有(见(2.11)式)

$$M(L)\propto L^{d_f}, \tag{6.8}$$

因此(6.7)应为：

$$\rho(L)\propto L^{d_f-d}. \tag{6.9}$$

两边取对数：

$$\ln\rho(L)=\text{常数}-(d-d_f)\ln L, \tag{6.10}$$

由计算机试验得到的曲线如图 6-6 所示．从图中可看出，当 $L<\xi$ 时，$\ln\rho(L)$ 与 $\ln L$ 的关系由具有负斜率的直线描绘，斜率的值相当于(6.10)式中的 $d_f-d$；而当 $L>\xi$ 时，$\ln\rho(L)$ 与 $\ln L$ 的关系为平行于横轴的水平线，相当于(6.10)式中 $d_f=d$．试验曲线最右端反映边界效应．计算机试验的曲线证实了(6.10)的正确性，因而说明了在小于 $\xi$ 尺度内，集团显示自相似结构，而在大于 $\xi$ 尺度内，集团形成均匀结构．

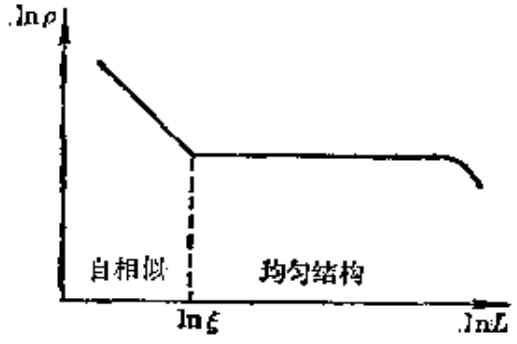


图 6-6

现计算在 $\xi$ 尺度以内的分形维数．设原点为渗流集团中的一个被占格点，与其相距为 $r$ 的格点也属于渗流集团的概率为 $c(r)$．当 $r$ 非常大于晶格常数 $a$ 时，$c(r)$ 可表为下列形式：

$$c(r)=P(p)f(r/\xi). \tag{6.11}$$

当 $r\gg\xi$ 时，$c(r)$ 代表渗流集团内两点的关联，因此 $c(r)=P(p)$；

而当 $r<\xi$ 时，$c(r)$ 应与 $\xi$ 无关. 而 $P(p)\propto\varepsilon^{\beta}\propto\xi^{-\beta/\nu}$（见(6.5)和(6.6)式）. 于是可猜测 $f\left(\frac{r}{\xi}\right)$ 可取作 $\left(\frac{r}{\xi}\right)^{-\beta/\nu}$ 形式. 因此有：

$$c(r)\propto\begin{cases}P(p), & \text{当 } r\geqslant\xi \text{ 时;}\\ r^{-\beta/\nu}, & \text{当 } r<\xi \text{ 时.}\end{cases}\tag{6.12}$$

利用

$$M(L)=\int_0^L c(r)d^dr=\begin{cases}L^{d-\beta/\nu}, & \text{当 } r<\xi \text{ 时;}\\ \left(\frac{L}{\xi}\right)^d\xi^{d-\beta/\nu}, & \text{当 } r>\xi \text{ 时,}\end{cases}\tag{6.13}$$

可见在 $r<\xi$ 范围内，渗流集团的等效维数（即分形维数）为：

$$d_f=d-\beta/\nu.\tag{6.14}$$

当 $d=2$ 时，渗流理论给出 $\beta=0.140$，$\nu=1.33$，故 $d_f\approx1.89$. 这是典型集团的分形维数.

**2. 无规行走(RW)[9]**

1827 年，植物学家布朗(R. Brown)发现悬浮在液体表面上的微小颗粒沿非常不规则的轨道运动. 这种不规则轨道的物理起因，是液体分子对小颗粒的无规作用. 此后，提出了表现这种随机性质运动的无规行走的数学模型.

粒子的无规行走，代表一种简单的随机过程. 当一个粒子受到随机力的作用而进行无规行走时，行走步长服从高斯分布. 这样的过程可用一个粒子在给定时间间隔 $t$ 内所走的平方平均距离 $r^2\equiv\langle r^2(t)\rangle$ 来描述，其结果是 $r^2\propto t$. 设想粒子是在一个晶格上行走，每步走一个晶格常数的距离，在 $t$ 时间内共走了 $N$ 步，则有

$$N\propto r^2,\tag{6.15}$$

若每步相当于一根练条的单位质量，那么上式显示质量与线度之间的下列关系：

$$N\propto[(r^2)^{\frac{1}{2}}]^{d_f}.\tag{6.16}$$

由此立即求得 $d_f=2$，它是无规行走轨迹的分形维数. 这里我们不寻常地获得一个维数为整数的分形维数，而且该分形维数与无规

行走所嵌置的欧氏空间维数 $d$ 无关.

现假设无规行走是在渗流集团上进行，由于渗流集团本身是无规分形，因此这是一个在无规分形上作无规行走的问题，称作"蚂蚁钻迷宫"问题. 这样产生的无规行走的轨迹也是分形，研究表明，其分形维数 $d_f^W$ 很强地依赖于 $d$.

**3. 自回避无规行走(SAW)[9]**

自回避无规行走是一种受到整体约束的无规行走，即整个行走路径不出现自相交，它称为排除体积效应. 对这种行走，行走者必须记住自己走过的路径，因而它实际上不可能是真正完全无规的，习惯上称它为"自回避行走".

自回避行走作为一种理论(或数学)模型，常用来模拟线性聚合物，因为在线性聚合物中不可能有两个单体占据同一空间位置.

自回避行走的轨迹也形成无规分形，它的分形维数也可用类似前面的方法求得：设 $r^2=\langle r^2(N)\rangle$ 是行走 $N$ 步的平方平均位移，代替(6.16)式可形式地写出：

$$r^2 \propto N^{2\nu_{SAW}}, \qquad (\text{当 } N\gg 1) \quad (6.17)$$

其中 $\nu_{SAW}$ 是自回避无规行走的关联长度临界指数. 或将其改写为：

$$N \propto [(r^2)^{\frac{1}{2}}]^{d_f}, \qquad (\text{当 } N\gg 1) \quad (6.18)$$

由此立即发现：

$$d_f=\frac{1}{\nu_{SAW}}. \qquad (6.19)$$

计算机模拟及重整化群计算即可求得 $d_f$. 例如，在二维欧氏空间 $\nu_{SAW}=3/4$，因而 $d_f=4/3=1.333$.

**4. 晶格动物(Lattice Animals)[9]**

它是从晶格原点出发生长的一种可能有分支和闭合圈的生长集团. 图 6-7 是有五根键分支的晶格动物，前一个含闭合圈，后一个不含闭合圈. 晶格动物模型常用来模拟分支聚合物. 类似地，也可求出它的分形维数 $d_f=\frac{1}{\nu_{LA}}$.

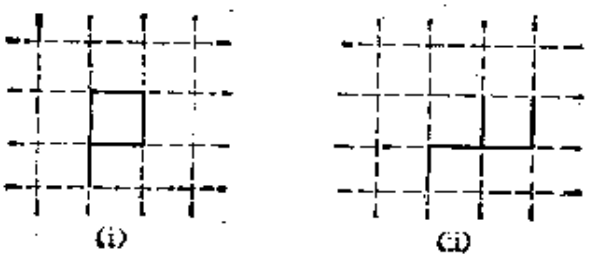



图 6-7

迄今已发现存在着许多分形生长模型，它们都产生无规分形，这些将在另一章中较详细讨论．此外，用数学迭代方法产生的分形(如朱莉亚集，分形吸引子等)，也将在有关章节谈到．

## §7 测定分形维数的方法

由数学严格迭代产生的分形，可直接由定义出发确定其分形维数[5]．然而对无规分形，正如前节看到的，需要通过其他方法求出有关的量(如：关联长度临界指数 $\nu$)，对某些物质系统则需通过实验手段来确定其分形特征和确定分形维数．本节介绍几种确定分形维数的方法．

**1．实验方法**

实验方法包括二维图象的数字处理；散射实验；直接测量与维数有关的物理量的性质等．这里只介绍用散射实验测分形维数的基本原理．

散射实验常用可见光、X 光、中子射线来进行，可以研究单一分形对象的结构因子；研究随时间生长的多个集团的散射；以及由分形表面发出的散射束等．

在散射理论中，结构因子 $s(q)$是密度-密度关联函数 $c(r)$的傅里叶变换，在三维各向同性系统中，这意味着

$$s(q)=4\pi\int_0^\infty c(r)r^2\frac{\sin(qr)}{qr}dr. \tag{7.1}$$

而 $c(r)\propto r^{d_f-d}$．对一半径为 $R$ 的有限样品，$c(r)$应随 $r>R$ 而很快

地趋于 0，因此对 $d=3$ 维，可用下列假设

$$c(r) \propto r^{d_f-3} f(r/R), \tag{7.2}$$

这里对 $x \ll 1$ 有标度函数 $f(x) \approx$ 常数，而当 $x \gg 1$ 则 $f(x) \ll 1$，假定函数 $f(x)$ 只依赖于 $\left(\frac{r}{R}\right)$，将 $c(r)$ 代入(7.1)，并令 $r=\frac{z}{q}$，便得：

$$s(q) \propto q^{-d_f} \int_0^\infty z^{d_f-2} f\left(\frac{z}{qR}\right) \sin z dz. \tag{7.3}$$

实验中，散射强度 $I(q)$ 近似地为：

$$I(q) \approx s(q) \propto q^{-d_f}, \quad \text{对} \frac{1}{R} \ll q \ll \frac{1}{r_0} \tag{7.4}$$

$r_0$ 为粒子半径．利用(7.4)式可估算实验对象的分形维数．

**2．计算机模拟**

存在着多种计算机模拟方法来研究无规分形，特别是无规生长分形．其中一种最简单的方法是利用公式 $N(L) \propto L^{d_f}$ 来测定分形维数，其中 $L$ 为回转半径(单位长度选取为晶格常数)．用直径为单位长的小球去覆盖回转半径 $L$ 内的结构，所需小球的数目为 $N(L)$．画出 $\ln N(L)$ 对 $\ln L$ 的曲线，找出其渐近斜率，该斜率便是分形维数 $d_f$．这种方法只适用于均匀分形．

**3．重整化群方法**[5],[9]

重整化群方法是一种由理论求得分形维数的方法．我们曾提到分形与临界现象存在紧密的联系，实际上在临界现象中一些重要的物理量都呈现幂律形式的依赖关系，表征这些量的标度的临界指数大都具有非整数值，正如分形具有非整数分形维数一样，这种类似是很深刻的，它们都隐藏在标度不变性后面．标度不变性是重整化理论的基础．下面介绍的实空间(位置空间)重整化群方法是将一个具有较多自由度的系统"粗粒化"为具有较少自由度的系统，这种方法在不具有哈密顿的几何相变系统中(如渗流，晶格动物，无规行走等)广泛地被应用．

现研究晶格上的一个无规分形，定义下列生成函数：

$$G(K)=\sum_{N=0}^{\infty}z_N K^N, \tag{7.5}$$

其中 $K$ 为集团中每个元素(如被占键或格点)的易逸度，$z_N$ 为具有 $N$ 个元素的总位形数目. 集团的回转半径 $R_g$ 标度为：$R_g(N)\propto N^{\nu}$(其中 $\nu=d_f^{-1}$)，这可由前节的几个例子看出. $R_g(N)$的平均值(对各种 $N$ 值的统计平均)为：

$$R_g^2=\sum_{N=0}^{\infty}K^N R_g^2(N)z_N/\sum_{N=0}^{\infty}K^N z_N\propto(K_c-K)^{-2\nu}. \tag{7.6}$$

为看清最后一个表示式，我们设 $z_N$ 具有下列渐近行为：

$$z_N\propto\mu^N N^{\gamma-1},\qquad (\text{当 } N\gg 1) \tag{7.7}$$

其中 $\mu$ 为常量，它的意义稍后将清楚，$\gamma$ 则为一个临界指数. 将(7.7)代入(7.5)，可写出：

$$G(K)=\sum_{N=0}^{\infty}z_N K^N=\sum_{N=0}^{N_0}z_N K^N+\sum_{N=N_0}^{\infty}(K\mu)^N N^{\gamma-1}$$

$$\propto\int K^N\mu^N N^{\gamma-1}dN. \tag{7.8}$$

显然，为保证 $G(K)$收敛，$K$ 的临界值 $K_c$ 应满足

$$K_c\mu=1. \tag{7.9}$$

因此，现将(7.8)写为(并令 $X\equiv N\ln(K\mu)$)

$$G(K)\propto\int(K\mu)^N N^{\gamma-1}dN=\int e^{N\ln(K\mu)}N^{\gamma-1}dN$$

$$=\int e^X\left(\frac{X}{\ln(K\mu)}\right)^{\gamma-1}\frac{dX}{\ln(K\mu)}$$

$$=\int e^X X^{\gamma-1}(\ln(K\mu))^{-\gamma}\,dX$$

$$\propto(\ln K\mu)^{-\gamma}=\{\ln[1+(K-K_c)\mu]\}^{-\gamma}$$

$$\propto(K-K_c)^{-\gamma}. \qquad (\text{对 } K>K_c) \tag{7.10}$$

同时，(7.6)可写为：

$$R_g^2\propto\int(K\mu)^2 N^{\gamma-1+2\nu}dN/(K-K_c)^{-\gamma}$$

$$=(K-K_c)^{\gamma}\int e^X\left(\frac{X}{\ln K\mu}\right)^{\gamma-1+2\nu}\frac{dx}{\ln K\mu}$$

$$\propto (K-K_c)^{-2\nu}, \tag{7.11}$$

这里 $\nu$ 为关联长度临界指数. 可见一个量 $R_0(N)$ 标度为 $N^\nu$，则它的统计平均值(对不同 $N$ 值进行，因而相当于对巨正则系综进行平均)可标度为 $(K-K_c)^{-\nu}$. 这样，若通过位置空间重整化群方法求出了 $\nu$，便立即得到了分形维数 $d_f$.

有关重整化群理论的实质，将在第 2 章介绍，这里只从技术的角度介绍如何用位置空间重整化群方法来处理问题.

设将所研究的系统放在一个晶格上，通过用单个格点取代晶格上一个元胞的办法，来减少系统的自由度，实现标度变换. 图 7-1 给出一种可能的改变标度的方案，图中长度的重标因子为 $b=2$. 设变换前格点(或键)的易逸度为 $K$，变换后的易逸度为 $K'$，$K'$ 与 $K$ 之间的关系由某些约定的规则联系起来(见后面的例子)，一般地可写出：

$$K'=R(K), \tag{7.12}$$

$R(K)$ 为非线性关系. 重整化理论要求临界点为上述变换的不稳定不动点. 设该不稳定不动点为 $K_c$，则有 $K_c=R(K_c)$. 实际上，它是决定不动点的方程.

继而，在不动点附近对(7.12)进行线性展开，便可得

$$K'-K_c\approx\lambda(K-K_c)\equiv\left.\frac{\partial R(K)}{\partial K}\right|_{K_c}(K-K_c). \tag{7.13}$$

按照(7.11)，重整化变换前后的回转半径 $R_0$(在此即为关联长度)分别为 $(K-K_c)^{-\nu}$ 和 $(K'-K_c)^{-\nu}$. 但由重标因子 $b$ 产生的变换

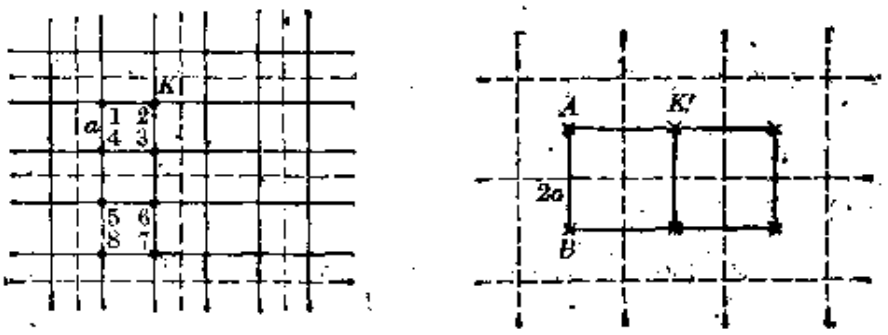



图 7-1

使关联长度改变 $b^{-1}$倍，因此应有：

$$b(K'-K_c)^{-\nu}=(K-K_c)^{-\nu}. \tag{7.14}$$

综合(7.13)和(7.14)，可得：

$$d_f=\frac{1}{\nu}=\frac{\ln\lambda}{\ln b}. \tag{7.15}$$

由此便求出了分形维数.

今用一个例子来解释这一方法的具体应用. 我们来考察真实自回避行走(TSAW). 这是一个简单的动力生长模型，它与通常的自回避无规行走问题和无规行走问题都不同，它随时随地都尽可能地回避自己已走过的格点，除非如果不跳过已走过的格点便别无其他路可走. 图 7-2 表示这样的真实自回避行走，注意图中所走各步的权重不尽相同，它是根据到达各格点后下一步所可能行走的路径来决定(这就显示了与无规行走和自回避无规行走的完全不同). (i)、(ii)两图虽然都代表五步行走，但各步权重分布也不同，图中当行走者到达 $A$ 点后，它下一步只能向上或向左行进，因此下一步权重为 1/2，其他也由类似分析得到. 总之，这种真实自回避行走受到它自身"历史"的约束. 同时还可注意到，如果沿图中逆路径行走，其权重也与原来不同.

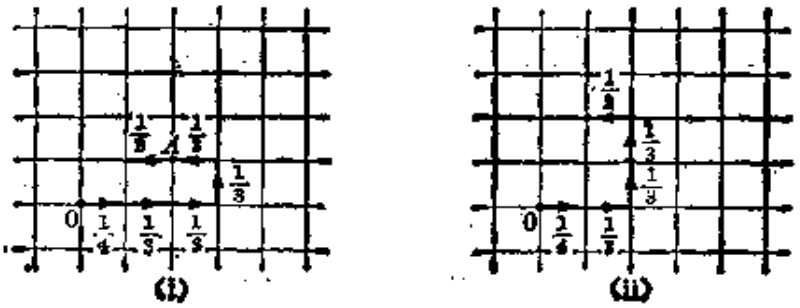



图 7-2

现在用 $b\times b=2\times 2$ 元胞来进行标度变换，并求出变换前每步行走的易逸度(键被占据易逸度)$K$ 与变换后 $K'$ 的关系. 为此我们作如下约定：(i)规定行走从元胞的左下角出发；(ii)行走路径限制在元胞内，直至它从上方走出元胞. 按此约定，图 7-3 的四种行

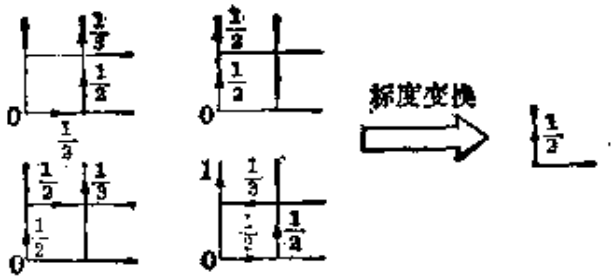



图 7-3

走路径(它们在 $2\times2$ 元胞内)经过重整化变换后对应于行走者从左下角向上行走一步. 对照图 7-3 可写出参数的重整化变换方程:

$$\frac{1}{2}K'=\left(\frac{1}{2}K\right)^2+\left(\frac{1}{2}K\right)^2\left(\frac{1}{3}K\right)+\left(\frac{1}{2}K\right)^2\left(\frac{1}{3}K\right)+\left(\frac{1}{2}K\right)^2\left(\frac{1}{3}K\right)K$$

$$=\frac{1}{4}K^2+\frac{1}{6}K^3+\frac{1}{12}K^4. \tag{7.16}$$

由此求出不动点为 0、1 和 $\infty$, 但临界点为不稳定不动点 $K_c=1$. 利用(7.14)求出 $\lambda=\frac{8}{3}$, 因而最终由(7.15)求得分形维数 $d_f=\frac{\ln 8-\ln 3}{\ln 2}\approx1.415$. 值得注意的是, 元胞的选取虽然带有任意性, 但往往不同选取方法可能产生稍微不同的结果. 例如, 倘若选取 $b\times b=3\times3$ 元胞, 将导致 $d_f\approx1.419$. 假如这一行走是在三维空间进行, 若用 $b\times b\times b=2\times2\times2$ 立方元胞, 将可得出非常复杂的重整化群递推关系:

$$\frac{1}{3}K'=\frac{1}{9}K^2+\frac{1}{9}K^3+\frac{11}{180}K^4+\frac{29}{1080}K^5+\frac{127}{8640}K^6$$

$$+\frac{79}{12960}K^7+\frac{61}{25920}K^8, \tag{7.17}$$

由它求得 $d_f=1.70$, 式(7.17)是利用计算机得到的.

实空间重整化群方法虽然简明, 但由于受各种因素制约, 精确度较差.

## §8 自仿射分形

本章最后，我们简单地提一下自仿射分形.[2],[5]一个对象的自相似性等效于在各向同性的长度重标下的几何性质的不变性，然而在许多物理情况下，对象结构的不变性仅仅在各向异性(即与方向有关)的长度重标下才成立. 这种各向异性的分形称为**自仿射分形**，而自相似不变性的分形只是它的特殊情况.

单值处处不可微的函数代表自仿射分形出现的一种简单和典型形式. 对这样一个函数 $F(x)$，它具有如下性质：

$$F(x)\approx b^{-H}F(bx), \tag{8.1}$$

其中近似号表示在随机意义上成立. 倘若对确定性的自仿射函数，上面近似号用等号代替. 式中 $H>0$ 是某个指数. (8.1)表示下列事实：函数在下列变换下是不变的，即沿 $x$ 轴缩小一个因子 $b^{-1}$，接着用一个等于 $b^{-H}$ 的不同因子重标函数值. 换言之，用适当的与方向有关的因子来缩小函数，它将重标为其自身. 当然，并不是所有自仿射分形都是单值函数.

图 8-1 给出一个在单位间隔内定义的自仿射函数的确定性模型，函数的单值特征在各级均保持，它是通过一个适当变形的 $z$ 字形生成元素保持的. 图中 $K=1$ 级是由四个相等长度的线段构成的生成元，在 $K=2$ 级用一个变形的生成元取代前一级的各线段，其余各级类推. 当 $K\to\infty$ 时便得到自仿射分形.

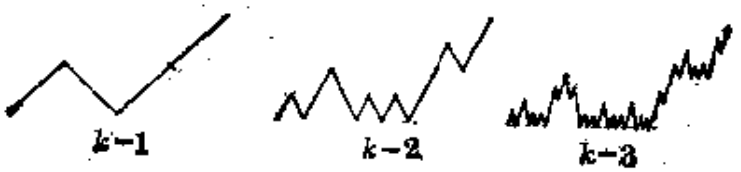



图 8-1

# 第 2 章

# 分形上自旋系统的相变(Ⅰ)

本章及下一章研究分形上自旋模型系统的相变. 本章涉及有限分岔分形晶格, 下一章涉及无限分岔分形晶格. 这两类晶格上的相变有显著不同的特点.

为使对连续相变不甚熟悉的读者能理解本章及下章内容, 我们首先概要介绍连续相变的一般知识, 然后介绍在几种典型分形晶格上伊辛模型及馅茨(R. B. Potts)模型的相变. 所用的理论方法包括转移矩阵方法、重整化群方法及图形展开方法. 在谈到渗流的相变理论时, 也概括介绍几何相变的重整化处理方法.

## §9 连续相变的基本知识

二级以上的相变称为连续相变[10]. 连续相变必定在某个临界温度发生. 发生连续相变时, 系统内部出现各种尺度的涨落, 涨落的范围用关联长度来描述. 这里"关联"是指, 例如, 对伊辛自旋系统, 若处于原点的一个自旋具有向上(下)取向, 则离开它某个距离的自旋亦取向上(下)取向, 两个关联自旋的距离称为关联长度. 发生相变时, 涨落区域的线性长度可从小至晶格常数, 大至无穷大. 但对物理现象起作用的只是无穷大关联, 它对所有临界现象产生本质的影响.

从现象看, 发生相变时可能出现热力学函数的奇异行为. 例如发生比热突变, 磁化率发散等. 为了描述在临界点附近热力学及关联函数的行为, 通常引入若干临界指数, 用它们以幂律形式来刻划这些量的临界行为. 它们分别是:

$$
\begin{aligned}
&M_s \propto |T-T_c|^{\beta},\\
&c \propto |T-T_c|^{-\alpha}, \qquad (F \propto |T-T_c|^{2-\alpha}),\\
&\chi \propto |T-T_c|^{-\gamma},\\
&H \propto M^{1/\delta},\\
&\xi \propto |T-T_c|^{-\nu},\\
&G(\gamma) \propto \frac{1}{\gamma^{d+2-\eta}}, \quad (\text{当 } T=T_c).
\end{aligned}
\tag{9.1}
$$

其中 $M_s$、$c$、$F$、$\chi$、$H$ 分别是自发磁化强度、比热、自由能、零场磁化率和磁场. 临界指数 $\beta$、$\alpha$、$\gamma$ 和 $\delta$ 分别描述这些热力学量的临界行为. 而 $\xi$ 及 $G(\gamma)$是关联长度和关联函数, $\nu$ 和 $\eta$ 分别描述关联长度及在临界点 $T_c$ 的关联函数的行为. 可以证明, 所有临界指数中只有两个是独立的, 它们之间存在下列关系:

$$
\begin{aligned}
&\alpha+2\beta+\gamma=2, \qquad \alpha+\beta(\delta+1)=2,\\
&\gamma=\nu(2-\eta), \qquad \alpha=2-d\nu,
\end{aligned}
\tag{9.2}
$$

其中 $d$ 为空间维数, 这些关系称为标度律. 因此, 只要用某种方法求得了任意两个临界指数, 便可将其余四个全部求出.

临界现象中存在着普适性. 它指的是自然界中各种完全不同的物质系统, 当它们发生连续相变时, 其临界行为可能划分为若干普适类, 属于同一类的系统具有完全相同的临界指数. 普适类划分的依据, 是由系统的空间维数 $d$ 及系统的内部自由度数目 $n$(或序参量的分量个数)来决定. 对短程作用系统, 临界特性与作用力性质无关. 例如, 液体和单轴 Ising 铁磁体 $d=3$、$n=1$ 属一个普适类; 超流、超导、$x$-$y$ 模型 $d=3$、$n=2$ 属一个普适类; 各向同性海森堡铁磁体 $d=3$、$n=3$ 属于一个普适类. 普适性最初是作为假定提出, 后来在重整化群理论中得到了极自然的解释, 而在一些实验中也得到了证实.

从统计物理角度看, 考察一个系统是否可能发生连续相变, 只要看它的配分函数是否在某个温度产生奇异性. 因此理论上要解决相变问题的首要任务是求出配分函数, 然后研究该函数的解析

行为. 不过，迄今统计物理学家只对极少数系统能精确地求出它们的配分函数，这也正是相变理论的困难所在. 为了克服上述困难，已经发展了许多计算配分函数的近似方法，得出了许多有意义的结果.

相变理论的一个具有重大意义的突破性进展，是由威尔逊(K. G. Wilson)发展的重整化群理论. 这个理论从概念上看它回避直接求配分函数，而代之以研究使配分函数保持不变的变换，这些变换构成所谓重整化群. 然后找出重整化群变换的不动点，在所有不动点中那些不稳定不动点(或鞍点)是发生相变的临界点，理论概念上的突破，使相变理论大大向前推进了一步. 不仅如此，重整化群理论还提供了如何从微观入手计算临界指数的方法.

重整化群变换是空间长度的标度变换，实质是放大尺度的变换，即通过"粗粒化"过程以减少系统的自由度. 进行这类变换的物理背景是，系统发生相变时，对临界行为起决定作用的不是小尺度行为，而是大尺度行为(关联长度无穷大). 因而，系统的一些微观细节(小尺度行为)变得不重要. 这也正是普适性概念成立的物理依据.

应该提到，在具体进行重整化群变换时，不仅要对空间长度标尺进行变换，而且要对动力学变数(例如，自旋)进行相应的变换. 当涉及时间行为时，还可能要对时间作标度变换，这点将在临界动力学一章中加以说明.

## §10 科赫曲线上伊辛模型的相变

分形上伊辛模型的相变，首先由格芬(Y. Gefen)等人[11]~[13]于80年代初期解决. 他们在1983年前后发表了三篇系列文章，开创性地进行了这方面的工作. 这里我们将不按照时间顺序而从理论方法的角度，首先介绍转移矩阵求解法[14]. 这一方法曾用于精确求解一维伊辛问题，也曾被昂萨格(L. Onsager)用于精确求解

不含外场的二维伊辛问题.

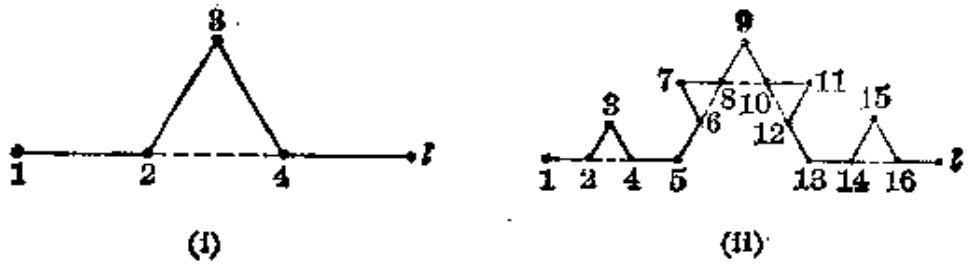



图 10-1

考虑一条科赫曲线. 曲线每个格点上放置一个伊辛自旋(自旋取值 ±1),不仅计及曲线上每对最近邻自旋间的相互作用 $J$(例如, 图 10-1 中 $\sigma_2$ 与 $\sigma_3$ 间), 且计及平面上最近邻自旋间的相互作用 $J'$(例如, 图 10-1 中 $\sigma_2$ 与 $\sigma_4$ 间). 模型的约化哈密顿量是:

$$-\beta\mathscr{H}_N=J\sum_{i=1}^{4^N}\sigma_i\sigma_{i+1}+J'\sum_{i=1}^{N}\sum_{i=1}^{4^{N-1}}\sigma_{4^N-4(4i-2)}\sigma_{4^N-4(4i-2)+2}$$
$$+H\sum_{i=1}^{4^N}\sigma_i, \tag{10.1}$$

这里 $\beta=\frac{1}{kT}$, $k$ 为玻尔兹曼常数, $T$ 为温度, $\sigma_i=\pm1$. $N$ 表示科赫曲线构造的第 $N$ 阶段, 用 $\hat{N}=4^N$ 表示第 $N$ 阶段的自旋总数; $H$ 为外加磁场. 同时假定在构造的每一阶段都使用周期边界条件: $\sigma_1=\sigma_{\hat{N}+1}$. 注意到如果在本问题中不考虑平面上最近邻自旋间的相互作用, 本质上便与一维平移不变系统相同, 必然导致已知的一维平庸解.

现定义矩阵元

$$\langle\sigma|p|\sigma'\rangle=\exp(J'\sigma\sigma') \tag{10.2}$$

和

$$\langle\sigma|R|\sigma'\rangle=\exp\left[J\sigma\sigma'+\frac{1}{2}H(\sigma+\sigma')\right]. \tag{10.3}$$

在 $N=1$ 阶段的配分函数为:

$$Z(\mathrm{T}.\ \mathrm{H}.\ \hat{N}=4)=\sum_{\{\sigma\}}e^{-\beta\mathscr{H}_4}$$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{\{\sigma_i\}}\langle\sigma_1|R|\sigma_2\rangle\langle\sigma_2|R|\sigma_3\rangle\langle\sigma_3|R|\sigma_4\rangle\\
&\quad\cdot\langle\sigma_4|R|\sigma_1\rangle\langle\sigma_2|p|\sigma_4\rangle\\
&=\sum_{\sigma_2,\sigma_4}\langle\sigma_2|\vec{R^2}|\sigma_4\rangle\langle\sigma_2|p|\sigma_4\rangle\langle\sigma_4|R^2|\sigma_2\rangle.
\end{aligned}
\tag{10.4}
$$

在(10.4)式中我们已经利用周期边界条件 $\sigma_1=\sigma_{4+1}$ 及定义：

$$
\langle\sigma|R^2|\sigma^1\rangle\equiv\sum_{\sigma''}\langle\sigma|R|\sigma''\rangle\langle\sigma''|R|\sigma'\rangle. \tag{10.5}
$$

现再定义：

$$
\begin{aligned}
&\langle\sigma|Q^2|\sigma'\rangle\equiv\langle\sigma|R^2|\sigma'\rangle\langle\sigma|p|\sigma\rangle,\\
&R_1\equiv Q^2R^2,
\end{aligned}
\tag{10.6}
$$

则(10.4)式可写为：

$$
\begin{aligned}
Z(\mathrm{T.\ H.}\ \hat{N}=4)&=\sum_{\sigma_2,\sigma_4}\langle\sigma_2|Q^2|\sigma_4\rangle\langle\sigma_4|R^2|\sigma_2\rangle\\
&=\sum_{\sigma_2}\langle\sigma_2|R_1|\sigma_2\rangle=\mathrm{tr}R_1.
\end{aligned}
\tag{10.7}
$$

(10.6)中的 $Q^2$ 与下列图形的贡献相当：

$$\triangle\sim Q^2.$$

以后在各阶段图形中凡是上述类型的图，均可用 $Q^2$ 表示.

在 $N=2$ 阶段，配分函数可写为：

$$
\begin{aligned}
Z(\mathrm{T.\ H.}\ \hat{N}=16)&=\mathrm{tr}\,RQ^2RRQ^2Q^2Q^2RRQ^2R\\
&=\mathrm{tr}\,Q^2R^2Q^2Q^2Q^2R^2Q^2R^2\\
&\equiv\mathrm{tr}\,R_2,
\end{aligned}
\tag{10.8}
$$

其中第一个等号是根据图 10-1(ii)写出的. 一般，对任意 $N$，配分函数可类似地用 $R$ 和 $Q^2$ 依次写出，最终表达为 $Z(\mathrm{T.\ H.}\ \hat{N}=4^N)=\mathrm{tr}\,R_N$，而 $R_N$ 是由 $R^2$、$Q^2$ 依一定顺序排列来定义. 显然 $R_N$ 的形式反映出科赫曲线缺乏平移对称性.

为了最终求出第 $N$ 级配分函数，必须找出 $\mathrm{tr}\,R_N$. 我们区分含外场和不含外场的两种情况加以研究. 在不含外场情况下，$Q^2$ 与 $R^2$ 可对易，这可由下列矩阵表示式直接验证：

$$\langle\sigma|Q^2|\sigma'\rangle=\begin{pmatrix} Q^2_{11} & Q^2_{1-1} \\ Q^2_{-11} & Q^2_{-1-1}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} (e^{2J}+e^{-2J})e^{J'}+2e^{-J'} & (e^{2J}+e^{-2J})e^{-J'}+2e^{J'} \\ 2e^{J'}+(e^{2J}+e^{-2J})e^{-J'} & 2e^{-J'}+(e^{2J}+e^{-2J})e^{J'}\end{pmatrix},$$
$$\langle\sigma|R^2|\sigma'\rangle=\begin{pmatrix} R^2_{11} & R^2_{1-1} \\ R^2_{-11} & R^2_{-1-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{2J}+e^{-2J} & 2 \\ 2 & e^{2J}+e^{-2J}\end{pmatrix}. \tag{10.9}$$

因此它们可同时对角化，于是

$$\mathrm{tr}\,R_N=\eta_1^{a_+}\lambda_1^{a_-}+\eta_2^{a_+}\lambda_2^{a_-}, \tag{10.10}$$

这里 $\eta_1$、$\eta_2$ 和 $\lambda_1$、$\lambda_2$ 分别是 $Q^2$ 和 $R^2$ 的本征值，下标 1 和 2 分别代表较大和较小本征值．指数 $a_+$ 和 $a_-$ 分别代表 $Q^2$ 和 $R^2$ 在 $R_N$ 中出现的次数．例如对 $N=2$，$Q^2$ 和 $R^2$ 各出现在 $R_2$ 中 5 次和 3 次，因而 $a_+=5$，$a_-=3$．一般地，$a_\pm$ 可用递推方法通过计算图形中所含单元"∟"和"△"的个数求得，它可表示为：

$$a_\pm=4^{N-1}\left(1\pm\sum_{i=1}^{N-1}\left(\frac{1}{4}\right)^i\right). \tag{10.11}$$

在热力学极限下，可算出每个自旋的自由能：

$$f(\mathrm{T.\,H.}=0)=\lim_{\hat{N}\to\infty}-\hat{N}^{-1}kT\ln Z(\mathrm{T.\,H.}\,\hat{N})$$
$$=-6^{-1}kT\ln(\eta_1^2\lambda_1), \tag{10.12}$$

其中

$$\eta_1=2e^{J'}(\mathrm{ch}\,2J+e^{-2J'}),\qquad \lambda_1=4\mathrm{ch}\,J.$$

注意，其中 $J$ 和 $J'$ 已包含温度，因为在模型哈密顿中已含因子 $\beta=\frac{1}{kT}$．当 $J$、$J'>0$ 时，基态是铁磁的，而当 $J$、$J'$ 反号时，基态可能变为反铁磁和高度简并的．对 $J>0$ 和 $-J'>J$，平均每个自旋可贡献剩余熵(绝对零度时由高度简并态产生的熵)

$$S=\frac{1}{3}k\ln 2.$$

自由能的表示式告诉我们，在 $J$、$J'>0$ 情况下，只有当 $T=$

0 K 时才出现非解析行为. 因而对铁磁作用情况，在科赫曲线上仅存在平庸的零温相变.

现考察含外磁场情况. 这时，矩阵 $Q^2$ 与 $R^2$ 互不对易，它们不可能同时对角化，这时难以找出一个精确的自由能表示式. 这说明用转移矩阵法来解含磁场情况是不可解的，只能近似处理. 近似处理的方法往往是把磁场作为一个小参数进行级数展开，观察系统在零温附近的行为. 其结果是：在任何温度下自发磁化强度恒为零，而零场磁化率可以表示成一个依赖温度的小参数的幂级数. 由于推导过程非常繁杂，这里从略，有兴趣的读者可以参阅原始文献.

## §11 重整化群方法

为以后的需要，本节对哈密顿系统的重整化群方法作一简要介绍，通过这些介绍也可对重整化群理论的精神实质有所了解.[15]

设系统的约化哈密顿量用 $H[\sigma]$ 表示，其中 $\sigma$ 为动力学变量. 例如，它可代表格点自旋变量. 系统处于热力学平衡时的配分函数为：

$$Z[H]=\sum_{\{\sigma\}} e^{H[\sigma]}. \tag{11.1}$$

对系统进行标度变换，变换后系统的哈密顿量 $H'[\mu]$ 保持原有的对称性，动力学变量为 $\mu$，变换按下列要求进行，使：

$$e^{H'[\mu]}=\sum_{\{\sigma\}} p(\mu,\ \sigma)e^{H[\sigma]}. \tag{11.2}$$

这里 $p(\mu,\ \sigma)$ 代表变换算符，它满足如下条件：

$$\sum_{\{\mu\}} p(\mu,\ \sigma)=1, \tag{11.3}$$

在此条件下，变换前后的配分函数保持不变. 事实上，配分函数 $Z[H']$ 为：

$$Z[H']=\sum_{\{\mu\}} e^{H'[\mu]}=\sum_{\{\mu\}}\sum_{\{\sigma\}} p(\mu,\ \sigma)e^{H[\sigma]}$$

$$=\sum_{(\sigma)} e^{H(\sigma)}=Z[H]. \tag{11.4}$$

$p(\mu, \sigma)$形成变换群，在它的作用下系统的对称性及配分函数均保持不变．在实际问题中，要根据系统的特点(例如，空间维数，晶格结构，相互作用的性质等)来具体选择不同的变换，常见的是部分格点消约(decimation)变换，格点-元块(site-block)变换，梅格达尔-卡丹诺夫键移(Migdal-Kadanoff bond moving)变换等．这些变换的总原则，是使尺度越变越大(即"粗粒化"过程)，把微观的小尺度信息逐步地平均掉．正由于这个过程是粗粒化过程，而不允许"细粒化"，因此这样的变换不存在逆元．数学上，把不存在逆元的群称为半群．

在进行上述变换时，具体的计算过程往往又会导致将原来哈密顿量中的相互作用参数 $K$ 变为新的相互作用参数 $K'$，形成如下一般形式的变换关系：

$$K'=R(K). \tag{11.5}$$

当存在多个参数时，形成相互耦合的变换关系：

$$\begin{aligned} K_1'&=R_1(K_1, K_2, \cdots, K_n),\\ K_2'&=R_2(K_1, K_2, \cdots, K_n),\\ &\vdots \quad \vdots\\ K_n'&=R_n(K_1, K_2, \cdots, K_n). \end{aligned} \tag{11.6}$$

这些变换都是非线性的．重整化群理论的一个关键点是寻找这类变换的不动点 $K^*$，即

$$K_i^*=R_i(K_1^*, K_2^*, \cdots, K_n^*), \quad (i=1, 2, \cdots n) \tag{11.7}$$

系统发生相变的临界点便是重整化群变换的不稳定不动点．

图 11-1 是只有一个相互作用参数情况下(11.7)给出的三个不动点 $O$、$P$、$Q$，这里 $O$、$Q$ 均为稳定不动点，因为在这些点附近，$K$ 的任何偏离都会在 $R(K)$变换下趋于 $O$ 或 $Q$

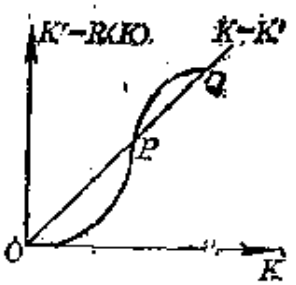


图 11-1

(如图所示)；而 $P$ 则为不稳定不动点，因为在 $P$ 附近，$K$ 的任何偏离都将导致在变换下愈来愈远离 $P$ 点，$P$ 点对应的 $K$ 值便是临界点．在多个相互作用参数的情况下，不动点的性质较复杂，可能出现完全不稳定、完全稳定以及在某些方向稳定而在另一些方向不稳定的不动点(即鞍点)，这些将在以后的例子中看到．

流图是一种形象地表现不动点是否稳定的描述方法．与图 11-1 相对应，可将相互作用常数 $K$ 画成一条直线，在上面标出诸不动点，并用箭头表示上述偏离或趋向倾向，因而有图 11-2 所示．如有多个作用参数，那时可画出多维参数空间，也可用箭头形象地表征在重整化群变换下的偏离或趋向倾向．这将在今后的有关章节中看到．

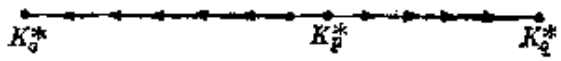



图 11-2

为求出临界指数，可将重整化群变换的递推关系在不动点附近进行展开，保留线性项，因此，对单参数情况有：

$$K'=R(K)\approx K^*+\left.\frac{\partial R(K)}{\partial K}\right|_{K^*}(K-K^*)$$
$$=K^*+\lambda(K-K^*), \tag{11.8}$$

对多参数情况，有：

$$K_i'-K_i^*=\sum_j R_{ij}(K_j-K_j^*), \tag{11.9}$$

其中

$$R_{ij}=\left.\frac{\partial R_i}{\partial K_j}\right|_{K^*}, \qquad K^*=\{K_1^*, K_2^*, \cdots, K_n^*\}. \tag{11.10}$$

按重整化群理论和标度理论，由 $R_{ij}$ 的本征值是否大于 1 便可判断不动点是否稳定，同时算出有关的临界指数．例如，在单参数空间情况下，可算出关联长度临界指数 $\nu$ 为：

$$\nu^{-1}=\frac{\ln\lambda}{\ln b}, \tag{11.11}$$

其中 $b$ 为重整化群变换的重标因子．

本节的最后，我们来介绍重整化群方法中的部分格点消约变换法．这种变换法是一种精确的方法，不像其他方法都含有近似．

但它适用的晶格对象受到限制.

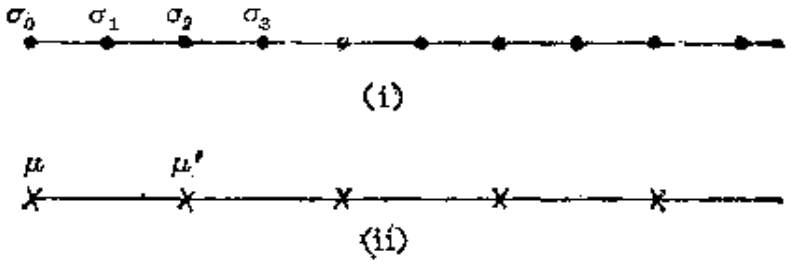



图 11-3

让我们考察一个一维晶格系统上的伊辛模型，晶格常数为 $a$，自旋 $\sigma=\pm1$ 放置于格点 $x_n=na$ 上，$n=0, 1, 2, \cdots$(图 11-3)，自旋间仅有最近邻作用，约化哈密顿为

$$-\beta\mathscr{H}=K\sum_n \sigma_{na}\sigma_{(n+1)a}. \tag{11.12}$$

现在每隔一个格点消约去一个自旋，新的自旋链用未消约的自旋(用 $\mu$ 标记)组成，它们的间距为 $2a$，即 $x_m=2ma$. 形式上，它相当于将(11.2)中的变换算符取作

$$p(\mu, \sigma)\equiv e^{T(\mu,\sigma)}=\prod_m \delta_{\mu(x_m),\sigma(x_m)}, \tag{11.13}$$

这里 $\delta$ 是克朗涅克(L. Kronecker) $\delta$ 函数.

在一维情况下，新哈密顿与原始哈密顿具有精确相同的形式(即仅仅存在最近邻作用)，但相互作用常数 $K'$ 不同，它由下式确定†:

$$\exp\sum_{n.n.} K'\mu\mu'=\sum_{\{\sigma\}}\exp[T(\mu, \sigma)+K\sum_{n.n.}\sigma_{na}\sigma_{(n+1)a}], \tag{11.14}$$

或

$$e^{K'(\mu_1\mu')}=\sum_{\sigma_1} e^{K(\mu\sigma_1+\sigma_1\mu')} \tag{11.15}$$

为了明确算出新耦合常数 $K'$，可利用下列两个代数公式:

$$e^{K\sigma_1\sigma_2}=\mathrm{ch}K(1+\sigma_1\sigma_2\,\mathrm{th}K), \tag{11.16}$$

$$\sum_{\sigma=\pm1}(1+K\mu_1\sigma)(1+K\mu_2\sigma)=2(1+K^2\mu_1\mu_2). \tag{11.17}$$

† 式中求和记号 $\sum$ 下的"$n.n.$"表示最近邻作用.

借助它们，可算出：

$$\sum_{\sigma_1} e^{K(\mu\sigma_1)+K(\sigma_1\mu')} = \sum_{\sigma=\pm 1} e^{K(\mu_1+\mu_2)\sigma_1}$$

$$= \sum_{\sigma_1=\pm 1} \mathrm{ch}^2 K(1+\mu\sigma_1 \,\mathrm{th}\, K)(1+\sigma_1\mu' \,\mathrm{th}\, K)$$

$$= 2\,\mathrm{ch}^2 K[1+\mathrm{th}^2 K(\mu\mu')]. \qquad (11.18)$$

现令

$$\mathrm{th}\, K' = (\mathrm{th}\, K)^2, \qquad (11.19)$$

便得

$$K' = \mathrm{th}^{-1}(\mathrm{th}\, K)^2. \qquad (11.20)$$

这便是确定新耦合常数与原耦合常数之间的重整化群递推关系．上式是用重标因子 $b=2$ 对晶格间距重标的结果．进一步推广，如果用任意 $b$ 重标，便可得

$$K' = \mathrm{th}^{-1}(\mathrm{th}\, K)^b. \qquad (11.21)$$

## §12 准线性晶格上自旋模型的相变·重整化群方法

正如第1章提到的，科赫曲线分为无分支准线性和有分支准线性两类，本节介绍在其上面自旋模型的相变．[2]

考虑图 10-1，只计及沿曲线上最近邻自旋间相互作用，而不计及平面上(虚线所示)最近邻自旋间相互作用，这样便形成一根一维自旋链．仅有的自相似效应是沿着直线距离为 $x$ 的两点间键的数目不是 $x$ 的一次方而是 $x^{d_f}$(用无量纲单位)．因此，可以用所有已知的关于一维链的结果，只须将 $x$ 换为 $x^{d_f}$，由于在直线上自旋关联函数指数地衰减，即

$$c(x) \propto \exp\left(-\frac{x}{\xi_1}\right), \qquad (12.1)$$

因而在所研究的科赫曲线上，只须改为：

$$c(x) \propto \exp\left(\frac{-x^{d_f}}{\xi_1}\right), \qquad (12.2)$$

这里 $\xi_1$ 是一维链的关联长度．上式可改写为：

$$c(x) \propto \exp\left(-\frac{x}{\xi_1^{\frac{1}{d_f}}}\right) = \exp\left(-\frac{x}{\xi_{d_f}}\right), \tag{12.3}$$

这里 $\xi_{d_f}$ 显然为科赫曲线情况下的关联长度. 对一维伊辛模型, 已知 $\xi_1 \propto e^{2K}\left(\text{其中 } K \equiv \frac{J}{kT}\right)$, $K$ 为最近邻自旋间约化相互作用常数, 且临界温度 $T_c = 0\text{K}$, 因此要观察零温附近系统的行为, 可引入约化无量纲温度 $t \equiv \frac{T - T_c}{T_c} = e^{-2K}$(在零温附近, $K \to \infty$, $t$ 很小). 于是 $\xi_{d_f} = \xi_1^{\frac{1}{d_f}} \propto (e^{2K})^{\frac{1}{d_f}} \propto \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{d_f}} \propto t^{-\frac{1}{d_f}}$. 对比(9.1), 可知关联长度临界指数 $\nu = \frac{1}{d_f}$.

上面的结果是非常直接和平庸的. 为使问题较少平庸, 我们要计入平面上最近邻自旋间的相互作用. 以下用重整化群方法来加以处理.

采用部分格点消约变换, 在本问题中它相当于将图 12-1 中自旋 $\sigma_2$、$\sigma_3$ 和 $\sigma_4$ 消约掉, 而使最近邻格点间距增大 $b = 3$ 倍. 在此重整化群变换模式中变换算符 $p(\mu, \sigma)$ 取作 $\prod_i \delta_{\sigma_{i+1}\mu_i}$, 对应于较大尺度的有效相互作用常数为 $\tilde{K}$, 它是由下式决定

$$\begin{aligned} A e^{\tilde{K}\mu_1\mu_2} &= \sum_{\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4,\sigma_5,\sigma_6} e^{K(\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_4+\sigma_4\sigma_5+\sigma_5\sigma_6+\sigma_6\sigma_2)} \delta_{\sigma_2\mu_1}\delta_{\sigma_5\mu_2} \\ &= \sum_{\sigma_3,\sigma_4,\sigma_6} e^{K(\mu_1\sigma_3+\sigma_3\sigma_4+\sigma_4\sigma_6+\sigma_6\mu_2+\sigma_3\sigma_6)}. \end{aligned} \tag{12.4}$$

由此立即可算出 $\tilde{K}$ 与 $K$ 之间的变换关系:

$$\tilde{\tau} = \text{th}\,\tilde{K} = \tau^3(1+\tau)/(1+\tau^3), \tag{12.5}$$

式中 $\tau \equiv \text{th}\,K$.

变换(12.5)并没有达到本问题的最终目的. 实际上, 到这一




图 12-1

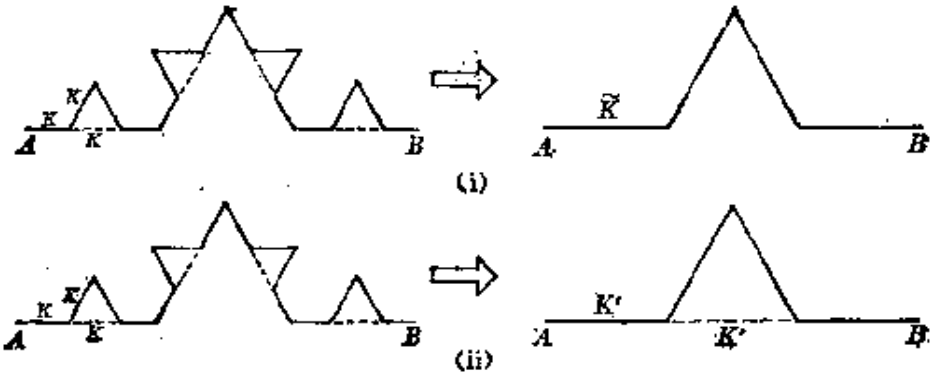



图 12-2

步为止，只实现图 12-2(i)标出的变换，而为了保持哈密顿的对称性和使配分函数保持不变，还必须实现图 12-2(ii)所示的变换(注意：其中含虚线所示的相互作用常数 $K'$)．为此，若令

$$X(\tau)\equiv\tau^3(1+\tau)/(1+\tau^3), \tag{12.6}$$

则在保持配分函数不变的要求下应有：

$$X(\tau')=[X(\tau)]^4, \tag{12.7}$$

这里 $\tau'=\text{th}K'$，$K'$ 代表重整化的相互作用，式(12.7)两边代表将图 12-2(ii)两边消去除 $A$、$B$ 两个自旋以外后所得相互作用参数之间的关系．这一表示式实际给出了重整化群变换后的相互作用参数 $K'$ 与变换前 $K$ 之间的递推关系．

变换(12.7)的不动点 $K'=K=K^*$ 由下式决定：

$$X(\tau^*)=[X(\tau^*)]^4, \tag{12.8}$$

结果是 $K^*=\infty(T=0)$和 $K^*=0(T=\infty)$．前者为不稳定不动点，说明相变的临界温度 $T_c=0$．这是一种平庸的零温相变，表明在任何非零温度下系统均处于无序态．这个结果与一维平移不变系统是相同的．

为求临界指数，可将(12.7)式在不动点($\tau=1$)附近进行线性化．按式(11.11)求得 $\lambda=4$，利用定义 $t'=b^y t$，且 $t\equiv e^{-2K}$，由此得到：

$$y^{-1}\equiv y=\frac{\ln 4}{\ln 3}=d_f. \tag{12.9}$$

可见沿科赫曲线的平面上(虚线)的附加耦合未能改变原来的结果.

按标度理论，至少必须求出两个临界指数，才能借助于标度律求出其他临界指数. 另一个易求的指数是与磁场有关的临界指数. 为此引入小磁场，并设 $\tau$、$\tau'$ 均趋于 1(即趋于零温)，这时系统中自旋几乎具有完全相同取向 (在绝对零度时，自旋完全相同排列)，对玻尔兹曼因子 $e^{-\beta\mathscr{H}}$ 中所含自旋 $\sigma_2$、$\sigma_3$、$\sigma_4$ 进行状态求和时，产生贡献的是五个自旋均具有相同取向的位形，即 $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=\sigma_4=\sigma_5$(这里只涉及图 12-1 的自旋)，因而我们抛开自旋间相互作用项，仅写出与磁场有关的部分，得

$$e^{\frac{1}{2}h'(\mu_3+\mu_4)}=e^{\frac{1}{2}h'(\sigma_1+\sigma_5)}=\sum_{\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4}e^{\frac{1}{2}h(\sigma_1+\sigma_5)+h(\sigma_2+\sigma_3+\sigma_4)}$$

$$=e^{2h(\sigma_1+\sigma_5)}, \tag{12.10}$$

所以

$$h'=4h. \tag{12.11}$$

方程(12.10)中，在 $h\sigma_1$，$h\sigma_5$ 前面出现因子 $\frac{1}{2}$ 是因为每点的场要分给连接最近邻的两根键.

现在，按标度理论的要求，将 $h'$ 写为 $h'=b^a h$，因而立即找到磁标度指数 $a$ 为，

$$a=\frac{\ln 4}{\ln 3}=y=d_f. \qquad (b=3) \tag{12.12}$$

每个自旋的自由能(以 $kT$ 为单位)，在重整化变换前为 $F(t, h)$，其中 $h$ 为磁场，$t$ 为温度，变换后为 $F(t', h')=F(b^y t, b^a h)=F(b^{d_f/y}t, b^{d_f/a}h)$，两者之间存在下列明显的标度关系：

$$F(t, h)=b^{-d_f}F(b^{d_f/y}t, b^{d_f/a}h). \tag{12.13}$$

这是一个决定自由能的泛函方程，它对任何 $b$ 值均成立. 利用自发磁化强度 $M_s=\left.\frac{\partial F}{\partial h}\right|_{h=0}$ 以及(9.1)式，立即求出 $\beta=0$；利用比热 $c\propto\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}$ 及(9.1)，可求出 $\alpha=1$. 其他临界指数也可类似地或

用标度律导出.

本质上零温相变是一级相变，因为序参量(自发磁化强度)由0(任何有限温度)突然变到1，没有一个连续变化的过程，这是零温相变的一个特征.

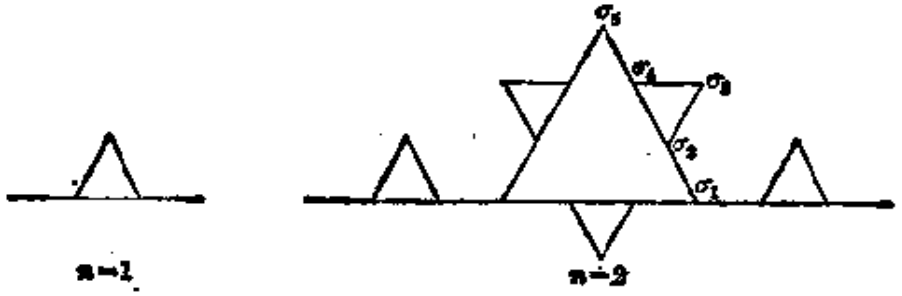



图 12-3

对有分支的准线性科赫曲线，如图12-3所示，它跟无分支的差别仅仅是虚线部分变成了曲线结构的一部分，因此对重整化相互作用常数的计算没有本质区别. 但当存在外磁场时，情况便大不相同，因为分支科赫曲线是不均匀的，不同格点具有不同配位数，进行重整化变换后在不同点将产生不同大小的重整化磁场，设具有 $q$ 个最近邻的格点磁场为 $h_q$，我们将得出一组对不同 $h'_q$ 值的线性递推关系. 例如，在图12-3中，必须考虑 $h_2$ 和 $h_3$. 注意到在零温下所有自旋取向一致，因而可写出：

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{2}h'_2\sigma_5} &= e^{\frac{1}{2}h_2\sigma_5+\frac{h_3}{2}(\sigma_2+\sigma_4)+\frac{h_2}{2}\sigma_3}, \\ e^{\frac{1}{3}h'_3\sigma_1} &= e^{\frac{1}{3}h_3\sigma_1+\frac{h_3}{2}(\sigma_2+\sigma_4)+\frac{h_2}{2}\sigma_3}; \end{aligned} \tag{12.14}$$

或写：

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}h'_2\sigma_5 &= \frac{1}{2}h_2\sigma_5+\frac{h_3}{2}(\sigma_2+\sigma_4)+\frac{h_2}{2}\sigma_3, \\ \frac{1}{3}h'_3\sigma_1 &= \frac{1}{3}h_3\sigma_1+\frac{h_3}{2}(\sigma_2+\sigma_4)+\frac{h_2}{2}\sigma_3. \end{aligned} \tag{12.15}$$

在方程中已考虑到，例如，格点5重整化前后配位数都为2，因此重整化前后的磁场都含因子 $\frac{1}{2}$，格点2、3、4上面的自旋在重整化

变换中应消去，这些点的贡献要平均分配到最后要留下来的格点1和格点5上，因此都出现因子 $\frac{1}{2}$，而格点1在重整化前后配位数均为3，因此相应地出现因子 $\frac{1}{3}$．于是，最终可写出：

$$\begin{aligned} h_2' &= h_2 + (h_2 + 2h_3), \\ h_3' &= h_3 + \frac{3}{2}(h_2 + 2h_3); \end{aligned} \tag{12.16}$$

将其写为矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} h_2' \\ h_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}. \tag{12.17}$$

变换矩阵的本征值为5和1，前者正好等于 $b^{d_f}$，后者在重整化群理论中标志着存在"边界"(marginal)变量．

至此，我们看到，对科赫曲线上的磁相变，它的磁指数 $x$ 和热指数 $y$ 均等于 $d_f$，分形维数取代了标度关系中的欧几里得维数．

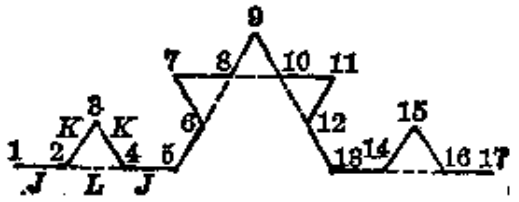


图 12-4

最后指出，以上的处理存在着明显的缺陷，因为在计入平面上的(沿虚线)相互作用时人为地丢掉了一些本来也应包含的相互作用，例如，图12-4中 $\sigma_8$ 与 $\sigma_{10}$ 间的相互作用就被略去，这样做的目的是为了理论上便于处理，但这是不合理的．为克服这一缺点，提出了一种改进的重整化群处理方案[16]．让我们通过箝茨模型来加以说明．

箝茨模型的哈密顿量为

$$-\beta\mathscr{H} = J\sum_{n.n.}\delta_{\sigma_i\sigma_j} + K\sum_{n.n.}\delta_{\sigma_i\sigma_j} + L\sum_{n.n.}\delta_{\sigma_i\sigma_k}, \tag{12.18}$$

其中 $J$、$K$、$L$ 分别代表图12-4中所示的最近邻自旋间的相互作用常数，特别是，$K$ 代表由两条实线和一条虚线构成的三角形的两实边的相互作用常数．$L$ 为虚线代表的相互作用．(12.18)中自旋 $\sigma$ 可取 $q$ 个值，$\delta$ 为克朗涅克 $\delta$ 函数．由(12.18)看出，当所

有自旋有相同取向时，能态最低，否则能态较高．当所有最近邻自旋取向都不相同时，系统具有最高能量．

仔细地研究科赫曲线，可发现，它可看作由下列两个基元组成(图 12-5)，重整化变换的模式由图 12-6(i)所示，它相当于将图 12-5 中的两个基元分别作如图 12-6(ii)、(iii)所示的变换．

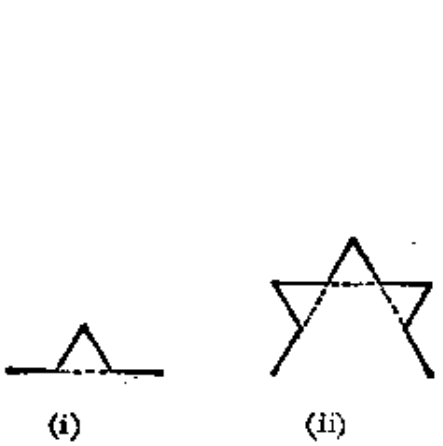



图 12-5

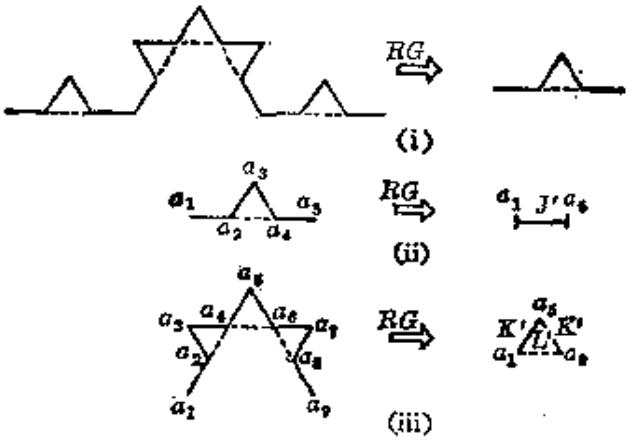



图 12-6

采用部分格点消约法，可求出下列相互耦合的重整化群变换递推关系(由于计算繁复，此处略去详细推导过程，有兴趣的读者可参阅有关文献[17])：

$$\begin{aligned} e^{-J'} &= P_2(J.K.L)/P_1(J.K.L), \\ e^{-2K'} &= M_2(J.K.L)/M_1(J.K.L), \\ e^{-L'-K'} &= M_3(J.K.L)/M_1(J.K.L), \end{aligned} \tag{12.19}$$

其中 $P_i(i=1, 2)$和 $M_j(j=1, 2, 3)$都具有非常冗长复杂的形式．由上述递推关系的不动点方程，可找到它的不稳定不动点为：$J^*=K^*=L^*=\infty$，相应的临界温度为 $T_c=0$ K 这里发现经过改进的重整化群方案得到相同的结果，它实际上是由科赫曲线具有有限分岔度的必然后果．

## §13 塞尔宾斯基铺垫上的自旋统计模型

本节研究塞尔宾斯基铺垫上的离散自旋模型[12]，每个自旋置

于微观晶格格点上. 原则上，在这种晶格上所有自旋系统都是精确可解的，因为它具有有限分岔度. 然而，随着维数增加，计算变得非常复杂. 许多相关作用必须包含进去，在作重整化群变换时，有许多自旋态应当消约掉(即积分或求和掉). 这里只研究一些简单情况，以便抓住最本质的东西.

对具有有限分岔度的系统，在任何温度下均不存在相变. 即只存在零温平庸相变. 这将在稍后的计算中得到具体证实. 实际上，按照标准不等式或熵论证，在任何有限温度下系统均分裂为许多畴块，增大自由能，使有序遭到破坏.

首先研究嵌置于二维欧氏空间的塞尔宾斯基铺垫上的伊辛模型. 在零场情况下的哈密顿量为：

$$-\beta\mathscr{H}=K\sum_{i,j}\sigma_i\sigma_j, \tag{13.1}$$

采用部分格点消约重整化群方法，它的变换图式为图 13-1 所示. 通过消约掉(即求和掉)例如 $\sigma_4$、$\sigma_5$、$\sigma_6$，使线性尺度增大一倍(即 $b=2$)，相应的变换算符写作 $p(\sigma,\mu)=\prod_{\alpha}\delta_{\sigma_\alpha\mu_\alpha}$，其中 $\sigma_\alpha$ 指前一级构造阶段格点上的自旋. 故配分函数为：

$$\sum_{\{\mu\}}\exp(K'\sum_{n.n}\mu_\alpha\mu_\beta)=\sum_{\{\mu\}}\sum_{\{\sigma\}}(\prod_{\alpha}\delta_{\sigma_\alpha\mu_\alpha})\exp(K\sum_{n.n.}\sigma_i\sigma_j), \tag{13.2}$$

由此立即可写出：

$$Ae^{K'(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_3\mu_1)}=\sum_{\sigma_4,\sigma_5,\sigma_6}e^{K(\mu_1\sigma_4+\sigma_4\mu_2+\mu_2\sigma_5+\sigma_5\mu_3+\mu_3\sigma_6+\sigma_6\mu_1+\sigma_4\sigma_5+\sigma_5\sigma_6+\sigma_6\sigma_4)}. \tag{13.3}$$

并由它求得重整化相互作用常数 $K'$ 的如下递推关系：

$$e^{4K'}=(e^{8K}-e^{4K}+4)/(e^{4K}+3), \tag{13.4}$$

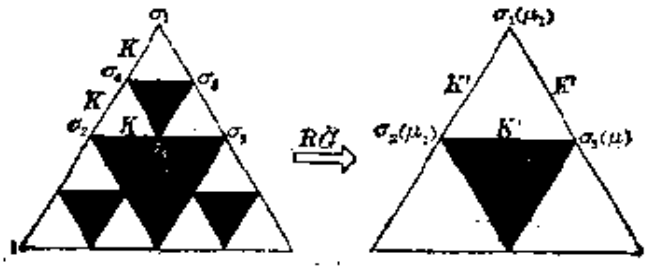



图 13-1

(13.4)的不动点为 $K'=K=K^*=0,\ \infty$，其中 $K^*=\infty$ 对应于温度为 0 的不稳定不动点，因此相变温度为 0.

为求临界指数，在 $T_c=0$ 附近选取低温小变量 $t\equiv e^{-4K}$，则(13.4)可写为：

$$t'=t+4t^2+O(t^3)=R(t). \tag{13.5}$$

将其在不动点 $t^*=0$ 附近展开，则有

$$\begin{aligned} t'&=t^*+\frac{\partial R(t)}{\partial t}\Big|_{t^*}(t-t^*)\\ &=t^*+(1+8t^*)(t-t^*)=t=\lambda t. \end{aligned} \tag{13.6}$$

可见变换的本征值 $\lambda=1$（此处为单参数变数），注意到定义 $t'=b^{y}t=b^{1/\nu}t$，可见 $b^{y}=b^{1/\nu}=1$. 因而关联长度临界指数 $\nu=\infty$，这说明温度是个"边界"变量. 它意味着经过不论多少次变换，$t$ 都不会增大和减少. 反之，若 $\lambda$ 大于或小于 1，则经过多次变换，$t$ 会越来越增大或减小，因而变换使系统越来越背离或接近不动点.

利用(13.5)进行 $l$ 次迭代. 为方便计，令 $t(0)=\frac{1}{4l_0}=e^{-4K}$，$t(0)$为小量，则(13.5)可写为：

$$\begin{aligned} t(1)&=t(0)+4t^2(0)+O(t^3)=\frac{1}{4l_0}+\frac{4}{(4l_0)^2}\\ &=\frac{1}{4l_0}+\frac{1}{4l_0^2}+O(l_0^{-3}),\\ t(2)&=t(1)+4t^2(1)+O(t^3)=\frac{1}{4l_0}+\frac{2}{4l_0^2}+O(l_0^{-3}), \end{aligned} \tag{13.7}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$t(l)=t(l-1)+4t^2(l-1)+O(t^3)=\frac{1}{4l_0}+\frac{l}{4l_0^2}+O(l_0^{-3}).$$

将其写成统一形式，为：

$$t(l)=\frac{1}{4l_0}+\frac{l}{4l_0^2}\approx\frac{1}{4l_0-4l}+O[(l_0-l)^{-2}]. \tag{13.8}$$

(13.8)式可看作是(13.5)式的解.

经过 $l$ 次变换，系统线性尺度增大了 $2^l$ 倍，因而关联长度减

少了 $2^l$ 倍，故有 $\xi(l)=\xi/2^l$. 经逐次变换，直至 $\xi(l)$变到数量级为 1，这意味着 $\xi \propto 2^l \propto 2^{\frac{1}{4^l}}=2^{\frac{1}{4}e^{4K}}$，或写为：

$$\xi \propto \exp\left\{\frac{1}{4}(\ln 2)\exp(4K)\right\}. \tag{13.9}$$

为求其他临界指数，我们从自由能奇异部分的下列关系式出发：(并注意 $y=0$)

$$F(t,\ h)=b^{-d_f}F(b^{y_t}t,\ b^{y_h}h)=b^{-d_f}F(t,\ b^{y_h}h), \tag{13.10}$$

两边对磁场 $h$ 微分，便得序参量：

$$M(t,\ 0)=b^{-d_f}b^{y_h}M(t,\ 0),$$

因而导致

$$x=d_f. \tag{13.11}$$

于是，当 $b$ 取为 $\xi$ 时，便有

$$F(t,\ h)=\xi^{-d_f}F(\xi^{d_f}h). \tag{13.12}$$

而 $F$ 的奇异部分又可表为

$$F \propto t^{2-\alpha}. \tag{13.13}$$

联合(13.9)、(13.12)、(13.13)式及 $d_f=\dfrac{\ln 3}{\ln 2}$，可得：

$$\begin{aligned} F &\propto \exp\left\{\frac{1}{4}\ln 2\exp(4K)\right\}\left(-\frac{\ln 3}{\ln 2}\right), \\ &\propto (e^{-4K})^{2-\alpha}. \end{aligned} \tag{13.14}$$

因而可断定 $\alpha=-\infty$，这样便满足下列标度律：

$$d_f\nu=2-\alpha, \tag{13.15}$$

这里 $d_f$ 取代了通常的欧氏维数.

其次，研究嵌置于三维欧氏空间的塞尔宾斯基铺垫上的伊辛模型. 现考虑更一般的最近邻作用哈密顿量

$$-\beta\mathscr{H}=K\sum_{\langle ij\rangle}\sigma_i\sigma_j+L\sum_{\langle ijkl\rangle}\sigma_i\sigma_j\sigma_k\sigma_l+A. \tag{13.16}$$

$K$ 代表两个最近邻自旋间的相互作用，$L$ 代表正四面体顶角自旋间的相互作用. 消约去(通过求和)所有棱中点的自旋使线度尺寸放大一倍($b=2$)，结果得到下列重整化群变换的递推关系：

$$e^{8K'}=\frac{e^{24K+4L}+e^{-4L}+6e^{12K}+12e^{4K}+3e^{-4L}+4e^{4L}+4e^{-4L}}{2e^{12K}+8e^{4K}+2e^{8K+4L}+4e^{-4L}+12e^{4K}+4e^{4L}+4e^{-4L}},\tag{13.17}$$

$$e^{6K'+2L'}=\frac{e^{24K+4L}+e^{-4L}+6e^{12K}+12e^{4K}+3e^{-4L}+4e^{4L}+4e^{-4L}}{e^{18K+12L}+8e^{6K-2L}+3e^{10K+2L}+24e^{-2K-2L}+15e^{2K+2L}},\tag{13.18}$$

这里 $K'$、$L'$ 为重整化的相互作用常数. 上述两个方程存在明显的不动点为: $K^*=L^*=\infty$(相应温度为 0)和 $K^*=L^*=0$(相应温度为无穷大).

现在在零温不动点附近展开前两个方程, 仅留下首项:

$$e^{-8K'}\approx 2e^{-12K-4L}(1+10e^{-8K}+e^{-4K+4L}-2e^{-12K-4L}),\tag{13.19}$$

$$e^{-6K'-2L'}\approx e^{-6K-2L}(1+2e^{-12K-4L}+3e^{-8K}).\tag{13.20}$$

采用简化记号: $x\equiv e^{-8K}$, $y\equiv e^{-12K-4L}$, 将(13.20)式两边取平方, 于是(13.19)、(13.20)可写为:

$$x'\approx 2y+2x^2+20xy-4y^2,\tag{13.21}$$

$$y'\approx y+6xy+4y^2.\tag{13.22}$$

这两式是近似的递推关系(在零温附近). 若只留下线性项, 上式可表成矩阵形式:

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.\tag{13.23}$$

它们的本征值和右本征矢分别为:

$$\begin{cases}\lambda_1=0, & \text{对应 } \varphi_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};\\[2ex] \lambda_2=1, & \text{对应 } \varphi_2=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}.\end{cases}\tag{13.24}$$

在重整化群理论中 $\lambda_1=0$ 对应无关变量, 它经过迭代后便消失而变得不起作用; 而 $\lambda_2=2^{1/\nu}=1$, 因而再次得到 $\nu=\infty$ 和温度是一个边界变量.

应当指出, 对于具有两个变量 $K$、$L$ 的情况, 严格的讨论应当在二维参数空间($K$、$L$)中进行. 标出所有可能的不动点, 研究各

不动点的重整化群流向，从而确定所有不动点的性质.

为求关联长度，要将递推关系近似处理.(13.21)和(13.22)若取至线性项，即得 $x'=2y'$. 如比线性近似更精确一些，可令：

$$x=2y+2ay^2, \tag{13.25}$$

其中 $a$ 待定. 将其代入(13.21)和(13.22)，得到：

$$\begin{aligned} x' &= 2y+2(2y+2ay^2)^2+20(2y+2ay^2)y-4y^2 \\ &\approx 2y+44y^2+O(y^3), \end{aligned} \tag{13.26}$$

$$\begin{aligned} y' &= y+6(2y+2ay^2)y+4y^2 \\ &\approx y+16y^2+O(y^3). \end{aligned} \tag{13.27}$$

若令 $x'=2y'+2ay'^2$ (即满足(13.25)式)，则当 $a=6$ 时(13.26)与(13.27)完全自洽(精确到 $y^3$)，因而有一个单参数的递推关系：

$$y'=y+16y^2+O(y^3). \tag{13.28}$$

这个方程的解为

$$y(l)\approx\frac{1}{16(l_0-l)}, \tag{13.29}$$

这里 $16\,l_0=\dfrac{1}{y(0)}=\dfrac{2}{x(0)}=2e^{8K}$. 采用类似前面的讨论，可找到.

$$\xi\propto 2^l\propto 2^{\frac{1}{8}e^{8K}}=\exp\left\{\frac{1}{8}\ln 2\exp(8K)\right\}. \tag{13.30}$$

最后，我们来讨论二维塞尔宾斯基上的渗流模型. 前节曾给出了模型的哈密顿量，它的基本项是由克朗涅克 $\delta$ 函数组成. 本节采用另一种写法，它的实质仍然与以前相同，即系统所有自旋取相同方向时能量最低，否则能量较高，因此低温下(尤其是零温)系统中呈现有序态，自发磁化强度(序参量)不为 0. 哈密顿量写作：

$$-\beta\mathscr{H}=K\sum_{\langle ij\rangle}(1-\delta_{\sigma_i\sigma_j})+\Delta\sum_{\langle ijk\rangle}(1-\delta_{\sigma_i\sigma_j})(1-\delta_{\sigma_j\sigma_k})(1-\delta_{\sigma_k\sigma_i}), \tag{13.31}$$

第一项代表最近邻自旋间的相互作用，第二项代表位于最小三角形顶点上的自旋间的三体作用. 这里顺便指出，在模型哈密顿量中，有的仅仅包含最近邻自旋间的二体作用，有的则可能包含更多，更高级的相互作用，例如，含次近邻和更次近邻等二体作用、三

体和四体作用(如(13.31)、(13.16)式).这样做不仅是为了使模型更精确，有时也是为了使在重整化群变换中能保持模型的对称性.

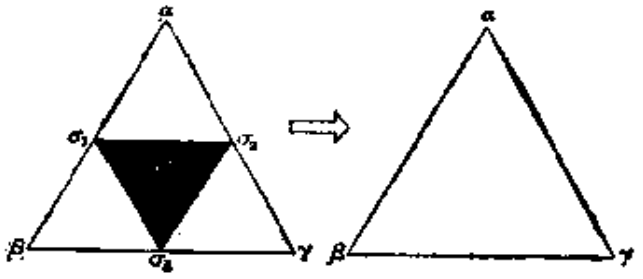


图 13-2

采用部分格点消约重整化群方法，其变换模式如图 13-2 所示.设对 $\sigma_1$、$\sigma_2$、$\sigma_3$ 进行求和后的结果表为 $W[\overset{\alpha}{\underset{\beta\ \gamma}{\triangle}}]$，当 $\alpha$、$\beta$、$\gamma$ 取各种不同值时，采用记号：

$$\begin{cases} W[\overset{\alpha}{\underset{\alpha\ \alpha}{\triangle}}] \equiv D(K, q), & (\alpha=\beta=\gamma); \\ W[\overset{\alpha}{\underset{\beta\ \beta}{\triangle}}] \equiv e^{-2K}N(K, \Delta, q), & (\beta=\gamma\neq\alpha); \\ W[\overset{\alpha}{\underset{\beta\ \gamma}{\triangle}}] \equiv M(K, \Delta, q), & (\alpha\neq\beta\neq\gamma). \end{cases} \tag{13.32}$$

可求出变换递推关系为：

$$e^{-2K'}=\frac{e^{-2K}N(K, \Delta, q)}{D(K, q)}, \tag{13.33}$$

$$e^{-3K'-\Delta'}=\frac{M(K, \Delta, q)}{D(K, q)}, \tag{13.34}$$

式中 $q$ 代表自旋的 $q$ 种取向. 上述变换前后 $K$、$\Delta$ 与 $K'$、$\Delta'$ 间的耦合递推关系只与单个自旋取值的数目 $q$ 有关，而与自旋取什么值无关.

具体地写出(13.32)式中各表示式(它的一个图表见表13.1)，可找出(13.33)和(13.34)式的不动点，其中 $K^*=\Delta^*=0$ 和 $\infty$ 仍然是明显的不动点. 现考虑零温不动点附近($K$, $\Delta\gg1$)的近似展开式，只取首项，可得：

$$e^{-2K'}=e^{-2K}\frac{[1+4e^{-2K}+3(q-1)e^{-4K}+2(q-2)e^{-3K-\Delta}+\cdots]}{[1+3(q-1)e^{-4K}+\cdots]}, \tag{13.35}$$

表 13.1

| | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ | $\sigma_1$ | $\sigma_2$ | $\sigma_3$ | 简并度 | 能 量 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $D$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | $3(q-1)$ | $4K$ |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | $3(q-1)$ | $6K$ |
| | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | $q-1$ | $6K$ |
| $e^{-2K}N$ | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | $2K$ |
| | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | $4K$ |
| | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | $4K$ |
| | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | $4K$ |
| | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | $6K$ |
| | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | $6K$ |
| | 2 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | $q-2$ | $6K$ |
| | 2 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | $q-2$ | $6K$ |
| | 2 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | $q-2$ | $6K$ |
| | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | $2(q-2)$ | $5K+\Delta$ |
| $M$ | 1 | 2 | 3 | 1 | 1 | 1 | 3 | $4K$ |
| | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 1 | 6 | $5K+\Delta$ |

$$e^{-3K'-\Delta'}=3e^{-4K}\frac{[1+2e^{-K-\Delta}+\cdots]}{[1+3(q-1)e^{-4K}+\cdots]}. \tag{13.36}$$

令 $x\equiv e^{-2K}$、$y^2\equiv e^{-3K-\Delta}$，并保留至二级项，写为：

$$\begin{cases} x'=x+4x^2, \\ y'=\sqrt{3}x+\dfrac{1}{2}\sqrt{3}y^2. \end{cases} \tag{13.37}$$

参数 $q$ 仅在第三级才出现，只影响对临界行为的修正。如果采用线性近似，上式可写为：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{13.38}$$

它的变换矩阵的本征值为 0 和 1，分别对应本征矢为 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$. 仿效前段，倘若取 $y=\sqrt{3}\left(x-\frac{5}{2}x^2\right)$，则(13.37)两式自

洽，因而两个方程约化为一个：

$$x' = x + 4x^2. \tag{13.39}$$

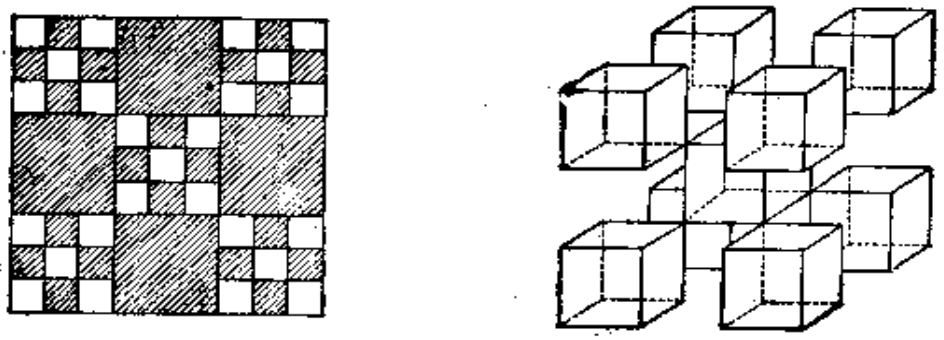
解此递推关系，令 $x \equiv e^{-2K}$，可得关联长度为：

$$\xi \propto \exp\left\{\frac{1}{4}\ln 2\exp(2K)\right\}. \tag{13.40}$$

在本节最后，我们回顾一下在本节讨论的后两种情况．它们都含有两个相互作用常数，因而构成二维参数空间．为求关联长度，采用了设法化简耦合递推关系的办法，最终使之产生单参数的递推关系，并通过分析求解出关联长度．

## §14 伊辛模型的严格配分函数和关联函数

本章开始提到，通过研究系统的配分函数的奇异性，可解决系统的相变存在性，研究关联函数可了解系统是否存在长程序．[17],[18] 然而，迄今不论在平移对称晶格还是在分形晶格上，都只有极少数系统可以严格地求出配分函数和关联函数．本节给出几种具有有限分岔度的分形晶格，它们可看作特殊类型的塞尔宾斯基地毯，但通常的塞尔宾斯基地毯是具有无限分岔度的．这类结构见图 14-1(i)、(ii)，其中前者嵌置于二维欧氏空间，而后者嵌置于三维欧氏空间，它们的分形维数分别为 $d_f = \dfrac{\ln 5}{\ln 3} \approx 1.465$



(i)　　(ii)

图 14-1

和 $d_f=\frac{\ln 9}{\ln 3}=2$. 现将自旋 $\sigma=\pm1$ 置于晶格格点上.

考虑不含外场的伊辛模型哈密顿量:

$$-\beta\mathscr{H}=K\sum\sigma_i\sigma_j. \tag{14.1}$$

系统的配分函数为:

$$Z=\sum_{\{\sigma\}}e^{-\beta\mathscr{H}}. \tag{14.2}$$

这里, 求和是对系统的所有自旋位形进行的, $\{\sigma\}=\{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_i, \cdots\}$. 由于 $\sigma_i=\pm1$, 因而

$$e^{K\sigma_i\sigma_j}=\mathrm{ch}K(1+\sigma_i\sigma_j\,\mathrm{th}K) \tag{14.3}$$

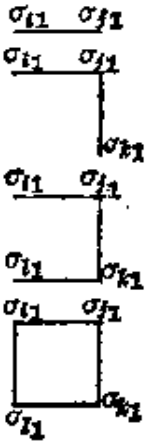
及

$$Z_n=\sum_{\{\sigma\}}e^{-\beta\mathscr{H}}=(\mathrm{ch}\,K)^M\sum_{\{\sigma\}}\prod_{n.n.}(1+\sigma_i\sigma_j\,\mathrm{th}K). \tag{14.4}$$

这里 $n$ 代表分形的第 $n$ 级构造阶段, $M$ 为晶格棱的总数, $n.n.$ 代表最近邻. 将连乘展开, 便得含 $\mathrm{th}\,K$ 的各种幂次的项.

首先研究图 14-1(i), 注意到 $\sigma^2=1$, 因而必有:

$$\begin{cases}\sum\limits_{\{\sigma\}}(\sigma_{i_1j_1})\,\mathrm{th}K=0,\\ \sum\limits_{\{\sigma\}}(\sigma_{i_1}\sigma_{j_1})(\sigma_{j_1}\sigma_{k_1})\,\mathrm{th}^2K=0,\\ \sum\limits_{\{\sigma\}}(\sigma_{i_1}\sigma_{j_1})(\sigma_{j_1}\sigma_{k_1})(\sigma_{k_1}\sigma_{i_1})\,\mathrm{th}^3K=0,\\ \sum\limits_{\{\sigma\}}(\sigma_{i_1}\sigma_{j_1})(\sigma_{j_1}\sigma_{l_1})(\sigma_{k_1}\sigma_{l_1})(\sigma_{l_1}\sigma_{i_1})\,\mathrm{th}^4K\\ \quad=2^{N_n}\,\mathrm{th}^4K.\end{cases} \tag{14.5}$$




这里 $N_n$ 是分形晶格上的格点总数. 如果在表示式中出现的每对最近邻自旋间连一键, 每根键分配一个因子 $\mathrm{th}\,K$, 上面的四个表示式便与四种键位形相对应. 这四种位形的特点是, 只有第四种位形的每个格点有两根(偶数根)键通过, 这种位形求和不为 0; 而其余三种位形都存在只连一根键的格点, 求和后为 0. 前一类图称为偶图, 它对配分函数给出非零贡献.

由图 14-1(i)的结构特点可以看出, 所有偶图都由四根键组成

的正方块组成，一个高阶偶图含有多个由键组成的正方块，因而在(14.4)式中只能存在含 $\mathrm{th}^4K$ 的各种幂次的项. 含$(\mathrm{th}^4K)^n$的项显然共有 $\frac{m!}{n!(m-n)!}$ 个，这里$m$为分形晶格中所含正方块总数，而 $n$ 为连键正方块的数目. 根据这些考虑，立即可得出：

$$Z_n=(\mathrm{ch}\,K)^M 2^{N_n}\left(1+m\,\mathrm{th}^4K+\frac{m!}{2!(m-2)!}\mathrm{th}^8K+\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{m!}{n!(m-n)!}\mathrm{th}^{4n}K+\cdots+\mathrm{th}^{4m}K\right)$$
$$=(\mathrm{ch}\,K)^M 2^{N_n}(1+\mathrm{th}^4K)^m. \qquad (14.6)$$

显然 $M=4m$，表示式(14.6)给出了严格的配分函数.

其次研究图 14-1(ii)图. 分形结构是由小立方体组成，包含于每个小立方体中的偶图有下列几种(见图 14-2)，它们对配分函数给出非零贡献. 在每个小立方体中，像图 14-2 类型的偶图分别有 6 个，8 个和 11 个. 因而，每个小立方体中偶图可能给出的贡献为

$$E(K)=6\,\mathrm{th}^4K+8\,\mathrm{th}^6K+11\,\mathrm{th}^8K. \qquad (14.7)$$

因而系统的配分函数为

$$Z_n=(\mathrm{ch}\,K)^M 2^{N_n}\left\{1+mE(K)+\frac{m!}{2!(m-2)!}E^2(K)\right.$$
$$\left.+\cdots+\frac{m!}{n!(m-n)!}E^n(K)+\cdots+E^m(K)\right\}$$
$$=(\mathrm{ch}\,K)^M 2^{N_n}(1+E(K))^m. \qquad (14.8)$$

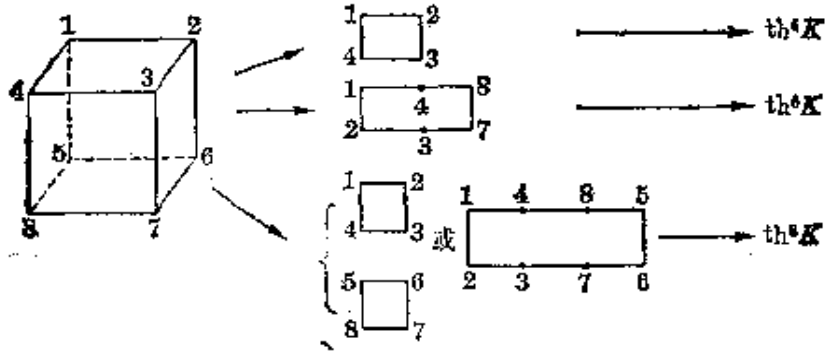



图 14-2

这里 $M=12m$, $M$ 为棱的总数，$m$ 为小立方体总数.

利用已知的配分函数可求出在热力学极限下，每个格点上严格的自由能表示式. 对图 14-1(i)，由于 $N_n=3\times 5^n+1$, $m=5^n$, $M=4\times 5^n$, 故有

$$f=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{kT}{N_n}\ln Z_n\right)$$
$$=-kT\left[\frac{4}{3}\ln(\mathrm{ch}K)+\ln 2+\frac{1}{3}\ln(1+\mathrm{th}^4K)\right]. \quad (14.9)$$

对图 14-1(ii)，由于 $N_n=7\times 9^n+1$, $m=9^n$, $M=12\times 9^n$, 故得出

$$f=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{kT}{N_n}\ln Z_n\right)$$
$$=-kT\left[\frac{12}{7}\ln(\mathrm{ch}K)+\ln 2+\frac{1}{7}\ln E(K)\right]. \quad (14.10)$$

当 $K\neq\infty$ 时，$\mathrm{th}K<1$，$\mathrm{ch}K=$有限值，因而从自由能表示式看出，只有当 $K=\infty$(即温度 $T=0$)时，才产生奇异性. 说明系统只存在零温相变.

其次，我们从关联函数来考察系统的相变问题. 为此，先写出两自旋 $\sigma_K$ 与 $\sigma_{K'}$ 的关联函数，它定义为：

$$\langle\sigma_K\sigma_{K'}\rangle=\frac{1}{Z_n}\sum_{\{\sigma\}}(\sigma_K\sigma_{K'})\exp\left(K\sum_{n.n.}\sigma_i\sigma_j\right). \quad (14.11)$$

仿前，可将右边的求和展开：

$$\langle\sigma_K\sigma_{K'}\rangle=\frac{1}{Z_n}\sum_{\{\sigma\}}(\sigma_K\sigma_{K'})\prod_{n.n.}(e^{K\sigma_i\sigma_j})$$
$$=\frac{1}{Z_n}(\mathrm{ch}\,K)^M\sum_{\{\sigma\}}(\sigma_K\sigma_{K'})\{1+\sum_{n.n.}\sigma_i\sigma_j\,\mathrm{th}K$$
$$+\sum_{n.n.}(\sigma_{i_1}\sigma_{j_1})(\sigma_{i_2}\sigma_{j_2})\mathrm{th}^2K+\cdots+\cdots$$
$$+\sum_{n.n.}(\sigma_{i_n}\sigma_{j_n})\cdots(\sigma_{i_M}\sigma_{j_M})\mathrm{th}^MK\}. \quad (14.12)$$

在(14.12)中将 $\sigma_K$、$\sigma_{K'}$ 称作外自旋，而花括号内的自旋称作内自旋. 式中各项出现的最近邻自旋间连一根键，因此每项都与一种键位形相对应. 现分析以下各种典型的键位形：

(1) 若所有内自旋中没有与外自旋重复的，即 $\sigma_K$ 与 $\sigma_{K'}$ 是两个孤立自旋，这样的项相应的键位形如图 14-3 所示，图中方框内由内自旋连键组成，不管这部分键位形是否是偶图，由于存在孤立自旋 $\sigma_K$ 和 $\sigma_{K'}$，它对式(14.12)的贡献均为 0.

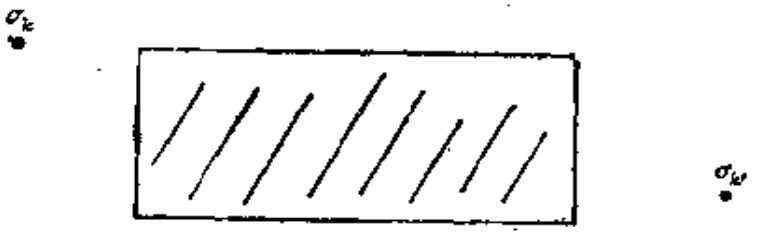



图 14-3

(2) 若内自旋首尾相接，形成一线性键位形(路径)，且它的两个端点与 $\sigma_K$ 和 $\sigma_{K'}$ 重合，如图 13-4 所示，这种图形中每个内自旋均有偶数根键穿过，端点自旋也出现两次，因而它对(14.12)式的贡献为 $2^{N_0}\,\mathrm{th}^l K$，其中 $l$ 是键的数目.

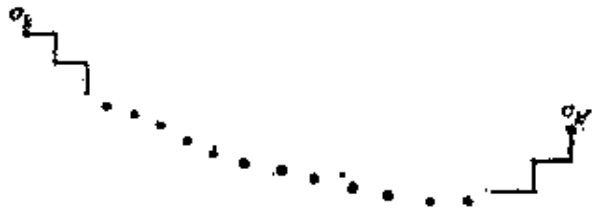
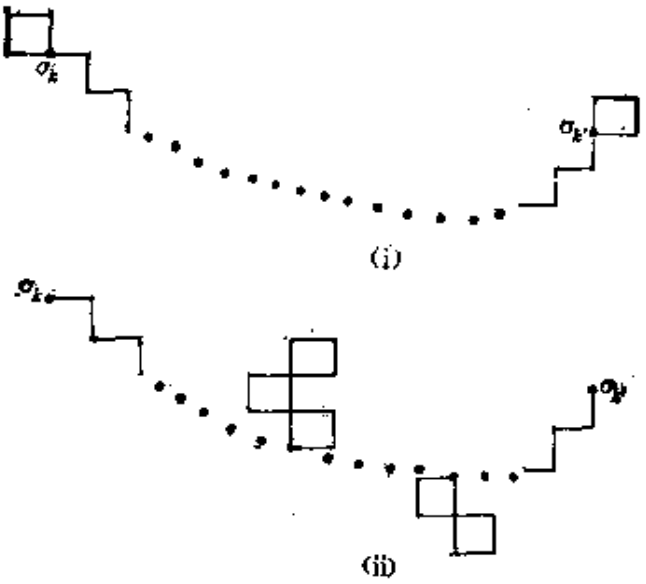



图 14-4

(3) 若内自旋中有部分自旋形成线性键路径，且端点与内自旋 $\sigma_K$ 和 $\sigma_{K'}$ 重合，其余部分连键形成闭合圈(小正方块)，这些圈图或者附着在端点，或者附着在线性键路径上，或者完全游离于路径之外，它们的键位形如图 14-5(i)、(ii)、(iii)所示. 易见，在图(i)中，尽管 $K$、$K'$ 处只有三根键穿过，但因还有一外自旋 $\sigma_K$、$\sigma_{K'}$ 与之重叠，因此这两个自旋实际在表示式中出现四次，导致 $\sum_{\sigma_k}\sigma_k^4=\sum_{\sigma_{k'}}\sigma_{k'}^4=1$. 在图(ii)中，所有路径上附有圈图的各点，每个自旋都出现四次. 这三种情况相应的项对(14.12)式的贡献均为非零.

从位形的构造，可归纳出如下两条明显的图形规则：第一，任何连接 $\sigma_k$ 与 $\sigma_{k'}$ 的线性键路径，都穿过确定数目的小方块；第二，任何连接 $\sigma_k$ 与 $\sigma_{k'}$ 的键位形，均可分解为线性键路径与各种类型的(如图 14-5 所示)圈图之积. 这两条规则是由结构的几何特征所



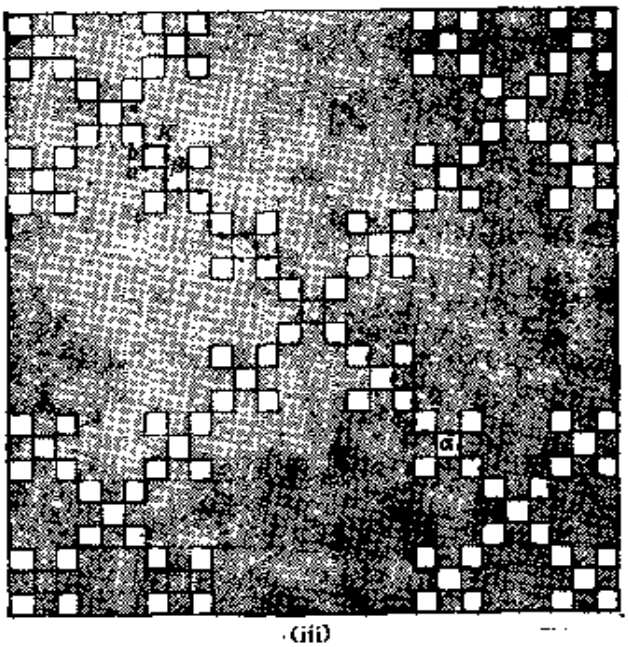




图 14-5

决定的. 此外, 连接固定的 $\sigma_K$ 和 $\sigma_{K'}$ 的线性键路径也不是唯一的, 这来源于穿越路径上小方块的方式不同. 存在两种类型的穿越方式:

A 型——由小方块上对角线上的一格点通过两根键达到同一对角线上的另一格点. 这种方式存在两条等距路径, 每条均贡献一个因子 $\mathrm{th}^2K$.

B型——穿越小方块的两个格点不在同一对角线上．这种方式也存在两条路径，但一条只经过一根键，贡献因子 $\mathrm{th}K$，另一条经过三根键，贡献因子 $\mathrm{th}^3K$．在线性键路径上具有这两种类型穿越方式的小方块数目是确定的．图 14-5(iii) 显示包含于表示式(14.12)中的一个最一般的具有非零贡献的键位形．

对线性键路径来说，如果路径上有 $L$ 个 A 型和 $L'$ 个 B 型小方块，则它对(14.12)式贡献因子：

$$(2\,\mathrm{th}^2K)^L(\mathrm{th}K+\mathrm{th}^3K)^{L'}. \tag{14.13}$$

其余圈图的贡献为：

$$\begin{aligned}&1+(m-L-L')\,\mathrm{th}^4K+\frac{(m-L-L')!}{2!(m-L-L'-2)!}\,\mathrm{th}^8K\\&\quad+\cdots+(\mathrm{th}^4K)^{m-L-L'}\\&=(1+\mathrm{th}^4K)^{m-L-L'}.\end{aligned} \tag{14.14}$$

最终求得关联函数为：

$$\begin{aligned}\langle\sigma_K\sigma_{K'}\rangle&=\frac{1}{Z_n}(\mathrm{ch}K)^M2^{N_n}2^L(\mathrm{th}^2K)^L(\mathrm{th}K+\mathrm{th}^3K)^{L'}(1\\&\quad+\mathrm{th}^4K)^{m-L-L'}\\&=\left(\frac{2\mathrm{th}^2K}{1+\mathrm{th}^4K}\right)^L\left(\frac{\mathrm{th}K+\mathrm{th}^3K}{1+\mathrm{th}^4K}\right)^{L'}\end{aligned} \tag{14.15}$$

当 $K\neq\infty$(即温度 $T\neq0$)时，下式成立：

$$\frac{2\mathrm{th}^2K}{1+\mathrm{th}^4K}<1,\qquad\frac{\mathrm{th}K+\mathrm{th}^3K}{1+\mathrm{th}^4K}<1. \tag{14.16}$$

倘若将 $L+L'$ 定义为 $K$ 与 $K'$ 间的距离，上述结果显示出自旋关联急剧地随距离增加而减小．采用渐近表示式：

$$\langle\sigma_K\sigma_{K'}\rangle\propto\exp[-(L+L')/\xi], \tag{14.17}$$

关联长度将是：

$$\xi\propto\left[\ln\frac{1+\mathrm{th}^4K}{2\,\mathrm{th}^2K}\right]^{-1}. \tag{14.18}$$

这里已将(13.15)式中因子$\left(\frac{\mathrm{th}K+\mathrm{th}^3K}{1+\mathrm{th}^4K}\right)^{L'}$的贡献略去，因为通常 $L'\ll L$．从(14.18)式可看出，当 $K\to\infty$ 时(即趋近临界点

时)$\xi\to\infty$; 而当$K$为任何有限值时，$\xi$为有限. 这再次证明只存在零温相变.

## §15 塞尔宾斯基铺垫上渗流相变

本节介绍分形晶格上的渗流相变[12]. 我们采用第1章中谈过的无哈密顿量系统的重整化群方法. 为说明的方便，先介绍正方形格子上(平移对称系统)如何进行键渗流的重整化群处理.

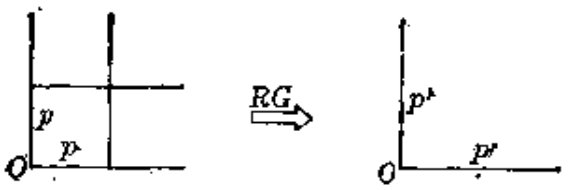



图 15-1

首先，适当地选取元胞，使晶格线性尺度增大$b$倍. 例如选取$b\times b=2\times 2$元胞，重整化群变换的模式为图15-1所示. 这里晶格的线性尺度增大一倍.

其次，定义如下重整化群变换

$$p'=\sum_{K,\alpha}A_K(\alpha)p^K(1-p)^{5-K}, \qquad (15.1)$$

式中$p$与$p'$是变换前、后键的占据概率，$A_K(\alpha)$是元胞的8根键中含$K$根键的被占位形$\alpha$对$p'$的贡献：如果该位形能在元胞内形成渗流态，即形成向上(或向右)穿过元胞的集团位形，则$A_K(\alpha)=1$，否则为0.

现我们观察左右连通的集团位形，它们展示在图15-2中，图中未标$p$的棱代表未被占据. 容易发现，图15-2中最左边的竖直棱，不论它是否被占，均对左右连通的渗流不起作用，因此我们忽视它. 此外，由图15-3给出的各种位形(共32−16=16种)均不形成从左至右的渗流态，因而取$A_K(\alpha)=0$. 因此在现有例子中，表示式(15.1)写作：

$$p'=2p^2(1-p)^3+8p^3(1-p)^2+5p^4(1-p)+p^5. \qquad (15.2)$$

这一关系便是重整化群变换的递推关系. 变换的不动点$p^*=p'=$

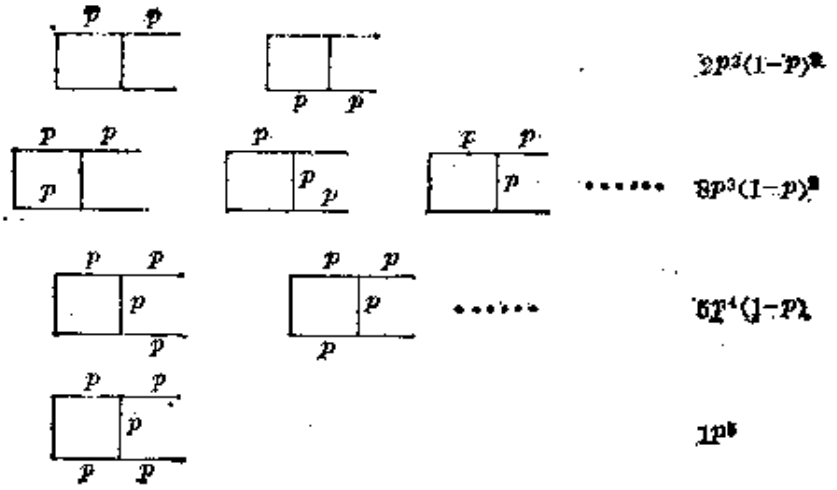


图 15-2

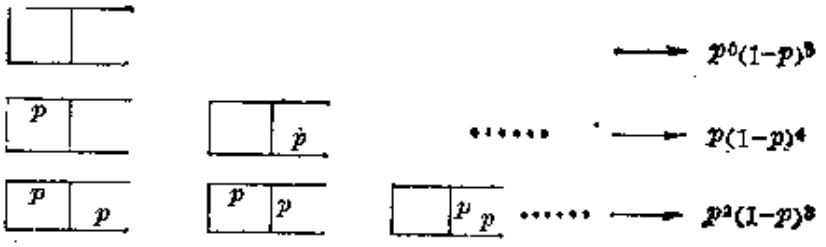


图 15-3

$p=0$, $\frac{1}{2}$, 1. 不稳定不动点为 $p^*=\frac{1}{2}$.

为求关联长度临界指数，只需将 (14.2) 式在 $p^*=\frac{1}{2}$ 附近展开，取线性项：

$$p'=p^*+\left.\frac{\partial R}{\partial p}\right|_{p=\frac{1}{2}}(p-p^*)=p^*+\lambda(p-p^*), \qquad (15.3)$$

立即得出 $\nu=\frac{\ln b}{\ln \lambda}=1.43$.

现在回到塞尔宾斯基铺垫晶格上的键渗流问题. 我们考察如图 15-4 的重整化群变换模式. 将左边大三角形被占键的上下连通位形(渗流态)映射为右边三角形的键上下连通态. 也可只研究它们的上下不连通位

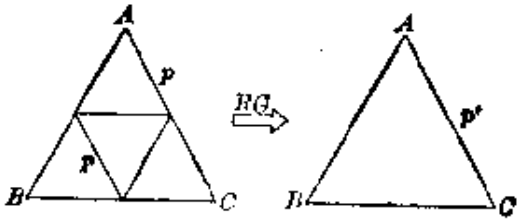


图 15-4

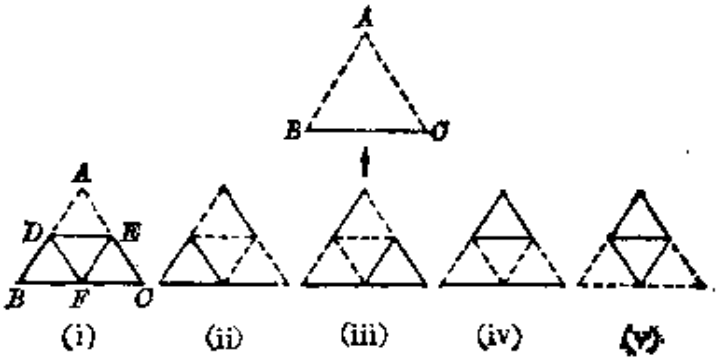



图 15-5

形，即 $A$ 与 $B$、$C$ 分离. 图 15-5 是各种不连通位形，虚线代表不被占的棱，实线代表占据键，因而变换前的五种不连通位形对应变换后的不连通位形. 故可写出重整化群变换的递推关系：

$$q'^2[q'+(1-q')]=q'^2=q^2[(1-q)+q]^7+4q^4[(1-q)+q]^5,$$

或

$$q'^2=q^2+4q^4. \tag{15.4}$$

上式中，$q=1-p$ 代表棱不被占的概率，因子$[(1-q)+q]$表示棱被占或不被占都不影响 $A$ 与 $B$、$C$ 的上下连通性，因此相当提供因子 1. 递推关系的不动点 $q^*=q'=q=0$，即 $p^*=p'=p=1$. 由于塞尔宾斯基铺垫的分岔度是有限的，因而预期它应有平庸相变，对 $q>0$ 的任何值，塞尔宾斯基铺垫均会分裂为许多有限大小集团.

## §16 塞尔宾斯基铺垫上的电导

受塞尔宾斯基铺垫几何结构影响的另一个物理量，是在其上的电阻网络的电导[123]. 现将前面两个自旋间的磁键(磁相互作用)换成电阻，即每根键看作是具有相同大小的电阻. 原则上，一个大的超四面体的电阻，在进行标度变换前后，不应改变. 为构造递推关系，现对比两个总边长为 $2a$ 的超四面体($a$ 为重标前键的长度，图 16-1 是二维欧氏空间的这种结构)，一个由长度为 $a$ 的键组成，另一为由长度 $2a$ 的重标键(电阻)组成. 现由顶点将电流 $I$ 输

至两个超四面体，结果在其余 $d$ 个顶点流出电流为 $\frac{I}{d}$（$d$ 为欧氏空间的维数）. 现在设两个四面体相应的电压相同，要找出重标电阻 $R(2a)$ 与原来电阻 $R(a)$ 的关系. 利用图 16-1，设电流由 $\alpha$ 输入，在 $\beta$ 与 $\gamma$ 处各输出电流 $\frac{I}{2}$. 从对称性考虑，连接 $\sigma_2$、$\sigma_3$ 的电阻不应存在电流. 因而 $\alpha$ 与 $\gamma$ 间的等效电阻可由直流电路知识得出：

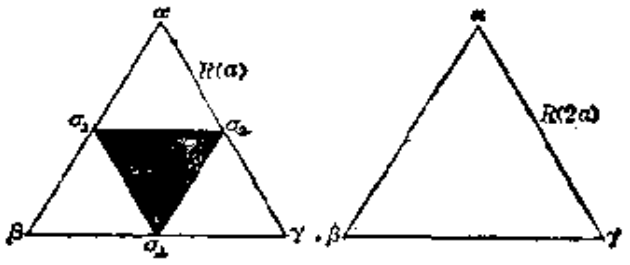


图 16-1

$$R(2a)=R_{\sigma_1\alpha}+\frac{1}{\dfrac{1}{R_{\sigma_1\gamma}}+\dfrac{1}{R_{\sigma_1\sigma_2}+R_{\sigma_1\gamma}}}, \tag{16.1}$$

更一般地，等效电阻的表示式为

$$R(2a)=\frac{d+3}{d+1}R(a). \tag{16.2}$$

将其重写为下列形式：

$$R(2a)=2^{\tilde{\zeta}}R(a). \tag{16.3}$$

对比后，可得

$$\tilde{\zeta}=\ln\left(\frac{d+3}{d+1}\right)\Big/\ln 2. \tag{16.4}$$

长度标尺为 $L$ 的重整化电阻便为

$$R(La)\propto L^{\tilde{\zeta}}R(a). \tag{16.5}$$

现定义长度标尺为 $L$ 的等效均匀介质的电导率为

$$\sigma(La)\propto L^{2-d}/R(La). \tag{16.6}$$

将其写为

$$\sigma(La)\propto L^{-\tilde{t}},\qquad \tilde{t}=d-2+\tilde{\zeta}, \tag{16.7}$$

这样就得到了电导率的标度形式.

# 第 3 章

# 分形上自旋系统的相变(II)

本章研究具有无限分岔度的分形晶格，如塞尔宾斯基地毯，钻石型等级(diamond-type hierarchical lettice)晶格上的磁有序-无序相变，相变是在有限温度上发生，因此决不是平庸的．本章不仅涉及铁磁系统，而且还涉及反铁磁系统和稀释系统。

## §17 梅格达尔-卡丹诺夫键移重整化群方法

这一方法是由梅格达尔和卡丹诺夫于 1975 年和 1976 年建议和发展的，[19],[20] 它不像部分格点消约法那样精确，而是一种近似方法．本节的讨论将看到它的近似之处．此外，这种方法往往要跟部分格点消约法联合使用，才能最终达到目的．

设伊辛自旋系统的哈密顿量为 $H[\sigma]$，它的长度标尺为 $a$，格点自旋为 $\sigma=\pm1$，哈密顿量为所有格点自旋的函数．倘若作标度变换，将长度标尺扩大 $b$ 倍，这时系统的哈密顿量为 $H'[\mu]$，$\mu$ 为重整化的伊辛自旋变量．按前章所述，写出下列变换关系：

$$e^{H'[\mu]}=\sum_{\{\sigma\}}p(\mu,\sigma)e^{H[\sigma]}, \tag{17.1}$$

$p(\mu,\sigma)$为重整化群变换算符．现将上式改写为：

$$e^{H'[\mu]}=\sum_{\{\sigma\}}e^{T(\mu,\sigma)+H[\sigma]}, \tag{17.2}$$

其中 $T(\mu,\sigma)=\ln p(\mu,\sigma)$．正如上章提到的，在配分函数经重整化群变换保持不变的要求下，显然应有：

$$\sum_{\mu}e^{T(\mu,\sigma)}=1. \tag{17.3}$$

(17.2)通常很难进行求和运算，因此提出了一个自由能下界近似．这实际上是通过变分手段以确保上述求和能够进行，并使结果最

优化.

现引入一个近似哈密顿量 $H'_{\Delta}[\mu]$. 它定义为:

$$e^{H'_{\Delta}[\mu]}=\sum_{\{\sigma\}}e^{T(\mu,\sigma)+H[\sigma]+\Delta(\mu,\sigma)}, \tag{17.4}$$

其中 $\Delta(\mu,\sigma)$ 通过变分法选取，它应使计算误差尽可能小. 同时，要求 $\Delta(\mu,\sigma)$ 满足下列两条: (i) $\Delta(\mu,\sigma)$ 为实数; (ii) $\sum_{\{\mu\}}\sum_{\{\sigma\}}e^{T(\mu,\sigma)+H[\sigma]}\Delta(\mu,\sigma)=0$. 在这些条件下，自由能将满足下列不等式:

$$F[H'_{\Delta}]\leqslant F[H]=F[H']. \tag{17.5}$$

为看清这点，我们引入下列自由能:

$$F(\lambda)=-kT\ln\sum_{\{\mu\}}\sum_{\{\sigma\}}e^{T(\mu,\sigma)+H[\sigma]+\lambda\Delta(\mu,\Delta)}. \tag{17.6}$$

显然，当 $\lambda=0$ 时得到系统真实的自由能，当 $\lambda=1$ 时，得到近似哈密顿量相应的自由能. 即

$$\begin{aligned}F(0)&=F(H)=F(H'),\\ F(1)&=F(H'_{\Delta}).\end{aligned} \tag{17.7}$$

将(17.6)式中的 $\lambda$ 看作是连续变化的量，求下列微分:

$$\left(\frac{dF}{d\lambda}\right)_{\lambda=0}=-kT\langle\Delta\rangle=0, \tag{17.8}$$

式中微分等于 0 是考虑到前面对 $\Delta(\mu,\sigma)$ 的要求. 同样,

$$\left(\frac{d^2F}{d\lambda^2}\right)_{\lambda=0}=-kT(\langle\Delta^2\rangle-\langle\Delta\rangle^2). \tag{17.9}$$

在表示式(17.8)及(17.9)中，利用了统计平均的定义:

$$\begin{aligned}\langle\Delta\rangle&=\frac{1}{z[H']}\sum_{\{\mu\}}\sum_{\{\sigma\}}A(\mu,\sigma)e^{T(\mu,\sigma)+H(\sigma)}\\ &=\frac{1}{z[H']}\sum_{\{\mu\}}Ae^{H'[\mu]}.\end{aligned} \tag{17.10}$$

注意到(17.9)式中

$$\langle\Delta^2\rangle-\langle\Delta\rangle^2=\langle(\Delta-\langle\Delta\rangle)^2\rangle\geqslant 0, \tag{17.11}$$

因而自由能 $F$ 随 $\lambda$ 增加而递减，这样便证明了(17.5)式.

假如选取

$$\Delta(\mu,\ \sigma)=\sum_{\alpha,i}c_i^{\alpha}a_i^{\alpha}(\mu,\ \sigma),\qquad(17.12)$$

其中 $c_i^{\alpha}$ 与 $\mu$ 和 $\sigma$ 无关，是某个常数．使其对所有 $\alpha$ 都满足

$$\sum_i c_i^{\alpha}=0.\qquad(17.13)$$

这样的 $\Delta(\mu,\ \sigma)$ 必定能满足 $\langle\Delta\rangle=0$．实际上，由于(17.8)中求和 $\sum_{\{\mu\}}\sum_{\{\sigma\}}a_i^{\alpha}(\mu,\ \sigma)\exp(T+H)$ 与 $i$ 无关，(17.13)式自然获得满足．

现在来考察(17.13)式的具体含意．设 $H[\sigma]$ 代表正方形晶格上的伊辛哈密顿量，它仅含最近邻相互作用，相互作用常数为 $K$，最近邻自旋间以键相连，键的强度为 $K$．现选取 $\Delta(\mu,\ \sigma)=-K\sigma_1\sigma_2+K\sigma_3\sigma_4$，它显然满足(17.13)式，而哈密顿量 $H[\sigma]$ 中含有 $K\sigma_1\sigma_2+K\sigma_3\sigma_4$，这两部分之和产生 $2K\sigma_3\sigma_4$．它相当于进行图 17-1 所示的键移操作，即将 $\sigma_1\sigma_2$ 间的键移到 $\sigma_3\sigma_4$ 之间，使 $\sigma_1\sigma_2$ 间缺键而 $\sigma_3\sigma_4$ 间键强度增为 $2K$．

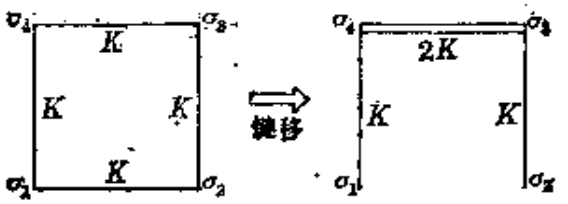



图 17-1

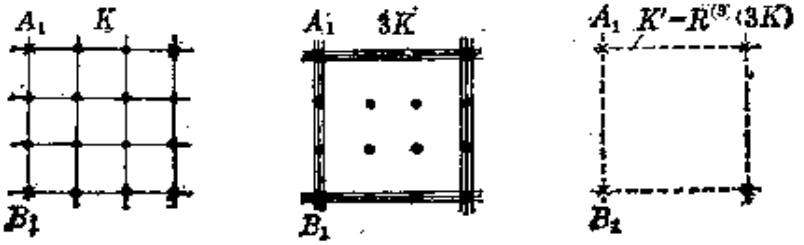



图 17-2

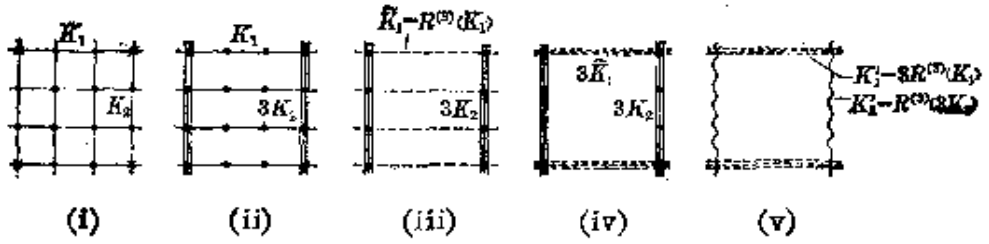
利用键移操作，可以实现增大长度标度的目的．图 17-2 是无限大正方形晶格上在水平和竖直方向上整体进行键移的实例．必须注意，只有将此操作与部分格点消约方法相结合，才能最终改变长度标度．例如，图中经键移后的 $A_1$、$B_1$ 两格点间还有两个格点自旋，必须对它们进行求和，才能消去它们，使 $A_1$、$B_1$ 变为最近邻，最终求得变换后($b=3$)相互作用常数 $K'$ 与变换前相互作用常数 $K$ 之间的如下关系：

$$K'=R(K)=\mathrm{th}^{-1}(\mathrm{th}\,3K)^3. \tag{17.14}$$

对任意 $b$ 值，可写出：

$$K'=\mathrm{th}^{-1}(\mathrm{th}\,bK)^b. \tag{17.15}$$

如果键移操作在水平和竖直方向上分先后进行，那么可能产生各向异性相互作用的伊辛模型．形成这种情况的原因，是键移操作与部分格点消约操作彼此不对易．这点显示在图 17-3 中．




(i) (ii) (iii) (iv) (v)

图 17-3

容易验证，最后得到的重整化群变换递推关系为：

$$\begin{cases} K'_x=b\,\mathrm{th}^{-1}(\mathrm{th}\,K)^b=R_x(K), \\ K'_y=\mathrm{th}^{-1}(\mathrm{th}\,bK)^b=R_y(K). \end{cases} \tag{17.16}$$

显然，在 $x$、$y$ 方向上的重整化相互作用是不同的．为了保持原先各向同性的相互作用，可将 $K'_x$ 和 $K'_y$ 对称化：

$$K'=\frac{1}{2}(K'_x+K'_y)=\beta_b(K). \tag{17.17}$$

现考虑一个无穷小变换：$b=1+\varepsilon$，其中 $\varepsilon$ 为无穷小量．将 (17.16)式中两式按 $\varepsilon$ 展开，精确到 $\varepsilon^2$ 级，可写出：

$$\begin{cases} K'_x=K+\beta(K)\varepsilon, \\ K'_y=K+\beta(K)\varepsilon. \end{cases} \tag{17.18}$$

其中

$$\begin{aligned}\beta(K)&=\left.\frac{dR_x(K)}{db}\right|_{b=1}=\left.\frac{dR_y(K)}{db}\right|_{b=1} \\ &=(\mathrm{sh}\,K)(\mathrm{ch}\,K)\ln(\mathrm{th}\,K).\end{aligned} \tag{17.19}$$

所以，在无穷小变换下，系统将保持各向同性．

## §18 塞尔宾斯基地毯上伊辛模型的相变

将伊辛自旋放在具有微观晶格常数的塞尔宾斯基地毯的格点上，包括挖去了面积的边界格点上[5]. 哈密顿量为：

$$\mathscr{H}=-J\sum_{\text{最近邻}}\sigma_i\sigma_j-J_W\sum_{\text{最近邻}}\sigma_{i'}\sigma_{j'}. \tag{18.1}$$

改写成约化形式：

$$-\beta\mathscr{H}=K\sum_{\text{最近邻}}\sigma_i\sigma_j+K_W\sum_{\text{最近邻}}\sigma_{i'}\sigma_{j'}. \tag{18.2}$$

其中 $K\equiv\frac{J}{kT}$，$K_W\equiv\frac{J_W}{kT}$，它们分别代表两类不同键的相互作用常数，强度为 $K$ 的键的两边面积均保留，而强度为 $K_W$ 的键只有一边有面积，另一边面积被挖去. 引入这两类键的目的，在于使重整化群变换的结果能保持参数空间不变，意即不会由于变换产生新的相互作用. 实际上，由于我们将使用梅格达尔-卡丹诺夫键移重整化群方法，倘若一开始只有单一参数，则处在不同位置的键经过键移的结果会产生不同的作用常数，这就不能保证参数空间的封闭性，因而破坏哈密顿量的对称性.

为了看清重整化群变换怎样进行，我们具体观察一个中心挖去的塞尔宾斯基地毯. 重整化群变换分两步进行：先进行键移，再通过求和消约掉部分格点自旋. 表征这两步骤的图见图 18-1. 图中键上的小箭头代表键的移动方向. 为了避免产生各向异性的重整化键，将 $x$ 和 $y$ 方向同时进行键移. 由图可见，键移后的 $AB$ 键由 $3K$，$K+2K_W$ 和 $3K$ 三段串接而成(图中 $A12B$)，将位于

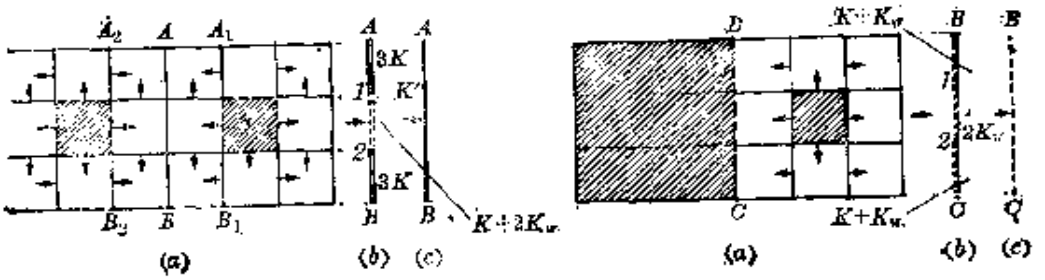



图 18-1

1、2 两点的自旋消去（即对其进行状态求和运算），使最终产生重整化键强度 $K'$，它与 $K$ 和 $K_W$ 的关系为：

$$\mathrm{th}\,K' = \mathrm{th}^2 3K\,\mathrm{th}(K+2K_W). \tag{18.3}$$

它是由下列计算得到：

$$A e^{K'\sigma_A\sigma_B} = \sum_{\sigma_1,\sigma_2} \exp[3K(\sigma_A\sigma_1+\sigma_2\sigma_B)+(K+2K_W)\sigma_1\sigma_2]. \tag{18.4}$$

类似地，可求出重整化的 $BO$ 键的强度 $K'_W$，它由下列计算得到：

$$A' e^{K'_W\sigma_B\sigma_O} = \sum_{\sigma_3,\sigma_4} \exp[(K+K_W)(\sigma_B\sigma_3+\sigma_4\sigma_O)+2K_W\sigma_3\sigma_4]. \tag{18.5}$$

$K'_W$ 与 $K$、$K_W$ 的关系为：

$$\mathrm{th}\,K'_W = \mathrm{th}^2(K+K_W)\,\mathrm{th}\,2K_W. \tag{18.6}$$

(17.3)和(17.6)式便是重整化群变换的递推关系. 这些关系是晶格线性标度改变三倍的结果. 顺便提到，(18.4)和(18.5)式中 $A$ 与 $A'$ 是右边求和产生的常数，它只影响系统的自由能.

推广到中心有 $l\times l$ 大小的方块被挖掉的情况，可类似地产生下列递推关系：

$$\mathrm{th}K' = \mathrm{th}^l[(b-l-1)K+2K_W]\,\mathrm{th}^{b-l}(bK), \tag{18.7}$$

$$\mathrm{th}\,K'_W = \mathrm{th}^l\left[\frac{1}{2}(b-l-2)K+2K_W\right]\mathrm{th}^{b-l}\left[\frac{1}{2}(b-1)K+K_W\right]. \tag{18.8}$$

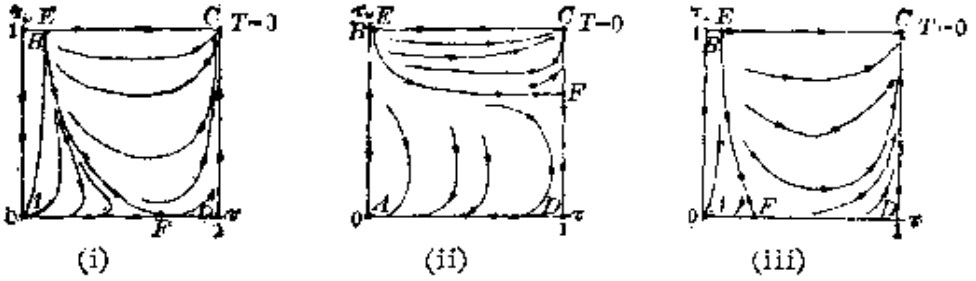
这两个递推关系在二维参数空间 $(K,\ K_W)$ 内是封闭的.

为今后讨论方便起见，引入两个新变量 $\tau=\mathrm{th}K$，$\tau_W=\mathrm{th}K_W$，我们来讨论变换的不动点 $\tau^*=\mathrm{th}\,K^*$ 及 $\tau^*_W=\mathrm{th}\,K^*_W$. 由于 $l\times l$ 方块是放在 $b\times b$ 方块的中心，故有 $b\geqslant l+2$. 在 $b>l+2$ 情况下，由方程组(18.7)、(18.8)解得三个平庸不动点：

$$(\tau^*,\ \tau^*_W) = (0,\ 0),\ (0,\ 1),\ (1,\ 1). \tag{18.9}$$

它们分别对应参数空间 $(\tau,\ \tau_W)$ 中的 $A$、$B$ 和 $O$ 三点. 而对 $b=l+2$，存在一个附加的平庸不动点 $D$：

$$(\tau,\ \tau_W) = (1,\ 0). \qquad (b=l+2) \tag{18.10}$$




(i) (ii) (iii)

图 18-2

下面将用计算机解得的递推关系方程组(18.7)、(18.8)在二维参数空间($\tau$, $\tau_W$)中绘出的流图展示在图 18-2(i)、(ii)、(iii)中. 可看出，不动点 $D$ 在图(i)、(ii)中出现，但在图(iii)中不出现，因后者 $b=7$、$l=3$，不满足 $b=l+2$(图 ii 为 $b=3$、$l=1$，图 iii 为 $b=7$、$l=5$). 现在逐个来分析这些不动点的意义：

(1) 不动点 $A$：对应 $K=K_W=0$. 相当温度为无穷大，系统为顺磁态，完全无序，因而称为顺磁不动点.

(2) 不动点 $B$：$K=0$, $K_W=\infty$. 它描写一种各向异性系统，在这种系统中，处于"壁"(它的一边面积被挖去)上的格点自旋间具有无穷大强度的耦合.

(3) 不动点 $C$：$K=K_W=\infty$. 相当零温系统. 系统处于完全有序的铁磁态，这是铁磁不动点.

(4) 不动点 $D$：对应 $K=\infty$, $K_W=0$. 也是零温，但在"壁"上的格点自旋间完全没有相互作用，是个自由端. 该不动点以及整个 $K_W=0$ 线描写图 18-3 的结构，在被挖去方块的边界上根本没有键，因此图上连虚线也不画.

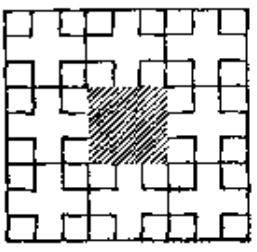


图 18-3

接着讨论沿一些特殊轴的重整化群流：

(1) 在轴 $\tau_W$ 上，从 $(0, \tau_W)$ 出发重整化群流沿此轴由 $B$ 流向 $A$. 同样，在 $\tau_W=1$ 轴上，由该轴出发的重整化群流也不偏离此轴. 假如在 $B$、$C$ 不动点附近展开递推方程组，研究它们的稳定性，可以发现，存在着沿 $\tau_W=1$ 轴分别指向 $B$ 和 $C$ 的重整化群流. 这表明在此轴上一定还有另一个不动点，它沿

该轴是不稳定的(该不动点在图上用 $E$ 标出). 现在还需要来区分 $b=l+2$ 和 $b>l+2$ 两种情况,对它们分别进行讨论.

(2) 在 $b=l+2$ 情况下, 前已提到 $D$ 是一个不动点, 在 $\tau$ 轴 ($\tau_W=0$) 上出发的流停留在自身轴上, 从 $D$ 流向 $A$. 前面曾称沿此线的点对应自由端位形.

在 $\tau=1$ 轴上, 重整化群流也保持在此轴上, 如果将递推方程在 $O$ 和 $D$ 附近展开, 立即显示出沿此轴这两个点是稳定的, 因而必定在此轴上还有一个不稳定不动点, 用 $F$ 表示该点. 但对图 18-2(i), 情况有点特殊, 它并不存在 $F$ 点, 这将在后面说明.

(3) 在 $b>l+2$ 情况下, 如前所述 $D$ 不再是不动点. 倘若从 $\tau$ 轴 ($\tau_W=0$) 开始, 在重整化群变换下, 流会离开该轴, 逐渐发展为使 $\tau_W$ 具有有限值. 在 $\tau=1$ 轴上所有点(包括 $D$ 点)在变换下都流向不动点 $O$. 另一个非平庸不动点 $F$ 则从 $\tau=1$ 轴上移开, 而出现在 $\tau$ 轴附近.

以上有关各不动点附近重整化流的指向, 都是从不动点附近的稳定性分析得到的. 稳定性分析的基本精神, 是将递推关系在不动点附近作线性展开, 研究导数 $\frac{\partial\tau'}{\partial\tau}$, $\frac{\partial\tau'}{\partial\tau_W}$, $\frac{\partial\tau'_W}{\partial\tau}$, $\frac{\partial\tau'_W}{\partial\tau_W}$ 构成的矩阵的本征值及其相应本征矢, 由本征值 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 的大小(是否大于 1), 来判断重整化流在本征矢方向的指向. 详细的数学推导极其繁杂, 这里从略, 有兴趣的读者可参阅有关文献.

总之, 我们看到三种典型的流图. 图 18-2(i) 是 $b=3$、$l=1$ 的特殊情况, 它不同于所有 $b=l+2>3$ 情况. 后一情况用(ii)图表示 ($b=l+2=7$). 而(iii)图表示 $b>l+2$ ($b=7, l=3$) 的典型流图. 在所有这些情况下, $EF$ 线都代表临界线, 它将无序相(流向 $A$)与有序相(流向 $O$)分开. $E$ 为三临界点, $F$ 为临界点. 对应的临界指数 $\nu=\frac{1}{y_{F1}}$, 这里 $y_{F1}$ 是 $F$ 点的温度标度指数, 即 $t'=b^{y_{F1}}t$, $b$ 为线度长度重标因子. 有关的数值结果列于表 18.1 中. ($\tau_0$ 为临界值, 它

表 18.1

| $b$ | $l$ | $D$ | $Q$ | $\tau_E^*$ | $y_{E,\tau}$ | $y_{E,\tau_W}$ | $(\tau_F,\ \tau_{W,F})$ | $y_{F1}$ | $y_{F2}$ | $\tau_0(=\tau=\tau_W)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 1.893 | 0.631 | 0.120 | 0.5621 | 0.4119 | (0.6995, 0.0156) | 0.2237 | −0.797 | 0.311 |
| 7 | 5 | 1.633 | 0.356 | 0.021 | 0.3483 | 0.2926 | (1, 0.66) | 0.34 | −0.920 | 0.665 |
| 11 | 9 | 1.538 | 0.289 | 0.0083 | 0.2870 | 0.2544 | (1, 0.80) | 0.28 | −0.940 | 0.80 |
| 15 | 13 | 1.486 | 0.256 | 0.0045 | 0.2546 | 0.2329 | (1, 0.86) | 0.25 | −0.963 | 0.86 |
| 7 | 3 | 1.896 | 0.712 | 0.087 | 0.594 | 0.445 | (0.261, 0.013) | 0.524 | −1.436 | 0.194 |
| 11 | 7 | 1.784 | 0.578 | 0.045 | 0.5116 | 0.3889 | (0.44, 0.0033) | 0.418 | −1.239 | 0.271 |
| 15 | 11 | 1.716 | 0.512 | 0.029 | 0.4657 | 0.3601 | (0.53, 0.0010) | 0.383 | −1.468 | 0.333 |
| 11 | 3 | 1.968 | 0.867 | 0.085 | 0.6480 | 0.5108 | (0.122, 0.00917) | 0.650 | −2.049 | 0.113 |
| 15 | 7 | 1.329 | 0.768 | 0.058 | 0.5984 | 0.4690 | (0.148, 0.00174) | 0.558 | −1.953 | 0.123 |
| 31 | 29 | 1.394 | 0.202 | 0.0010 | 0.2027 | 0.1927 | (1, 0.934) | 0.198 | −0.9866 | 0.93 |
| 31 | 23 | 1.767 | 0.606 | 0.024 | 0.5086 | 0.3980 | $(0.244,\ 3\cdot10^{-5})$ | 0.477 | | 0.191 |
| 31 | 11 | 1.961 | 0.872 | 0.041 | 0.6105 | 0.5162 | (0, 0) | | | 0.06 |
| 31 | 3 | 1.997 | 0.970 | 0.047 | 0.6370 | 0.5608 | (0, 0) | | | 0.049 |

是 $FF$ 与对角线 $\tau_0=\tau=\tau_W$ 的交点)

本节最后讨论临界指数与分形维数 $d_f$ 连接性 $Q$ 及不均匀性 $L$ 的关系.

首先研究它们跟 $d_f$ 和 $Q$ 的关系,假定保持 $b$ 或 $l$ 不变,(但不是同时不变)而使 $d_f$ 及 $Q$ 改变,便可发现临界指数随 $d_f$ 或 $Q$ 单调变化. 一个值得注意的例外是 $b=l+2=3$ 情况. 在那里 $y_{F1}$ (因而 $\nu$) 不遵守随 $d_f$ 单调减少的规律. 这种特殊性在图 18-2(i) 中明显地反映出来. 除此而外,临界指数 $\nu$ 随 $d_f$(和 $Q$)减少而增加.

其次,再看临界指数与不均匀性 $L$ 的关系:为此我们使 $d_f$、$R$、$Q$ 保持恒定,仅仅改变 $L$. 为实现这一点,必须用不同方式来挖去小方块. 例如可分散地而不是集中于中心挖去小方块. 第一章曾给出了分散挖法的实例,利用该实例,考察 $l=\frac{1}{2}(b-1)$ 情况,可得变换递推关系为:

$$\mathrm{th}\,K'=\mathrm{th}^{b-l}(bK)\,\mathrm{th}^{l}[K+(b-1)K_W], \qquad (18.11)$$

$$\mathrm{th}\,K'_W=\mathrm{th}^{b-l}(lK+K_W)\,\mathrm{th}^{l}[(l+1)K_W]. \qquad (18.12)$$

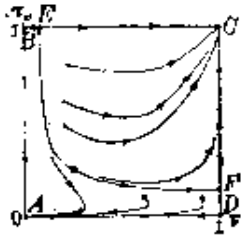


图 18-4

通过类似的分析,可得出下列流图 (图 18-4). 在定性上,其结果与图 18-2 类似,但在定量上是很不同的. 尽管图 18-4 也是对 $b=7$ 和 $l=3$ (它保证 $d_f$ 和 $Q$ 不变)给出的,但不动点 $F$ 却位于 $(\tau,\ \tau_W)=(1,\ 0.1448)$ 相应的指数 $y_{F1}\approx 0.460$ 而不是 0.524, $y_{F2}\approx -0.335$, 而不是 $-1.436$. 不动点 $E$ 及其临界指数保持不变. 故可认为,当 $d_f$ 和 $Q$ 一定时,临界指数 $\nu$ 随不均匀性 $L$ 减小而增加,这似乎意味着几何结构的不均匀性会影响普适行为,这点稍后还要讨论.

## §19 塞尔宾斯基地毯上的电阻网络

本节用与上节相同的近似重整化群方法来研究塞尔宾斯基地

毯上的电阻网络的电阻率的标度行为[13]. 将电阻 $R_w$ 放在上节的 $K_w$ 键上，电阻 $R$ 放在 $K$ 键上. 在进行重整化步骤时，先将电阻移到每个大方块的周界上，继而将并联电阻的电阻率相加，最后将所得串联电阻率求和. 这样就得到重整化系统的等效电阻.

对那些对称地中心挖去的系统，可得下列递推关系：

$$R'=\frac{(b^2+l^2-lb-2b+2l)RR_w+3(b-l)R^2}{b[R_w(b-l-2)+3R]}, \tag{19.1}$$

$$R'_w=\frac{RR_w^2 2(b^2+l^2-lb-2b+l)+4(2b-l)R^2R_w}{[(b-l)R_w+2R][(b-l-2)R_w+4R]}. \tag{19.2}$$

这个方法对平移对称二维晶格是精确的，不管 $b$ 取什么值.

现在研究参数空间 $(R, R_w)$ 的流. 由于现在使用电阻率而不是电导率来进行分析，因此以前的 $(0, 0)$ 点类似于现在的 $(\infty, \infty)$ 点. 首先考虑某些极限情况：

(1) $R=0$: 经一次迭代，所有重整化群流抵达 $(0, 0)$ 点；

(2) $R_w=0$: 在此情况下，$R'_w=0$，$R'=\left(\frac{b-l}{b}\right)R$，因而位于 $R_w=0$ 轴上的流都流向 $(0, 0)$ 点；

(3) $R=\infty$: 可得 $R'=\infty$，$R'_w=\left(b-\frac{l}{2}\right)R_w>R_w$，重整化群流流向 $(\infty, \infty)$ 点.

(4) $R_w=\infty$: 代入(19.1)和(19.2)式后，可得

$$R'=\left(\frac{b-l}{b}+\frac{l}{b-l-2}\right)R>R,$$

和

$$R'_w=\left(\frac{2(b^2+l^2-lb-2b+l)}{(b-1)(b-l-2)}\right)R>R.$$

(5) $R=R_w$: 可得 $R'=\frac{(b-l)(b-l+1)+lb}{b(b-l+1)}R\geqslant R$ (当 $l=1$ 时，取等号)，$R'_w=\frac{2b^2+2l^2+2lb+4b-2l}{(b+1)(b-l+2)}R>R$. 若令 $a=\frac{R_w}{R}$，则可由前面的递推关系导出 $a$ 的递推关系：

$$\alpha'=\alpha b\{[2(b^2+l^2-lb-2b+l)\alpha+4(2b-l)]\cdot[(b-l-2)\alpha+3]\}\cdot\{[(b^2+l^2-lb-2b+2l)\alpha+3(b-l)][(b-1)\alpha+2][(b-l-2)\alpha+4]\}^{-1}. \tag{19.3}$$

当 $\alpha\ll1$时，上式可约化为近似递推关系：

$$\alpha'\approx\frac{(2b-l)b\alpha}{2(b-l)}. \tag{19.4}$$

可见 $\alpha'>\alpha$. 类似地，如果 $\alpha\gg1$，则有：

$$\alpha'=\frac{2b(b^2+l^2-lb-2b+l)}{(b-1)(b^2+l^2-lb-2b+2l)}. \tag{19.5}$$

所以 $\alpha'$ 变为 1 的数量级. 一般地，$\alpha$ 将流向一个不动点值，该值由下列方程确定：

$$b[2(b^2+l^2-lb-2b+l)\alpha+3(2b-l)][(b-l-2)\alpha+3]=[(b^2+l^2-lb-2b+2l)\alpha+3(b-l)][(b-1)\alpha+2]\cdot[(b-l-2)\alpha+4]. \tag{19.6}$$

当 $b\gg l$ 时 $d_f$ 接近 2，不动点 $\alpha^*=2$；对 $b=l+2\gg1$，$d_f$ 趋于 1，$\alpha^*=\frac{3}{2}$. 其他不动点值列于表 19.1 中.

表 19.1

| $b$ | $l$ | $\alpha^*$ | $\tilde{\zeta}$ | $2-d_f$ |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 1.712 | 0.194 | 0.107 |
| 5 | 1 | 1.922 | 0.048 | 0.025 |
| 5 | 3 | 1.580 | 0.424 | 0.277 |
| 9 | 1 | 1.982 | 0.0099 | 0.0057 |
| 9 | 3 | 1.918 | 0.085 | 0.054 |
| 9 | 7 | 1.525 | 0.605 | 0.423 |

当达到不动点 $\alpha^*$ 时，(19.1)和(19.2)式产生：

$$R'=\frac{(b^2+l^2-lb-2b+2l)\alpha^*+3(b-l)}{b[(b-l-2)\alpha^*+3]}R. \tag{19.7}$$

将其写成下列形式

$$R'=b^{\tilde{\zeta}}R, \tag{19.8}$$

便可求出指数 $\tilde{\zeta}$. 对超立方晶格，$\tilde{\zeta}=2-d$，这里 $d$ 为欧氏空间维数. 对现在研究的分形结构，在表 19.1 中列出了 $\tilde{\zeta}$ 值与 $2-d_f$ 的对比情况. 在 $b\gg l$ 和 $b=l+2\gg 1$ 的极限情况下，发现 $\tilde{\zeta}=0$ 和 $\tilde{\zeta}=1$ 与 $2-d_f$ 一致. 而在表 19.1 列出的所有情况，均有 $\tilde{\zeta}\geqslant 2-d_f$，同时显示出 $\tilde{\zeta}$ 随 $l$(当 $b$ 一定)和 $b$(当 $l$ 一定)单调地变化.

顺便提及，$R$ 的递推关系与低温下具有连续对称性 ($n\geqslant 2$ 自旋分量) 的自旋模型的 $K^{-1}=\frac{kT}{J}$ 的递推关系相同，临界指数对应于确定零温不动点的稳定性的临界指数. 由于发现 $\tilde{\zeta}>0$，该不动点是不稳定的，因而决不存在长程序. 这点是预料之中的，因为只考虑 $d_f<2$ 情况，对这些模型它们的下临界维数等于 2.

## §20 相变的普适性

正如前面曾提到的，相变理论中除了寻找临界点外，有两个重要基本问题要研究，一是标度问题，即研究在临界点附近各热力学量及关联函数，关联长度的临界行为，找出有关的临界指数；一是普适性问题，即研究相变普适类划分的判据，以便根据这些判据将相变系统划分为不同的普适类. 在平移对称系统中，这两个问题都已基本解决；在分形晶格系统中对前一问题已初步解决，但对相变的普适性问题至今尚未获得基本解决. 本节将讨论这一问题的一些重要方面.[21]~[29]

我们着眼于讨论塞尔宾斯基地毯上的离散自旋模型，设它们只含最近邻作用. 前面看到，临界指数与结构的几何参数：分形维数 $d_f$，连接性 $Q$ 和不均匀性 $L$ 有直接关系，因而它们似乎有可能充当相变的普适性判据. 然而，进一步的研究产生了怀疑.

首先，至今仍缺乏一个精确地描述塞尔宾斯基地毯几何结构不均匀性 $L$ 的数学公式. 按一些作者最初的意图，他们想找出一

个量，能定量地描述和区分具有相同 $d_f$ 和 $Q$，但空隙具有不同分布（例如，将中心面积集中挖去，或将相同面积分散地挖去）的各种结构。这个量必定应该是：当空隙分布得越集中，不均匀程度越大，因而这个量越大；反之，当空隙分布越分散，不均匀程度越小，因而该量越小。当分形晶格过渡到平移对称晶格时，不均匀程度为 0，因而该量应等于 0。这个量称作不均匀性 $L$，在上述过渡中它应满足 $L=0$ 的充分必要条件。其他任何存在空隙的情况都应有 $L\neq 0$。这个量的表示式为：

$$L=\frac{1}{n}\sum_i (n_i-\bar{n})^2. \tag{20.1}$$

式中各量的意义为：用 $l\times l$ 元胞去覆盖 $b\times b$ 元胞（$l<b$），在第 $i$ 种覆盖中有 $n_i$ 个子方块未被挖去，$n$ 为覆盖方式总数，$\bar{n}=\frac{1}{n}\sum_i n_i$。因此 $L$ 代表 $n_i$ 对它的平均值 $\bar{n}$ 的平方平均偏差。

然而，上述表示式不能满足所要求的充要条件。事实上，图 20-1(i)比(ii)明显地不均匀，但按(20.1)式却求得 $L=0$。为了克服这一困难，曾提出了多种改进的 $L$ 表示式方案。这些改进方案的基本思想是：不仅使用 $l\times l$ 的覆盖块，而且使用各种尺度的覆盖块，使得各种尺度的信息都包含在内。然而这些改进的表示式毕竟不是完美无缺的精确表示式。




图 20-1

其次，对各种类型的不同塞尔宾斯基地毯的研究表明：临界指数对几何参数 $d_f$、$Q$、$L$ 的依赖关系比较复杂，它实际上可能依赖非常多的结构详情。这里举出一个实例：曾发现具有相同 $d_f$、$Q$ 但不同 $L$ 的某些塞尔宾斯基地毯，当研究它们上面的箔茨模型的相

变时，却得到完全相同的重整化群变换递推关系，因而有完全相同的不动点和临界指数. 这似乎暗示 $L$ 不应作为普适性的判据之一.

总之，由于分形是自相似的，它在结构上的细微改变可能不导致长度标尺的改变，因此它给予建造分形时以广泛的自由，这就使得找到普适性判据的一个完全或有限集的希望变得非常渺茫. 尽管 $d_f$、$Q$、$L$ 这些量在描述分形几何时是很重要的，但不清楚它们是否可充当分形上相变的普适性判据. 从逻辑上说，应先证明存在普适性再来讨论普适性判据，目前对这一问题尚未得到解答.

## §21 金刚石型等级晶格上伊辛模型的相变

金刚石型等级晶格也是具有无穷分岔度的分形晶格，在讨论这种晶格上的相变之前，先对这种晶格作些介绍.

所有等级晶格都是由迭代过程生成，金刚石型等级晶格的生成法可描述如下：首先，设有一个由两点和一棱形成的晶格（$n=0$ 级），然后用含 $L$ 根棱的 $p$ 个分支取代上面的 $n=0$ 级结构，因而便形成 $n=1$ 级结构，接着重复上述迭代过程，直至无穷多次，最终形成金刚石型等级晶格. 这种晶格既可想象为由许多上述 $n=1$ 级结构（生成元）适当堆集而成，也可想象为任一级的一条棱含有 $n=1$ 级那样的内部结构. 不管那种观点，实质上都显示出这种晶格具有自相似结构，可视为一种规则的分形晶格. 图 21-1(i)、(ii)、(iii) 示出几种具有不同 $p$ 和 $L$ 值的金刚石型等级晶格. 作为

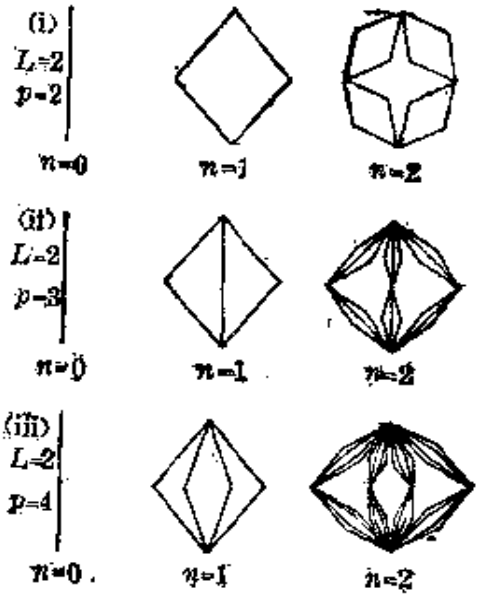



图 21-1

一类分形，它们的分形维数 $d_f=\frac{\ln N}{\ln L}=\frac{\ln pL}{\ln L}=1+\frac{\ln p}{\ln L}$. 这里看到，重标因子 $b=L$ 实际上指的是前一级的一条棱被下一级的 $L$ 条棱所代替，真实的线性长度在相邻两级棱之间并不存在 $L$ 倍的比例关系. 因此可以说，这是一个抽象的理论上的分形.

这种晶格在理论上受到很大重视，原因是它可能使其上的自旋模型的相变问题精确地求解. 同时还可通过改变 $p$、$L$ 值建造出具有各种不同分形维数的结构，以便考察相变温度，临界指数等随分形维数变化的规律.

现在在具有微观晶格间距的金刚石型等级晶格的格点上放上伊辛自旋($\sigma=\pm1$).[30] 模型哈密顿量为

$$-\beta\mathscr{H}=K\sum_{n.n.}\sigma_i\sigma_j,\qquad (K>0,\text{铁磁作用}) \tag{21.1}$$

$n.n.$ 代表最近邻自旋对，$K$ 为无量纲最近邻相互作用常数. 系统的配分函数为

$$z^{(n)}(K_n)=\sum_{\{\sigma\}}\exp(-\beta\mathscr{H}), \tag{21.2}$$

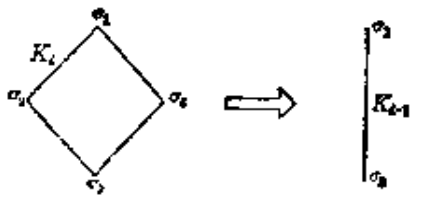


图 21-2

这里 $\{\sigma\}=\{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_i,\cdots\}$ 代表全部格点自旋的可能自旋态.

采用部分格点消约法来解相变问题，它的基本模式如图 21-2 所示. 在图中对 $\sigma_2$、$\sigma_4$ 自旋经过求和后，便得到相邻两级相互作用常数，即重整化的相互作用常数 $K_{i-1}$ 与原来相互作用常数 $K_i$ 之间的关系：

$$K_{i-1}=p\ln\sqrt{\mathrm{ch}(2K_i)}=R(K_i). \tag{21.3}$$

当结构由高级($n$ 较大)逐级向低级变化时，每次求和都产生一个因子 $[A(K_i)]^{(pL)^{i-1}}$，最后 ($n=0$ 级) 两个自旋求和产生因子 $A_1(K_0)$，因此配分函数可表为：

$$z^{(n)}(K_n)=A_1(K_0)\prod_{i=1}^{n}[A(K_i)]^{(pL)^{i-1}}. \tag{21.4}$$

其中 $K_i$ 为重整化的相互作用常数，它由 (21.3) 式决定. 而 $A_1(K_0)$ 和 $A(K_i)$ 分别为：

$$A_1(K_0)=4\mathrm{ch}K_0,$$
$$A(K_i)=[2\sqrt{\mathrm{ch}(2K_i)}]^p>1. \tag{21.5}$$

利用(21.4)式，可求得每根键的自由能为：

$$f=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(pL)^n}\ln z^{(n)}(K_n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(pL)^n}\left[\sum_{i=1}^{n}(pL)^{i-1}\ln A(K_i)+\ln A_1(K_0)\right]. \tag{21.6}$$

(21.6)式右边是一个正项级数，通项为 $(pL)^{i-1-n}\ln A(K_i)$. 容易验证，这个级数的收敛条件为：

$$\ln\{4\mathrm{ch}[p\ln\mathrm{ch}(2K_i)]\}<(pL)\ln[4\mathrm{ch}(2K_i)]. \quad (\text{对 } 1\leqslant i\leqslant n) \tag{21.7}$$

这个条件对任何 $0\leqslant K_i\leqslant\infty$ 均得到满足. 图 21-3 画出当 $p=L=2$ 时，(21.7)式两边的项对 $K$ 的曲线.

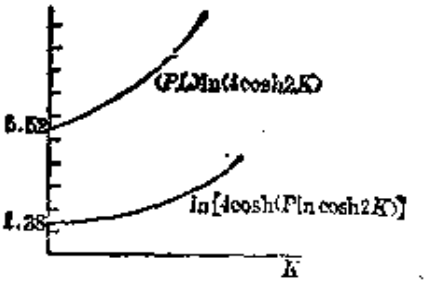


图 21-3

(21.3)式变换的不动点 $K^*$ 满足方程：

$$K^*=p\ln\sqrt{\mathrm{ch}(2K^*)}=R(K^*). \tag{21.8}$$

在不动点 $K^*$ 的自由能为

$$f=\frac{1}{pL-1}\ln A(K^*). \tag{21.9}$$

以下讨论不动点及其与 $p$ 的关系：图 21-4(i)、(ii)、(iii)、(iv)、(v)显示出在不同 $p$ 值下的递推关系(21.3). 计算和图形显示，在 $p$ 的各种取值下，都存在两个平庸不动点 $K^*=0,\infty$，然而除了 $p=1$ 和 $\infty$ 外都存在一个不稳定不动点，该点的数值随 $p$ 增加而减少. 在 $p=1$ 时，$K^*=\infty$ 为不稳定不动点，相当零温相变，系统在任何有限温度下均处于无序态，即顺磁态. 当 $p=\infty$ 时，

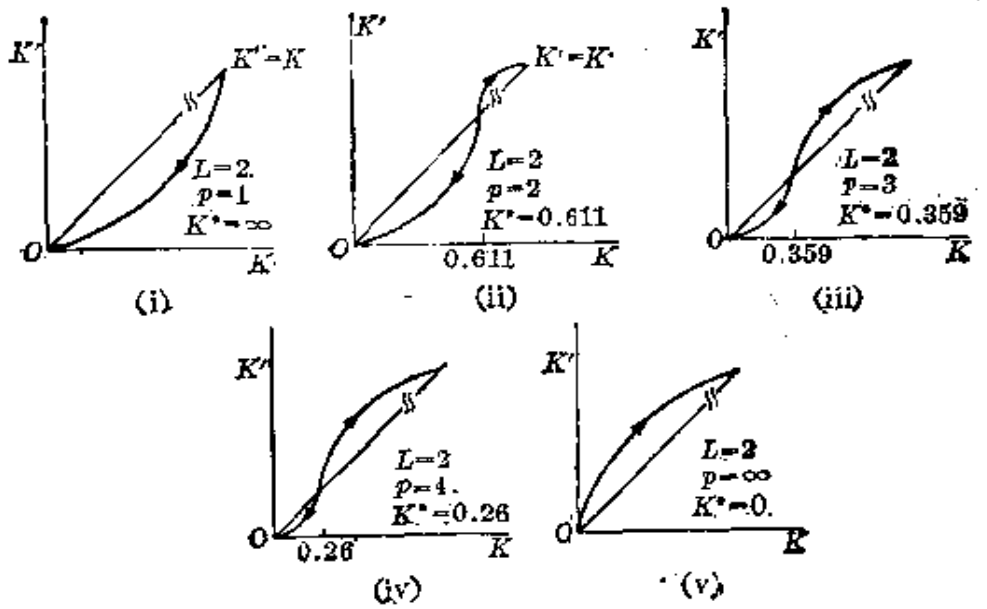



图 21-4

$K^*=0$ 为不稳定不动点，相当临界温度为无限大，表明系统在任何温度下都处于有序态即铁磁态.

将重整化群变换递推关系(21.3)在不动点 $K^*$ 附近线性化：$(K^*=K_c)$

$$R^{(L)}(K)=K_c+\left.\frac{\partial R}{\partial K}\right|_{K_c}(K-K_c), \qquad (21.10)$$

立即求出关联长度临界指数 $\nu$：

$$\nu=\frac{\ln b}{\ln\left(\dfrac{\partial R}{\partial K}\right)_{K_c}}=\frac{\ln L}{\ln\lambda}. \qquad (21.11)$$

$\lambda$ 为变换 $R$ 的本征值，$L$ 为重标因子(此处 $L=2$). 对各种 $p$ 值，因而各种 $d_f$ 值，所求得的 $\nu$ 值综合列于表 21.1 中.

表 21.1

| $d_f$ | 1 | 2 | 2.585 | 3 | 3.323 | 4.323 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\nu$ | | 1.336 | 1.126 | 1.0715 | 1.045 | 1.019 |

从表中可发现：分形维数 $d_f=2$, 3 相应的 $\nu$ 值，与欧氏空间

维数 $d=2$，3 已知的 $\nu$ 值不同，明显地反映出自相似结构与平移对称结构对临界行为的不同影响. 此外，在 $d=4$ 维以上欧氏空间中，相变显示出平均场行为，而在等级晶格上却未发现此种行为.

## §22 反铁磁箔茨模型的相变

对反铁磁系统，它们的相变展示更大的复杂性，[31]~[34]为了搞清等级格子上反铁磁相变，这里先对平移对称晶格上的反铁磁相变理论的一些重要概念和结果作些说明.

首先介绍基态熵概念：对比一下反铁磁伊辛模型和反铁磁箔茨模型，它们的哈密顿量分别为

$$-\beta\mathscr{H}=-\frac{H}{kT}=-K\sum_{\langle ij\rangle}\sigma_i\sigma_j,\quad K\geqslant 0; \tag{22.1}$$

$$-\beta\mathscr{H}=-\frac{H}{kT}=-J\sum_{\langle ij\rangle}\delta\sigma_i\sigma_j,\quad J\geqslant 0. \tag{22.2}$$

考察一个超立方体，如图 22-1 所示，伊辛自旋和箔茨自旋放置于格点上. 当温度为 0 时 ($K\to\infty$)，对伊辛情况，最近邻两个自旋应分别取 $+1$，$-1$ 才是能量上最有利的状态，因此图 22-1 中应有，例如，$\sigma_1=-\sigma_2=\sigma_3=-\sigma_4$，这样的态为反铁磁基态，显然只存在两个基态，它们在零温下对配分函数作出贡献. 如果进行标度变换将 $\sigma_2$、$\sigma_3$ 进行求和，使其从配分函数中消去，则 $\sigma_1$ 与 $\sigma_4$ 成为最近邻，且 $\sigma_1=-\sigma_4$，说明经重整化后的最近邻自旋仍保持相反取向，保持了重整化前的零温特征. 这正是为什么 $T=0$ 是一个不动点的原因. 这样，系统的基态熵(每个格点)为：$S_0=\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{\ln 2}{N}=0$，即不存在基态熵.

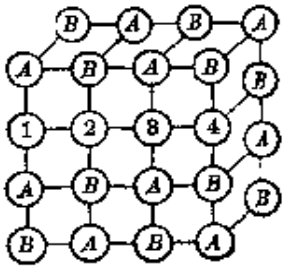


图 22-1

然而，在反铁磁箔茨模型中，自旋 $\sigma$ 可取 $a$, $b$, $c$, …等共 $q$ 个值. 当系统处于基态(零温情况)时，将出现非零基态熵(剩余熵).

为看清这点，现将图 22-1 的晶格分为两个子晶格 $A$、$B$，使 $A$ 子晶格的格点的最近邻为 $B$ 子晶格的格点，系统能量的最小值为 0. 现设想 $A$ 子晶格的格点自旋全部处于 $a$ 态，则 $B$ 子晶格的格点自旋应处于与 $a$ 不同的其他态，它的全部 $\frac{N}{2}$ 个格点自旋各自可处于其他 $(q-1)$ 个态中的任一个，故基态数目为 $q(q-1)^{N/2}$，这里 $N$ 为格点总数. 一般地，系统每个格点的熵 $S=\frac{\ln W}{N}$（$W$ 为系统的微观态数）应满足如下关系：

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\ln q(q-1)^{N/2}}{N}<S<\lim_{N\to\infty}\frac{\ln q^N}{N},$$

即

$$\frac{1}{2}\ln(q-1)<S<\ln q, \tag{22.3}$$

其中 $\frac{1}{2}\ln(q-1)$ 为基态熵. 当 $q=2$ 时，基态熵为 0，这正好相当于伊辛情况，因为伊辛模型为二态箝茨模型.

反铁磁箝茨模型的另一重要特征是，系统在最低能量态会出现长程关联，而对铁磁系统，长程关联只能在临界点产生. 设想在最低能量态 $A$、$B$ 子晶格各格点自旋分别处于 $a$ 和 $b$ 态，然后在任意一个区域中将 $a$、$b$ 态分别改为 $a'$ 和 $b'$ 态，只要 $b\neq a'\neq b'\neq a$ 就仍然能保持最低能量态. 继续这样的改变，就能产生任意复杂的系统自旋位形，这种复杂性可存在于任意长的空间区域内，这便是最低能量态产生长程关联的原因. 为了形象起见，现将第 1 章谈过的伊辛铁磁系统相变的物理图象与反铁磁箝茨基态的物理图象作一对比，就能看出它们之间存在明显的类似. 采用两个最近邻自旋（显然它们是来自 $A$、$B$ 子晶格）作基本单元，设单元的位形（状态）用 $\alpha_1$、$\alpha_2$、…、$\alpha_i$、… 来标志，这里 $\alpha_i$ 描述单元内自旋的不同取向，例如，$\alpha_1=(ab)$，$\alpha_2=(cd)$，…，$\alpha_i=(ef)$，… 等. 按前述，设令所有单元均处于 $\alpha_1$ 态，即 $A$、$B$ 子晶格各格点自旋均分别处于

$a$、$b$ 态，然后在任意区域中将其改变为 $\alpha_1$ 态，继之在 $\alpha_4$ 态区域中又改变为 $\alpha_4$ 态，如此等等．因而便形成各种不同尺寸的 $\alpha$ 态的“涨落区”，这些“涨落区”互相嵌套，犬牙交错，形成图 22-2 的图象，图中最大涨落区的尺寸可为无穷大，这就产生了无穷大的长程关联．这也是低温序参量为 0 的原因．

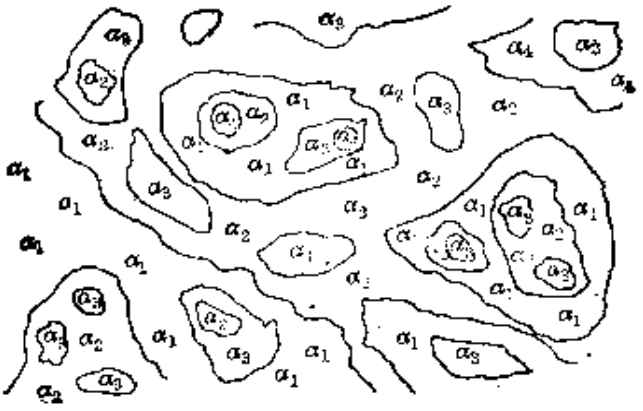


图 22-2

现对上述情况作更详细的分析：在零温下($J\to\infty$) 所有大量的基态都平权地对配分函数作出贡献，每个基态都没有两个最近邻自旋可能处于相同状态．设想来考察连接格点 1 和 4 的一条直线上各点的自旋取向，当给定 $\sigma_1$ 和 $\sigma_4$，且 $\sigma_1\neq\sigma_4$ 时，便可有 $q^2-3q+3$ 种$(\sigma_2,\ \sigma_3)$位形，但当 $\sigma_1=\sigma_4$ 时，有 $q^2-3q+2$ 种位形，当对 $\sigma_2$、$\sigma_3$ 进行求和使其从配分函数中消去后，$\sigma_1$ 与 $\sigma_4$ 便成为最近邻，这时对后一种情况有 $\sigma_1=\sigma_4$，它们具有相同的自旋取向，完全失去了零温下应有的特征，但对原来为 $\sigma_1\neq\sigma_2$ 情况，经过上述步骤后，仍然保持反铁磁特征．这两种可能性各自有 $q$ 和 $q^2-q$ 种取法，只要 $q>2$，必有 $(q^2-q)>q$，因此总的说来，仍然保持具有反铁磁特征，但不再有零温特征．倘若考虑整个晶格上所有格点，而不仅仅是 $\sigma_1$、$\sigma_2$、$\sigma_3$、$\sigma_4$，这一结论不会改变．事实上，由于自旋位形的微观多样性，使得零温条件不能在远距离间传递，任何标度变换实质上都是将原来相距较远的自旋变成近邻，它都应反映出这一特征，即零温系统变成一个重整化非零温系统．

上面的分析说明，进行一次标度变换后可使系统由零温重整化为非零温，温度跃变的大小与系统的基态熵有关，因此可以断定 $T=0$ 连作为一个稳定不动点都是不可能的．继续进行这样的变换，有可能每次都增加有效温度，最终使重整化群流流向 $T=\infty$

($J=0$)点(不动点). 它用图 22-3(i) 显示出来. 也还存在另一种可能性, 重整化群流从 $T=0$ 出发流向一个稳定不动点$S$, 该点温度既非零也非无穷大(见图 22-3(iii)). 按重整化群理论, 在不动点的关联长度只能是零或无穷大, 前者是对平庸不动点而言, 后者对非平庸不动点而言. 因此在不动点 $S$ 应有关联长度 $\xi\to\infty$, 而关联函数 $G(r)$ 呈代数衰减, 即 $G(r)\propto r^{-(d-2-\eta)}$, 其中临界指数 $\eta$ 由不动点 $S$ 决定. 这个由不动点 $S$ 及其吸引区描绘的相称作特殊低温代数衰减相, 它的物理图象恰如前面图 22-2 所示. 这种相的序参量为零, 实质上它是系统自旋位形的一个复杂子集, 从统计上能在长程范围内起支配作用.

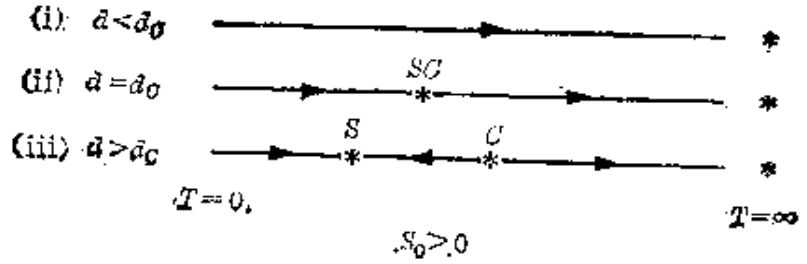



图 22-3

归结起来, 上述第一种可能情况对应着系统在整个温度范围内都是无序的, 关联长度为 0. 第二种可能情况虽然序参量也为 0, 但是有无穷大的关联长度. 第一种可能性可能在低维情况下出现, 而第二种则可能在高维出现. 这个结论可由相变的一般经验中得到, 实际上, 维数高具有高连接性, 使得关联加强. 例如, 在高维情况下, 连接 *1*、*4* 两个格点的路径越多, 每条路径的位形越多, 因而在高维情况下, 重整化温度较低, 经过一系列重整化变换后, 最终使重整化温度流向 $T=\infty$ 的可能性较小. 这一机制使得从较低维数过渡到较高维数时, 在某个维数 $d_0$ 必然产生两个不动点, 在该 $d_0$ 维数(称作临界维数)两个不动点重合. 而 $d>d_0$, 这两个不动点分开, 低温度区出现不动点 $S$, 它是一个稳定不动点, 而高温区产生一个不稳定不动点 $C$, 它是临界点, 代表相变发生的点. 因此结论是: (1)当 $d=d_0$ 时, $S$ 与 $C$ 重合, 重合点便是相变温

度$T_c(d_c)$，它具有非零值.(2)重合的不动点具有一个"边界方向"，使得相变是无穷级相变，即$\nu=\infty$和$\alpha=-\infty$，从流图上看，当$d>d_c$时，$S$吸引区的重整化群流指向$S$，但随着$d$减少到接近$d_c$时，$S$与$O$的位置越来越靠近，中间的流区越来越缩小，直至$S$与$O$重合时，其间流区缩小为0，因此$S$左边的流向$S$，而右边的流背离$S$，这正是称它为"边界"不动点的原因.(3)在$d_c$，整个低温相区和临界点具有相同的临界指数$\eta$，它完全由重合的不动点决定.相反，在$d>d_c$情况下低温相的临界指数$\eta$由$S$决定，而临界点的临界指数$\eta$由$O$决定.

为了突出表明基态熵不为0的系统与为0的系统的区别，这里再画出后者的流图(图22-4(i)、(ii))，注意这里$T=0$为不动点，而在图22-3中$T=0$不是不动点.

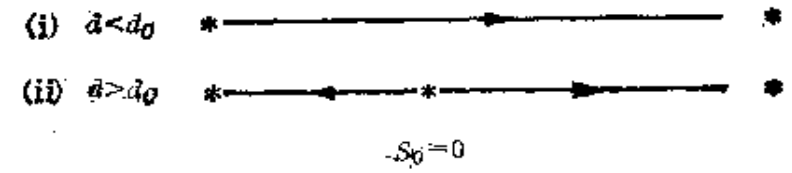



图 22-4

本节介绍了基态熵概念，说明了它的来由.同时阐明了低温代数衰减相这一重要概念，形象地描绘了它的物理图象.以下两节将涉及到这些概念.

## §23 金刚石型等级晶格上的反铁磁相变

现在转到分形晶格上，考虑金刚石型等级晶格上的反铁磁箝茨模型[35].我们将发现：当晶格每个分支的键数目$L$为奇数时，可能存在低温代数衰减相，而当$L$为偶数时，可能等效一个铁磁作用模型.

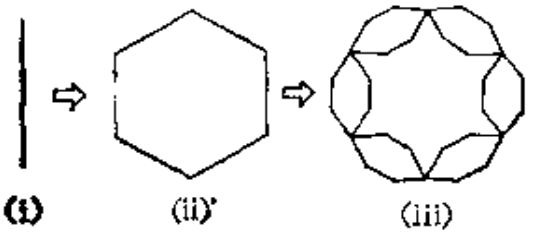



图 23-1

首先研究$L=$奇数的等级结构，它的前三级图如图23-1所

示. 自旋 $\sigma$ 放置于格点上，但自旋不再只取两个值，而可取 $q$ 个态，称为 $q$ 态簇茨模型，将模型哈密顿量写为：

$$-\beta\mathscr{H}=K\sum_{\langle ij\rangle}\delta_{\sigma_i\sigma_j}, \qquad (K<0) \quad (23.1)$$

系统的配分函数为：

$$z=\sum_{\{\sigma\}}e^{-\beta\mathscr{H}}=\sum_{\{\sigma\}}e^{K\sum\sigma_i\sigma_j}, \qquad (23.2)$$

由于晶格结构的特征，它非常适宜于使用部分格点消约法来求解. 在图 23-1 中对生成元($n=1$ 级)中除两个端点外的内部自旋进行求和，便可在配分函数中消去它们，产生重整化的相互作用常数 $K'$，它与 $K$ 的关系为：

$$e^{K'}=\left[\frac{(e^K+q-1)^3+(q-1)(e^K-1)^3}{(e^K+q-1)^3-(e^K-1)^3}\right]^2. \qquad (23.3)$$

将其推广到具有 $p$ 个分支和 $L=$ 奇数根键的情况，便可得一般的 $K'$ 与 $K$ 的递推关系：

$$e^{K'}=\left[\frac{(e^K+q-1)^L+(q-1)(e^K-1)^L}{(e^K+q-1)^L-(e^K-1)^L}\right]^p. \qquad (23.4)$$

注意到，对反铁磁作用情况，$K<0$，因而 $e^K<1$，结果(23.4)式中 $e^{K'}$ 总是小于 1，可见 $K'<0$，即重整化的系统仍然是反铁磁的. 在零温情况下 $e^K=0$，但由(23.4)式求得的 $e^{K'}>0$，说明重整化温度不再为 0，而发生了上节描述的温度跃变，最近邻两个自旋取不同取向的零温特征消失. 同时，上面显然看出 $T=0$ 不再是(23.4)式的不动点. 所有这些都跟前面描述的一致.

下面更仔细地来分析变换关系式(23.4). 由(23.4)式解出的不动点 $K^*=K'=K$ 显然应与 $q$ 有关. 图 23-2 表示不动点与 $q$ 的关系. 图中 $AC$ 为由不同 $q$ 值求得的稳定不动点线，而 $BC$ 为不稳定不动点线. 为方便计算，已设 $q$ 可连续变化. $BC$ 上各点对应各种 $q$ 值下的临界点，$AC$ 上各点对应各种 $q$ 值下的特殊低温代数衰减相. 为明确起见，若在横轴上取一固定 $q$ 值，画

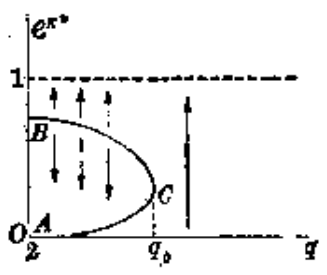


图 23-2

出一条平行于纵轴的直线，则它与 $AC$ 和 $BC$ 的交点分别相当前节的 $S$ 和 $C$ 点，重整化群流的方向分别如箭头所示，显然它跟前节图 22-3(iii) 情况完全一致. 由图还看到，当 $q$ 由 2 开始逐渐增大时，则 $S$ 与 $C$ 逐渐靠近，到达 $q_0$ 值时，$S$ 与 $C$ 完全重合，它相当于图 22-3(ii)情况，$q_0$ 称为 $q$ 的切断值，重合点为边界不动点，它对应 $\nu=\infty$. 可见整个 $BC$ 曲线以下的区域为特殊低温相区，$BC$ 以上为无序(顺磁)相区. 由图还可看出，当 $q=2$(对应伊辛情况)，$S$ 与 0 重合，特殊低温相消失，$T=0$ 成为不动点，这也与前节的讨论相吻合. 此外，当 $q>q_0$，重整化群流由 $e^K=0$ 轴流向 $e^K=1$ ($T=\infty$)线，说明系统在任何温度下均处于无序态. 表 23.1～表 23.3 分别列出在 $L=5, p=2、3$, 和 $p=2, L=3、5$, 以及已知 $d_f$ 和 $(p, L)$

表 23.1

| $p$ | 2 | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $q$ | 2 | 2.01 | 2.02 | 2.025 | | | | |
| $e^{K_S^*}$ | 0.0411 | 0.0324 | 0.0218 | 0.0104 | | | | |
| $e^{K_A^*}$ | 0 | 0.0005 | 0.0030 | 0.0104 | | | | |
| $p$ | 3 | | | | 4 | | | |
| $q$ | 2 | 2.04 | 2.08 | 2.091 | 2 | 2.04 | 2.12 | 2.153 |
| $e^{K_S^*}$ | 0.1003 | 0.0737 | 0.0398 | 0.0199 | 0.1421 | 0.1191 | 0.0659 | 0.024 |
| $e^{K_A^*}$ | 0 | 0.0006 | 0.0070 | 0.0199 | 0 | 0.00003 | 0.0039 | 0.024 |

表 23.2

| $L$ | 3 | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $q$ | 2 | 2.02 | 2.06 | 2.086 | | | | |
| $e^{K_S^*}$ | 0.1196 | 0.1055 | 0.0721 | 0.0313 | | | | |
| $e^{K_A^*}$ | 0 | 0.0009 | 0.0061 | 0.0313 | | | | |
| $L$ | 5 | | | | 7 | | | |
| $q$ | 2 | 2.01 | 2.02 | 2.025 | 2 | 2.005 | 2.008 | 2.012 |
| $e^{K_S^*}$ | 0.0411 | 0.0324 | 0.0218 | 0.0104 | 0.0207 | 0.0161 | 0.0128 | 0.0065 |
| $e^{K_A^*}$ | 0 | 0.005 | 0.0020 | 0.0104 | 0 | 0.0003 | 0.0009 | 0.005 |

表 23.3

| $D_f$ | 1+ln2/ln3 | | | 2 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $L$ | 3 | 9 | 27 | 3 | 5 | 7 |
| $p$ | 2 | 4 | 8 | 3 | 5 | 7 |
| $q_0$ | 2.086 | 2.059 | 2.035 | 2.250 | 2.208 | 2.179 |
| $e^{K_0^*}$ | 0.021 | 0.011 | 0.003 | 0.049 | 0.027 | 0.018 |
| $D_f$ | 2+ln2/ln3 | | | 3 | | |
| $L$ | 3 | 9 | 27 | 3 | 5 | 7 |
| $p$ | 6 | 36 | 216 | 9 | 25 | 49 |
| $q_0$ | 2.659 | 2.362 | 2.170 | 2.976 | 2.736 | 2.594 |
| $e^{K_0^*}$ | 0.071 | 0.016 | 0.004 | 0.079 | 0.037 | 0.023 |

时由(23.4)式相应的不动点方程求得的若干数值结果.

从上面三个表的数值结果可看出：对于给定的 $L$, $q$ 的切断值 $q_0$ 随分支数 $p$ 增加而增加，且重合点 $O(S)$ 朝高温区移动. 然而，对给定的 $p$ 值，$q_0$ 随 $L$ 增加而减少，且重合点 $O(S)$ 朝低温区移动. 当 $p=$有限常数值和 $L=\infty$(相应 $d_f=1$)时，由递推关系可得出图 23-3, 图中显示出 $q_0\to 2$, $BOA$ 曲线收缩到纵轴上，特殊低温相完全消失. 当 $p=\infty$ 但 $L=$有限常数情况下，即 $d_f\to\infty$, 可画出图 23-4, 此时 $q_0\to\infty$, 相当于 $BO$ 曲线收缩到 $e^K=1$ 线上，而 $AO$ 曲线收缩到 $e^K=0$ 线上，这时特殊低温相区在参数空间$(e^K, q)$上变为无穷大，它们夹在横轴与 $e^K=1$ 线之间. 表 23.3 给出在给定 $d_f$ 但 $p$, $L$ 均可变的情况下，切断值 $q_0$ 随 $L$ 增加而减少，可见 $q_0$ 是受几何因素制约的.

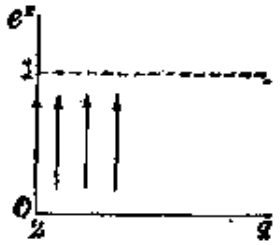



图 23-3

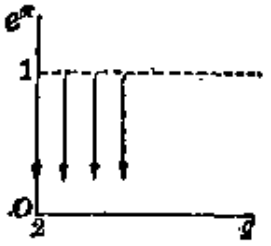



图 23-4

总之，通过精确的重整化群(部分格点消约法)计算发现，在等

级分形晶格上的反铁磁箝茨模型也可产生特殊低温代数衰减相. 这与以前对平移对称晶格的分析论证结果相同.

现在转而讨论 $L=$偶数情况. 这种情况产生与 $L=$奇数情况完全不同的结果. 不难通过对部分格点自旋态求和, 直接写出配分函数的递推关系. 即将第 $n$ 级构造的配分函数用第 $n-1$ 级构造的配分函数表示出来:

$$z_n(K)=z_{n-1}(J)[A(K)]^{\frac{1}{2}(pL)^{n-1}}, \tag{23.5}$$

其中

$$A(K)=q^{-1}[(e^K+q-1)^L-(e^K-1)^L]. \tag{23.6}$$

$K$ 和 $J$ 分别为第 $n$ 级和第 $n-1$ 级构造的最近邻自旋间的耦合常数, 且 $K<0$, $K$ 与 $J$ 之间存在如下变换递推关系:

$$e^J=\left[\frac{(e^K+q-1)^L+(q-1)(e^K-1)^L}{(e^K+q-1)^L-(e^K-1)^L}\right]^p. \tag{23.7}$$

这个变换关系与(23.4)式形式上完全相同, 但现在 $L=$偶数, 因而 $e^J>1$, 说明 $J>0$, 表明重整化后的相互作用变为有效铁磁作用. 这一后果可从下面简单的图式(图 23-5)来理解: 设想零温下的一维伊辛情况($q=2$), 一条直线上的三个自旋在反铁磁作用下形成第一列的位形, 而当对 $\sigma_2$ 进行求和使其消去后, $\sigma_1$ 与 $\sigma_3$ 变为相同取向, 这暗示着它们之间存在等效铁磁作用, 出现了铁磁基态.

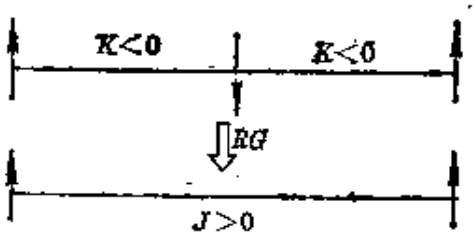


图 23-5

由关系式(23.5), 可以认为, 由 $z_n(K)$ 和 $z_{n-1}(J)$ 描写的系统在热力学极限下具有相同的奇异性, 因此若能知道等效铁磁箝茨系统的临界条件便能求出原来系统的临界条件. 为此, 对等效铁磁系统再次应用部分格点消约重整化群方法, 可以得到该系统在重整化前后相互作用常数 $J$ 与 $J'$ 的递推关系, 这个关系与前写出的相同, 它相应的不动点 $J^*=J'=J$ 所满足的方程为

$$e^{J^*}=\left[\frac{(e^{J^*}+q-1)^L+(q-1)(e^{J^*}-1)^L}{(e^{J^*}+q-1)^L-(e^{J^*}-1)^L}\right]^p. \tag{23.8}$$

将这样求得的 $e^{J^*}$ 代入(23.7)式，便得到在 $L=$ 偶数情况下，临界点所满足的方程

$$e^{J^*}=\left[\frac{(e^{K_c}+q-1)^L+(q-1)(e^{K_c}-1)^L}{(e^{K_c}+q-1)^L-(e^{K_c}-1)^L}\right]^p, \qquad (23.9)$$

这里 $K_c$ 为 $K$ 的临界值.

图 23-6(i)、(ii) 给出 $L$ 和 $p$ 的某些特定值下 $e^{K_c}$ 与 $q$ 的关系的示意图. 这些曲线类似于镶嵌正方形格子上的反铁磁箔茨模型的结果.

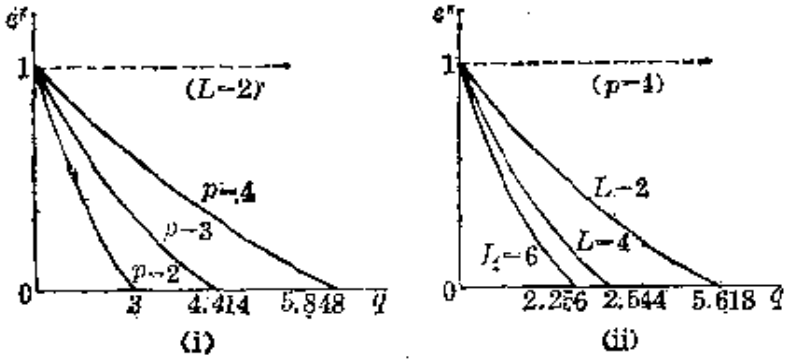



图 23-6

最后来计算基态熵. 当温度为 0 时，$K=-\infty$，最近邻自旋具有不同取向，因而配分函数

$$z(q,\ K\to\infty)=\sum_{\{\sigma\}}e^{-\beta\mathscr{H}}=\sum_{\{\sigma\}}{}'1=p_G(q). \qquad (23.10)$$

这里 $\sum'_{\{\sigma\}}$ 是对最近邻格点自旋不相同的那些位形求和(其余位形对配分函数不做出贡献)，$p_G(q)$ 便是这些位形的总数. 因此零温下配分函数的对数直接与熵相连系，每根键的基态熵为

$$S(q)=\lim_{M\to\infty}\frac{1}{M}\ln p_G(q)=\lim_{M\to 0}\frac{1}{M}\ln z(q,\ K\to\infty). \qquad (23.11)$$

在 $L=$ 偶数情况下，对所研究系统进行一系列部分格点消约变换，可得

$$z_{n-1}(J)=A(J_{n-2})[A(J)]^{p(pL)^{n-1}}\prod_{i=1}^{n-2}[A(J_i)]^{p(pL)^{n-1-i}} \qquad (23.12)$$

这里 $A(J_i)$ 是与第 $i$ 次消约变换相连系的常数，$J_i$ 是重整化的相互作用常数. $A(J_{n-2})$、$A(J_i)$ 和 $J_i$ 由下列诸式表示：

$$A(J_{n-2})=q(e^{J_{n-1}}+q-1), \tag{23.13}$$

$$A(J_i)=q^{-1}[(e^{J_i}+q-1)^L-(e^{J_i}-1)^L], \tag{23.14}$$

$$J_i=p\ln\left[\frac{(e^{J_{i-1}}+q-1)^L+(q-1)(e^{J_{i-1}}-1)^L}{(e^{J_{i-1}}+q-1)^L-(e^{J_{i-1}}-1)^L}\right]. \tag{23.15}$$

将(23.12)代入(23.5)中，便可得每根键的基态熵为

$$\begin{aligned}S(q)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(pL)^n}\ln z_n \qquad (q,\ K\to-\infty)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(pL)^n}\left\{p\left[\sum_{i=1}^{n-3}(pL)^{n-2-i}\ln A(J_i)\right.\right.\\&\quad\left.+(pL)^{n-2}\ln A(J)+(pL)^{n-1}\ln A(K\to-\infty)\right]\\&\quad\left.+\ln A(J_{n-2})\right\}.\end{aligned} \tag{23.16}$$

式中 $n$ 代表等级格子构造的级，$M=(pL)^n$ 为键的总数. (23.16)式中的级数满足收敛条件，因而 $S(q)$ 具有非常明确的热力学极限. 当 $q=q_0$(切断值)时，可求得 $S(q_0)$ 为：

$$S(q_0)=\frac{1}{pL-1}\left[p\ln C_1+\ln C_2+\frac{1}{L}\ln C_3-p\ln q_0\right]. \tag{23.17}$$

其中

$$C_1=(q_0-1)^L+(q_0-1), \tag{23.18}$$

$$C_2=1+(q_0-1)\left[\frac{(q_0-1)^L-1}{(q_0-1)^L+(q_0-1)}\right]^p, \tag{23.19}$$

$$C_3=\frac{1-\left(\frac{A}{C_2}\right)^L}{(q_0-1)^L-1}, \tag{23.20}$$

且

$$A=1-\left[\frac{(q_0-1)^L-1}{(q_0-1)^L+(q_0-1)}\right]^p. \tag{23.21}$$

## §24 键稀释渗流模型

以前研究过的系统都是自旋间存在着完整相互作用的情况，意即任一对最近邻自旋间必存在着强度为 $K$ 的键. 本节研究非完整相互作用情况，即自旋对间的键只是随机地存在，因而必定有些键存在，有些键空缺，"存在"与"空缺"的具体位置完全是随机的，这便是键稀释系统. 本节研究这类系统的相变行为.[36] 由于数学计算上的繁杂，不准备在这里引用冗长的数学推导，而只给出处理这类问题的基本思路和结果.

所研究的分形晶格为塞尔宾斯基地毯. 由于这种晶格上曾引入两类键 $K$ 和 $K_W$，设这两类键的浓度分别为 $p$ 和 $W$. 显然，当键浓度("存在"概率)低于渗流键的临界浓度时，系统只能形成许多有限大小集团，不可能发生相变，渗流键的临界浓度可由温度 $T=0$ 时的重整化群变换的不动点来确定.

现将塞尔宾斯基地毯上键稀释渗流模型哈密顿量写为：

$$-\beta\mathscr{H}=\sum_{\langle ij\rangle}K_{ij}\delta_{\sigma_i\sigma_j}+\sum_{\langle mn\rangle}J_{mn}\delta_{\sigma_m\sigma_n}. \tag{24.1}$$

这里 $\langle ij\rangle$、$\langle mn\rangle$ 均代表最近邻格点，$K_{ij}$ 代表两边面积均未挖去的键的耦合强度，$J_{mn}$ 为有一边面积被挖去的键的耦合强度. 为引入键稀释，设 $K_{ij}$ 和 $J_{mn}$ 遵守如下方程：

$$\begin{aligned} p(K_{ij})&=p\delta(K_{ij}-K)+(1-p)\delta(K_{ij}),\\ p(J_{mn})&=W\delta(J_{mn}-J)+(1-W)\delta(J_{mn}). \end{aligned} \tag{24.2}$$

上式表明：$K_{ij}$ 取 $K$ 的概率为 $p$，$K_{ij}$ 取 0 (即缺键) 的概率为 $(1-p)$；同样 $J_{mn}$ 取 $J$ 的概率为 $W$，键空缺的概率为 $(1-W)$.

仍采用梅格达尔-卡丹诺夫键移重整化群方法. 为此，引入两个简化记号：

$$t(K)=\frac{e^K-1}{e^K+q-1},\qquad t(J)=\frac{e^J-1}{e^J+q-1}. \tag{24.3}$$

这里 $q$ 为自旋取值的个数. 重整化过程的模式显示在图 24-1 中，

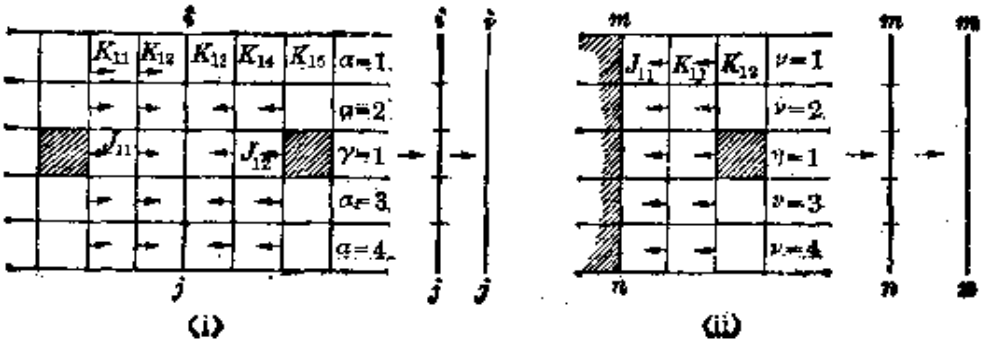



图 24-1

图中取 $b=5$、$l=1$，且空隙位于中央.

对应于图 24-1，写出重整化的 $t'(K')$ 和 $t'(J')$ 为：

$$\begin{aligned} t'(K'_{ij}) &= f(t) = \prod_{\alpha=1}^{4} t_\alpha t_\gamma, \\ t'(J'_{mn}) &= g(t) = \prod_{\gamma=1}^{4} t_\gamma t_\eta. \end{aligned} \tag{24.4}$$

这里

$$\begin{aligned} t_\alpha &= t(K_{\alpha 1}+K_{\alpha 2}+\cdots+K_{\alpha b}), \\ t_\gamma &= t(K_{\gamma 1}+K_{\gamma 2}+\cdots+K_{\gamma,(b-l-1)}+J_{\gamma 1}+J_{\gamma 2}), \\ t_\nu &= t(K_{\nu 1}+K_{\nu 2}+\cdots+K_{\nu,\frac{1}{2}(b-l)}+J_{\nu 1}), \\ t_\eta &= t(K_{\eta 1}+K_{\eta 2}+\cdots+K_{\eta,\frac{1}{2}(b-l)-1}+J_{\eta 1}+J_{\eta 2}). \end{aligned} \tag{24.4}$$

注意这里的符号指的是 $t$ 是它后面括号内诸量相加的函数，而不是 $t$ 与后面括号内的量相乘. 关系式(24.4)是耦合常数的重整化群变换关系. 对任意 $b$、$l$ 值，仍取中心空隙，可写出一般的变换关系为：

$$\begin{aligned} t'(K'_{ij}) &= f(t) = \prod_{\alpha=1}^{b-l} t_\alpha \prod_{\gamma=1}^{l} t_\gamma, \\ t'(J'_{mn}) &= g(t) = \prod_{\nu=1}^{b-l} t_\nu \prod_{\eta=1}^{l} t_\eta. \end{aligned} \tag{24.5}$$

重整化群变换的结果不仅相互作用常数会发生改变，作用常数的分布函数(24.2)也会发生变化. 重整化的分布函数可表为：

$$p'(t'(K'_{ij}))=\int\prod dK_{ij}p(K_{ij})\prod dJ_{mn}p(J_{mn})\delta(t'(K'_{ij})-f(t)),$$

$$p'(t'(J'_{mn}))=\int\prod dK_{ij}p(K_{ij})\prod dJ_{mn}p(J_{mn})\delta(t'(J'_{mn})-g(t)).$$

(24.6)

这一表示式非常复杂，不再具有(24.2)式那样的简明形式. 为了找到一个简明形式，我们引入一个近似表示式：

$$p_A(t'(K'_{ij}))=p'\delta(t'(K'_{ij})-t'(K'))+(1-p')\delta(t'(K'_{ij})),$$
$$p_A(t'(J'_{mn}))=W'\delta(t'(J'_{mn})-t'(J'))+(1-W')\delta(t'(J'_{mn})).$$

(24.7)

这里 $t'(K')$、$p'$ 和 $t'(J')$、$W'$ 用下列方法确定：使由 $p_A(t'(K'_{ij}))$和 $p_A(t'(J'_{mn}))$算出的一阶和二阶矩与由(24.6) 式的 $p'(t'(K'_{ij}))$ 和 $p'(t'(J'_{mn}))$算出的相等. 这样便导出下列关系：

$$\begin{cases} t'(K'_{ij})=\dfrac{\langle t^2(K_{ij})\rangle}{\langle t(K_{ij})\rangle}, \\ p'=\dfrac{\langle t(K_{ij})\rangle^2}{\langle t^2(K_{ij})\rangle}; \end{cases} \qquad \begin{cases} t'(J'_{mn})=\dfrac{\langle t^2(J_{mn})\rangle}{\langle t(J_{mn})\rangle}, \\ W'=\dfrac{\langle t(J_{mn})\rangle^2}{\langle t^2(J_{mn})\rangle}. \end{cases}$$

(24.8)

这里$\langle\cdots\rangle$表示对(24.6)式中 $p'(t')$ 的平均. (24.8)式将作用常数及其分布函数的变换关系加以确定.

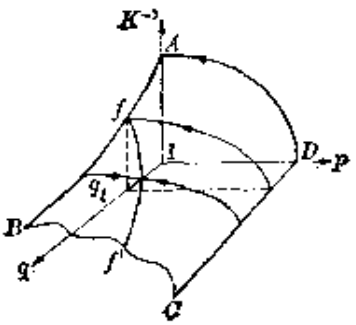


图 24-2

一般地要研究键稀释系统，需要有五个参数 $K^{-1}$, $J^{-1}$, $p$, $W$ 及 $q$，形成五维参数空间，但为明确起见，我们仅仅使用 $(K^{-1}, p, q)$三维子空间，三维空间的相图示于图 24-2 中，图中 $ABCD$ 曲面将系统分为铁磁有序相(较低温) 和顺磁无序相(较高温)，$CD$ 线上的点对应渗流发生的临界概率 $p_c$ 值，$AB$ 为纯(无稀释)箔茨模型相应不同 $q$ 值的临界点. 在 $q<q_t$ 区域内，稀释系统的临界行为完全由 $Af$ 线上(纯系统) 的临界点决定，与稀释无关. 而 $q>q_t$ 时，出现新不动点，系统的临界行为由 $ff'$ 线上的不动点决定.

# 第 4 章

# 临 界 动 力 学

本章讨论自旋系统在临界点附近的非平衡行为，研究系统状态随时间的发展．由于从整体而言，非平衡态理论的发展比之平衡态临界现象理论要缓慢得多，故现有的知识比之平衡态的知识更少，留下的未解决的问题也更多．

本章首先介绍临界动力学的基本概念以及在平移对称晶格上处理临界动力学问题的一般方法，然后集中介绍如何将实空间重整化群方法应用到动力学系统，研究在几种典型分形晶格（科赫曲线，塞尔宾斯基铺垫和地毯）上的动力伊辛模型的弛豫行为．

## §25 临界动力学的基本概念

临界动力学研究在临界点附近的非平衡现象．在临界点附近自然界中展示出许多动力学反常现象，例如，在扩散波的传播、中子和光子的非弹性散射等现象中，描写动力学性质的物理量，如输运系数、弛豫率、多时关联函数以及对时间有关的微扰的响应函数等，均呈现发散．[37],[38],[39] 所有这些，都可在实验中进行检测．临界动力学就是要从理论上来分析研究这类现象．

正如前面提到的，要建立起描述复杂非平衡现象的理论非常困难，这只要将其与静态（平衡态）临界现象理论加以对比就可清楚地看到这一点．在平衡态理论中，只需找出系统的动力学变量（各自旋）的位形或其他物理量的热平衡概率分布就够了，这已在熟知的平衡态统计物理问题范围内得到解决．然而，在动力学问题中，还需要找到位形的时间演化，物理量在与时间有关的扰动作用下如何变化，和当微扰撤去后系统如何趋向平衡态．在临界动

力学现象中，主要有兴趣于序参量或其他慢变量的大尺度涨落的时间演化. 定性上，很易理解为什么序参量缓慢地变化，设想一个自旋系统，在临界点附近存在大尺度涨落，热扰动要使其发生翻转需要很长时间. 换句话说，自旋涨落的长波模具有非常长的弛豫时间，这便是"临界慢化"现象. 临界动力学理论要解释为什么具有短程作用的系统会产生长的弛豫时间，它们怎样依赖于温度，怎样受系统内的守恒律等因素的影响.

倘若能从第一原理出发，从微观模型导出临界动力学，当然是人们所期望的，但这个问题极其复杂. 在静态，模型提供了统计的基础，那时本质上只要计算各种位形，而在动力学中还需要建立运动方程.

为了研究临界动力学，已经提出了若干简化模型：其中研究得最多的，是动力伊辛模型 (Kinetic Ising model)。它是一个随机模型. 按此模型，自旋的取值用时间随机函数 $\sigma(t)$ 表征，它的取值限制为 $\pm 1$，跃迁只能在这两个值之中随机地选取. 引起跃迁的原因，是自旋跟外界(例如，热源)的相互作用. 单个自旋的跃迁概率依赖于相邻自旋的瞬时值以及热源的影响. 由于自旋间存在着耦合，使得必须把 $N$ 个自旋作为整体来研究. 自旋函数产生 $N$ 个以连续时间变量作为宗量的离散随机变量的马尔科夫过程. 通常引入自旋概率分布函数 $p(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_i, \cdots, \sigma_N t)$ 作为描述系统整体的含时分布函数，它表征系统中各格点自旋在 $t$ 时刻处于$\{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_N\}$态的概率，这一分布函数遵守主方程，在主方程中出现的单位时间的跃迁概率 $W(\sigma_i)$ 根据统计物理中某些原理来唯象地确定.

现今对跃迁概率都是用细致平衡原理来确定，它指的是，当系统过渡到平衡态时必须使正元过程与逆元过程相抵消. 这一要求并未唯一地限制跃迁概率的形式. 现今经常采用两种类型的跃迁概率：一种是系统中每次只有一个自旋发生翻转，它称为格劳伯(R. J. Glauber)动力学，另一种是系统中两个自旋状态发生交

换，称为川崎(K. Kawasaki)动力学. 显然，前者会改变序参量，而后者保持序参量守恒. 今后我们将主要研究格劳伯动力学.

## §26 一维平移对称晶格上动力伊辛模型的严格解

在研究分形对象之前，我们先来研究平移对称晶格，以便对概念和理论获得一些初步了解. 此外，一维平移对称晶格上的动力伊辛模型也有其特殊重要性，因为它是迄今能严格求解的唯一晶格系统.[40]

设在一维晶格格点上放置伊辛自旋，最近邻自旋间相互作用为 $K=\frac{J}{kT}$ $(K>0)$，它的模型哈密顿量为

$$-\beta\mathscr{H}=K\sum_{n.n}\sigma_i\sigma_j, \tag{26.1}$$

系统与外界热源相接触，并处于非平衡态. 在系统状态演化过程中的自旋跃迁率为 $W_j(\sigma_j)$. 这里我们采用格劳伯假设，认为单位时间内每次只有一个自旋翻转. 例如，第 $j$ 个自旋由 $\sigma_j$ 翻转为 $-\sigma_j$，而其余的格点自旋态保持不变. 整个系统的分布函数为 $p(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_i, \cdots, \sigma_N t)$，由于有格点自旋发生跃迁，因而分布函数也随时间变化，它的时间导数由下列方程决定：

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}p(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_N t)&=-\left[\sum_{j=1}^{N}W_j(\sigma_j)\right]p(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_N t)\\&\quad+\sum_{j=1}^{N}W_j(-\sigma_j)p(\sigma_1, \cdots, -\sigma_j, \cdots, \sigma_N t).\end{aligned} \tag{26.2}$$

右边第一项表示原来处于 $\sigma_j(j=1, 2, \cdots, N)$ 的态翻转为 $-\sigma_j$，使得系统处于$(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_j, \cdots, \sigma_N)$ 态的概率减少，第二项表示原来处于 $-\sigma_j$ 的态$(j=1, 2, \cdots, N)$翻转为 $\sigma_j$，使得系统处于 $(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_j, \cdots, \sigma_N)$ 态的概率增加. (26.2) 式便是主方程. 这一方程可描写，例如，如果伊辛系统最初在受约束条件下处于用

分布函数 $p(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_N t)$ 描述的某个非平衡态(即约束平衡态),当约束解除后,系统将通过一段弛豫时间,逐渐地趋向平衡态,主方程的解将给出系统状态随时间演化的规律.

为求解主方程(26.2),必须具体写出跃迁率 $W_j(\sigma_j)$ 如前节所述,我们用细致平衡条件来确定它的形式,尽管它不能唯一地确定.在平衡情况下,令方程右边中每个正逆元过程相互抵消,故可写出:

$$\frac{W_j(\sigma_j)}{W_j(-\sigma_j)}=\frac{p_e(\sigma_1, \cdots, -\sigma_j, \cdots, \sigma_N)}{p_e(\sigma_1, \cdots, \sigma_j, \cdots, \sigma_N)}=\frac{\exp[-K\sigma_j(\sigma_{j-1}+\sigma_{j+1})]}{\exp[K\sigma_j(\sigma_{j-1}+\sigma_{j+1})]}. \tag{26.3}$$

这里 $p_e(\sigma_1, \cdots, \sigma_N)$ 代表平衡态的统计分布函数:$p_e=\frac{1}{Z}e^{-\beta\mathscr{H}}$, $Z$ 为正则配分函数.方程(26.3)中因子

$$\exp[\pm K\sigma_j(\sigma_{j-1}+\sigma_{j+1})]=\mathrm{ch}[K(\sigma_{j-1}+\sigma_{j+1})]\left\{1\pm\frac{1}{2}\sigma_j(\sigma_{j-1}+\sigma_{j+1})\mathrm{th}2K\right\}. \tag{26.4}$$

因而可选取

$$W_j(\sigma_j)=\frac{\alpha}{2}\left\{1-\frac{\gamma}{2}\sigma_j(\sigma_{j-1}+\sigma_{j+1})\right\}, \tag{26.5}$$

其中 $\alpha$ 为常数,而

$$\gamma\equiv\mathrm{th}\,2K. \tag{26.6}$$

显然,这样选得的跃迁概率既满足细致平衡条件,又依赖最近邻自旋 $\sigma_{j-1}$ 和 $\sigma_{j+1}$.实际上,当 $\sigma_{j-1}=\sigma_j=\sigma_{j+1}$ 时,$W_j(\sigma_j)=\frac{\alpha}{2}(1-\gamma)$;当 $\sigma_{j-1}=-\sigma_{j+1}$ 时,$W_j(\sigma_j)=\frac{\alpha}{2}$;当 $\sigma_{j-1}=\sigma_{j+1}=-\sigma_j$ 时,$W_j(\sigma_j)=\frac{\alpha}{2}(1+\gamma)$.由于在铁磁作用情况下 $K>0$,三个相邻自旋取向相同时,能量上最有利,因而这种情况下发生跃迁的概率最小.

现定义函数 $q_i(t)$ 为自旋 $\sigma_i(t)$ 相对于 $p(\sigma_1, \cdots, \sigma_N t)$ 的统计

平均值，它也是时间 $t$ 的随机函数：

$$q_i(t)=\langle\sigma_i(t)\rangle=\sum_{\{\sigma\}}\sigma_i(t)p(\sigma_1,\cdots,\sigma_N t). \tag{26.7}$$

这里求和是对系统的所有可能自旋态(位形)进行. 同样也定义两个自旋乘积的统计平均值为

$$\gamma_{jk}(t)=\langle\sigma_j(t)\sigma_k(t)\rangle=\sum_{\{\sigma\}}\sigma_j\sigma_k p(\sigma_1,\cdots,\sigma_N t). \tag{26.8}$$

倘若在主方程两边同时和分别乘上 $\sigma_k$ 和 $\sigma_j\sigma_k$，并对 $\{\sigma\}$ 求和，便得到 $q_k(t)$ 和 $\gamma_{jk}(t)$ 所满足的方程：

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}q_k(t)&=-2\sum_{\{\sigma\}}\sigma_k W_k(\sigma_k)p(\sigma_1,\cdots,\sigma_N t)\\&=-2\langle\sigma_k(t)W_k(\sigma_k(t))\rangle\end{aligned} \tag{26.9}$$

和

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma_{jk}(t)}{dt}&=-2\sum_{\{\sigma\}}\sigma_j\sigma_k\{W_j(\sigma_j)+W_k(\sigma_k)\}p(\sigma_1,\cdots,\sigma_N t)\\&=-2\langle\sigma_j(t)\sigma_k(t)\{W_j(\sigma_j(t))+W_k(\sigma_k(t))\}\rangle.\end{aligned} \tag{26.10}$$

现将(26.5)式代入(26.9)和(26.10)式，便得

$$\frac{d}{d(\alpha t)}q_k(t)=-q_k(t)+\frac{\gamma}{2}\{q_{k-1}(t)+q_{k+1}(t)\}, \tag{26.11}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{d(\alpha t)}\gamma_{jk}(t)=&-2\gamma_{jk}(t)+\frac{\gamma}{2}\{\gamma_{j,k-1}(t)+\gamma_{j,k+1}(t)\\&+\gamma_{j-1,k}(t)+\gamma_{j+1,k}(t)\}.\end{aligned} \tag{26.12}$$

这样，主方程就演化成两个由单个格点磁矩 $q_k(t)$ 和自旋关联函数 $\gamma_{jk}(t)$ 所满足的方程. 它是以后讨论的新出发点. 这两个方程是容易求解的，但须注意，倘若 $W_j(\sigma_j)$ 采取其他形式(而不是现有形式)，有可能使具有不同数目自旋乘积的统计平均的诸函数互相耦合，那时使得求解难于进行.

首先求解(25.11)式. 为此，定义下列生成函数：

$$F(\lambda t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\lambda^k q_k(t). \tag{26.13}$$

将方程(26.11)两边乘以 $\lambda^k$，并对 $k$ 求和，可得

$$\frac{d}{d(\alpha t)}F(\lambda t)=-F(\lambda t)+\frac{\gamma}{2}(\lambda+\lambda^{-1})F(\lambda t). \quad (26.14)$$

方程的解为

$$F(\lambda t)=F(\lambda,\ 0)\exp\left[-\alpha t+\frac{\gamma}{2}(\lambda+\lambda^{-1})\alpha t\right]. \quad (26.15)$$

其中因子 $\exp\left[\frac{\gamma}{2}(\lambda+\lambda^{-1})\right]$ 恰好是虚宗量贝塞尔(F. W. Bessel)函数 $I_n(x)$ 的生成函数:

$$\exp\left[\frac{1}{2}x(\lambda+\lambda^{-1})\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\lambda^n I_n(x). \quad (26.16)$$

这里

$$I_n(x)=i^{-n}J_n(ix). \quad (26.17)$$

因此(26.15)式改写为

$$F(\lambda t)=F(\lambda,\ 0)e^{-\alpha t}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\lambda^k I_k(\gamma\alpha t), \quad (26.18)$$

再利用(26.13)式, 可得出

$$q_k(t)=e^{-\alpha t}\sum_{m=-\infty}^{\infty}q_m(0)I_{k-m}(\gamma\alpha t). \quad (26.19)$$

这里 $q_m(0)$ 为第 $m$ 个格点自旋磁矩在 $t=0$ 时刻的初始值. 表示式(26.19)给出了方程(26.11)的严格解.

其次, 求解方程(26.12). 注意到关联函数

$$\gamma_{jj}(t)=\langle\sigma_j(t)\sigma_j(t)\rangle=1,$$

因而方程(26.12)对 $\gamma_{jj}(t)$ 不适用. 为了避免出现这一例外, 定义 $\tilde{\gamma}_{j,k}$ 为

$$\tilde{\gamma}_{jk}(t)=\begin{cases}\gamma_{jk}(t)-\gamma^e_{jk}, & \text{当 } j>k \text{ 时;}\\ -\gamma_{jk}(t)+\gamma^e_{jk}, & \text{当 } j<k \text{ 时;}\\ 0, & \text{当 } j=k \text{ 时.}\end{cases} \quad (26.20)$$

这里 $\gamma^e_{jk}$ 为平衡态时的 $\langle\sigma_j\sigma_k\rangle$, 它为

$$\gamma^e_{jk}=\langle\sigma_j\sigma_k\rangle=(\mathrm{th}K)^{|k-j|}. \quad (26.21)$$

$\tilde{\gamma}_{jk}(t)$ 满足与方程(26.12)完全相同的方程. 类似于(26.13)式, 引入如下生成函数:

$$F(\lambda_1,\ \lambda_2,\ t)=\sum_{j,k=-\infty}^{\infty}\lambda_1^j\lambda_2^k\tilde{\gamma}_{jk}(t), \tag{26.22}$$

便可由方程(25.11)产生下列方程：

$$\frac{d}{d(\alpha t)}F(\lambda_1\lambda_2 t)=-2F(\lambda_1\lambda_2 t)+\frac{\gamma}{2}(\lambda_1+\lambda_1^{-1})F(\lambda_1\lambda_2 t)$$
$$+\frac{\gamma}{2}(\lambda_2+\lambda_2^{-1})F(\lambda_1\lambda_2 t). \tag{26.23}$$

容易求得下列解(对 $j\geqslant k$)：

$$\gamma_{jk}(t)=\gamma^e_{jk}+e^{-2\alpha t}\sum_{l>m}[\gamma_{lm}(0)-\gamma^e_{lm}]$$
$$\cdot\{I_{j-l}(\gamma\alpha t)I_{k-m}(\gamma\alpha t)-I_{j-m}(\gamma\alpha t)I_{k-l}(\gamma\alpha t)\}. \tag{26.24}$$

其中 $\gamma_{lm}(0)$为初值，$I_n$ 为虚宗量贝塞尔函数. (26.24) 式也是方程的严格解.

最后，引入动力学临界指数 $z$. 它是根据动力学标度假说来定义的. 该假设认为：当系统趋近于临界温度时，系统的弛豫时间按下列形式发散：

$$\tau=\xi^z f(k\xi). \tag{26.25}$$

这里 $k$ 为波矢，$\xi$ 为关联长度，$z$ 便是动力学临界指数. 这一标度假说在重整化群理论中能自然地导出.

为求 $z$，现考察一特殊初始值：

$$q_m(0)=\delta_{m,0}. \tag{26.26}$$

它表明初始时刻只有第 0 个格点处的自旋磁矩不为 0，其他格点处均为 0，因而(26.19)式变为

$$q_k(t)=e^{-\alpha t}I_k(\gamma\alpha t). \tag{26.27}$$

对贝塞尔函数 $I_k$ 的分析显示出，随时间增加，原点处 $q_0$ 稳定地趋向 0，而其相邻自旋的磁矩则从 0 慢慢增加. $q_k(t)$ 的行为具有如下近似形式：

$$q_k(t)\propto(2\pi\gamma\alpha t)^{-\frac{1}{2}}e^{-\alpha(1-\gamma)t}\propto e^{-t/\tau}. \tag{26.28}$$

这里，弛豫时间 $\tau$ 为

$$\tau \propto \frac{1}{\alpha(1-\gamma)} = \frac{1}{\alpha}(1-\mathrm{th}2K)^{-1}. \tag{26.29}$$

在临界点 $T=0$, $K\to\infty$, 故有

$$\tau \propto e^{4k} \propto \xi^z = (e^{2k})^z, \tag{26.30}$$

可见 $z=2$. 这里, 利用了关联长度 $\xi \propto e^{2k}$, 这样便求出了动力学临界指数.

应当指出: 本节所得到的是临界动力学中迄今唯一的严格结果. 倘若在模型中加入次近邻作用, 便可发现精确求解几乎是不可能的. 此外, 这里得到的动力学临界指数是否具有普适性, 至今仍有许多讨论, 有人构造出非均匀的周期相互作用, 即 $K_1$、$K_2$、…、$K_i$ 相间地周期地出现, 也有人在不同的跃迁率形式下进行求解, 所得结论不尽相同.

## §27 动力学实空间重整化群理论

在许多难以精确求解的临界动力学问题中, 常采用重整化群方法来近似求解. 70年代曾采用过动量空间的 $\varepsilon$-展开方法来计算与时间有关的关联和响应函数, 系统的动力学用朗之万方程来决定.

在临界动力学中, 用得较多的是实空间重整化群方法[41], 它能摆脱 $\varepsilon$-展开的某些限制而用任何维数的晶格哈密顿量来进行. 这种实空间重整化群方法的另一优点是比较直观, 因而在许多问题中尤其在分形晶格中用得较多. 本节介绍临界动力学中的实空间重整化群理论的基本精神, 下节将给出实例.

在平衡态理论中, 重整化群变换是应用到平衡统计分布函数上, 以使哈密顿量的对称性及配分函数保持不变; 在临界动力学问题中, 重整化群变换应用到非平衡概率分布函数 $p(\sigma, t) \equiv p(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_N t)$ 上, 但须使 $p(\sigma, t)$ 所遵守的主方程在形式上保持不变, 因而时间标尺也需要进行变换. 这样做的结果, 使动力学标度

的内涵与系统所有的与时间有关的性质通过概率分布函数$p(\sigma, t)$联系起来. 这种空间和时间尺度均进行的变换, 称作"与时间有关的重整化群变换(TDRG)".

现在来说明进行 TDRG 的具体步骤.

(1) 由于变换是对 $p(\sigma, t)$ 进行, 这就必须先知道 $p(\sigma, t)$, 正如在静态情况下需要先写出统计分布函数一样. 但是, $p(\sigma, t)$ 并不像静态那样事先知道, 也不能从主方程将其求解出来. 为此, 假定 $p(\sigma, t)$ 具有下列形式:

$$p(t)=p_e\phi(t). \tag{27.1}$$

这里 $p_e$ 为平衡态统计分布函数, 它是已知的, $\phi(t)$ 中包含若干微扰项, 这些项可以人为地选取为具有能量型或磁化强度型等. 这样一种假设形式尽管是种切断近似(在以后的例子中可看出), 但并不等效于局部平衡近似, 因为我们主要是关注微扰的标度性质.

(2) 对所研究系统进行空间标度变换, 其变换步骤与前两章相同, 只是这里的统计(概率)分布函数 $p(\sigma, t)$ 是含时间 $t$ 的, 而不是 $p_e$ (平衡态统计分布). 设变换算符为 $T(\mu, \sigma)$ (这里不再用 $p(\mu, \sigma)$ 代表变换算符, 以免跟统计分布函数 $p(\sigma, t)$ 混淆), 则有

$$p'(\mu, t)=\sum_{\{\sigma\}} T(\mu, \sigma)p(\sigma, t). \tag{27.2}$$

其中, 为保证 $p(\sigma, t)$ 归一化, 必须要求:

$$\sum_{\{\mu\}} T(\mu, \sigma)=1 \tag{27.3}$$

和

$$T(\mu, \sigma)\geqslant 0. \tag{27.4}$$

同时, $T(\mu, \sigma)$ 不应改变晶格的对称性.

(3) 系统的统计分布函数形式地写为

$$p(\sigma, t)=\frac{1}{Z(t)}\, e^{\mathscr{H}(\sigma, t)}. \tag{27.5}$$

这里 $Z(t)$ 是为了使 $p(\sigma, t)$ 归一化而引入的因子, 它是形式上的配分函数. 哈密顿量 $\mathscr{H}(\sigma, t)$ 中含 $t$ 是因为其中 $\sigma=\sigma(t)$, 场参数

$\{K_\alpha\}=\{K_1, K_2, K_3, \cdots\}$，一般地 $\mathscr{H}(\sigma, t)$可表为

$$\mathscr{H}(\sigma, t)=\sum_\alpha K_\alpha(t)S_\alpha(\sigma). \tag{27.6}$$

这里$S_\alpha(\sigma)$是自旋$\sigma$的函数.具体地，上式可能写作多个自旋乘积项的总和：

$$\mathscr{H}(\sigma, t)=K_1\sum\sigma_i+K_2\sum\sigma_i\sigma_j+K_3\sum\sigma_i\sigma_j\sigma_k+\cdots. \tag{27.7}$$

重整化的统计(概率)分布函数为$p'(\mu, t)$，它也可形式地用$\mathscr{H}'(\mu, t)$来表示，$\mathscr{H}'(\mu, t)$写为：

$$\mathscr{H}'(\mu, t)=\sum_\alpha K'_\alpha(t)S_\alpha(\mu). \tag{27.8}$$

因此，重整化群变换可以看作参数空间$K=\{K_\alpha\}$的变换，即

$$\boldsymbol{K}'=R\boldsymbol{K}, \tag{27.9}$$

变换的不动点，$\boldsymbol{K}^*=R\boldsymbol{K}^*$，与临界点有关.

(4) 写出$p(\sigma, t)$所遵从的主方程

$$\tau_0\frac{dp(\sigma, t)}{dt}=-Lp(\sigma, t). \tag{27.10}$$

这里$\tau_0$作为时间标度，起着将系统与热源耦合的作用. 右边$L$为刘维尔(J.Liouville)算符，决定系统的动力学性质，它的形式可在具体问题中明显地写出. 原则上，希望$L$能从第一原理出发，由哈密顿量作出的微观运动方程来确定，但这是极困难的. 因此，现今都采用唯象的主方程，以它作为动力学问题的基础，或者至少提供一个合理的图象. 最常碰到的简化模型是我们曾提到的格劳伯模型和川崎模型形成的$L$算符，前者可以处理弛豫过程，后者则不仅可处理弛豫过程，还可处理由于空间不均匀性引起的输运现象，如：扩散、热传导等.

将$T(\mu, \sigma)$作用到主方程上：

$$\tau_0\sum_{(\sigma)}T(\mu, \sigma)\frac{dp(\sigma, t)}{dt}=-\sum_{(\sigma)}T(\mu, \sigma)L(\sigma)p(\sigma, t). \tag{27.11}$$

由于$T(\mu, \sigma)$与时间无关，因而可与时间导数交换，故(27.11)式

左边变为：

$$\tau_0 \sum_{\{\sigma\}} \frac{d}{dt} T(\mu, \sigma) p(\sigma, t) = \tau_0 \frac{d}{dt} p'(\mu, t), \qquad (27.12)$$

右边则可化为下列形式：

$$\sum_{\{\sigma\}}' T(\mu, \sigma) L(\sigma) p(\sigma t) \to -b^{-z} L'(\mu) p'(\mu, t). \qquad (27.13)$$

最终，主方程变为

$$(\tau_0 b^z) \frac{d}{dt} p'(\mu, t) = -L'(\mu) p'(\mu, t) \qquad (27.14)$$

或

$$\tau_0' \frac{d}{dt} p'(\mu, t) = -L'(\mu) p'(\mu, t). \qquad (27.15)$$

方程(27.15)与(27.10)形式上完全相同，只是 $\tau_0$ 换成了 $\tau_0'$，因此 TDRG 产生了时间标度行为：

$$\tau_0' = \tau_0 b^z. \qquad (27.16)$$

其中 $b$ 为空间长度重标因子，$z$ 便是动力学临界指数.

可见，如果长度用 $b$ 标度，$x' = bx$，时间用 $b^z$ 标度，$\tau_0' = b^z \tau_0$，就能保证主方程的形式不变，因而系统的所有与时间有关的物理性质不被标度变换改变. 在临界点，可立刻推出系统的特征时间标度与关联长度 $\xi$ 有如下关系：

$$\tau_0 \propto \xi^z, \qquad (27.17)$$

它实际上就是前面提到的(26.25)式.

## §28 TDRG 应用于一维动力伊辛模型

临界动力学的一项实际任务，就是求临界动力学指数 $z$. §26 曾严格求解过一维动力伊辛问题. 作为 TDRG 的应用，我们再次来处理这一问题，因为它能最清晰地显示 TDRG 的实施办法.

采用格劳伯模型，可具体地写出刘维尔算符，因而主方程写为：

$$\tau_0 \frac{dp(\sigma, t)}{dt}$$
$$= -\sum_j W_j(\sigma_1, \cdots, \sigma_j, \cdots, \sigma_N)p(\sigma_1, \cdots, \sigma_j, \cdots, \sigma_N t)$$
$$+\sum_j W_j(\sigma_1, \cdots, -\sigma_j, \cdots, \sigma_N)p(\sigma_1, \cdots, -\sigma_j, \cdots, \sigma_N t)$$
$$= -L(\sigma)p(\sigma, t)$$
$$= -\sum_j (1-p_j)W_j(\sigma)p(\sigma, t). \tag{28.1}$$

这里 $p_j$ 是自旋翻转算符：

$$p_j f(\sigma_1, \cdots, \sigma_j, \cdots, \sigma_N t) = f(\sigma_1, \cdots, -\sigma_j, \cdots, \sigma_N t). \tag{28.2}$$

跃迁率满足细致平衡，确保系统在平衡时的各态历经性：

$$(1-p_j)W_j(\sigma)p_e(\sigma) = 0. \tag{28.3}$$

其中 $p_e$ 为平衡统计分布函数. 主方程可改写为：

$$\tau_0 \frac{dp(\sigma, t)}{dt} = -\mathscr{L}\phi(\sigma, t). \tag{28.4}$$

这里 $\phi(\sigma, t)$ 定义为：

$$\phi(\sigma, t) \equiv \frac{p(\sigma, t)}{p_e(\sigma)}. \tag{28.5}$$

它用来量度 $p(\sigma, t)$ 对 $p_e(\sigma)$ 的偏离程度. 算符 $\mathscr{L}$ 由前几式可看出为：

$$\mathscr{L} \equiv \sum_i \mathscr{L}_i, \quad \mathscr{L}_i = p_e W_i(1-p_i). \tag{28.6}$$

$W_i$ 不依赖于系统的历史，即跟系统过去时刻的状态无关，故格劳伯模型描述的是马尔科夫过程.

关系式(28.3)并不能唯一地确定 $W_j(\sigma)$. 在此，采用

$$W_i(\sigma_i) = \left[\frac{p_e(\sigma_1, \cdots, -\sigma_i, \cdots, \sigma_N)}{p_e(\sigma, \cdots, \sigma_i, \cdots, \sigma_N)}\right]^{1/2}. \tag{28.7}$$

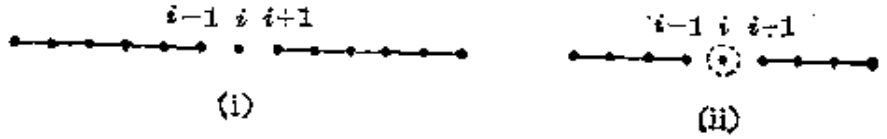
将其应用到(26.1)式的哈密顿量，可明确写出(28.7)式：

$$W_i(\sigma_i) = \exp[-K\sigma_i(\sigma_{i-1}+\sigma_{i+1})]. \tag{28.8}$$

在 $\mathscr{L}_i$ 中的 $p_e W_i$ 可合并写为：

$$p^{(i)}\equiv p_e W_i(\sigma_i)$$
$$=\exp\left(K\sum_{n.n.}\sigma_i\sigma_{i+1}\right)\cdot\exp[-K\sigma_i(\sigma_{i-1}+\sigma_{i+1})]. \qquad (28.9)$$

显然，它代表在 $p_e$ 的表示式中扣除 $\sigma_i$ 与 $\sigma_{i-1}$ 和 $\sigma_{i+1}$ 之间的相互作用项(图 28-1(i))。类似地，$p'^{(i)}_e=p'_e(\mu)W'_i(\mu_i)$ 代表重整化的 $p'_e$ 中缺掉 $\mu_i$ 与最近邻 $\mu_{i-1}$ 和 $\mu_{i+1}$ 之间的相互作用 $K'$。




(i) (ii)

图 28-1

为研究临界慢化，只要讨论偏离平衡态的无穷小微扰弛豫过程，函数 $\phi$ 的形式可通过反复试验来确定。在临界点附近，最慢的模是均匀模(涨落的长波模)。现将 $\phi$ 看作由一组算符集合构成，这些算符在实空间重整化群变换的参数空间中构成不变子空间，应使不变子空间是最小的子空间，具有正确的对称性。通常采用的形式有两类，一类是含奇数个算符的磁场型微扰：

$$\phi^M(h,\ \sigma)=1+\sum_q h_q\sum_i\sigma_i^q. \qquad (28.10)$$

这里 $q$ 的数目依赖于晶格上有多少种不同配位数的格点。在一维平移对称晶格中，各格点的配位数都相同，因此只有一个 $h$，故(28.10)式约化为

$$\phi(\sigma)=1+h(t)O_1(\sigma)=1+h(t)\sum_i\sigma_i. \qquad (28.11)$$

另一类是含偶数个算符的能量型微扰：

$$\phi^E(h^E,\ \sigma)=1+h^E\sum_{\langle i,j\rangle}\sigma_i\sigma_j, \qquad (28.12)$$

现利用(28.11)式，则

$$\mathscr{L}_i\phi=p^{(i)}(1-p_i)\phi=p^{(i)}(2\sigma_i)h(t). \qquad (28.13)$$

此式的含义是在图 28-1(i) 基础上乘以 $2\sigma_i$，图 28-1(ii)中 $i$ 格点上的圆圈代表乘 $2\sigma_i$。

现在着手对(28.4)式进行重整化群变换：采用部分格点消约法实施空间标度变换，变换算符取为

$$T(\mu,\ \sigma)=\prod_i \delta(\sigma_{2i}-\mu_i). \tag{28.14}$$

在方程(28.4)左边只有两种项：一项为 $p_e$，另一项为 $hp_e\sum_i\sigma_i$. 现分别研究这两项.

将 $T(\mu,\ \sigma)$ 作用于 $p_e$，并对 $\{\sigma\}$ 求和，可得

$$\begin{aligned}
&\prod_i A\exp K'\mu_i\mu_{i+1}\\
&=\prod_i A(\mathrm{ch}K')(1+\mu_i\mu_{i+1}\mathrm{th}K')\\
&=\prod_i\sum_{\sigma_{2i+1}}\exp K\sigma_{2i+1}(\mu_i+\mu_{i+1})\\
&=\prod_i\sum_{\sigma_{2i+1}}(\mathrm{ch}K)^2[1+\sigma_{2i+1}(\mu_i+\mu_{i+1})\mathrm{th}K+\mu_i\mu_{i+1}\mathrm{th}^2K].
\end{aligned} \tag{28.15}$$

立即可由(28.15)求出：

$$\mathrm{th}\,K'=\mathrm{th}^2K, \tag{28.16}$$

$$A=2\left(\frac{1+\mathrm{th}^2K}{1-\mathrm{th}^2K}\right)^{1/2}=2\,\mathrm{ch}\,K\left(\frac{1-\mathrm{th}^4K}{1-\mathrm{th}^2K}\right)^{1/2}. \tag{28.17}$$

一般地，若重标因子为任意整数，便可写：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{th}\,K'=\mathrm{th}^b K,\\
&A=2(\mathrm{ch}\,K)^{b-1}\left(\frac{1-\mathrm{th}^{2b}K}{1-\mathrm{th}^2K}\right)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{28.18}$$

将 $T(\mu,\ \sigma)$ 作用于 $hp_e\sum_i\sigma_i$ 并对 $\{\sigma\}$ 求和时，应区分两种情况：若 $\sigma_i$ 下标为偶数，只须将 $\sigma_{2i}$ 改为 $\mu_i$，$p_e(\sigma)$ 改为 $p'_e(\mu)$，即 $\mathscr{R}(hp_e\mu_i)=hp'_e\mu_i$，这里 $\mathscr{R}$ 代表进行重整化群变换. 若 $\sigma_i$ 下标为奇数，即 $\sigma_{2i+1}$，则在对 $\{\sigma\}$ 进行求和时产生：

$$\begin{aligned}
&h\sum_{\{\sigma\}}p_e\sigma_{2i+1}\\
&\quad=hp_e^{'[i,i+1]}\sum_{\sigma_{2i+1}}\sigma_{2i+1}\{(\mathrm{ch}^2K)[1+\mu_i\mu_{i+1}\mathrm{th}^2K\\
&\qquad+\sigma_{2i+1}(\mu_i+\mu_{i+1})\mathrm{th}K]\}\\
&\quad=hp_e^{'[i,i+1]}2(\mathrm{ch}^2K)(\mathrm{th}K)(\mu_i+\mu_{i+1}).
\end{aligned} \tag{28.19}$$

这里 $p_e^{'[i,i+1]}$ 代表在 $p'_e(\mu)$ 中缺掉 $\mu_i$ 与 $\mu_{i+1}$ 间相互作用项及常数 $A$，即

$$p'_e(\mu)=p_e^{\frac{1}{2}(\mu_i+\mu_{i+1})}A(\mathrm{ch}K')(1+\mu_i\mu_{i+1}\,\mathrm{th}\,K'). \tag{28.20}$$

注意到

$$\mathrm{ch}\,K=\left(\frac{1}{1-\mathrm{th}^2K}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{1-\mathrm{th}\,K'}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{28.21}$$

(28.19)式便可写为

$$\begin{aligned}h\sum_{\{\sigma\}}p_e\sigma_{2i+1}&=hp'_e\frac{\mathrm{th}\,K}{1+\mu_i\mu_{i+1}\mathrm{th}^2K}(\mu_i+\mu_{i+1})\\&=hp'_e\frac{\mathrm{th}\,K}{1+\mathrm{th}^2K}(\mu_i+\mu_{i+1}).\end{aligned} \tag{28.22}$$

其中已考虑到当 $\mu_i=-\mu_{i+1}$ 时，(28.22)式右边为 0，而当 $\mu_i=\mu_{i+1}$ (因而 $\mu_i\mu_{i+1}=1$)时，上式具有非零值.

综合以上结果，可得：($\mathscr{R}$代表经 $T(\mu,\sigma)$作用，同时对$\{\sigma\}$求和)

$$\begin{aligned}&\mathscr{R}(hp_e\mu_i)+\mathscr{R}(hp_e\mu_{i+1})+\mathscr{R}h\sum_i p_e\sigma_{2i+1}\\&=hp'_e(\mu_i+\mu_{i+1})+hp'_e\frac{\mathrm{th}\,K}{1+\mathrm{th}^2K}(\mu_i+\mu_{i+1})\\&=hp'_e\left(1+\frac{\mathrm{th}\,K}{1+\mathrm{th}^2K}\right)(\mu_i+\mu_{i+1}).\end{aligned} \tag{28.23}$$

若将重整化的 $\phi(\mu)$表示为

$$\phi(\mu)=1+h'(t)\sum_i\mu_i, \tag{28.24}$$

对照(28.23)式，便可写出

$$h'=h\left(1+\frac{2\,\mathrm{th}\,K}{1+\mathrm{th}^2K}\right)=\lambda h. \tag{28.25}$$

在(28.25)式中出现的相乘因子 2，来源于 $hp_e\sigma_{2i-1}$ 和 $hp_e\sigma_{2i+1}$ 两项经变换后分别产生因子$(\mu_{i-1}+\mu_i)$和$(\mu_i+\mu_{i+1})$，因此每个 $\mu_i$ 都出现两次. 变换递推关系(28.16)的不动点 $K^*=\infty$，$(\mathrm{th}K^*=1)$，因此立即求出(28.25)式的 $\lambda$：

$$\lambda=2. \tag{28.26}$$

在一般情况下，

$$\lambda=b. \tag{28.27}$$

现在再转到研究方程(28.4)右边的重整化群变换. 它包含如下形式的项：

$$p_e W_j(1-p_j)h(t)\sum_j \sigma_j = 2h\sum_j p^{(j)}\sigma_j. \tag{28.28}$$

注意到 $p^{(j)}$ 不含 $\sigma_j$，即与 $\sigma_j$ 无关，因此当变换算符作用于 $p^{(j)}\sigma_j$ 时，必须区分：当 $j=2i+1$ 时，则有 $\sum_{\{\sigma\}} T(\mu,\sigma)\cdot p^{(j)}\sigma_j = 0$；而当 $j=2i$ 时，相应的自旋经过求和步骤后变为 $\mu_i$，但 $\mu_i$ 与 $\mu_{i+1}$ 间并不存在耦合，它可由图 28-2 显示。所以求和后得到表示式：

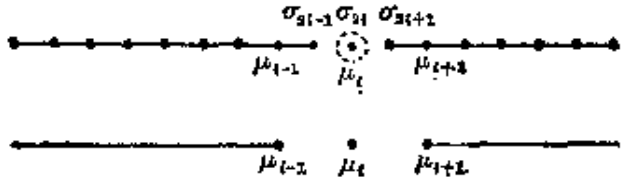



图 28-2

$$A^{-2}p'^{(i)}(\mu) \equiv A^{-2}p'_e(\mu)W_i(\mu). \tag{28.29}$$

前面因子 $A^{-2}$ 的来由是 $\mu_i$ 与 $\mu_{i+1}$ 退耦，使得根据(28.15)的计算少掉 $A^2$ 因子。但 $\sigma_{2i-1}\mu_{i-1}$ 和 $\sigma_{2i+1}\mu_{i+1}$ 两部分的贡献也应加上，其结果为：

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma_{2i-1}} \exp[K(\mu_{i-1}\sigma_{2i-1})] &= \sum_{\sigma_{2i-1}} (\mathrm{ch}\,K)(1+\mu_{i-1}\sigma_{2i-1}\,\mathrm{th}\,K)\\ &= 2\,\mathrm{ch}\,K.\end{aligned} \tag{28.30}$$

因此，在重整化群变换下，(28.28)式变为

$$2h(2\,\mathrm{ch}\,K)^2A^{-2}\sum_i p'^{(i)}(\mu)\cdot\mu_i \equiv 2h\omega\sum_i p'^{(i)}(\mu)\mu_i. \tag{28.31}$$

这里已令

$$\omega = \left(\frac{2\,\mathrm{ch}\,K}{A}\right)^2. \qquad (\text{当 } b=2) \tag{28.32}$$

在 $K$ 的不动点 $K^*=\infty$，求得

$$\omega = \frac{1}{2}. \tag{28.33}$$

最终，对主方程(28.4)两边进行空间重整化群变换(部分格点消约法)，可使它的形式保持不变，只需相应的量作如下变化：

$$\begin{cases} p(\sigma t) \to p'(\mu, t), \\ \mathscr{L}(\sigma) \to \mathscr{L}'(\mu), \\ \phi(\sigma t) \to \phi(\mu t), \\ \tau_0 \to \tau_0' = \tau_0\dfrac{\lambda}{\omega} = 4\tau_0. \end{cases} \tag{28.34}$$

再利用(28.16)式，立即求得动力学临界指数 $z=2$，这个结果与前节精确求解结果相一致.

## §29 科赫曲线上动力伊辛模型的临界动力学

现在转到分形晶格上的临界动力学. 对这种系统，迄今还未获得过严格的解析结果，几乎所有的处理都是用重整化群方法.

我们先将对主方程实行重整化群变换的形式结果归纳如下. 将 $T(\mu, \sigma)$ 作用于主方程的两边:

$$\tau_0 \frac{d}{dt} \sum_{\{\sigma\}} T(\mu, \sigma) p(\sigma, t) = -\sum_{\{\sigma\}} \left\{ T(\mu, \sigma) \sum_{i}^{N} \mathscr{L}_i \phi(\sigma, t) \right\}. \tag{29.1}$$

利用(28.10)及(28.12)等式，在参数空间 $(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{h})$ 中，方程(29.1)左边重整化群变换产生下列递推关系:

$$\boldsymbol{K}' = R\boldsymbol{K}, \qquad \boldsymbol{h}' = \Lambda \boldsymbol{h}. \tag{29.2}$$

这里 $\boldsymbol{K}=(K_1, K_2, \cdots, K_m)$, $\boldsymbol{h}=(h_1, h_2, \cdots, h_s)$, $R$, $\Lambda$ 为变换矩阵. 方程右边产生 $\mathscr{L} \to \mathscr{L}'$, $p_e \to p'_e$ 和不变子空间的一个变换:

$$\boldsymbol{h}_d = \Omega \boldsymbol{h}. \tag{29.3}$$

为使变换后保持主方程的形式不变，必须将 $\tau_0$ 用 $\tau'_0$ 取代.

$$\tau'_0 = b^z \tau_0.$$

如果 $\Lambda$ 与 $\Omega$ 可对易，那么 $\Omega\Lambda^{-1}$ 的本征值便是时间重标因子，对每个本征值的动力学指数为:

$$\frac{\omega}{\lambda} = b^{-z}, \tag{29.4}$$

这里 $\frac{\omega}{\lambda}$ 是 $\Omega\Lambda^{-1}$ 的本征值.

如果 $\Lambda$ 与 $\Omega$ 不对易，只需寻找在 $n\to\infty$ 极限情况下的重整化群变换的不变形式，这里的 $n$ 是进行递推的次数. 初步分析认为，这时矩阵 $\Omega$ 与 $\Lambda$ 的最大本征值 $\omega$ 与 $\lambda$ 控制 $t\to\infty$ 时的标度性质，因而(29.4)同样确定动力学指数. 但更进一步的研究发现，这一

结论必须修改(参见本书§33).

本节第二部分研究在无分支科赫曲线上的动力伊辛模型. 为简单起见, 模型中只计及曲线上最近邻自旋间相互作用, 作用常数为 $K$. 由于曲线是均匀的, 分岔度 $R=2$, 各格点配位数相同, 因此表示式(28.10)中 $\boldsymbol{h}$ 只含一个分量. 这样, 参数空间便是二维的 $(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{h})=(K, h)$.

正如第2章指出的, 无分支科赫曲线就磁性而言等同于一维链, 因而前节得到的格劳伯型严格解可以适用. 但曲线的扭曲效应使得相距为 $\omega$ (几何距离)的两个自旋间有 $\omega^{d_f}$ 根键. 在格劳伯解中距离是用两个自旋间的键数来量度, 因此关联长度 $\xi_1$ 应被实际的关联长度 $\xi_d$, 所取代, 即 $\xi_{d_f}=\xi_1^{1/d_f}$, 故在格劳伯解中 $\tau=\xi_1^2=\xi_{d_f}^{2d_f}=\xi_{d_f}^2$, 这样便求得动力学临界指数 $z=2d_f$.

现采用 TDRG 方法来进行研究: 设无分支科赫曲线是用下列迭代过程构成——第 $n$ 级的每段被含 $l$ 段的生成元取代而形成第 $n+1$ 级, 长度重标因子为 $b$. 在进行重整化的时候, 将第 $n+1$ 级通过积分掉所有内部自旋(消约去部分格点)而约化为第 $n$ 级, 自旋数目由 $N$ 减少至 $N'$. 使用下列简化记号:

$$y=\mathrm{th}\,K, \quad y'=\mathrm{th}\,K'. \tag{29.5}$$

主方程(29.1)的左边变为

$$\tau_0 \frac{d}{dt}\sum_{(\sigma)} T(\mu, \sigma)p(\sigma, y, h)=\tau_0 \frac{d}{dt}p'(\mu; y', h'), \tag{29.6}$$

其中

$$y'=y^l, \quad h'=b^{d_f}h=\lambda_M h, \tag{29.7}$$

这里 $l$ 代表重标因子 $b$ 距离内有 $l$ 根键. (29.7)给出的两个递推关系可通过跟前一节的对比明显地看出. $p$ 与 $p'$ 的"配分函数"相差因子 $A^{N'}$, 即 $z'=A^{-N'}z$, 其中

$$A=2^{l-1}(\mathrm{ch}\,K)^l/\mathrm{ch}\,K'. \tag{29.8}$$

主方程(29.2)的右边含 $\sum_i hp^{(i)}\sigma_i$ 项, 由于 $p^{(i)}=p_e W_i$ 是来自

细致平衡，它跟 $\sigma_i$ 无关，因此对那些经重整化变换不留下的自旋有 $\sum_{\{\sigma\}} p^{(i)}\sigma_i = 0$，而对剩下的 $p^{(i)}\mu_i$ 项，除了围绕 $\mu_i$ 的相互作用消失外，其他跟 $p_s$ 没有什么区别. 所以 $p^{(i)}$ 的生成元只由 $l-1$ 根键组成. 对这种缺键的生成元进行求和后，得到因子 $2^{l-1}(\mathrm{ch}\,K)^{l-1}$（参看(28.30)式），而不是 $A$. 故右边所得为：

$$\sum_{\{\sigma\}} T(\mu,\ \sigma) \sum_{i=1}^{N} h_i p^{(i)}\sigma_i = \left[\frac{1}{A}(2\,\mathrm{ch}\,K)^{l-1}\right]^2 \sum_{j=1}^{N'} h_j p'^{(j)}\mu_j$$

$$\equiv \frac{\omega_M}{\lambda_M} L'p'. \tag{29.9}$$

这里

$$\omega_M = \frac{\mathrm{ch}^2 K}{\mathrm{ch}^2 K'} = (1+y^2+y^4+\cdots+y^{2(l-1)})^{-1}. \tag{29.10}$$

在(29.10)式中用到：

$$\mathrm{ch}^2 K = \frac{1}{1-\mathrm{th}^2 K}$$

$$\mathrm{ch}^2 K' = \frac{1}{1-\mathrm{th}^2 K'} = \frac{1}{1-\mathrm{th}^{2l} K}. \tag{29.11}$$

在零温不动点 $y^*=1$，$\omega_M = l^{-1} = b^{-d_f}$，利用(29.4)式可得出

$$b^{-z} = \frac{\omega_M}{\lambda_M} = b^{-2d_f}. \tag{29.12}$$

最后，可写出

$$z \equiv z_M = +2d_f = \frac{1}{\nu} + d_t. \tag{29.13}$$

其中 $\nu$ 为关联长度临界指数. $\nu$ 是根据递推关系 $y'=y^l$ 在不动点 $y^*=1$ 附近线性化，并按定义求得

$$\frac{1}{\nu} = \frac{\ln\left(\frac{dy'}{dy}\right)_{y^*}}{\ln b} = \frac{\ln l}{\ln b}. \tag{29.14}$$

以上研究了含单个自旋算符的微扰的弛豫过程. 这种微扰是由磁场 $h$ 产生的，不是由温度改变引起的. 为了研究温度型（能量型）微扰的效应，用含偶数个自旋算符的微扰（见(28.12)式），可得

$$\begin{cases} y' = y^l, \\ A = 2^{l-1}\mathrm{ch}^l(K+h^E)/\mathrm{ch}K', \\ h'^E \equiv \lambda_E h^E = l h^E = b^{d_f} h^E. \end{cases} \tag{29.15}$$

而主方程右边的一个典型项的重整化群变换为

$$\sum_{\{\sigma\}} T(\mu,\ \sigma) p^{(j)} \mu_j \sigma_1 = p'^{(j)} \omega^{1/2} 2^{l-1} \mathrm{sh}^{l-1}(K+h^E) A^{-1} \mu_j \mu_{j+1}$$

$$\propto p'^{(j)} \omega y^{*l-1} \mu_j \mu_{j+1}. \tag{29.16}$$

值得注意的是，(29.16)式左边出现 $p^{(j)}\mu_j\sigma_1$ 而不是 $p^{(j)}\mu_j$，这是由微扰 $\phi$ 中含两个自旋相乘的结果．在不动点，$z$ 为

$$z = -\frac{\ln\left(\frac{\omega}{\lambda_E}\right)}{\ln b} = 2d_f. \tag{29.17}$$

这个结果与(29.13)一致．可见在无分支科赫曲线上，磁化强度和能量型微扰都具有相同的动力学临界指数．

本节第三部分研究分支科赫曲线上临界动力学．重整化群变换模式如图 29-1 所示．

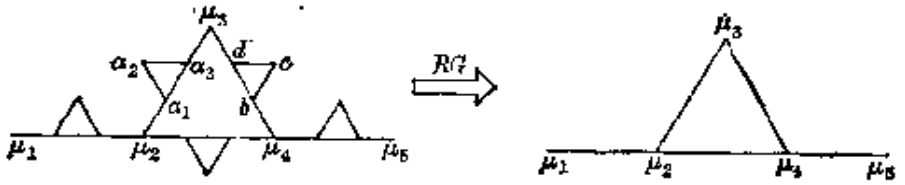



图 29-1

图中各键的相互作用常数均为 $K$，但曲线上存在两类具有不同配位数的格点，因此磁场 $\boldsymbol{h}=(h_2, h_3)$，下标 2，3 代表配位数的数目．$(\boldsymbol{K}, h_2, h_3)$ 构成整个参数空间的不变子空间．在进行重整化群变换时，产生 $y'$ 与 $y$ 的递推关系已在第 2 章求出过．现在主要要求 $\boldsymbol{h}'$ 与 $\boldsymbol{h}$ 之间的变换关系，即求 $\boldsymbol{\Lambda}$ 矩阵．为此，注意主方程左边出现如下两类典型项：

(1) $\sum_{\{\sigma\}} p_c(\sigma)$，它按静态部分格点消约法直接求出它变换为 $p'_c(\mu)$．

(2) $h_q \sum_{\{\sigma\}} p_c(\sigma)\sigma_i$，若 $\sigma_i$ 是 TDRG 后要保留的自旋 $\mu$，则变

换后直接变为 $h_q p'_e \mu_i$. 若 $\sigma_i$ 在 TDRG 要被消去，如图 29-1 中的 $\sigma_{\alpha_1}$、$\sigma_{\alpha_2}$、$\sigma_{\alpha_3}$，则变换后：

$$\begin{aligned}&\sum_{\{\sigma\}} \exp[K(\mu_2\sigma_{\alpha_1}+\sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_2}+\sigma_{\alpha_2}\sigma_{\alpha_3}+\sigma_{\alpha_3}\mu_3+\sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_3})]\\&\qquad\times(h_3\sigma_{\alpha_1}+h_2\sigma_{\alpha_2}+h_3\sigma_{\alpha_3})\\&=\sum_{\{\omega\}} p_e^{(2-5)}(h_3\sigma_{\alpha_1}+h_2\sigma_{\alpha_2}+h_3\sigma_{\alpha_3})\\&=[f(h_2,\ h_3)\mu_2+g(h_2h_3)\mu_3]p_e'^{(2-3)}(\mu).\end{aligned}\tag{29.18}$$

式中 $p_e^{(2-3)}$ 或 $p_e'^{(2-3)}$ 分别代表重整化前后在统计分布函数中所含与 $\mu_2$, $\mu_3$ 间生成元有关的那部分项. 经重整化后，$\mu_2$ 与 $\mu_3$ 的配位数分别为 3 和 2，因此它们与重整化的 $h'_3$ 和 $h'_2$ 相连系. 故可写出下列变换关系：

$$\begin{cases}h'_3=h_3+f(h_2,\ h_3),\\ h'_2=h_2+g(h_2,\ h_3).\end{cases}\tag{29.19}$$

其中 $f$ 和 $g$ 均为 $h_2$、$h_3$ 的线性函数，这可通过直接计算获得. 由此可写出 $2\times2$ 矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$：

$$\begin{pmatrix}h'_3\\ h'_2\end{pmatrix}=\boldsymbol{\Lambda}\begin{pmatrix}h_3\\ h_2\end{pmatrix}.\tag{29.20}$$

在主方程右边出现如下形式的项 $p^{(i)}\sigma_i h_{qi}$，其中 $\sigma_i$ 可能是在重整化过程中要消去的，这种项贡献为 0，也可能是要保留的，对这种项的图示见图 29-2. 图中，例如 $\mu_2$ 点的配位数为 3，因此计算结果应含因子 $A^{-3}\cdot B^3$，其中 $A$ 来自，例如 $A\exp(K'\mu_2\mu_3)=\sum_{\sigma_{\alpha_1},\sigma_{\alpha_2},\sigma_{\alpha_3}}\exp[K(\mu_2\sigma_{\alpha_1}+\sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_2}+\sigma_{\alpha_2}\sigma_{\alpha_3}+\sigma_{\alpha_3}\sigma_{\alpha_1}+\sigma_{\alpha_3}\mu_3)]$，而 $B$ 来自图 29-2(ii)对所有 $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$ 自旋求和的贡献. 对配位数为 2

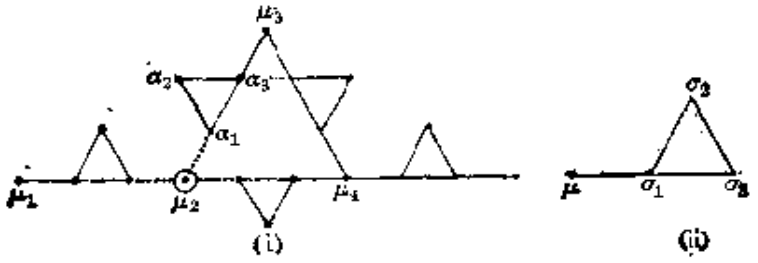



图 29-2

的格点可类似计算，那时出现因子 $A^{-2}\cdot B^2$，最终将主方程右边变换所得 $h''$ 表示为：

$$\begin{pmatrix} h_3'' \\ h_2'' \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} h_3 \\ h_2 \end{pmatrix}. \tag{29.21}$$

这样，应用本节开始的形式表述，只要算出 $A$ 和 $\Omega$ 的本征值，取其最大本征值，立即便求出了临界动力学指数 $z$. 这里略去所有计算细节，只写出计算结果：$z=\frac{1}{\nu}+d_f$. 它与无分支情况的结果完全一致.

总之，不论对有分支还是无分支的科赫曲线，我们都将动力学临界指数与静态指数 $\frac{1}{\nu}$ 联系起来，它是一个新标度律. 因而，即使不同分形具有相同分形维数，只要它们的 $\nu$ 不同，也可能产生不同的动力学临界指数 $z$. 此外，注意到在有分支情况下，由 $K$、$h$ 构成的参数空间往往超过二维，矩阵 $A$ 与 $\Omega$ 不可对易，这种情况下的精确讨论将在以后给出.

## §30 塞尔宾斯基铺垫上动力伊辛模型

正如我们曾经提到的，动力伊辛模型描述一个宏观的相互作用系统的依赖时间的行为，它的平衡情况由哈密顿量 $-\beta\mathscr{H}=K\sum_{\langle ij\rangle}\sigma_i\sigma_j$ 来确定. 现将伊辛自旋置于塞尔宾斯基铺垫的每个格点上[43]. 令系统在 $t=0$ 时处于一个约束平衡态，然后解除约束，系统通过与外热源的相互作用而趋于平衡. 假定自旋翻转是格劳伯型的，跃迁率也采用以前用过的形式，我们可通过主方程来研究系统的时间演化行为.

为研究临界慢化现象，我们限于考虑偏离平衡的无穷小弛豫，研究磁型微扰. 这里有一点与前不同，现在必须在微扰函数 $\phi$ 中加入三体作用项，以便保持微扰函数形式的对称性，和确保在

TDRG 变换下保持主方程形式不变. 具体地说，在重整化群变换中，当对最小尺寸的内部三角形上的自旋进行求和时，自旋间的相互作用产生三体相互作用，因而不得不一开始在微扰函数 $\phi$ 中便加进这样的项，使得参数子空间是个不变子空间. 于是微扰函数取作

$$\phi(h,\ \sigma)=1+h_1\sum_i\sigma_i+h_3\sum_i\sigma_1^i\sigma_2^i\sigma_3^i. \tag{30.1}$$

右边第三项是第 $i$ 个最小尺度的三角形上自旋间的三体作用. 它们的图示见图 30-1. 现将 $p(\sigma,\ t)=p_0\phi$ 代入主方程，研究在 TDRG 下它的变换.

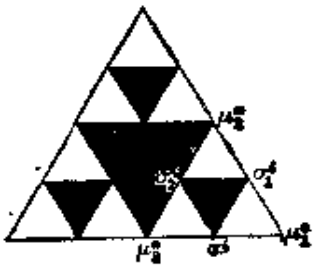


图 30-1

仍采用部分格点消约方法来进行重整化群变换，因而变换算符写为

$$T(\mu,\ \sigma)=\prod_\alpha\prod_{i=1}^{8}\delta(\mu_i^\alpha-\sigma_i^\alpha). \tag{30.2}$$

将(30.2)式作用于主方程两边，通过以前曾进行过的类似计算，可得在参数空间$(K,\ h_1,\ h_3)$中重整化群变换的递推关系为

$$\begin{cases} y'=y(1+4y)+o(y^3), \\ \begin{pmatrix}h_1'\\ h_3'\end{pmatrix}=\Lambda\begin{pmatrix}h_1\\ h_3\end{pmatrix}. \end{cases} \tag{30.3}$$

式中 $y=e^{-4K}$, $y'=e^{-4K'}$. 矩阵 $\Lambda$ 的最大本征值在不动点 $y^*=0$ 为：

$$\lambda_{\max}=b^{d_f}. \tag{30.4}$$

主方程右边经变换，得到

$$\begin{pmatrix}h_1''\\ h_3''\end{pmatrix}=\Omega\begin{pmatrix}h_1\\ h_3\end{pmatrix}. \tag{30.5}$$

矩阵 $\Omega$ 的最大本征值为 $\omega_{\max}=\dfrac{1}{2}$（在不动点）. 因而立即求出动力学临界指数 $z$ 为

$$b^{-z}=\frac{\omega_{\max}}{\lambda_{\max}},\quad \text{即}\quad z=1+d_f. \tag{30.6}$$

## §31 在 TDRG 中的键移近似

正如在第 3 章中看到的，对塞尔宾斯基地毯不可能只用部分格点消约方法来求解，而采用梅格达尔-卡丹诺夫键移重整化群方法求解. 在处理动力伊辛模型的临界动力学时，仍采用此种方法.[44]

图 31-1 是 $b=3$、$l=1$ 的塞尔宾斯基地毯. 图中给出它的生成元($n=1$ 级)及经过两次迭代得到的图形($n=2$ 级).

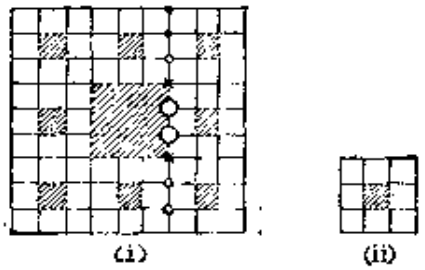



图 31-1

本题中，微扰函数 $\phi$ 取为只包含一个自旋算符的磁场型微扰. 由于各格点环境不同，因而磁场分量有 $h_1$、$h_2$、$h_3$，$h_1$ 是具有四根 $K$ 键作用的自旋格点的场，$h_2$ 是具有两根 $K$ 键和两根 $K_w$ 键的自旋格点的场，$h_3$ 则是具有一根 $K$ 键和两根 $K_w$ 键的格点的场. 在图中用黑点，交叉和圆圈来区别.

对主方程左边进行 TDRG 变换时，与在第 3 章中讲过的没有区别，它的一个简明图示如图 31-2 所示. 经变换后 $K\to K'$，$K_w\to K'_w$，$p(\sigma t)\to p'(\mu, t)$，各量的含义均与前同.

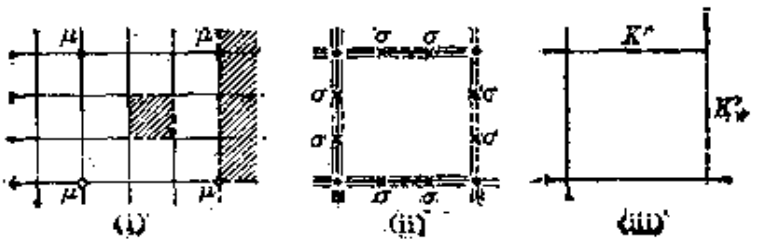



图 31-2

对主方程右边进行变换时，由于右边出现 $p_0W_i\sigma_ih_i$ 型的项，其中 $p^{(i)}=p_0W_i$ 代表 $\sigma_i$ 周围键空缺，这是由于考虑细致平衡的后果，这一要求在进行重整化群变换前后都应满足．但是经过键移后，原来空缺处的键被移来的键填补，使得它变为不空(虽然键的总强度与其他处不同)，这样就不能保持变化后应有的 $p_0'W_i'\mu_ih_i'$ 形式．为克服这一困难，采用人为地略去移来的键的办法，这可想象为在 $\sigma_i$ 附近，每个方向都存有两根与移来的键符号相反的负键，它们抵消了移来键的作用．由于这样的负键数量极少，比起晶格中的正键总数少得多，因而它引起的误差可认为很小．至此，可用原来办法来处理 $p^{(i)}\sigma_i$ 的重整化群变换，将其区分两种情况(见图 31-3)：一种涉及应消去的自旋 $\sigma_i$，一种涉及要保留的自旋 $\sigma_i$(即 $\mu$)．前一种与 $\sum_{\langle\sigma\rangle}p_0W_i\sigma_i=0$ 有关，后一种使 $\sum_{\langle\sigma\rangle}p_0W_i\mu\neq0$，这样留下的自旋 $\mu$ 与周围无键联系，这就完全保证了变换后的细致平衡要求得以满足．

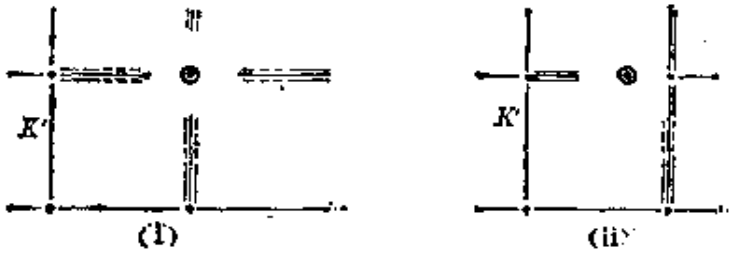



图 31-3

有了上述分析的基础，现在就来引述下列对 $b=7$ 和 $l=3$ (图 31-4)的塞尔宾斯基地毯上进行 TDRG 变换的结果．

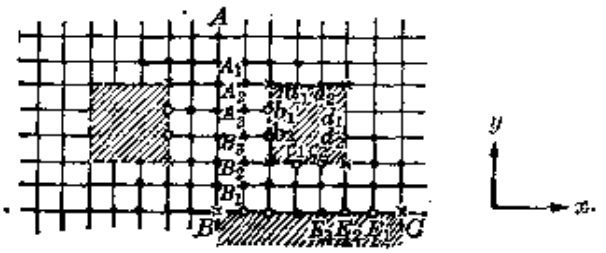



图 31-4

首先，主方程左边导出如下递推关系，这些关系与第 3 章的相

应结果没有区别：

$$\begin{cases} \mathrm{th}K' = \mathrm{th}^{l}[(b-l-1)K + 2K_w]\,\mathrm{th}^{b-l}(bK), \\ \mathrm{th}K'_w = \mathrm{th}^{l}\left[\frac{1}{2}(b-l-2)K + 2K_w\right]\mathrm{th}^{b-l}\left[\frac{1}{2}(b-1)l + K_w\right]. \end{cases} \tag{31.1}$$

对 $\phi(\sigma, t) = 1 + h_i \sum_i \sigma_i$（其中 $h_i$ 只有三个分量）进行变换，将产生矩阵 $\boldsymbol{A}$. 为此，先说明键移时磁场如何变化. 设各格点场随相互作用键一起移动，例如，在图 31-4 中 ·、×、∘ 分别对应该点的磁场为 $h_1$、$h_2$ 和 $h_3$，现考察 $x$ 方向的键移，在 $AB$ 线两旁移向 $A_1$（或 $B_1$）的有两旁的六个“·”，每个贡献 $\frac{h_1}{2}$，再加上 $A_1$ 自身有 $h_1$，键移后 $A_1$ 点应为 $\tilde{h}_1$，故可得：

$$\tilde{h}_1 = \frac{h_1}{2} \times 6 + h_1 = 3h_1 + h_1 = 4h_1.$$

同理，$A_2$（或 $B_2$）、$A_3$（或 $B_3$）点应有：

$$\begin{cases} \tilde{h}_2 = \frac{h_1}{2} \times 2 + h_1 + \frac{h_2}{2} \times 2 = 2h_1 + h_2, \\ \tilde{h}_3 = \frac{h_1}{2} \times 2 + h_1 + h_3 \times 2 = 2h_1 + 2h_3. \end{cases} \tag{31.2}$$

在推导(31.2)式时，已经认为沿空隙边界（不算顶角）上各格点磁场只贡献给沿一种方向的移动，例如，$b_1$、$b_2$、$d_1$、$d_2$ 处的磁场只贡献给沿 $x$ 方向移动产生的磁场而 $a_1$、$a_2$、$c_1$、$c_2$ 各格点磁场只对沿 $y$ 方向移动作出贡献. 同理，沿 $BO$ 线上 $E_1$、$E_2$、$E_3$ 各点的有效磁场为：

$$\begin{cases} \tilde{\tilde{h}}_1 = \frac{3}{2} h_1 + h_3, \\ \tilde{\tilde{h}}_2 = \frac{1}{2} h_1 + \frac{1}{2} h_2 + h_3, \\ \tilde{\tilde{h}}_3 = \frac{1}{2} h_1 + 2h_3. \end{cases} \tag{31.3}$$

对任意 $b$、$l$ 可得出：沿 $x$ 方向键移产生有效场

$$\begin{cases} \bar{h}_1=\dfrac{1}{2}(b+1)h_1, \\ \bar{h}_2=\dfrac{1}{2}(b-l)h_1+h_2, \\ \bar{h}_3=\dfrac{1}{2}(b-l)h_1+2h_3. \end{cases} \tag{31.4}$$

沿 $y$ 方向键移，产生有效场：

$$\begin{cases} \tilde{\bar{h}}_1=\dfrac{1}{4}(b-1)h_1+h_3, \\ \tilde{\bar{h}}_2=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b-l}{2}-1\right)h_1+\dfrac{1}{2}h_2+h_3, \\ \tilde{\bar{h}}_3=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b-l}{2}-1\right)h_1+2h_3. \end{cases} \tag{31.5}$$

经键移后再对内部自旋求和，产生自旋有效相互作用同时产生 $\mu$ 格点处的有效场，它是 $\bar{h}$ 和 $\tilde{\bar{h}}$ 的函数. $A$ 点自旋为 $\mu$，它在部分格点消约过程中要保留，$A$ 四周共有四根 $AB$ 型棱贡献给产生有效场 $h_1'$，而有两根 $AB$ 型和两根 $BO$ 型棱贡献给产生 $h_2'$，一根 $AB$ 型和两根 $BO$ 型棱贡献给产生 $h_3'$. 因而由 $(\bar{h}, \tilde{\bar{h}})\to\bar{h}'$ 产生一个变换矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，其形式为：

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} 1+4A & \dfrac{4a_2}{1+y'} & \dfrac{8a_3}{1+y'} \\ 2A+2O & \dfrac{2a_2}{1+y'}+\dfrac{c_2}{1+y_W'}+1 & \dfrac{4a_3}{1+y'}+\dfrac{2(c_1+c_2+2c_3)}{1+y_W'} \\ A+2O & \dfrac{a_2}{1+y'}+\dfrac{c_2}{1+y_W'} & \dfrac{2a_3}{1+y'}+\dfrac{2(c_1+c_2+2c_3)}{1+y_W'}+1 \end{pmatrix}. \tag{31.6}$$

其中

$$\begin{aligned} A&=\left[\frac{a_1(b+1)}{2}+\frac{(a_2+a_3)(b-l)}{2}\right]\Big/(1+y'), \\ O&=\left[\frac{c_1(b-1)}{4}+\frac{(c_2+c_3)(b-l-2)}{4}\right]\Big/(1+y_W'). \end{aligned} \tag{31.7}$$

这里 $a_i$ 和 $c_i$ 是较复杂的量，$y'=\mathrm{th}\,K'$，$y_W'=\mathrm{th}\,K_W'$. 矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 描述

磁场的静态标度性质和主方程左边的变换.

其次，看主方程右边的变换. 方程右边包含 $\mathscr{L}_i\phi=p_eW_i(1-p_i)h_i\sigma_i=p_eW_i2h\sigma_i$，正如已知的，$p_eW_i$ 使 $\sigma_i$ 周围的键空缺，它是细致平衡要求的结果，因此在变换的整个过程中都应保持. 因而重整化后导致的 $\mu$ 自旋附近的相互作用不应存在. 现对相聚在 $\mu_i$ 附近的四根或三根棱(见图 31-4)上除 $\mu$ 外的其余 $\sigma$ 自旋求和可给出常数项贡献. 沿 $AB$ 型棱和 $BC$ 型棱作部分格点消约步骤，所得结果分别为：

$$2^{b-1}\mathrm{ch}^{b-l-1}(\mathrm{bk})\mathrm{ch}^{l}[(b-l-1)K+2K_W] \tag{31.8}$$

和

$$2^{b-1}\mathrm{ch}^{b-l-1}[(b-l-2)K/2+2K_W]\mathrm{ch}^{l}[(b-1)K/2+K_W]. \tag{31.9}$$

这些项可分别写为：

$$F_{AB}\mathrm{ch}\,K'/\mathrm{ch}[(b-l-1)K+2K_W] \tag{31.10}$$

和

$$F_{AC}\mathrm{ch}\,K'_W/\mathrm{ch}[(b-l-2)K/2+2K_W]. \tag{31.11}$$

因子 $F_{AB}$、$F_{AC}$ 是常数项. 对运动方程右边求和的结果可写为：对有四条 $AB$ 型棱相聚的 $\mu_i$，其重整化磁场为 $h_1^d$，方程右边产生 $(1-p_i)h_1^dp'(\mu,t)W_i(\mu)\mu_i$，其中

$$h_1^d=\omega_{11}h_1=\mathrm{ch}^4K'/\mathrm{ch}^4[(b-l-1)K+2K_W]h_1. \tag{31.12}$$

类似地，对有两根 $AB$ 棱和两根 $AC$ 棱相交的 $\mu$ 格点，产生

$$h_2^d=\omega_{22}h_2=\frac{\mathrm{ch}^2K'\mathrm{ch}^2K'_W}{\mathrm{ch}^2[(b-l-1)K+2K_W]\mathrm{ch}^2[(b-l-2)K/2+2K_W]}h_2, \tag{31.13}$$

有一根 $AB$ 型棱和两根 $AC$ 型棱相交的 $\mu$ 格点，有

$$h_3^d=\omega_{33}h_3=\frac{\mathrm{ch}K'\mathrm{ch}^2K'_W}{\mathrm{ch}[(b-l-1)K+2K_W]\mathrm{ch}^2[(b-l-2)K/2+2K_W]}h_3, \tag{31.14}$$

上面的变换关系可写成矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} h_1^4 \\ h_2^4 \\ h_3^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Omega} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}. \qquad (31.15)$$

利用 $\boldsymbol{\Lambda}$ 与 $\boldsymbol{\Omega}$ 矩阵的本征值，便可求出不动点的本征值，从而求出 $z$ 值.

本节的计算非常繁复，我们只给出理论的主要关键点和计算思路，而没有提供计算细节. 应当说明，梅格达尔-卡丹诺夫近似是很难控制的近似.

## §32 规则 DLA 集团上的动力伊辛模型

扩散置限聚集(DLA)是一类生长分形集团. 此种集团是无规的. 目前计算机模拟得到的结果是：在二维空间，DLA 的分形维数 $d_f \approx 1.7$，而在三维空间，它的分形维数 $d_f \approx 2.5$.

从普适性的观点看来，如果能构造出一类规则分形，它具有 DLA 集团的基本特征——空间旋转对称性，同时又有与模拟结果接近的分形维数，则这样的规则分形可以用来作为无规 DLA 集团的代表. 图 32-1 构造出一种这类规则分形，生成元如图(i)所示，图(ii)和图(iii)为构造的第 2、3级，分形维数为 $d_f = \dfrac{\ln 5}{\ln 3} \approx 1.47$.

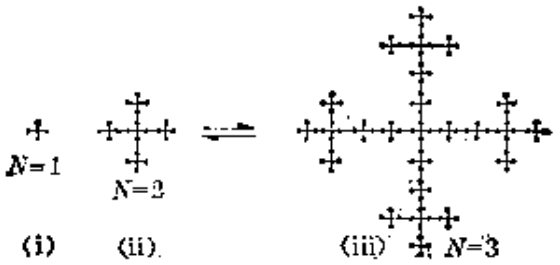
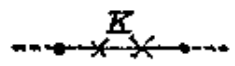
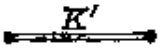
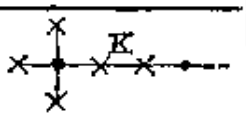
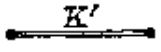
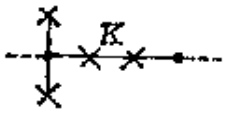
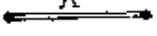



图 32-1

现在上述规则 DLA 分形的晶格上放置伊辛自旋，研究自旋系统的临界动力学.[45]

仔细观察图 32-1，可以发现：存在三类具有不同配位数的格点，它们的配位数为 1, 2, 4，任何 $n>2$ 级的结构均由三类基本结构组成．这三类基本结构中含有相同的线性元胞和不同的悬键，见表 32.1。

表 32.1

| | 基本结构 | 经过部分格点消约 | $A_{s(i)}(s(i)=0, 2, 3)$ |
|---|---|---|---|
| 1 |  |  | $4\mathrm{ch}^3K/\mathrm{ch}K'$ |
| 2 |  |  | $(2\mathrm{ch}K)^2 4\mathrm{ch}^3K/\mathrm{ch}K'$ |
| 3 |  |  | $(2\mathrm{ch}K)^3 4\mathrm{ch}^3K/\mathrm{ch}K'$ |

经过部分格点消约重整化群变换步骤，伊辛模型的最近邻相互作用常数 $K$ 变为 $K'$，三类基本结构的线性元胞相同，因此有相同的 $K'$ 与 $K$ 之间的递推关系，但由于它们具有不同数目的悬键，因而有不同的重整化常数 $A_{s(i)}$，这些常数对系统的自由能产生影响，但不影响系统的临界行为．

仿以前用过的符号，在主方程左边存在两类项，即

$$\sum_{(\sigma)} T(\mu,\sigma)p_\sigma \quad 和 \quad \sum_{(\sigma)} T(\mu,\sigma)\, p_\sigma \sum_q h_q \sum_i \sigma_{iq}. \tag{32.1}$$

这里 $h_q=h_1, h_2, h_4$，由格点配位数决定．$K'$ 与 $K$ 的关系可由下式求得：

$$\sum_{\sigma_1,\sigma_2} \exp[K(\mu_0\sigma_1+\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\mu_1)] = 4\frac{\mathrm{ch}^3K}{\mathrm{ch}\,K'} \exp(K'\mu_0\mu_1). \tag{32.2}$$

其中

$$\mathrm{th}\,K' = \mathrm{th}^3 K. \tag{32.3}$$

一根悬键产生如下因子：

$$\sum_{\sigma} e^{K\mu_0\sigma}=2\,\mathrm{ch}\,K. \tag{32.4}$$

综合(32.2)、(32.3)、(32.4)，主方程左边第一项变为：

$$\sum_{(\sigma)} T(\mu,\ \sigma)p_\sigma=\prod_i A_{s(i)}\exp(K'\mu_i\mu_j). \qquad S(i)=0,\ 2,\ 3 \tag{32.5}$$

这里$S(i)$代表在$i$格点的悬键数目. (32.3)是重整化群变换的递推关系，它具有不稳定不动点(临界点)$K^*=\infty$，它相当于$T_c=0$，这是一个具有零温相变的自旋系统.

对第二项，经重整化变换后，在不同点的重整化磁场为：

$$\begin{cases} h_1'=(3\mathrm{th}K)h_1+\dfrac{\mathrm{th}\,K(1+\mathrm{th}\,K)}{1+\mathrm{th}^3K}\,h_2+h_4, \\ h_2'=(2\mathrm{th}K)h_1+\dfrac{2\mathrm{th}\,K(1+\mathrm{th}K)}{1+\mathrm{th}^3K}\,h_2+h_4, \\ h_3'=\dfrac{4\mathrm{th}\,K(1+\mathrm{th}\,K)}{1+\mathrm{th}^3K}\,h_2+h_4. \end{cases} \tag{32.6}$$

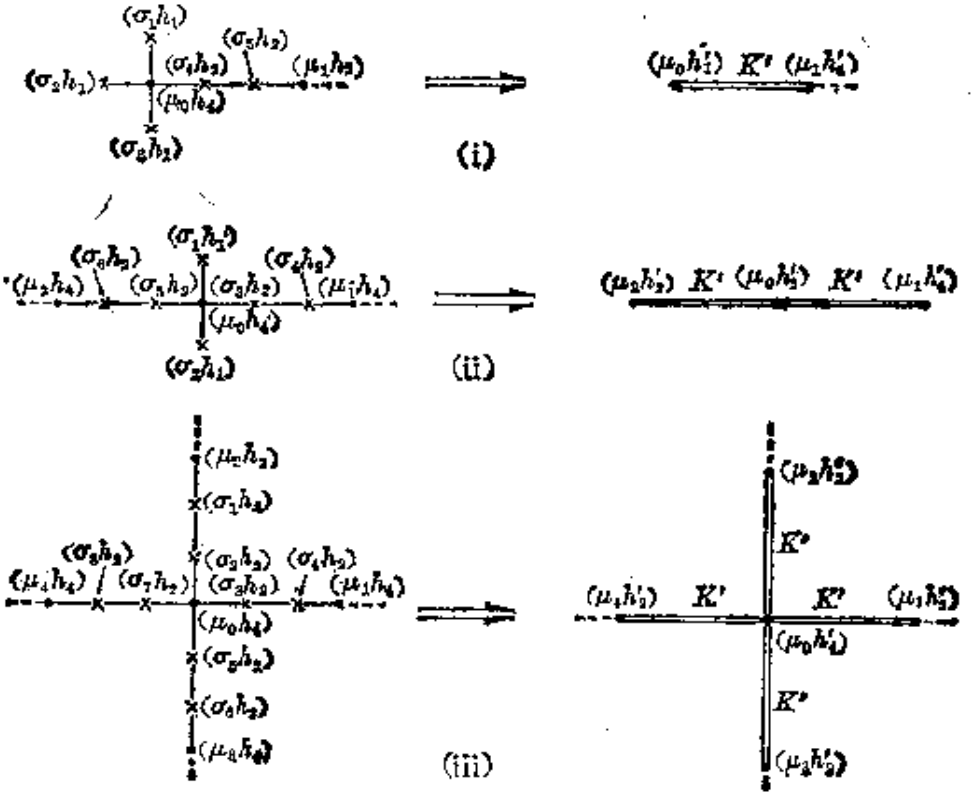



图 32-2

这些关系可以通过有多少个自旋贡献给一个典型 $h_q$ 来求出，这里逐个加以说明，

经过部分格点消约步骤，第 $n$ 级的结构变为第 $n-1$ 级的结构，某些点的配位数也发生改变，因而磁场参数必然改变．图32-2中场的变换可通过三种典型位形来显示．

在不同点，$\sum_{\{\sigma\}} T(\mu, \sigma) p_c h_q \sigma$ 得出不同结果，以下列出两种类型(见图 32-2(i))

$$\sum_{\{\sigma\}} T(\mu, \sigma) p_c h_1 \sigma_1 = (\mathrm{th}\, K) h_1 p'_c \mu_0 \tag{32.7}$$

和

$$\sum_{\{\sigma\}} T(\mu, \sigma) p_c (h_2 \sigma_4 + h_2 \sigma_5) = \frac{\mathrm{th}\, K(1+\mathrm{th}\, K)}{1+\mathrm{th}^3 K} h_2 (\mu_0 + \mu_1) p'_c . \tag{32.8}$$

由这两个方程可看出，一根悬键贡献一个因子 $(\mathrm{th}K)h_1$ 给重整化的场参数 $h'_q$，一个线性元胞贡献一个因子 $[\mathrm{th}\, K(1+\mathrm{th}\, K)/(1+\mathrm{th}^3 K)]h_2$ 给 $h'_q$，所以如果算出有多少类自旋贡献给 $h'_q$，场变数的递推关系便能找到．

现在看图 32-2(i)．这是一个与 $\mu_0$ 有关的贡献给 $h'_1$ 的位形，共有三部分贡献给 $h'_1$：三根悬键，一个线性元胞和 $\mu_0$ 点自身．故有：

$$\begin{aligned}
&\sum_{\{\sigma\}} T(\mu, \sigma) p_c (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) h_1 + \sum_{\{\sigma\}} T(\mu, \sigma) p_c (\sigma_4 + \sigma_5) h_2 \\
&\quad + \sum_{\{\sigma\}} T(\mu, \sigma) p_c \mu_0 h_4 \\
&= \{(3\mathrm{th}\, K) h_1 + [\mathrm{th}\, K(1+\mathrm{th}\, K)/(1+\mathrm{th}^3 K)] h_2 + h_4\} p'_c \mu_0 \\
&\quad + [\mathrm{th}\, K(1+\mathrm{th}\, K)/(1+\mathrm{th}^3 K)] h_2 p'_c \mu_1 .
\end{aligned} \tag{32.9}$$

由此可写出：

$$\begin{aligned}
&\{(3\mathrm{th}K) h_1 + [\mathrm{th}K(1+\mathrm{th}\, K)/(1+\mathrm{th}^3 K)] h_2 + h_4\} p'_c \mu_0 \\
&= h'_1 p'_c \mu_0 ,
\end{aligned} \tag{32.10}$$

因此

$$h_1' = (3\mathrm{th}\,K)h_1 + [\mathrm{th}\,K(1+\mathrm{th}\,K)/(1+\mathrm{th}^2 K)]h_2 + h_4. \tag{32.11}$$

由图 32-2(ii)，它有两根悬键，两个线性元胞和 $\mu_0$ 自旋本身贡献给 $h_2'$，故可求出(32.6)式的第二式．类似地，由图 32-2(iii) 可求出(32.6)式的第三式．

变换式(32.6)在不动点 $K^*=\infty$，变换矩阵为：

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}. \tag{32.12}$$

$\boldsymbol{\Lambda}$ 的本征值为 5, 1, 0，最大本征值 $\lambda_{\max}=5=b^{d_f}$．

再看主方程右边．它出现 $2h_q p_e W_i \sigma_i$ 项，显然在作过重整化群变换后，只有 $2h_q p_e W_i \mu_i$ 保留．$p_e W_i$ 不含围绕 $\mu_i$ 的相互作用，重整化因子 $A_{s(i)}$ 不应进入到 $p_e' W_i'(\mu_i)\mu_i$ 中，因此 $p_e' W_i'(\mu_i)\mu_i$ 必须除以一个适当的重整化因子，这个因子的组成是由不同 $A_{s(i)}$ 的乘积组成．对自旋求和时必须区分的三种位形见表 32.2．

表 32·2

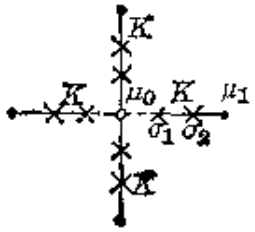
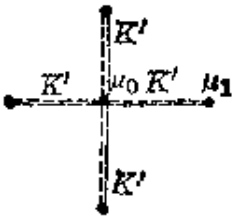
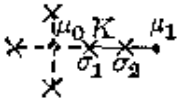
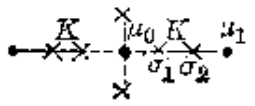
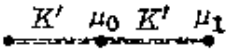
| | 典型位形 | 经部分格点消约 | 欲除因子 | $\mathrm{tr}\{\sigma\}[T(\mu,\sigma)\cdot p_e W(\mu_0)h_4\mu_0]$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 |  |  | $A_0^4$ | $\dfrac{(4\mathrm{ch}^2K)^4}{A_0^4}p_e'$ $\cdot W'(\mu_0)h_4\mu_0$ |
| 2 |  |  | $A_3$ | $\dfrac{4\mathrm{ch}^2K}{A_3}p_e'$ $\cdot W'(\mu_0)h_4\mu_0$ |
| 3 |  |  | $A_2A_0$ | $\dfrac{(4\mathrm{ch}^2K)^2}{A_2A_0}p_e'$ $\cdot W'(\mu_0)h_4\mu_0$ |

表 32.2 中 $\mu_0$ 视为孤立自旋，与周围无键相连，图中"×"代表在重整化过程中应消去的自旋，两自旋间连线代表相互作用. 对应这三种位形，在对自旋求和时分别给出 $h_4''$、$h_1''$ 和 $h_2''$:

$$\sum_{\{\sigma\}} T(\mu,\ \sigma) p_e W_0(\mu_0) h_4 \mu_0$$

$$= \frac{1}{A_0^4} p_e' W_0'(\mu_0) h_4 \mu_0 \{\sum_{\sigma_1,\sigma_2} \exp\{K(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\mu_1)\}\}^4$$

$$= p_e' W_0'(\mu_0) h_4'' \mu_0, \tag{32.13}$$

$$\sum_{\{\sigma\}} T(\mu,\ \sigma) p_e W_0(\mu_0) h_4 \mu_0$$

$$= \frac{1}{A_3} p_e' W_0'(\mu_0) h_4 \mu_0 \{\sum_{\sigma_1\sigma_2} \exp\{K(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\mu_1)\}\}$$

$$= p_e' W_0'(\mu_0) h_1'' \mu_0 \tag{32.14}$$

和

$$\sum_{\{\sigma\}} T(\mu,\ \sigma) p_e W_0(\mu_0) h_4 \mu_0$$

$$= \frac{1}{A_2 A_0} p_e' W_0'(\mu_0) h_4 \mu_0 \{\sum_{\sigma_1\sigma_2} \exp\{K(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\mu_1)\}\}^2$$

$$= p_e' W_0'(\mu_0) h_2'' \mu_0. \tag{32.15}$$

综合前三式，可得

$$\begin{cases} h_1'' = (\mathrm{ch}\, K'/8\,\mathrm{ch}^4 K) h_4, \\ h_2'' = (\mathrm{ch}^2 K'/4\,\mathrm{ch}^4 K) h_4, \\ h_4'' = (\mathrm{ch}^4 K'/\mathrm{ch}^4 K) h_4. \end{cases} \tag{32.16}$$

故

$$\boldsymbol{h}'' = \Omega \boldsymbol{h}. \tag{32.17}$$

它的最大本征值为

$$W_{\max} = \mathrm{ch}^4 K/\mathrm{ch}^4 K'. \tag{32.18}$$

令 $y \equiv \mathrm{th}\, K$, $y' \equiv \mathrm{th}\, K'$, 则

$$W_{\max} = (1+y^2+y^4)^{-2}. \tag{32.19}$$

在不动点 $K^* = \infty$, 有

$$W_{\max} = 3^{-2} = b^{-2} \tag{32.20}$$

和

$$\left(\frac{dy'}{dy}\right)_{y^*}=b^{1/\nu}=b. \quad (\text{即 } \nu=1) \tag{32.21}$$

因而

$$W_{\max}=b^{-2/\nu}. \tag{32.22}$$

由此求出动力学临界指数为

$$z=\frac{\ln\left(\frac{\lambda_{\max}}{W_{\max}}\right)}{\ln b}=d_f+\frac{2}{\nu}, \tag{32.23}$$

(32.23)式给出新的标度律. 倘若采用其他的规则分形去模拟无规 DLA 集团, 将得到相同的标度律, 可见(32.23)具有普适性.

应当指出, 这里矩阵 $\Lambda$ 与矩阵 $\Omega$ 不可对易, 用它们各自的最大本征值之比来决定 $z$ 值是有条件的. 这点将在下节讨论.

## §33 动力学重整化群方法的分析

前面讨论过的重整化群技术, 最终导致由矩阵 $\Lambda$ 和 $\Omega$ 的本征值来确定动力学临界指数 $z$. 不管 $\Lambda$ 与 $\Omega$ 是否对易, 都使用 $\lambda_{\max}/\omega_{\max}$ 来决定 $z$, 这里 $\lambda_{\max}$ 和 $\omega_{\max}$ 分别为 $\Lambda$ 和 $\Omega$ 的最大本征值. 实际上, 仔细的分析发现, 这一作法仅当矩阵 $\Lambda$ 与 $\Omega$ 对易时是对的; 如果 $\Lambda$ 与 $\Omega$ 不对易, $z$ 应由 $\frac{\lambda_{\max}}{\omega_{\min}}$ 来确定, 其中 $\omega_{\min}$ 为 $\Omega$ 的最小本征值.

现重写主方程

$$\tau_0\frac{dp(\sigma,\ t)}{dt}=-\mathscr{L}(\sigma)p(\sigma,\ t), \tag{33.1}$$

其中刘维尔算子

$$\mathscr{L}(\sigma)=\sum_i(1-p_i)W_i(\sigma)=\sum_i\mathscr{L}_i. \tag{33.2}$$

经过一次重整化群变换, 产生新概率分布函数:

$$p^{(1)}(\mu,\ t)=\sum_{\{\sigma\}}p(\sigma,\ \mu,\ t). \tag{33.3}$$

新的刘维尔算子 $\mathscr{L}^{(1)}(\mu)$ 定义为:

$$\sum_{\{\sigma'\}} \mathscr{L}(\sigma, \mu)p(\sigma, \mu, t) = \mathscr{L}^{(1)}(\mu)p^{(1)}(\mu, t). \qquad (33.4)$$

这里，$\mathscr{L}^{(1)}$ 和 $\mathscr{L}$ 具有相同形式(适当地选取 $W_i$).

为进行重整化群变换，如以前所作，可将 $p(\sigma, t)$ 表为：

$$p(\sigma, t) = p_e(\sigma)\left\{1+\sum_{i=1}^{m}\mathscr{O}_i(\sigma)h_i(t)\right\}$$
$$= p_e(1+\boldsymbol{O}\cdot\boldsymbol{h}). \qquad (33.5)$$

这里 $\mathscr{O}_i$ 是自旋算符，在以前的例子中，曾采用过少数几种表示，如 $\sigma_i$、$\sigma_i\sigma_j$、$\sigma_i\sigma_j\sigma_k$ 等形式. $\boldsymbol{O}$、$\boldsymbol{h}$ 均为具有分量 $\mathscr{O}_i$、$h_i$ 的矢量. 原则上，应当包含 $m=2^N$ 个独立 $\mathscr{O}_i$ 自旋算符，这样(33.5)才可能是精确的. $N$ 为自旋数目. 然而为了求解问题不得不采用切断近似，切断的原则是保持在重整化群变换下，它们形成参数空间的不变子空间.

利用(33.5)式，主方程可写为：

$$\tau_0 p_e\boldsymbol{O}\cdot\frac{d\boldsymbol{h}}{dt} = -\mathscr{L}p_e\boldsymbol{O}\cdot\boldsymbol{h}. \qquad (33.6)$$

经一次变换后，方程的一般形式为：

$$\tau_0 p_e^{(1)}\boldsymbol{O}\boldsymbol{\Lambda}^{(1)}(K)\frac{d\boldsymbol{h}}{dt} = -\mathscr{L}^{(1)}p_e^{(1)}\boldsymbol{O}\boldsymbol{\Omega}^{(1)}(K)\boldsymbol{h}. \qquad (33.7)$$

这里 $\boldsymbol{\Lambda}^{(1)}(K)$ 和 $\boldsymbol{\Omega}^{(1)}(K)$ 均为 $m\times m$ 矩阵，依赖于模型哈密顿量中的相互作用常数 $K_i$，变换后的 $p_e^{(1)}$ 和 $\mathscr{L}^{(1)}$ 分别具有与原始 $p_e$ 和 $\mathscr{L}$ 相同的形式. 经 $n$ 次变换后，可得：

$$\tau_0 p_e^{(n)}\boldsymbol{O}\boldsymbol{\Lambda}^{(n)}\frac{d\boldsymbol{h}}{dt} = -\mathscr{L}^{(n)}p_e^{(n)}\boldsymbol{O}\boldsymbol{\Omega}^{(n)}\boldsymbol{h}. \qquad (33.8)$$

其中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Lambda}^{(n)} &= \boldsymbol{\Lambda}^{(1)}(K)\boldsymbol{\Lambda}^{(1)}(K^{(1)})\cdots\boldsymbol{\Lambda}^{(1)}(K^{(n-1)}),\\ \boldsymbol{\Omega}^{(n)} &= \boldsymbol{\Omega}^{(1)}(K)\boldsymbol{\Omega}^{(1)}(K^{(1)})\cdots\boldsymbol{\Omega}^{(1)}(K^{(n-1)}).\end{aligned} \qquad (33.9)$$

如果经过 $n$ 次重整化群变换使系统进入到参数空间的高温区(远离临界区)，在该区 $p_e^{(n)}\approx 1$，$\mathscr{L}^{(n)} = \sum_i(1-p_i)W_i \approx \sum_i(1-p_i)$ (假定采用格劳伯模型)，则有：

$$\tau_0 \boldsymbol{\Lambda}^{(n)} \frac{d\boldsymbol{h}}{dt} = -\tilde{\mathscr{L}} \boldsymbol{\Omega}^{(n)} \boldsymbol{h}, \tag{33.10}$$

这里 $\tilde{\mathscr{L}}$ 是 $m \times m$ 矩阵，它由 $\tilde{\mathscr{L}} = \boldsymbol{O}^{-1} \mathscr{L}^{(n)} \boldsymbol{O}$ 决定. 将 $\tau_0$ 取作 1，上式改写为：

$$(\tilde{\mathscr{L}} \boldsymbol{\Omega}^{(n)})^{-1} \boldsymbol{\Lambda}^{(n)} \frac{d\boldsymbol{h}}{dt} = -\boldsymbol{h}. \tag{33.11}$$

由此方程的解立即求出弛豫时间，最长的弛豫时间 $\tau$ 是矩阵 $(\tilde{\mathscr{L}} \boldsymbol{\Omega}^{(n)})^{-1} \boldsymbol{\Lambda}^{(n)}$ 的最大本征值.

现提出两点说明：

(1) 由于(33.5)式的复杂性，使得难以得到精确解，因此不得不切断算符空间，使其子空间在重整化群变换下是封闭的；同时使在高温区 $p_e^{(n)} \approx 1$ 存在主方程的解. 切断近似可能略去了本应包含在方程解中的某些弛豫时间，但我们希望最长的弛豫时间没有被略去.

(2) 在许多情况下，即使作了切断近似，重整化群方法仍不能精确求解，因而必须设计某些近似方案，以使它能够得到可信的最长弛豫的估值.

现按照(33.11)式来计算临界动力学指数. 第一步是计算矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}^{(1)}$ 和 $\boldsymbol{\Omega}^{(1)}$. 由于我们的出发点是靠近临界点的静态重整化群变换，矩阵元对 $K_i$ 的依赖性可近似地用在不动点的线性展开来表示. 设所得矩阵元为：

$$\boldsymbol{\Lambda}^{(n)} = \boldsymbol{\Lambda}^n, \qquad \boldsymbol{\Omega}^{(n)} = \boldsymbol{\Omega}^n. \tag{33.12}$$

这里已代入不动点 $K_i^*$ 之值，因此不再依赖 $K_i$，利用(33.12)及(33.11)式，最长弛豫时间是矩阵 $(\tilde{\mathscr{L}} \boldsymbol{\Omega}^n)^{-1} \boldsymbol{\Lambda}^n$ 的最大本征值，因而 $\tau$ 应为：

$$\tau \propto \left(\frac{\lambda_{\max}}{\omega_{\min}}\right)^n, \tag{33.13}$$

而不应是：

$$\tau \propto \left(\frac{\lambda_{\max}}{\omega_{\max}}\right)^n. \tag{33.14}$$

这里 $\lambda_{\max}$、$\omega_{\max}$、$\omega_{\min}$ 代表 $\boldsymbol{\Lambda}$ 和 $\boldsymbol{\Omega}$ 矩阵的最大和最小本征值. 按

定义，可求出动力学临界指数 $z$：

$$z=\frac{\ln(\lambda_{\max}/\omega_{\min})}{\ln b}. \tag{33.15}$$

$b$ 为重整化群变换的长度标度. 这样一来，使得曾求过的 $z$ 值应随之作修改，不过实际上的修改只出现在 $\boldsymbol{\Lambda}$ 与 $\boldsymbol{\Omega}$ 不可对易的情况下. 这可通过以下的讨论来证实.

现回到研究 $(\tilde{\mathscr{T}}\boldsymbol{\Omega}^n)^{-1}\boldsymbol{\Lambda}^n$ 的最大本征值. 设选择 $\boldsymbol{\Omega}$ 为对角的基矢，在此基矢空间有一矩阵 $\boldsymbol{A}$，使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{A}^{-1}$ 是对角的，这时两个矩阵 $\boldsymbol{\Omega}$ 和 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{A}^{-1}$ 可按其本征值的大小排列，使 $\omega_1$、$\lambda_1$ 是这两个算符的最大本征值，而 $\omega_m$、$\lambda_m$ 是最小本征值. 为方便起见，考虑下列矩阵 $\left(\frac{\omega_m}{\lambda_1}\right)^n(\tilde{\mathscr{T}}\boldsymbol{\Omega}^n)^{-1}\boldsymbol{\Lambda}^n$，在上述基矢空间中，它的矩阵元的一般形式为：

$$\left[\left(\frac{\omega_m}{\lambda_1}\right)^n(\tilde{\mathscr{T}}\boldsymbol{\Omega}^n)^{-1}\boldsymbol{\Lambda}^n\right]_{ij}=\sum_{l=1}^{m}(\tilde{\mathscr{T}}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})_{il}\boldsymbol{A}_{lj}\left(\frac{\omega_m}{\omega_i}\right)^n\left(\frac{\lambda_l}{\lambda_1}\right)^n. \tag{33.16}$$

若 $\omega_m$ 是非简并的，则当 $n$ 很大时，(33.16)式中除 $i=m$ 外都变得很小，而对 $i=m$，求和式中只有 $l=1$ 的项起决定作用. 一般情况下

$$(\tilde{\mathscr{T}}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})_{ml}\boldsymbol{A}_{lm}\neq 0, \tag{33.17}$$

所以(33.16)式不为 0，因此最长弛豫时间是由下式确定：

$$\tau=(\tilde{\mathscr{T}}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})_{ml}\boldsymbol{A}_{lm}\left(\frac{\lambda_1}{\omega_m}\right)^n=(\tilde{\mathscr{T}}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})_{ml}\boldsymbol{A}_{lm}\left(\frac{\lambda_{\max}}{\omega_{\min}}\right)^n. \tag{33.18}$$

这就证明了(33.18)式.

在过去的计算中，当 $m=2$ 时，可具体地写出弛豫时间(见有关文献)：

$$\tau=\frac{(\lambda_{\max}/\omega_{\max})^n}{a+d(\omega_{\min}/\omega_{\max})^n} \tag{33.19}$$

显然，当 $a\neq 0$ 时，$\tau$ 确实由(33.14)式决定；但当 $a=0$ 时，(33.19)式便约化为(33.13)式，说明以前的结果仅当 $a\neq 0$ 时才成立.

# 第 5 章

# 分形上的动力学

本章研究分形上的动力学问题，主要涉及扩散(无规行走)，晶格振动，薛定谔方程的紧束缚近似解等. 研究发现：分形上的扩散具有与平移对称系统上的扩散不同的扩散规律和谱结构；晶格振动的频谱和电子能谱也具有奇特结构. 总之，在分形上出现动力学反常. 这种反常通过引入一个新的概念——谱维数来描述.

## §34 渗流集团上的反常扩散

第 1 章曾谈到渗流. 渗流可能用来模拟稀释系统、多孔介质及无序系统等. 许多有趣的现象都发生在渗流临界概率 $p_c$ 附近. 例如，在金属-绝缘体合金中，导电电阻的浓度 $p$ 达到 $p_c$ 附近时，出现渗流，这时关联长度 $\xi$ 按下列规律变化：

$$\xi \propto |p-p_c|^{-\nu}. \tag{34.1}$$

当 $p \geqslant p_c$ 时，导电电阻形成的无限大集团所占的份额(概率)为

$$P_\infty(p) \propto (p-p_c)^{\beta} \propto \xi^{-\beta/\nu}. \tag{34.2}$$

直流电导率则为

$$\sigma_{dc} \propto (p-p_c)^{\mu} \propto \xi^{-\mu/\nu}. \tag{34.3}$$

而当 $p<p_c$ 时，$P_\infty(p)=\sigma_{dc}=0$. 以上各式中，$\nu$、$\beta$、$\mu$ 均为临界指数. 在超导体-正常金属合金中，也有类似的标度行为.

以上结果代表了在一个大于关联长度 $\xi$ 的样品上的宏观平均. 在这种大尺度上，样品看上去像是均匀的.

然而，正如第 1 章谈到的，计算机试验和分析显示出，渗流集团的几何，在 $a \ll L \ll \xi$ 范围内并非均匀(这里 $a$ 是微观晶格常数). 在此范围内，集团是自相似的，具有分形特征. 在集团范围

内，一个线度为 $L$ 的体积 $L^d$（$d$ 为欧氏维数）内的键数目为 $L^{d_f}$，这里 $d_f=d-\beta/\nu$.

在上述反常长度范围内（即 $a\ll L\ll\xi$），预期所有物理测量均应反映出几何结构上的自相似性质，即呈现 $L$ 的幂律行为，而根本不依赖于 $\xi$. 因此 $L=\xi$ 成为一条界限，当 $L<\xi$ 和 $L>\xi$ 时，物理性质应有所不同.

这里主要研究在无规网络上的扩散问题[48],[49]，其中无规网络可用渗流模型来模拟. 在统计物理中早已熟知，无规行走问题既可用朗之万方程来研究，也可从扩散观点来研究. 无规行走问题可视为扩散问题.

现考虑一渗流集团. 在线性长度 $r_s\propto s^{1/d_f}$ 范围内含 $s$ 个格点. 如果在此集团内进行无规行走，一个行走者走 $t$ 步后所走的距离为 $r(t)$，满足 $a\ll r(t)\ll(r_s,\ \xi)$，因而可预期集团的自相似性的结构特征将导致下列结果：

$$\langle r^2(t)\rangle_s=A^2t^{\frac{2}{2+\theta}}. \tag{34.4}$$

这里 $\langle\cdots\rangle_s$ 代表是在 $s$ 个格点集团范围内的平均. 值得注意，仅当 $p=p_c$ 时，$\xi$ 才是无穷大，否则 $\xi$ 为有限值. 设在集团内，无规行走路径的有效维数为 $d_{rw}$：

$$t\propto r^{d_{rw}}. \tag{34.5}$$

这里 $t$ 为行走者所走的步数，如果每步用一个单位时间，则 $t$ 也代表行走的时间. 综合(34.4)和(34.5)，可得：

$$d_{rw}=2+\theta. \tag{34.6}$$

这个结果与平移对称系统中无规行走的结果不同，那时 $d_{rw}=2$（即 $\theta=0$），这就显示了扩散的反常特征. 当 $p>p_c$ 且 $r(t)\gg\xi$ 时，(34.6)式可导致 $d_{rw}=2$.

现在就来推导(34.4)式. 在均匀情况下，已知

$$\langle r^2(t)\rangle=Dt. \tag{34.7}$$

这是扩散的菲克（A. E. Fick）定律，$D$ 为扩散系数. 现假设在非

均匀情况下，利用上式来定义扩散系数 $D_s$，并认为 $D_s=D_s(t)$，即

$$D_s=\frac{d}{dt}\langle r^2(t)\rangle_s. \tag{34.8}$$

对 $p>p_c$ 时，若 $\langle r^2(t)\rangle_s\gg\xi^2$，则 $\langle r^2(t)\rangle_s$ 应与 $t$ 成正比. 这可由下面看出：设这时扩散系数为 $D_\infty$，$D_\infty$ 通过爱因斯坦关系与直流电导率 $\sigma_{dc}$ 联系起来：

$$\sigma_{dc}=e^2nD_\infty/kT,$$

这里 $n$ 为粒子密度. 在大尺度范围内，只有无穷集团的电子对电导率作出贡献，所以它的密度 $n$ 正比于 $P_\infty$，因而

$$D_\infty\propto\frac{\sigma_{dc}}{n}\propto(p-p_c)^{\mu-\beta}=\xi^{-(\mu-\beta)/\nu}\equiv\xi^{-\theta}. \tag{34.9}$$

由此，按(34.8)式，得

$$\langle r^2(t)\rangle_\infty\propto\xi^{-\theta}t. \tag{34.10}$$

可见 $\langle r^2(t)\rangle_\infty$ 与 $t$ 成正比.

然而，在一般情况下，$D_\infty(L)$ 应通过下列标度关系写成与 $L$ 有关的形式：

$$D_\infty(L)=\xi^{-\theta}f(L/\xi). \tag{34.11}$$

其中 $f(L/\xi)$ 在 $L=\xi$ 应为一常量. 在“反常”区 $a\ll L\ll\xi$ 内，$D_\infty(L)$ 应与 $\xi$ 无关，故必有 $f\left(\frac{L}{\xi}\right)\propto\left(\frac{L}{\xi}\right)^{-\theta}\left(\text{对 }\frac{L}{\xi}\ll1\right)$，因而：

$$D_\infty(L)\propto\xi^{-\theta}\left(\frac{L}{\xi}\right)^{-\theta}\propto L^{-\theta}. \tag{34.12}$$

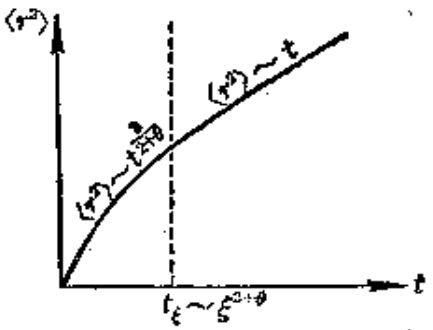


图 34-1

将 $L$ 改写为 $r$，利用定义(34.8)及(34.5)式，立即得到(34.4)式.

以上通过标度分析，证实了在关联长度 $\xi$ 范围以内扩散的反常行为. 这一反常用指数 $\theta$ 表征，$\theta=\frac{\mu-\beta}{\gamma}$. 当 $\theta$ 取作 0 时，反常行为消失，这相应于大于 $\xi$ 的尺度范围的情况. 图 34-1 给出在这两个区域内扩散的不同行为. 为明确起见，图中横坐标采用时间 $t$，而 $t_\xi$ 是两

区域的交界点.

## §35 扩散的谱密度·格林函数方法

本节研究扩散的谱密度.[50],[51] 这里的谱密度，是指扩散自关联函数的拉普拉斯变换谱的密度. 这将在稍后解释. 在着手研究谱密度之前，先来讨论一个较具一般意义的数学结构.

扩散，晶格振动运动方程分别具有下列形式：

$$\begin{cases} O_n \dfrac{dp_n}{dt} = W_{n,n-1}(p_{n-1}-p_n)+W_{n,n+1}(p_{n+1}-p_n), & (35.1) \\ M_n \dfrac{d^2p_n}{dt^2} = W_{n,n-1}(p_{n-1}-p_n)+W_{n,n+1}(p_{n+1}-p_n). & (35.2) \end{cases}$$

前者代表扩散方程，其中 $p_n$ 代表在格点 $n$ 的粒子密度，$T_{n,n+1}=\dfrac{W_{n,n+1}}{O_n}$ 代表扩散转移概率. (35.2)式代表晶格简谐振动方程，$M_n$ 为第 $n$ 个格点的粒子质量，$p_n$ 代表位移，$W_{n,n+1}$ 代表粒子间简谐相互作用的力常数. 这两个方程，前者含对时间 $t$ 的一阶微商，后者含对 $t$ 的二阶微商. 倘若两个方程分别作下列拉普拉斯变换：

$$\tilde{p}_n(\varepsilon)=\int_0^\infty dt e^{-\varepsilon t}p_n(t) \qquad (35.3)$$

和

$$\tilde{p}_n(\omega)=\int_0^\infty dt e^{-\omega t}p_n(t), \qquad (35.4)$$

立即发现，变换结果形式上完全相同，只是(35.1)式左边变换后出现 $\varepsilon$，而(35.2)式左边出现 $\omega^2$. 因此只要将 $\omega^2$ 取代 $\varepsilon$，便可由变换后的前式得到后式. 此外，还可发现，若 $W_{n,n+1}$ 与 $n$ 无关，$O_n$、$M_n$ 是独立无规变量，则两个方程将导出完全相同的积分方程.

这两个方程的单粒子(对角)格林函数定义为 $\tilde{p}_0(\varepsilon)$ 或 $\tilde{p}_0(\omega)$. 由格林函数理论得知，能量参数 $\varepsilon$ 的态密度可用单粒子格林函数表为：

$$N(\varepsilon)=-\frac{1}{\pi} I_m\langle\tilde{p}_0(-\varepsilon+i_0)\rangle. \qquad (35.5)$$

考虑到上述 $\varepsilon$ 与 $\omega^2$ 间的替换关系，对晶格振动，只须将 $\varepsilon$ 改为 $\omega^2$，并乘以 $\omega$，便可得到 $N(\omega)$.

现在转到研究扩散的谱密度. 为此，先求出$\langle\tilde{p}_0(\varepsilon)\rangle$. 它定义为：

$$\langle\tilde{p}_0(\varepsilon)\rangle=\int_0^\infty dt e^{-\varepsilon t}\langle p_0(t)\rangle. \tag{35.6}$$

其中$\langle\cdots\rangle$代表在渗流集团上进行平均，$p_0(t)$的物理意义是，当一个粒子在 $t=0$ 时刻从原点出发，经过无规行走，过了 $t$ 时间后又回到原点的概率. 这个量称为自关联函数，$\tilde{p}_0(\varepsilon)$便是它的拉普拉斯变换.

上节曾求得在 $a<r(t)<(\xi,\ r_s)$内的反常扩散行为. 在扩散距离内所包含的体积为：

$$V(t)\ \propto\ \langle r^2(t)\rangle^{\frac{d_f}{2}}. \tag{35.7}$$

而 $p_0(t)$显然应与 $V(t)$成反比. 因此，得：

$$\langle p_0(t)\rangle\ \propto\ [V(t)]^{-1}\ \propto\ t^{-\frac{d_s}{2+\theta}}. \tag{35.8}$$

(35.8)式表示 $V(t)$越大，粒子无规行走回到原点的概率越小. 将(35.8)式代入(35.6)式，可得：

$$\langle\tilde{p}_0(\varepsilon)\rangle\ \propto\ \varepsilon^{\frac{d_s}{2+\theta}-1}. \tag{35.9}$$

将其代入(35.5)式，立即得到

$$N(\varepsilon)\ \propto\ \varepsilon^{\frac{d_s}{2+\theta}-1}\equiv\varepsilon^{\alpha}. \tag{35.10}$$

将其中的能量参数 $\varepsilon$ 按前面的对应关系换成 $\omega^2$，则可求出：

$$N(\omega)\ \propto\ \omega\omega^{2\left(\frac{d_s}{2+\theta}-1\right)}=\omega^{\frac{2d_s}{2+\theta}-1}\equiv\omega^{p}. \tag{35.11}$$

表示式 $N(\varepsilon)$和 $N(\omega)$分别为扩散谱密度和晶格振动谱密度.

当 $\theta>0$ 时，$\alpha$ 和 $p$ 总是小于 $\theta=0$ 时的值. 可见，(35.10)和(35.11)式显示出存在动力学反常. 这个反常通过 $\theta\neq0$ 体现出来. 为了更清晰起见，现引入一个新的维数 $d_s$，记为：

$$d_s\equiv\frac{2d_f}{2+\theta}. \tag{35.12}$$

则(35.10)和(35.11)式可表示为:

$$N(\varepsilon) \propto \varepsilon^{\frac{d_s}{2}-1} \tag{35.13}$$

和

$$N(\omega) \propto \omega^{d_s-1}. \tag{35.14}$$

$d_s$ 称为谱维数，有时也称为分形子(fracton)维数. 这个维数能用来概括动力学中的反常现象. "分形子"一词可与平移对称晶格中的"声子"一词对照，前者代表分形晶格振动的"量子"，后者代表平移对称晶格振动的量子.

综上所述，可见在描述分形上的动力学时，我们不仅需要欧氏维数 $d$ 和分形维数 $d_f$，而且需要谱维数 $d_s$. 对平移对称晶格，三者合而为一，即 $d=d_f=d_s$，这可看作三种维数的偶然简并，但对分形晶格，它们的简并便解除. 因此可以说：分形维数 $d_f$ 用来刻画分形几何的反常长度标度特性；而谱维数 $d_s$ 用来刻画分形的反常时间或频率标度特性.

以下将给出几个具体例子. 首先，看一维晶格上的无规行走. 设 $N$ 是行走步数，$r$ 是距原点的距离. 由无规行走理论，知

$$N^{\nu} \propto r. \tag{35.15}$$

或改写为:

$$N \propto r^{1/\nu} = r^{d_f}. \tag{35.16}$$

所以

$$d_f = \frac{1}{\nu}. \tag{35.17}$$

沿一维链的扩散有:

$$N^2 \propto t. \tag{35.18}$$

另外，从方程(35.15)和(35.17)，有:

$$\langle r^2(t)\rangle = N^{2\nu}(t) \propto t^{\nu} = t^{\frac{2}{2+\theta}}. \tag{35.19}$$

可见，

$$\theta = 2(d_f-1). \tag{35.20}$$

并由此求出谱维数

$$d_s = 1. \tag{35.21}$$

这是一个平庸的结果：$d=d_f=d_s=1$.

其次，对于塞尔宾斯基铺垫上的无规行走，已知

$$\begin{cases} \theta=\dfrac{\ln 5}{\ln 2}-2\approx 0.322, \\ d_f=\dfrac{\ln 3}{\ln 2}\approx 1.585. \end{cases} \tag{35.22}$$

因而谱维数：

$$d_s=\frac{2d_f}{2+\theta}=\frac{2\ln 3}{\ln 5}=1.365. \tag{35.23}$$

最后，考察临界渗流网络上的无规行走．我们曾有

$$d_f=d-\beta/\nu. \tag{35.24}$$

$d$、$\beta$、$\nu$ 分别是欧氏维数、序参量和关联长度的临界指数，且

$$\theta=\frac{\mu-\beta}{\nu}, \tag{35.25}$$

$\mu$ 为电导率临界指数．由此立即求出：

$$d_s=\frac{2(d\nu-\beta)}{\mu-\beta+2\nu}. \tag{35.26}$$

表 35.1 给出渗流集团的数值结果．

表 35.1

| $d$ | $d_s$ | $x$ | $p$ | $d_f$ | $\theta$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1.36 | −0.32 | 0.36 | 1.9 | 0.80 |
| 3 | 1.42 | −0.29 | 0.42 | 2.5 | 1.55 |
| 4 | 1.39 | −0.30 | 0.39 | 3.3 | 2.71 |
| 5 | 1.44 | −0.28 | 0.44 | 3.8 | 3.3 |
| ∞ | 4/3 | −1/3 | 1/3 | 4 | 4 |

由这些数值看出，$d_s$ 与 $d$ 的关系很微弱，几乎与 $d$ 没有什么关系，而且对几乎所有 $d\geqslant 2$ 的欧氏维数，都有 $d_s\approx\frac{4}{3}$，这暗示着可能存在一种超普适性指数．精确的数值计算发现有偏离．

## §36 动力学标度理论

本节将从动力学标度理论出发，来导出谱密度和谱维数的普

遍形式.[52],[53]

为明确起见，讨论一个含 $N$ 个相同质点，质点质量为 $m$，用弹性常数为 $K$ 的简谐力连结起来的一个弹性结构. $N$ 与结构的长度标度的关系为：

$$N(L) \propto L^{d_f}. \tag{36.1}$$

当进行重标因子为 $b$ 的标度变换时，$N$ 按下列规律变化：

$$N(bL) = b^{d_f} N(L). \tag{36.2}$$

相应地，频率为 $\omega$ 的弹性振动的(每个基元的)态密度按下列规律变化：

$$\rho_L(\omega) = b^{d_f} \rho_{\frac{L}{b}}(\omega). \tag{36.3}$$

假设在标度变换下，振动模的频率也具有标度行为：

$$\omega(L/b) = b^{\alpha}\omega(L), \tag{36.4}$$

便可由标度变换前后振动模数自守恒：

$$\rho_{\frac{L}{b}}(\omega')\omega'\left(\frac{L}{b}\right) = \rho_L(\omega)\omega(L), \tag{36.5}$$

推导出：

$$\rho_{\frac{L}{b}}(\omega) = b^{-\alpha}\rho_L(\omega b^{-\alpha}). \tag{36.6}$$

再由(36.3)式，可得：

$$\rho_L(\omega) = b^{d_f-\alpha}\rho_L(\omega b^{-\alpha}). \tag{36.7}$$

原则上，这种标度关系对任何重标因子 $b$ 都应成立，因此，若令 $\omega b^{-\alpha}=1$ 或 $b=\omega^{1/\alpha}$，上式便可写成

$$\rho_L(\omega) = b^{d_f-\alpha}\rho_L(1) \propto b^{d_f-\alpha} = \omega^{\frac{d_f}{\alpha}-1}, \tag{36.8}$$

这样就给出了频率密度的幂律行为. 若令 $d_s \equiv \frac{d_f}{\alpha}$，上式改写成：

$$\rho(\omega) \propto \omega^{d_s-1}. \tag{36.9}$$

这里 $d_s$ 为谱维数，它是由最一般的标度论证得到的. 为求 $d_s$，需要找出 $d_f$ 和 $\alpha$. 以下通过实例来求它.

塞尔宾斯基铺垫上的晶格弹性振动：首先推导 $d=2$ 塞尔宾斯基铺垫上晶格振动频谱递推关系，然后求振动谱密度的谱维

数 $d_s$.

图 36-1 左边每个格点上放一个质量为 $m$ 的质点，质点间彼此用弹性常数为 $K$ 的弹性力耦合起来，令 $\lambda \equiv \frac{m\omega^2}{K} \equiv \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$ 为约化平方频率. 写出图中 $x_1$、$x_2$、$x_3$ 各点的运动方程：

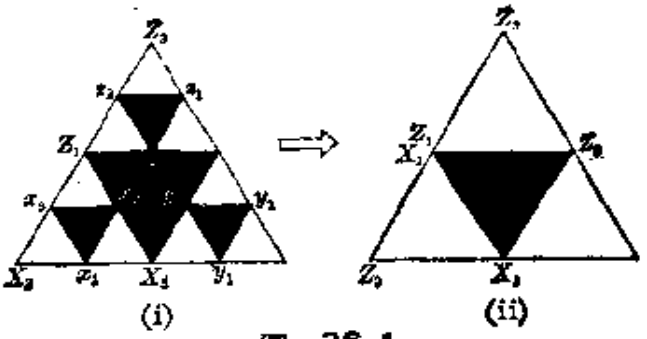


图 36-1

$$\begin{cases} -\frac{m}{K}\ddot{x}_1 = 4x_1 - X_2 - X_3 - x_3 - x_2, \\ -\frac{m}{K}\ddot{x}_2 = 4x_2 - X_3 - X_1 - x_3 - x_1, \\ -\frac{m}{K}\ddot{x}_3 = 4x_3 - X_1 - X_2 - x_1 - x_2. \end{cases} \tag{36.10}$$

设频率为 $\omega$ 的振动模的本征态为 $x_i(t) = x_i e^{i\omega t}$，代入方程(36.10)，可得：

$$\begin{cases} \lambda x_1 = 4x_1 - X_2 - X_3 - x_3 - x_2, \\ \lambda x_2 = 4x_2 - X_3 - X_1 - x_3 - x_1, \\ \lambda x_3 = 4x_3 - X_1 - X_2 - x_1 - x_2. \end{cases} \tag{36.11}$$

解(36.11)，可得：

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-(\lambda-4)(X_2+X_3)+2X_1}{(\lambda-5)(\lambda-2)}, \\ x_2 = \dfrac{-(\lambda-4)(X_3+X_1)+2X_2}{(\lambda-5)(\lambda-2)}, \\ x_3 = \dfrac{-(\lambda-4)(X_1+X_2)+2X_3}{(\lambda-5)(\lambda-2)}. \end{cases} \tag{36.12}$$

右边只出现 $X_1$、$X_2$、$X_3$，类似可写出：

$$\lambda X_1 = 4X_1 - (x_2+x_3+z_2+z_3). \tag{36.13}$$

由(36.12)看出，$x_i$ 是 $X_i$ 的函数($i=1, 2, 3$)．同样，$z_i$ 是 $Z_i$ 的函数($i=1, 2, 3$)．将其代入(36.13)式，可得：

$$\lambda(5-\lambda)X_1 = 4X_1 - (X_2+X_3+Z_2+Z_3). \tag{36.14}$$

将(36.14)与(36.11)对照. 若令

$$\lambda'=\lambda(5-\lambda), \tag{36.15}$$

便可使(36.14)在形式上与(36.11)完全相同. (36.15)式便是欲求的频谱递推关系. 这一过程相当于将图 36-1(i) 经部分格点消约步骤变为图(ii). 对任意 $d$ 维, 可得出普遍的递推关系:

$$\lambda'=\lambda(d+3-\lambda), \tag{36.16}$$

这里 $\lambda'\equiv\frac{m\omega'^2}{K}=\frac{\omega'^2}{\omega_0^2}$.

现采用(36.4)式符号. 可写:

$$\omega=\omega(L), \qquad \omega'=\omega\left(\frac{L}{2}\right). \tag{36.17}$$

当频率较低时, $\frac{\omega}{\omega_0}\ll 1$, 可得

$$\omega^2\left(\frac{L}{2}\right)=(d+3)\omega^2(L). \tag{36.18}$$

对比(36.4)式, 可推出:

$$2^\alpha=(d+3)^{1/2}. \tag{36.19}$$

因而

$$\alpha=\frac{\ln(d+3)}{2\ln 2}. \tag{36.20}$$

由此立即求得谱维数 $d_s$ 为:

$$d_s=2\,\frac{\ln(d+1)}{\ln(d+3)}. \tag{36.21}$$

当 $d=2$ 时, 求得 $d_s\approx 1.365$. 此结果与用格林函数方法求出的(35.23)式一致.

容易验证, 由塞尔宾斯基铺垫算出的三个维数 $d$、$d_f$ 和 $d_s$, 遵守下列不等式:

$$d\geqslant d_f\geqslant d_s. \tag{36.22}$$

当 $d$ 增加时, $d_f$ 单调地增加且无界, 然而 $d_s$ 却趋近它的上界 $d_s=2$. (36.22)式在普遍情况(不仅对塞尔宾斯基铺垫)下也是成立的, 迄今尚未发现与它相违背的例子.

回顾在维数为 $d$ 的欧氏空间中，频率为 $\omega$ 的某种激发(例如，声子)的态密度可用色散关系 $\omega(k)$ 和通过 $k$ 空间计数来推导，其中 $k$ 为波数，论证依赖于平移对称性. 频率密度为：

$$\rho(\omega)d\omega=\frac{d^dk}{(2\pi)^d}. \tag{36.23}$$

在频谱的低边界附近，色散关系变为简单的幂律：

$$\omega \propto k. \tag{36.24}$$

低频密度也变为：

$$\rho(\omega) \propto \omega^{d-1}. \tag{36.25}$$

显然，这种简单的幂律在分形中也已找到，只是用谱维数 $d_s$ 取代了欧氏维数 $d$. 但在分形晶格中，这种幂律关系的存在起源于标度理论，它更加一般和深刻，不像以前那样限于平移对称介质.

现将标度理论应用于无规行走问题. 在无规行走中，粒子从原点出发，在网络上行走 $N$ 步后，所走的平方平均距离为：

$$\langle r^2\rangle \propto t^{2\nu} \qquad (t \text{ 很大}) \tag{36.26}$$

若是在 $d$ 维欧氏空间作无规行走，可知 $\nu=\frac{1}{2}$，与维数无关. 这个结果可从扩散方程的解求出.

由标度理论，如果在分形上，(36.4)式成立，则通过扩散与振动之间的对应关系，可导出：

$$\nu=\frac{1}{2a}=\frac{d_s}{2d_f}. \tag{36.27}$$

推导办法是：利用振动问题中频率的标度行为(36.4)式，当 $b=L$ 时可写出 $\omega_{振} \propto L^{-a}$. 在扩散方程中出现对 $t$ 的一级微分，而振动问题中出现对 $t$ 的二级微分，这就导致振动问题中 $\omega^2$ 与扩散问题中 $\omega$ 相对应(以前在扩散问题中采用能量参数 $\varepsilon$，现在改用 $\omega$)，因而有：

$$\omega_{振}^2(L) \propto \omega_{扩}(L) \propto L^{-2a}. \tag{36.28}$$

利用 $\omega$ 与时间 $t$ 的量纲关系 $[\omega]=[t]^{-1}$，上式可改写为：

$$t_{扩}^{-1} \propto L^{-2a}. \tag{36.29}$$

将(36.26)式表成

$$t_{ff} \propto \langle r^2 \rangle^{\frac{1}{2\nu}} \propto L^{\frac{1}{\nu}}, \tag{36.30}$$

综合(36.29)、(36.30)式，便导出(36.27)。

显然，当 $\nu=\frac{1}{2}$ 时，$a=1$、$d_s=d_f$。这正是预期的。在分形上的无规行走自身又形成分形，它的分形维数 $d_f^{RW}$ 与分形晶格的 $d_f$ 不同。设无规行走的步数 $N$(每单位时间一步，因此 $N$ 等于 $t$) 按下列关系来确定：

$$t \propto N \propto r^{d_f^{RW}} \propto r^{\frac{1}{\nu}}. \tag{36.31}$$

后一关系利用了(36.30)式，可见

$$d_f^{RW}=\frac{1}{\nu}. \tag{36.32}$$

再利用(36.27)式，便得：

$$d_f^{RW}=\frac{1}{\nu}=2a=\frac{2d_f}{d_s}. \tag{36.33}$$

应当注意，$d_f$ 是晶格的分形维数，$d_f^{RW}$ 是在分形晶格上进行无规行走所形成的轨迹的分形维数

## §37 分形晶格振动的谱结构

本节研究在规则分形上晶格振动谱的特性以及本征振动模的性质。[54]

在规则分形上，晶格振动运动方程一般可写为：

$$\lambda U_i=\sum_j (U_i-U_j). \tag{37.1}$$

在 $d=2$ 维塞尔宾斯基铺垫上，它的具体形式已在前章给出。这里 $\lambda\equiv\frac{m\omega^2}{K}\equiv\frac{\omega^2}{\omega_0^2}$，$\omega$ 为本征振动频率。前章求得重整化频率 $\omega'$ 及无量纲参数 $\lambda'$ 的如下递推关系：

$$\lambda'\equiv\phi(\lambda)=(d+3)\lambda-\lambda^2. \tag{37.2}$$

谱维数为：

$$d_s=\frac{2\ln(d+1)}{\ln(d+3)}. \tag{37.3}$$

振动谱的特性与(37.2)式的变换$\phi(\lambda)$密切相关，$\phi(\lambda)$是平方映射. 通过对角(单个格点)格林函数，可以了解谱的详情. 为此，现引入积分态密度$N_I(\omega^2)$(或集成态密度)概念，它代表所有频率小于$\omega^2$的振动模在全部模中所占份额，记作：

$$N_I(\omega^2)=\int_0^{\omega^2}N(\omega^2)d\omega^2. \tag{37.4}$$

被积函数$N(\omega^2)$就是前章的态密度. 将态密度的格林函数表示式代入，可得：

$$N_I(\omega^2)=-\frac{2}{\pi}I_m\Phi(-\omega^2+i\varepsilon). \tag{37.5}$$

式中函数$\Phi(Z)$定义为：($Z$为复数)

$$\Phi(Z)=-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{N_n}\sum_{j=1}^{N_n}\ln(Z+\omega_{j,n}^2). \tag{37.6}$$

这里$N_n=\frac{1}{2}(d+1)[1+(d+1)^n]$是分形第$n$构造阶段的格点总数，$\{\omega_{j,n}\}$是$N_n$个本征频率的集合. 利用标准的积分表示，可导出$\Phi(Z)$所遵从的泛函方程：

$$\Phi(Z)=\frac{\Phi(Z(Z+d+3))}{d+1}-\frac{d-1}{2(d+1)^2}\cdot\ln\left[\frac{(Z+d+3)(Z+2d+2)^{d+1}}{Z+2}\right]. \tag{37.7}$$

除了$d=1$外，上述方程不能精确求解. 然而，借助于(37.7)式，还是可以给出许多有价值的结果. 下面列出若干重要结果，而不给出详细的数学推导过程.

首先，由它可找到频率的边界位于$\omega_{\min}^2=0$和$\omega_{\max}^2=(2d+2)\omega_0^2$. 同时，通过讨论$I_m\Phi(Z)$在负实轴上的不连续性，可求出$N_I(\omega^2)$或$N_I(\lambda)$. 利用这两点，振动谱便由边界条件和以下迭代关系完全确定：

(1) 边界条件：

$$N_I(\lambda\leqslant 0)=0 \quad 和 \quad N_I(\lambda\geqslant 2d+2)=1. \tag{37.8}$$

(2) 迭代关系:

$$N_I(\lambda)=\frac{N_I(\Phi(\lambda))}{d+1}-\frac{d-1}{(d+1)^2}\Theta(\lambda-2),$$

$$当\ 0<\lambda<\frac{d+3}{2}\ 时;$$

$$N_I(\lambda)=-\frac{d-1}{(d+1)^2}[\Theta(\lambda-2)-\Theta(\lambda-d-3)$$

$$-(d+1)\Theta(\lambda-2d+2)]+\frac{2}{d+1}-\frac{N_I(\Phi(\lambda))}{d+1},$$

$$当\ \frac{d+3}{2}<\lambda<\infty\ 时. \tag{37.9}$$

式中 $\Theta(x)$为阶跃函数, 即当 $x<0$ 时, $\Theta(x)=0$; 当 $x>0$ 时, $\Theta(x)=1$. 满足 (37.8) 和 (37.9) 式的 $\Phi(\lambda)$和 $N_I(\lambda)$ 与 $\lambda$ 的关系见图 37-1 中, 图是对 $d=2$ 的塞尔宾斯基铺垫得到的.

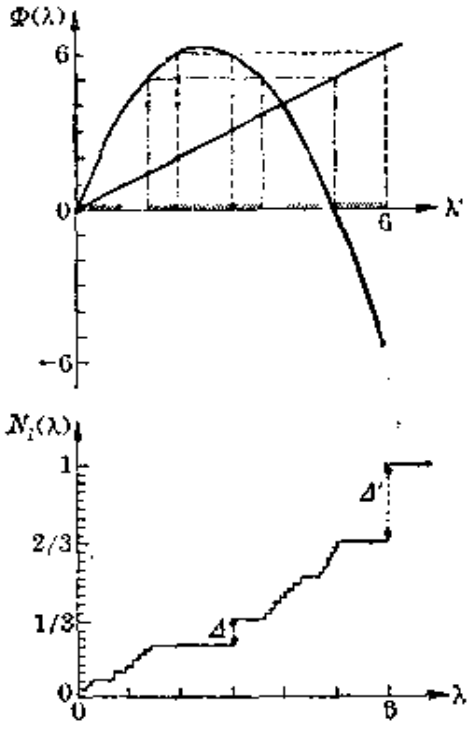


图 37-1

由图看出, $N_I(\lambda)$ 是非负单调递增函数, 由许多平台构成, 因而是一个高度奇异的函数, 这是由于 $\lambda\to\Phi(\lambda)$的映射造成的. 其逆映射为:

$$f_\pm(\lambda)=\frac{1}{2}[\delta\pm(\delta^2-4\lambda)^{\frac{1}{2}}].$$

$$(\delta=d+3) \tag{37.10}$$

现在解释图 37-1. 频率边界为 0 和 6, 设最初频率允许范围为 [0, 6]. 经(37.10)式迭代后, 得到 [0, 2]和[3, 5]两个允许范围和[2, 3]和[5, 6]两个禁区. 禁区对应的 $\lambda$ 值使得 $N_I(\lambda)$产生平台, 因为它们对(37.4)式没有贡献. 相邻平台的跃变高度可通过(37.9)式计算: $(d=2)$

$$\begin{cases} N_I(\lambda=6)=1, \\ N_I(\lambda=5)=\dfrac{2}{d+1}-\dfrac{N_I(\Phi(5))}{d+1}=\dfrac{2}{d+1}-\dfrac{N_I(0)}{d+1}=\dfrac{2}{d+1}, \\ \therefore \quad \Delta'=1-\dfrac{2}{d+1}=\dfrac{d-1}{d+1}=\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

(37.11)

$$\begin{cases} N_I(3)=\dfrac{2}{d+1}-\dfrac{N_I(\Phi(3))}{d+1}=\dfrac{2}{d+1}-\dfrac{N_I(6)}{d+1}=\dfrac{1}{d+1}, \\ N_I(2)=\dfrac{N_I(\Phi(2))}{d+1}-\dfrac{d-1}{(d+1)^2}=\dfrac{N_I(6)}{d+1}-\dfrac{d-1}{(d+1)^2}=\dfrac{2}{(d+1)^2}, \\ \therefore \quad \Delta_0=\dfrac{1}{d+1}-\dfrac{2}{(d+1)^2}=\dfrac{d-1}{(d+1)^2}=\dfrac{1}{9}. \end{cases}$$

(37.12)

继而，利用(37.10)式求下一级的允许带和禁带，其结果产生新的允许带和禁带，它们为：允许带为$\left[0, \dfrac{5-\sqrt{17}}{2}\right]$，$\left[\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}, \dfrac{5-\sqrt{5}}{2}\right]$，$\left[\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{5+\sqrt{13}}{2}\right]$，$\left[\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}, 5\right]$，禁带为$\left[\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}, \dfrac{5-\sqrt{13}}{2}\right]$，$\left[\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}, 2\right]$，$\left[3, \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}\right]$，$\left[\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}, \dfrac{5+\sqrt{17}}{2}\right]$. 如此重复进行迭代，便产生各级允许带和禁带. 图 37-2 显示这样的谱结构. 仿上，计算两个相邻禁带端点的 $N_I(\lambda)$ 值，求出它们的差值，便

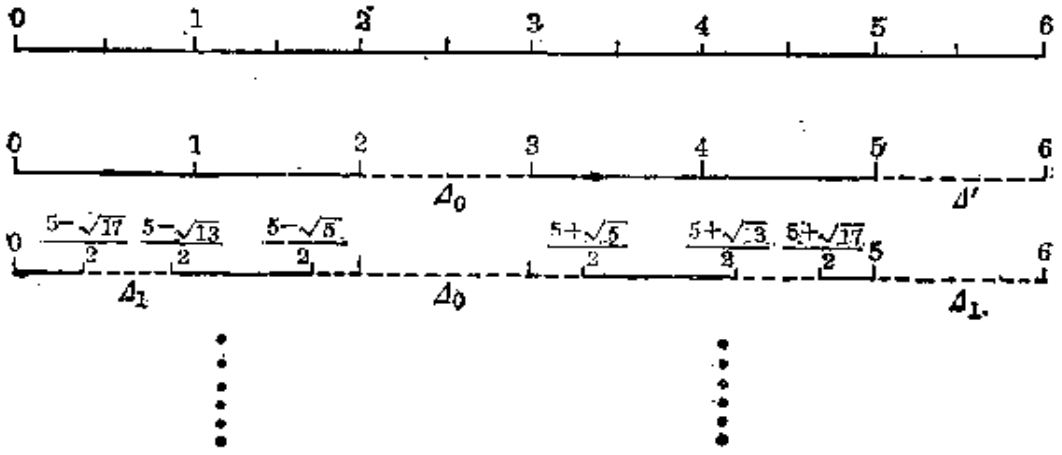


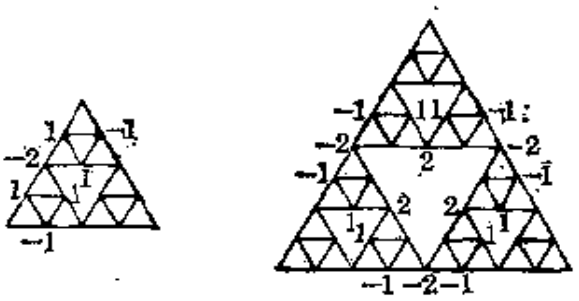

图 37-2

可找到 $N_I(\lambda)$的跃变量. 容易验证，在迭代的每个阶段，每个跃变都产生两个新跃变，跃变值为 $\Delta_{i+1}=\frac{\Delta_i}{d+1}$. 经过多次迭代，频谱形成一个由康托集支撑的纯点谱测度(勒贝格测度为 0).

整个频谱分为两部分：一部分是由本征频率 $\lambda=2d+2$ 和 $\lambda=d+1$ 以及由它们逐次用(37.10)式迭代产生的象点构成，这部分是自相似的，它们的相对权重为

$$\Delta'+\sum_{i=0}^{\infty}2^i\Delta_i=\frac{d}{d+1}. \tag{37.13}$$

这个式子代表在上述各频率处 $N_I(\lambda)$的跃变量的总和. 这部分频率相应的本征态是局域的，它们的振幅可通过一个给定格点 $i$ 的运动方程(37.1)求出. 在那里，$U_i$ 是频率为 $\omega$ 的本征态$\{U_ie^{i\omega t}\}$的振幅，对 $j$ 的求和遍及 $i$ 的最近邻. 图 37-3 给出 $d=2$ 塞尔宾斯基铺垫晶格振动的本征振动频率为 $\lambda=6$ 和 $\lambda=3$ 时的局域本征态，图中标出的数字代表振幅取值. 这种态称为“分子模”. 它们的空间范围可用一“局域”长度 $L(\lambda)$来量度，使得 $L^d(\lambda)$对应于相应模占据的体积.



(i) $\lambda=6$　　(ii) $\lambda=3$

图 37-3

频谱的另一部分是由映射 $\phi(\lambda)$的朱莉亚集(Julia set)组成，它的相对权重为：

$$1-\frac{d}{d+1}=\frac{1}{d+1}. \tag{37.14}$$

这部分谱在映射 $\phi(\lambda)$和它的逆变换 $f_\pm(\lambda)$下是不变的，它是由勒贝格测度为 0 的康托集 $C_\delta$ 支撑. 这部分本征谱由下式标记编码：

$$\lambda(\{\sigma\})=\frac{\delta}{2}+\sigma_0\sqrt{\alpha+\sigma_1\sqrt{\alpha+\sigma_2\sqrt{\alpha+\sigma_3\cdots}}}. \tag{37.15}$$

这里 $\{\sigma\}=(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \cdots)$, $\sigma_i=\pm 1$, $\lambda=\frac{\delta^2}{4}-\frac{\delta}{2}\geqslant 2, \delta=d+3$.

为了理解上述的意义，可以观察图 37-2. 图中第一部分谱全部由 $\lambda=6$ 和 3 经 $n\to\infty$ 次迭代形成，而 $\lambda=5$ 和 0，则在经 $n\to\infty$ 次迭代后形成另一部分谱，这部分是由 $f_\pm[f_\pm[f_\pm\cdots]]$ 产生，因而标记为(37.15). 与其相应的本征模也是局域的. 这种局域态，其振幅在围绕塞尔宾斯基的空隙(指挖去的部分)的有限范围以外为 0. 对一个固定的 $\lambda$ 值，当空穴的大小增加时，每个本征态的简并度减少. 所以，与 $O_\delta$ 相关的本征态可看作是局域模，其局域长度在塞尔宾斯基铺垫内形成一个从最低长度标尺到最高尺度标尺的阶梯等级.

本节结果说明，塞尔宾斯基铺垫的几何特性本身就能使状态局域化，而无需引入任何无序，这是非常值得注意的.

## §38 分形上薛定谔方程的解

本节采用部分格点消约法来处理分形上薛定谔方程的解，研究其能谱特征和波函数的性质. 在具体计算前，从方程分析发现它跟晶格振动运动方程形式上相同，因而它的解应与晶格振动的解具有相同性质.

分形上紧束缚近似的薛定谔本征方程为：

$$(E-u)\psi_x=t\sum_{x'}\psi_{x'}. \tag{38.1}$$

这里 $\psi_x$ 为态的振幅，$u$ 为在位势，$t$ 为最近邻格点间跳跃势，右边求和是对 $x$ 的所有最近邻进行. 将其与方程(37.1)对比，立即发现，它们具有完全相同的数学结构，因而由晶格振动所得的结果都可套用到电子本征方程上来.

现在，考虑下列紧束缚形式的哈密顿量：

$$H=\sum_i u|i\rangle\langle i|-t\sum_{(ij)}[|i\rangle\langle j|+|j\rangle\langle i|]. \tag{38.2}$$

它可设想为在分形晶格上的电子系统的哈密顿量，哈密顿量作用

于格点矢量 $|i\rangle$ 形成的希尔伯特空间，$\langle ij\rangle$代表最近邻两个格点，本征方程为：

$$H|\psi\rangle=E|\psi\rangle. \tag{38.3}$$

将分形晶格分为两个子晶格 1、2，即将希尔伯特空间分为两个子空间，$|\psi\rangle$在两个子晶格上的投影(分量)为$|\psi_1\rangle$和$|\psi_2\rangle$，则本征方程可写为：

$$\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} |\psi_1\rangle \\ |\psi_2\rangle \end{pmatrix}=E\begin{pmatrix} |\psi_1\rangle \\ |\psi_2\rangle \end{pmatrix}. \tag{38.4}$$

由此可写出：

$$\begin{cases} H_{11}|\psi_1\rangle+H_{12}|\psi_2\rangle=E|\psi_1\rangle, \\ H_{21}|\psi_1\rangle+H_{22}|\psi_2\rangle=E|\psi_2\rangle. \end{cases} \tag{38.5}$$

因而由后一式可写出：

$$|\psi_2\rangle=(E-H_{22})^{-1}H_{21}|\psi_1\rangle. \tag{38.6}$$

将其代入(38.5)式的第一式，便得：

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_{eff}|\psi_1\rangle&=[H_{11}+H_{12}(E-H_{22})^{-1}H_{21}]|\psi_1\rangle \\ &=E|\psi_1\rangle.\end{aligned} \tag{38.7}$$

由(38.3)到(38.7)式相当于一个消去子晶格 2 的过程. 在(38.3)式中本征方程涉及所有格点的空间，而(38.7)式只涉及子格子 1 的子空间，格点数目大量减少. 当然，求解(38.7)式并不比解(38.3)式容易，因为 $\mathscr{H}_{eff}$ 形式非常复杂. 然而，(38.7)式可使我们找到分形晶格两个相邻构造阶段能谱之间的递推关系，同时，利用(38.6)和(38.7)式找到本征态. 能实现这一目的的关键，是使方程(38.7)变成与原始哈密顿量的本征方程有相同的形式. 在这种情况下，本征值、本征态都可以在非常简单，单参数非线性递推关系基础上加以解决. 以下研究两个具体例子.

首先，研究线性链上的电子能谱和本征态. 它是平移对称的，可认为是用自相似方式逐级构造而成的. 它可分为两个相同的子晶格，任意两个相邻格点均属于不同子晶格. 在紧束缚形式下，取 $\alpha=0$，故哈密顿量简化为：

$$H=-t\sum_i[|i\rangle\langle i+1|+|i+1\rangle\langle i|]. \qquad (38.8)$$

本征态矢量写为：

$$|\psi\rangle=\sum_{i=1}^{N_n}\psi_i^n|i\rangle, \qquad (n\text{ 指第 }n\text{ 级构造阶段}) \quad (38.9)$$

本征方程为：

$$E\psi_i=-(\psi_{i+1}+\psi_{i-1})t. \qquad (38.10)$$

这里 $\psi_i$ 是态矢量$|\psi\rangle$在格点矢量$|i\rangle$上的投影(振幅). 使用周期边界条件，设在第 $n$ 级有 $N_n=2^{n+1}$ 个格点，周期边界条件意味着 $\psi_0=\psi_{N_n}$. 规定子格子 1 为所有编号为偶数的格点，而子格子 2 为所有编号为奇数的格点. 从(38.10)式可写出：

$$\psi_{2i+1}=\frac{-t}{E}(\psi_{2i}+\psi_{2i+2}). \qquad (38.11)$$

因而对子格子 1 可写出薛定谔方程：

$$\left(E-\frac{2t^2}{E}\right)\psi_{2i}=\frac{t^2}{E}(\psi_{2i+2}+\psi_{2i-2}). \qquad (38.12)$$

方程(38.12)具有与方程(38.10)精确相同的形式，但须令

$$t'\equiv-\frac{t^2}{E}, \qquad E'\equiv E-\frac{2t^2}{E}. \qquad (38.13)$$

引入无量纲参数：

$$\varepsilon\equiv\varepsilon_{n,\alpha}=\frac{E_{n,\alpha}}{t}\equiv\frac{E}{t}, \qquad (38.14)$$

和类似的

$$\varepsilon'\equiv\varepsilon_{n-1,\beta}=\frac{E'}{t'}. \qquad (38.15)$$

利用(38.13)式，可写出如下能谱递推关系：

$$\varepsilon'=2-\varepsilon^2, \quad \text{即} \quad \varepsilon_{n-1,\beta}=2-\varepsilon_{n,\alpha}^2. \qquad (38.16)$$

再看(38.9)式. 它的能量本征值为 $\varepsilon_{n,\alpha}$，线性链共含 $N_n=2^{n+1}$ 个格点. 设在第 $n-1$ 级，对应能量为 $\varepsilon_{n-1,\beta}$ 的本征态为：

$$|\psi\rangle'=\sum_{j=1}^{N_{n-1}}\psi_j^{n-1}|j\rangle. \qquad (38.17)$$

显然，应存在两个对应的能量为 $\varepsilon_{n,\pm}$ 的本征态：

$$|\psi,\ \pm\rangle=\sum_{i=1}^{N_n}\psi_i^{n,\pm}|i\rangle. \tag{38.18}$$

其中的 $\varepsilon_{n,\pm}$ 为

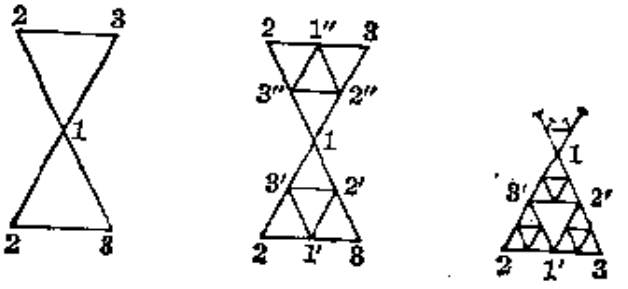
$$\varepsilon_{n,\pm}=\pm(2-\varepsilon_{n-1,\beta})^{\frac{1}{2}}. \tag{38.19}$$

$\psi_i^{n,\pm}$ 为

$$\begin{cases}\psi_{2j}^{n,\pm}=\psi_j^{n-1},\\ \psi_{2j+1}^{n,\pm}=-\dfrac{\psi_j^{n-1}+\psi_{j+1}^{n-1}}{\varepsilon_{n,\pm}}.\end{cases} \tag{38.20}$$

后一式已利用(38.11)式. 值得注意, (38.20)式只当 $\varepsilon_n\neq 0$ 时才成立, 这相当于要求 $\varepsilon_{n-1,\beta}\neq 2$. 上式说明, 当 $\varepsilon_{n-1,\beta}\neq 2$ 时, 在第 $n$ 级线性链系统中存在着两个能量本征态与第 $n-1$ 级系统的一个能量本征态相对应.

其次, 研究塞尔宾斯基铺垫上的电子本征谱和本征态. 考虑塞尔宾斯基铺垫的各级构造图 38-1, 与以前的画法不同, 这里为了求本征解, 已规定下列周期性边界条件, 即令正的和倒的两个最外边的三角形的两个边是等同的, 因此图中相应的格点 2 和 3 看作重合在一起.




(i) $n=0$ (ii) $n=1$ (iii) $n=2$

图 38-1

设 $u=0$ 且哈密顿量为(38.2)式, 同时引入无量纲参数 $s=\dfrac{E}{t}$, 由于每个格点有四个最近邻, 因而 $s$ 必限制在 $-4\leqslant s\leqslant 4$ 范围内. 为了得到递推方程, 我们采用(38.7)式. 子格子 1 包含那些较大尺寸三角形上的格点, 而子格子 2 包含较小尺寸上的格点.

为了求得(38.7)式，需要考虑图 38-1(ii)上具有最近邻跳跃势的 $6\times6$ 矩阵. 必须注意，(38.7)式中的 $H_{11}$、$H_{12}$、、$H_{21}$、$H_{22}$ 代表两个子格子自身或不同子格子间的矩阵元；下标 1、2 为子格子的标志，而不是格点的标志. 如果涉及到格点间的相互作用，必然每个 $H_{ij}$ 本身又是 $3\times3$ 矩阵. 在写出矩阵元时，必须记住只有最近邻格点间才有跳跃势. 因此，对照图 38-1(ii)，立即写出：

$$\begin{cases}(H_{11})_{ij}=0, & (i,\ j=1,\ 2,\ 3);\\ (H_{12})_{ij'}=(-1+\delta_{ij'}), & (i',\ j'=1',\ 2',\ 3');\\ (H_{22})_{i'j'}=(-1+\delta_{i'j'}). & \end{cases} \tag{38.21}$$

前一式恒为 0 是因为子格子 1 上的格点间总是不能成为最近邻. 利用(38.7)式可得出图 38-1(ii)中朝上的三角形的哈密顿量为：

$$\begin{aligned}H_{\Delta}&=[H_{11}+H_{12}(EI-H_{22})^{-1}H_{21}]_{ij}\\&=t\frac{(\varepsilon-2)+(\varepsilon+2)\delta_{ij}}{(\varepsilon+2)(\varepsilon-1)}.\end{aligned} \tag{38.22}$$

$H_{\Delta}$ 的对角元($i=j$)对应于在位势 $u'$ 为：

$$u'=t\frac{4\varepsilon}{(\varepsilon+2)(\varepsilon-1)}=u_i, \tag{38.23}$$

而变换后的跳跃势为：

$$t'=t\frac{2-\varepsilon}{(\varepsilon+2)(\varepsilon-1)}=t_{ij}. \tag{38.24}$$

在(38.23)式中，已经考虑到重整化后的每个格点出现在图 38-1(ii)中两个基本三角形中，因此对角元(38.23)式中分子不是 $2\varepsilon$，而是 $4\varepsilon$. 这样，(38.23)和(38.24)式给出第 $n-1$ 级系统的有效哈密顿量.

最初曾假定 $u=0$（第 $n$ 级），而到第 $n-1$ 级却出现了 $u'\neq0$. 为使这两级的哈密顿量具有相同形式，只须注意到 $u'$ 仅仅出现在 $E-u'$ 的组合形式中，因此若将 $E-u'$ 作为一个整体取代 $E$，而 $u'$ 看作 0，便不会改变哈密顿量的形式. 于是，定义：

$$\varepsilon'=\frac{E-u'}{t'}. \tag{38.25}$$

联合(38.23)、(38.24)及(38.25)式，便得对能量参数的递推关系：

$$\varepsilon' = -\varepsilon(\varepsilon+3). \tag{38.26}$$

在此若令 $\varepsilon=\lambda-4$, $\varepsilon'=\lambda'-4$, 上式可改写为：

$$\lambda' = 5\lambda - \lambda^2 = (d+3)\lambda - \lambda^2. \tag{38.27}$$

它便是在晶格振动问题中曾得到的递推关系. 在(38.26)式中，$\varepsilon' = \varepsilon_{n-1,\alpha}$, $\varepsilon = \varepsilon_n$, 它的逆变换形式为：

$$\varepsilon_{n,\pm} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4\varepsilon_{n-1,\alpha}}}{2}. \tag{38.28}$$

同前，对第 $n-1$ 级具有能量为 $\varepsilon_{n-1,\alpha}$ 的一个能量本征态，必然存在着能级为(38.28)式的两个相应本征态. 利用(38.6)式可求出图 38-1(ii)中朝上的三角形的三个内部格点的振幅. 为此，只须求出(38.6)式中算符的矩阵元，便可得：

$$\psi_i = \frac{1}{(\varepsilon+2)(\varepsilon-1)} \sum_{j=1}^{3} -[\varepsilon-(\varepsilon+2)\delta_{ij}]\psi'_j. \tag{38.29}$$

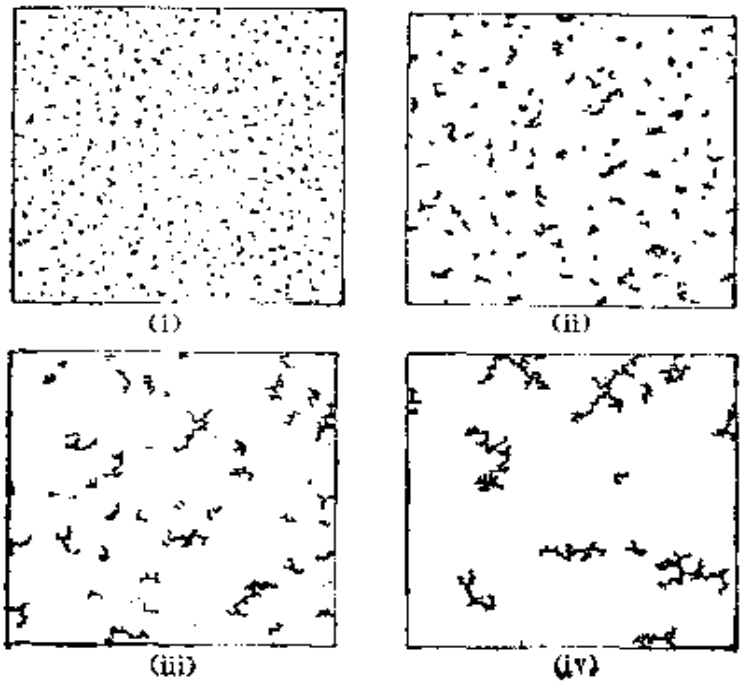



图 38-2

显然，由(38.29)式看出，当 $\varepsilon=\varepsilon_n=-2$、1 时，导致发散，因此(38.29)式只对除了这两值以外的 $\varepsilon$ 成立. 此外，当 $\varepsilon=\varepsilon_n=2$ 时，使 $H_4$ 中的 $v'=0$，这也不合理. 故(38.29)式只对除 $\varepsilon=-2, 1, 2$ 以外的值成立. 对这三个值，应特别地单独讨论，这里从略.

从能量递推关系使有可能对能谱结构的特征获得一些了解.

能量递推关系(38.26)式没有稳定不动点和周期，没有一个能量间隔在重复应用递推关系后能映射为自身. 就本征值来说，这意味着任何 $\varepsilon$ 值，除了一个测度为 0 的集合(属于某个不稳定周期的点)外，最终都将映射为 $\varepsilon=-\infty$. 然而，由于本征谱限制在 $-4\leqslant\varepsilon\leqslant4$ 范围内，它具有下界，这便意味着对无穷级塞尔宾斯基铺垫不存在容许能带.

为了具体地理解上述结论的含义，暂时不去管对递推关系不适用的 $\varepsilon^*=\pm2, 1$ 这三个值. 利用递推关系，可以产生一系列禁带 $I_k$. 第零个禁带为 $I_0$：$\varepsilon>1$ 或 $\varepsilon<-4$. 在此范围内的 $\varepsilon$ 用(38.28)式迭代后，都映射到趋于负无穷大. 第一个禁带为 $I_1$：$[-(3+\sqrt{5})/2,\ -(3-\sqrt{5})/2]$，在此区域中的能量值经迭代后映射到 $I_0$ 中，因而也形成禁区. 接着进行这一过程发现有由两部分组成的 $I_2$ 禁带，它映射到禁带 $I_1$. 继续此过程，会发现许多禁带 $I_k$. 几何上，它最终收敛到覆盖了整个 $-4<\varepsilon<1$ 的区域. 数值上发现，对很大 $K$，禁带 $I_k$ 的宽度为：

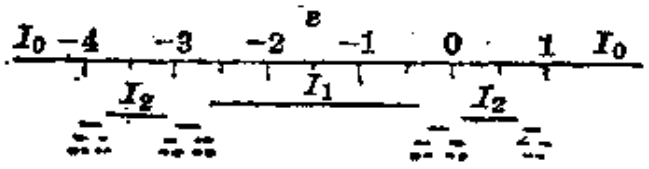


图 38-3

$$I_k\propto A\beta^{-k},\quad \beta=1.7380523\cdots,\quad A=0.7114374. \tag{38.30}$$

因此，能量的允许值必然形成测度为 0 的集合，它们或者与前述 $\varepsilon^*$ 值有关($\varepsilon^*$ 为递推关系不适用的值)，或者属于递推关系的不稳定周期. 图 38-3 显示出由递推关系得到的禁带.

## §39 弹性分形的临界指数和谱维数

本节讨论弹性分形.[56],[57] 为了了解它与以前讨论过的晶格弹性振动分形的区别，我们先介绍描写弹性力的玻恩(Born)模型. 该模型的势能为:

$$V=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\sum_{\langle ij\rangle}[(\boldsymbol{U}_i-\boldsymbol{U}_j)\cdot\boldsymbol{r}_{ij}]^2g_{ij}+\frac{1}{2}\beta\sum_{\langle ij\rangle}(\boldsymbol{U}_i-\boldsymbol{U}_j)^2g_{ij}. \tag{39.1}$$

其中 $\boldsymbol{U}_i$、$\boldsymbol{U}_j$ 为格点 $i$ 与 $j$ 的位移，$g_{ij}=1$ 代表 $i$、$j$ 之间的键被占(具有概率 $p$)，$g_{ij}=0$ 代表键不被占(具有概率 $1-p$). $\boldsymbol{r}_{ij}$ 为格点 $i$ 与 $j$ 间的单位矢量. 玻恩模型是一个有用的实用模型. 当 $\beta=\alpha$ 时，上述模型约化为各向同性玻恩模型，成为一个标量问题. 在此模型中，电导率指数与弹性模量指数相等，这是早年德让勒司(P. G.de Gennes)所预言过的. 以前讨论过的晶格振动模型正是各向同性模型. 在此模型中，压缩与剪切的弹性常数是相等的，实际固体不具有这种性质.

现在若令 $\beta=0$，上述模型也约化为一个简单模型. 在此模型中，格点间仅当键伸缩才存在相互作用力，这时键本身像一个弹簧. 这是一个纯中心力模型，具有旋转不变性. 在这一模型中，经分析和数值模拟证明，弹性模量与电导率分属不同普适类.

研究弹性分形的弹性模量的临界性质的基本思路，可描述如下：设考虑一个二维塞尔宾斯基铺垫(见图 39-1)，其边长为 $L=2^l$. 在图(i)中 $l=2$. 每根键代表弹性常数为 $K_0$ 的弹簧. 宏观外力加到每个外顶点上. 为了建造一个具有相同弹性性质，但是具有更少数目元胞(即 $L=1$)的网络，可用一个等效的 $L=1$ 块取代铺垫中每个 $L=2$ 的块. 由于每个块是通过它的三个外顶点连接到其余弹簧网络上，故只须考虑那些顶点变形的不同方式. 图 39-1(ii)、(iii)分别显示 $L=1$ 和 $L=2$ 铺垫的三种变形.

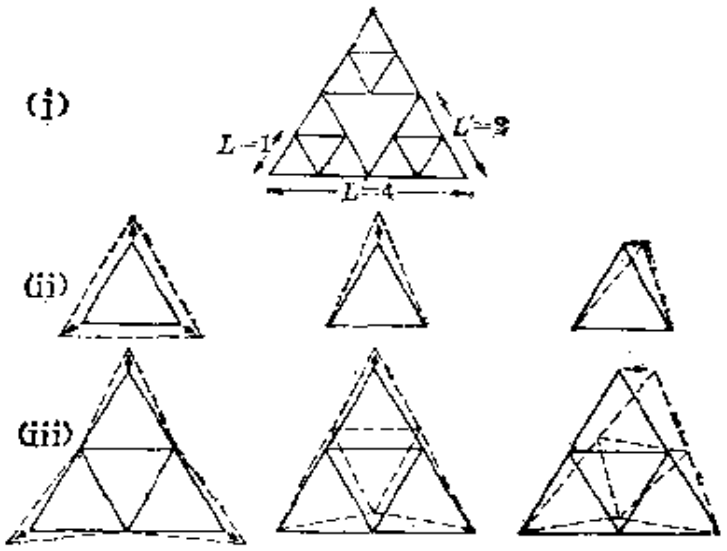



图 39-1

由上述分析所得数值结果为：弹性模量 $C(p)$ 的临界行为为：

$$C(p) \propto (p-p_c)^T, \quad \frac{\nu}{T}=d-1. \tag{39.2}$$

而电导率的行为为：

$$\sigma \propto (p-p_c)^t, \quad \frac{\nu}{t}=d-2+\log_2\frac{d+3}{d+1}. \tag{39.3}$$

在 $d=2$、3 情况下：

$$\begin{cases} \nu/t=0.737 \quad (d=2); & 1.585 \quad (d=3). \\ \nu/T=1 \quad\quad (d=2); & 2 \quad\quad\ (d=3). \end{cases} \tag{39.4}$$

显然，弹性模量与电导率不属同一普适类. 同时发现，体模量 $K$ 与剪切模量 $\mu$ 之比是一普适值 $\frac{4}{d}$.

现在转到讨论弹性塞尔宾斯基铺垫的谱维数. 已知在各向同性弹性力模型中，振动的低频频谱密度为：

$$\rho(\omega) \propto \omega^{d_s-1}. \tag{39.5}$$

其中对 $d=2$，谱维数为 $d_s=\frac{2\ln 3}{\ln 5}$（见(36.21)式）. 但对中心力弹性模型，原子间用弹簧连结，这种模型求得的谱维数为：

$$d_s=\frac{2\ln 3}{\ln 6}. \tag{39.6}$$

这与以前明显不同，以下来证明(39.6)式.

弹性塞尔宾斯基铺垫用下列方式来构造：在第 $n=0$ 级的等边三角形的每个顶点上，放上具有质量为 $\frac{M}{2}$ 的质点，每边放一个弹性常数为 $K$ 的弹簧，如图 39-2 所示. 当三个基本单元放在一起形成更大单元时(相当于第 $n=1$ 级，图中将尺寸缩小画)，所有内部顶点均具有质量 $M$.

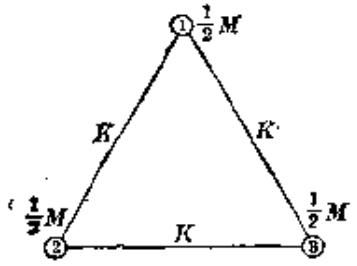



图 39-2

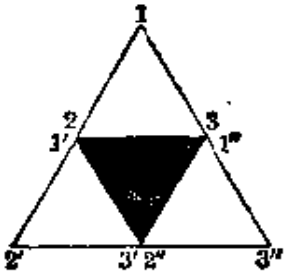



图 39-3

现选择一坐标系，使顶点 1、2、3 具有坐标 $(0,\ \sqrt{3}/2)$、$\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$和$\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$. 系统的动力学变量是作用于顶点的力 $f_i=(f_{ix},\ f_{iy})$，顶点的位移是 $r_i=(x_i,\ y_i)$，$i=1,\ 2,\ 3$，将变量写成行矢量形式：

$$\tilde{f}^T=(f_{1x},\ f_{1y},\ f_{2x}f_{2y}f_{3x}f_{3y}). \tag{39.7}$$

令位移写为：

$$\tilde{r}=(x_1y_1,\ x_2y_2,\ x_3y_3), \tag{39.8}$$

则基本单元($n=0$ 级)的运动方程可写为：

$$\tilde{f}=\tilde{D}^{(0)}(\omega)\tilde{r}, \tag{39.9}$$

其中 $\tilde{D}^{(0)}(\omega)$为动力学矩阵. 进一步简化记号，所有力用 $\frac{M}{2}$ 标度，频率用$\left(\frac{2K}{M}\right)^{1/2}$标度，则

$$\tilde{D}^{(0)}(\omega)=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\omega^2 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 & \frac{3}{2}-\omega^2 & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{5}{4}-\omega^2 & \frac{\sqrt{3}}{4} & -1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4}-\omega^2 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -1 & 0 & \frac{5}{4}-\omega^2 & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4}-\omega^2 \end{pmatrix}. \tag{39.10}$$

弹性分形的建造过程如图 39-3 所示. 三个相同单元连接起来, 使内部顶点(2, 1′), (3′, 2″), (3, 1″)两两熔合, 这就造成位移和力具有下列形式的约束: $\boldsymbol{r}'_1=\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{f}'_1=-\boldsymbol{f}_2$; $\boldsymbol{r}'_3=\boldsymbol{r}''_2$, $\boldsymbol{f}'_3=-\boldsymbol{f}''_2$; $\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{r}''_1$, $\boldsymbol{f}_3=-\boldsymbol{f}''_1$. 这些连结约束条件可以从每个基元三角形(1, 2, 3)、(1′, 2′, 3′)及(1″, 2″, 3″)受力分析来理解. 现在新位移是 $\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}'_2$、$\boldsymbol{r}''_3$, 相应的力是 $\boldsymbol{f}_1$、$\boldsymbol{f}'_2$、$\boldsymbol{f}''_3$, 而每个老的基本单元的力和位移之间的关系是通过动力学矩阵 $\tilde{\boldsymbol{D}}^{(0)}$ 联系起来的. 由于对每级的构造原则是相同的, 以后略去上标, 改记为 $\tilde{\boldsymbol{D}}$, 而将每次构造完以后的新动力学矩阵记为 $\tilde{\boldsymbol{D}}'$.

连结条件 $f'_{1x}=-f_{2x}$ 可具体写为:

$$\begin{aligned} &D_{11}x_2+D_{12}y_2+D'_{13}x_3+D_{14}y'_2+D_{15}x'_3+D_{16}y'_3 \\ &\quad=-(D_{31}x_1+D_{32}y_1+D_{33}x_2+D_{34}y_2+D_{35}x_3+D_{36}y_3). \end{aligned} \tag{39.11}$$

这可由基本单元(1′, 2′, 3′)和(1, 2, 3)各自的有关 $f'_{1x}$、$f_{2x}$ 分量的表达式求得. 类似的方程共六个, 从这六个方程中, 借助于新顶点 1, 2′, 3″ 的位移可解出棱中间那些顶点的位移. 现定义行矢量

$\tilde{S}$ 和 $\tilde{r}'$，它们是：$\tilde{S}^T=(x_2y_2;\ x_3'y_3';\ x_3y_3)$，$\tilde{r}'^T=(x_1y_1;\ x_2'y_2';\ x_3''y_3'')$，于是可将六个方程写为：

$$\tilde{C}\tilde{S}=-\tilde{E}\tilde{r}'. \tag{39.12}$$

其中 $\tilde{C}$ 和 $\tilde{E}$ 为：

$\tilde{C}=$

$$\begin{pmatrix} D_{11}+D_{33} & D_{12}+D_{34} & D_{15} & D_{16} & D_{35} & D_{36} \\ D_{21}+D_{43} & D_{22}+D_{44} & D_{25} & D_{26} & D_{45} & D_{46} \\ D_{51} & D_{52} & D_{33}+D_{55} & D_{34}+D_{56} & D_{31} & D_{32} \\ D_{61} & D_{62} & D_{43}+D_{65} & D_{44}+D_{66} & D_{41} & D_{42} \\ D_{53} & D_{54} & D_{13} & D_{14} & D_{11}+D_{55} & D_{12}+D_{56} \\ D_{63} & D_{64} & D_{23} & D_{24} & D_{21}+D_{65} & D_{22}+D_{66} \end{pmatrix} \tag{39.13}$$

和

$$\tilde{E}=\begin{pmatrix} D_{31} & D_{32} & D_{13} & D_{14} & 0 & 0 \\ D_{41} & D_{42} & D_{23} & D_{24} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{53} & D_{54} & D_{35} & D_{36} \\ 0 & 0 & D_{63} & D_{64} & D_{45} & D_{46} \\ D_{51} & D_{52} & 0 & 0 & D_{15} & D_{16} \\ D_{61} & D_{62} & 0 & 0 & D_{25} & D_{26} \end{pmatrix}. \tag{39.14}$$

最后一步，将新力矢量 $\tilde{f}'$：$\tilde{f}'^T=(f_{1x},\ f_{1y},\ f_{2x}'f_{2y}',\ f_{3x}''f_{3y}'')$与新位移 $\tilde{r}'$ 联系起来，例如，六个方程之一为：

$$f_{1x}=D_{11}x_1+D_{12}y_1+D_{13}x_2+D_{14}y_2+D_{15}x_3+D_{16}y_3. \tag{39.15}$$

我们必须用(39.12)式来消去 $r_2$、$r_3$(棱中间顶点的位移)，使用矩阵记号：

$$\tilde{f}'=\tilde{F}\tilde{r}'+\tilde{G}\tilde{S}, \tag{39.16}$$

其中

$$\tilde{F}=\begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} & D_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{43} & D_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{55} & D_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{65} & D_{66} \end{pmatrix} \tag{39.17}$$

和

$$\tilde{G}=\begin{pmatrix} D_{13} & D_{14} & 0 & 0 & D_{15} & D_{16} \\ D_{23} & D_{24} & 0 & 0 & D_{25} & D_{26} \\ D_{31} & D_{32} & D_{35} & D_{36} & 0 & 0 \\ D_{41} & D_{42} & D_{45} & D_{46} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{53} & D_{54} & D_{51} & D_{52} \\ 0 & 0 & D_{63} & D_{64} & D_{61} & D_{62} \end{pmatrix}. \tag{39.18}$$

从(39.12)和(39.16)式消去 $\tilde{S}$, 可得:

$$\tilde{f}'=\tilde{D}'\tilde{r}'. \tag{39.19}$$

这里新动力学矩阵为:

$$\tilde{D}'=\tilde{F}-\tilde{G}\tilde{C}^{-1}\tilde{E}. \tag{39.20}$$

方程(39.19)最终实现了通过 $\tilde{D}'$ 将 $\tilde{f}'$ 与 $\tilde{r}'$ 联系起来. 在各级建造过程中, 重复应用(39.20)式(递推关系), 在第 $n$ 级用 $\tilde{D}=\tilde{D}^{(n-1)}$ 来导出 $\tilde{D}'=\tilde{D}^{(n)}$. 第 $n=0$ 级动力学矩阵是实对称矩阵, 因此推出 $\tilde{C}$ 也是实对称的和 $\tilde{G}=\tilde{E}^T$, 因此 $\tilde{D}^{(1)}$ 也是实对称的. 最终对所有 $n$ 级, $\tilde{D}^{(n)}$ 也是实对称的.

借助计算机, 可找出动力学矩阵的标度性质. 设 $\omega=0$, 可找到

$$\tilde{D}^{(n)}(0)=\frac{1}{2}\tilde{D}^{(n-1)}(0). \tag{39.21}$$

这表明每形成一个新单元时, 有效弹性常数便减少一半. 这点可从弹性力学理论来理解. 考虑图 39-3 中的老单元(1, 2, 3), 如果

保持 2、3 顶点不动，仅仅将 1 移动一个量 $r_1$，在此单元中的所有弹簧都拉紧一个确定的量，如果在新单元同样只移动 $r_1$ 但保持 2′ 和 3′ 不动，则 1′ 的位移为 $\frac{1}{2}r_1$，老单元中所有弹簧拉紧原来值的一半. 这种情况与两个相同弹簧互相串联是一样的，最终的弹簧常数是每个成分的一半.

对质量的标度行为可通过下列步骤来获得：取一个非常低的频率，并观察 $\tilde{D}$ 的对角元的一系列迭代. 可以发现，经过几次迭代以后，每次迭代中的有效质量用因子"3"来标度. 这是由于在低频 $\omega \ll 1$ 情况下，我们实际上是处理整个系统的集体振动，以至于有效质量必须按总质量来量度(总质量增为三倍). 而频谱又是按 $\left(\frac{2K}{M}\right)^{1/2}$ 来标度，因此推出频率标度因子是 $\sqrt{6}$，这里也已经考虑到 $K$ 的标度因子为 $\frac{1}{2}$.

态密度的标度因子可用以下方法找到：在间隔 $d\omega$ 内，振动模数目守恒. 在每次迭代中，位于 $d\omega$ 内的所有模压缩到 $d\omega'$ 中，$d\omega' = \frac{d\omega}{\sqrt{6}}$；而另一方面，格点数目增长到原来的三倍，因此模数目守恒要求：

$$3\rho_{n+1}(\omega')d\omega' = \rho_n(\omega)d\omega. \tag{39.22}$$

这里 $\rho_n(\omega)$ 为第 $n$ 级每个原子的态密度，在 $n$ 很大的极限情况下，谱密度应与 $n$ 无关，因此由(39.22)可写出：

$$3\rho\left(\frac{\omega}{\sqrt{6}}\right)\frac{d\omega}{\sqrt{6}} = \rho(\omega)d\omega, \tag{39.23}$$

由此解出：

$$\rho(\omega) \propto \omega^{d_s-1} = \omega^{2\frac{\ln 3}{\ln 6}-1}. \tag{39.24}$$

这里定义 $d_s = 2\frac{\ln 3}{\ln 6}$，即证明了(39.6)式. 类似地，对三维塞尔宾斯基铺垫，可导出 $d_s = 2\frac{\ln 4}{\ln 8} = \frac{4}{3}$. 综合上述两个结果，可得

$$d_s = -\frac{2d_f}{d_f+1}, \tag{39.25}$$

这与以前的结果不同. 可见，在中心弹性力模型中，$d_s$ 与各向同性模型不同.

# 第 6 章

# 多 重 分 形

本章介绍多重分形的基本概念、多重分形的数学描述及其应用. 也将谈到多重分形的实验验证. 多重分形是一个正在急剧发展的领域, 本章只提供一个较坚实的理论基础.

## §40 基 本 概 念

多重分形概念是由门德尔布罗德(B. B. Mandelbrot)在1972年研究湍流时首先提出的, 以后逐渐建立起它的数学形式, 并在各方面得到应用.[9]

多重分形研究物理量或其他量在几何支撑上的分布. 分布常常显示出奇异性, 因此可以说, 多重分形是为研究物理量或其他量的奇异性分布而引入的基本概念. 这里的几何支撑, 通常指分形, 但也包括非分形, 例如, 平面, 球面或体积等.

为了解如何产生奇异性, 这里从一个熟知的康托集着手来研究. 只是现在的康托集不是一个纯数学对象, 而是有物理内容.

现在考虑一根单位长度的直棒, 它是由某种物质组成, 物质密度 $\rho_0=1$. 最初($n=0$ 级)棒长 $l_0=1$ 质量 $\mu_0=1$. 按前面多次提到的方法, 对棒进行分割, 使每段质量 $\mu_1=\mu_1'=0.5$, 每段长度 $l_1=l_1'=\frac{1}{3}$, 因而密度 $\rho_1=\frac{\mu_1}{l_1}=\frac{\mu_1'}{l_1'}=\frac{2}{3}$. 重复相同的分割过程, 到第 $n$ 级, 有 $N=2^n$ 根棒, 每根棒长度为 $l_i=3^{-n}$, 质量 $\mu_i=2^{-n}$(其中 $i=1, 2, \cdots, N$). 在整个分割过程中, 保持总质量不变, 因而

$$\sum_{i=1}^{N}\mu_i=1. \tag{40.1}$$

立即可推出长度 $l_i$(其中 $l_i \ll \delta$)的小棒的质量为：

$$\mu_i = l_i^{\alpha}. \tag{40.2}$$

其中标度指数 $\alpha = \dfrac{\ln 2}{\ln 3}$，每小段的密度为：

$$\rho_i = \frac{\mu_i}{l_i} = \rho_0 l_i^{\alpha-1}. \qquad (\rho_0 \text{ 为一正规常数}) \tag{40.3}$$

(40.3)式当 $l_i \to 0$ 时发散，这样就出现了质量分布的奇异性. 指数 $\alpha$ 控制质量密度的奇异性，因而可称为奇异性指数. 图 40-1 画出了这样一个康托集，其中每段的厚度代表该段的密度 $\rho_i$. 可见康托集结构的这种变化，需要引入标度指数 $\alpha$ 来描述当棒的长度减小时，小棒的厚度如何增加. 这里产生的奇异性是以分形作支撑.

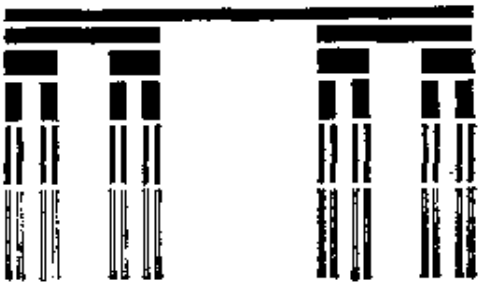


图 40-1

上例中的质量 $\mu$ 如果换成电荷、磁矩、流体力学中的旋子(vorticity)或某种现象的概率，也将得出相同的结果. 一般地，$\mu$ 可用来量度被一个几何集支撑着的任何量.

上面的康托集棒可以得到物理学中非常有趣的魔梯. 从图 40-1 左边 $x=0$ 开始，找出位于一段 $[0, x]$ 间的质量，它可写为：

$$M(x) = \int_0^x \rho(x')dx' = \int_0^x d\mu(x'). \tag{40.4}$$

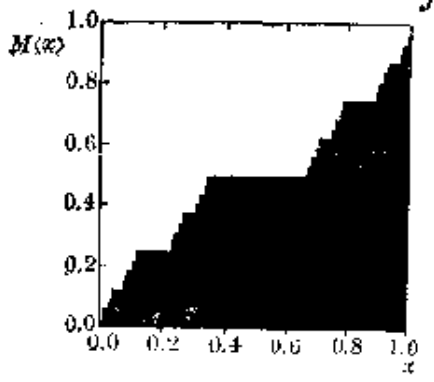



图 40-2

在此位于间隙中的密度为

$$\rho(x') = 0,$$

而在构成康托集的所有无穷个点上 $\rho(x') = \infty$，质量 $M(x)$ 在对应于间隙的一段距离内保持一定. 当经过无穷多次迭代构造后，间隙总长度为 1(康托集的勒贝格测度等于 0)，所以在等于整个原长的间隙上 $M(x)$ 不改变，这似乎可得出

$M(x)=0$. 然而实际上，在康托集上每点经过无穷多次跳跃，每点质量都增加，最终这些跳跃使质量增加到 $M(1)=1$. 图 40-2 给出质量作为 $x$ 的函数，它形成一个梯子，称为魔梯，也就是说几乎处处都是水平的.

## §41 重标变换群

本节将论证：一般地，一个分形应通过无穷多个广义维数 $D_q$ $(q>0)$来表征. 这里介绍一种重标变换群，用它来产生广义维数的解析表示式. 广义维数的三种特例，即 $q\to 0, 1, 2$，将分别产生分形维数$(d_f)$，信息维数$(\sigma)$和关联维数$(\nu)$. 以下通过一个特殊的分形——奇怪吸引子来进行论证，所得结果并不局限于奇怪吸引子本身.

首先介绍奇怪吸引子的三种维数的定义：考察一个奇怪吸引子(或任何分形)，它嵌置于 $d$ 维欧氏空间. 令$\{X_i\}_{i=1}^{N}$是在吸引子上长时间序列的诸点，$N$ 很大. 用大小为 $b^d$ 的 $d$ 维立方体去覆盖整个空间，设 $M(b)$是含有序列$\{X_i\}_{i=1}^{N}$中的点的那些立方体的数目，并令 $p_k\equiv\frac{N_k}{N}$，其中 $N_k$ 为第 $k$ 个立方体中含点的数目. 自相似维数定义为：

$$D=-\lim_{b\to 0}\lim_{N\to\infty}\frac{\ln M(b)}{\ln b}. \tag{41.1}$$

在绝大多数情况下，自相似维数与分形维数$d_f$相同，今后我们对它们不加以区分. 信息维数定义为：

$$\sigma=-\lim_{b\to 0}\lim_{N\to\infty}\frac{S(b)}{\ln b}, \tag{41.2}$$

这里

$$S(b)=-\sum_{k=1}^{M(b)}p_k\ln p_k. \tag{41.3}$$

关联维数为

$$\nu=\lim_{b\to 0}\lim_{N\to\infty}\frac{\ln C(b)}{\ln b},\tag{41.4}$$

其中

$$C(b)=\frac{1}{N^2}\sum_{i\neq j}\theta(b-|x_i-x_j|).\tag{41.5}$$

$\theta$ 为阶跃函数：$\theta(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x>0 \text{ 时;}\\ 1, & \text{当 } x<0 \text{ 时,}\end{cases}$ $C(b)$为关联积分，它标志所有距离小于 $b$ 的$(i,\ j)$对的数目共有多少.

实际上，存在着无穷多个广义维数 $D_q$ 来表征奇怪吸引子，这里 $q\geqslant 0$ 是连续变化的，当 $q$ 取整数时，$D_q$ 具有物理意义. 稍后将证明：

$$\lim_{q\to 0}D_q=D,\tag{41.6}$$

$$\lim_{q\to 1}D_q=\sigma,\tag{41.7}$$

$$\lim_{q\to 2}D_q=\nu.\tag{41.8}$$

而当 $q=3,\ 4,\ 5,\ \cdots$ 时，相应的广义维数与三点，四点，五点，……的关联积分相关. 并可证明，对任何 $q'>q$，有：

$$D_q>D_{q'},\tag{41.9}$$

当且仅当分形是均匀分形时，才有 $D_q=D_{q'}$. 以下用重标变换群来证实上述所有论断.

重标变换群：设一个分形嵌置于 $d$ 维欧氏空间，分形上有 $N$ 个点，在奇怪吸引子上可想象有一个长时序列$\{x_i\}_{i=1}^{N}$，$N\to\infty$. 令 $l_0$ 是分形的线性大小. 现考虑如下重标过程：

$n=0$ 级：在粗粒标度上，含于体积 $l_0^d$ 内有 $N$ 个点.

$n=1$ 级：通过较精细的分辨，可看到 $N$ 个点按下列方式分配：$M_1$ 个大小为$\left(\frac{l_0}{s_1}\right)^d$ 盒子内含 $N_1$ 个点，$M_2$ 个大小为 $\left(\frac{l_0}{s_2}\right)^d$ 盒子内含 $N_2$ 个点，…，$M_R$ 个大小为$\left(\frac{l_0}{s_R}\right)^d$ 盒子内含 $N_R$ 个点. 注

意，对那些同样大小的盒子（即 $s_\alpha$ 相同）但含有不同数目的点将用不同的指标标出．在这一级，定义概率 $p_\alpha \equiv N_\alpha/N$，它代表落入类型 $\alpha$ 的一个盒子的概率．

$n+1$ 级：从给定的第 $n$ 级出发，取出其每个盒子，用类似第一级的自相似方式，进一步分辨它们，这样形成第 $n+1$ 级．在第 $n$ 级中大小为 $l^d$ 具有概率为 $p$ 的一个盒子被下列集合取代：

$$\left\{M_\alpha\left(\frac{l}{s_\alpha}\right)^d,\ p_\alpha p\right\}_{\alpha=1}^{R}. \tag{41.10}$$

这种等级构造的一个例子见于图 41-1．

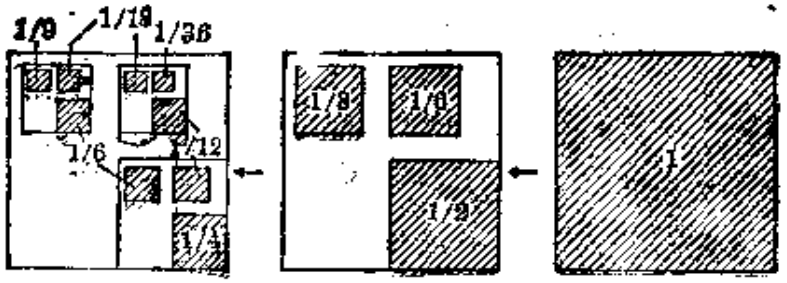



图 41-1

由上述构造过程，立即看出重标变换群的一些性质：

(1) 概率守恒

$$\sum_{\alpha=1}^{R} M_\alpha p_\alpha = 1, \tag{41.11}$$

(2) 由于所讨论的对象在 $d$ 维空间体积为 0，因而有

$$\sum_{\alpha=1}^{R} M_\alpha \left(\frac{l}{s_\alpha}\right)^d < l^d \tag{41.12}$$

或

$$\sum_{\alpha=1}^{R} M_\alpha s_\alpha^{-d} < 1, \tag{41.13}$$

(3) 重要性质

$$p_i(l/s_\alpha,\ b/s_\alpha) = p_\alpha p_i(l,\ b). \quad (\text{对同一 } i) \tag{41.14}$$

对(41.14)的来由，可从下面的分析来理解：考察第 $n$ 级上大小为

$l^d$ 的一个盒子，然后用大小为 $b^d(b \ll l)$ 的小块去覆盖它，这种小盒子用 $i=1, 2, \cdots, \left(\frac{l}{b}\right)^d$ 编号. 用 $p_i(l, b)$ 标志第 $i$ 个小块的概率. 现在将那些在线度大小为 $l$ 的盒子内所含大小为 $l/s_\alpha$ 的第 $n+1$ 级的盒子再用线度大小为 $b/s_\alpha$ 的更小盒子去覆盖它，这些更小盒子的编号为：$i=1, 2, \cdots, \left(\frac{l}{b}\right)^d$. 由于构造是自相似的，故在第 $n$ 级的大小为 $l^d$ 的盒子与第 $n+1$ 级大小为 $\left(\frac{l}{s_\alpha}\right)^d$ 的盒子之间存在着自相似性. 因此，当分别用大小为 $b^d$ 的盒子和 $\left(\frac{b}{s_\alpha}\right)^d$ 的盒子去覆盖这些盒子时，便可导致关系式(41.14)，这是重标变换的基本关系式.

利用重标变换群的性质，计算三种维数：

(1) 分形维数 $D$：由 $n_b(l, b)$ 表示大小为 $b^d$ 的小盒子的数目，而 $b^d$ 是用来覆盖分形上大小为 $l^d$ 的盒子，显然有：

$$n_b(l, b) = \sum_{\alpha=1}^{R} M_\alpha n_b(l/s_\alpha, b). \tag{41.15}$$

然而，由于自相似性：

$$n_b(l/s_\alpha, b) = n_b(l, s_\alpha b), \tag{41.16}$$

对自相似分形，可使用下列关系式：

$$n_b(l, b) \propto n_b(l) b^{-D}. \tag{41.17}$$

将(41.16)、(41.17)式代入(41.15)式，可得：

$$\sum_{\alpha=1}^{R} M_\alpha s_\alpha^{-D} = 1. \tag{41.18}$$

这是一个含 $D$ 的隐方程，只要给定重标变换的性质，便可算出分形维数 $D(d_f)$.

(2) 信息维数 $\sigma$：考虑第 $n$ 级线性大小为 $l$ 的盒子和大小为 $b$ 的小盒子. 对这种盒子的信息理论熵为：

$$S(l, b) = -\sum_{i=1}^{\left(\frac{l}{b}\right)^d} p_i(l, b) \ln p_i(l, b). \tag{41.19}$$

再考虑该等级的下一级的所有盒子. 可写出:

$$S(l,\ b)=-\sum_{\alpha=1}^{R}M_\alpha\sum_{j_\alpha=1}^{\left(\frac{l}{bs_\alpha}\right)^d}p_{j\alpha}(l/s_\alpha,\ b)\ln p_{j\alpha}(l/s_\alpha,\ b).$$

(41 20)

这是由于在第 $n+1$ 级所有没有盒子的各处, (41.19)式中的 $P_i$ 等于 0. 使用 (41.14)式, 上式可改写为:

$$S(l,\ b)=-\sum_{\alpha=1}^{R}M_\alpha\sum_{j_\alpha=1}^{\left(\frac{l}{bs_\alpha}\right)^d}p_\alpha p_{j\alpha}(l,\ s_\alpha b)\ln[p_\alpha p_{j\alpha}(l,\ s_\alpha b)].$$

(41.21)

将(41.19)与(41.21)式对比, 可得:

$$S(l,\ b)=-\sum_{\alpha=1}^{R}M_\alpha p_\alpha\ln p+\sum_{\alpha=1}^{R}M_\alpha p_\alpha S(l,\ S_\alpha b).$$

(41.22)

这个方程具有下列形式解(利用(41.11)式):

$$S(l,\ b)=A(l)-\sigma\ln b. \tag{41.23}$$

其中 $\sigma$ 为信息维数:

$$\sigma=\frac{-\sum_{\alpha=1}^{R}M_\alpha p_\alpha\ln p_\alpha}{\sum_{\alpha=1}^{R}M_\alpha p_\alpha\ln S_\alpha}. \tag{41.24}$$

(3) 关联维数 $\nu$: 注意到(41.5)式可改写为:

$$C(b)=\sum_{k=1}^{M(b)}p_k^2. \tag{41.25}$$

再考虑第 $n$ 级的一个盒子及量 $C(l,\ b)$,

$$C(l,\ b)=\sum_{i=1}^{\left(\frac{l}{b}\right)^d}p_i^2(l,\ \ b)=\sum_{\alpha=1}^{R}M_\alpha\sum_{j_\alpha=1}^{\left(\frac{l}{bs_\alpha}\right)^d}p_{j\alpha}^2(l/s_\alpha,\ b).$$

(41.26)

使用(41.14)式, 便有:

$$C(l,\ b)=\sum_{\alpha=1}^{R}M_\alpha\sum_{j_\alpha=1}^{\left(\frac{l}{bs_\alpha}\right)^d}[p_\alpha p_{j\alpha}(l,\ s_\alpha b)]^2$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n} M_\alpha p_\alpha^2 C(l,\ s_\alpha b). \tag{41.27}$$

该方程具有下列形式解：

$$C(l,\ b) = C(l) b^\nu, \tag{41.28}$$

$\nu$ 可由下列隐方程给出：

$$\sum_{\alpha=1}^{n} M_\alpha p_\alpha^2 S_\alpha^\nu = 1. \tag{41.29}$$

至此，已求得了关联维数 $\nu$.

下面介绍重标变换群的应用的两个重要例子：

(1) 费根鲍姆(M. J. Feigenbaum)吸引子：考虑下列一维映射：

$$x_{n+1} = F(x_n). \tag{41.30}$$

该映射具有唯一的二次极值，具有普适标度特征. 第 $n$ 次迭代收敛于一个普适偶函数 $g(x)$，该函数满足下列精确的标度关系：

$$g(g(x)) = -\frac{1}{\alpha} g(\alpha x). \tag{41.31}$$

其中 $\alpha = 2.50290\cdots$，归一化条件为 $g(0) = 1$. $g(x)$的吸引子由下列序列 $\xi_n (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$构成，且 $\xi_0 = 0$, $\xi_{n+1} = g(\xi_n)$. 该序列可具体写为：

$$\begin{cases} \xi_0 = 0, \\ \xi_1 = g(\xi_0) = g(0) = 1, \\ \xi_2 = g(\xi_1) = g(1) = g(g(0)) = -\dfrac{1}{\alpha} g(\alpha \cdot 0) = -\dfrac{1}{\alpha} g(0) = -\dfrac{1}{\alpha}, \\ \xi_3 = g(\xi_2) = g\left(-\dfrac{1}{\alpha}\right) = g\left(\dfrac{1}{\alpha}\right), \ (\because g(x) \text{为} x \text{的偶函数}) \\ \xi_4 = g(\xi_3) = g\left(g\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)\right) = -\dfrac{1}{\alpha} g\left(\alpha \cdot \dfrac{1}{\alpha}\right) \\ \qquad\qquad = -\dfrac{1}{\alpha} g(1) = \left(-\dfrac{1}{\alpha}\right)\left(-\dfrac{1}{\alpha}\right) = \dfrac{1}{\alpha^2}, \\ \cdots\cdots. \end{cases} \tag{41.32}$$

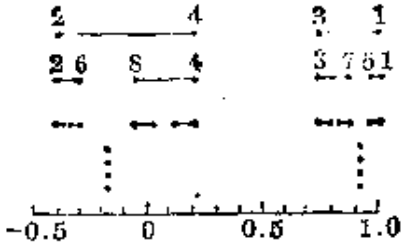


图 41-2

这个系列可表示在图 41-2 中.

从图可见，$x=0$ 经迭代形成康托集，一半序列点落入间隔 $[\xi_3, \xi_1]$，一半落入 $[\xi_2, \xi_4]$. 于是，如果选取

$$\begin{cases} M_1=1, \quad p_1=\dfrac{1}{2}, \quad s_1=\alpha; \\ \\ M_2=1, \quad p_2=\dfrac{1}{2}, \quad s_2=\dfrac{1+\dfrac{1}{\alpha}}{1-g\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)}\approx 5.805364. \end{cases} \tag{41.33}$$

该吸引子正好近似地进入重标类. 这里所说的近似，是指：比方说，间隔 $[\xi_2, \xi_6]$ 本应与 $[\xi_3, \xi_7]$ 有精确相同的大小，但数值计算出它们并非精确相等，但误差很小，可予略去. 这样，利用(41.18)、(41.24)及(41.29)式，便可写出：

$$\begin{cases} s_1^{-D}+s_2^{-D}=1, \\ \sigma=\dfrac{2\ln 2}{\ln s_1 s_2}, \\ s_1^{\nu}+s_2^{\nu}=4. \end{cases} \tag{41.34}$$

从中求出三种维数：$D=d_f=0.537$, $\sigma=0.518$, $\nu=0.501$. 这些结果与其他数值和分析结果很好地吻合.

(2) 广义面包师变换：它是在单位面积上由下列递推关系定义的变换：

$$x_{n+1}=\begin{cases} \lambda_a x_n, & \text{当 } y_n<\alpha \text{ 时;} \\ \dfrac{1}{2}+\lambda_b x_n, & \text{当 } y_n>\alpha \text{ 时.} \end{cases} \tag{41.35}$$

$$y_{n+1}=\begin{cases} \dfrac{1}{\alpha}y_n, & \text{当 } y_n<\alpha \text{ 时;} \\ \dfrac{1}{1-\alpha}(y_n-\alpha), & \text{当 } y_n>\alpha \text{ 时.} \end{cases} \tag{41.36}$$

对 $\alpha$, $\lambda_a$, $\lambda_b<\dfrac{1}{2}$, $\lambda_b>\lambda_a$ 的映射的两次迭代，表示在图 41-3 中.

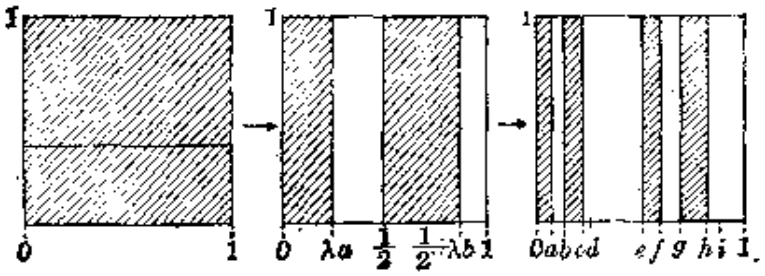



图 41-3

这里，生成的分形也可纳入重标类，如果作下列选取：

$$\begin{cases} M_1=\lambda_a^{-1}, & s_1=\lambda_a^{-1}, & p_1=\alpha\lambda_a; \\ M_2=\lambda_b^{-1}, & s_2=\lambda_b^{-1}, & p_2=(1-\alpha)\lambda_b, \end{cases} \tag{41.37}$$

其中 $p_a$ 是进入 $M_a$ 个盒子中的一个的概率. 由前面方程，可得出

$$\begin{cases} \lambda_a^{D-1}+\lambda_b^{D-1}=1, \\ \sigma=1+\dfrac{\alpha\ln\alpha+(1-\alpha)\ln(1-\alpha)}{\alpha\ln\lambda_a^{-1}+(1-\alpha)\ln\lambda_b^{-1}}, \\ \alpha^2\lambda_a^{1-\nu}+(1-\alpha)^2\lambda_b^{1-\nu}=1. \end{cases} \tag{41.38}$$

由这些方程可解出 $D$、$\sigma$、$\nu$ 的数值.

最后研究广义维数的无穷集. 定义一个量 $D_q$:

$$D_q=\frac{1}{q-1}\lim_{l\to 0}\frac{\ln\sum_{i\in l}p_i^q}{\ln l}. \tag{41.39}$$

这里 $q$ 连续变化，$p_i$ 是在第 $l$ 个盒子中一个小盒子的概率. 用测度语言，可令 $\mu$ 代表分形上的自然概率测度，$B_l(x)$ 代表在分形上中心在点 $x$ 的一个半径为 $l$ 的球. 因而

$$D_q=\frac{1}{q-1}\lim_{l\to 0}\frac{1}{\ln l}\ln\int d\mu(x)\mu(B_l(x))^{q-1}. \tag{41.40}$$

可以看出，在均匀分形情况下，上两式确实定义了一个广义维数，那时 $\mu(B_l(x))\approx l^D$，$D_q=D$（对任何 $q$）. 然而，在一般情况下，$D_q\neq D$. 当 $q\to 0$，$p_i^q\to 1$（对 $p_i\neq 0$）、$p_i^q=0$（对 $p_i=0$），因此 $\sum p_i^q$ 代表包含在分形中的一块的小盒子数目，所以方程(41.39)便变为分形维数的定义. 这说明当 $q\to 0$ 时，(41.39)式已经包含分形维

数.

现将(41.39)式改写为:

$$D_q=\frac{1}{q-1}\lim_{l\to 0}\frac{\ln\sum p_i\exp(q-1)\ln p_i}{\ln l}. \qquad (41.41)$$

在 $q\to 1$ 极限下,将指数展开,便得到(41.2)式,这就得到了信息维数. 类似地,可得到(41.3)式,即关联维数.

总之,以上说明,对一般非均匀(多个重标因子)分形,需用无穷多个广义维数去描述它. 在均匀分形情况下,这些维数都相等,变为一个维数,即通常的分形维数. 只要重标变换的性质(即 $M_\alpha$, $S_\alpha$, $p_\alpha$)已知,便可求出广义维数. 广义维数的完整知识概括了分形上全部的物理特征.

## § 42 分形测度及其奇异性·理论框架

前节用重标变换群导出了对非均匀分形的广义维数描述. 本节用一种简明的分析,导出分形测度的理论框架和数学表述,[59] 所得数学形式已被普遍采用.

仍采用奇怪吸引子作为研究对象,但所得结果具有普遍意义.

设 $M_i$ 代表在第 $i$ 块上某种事件出现的概率,比如,在混沌系统的实验中可测出一个时间序列 $\{x_i\}_{i=1}^N$,这些点是 $d$ 维欧氏空间的一条轨道,通常,轨道并不充满 $d$ 维空间,因为轨道位于分形维数为 $d_f$ 的奇怪吸引子上,$d_f<d$. 现在要问:时间序列穿越第 $i$ 块区域多少次. 设次数为 $N_i$,则可定义 $p_i=\lim_{N\to\infty}\frac{N_i}{N}$,这样就产生了吸引子上的测度 $d\mu(x)$,因为

$$p_i=\int_{\text{第 }i\text{ 块区域}} d\mu(\boldsymbol{x}). \qquad (42.1)$$

如果定义一个临界指数 $\alpha$,它为:

$$p_i^q \propto l_i^{\alpha q}, \qquad (42.2)$$

按测度的不同范围，$\alpha$ 可以也有一取值范围．特别是，如果系统分为大小为 $l$ 的小块，则将 $\alpha$ 在 $\alpha'-\alpha'+d\alpha'$ 间取值的次数写为下列形式：

$$d\alpha'\rho(\alpha')l^{-f(\alpha')}. \tag{42.3}$$

这里 $f(\alpha')$ 为一连续函数，它表示具有不同奇异性强度 $\alpha'$ 的集合所具有的不同维数．$\rho(\alpha')$ 为一个有限"密度"函数．

为了确定具有给定测度的 $f(\alpha)$ 函数，必须将其与测度的可观测性质联系起来．为此，利用前节广义维数的定义：

$$D_q=\lim_{l\to 0}\left[\frac{1}{q-1}\frac{\ln\chi(q)}{\ln l}\right], \tag{42.4}$$

其中

$$\chi(q)=\sum_i p_i^q. \tag{42.5}$$

在(42.5)式中，当 $q$ 变化时，具有不同标度指数的不同子系将在求和中占控制地位．将(42.2)和(42.3)式代入(42.5)式中，可得

$$\chi(q)=\int d\alpha'\rho(\alpha')l^{-f(\alpha')}l^{q\alpha'}. \tag{42.6}$$

由于 $l$ 很小，对(42.6)式作出决定性贡献的是那些使 $q\alpha'-f(\alpha')$ 变为最小的 $\alpha'$ 值(只要 $\rho(\alpha')$ 为非零)．因此，用 $\alpha(q)$ 取代 $\alpha'$，其中 $\alpha(q)$ 是根据下列极值条件来决定的：

$$\frac{d}{d\alpha'}[q\alpha'-f(\alpha')]_{\alpha'=\alpha(q)}=0, \tag{42.7}$$

$$\frac{d^2}{d\alpha'^2}[q\alpha'-f(\alpha')]_{\alpha'=\alpha(q)}>0. \tag{42.8}$$

由此得出：

$$f'(\alpha(q))=q. \tag{42.9}$$

$$f''(\alpha(q))<0 \tag{42.10}$$

然后，由(42.4)式，只计入贡献最大的项，便得出：

$$D_q=\frac{1}{q-1}[q\alpha(q)-f(\alpha(q))]. \tag{42.11}$$

于是，如果知道 $f(\alpha)$ 及 $\alpha$ 值的谱，便可求出 $D_q$，即广义维数．此

外，如果知道 $D_q$，便可找到 $\alpha(q)$，因为

$$\alpha(q)=\frac{d}{dq}[(q-1)D_q]. \tag{42.12}$$

这样，加上知道 $\alpha(q)$，便可由(42.11)式求出 $f(q)$. 方程(42.9)～(42.12)便是主要的形式结果.

现引入广义维数的更一般定义. 考虑一个嵌置在 $d$ 维欧氏空间的有限部分的奇怪集 $S$，想象将它分为许多离散部分 $S_1$，$S_2$，…，$S_N$. 其中每部分具有测度 $p_i$，且位于半径为 $l_i$ 的球内. 令所有 $l_i<l$. 然后定义一个配分函数：

$$\Gamma(q,\ \tau,\ \{S_i\},\ l)=\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i^q}{l_i^\tau}. \quad (N\text{ 很大}) \tag{42.13}$$

最后将论证，仅当

$$\tau=(q-1)D_q, \tag{42.14}$$

配分函数才具有 1 的数量级. 为此，考察 $q$，$\tau$ 的两个区域：

$$\begin{cases}\text{区域 } A\text{：}\ q\geqslant 1,\ \tau\geqslant 0;\\ \text{区域 } B\text{：}\ q\leqslant 1,\ \tau\leqslant 0.\end{cases} \tag{42.15}$$

在区域 $A$，调整$\{S_i\}$的分法，使得 $\Gamma$ 取最大值，而在区域 $B$，调节它，使得 $\Gamma$ 尽可能地小. 于是定义：

$$\begin{cases}\Gamma(q,\ \tau,\ l)=\sup\Gamma(q,\ \tau,\ \{S_i\},\ l), & (\text{区域 } A)\\ \Gamma(q,\ \tau,\ l)=\inf\Gamma(q,\ \tau,\ \{S_i\},\ l). & (\text{区域 } B)\end{cases} \tag{42.16}$$

只要存在 $\alpha>0$ 和 $\alpha_0>0$，在区域 $A$ 的上确界便存在. 结果对 $S$ 的任何可能的子集$\{S_i\}$都有：

$$p_i\leqslant\alpha(l_i)^{\alpha_0}. \tag{42.17}$$

因而，每当

$$\alpha_0(q-1)>\tau \tag{42.18}$$

时，$\Gamma(q,\ \tau,\ l)$都存在且小于无穷大.

其次，定义

$$\Gamma(q,\ \tau)=\lim_{l\to 0}[\Gamma(q,\ \tau,\ l)]. \tag{42.19}$$

注意到 $\Gamma(q, \tau)$ 为 $\tau$ 的单调非减函数和 $q$ 的单调非增函数，因而可断定，存在一个唯一的函数 $\tau(q)$，使

$$\Gamma(q, \tau)=\begin{cases}\infty, & \text{当 } \tau>\tau(q)\text{时;}\\ 0, & \text{当 } \tau<\tau(q)\text{时.}\end{cases} \tag{42.20}$$

方程(42.20)使得可将 $D_q$ 定义为：

$$(q-1)D_q=\tau(q). \tag{42.21}$$

一旦 $D_q$ 已知，方程(42.11)和(42.12)将给出 $\alpha(q)$和 $f(q)$. 这样定义出的 $D_q$，当 $q=0$ 时精确地与豪斯多夫(F. Hausdorff) 维数相符. 此外，这里定义的 $D_q$ 与(42.4)式给出的 $D_q^{HP}$ 存在下列关系：

$$D_q\leqslant D_q^{HP}. \tag{42.22}$$

在绝大多数情况下，上式实际上取等号.

## §43 精确可解的康托集

本节将应用前节得出的基本数学公式来精确求解各种不同的康托集，求出它们的 $f(\alpha)$和 $D_q$.[59]

(1) 康托集和生成元：

如果测度具有精确的递推关系，便可求出 $D_q$. 现在设测度可用下列过程生成：起初有一个大小为 1，测度为 1 的区域. 然后将这个区域分为若干块 $S_i(i=1, 2, \cdots, N)$，每块大小为 $l_i$，测度为 $p_i$. 设 $l_i$ 的极大值为 $l$，那么在第一阶段，可构造出一个配分函数：

$$\Gamma(q, \tau, l)=\sum_i \frac{p_i^q}{l_i^\tau} \tag{43.1}$$

重复刚才描绘过的过程，在第二阶段，集合中的每块又分为 $N$ 块，每块的测度减少一个因子 $p_j$，块的大小减少一个因子 $l_j$. 在此阶段配分函数将为：

$$\Gamma(q, \tau, l^2)=[\Gamma(q, \tau, l)]^2. \tag{43.2}$$

立即看出，对这类测度，由第一个配分函数 $\Gamma(q, \tau, l)$ 便可产生所有各阶段的配分函数；而且由配分函数等于 1，可定出 $\tau(q)$，即

$$\Gamma(q, \tau(q), l)=1. \tag{43.3}$$

如果将一个对象分为有限 $N$ 块，能产生一个遵从(43.2)式的 $\Gamma$，这种分法便称为生成元.

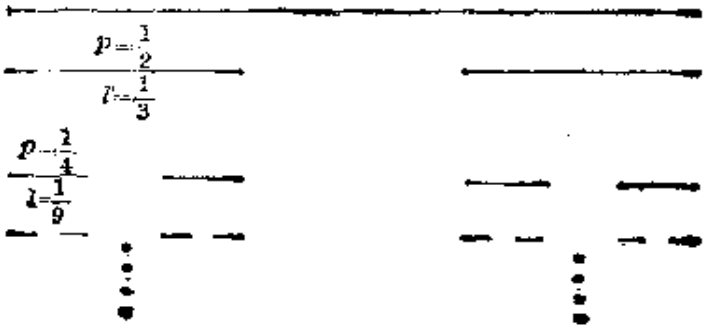



图 43-1

(2) 均匀康托集：均匀康托集是第 1 章中讨论过的经典康托集，它是将间隔[0, 1]进行分割而造成. 最初将单位间隔分为两个长度各为 $\frac{1}{3}$ 的间隔，每个具有相同测度 $p=\frac{1}{2}$，第二阶段则是在现有的两个间隔基础上，重复上述分割过程，以后不断继续，形成图 43-1 的均匀康托集. 对这种测度，按(43.1)要求，

$$\Gamma(q, \tau, l)=2\left(\frac{1}{2}\right)^{q}\left(\frac{1}{3}\right)^{-\tau}=1. \tag{43.4}$$

解方程(43.4)，便得：

$$\tau=(q-1)\frac{\ln 2}{\ln 3}=(q-1)D_q. \tag{43.5}$$

所以

$$D_q=\frac{\ln 2}{\ln 3}. \tag{43.6}$$

如果 $l_0$ 为分割的某个特殊阶段的间隔长度，$p_0$ 是它的测度，则按前，

$$p_0=\left(\frac{1}{2}\right)^n=l_0^{n\alpha}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n\alpha}. \tag{43.7}$$

因而

$$\alpha=\frac{\ln 2}{\ln 3}. \tag{43.8}$$

间隔长度为$l=\left(\frac{1}{3}\right)^n$的线段共$2^n$根，因此奇异性指数$\alpha$的分布密度按(42.3)式应为：

$$\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]^{-f(\alpha)}=2^n. \tag{43.9}$$

由此求出：

$$f(\alpha)=\frac{\ln 2}{\ln 3}. \tag{43.10}$$

故在均匀康托集中，有$\alpha=f(\alpha)=D_q=\frac{\ln 2}{\ln 3}$. 同时求得

$$\tau(q)=q\alpha-f=q\frac{\ln 2}{\ln 3}-\frac{\ln 2}{\ln 3}=(q-1)\frac{\ln 2}{\ln 3}. \tag{43.11}$$

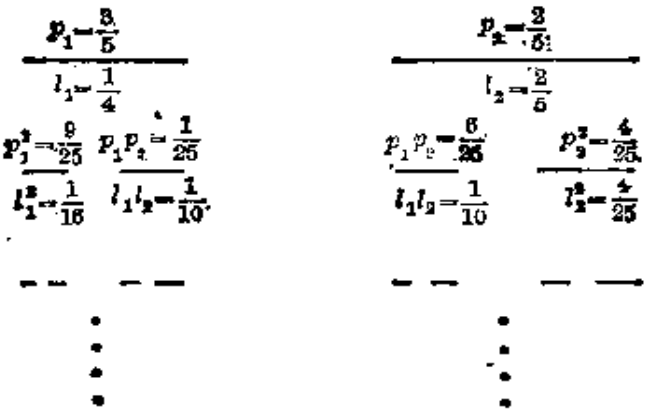



图 43-2

(3) 二标度康托集：图43-2表示这种康托集. 这里有两个重标参数$l_1$和$l_2$，以及两个测度$p_1$和$p_2$. 然后，连续自相似地再分割. 现假定$l_2>l_1$. 显然，在此例中也有一个生成元，因为条件

$$\Gamma(q,\ \tau,\ l_2^n)=\left[\frac{p_1^q}{l_1^\tau}+\frac{p_2^q}{l_2^\tau}\right]^n=1, \tag{43.12}$$

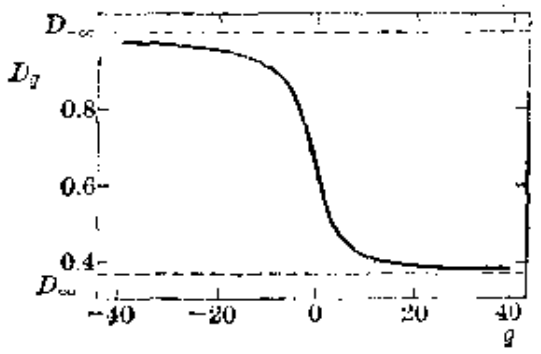



图 43-3

产生一个不依赖于 $n$ 的 $\tau$，然而 $\tau$ 的数值依赖于 $q$. 图 43-3 显示出 $D_q=\frac{\tau(q)}{q-1}$ 作为 $q$ 的函数，它是用数值求解(43.12)获得的.

为进一步理解这条曲线，现考察 $\Gamma(l_2^n)$：

$$\Gamma(q,\ \tau,\ l_2^n)=\sum_m C_m^n p_1^{mq} p_2^{(n-m)q}(l_1^m l_2^{n-m})^{-\tau}=1. \quad (43.13)$$

当 $n\to\infty$ 时，求和中有一贡献最大的项，它们在求和中起决定性作用. 为求此项，可计算

$$\frac{\partial \ln \Gamma(l_2^n)}{\partial m}=0. \quad (43.14)$$

使用斯特林近似公式 $\ln m!=m\ln m-m$(当 $m$ 很大时)，可发现方程(43.14)等效于

$$\tau=\frac{\ln\left(\frac{n}{m}-1\right)+q\ln\frac{p_1}{p_2}}{\ln\left(\frac{l_1}{l_2}\right)}. \quad (43.15)$$

由(43.15)求出的 $\tau$ 值，对应于(43.13)式求和中贡献最大的一项，因而近似地有：

$$C_m^n p_1^{mq} p_2^{(n-m)q}\left(\frac{1}{l_1^m l_2^{n-m}}\right)^{\tau}=1. \quad (43.16)$$

将(43.15)式代入(43.16)式，便得一个对 $\frac{n}{m}$ 的方程：

$$\ln\left(\frac{n}{m}\right)\ln\left(\frac{l_1}{l_2}\right)-\ln\left(\frac{n}{m}-1\right)\ln l_1=q(\ln p_1\ln l_2-\ln p_2\ln l_1). \quad (43.17)$$

于是，立即看出，只要给定一个 $q$，便能求出 $\frac{n}{m}$ 之值，它又通过

(43.15)式来确定 $\tau$. 这种具有最大贡献的项，实际上来自 $C_n^m$ 个段的集合，集合中的每段具有相同大小 $l_1^m l_2^{n-m}$。它们的密度指数 $f$ 由下式确定：

$$C_n^m (l_1^m l_2^{n-m})^f = 1 \tag{43.18}$$

或

$$f = \frac{\left(\frac{n}{m}-1\right)\ln\left(\frac{n}{m}-1\right) - \frac{n}{m}\ln\frac{n}{m}}{\ln l_1 + \left(\frac{n}{m}-1\right)\ln l_2}. \tag{43.19}$$

测度奇异性指数，按定义为：

$$p_1^m p_2^{n-m} = (l_1^m l_2^{n-m})^\alpha \tag{43.20}$$

或

$$\alpha = \frac{\ln p_1 + \left(\frac{n}{m}-1\right)\ln p_2}{\ln l_1 + \left(\frac{n}{m}-1\right)\ln p_2}. \tag{43.21}$$

因此，对任何给定的 $q$，其相应 $\alpha(q)$、$f(\alpha)$ 及 $\tau(q)$ 均可求出. 利用(43.15)、(43.17)，(43.19)和(43.21)式，可再次导出

$$\tau = (q-1)D_q = q\alpha(q) - f(q). \tag{43.22}$$

现在也可通过考虑下列线段的"揉序列"来理解奇异性标度指数 $\alpha$ 的谱. 在构造第一阶段有 2 个线段 $l_1$、$l_2$，测度为 $p_1$、$p_2$，分别标以 $L$(左)和 $R$(右). 在下一阶段，便有 4 个线段，它们从左至右排列成 $LL$, $LR$, $RL$, $RR$(见图 43-2)，因而任何一段的测度及其长度完全由它所在的位置决定，即由 $L$ 和 $R$ 的揉序列决定. 比如，一条大小为 $l_1^m l_2^{n-m}$ 的线段，其 $m$ 和 $n-m$ 分别表示在揉序列中 $L$ 和 $R$ 的数目. 显然，最左边的序列为 $LLL\cdots LLL\cdots$，最右边的为 $RRR\cdots RRR\cdots$. 最左边序列根据(43.21)式具有 $\alpha = \frac{\ln p_1}{\ln l_1} = D_\infty$，它位于谱的边界上；最右边的具有 $\alpha = \frac{\ln p_2}{\ln l_2} = D_{-\infty}$，位于谱的另一边界上. 其他位于中间的序列其 $\alpha$ 值位于两者之间.

图 43-4 给出 $f(\alpha)$对 $\alpha$ 的曲线. 它是对 $l_1=0.25, l_2=0.4$, 和 $p_1=0.6$, $p_2=0.4$ 画出来的. 曲线最左边的点为

$$f(\alpha)=0,\ \alpha=\frac{\ln 0.6}{\ln 0.25}.$$

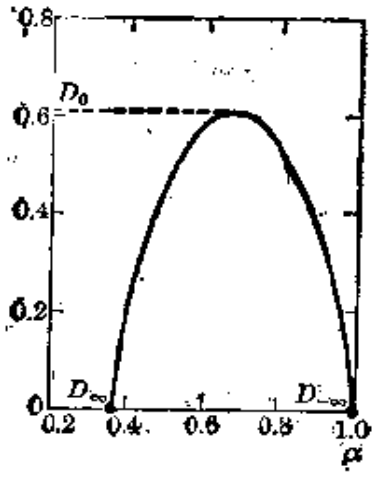



图 43-4

不管在哪一构造阶段, 都存在这样的线段($f=0$), 它的奇异性 $\alpha$ 为:

$$\alpha=\frac{\ln p_1}{\ln l_1}=\inf\left\{\frac{\ln p_1}{\ln l_1},\ \frac{\ln p_2}{\ln l_2}\right\},\tag{43.23}$$

且 $\alpha=D_\infty$. 对最右边的点, 也有 $f(\alpha)=0$, 但

$$\alpha=\frac{\ln p_2}{\ln l_2}=\sup\left\{\frac{\ln p_1}{\ln l_1},\ \frac{\ln p_2}{\ln l_2}\right\},\tag{43.24}$$

且 $\alpha=D_{-\infty}$. 容易看出, $D_\infty$ 对应着测度最浓的集合, 而 $D_{-\infty}$ 对应着测度最稀的集合. 对 $q=0$, 直接得出 $f=D_0$, $D_0$ 为集合的豪斯多夫维数, 它是曲线 $f(\alpha)$的极大值.

从图 43-4 还可发现这条曲线的某些重要特征. 这些特征具有普遍意义. 从(42.9)和(42.10)式可知:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}=q,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}<0.\tag{43.25}$$

因此, 对任何测度, $f(\alpha)$曲线都是凸的. 在 $q=0$ 点具有单一极大值; 而在 $q=\pm\infty$, 具有无穷大斜率. 由(42.11)式发现, 对 $q=1$, $\alpha(1)=f(1)$, 这点的斜率为 1.

(4) 其他类型的谱: 现在研究连续支撑上测度的例子. 许多最有意义的测度都是在连续支撑上, 例如, 像扩散置限聚集表面的生长测度, 常微分方程组的奇怪吸引子等.

观察下列例子: 单位间隔分为三段, 一段长 $l_1$, 另两段长 $l_2$, 前段测度为 $p_1$, 后两段为 $p_2$. 设 $l_1+2l_2=1$, $p_1+2p_2=1$ 以及

$\frac{p_2}{l_2}>\frac{p_1}{l_1}$，$l_2>l_1$. 这三段中，每段又按同样方式继续分割(图43-5). 尽管在线段上的测度在每步迭代过程中都在改变，但测度的支撑在每步中都保持原有长度不变，因此断定这种测度的 $D_0$ 等于1. 而且线段上最密集的间隔不收缩为一个点(如同两分量康托集那样)，而收缩为具有有限维数的点集. 因此，可预料 $\alpha$ 的最低值($D_\infty$ 值)对应一个非零 $f$ 值. 然而，在密度最低的点总是只有一个线段，所以仍然有 $D_{-\infty}$ 对应于 $f=0$. 对比前例中的两分量康托集，$D_{+\infty}$ 只对应长度为 $l_1^n$ 的一段，而 $D_{-\infty}$ 对应长度为 $l_2^n$ 的一段，因而 $f=0$，在此两值之间 $f\neq 0$，它们都含 $C_n^m$ 段(不是一段)长度为 $l_1^m l_2^{n-m}$ 的线段. 条件(43.3)要求：

$$\Gamma(q,\ \tau,\ l_2)=\frac{p_1^q}{l_1^\tau}+2\frac{p_2^q}{l_2^\tau}=1. \qquad (43.26)$$

方程的解表示在图43-6中. 正如所预言的，$f(q\to\infty)\neq 0$，以至 $f$-$\alpha$ 曲线最左边部分呈勾状.

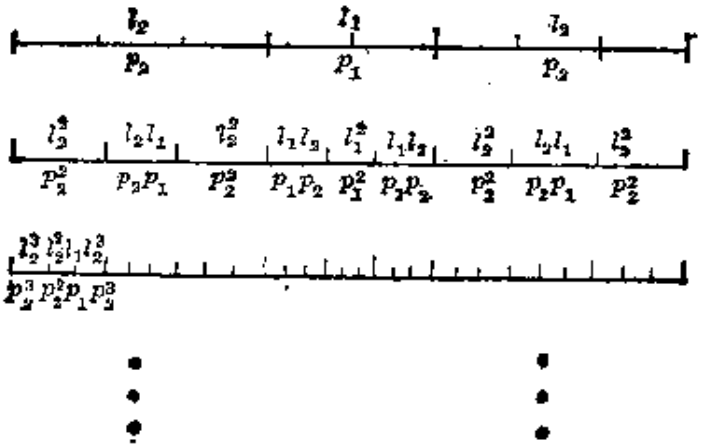


图 43-5

再看一个与前例稍微不同的连续支撑情况. 分割方法表示在图43-7中. 在每阶段，仅仅在前阶段中被 $p_2$ 乘过的区域要作进一步的分割，而被 $p_1$ 乘过的区域不再分割. 因此，任何一个区域测度的表示式中，都最多只含一个 $p_1$ 因子. 这样产生的测度自相

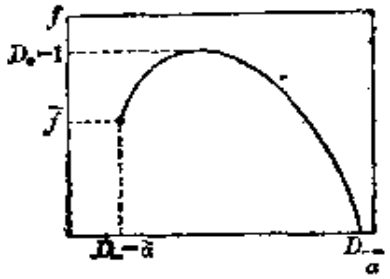



图 43-6

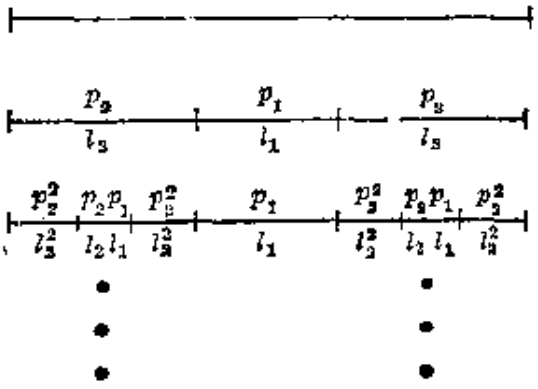



图 43-7

似性较差. 可写出第 $n$ 级的配分函数为: $(n\geqslant 1)$

$$\begin{aligned}\Gamma(q,\tau,l_2^n)&=\frac{p_1^q}{l_1^\tau}\left[\sum_{n=1}^{n}2^{n-1}\left(\frac{p_2^q}{l_2^\tau}\right)^{n-1}\right]\\&\quad+2\left(\frac{p_2^q}{l_2^\tau}\right)\left[2^{n-1}\left(\frac{p_2^q}{l_2^\tau}\right)^{n-1}\right]\\&\equiv\frac{p_1^q}{l_1^\tau}\Gamma^U(l_2^{n-1})+2\left(\frac{p_2^q}{l_2^\tau}\right)\Gamma(l_2^{n-1}).\end{aligned}\tag{43.27}$$

注意, 在(43.27)式右边 $\Gamma^U$ 含有对 $n$ 的求和, 而 $\Gamma(l_2^{n-1})$ 不含求和. 当 $n\to\infty$ 时, (43.27)式中第一项对应的长度将占据整个单位间隔, 而第二项变为测度为 0 的点集. 前者产生 $\alpha=f=1$, 而后者由 $p_2^n=(l_2^n)^{\tilde{\alpha}}$ 及 $(l_2^n)^{-\tilde{f}}=2^n$ 可求出: $\tilde{\alpha}=\dfrac{\ln p_2}{\ln l_2}$, $\tilde{f}=\dfrac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln l_2}$. 可以证明, 如果要求 $\Gamma(q,\tau,l_2^n)$ 既不为 0, 又不为无穷大, 则

$$\tau(q)=\min\{q-1,\ q\tilde{\alpha}-\tilde{f}\}.\tag{43.28}$$

此例相应于一条离散的而不是连续的 $f(\alpha)$-$\alpha$ 曲线, 它只是由两个点$(\tilde{\alpha},\tilde{f})$和(1,1)组成(因而不可能画出曲线).

## §44 动力系统

本节介绍几个动力系统的例子,[59]~[65] 以便更好地理解 §42 讨论的分形测度的数学形式的含义. 在所有这些例子中, 都是先

数值上算出 $D_q$，再用 § 42 的方程找出 $\alpha(q)$、$f(q)$及画出 $f(\alpha)$曲线．在这些例子中，也可理论上导出 $D_\infty$、$D_{-\infty}$，因而也就导出 $\alpha(q=\pm\infty)$．

(1) 倍周期的 $2^\infty$ 周期：已知从倍周期出发可通向混沌，这样的动力学系统可用映射 $M_\lambda(x)$的单参数族来表示．这里映射 $M_\lambda: R^F\to R^F$，$F$ 为自由度数目．当 $\lambda=\lambda_\infty$ 时，系统产生一个稳定的 $2^n$ 周期轨道．倍周期级联在 $\lambda_\infty$ 处发生积聚，这时系统具有 $2^\infty$ 轨道．由数值方法产生的轨道元素集合，便形成费根鲍姆吸引子(见图 41-2)．在集合构造的每个阶段，每个 $l_i$ 规定为一个点及经过迭代后与其最靠近的一点的距离．例如在图 41-2 中，在 $n=1$ 阶段，$l_1$ 指 $\xi_2$ 与 $\xi_4$ 之间的距离，$l_2$ 指 $\xi_3$ 与 $\xi_1$ 之间的距离．而在 $n=2$ 阶段，$l_i(i=1, 2, 3, 4)$指 $\xi_2$与 $\xi_6$，$\xi_3$ 与 $\xi_4$，$\xi_8$ 与 $\xi_7$ 及 $\xi_5$ 与 $\xi_1$ 间的距离．这些间隔的测度 $p_i$ 都是相等的．

对 $2^{11}$ 周期元素，可数值地求解 $\Gamma=\sum_i \frac{p_i^q}{l_i^\tau}=1$，得出 $\tau=\tau(q)$，从而产生 $D_q$ 对 $q$ 曲线(图 44-1)．由这些结果，借助 § 42 中的公式，求出 $\alpha(q)$和$f(\alpha)$．曲线 $f(\alpha)$见图 44-2．

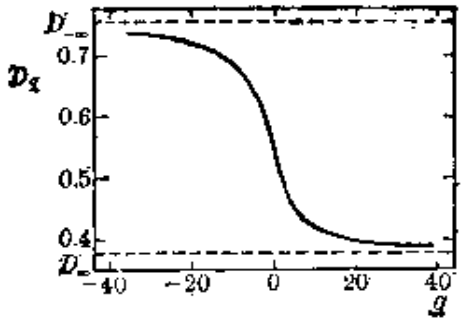



图 44-1

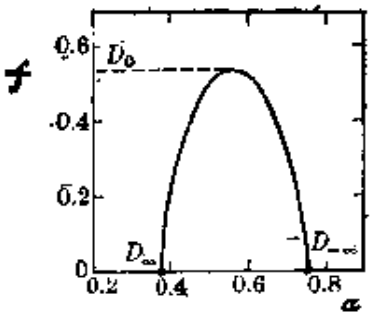



图 44-2

为了解释图 44-2 中 $f(\alpha)$ 曲线的形状，首先观察曲线的两个端点($f=0$)．正如以前讨论过的，我们预期这两个点是由集合中最稀和最浓的间隔决定．费根鲍姆曾证明，对曲线上的这两点，相应的集合间隔(长度)具有如下标度：$l_{-\infty}\propto\alpha^{-n}$，$l_{+\infty}\propto\alpha^{-2n}$，其中 $\alpha=$

2.50290… 是普适标度因子. 由于测度为 $p_{-\infty}\propto 2^{-n}$(各间隔测度相等), 因而对 $f(\alpha)$ 曲线上这两个端点分别有: $\frac{\ln p_{-\infty}}{\ln l_{-\infty}}$ 和 $\frac{\ln p_{\infty}}{\ln l_{+\infty}}$, 这些值也就是 $D_{-\infty}$ 和 $D_{+\infty}$, 所以找到:

$$D_{-\infty}=\frac{\ln 2}{\ln \alpha}=0.75551\cdots, \tag{44.1}$$

$$D_{+\infty}=\frac{\ln 2}{\ln \alpha^2}=0.37775\cdots. \tag{44.2}$$

这些值与由图形确定的值极好地相符. 曲线 $f(\alpha)$ 是非常光滑的, 极值点在 $D_0=0.537\cdots$, 这也跟以前算出的豪斯多夫维数一致. 由于 $f(\alpha)$ 曲线的斜率为 $q$, 所以即使对 $|q|\approx 10$, $\alpha(q)$ 也将是非常接近 $D_{\pm\infty}$ 的, 可是图 44-1 却显示出, 即使对 $q\approx\pm 40$, $D_q$ 还是离 $D_{\pm\infty}$ 很远, 因此变换(42.11)、(42.12)比起直接对 $D_q$ 进行计算更容易找到 $D_{\pm\infty}$ 的估值.

(2) 锁模结构:[33],[43] 首先说明什么是锁模现象. 一个具有固有频率为 $\omega_1$ 的动力系统, 当被一个具有频率为 $\omega_2$ 的场驱动时, 可能展示非常丰富的现象. 锁模现象是出现在耦合振子系统或振子耦合到周期外场上出现的共振现象. 要发生共振, 必须振子的谐振频率 $P\omega_1$ 趋近于另一个谐振频率 $Q\omega_2$. 在共振区域, 两个振动精确地锁于一个有理数比值 $\frac{P}{Q}$ 上. 在这些系统中, 最终导致混沌行为的机制是不同共振间的非线性耦合相互作用以及当耦合超过一个确定临界值时共振域之间的重叠.

现以圆映射为例, 来具体考察锁模现象以及其他有关现象. 圆映射为:

$$\theta_{n+1}=f_\Omega(\theta_n)=\theta_n+\Omega-\frac{K}{2\pi}\sin 2\pi\theta_n, \tag{44.3}$$

$K$ 为非线性耦合常数. 考虑映射的迭代 $\theta$, $f(\theta)$, $f^2(\theta)$, … 或写为 $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$, …, 映射的迭代可引入一个量——绕数来描述, 绕数 $W$ 为:

$$W=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f_\Omega^n(\theta)-\theta}{n}\right). \tag{44.4}$$

它相当于每次迭代的转动平均数.

当不存在非线性耦合时 (即 $K=0$), 由 (44.3) 式立即得出 $W=\Omega$. 当 $W=$有理数 $\frac{P}{Q}$ 时, 出现锁模现象; 当 $W=g$ 为无理数时, 相应准周期态; 而在混沌态, 绕数 $W$ 无定义, 由(44.3)式形成的系列具有不规则行为.

在(44.3)式表示的圆映射中, 绕数 $W$, $\Omega$ 和 $K$ 三个量之间存在一定关系. 图 44-3 是在($K$, $\Omega$)空间给出的这些量之间关系的图示. 图中线是 $W=$有理数的区域的边界, 这些区域称为"阿尔诺德舌头". 图中显示的 $W=\frac{P}{Q}=\frac{0}{1}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, … 等代表这些有理数的"阿尔诺德舌头". 当 $K=0$ 时, 舌头几乎不出现, 当 $K$ 逐渐增加时, 开始出现舌头, 即共振宽度不为 0, 而当 $K=1$ 时便开始出现不同舌头的重叠, 产生混沌行为. 因此 $K=1$ 线是混沌发动的临界线. 对图 44-3 也可换个办法说明: 当 $K=0$, 对应每一有理数 $\frac{P}{Q}$ 的间隔 $\Delta\Omega$ 几乎为 0, 以至于对任意选取的一个 $\Omega$, 对应绕数 $W$ 为有理数的概率几乎为 0. 相反, 取无理绕数 $W$ 的概率为

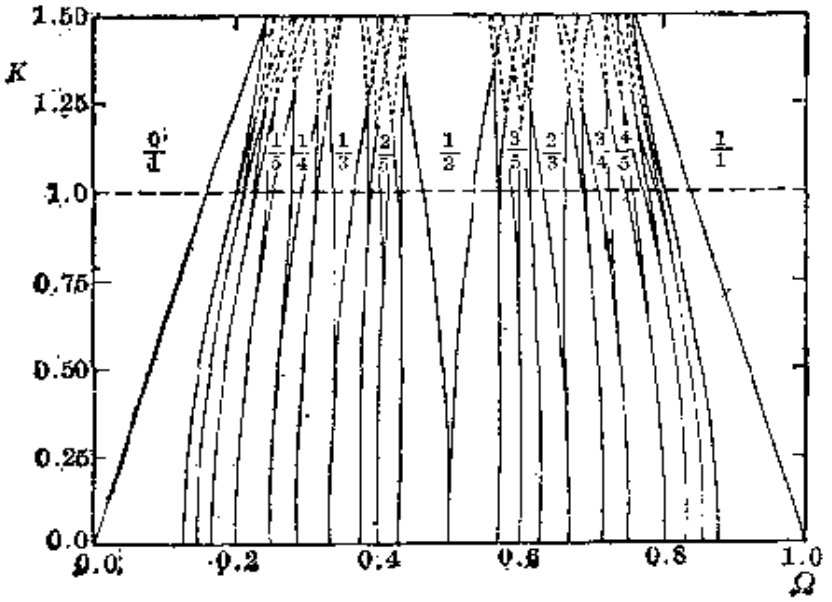



图 44-3

1；当 $K$ 增加时，所有锁相间隔 $\Delta\Omega$ 的宽度都增加，到达 $K=\frac{1}{2}$ 时，观察到有理绕数和无理绕数的概率几乎相等；而对 $K=1$，找到一个有理绕数的概率几乎为 1，这时 $W$ 为无理数所代表的准周期运动不再出现；当 $K>1$ 时便出现混沌运动，此时出现共振域的重叠．因而 $K=1$ 线为由准周期运动通向混沌的临界线．

锁模结构可用下列魔梯来理解．图 44-4 是 $K=1$ 情况，横轴为 $\Omega$，纵轴为 $W=\frac{P}{Q}$．只要给出 $W$ 的一个有理数，在 $\Omega$ 轴上便定出一个区间 $\Delta\Omega\left(\frac{P}{Q}\right)$．图中所有标出的 $\frac{P}{Q}$ 值均为有理数，它们相应的 $\Delta\Omega$ 之和几乎覆盖了整个 $\Omega$ 轴．图中显示出自相似结构，如将一个以 $W$ 无理数为中心的局部图形放大，便得到与原图相似的图．对圆映射的魔梯，可以证明：由 $W$ 的无理数值相应的 $\Omega$ 值构成一个点集，它是完整魔梯的补集，分形维数为 0.87，这是一个普适指数．

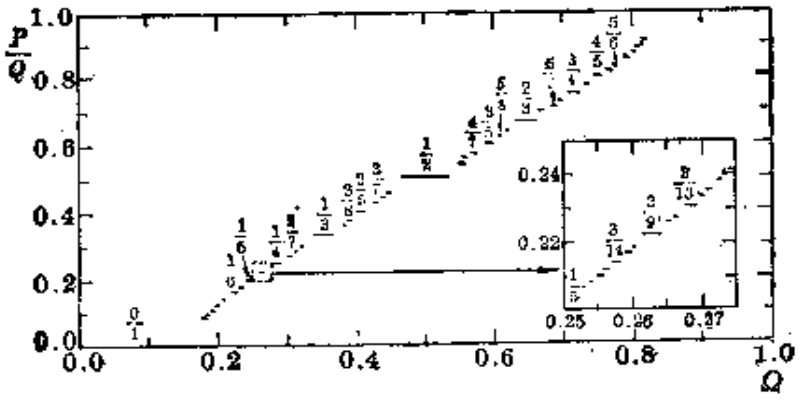



图 44-4

现在转而看 $K=1$ 线上由 $W$ 的无理数对应的 $\Omega$ 轴上准周期运动参数点构成的康托集．上面已提到该集上分形维数 $D_0=0.87$，现进一步求出 $D_q$ 和 $f(\alpha)$ 曲线．

$D_{\pm\infty}$ 可以解析地求出：黄金分割数是魔梯最稀的区域，黄金分割数 $W^*=\bar{\Omega}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 是个无理数，它可由有理绕数序列 $\Omega_i$ 来

逼近，具体为：

$$W^*=\bar{\Omega}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}=\{1,\ 1,\ 1,\ \cdots\}$$

$$=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.61803\cdots. \tag{44.5}$$

切断这个连分数，便得到一个数列

$$\Omega_1=\{1\}=\frac{1}{1},$$

$$\Omega_2=\{1,1\}=\frac{1}{2},$$

$$\Omega_3=\{1,\ 1,\ 1\}=\frac{2}{3},$$

$$\cdots\cdots,$$

$$\Omega_i=\{1,\ 1,\ \cdots,1\}=\frac{F_i}{F_{i+1}}, \tag{44.6}$$

其中 $F_i$ 为菲波那契(L. Fibonacci)数. 由于

$$\Omega_{i+1}=\frac{1}{1+\Omega_i}=\frac{F_{i+1}}{F_{i+1}+F_i}=\frac{F_{i+1}}{F_{i+2}}, \tag{44.7}$$

故可得出递推关系：

$$F_0=0,\quad F_1=1,\quad F_{i+2}=F_i+F_{i+1}. \tag{44.8}$$

作为黄金分割数的逼近值 $\frac{F_n}{F_{n+1}}$，它是个有理数序列，它相应的 $\Delta\Omega$ 区间长度 $l_{-\infty}\propto F_n^{-\delta}\propto(W^*)^{n\delta}$，其中 $\delta=2.1644$ 是一个普适常数. $p_{-\infty}$ 定义为 $\frac{F_n}{F_{n+1}}-\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}\propto(\omega^*)^{2n}$，因而求出：

$$D_{-\infty}=\frac{\ln p_{-\infty}}{\ln l_{-\infty}}=\frac{2}{\delta}=0.9240\cdots. \quad (\text{与 } n \text{ 无关}) \tag{44.9}$$

再看 $D_{+\infty}$. 绕数 $W$ 为 $\frac{1}{Q}$ 的序列是魔梯最密的区. 可以证明，在此序列中，相应的 $p_i\propto l_i^{1/2}$，因而意味着 $p_\infty\propto l_\infty^{1/2}$. 于是：

$$D_\infty = \frac{\ln p_\infty}{\ln l_\infty} = \frac{1}{2}. \tag{44.10}$$

为求 $f(\alpha)$，计算中采用了按法里(J. Farey)树顺序取的 1024 个锁模区间，锁模区间的长度取作 $l_i$，相邻绕数的差取作 $p_i$，然后求解方程(43.3)，便求得 $D_q$ 曲线以及 $f(\alpha)$曲线（见图 44-5 和图 44-6）．由图上看到，$D_0=0.87$．与以前的分析很好地吻合．图 44-6 曲线右端急剧下降，而左端并不这样．

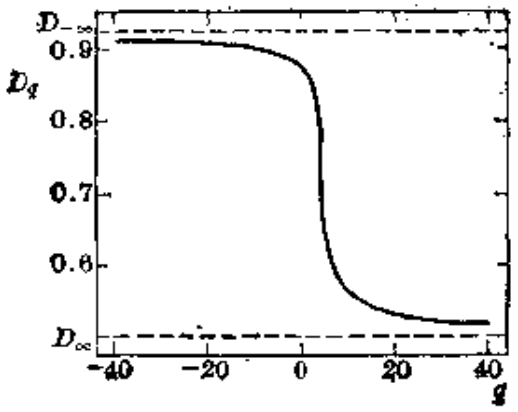



图 44-5

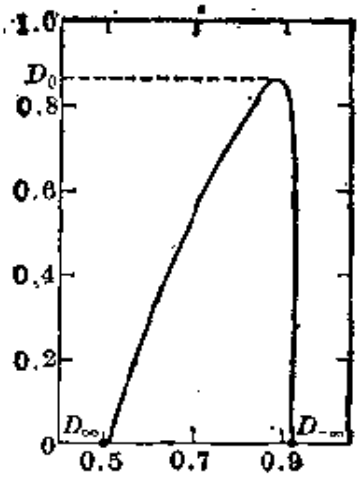



图 44-6

(3) 圆映射的准周期轨道：圆映射(44.3)展示出通过准周期过渡到混沌的转变．当 $K=1$ 时，对绕数为黄金分割数 $W^*$ 时的转变进行过很好的研究．设在这点轨道结构为 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_i, \cdots$，为了进行数值计算，选取 $\theta_1=f(0)$，在 $\theta_i(i=2584=F_{17})$截断此序列，距离 $l_i=\theta_{i+F_{16}}-\theta_i(\mathrm{mod}\ 1)$取为自然标度，测度 $p_i=\dfrac{1}{2584}$，图 44-7 和图 44-8 得出 $D_q$ 和 $f(\alpha)$曲线．此外还可证明：

$$\begin{cases} D_{-\infty}=\dfrac{\ln W^*}{\ln \alpha_{GM}^{-1}}=\dfrac{\ln W^*}{-\ln 1.2885}=1.8980\cdots, \\ D_{+\infty}=\dfrac{\ln W^*}{\ln \alpha_{GM}^{-3}}=\dfrac{\ln W^*}{-3\ln 1.2855}=0.6326\cdots. \end{cases} \tag{44.11}$$

最后指出，费根鲍姆吸引子及临界准周期轨道上的标度性质

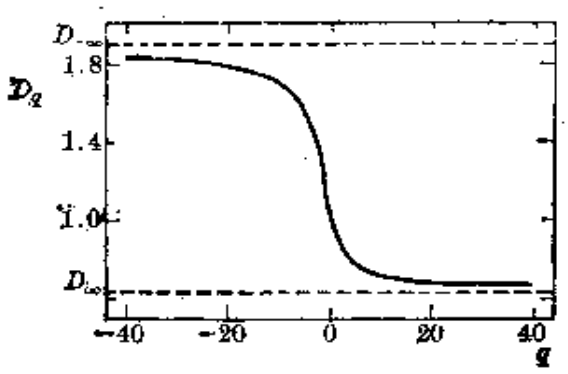



图 44-7

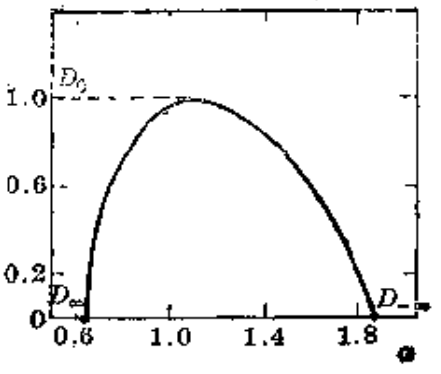



图 44-8

已被对流实验很好地证实，实验得到的 $f(\alpha)$ 曲线与理论基本相符.

## §45 渗流集团上的电阻网络

本节指出，传统的仅含一个标度指数(分形维数)的理论不能完整地描述无规电阻网络. 即需要引入无穷多个指数，才能给出完整描述. 本节还给出解释这种现象的机制.

(1) 无规电阻网络上的电压分布：渗流集团是个无规网络，它的悬挂键对导电没有贡献，其余键为集团的骨架. 骨架部分又分单连通键和复连通键.

考虑一个 $L\times L$ 的正方形晶格，晶格上的键以 $p$ 概率置放一个单位电阻，而以 $1-p$ 概率放置一个绝缘体. 在整个晶格两对边加上单位电压. 现研究在 $p$ 的临界值 $p_c$ 系统中形成的无规电阻网络上电压分布的统计性质.

首先定义电压分布的 $K$ 阶矩为：

$$M(K)=\sum n(V)V^K\propto L^{-\tilde{\rho}(K)}, \tag{45.1}$$

这里 $\tilde{\rho}(K)$ 是用来定义矩的指数，$n(V)$ 为具有电压降绝对值为 $V$ 的键数目，求和对各种电压降值进行. 上式改写为：

$$M(K)=\sum e^{\ln n(V)+K\ln V}\equiv\sum e^{F(V,K)}, \tag{45.2}$$

这里 $F(V,K)\equiv\ln n(V)+K\ln V$. 对(45.2)求和时采用最速

下降法. 设 $V^*=V(K)$是求和中贡献最大的项，它由下列条件来决定：

$$\frac{d}{dV}[\ln n(V)+K\ln V]=0. \tag{45.3}$$

这样产生所需要的 $V^*$，它是：

$$V^*=-K\frac{n(V^*)}{n'(V^*)}. \tag{45.4}$$

现假定对非常大的 $L$，有：

$$V(K)=A(K)L^{-\alpha(K)}, \tag{45.5}$$

$$n(V(K))=B(K)L^{f(K)}. \tag{45.6}$$

这里 $A(K)$、$B(K)$是振幅. 按传统的标度方法，$\alpha$ 和 $f$ 应与 $K$ 无关，$A(K)$和$B(K)$也应为 $K$ 的光滑函数，因而只存在唯一的一个 $V^*$ 值来表征分布. 然而，对电压分布，$\alpha$ 与 $f$ 应与 $K$ 有关. 现保留(45.2)式中的最大贡献项：

$$\begin{aligned} M(K) &\propto e^{P(V^*,K)}=n(V(K))[V(K)]^K \\ &\propto L^{f(K)-K\alpha(K)}. \end{aligned} \tag{45.7}$$

将其与(45.1)式对比，可得：

$$\tilde{\rho}(K)=K\alpha(K)-f(K)\equiv\frac{\rho(K)}{\nu}. \tag{45.8}$$

后一等式中，定义 $\tilde{\rho}(K)\equiv\frac{\rho(K)}{\nu}$，其中 $\nu$ 为关联长度的临界指数. 从方程(45.6)看出，指数 $f(K)$代表 $n(V(K))$对 $L$ 的依赖关系，它是电压降为 $V(K)$的所有键的集合的分形维数. 电压降的一个新奇特征是，不同键的子集具有不同的分形维数，每个子集中的键具有对应一个给定 $K$ 值的电压降. 由(45.5)式看出，$\alpha(K)$表征用系统大小 $L$ 来标度 $V(K)$的方式，每个 $V(K)$的独立的标度方式说明如下事实：不存在表征分布的唯一的典型电压标度.

由(45.4)式，由于对每个给定的 $K$ 值存在唯一的一个 $V(K)$，$V^*$ 可看作一个独立变数 $V$. 使用 $\frac{\partial}{\partial V}=\frac{\partial}{\partial K}\frac{\partial K}{\partial V}$，因而(45.3)式可写为：

$$\frac{\partial K'}{\partial V}\left[\frac{\partial}{\partial K'}\ln n(V(K'))+\frac{\partial}{\partial K'}\ln V(K')\right]_{K'=K}=0. \tag{45.9}$$

再利用(45.5)、(45.6)式，略去 $\frac{1}{\ln L}$ 项，可得：

$$\frac{\partial K'}{\partial V}\left[\frac{\partial f}{\partial K'}-K\frac{\partial \alpha}{\partial K'}\right]_{K'=K}=0. \tag{45.10}$$

这样就导出：

$$\frac{\partial f}{\partial K}=K\frac{\partial \alpha}{\partial K}. \tag{45.11}$$

利用(45.11)式，对(45.8)式微分，得：

$$\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial K}p(K)=\alpha(K). \tag{45.12}$$

所以，如果知道 $p(K)$，便可算出 $\alpha(K)$ 和 $f(K)$，反之亦然．由式(45.8)、(45.12)消去 $K$，可得一个新函数 $f(\alpha)=f(K(\alpha))$．然后，由(45.6)，作用 $\alpha$ 作为独立变数，便有：

$$n(V)=O(\alpha)L^{f(\alpha)}, \tag{45.13}$$

这里

$$\alpha=-\frac{\ln V}{\ln L}. \tag{45.14}$$

方程(45.13)及(45.14)表征如下事实：键分为不同的分形集，每个分形集用一个给定的 $\alpha$ 表示，具有分形维数 $f(\alpha)$，后者与矩指数 $\tilde{\rho}(K)$ 有直接关系．如果 $\tilde{\rho}(K)$ 与 $K$ 是线性关系，显然由(45.12)式可知只存在一个 $\alpha$ 值，因而也只有一个 $f$，即只存在唯一的一个分形维数．任何 $\tilde{\rho}(K)$ 如果偏离 $K$ 的线性行为，都会出现多重分形特性．

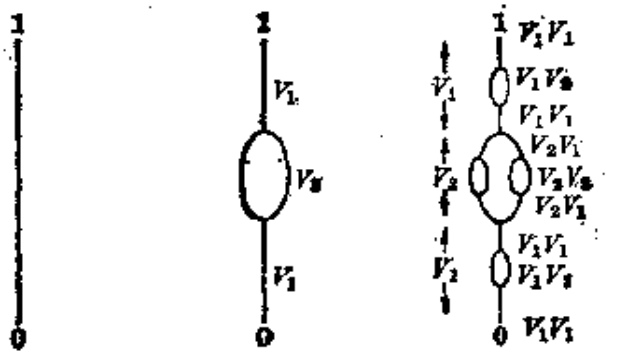



图 45-1

(2) 多重分形性的机制——倍增过程：电压分布可用等级模型精确地求解．模型是由一系列迭代得出的．考虑一个

单位元胞，它的键标上 1, 2, 3, 4, 每根键电导为 $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$, $\sigma_4$; 如果 $\Delta V=1$ 是加于元胞两端的电压，那么加于各键两端的电压降可用直流电路的基尔霍夫定律得出，设分别为 $V_1, V_2, V_3, V_4$. 注意到基尔霍夫定律在变换 $V\to\lambda V$ 下是不变的，因此立即导出：如果元胞两端的电压为 $\Delta V=\lambda$，则沿每根键的电压便为 $\lambda V_i$($i=1$, 2, 3, 4). 在下一级迭代中，网络由四个编号为 1, 2, 3, 4 的元胞组成，取代原来的四根键. 在第 $i$ 个元胞内，每根键电压为 $V_iV_1$, $V_iV_2$, $V_iV_3$, $V_iV_4$($i=1$, 2, 3, 4)，因为元胞两端的电压为 $V_i$，所以在每次迭代中电压可由图 45-1 表示的倍增法则给出. 因此，矩为：

$$M(K)=(V_1^K+V_2^K+V_3^K+V_4^K)^N. \tag{45.15}$$

在最简单情况下，当电导 $\sigma_i$ 都相等时，便有 $V_1=V_2=\frac{1}{5}$, $V_3=V_4=\frac{2}{5}$，因而可找出临界指数的无穷集合：

$$\nu\rho(K)=\frac{\ln M(K)}{N\ln 2}=1+\frac{\ln\left[\left(\frac{1}{5}\right)^K+\left(\frac{2}{5}\right)^K\right]}{\ln 2}. \tag{45.16}$$

这里已利用 $L=2^{N\nu}$, $L$ 为线性大小，$2^N$ 为键(电阻)的数目. 结果我们发现多重分形性出现在自相似结构中，其中每个元素的场(在此为电压)满足倍增法则. 当场所遵守的方程在标度变换 $\phi\to\lambda\phi$ 下是不变的情况下，这个法则是满足的. 在本问题中电压就是以前所研究的测度.

## §46 DLA 生长概率测度·调和测度

正如下一章将要指出的，DLA 集团是一种统计分形，在一个已经形成的集团基础上，如果要继续扩大该集团，必定需在集团周围生长更多粒子，这样已经生成的 DLA 集团的周界格点便是生长点. 现在要问：周界格点上的生长概率分布如何？以下的研究说明，周界格点的生长概率形成不同的子集，每个子集用不同的指数

$\alpha$ 来描述它们的测度奇异性，需要用无穷多个维数来描述所有这些子集。[66],[69]~[71]

(1) 无穷多个分形维数描述 DLA 周界子集：首先给出计算机模拟的结果，图 46-1(i)给出在二维非晶格上由五万个粒子形成的 DLA 集团，模拟方法是，从无穷远点释放出一个无规行走者，如果它抵达聚集的边界，便将其去掉，然后再释放一个，如此重复。最终观察所有周界上各点曾被无规行走者占据过多少次，占据次数越多，该处的生长概率便越大。图 46-1(ii)显示出 6803 个点至少被释放出的 $10^6$ 个无规行走者占据过一次。图 46-1(iii)和(iv)分别显示那些至少被占据过 50 次和 2500 次的点。

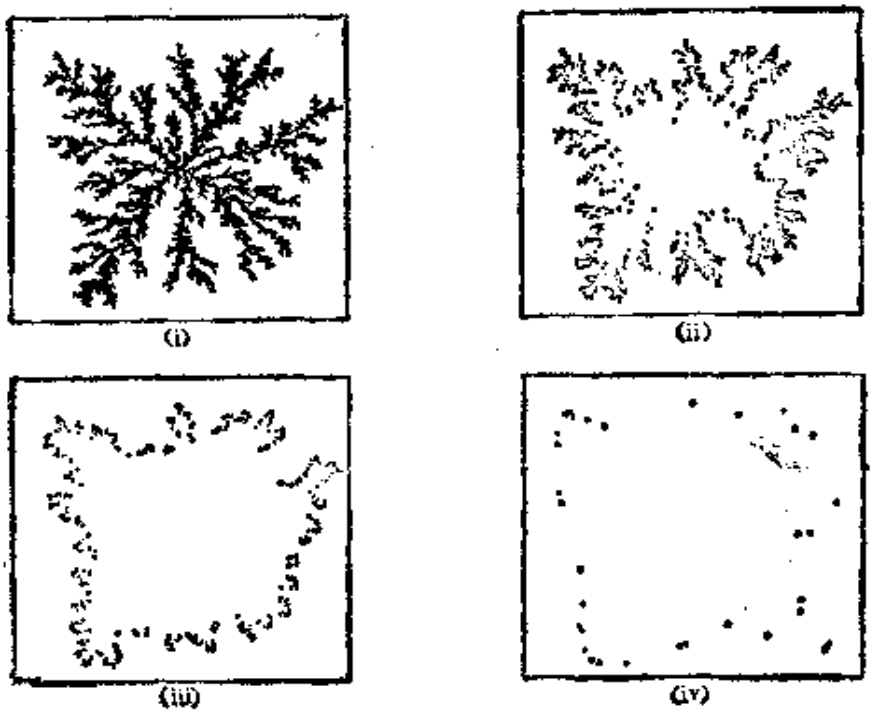



图 46-1

模拟结果明显地看出，周界各处生长概率不同。有些地方(如尖端)生长概率较大，有些地方(如沟槽内部)生长概率较小。甚至出现生长概率为 0 的地方，出现"屏蔽"点。因此，用一个指数来描述具有不同生长概率的周界是不够的。

为了定量地分析图中展示的现象，现采用与上节类似的方法，先引入一组各阶矩函数：

$$Z_q=\sum_{i=1}^{M}p_i^q. \tag{46.1}$$

这里 $M$ 是格点总数，$p_i$ 是生长概率，$q$ 代表 $q$ 阶矩．再引入一个分布函数 $n(p)$，代表 $p$ 值处于 $p-p+\Delta p$ 间的周界粒子数目，上式便可改写为：

$$Z_q=\sum_{p}n(p)p^q. \tag{46.2}$$

仿前节，只要用 $p^*(q)$ 取代 (45.7) 式中的 $V(K)$，用 $n(p^*)$ 取代 $n(V(K))$，又令

$$Z_q\propto L^{-(q-1)D_q}, \tag{46.3}$$

立即导出：

$$(q-1)D_q=q\alpha(q)-f(q) \tag{46.4}$$

和

$$\frac{d}{dq}[(q-1)D_q]=\alpha(q). \tag{46.5}$$

这些结果与以前在一般理论中导出的基本数学公式完全相同．

注意到概率的归一化条件，$\sum_{p^*(q)}n(p^*)p^*=1$ 意味着 $\sum_q L^{f(q)-\alpha(q)}=1$，因而

$$f(q)\leqslant\alpha(q), \tag{46.6}$$

仅当 $q=1$ 时才取等号．

同时注意到，当 $q\to\infty$ 时，$p^*(q)\to p_{\max}$，所以如果令 $\alpha_{\max}=\alpha(\infty)$，则有：

$$p_{\max}\propto L^{-\alpha(\infty)}. \tag{46.7}$$

从(46.7)及(46.2)式的极值条件：$\frac{d\ln n(p)}{d\ln p}=-q$，在 $L$ 很大的极限下，定义：

$$\varpi\equiv\frac{\ln p^*}{\ln p_{\max}}=\frac{\alpha(q)}{\alpha(\infty)}. \tag{46.8}$$

或者，反过来，将(46.8)写成：

$$q=q(\varpi). \tag{46.9}$$

将其代入：

$$n(p^*)=B(q)L^{f(q)}, \tag{46.10}$$

最终得到：

$$n(p)=c(x)L^{\phi(x)}. \tag{46.11}$$

其中 $x=\dfrac{\ln p}{\ln p_{\max}}$，$c(x)=B[q(x)]$，$\phi(x)=f[q(x)]$. 注意这里已将 $p^*$ 上的 * 略去，因为 $p^*$ 现在可看作独立变数，也就是说，(46.8)式是一个对所有 $p^*$ 值都成立的泛函方程，因而对所有 $p$ 值也成立. 这样(46.11)式便给出了分布函数 $n(p)$ 的标度行为. 式(46.4)中的实际指数依赖于比值 $\dfrac{\ln p}{\ln p_{\max}}$. 在 $\alpha(q)$ 与 $q$ 无关的特殊情况下，比值约化为仅为一个标度指数的通常的标度.

综上可看到，DLA 聚集的生长点可分为许多分形子集，每个子集用一个值 $x=\dfrac{\ln p}{\ln p_{\max}}$ 来表征，子集的分形维数为 $\phi(x)$(见(46.11)式)，$\alpha$ 表征测度的奇异性强度. 由(46.11)式给出的幂律形式中，$x$ 由前面给出的比值决定，这点完全不同于通常临界现象中的标度律，在那里标度指数是一个常数. 这种特点是由于假定 $f(q)$ 和 $\alpha(q)$ 为 $q$ 的函数而产生的. 反过来，可以证明：具有常数指数的纯幂律 $n(p)\propto L^{\alpha}p^{-\tau}$，在 $q>q_c=\tau$ 以上导出 $\alpha$ 和 $f$ 等于两个常数 $\alpha_1$ 和 $f_1$，而当 $q<q_c=\tau$ 得出另两个常数 $\alpha_2$ 和 $f_2$，实际上，在这种情况下，对 $q>q_c$ 分布的矩由 $p_{\max}$ 控制，而对 $q<q_c$，分布矩则由 $p_{\min}$ 控制. 相反，在(46.11)形式的幂律中不存在一个特征值 $q_c$，来控制分布矩的范围. 对每个 $q$ 矩，都有一个对应的 $p$ 值来控制. 因此，由 $(q-1)D_q$ 不是 $q$ 的线性函数，以及 $\alpha$ 和 $f$ 不是常数，预示着新的幂律形式(即(46.11)式).

(2) 调和测度：最重要的一种分形测度是调和测度. 它描述一个分形表面满足拉普拉斯方程的调和场的分布. 在 DLA 情况下，调和测度等同于生长概率测度，这是因为后者可用拉普拉斯方程来描述.

调和测度可用多种途径求得：可用数值方法求解拉普拉斯方程(如在介电击穿模型中)；可用无规行走法来估算(前面的计算机

模拟便是一例)；还有用格林函数方法. 现在介绍其余两种方法.

数值求解拉普拉斯方程方法：考虑一个二维正方形晶格(见图46-2)，中心代表一个电极，另一电极用一个很大的圆圈来代表，假定花样生长是按下列法则形成：认为生长是一步一步形成，图中花样用黑点连上粗线代表，晶格上各点的电势$\phi$用具有一定边界条件的离散的拉普拉斯方程来决定. 边界条件为花样上各点$\phi=0$，最外圆圈$\phi=1$. 每一步增加一根连接花样的键和一个新的黑点. 所有可能成为花样中新黑点的那些点和新键用小圆和虚线表示在图中. 每根虚键分配一个概率$p$，代表它能成为粗实键的概率. 这个概率假设与用键连接的黑点和小圆之间的电势差(局部电场)有关，设$i$，$k$与$i'$，$k'$代表离散晶格的坐标，于是可写：

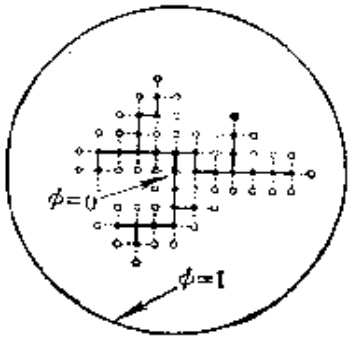


图 46-2

$$p(i,k\to i',k')=\frac{(\nabla\phi_{i',k'})^{\eta}}{\sum(\nabla\phi_{i',k'})^{\eta}}. \tag{46.12}$$

这里幂律指数$\eta$用来描述局域场与概率之间的关系，求和是对所有可能的生长过程(即图46-2中所有的虚线)进行. 每加上一根键后，该键及相连的黑点便成为花样的组成部分，因而电势成为0. 接着便开始一个新的生长过程.

这种随机模型的本质是，生长概率依赖于局域场，因此需求解上述边界条件下的拉普拉斯方程

$$\nabla^2\phi=0. \tag{46.13}$$

它的离散形式为：

$$\phi_{i,k}=\frac{1}{4}(\phi_{i+1,k}+\phi_{i-1,k}+\phi_{i,k+1}+\phi_{i,k-1}). \tag{46.14}$$

用计算机求解. 发现在图形的尖端部分生长概率较大，而在图形的沟槽中，概率较小. 这些便是"尖端效应"和"法拉第屏蔽"，它们是来自场方程的解. 参数$\eta$可能对结果产生影响，事实上，当$\eta=0$，0.5，1和2时，对应产生的花样的分形维数为2，$1.39\pm0.01$，

$1.75\pm0.02$ 和 1.6，而 DLA 聚集集团的分形维数为 1.7 (对 $d=2$)，因而取 $\eta=1$ 时的数值结果与实际较符.

格林函数方法：在上述方法基础上，考虑一个连续变化模型(不是晶格结构)，聚集的生长概率 $p(x)$ 应为：

$$p(x)=K[\hat{n}_x\cdot\nabla_x\phi(x)]^\eta. \tag{46.15}$$

$\hat{n}_x$ 为 $x$ 点的法线，$\phi(x)$ 为满足拉普拉斯方程并具有边界条件的静电势，$K$ 为归一化常数，$\eta$ 为描述不同模型的参数，$\eta=1$ 对应 DLA 聚集，$\eta=0$ 给出另一随机模型——Eden 模型，$\eta=\infty$ 产生一维聚集.

为计算(46.15)式，先来计算聚集的电荷密度 $\sigma(x)=\hat{n}_x\cdot\nabla_x\phi(x)$. 注意到静电学中有：

$$\Phi(x)=\int_s\sigma(x')G(xx')dx', \quad (dx' \text{ 为面元}) \tag{46.16}$$

这里 $G(x, x')$ 为格林函数

$$G(x, x')=\begin{cases}\dfrac{1}{|x-x'|^{d-2}}, & \text{当 } d>2 \text{ 时;}\\ \ln|x-x'|, & \text{当 } d=2 \text{ 时.}\end{cases} \tag{46.17}$$

于是得：

$$\sigma(x)=\int_s\sigma(x')\hat{n}_x\cdot\nabla_xG(x, x')dx'. \tag{46.18}$$

方程(46.18)的最大优点是可在聚集以外的空间不明显地解拉普拉斯方程而去求 $\sigma(x)$，避免由于引入一个有限距离内的圆(圆上电势等于 1)而带来的复杂性. 用这种办法将生长点概率分布通过(46.15)式跟聚集表面的电压降联系起来.

用数值方法解离散形式的(46.18)，曾算出一个含 150 个点的集团，同时也计算了分形维数 $d_f$，矩函数 $Z_q$ 及 $(q-1)D_q$. 当 $\eta=1$ 时得到 $d_f=1.71$，$\alpha(\infty)\approx0.7$，它们与非晶格上的结果及理论预言($\alpha(\infty)=d_f-1$)很好地一致. 图 46-3(i)、(ii)分别表示 $(q-1)D_q$ 及 $f(\alpha)$ 曲线.

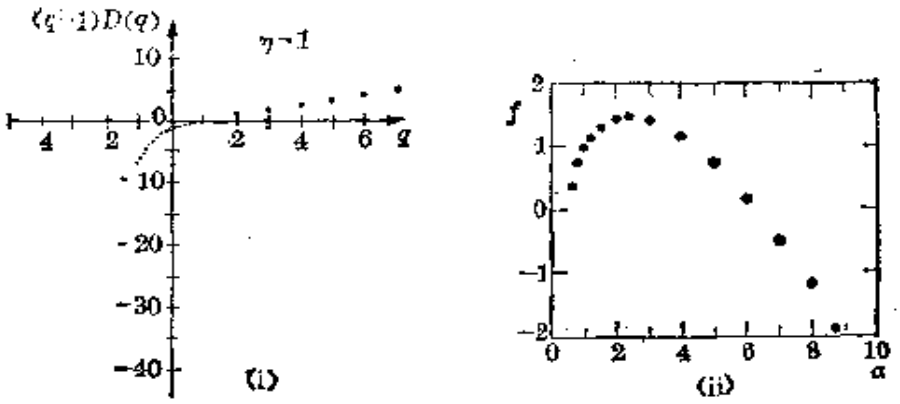



图 46-3

## §47 生长结构的几何多重分形性

本节研究一类生长结构的质量分布，即通过依次加上若干构造单元而生长起来的分形对象的质量分布，从中发现了几何多重分形性.[72]

现考虑由相同粒子在晶格上建造起来的一种结构，$L$ 和 $M$ 分别表示生长结构的线度和质量，这种结构用边长为 $l$ 的盒子对它进行覆盖，其中 $a \ll l \ll L$，$a$ 为晶格常数，第 $i$ 个非空盒子的质量为 $M_i$，设盒子的质量指数为 $\alpha_i$，它定义为：

$$M_i \propto M\left(\frac{l}{L}\right)^{\alpha_i}. \qquad \left(\frac{l}{L} \ll 1\right) \quad (47.1)$$

具有相同 $\alpha$ 的那些盒子形成盒子的一个子集，这些盒子的中心是放在维数为 $f(\alpha)$ 的分形集上，盒子的数目通过下列关系与 $f(\alpha)$ 联系起来：

$$N(\alpha) \propto \left(\frac{l}{L}\right)^{-f(\alpha)}. \qquad (47.2)$$

如果存在不同的质量指数集合，则表示生长结构具有几何多重分形性. 由于在本问题中产生谱的测度是均匀质量分布(勒贝格测度)，因而 $f(\alpha)$ 表征系统的纯几何特性.

按以前的研究结果，在此系统中广义维数 $D_q$ 可用下列标度关

系给出：

$$\chi_q(M, l, L)\equiv\sum_i M_i^q \propto M^q\left(\frac{l}{L}\right)^{(q-1)D_q}. \qquad (47.3)$$

$f(\alpha)$与$D_q$间的关系为：

$$(q-1)D_q=q\alpha(q)-f(\alpha(q)), \qquad (47.4)$$

并且还有$f'(\alpha(q))=q$. 以下来分析几个非均匀生长的例子.

(1) 第一个例子的生长构造规则如图 46-1 所示. 构造的第$n$阶段是将原来$(n-1)$阶构造扩大两倍的样本加到第$n-1$阶构造的四个角上，加上去的方块大小为$2^{n-1}$，长度只占总长的$\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$. 当$n\to\infty$，这个比值趋于0. 因此，一个大集团可以看作为一个分形. 把一个$L\to\infty$的集团将其缩小5倍和$\frac{5}{2}$倍，便得到两个结构，第一个对应大小为$\frac{L}{5}$的中心块，第二个对应大小为$\frac{2L}{5}$的较大方块(四个角上的). 由于这些不同方块的质量为$\frac{M}{17}$和$\frac{4M}{17}$，因此导出

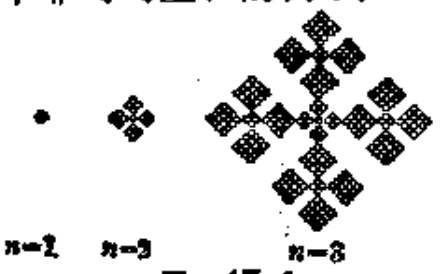


图 47-1

$$\chi_q(M, l, L)=\chi_q\left(\frac{M}{17}, 5l, L\right)+4\chi_q\left(\frac{4M}{17}, \frac{5l}{2}, L\right). \qquad (47.5)$$

应用标度关系(47.3)，代入(47.5)式，便得：

$$\left(\frac{1}{17}\right)^q 5^{(q-1)D_q}+4\left(\frac{4}{17}\right)^q\left(\frac{5}{2}\right)^{(q-1)D_q}=1. \qquad (47.6)$$

这是一个关于$D_q$的隐方程. 由此可求出

$$D_\infty=\frac{\ln\left(\frac{17}{4}\right)}{\ln\left(\frac{5}{2}\right)}=1.579\cdots, \quad D_{-\infty}=\frac{\ln 17}{\ln 5}=1.760\cdots,$$

其余$D_q$介于这两个值之间. 然后利用已有公式便可求出非平庸

的 $f(\alpha)$ 谱，因而呈现几何多重分形性.

(2) 第二个例子是一维生长过程. 在此生长过程中，如同第一个例子一样，由于存在局部密度涨落，便呈现几何多重分形性.

一维生长过程用图 47-2 表示. 第一个单元含三个粒子，放在第 1, 3, 4 位置上，在下一阶段，将前阶段结构放大两倍，并在第 9, 10 及 13, 14, 15, 16 位置上加上六个粒子. 然后以新构造作为"种子"，重复此过程.



图 47-2

经过 $n$ 步后，线性大小变为 $4^n$，因此选择 $l=2^n$ 作为盒子的大小来覆盖对象. 可以发现非空盒子的数目为 $F_n$，它是菲波那契数，其中 $F_0=1$, $F_1=2$, $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$. 令 $M_i^{(n)}$ 代表在第 $n$ 构造阶段第 $i$ 个非空盒子的质量($i=1, \cdots, F_n$)，$i=1$ 对应最左边的盒子. $M_i^{(n)}$ 与 $M_i^{(n-1)}$、$M_i^{(n-2)}$ 间有如下关系(对 $n>2$)：

$$M_i^{(n)}=\begin{cases}3M_i^{(n-2)}, & i=1, \cdots, F_{n-2};\\ 2M_{i-F_{n-2}}^{(n-1)}, & i=1, \cdots, F_{n-1}.\end{cases} \tag{47.7}$$

总质量 $M=3^n$. 这个递推关系的初始值为：

$$M_i^{(1)}=1, 2, \qquad M_i^{(2)}=3, 2, 4.$$

有了这些，便可来求系统的几个特征指数.

由于非空盒子的数目为 $F_n$ 和 $\frac{F_{n+1}}{F_n}\approx W=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，是黄金分割数，故可由(47.3)式找出第 $n$ 级和第 $n+1$ 级

$$\chi_0(M, l, L)=\sum_i M_i^0=\begin{cases}F_n\propto\left(\frac{2}{4}\right)^{-nD_0},\\ F_{n+1}\propto\left(\frac{2}{4}\right)^{-(n+1)D_0}.\end{cases} \tag{47.8}$$

由此得到 $D_0=\frac{\ln W}{\ln 2}$. 这是生长结构完全集的分形维数. 最浓的

盒子位于最右边，它具有质量$2^n$，因此代入(47.1)式可得：

$$\alpha_{\min}=D_{\infty}=\frac{\ln 2-\ln 3}{\ln 1-\ln 2}=0.585,$$

而非空盒子中最稀的是第一个或第二个，要看$n$为奇数还是偶数。对奇数，最稀的质量为$3^{\frac{n-1}{2}}$，对偶数，为$2\times 3^{\frac{n}{2}-1}$，因此

$$\alpha_{\max}=D_{-\infty}=\frac{\ln 1-\ln 3}{\ln 1-\ln 4}=0.792\cdots.$$

注意到在集合$M_j^{(n)}$中只有$n+1$个不同的质量值，现用$\overline{M}_j^{(n)}$，$(j=1, 2, \cdots, n+1)$来表示这些量，便可对$n>1$得到：

$$\overline{M}_j^{(n)}=\begin{cases}3^{\left[\frac{n}{2}\right]}, & \text{当 } j=1 \text{ 时;}\\ 2\overline{M}_{j-1}^{(n-1)}, & \text{当 } j=2, 3, \cdots, n+1 \text{ 时.}\end{cases} \tag{47.9}$$

这里记号$\left[\frac{n}{2}\right]$代表取其整数部分。令$N_j^{(n)}$表示$\overline{M}_j^{(n)}$出现在$M_j^{(n)}$中多少次，便可得到一个两步递推关系

$$N_j^{(n)}=N_{j-1}^{(n-1)}+N_j^{(n-2)} \qquad 1<j<n \tag{47.10}$$

和

$$N_j^{(n)}=N_n^{(n)}=N_{n+1}^{(n)}=1.$$

这样，就可应用(47.1)、(47.2)、(47.9)、(47.10)式导出$f(\alpha)$谱的方程，它的解为：

$$f(\alpha)=\left[(\alpha-\alpha_{\min})\ln\left(\frac{\alpha-\alpha_{\min}}{1-\alpha}\right)+2(\alpha_{\max}-\alpha)\ln\left(\frac{2(\alpha_{\max}-\alpha)}{1-\alpha}\right)\right]\times\frac{1}{2\ln\left(\frac{1}{2}\right)(\alpha_{\max}-\alpha_{\min})}. \tag{47.11}$$

最后，由(47.4)和(47.11)式可求出$D_q$谱。图47-3给出$f(\alpha)$谱曲线。

从上面两个例子看出，如果在分形上使用质量作为测度，便可精确地在一类规则构造的分形上求出相应的分形维数谱。几何多重分形是非常普遍的，它是由变化的局域质量标量组成。

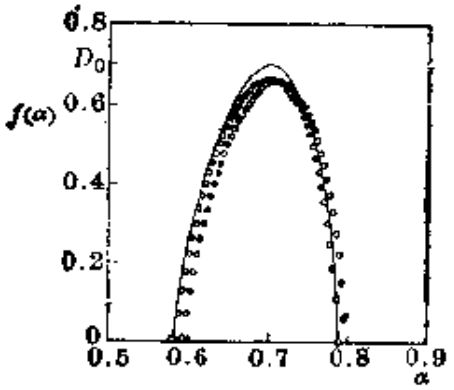



图 47-3

## §48 多重分形的热力学形式

多重分形的描述可以转化成热力学形式，这可由公式(配分函数)

$$\Gamma(q,\tau)=\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i^q}{l_i^\tau} \tag{48.1}$$

入手. 令所有 $p_i$ 相等，且 $p_i=a^{-n}$，$n$ 为级的标志(它是精细指数)，作下列代换：$q\to F$(自由能)；$l_i=e^{\ln l_i}\to e^{E_i}$($E_i$ 为能量)；$\tau\to\frac{1}{kT}$，便得出标准的配分函数：

$$e^{n\ln aF}=\sum_i e^{-E_i/kT}. \tag{48.2}$$

这是统计热力学中熟知的形式.

这种热力学形式非常有用，这里简单地提一个例子：对倍周期吸引子或具有黄金分割数转动的轨道，可以用从一级到下一级的转移矩阵写出它的热力学形式，转移矩阵的元素就是费根鲍姆标度函数的元素. 使用该种技术可以转换 $f(\alpha)$ 谱，从而了解产生谱的动力学.

热力学函数 $F(T)$(即 $q(\tau)$)通常是光滑的，它的导数也是光滑的. 然而在某些情况下，可以发现它的第 $n$ 级导数出现不连续性，显示出第 $n$ 级相变. 这里给出一个一级相变的例子：这种类型的相变常常出现在具有直线部分的 $f(\alpha)$ 谱中，图 48-1 是黑隆

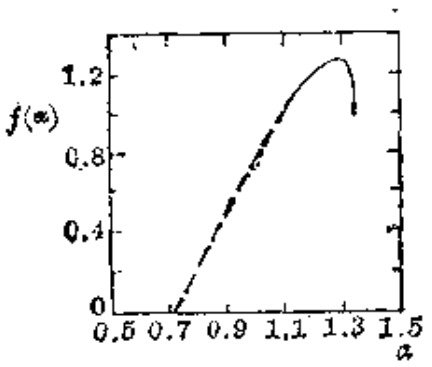



图 48-1

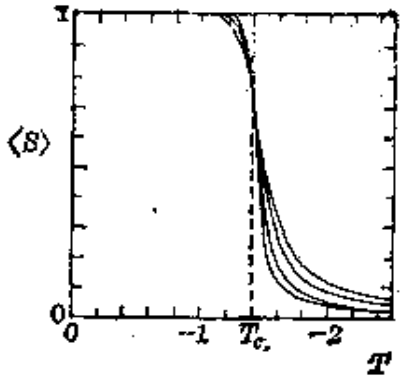



图 48-2

(Henon)奇怪吸引子的 $f(\alpha)$ 谱，它由具有 $\alpha>1$ 的光滑部分组成，然后经相变，落至(0.72, 0)处. 可以证明，相变发生在光滑部分(非奇异)与吸引子拐弯部分(测度为奇异的)之间. 对这样的相变，可以引入一个序参量. 图 48-2 是一个一维动力系统热力学一级相变的序参量. 可以看出，当集合分得越精细，序参量变为急剧地增加.

## §49 杨-李零点·朱莉亚集和它们的奇异谱

研究等级格子上波茨模型的相变时，可以用精确的重整化群递推关系定义耦合常数之间的关系，这在第 3 章中已经看到. 上述递推关系定义一个有理数映射. 与此有理数映射有关的是在复平面上的朱莉亚集. 朱莉亚集是多重分形，由于它与等级格子上相变有联系，因此非常有必要去研究它的奇异谱[176].

(1) 杨-李零点与朱莉亚集：研究第 3 章曾画出过的金刚石型等级格子，考察在它上面的箝茨模型的相变. 设 $S$ 态箝茨模型哈密顿量为：

$$H=-J\sum_{\langle ij\rangle}\delta_{(\sigma_i,\sigma_j)},\qquad \sigma_i=1,\ 2,\ \cdots,\ s \tag{49.1}$$

这里 $\delta$ 为克罗内克函数，求和对最近邻格点进行. 配分函数为：

$$Z=\sum_{\{\sigma\}}\exp\{K\sum_{\langle ij\rangle}\delta(\sigma_i,\ \sigma_j)\}. \tag{49.2}$$

其中 $K=\beta J=\frac{J}{kT}$，今后采用 $z\equiv e^{K}$ 作变数.

利用第3章的部分格点消约重整化群方法，可求得下列递推关系：

$$A(z)Z_1(z')=Z_2(z), \tag{49.3}$$

其中

$$A(z)=(2z+s-2)^2, \tag{49.4}$$

$$z'=f(z)=\left(\frac{z^2+s-1}{2z+s-2}\right)^2. \tag{49.5}$$

$A(z)$是重整化变换后产生的常数因子，而 $z'$ 是重整化耦合常数 $K'$ 的有关量，即 $z'\equiv e^{K'}$. 一般地，第 $n$ 级结构与第 $n-1$ 级结构间的递推关系为：

$$Z_n(z)=Z_{n-1}(z')[A(z)]^{4^{n-1}}. \tag{49.6}$$

这里，第 $n$ 级存在 $4^{n-1}$ 根键. 所以配分函数为 $z$ 的 $4^{n-1}$ 次多项式. 令 $z_i$ 为 $Z_n(z)$的零点，则它可表为：

$$Z_n(z)=s\prod_{i=1}^{4^{n-1}}(z-z_i). \tag{49.7}$$

因而(49.6)式为：

$$s\prod_{i=1}^{4^{n-1}}(z-z_i)=\left[s\prod_{i=1}^{4^{n-2}}(z'-z'_i)\right](2z+s-2)^{2\times 4^{n-2}}, \tag{49.8}$$

这里 $z'_i$ 代表 $Z_{n-1}(z)$的零点. 利用(49.5)，方程(49.8)可重写成：

$$\prod_{i=1}^{4^{n-2}}(z-z_i)=\prod_{i=1}^{4^{n-2}}[(z^2+s-1)^2-z'_i(2z+s-2)^2]. \tag{49.9}$$

右边方括号中每个因子为四次多项式：

$$p_i(z)=(z^2+s-1)^2-z'_i(2z+s-2)^2. \tag{49.10}$$

显然，$p_i(z)$的零点与在映射 $f$ 下的原象 $z'_i$ 等价：

$$p_i(z)=0\Leftrightarrow z'_i=f(z). \tag{49.11}$$

所以，$p_i(z)$的四个零点正好是在映射 $f$ 下 $z'_i$ 的四个原象. 这个性质使得可通过求出 $Z_{n-1}(z)$的 $4^{n-2}$ 个零点 $z'_i$ 的原象来获得 $Z_n(z)$的 $4^{n-1}$ 个零点 $z_i$. 因此，可从 $Z_1(z)=s(z+s-1)$的唯一零点 $z=1-s$ 开始，一步一步地求出 $Z_n(z)$的零点. 当 $n\to\infty$ 时，这些原象

在复 $z$ 平面上形成变换 $f$ 的朱莉亚集.

配分函数 $Z_n(z)$ 的零点集的有物理意义的区域是在正实轴上. 如果 $n$ 有限，在正实轴上不存在集合中的点. 当 $n$ 增加时，集合中有些点朝正实轴移动. 仅当 $n\to\infty$ 时，便有些点达到物理上有意义的区域.

(2) 热力学形式：仿以前，在考虑概率测度情况下，配分函数写为：

$$\Gamma(q,\ \tau)=\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i^q}{l_i^\tau}. \tag{49.12}$$

$l_i$ 为第 $i$ 块的线度，$p_i$ 是它的概率，在本问题中把概率取为在每块上都是相等的(均匀的). 函数 $\tau(q)$ 可用下式确定：

$$\Gamma(q,\ \tau(q))=1. \tag{49.13}$$

只要 $\tau(q)$ 一经确定，广义维数 $D_q$ 和指数 $\alpha(q)$ 便可确定：

$$D_q=\frac{\tau(q)}{q-1}, \tag{49.14}$$

$$\alpha(q)=\frac{d\tau(q)}{dq}. \tag{49.15}$$

借助热力学中的勒让德(A. M. Legendre)变换，便可给出奇异谱 $f(\alpha)$：

$$f(\alpha)=q\alpha(q)-\tau(q). \tag{49.16}$$

这些式子都是前面曾推导过的.

现定义第 $n$ 阶的配分函数：

$$\Gamma_n(q,\ \tau(q))=\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i^q(n)}{l_i^\tau(n)}. \tag{49.17}$$

其中 $N=a^n$，$n$ 为整数，$\tau(q)$ 可通过下列方程来确定：

$$\frac{\Gamma_n(q,\ \tau(q))}{\Gamma_{n-1}(q,\ \tau(q))}=1, \tag{49.18}$$

即

$$\frac{\sum_{i=1}^{a^n}\left[\frac{p_i^q(n)}{l_i^\tau(n)}\right]}{\sum_{i=1}^{a^{n-1}}\left[\frac{p_i^q(n-1)}{l_i^\tau(n-1)}\right]}=1. \tag{49.19}$$

这里已假定第 $n$ 级与第 $n-1$ 级具有相同的 $\tau(q)$. 由于 $p_i$ 是常数，故可明显地算出 $q(\tau)$，而不是 $\tau(q)$：

$$q(\tau)=\frac{\ln\left[\dfrac{\sum_i l_i^{-\tau}(n-1)}{\sum_i l_i^{-\tau}(n)}\right]}{-\ln\left[\dfrac{p(n-1)}{p(n)}\right]}, \tag{49.20}$$

$$\begin{aligned}\alpha(q(\tau))&=\frac{\ln\left[\dfrac{p(n-1)}{p(n)}\right]}{\dfrac{\sum_i l_i^{-\tau}(n-1)\ln l_i(n-1)}{\sum_i l_i^{-\tau}(n-1)}-\dfrac{\sum_i l_i^{-\tau}(n)\ln l_i(n)}{\sum_i l_i^{-\tau}(n)}}\\&=\frac{\langle\ln p(n-1)\rangle-\langle\ln p(n)\rangle}{\langle\ln l(n-1)\rangle-\langle\ln l(n)\rangle}.\end{aligned} \tag{49.21}$$

这里平均$\langle A(n)\rangle$是指 $\dfrac{\sum_i A(n)l_i^{-\tau}(n)}{\sum_i l_i^{-\tau}(n)}$. 等概率意味着：

$$p(n)=(I\alpha^n)^{-1}. \tag{49.22}$$

这里 $I$ 是整数，它与不稳定不动点的个数有关. 将(49.22)式代入(49.21)式，便得方程：

$$\alpha(q)=\frac{\ln\alpha}{\langle\ln l(n-1)\rangle-\langle\ln l(n)\rangle}. \tag{49.23}$$

方程(49.16)相应地改为：

$$f(\alpha)=q(\alpha)\alpha(q(\tau))-\tau. \tag{49.24}$$

而方程(49.14)则变为：

$$D_q=\frac{\tau}{[q(\tau)-1]}. \tag{49.25}$$

方程(49.23)～(49.25)将用来计算 $f(\alpha)$和 $D_q$.

由这些方程求解的关键，是求出 $l_i$. 然而，对一个朱莉亚集，集合中的点是无序的，难于直接求 $l_i$. 因而，这里采用了导数方法.

导数方法如下：考虑一个在复平面上定义的映射 $f$，将集合分为 $N$ 个子集，每个子集只含一个点，用 $l(z_i)$表示第 $i$ 个子集的线性大小，即 $l(z_i)$是含点 $z_i$ 的小块的线性大小. 类似地，$l(z_{i-1})$是对

应 $z_{i-1}$ 的长度，这里 $z_{i-1}$ 是 $z_i$ 的反向迭代，即 $z_{i-1}=f(z_i)$. 定义一个标度函数：

$$\sigma(z_i)=\frac{l(z_i)}{l(z_{i-1})}. \tag{49.26}$$

它可以近似地表示为：

$$\sigma(z_i)=\frac{1}{f'(z_i)}. \tag{49.27}$$

因为

$$l(z_i)=|f'(z_i)|^{-1}\,l(z_{i-1}), \tag{49.28}$$

连续地往回迭代，便得到

$$\begin{aligned} l(z_i)&=|f'(z_i)|^{-1}|f'(z_{i-1})|^{-1}\cdots|f'(z_0)|^{-1}l_0\\ &=|f'(z_i)|^{-1}|f'(f(z_i))|^{-1}\\ &\quad\cdot|f'(f^2(z_i))|^{-2}\cdots\cdots|f'(f^n(z_i))|^{-1}l_0. \end{aligned} \tag{49.29}$$

这里 $z_0$ 是 $z_i$ 的不动点，$z_0=f^n(z_i)$，$l_0$ 数量级为 1. 因而

$$l_i=|f'(z_i)f'(f(z_i))\cdots f'(z_0)|^{-1}, \tag{49.30}$$

有了方程(49.30)以及前面的(49.23)～(49.25)，便可来求 $f(\alpha)$ 和 $D_q$.

(3) 奇异谱和广义维数：由于方程(49.5)是具有四次幂的复有理映射，它有四个不动点，这些不动点由下式决定：

$$z^*=\left(\frac{z^{*2}+s-1}{2z^*+s-2}\right)^2. \tag{49.31}$$

其中有一个平庸不动点 $z^*=1$. 去掉它后，便可由(49.31)式得出一个三次方程：

$$z^3-3z^2+(3-2s)z-(s-1)^2=0. \tag{49.32}$$

可以证明，当

$$\frac{s^4}{4}-\frac{8s^3}{27}<0 \quad \left(\text{即 } 0<s<s_0,\ s_0=\frac{32}{27}\right) \tag{49.33}$$

时，方程(49.32)有三个实根，它们对应两个不稳定不动点和一个稳定不动点. 如果

$$\frac{s^4}{4}-\frac{8s^3}{27}>0, \quad (\text{即 } s>s_0 \text{ 或 } s<0) \tag{49.34}$$

则在实轴上只存在一个不动点，其余两个为复共轭不动点. 在上两种情况下所得 $f(\alpha)$ 及 $D_q$ 非常不同. 这里列出由数值结果得出的几条曲线(见图 49-1(i)、(ii)). 它们是对 $s=3.5, 4, 4.5, 5$ 和 $n=4$ 求出的.

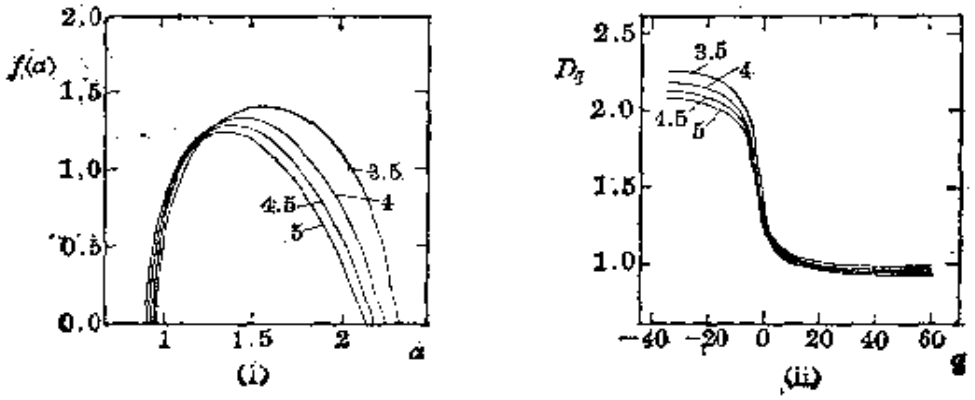



图 49-1

# 第 7 章

# 分 形 生 长

本章扼要介绍生长模型的基本概念、分形生长的实验现象、分形生长的标度不变性，同时指出分形生长的本质的物理问题. 由于分形生长已经成为分形领域的一个重要分支，并已逐渐成为一个独立的研究领域，本章的介绍就不可能是完整的.

## §50 生长模型的基本概念

"生长"意指一个对象(集团，聚集)随时间增大. 自然界中，生长现象比比皆是. 在实验室里，有关生物的、医学的、物理学的、化学的生长现象，也屡见不鲜. 生长模型就是用来模拟生长过程的特征的模型. 由于生长过程非常复杂，任何生长模型都不能全面地概括所有实际生长过程的因素，只能抓住其中某些可能是最本质的东西. 迄今，生长模型多为计算机模型的结果，很少有解析的严格的数学结果.

最简单的生长模型总可以想象为有一个种粒子，然后逐步地按一定规则增加粒子，使之逐步连接成为包含更多粒子的集团或聚集.

生长模型就其模拟的物理现象来说，可分为两大类：一类是纯粹局域的模型，它只跟系统直接的环境情况有关，换句话说，当一个新粒子加到位置 $\alpha$ 上去时，它只跟它的最近邻或次近邻是否被占据有关，这类模型称为局域模型. 另一类是非局域模型，即已形成的集团的整体情况都会对 $\alpha$ 处的生长概率产生影响. 然而，不论那类模型，它的最本质的特点，也是最具复杂性的是生长与历史有关，即最终的集团依赖于以前的集团位形，这意味着某个给定时

间的位形以一种复杂的方式与以前的位形相联系，因而它是一种非马尔科夫过程．这样的过程不可能像平衡态那样简单地写出配分函数或生成函数．

生长模型的精确定义应由生长法则来规定．即使最终产物在几何形状上完全相同，但若两个生长的法则不同，也应把它们视为两个不同的生长模型．

生长是随时间演化的，因此在模型中要明确地规定时间．设在 $t=0$ 时，有一个给定的初始位形，经时间间隔 $\Delta t$ 以后第一次应用生长规则，然后又经过 $\Delta t$ 时间后再次应用生长法则，如此重复．这里已把时间分成等长的间隔，这样能与计算机模拟对应起来，同时也是定义生长模型的实际途径．然而，为了描述自然界中的实际情况，也可考虑变化的时间间隔，最终可令 $\Delta t\to 0$，而变成一个连续时间，这样，相应的生长规则也要作相应的改进．

现在谈的都是几何生长模型，这意味着将不考虑能量(温度)因素的物理机制．几何生长模型是纯粹无规的动力机制，这种机制依赖于集团的几何特征．例如，表面生长点等．

几何生长模型就其生长方式来说，也可分为两大类：一类称为聚集模型，在此模型中考虑许多运动的粒子或集团，当它们相接触时便粘接成一个大集团；另一类称为凝胶模型，即有许多生长集团，它们交互连接成一个网络．不过一种更实际的分类法为．将其分为仅含一个对象生长和多个集团生长，在这种分类法下来观察它们的不同性质和计算不同的量．

对只有一个集团生长的情况，存在精确的标度行为，这种标度行为只有当生长步数达到无穷大时才出现，其标度用临界指数表示．分形维数是最重要的一个临界指数．这种情况完全类似于在自回避行走问题中，当步数 $N\to\infty$ 时的临界现象．这种模型的典型例子有扩散置限聚集(DLA)和介电击穿模型(DBM)等．

对多个集团生长情况，其中每个各自独立地按前一种模型生长．然而，存在着集团溶合为一体的可能性．这种几个集团凝聚

在一起而变成一个更大集团的现象，其本身就是一个生长过程.这种情况用集团大小分布函数 $n_s$ 来描述，它指的是在每个单位体积中平均有多少个大小为 $s$ 的集团. 可能出现下列情况：在某个给定的时间 $t_g$，由凝聚机制产生一个无穷大集团，这类似于渗流模型中的临界现象. 对无穷系统但在有限时间内，这类模型的标度行为将会是很精确的，它的集团大小分布函数的标度行为可用两个指数来描述，一是初始无穷集团的分形维数，另一是当趋近临界时间 $t_g$ 时，特征长度如何改变.

## §51 生长模型与静模型

为更正确地理解生长模型，这里举例将其与静模型作些对比.

首先，考虑最简单的生长模型——爱登(M. Eden)模型. 这是一个平庸的紧致生长模型，不呈现分形特征，即它的分形维数等于欧氏维数.

在该模型中，每个已生成集团的最近邻格点有相等概率在下一步成为生长集团的一个成员. 现用时间顺序来标志它的生长过程. 设在一个 $2\times2$ 方块内进行生长，每个数码表示生长的先后次序(历史). 在 $t=0$ 时，先放置一个种子在一个格点上，它的权重为 1. 下一步($t=1$)，可在该种子的两个最近邻中的任一个进行生长，每个的概率就为 $\frac{1}{2}$，故可产生两种位形. 再一步($t=2$)，每种位形的最近邻又是新的生长点，共有四种可能位形，故每种概率为 $\frac{1}{4}$. 继续到 $t=3$，最终 $2\times2$ 方块中格点全部被填满. 上述过程可用图 51-1 来表示. 图中四种位形有不同的历史过程，它们视为不等同的. 图中从历史上看 $A$，$B$ 联系较紧密些，而 $A$，$C$ 联系较松散些. 所有这些，若从静模型的观点看，即从最终产生的结果看，是没有区别的. 不仅如此，图 51-2(i)和(ii)从静态看是完全

等同的，但从生长模型看(最近邻生长模型)，图(ii)是根本不许可的．图中数码表示生长时间的先后次序．

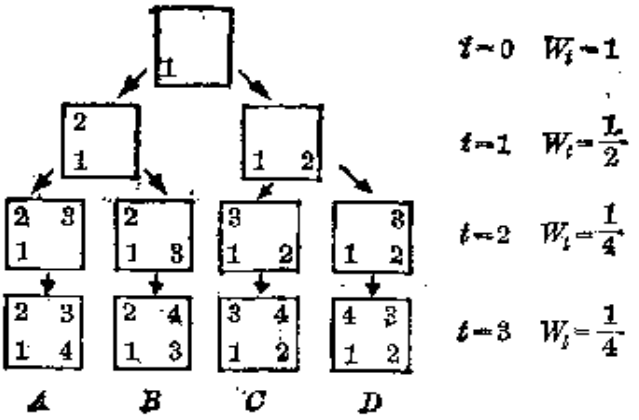



图 51-1

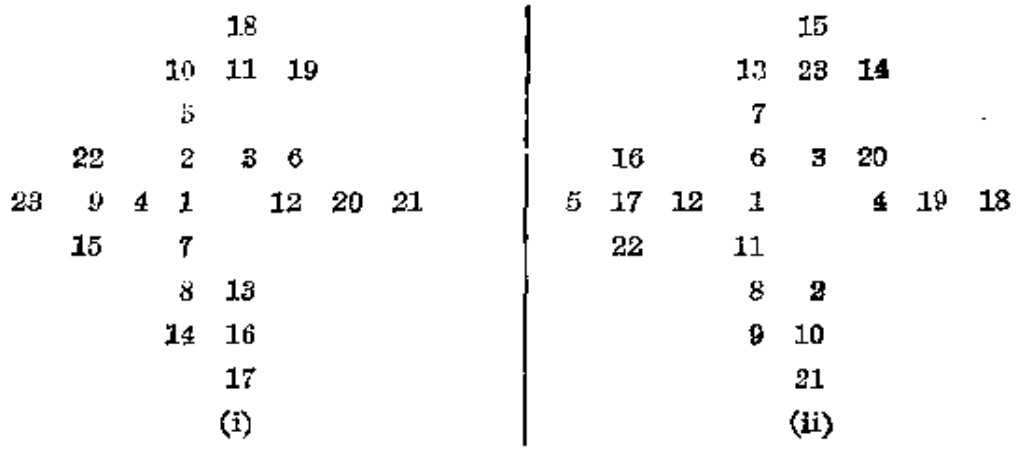
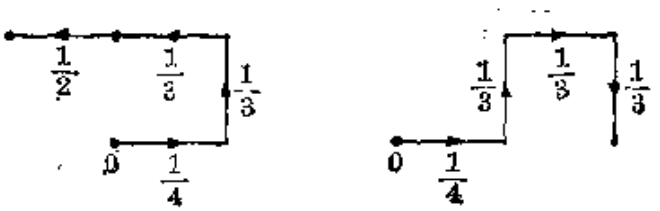



图 51-2

其次，看动力生长行走模型：曾谈到自回避行走(SAW)是一种受长程约束的行走，即行走者不许与自己的轨迹相交(排除体积效应)．此外，所有行走的 $N$ 步都具有相同的统计权重．这便是作为静模型的 SAW 模型．动力生长行走模型(KGW)是这样规定的：在晶格上的行走者每次选择下一步的格点都只考虑尚未到达过的格点，这样就能自动地考虑排除体积效应，倘若行走者所有最近邻均被占，则生长行走将停止．第 1 章中曾称此模型为真实自回避行走模型．

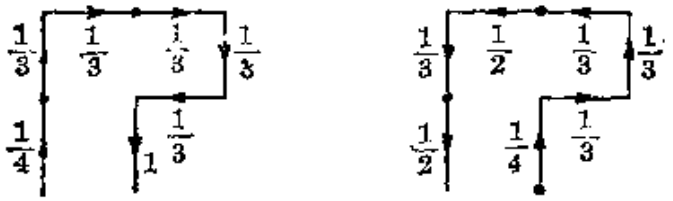
尽管这两种行走模型可能构造出相同的位形，但两个模

型的统计权重是绝对不相同的，例如，$N=4$步的SAW，可存在100种可能位形，所以每种权重为$\frac{1}{100}$. 而KGW则不同，图51-3(i)、(ii)的权重分别为$\frac{1}{72}$和$\frac{1}{108}$. KGW还具有不可逆性，即假如将行走方向逆转过来，则可发现正、逆方向行走的权重不同，这也与静的SAW不同. 图51-4(i)、(ii)给出一个这方面的明显事例.




(i) $w=\frac{1}{72}$　　(ii) $w=\frac{1}{108}$

图 51-3




(i) $w=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^5$　　(ii) $w=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2$

图 51-4

## §52 生长模型的标度行为

生长模型的最显著特征，是大多数生长集团具有标度不变性，即形成分形，只有少数(例如，前面提到的Eden模型)不是分形，我们假定今后只研究分形生长.

首先观察单一集团生长情况，其标度行为用临界指数——分形维数来描述. 计算和测量分形维数所依据的最基本公式是

$M_L \propto L^{d_f}$，这是质量-长度标度．但用它来直接计算 $d_f$ 有时并不方便，因而发展了用关联函数来求 $d_f$ 的办法，只要求得了关联函数 $c(r) \propto r^{d_f-d}$，取其对数，便可在对数-对数图上确定斜率 $d_f-d$，从而确定 $d_f$．这一方法的理论依据曾在第 1 章谈过．另一种方法是利用下式：

$$d_{eff}(N)=\frac{\ln b}{\ln\left(\frac{R_{bN}}{R_N}\right)} \tag{52.1}$$

确定有效分形维数 $d_{eff}$，式中 $b$ 为重标因子，$R_N$ 是 $N$ 个生长格点集团的特征长度，这个长度叫回转半径：

$$R_N=\frac{1}{N(N-1)}\left[\sum_{i<j}(r_i-r_j)^2\right]^{1/2}. \tag{52.2}$$

$i$、$j$ 遍及集团中所有格点，$r_i$ 是从原点到集团中第 $i$ 个格点的位矢，$R_N$ 等效于从质心到格点距离均方根值．现将 $d_{eff}(N)$ 外推到非常大的 $N$，使用外推法(如，比例法)可以产生精确的结果．

其次考虑集团-集团聚集过程．系统中存在多个集团，因而需要研究这些集团的时间演化．为此，引入一个动力集团大小分布函数 $n_s(t)$，它代表在时间 $t$ 单位体积中含 $s$ 个粒子组成的集团的数目．

集团的统计学研究是描述集团系统的一个普遍方法．在平衡问题中，系统在临界点 $n_s$ 是以幂律衰减的．类似地，在许多接近或远离平衡的系统中，$n_s(t)$ 也展示出静的(作为 $s$ 的函数)和动力学的(作为 $t$ 的函数)标度性质．

在扩散置限集团-集团聚集中，集团沿布朗轨迹运动，在集团相互接触时便粘在一起．为了使集团大小分布函数与模拟过程中选取的元胞大小无关，现使用 $n_s(t)=\frac{N_s(t)}{L^d}$，这里 $N_s(t)$ 是在时刻 $t$，在元胞 $L^d$ 中 $s$ 集团的数目．

计算机模拟的结果可归纳出下列标度假设：

$$n_s(t) \propto s^{-\theta}f(s/t^z). \tag{52.3}$$

这里 $\theta$ 和 $z$ 是类似于临界指数的常数，$f(x)$是一个标度函数，它具有下列性质：

$$f(x)\ll 1, \qquad \text{如果 } x\gg 1; \tag{52.4}$$

$$f(x)\ \propto\ x^{\delta}, \qquad \text{如果 } x\ll 1. \tag{52.5}$$

这里 $\delta$ 通常称为交跨指数. 上面的表示式也可写成另一种形式，即把 $n_s(t)$明显地表示成 $s$ 和 $t$ 的标度(对小 $s/t^d$)：

$$n_s(t)\ \propto\ t^{-w}s^{-\tau}f(s/t^d). \tag{52.6}$$

这里切断函数 $f$ 在 $x\ll 1$ 时近似地为一常数，而在 $x\gg 1$ (趋于 $\infty$) 时则比任何幂律都更快地衰减. $t^{-w}$ 对应于集团-集团聚集的一种典型过程，即比 $s/t^d$ 小得多的集团，逐渐地在形成更大聚集的过程中消失. 特征集团大小由其分母 $t^d$ 决定.

由(52.6)式的标度假设及归一化条件

$$\rho=\sum_{s=1}^{\infty} sn_s(t)\ \propto\ \int_1^{\infty} sn_s(t)ds \tag{52.7}$$

可以用来获得指数 $w$、$z$ 及 $\tau$ 之间的标度关系. 将(52.6)代入(52.7)式，便有

$$\begin{aligned}\rho\ &\propto\ t^{-w}\int_1^{\infty} s^{1-\tau}f(s/t^d)ds\\ &\propto\ t^{-w+(2-\tau)z}\int_{t^{-z}}^{\infty} x^{1-\tau}f(x)dx.\end{aligned} \tag{52.8}$$

再由(52.8)式，便导出

$$w=(2-\tau)z. \tag{52.9}$$

原因是，当 $t\to\infty$ 时，$0<\rho<1$，后一积分在同一极限下为常数. 显然 $\tau<2$ 必须得到满足，因为在一个物理系统中必定 $w$、$z>0$.

当 $t\to\infty$ 时，集团的平均大小 $s(t)$发散，这可从下列推导看出，将 $s(t)$通过 $n_s(t)$表示，运用(52.6)及(52.9)式，可得：

$$s(t)=\frac{\sum_s s^2n_s(t)}{\sum_s sn_s(t)}\ \propto\ t^z. \tag{52.10}$$

这里已经令 $s=xt^z$，并将对 $s$ 的求和换成对 $x$ 的积分，因而得出(52.10)式.

类似地，系统中集团总数 $n(t)=\sum_s n_s(t)$ 有：

$$n(t)\propto\begin{cases}t^{-\sigma}, & \text{当 } \tau<1 \text{ 时;}\\ t^{-w}, & \text{当 } \tau>1 \text{ 时.}\end{cases} \tag{52.11}$$

因而粒子总数的标度便取决于 $\tau$ 值. 在模拟过程中，对二维系统，估计值为 $w=1.7$, $z\approx1.4$ 和 $\tau\approx0.7$.

当 $w\ll1$ 时，(52.3)式可写作：$n_s(t)\propto t^{-w\delta}s^{-\theta+\delta}$. 将其与(52.6)式对照，可得 $w=z\delta$ 和 $\theta-\delta=\tau$. 再由标度关系(52.9)式，可导出(52.3)式中：

$$\theta=2. \tag{52.12}$$

集团的迁移率与组成集团的粒子数(质量)有关. 特别是，可以假定一大小为 $s$ 的集团的扩散系数 $D_s$ 可表为：

$$D_s=cs^{\gamma}. \tag{52.13}$$

这里 $c$ 为常数，$\gamma$ 可用来考虑集团几何的影响. 由上式给出的与集团质量有关的迁移率，很强地影响着系统的动力学. 模拟结果显示出，当 $\gamma$ 小于某个临界值 $\gamma_c$ 时，集团大小分布函数的形式发生定性的变化. 当 $\gamma<\gamma_c$ 时，$n_s(t)$ 对小 $s$ 值不呈现幂律衰减. 由此可见，$n_s(t)$ 的行为作为 $\gamma$ 的函数不具有普适性. 对 $\gamma>0$，大集团移动较快，而许多较小集团不参与聚集过程. 对 $\gamma<0$，小集团具有较大的移动速度，所以它们消失(聚集)很快，形成大集团.

上述扩散置限集团-集团聚集的动力学结果，可综合于下：集团大小分布函数由下列形式的动力学标度描述

$$n_s(t)\ \propto\ s^{-2}f(s/t^{z}) \tag{52.14}$$

这里 $f(x)$ 与迁移率指数 $\gamma$ 有关. 特别是，对 $\gamma<\gamma_c$，有

$$f(x)\ \propto\ x^2g(x). \tag{52.15}$$

这里 $g(x)$ 在 $x\ll1$ 和 $x\gg1$ 时指数地减少，故

$$f(x)\propto\begin{cases}x^{b}, & \text{当 } x\ll1 \text{ 时;}\\ \ll1, & \text{当 } x\gg1 \text{ 时，对 } \gamma>\gamma_c.\end{cases} \tag{52.16}$$

式(52.14)的标度可通过画出 $s^2n_s(t)$ 对 $s/t^{z}$ 的图来检测，如果它正

确，则对于一个给定$\gamma$得到的结果应形成对应标度函数$f(\alpha)$的单一曲线．模拟结果的确定如此．

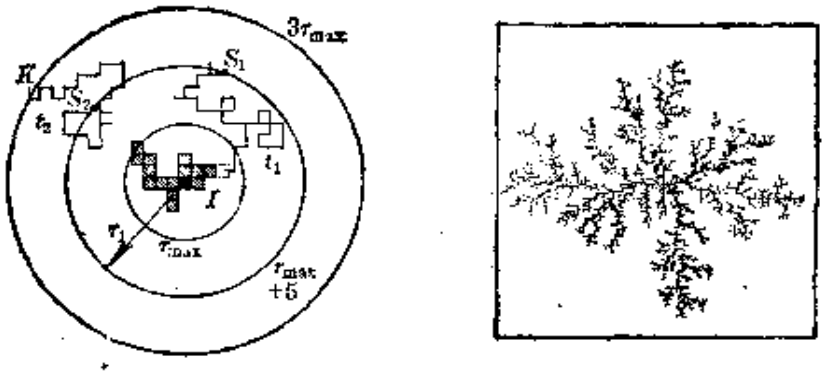
最后提一下，第1章提到的实空间重整化群方法也可用来测定生长分形的分形维数．

## §53 扩散置限聚集(DLA)模型

前面曾谈到过一种平庸的单一集团生长模型，本节介绍一种具有典型意义最引人注目且研究得最多的生长模型，它也是单一集团生长模型．

这一模型是1981年由韦廷(T. A. Witten)和桑戴(L. M. Sander)提出的．[60],[78] 由它刺激，推动了广泛一类非平衡生长和聚集过程的研究．这个模型提供了一个理解许多其他生长过程的基础，这些过程包括，在赫利-邵(Hele-Shaw)槽中流体-流体移动，电介击穿，电沉积过程，无规枝蔓状生长和疏松岩石溶解等，它也可能对地球物理学(例如，河流的形成，空洞形成)以及生物结构的生长研究等产生一定的影响．

扩散置限聚集模型的模拟规则是：在晶格原点上放置一个种粒子；然后，从距原点为$r_1$的任何地方放出第二个粒子，使其进行无规行走，直至它抵达种粒子最近邻位置便停止运动；继而，再从




(i) (ii)

图 53-1

离原点为 $r_1$ 的任何地方再放出第二个粒子，倘若放出的粒子无规地走到 $r_2>r_1$ 的位置，便将其放回原出发地．试验中，选取 $r_1$ 很大，使得生成的聚集位于半径为 $r_1$ 的球内．计算机模拟的图示及结果见图 53-1(i)、(ii)．由图看出，由无规行走(扩散)抵达的新粒子绝大多数聚集在集团的尖端附近，只有较少粒子进入到沟槽中，这样就使图形显示出各种大小尺度的沟槽和触须．产生这种结构的原因，从图形上看，是由于当一个扩散粒子抵达一个窄道进入沟槽之前，它几乎已经碰上了一根触须，因而无法进入沟槽内．这便形成"屏蔽效应"．

这一生长结构也反映出生长过程的下列特征：越是尖端处生长得越快，因而出现枝蔓向外延伸；相反，越是"平坦"处生长得越慢，甚至不生长，因而出现沟槽中的空隙疏松结构．

为了理解生长过程的这一复杂现象的起源，我们来考察一个无规行走过程：令 $u(\boldsymbol{x}, K)$ 代表行走者在第 $K$ 步抵达格点 $\boldsymbol{x}$ 处的概率，因而可写出：

$$u(\boldsymbol{x}, K+1)=\frac{1}{c}\sum_{l}u(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{l}, K). \tag{53.1}$$

这里 $\boldsymbol{l}$ 遍及 $\boldsymbol{x}$ 的所有 $c$ 个最近邻．显然，它是下面连续扩散方程的离散形式：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\eta\nabla^2 u. \tag{53.2}$$

这里 $\eta$ 是扩散常数．在行走者终止的周界点上以及集团内部，必须令(53.1)式右边的 $u=0$．一个周界点在第 $K+1$ 步得到一个粒子的概率为：

$$v(\boldsymbol{x}, K+1)=\frac{1}{c}\sum_{l}u(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{l}, K). \tag{53.3}$$

在光滑表面的极限下，若表面法向单位矢量为 $\hat{n}$，则法向生长速度可表示为下列形式：

$$v_n=\eta\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla u|_s. \tag{53.4}$$

在 DLA 问题中，离集团很远的场 $u$ 可提供一个稳定的总粒子流给集团表面，这是 $u$ 的另一边界条件．

现在来考察 $u$ 对时间 $t$ 的依赖关系. 由于远处有一个稳定流量，因而造成 $u$ 与时间的依赖关系只能含在(53.4)式中. 在模拟中，生长速率非常慢，以至可以令(53.2)式中 $\frac{\partial u}{\partial t}=0$. 因此我们实际上只面临着求解具有一定边界条件的拉普拉斯方程

$$\nabla^2 u=0. \tag{53.5}$$

的确，场 $u$ 仅在刚被占的 $x$ 处随时间 $t$ 有着急剧的变化，新成为聚集体成员的粒子只在晶格常数范围内能产生可以感受到的影响. 于是各处的场 $u$ 在一段时间内逐渐弛豫到一个新的稳定态值，在这段时间内，只有少量新生长出现，并且只有一个可忽略的部分出现在 $x$ 附近那些时间依赖性可以感受到的区域内. 当每个表面格点的生长率跟扩散弛豫时间相比可以忽略时，场 $u$ 弛豫的时间依赖性便可略去，这等于略去 $\frac{\partial u}{\partial t}$. 它可称为"绝热近似"，使得 $v$ 与 $u$ 依赖于集团，但与时间无关.

以上说明了 DLA 生长可以称作拉普拉斯生长的原因. 利用它，立即可将生长与静电学中不规则导体表面附近的电场分布联系起来. 在导体表面越尖端的地方，等势面越密，电场强度越大，生长的速率越大；而越平直的表面部分，等势面越疏，电场强度越小，生成的速率越小. 这正是我们在前面 §45 中曾谈到过的.

对模拟出的聚集结果进行测量和分析，发现一个新奇面貌：粒子位置之间的关联很像具有标度不变对象的粒子间的关联，也就是说，如用具有一定分辨率的放大镜去观察对象，该对象没有自然长度标尺. 这种对象的密度-密度关联函数为：

$$\langle \rho(r'+r)\rho(r')\rangle \propto r^{-A}=r^{d_f-d}. \tag{53.6}$$

模拟试验中测得：对 $d=2$ 维，$d_f\approx 1.7$；而对 $d=3$ 维，$d_f\approx 2.5$.

注意到，在爱登(Eden)模型中，生成集团没有标度不变性，这与 DLA 根本不同，实际上，由于爱登模型中不存在扩散，而DLA却存在扩散，因而在动力模型中分形特征的出现必定跟扩散有密

切关系.

在临界现象中，常要研究临界指数的普适性. 这是临界现象理论的一个基本问题. 本问题中也要讨论分形维数的普适性，试验发现分形维数与进行模拟的晶格结构无关，对局部的粒子粘附规则也不敏感. 测得的分形维数与静模型不同，因此属于一新的普适类.

新的普适类的出现，肯定与"屏蔽效应"有关. 这种屏蔽效应可以用一个参数控制的屏蔽势来模拟. 只要改变该参数，就可改变普适类. 曾有过多种屏蔽势方案，这里列举其中的一种，此方案建议一种幂律势，因而其中包含了长程效应. 生长规则是：周界格点的占据概率为 $p(\omega)=\dfrac{R(\omega)}{\sum\limits_{y} R(y)}$，这里

$$R(\omega)=\prod_{z}\exp\{-|x-z|^{-\lambda}\}. \tag{53.7}$$

对 $y$ 的求和遍及所有集团的周界格点，对 $z$ 的连乘遍及集团中所有粒子，$\lambda$ 是可调参数. 上述概率非常有利于远离集团的格点被占. 该方案断言，分形维数为：

$$d_f=\min(\lambda, d). \tag{53.8}$$

结果只要连续改变 $\lambda$，便可连续改变普适类(只要 $\lambda<d$). (53.8)式很好地被数值模拟确认.

不过，非常有趣的是，这种方案既没有考虑周界待占格点附近的详情，也没有考虑空间障碍的局域性，它只包含屏蔽的整体效应. 因此有点像平均场理论，现今似乎还无法肯定到底有多少物理内容从这样的理论中消失了. 围绕着 DLA 聚集的理论模拟作过大量工作，在此我们不可能更多地提及.

## §54 介电击穿模型(DBM)

气体、液体和固体绝缘体中，常出现介电击穿现象. 例如，闪

电、表面放电等. 分支放电图形的整体性质呈现分形结构. 图54-1是一个放电的照片. 如果图中的结构对应一种分形结构，那么在一个半径为$r$的圆圈内所有分支的总长度(或分支上的格点总数)跟半径$r$的关系应为一非整数的幂律关系



图 54-1

$$N(r) \propto r^{d_f} \qquad (54.1)$$

分支的厚度看作是零维的，它不随对象的尺度而增加. 在一个给定距离$r$内(从原点开始)的分支数$n(r)$为:

$$n(r) \propto \frac{dN(r)}{dr} \propto r^{d_f-1}. \qquad (54.2)$$

所以，只要计算在不同距离内的分支数，便可确定$d_f$. 从照片上分析，可得出$d_f \approx 1.7$. 不过，由于图形中分支为有限大小，所得结果不可能是精确的.

为了解这种放电现象，引入了一个随机模型，即介电击穿模型，[79] 并在计算机上加以模拟. 模型的规则曾在§46描述过，此处不重复.

利用§46中$\eta=1$模型，用五个约5000个点的大样品模拟出的结果，得出$d_f \approx 1.75 \pm 0.02$(对$d=2$)，模拟的图形见图54-2所示. 值得注意的是，由本模型得出的$d_f$与DLA模型得出的非常一致. 因而，自然地将两者联系起来，它们属于同一普适类. DLA和DBM同为两个著名的生长模型，特别是由于它们都可映射为具有移动边界的拉普拉斯问题，因而常常密不可分地同时进行研究.

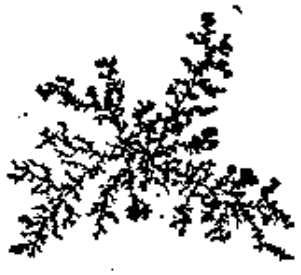


图 54-2

## §55 DLA 聚集的实验实现

本节扼要地介绍几个有关 DLA 聚集的实验实现.[55],[76],[177]它们也可看作是 DLA 模型和计算机模拟的实验背景.

(1) 铜在电解质阴极上的聚集: 在 $Cu(SO_4)_2$ 和 $NaSO_4$ 溶液中，铜沉积在直径为 12.5 $\mu$m 的导线上，铜聚集在导线上的结构在显微镜下观察呈海绵状，聚集的密度随大小增加而减少，产生一个分形维数为 $d_f=2.43\pm0.03$ 的生长结构. 这一结果非常好地与数值模拟得到的 DLA 的分形维数 $d_f=2.51\pm0.06$ 相符. 在沉积实验中，电压必须很小，以使整个过程实际上被扩散控制. 在另外的实验，如从 $ZnSO_2$ 溶液中沉积出 Zn，甚至发现一个临界电压 $V_c$，低于电压 $V_c$，电沉积具有有效分形维数 $d_f=1.66\pm0.03$，与 DLA 模拟结果($d=2$)很相符. 而电压高于 $V_c$，有效维数随着电压增加而增加.

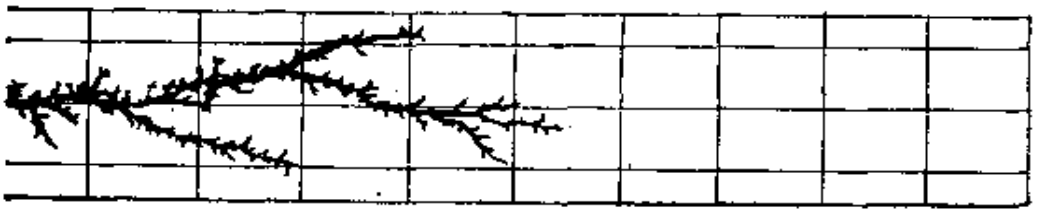


图 55-1

(2) 流体力学中的赫利-邵盒实验: 在两块相距为 $b$ 的平行板做成的盒子内，将一种低粘滞性的流体以压强 $p$ 压入具有高粘滞性的流体内，如果液体间的界面张力可忽略，则低粘滞性的流体穿透高粘滞性流体形成漂亮的分支指状物，见图 55-1. 形成的指状物与 DLA 之间的等价性可通过考虑 Darcy 定律来确定: 流体的穿透速度 $v$ 由下式给出

$$v \propto \nabla\Phi. \tag{55.1}$$

这里，势 $\Phi$ 由下列表示式给出

$$\Phi = -\frac{b^2}{\mu} p, \tag{55.2}$$

其中 $\mu$ 为切粘滞性. 对不可压缩的流体(即 div $v=0$), 势 $\Phi$ 遵守拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \Phi = 0. \tag{55.3}$$

两种流体的粘滞性差别很大, 可近似地认为在低粘滞性流体内势为常数 $\Phi_0$, 出口处的势 $\Phi_1 > \Phi_0$, 容器壁的边界条件为 $\nabla_n \Phi = 0$, 这些确定了边界条件. 在这些边界条件下, 就可完全确定(55.3)的解. 现在若把 $\frac{\Phi - \Phi_0}{\Phi_1 - \Phi_0}$ 看作找到一个扩散粒子的概率 $\rho$, 粒子从通道口放出, 流体界面相当于粒子聚集的面, 这样立即将两个问题等同起来. 实验中测得的指状物的分形维数与 DLA 计算机模拟得到的符合得较好, 但并不完全一致, 因为 DLA 模拟用的是一个圆形粒子源, 而在赫利-邵盒实验中粒子仅从一端进入.

(3) 无规枝状生长: 在薄膜沉积、高分子薄膜等实验中, 有时可观察到类似于二维 DLA 集团的结构. 这是一种无规枝状结构. 这样的系统都十分复杂, 在绝大多数情况下都缺乏对它们的生长过程的详细了解, 也未曾试图测量它们的分形维数或其他什么量. 曾对溅射沉积的 $NbGe_2$ 薄膜和磷脂单层测量过它们的分形维数, 它们分别是 $d_f \approx 1.69 \pm 0.05$ 及 $d_f \approx 1.5$. 例如, 图 55-2 是典型枝状生长的一个图形, 它们是雪片生长花样.



图 55-2

(4) 生物系统中也呈现分形几何特征. 熟悉的例子有珊瑚、肺脏、脑表面、神经系统、树根等. 这些系统中, 有些生长过程也可

能是 DLA 聚集.

生物系统的生长是极其复杂的现象. 当应用物理、化学机制来解释生物生长过程时，必须非常小心. 其实，未必是各个生物系统的结构上的全部复杂细节都起决定作用的，因此，有理由去探索对活生生的事物生长的简单的随机模型.

## § 56 DLA 生长的理论处理

DLA 是一种远离平衡的现象，迄今不存在任何从第一原理出发的标准理论，本节要讨论的一些理论都是极其粗糙的，是基于依赖特殊理论模型的各种假设.[5] 最困难的问题是用适当方式来处理 DLA 中的空间涨落问题. 通常对诸如 DLA 的密度分布，进来粒子的穿透长度，聚集的包络等这些性质，仅假设某种类型的平均行为.

对 DLA，现有两种主要的平均场方法. 第一种，将集团的自由能作为粒子数 $N$ 及其线度大小的函数，分形维数则由自由能极小条件求得. 显然，对一个远离平衡的系统，自由能的结构及其最小化并不是一个好的基本原理，然而按这种想法曾得出分形维数的一个简单表示式：

$$d_f=\frac{d^2+1}{d+1}. \tag{56.1}$$

由它得出令人惊讶的结果，它竟跟模拟结果非常接近.

另一种方法，通过屏蔽或穿透长度 $\xi$（它是一个进来的粒子能够进入集团表面层的平均深度）来计算 DLA 集团的生长率. 假设粒子沿一个维数为 $D_w$ 的轨道运动（分形上的行走），在距原点为 $r$，宽度为 $dr$ 的一层内的粒子数表为：

$$\rho(r)dr=\frac{dn(r)}{dr}dr \propto r^{d_f-1}dr. \tag{56.2}$$

$n(r)$ 为半径为 $r$ 的球内的粒子数. 设有 $\Delta N \ll N$ 的粒子数加到集团上，使集团半径增加 $\Delta R$，因而

$$N+\Delta N \propto (R+\Delta R)^{d_f}. \tag{56.3}$$

由于增加了 $\Delta N$ 个粒子后，宽度为 $dr$ 的层内的粒子数也增加 $\delta\rho(r)$，故

$$N+\Delta N \propto \int_0^{R+\Delta R}[\rho(r)+\delta\rho(r)]dr. \tag{56.4}$$

利用(56.2)～(56.4)式，可得在 $r$—$r+dr$ 壳层附近单位间隔内粒子数的增量为：

$$\delta\rho(r) \propto r^{d_f-1}. \tag{56.5}$$

比例系数正比于 $\Delta N$.

其次，假设 $\rho(r)$的增量正比于粒子沉积前可能扩散的空区体积.

$$\delta\rho(r) \propto \xi^d(r). \quad (\xi\text{ 为穿透长度}) \tag{56.6}$$

现着手对 $\xi$ 作一估计. 可这样考虑：粒子碰到生长集团前的行走步数为 $N_w \propto \xi^{D_w}$，因而在"步群"表面的步数正比于 $N_{w,s} \propto \xi^{D_w-1}$；另一方面，集团中粒子的平均密度随 $r$ 呈 $\sigma(r) \propto r^{d_f-d}$ 增长. 实际沉积发生在当 $N_{w,s}\sigma(r) \approx 1$ 的时候，因此可推出

$$\xi(r) \propto r^{(d-d_f)/(D_w-1)}. \tag{56.7}$$

综合(56.5)～(56.7)式，最后得到

$$d_f = \frac{d^2+D_w-1}{d+D_w-1}. \tag{56.8}$$

利用此式估算出的 $d_f$ 较为合理.

本节虽然介绍了如何理解 DLA 集团的分形维数的两种理论处理，但它们并未解决分形结构形成的物理起源. 分形物理的一个根本任务，就是要解释为什么自然界会形成具有标度不变性的分形结构.

回顾前面讲过的知识，我们得知：DLA 和 DBM 两个模型显示了由拉普拉斯方程和随机场控制的简单生长过程，它们都能产生出具有非常复杂的无规分形花样. 这些花样给出了由于短程作用而导致的长程关联现象，这是与静态临界现象的共同之处. 因此，似乎可能期待着产生一个类似于重整化群的理论；但另一方

面，仔细的分析发现，DLA 分形生长中无上临界维数，这似乎又非常不同于临界现象．这些都预示着理论上的困难．80年代末期以来，曾提出过多种理论上的有益尝试，但似乎离真正从物理上解决这一问题仍有相当的距离．本书将不介绍这些理论．

最后，对 DLA 集团的结构作点说明．在粗糙的近似下，DLA 集团是看作各向同性的，然而，它是各向异性的，因此仅仅确定了 DLA 的分形维数并不能了解集团的详情．

为看清这一点，引入角关联函数 $c_R(\theta)$：

$$c_R(\theta)=\frac{1}{N}\sum_{\theta'}\rho_R(\theta+\theta')\rho_R(\theta'), \tag{56.9}$$

其中 $N$ 是聚集的粒子总数．如果在点$(R,\ \theta)$附近一个 $R\Delta\theta\,\Delta R$ 大小的盒子中有 $k$ 个粒子，则 $\rho_R(\theta)=k$；否则 $\rho_R(\theta)=0$．上式中求和对所有 $\theta'$ 角度进行．角度从 $\theta'=0$ 开始，每次增量为 $\Delta\theta'$，直加到 $\theta'=\pi$ 为止．按上式，$c_R(\theta)$描述距原点为 $R$，宽度为 $\Delta R$ 的一层内角度为 $\theta$ 的密度-密度关联函数，$(\theta R)$是层中两粒子的间距．

在非晶格上进行模拟所得结果，如用有限大小标度进行分析，

$$c_R(\theta)\ \propto\ \theta^{-\alpha_\perp}. \tag{56.10}$$

可得 $\alpha_\perp\approx0.41$，它跟通常径向关联函数

$$c(r)\ \propto\ r^{-\alpha_\parallel} \tag{56.11}$$

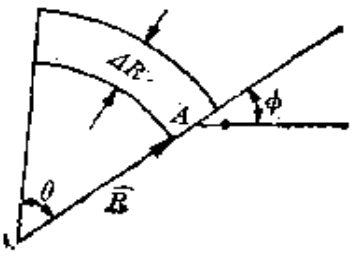


图 56-1

求得的 $\alpha_\parallel\approx0.29$（均对 $d=2$ 维）完全不同．这说明两个关联函数具有完全不同的行为．

假设密度-密度关联函数可写成：

$$c(r,\ \varphi)\approx\rho_0 r^{-\alpha_\parallel}\cos^2\varphi + \rho_1 r^{-\alpha_\perp}\sin^2\varphi. \tag{56.12}$$

$\rho_0$、$\rho_1$ 为常数，$\alpha_\parallel$ 描述沿径向的衰减，$\alpha_\perp$ 描述沿角度的衰减，角度的含义为图 56-1 所示．

借助于

$$N(a) \propto \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} c(r, \varphi) d\varphi$$
$$\propto \pi a^{2-\alpha_1}(\rho_0 + \rho_1 a^{\alpha_1 - \alpha_2}), \qquad (56.13)$$

其中 $N(a)$为在半径为 $a$ 的圆内的粒子数，可求出分形维数 $d_f$ 为：

$$d_f = \lim_{a\to\infty} \frac{\ln N(a)}{\ln a} = 2 - \alpha_1 + D_1(a) \approx 2 - \alpha_1, \qquad (56.14)$$

$D_1 = \ln \pi(\rho_0 + \rho_1 a^{\alpha_1 - \alpha_2})/\ln a$ 代表对标度的慢衰减关联. 上述结果说明：第一，DLA 不是各向同性自相似的，而是自仿射的，密度关联具有与方向有关的标度. 第二，分形维数由描述径向关联衰减的指数决定. 第三，由于存在修正项 $D_1$，$d_f$ 缓慢地收敛于它的渐近值.

## § 57 集团-集团聚集

在介质中，扩散移动的微观粒子聚集是单一集团粒子聚集的代表，它导致分形聚集结构.[51],[77] 也可能发生含多个粒子的聚集自身发生扩散，最后多个聚集结合在一起，形成一个更大的分形集团. 在许多情况下，两个粒子之间的相互作用力是短程的，但它们强到当相互接触时，足以使粒子不可逆地结合在一起.

在上述过程中，每个集团从它们的运动条件看都是等价的，即不存在种粒子. 这跟前面提到的有种粒子的 DLA 完全不同. 这种过程称为集团-集团聚集，是一个更加符合系统实际情况的聚集，而 DLA 则更多地被当作为计算机模型，它与实际系统中发生的情况相距较远.

正如本章开始曾指出的，对集团-集团聚集，不仅要研究聚集过程的几何特征，即非平庸标度行为(分形特征)，而且要研究其动力学方面，即集团大小分布的动力学标度. 这两方面已在前面进行过讨论.

两粒子间的短程相互作用势的形式，既决定静态性质，又决定集团-集团聚集的动力学. 一个具有很深极小值的势以及排斥势

可略去的情况，便产生扩散置限集团-集团聚集，一旦它们相互接触便牢牢地结合在一起，在此过程中的时间标尺取为两个扩散集团彼此接近所需的时间．另一种聚集为反应或化学置限集团-集团聚集，在此过程中排斥势阻止两个相互靠近的集团彼此结合在一起，然而，经多次接触后，它们最终可以不可逆地结合在一起，形成一个大集团．在此过程中的特征时间，是相邻集团之间形成键所需的时间．

如果吸引势并不足够深，则两个相互结合的集团可能发生重构或解体．在后一情况下，过程的不可逆特征便消失，因而出现可逆集团-集团聚集．集团-集团聚集的性质也受到集团运动的类型的影响，一个集团运动的轨迹可能是布朗型的，也可能是弹道型的．此外，集团也可能旋转．

集团-集团聚集的实验关键是粒子间有吸引作用，同时聚集又是可移动的，两粒子间形成的键应是较牢固的．金属粒子的胶质悬浮体就是符合这些要求的典型系统．



图 57-1

金胶质特别适宜于用来研究布朗集结现象，聚集过程既可通过快聚集条件使它成为扩散置限集团-集团聚集，也可通过慢聚集条件使它成为反应置限集团-集团聚集．它的主要优点是：新作成的悬浮体由高度均匀的球形粒子组成；粒子粘接是不可逆的；因为金粒子之间的金属键是出现在两个球的接触点之间，聚集率易于控制．金粒子的结构可通过发射电子显微技术来检测．图 57-1 显示一个实验图形，它是在化学置限条件下形成的金粒子聚集的电子显微照相．

## §58 集团-集团聚集的计算机模拟

通过计算机模拟可确定分形维数．[53] 计算机模拟的实现有赖

于待模拟的特殊过程，最广泛使用的模拟是基于下列假定：粒子用 $d$ 维线性长度为 $L$ 的超立方体元胞中的被占格点作代表，设最初有 $N_0=\rho L^d$ 个格点无规地填充到元胞中，$\rho\ll 1$ 为粒子密度，集团按布朗轨迹或弹道轨迹运动．如果在运动过程中两个或多个属于不同集团的粒子突然占据相邻格点，集团便以概率 $0\leqslant p_s\leqslant 1$ 合并成一个大集团，于是形成新的聚集．

(1) 在扩散置限集团-集团聚集中，假定集团在晶格上作无规行走(即布朗轨迹)，且令 $p_s=1$(表示只要集团相互接触，便会形成大集团)．设集团的迁移率依赖于组成集团的粒子数，特别是假定大小为 $s$ 的集团的扩散系数 $D_s$ 为：

$$D_s=cs^{-r}. \tag{58.1}$$

这里 $c$ 为常数，$r$ 可用来反映集团的几何效应，在不同的系统中要根据实际情况来取定．计算机模拟的图示见图 58-1，它们展现二维扩散置限集团-集团聚集模拟的四个阶段，图 58-2 显示出模拟得到的 5000 个格点集团．

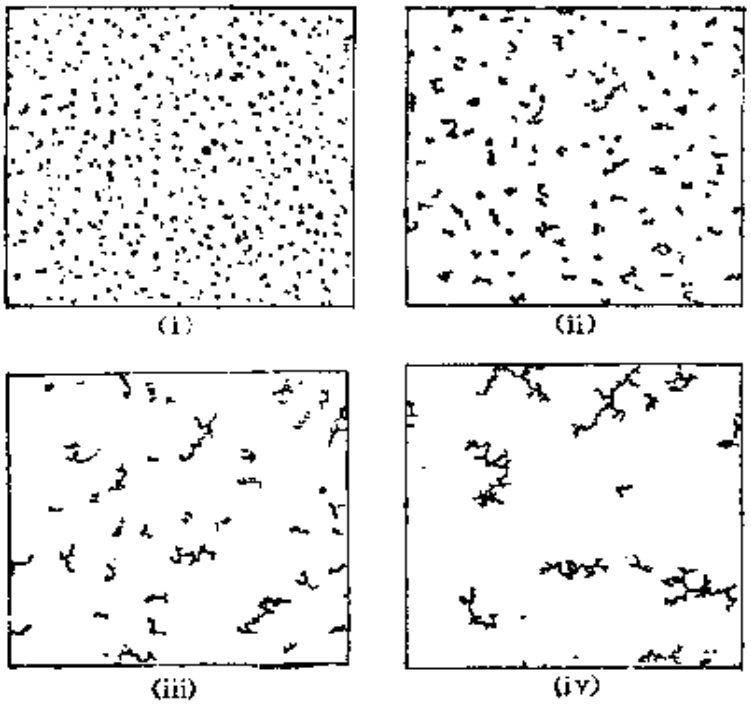



图 58-1

聚集的分形维数可通过计算密度-密度关联函数或回转半径的方法来确定. 表 58.1 列出在不同欧氏维数下用这两种方法所确定的分形维数.

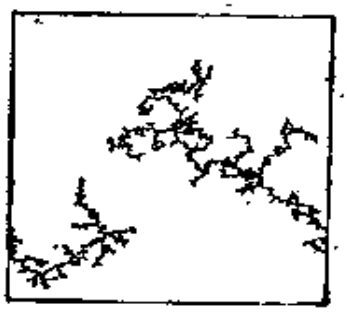


图 58-2




图 58-3

表 58.1

| $d$ | $d_f$(关联) | $d_f$(回转) |
|---|---|---|
| 2 | 1.44±0.03 | 1.43±0.02 |
| 3 | 1.78±0.06 | 1.75±0.01 |
| 4 | 2.12±0.10 | 2.03±0.04 |
| 5 | | 2.21±0.02 |
| 6 | | 2.38±0.02 |

(2) 在反应置限集团-集团聚集中用下列方法来模拟: 在一个超立方体元胞中无规地放置两个集团(例如, 各含 $N$ 个粒子); 移动其中一个(不许转动), 当它移到与另一集团产生键结合时便粘合为一个含 $2N$ 个粒子的新集团. 由于两个集团邻接的方式极多, 且各种位形的邻接方式均具有相等概率($p_s$ 很小), 因此可无规选其中一种位形作为新的联合集团. 图 58-3 给出集团($a$)、($b$)两种可能的邻接成键方式, 两个集团不许重叠. 产生反应置限集团-集团聚集可从 $2^n$ 个单体开始($n=1, 2, \cdots$)用逐级迭代方式形成. 模拟得到的分形维数 $d_f$ 值, 不论在 $d=2$, 还是在 $d=3$, 都比扩散置限集团-集团聚集的数值大, 这跟实验很好地符合. 图 58-4 给出计算机模拟的图示, 它是在非晶格上反应置限集团-集团聚集生成的集团的三个相互垂直的投影.



图 58上

对上述两类聚集，目前缺乏标准的理论方法去计算它的分形维数. 值得一提的是，现有的论证发现：集团-集团聚集存在着上临界维数 $d_c$，在反应置限聚集中 $d_c \approx 6.8$，在扩散置限聚集中 $d_c \approx 8.8$，这意味着当维数大于 $d_c$ 时，分形维数(临界指数)不发生变化.

## §59 平均场理论·斯莫洛可夫斯基方程

斯莫洛可夫斯基(M. von Smoluchowski)方程是理解聚集动力学的一条可能途径.[6],[76],[77] 它建立在下列基本假定的基础上：(1)质量为 $i$ 和 $j$ 的两个集团的反应率 $K_{ij}$ 对任何具有质量为 $i$ 和 $j$ 的一对集团是相同的；(2)具有给定质量的集团的浓度可用它的空间平均表示. 因而，所有量的空间依赖性均被忽略. 所以，它本质上是一种平均场理论. 此外，还假定系统是非常稀释的，以至两种类型集团的反应率不受其他集团存在的影响.

设 $i$-集团与 $j$-集团聚集成质量为 $(i+j)$-集团的聚集率正比于 $K_{ij}n_i(t)n_j(t)$，其中 $K_{ij}$ 为反应率，又称碰撞矩阵. 斯莫洛可夫斯基方程写为：

$$\frac{dn_s(t)}{dt} = \frac{1}{2}\sum_{i+j=s} K_{ij}n_i(t)n_j(t) - n_s(t)\sum_{j=1}^{\infty} K_{sj}n_j(t). \tag{59.1}$$

这是一个集团平衡方程. 方程右边第一项和第二项分别表示由于碰撞而引起的集团的增长和减少. 这里，聚集方程是一组无穷多

个耦合非线性方程，初始条件为 $n_s(t=0)$.

现在首要的问题是当集团为分形时如何找出碰撞矩阵. 斯莫洛可夫斯基曾证明，在三维空间，对扩散的球形集团 $K_{ij} \propto (i^{1/3}+j^{1/3})(i^{-1/3}+j^{-1/3})$，现改变它的形式，将其应用到描述扩散置限的集团-集团聚集问题上，

$$K_{ij} \propto (i^{1/d_f}+j^{1/d_f})^{d-2}(i^r+j^r). \tag{59.2}$$

系数 $K_{ij}$ 可这样来确定：将模拟试验中得到的质量 $i$ 和 $j$ 集团在单位时间内的碰撞数除以 $n_i(t)n_j(t)$.

在最重要的物理情况下，碰撞矩阵是它的变数的齐次函数：

$$K_{\lambda i,\lambda j}=\lambda^{2\omega}K_{ij}. \tag{59.3}$$

显然(59.2)满足此条件. 如果令

$$2\omega=\frac{d-2}{d_f}+r, \tag{59.4}$$

便有可能将 $\omega$ 与表征时间标度行为的动力学指数 $z$(见(52.10)式)联系起来. 为此，利用(52.10)式将方程(59.1)换成有关 $s(t)$ 的方程，并认为对 $s(t)$ 的增量的主要贡献是来自可比大小的集团、在此近似下，方程的求和约化为仅包含典型大小一半的两个集团的反应的单一项，因而

$$\frac{ds(t)}{dt} \propto K_{ss} \propto [s(t)]^{2\omega}. \tag{59.4}$$

由于 $s(t)\propto t^z$，便可得出：

$$z=\frac{1}{1-2\omega}. \tag{59.5}$$

注意到对布朗运动情况，$r=\frac{1}{d_f}$，因而在三维扩散置限集团-集团聚集情况下，可得 $z=1$，对 $d\geqslant 2$，(59.5)式与模拟结果及实验数据相符.

对反应置限集团-集团聚集情况，可假设：

$$K_{ij} \propto i^{2\omega}, \quad \text{当 } i\approx j \text{ 时;} \tag{59.6}$$

$$K_{ij} \propto ij^{2\omega-1}, \quad \text{当 } i\gg j \text{ 时.} \tag{59.7}$$

这样求解方程(59.1)的结果为：当 $\omega<\frac{1}{2}$，集团大小分布函数呈钟形状；当 $\omega=\frac{1}{2}$，$n_s(t)\propto s^{-\tau}\left(\tau=\frac{3}{2}\right)$；当 $\omega>\frac{1}{2}$，$n_s(t)\propto s^{-\tau}$ 但 $\tau=\frac{3+2\omega}{2}>2$. 这些结果定性地与模拟结果相符.

## §60 生长花样

前面各节的讨论都只集中考察生长聚集的分形特征(标度不变性)，而没有注意生长的花样. 实际上，在许多科学和技术领域中，由移动的不稳定界面形成的复杂花样是多种多样的. 产生复杂花样的根本原因，是生长界面的表面张力起了重要作用. 此外，涨落和驱动力也影响花样的形状.[53],[80]

迄今发现，存在两种主要生长花样：尖端分裂花样和枝蔓形花样，如图 60-1 和图 60-2. 图 60-1 中，界面的最前端-尖端是不稳定的，它将重复地产生尖端分裂；图 60-2 中，界面的尖端是稳定的，因而导致枝蔓形生长. 不稳定性产生没有明显对称性的无序结构；而对稳定的尖端，若对其加上微扰，它的稳定形状将很快地衰变，所得花样具有不同程度的对称性. 图 60-2 中显示三种常见的可能性. 在实际系统中，例如：赫利-邵盒实验中形成的粘滞指状花样属尖端分裂型，而雪片花样属枝蔓型.



图 60-1



图 60-2

曾经指出，扩散置限过程的界面在适当近似下，可用具有适当边界条件的拉普拉斯方程来确定. 然而，尽管拉普拉斯方程是线性的，但边界条件却往往是非线性的，因而只有很少情况下可以解

析地求解. 在大多数情况下不得不借助聚集模型来求解生长花样的形状. 在模拟过程中，一种用来考虑表面张力效应的最常采用的方法是在生长概率中引入局部表面曲率的影响，具体办法是在生长概率中引入表征局部表面曲率的参数，这样的概率应与方程的边界条件相适应. 这里不准备详细介绍有关这方面的知识，只列出一个图示(图 60-3)，它表示一个非晶格集团生长的各个阶段，其中使用了依赖局部表面曲率的生长概率.

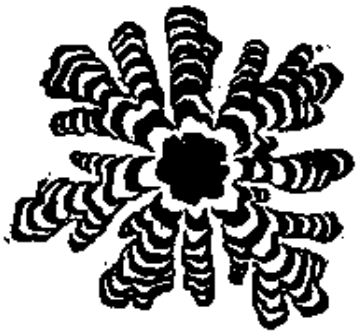


图 60-3

# 科学家中外译名对照表

| | |
|---|---|
| Bessel, F. W. | 贝塞尔 |
| Boltzmann, L. | 玻尔兹曼 |
| Brown, R. | 布朗 |
| Cantor, G. | 康托 |
| de Gennes, P. G. | 德让勒司 |
| Feigenbaum, M. J. | 费根鲍姆 |
| Fibonacci, L. | 菲波那契 |
| Fick, A. E. | 菲克 |
| Gefen, Y. | 格芬 |
| Glauber, R. J. | 格劳伯 |
| Hausdorff, F. | 豪斯多夫 |
| Hele | 赫利 |
| Henon | 黑隆 |
| Ising, E. | 伊辛 |
| Julia, G. | 朱莉亚 |
| Kadanoff, L. P. | 卡丹诺夫 |
| Kawasdki, K. | 川崎 |
| Koch, H. V. | 科赫 |
| Kronecker, L. | 克朗涅克 |
| Lagrange, J. L. | 拉格朗日 |
| Langevin, P. | 朗之万 |
| Lebesgue, H. L. | 勒贝格 |
| Legendre, A. M. | 勒让德 |
| Liouville, J. | 刘维尔 |
| Mandelbrot, B. B. | 门德尔布罗特 |
| Migdal, A. A. | 梅格达尔 |
| Onsager, L. | 昂萨格 |
| Potts, R. B. | 落茨 |
| Schrödinger, E. | 薛定谔 |
| Sierpinski, W. | 塞尔宾斯基 |
| Smoluchowski, M. von | 斯莫洛可夫斯基 |
| Wilson, K. G. | 威尔逊 |
| Witten, T. A. | 韦廷 |
| Арнольд, В. И | 阿尔诺特 |
| Марков, А. А. | 马尔科夫 |

# 参 考 文 献


[1] B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman, and company, New York, 1983.

[2] J. Feder, *Fractals*, Plenum Press, New York, 1988.

[3] Leo P Kadanoff, *Scaling, Universality and Operator Algebras*, C. Domb and M. S. Green, Phase Transitions and Critical Phenomena, Vol. 5a(1), Academic Press Inc(London) Ltd., 1976.

[4] Y. Gefen, B. B. Mandelbrot and A. Aharony *Critical Phenomena on Fractal Lattices*, Phys. Rev. Lett **45**(1980) 855.

[5] T. Vicsek, *Fractal Growth Phenomena*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. Singapore (1989).

[6] T. A. Witten and L. M. Sander, *Diffusion-limited Aggregation*, Phys. Rev. **B27**(1983)5686.

[7] D. Stauffer, *Scaling Theory of Percolation Cluster*, Phys. Rep. **54** (1979)**1**.

[8] A. Coniglio, *Cluster Structure near The Percolation Threshold*, J. Phys. **A**. **15**(1982) 3829.

[9] H. E. Stanley, P. J. Reynolds, S. Redner and F. Family, *Position-Space Renormalization Group For Models of Linear Polymers, Branched Polymers and Gels*, T. W. Burkhardt and J. M. J. Van Leeuwen, Real-Space Renromalization (**169**), Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1982.

[10] 伍法岳、杨展如，相变与临界现象，《物理学进展》, **1**(1980) 100, 314, 487, 511.

[11] Y. Gefen, A. Aharony and B. B. Mandelbrot, *Phase Transitions on Fractals: I. Quasi-linear Lattices*, J. Phys. **A16**(1983)1267.

[12] Y. Gefen, A. Aharony, Y. Shapir and B. B. Mandelbrot, *Phase Transitions on Fractals*: II. *Sierpinski gasket*, J. Phys. **A17** (1984) 435.

[13] Y. Gefen, A. Aharony and B B. Mandelbrot, *Phase Transitions on Fractals: III. Infinitely Ramified lattices*, J. Phys. **A17** (1984) 1277.

[14] R. F. S. Andrate and S. R. Salinas, *Transfer Matrix Solution of The Ising Model on The Koch Curve*, J. Phys. **A17** (1984) 1665.

[15] Bambi Hu, *Introduction to Real-Space Renormalization-Group Methods in Critical and Chaotic Phenomena*, Phys. Rep. **91** (1982) 233.

[16] Y. Qing and Z. R. YANG, *A Renormalization Group Approach to The Potts Model on The Koch Curve*, J. Phys. **A19** (1986) 3185.

[17] Z. R. YANG, *Solvable Ising Model on Sierpinski Carpets: The Partition Function*, Phys. Rev. **E49** (1994) 2457.

[18] Z. R. YANG, *Rigorous Spin-Spin Correlation Function of Ising Model on A Special Kind of Sierpinski Carpets, International Centre of Theoretical Physics* (预印本), 1993).

[19] A. A. Migdal, *Phase Transitions in Gauge and Spin-lattice Systems*, Sov. Phys. JETP **42** (1976) 743.

[20] Leo. P. Kadanoff, *Notes on Migdal's Recursion Formulas*, Annals of Physics, **100** (1976) 359.

[21] A. Aharony, Y. Gefen, and Y. kantor, *Magnetic Correlation on Fractals*, J. Stat. Phys. **36** (1981) 795.

[22] Y. Gefen, Y. Meir, B. B. Mandelbrot and A. Aharony, *Geometric Implementation of Hypercubic Lattice With Noninteger Dimensionality By Use of Low Lacunarity Fractal Lattices*, Phys. Rev. Lett. **50** (1983) 145.

[23] *M. Suzuki, Phase Transitions and Fractals*, Prog. of Theor. Phys. **69** (1983) 65.

[24] Lin Bin and Z. R. YANG, *A Suggested Lacunarity Expression For Sierpinski Carpets*, J. Phys. **A19** (1986) L49.

[25] Y. K. Wu and B. Hu, *Phase Transitions on Complex Sierpinski Carpets*, Phys. Rev. **A35** (1987) 1404.

[26] L. Hao and Z. R. YANG, *Lacunarity and Universality*, J. Phys. **A20** (1987) 1627.

[27] B. Lin, *Classification and Universal Properties of Sierpinski Carpets*,

J. Phys. **A20**(1987) L163.

[28] B. Hu, *Problem of Universality in Phase Transitions on Hierarchical lattices*, Phys. Rev. Lett. **55**(1985)2316.

[29] B. Hu, *Extended Universality and The Question of Spin on Hierarchical Lattices*, Phys. Rev. **B33**(1986) 6503.

[30] Z. R. YANG, *Family of Diamond-type Hierarchical Lattice*, Phys. Rev. **B38**(1988) 728.

[31] A. N. Berker and Leo. P. Kadanoff, *Ground-State Entropy and Algebraic Order At Low Temperatures*, J. Phys. **A13** (1980) L259.

[32] J. R. Banavar, G. S. Grest and D. Jasnow, *Ordering and Phase Transitions in Antiferromagnetic Potts Model*, Phys. Rev. Lett. **45**(1980)1424.

[33] G. S. Grest and J. R. Banavar, *Monte Carlo Study of The Antiferromagnetic Potts Model in Two Dimensions*, Phys. Rev. Lett. **46** (1986)1458.

[34] M. P. Nightingale and M. Schick, *Three-State Square Lattice Potts Antiferromagnet*, J. Phys. **A15**(1982)L39.

[35] Y. Qin and Z. R. YANG, *Diamond-type Hierarchical Lattices For The Potts Antiferromagnet*, Phys. Rev. **B43**(1991)8576.

[36] Y. Qin and Z. R. YANG, *Critical Behaviour of The Bond-diluted Potts Model on Sierpinski Carpets*, J. Phys. **A20**(1987)3983.

[37] P. C. Hohenberg and B. I. Halperin, *Theory of Dynamic Critical Phenomena*, Rev. Mod. Phys. **49**(1977)435.

[38] K. Kawasaki, *Kinetics of Ising Models*, C. Domb and M. S. Green, Phase Transitions and Critical Phenomena, Vol. 2(**443**), Academic Press Inc (London) Ltd., 1976.

[39] Shang-Keng Ma, *Modern Theory of Critical Phenomena*, W. A. Benjamin Inc., London, 1976.

[40] R. J. Glauber, *Time-Dependent Statistics of the Ising Model*, J. Math. Phys. **4**(1963)294.

[41] Y. Achiam, *The Critical Dynamics and The Real-Space Renormalization Group*, Physica **120A**(1983)279.

[42] Y. Achiam, *Critical Dynamics of The Kinetic Ising Model on The Fractal Koch Curves*, Phys. Rev. **B32**(1985) 1796.

[43] Y. Achiam, *Critical Dynamics of The Kinetic Ising Model on Fractal Geometries*, Phys. Rev. **B31** (1985) 4732.

[44] Y. Achiam, ***Critical Dynamics of The Kinetic Ising Model on Fractal Geometries, II. Sierpinski Carpets,*** Phys. Rev. **B33** (1986) 7762.

[45] J. Zhou and Z. R. **YANG, *Critical Dynamics of The Kinetic Ising Model on Regular Fractals,*** Phys. Rev. **B39** (1989) 9423.

[46] D. Kandel, *Analysis of A Dynamic Renormalization-group technique*, Phys. Rev. **B38** (1988) 486.

[47] C. L. Henley, *Critical Ising Dynamics on Percolation Clusters*, Phys. Rev. Lett. **54** (1985) 2030.

[48] Y. Gefen and A. Aharony, *Anomalous Diffusion on Percolation Clusters*, Phys. Rev. Lett. **50** (1983) 77.

[49] Y. Gefen, A. Aharony, B. B. Mandelbrot and S. Kirkpatrik, *Solvable Fractal Family, and Its Possible Relation to The Backbone At Percolation*, Phys. Rev. Lett **47** (1981) 1771.

[50] S. Alexandor and R. Orbach, *Density of States on Fractals: «Fractons»*, J. Physique Lett. **43** (1982) L625.

[51] R. Orbach, *Dynamics of Fractal Structure*, J. Stat. Phys. **36** (1984) 735.

[52] R. Rammal, *Harmonic Analysis In Fractal Space: Random Walk Statistics and Spectrum of The Schrödinger Equation*, Phys. Rep. **103** (1984) 151.

[53] R. Rammal and G. Toulouse, *Random Walks on Fractal Structures and Percolation Clusters*, J Physique Lett **44** (1983) L13.

[54] R. Rammal, *Nature of Eigenstate on Fractal Structures*, Phys. Rev. **B28** (1983) 4871.

[55] E. Domany, S. Alexandor, D. Bensimon and Leo. P. Kadanoff, *Solution to The Schrödinger Equation on Some Fractal Lattices*, Phys. Rev. **B28** (1983) 3110.

[56] She Chao Feng, and P. N. Sen, *Percolation on Elastic Networks: New Exponent and Threshold*, Phys. Rev. Lett. **52** (1984) 216.

[57] S. H. Liu, *Spectral Dimension of Elastic Sierpinski Gaskets*, Phys. Rev. **B30** (1984) 4045.

[58] H. G. E, Hentschel and I. Procaccia, *The Infinite number of Generalized Dimensions of Fractals and Strange Attractors*, Physica **8D** (1983) 435.

[59] T. C. Halsey, **M. H. Jensen**, Leo P. Kadanoff, I. Procaccia and B. I. Shraiman, ***Fractal Measures*** *and Their Singularities: The Characterization of Strange Sets*, Phys. Rev. **A33** (1986) 1141.

[60] M. H. Jensen, Per Bak and T. Bohr, *Complete Devil's Staircase, **Fractal** Dimension, and Universality of Mode-locking Structure in The Circle Map*, Phys. Rev. Lett. **50** (1983) 1637.

[61] D. Bensimon, M. H. Jensen and Leo P Kadanoff, *Renormalization–Group **Analysis** of The Global Structure of The Period–doubling Attractor*, Phys. Rev. **A33** (1986) 3622.

[62] J. A. Glazier, M. H. Jensen, A. Libchaber and J. Stavans, *Stucture of Arnold Tongues and The $f(\alpha)$ Spectum For Period–doubling: Experiment Results*, Phys. Rev. **A34** (1986) 1621.

[63] R. Badii and A. Politi, *Statistical Description of Chaotic Attractors: The Dimension Function*, J. Stat. Phys. **40** (1984) 725.

[64] M. J. Feigenbaum, Leo P. Kadanoff and S. J. Shenker, *Quasi-periodicity in Dissipative System: A Renormalization Group Analysis*, Physica **5D** (1982) 370.

[65] M. H. Jensen, Per Bak and T. Bohr, *Transition to Chaos By Interaction of Resonances in dissipitive System: I. Circle Maps*, Phys. Rev. **A30** (1984) 1960.

[66] A. Coniglio, *Multifractal Structure of Clusters and Growing Aggregates*, Physica **140A** (1986) 51.

[67] L. de Arcangelies, S. Redner and A. Coniglio, *Anomalous Voltages Distribution of Random Resistor Networks and A New Model For The Backbone at The Percolation threshold*, Phys. Rev. **B31** (1985) 4725.

[68] L. de Arcangelies, A. Coniglio and S. Redner, *Multifractal Structure of The Incipient Infinite Percolating Cluster*, Phys. Rev. **B36** (1987) 5631.

[69] P. Meakin, A. Coniglio and H. E. Stanley, *Scaling Properties For the Surfaces of Fractal and Nonfractal Objects: An Infinite*

*Hierarchy of Critical Exponents*, Phys. Rev. **A34** (1986) 3325.

[70] P. Meakin, *Scaling Properties For the Growth Probability Measure and Harmonic Measure of Fractal Structure*, Phys. Rev. **A35** (1987) 2234.

[71] C. Amitrano, A. Coniglio and F. di. Liberto, *Growth Probability Distribution In Kinetic Aggregation Processes*, Phys. Rev. Lett. **57** (1986) 1016.

[72] T. Tel and T. Vicsek, *Geometrical Multifractality of Growing Structures*, J. Phys. **A20** (1987) L835.

[73] M. J. Feigenbaum, M. H. Jensen and I. Procaccia, *Time Ordering and The Thermodynamics of Strange Sets: Theory and Experimental Tests*, Phys. Rev. Lett. **57** (1986) 1503.

[74] J. Lee and H. E. Stanley, *Phase Transition In The Multifractal Spectrum of Diffusion-limited Aggregation*, Phys. Rev. Lett. **61** (1988) 2945.

[75] B. Hu and Lin Bin, YANG-Lee Zeros, *Julia Sets and Their Singularity Spectra*, Phys. Rev. **A39** (1989) 4789.

[76] H. J. Hermann, *Geometrical Cluster Growth Models and Kinetic Gelation*, Phys. Rep. **136** (1986) 153.

[77] P. Meak, *The Growth of Fractal Aggregates and Their Fractal Measures*, C. Domb and J.L. Lebowitz, Phase Transitions and Critical Phenomena Vol 12 (335), Academic Press Inc (London) Ltd., 1988.

[78] T. A. Witten and L. M. Sander, *Diffusion-limited Aggregation, A Kinetic Critical Phenomenon*, Phys. Rev. Lett. **47** (1981) 1400.

[79] L. Niemeyer, L. Pietronero and H. J. Wiesmann, *Fractal Dimension of Dielectric Breakdown*, Phys. Rev. Lett. **52** (1984) 1033.

[80] J. Nittmann and H. E. Stanley, *Tip Splitting Without Inteifacia Tension and Dentritic Growth Patterns Arising From Moiecular Anisotropy*, Nature, **321** (1986) 663.