

学校的理想装备

电子图书·学校专集

校园网上的最佳资源

天体物理学概念



序 言

我写这本书的主要目的，在于以足够的深度对广泛的天体物理学课题向读者提供一般的介绍，从而使读者能对这门学科的全貌有一个定量的了解。本书概要地论述各种宇宙事件，但未加以详细的介绍，旨在提供一系列天体物理学的轮廓。鉴于天体物理学中的许多问题目前还不太明确，不少观点尚在不断变化之中，我认为采取这样一条途径是比较恰当的。

本书内容取自我在科内尔大学为物理学和天文学毕业班学生及初级研究生讲课的讲稿，这门教程决定了本书的写作深度。

为了方便那些精通物理学但对天文学名词却不熟悉的读者，书中添加了一个附录 A，它扼要地介绍了一些最基本的天文学概念。应该先阅读这个附录，然后再接触正文。

前面几章概括地叙述了现代天体物理学所涉及的范围，同时论述了有关天体的大小和质量的一些基本问题。然而读者马上就会发现，再深入下去需要有广泛的物理学基础。第四章至第七章就是以天文学所特有的现象为例，对有关这方面的知识由浅入深地作了介绍。第八章至第十章则对第一章中已初步提到过的那些内容作了进一步的阐述，指出我们怎样才能对有关恒星的结构和演化、宇宙气体动力学以及宇宙的大尺度特性等问题取得定量的深入的了解。最后一章讨论了宇宙中的生命。

通贯全书，我特别强调的是天体物理学的概念，这意味着象小行星、恒星、超新星或者类星体这样一些天体没有列出专门章节一一介绍，而是在讨论有关的物理原理时把它们穿插于全书之中。这样就突出了许多天文现象的共同特征，但也提供了某些特殊天体的部分资料。例如，第五章、第六章、第八章、附录 A 以及其他一些地方，就从各个不同的侧面对中子星和类星体进行了讨论。

我们所述及的仅仅是几个传统天文学课题的大致轮廓，比如辐射转移理论、恒星大气以及多层气体球等，这是因为完整的介绍必然要用到大量的纯粹的数学推导。尽管如此，这些课题的主要物理概念都已穿插在正文之中了；它们通常只是一些一般性的叙述，不再作专门的说明。另外，在适当的地方我还援引了对这些课题有更详细说明的其他一些资料来源。

参考书目是为那些愿意在某一个方面进行更深度研究的读者提供的。我仅仅举出了这样一些作者，他们对某一领域卓有贡献，因而他们的观点可以使读者对有关课题取得更深入的了解，尽管其中所引用的某些文章只是普及性的，然而文笔却相当严谨。

涉及到天体物理学主要内容的一部书，必然要以现有的许多优秀的专题论文和评述性文章作为前导。要恰当地感谢原作者和那些对我的写作观点有强烈影响的天体物理学家是不可能的。我同样要向科内尔大学的同事以及看过这本书（它从一系列非正式的教学讲稿演变而来）的几届学生表示感谢，他们为本书提供了许多改进的意见。最后，我还要对为本书提供了插图的 B. L. 贝特彻表示谢意。

马丁·哈威特

第一章研究天体物理学的一条途径

从某种意义上说，我们每一个人都曾处于恒星之内；从某种意义上说，我们每一个人又都曾处于恒星际广袤的虚无空间之中；而且，如果宇宙确曾有开端的话，那么我们每一个人也都在那儿停留过。

我们体内的每一个分子所含的物质都曾一度经受过恒星中心巨大的温度和压力的剧烈作用，我们红血细胞中的铁就是在那儿起源的。我们所吸入的氧，人体组织中的碳和氮，以及骨骼中的钙，它们也是在恒星中心通过较小原子的聚变而形成的。

地球上的矿物中包含了铀、钚、铅以及许多别的重原子，它们必然是在一次超新星爆发中生成的，这种爆炸就是一颗恒星的自行毁灭，它把一个太阳那么大的质量以极其巨大的速度抛入宇宙空间之中。实际上，地球上以及人体内的大多数物质都必定经历过这样一种灾变式的事件。

我们发现元素锂、铍和硼在地球上的含量甚少，它们看来是通过星际空间的宇宙线轰击而生成的。在那个时代，我们今天所生活的地球曾经分布得极度稀薄，以致一克土壤所占有的体积就有我们整个行星那么大。

为了说明地球上所发现的重氢同位素——氘，我们也许不得不回溯到意味着整个宇宙诞生的那一次爆炸。孩子玩的气球内的氦，有一部分也就是在那个时候形成的。

所有这一切我们是怎么知道的呢？而对这种知识，我们又能相信到什么程度呢？

写这本书的目的就是要回答诸如此类的问题，并为作出天体物理学的判断提供一种方法。

我们现正开始在宇宙间作一次漫长而又有趣的旅行。许多东西要学习，许多东西要丢弃，又有许多东西要加以修正。我们有卓绝的理论，但理论只是掌握真理的向导，它们并不是真理本身。因此，我们就必须不断地对理论加以修正，才能保证引导我们在正确的方向上前进。

在通览本书的过程中，我们会发现要在实质和表象之间作出选择是十分困难的，就象去发明新理论时的情况一样。我们一定要明白，作出这种选择也许还为时过早，天体物理学中的真实性往往是短命的；而且一定要知道——虽然这是令人苦恼的，我们也许总有一天不得不正视现实，即我们的理论所认识的只不过是一些皮毛，而不是比较深入的真正有推动力的因素。

因此，我们可以恰到好处地避开天体物理“事实”所带来的某种先入之见。我们应该把目光放远一些，而且应该紧紧抓住可能对我们认识的将来演变起一定作用的那些物理概念。我们可以按下面的路子进行推理。

最近几十年来天体物理学的进展是带有革命性的。我们放弃了那些过去看来是十分可靠的理论，而代之以新的理论，而且常常发现甚至连替代的理论都难以找到。在这场革命中，唯一不变的就是许多天体物理学的概念。它们没有发生本质上的变化，而且一直在为我们演变中的理论不断地提供资料来源。

在这些概念中就有中子星，从提出到发现，其间经过了 35 年；还有黑洞，在提出这一概念后过了 30 年，天文学家们才开始着手寻找这类天体。因此，我们的精力最好放在对这些概念进行更深入的探究上。

在天体物理学中，我们常常会感到为难的是：我们应该围绕着个别的天体——行星、恒星、脉冲星和星系——来构思呢，还是应该根据不同的天体物理过程所共有的物理学原理来划分课题。

我们既然强调的是概念，那么取第二条途径就比较合适。但是这也会带来一些问题，有关各类天体的许多资料就会遍及全书，因而只能通过索引来加以收集，这就会导致叙述上的某种不平衡。

这种不平衡由于数学处理方式的不同而变得更为严重，因为任何天体物理图象，要是我们不能给它们的尺度以某种数值，那就是不完整的。所以，在本书中，我们的宗旨是要去取得不同现象各特征量的大致量级。在某些场合下，这样做不会带来任何数学上的困难。但在另一些问题上，我们则不得不先有一些相当复杂的数学预备知识，然后才能找到那甚至极为粗糙的答案。第十章中对宇宙曲率的估算，就是这种比较复杂的过程的一个例子。

说明了这些困难——看来它们部分是由现代天体物理学的性质所决定的——之后，让我们来研究一下使用本书的最有效的方法。

对于那些原来缺乏天文基础知识的人，附录 A 可以为之提供一个良好的起点。它扼要地描述了我们将要研究的天体，并介绍了天文学上所用的符号，这种符号法将在全书中予以应用，而其他章节中一般就不再给它下定义了。至于那些以前学习过天文学的人，他们就可以直接从本章开始，这一章所叙述的是目前天体物理学中正在热烈进行着的探索工作，也就是我们所要寻求答案的那些问题。第二、第三章表明，尽管宇宙的某些粗略尺度可以通过在概念上比较简单的那些方法来加以测定，然而，为了掌握宇宙的能源以及宇宙演化的性质，就需要对物理学有一个比较深入的了解。因此，在中间的第四章到第七章就叙述了我们所需要的物理学工具。接下来，我们就集中利用这些工具去努力论述本文开始时就提到过的化学元素合成理论、恒星的形成和演化、星际空间所发生的种种过程、宇宙的演化，以及生命起源的天体物理背景。

这是一个动人的、富有挑战性的大胆尝试；但是，我们还有很长的一段路要走。

让我们开始吧！

1.1 获得天文学信息的渠道

让我们设想有那么一颗行星，在它的上面居住着一批没有视觉的文明生物。某一天，有一位发明家发明了一种能够感受可见光的仪器，并且发现这种仪器的用途非常广泛，特别是对于天文学很有用处。

人类是能够看见光线的，因而我们同那些还正在寻找能探测可见辐射方法的任何文明生物相比，在天文学上就大为领先了一步。然后，我们再想象有一种比我们更为先进的文明生物，他们不仅有能力探测到可见光，而且可以探测到所有其他的电磁辐射；并且还拥有能感受宇宙线、中微子和引力波的望远镜和探测器。显然，这种文明生物的天文学知识可以远比我们所掌握的为多。

现在已经知道存在着四条完全互不相干的渠道，遥远宇宙中的信息就是通过这些渠道传到我们这儿来的。

(a)电磁辐射： γ 射线、X射线、紫外线、可见光、红外线，以及射电波。

(b)宇宙线粒子：这包括了高能粒子、质子、较重的核以及（不稳定的）中子和介子。某些宇宙线粒子是由反物质构成的。

(c)中微子和反中微子：存在两种不同类型的中微子和反中微子；一种和电子有关，而另一种和 μ 介子有关。

(d)引力波。

我们中间大部分人对渠道(a)都是熟悉的，目前大量的天文资料就是通过这条渠道获得的。既然如此，我们就只对(b)，(c)，(d)三条渠道作一番简要介绍。

(b)渠道。宇宙线粒子和其他三种信息载体之间有以下本质上的差异：(i)宇宙线粒子以十分接近光速的速度运动，而别的载体则完全以光速运动；(ii)宇宙线粒子具有正的静质量；以及(iii)因为宇宙磁场可以使这些带电粒子发生偏折，所以到达地球上的宇宙线粒子的方向同粒子源实际方向之间通常并没有简单的关系。

宇宙线天文学远比中微子或引力波工作领先得多。在这方面已经有了探测器和探测器阵，然而技术上的困难还是很大的。尽管如此，我们仍然希望通过对宇宙线的研究能了解到许多大尺度宇宙化学方面的知识，并且希望能最后找到产生这些高能粒子的巨型宇宙加速器所在的天区（这是我们今天还不知道的）。我们还不知道宇宙线粒子是怎样获得又是在哪儿获得这样高的能量的；我们只能作些猜测，设想种种有关宇宙线起源的理论（Ro64a，Go69，Gu69）。

(c)渠道。中微子就象光子一样具有零静质量。这种粒子有一个很显著的优点，那就是能够穿透极厚的物质而不被吸收中微子天文学可以使我们直接观测到星体的内部，就象X射线可以用来检验金属部件内部的缺陷和诊断内科病人的肺部病灶一样。中微子还可以传递关于过去年代的宇宙的信息，因为除了宇宙膨胀所造成的系统性能量损失之外，中微子几乎可以原封不动地保存整整好几个依恩（aeon）^①。必然有相当一部分宇宙史记载在我们周围的中微子流内，但是目前我们还不知道怎样取用这种信息（We62）。

人们已经对太阳中微子作了首次认真的探索，结果表明太阳所发射的中微子比预期的要少（Da68）。为此人们再一次对有关太阳内部所发生的核反应理论进行了研究，但是谜底仍然没有揭开。预期的中微子流超过了观测值！

(d)渠道。引力波一旦能可靠地探测到，就将为我们提供有关甚大质量天体的运动方面的信息。尽管已经作了种种努力，然而还不能完全断定今天是不是已确实探测到了引力波。但是，有关探测器所测得的讯号至今还无法用任何别的原因来加以解释，因而实际上可能就代表了引力波。所以，我们很可能处于重大发现的边缘，这类发现肯定会给天文学带来深远的影响（We70）。

显然，如果技术还没有发展到能探测出为我们传递信息的全部这四种主要媒介，天文学就不能算是圆满无缺的。在这一天到来之前，天体

物理学的理论就仍然只能是临时性的。

我们不仅一定要能够探测出这些信息载体，而且还必须研制出能覆盖各类载体全部频谱范围的各种探测器。射电天文学所作出的巨大贡献证明了这一问题的重要性。二、三十年之前，我们所有的天文资料还都是在可见光、近红外和近紫外区取得的；在那个时候任何人都没有认识到可以在射电频谱获得大量的信息。可是，今天我们所具有的唯一的一幅银河系图却是表示了远处旋臂中星际气体分布情况的射电天文图。所有这一切用可见光是看不到的，因为大量的尘埃云挡住了我们的视线。还有，最近在射电频谱发现了各种各样的新天体，其中许多是强有力的射电源，但是它们在波谱的可见部分却并不显得突出。

毫无疑问，为了促进宇宙线、中微子和引力波天文学的发展，人们将要付出巨大的努力。在发展的过程中可能会遇到大量技术上的困难，但是不做到这一点的话天体物理学知识看来是不可能臻于完善的。

正当我们开始致力于宇宙中微子和引力波的探测时，人们又提出了传递信息的第五种渠道的可能性。这条渠道的载体是超光速粒子：至今这还是一种假想的粒子，它们的运动速度要超过光速。关于这种粒子是否存在和是否能探测到的问题还没有弄清楚，然而清楚的是如果它们存在而且能够测量其数量的话，那将会使天体物理学发生一场革命。届时，我们就能够获得关于宇宙遥远区域内的、近乎今天的图象，而其他载体只能为之提供几十亿年前的信息。这样，我们对宇宙演化的了解就会大大地提高一步。还有，要是在银河系内或宇宙中的其他地方存在有智慧生命的话，那他们肯定会用超光速粒子来实现更快速的通讯。因此，目前有关超光速粒子的理论探讨和实验室内的实验可能对天体物理学具有更为重大的意义。

1.2 X 射线天文学：一门新兴学科的发展概况

天文学上一门新分支学科的发展常常遵循某种普遍的规律：笼统的理论性思考一点也不能使我们预料到任何新的进展。因此，只是当某种偶然性的观测结果把人们的注意力引到某个新的领域之时，才会认真地进行一些初步的测量。后来，随着技术上的改进，这些初始发现中的好多东西又不得不予以抛弃。

这种曲折的发展过程始终是引人入胜的；作为一个例子，我们来介绍一下 X 射线天文学的演变梗概，借以说明今后一些年内天文学和天体物理学上应有的发展方向。

1962 年以前，唯一观测到的就是太阳的 X 射线发射。这种射线的流量是如此的微弱，以致任何人都没有想到太阳系以外的能源会发出强 X 射线流。后来，在 1962 年 6 月，美国科学工程协会 (ASE) 的贾科尼 (Giacconi)、格斯基 (Gursky) 和保利尼 (Paolini) 以及麻省理工学院的罗西 (Rossi) (Gi62)，在空中蜜蜂号火箭上安放了一组大面积盖革计数器。这些计数器的面积是特意加大的，目的是要能探测到由月球散射的，但仍然起源于太阳的 X 射线。计数器的灵敏波长范围是 2~8 埃。

这次观测的结果虽然没有能探测到月球的任何 X 射线流，但是却在离银河中心不远的某个天区内发现了一个 X 射线源，其 X 射线计数所得的弥漫背景流相对天空的其他部分是很显著的。各方面的证据表明，这

些能流可能不是从地球外层大气发出的，因而应该起源于宇宙空间。同一小组后来所进行的几次飞行证实了他们的首批结果。

美国海军研究实验室的一个研究小组对这一发现产生了兴趣。他们对太阳的 X 射线观测颇有经验，因而能够制造出一台灵敏度比贾科尼小组所用的高十倍左右的 X 射线计数器。海军实验室小组把仪器的视场限制为 10° ，没有采用贾科尼小组的大视场方式，所以他们得到的天空图可以反映出较为精细的结构情况 (Bo64a)。

结果，在天蝎座内探测到一个极强的 X 射线源，距银心约为 20° 。最初，该源一直没有得到证认，照片表明那一部分天区内没有任何异常天体。海军实验室小组还发现了第二个源，强度是天蝎座源的八分之一。这一个源经证认就是蟹状星云，它是 1054 年所观测到的一次超新星爆发的遗迹。海军实验室小组的成员有鲍耶 (Bowyer)、拜拉姆 (Byram)、查布 (Chubb) 和弗里德曼 (Friedman)，他们相信这两个源就是造成贾科尼小组所观测到的 X 射线发射的主要原因。

人们对这些源可能有的性质提出了许多种解释。有一些理论主张发射来自一种新的、高度致密的恒星，它们的核由中子组成。另一些则认为这种发射可能由极其炽热的星际气体云所造成。当时，由于所有的空间仪器都还没有足够高的角分辨率，因而根据观测资料不可能作出任何的判断。海军实验室小组并没有料到在后来的一些年内会取得这样的仪器分辨率。

接着，在 1964 年初，海军实验室的赫伯特·弗里德曼 (Herbert Friedman) 得悉大约在七个星期之后月球将遮掩蟹状星云，对于从最低限度上检验一个宇宙 X 射线源是延伸源还是恒星源来说，这是一次极好的机会。因为，当月球边缘通过一个轮廓分明的点源时，全部辐射便一下子截止。反之，一个弥漫源则是随着月球在天球上的运动慢慢地被掩去；这时，辐射应该渐渐地截止。

无论是天蝎座源还是蟹状星云，它们的月掩现象在许多年内就只有这么一次了；所以海军实验室小组进行了紧张的准备，七星期之后一台设备便告成功。对飞行时间的控制必须准确到秒级，因为所用的空中蜜蜂号火箭在高空的有用观测时间只有五分钟。可取的飞行时间有两次：一次在食始，一次在食终。鉴于飞行时间有限，不可能对掩始和终切都进行观测。

首次飞行时间确定为 1964 年 7 月 7 日世界时 22 时 42 分 30 秒，这个时间可以使该小组观测蟹状星云中心 $2'$ 范围内的掩始情况。火箭于规定时间前后半秒内发射，在高空中姿态控制系统对盖革计数器进行定向。发射后 160 秒控制系统开始对蟹状星云作自动跟踪，到 200 秒时已可观测到流量密度有显著的下降，而到 330 秒时 X 射线计数已降低到一般背景电平。这一缓慢的掩食过程说明蟹状星云是一个延伸源，于是可以明确地说，至少有一个宇宙 X 射线源是弥漫状的。别的源可能起源于恒星，但这一个肯定不是 (Bo64b)。

大约在海军实验室这次飞行之后七个星期，麻省理工学院小组也准备检测 X 射线源的角大小。他们的实验较为通用，任何源都可加以观察，它基本上就是使用日本物理学家小田稔 (Oda) (Od65) 所设计的一台准直仪。这台装置由两片相隔距离为 D 的金属丝栅组成， D

要比丝间空隙大，而丝间空隙则比丝的直径 d 略为小些。

图 1.1 说明了这台准直仪的工作原理。如果源的角直径比 d/D 小，那么当准直仪窗口扫过该源时所探测到的讯号就会发生强弱交替的变化。要是 $\theta \gg d/D$ ，则探测到的讯号强度实际上将不随定向的改变而改变。

麻省理工学院？科学工程协会小组在他们的首次飞行中发现，天蝎座源的角直径小于 0.5° 。两个月以后的第二次飞行证实了该源的直径很小，实际上不到 $1/8^\circ$ 。一年半以后该

图 1.1 (a) 平行光线入射时，前丝栅在后丝栅上投出清晰的阴影。随着准直仪的旋转，阴影时而投在后丝栅的金属丝上，时而从丝间空隙中穿过，于是光线就交替地射出和遮去。(b) 对于来自角直径 $\theta \gg d/D$ 的光源所发出的光线，前丝栅投出的阴影是模糊的。这时，准直仪的旋转不会使出射 X 射线流量发生显著的变化

小组发现这个源一定还要小得多，直径不到 $20''$ 。在这次飞行中采用了丝栅间距不同的两台准直仪，这意味着两台准直仪的透射峰值仅在射线垂直入射时才彼此一致，并用这一方法测得了天蝎座源的精确位置 (Gu66)。接着，东京天文台取得了一次光学证认，随后又在帕洛玛山得以证实 (Sa66a)。原来这是一个闪烁着的强紫外天体，闪烁的时间间隔不到一分钟。这些正是接近极小光度阶段的老的新星所具有的特征。

天蝎 XR? 1 附近的恒星的亮度和颜色表明，这些恒星距离太阳为几百光年，从而使我们能够第一次对该 X 射线源的总的能量输出作出精确的估计。对于早期底片的研究发现，这个天体的平均照相亮度自 1896 年以来并没有太大的变化。

本书编写之时这些早期的观测结果大部分已经得到证实。然而，有趣的是发现蟹状星云中包含了一颗脉冲星，这使 X 射线天文学家们追溯以往所收集到的观测资料。其中某些记录表明了具有特征性的 33 毫秒脉动，还表明有相当一部分流量 (10~15%) 来自一个点源——现已相信这是在超新星爆发中形成的一颗中子星 (Fr69)。我们认为蟹状星云基本上是一个弥漫状 X 射线源的观点就不得不加以修正了。

今天，对于许多别的银河 X 射线源已经确定了它们的位置并作了证认；它们常常具有类似天蝎 XR? 1 的紫色恒星状 (点状) 外形。有时这类天体的亮度会在数小时内突然增强好几个星等，另一些作规则的脉动，有点象蟹状星云脉冲星。迄今观测所及的 X 射线能量范围也相当宽，对于许多源来说，既可以获得它们的可见光谱，同时又可以得到它们的 X 射线谱。

人们还观测到了几个河外 X 射线源，其中第一个就是 M87，这是一个星系，并且知道它是一个强射电源 (By67)。M87 是一个具有球状恒星分布的特殊星系，从该星系好象还抛出了一个气体喷流。喷流在可见光区呈浅蓝色，而且可能还发出由高度相对论性电子所造成的光辐射，这种电子绕着磁力线盘旋并且通过同步加速机制产生辐射 (见第六章)——同步加速器中高度加速了的高能粒子就是通过这种机制释出能量的。

目前，理论家们对 X 射线源以及连续 X 射线背景辐射提出了各种各样的解释，后者看来遍布宇宙各处。人们正在制订许多实验计划以检验

这些理论。X射线、可见光、红外以及射电天文学家们把他们的结果进行比较，以期能否找到一种共同的解释。进展是相当迅速的，也许在几年之内这一领域就不再会那么十分吸引人的了。但是到了那个时候，天文学家又将开拓出新的分支，并再次会激起人们的兴趣。

天体物理学上的种种发现，无论是已经作出的，或是将会作出的，它们的基本性质无疑会使大部分现有的理论将在今后几十年内作出引人注目的修改。今天所知道的许多知识只能看作是暂时性的，因而对这一领域内的各个方面都必须以一种正常的怀疑态度来加以剖析。

我们可以预料，许多知识仍然要利用过去年代那种内行之有效的方法来加以掌握。但是，在天体物理学的一些方面，特别是在宇宙学中，我们的思考方法本身以及解决问题的整个思路也许就是一种障碍。因此，对我们历来工作的起点作一番介绍是会有好处的。

1.3 物理学定律的合理建立

今天，天体物理学和天文学的含义已经变得差不多一样了。在早些日子里，人们根本不知道恒星的研究会和物理学有任何共同之点。然而不仅对恒星，而且对星际物质以及星系尺度上所发生的过程来说，用物理学解释它们的观测结果竟是如此的成功，以至我们敢于大胆地认为，所有一切天文过程都应该受物理学理论的支配。

但是，有几点是必须记着的。首先，我们用于天体物理过程的物理学定律，大部分以我们所能进行的实验为基础，而这些实验装备的规模是十分有限的。例如，我们测量光速的区域的最大尺度也只有 10^{14} 厘米左右，也就是太阳系内部的范围。我们对大尺度动力学的认识也是以对太阳系的详细研究为基础，然后再把在这样一个小范围上所获得的动力学定律外推到约 $10^{18} \sim 10^{28}$ 厘米宇宙尺度上所发生的过程，但是我们无法保证这种外推确有根据。

也许，这些局部定律实际上在宇宙质量和宇宙距离尺度的整个范围内确实是成立的；但是有一点我们必然记得：适用于 10^{-8} 厘米尺度的量子力学定律和我们根据厘米级物体做的经典测量所预期的定律相比，两者完全不同。

第二点是“自然界常数”的不变性问题，这与第一点在性质上是相类似的。在观测一个光线已传播了好几个依恩的遥远星系时，我们不知道电子和原子核过去所携带的电荷是否和今天的一样。如果电荷是不一样的话，那么所发出的光线的能量恐怕也会不一样，因而我们对所观测到的光谱的解释就必须加以改变。

第三点和宇宙的唯一性有关。

普通的物理学问题是通过实验来寻求解答的，我们改变所用仪器的一个特性，而同时注意对另外一个特性的影响。但是，宇宙问题却不允许这种手段。宇宙是唯一的，我们不能改变甚大尺度上的现象，至少在我们现有技术发展水平上不可能做到这一点；而且即使我们做到了也不一定会识别出真正的变化，简直找不到一样仪器它本身不会受实验的影响——能探测出这种变化的参考系是不存在的。简而言之，我们也许不是在问那些用物理学术语所能回答得了的问题。因为物理学方法取决于我们进行实验的能力，而且更一般地说来任何科学的方法也是如此；这

条途径对真正的宇宙问题也许是行不通的。

因此，目前的情况就是这样：关于某些至今看来彼此互不相关的天文事件我们知道得很多，我们觉得它们之间一定存在某种关系，但是却并没有把握。正是因为不知道，就把我们的知识分成了若干个不同的“领域”：宇宙学、星系结构、恒星演化、宇宙线等等。我们是带着试试看的心理这样做的，但是所用的策略是通过解决各个小问题来寻求某种联系。我们总是期望把所掌握了各个领域加以扩大，直至有一天在它们之间发生接触，从而在原先分离的各个领地之间建立起一座坚实的知识之桥。

对我们说来这条途径将使用多久？与宇宙唯一性有关的哲学上的困难在什么时候就会出现呢？对此我们现在还不知道；但是，当到达那一步时，我们预料会面临这个问题。

同时我们可以给自己提出若干个具体问题，尽管这些问题尚未解决，然而预期可以用我们现在所掌握的物理学定律来求得他们的答案。这类问题中有恒星、星系以及行星系统的起源和演化，还有关于各种化学元素的起源问题；而且也许随着我们对天体物理过程取得更深入的了解，生命本身的起源问题也将会弄得一清二楚。

下面几节将对这些问题中几个比较重要的特征给以简要的介绍。

1.4 恒星的形成

我们相信，我们所观测到的每一颗恒星都不会永远存在下去——因为它们的能源迟早总要消耗殆尽，所以我们必须对恒星的诞生作出解释。由于我们所认为是年轻的那些恒星总是与星际尘埃气体云相处在一起，因此我们断认，这种宇宙物质云必然在慢慢地收缩，形成越来越致密的凝聚体，其中有一些最终就坍缩到恒星那样的大小。

这一图象所包含的意义十分丰富。星际空间的尘埃微粒对辐射热量是十分有效的，一旦有一个氢原子与一颗尘埃微粒发生碰撞，微粒就略为得到加热，而这份能量便在电磁波谱的红外部分辐射出去。这种情况我们称为热辐射。

微粒辐射掉的能量使气体的动能减少，因为原子在和尘埃碰撞过程中所转移给微粒的就是这部分能量。气体在损失了动能之后，由于引力的作用就朝云的中央落去，在下落的过程中获得了某些动能，并再把其中一部分转移给尘埃微粒：冷却循环就这样重复地进行。原子还把它一部分朝向云中心方向的动量传递给微粒，这也引起微粒朝收缩着的云的中心移动。由于许多这类相互作用的结果，云就发生整体收缩。

微粒辐射并不是使原恒星放出能量的唯一辐射过程。原恒星云在坍缩过程中变得越来越热，各种分子和原子的能态都可以通过碰撞而得到激发。受激粒子便能发出辐射，然后又回复到基态。这种辐射有可能从原恒星云逸散到外部空间中去，而能量的这种净损失也会引起云的冷却（图 1.2）。

尽管这种图象看起来很有吸引力，但也存在着一些困难。首先，在形成一颗恒星的过程中原恒星不可能单单损失能量，它还必定会损失角动量。这是因为恒星的形成要求初始范围很广而又极其稀薄的气体云发生凝聚。但是观测表明，银河中心附近物质的轨道速度 w 比离银心较远

处物质的速度 w' 来得大；因此，收缩中的云应该具有很大的初始角动量。我们可以设想物质的平均轨道速度约为 $(w+w')/2$ ，于是可以

图 1.2 原恒星云中的冷却过程(a)一个速度为 v 的原子轰击一颗微粒，它的动能是 $v^2/2$ 乘以原子的质量 m ；(b)微粒吸收能量并发出辐射，而原子则以较低的速度 v' 离开，动能也就减少到 $mv'^2/2$ ；(c)，(d)，(e) 中，一个原子和另一个原子或分子相碰。这第二个粒子先是达到某个激发（高）能态，图中以星号（*）表示之，然后发出辐射并回复到初态。

在这个过程中第一个原子损失了动能，而如果所发出的辐射从云中逸出，那就表示整个云发生了能量损失。原恒星物质就是通过这种方式慢慢地收缩而形成一颗恒星

认为云边缘的物质以速度 $(w+w')/2$ 绕着云中心旋转（图 1.3）。

一般说来，由密度为每立方厘米 1 个原子的星际云形成一颗恒星，所需要的物质要求坍缩气团的初始半径约为 10^{19} 厘米。就银河系内我们所处的部位来说，这么一段距离上所观测到的 $w+w'$ 约为 3×10^3 厘米·秒⁻¹，所以，每单位质量的角动量是 $r(w+w')/2 \sim 10^{22}$ 厘米²·秒⁻¹。另一方面，从我们所观测到的典型恒星的表面速度所算得的单位质量角动量要比这个数字小好几个数量级，为 $10^{16} \sim 2 \times 10^{18}$ 厘米·秒⁻¹！以太阳为例，实际上只有 $\sim 10^{15}$ 厘米²·秒⁻¹；但是太阳系总角动

图 1.3 靠近银心的物质的轨道速度比外圈的速度来得大， $w > w'$ ，这一现象称为较差自转

量相当于 10^{17} 厘米²·秒⁻¹。太阳系中行星绕太阳的运动占了太阳系角动量中的绝大部分，其中特别是木星的运动最为突出（另见图 1.9 和 1.7 节）。

所以很清楚，在一个恒星或一个行星系统的生成过程中，处于收缩中的原始星际物质云必然通过某种机制失去了它的几乎全部的角动量，得以保存下来的仅有几千分之一而已。

类似的一个问题和星际介质中初始存在的磁场有关。如果这个磁场主要是沿着某一个给定的方向，那么云收缩成恒星后最终的磁场也应具有这一方向；而且这个最初十分微弱而又有确定方向的磁场在原恒星物质的收缩过程中会高度地集中起来。一个初始强度为 10^{-7} 高斯的弱磁场 B ——这已经比观测到的数值来得小（Ma72）——随着原恒星半径从 10^{19} 厘米减小到 10^{11} 厘米，其强度将会增大 10^{16} 倍。在这种收缩过程中 B 与 r^{-2} 成正比。这是因为，磁力线就好象与气体物质冻结在一起似的（6.2 节），云在收缩，通过云横截面的这种磁力线数目却保持不变。恒星表面所具有的实际磁场通常只有 1 个高斯左右，尽管某些特殊恒星的磁场可达几万高斯，但如果收缩过程中穿过星际物质的磁力线既没有破坏也没有损失，那么收缩后形成的恒星的磁场强度应为 10^9 高斯；两者相差仍然极为悬殊①。造成这种磁场损失的原因，乃是有关恒星形成问题中的一个重要的、尚未解决的部分。

让我们暂且把上面的观点放在一边，试以一种不同方式来观察恒星形成的问题。我们在推理之初曾经作了一个未必一定正确的假设：尘埃云和刚形成的恒星成协这并不一定说明恒星就是从这种尘埃云所形成

的。也许这里是存在某种因果关系，但是恒星是从虚无中形成，并且在这一过程中生成大量的尘埃云，这难道是不可能的吗？这样一种图象尽管因为它假定了一种显然是非物理的起源而显得缺乏说服力，但是毕竟至少是避免了角动量和磁场这两个困难。

我们应该牢记这一重要观点：也许恒星正是从“虚无”中产生出来的！但是，暂时说来，只要可能，我们还是宁肯在普通的物理学框架内进行工作。

既然决定这样做，那么下面的两项工作将会带来丰硕的成果：即不仅研究恒星在目前是否正在从尘埃云中生成，而且研究它们在银河系历史的早期有没有可能从一种简单的、无尘埃的氢-氦混合体中生成。这样一条总的途径最终有可能导致对星系的形成及与之有关的宇宙学问题取得更深刻的了解。因为，正如我们将要看到的那样，星系中物质的化学组成看来在很大程度上要受到氢向氦的转变以及氦向较重元素转变的影响。某些较重元素最终要从恒星中抛出去而成为星际介质的组成部分。如果恒星不断地从星际介质中形成，那么今天刚形成的恒星同很久很久以前、星系尚很年轻时所形成的恒星相比，两者的化学组成可能会有明显的差异。化学组成上的这种差异实际上已经在一些极老的恒星光谱中观测到了，尽管有些令人惊讶的是，目前所形成的恒星的化学组成好象都同太阳差不多，而太阳的年龄是 5×10^9 年。

最年老的恒星在表面成分上的这种差异确实表明它们是从化学成份不同的介质中形成的。而且，如果我们关于恒星演化的理论（下面的1.5节）是正确的话，那么在恒星内部所应该发生的基本物理过程就会与下述观测事实很好地取得一致：今天正在形成着的恒星同星系演化最初阶段所生成的恒星相比，前者的较重化学元素含量比较多。因此，我们是通过研究恒星自生成以来演化情况的研究，来收集有关恒星从星际介质中形成的证据，同时对星系的生命循环作一番深入的了解。仅仅当这种观点所引出的结果与观测相矛盾时，我们才会转向某种要求恒星从虚无之中自然形成的理论。但是，即便如此，我们还是没有什么可回旋的余地。我们仍然必须解释为什么大约一百亿年前从“虚无”中形成的恒星具有较低的金属丰富度，而以同样方式在过去几百万年内形成的恒星会有较高的金属丰富度。这时我们不得不面临着一种令人有点感到别扭的结论——“虚无”居然发生了变化！

本节强调了在认识恒星形成的过程中所面临的困难，但是，通过过去二十年的研究，对于那些能够产生星际云的收缩、造成角动量损耗并引起磁场强度损失的物理过程已经有了许多新的见解。这类理论的出现意味着在彻底了解恒星形成这一基本问题的过程中取得了相当大的进步。但是，我们仍然需要大量的更为详细的观测资料，以便证明要末这类模型中确实有一些是说明了恒星的诞生问题，要末是恒星形成取决于我们迄今尚未考虑到的、完全不同的一系列物理过程。

1.5 恒星的演化

就算我们对恒星怎样诞生的问题没有太多的了解，那么关于它们在诞生之后如何演化的问题我们能说些什么吗？对此，我们可以很有把握地回答：“是的”。下面，我们将会看到这一点。

从恒星的颜色，或者分析它们的光谱，可以测得恒星的表面温度；要是把一组恒星的绝对亮度和对应的表面温度之间的关系用一张图来表示，那么我们会发现，在这么一张所谓赫罗图或者说是颜色-星等图上，只有在某些确定的区域中恒星的分布才特别密集。恒星在这类图的不同部位上的集聚情况为我们研究恒星演化的途径提供了一条主要的线索。不同星群的颜色-星等图是有所差异的。用太阳附近的星群所画出来的是一个样子，用银道面上松散的银河星团中恒星所画出来的是另一种样子（图 1.4）——这种星团一定非常年轻，因为它们的成员星非常亮，考虑到这些恒星有限的核能储备，它们存在的时间是不长的。银河系内某些最老的星群所画出来的又是一种样子（仍见图 1.4），这是一些很暗的恒星，在大约一百亿年内慢慢地耗尽了它们的核燃料，球状星团的成员便是这类恒星的典型代表。所谓球状星团是一种由几十万颗恒星所组成的、球对称的恒星集团，我们发现这种星团主要分布在银晕内，很少出现在银道面附近。

这些赫罗图尽管在细节上有所不同，但仍存在有一些共同的特征，图 1.5 概略地说明了这一点。虽然图 1.5 所表示的实际上并不是任何一个真正的恒星群，但它给出了位于赫罗图上不同部位的恒星的名称。

在纵坐标上我们标的是恒星光度的对数，以太阳光度（每

图 1.4 球状星团 M3 及银河系内若干银河星团的颜色-星等图。这些星团表现出对主星序有不同的转折点。根据核演化理论我们可以确定不同转折点处恒星的年龄，图的右边标出了它们的年龄（Sa57）

秒钟太阳发出的总辐射量）作为常用单位。横坐标给出恒星辐射表面有效温度的对数（4.13）。图上左边的恒星温度比较高，最高表面温度差不多等于 10^5K ；右边的恒星温度比较低。亮星在图的顶部，暗星则在底部。从顶部左方朝底部右方沿对角线走向的是主星序，差不多有 90% 的恒星都落在这条主星序上；除此以外其他地方的恒星则相当稀少。亚巨星和红巨星分支上的恒星属于一个星族，它们位于一个晕内，对银河中心多少有点呈球状分布。这些恒星有时称为星族 II 恒星，它们与星族 I 恒星不同，后者位于银道面上，使得银河系的这一部分特别明亮。O 型星和 B 型星是最蓝、最亮的主序星，它

图 1.5 示意性的赫罗图。图中斜率相同的那些斜线代表了具有同样半径的恒星（见 4.13 节）

们是星族 I 天体。我们知道这些恒星必然是在最近才形成的，仅仅根据光度就可以断定这一点。因为，现有的恒星演化理论很具体地说明了由氢向氦的转变是主序星能量的主要来源；而这些恒星的光度很大，因而它们必然在一个很短的时间内就完成了大部分这种转变过程。在这个过程中每克氢可利用的能量是已知的，于是我们可以算出 O、B 型星一定是在几百万年时间内把它们可予利用的氢转变成了氦。既然如此，我们相信这些恒星的年龄不会超过几百万年。相反，由于星族 II 天体中较明亮的成员正在向红巨星转变，而红巨星则是在中央核内的氢已全部耗尽了恒星；根据这个事实，并考虑到这类恒星的氢燃烧率，我们就可以判断出星族 II 天体的年龄可能在 10^{10} 年左右。

恒星演化理论就是要解释赫罗图内恒星的分布情况：不但要说明为什么图中某些区域有恒星，另一些地方则没有；而且要说明为什么有些区域——特别是主星序——内恒星高度集中。而另一些地方却分布得相当稀少。

计算工作以恒星一生中不同阶段具体的核反应速率为基础，下面就是由这些计算所得到的恒星演化史。

随着一颗恒星从原始尘埃云开始收缩，它便变得十分明亮，但辐射温度很低，以至超出了我们图的范围，落在赫罗图的右边缘之外。恒星在这一阶段只有红外辐射，不过处于这种状态的恒星其寿命极为短促，以至这类天体迄今一直没有得到证认。我们只是从理论上相信这一阶段是存在；然而红外天文学今天的目的之一就是要从实际上去发现并研究这类恒星。在这一阶段内，收缩使引力势能转变为动能，再转变为辐射，然后便散失在宇宙空间之中。原恒星的表面温度在这一阶段中几乎保持不变，但随着收缩过程中表面积的缩小，原恒星就变得越来越暗。它遵循的是在赫罗图的最右边一条几乎垂直向下的路线，称为林忠四郎 (Hayashi) 轨迹。

最后，恒星的收缩终于慢了下来，恒星不再以很高的速率失去它的引力势能；但是，温度在增加，而恒星就从右边缘穿越赫罗图，差不多沿着一条水平线朝主星序运动。当它到达主星序时收缩便告停止。在这一阶段恒星达到了这样一种致密结构；其中心温度已高到足以进行由氢向氦的转变。在这一转变过程中可以有 0.7% 的初始质量转变为能量并辐射出去，每一克氢可以有 $0.007c^2 = 6 \times 10^{18}$ 尔格的能量离开恒星表面逸入宇宙空间。

大质量恒星的中心区域温度最高，辐射率比较大，因而质量转变为辐射能的速率相应地也比较大。B0 型恒星所代表的天体的质量是太阳质量的 15 倍左右。图 1.5 所表示的是相对光度，它说明了 B0 型恒星消耗燃料的速率约比太阳快 10^4 倍。太阳在主星序上要维持 100 亿年，而预期 B0 型恒星大约只能存在 1000 万年，之后它的结构就会发生变化。O5 型星演化得还要快。因此，我们可以预料，老年恒星群只能包括位于主星序上的黄色和红色的小质量恒星。

恒星中心的氢全部耗尽时所产生的结构上的变化，应该同时引起恒星表面温度和亮度的某种改变。这时，从赫罗图上来说，恒星开始离开主星序。在银河星团英仙座 h+x (图 1.4) 中我们观测到了这种运动的证据。我们看到从主星序向右方，也就是朝着温度较低的方向伸出一条曲线，而在图的右上角则出现了一群新的恒星——在这个部位所出现的必然是一些明亮的红色恒星。根据模型星以及它内部核反应过程应有的速率所做的详细计算表明，刚好位于英仙座 h+x 星团离开主星序的转折点上的恒星，其年龄不可能超过 200 万年。

相反，球状星团 M67 中的任何主序星都不会比 F 型恒星更蓝。因此，所有这些恒星都是比较小的，其中质量最大的也不会比太阳质量大很多。这种亮度的恒星大约要在 7×10^9 年时间内才能完成其中心区域内的氢燃烧过程，因而我们认为这个数字必然就代表了 M67 今天的年龄。

这个星团还有一个发展得很好的巨星分支。显然，离开主星序的恒星便朝着这一分支内移动。因为分布在这一分支上的恒星的实际数目要

比停留在主星序上的恒星来得少，由此我们推断，这些恒星在亚巨星或红巨星阶段上渡过的时间是不太长的，它们很快就会转入另外某个阶段。如果它们作为巨星时渡过的时间比较长，那么我们应该可以在赫罗图上的这一部分看到许多密集的恒星——也许会达到转折点附近主星序那样的密度。根据我们所述的观点，亚巨星和巨星毕竟全都是以前的主序星。在年龄较轻的时候，它们居住在刚好就是在现在的转折点上方的那部分主星序上。

因此，我们看到赫罗图确实是一个非常有用的工具，它不只是为我们指示了各种恒星所出现的地方，而且利用适当的理论工具我们还可以估计出某个给定恒星集团可能有的年龄，这里只要假定全部成员星都在同一时间形成。而且，即使完全不用核燃烧理论，而仅仅根据某种连续性要求，我们就能估计出恒星在不同阶段所渡过时间的相对长度，其中唯一要利用的是赫罗图上不同部分的恒星密度。

实际情况看来要比这来得复杂，因为我们最终必须要确定的是恒星在图上运动的方向以及它在不同阶段所到达的星序。对此，我们几乎完全要依靠核燃烧理论——这种理论告诉我们恒星在什么星序上把它内部的各种元素转变为另一些元素，以及在每一步过程中会释放出多少能量。

我们来看图 1.5 所表现出的另一个特性。当恒星离开主星序时它显然要变红，而且如果还有什么差别的话，那就是会变得比在主星序上更亮一些。但是，一个温度较低的天体在每单位面积上所发出的辐射量总是比较少的，因此这一特定演化过程所能够走的唯一一条途径就必然是恒星的体积随着其离开主星序而变大。同它的主星序上的大小相比，恒星现在就成了巨星，它们的半径可以增大 10 倍以至 100 倍。

让我们来看一下这些阶段是怎样演化的。

在这个问题上球状星团的研究最富有指导意义，这类星团中包含了被我们认为是银河系内某些最年老的恒星，它们

图 1.6 球状星团 M3 的颜色-星等图，上面还标出了演化的大致路径 (Jo56, Sc70)

又暗又红的转折点说明了这一点。大体上说，每个给定星团中的恒星差不多是同时形成的；因而转折年龄就代表了星团的年龄。图 1.6 是球状星团 M3 的颜色-星等图，图上不仅可以看到亚巨星和红巨星分支星族，而且可以看到水平分支星族。图上还可以看到水平分支上的赫兹伯仑空隙，该处的 $B-V$ 值约为 0.3。恒星是怎样沿着这些分支演化的呢？它们朝哪个方向运动？它们又怎样会越过一个空隙，以至在那儿就没有任何恒星出现呢？

当恒星停留在主星序上时，它的外貌确实发生了极其微小的变化，线段 AB 反映了这种情况。图上表示的这段距离所涉及的寿命大约是 10^{10} 年。恒星从 A 点起开始在主星序上生活，然后就慢慢地朝 B 点移动，在这个过程中它变得稍为红一些，也稍为亮一些。举个例子来说，太阳就必然在经历着这样一种变化。不但我们已经对这个过程了解得比较清楚，同时，反映最近几十亿年历史的地质学和古生物学记录可能也证实了太阳在亮度上所发生的类似的变化。

到达 B 点时，恒星中心的氢已经用完，形成一个燃料用空了的中央核，而由氢向氦的转变则仅仅在这个核周围的一个壳层中进行。在第一红巨星阶段中恒星从 B 点运动到 C 点，其主要能源就是这种氢的壳燃烧。燃烧着的壳层向外运动，同时把更多的氢转变为氦，而氦核的质量则慢慢地增大（见图 8.8）。

在 C 点，大质量的核由于收缩而加热，温度升高到足以使氦转变为碳。这个过程进行得极为迅速，我们称之为氦闪。在氦闪过程中约有 3% 的核参与燃烧，而核的总质量约为 $0.5M_{\odot}$ 。核在这一过程中被加热到足以能克服引力的作用而发生膨胀，同时，核的氦燃烧继续进行，而核内的物质作对流状的搅拌运动。

有趣的是在氦闪期间，核内的能量转换率可能等于一个星团中全部恒星所释放出来的总能量。但是，这些能量不可能一下子到达恒星的表面，实际上就是这部分能量在促使被强大的引力所束缚着的核发生膨胀。

我们相信，环 DE 与水平分支的恒星有关，它代表了演化过程中的一个阶段，在这一阶段中主要能源来自核的氦燃烧，同时壳层中的氢燃烧也在进一步向外扩展。从 D 演化到 E 大约延续 10^8 年，而从 B 演化到 C 的时间也许还要长一些。图 1.6 表明，C 到 D 这一阶段所经历的时间一定非常短促，因为在那儿出现的 M3 成员星为数甚少。

到达 E 点时，核中的氦已经耗尽，而氦的壳燃烧便开始出现。线段 EF 代表了这样一个演化阶段，在这个阶段中的恒星由以下几部分组成：一个不活泼的碳-氧核，核的周围有一个氦燃烧壳层，再往外依次是一层还没有进行下一步核转变的氢带和一个氢燃烧壳层，最外面是一层由生成恒星的原始物质所构成的外壳，外壳中的物质没有经历过任何的核转变。因此，即使已经处于现在的演化高级阶段，从我们实际上唯一所能观测到的恒星最外层的化学组成，还是一点也看不出恒星内部所经历着的种种复杂变化。

EF 是第二红巨星阶段，这一阶段中的恒星在赫罗图上的演化路径几乎和前面从 C 到 D 所绘出的曲线，以及从 B 到 C 的轨迹的顶部完全一样，这三组不同的恒星从外表看来是很类似的。

请注意，恒星生成时氦的初始浓度，也许能够从 D 到 E 所组成的这个环来加以确定，这一点是很有意义的。恒星演化理论预言，初始氦含量低的恒星应该在环上部返向 E 点的过程中度过比较长的时间。我们可以预期大部分氦丰富度在 10% 左右的恒星应集中在环的左端。另一方面，初始氦丰富度为 20~30% 的恒星在水平分支上向左的运动速度开始非常快，随后就慢慢地向左移动，甚至会停留在拐角的附近。一旦到达环的顶部，它们便迅速地向 E 点运动。我们所观测到的球状星团中水平分支恒星的分布情况，同氦丰富度高达 30% 左右的恒星符合得非常之好 (Sc70)。

这样高的初始氦丰富度尽管带来了很有意义的结果，然而同时也引起了许多新的问题。这么高的丰富度是不是就代表了最早的原初物质，而宇宙间的一切物质都是由这种物质生成的呢？或者，在某个更早的历元，是不是存在一个由氢向氦转变的阶段，而这一阶段甚至出现在银河系内我们所知道的最早的恒星形成之前呢？如果是这样的话，那么这一

过程是星系形成阶段的一部分吗？或者它是代表了星系形成前某一阶段中的一种宇宙现象吗？我们要从不同的角度对这一问题进行若干次讨论。但是，我们也不得不承认，对此还不能作出任何明确的回答，这个问题仍然是天体物理学中一个未予解决的难题。

关于氦的壳燃烧过程，迄今尚未提及的一个特征就是这种燃烧不是平稳地发生的，而是有点以一系列氦闪的方式进行——正象氢的核燃烧是在一次氢闪中进行的一样。在壳燃烧的每次氦闪中，峰值光度可达 $10^5 L_{\odot}$ 左右。至少在有些模型星中存在一些迹象，表明这种壳层氦闪会使恒星离开红巨星分支而作某种环状的运动，先向左，然后又回来，一来一回大约要 10^3 年时间。这种运动使得恒星进入赫罗图上由星族II造父变星所占有的部位，因而很可能这种脉动星应该同壳层内氦闪燃烧过程联系在一起。这是一个亟须进一步研究的问题。

同样，我们也很需要对行星状星云有更多的了解，这种天体有一颗炽热的中央星，周围是一个由抛射物质所组成的壳层，因为我们知道有一个行星状星云存在于一个球状星团之中，至少来说，很可能这一颗中央星的质量只比该星团内位于主星序转折点处恒星的质量稍为大一些。这一点使得我们考虑把行星状星云阶段同刚才所讨论的红巨星阶段之后的某个阶段联系起来。可能的情况是，演化到图1.6中路径EF所描述的那个阶段的一颗恒星会出现一个不稳定区域，它经过一次或数次猛烈的爆炸后便把外层物质抛了出去，结果使介于氢和氦这两个燃烧壳层之间的某个地方以外的恒星外部壳层分离开来。于是，恒星的中央部分便只是一个质量较小的、富有碳和氧的核，这个核慢慢地朝着赫罗图上所示的白矮星阶段收缩（图1.5）。最初，行星状星云的中央星显得非常炽热而又明亮，图1.5中所画的那个环表明了这一点。但是，后来它就朝着白矮星所处的部位冷却下来。处于这一阶段的白矮星质量也许不会超过 $\sim 0.7 M_{\odot}$ ，其余部分的质量已在爆炸过程中抛了出去，并形成了行星状星云的气体外壳（Sa68b）。

形成行星状星云的这一图象可能会引起许多异议。预期质量和所观测到的抛射质量是否相符的问题还没有搞清楚。还有，在抛射物质的化学组成中，预期重元素（或者至少是氦）的浓度可能会比较高，但是这一点看来与观测结果不符。很显然，我们对恒星演化中的这一阶段的认识仍然是十分肤浅的，不过这一问题极有希望在接下来的一些年内得以解决。

关于爆发星，也就是新星和超新星，同样会引起一些类似的问题。这类爆发事件很可能同充分演化后恒星的致密核内的中微子发射（Sa69b）有着某种很密切的关系。中微子损失使恒星中央部分发生收缩，而同时温度却没有显著的升高。中微子相互作用截面是很小的，这就使能量很容易从坍缩中的核向外输送出去。于是就导致迅速收缩的内核同发生中微子电子散射的外部发生分离，能量必然就在外层中积累起来，结果终于引起剧烈的爆炸。为使这一过程得以发生，甚至要求外层最初必须坍缩到密度在 10^{11} 克·厘米 $^{-3}$ 左右；这时，恒星的半径就只有100公里。

在这种情况下，抛射物质可能就成为一次超新星爆发中的观测对象，而收缩中的核也许会演化为一颗中子星。

为了保持角动量守恒，这颗中央星必然会作高速的自转。由于恒星中所存在的原始磁场在坍缩过程中不会逸散出去，中央星还会带有一个高强度的磁场。这个随着恒星一起自转的磁场会使电子和离子被加速到具有非常大的速度，并且可能引起强烈极化的脉冲星射电波脉动，而现在我们相信这种脉动表示了高度相对论性粒子所作的发射，随着与恒星一起共转这些粒子就把能量辐射了出去，在这类脉冲星中也许还会产生出宇宙线粒子。

以上就是有关恒星演化理论的大致情况：它使我们能从许多方面来详细地了解有关恒星和宇宙的核历史以及宇宙中现有的主要能源，也许最终还会导致我们对能量极高的宇宙线粒子的形成以及宇宙中恒星物质的最终归宿取得更好的了解。

因此，有关恒星的生与死的问题只不过是一种猜测，而对于恒星演化的研究就远为丰富得多；也许这些研究最终将为我们掌握宇宙尺度上所发生的更为重要的产能过程提供必要的、详尽的物理学见识！

1.6 恒星和太阳系中化学元素的丰富度

恒星大气内化学元素丰富度的分光测定可以为我们提供有关形成恒星的介质在化学组成方面的资料。恒星结构理论表明，对于大多数类型的恒星来说，它们的外层一直没有受到恒星中心能量释放的核过程的影响。在恒星大气中，唯有锂、铍和硼已不足以反映原恒星物质的特征，因为这三种元素在较低温度下很容易与质子发生反应而遭到破坏。氘也许是在存在过的，但它在早期那种把原恒星表面物质混杂到恒星炽热的中心部分去的对流收缩过程中同样会遭到破坏。这种对流在主星序也就是在氢燃烧产生氦的阶段中是不存在的。

但是，在某几类恒星中，有些元素——比如说氦、钡和碳——却是异常的丰富。显然，这是通过某种对流作用把它们带到了恒星表面。对于这些恒星来说，我们相信已观察到了由它们内部的核反应所产生的化学丰富度变化的结果，因而我们希望能够利用这些观测资料来比较好的了解核反应的性质，以及恒星内部深处所处条件的性质（Un69）。

在普通恒星的大气中，我们也观察到不同化学元素丰富度上的巨大变化。对那些我们认为是最年老的恒星来说，它们从碳到钡诸元素的丰富度要比象太阳这种较年轻的恒星少三到四个数量级。这种虽低而却又不可忽略的金属丰富度——这儿“金属”一词指的是任何比氦重的原子——是一个真正的谜。比较年轻的恒星是不是由那种与在银河系形成之初便已存在的原初物质——可能是纯氢——大不相同的物质所形成的呢？事实上，这些最年老的恒星是不是代表了银河系中核变化的第一阶段？或者会不会存在一个形成氦和金属元素的较早的阶段——而这一阶段已没有留下任何明显的幸存者呢？

在第八章中我们将会看到(a)太阳，(b)天蝎座 τ ，这是一个非常年轻的B0型星；(c)行星状星云，(d)室女座 ϵ ，这是一个红巨星；以及许多别的“普通”恒星，所有这些天体都具有同样的化学组成，其差异在观测误差的范围之内。这一点至关重要，因为这些天体的年龄已经涉及到从我们所知道的恒星形成第一阶段——我们认为球状星团红巨星就是在这一阶段中形成的——以来银河系的寿命。

这些分析表明，在银河系的整个一生中，星际物质的化学组成几乎一直没有发生过变化。这也许是由于最近发现的、来自星系外部的气体的向内跌落，这种跌落显然是连续的。向内跌落的速率看来相当于每年两个太阳质量，这个数字大约和银河系内恒星的生成速率差不多（La72）。不管这一效应已经证实与否，很明显的是，从超新星向外爆发出来的物质，或者行星状星云和恒星风慢慢排出的物质，它们的混合作用都没有使介质的化学组成发生显著的改变。其原因也许是恒星外层同恒星内部物质的混合作用是十分有限的，而恒星大规模爆发所涉及的仅仅是它们的表面物质。

但是，少数例外的恒星却表现了完全不同的化学组成。在这些恒星中，我们相信中心物质和表面层确实已经混合在一起，因而就可以从表面物质的化学组成来分析必然发生在恒星中心的那些核反应。为什么混合过程刚好在这些恒星而不是在别的一些恒星中发生，这一点到目前为止还没有弄清楚，其原因也许是多方面的。

有三类恒星使我们特别感兴趣，它们是氮星、碳星和 S 星。

氮星是非常炽热的天体，它们好象已经把全部或近乎全部的氢转变成了氮。内中某些恒星的化学组成表明，氮可能通过四个氢核直接聚变为一个氮核的过程而产生。另外一些恒星则是在碳、氮和氧的催化作用下由氢生成氮，而且在这一过程中看来大部分初始存在的氧和碳都转变成了氮。

同氮星相反，碳星是一些冷的红巨星，内中化学基 CH ， C_2 和 CN 的光谱好象同碳原子谱线结合在一起。显然，这些恒星中的氮已经燃烧，它们通过三个氮核的聚变而形成了碳。恰恰在这点上，详细的光谱分析表明了不同的恒星是通过不同的途径形成这种碳含量很高的状态的。

光谱型为 S 型的冷星，对元素锆、钡、镧、铈、铈以及诸如 ZrO ， LaO ， YO 等由这些元素所构成的分子，表现出很高的谱线强度。这些重元素好象是通过吸收中子使核增大而形成的。

第八章中对这些过程进行了讨论，它们给出了恒星内正在不断进行的核反应的确实证据。对于这些不寻常的恒星的深入研究，也许会为一颗恒星在不同条件下可能遵循的各种不同的演化途径提供一幅详细的蓝图。我们应该把对这类光谱的分析和以在不同温度下发生的核反应速率的变化为基础的实验室工作密切配合起来，经过长时间的努力去解释银河系以及整个宇宙的核史或化学史。

另一个极端——它们代表了我们所看到的演化得最少的物质——是银河系内存着一些最年老的恒星，它们的金属丰富度普遍地比氢含量来得低，两者要相差三四个数量级。表 1.1 列出了与太阳中相应数值比较而言的相对丰富度比。

表 1.1 以化学元素的数密度表示的丰富度。

其中 HD140283 是贫金属亚矮星，HD161817 是水平分支星*

原子序数 z	元素	HD140283 ($\log n/n_{\odot} + 2.32$)	HD16187 ($\log n/n_{\odot} + 1.11$)
1	H	+2.32	+1.11
6	C	-0.5	-0.26
11	Na	-0.30	0.05
12	Mg	+0.01	+0.18
13	Al	-0.26	-0.26
14	Si	+0.07	-0.19
20	Ca	-0.03	+0.09
21	Sc	+0.61	+0.21
22	Ti	+0.05	+0.25
23	V		-0.42
24	Cr	-0.09	-0.27
25	Mn	+0.35	-0.43
26	Fe	+0.16	-0.10
27	Co	+0.02	+0.12
28	Ni	0.31	+0.11
38	Sr	0.00	+0.24
39	Y		-0.19
40	Zr		-0.13
56	Ba		-0.05

*表列数字是与太阳比较而言的相对值，为便于看出个别元素中可能有的影响，已扣除了不足额的平均值（Un69）。

尽管银河系中最年老的恒星表现出一种相对氢而言的贫金属性，但是氦看来并不贫乏。所以，氦也许是在某个原恒星阶段中产生的。那个阶段是否就是某个原星系阶段（全部星系物质朝星系中心的第一次坍缩），或者氦是否产生于演化宇宙（这儿假定用这个概念）的一生中的某个早期阶段，有关这方面的问题目前尚在争论之中。毫米波段所探测到的 3K 宇宙背景辐射可能就是这种早期阶段所产生的能量。

另一种可能是氦形成于宇宙的某个极早阶段，然后在第二次原星系的核加工阶段中产生弱的金属丰富度。诸如此类的问题人们正在进行积极的研究，几年之内也许会找到某种解答。

同研究化学丰富度有关的一个有趣的问题，就是推测太阳系在形成时的化学组成（Ca68）。某些元素从那个时候起就一直保留在少数几种陨星之中，而且它们之间的比例没有发生明显的变化。从地球表面的物质不可能轻易地取得这方面的资料，因为原封不动地在地球上保存下来的数量已是微乎其微。表 1.2 所列出的丰富度主要取自碳粒陨星，这种陨星被认为是原始太阳星云的最好的代表，因而可能也是大约 45 亿年前太阳表面化学组成的最好的代表。由于并非所有元素的丰富度都可以用这种方法可靠地加以测定，例如，某些挥发

图 1.7 核素丰富度和质量数之间的关系 (Ca68) 表 1.2 以质量表示的太阳系化学元素的丰富度，标准化到 Si=10⁶ (Ca68) *

元素	丰富度	元素	丰富度	元素	丰富度
1H	2.6×10^{10}	29Cu	919	58Ce	1.17
2He	2.1×10^{10}	30Zn	1500	59Pr	0.17
3Li	45	31Ga	45.5	60Nd	0.77
4Be	0.69	32Ge	126	62Sm	0.23
5B	6.2	33As	7.2	63Eu	0.091
6C	1.35×10^7	34Se	70.1	64Gd	0.34
7N	2.44×10^6	35Br	20.6	65Tb	0.052
8O	2.36×10^7	36Kr	64.4	66Dy	0.36
9F	3630	37Rb	5.95	67Ho	0.090
10Ne	2.36×10^6	38Sr	58.4	68Er	0.22
11Na	6.32×10^4	39Y	4.6	69Tm	0.035
12Mg	1.050×10^6	40Zr	30	70Yb	0.21
13Al	8.51×10^4	41Nb	1.15	71Lu	0.035
14Si	1.00×10^6	42Mo	2.52	72Hf	0.16
15P	1.27×10^4	44Ru	1.6	73Ta	0.022
16S	5.06×10^5	45Rh	0.33	74W	0.16
17Cl	1970	46Pd	1.5	75Re	0.055
18Ar	2.28×10^5	47Ag	0.5	76Os	0.71
19K	3240	48Cd	2.12	77Ir	0.43
20Ca	7.36×10^4	49In	0.217	78Pt	1.13
21Sc	33	50Sn	4.22	79Au	0.20
22Ti	2300	51Sb	0.381	80Hg	0.75
23V	900	52Te	6.76	81Tl	0.182
24Cr	1.24×10^4	53I	1.41	82Pb	2.90
25Mn	8800	54Xe	7.10	83Bi	0.164
26Fe	8.90×10^5	55Cs	0.367	90Th	0.034
27Co	2300	56Ba	4.7	92U	0.0234
28Ni	4.57×10^4	57La	0.36		

*本表的目的在于说明原始太阳物质的特征，所以尽可能依据 1 型碳粒陨星的丰富度，这是因为挥发性物质从这类陨星逸出的可能性最小。必要时所采用的其他方面的资料来源有普通球粒陨星、从观测光谱得到的太阳大气丰富度，以及在地球附近测得的太阳宇宙线丰富度。有八种元素因为缺乏足够的资料，是根据恒星内的核合成理论内插而来的。性元素可能通过扩散作用从陨星中逸出，所以该表还利用从太阳光谱及太阳发出的宇宙线所得到的资料作了补充；图 1.7 以对数标度用图解形式表示了这些结果。我们注意到，最重的一些元素很容易在陨星中加以测定，但它们在恒星大气的光谱中是不容取得的。因此，这两种资料便互相补充，而对于那些能够直接进行比较的元素来说，这两方面资料也

可以用来指出它们的一致性或差异的情况。在第八章中给出了一张恒星大气丰富度表（表 8.3）。

1.7 太阳系的起源

在太阳形成年代前后的某个时候，行星系统也就开始建立起来了。

太阳系是在太阳形成后过了几亿年才形成的呢；还是太阳和行星是在同一个过程中形成的呢？太阳系是从围绕着太阳的单个物质云形成的吗？或者在行星的诞生过程中还会不会牵涉到另一颗恒星的作用呢？

行星运行的轨道在空间的位置是有一定规则的，波特（Bode）首先注意到了这种规律性（见图 1.8）。波特定则仅仅是一种数字上的巧合现象，还是确实反映了行星轨道之间所存在的某种较为深刻的相互关系？具体说来，这种相互关系是为我们深入了解太阳系的早期历史提供了某些线索呢，或者还是对于任何围绕中央质量作轨道运动的天体来说，只要经过足够长的时间，使它们达到了某种动力学平衡状态之后必然就是这么安排的呢？

行星的形成是恒星形成过程中的必然副产品呢，抑或还是只有一小部分恒星才会有行星系统？具有太阳光谱特征的恒星是不是比其他一些恒星更有利于行星系统的形成？如果是这样的话，那么这些行星系是否就基本上和太阳系一样，因

图 1.8 上面这三张图分别反映了天王星和土星的卫星以及太阳系的轨道关系 $T_n = T_0 A^n$ 。 T_n 是第 n 个卫星或行星的轨道周期，所选择的 T_0 应分别接近母行星或太阳的自转周期（De68）

而可以预料在那儿也会有生命存在呢？

以上只是一长串未有解答的问题中一些比较重要的问题而已。也许，更为不幸的是我们现在可能有的工具还不足以使问题本身得到解决。相反，目前为止可以采用的方法——因而也是本节将要部分地加以介绍的方法——也许只是告诉我们哪一些比较新的途径可以比较有效地对付我们所必须加以回答的问题。

举个例子来说，牛顿运动定律描述了行星绕太阳的轨道，也描述了这些轨道因行星彼此之间的相互作用而发生的变化，这就是天体力学本身所涉及的主要内容。根据围绕各个行星的卫星的运动情况，以及根据邻近行星间的短期相互作用，我们可以算出构成太阳系的主要天体的质量。知道了这些质量，同时又知道了瞬时轨道，那么我们就可以朝前推算，从而也就可以展望太阳系在未来的演化情况。不仅如此，我们还可以知道太阳系在过去是怎样演化的，可以知道几百年、几百万年以至几十亿年前的太阳系又是个什么样子！

这类希望在一百多年前首次浮现于人们的脑际。但是，在那个时候问题十分清楚：由于计算工作极其繁琐，因而用这种方法重建太阳系过去的历史是不切实际的，所涉及的工作量实在是太大了。

今天，由于计算机在涉及大量重复性过程的快速计算中所具有的非凡的能力，天体力学获得了新生；因而，通过对于过去情况的计算来实现重建太阳系动力学史的梦想，也许就不会象半个世纪之前——那时对计算工作的复杂性已经有了充分的认识——看来那样的遥遥无期了。

但是，这条途径也许恰恰还是得不到多大收获。由于太阳系中可能经历过巨大的变化，我们对此又没有现成的资料，因而这样做可能是不成功的。在这种情况下，无视这些变化而进行的一系列计算必然会带来不真实的结果。不过，有时候这种错误的结果实在太不合情理，从而会促使我们去具体地探索突然变化的证据，这时就要用到其他也许已为我们掌握了的方法。在这种情况下，就应该采用几种不同的方法，并通过各种各样不同的推理思路去进行分析，而这样的分析就往往可以使我们追溯到过去的年代中去，从而部分地重建太阳系的历史。

那么这里所说的其他的方法，或者说考虑问题的思路究竟是什么呢？情况并不那么简单划一。有些无疑是马上可以用的，不过用起来可能很麻烦。有一些则比较简单，但它们也许只是另外一些性质上显然有关联的问题。不过它们之间的真正关系究竟怎样，这也许在我们找到答案之前是弄不清楚的——而我们至今恰恰还不知道到底怎样去找到这些答案。

为了说明这后一种情况，我们可以给出三个动力学上的论证。

(a) 动力学问题

首先，我们知道所有行星的轨道都很靠近地球的轨道平面——黄道面。只有水星这个最小①而又离开太阳最近的行星，其倾角高达 7° 。冥王星的倾角更大 ($>17^\circ$)；但是，我们相信它的倾角会由于附近比它质量大得多的行星的摄动影响而很快地变化，这一点与其他行星是大不一样的。因此，总的来说，所有行星的轨道角动量的轴线都差不多在同一个方向上。它们的平均角动量方向大致同木星这个质量最大的行星的轨道平面正交。

令人惊讶的是这一角动量方向居然同太阳的自转轴有 7° 的偏差。太阳的赤道平面对黄道同样要倾斜这么多。

那么怎样会造成这种状态的呢？这难道说明了太阳和行星不是从同一团旋转物质形成的吗？是不是就意味着曾经出现过另一个大质量天体、从而促成了行星的诞生呢？说得再详细一点，由于水星的轨道对黄道的倾角和太阳赤道的倾角大致相等，那么它有没有可能形成于较远的那些行星之后呢？

仅仅这么一个因素就引起了一系列的问题。因此，这可能不是解决问题的一种行之有效的途径。也许，未来会出现某种理论，它所涉及的因素要比现有的理论复杂得多，而轨道倾角之间的内在关系也将会作为这种理论的必然副产品而自然地加以解决；但是，单是这种副产品还不能为该理论的全貌提供充分的线索，在目前对我们也许不会有太大的帮助。

第二个例子涉及我们已谈到过的波特定则。最近，德莫特 (Dermott) (De68) 证明了，只要把这一定则稍为作一些新的发展，那么它就不仅适用于围绕太阳的行星轨道，而且也适用于围绕母行星的卫星的轨道。

德莫特用接近母天体自转周期 T_p 的某个基本周期 T_0 的函数，来描述该轨道系统内第 n 个天体的轨道周期 T

$$T = AT_0^n$$

图 1.8 表示了有关行星系统、天王星的卫星系以及土星卫星系的具

体结果。围绕其他行星作轨道运动的卫星系也表现出有类似的高优度拟合结果。但是，我们必须谨慎小心，要注意这里有三方面因素的作用。首先，图中的横坐标是用对数标度的，这样做也许比较容易把不足之处掩盖起来。第二，母体的自转周期 T_p 并不总是同公式中所采用的 T_0 值相一致，所以在确定某种高优度拟合的过程中这个参数完全是随意的。另一个带有随意性的参数是 A ，可以通过它的选择来给出最优拟合；实际上 A 的随意性是有条件的，它始终只能是一个小整数的平方根。最后，并非对应于每个整数值 n 的全部位置上都可以找到一个轨道天体。有时候会留下一个空位，而有时候却是两个天体占有同一个给定的 n 值。既然有这么多的随意性，那么在这样前提下对于波特型方程的麦面上的高优度拟合是否会真正有意义呢？

要回答这个问题必须进行十分详细的统计分析。这种分析相当困难，因为对于实际上以不同的方式带有随意性的许多参数作出客观的估计是很不容易的。可以试行的不同形式的拟合方法有多少种？在给出自由参数的数目相同的前提下，又有多少种拟合实际上会取得比较好的结果？但是，也许在经过长时间的工作之后会证明这类资料确有价值，比如巴耳末对于氢光谱的经验分析就是这样，后者最终使人们对原子结构取得了正确的认识。

第三个例子涉及到我们所观测到的恒星自转，这种可能有用的见解仍然依据于动力学的推理。O 型和 B 型星的自转速度为 $100 \text{ 公里} \cdot \text{秒}^{-1}$ ，而且比这快得多的也并不罕见。另一方面，象太阳这类 G 型矮星的表面速度大约只有 $1 \text{ 公里} \cdot \text{秒}^{-1}$ 。当我们沿着主星序观测时，会发现在这两种极端值之间恒星的自转速度出现一个相当明显的突变，突变的位置在 A5 型星附近（图 1.9）。但是，我们知道太阳的角动量仅仅是绕太阳作轨道运动的行星总角动量的 0.5%。实际上，整个太阳系的角动量等于 A 型星的角动量。因此，这一点就启发我们把晚型星所观测到的低角动量同行星系统的形成联系起来考虑。也许所有这类光谱型的主序星都象太阳那样会有自己的伴星；而且，也许这类伴星的形成过程正是恒星形成过程中不可分割的一部分（McNa65）。

某些迹象表明，太阳以外的其他恒星也有自己的行星，甚至也许有几个行星。人们发现，离我们不远的巴纳德星在天空中的自行轨迹，只能用存在一个几倍于木星质量的行星来加以解释，要是用存在两个质量分别为 1.1 倍和 0.8 倍木星

图 1.9 不同质量恒星每单位质量的角动量。图中 S.S 代表太阳系。麦克纳利 (McNally) 指出 (McNa65)，A 型星的最高角速度约为 10^{-4} 弧度 $\cdot \text{秒}^{-1}$ 。这意味着它的离心力很大，因而低质量恒星就不可能保住自身的表面物质。如果这种物质在恒星形成的过程中被甩了出去，其结果可能就形成一个行星系统

质量的行星来解释那就拟合得更好 (vdKa69)。恒星本身绕着该系统的公共质心运动，尽管这种运动极其微小，然而仔细的观测证明它是确实存在的。星表上称为天鹅 61 和莱兰德 (Lalande) 21185 的两颗恒星也表现出伴有行星的证据。

象这样的研究，工作量是很大的，而且只能适用于一些最近的恒星。

但是，离我们比较近的恒星也有类似行星的小伴星这一事实，使我们完全相信太阳系并不是绝无仅有的或极其稀罕的珍奇现象。相反，我们的结论是行星系统的存在一定相当普遍，对于这类系统的形成必然存在着一种解释，而这种解释并不涉及到小概率事件的发生。这是一个很重要的结论，因为这么一来好些理论就可以被排除了；例如，要求有一颗恒星在太阳附近经过的理论就是其中之一。这种恒星在太阳附近经过的事件完全不可能解释象太阳和巴纳德星这样彼此靠得很近的两个行星系统。

假如我们曾一度怀疑会不会是巴纳德星从太阳附近经过，从而使这两个系统都形成了行星；那么我们只需注意太阳相对邻近恒星的运动速度是 $20 \text{ 公里} \cdot \text{秒}^{-1}$ ， 5×10^9 年前太阳必然和它现在的邻居们相隔极其遥远。

当然，动力学研究只能得到我们所收集到的、有关太阳系历史知识中的很小的一部分，我们可以通过许多别的途径取得远为完整的资料。

(b) 放射性年龄测定

例如，我们可以通过放射性年龄测定的方法，估计出地球上至少有某些岩石必然是在大约 35 亿年前凝固的 (Ba^{71a})；而从行星际空间落到地球上来的陨星的年龄为 40~45 亿年。整个地球的年龄看来大约是 45 亿年。带回地球的月面样品表明其年龄超过 35 亿年，因此，月球和地球的年龄可能大体上差不多。

凝固岩石的年龄可以用样品中所发现的放射性母体和衰变产物之比来加以测定。例如，铀同位素 U^{238} 衰变为铅 Pb^{206} ，在这个过程中放出八个 α 粒子，其半衰期为 45 亿年。如果岩石不是多孔状的，这些 α 粒子就会同某些电子结合而形成氦核并得以保存下来，其中电子是随着 α 衰变中核电荷的减少而释放出来的。测定岩石中 U^{238} 与 Pb^{206} 之比以及氦的存在量，就可以对年龄作出某种估计。当然，这种估算必须考虑到可能同时发生的其他放射性衰变。例如，铀同位素 U^{235} 衰变为铅 Pb^{207} ，同时释放出七个 α 粒子，半衰期为 7 亿年；钍 Th^{232} 衰变为铅 Pb^{208} 及六个氦原子，半衰期为 139 亿年；铷 Rb^{87} 转变为锶 Sr^{87} ，半衰期 46×10^9 年；而钾 K^{40} 转变为氩 Ar^{40} ，半衰期 12.5 亿年 ($\text{Wh}64$)。

要正确地测定年龄通常要涉及到几种衰变过程，只有当所得到的全部资料取得一致的结果时，我们才能认为对被研究样品所确定的年龄是可靠的。

这类研究的结果表明，地球和陨星是在 4.5×10^9 年之前凝固的，凝固过程约需 10^8 年。另外一些涉及到恒星内部所发生的核过程的理论，对恒星抛射物质时期某些元素各类同位素的丰富度比作了预言。因此，目前所发现的、太阳系内部若干放射性同位素的丰富度比，也可以用来测定早期恒星内部这些元素形成的时间。令人感到有些惊讶的是这一时间大约只有 6×10^9 年。所以，太阳必然是在太阳系内所发现的那些较重元素形成后的大约 10^9 年时间内形成的，而这些元素也许是在更早一代恒星的爆发过程中生成的。实际上，恒星和行星形成的整个过程所经历的时间大概只有 10 亿年。

(c) 元素同位素的丰富度

从不同元素的相对丰富度还可以得到另外一种类型的资料：氘、锂、铍、硼在陨星中和地球上的含量都相当可观。但是，它们在太阳上几乎一点都不存在，其原因是即使在温度比较低的条件下，所发生的热核反应也会把它们破坏掉。然而，这类元素可以在宇宙线轰击重核并使重核分裂的过程（散裂过程）中形成。这种过程会释放出中子，如果中子因与氢原子相碰而减速，就可以产生我们所观测到的锂同位素比 Li^6/Li^7 和硼同位素比 $\text{B}^{10}/\text{B}^{11}$ 。因此，我们可以说早期太阳系中也许很大一部分质量是以冰球形式出现的。如果这种冰球的直径在 10 米左右，那么太阳中所产生的宇宙线粒子就能引起散裂，而在这种假想的冰球中所会的氢会使散裂过程中所释放出来的中子减速（ $\text{Fo}62$ ）。这样，减速后的中子就会和 Li^6 发生反应而形成氘，也会和 B^{10} 反应形成 Li^7 ，结果使 Li^7 的浓度大大超过 Li^6 。我们相信这种较为复杂的过程是必须的，因为散裂往往会产生等量的 Li^6 和 Li^7 ，然而地球上 Li^7 的丰富度远比 Li^6 来得高。

有些人对这种理论作了修正，他们发现含有较少 H_2O 冰块的较大球体可以给出同样的结果，而只要有一定数量的地球物质受太阳宇宙线的初始轰击就够了。因此，较大的行星前物质也能造成应有的 Li^6/Li^7 比值，10 米尺度就不再是必要条件了。有趣的是这些由冻结气体构成的天体同彗星的结构有点相象。

(d) 彗星以及行星的化学组成

也许，早期阶段的太阳系是由彗星那么大小的天体所构成的。彗星是这样的一种天体，它们含有如氨一类的冻结气体，也可能还有水。彗星所拥有的大量的氢就包含在这些分子或较大的母分子中，后者在太阳辐射的曝晒之下可以分裂为 NH_3 ， OH ， CO_2 以及 CH ；也可能还有大量的冻结氢气存在。这些彗星从 10^{18} 厘米远处朝着太阳运动，它们好象是太阳系边缘的成员，在远离太阳的地方渡过了它们一生中大部分光阴；经过了一亿年或者也许还要长得多的时间之后，目前正在向我们靠拢。在这些彗星中我们也许看到了形成行星的原始物质。彗星显然是在太阳形成的早期被推斥到离太阳很远的地方，并且从那时起一直在作轨道运动。它们可能代表了从早期太阳系保存下来的物质的深度冻结的样品；因此，如果要重建太阳系历史的话，这就是一些需要加以研究的、极有意义的天体。遗憾的是到目前为止我们只能在彗星接近太阳的时候来对它们进行研究，这时阳光的加热作用已使彗星中的某些冻结气体蒸发，同时又把那些同冰结合在一起的固体物质游离了出来。一部分固体微粒后来闯入地球大气，由于它们相对地球的初始速度很高，粒子就被加热或发生燃烧。这种加热和燃烧引起了光辐射，我们可以分析它的光谱，找出所存在的各类元素。利用这种光谱，以及彗星接近太阳时所释出的气体的光谱，我们可以对彗星的成分进行大致的化学分析。我们发现，除了大量的氢以外，它们还含有在外行星内含量也很丰富的那些元素。这种估计仍然是很粗糙的，然而细致的化学分析也许一定要等待空间探测器的发射，届时才能真正取得彗星物质的样品并对它进行研究。

木星引力的影响是非常大的，它至少可以使某些彗星的轨道发生显著的改变，结果使这些彗星明显地向太阳靠拢。它们原来的轨道是一些很扁的椭圆，可以伸展到太阳系最遥远的地方。木星把它们俘获过来，

使之进入比较小的短周期轨道，轨道的远日点在木星轨道附近。

然后，太阳辐射的继续加热可以使这种短周期彗星的大部分气体蒸发掉。彗核本身太小，它的引力不足以束缚住这些气体，于是不用多久整个彗星就会土崩瓦解。如果彗星有一个固体的核，那么只有这个核才能维持几千年。很可能至少有一部分小行星——这种天体的大小基本上处于几公里到几分之一公里的范围内——是较早时期彗星的残骸。它们的轨道确实和短周期彗星极为相似，因而也许的确有着共同的起源。但是，最大的小行星的直径超过 100 公里，这比迄今所观测到的彗星都要大得多，因而这种比较大的小行星可能并不代表着彗星的残迹。

现在让我们回到对行星的讨论上来。不同行星在密度和化学组成上的差异，可能为我们提供了关于它们如何形成的证据。内行星的密度比外行星高得多，它们还含有硅酸盐和铁，这些元素在比较高的温度下也不会气化；所以，内行星虽然靠近太阳但仍能保持它的固体状态。它们的氢含量比较少，这是因为对靠近太阳的小的行星来说，那儿的温度很高，氢就很容易蒸发掉。正由于这种蒸发作用，今天所看到的内行星的大气可能就和太阳系早期它们的大气成份大不一样。具体来说，我们认为地球的大气一直在进行还原——这意味着在过去氢曾经是很普遍的，而氧则被束缚在分子中，所以不能用来同其他的元素化合。当然，今天的地球大气肯定正在氧化，游离态氧的丰富度为 20%。从表 1.3 我们可以看出，较大的行星密度比较低，但质量比内行星来得大。它们的大部分质量以氢的形式出现，并且能够把这些氢束缚住，其原因在于它们离开太阳比较远，温度就比较低，再加上它们有一个比较强的引力场。

由挥发性所决定的这种分布情况，可能就说明了在围绕太阳的气体原行星云的早期生命中，蒸发压低的元素可以在离太阳很近的地方凝固。最初，凝聚体的大小也许不会比尘埃颗粒来得大，但是这些微粒可以通过不断的碰撞而集聚起来，碰撞中有的颗粒双方都发生汽化，而有的则使这些颗粒粘合在一起。汽化和粘合都会使不断凝聚中的尘埃颗粒的速度范围变窄，直到它们能够大块地聚合在一起。当这种聚块发展到 1000 公里范围时，它们就能够通过万有引力的作用开始把更大范围的物质搜罗起来，并通过这种方式使它们的俘获半径增大。能束缚住大气的一些较大天体也能使碰撞前下落的粒子以及碰撞后反弹出去的物块减速，这样就增大了对碰撞物质的俘获率。因此，大天体最终将通过吞食小天体而迅速变大，其结果必然是形成少数几个大的天体而不是一大批小天体。

表 1.3 九大行星的主要特征*

行星	水星	金星	地球	火星	木星	土星	天王星	海王星	冥王星
轨道半长轴	0.387	0.723	1.000	1.524	5.203	9.54	19.2	30.1	39.4天文单位
恒星周期	0.241	0.615	1.000	1.881	11.86	29.46	84.02	164.8	248年
偏心率	0.206	0.007	0.017	0.093	0.048	0.056	0.047	0.009	0.250
倾角	7° 0'	3° 24'	0° 00'	1° 51'	1° 18'	2° 29'	0° 46'	1° 46'	17° 10'
赤道半径	2420	6050	6378	3380	70850	60000	25400	24750	3000(?)公里
质量	3×10^{22}	4.9×10^{27}	5.98×10^{27}	6.7×10^{26}	1.9×10^{30}	5.7×10^{29}	8.67×10^{28}	1.2×10^{29}	5×10^{27} 克
密度	5.4	5.1	5.5	3.97	1.36	0.70	1.3	1.7	(?)克·厘米 ³
已知的卫星数	0	0	1	2	12	10	5	2	0
离太阳极大角距处的亮度	-0.2	-4.2		-2.0	-2.5	+0.70	+5.5	+7.9	+14.9
m_v									
典型表面磁场	(?)	$< 5 \times 10^{-2}$	0.5	$< 10^{-3}$	5(?)				(?)高斯
表面力	360	870	982	376	2350	905	~830	1100	(?)厘米·秒 ²
大气的主要成份		CO ₂ , CO, H ₂ O	N ₂ , O ₂	CO ₂ , CO, H ₂ O	H ₂ , CH ₄ , NH ₃ , He	H ₂ , He, CH ₄ 可能有NH ₃ , H ₂ O	H ₂ , He, CH ₄ 可能有NH ₃ , H ₂ O	H ₂ , He, CH ₄ 可能有NH ₃ , H ₂ O	
自转周期	58.6天	243天	24小时	24小时	10小时	10小时	10.8小时	15.8小时	6天9小时
扁率	0.0	0.0	0.0034	0.005	0.06	0.1	0.03	0.025	(?)
赤道上的离心力	0	0	3.4	1.7	225	176	62	28	(?)厘米·秒 ²
日下点表面温度	620	250 (云层顶部)	295	270	140 ± 10	138 ± 6	125 ± 15	134 ± 18	(?)K
反射率-反射光与入射光之比	0.06	0.85	0.4	0.15	0.58	0.57	0.8	0.71	0.15

*(1)到现在为止已发现木星共有 16 个卫星。1979 年 5 月发现木星有一个环，宽度约数千公里。厚度约 30 公里，到木星中心距离为 128000 公里。

(2)到目前为止已发现土星共有 16 颗卫星。

(3)1977 年发现天王星有光环，主环呈椭圆形，宽 120 公里，离天王星约 51000 公里。

(4)1978 年 4 月发现了冥王星的一颗卫星，并为后来的观测所证实。这颗卫星取名“查龙”，直径约 800 公里，卫星轨道距冥王星约 19000 公里；公转周期 6.3 地球日，与冥王星自转周期相同。利用这颗卫星求

得冥王星的质量仅为地球质量的千分之三，直径 2400 公里。——译者注

即使那些比较大的行星已经失去了许多氢和氦，太阳中所发现的元素的天然丰富度看来仍然是反映了整个太阳系的化学组成；这一点看来肯定是正确的。毫无疑问，这些行星也含有铁和硅酸盐，但氢的含量要大得多，这是因为氢的天然丰富度极高。

迄今为止我们已经看到，关于太阳系发展的情况我们的认识是极为肤浅的。除了已提到的少数几个因素外，还有许多别的路径可以引导我们进一步了解早期的太阳史。例如，对陨星的研究可以取得大量的资料。许多石陨星呈现丰富的小球状结构，小球体的大小为毫米级，它们被一种硅酸盐的基体粘结在一起。这些球形的粒状体是否在早期太阳星云中就已存在，因而它们包含了可以用来推测原始条件的那些信息呢？铁陨星也呈现出那种只能在非常高的压力条件下才能形成的晶体结构。这一点是不是意味着这些陨星起源于某个大行星的内部，而这颗大行星已经在过去某个时候碎裂了呢？这颗爆炸了的行星是否能生成小行星呢？要知道，根据波特特定则，小行星所在的区域应该有一颗行星。或者，从另一方面来说，形成晶体结构所需要的高压条件是否能由陨星不断碰撞时自然出现的冲击所提供呢？

通过对行星磁场的研究，从行星与它们的卫星间的相互作用，以及对黄道尘埃云的研究，我们还可以发现有关太阳系结构方面的更多的内容；这里所说的黄道尘埃云同样也绕着太阳作轨道运动，它们可能就是彗星的碎片，或者是由小行星间或较小天体间相互碰撞所形成的碎片。化学和核化学方面的详细研究同样在以飞快的步伐为我们带来新的见解。但是，每一种新方法所引起的问题好象要比它所解决的问题还来得多。毫无疑问，我们离开自己的目标仍然是十分遥远，也许要过几十年之后我们实际上才能开始把太阳系连贯的历史联结在一起。

我们也许可以从对行星的飞行中了解到许多东西，携带科学仪器的飞船将从绕行星运转的轨道上进行细致的观测；飞向火星的“水手 9 号”已用这种方法为我们收集了大量的资料。飞船在行星表面登陆，或者在飞向行星表面途中对大气样品进行分析，这些可以为行星的表面化学和生命存在问题提供更有意义的资料。

1.8 星系和星系团的形成与演化

整个宇宙间的物质分布是非均匀的。宇宙中有相当多的地方完全是空无一物；但是，我们发现，在这些虚无空间中镶嵌着一些气体的团聚区、恒星的团聚区以及星系的团聚区，它们呈现出一种五花八门的阶梯等级序列。这里有中性的和电离的气体云、星群、星团、矮星系和巨星系；以及图 1.10 所示那样的星系群，还有星系团。为了确定这些不同类型集团的特征和化学组成，人们已经提出了好几种不同的物理过程，它们显然在互相竞争着。究竟是哪一些物理过程导致区别球状星团和星系、以及单个星系和星系团的本质差异，对此我们是一无所知。我们简直不知道当我们从 10^{20} 厘米尺度转到 10^{23} 厘米、以至最后扩展到 10^{25} 厘米尺度时，为什么应该存在这些差别。上面所举的这三种尺度分别代表了球状星团、星系以及星系团的大小范围。

比这再大 10^3 倍那就是整个宇宙的尺度了，它的视界离我们约为 10^{28}

厘米^①。

在对这些大小上的差异作详尽、深入的了解之前，我们首先要肯定这些差异是确实存在的，这就是说它们并不仅仅是

图 1.10 星系群 VV282，编号取自伏龙佐夫·凡尔伊阿米诺夫
(Vorontsov·Vel' iaminov) 编纂的星系表 (Bu71a)

我们特有的观测方法所带来的某种难以捉摸的特征。举个例子说，我们可以设想有一种非常小的星系，它们的特性同最大球状星团的特性相类似。但是，因为这些星系太暗了，距离一远就观测不到，因而也就不可能知道它们是否存在。

为了绕开这个难题，我们可以先对我们自己银河系近邻范围内所有已经发现的星系团和星系群作一番彻底的研究，在这个范围内我们也许能够以一定的深度来确定星系和星系团的性质。具体来说，我们很希望知道下面这一类问题的答案：

(a) 是否存在一些小的星系，它们的大小介乎球状星团和象仙女座大星云那样的大的星系之间？这里说的仙女座星云是宇宙中离我们最近的一个旋涡星系。

(b) 如果有的话，这些星系是否呈现与球状星团同类型的结构，或者它们是否更象星系、实际上在内部包含了若干个次级球状星团作为其组成部分呢？再进一步说，它们是否象较大的星系那样也包含有星际气体呢？

(c) 球状星团，从它们可以不受任何星系的引力束缚而独立存在于宇宙空间之中这一点上来说，它们会不会有时表现出象独立星系那样的特征？还有，这种星团会不会有它们自己的那份星际气体呢？

我们很幸运，这类问题是可以回答的。对银河系和仙女座星云来说，它们并不构成与所有其他星系完全孤立的一对星系。过去几十年间所作的仔细探索表明，这里存在着一个本星系群，它包括了 21 个目前已得到证认的成员星系（表 1.4）。毫无疑问，另外还有一些星系已经被银河系内的吸光物质遮掉了，而且很可能还有许多星系仅仅是因为太暗，用我们现有的技术还观测不到。

表 1.4 中没有列出两个受银河系强吸收作用影响的天体，即马菲 (Mafei) 1 和马菲 2；这是以发现者的名字命名的。尽管马菲 1 可能是一个巨椭圆星系，离开我们只有 1 百万秒差距 (Sp71)，而马菲 2 可能也是一个近邻星系，但是这两个源是否确实是本星系群的组成部分目前还没有搞清楚。这个问题应该很快会得到解决^①。

现在，我们来介绍一下明确属于本星系群的几个较小的成员星系。

本星系群内有若干个矮椭球系。这是一些非常小的星系，它们没有气体，也没有尘埃，看上去很象一些极大的球状星团，但是表面亮度很低。天炉座星系就是其中的一个，内中包含了五个显然是很普通的球状星团；因此，我们必然认为它更象是一个星系而不是一个星团。

表 1.4 已知的本星系群成员 (vdBe68, 72)

名称	a (1950)	δ (1950)	类型	M/M _☉	M _v	距离	(1-b/a)	半径 秒 差距
M31=NGC224 银河系	00 ^h 40 ^m 0 1742.5	+41°56' -2859	Sb-II Sb 或 Sc	3.1×10^{11} 1.3×10^{11}	-21.1 -20 ?	690 千秒差距 —		
M33=NGC598 大麦哲伦云	0131.1 0524	+3024 -6950	ScII-III Ir 或 SB _α	3.9×10^{10} 6×10^9	-18.9 -18.5	50		
小麦哲伦云	0051	-7310	III-IV Ir 或	1.5×10^9	-16.8	60		
NGC205	0037.6	+4125	IrIV-V E6p		-16.4			
M32=NGC221	0040.0	+4036	E2		-16.4			
NGC6822	1942.1	-1453	IrIV-V	1.4×10^9	-15.7			
NGC185	0036.1	+4804	dE0		-15.2			
NGC147	0030.4	+4814	dE4		-14.9			
IC1613	0102.3	+0151	IrV	3.9×10^8	-14.8			
天炉座星系	0237.5	-3444	椭球系		-13.6	~180	0.35	900
玉夫座星系	0057.5	-3358	椭球系		-11.7	~84	0.35	300
狮子座 I 号星系	1005.8	+1233	椭球系		-11.0	~220	0.31	200
狮子座 II 号星系	1110.8	+2226	椭球系		-9.4	~220	0.01	200
小熊座星系	1508.2	+6718	椭球系		-8.8	~67	0.55	200
天龙座星系	1719.4	+5758	椭球系		-8.6	~67	0.29	130
仙女座 I 号星系	0043.0	+3744	椭球系		-11	离 M3140 千秒差距		
仙女座 II 号星系	0113.5	+3309	椭球系		~-11	离 M31125 千秒差距		
仙女座 III 号星系	0032.6	+3614	椭球系		~-11	离 M3160 千秒差距		
仙女座 IV 号星系	0039.8	+4018	?			离 M3110 千秒差距		

表 1.4 中量 b 和 a 是天体的短径和长径，它们表明这些系统的非球形是显见的。在银河系的伴侣中只有狮子座一个星系看上去是滚圆的。

正如在第三章中将要讨论的那样，一个引力束缚很松散的恒星集团，例如任何一个上述这样的椭球状系统，它是不能过份接近一个质量巨大的引力吸引中心的；因为一旦出现这样的情况，作用在它的近端和远端的万有引力差量早就把它撕得粉碎了。从这一点我们可以推断，任何一个这样的天体从来都不可能非常接近银河系或者仙女座星云 M31。换句话说，如果矮系在巨系附近经过，矮系就会有落向巨系的趋势，其中靠近巨系的那部分的跌落速度要比远离巨系的那部分来得大，结果矮系就必然会被瓦解，它将不可能通过引力的自吸引作用保持本体的存在。

尽管这些矮系离我们相当近，但是我们不清楚它们是否受到我们银河系的引力束缚；有关它们相对于银河系的运动速度方面可用的资料实在少得可怜。如果矮系没有为银河系所束缚，那么它们在本星系群内多少应该呈均匀分布，因而总数就可能有 200 个左右。我们只能看到那些最近的成员，因为它们太暗，离开远了就观测不到。然而，也有可能所有这些天体或者被银河系、或者被 M31 所束缚，在这种情况下总数就必然要少些。那样的话我们就必然要怀疑这类系统是在某个星系的边缘形成的，它们处于某种原星系阶段，而且从来没有靠近过中央天体。有趣的是矮系中恒星的顏色同银河系成员星稍有不同，而两者的赫罗图则有很大的差异。这说明在矮系中有不同的氢或金属丰富度，对这类天体中单个变星所作的研究也证实了这一观点。

因此，在这些显然始终同银河系本体没有多大联系的孤立系统内，我们好象有可能研究那些与银河系大多数恒星有不同初始化学组成的恒星的演化特性，而这一点是很有意义的。

所以，这些小型星系作为研究恒星内重元素产生理论的检验样品，以及作为构成我们银河系的物质的原始化学组成的指示品，它们也许是很值值的。鉴于密切接近的两个天体会产生潮汐作用，而事实上这些矮系本身又没有星际气体，这两点就排除了由银河系造成污染的可能性，至少污染的程度不会很厉害。因为星际气体的不存在，矮系俘获银河系在过去任何一次猛烈爆炸中所抛出的气体的说法就难以成立了。

看来，同样有充分的证据表明，至少对我们银河系和 M31 来说，越是靠近星系的中心，恒星内的金属丰富度就越高。核区的金属显得特别丰富，这一点好象是说明了在这些区域内化学元素的演化速度不知什么原因会变快了，而整个星系内元素的演化是不均匀的。

本星系群内星系之间更有趣的差异是气体丰富度上的差异。尽管矮椭圆球系内没有很多的星际气体，两个麦哲伦云的气体丰富度却是很高的，大麦云约为 9%，小麦云为 30%。银河系及 M31 的气体含量分别只有它们质量的 2%和 1%。

与本星系群成员籍问题有关的就是存在着一些球状星团，它们的速度是如此之大，以至即使这些星团靠近银河系实际上也不可能为它所束缚。潮汐因素同样说明了某些这类球状星团可能从来也没有接近过银河中心。因此，它们又是一种孤立体系，这种孤立性也许会表现出与银河系演化无关的、完全不同的化学演化过程。

这些孤立系统，以及还有银河系本体内部化学成份相差悬殊的各种星族，它们应该为化学元素的合成理论提供有用的检验。同时，它们应该有助于我们更好地推测银河系的初始化学组成情况，并使我们更深入地了解那些导致银河系内部以及银河系和它的伴系——这种伴系在化学组成上是孤立的——之间在化学组成上出现差异的各个主要事件。

但是，比这更重要的是我们看到了本星系群已经在帮助我们逐渐地把本节一开始所提出的某些问题搞清楚。我们看到在星系和球状星团之间没有任何不可逾越的鸿沟；我们意识到存在着一些差异，然而在临界场合下我们所选择的标准有时就作不出明确的判断。

接下来我们要问，星系会是怎样形成的，为什么在寻求这一现象的解释时困难就更大（Re68a，Re70）？我们知道星系在宇宙中比比皆是，

在现代技术可及的最远距离处，我们仍然可以找到星系，而且它们的形状显然没有什么变化，数目也没有减少。那它们为什么会这样呢？

对于任何这一类问题我们还没有找到可靠的答案，因此，我们也许应该从提出为什么开始：天体物理学家们通常所用的途径总是自然假定星系是由早先的稀薄物质所形成的凝聚体。在这条思路和恒星形成理论所取的途径之间存在着某种相似之处，两种情况都是从原始的弥漫气体开始，都要达到某种致密的外形结构，两种情况也都存在着一些困难。

就星系形成来说，主要的困难在于宇宙膨胀。为了理解星系的形成，我们总要想到万有引力，或者使物质朝一个小范围内凝缩的另外某种作用力。但是，这种作用力始终要遭到任意两个以上物质单元间的连续退行的反抗，这是因为宇宙膨胀迫使它们不断地分离。结果，在宇宙膨胀和引力之间发生了一场争斗；引力显然赢得了胜利，但是我们并没有处处都观测到这一过程，因而还不能给予定论。

现在让我们重新检查一下我们的主要概念：我们能肯定星系确实是通过这种凝聚过程形成的吗？未必如此！另外一条不同的途径是存在的，它第一次由苏联天文学家安巴楚勉（Ambartsumian）作了详细的论证。他注意到在天空中可以观测到许多星系对，而它们的视向退行速度的差量有时候竟是如此之大，以至这两个星系彼此间应该处于迅速远离之中。除非存在某种观测不到的大块物质，从而使系统的总质量比我们仅仅从各个星系的亮度推算出来的质量要大得多。否则的话，由于它们相互间的万有引力作用很弱，结果就无法把它们束缚在一块。有时，这些星系对还由某种暗弱的星系际桥联系在一起，这就证明两个星系本来就有某种发生学的关系。

安巴楚勉认为，这类星系可能非常年轻，也许就是在最近的一次猛烈爆炸中形成的。形状极不规则的特殊星系大量存在，这一点是毋庸置疑的。大约星系总数的 3% 呈现有大尺度的不规则性，这种不规则性可以在星系自转一周的时间范围 τ （或者说几亿年）内消除掉。如果 $\tau \sim 3 \times 10^8$ 年，而宇宙的大致年龄为 10^{10} 年，那么 3% 爆炸现象的出现是和下述思想一致的，这种思想认为每个星系都曾在它的一生中经历过这样一个剧变阶段。安巴楚勉认为，这一阶段就意味着星系的诞生。大量的、表现这类性质的特殊星系已由伏龙佐夫·凡尔伊阿米诺夫收集在一本特殊星系表内。

人们已对许多这种类型的天体作了详细的研究（Ar71）*。某些星系形成星系链，而且显然不久就会断开，它们的自转曲线表明，成员星系好象是一些十分普通的星系。但是，它们很可能是在最近形成的，因为这些星系的总引力质量不足以把它们维持在一起。它们经过几亿年——宇宙年龄的 1%——时间后就应该各奔东西！

类星体的发现同样被一些天体物理学家解释为有利于星系在今天形成的可能的证据。类星体非常明亮，因而它们可能正在极其迅速地消耗它们的能源。我们相信，在几百万年以后，类星体将不可能具有它们今天那样的光度。类星体是不是由星际介质通过收缩而形成，或者它们不是一些从虚无中形成星系的源泉，这仍然只是一种推测性的问题。

从稳恒态宇宙学的观点来看，星系连续不断形成的观念是很吸引人的。在这类宇宙学中，我们一定要对今天条件下星系的形成问题作出解

释。这意味着，如果宇宙是均匀的话，那我们应该能够在离我们最近的范围——也许是几千万秒差距——内观测到星系形成的证据。因此，只要我们知道怎样来识别最新形成的星系，就可以对这种宇宙学的预言进行直接的检验。然而遗憾的是我们并不知道！

在演化宇宙中，星系的形成同样可以持续到今天。但是，我们相信大部分星系是在很久以前形成的，而目前的星系形成只是代表了一个活动性要比现在远为剧烈的时期的某些结尾阶段。

对于演化宇宙学模型来说，在勒梅特 (Lemaître) 宇宙中最容易想像星系从星系际介质中的形成过程。这是一种宇宙学模型，在这种模型中宇宙在诞生后随即迅速膨胀，膨胀速度慢慢减小，并达到某种零膨胀的静止阶段，然后膨胀再继续进行。在静止期间，宇宙大致可以用某种静态结构来描述，这时也许很容易形成星系，因为不存在妨碍凝聚过程进行的宇宙膨胀。如果导致河外气体团聚的不稳定性确实能够出现的话，那么这种不稳定性也就是在这类宇宙中最有希望出现了。

当然，我们还不清楚这一点是否能成为支持勒梅特模型的充分理由。趋于不稳定性的一种极端倾向可以导致形成相当小的凝聚体，而不是形成星系那么大小的天体。因此，对勒梅特模型中的形成过程一定要作理论上的分析，这里不仅要用到一种有助于弄清楚凝聚究竟怎样才会发生的观点，而且要用到能对是否会形成适当大小范围的凝聚体作出抉择的概念。迄今为止这一问题还未成功地获得解决。尽管星系的形成因此而成为天体物理学中一个棘手的问题，然而它确实使我们对于更深入地了解宇宙中甚大尺度上所发生的过程抱有很大的希望。如果我们一步一步地把星系是怎样形成的问题搞个水落石出，那么我们对于宇宙的起源——只要有过这样一个起源的话——以及对于能够在大尺度上成立的动力学定律的了解将必然会大大地提高一步。这儿所说的大尺度要比太阳系范围大 10^{10} 倍，而对于我们现有动力学定律的验证是在太阳系的尺度上进行的。

1.9 有关生命的若干问题

天体物理学中最富有魅力的问题之一就是生命的起源。由于物理学和化学的方法一贯表明它们能够阐明生物学上的各种问题，因而今天我们就有充分的信心期望在将来的某一天会洞悉生命的起源、以及生命能够起源的条件。

由于我们在谈论生命时不知道这一现象所包括的范围有多大，这就在一定程度上妨碍了我们对这一问题的认识。关于生命本身的定义至今也还没有最终取得一致的看法。病毒是不是活的？或者说，病毒组织是否就是一些较复杂的组织的繁殖物质，正象晶体结构就是某种复杂结构的一种繁殖物质呢？在什么样的范围内自然界的变异以及最终的死亡才是有生命物质的必须特征呢？生物和非生物之间必然可以在某个地方划出一条分界线，然而我们还不知道究竟怎样去划分它们。

即使我们知道了怎样去定义生命和有生命物质，我们仍然必须研究生命是否可能有完全不同的物理学或化学基础，还要研究尺度完全不同的生命会不会有可能在宇宙中出现。

在上一节中我们已经给出了说明星系可以连续不断形成的证据，这

就是较老的星系能够通过爆炸分裂成为两部分或者更多的部分。如果存在着星系不断地把氢收集起来，那么完全可以想象星系能够成长壮大，象细菌那样通过双分裂进行繁殖，在恒星内部通过新陈代谢把氢转变为氦，或者通过恒星的引力坍缩作用使物质完全新陈代谢。那么，这样可以认为星系是活的吗？如果不是，这一图象至少也说明宇宙中的生命也许可以按照完全不同的形式来理解，也许可以在与我们现有的认识水平截然不同的尺度上出现。

即使把有关生命的问题作进一步的限制，比如理解为地球上的生命形式，我们还是会面临难以克服的困难。在我们的地球上所知道的不同的生命形式数以百万计。我们也知道有的物种已经灭绝，诞生了新的、完全不同的物种。这是什么道理呢？是不是地球上的条件发生了巨大的变化，环境对某一类生命已变得很不适宜、而对另一类却是比较有利呢？我们相信情况就是这样。

原始地球，当它从环绕太阳的星云形成之初，大气成份和今天的情况完全不一样。那时的氢含量要比现在丰富得多，因而当时生命所采取的形式必然是完全厌氧的。随着大气中的氧慢慢地增多，生命也就变得喜欢用氧作为自己的能源；某些厌氧菌残留下来，它要寻找氧气无法渗入之处作为自己的避难场所，在那儿来自需氧菌（或者说代谢氧的组织）的竞争是并不严重的（Op61a, b；Sh66）。

因此，天体物理学中的有趣问题之一就是要力图认识原始地球的化学情况。只要注意太阳表面物质总体成份以及其他行星——那里的条件可能始终保持稳定——的大气的化学组成，我们也许就能够了解到地球上发生过一些什么样的变化。正如已提到过的那样，彗星的化学状况也可以帮助我们去了解在年轻时代的地球上所存在过的种种初始条件。

生命，即使象我们所知道的那种生命形式，在宇宙中是不是很多呢？回答这一问题所涉及的种种可能性仍然是完全带推测性的。如果我们作一番保守的估计，那么可以认为生命只能存在于围绕着恒星的行星之上，而其中恒星的总的特征又要同太阳一样；即使这样，我们也许还需要假定正好有一颗行星处于水既不会凝固又不会汽化的位置上。遗憾的是我们对于行星形成的问题知道得还不够，因而无法估计恒星和行星按这样的条件联合出现的可能性有多大。但是，即使有这类资料可用的话，我们仍然面临这样的问题，就是要估计在这样一颗行星上生命自发产生的可能性又有多大。

现在，实验室的工作正在日趋成熟，人们试图创造出在模拟原始地球条件下可以出现的那种具有生命特征的分子。只要把这些实验持之以恒，有朝一日总会合成具有生命特征的原始有机体。一旦实现了这一夙愿，有关生命形成的几率就可以估计得比较准确了。

别的可能性也是存在的。也许生命还具有某种传染性，它开始出现在某个行星系中，然后就可以从一个系统扩散到另一个系统去；这里或者是通过自然的途径，或者是通过智慧生命的有意识传播——他们希望看到生命能在更广泛的区域内繁殖成长。

如果这第二种情况是确实的话，那么生命只须形成一次，而从那以后任何进一步的自发形成就不再是非要不可的了。在这种情况下，如果把对于原始地球上生命自发起源的研究加以推广，并用来估计其他星球

上生命出现的几率，那就可能会带来相当大的误差。

关于银河系或宇宙中的其他地方有智慧生命存在的假设当然是令人神往的。我们能不能同这种生命进行联系呢？我们怎样去进行通讯呢？要是确有那么一种远比我们更为先进的智慧生物存在的话，他们是不是正在试图和我们进行通讯联系呢？会不会存在某种唯一的最佳通讯方式、而在某一天更好地掌握了物理学和天体物理学之后将会为我们提供这种通讯方式呢？我们是否一定要用电磁讯号来实现通讯联系，或者也许会不会存在比光子更快的粒子——超光速粒子呢？如果存在的话我们在以后将会发现这种粒子，而致力于节省通讯时间的智慧生物几乎肯定会利用这种粒子。

如果别的文明生物确实存在的话，那么即使他们可能存在于我们的太阳系之外我们是不是应该去拜访他们呢？归根到底，拜访的目的是要进行会晤、谈话和接触；只要远方的文明生物能够并且愿意进行通讯的话，那么在通讯技术获得改进之后所有这一切都是能付诸实现的。尽管没有某种实际上的物质交换，尽管我们也许甚至无法判断对方究竟是由物质还是由反物质所构成，利用通讯方法还无法加以解决的事情相对来说就为数不多了。

天体物理学可以使许多有关生命的基本问题的面貌为之一新，因而在以后的一些年内天体物理学家们必定会对生物学上的问题产生更大的兴趣。

1.10 观测不到的天体

在附录 A 中我们开出了一大批品种繁多的天体的名册；因此，至少是凭着某种感觉上的合理的自信心，我们也许会以为我们所知道的内容已足以构成一幅万宝全图。

为了跳出这种自满心理所设的圈套，我们应该举出一些目前还没有能观测到的天体，以使我们的名册更臻于完善。我们也许以为这样做是会有困难的，但情况并非如此。为了说明这一点，第一步我们先把自己限制在对弥漫天体的照相观测方面，以后再推广到其他技术那就是显而易见的事了。

我们来画一张图，目的是要把不同天体的绝对照相星等和它们直径的对数作一番比较（图 1.11）。首先想到这样做的当推 H. 阿帕（Arp）（Ar65）。

我们看到，在照相底片上用一般方法所发现的全部天体必然出现在阿帕图上两根斜线之间的一条狭带之内。位于这条狭带左上方的天体看上去象一些恒星，但是由于差不多有 10^{11} 颗恒星可以出现在银河系的照片上，因而对具有恒星状外貌的特殊的或高度致密的天体来说，如果不经过大量的、辛勤的劳动，那是决不可能把它们同真正的恒星区别开来的。

为了发现落入图的上部区域内的某些不寻常天体，我们

图 1.11 天体的直径？亮度图，透过大气所观测到的延伸天体大体上都落在图中的直径？亮度狭带上。左上角的天体是非常致密的，它们不容易同普通的恒星区别开来。在图的右下角，地球大气的夜天辐射妨碍了

天文观测。一高一低两个十字标记分别表示类星射电源 3C273 和 3C48，它们的直径很不确定。高低不同的两个黑圆点代表天炉座星系和天龙座星系，它们是本星系群中较小的成员（Ar65）

必须设法找到另外一些特殊的标志。例如，类星射电源就位于狭带的上方，首先是通过它们的射电辐射发现的，只是在后来利用了对各个类星射电源所拍得的光谱才证认出它们是一些遥远的天体。

位于狭带右下部的弥明天体的表面亮度是很低的，夜间天空所发射的背景光也要比这些天体来得亮，所以它们就不可能探测到。例外的情况是本星系群内两个较小的星系——天炉座星系和天龙座星系，在这两个星系内单颗恒星是可以计数的。如果它们再离得远一些的话内中的单颗恒星就探测不到，那我们也就不可能看到这两个天体了。

我们发现，可观测天体的狭带仅仅占有图上可用面积的一小部分。这意味着实际上可能还存在许多不同类型的天体，而我们现在却不可能看到它们。因为宇宙中所有各类天体的观测机会差不多都是一样的，当然也就不能指望它们会整整齐齐地排成一种为我们自己的仪器能力所规定的图案——落入阿帕图中的可观测狭带之内。

要是我们把观测仪器送入大气层以外，比如通过火箭或卫星来做到这一点，那么我们就能够超脱许多夜天辐射的影响，因而狭带的右边线就可以向右下方移动。大气外的观测还可以提高星象的分辨率，因为地面观测时限制分辨率的主要原因是大气闪烁。分辨率提高的结果会使狭带的左边线向左上方移动。上述两项效果都会使狭带加宽，从而使我们所识别的天体种类要比地面观测来得多，这便是把一个天文台发射到大气层以外的高空轨道上去的一个原因。可以预料，当这种观测方法得以实现之时在天文学上将会取得一系列新的发现。

当然，并非所有的天体都发出可见辐射，因而不能指望单单通过目视观测来发现天文学所要了解的全部天体。表 1.5 列出了十条不同的可观测项目，所选择的这些大致代表了我们所知道的各类天体。我们看到，只有三种天体可以同时通过目视或射电观测来很好地加以发现。有四种天体或者是只发出射电波，或者是只有通过它们的射电辐射才最容易认出它们是一些不寻常的天体。例如，类星射电源在可见光范围也有辐射，但是，在我们精心观测它们的光谱之前看起来就象是一些普通的恒星状天体。如上所述，任何恒星状的天体是很容易同我们银河系中 10^{11} 颗普通恒星混在一起的，因此只有通过射电辐射才能揭示出类星体的庐山真面目。

图 1.2 是一幅大致的示意图。从这张图上可以看出，我们关于宇宙的大部分知识主要仍然来自目视观测，这是因为在可见光区所做的观测要比在电磁波谱的其他部分来得多。

表 1.5 在电磁波谱的目视和射电两部分所观测到的天体的比较*

	目视	射电	相关系数	新天体
1. 彗星	√	×	0	
2. 行星	√	√	1	
3. 恒星	√	×	0	
4. 电离区	√	√	1	
5. 星际微波激射器	×	√	0	□
6. 球状星团	√	×	0	
7. 星系	√	√	1	
8. 脉冲星	×	√	0	□
9. 类星射电源	×	√	0	□
10. 背景辐射	×	√	$\frac{0}{3/10}$	$\frac{0}{4/10}$

*我们发现，对许多天体来说，尽管它们在波谱的目视和射电部分都有一定的发射，但是用一种技术进行观测要比用另一种技术更容易取得好的效果。

但是，再有几十年的射电观测也许就会把这种状态改变过来。毫无疑问，连续红外、X射线和γ射线观测同样会出现这种趋势。

图 1.12 这是一幅示意图，它说明了在电磁波谱不同频段上的观测所取得的信息量。我们可以用同样的方法来描绘“整个天文学历史中观测工作所花费的总的时间”，并且用一张类似的图来表示。纵坐标的标度是完全任意的，对数标度大概比线性标度更为确切些。峰值 V 代表在波谱可见光部分中所作的观测

表 1.5 清楚地说明，利用新技术进行观测有助于发现新的天文现象，它们所提供的信息并不仅仅是对我们已经知道的那些现象作某些补充。因此，可以预料，当我们把观测工作做得充分完善之时必将会发现一批全新的天体，这些观测工作包括了：

(a)整个电磁波谱，从频率最低的几百千周的射电频带一直到能量最高的伽玛射线全部都要用上。

(b)整个调频波频，频率一直要高到兆周。如果没有电子技术的革新，就不可能观测到毫秒级时间间隔内的强度变化，脉冲星也就决不会被发现，要是我们所用的照相底片必须要求露光时间在一个小时左右，那么就不可能指望去发现周期远小于 1 小时的亮度起伏。在另一个极端，对于那些时间尺度远远长于几十年的周期性现象来说，分析老的照相底片是不可能辨别出它们的变化。

(c)整个空间频率区域，正如已经指出的那样，许多技术对恒星、或者至少对高度致密的天体来说是相当有效的，但是它们却不能探测出均匀的背景辐射。另外一些技术能够作背景测量，然而对于观测暗弱的致密天体却是无能为力。红外观测的情况尤其是这样。从最小的角分辨率极限起，直到某种均匀背景，我们要对全部可能的角大小范围进行观测。在做到这一步之前必然还会存在一些观测不到的天体，而这些天体可能

是很有意义的。

(d)所有各种通讯渠道：电磁波和引力辐射、宇宙线、中微子，以及还有超光速粒子——如果它们存在的话。可以预料，这些渠道又会揭示出一些新的现象，宇宙之丰富多彩必然远远超出我们最大胆的猜测之外。

(e)上述各项工作一定会给我们的天文事业带来进步。但是，可能还有许多天体是任何现有望远镜所完全观测不到的。比如说，要是我们的星系有 10%的质量是由雪球（这是一些由冻结了的水构成的、拳头大小的星子，它们在星际空间到处游荡）组成的话，那我们决不可能发现这类小天体。来自这些天体的散射光是非常微弱的，结果我们就不可能探测到它们的踪迹。它们也不可能象流星那样穿过太阳系而成为可见天体，这是因为在它们远未到达地球轨道时太阳早就把它们蒸发光了。因此，在空间飞船能够到太阳系外作星际旅行之前，这些雪球必然是探测不到的。然而，一旦实现了这种星际旅行之后，它们又可能成为一种非常讨厌的东西。因为对于以接近光速飞行的飞船来说它们就是一些微型冰山，只要碰上一个，飞船就会彻底完蛋。还有，对于黑矮星、或者没有伴侣的行星来说，目前要探测它们同样是有困难的。

当我们看到了上述(a)到(e)诸点所包含的那些尚未完成的工作时，我们必须准备接受这样的思想：天文学家们目前所观测到的内容，从数量上来说也许只触及了表征宇宙特性的全部可观测的重要现象的百分之几而已。从这个观点上来说，要建立完善的宇宙学理论或者宇宙模型看来很可能尚属为时过早。

从另一个方面来说，这些理论和模型常常会启示我们去进行一些新的观测，并由此取得新的结果。因此，我们不应该把天体物理学的理论看成是囊括了我们关于宇宙的全部知识的某种包罗万象之物。更正确的是应该把它们看作一幅处于不断变化之中的、思考问题的图象，它能帮助我们沿着正确的方向去探索宇宙间的无穷奥秘。

第二章宇宙距离尺度

2.1 太阳系的大小

建立宇宙距离尺度的首要条件是在太阳系内正确地测量距离。在这当中，关键的一步是测量金星的距离，利用雷达技术是获得这个距离的最精确方法。

对着金星的方向发射一雷达脉冲，然后测量发射及接收脉冲之间的时间间隔。由于可以很高的精度测量时间间隔，因此，金星的距离及其轨道的大小可以精确到公里以内。一旦知道了金星与地球最接近时的距离 a 及最远时的距离 b ，并且这种测量在好几年内重复进行了多次，则地球及金星的轨道直径及偏心率都可计算出来。于是可以直接利用 $(a+b)/2$ 的平均值来表示地球与太阳的平均距离（图 2.1），这个距离称为天文单位。从发射到金星的空间飞船的轨道，可以得到地球—金星距离的验证。

2.2 三角视差

当从地球绕太阳运动轨道的两个端点来进行观测时，近距星相对于同一天区内较远的恒星将会产生位移。用这种方法所测得的视角位移的一半，定义为视差 p ，那么恒星的距离为

$$d = \frac{\text{天文单位}}{\tan p} \quad (2.1)$$

或 $d = 1.5 \times 10^{13} (\tan p)^{-1}$ 厘米

由于 $\tan 1'' = 5 \times 10^{-6}$ ，因此一颗视差为一角秒的恒星的距离为 3×10^{18} 厘米。这个距离构成方便的天体物理学的长度单位，称为秒差距，记作 pc：

$$1\text{pc} = 3 \times 10^{18} \text{厘米}$$

图 2.1 天文单位及三角视差的测量

远到约 50 秒差距的恒星的三角视差，可以准确地测定，此时的视差为 0.02 角秒。

2.3 分光视差

一旦一些近距星的距离已经测定，我们便可以获得它们的绝对星等，然后把它们同光谱型联系起来。于是，能够识别光谱型的亮星就成为距离指示器，从而把距离的测定推广到遥远的地方，在那里，只能认出各个最亮的恒星，而三角视差的方法是不能应用的。

2.4 移动星团方法

以下将会说明这个方法至今只用于毕星团。在此星团中成员星密集成一群，好象一个整体，穿过空间而运动。需要进行的有下列三种测量：

(a) 视向速度 v ，从谱线位移——多普勒位移——来测量星团星沿视向的速度。

(b) 及 (c) 自行（与视向垂直方向上的视运动）。星团内个别恒星的自行是通过相隔几十年拍摄的两张底片上星象位置的比较来测定的。这

个方法具有使星团角直径 θ 产生视收缩的形式。角直径 θ 的减小速度 $\dot{\theta}$ 可以计算出来，这就给出

图 2.2 毕星团与我们的距离为 r ，以视向速度分量为 v 的速度退行。如星团的直径 D 保持不变， θ 必须减小。方程 2.2 表明：如何从 v ， θ ，及 $\dot{\theta}$ 随时间的变化率 $\dot{\theta}$ 的测量，可以决定距离 r 了星团与太阳距离用分数表示的增加率（图 2.2）。

由于 $\theta = D/r$ 而对于直径 D 为常数的星团， θ 对时间的导数为 $\dot{\theta} = -D\dot{r}/r^2$ ，这样量 θ ， $\dot{\theta}$ 及 v 便与星团距离 r 联系起来。由于 $\dot{r} = v$ ，

$$\dot{\theta} = -\frac{v\theta}{r} \quad r = -\frac{v\theta}{\dot{\theta}} \quad (2.2)$$

于是毕星团的距离 r 可以用三个直接测定的量来表示。这个方法只限于用在毕星团上，因为没有任何其他星团的距离足够近，使得能获得精确的自行。显然这个方法的应用依赖于毕星团的动力学的稳定性。如果各个恒星不是被引力束缚着，比如说是从一个共同的原点向外扩张，由于对时间的导数 $\dot{D}$ 将影响到 $\dot{\theta}$ ，这个方法将导致一次错误的距离测量。

2.5 威尔逊及巴普的方法

在最晚型恒星的光谱中出现有一次电离钙的 H 及 K 线，这些谱线的形状颇为复杂。首先，它们各是一条宽阔的吸收线，在其中央，发现有一比较狭窄的发射特征，同时在其上面又叠加着一个更窄的中央暗吸收带。宽的吸收线分别以 H_1 和 K_1 表示之，它们是由恒星外部大气中的低温气体造成的。谱线展宽的原因是钙的吸收很强，结果使得吸收系数较低的谱线两翼的辐射也受到压制。

发射线 H_2 及 K_2 是由于更高大气层中的再发射产生的。这些发射线可以第二次被吸收而形成标记为 H_3 及 K_3 的细的谱线，这种吸收线是由比产生 H_2 及 K_2 发射线的原子处于更高层的冷的气体产生的。

巴普 (Bappu) 及威尔逊 (Wilson) (Wi57) 注意到在 H_2 及 K_2 的宽度与恒星亮度之间存在着某种相关性：

$$\frac{dM_v}{d \log(W_2)} = \text{常数} \quad (2.3)$$

图 2.3 电离钙 Ca II 发射线宽 W_2 的对数与从三角视差导得的绝对星等的关系图。图中解释了标记线宽为 W_1 ， W_2 及 W_3 的含义 (Wi57) 式中 W_2 是用每秒多少周表示的线宽。视星等与线宽的对数之间存在着线性关系的解释目前还不知道，这不过是经验公式罢了。

利用太阳的亮度作为一个数据点，再加上毕星团中四颗星的亮度作为另外四个点，就可以决定这条直线的斜率，因此，从测量恒星的亮度与 H_2 及 K_2 的线宽，可以确定它的距离。当适当地应用这个方法时，距离测量的不确定性约为 10%。然而，由于威尔逊-巴普关系并不是对所有光

谱型的恒星都能成立，因此应用时必须小心。图 2.3 是利用三角视差已知的恒星来标定线宽 W_2 的图，这幅图说明了关系式 (2.3)。对于标定距离，这不是一个基本的方法，但是它可以作为一个有用的校核，在应用测定恒星距离的其他方法时，使我们更有把握。

2.6 主星序重叠法

这个方法的基础是假设在所有银河星团中主序星具有相同的性质。这意味着，所有这些星团主星序的斜率都相同，除此之外，还要求给定光谱型或颜色的主序星，在所有星团中都具有相同的绝对亮度（见图 1.4）。在此假设下，我们可以比较毕星团及任何其他银河星团中主星序的亮度。为使这两条主星序重合所必须的垂直位移量，就给出这两个星团间的相对距离。

问题 2.1 如果作垂直位移时视星等的改变为 $\Delta m = m_{GC} - m_{\text{毕星团}}$ ，试证明相对距离为

$$\Delta m = 5 \log \frac{r_{GC}}{r_{\text{毕星团}}} + A' \quad (2.4)$$

其中 A' 是银河星团 (GC) 及毕星团星际红化的差别的改正数。此式推导与方程 (A.2) 相同。

利用在附录 A.6 节内说明的恒星谱线方法，可以决定因子 A' 。

要获得球状星团的距离，我们可按下列三条不同的假设之一来进行：

(a) 球状星团的赫罗图中，有一段与银河星团的主星序基本上是平行的。我们可以假设，这一段与毕星团的主星序重合，因而球状星团的距离就可根据方程 (2.4) 来计算。

(b) 或者我们可以假设，这一段与太阳附近矮星群所确定的主星序重合，这些矮星的距离是用三角视差方法决定的。

(c) 最后，我们可以假设，在球状星团内以及在太阳附近的那些短周期变星（天琴 RR 型变星）的平均绝对星等都相同（见下面 2.7 节）。

这三条选择没有一条是可靠的。然而，当应用到球状星团 M3 上，这三种方法所给出的距离，彼此符合得很好。这证明了不同恒星群的主星序重合得相当好，可以用来作为距离的指示器。

2.7 天琴 RR 型变星的亮度

我们发现，在给定球状星团中的所有天琴 RR 型变星，不管光变周期如何，视亮度是相同的。由于这些恒星本质上是亮的，同时由于它们的光变周期短，使得它们在恒星之间特别醒目，可以作为理想的距离指示器。我们假设，这些恒星的绝对亮度，不但在一个给定的星团内，同样在其他地方都是相同的。可以利用改正了星际消光的平方反比定律，来决定两个星团的相对距离（方程 (2.4)）。

2.8 造父变星的亮度

本世纪初发现麦哲伦云中造父变星的周期是其亮度的函数。麦哲伦云是银河系的矮伴星系，它们的质量小，又很密集，因而可以认为所有的恒星基本上离开太阳的距离都一样。比较麦哲伦云与球状星团中造父

变星的亮度，可以获得这些天体的相对距离。

然而在这种比较中，有一个曲折的过程。麦云中的造父变星是星族 I 恒星，这种星通常在银盘内发现。另一方面，球状星团属于晕星族，对于银河中心，或多或少地呈球状分布。一般而言，星族 I 是由亮的早型星及位于主星序上的晚型矮星所组成；星族 II 是以大量晚型巨星为其特征的。

1952 年巴德 (Baade) 分析了 M3 内造父变星的亮度，把星族 I 区域与星族 II 区域比较。他发现星族 I 造父变星比星族 II 造父变星约亮 1.5 星等。过去 M31 的距离模数是从它里面的亮的造父变星与我们银河系内球状星团中星族 II 的造父变星相比较而导出的。因此，M31 的距离就错误地估低了一倍。巴德的测量表明，M31 的距离，事实上也是所有星系的距离都要加倍。

2.9 新星的亮度和 H II 区

新星有一个绝对亮度，它与爆发后亮度的衰减率有关，新星巨大的内禀亮度，使得它成为近距星系非常有用的距离指示器。

亮的 H II (电离氢) 区的直径，也是一个很好的衡量距离的标准，利用它可以估算这些天体所在星系的距离。

2.10 距离？红移关系

各种星系的距离，可以通过比较其中亮的天体来加以相比。O 型星、新星、造父变星及 H II 区是合适的候选者。这些天体，远到室女星系团这么远的地方，还可探测到。从这样的恒星的视亮度及 H II 区的大小来估算距离，通过这些距离的比较，可以表明，这些星系的谱线红移，是与其距离有线性关系的： $\Delta\lambda/\lambda \propto v$ 。

我们还可以从个别星系亮度的比较，来估算其相对距离。我们必须小心的是要比较相同类型的星系。为了减小由于亮度的统计起伏所引起的误差，有时我们不是比较最亮的星系，而是宁愿比较在两个不同星系团中，第十个最亮星系的亮度。利用这种方法，我们希望能避免选择到非常亮的星系。不过，图 2.4 还是一幅以红移为函数的最亮的星系团成员图。

图 2.4 38 个星系团中，最亮星系成员的红移？星等图。 z 是红移 $\Delta\lambda/\lambda$ ， v 代表目视星等。(Pe69)

数据表明了一种线性的距离？红移关系。这个线性关系能保持到多远还不清楚，但是在很多宇宙学的问题中，我们可以利用红移来作为星系距离的可靠指示器。不过这个步骤可能不适用于类星体。

我们还应注意，距离的测量，不是一件容易的事，误差往往不可避免。1958 年桑德奇 (Sandage) (Sa58) 发现，过去的观测者把电离氢区误认为亮星。这使得星系的距离，在过去巴德发现的误差之外，又低估了约 2 倍。这样一来，5 年内，宇宙的大小，总的扩大了约 5 倍。

经常可能有类似的误差，使得宇宙距离尺度作进一步的修正。不过，图 2.5 表明，我们往往可以利用几种不同的方法来互相校核天文学上的距离，最后可以得到可靠的距离尺度。目前每秒 75 公里的红移速度，表

示这个星系位于距离为一百万秒差距 (Mpc) 处。速度? 距离的比例常数——哈勃 (Hubble) 常数 H ——取为 $H=75 \text{ 公里} \cdot \text{秒}^{-1} \cdot \text{百万秒差距}^{-1}$ 。

各种星系的距离一旦知道后, 为了宇宙学的目的, 我们可以估算典型的星系际距离, 以及典型的星系数密度。随距离或更准确地说随谱线红移而变的数密度的变化, 原则上, 可以用来决定宇宙的几何特性。利用这个方法, 我们可望决定宇宙是开放的, 或者是封闭的, 以及它的大小是有限的, 或是无

图 2.5 距离指示器的流程图

限的。这样的问题将在第 10 章内予以回答, 但在下一节内, 将给出基于欧几里得几何的简单的论证。

2.11 西利格法则及宇宙学中的计数

如一系列发射天体在空间是均匀分布的, 则视星等小于 m 与视星等小于 $m+1$ 的天体的个数之比 N_m/N_{m+1} 为 3.98, 这称为西利格 (Seeliger) 法则。现在来看看这个结果是怎样求得的。

令距离在 r_1 处一颗给定的恒星的视星等为 $m+1$ (见图 2.6) 那么如果在距离为 r_0 处恒星的视星等将为 m , 则

$$r_0 = (2.512)^{1/2} r_1,$$

在这个距离上, 其视亮度减弱 $(r_0/r_1)^2 = 2.512$ 倍, 所有这些都是直接遵循 A.5 节中星等尺度定义的必然结果。

如恒星在空间是均匀分布且具有固定的亮度, 则距离向外远达 r_0 范围内的那些恒星, 看来将亮于视星等为 m 的恒星, 但只是在距离向外到达距离为 r_1 以内的恒星才是亮于 $m+1$ 的。亮于某一星等的恒星的个数比 N_m/N_{m+1} , 是与所占据的体积成正比的。

$$\frac{N_m}{N_{m+1}} = \frac{r_0^3}{r_1^3} = (2.512)^{3/2} = 3.98 \quad (2.5)$$

由于这个关系对于任一给定亮度的一些恒星是正确的, 所以, 不管它们的光度如何, 对于任何均匀分布的恒星也将是正确的。方程 (2.5) 陈述从一个光源所获得的流量是与 r^{-2} 成比例, 而观测到的直到某一给定流量极限的光源的数目是与 r^3 成比例的, 因此在某一给定光谱频率 ν 上, 亮于某一强度 (流量密度) $S(\nu)$ 的光源的数目为

$$N \propto S(\nu)^{-3/2}, \text{ 由于 } N \propto r^3 \text{ 及 } S(\nu) \propto r^{-2} \quad (2.6)$$

这个在经典恒星天文学中早已感兴趣的比例数, 在现代宇宙学中更觉得重要。通常它以另一不同的形式出现。如在 (2.6) 式的两边取对数, 我们得到

$$\log N \propto -\frac{3}{2} \log S(\nu) \quad (2.7)$$

在射电天文学中, $\log N$ 及 $\log S$ 的比较常常称为 $\log N$? $\log S$ 图, 它意味着: 在仪器所用的光谱频率范围内, 如取亮于某一给定电平的射电源数目的对数, 对亮度的对数来作图, 则所得的斜率应为常数, 其值为

? 3/2。条件是：(a)在空间，这些源的分布是均匀的。(b)空间是欧几里得空间，及(c)在视亮度中，我们要加上宇宙红移改正。最后一个要求，是由于观测是在某一给定频率 ν 上来进行的缘故。如果在高频部分，射电源本质上是很亮的，那么红移到低频，将会使本来不是很亮的低频部分变得很亮，于是需要对射电源的谱形作改正。在任何情况下都需要一个红移改正，因为一个受到宇宙红移的源看起来已经较弱，这是由于时间膨胀效应，也就是说，在射电频率光子发射时间之间的视空间增加了(Ke68)。应加多大的改正，在 10.6 节内讨论。

如果忽视这种红移效应，比如说，在小的宇宙距离上，或者在统计的基础上来加改正，于是稳恒态宇宙学所要求的均匀性及欧几里得几何学将指明， $\log N$ 对 $\log S$ 图的斜率为? 1.5。现实的观测指出，斜率并不正好等于这个数值，但是近于此值，使得这个理论能与其他理论相抗衡。

如果相对这个斜率的真正偏离最后能确定的话，我们就将有证据来说明，或者空间是非欧几里得的，或者射电源不是均匀分布的。这些结果的任何一个，都暗示有一个演化的宇宙(见第 10 章)。图 2.7 展示现代的观测结果，在高流量密度处，斜率为? 1.85，在低流量密度处，斜率为? 0.8，这些结果，部分地依赖于观测所用的频率。在 1400 兆赫上，? 1.5 的斜率，看来与流量密度 $S \geq 0.5 \times 10^{-26}$ 瓦·米⁻²·赫⁻¹ 相符，其中斜率比较陡的很少几个强射电源要除外，这可能正好说明在我们银河附近有一局部的非均匀特征(Br72)

图 2.7 $\log N$ 对 $\log S$ 的曲线图，其中 N 是流量密度大于 S (单位为瓦·米⁻²·赫⁻¹)，每单位立体角内的射电源的个数(Po68, Ry68)

一些涉及天体大小的问题

这里所描述的，不是通常天文学家所用的方法，但是它们使我们可以不求助于本章中那些需要专门操作技能的方法，便对行星及恒星系统大小有所了解。前面 6 题，牛顿早已知道(Ne00)。

2.2 当金星最接近地球时，其精确的距离 R 可以用三角测量方法获得。在与金星方向垂直的基线上，相距 10^4 公里的两个观测者，如发现在恒星背景上，金星的位置相差 $49''$ ，试求最接近时金星的距离。

2.3 在这个距离上，金星的角直径为 $64''$ ，当位于最远时，其角直径为 $10''$ 。假定地球及金星的轨道都是圆轨道且同心，试计算这两个轨道的半径。

2.4 土星在最小距离时的平均角直径 1.24 倍于它位于最远距离时的平均角直径(由于土星绕太阳的轨道是偏心的，因此其平均角直径是对几个公转过程的平均值)。试求土星轨道的半长轴 a 。

2.5 从地球上，太阳及月球的角直径都是半度。满月时，月球圆面亮度约只有太阳圆面的 2×10^{-6} 倍。已知月球离地球比离太阳近得多。设光线是向 2π 球面度内各向同性反射，试求月球表面的反射率 K 。证明这个反射率比地球表面物质的低得多(地面平均反射率，估算约为 0.3)。实际上，月球的散射光主要是后向散射，因此这里所得的 K 值人为地提高了。

2.6 设对于太阳，土星的角直径 $\sim 17''$ 。设其与地球、太阳的距离

都是 9.5 天文单位。如果从土星接收到的光是太阳的 0.86×10^{-11} ，试求土星表面的反射系数。注意土星的发亮主要是反射太阳光，因为当土星卫星通过土星与太阳之间时，会在土星表面上投下阴影。

2.7 土星发射的光为太阳的 0.86×10^{-11} 倍。试问太阳需要移到多远，其光度才正好与土星一样，也就是说，象一颗一等星。

2.8 设太阳为一颗典型的恒星，我们推论，最近的恒星的距离为 5.2×10^{18} 厘米，并进一步假设，这也是在仙女座旋涡星系 M31 的盘上恒星之间的特征距离。我们注意到，M31 是一个大致在与星盘垂直方向上看到的带有旋臂的星系。其他看到侧面的旋涡星系的形状显示出，星盘的厚度约为 $0.003L$ ，这里 L 是星系的直径。用 M31 的距离 D 来表示，试证明我们接收到的它的辐射流量为

$$\sim \left(\frac{0.003SL^3}{D^2} \right) \times \frac{\pi}{4} \frac{10^{-18}}{5.2}$$

式中 S 是若太阳离地球为 5.2×10^{18} 厘米时，我们会从太阳接收到的辐射流量。

2.9 如 M31 亮区的角直径为 3° ，且星等为 5，试计算该星系的距离，并证明其直径约为 6 千秒差距（注意 M31 的实际直径比这约大半个数量级）。

2.10 在所有旋涡星系的大小都与 M31 一样的假设下，试求最小的能分辨的星系的距离。对于现有望远镜最小的能分辨的天体的直径约为 $2''$ 。

2.11 注意到从遥远星系来的光线，其红移与根据星系的角直径所判断的距离成比例。如最小的能分辨的天体的红移是其光谱频率的 30%，即 $\Delta v/v \sim 0.3$ ，试计算按照上述距离？红移的线性关系达到光速的星系应有的距离。这个距离，有时称为宇宙的有效半径。

2.12 奥伯斯 (Olbers) 佯谬：在整个宇宙中，令每单位体积内有 n 颗星。

(a) 在立体角 Ω 内，距离在 r 到 $r+dr$ 间的恒星的数目有多少？

(b) 设每颗星与太阳一样亮，试问在观测者的位置上，从这些恒星投射到每单位面积上有多少光线？

(c) 累积到 $r=\infty$ 处，投射到观测者的单位探测面积上的光有多少？

这些问题将在第 10 章中加以详细的讨论。

问题选答

2.2 $R=4.2 \times 10^7$ 公里。

2.3 $R_e=1.5 \times 10^8$ 公里， $R_v=1.1 \times 10^8$ 公里。

2.4 $(a+1)/(a-1)=1.24$ ，因此 $a=9.5$ 天文单位。

2.5 如 $L_\odot$ 为太阳光度， r 为月球半径及 R 为月球也就是地球与太阳的距离，那么 $S = (\pi r^2 / 4\pi R^2) L_\odot$ 为月球所接收到的辐射。这些光在 2π 立体角之内散射出去，因此在地球（距离为 D ）处，每单位面积内来自月球的辐射流量为 $(K \cdot S) / 2\pi D^2$ ，这个数值必须与直接由太阳来的辐射流量 $L_\odot / 4\pi R^2$ 加以比较，

$$\therefore \frac{Kr^2}{2D^2} = 2 \times 10^{-6} \text{ 及 } K \sim 0.2$$

2.6 土星直径为 $2r \sim 7.8 \times 10^{-4}$ 天文单位

$$\therefore \frac{\frac{\pi r^2 L_{\odot}}{4\pi(9.5)^2} \cdot \frac{K}{2\pi(9.5)^2}}{\frac{L_{\odot}}{4\pi(1)^2}} = 0.86 \times 10^{-11}$$

因此 $K \sim 0.90$

2.7 太阳看来象一颗一等星时的距离为 $r = 5.2 \times 10^{18}$ 厘米。

2.8 如 $L_{\odot}$ 为太阳的光度及 D 为其距离，从星系来的流量为

$$\begin{aligned} & \frac{(\text{星系的体积}) (\text{数密度}) L_{\odot}}{4\pi D^2} \\ & \sim \frac{\pi / 4(L)^2 (0.003L) \cdot \left(\frac{1}{5.2 \times 10^{18}}\right)^3 \cdot L_{\odot}}{4\pi D^2} \\ & = \frac{\pi / 4(L)^2 (0.003L)}{D^2} \cdot \left(\frac{S}{5.2 \times 10^{18}}\right) \end{aligned}$$

2.9 把 M31 的星等与一颗一等星来比较，同时取 $\theta = 3/57 = L/D$ ，我们从问题(2.8)得到 $D \sim 0.1$ 百万秒差距， $L \sim 6$ 千秒差距。

2.10 距离 $= 2 \times 10^{27}$ 厘米。

2.11 距离 $= 7 \times 10^{27}$ 厘米。

2.12 (a) $\Omega n r^2 dr$ 。

$$(b) \Omega n r^2 dr \frac{L_{\odot}}{4\pi r^2} = \frac{\Omega n}{4\pi} L_{\odot} dr$$

(c) 如远距星不为近距星所掩食，则积分(b)将发散。当考虑掩食时，在观测处的辐射流量是有限的，它等于在太阳表面所发出的辐射流量。

第三章 天体的动力学及其质量

在十七世纪下半叶，牛顿第一个正确地分析了天体的运动。他发现看来互不关联的各种观测现象，都有一个共同的特点，而且应该作为引力相互作用这样一种简单理论的一部分。为了表述这个理论，他必须创立一种数学工具来描述观测现象，并说明它们之间的相互关系。牛顿在数学问题上所作的努力，记录在他的《数学原理》一书中 (N₀00)。

牛顿的发现以后，经过了三百来年，在这段时间里，他的数学表述变得更简炼了，因此，目前它能以简明的形式出现；但构成天体物理学的基础内容仍保持不变。

本章的目的是要说明天文观测怎样导致牛顿 (1642~1727) 所获得的结论，然后我们要说明牛顿力学在确定所有天体质量问题中的重要性。有趣的是在牛顿工作之后一百多年才获得对这些天体质量的正确估算。我们还要讨论物质与反物质的引力相互作用，最后叙述牛顿理论的某些限制。

3.1 万有引力

当牛顿首先试图去了解天体的力学问题时，他已经知道了许多天文的观测及实验结果。很多有关落体运动的实验结果是伽利略发现的 (1564~1642) (Ga00)。很多年来，第谷 (1546~1601) 搜集了那些关于行星运动的天文观测，然后开普勒 (1571~1630) 分析了这些资料，并把它们总结成三条经验定律。牛顿认为开普勒和伽利略的工作是有关的。在这里我们不想去追溯牛顿的论证，而宁愿用三个世纪来事后认识的某些有利条件勾画出证据的轮廓。

从一套相同的弹簧及一套质量相等的物体的实验中得知，单个物体通过释放两个并排挂着被张紧了的弹簧而加速，所获得的加速度是同一物体仅被一个弹簧拉动时所获得的两倍 (图 3.1)，当然弹簧必须张紧到相同的长度。这种测量使得我们断言，加速度往往是与力相联系，并且直接与力成正比。

图 3.1 惯性质量的定义

$$F \propto \ddot{r} \quad (3.1)$$

这是叙述牛顿第一及第二定律的简洁方式。

在一个有关的实验中，三个相互连接的物体，通过释放一个弹簧而加速，所产生的加速度是单个物体在释放同一弹簧时所产生的加速度的三分之一。这第二种类型的测量表明，产生的加速度是与被推动的物体的质量成反比。

$$\ddot{r} \propto \frac{1}{m} \quad (3.2)$$

联合关系式 (3.1) 与 (3.2)，我们获得下列比例式：

$$\ddot{r} \propto F / m \quad (3.3)$$

在一个物体上所产生的加速度是与加在它上面的力成正比，而与它的质量成反比。当推动的力为零时，该物质保持无加速运动；它的速度

保持常数，也可以为零。

我们可以进一步说，力是等于质量乘以加速度，这就可以用其他两个量来定义力的单位：

$$F = m \ddot{r} \quad (3.4)$$

记住这些概念，我们可以从伽利略的实验引出一个意味深长的结论，他的实验表明，在地面附近同一点上，两个即使是质量完全不同的物体，会以相同的速率下落（被加速）。用比例式（3.3）解释的这个与质量无关的现象表明，进行加速的力是与落体的质量成比例的，我们在下面的推论中，将需要利用这点。

现在我们可以考虑伽利略关于抛射体的工作。如果初速很大，一个按给定角度射出的抛物体，降落在很远的地方，我们可以问，如果初速无限地增大，将会发生什么事情，抛射体将会在很远很远的地方降落在地面上。如果给定足够的初速，且忽略大气效应，它可能围绕地球而运动。如回到它的初始位置时，抛射体仍保持它原来的速度，圆周运动将继续下去，抛物体将如月球一样，绕地球作轨道运动。

牛顿早就知道许多有关月球运动的事实，他完成的计算表明，从各方面来说，月球的运动正好象一个绕地球运行的抛物体。

除伽利略的实验之外，牛顿还知道由开普勒总结的观测结果，三条主要的观测结果，被总结为开普勒定律。

(i)行星绕日轨道是椭圆。

(ii)在相同的时间内，联结太阳和行星的位置矢所扫过的面积相等，这意味着，当行星距离远时，绕太阳运行的角速度小，当行星接近太阳时，角速度大，月球绕地球轨道的运行情况也是这样。

(iii)行星绕太阳描绘一个完整椭圆轨道所需要的周期与椭圆的半长轴的长度有关：周期 P 的平方与半长轴 a 的立方成比例（图 3.2），这个定律，也说明了卫星（月球）绕行星的运动情况。

因此牛顿已有三个信息：

(i)他知道抛射体由于被重力吸引向地球下落。

(ii)他知道在抛射体和月球绕地球运动中间有某些相似之处。

(iii)他知道月球运动与木星及土星卫星的运动相似，同时这些运动是由描述行星绕日运动的同样定律来控制的。

这些概念，引导他试图用由于引力吸引所产生的加速度来解释所有这些现象。

他早就认为，在两个物体的相互作用中，加在这两个物体上的力相等但方向相反（牛顿第三定律）。行星被太阳吸引，但是也可以用引力吸引卫星，这事实表明，在引力体及落体之间，并没有实际上的区别。如果一个加在伽利略落体上的力与落体本身的质量成比例——如上面所叙述——那么这个力也必须与地球的质量成比例。在两个物体之间的相互吸引力也必须与它们质量 m_a 及 m_b 的乘积成比例：

$$F \propto m_a m_b \quad (3.5)$$

由于远的行星的加速度比与太阳接近的行星的加速度小，这个力也必然同物体之间的距离成反比。与此相似，月球的距离及轨道周期显示它的向地球的加速度，比在地球表面上的物体要小得多。定量地表示为 F

$\propto r^{-2}$ ，在任何情况下， F 必须比 $F \propto r^{-1}$ 减弱得快，因为不是这样的话，则遥远恒星的效应，将比太阳对行星轨道运动的影响更强①。从问题(2.2)及(2.7)看来，牛顿知道到其他恒星的距离，同时知道在太阳周围有大量的恒星。作为对距离依赖关系的合理选择，他试图用平方反比关系。我们在下节中将要说明，一个呈下列形式力的定律：

$$F \propto m_a m_b r^{-2} \quad (3.6)$$

可以使我们导出开普勒的运动定律。把这个比例关系式化为方程的形式，我们可写成

$$F = \frac{m_a m_b}{r^2} G \quad (3.7)$$

其中比例常数 G 为引力常数，这个常数必须用实验方法来决定。

3.2 椭圆及圆锥曲线

由于行星绕太阳的轨道已知为一椭圆，因此讨论它们的运动时，较方便的方式是，开始定义一套参数，利用这些参数，可以描述这个椭圆轨道。

图 3.2 圆锥曲线的专门名词

f, f'	椭圆的两个焦点
a	半长轴
b	半短轴
e	偏心率：从中心位移一段距离 ae 即达焦点
q	近心点的距离；我们可以看出 $q=a(1-e)$
Q	远心点的距离； $Q=a(1+e)$
θ	真近点角，是位置矢 r 及长轴在焦点 f 处的交角
r	焦点 f 的位置矢
r'	焦点 f' 的位置矢

我们可以定义与两个焦点距离之和为常数的动点轨迹为椭圆

$$r + r' = \text{常数}$$

由于椭圆对于两个焦点是对称的，从图 3.2 可知，这个常数必须是 $2a$ ：

$$r + r' = 2a \quad (3.8)$$

因此，根据毕达哥拉斯定理，有 $b = \sqrt{a^2 - a^2 e^2}$ 上图还说明

$$r \sin \theta = r' \sin \theta' \quad (3.9)$$

及

$$r \cos \theta - r' \cos \theta' = 2ae \quad (3.10)$$

这两个公式，对于平面三角，分别表示正弦及余弦定律。把(3.9)及(3.10)两式平方，然后相加，得

$$r^2 + 4a^2 e^2 \cos^2 \theta + 4a^2 e^2 = r'^2 \quad (3.11)$$

以式(3.8)代入，化简后，得

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \theta} \quad (3.12)$$

这是我们在下面需要用的一个公式。事实上，方程(3.12)具有更为普遍的意义；它描述任何一种圆锥曲线。当偏心率 $0 < e < 1$ 时，图形为一椭圆，如 $e=0$ ，我们回到半径为 a 的圆的表达式。如 $e=1$ ， a 变为无穷大，

乘积 $a(1 - e^2)$ 可以为有限值, 方程描述一抛物线。如 $e > 1$, 方程 (3.12) 描述一双曲线。

3.3 中心力

从牛顿定律及开普勒第二定律, 立即可以引出一个简单而重要的结论。开普勒定律可以用矢量的形式来表示

$$\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}} = 2A\mathbf{n} \quad (3.13)$$

其中 $\mathbf{r}$ 是从太阳到行星的位置矢, $\dot{\mathbf{r}}$ 是行星相对太阳的速度, A 是常数, 符号 $\wedge$ 是矢量积或叉积。 $\mathbf{r}$, $\dot{\mathbf{r}}$ 以及两矢之间夹角正弦的乘积, 等于在单位时间内, 位置矢所扫过的面积。 $\mathbf{n}$ 是与行星运动平面垂直方向上的单位矢。

方程 (3.13) 对时间的导数为

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{r} \wedge \ddot{\mathbf{r}} = 0 \quad (3.14)$$

因为 A 及 $\mathbf{n}$ 都是常数。用行星质量 m 乘上式, 且利用方程 (3.14), 我们发现,

$$\mathbf{F} \wedge \mathbf{r} = 0 \quad (3.15)$$

由于在椭圆运动中, 力与位置矢都不会成为零, 显然, 力及位置矢必须共线。不管加在行星上的力的性质怎样, 很清楚, 这个力是沿位置矢方向的。这样一个力称为中心力, 不论什么时候, 行星都吸向太阳; 同时, 双星的子星之间, 总是互相吸引的。

3.4 引力二体问题

定义一个原点位于物体 a 及 b 的质心的坐标系, 物体的位置及质量有下列关系式 (图 3.3)

$$\mathbf{r}_a = -\frac{m_b}{m_a} \mathbf{r}_b \quad (3.16)$$

我们知道, 在行星运动中, 我们处理的是中心吸引力, 而且是一种与相互吸引物体之间距离的一次方成反比减弱得更快的力。我们假设, 吸引力是一个平方反比律的力, 如果这个假设是正确的, 我们将得到如开普勒定律所给出的行星运动的正确定律。下面我们将说明这确实是正确的。

图 3.3 两物体 a 及 b 的质心 (C.M.)

对于一个以相互吸引物体之间距离的平方而减弱的中心力, 我们可以把物体 b 加于物体 a 的力 $\mathbf{F}_a$ 写成

$$\mathbf{F}_a = m_a \ddot{\mathbf{r}}_a = -\frac{m_a m_b G}{r^3} \mathbf{r} \quad (3.17)$$

其中 m_a 及 m_b 为这两个物体的质量, G 有时称为牛顿引力常数, 这是一个普适常数, 它的值将在下面讨论。从 $\mathbf{r}$ 及质心的定义出发, 我们有

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b = \left(1 + \frac{m_a}{m_b}\right) \mathbf{r}_a \quad (3.18)$$

联合方程 (3.17) 及 (3.18), 得

$$\ddot{r}_a = -\frac{GM}{r^3} r_a \quad M \equiv m_a + m_b \quad (3.19)$$

其中 M 是这两个物体的总质量，减去对于 r_b 的类似表达式，我们得

$$\ddot{r} = -\frac{GM}{r^3} r \quad (3.20)$$

我们看到，每一物体相对于另一物体的加速度，只受该系统的总质量及物体间的间距的影响。如果方程(3.20)乘以一个质量项 μ ，我们获得一个只以 r ， M ， μ 及引力常数为函数的力

$$F(\mu, M, r) = -\frac{GM\mu}{r^3} r = \frac{-Gm_a m_b r}{r^3} \quad (3.21)$$

如果这个力与这两个物体之间的作用力相等，我们必须满足方程(3.7)，这意味着

$$\mu = \frac{m_a m_b}{m_a + m_b} \quad (3.22)$$

μ 称为约化质量。

方程(3.20)与(3.21)联合在一起，表明每一个质量对于另一个质量的轨道，等于一个质量为 μ 的物体，对于一个固定的或者无加速运动的质量 M 的轨道，这个改革具有很大的优点。牛顿定律相对于某一参考系，例如固定的或者一个作均匀无加速运动的参考系，才是适合的（见 3.8 及 5.1 节）。根据这个道理，每个质量为 a 及 b 的物体的运动，开始是相对于质心的，可是这个过程，要求我们分别考虑 r_a 及 r_b 的随时间的变化，随后利用 r_a 与 r_b 的相加，来决定两者的间距。如利用方程(3.20)及(3.21)，就可以避免这个分两步走的过程，因为到那时， r 可以直接来决定。

3.5 开普勒定律

考虑一个单位矢为 ϵ_r 及 ϵ_θ 的极坐标系（图 3.4），一个质点位于位置矢为 $r=r\epsilon_r$ 处。由于单位矢的变化率可表示如下，即用

$$\dot{\epsilon}_r = \dot{\theta}\epsilon_\theta \quad (3.23)$$

来确定向径方向的变化率（转动），以及用

$$\dot{\epsilon}_\theta = -\dot{\theta}\epsilon_r \quad (3.24)$$

来给出切线方向上的变化率，因而我们可以写出 r 对时间的一次及二次导数，如

$$\dot{r} = \dot{r}\epsilon_r + r\dot{\theta}\epsilon_\theta \quad (3.25)$$

$$\ddot{r} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\epsilon_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\epsilon_\theta \quad (3.26)$$

从方程(3.20)及(3.26)，我们可以分别获得沿径向及垂直于径向方向上的分量的表达式

$$\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2} + r\dot{\theta}^2 \quad (3.27)$$

及

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0 = 2\dot{r}r\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} \quad (3.28)$$

积分(3.28)，得

$$r^2 \dot{\theta} = h \quad (3.29)$$

其中 h 为一常数，是单位时间内，位置矢所扫过面积的两倍。这个关系式，与角动量守恒（每单位质量）定律相比略为相似，但是这个定律，包含距离 r_a 及 r_b 而不是 r 。尽管这是符合要求的，方程(3.29)能阐明开普勒第二定律吗？

图 3.4 速度 r 的分量

联合方程(3.27)及(3.29)，我们有

$$\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} + \frac{MG}{r^2} = 0 \quad (3.30)$$

问题 3.1 选择一个变量代换

$$y = r^{-1}, \quad \dot{\theta} \frac{d}{d\theta} = \frac{d}{dt} \quad (3.31)$$

按下列形式来重写方程(3.30)

$$\frac{d^2 y}{d\theta^2} + y = \frac{MG}{h^2} \quad (3.32)$$

说明方程的解为

$$y = B \cos(\theta - \theta_0) + \frac{MG}{h^2} \quad (3.33)$$

这导致

$$r = \frac{1}{B \cos(\theta - \theta_0) + \frac{MG}{h^2}} \quad (3.34)$$

这是圆锥曲线的表达式（见方程(3.12)），因此它代表开普勒第一定律的一个普遍化。受引力吸引的物体是沿圆锥曲线运动的，在行星的情况下，这就是椭圆。如我们设

$$a(1 - \theta^2) = \frac{h^2}{MG} \quad (3.35)$$

及

$$e = \frac{Bh^2}{MG} \quad (3.36)$$

对 $\theta = \theta_0$ 而言， r 出现极小值。

令 r_m 为两物体的相对极小或极大距离，那么在相距为 r_m 时，整个速度必然与位置矢相垂直，而通过方程(3.29)有

$$\frac{(r_m \dot{\theta})^2}{2} = \frac{h^2}{2r_m^2} \quad (3.37)$$

这表示了每单位质量上的动能。每单位质量上的总能量是每单位质量上动能和势能之和。

$$\varepsilon = \frac{h^2}{2r_m^2} - \frac{MG}{r_m} \quad (3.38)$$

对 r_m 求解，有

$$r_m = \left(\frac{MG}{h^2} \pm \sqrt{\frac{M^2 G^2}{h^4} + \frac{2g}{h^2}} \right)^{-1} \quad (3.39)$$

因此在方程(3.34)中，量 B 有下列之值

$$B = +\sqrt{\frac{M^2 G^2}{h^4} + \frac{2g}{h^2}} \quad (3.40)$$

利用在 $\theta = \theta_0 = 0$ 时， r 出现极小的条件来决定其符号。

方程(3.12)及(3.35)表明， r 的极小值为

$$q = \frac{h^2}{MG(1+e)} \quad (3.41)$$

把这个值代入方程(3.38)中，那么我们就获得用半长轴 a 表示的能量表达式，

$$\varepsilon = (e^2 - 1) \frac{M^2 G^2}{2h^2} = -\frac{MG}{2a} \quad (3.42)$$

其中我们用了方程(3.35)，由于每单位质量上的总能量就是每单位质量上的动能及位能之和，我们发现

$$\varepsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{MG}{r} \quad (3.43)$$

以及从式(3.42)，我们获得如下的轨道速度

$$v^2 = MG \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (3.44)$$

现在我们可以作出若干点有用的说明：

(i) 如 S 是单位矢所扫过的面积

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} h, \quad S - S_0 = \frac{1}{2} h t \quad (3.45)$$

对于椭圆，总面积是

$$S - S_0 = \pi ab = \pi a^2 (1 - e^2)^{1/2} \quad (3.46)$$

因此从方程(3.35)，可知轨道的周期为

$$P = \frac{2}{h} \pi a^2 (1 - e^2)^{1/2} = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{MG}} \quad (3.47)$$

方程(3.47)是开普勒第三定律的一种表达形式。

(ii) 如偏心率 $e=1$ ，从方程(3.42)可知总能量为零，而运动是抛物线运动。天文观测表明，某些彗星从很远的地方趋近太阳时，具有实际上是抛物线的轨道，虽然它们可能是细长的椭圆或者是细长的双曲线轨道，因此这些彗星，充其量不过是受到太阳很微弱的束缚作用。一个恒星过客施加在其上的一个小小的引力摄动，显然可以使得某些这类彗星的总能量略大于零，因而它们能从太阳系中逃逸出去，在星际空间漫游。

我们还应注意，由牛顿定理所产生的巨大进展之一，是认识到彗星及行星轨道都可以用同一种引力理论来理解，在此之前，是不知道有这样的联系的。

(iii) 如偏心率 $e>1$ ，总能量为正，而且两个物体的运动是非束缚的。在一次趋近之后，这两个物体，彼此无限地远退。

(iv) 如偏心率为零，运动是以某一 R 值为半径的圆周运动，而且从

方程(3.42)所获得的、每单位质量上的能量为 $\frac{1}{2}MG/2R$, 那么方程(3.44)表示 v^2 等于 MG/R , 或表示引力 MG/R^2 必须等于 v^2/R , 后者有时称为离心力——是一个假想的力, 它假设“尽管 M 有吸引力, 但作轨道运行的物体仍保持在半径 R 为常数下作轨道运行。”

至此, 我们说明了一个物体绕另一个物体的运动所描绘的一个圆锥曲线, 另外我们可以说明, 每一个物体绕公共质心的轨道也是一个圆锥曲线。方程(3.19)可以改写如下

$$\ddot{r}_a = -\frac{GM}{(1+m_a/m_b)^3} \frac{r_a}{r_a^3} \quad (3.19a)$$

这与方程(3.20)的形式一样, 因此我们很容易得到在形式上相似的, 表示(3.27), (3.28), (3.29)以及最后表示(3.34)的方程。如我们说到的是矢量 r_b 时, 这个论据也认为是正确的。因此物体 m_a 及 m_b 绕质心的运动, 都是沿圆锥曲线的运动。

让我们还看看, 是怎样来决定分光双星子星的质量, 这是我们决定恒星质量中最重要的方法。对于这样的双星, 我们可以测量在整个轨道上的这两个星的视向速度(图 3.5)。

图 3.5 双星轨道及两颗星绕公共质心运动时的各自的半长轴

通过查看谱线的来往移动来决定这种双星的周期, 是较容易的, 于是方程(3.47)给出轨道半长轴的立方与质量之和的比(a^3/M)。其次, 如果是一个食双星, 可知视线是接近于轨道平面的, 那末两个子星绕公共质心的轨道半长轴可以找到, 以及如利用从方程(3.19a)导致的子星的方程, 可给出个别子星的质量。

对于少数几个足够近的, 可以进行精确观测的目视双星, 如果它们的三角视差也知道的话, 则个别子星相对于遥远背景星的运动, 使得可以再一次计算出个别子星的半长轴。那么, 轨道周期使我们可通过开普勒第三定律及方程(3.19a)来计算个别子星的质量。

我们注意到, (3.85), (3.36), (3.44)及(3.47)这样一些表达式, 把可测量的轨道参数与 M 及 G 联系起来, 它们往往依乘积 MG 而变, 因此可以得到的, 既不是这个系统的总质量, 又不是引力常数。长时期来, 这无论如何是一个严重的困难。

问题 3.2 试叙述, 在利用已知的地球大小及它的密度的某一估算值来决定地球质量后, 怎样从落体的实验中, 可以获得 G 的粗略测量。在 3.6 节中, 我们将说明卡文迪许 (Cavendish) 怎样终于测定了 G 。为了精确地测定地球的密度, 注意必须精确地知道 G 之值。

3.6 引力常数的确定

十八世纪后期, 在牛顿第一个指出行星的运动是怎样依赖于太阳质量之后一百多年, 一位英国化学家卡文迪许 (1731~1810) 发现测量引力常数 G 的方法。在卡文迪许完成他的实验以前, 天体的绝对质量是不能精确地测定的, 只能由行星的卫星轨道来决定行星质量的相对值。

在卡文迪许的实验中利用了一个扭秤, 典型的设计可由一根石英纤维悬挂一根载有质量为 m_1 及 m_2 的两个小球的杆而组成, 如图 3.6a 所示。每个小球距石英纤维的距离 L 相等。当一个小的可测量的扭矩加在这个

系统上时，在石英丝上可以引起扭转，记下这个扭转值可以标定扭秤。我们可以利用这个扭矩，它是由具有恒定的、作用力已知的弹簧在 m_2 的位置上施加一个水平的力而组成。

如果质量为 M_1 及 M_2 的两个物体分别位于与质量为 m_1 及 m_2 的两个小球的水平距离很小的位置上，我们可以观测到石英丝的旋转，如图 3.6b 所示。我们可以分别决定 m_1 与 M_1 以及 m_2 与 M_2 的距离 r_1 及 r_2 ，然后求施加在杆的端点的水平方向上的力，由此确立加在石英纤维丝上的扭矩。这个扭矩 N 为

$$N = L \left(\frac{m_1 M_1 G}{r_1^2} + \frac{m_2 M_2 G}{r_2^2} \right) \quad (3.48)$$

从质量 M 的测量所得的偏离，再根据上面所说到的，由石英丝旋转大小而取得的扭秤的标定，我们可以决定 N 之值。由于我们可以测量 N ， L ， r_1 ， r_2 以及所有不同物体的质量，现在在方程(3.48)中除了 G 以外，所有量都是已知的，于是可从方程(3.48)直接决定 G ，其值为 $G=6.7 \times 10^{-8}$ 达因·厘米²·克⁻²。

一旦 G 的值已知，利用开普勒第三定律，方程(3.47)可以立即决定太阳的质量。开普勒第三定律实际上是包含太阳及行星的总质量 M 的，但是对不同行星进行计算后，我们可以证实，太阳的质量很接近于 M ，而行星的质量仅约为 $\sim 0.0013M_{\odot}$ ，在近似计算中可以忽略。利用已知的月球轨道及相似的方法，可以求得地球的近似的质量。

图 3.6 决定引力常数 G 的卡文迪许实验

3.7 质量的概念

如果检查一下有关质量的测量，我们说了些什么，那我们就会发现，物体质量的决定，实际上存在着两种截然不同的方法。(i)对应于一个被测定的力（方程(3.4)），我们可以测量物体的加速度。或(ii)当一给定的质量位于指定的距离上，我们可以测量施加在物体上的力——这就是当我们用弹簧秤去称物体时所能做的。

第一种方法是动力测量，第二种是静力的。在第一种方法中测量出来的物体质量，称为惯性质量，而第二种测量方法得出的质量，称为引力质量。

现在我们假设取一引力质量为 m_1 的钢球，再取一略微重一点的木球，慢慢地锉去多余的质量，直到其引力质量也等于 m_1 为止。如果此时把这两个球放在天秤盘内，它们将使天秤的臂，处于水平位置，因为地球吸引这两个球的力是相等的。

现在的问题是，这两个物体的惯性质量是否经常相同，对于一个给定的力，木球是否象钢球一样，以相同的速率被加速，在做完实验以前，我们不能肯定。

大约在本世纪初，这个问题，引起了匈牙利贵族罗兰·冯·厄缶 (Roland von Eötvös) 的兴趣。在一个扭秤沿东西方向的水平杆上，他吊两个成份不同，但重量完全相同的砝码，由于地球自转，有两个力作用在每一个砝码上，(i)吸引力，因为重量相等，因此是相等的。(ii)由

于地球自转引起的离心力。如 A 上的离心力，大于或小于 B 上的，这将表示它们的惯性质量不同，杆将旋转，直到在吊线上的扭力，因为离心力的不等而得到补偿为止①。厄缶从来没有观测到杆的这种旋转，因图 3.7 厄缶及狄克的实验

图 3.7 厄缶及狄克的实验

此作了在 10^{-8} 范围内，物体的惯性及引力质量是相等的结论。

这个实验现在由狄克及他的同事作了改进。他们用杆在南北方向上吊重物，由于地球绕轴旋转，质量 A 向太阳的吸引力比质量 B 可能多或少一些，于是将观测到天秤的臂，起先在一个方向然后在另一个方向内摆动的周日效应。但没有观测到这种效应，结论是：在 10^{-11} 范围内，引力质量及惯性质量是相等的。这类实验的优点，在于它是动力学而不是静力学的，而且有一个我们可以观测到的、一定的周期性 ($R_0 64b$)。

现在我们可以提问，物质的引力质量与反物质的是否一样。如果存在着由反物质组成的星系，它们将吸引抑或排斥由物质组成的星系。歇夫 (L. I. Schiff) (Sc58a) 对这样的问题，曾给出一个推测性答案。他指出，很多原子核放射虚的电子？正电子对。这意味着，在一部分时间内，总核能的一部分表现的形式为电子及与之相应的正电子。但这样的质点对不断地形成及重新结合，因而事实上从来没有真正发射过。

歇夫计算指出，如果正电子具有负的引力质量，那么，对于许多虚的电子？正电子对的形成是主要效应的物质来说，惯性质量和引力质量之比将受到影响。这两种类型的质量之比，对于铝、铜、铂分别可与 1 相差 1×10^{-7} , 2×10^{-7} , 4×10^{-7} 。已经完成这种物质的实验，这些大小不等的结果，是厄缶及狄克的实验把它们排除掉的。它的必然的结果是，物质和反物质的引力质量，应该具有相同的符号，而且星系与反星系的引力相互作用，在力学的范围内，不可能区分。

注意，我们只说过，正电子如同电子一样，它们的惯性及引力质量，具有相同的符号，但是我们从磁场中的力学实验真正知道，正电子的惯性质量与电子的相等，因此我们上面的结论，应立即得出下列的结果，物质及反物质都具有正质量。

如歇夫他自己所承认，这个论点有一个困难，即我们还不能绝对肯定，虚的电子？正电子对的行为，是否准确地与真的相象。真的正电子的引力质量与虚的正电子的是否不同。不幸，直到我们在引力场中做一次正电子运动的直接测量以前，我们还不能绝对肯定它。

3.8 惯性参考系——等效原理

早先我们就注意到，牛顿运动定律，只有当运动是在固定的、或者对于遥远星系是恒速运动的坐标系内来描述，才是正确的。这种参考坐标系，如众所周知是惯性坐标系。

当我们试图去理解这些参考系的意义时，某些纠缠不清的问题出现了，它们可用一些简单的实验来描述。

(1) 设一人蒙着眼睛坐在旋转木马上，当木马运动时，由于他能感觉到施加在他身上的离心力，因此他能非常精确地决定他是否在旋转。如果他调节机械结构，直到他感觉不到离心力，当他取去蒙眼时，他将发

现，相对于遥远星系，旋转木马是静止的。

(2)在星际空间飞船上的蒙眼人，可以调节他的控制器，直到他感觉不到加在他身上有任何力。仔细看一看，他将发现，他已调节到推力为零。他可以发现，相对于遥远星系，他正以常速在运动着，虽然他可以发现，他漫游在恒星附近，且正在向恒星自由坠落！爱因斯坦第一个假定自由下落、无旋转的坐标系，完全与相对于遥远星系作常速运动的牛顿惯性系等效。在这两种类型的坐标系内，所有物理定律都严格地有相同的形式。这个等效原理，将在 3.9 及 5.13 节中，证明是非常有用的。

当我们说到相对于遥远星系的运动时，真正的意思是，相对于非常遥远的所有星系的平均速度的运动。星系在所有方向上退行，但是就我们所知，往往存在着局部参考系，在这个参考系内，遥远星系的运动呈对称，从什么方向进行观测，问题不大。

加速度为零的局部参考系，可能是由宇宙中星系的分布决定的，这种决定是怎样发生的，是引力理论中还未解答的基本问题。在整个宇宙中，质量的分布应决定一个局部惯性参考系的思想，是马赫 (E. Mach) 提出的，这有时称为马赫原理。这里有很多相关的问题，它们包含在相同的基本思想内：“物体的惯性质量是否由宇宙内物质的分布决定的？引力常数是不是由遥远星系的分布决定的？作为上述问题的一个结果，即当星系彼此退行时，引力常数之值，是否随时间而改变？物理学中的原子常数，是否与宇宙的大尺度结构有关？”这些基本问题，目前还没有解答。

3.9 引力红移及时间膨胀

爱因斯坦的相对性原理 (5.1 节) 阐明，质量及能量的相互关系为，任一静质量 m 有一相当的能量 mc^2 (Ei07)。爱因斯坦证明，分立的质量守恒及能量守恒定律，合并为一更一般的质能守恒定律。这预示在恒星表面，对于辐射有引力红移。考虑与恒星相距很远的、在静止状态的两个质点，一个是电子而另一个是正电子，每个质点的静质量为 m_0 ，如果质点朝恒星表面下落，每一质点获得的总质量？能量

$$E \equiv m_r c^2 = (m_0 c^2 + \frac{m_0 MG}{r}) = m_0 c^2 (1 + \frac{MG}{rc^2}) \quad (3.49)$$

r 为与恒星的距离。括号内第二项表示势能向动能的转换。现在设这两个质点，在不损失能量或动能下发生偏转，因此它们对撞而湮没。在这个过程中产生两个光子，其频率为

$$\nu_r = \frac{m_r c^2}{h} \quad (3.50)$$

现在这些光子可以从 r 处逃逸掉，但是由于从静止的镜子偏转——这使得没有频移产生——我们可以在远离恒星处，使它们再度碰撞。

在这个碰撞中，它们可以形成一个电子-正电子对，如能量守恒，则在与恒星相距很远处，频率 ν_0 必须为

$$\nu_0 = \frac{m_0 c^2}{h} \quad (3.51)$$

否则，在再产生处于静止状态的正电子-电子对时，应当有过多或过少的能量，因此

$$v_0 = \frac{v_r}{1 + MG / rc^2} \quad (3.52)$$

在离恒星很远处的频率比发射的频率低。对于一颗象太阳的恒星 $M \sim 2 \times 10^{33}$ 克，半径 $R \sim 7 \times 10^{10}$ 厘米，因此在太阳表面， $MG/Rc^2 \sim 2 \times 10^{-6}$ 。对于一颗中子星，它的质量应与此相等，但是它的半径应小 10^5 倍，因此相对频移

$$\frac{\Delta v}{v_r} = \frac{v_0 - v_r}{v_r} = - \frac{MG}{rc^2} \left[1 + \frac{MG}{rc^2} \right]^{-1} \quad (3.53)$$

变得与 1 相差不远，频移 Δv 与频率本身变得可以相比！

在下一节中，我们将看到，电磁波的频率可以非常精确地测量时间，因此可以用来作为时钟。一只位于引力场中的这样的钟，应当走得更慢一些。一般说来，时钟所在地的引力势 $V(r)$ 决定一个钟行走的速率，从一位于引力场之外，也就是说，位于 $V=0$ 的观测者来测量这个钟的周期 P ，将有

$$P_0 = P_r \left(1 + \frac{V}{c^2} \right) \quad (3.54)$$

在 3.11 节中，我们将略述测量这种时间膨胀的实验，时间膨胀，使得脉冲星的经过太阳附近的脉冲，在到达地球时，发生延迟。

3.10 时间的测量

在描述行星绕太阳的轨道运动时，我们曾获得以时间为函数的行星位置表达式。但是时间这个参数，实际上是怎样测量的呢？

测量时间有若干种方法 (Sa68a)，我们感兴趣的是这些方法之间是怎样相互联系的——这里面包含物理学的某些问题。首先让我们描述某些想象中的钟是怎样制造的，它们可能并不切实可行，但在原则上应能工作。

第一个钟

取若干氚 H^3 ，它衰变到氦的同位素 He^3 。如果氚保持在温度约 10K 的状态下，氚将扩散而形成，称一称氚，当它的质量下降到它初始值的一半时，我们说，消逝掉一个单位时间 NT，我们可以制造一个当剩下的质量减少一半时敲一下的钟。

第二个钟

取一些铯的同位素 Cs^{133} 。在基态的两个超精细能级之间会发生跃迁，我们测量在这个跃迁中发射辐射（无线电波）的频率，这个电磁波的周期，可以作为时间的单位 AT。

第三个钟

我们装置一个一直指向地方天顶的望远镜，一个给定的遥远星系，精确地重现在望远镜视场中心的时间间隔，称为一个单位时间 UT。

第四个钟

我们注意到，木星在天球上所描绘的平面，是它绕太阳公转的平面。我们记下地球在绕太阳运行时通过此平面的时刻，地球在绕太阳一圈

时，两次通过此平面，一次从北到南，另一次从南到北，如我们定义连续两次从北到南通过的时间间隔为一个时间单位 ET。我们还有其他测量时间的方法。

这些时间——NT，AT，UT 及 ET——称为核子时，原子时，世界时及历书时，正如我们在这里给它们下的定义那样，其时间单位，分别相当于 ~ 12 年， $(9, 192, 631, 770)^{-1}$ 秒，一天及一年。

这些钟的基本区别在于：第一个钟是用 β 衰变作为它的基本机制， β 衰变是一种弱相互作用。第二个钟是利用电磁过程来测量时间。第三个钟是利用地球自转来测量时间，这是惯性过程，最后，第四个钟是利用引力来测量时间。

由于这些钟所依据的是完全不同的物理过程，我们担心，它们可能并不是测量同一“类”的时间。例如，没有理由认为在上面定义的原子时及历书时所描绘的时间间隔有一个为常数的比，目前，这些时间单位之比约为 $3 \times 10^{17} : 1$ ，从现在开始，几十亿年之后，这个比值将相同吗？或者引力场的强度或者弱相互作用的强度会随时间而变，使得这些钟中的一个相对于另一个钟变得加速。

我们可用实验来检验这个问题，事实上，这种检验已经被提出过，它们的结果，对于宇宙学是很重要的。为了要了解宇宙的原子核的历史以及化学元素的形式，我们必须知道，在过去的历史长河中，宇宙的总体上的演化怎样影响恒星内部核反应速率。在读了第八章讨论恒星内部原子核的合成后，这个问题会更清楚一些。

要了解的重点，是我们上面已列举的四种完全不同的定义时间的方法①。如果广义相对论是正确的，则后两种钟是相关的。同时它们的相互关系变为对引力理论的检验。

在实际工作中，比较这些钟是困难的，行星的摄动使得地球绕太阳的轨道是不规则的。地震及其他扰动影响地球自转的速率。对这些效应了解不完全，使得用原子钟来测量时间的、对世界时及历书时速率的比对很困难。可是，这种实际上的困难应该克服，而时间尺度的相互比对终将成为可能。

3.11 脉冲星时间的利用

很多脉冲星发射讯号，其周期在一年内的变化小于 10^{-8} 。因此这些讯号可以用来定义一个时间尺度。这个时钟的机制还不了解，但想来这里包含有中子星的自转周期。在任何情况下，它的规律性使我们能把它用于科学的目的。对于很多的目的，只要一个钟的精度能核实，我们并不需要知道它是怎样工作的。

康塞尔曼 (Counselman) 及夏皮罗 (Shapiro) 列出了若干种可以利用脉冲星来加以研究的、有趣的引力效应。

(a) 地球的轨道可以测定得比现在所知道的更精确。脉冲星的发射其作用象一个“单程”雷达，对不同的脉冲星作脉冲速率计数，使得我们可以相对于某一任意定义的惯性系来测量地球的瞬时速度。在一系列时间间隔内，积分这些速度，可以获得以时间为函数的地球的位置，这就是地球轨道的形状及其取向。

这种测量也可以获得最外面的行星的位置及质量的资料，它们的运

动影响到太阳系引力中心的位置，因此也影响到地球的轨道，这些效应的周期性可以利用行星的轨道周期来决定，而且我们在脉冲计数中应发现相应的周期变化 (As71)。

(b)位于黄道面附近的一个脉冲星，每年将接近太阳一次，当光脉冲从非常接近太阳边缘处通过时，由于强引力场的出现所有钟都应变慢，而在太阳所在的局部地区，光速仍以 c 来量度，因此光脉冲应慢下来。在地球上，脉冲的到达时间因而将延迟约 100 微秒，具体延迟多少，只依辐射经过太阳时靠得有多近而定。通过到达时间的追踪，我们可以计算时间延迟，看看测量所得的延迟与相对论理论的预告是否符合。要做这个，我们不得不首先作由于日冕的相对来说高的折射率引起的在时间延迟上的改正。因为由大气折射引起的延迟是与 v^{-2} 成比例，而引力延迟是与频率 ν 无关的，因此这是可行的。几个脉冲星在 1° 范围内通过太阳，对于这种检验应该是合适的对象。

(c)由于脉冲星位于银河系内，银河系内恒星的剪切运动，相对于太阳应产生一个加速度，利用脉冲到达时间的追踪观测，可以探测到它。银河系的较差自转，因此可以很精确地被描绘出来。

3.12 银河系自转

银河系的质量分布不均匀，大部分集中在核心附近。由于这个缘故，银河中心附近恒星的角速度 $\dot{\theta}(r)$ 往往要比离银心较远的恒星的角速度明显地来得大，即 $d\dot{\theta}/dr < 0$ 。为简单起见，假设所有恒星绕银河中心都具有理想化了的圆轨道。令太阳位于离中心 r_s 处。相对于太阳，在银经为 l ，与中心 C 相距 r 处的物质，沿视线的接近速度为叫 $v(r, l)$ (图 3.8)。

图 3.8 讨论较差自转的示意图

$$\begin{aligned} v(r, l) &= [-r_s \dot{\theta}(r_s) \sin l + r \dot{\theta}(r) \cos \theta] \\ &= [\dot{\theta}(r) - \dot{\theta}(r_s)] r_s \sin l \end{aligned} \quad (3.55)$$

(3.55)式中最右边的简单形式，是由于有从图 3.8 中可以看出的 $r \cos \theta = r_s \sin l$ 这样的关系式。从(3.55)式以及 $d\dot{\theta}/dr < 0$ ，我们注意到，在第 I 及 III 象限， $v(r, l)$ 是正的，因此在这些方向上的恒星及气体，将趋近我们，其光谱应蓝移。在 II 及 IV 象限，恒星光谱应出现红移。

事实上，这就是所观测到的。1927 年荷兰天文学家奥尔特 (Oort) 能够利用这个迹象来证明，在银河系内的恒星，处于绕银河中心作较差自转之中 (Oo27a, b)。

在任一给定银经 l 处，在 P 点，即当视向是切线时，应观测到最大的速度。在任一给定距角 l 处，记下极大速度，我们可以建立一个能给出质量分布及太阳与银心距离的银河系的模型。目前的结果给出 $r_s = 9.5$ 千秒差距 ± 1.5 千秒差距 (vd Be 68)。

较差自转倾向于剪切绕银河中心旋转的气体及尘埃聚集体。有时在某些星系中，这种效应，认为是出现旋臂的原因。可是，最近林家翘 (Li 67) 认为，旋臂结构体现了密度上的局部增加，而且这个增加了的密度旋涡，以不同于恒星的“图案”速度，象波一样绕星系运行。对于银河系，这个速度等于以千秒差距为单位的、离银心的距离再乘以 13.5 公里

/秒。在太阳附近，这个速度应为 135 公里/秒，而银河系自转（恒星的速度）是 ~ 250 公里 $\cdot$ 秒 $^{-1}$ 。与此相反，在棒旋星系中，棒上的恒星发现如固体一样，与图案一道运动。

3.13 在平方反比律场中天体的散射

当流星接近地球时，它的轨道可以发生明显的变化，同样，一颗通过木星与木星很接近的彗星，可以获得足够的能量以逃逸出太阳系。在这两种情况下，小天体被大天体所散射或偏转。当一个质点，起初以 θ_∞ ？ θ_0 方向接近时（图 3.9），轨道方程由方程(3.34)及(3.40)给出

$$\frac{1}{r} = \frac{MG}{h^2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon h^2}{M^2 G^2}} \cos(\theta - \theta_0) \right] \quad (3.56)$$

距离散射体很远时，渐近运动是沿下列方向（见方程(3.42)）

$$\cos(\theta_\infty - \theta_0) = -\left(1 + \frac{2\varepsilon h^2}{M^2 G^2}\right)^{-1/2} = -\frac{1}{e}, \quad r \rightarrow \infty \quad (3.57)$$

对于 $|\theta_\infty - \theta_0|$ 的两个值而言，这是有解的。一个对应于进入方向，另一个对应于被散射的渐近方向。物体被偏转的角度为 $\Theta = 2(\theta_\infty - \theta_0) - \pi$ ，可见

$$\sin \frac{\Theta}{2} = -\cos(\theta_\infty - \theta_0) = \frac{1}{e} \quad (3.58)$$

注意到 h 是单位时间内扫过面积的 2 倍

$$h = v_0 s$$

其中 s 是碰撞参数（图 3.9）， v_0 是被散射质点在距离很大， $r \rightarrow \infty$ 时的接近速度，

$$\text{由于} \quad \varepsilon = \frac{v_0^2}{2}, \quad h^2 = 2\varepsilon s^2 \quad (3.59)$$

及

$$\sin \frac{\Theta}{2} = \left[1 + \left(\frac{2\varepsilon}{MG} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (3.60)$$

这引导到

$$\cos \frac{\Theta}{2} = \frac{2\varepsilon s}{MG} \quad (3.61)$$

如果任一碰撞参数界于 s 及 $s+ds$ 间的物体被散射到界于 Θ 及 $\Theta+d\Theta$ 的角度内，我们说，对于散射的微分截面 σ_Θ ，由下式给出

$$2\pi s ds \equiv -\sigma_\Theta(\Theta) d\Omega = -2\pi \sigma_\Theta(\Theta) \sin \Theta d\Theta \quad (3.62)$$

这个方程左边的表达式是圆环的面积。从一个给定的方向接近的所有粒子，如果它们被散射到一个立体角 $d\Omega$ 之内，这个立体角包围在两个具有半角分别为 Θ 及 $\Theta+d\Theta$ 的圆锥体之间，就不得不通过这个圆环而流过。方程右边的表达式给出界于这两个圆锥体之间的立体角再乘以微分截面，因此微分截面，正好是保证获得被散射质点守恒的参数，负号的出现，

图 3.9 在平方反比律吸引场中的散射*

是因为碰撞参数 s 的增加，导致散射角 Θ 的减小的缘故。由于 $2\pi s ds$ [见方程(3.62)]是碰撞参数值界于 s 及 $s+ds$ 时的相遇几率，因此微分截面

是与散射到角度界于 Θ 及 $\Theta+d\Theta$ 之间的几率成正比。现在我们把(3.62)式重新写成下列形式

$$\sigma(\Theta) = \frac{sds}{\sin\Theta d\Theta} \quad (3.63)$$

与对于 s 的表达式(3.60)组合, 得

$$\sigma(\Theta) = \frac{1}{4} \left(\frac{MG}{2\varepsilon} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\Theta/2)} \quad (3.64)$$

3.14 恒星阻力

如果一颗高速恒星通过低速恒星场周围而运动时, 由于在每一次远相遇中, 会稍许偏离, 因此遭受一个阻力。应用上面导得的散射理论, 能够初步地计算这个阻力。

首先, 沿向散射星接近的初始方向上, 恒星速度的损失为

$$\Delta v = v_0(1 - \cos\Theta)$$

其中 v_0 是在距离很大时, 对于散射中心的接近速度, 这并不是整个的速度损失, 只是沿接近方向分量上的减小。在动量上的变化为 $\mu \Delta v$, 其中 μ 是约化质量。因此, 沿初始运动方向反向上施于高速恒星上的力为

$$F = \sum_i \frac{\mu_i \Delta v_i}{\Delta t} \quad (3.65)$$

其中 Δt 是产生速度变化 Δv_i 的时间, 在这个时间间隔内, 对所有发生相遇的恒星求和, 这个求和的形式可以用数密度为 n 的恒星气体来代替。用相遇几率或对于散射进入 Θ 角的截面来说, 在任何给定的相遇中, 力将为

$$F = 2\pi\mu v_0^2 n \int_{\Theta_{\max}}^{\Theta_{\min}} (1 - \cos\Theta) \sigma(\Theta) \sin\Theta d\Theta \quad (3.66)$$

这个作了如下的假设: 所有与个别恒星相互作用而引起的偏转都是小的, 以及沿运动方向的力是线性相加。利用公式(3.62), 我们有

$$F = 2\pi\mu v_0^2 n \int_{\Theta_{\min}}^{\Theta_{\max}} (1 + \cos\Theta) s ds \quad (3.67)$$

我们对单个恒星在所有可能的碰撞参数 s 值上来积分, 然后乘以恒星的密度 n , 以此来代替对所有恒星的积分。由于在碰撞参数 s 下, 与一个恒星相遇几率是与 s 及 n 成正比的, 因此这是一个等效算法。在表达式中出现的额外因子 v_0 , 是考虑到在速度很大时, 单位时间内的相遇次数会增加。如我们令 $\theta_0 \equiv 0$ 及 $\theta_\infty \equiv \theta$, 则

$$-\cos\Theta = \cos 2\theta \equiv \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} \quad (3.68)$$

但 (见图 3.9)

$$\cot \frac{\Theta}{2} \equiv \tan \theta = \frac{2\varepsilon s}{MG} = \frac{sv_0^2}{MG} \equiv \alpha s \quad (3.69)$$

因此

$$F = 2\pi\mu v_0^2 n \int \frac{2}{1 + \tan^2 \theta} ds \quad (3.70)$$

及

$$F = 4\pi\mu v_0^2 n \int \frac{s ds}{1 + \alpha^2 s^2} \quad (3.71)$$

$$F = \frac{4\pi\mu v_0^2 n}{2\alpha^2} \ln(1 + \alpha^2 s^2) \Big|_{S_{\min}}^{S_{\max}} \quad (3.72)$$

我们定义一个减速时间或弛豫时间， τ

$$\tau \equiv \frac{\mu v_0}{F} \quad (3.73)$$

在这个计算中，已作恒星是通过稳定“场”星群而运动的假设。只要这些恒星的随机运动速度与 v_0 相比是低的，方程(3.72)就完全适用。不过当恒星随机速度趋近于 v_0 时，质点由于碰撞，可以交替地被加速或减速，上面的推导就不再适合了。对于太阳，以速度 $v_0 = 20$ 公里·秒⁻¹ 通过周围的恒星场而运动， $a = 3 \times 10^{-14}$ 厘米⁻¹， $n \sim 10^{-56}$ 厘米⁻³，及 $\mu \sim 10^{33}$ 克。如果取 $S_{\max} \sim 10^{19}$ 厘米，粗略地说就等于恒星的平均间隔①，此外再假定 $S_{\min}$ 要小得更多，那么 $F \sim 10^{18}$ 达因。可是即使对这样大的力， $\tau \sim 10^{21}$ 秒，比宇宙的估计年龄还大得多。 τ 的这个大的数值使人困窘，因为在恒星动力学中，它是一个有代表性的一般问题。我们发现如球状星团那样的聚集天体，与在热力学平衡中所期望的形状相似。这意味着恒星必须激烈地相互作用来彼此传递能量，可是上面的机制，在任何地方都不会以接近于令人满意的速率来完成这种聚集，相同类型的其他机制也不行。这些恒星的相互作用必须用某种我们还不知道的过程来控制。在 3.16 节中，将再讨论这个问题。不过我们必须注意，恒星与气体云或恒星的相互作用所产生的效应，比个别恒星相遇的要大 (Sp 51a)。如果云的质量为 $M \sim 10^6 M_\odot$ 及 $n \sim 10^{-65}$ 厘米⁻³， F 增加 10^3 倍及 τ 减小 10^3 倍。此处 $S_{\max}$ 必须选择为 $\sim 10^{22}$ 厘米。

碰撞并不往往使质点减速。当恒星位于银河平面且与质量大得多的气体云相互作用时，实际上它们可以加速到高速。在表 A.6 中，我们指出老年星相对于太阳的均方根随机速度比年轻星的要高，这可能是由于与这种气体云相碰撞的结果。如在第四章将要说明的那样，物体的系集，倾向于把它们自己排列成平动能量相等的形式（能量均分），因此大质量的云往往就会把它的一部分能量传递给质量较小的恒星，这样就把恒星的速度加速到大于气体云的速度 v_0 。

利用上述的计算方法来处理带电质点，是与此完全不同的另一类问题。静电力的平方反比律使我们也能导得与公式(3.72)及(3.73)完全相似的公式。我们可以计算在快速电子通过星际介质时的静电阻力，以及当星际或行星际带电尘埃以典型速度 ~ 10 公里·秒⁻¹ 通过部分电离的介质时的静电阻力。这个效应，特别在尘埃质点通过星际介质运行的动力学中起重要作用。在 6.16 节中，我们还看到电子及离子的远碰撞是用如(3.67)那样的公式来描绘，以及电离等离子体的不透明度或发射率，可以用这些方程来计算。从热电离星际气体来的射电发射，也可以直接与等离子体密度，或者更确切地说与通过气体云在视向上圆柱内的碰撞频率相联系。

3.15 维里定理

这里我们将要证明的定理仍然是统计性的。它描述一个大的物体系集的总体上的力学表现，而不是属于这个系集中的任何一个给定物体的精确表现。

考虑一个位于 r_j 的质量为 m_j 的系统。令作用在 m_j 上的力为 F_j ，现在我们可以写出下列恒等式

$$\frac{d}{dt} \sum_j P_j \cdot r_j = \sum_j P_j \cdot \dot{r}_j + \sum_j \dot{P}_j \cdot r_j \quad (3.75)$$

$$= 2T + \sum_j F_j \cdot r_j \quad (3.76)$$

其中 T 为整个系统的动能，以及动量对时间的导数 $\dot{P}_j$ 与力 F_j 相等。目前我们并不使方程左边等同于任何在物理上感兴趣的量。在方程两边取对时间的平均，可得

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{d}{dt} \sum_j P_j r_j dt = \langle 2T + \sum_j F_j \cdot r_j \rangle \quad (3.77)$$

其中括号表示对时间的平均。系集内每一个成员对于全部时间仍继续保持为成员的束缚系统，是特别有趣味的一种情况。在这种情况下，由于没有一个质点从这个系统中逃逸出去，所有的 r_j 值，必须保持为有限的，而且由于该系统的总能量为有限的，因此所有的 P_j 值必须保持为有限。

由于 $\sum_j P_j r_j$ 保持为有限，对于全部时间，它的导数也必须保持为有限。

这意味着(3.77)式中的左边，是由一个有限量被 τ 相除而组成的。如果我们在很长或无穷大的时期内进行平均的话， τ 可以变得任意大，(3.77)式的左边，因此趋于零。我们可设

$$\langle 2T \rangle + \langle \sum_j F_j \cdot r_j \rangle = 0 \quad (3.78)$$

如果力是从引力得来的，这个方程变为

$$\langle 2T \rangle - \langle \sum_j \nabla V(r_j) \cdot r_j \rangle = 0 \quad (3.79)$$

其中 $V(r_j)$ 是在位置为 r_j 时，质量为 m_j 的物体的势能。在这种情况下，力只是位置的函数，而且可以写成如势能梯度 ∇ 的负值

$$F_j = -\nabla V(r_j) \quad (3.80)$$

如果势能是与 r^n 成比例的，梯度位于沿径向的方向，及

$$\sum_j \nabla V(r_j) \cdot r_j = \sum_j \frac{\partial V(r_j)}{\partial r_j} r_j \quad (3.81)$$

称为整个系集的总势能 V ，我们得

$$\langle T \rangle = \frac{n}{2} \langle V \rangle \quad V \equiv \sum_j V(r_j) \quad -2 < n \quad (3.82)$$

对于 $n < 2$ ，由于总能量 $\langle T \rangle + \langle V \rangle$ 应当为正值，这表示这个系统不再为束缚系统，于是这个关系式陷于困境。对于一个平方反比律的力，如在引力或静电力中势能变成与一次方成反比， $n = -1$ ，及

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \langle V \rangle \quad (3.83)$$

这定理在天体物理学中是很重要而且发现是有多种用途的。例如，对于星系团质量而言，它提供当前最好的估算值。这个估算值是利用星系团

中、不同星系间视向多普勒速度弥散度的观测值而得到的。这个弥散度，给出单位质量上的平均动能。方程(3.83)于是给出每单位质量上的平均势能。如果从星系团的距离以及从它在天空中的张角可以知道典型的星系团的直径，我们可以在下述假设下，获得星系团总质量的粗略估算，

$$\frac{V}{M} \sim \frac{MG}{R} \quad (3.84)$$

其中， M 为星系团质量， R 为某一加权星系团半径，略小于该星系团的观测半径。如果把实际上星系团的观测半径用于方程(3.84)中，在正常情况下，星系团的估算质量，应有不到一倍的误差（这是太高的）。

当我们用维里定理来决定星系团的质量时，出现一个有

趣的问题。在此星系团中，个别星系的质量可用问题(3.9)中的方法来决定。如果星系团的大小是从视直径及红移距离计算出，从这里我们可以计算整个星系团的势能。如果用个别星系的随机速度来计算 T ，从方程(3.83)，仍然可以获得势能的一个独立的估算。这样一来，我们注意从一个星系到另一个星系在红移上的变化，以及估算实际的随机速度，利用(3.83)式的结果，往往会奇怪地给出 $\langle T \rangle$ ，从而 $\langle V \rangle$ 比基于个别星系的质量计算的总势能约大一个数量级。我们认为这或者(i)在星系团中有大量未探测到的物质，或者(ii)整个星系团正在瓦解，或者(iii)我们还不知道在这样大尺度上的动力学。例如我们可以提问，星系团内的星系，是否能不参加整个宇宙的膨胀，能否把这归结为星系瓦解的原因。看来这个答案依赖于我们还不知道的一些因素。如果宇宙中，质能的大部分表现形式是物质，宇宙的膨胀只起小角色作用；但是如果引力或电磁辐射及中微子具有比物体大的能量密度，则宇宙膨胀可起显著的作用(No71)。问题(4.5)及其后面的那部分讨论就是从观测的观点来处理星系团的问题。

3.16 抵制潮汐分裂的稳定性问题

当一大群具有总质量为 m ，受引力束缚的质点行近一个质量很大的物体 M 时，这一大群质点往往会被撕裂开。一个用引力保持在一起的固体，当它行经比它大得多的物体时，可以发生同样的情况。

道理很简单。如果我们考虑这质点群的质心与大质量物体 M 的距离为 r ，且笔直地向它坠落。于是向 M 的加速速为 $\frac{1}{2} MG \cdot r^{-2}$ 。令 r' 为这质点群的半径。在该质点群表面上的一个质点 P_0 (图 3.10) 与 M 的距离最近，要不是从质点群中心来的引力，使该质点以加速度 mGr'^{-2} 离开 M ，则此质点将以加速度 $\frac{1}{2} MG(r - r')^{-2}$ 向 M 运动。为了使质点不断地离开该质点群，必须有下列条件

$$MG\left(-\frac{1}{r^2} + \frac{1}{(r - r')^2}\right) > \frac{mG}{r'^2} \quad (3.85)$$

展开上式中的左边，且只保留 r' 的一次项，得

$$\frac{2M}{r^3} > \frac{m}{r'^3} \quad (3.86)$$

同样，对于一个绕 M 完全作圆轨道运行的质点群，当下列不等式存在时，发生分裂

$$\frac{3M}{r^3} > \frac{m}{r'^3} \quad (3.87)$$

图 3.10 一个受引力束缚的质点群——恒星、原子、分子——与一个质量大的物体 M 相遇很近时，可以被分裂掉

问题 3.3 试导出方程(3.87)。可以设想这个质点群在运动时，没有绕其中心的自转，并考虑其质心以离心斥力

$$F_c = r \dot{\theta}^2 \quad (3.88)$$

而离开 M 。这与在 P_0 点的“斥力” $(r^2 \dot{\theta}^2)$ 有所不同。

因此质量 M 与 m 的精确的比率，将依不同的轨道而变化， m 的自转，也将在决定它的稳定性中起作用。可是值得注意的是，粒子群的密度比单独考虑它的实际质量或大小更为重要。

这里有第二个同样起重要作用的效应。再一次考虑直接的坠落。质点 P_1 及 P_2 (图 3.10) 向 M 径向加速并趋于会合，质点 P_1 及 P_2 的相互间相对的有效加速度，粗略地为

$$2 \frac{MG}{r^2} \frac{r'}{r} = \frac{2MGr'}{r^3}$$

这种效应由它们本身产生。当它大于由于质点群本身的质量而引起的加速度 mGr'^{-2} ，也就是说，当(3.86)式有效时，这个结果是重要的。因此伴随着潮汐分裂，存在着一个横向压缩，它倾向于集中这个质点群，然而潮汐力却试图撕裂开它。在这些综合效应下，实际上会产生什么结果，最好是利用在第四章的刘维 (Liouville) 定理来理解。

值得注意的是两个特殊的场合，这种类型的潮汐分裂在那里看来起重要的作用。第一，与太阳十分接近的或与最重的行星木星十分接近的彗星，曾观测到过分裂成两块或更多块碎块的现象。潮汐理论的一般性质，看来被证实了。

同样有兴趣的是在球状星团上看来有潮汐分裂的效应。冯·霍亥纳 (Von Hoerner) (vHo 57) 曾用统计方法细查过这些星团的轨道，发现它们的轨道被拉得非常接近银心。质量很大的银核，看来可能会把这类星团的外围束缚得松散的成员星剥夺掉。在星团中心，密度最大，因此分裂效应相对来说是小的。然而在星团边缘，那里 m/r'^3 之值小，恒星可以较容易地离开星团。

现在我们可以看出，在决定星团内恒星最终的速度分布中，为什么球状星团内恒星的相互作用，只可能起有限的作用。3.14 节的论述以及用公式(3.73)表示的、非常大的恒星相遇弛豫时间 τ ，不可能给出演化到我们所观测到的界限分明的致密的球形聚集体那样一幅星团实际演化的真正图象。与银核的相互作用必定对这个分布有一个明显的、甚至可能是占统治地位的影响。我们将在 4.21 节中，再一次论及这个问题。

在 1.8 节中我们曾说过，本星系群中某些矮星系决不可能十分接近我们的银河系或 M31。根据如(3.86)及(3.87)那样的判别标准，我们可以直接地作出这个结论。

问题

3.4 地球绕太阳运动的轨道周期由公式(3.47)给出, 太阳的距离可由 2.1 节所叙述的雷达法来精确测定, 对地球的偏心轨道取平均值, 可得太阳距离的平均值为 1.5×10^{13} 厘米。假设地球质量 $m_E < M_\odot$, 试证太阳质量 $M_\odot = 2.0 \times 10^{33}$ 克。

3.5 雷达讯号从发射后经过 2.56 秒钟从月面返回, 光速为 3.00×10^{10} 厘米·秒⁻¹, 假设月球公转周期约 27.3 日, 在月球质量比地球小的假设下, 试求地球的质量。

附注: 用这种方法, 可以决定任一带有卫星的行星的质量, 当行星没有卫星时, 可以从施于附近的行星的摄动中决定它的质量。这种计算很费时, 但本质上并无新的物理概念。计算是在牛顿力学范畴内进行。

3.6 由于月球及地球绕一公共质心旋转, 火星的视运动在它的正规轨道上, 叠加有一个周期为一月的运动, 月球的距离为 $D \sim 3.8 \times 10^5$ 公里, 火星最接近地球时的距离为 $L \sim 5.6 \times 10^7$ 公里。在半个月內, 火星的视位移为 ~ 34 角秒, 试求月球的质量。

3.7 当流星与地球相距很远时, 以速度 v_0 接近地球, 如碰撞参数 s 由下式给出, 试证该流星将冲击地球, 至少会擦边而过。

$$s \leq [R^2 + 2MGRv_0^{-2}]^{1/2}$$

图 3.11 流星或流星云在地球大气上的碰撞

3.8 如一个流星云以相对速度 v_0 接近地球, 试证质量捕获率为 $\pi[R^2 v_0 + 2MGR \cdot v_0^{-1}] \rho$, 其中 ρ 为云的质量密度。在问题(3.7)及(3.8)中, 都忽略了太阳对流星的影响。这个问题, 在阅读 4.5 节以后来做更为适当。

3.9 从侧视来看一个旋转盘状星系。利用分光测量的多普勒谱移, 我们可以决定边缘附近恒星绕星系中心旋转的速度 V 。试证用观测到的速度表示的星系的质量为 $\sim V^2 R G^{-1}$ 。 R 为星系的半径。

3.10 在年轻星团附近, 我们偶尔会看见 O 或 B 型逃逸星。显然直到不久以前, 它们还是星团的一部分, 不过退行迅速而已。布拉乌 (Blaauw) (B161) 曾认为, 逃逸星原先可能是双星的一部分, 双星的伴星作为超新星而爆发, 只是把一部分质量丢在后面。假设初始运动为圆运动, 残存星的初始轨道速度为 v 。如伴星的初始质量为 M , 爆发后最后的质量仅 $M/10$, 求高爆发很远处逃逸星的最终速度为 V 。残存星的质量为 m , v 及 V 都是相对于该系统质心而言的速度。

3.11 一个自旋迅速的引力束缚天体 (但不是处于相对论速度下), 如其质量为 m , 半径为 r , 试求该天体分裂时的自转速度。假设直到分裂前, 天体的形状保持为球形——即使这个假设一般并不成立。

3.12 每年一次太阳掩致密射电源 3C279, 试证无线电波在太阳边缘通过时, 将会弯曲 (Hi 71)。并证这种弯曲是等效原理的推论。

3.13 在棒旋星系 NGC7429 中, 多普勒频移速度表示棒是如固体那样旋转 (Bu 60), 即在它的整个棒上, 角速度 ω 为常数。试证当质量的分布事实上是球形 (不过只是棒由明亮的恒星组成), 以及在半径为 r 的球内的质量 $M(r)$ 随离星系中心距离的增加而迅速增加时 (图 1.10) 这

样的运动可以发生，试证在此情况下。 $\frac{dM(r)}{dr}$ 是与 r^2 及 ω^2 成正比。

不过棒旋星系是否可能以完全不同于这种过程来解析，我们还不清楚！阿尔赛斯(Aarseth) (Aa60, 61)曾讨论过一个实际的，恒星的圆柱形棒的稳定性。

问题选答

$$\begin{aligned} 3.1 \quad \dot{r} &= \frac{1}{y^2} \dot{\theta} \frac{dy}{d\theta} = -h \frac{dy}{d\theta} \\ \dot{r} &= -h \dot{\theta} \frac{d^2 y}{d\theta^2} = -\frac{h^2}{r^2} \frac{d^2 y}{d\theta^2} \end{aligned}$$

代入(3.30)，得

$$\frac{d^2 y}{d\theta^2} + y = \frac{MG}{h^2}$$

以 $y = B \cos(\theta - \theta_0) + MG/h^2$ 代入满足此式。

3.2 在高度 $H \ll R_E$ 时， $m\ddot{r} = GmM_E / (R_E + H)^2$ 。如果我们取 $M_B = \rho_E (4/3)\pi R_E^3$ ，其中的符号分别代表地球质量、密度及半径，可从测量的加速度来估算 $G \sim g[\rho_E (4\pi/3)R_E]^{-1}$ 。

3.3 在一群质点的质心，离心力及引力相等： $(r\dot{\theta})^2 = GM/r$ ，一位于质点群表面附近的质点 p 所受的离开 M 的离心加速度比中心的要小 MGr'/r^3 倍，这一质点还承受一较强的向 M 的引力加速度

$$\frac{MG}{r^2} \left[-1 + \frac{r^2}{(r-r')^2} \right]$$

当发生分裂时，这些加速度必须大于 mG/r'^2 。展开这个不等式，得

$$\frac{3M}{r^3} > \frac{m}{r'^3} \quad (3.87)$$

这个解是在质点群无自转的假设下进行的。

3.6 令 m 为月球质量及 M 为地球质量，地球与质心的距离 R 由下式给出：

$$RM = (D^2 R)m$$

火星的视位移为 $2R/L$ ，其中 L 为火星的距离。在问题 3.2 中得到 $2R = 1.7 \times 10^{-4}L$ ， $R = 4.8 \times 10^3$ 公里，及 $M = 6.0 \times 10^{27}$ ，因此现在我们可以估算出 $m \sim 7.4 \times 10^{25}$ 克。

3.7 令 V 为流星擦边而过时的速度，即流星击中地球时与地球相切，那么这个速度是与位置矢 R 垂直的。因此我们可把角动量守恒写成如

$$Sv_0 = RV$$

每单位流星质量上的能量守恒为

$$\frac{v^2}{2} = \frac{v_0^2}{2} - \frac{MG}{R}$$

从上式消去 V ，可得

$$s = (R^2 + \frac{2MGR}{v^2})^{1/2}$$

显然所有碰撞参数小于 s 的流星同样可以冲击地球，这便是所要求的表达式。

3.8 每秒钟内冲击地球的流星数目，可由空间流星密度乘以圆柱体的体积而得出。圆柱体的半径是单位时间内碰撞参数 s 所扫过的距离

$$\pi s^2 \cdot v_0 \cdot \rho$$

s 由问题 3.7 给出。

3.9 假设为圆周运动。一个星系对一颗位于它边缘上的恒星施加引力，它的质量为 M 。于是可以恒星单位质量内动能及势能的关系得出

$$\frac{v^2}{2} = \frac{MG}{2R}$$

3.10 这个问题有点复杂。每个星绕质心的线动量开始为 mv ，如质量为 M 的恒星爆发后，留下质量为 $M/10$ 的残骸，这两个保持下来的恒星将以相对于初始质心以 $0.9mv$ 的动量而运动，这引起质心平移的动能以及这些星围绕新的质心而旋转的附加动能。新的束缚势能只有初始束缚能的十分之一，但如果 $m \gg M/10$ ，减下来的势能的大部分转化为该系统的平移运动。在这种情况下，两个残存星保持束缚及 $V \sim 0.9mv/(m+M/10)$ ，如果 $M/10$ 还嫌大，势能的降低可使 m 逃逸掉， V 的大部分表现为残存星分离的真速度。

3.11 离心力 > 重力：

$$r\omega^2 > mG/r^2, \omega > \sqrt{mG/r^3}$$

3.12 假设一个观测者在空间飞船内向太阳坠落，光线从太阳旁边经过进入飞船的窗口，等效原理认为他应看见光是沿直线运动的，但是由于他是向太阳坠落，这意味看，相对于静止的观测者而言，实际上光线应该沿一抛物线而运动。

3.13 对于一个以等角速度 ω 旋转的固体而言

$$\frac{dv}{dr} = \frac{V}{r} = \omega$$

但利用(3.44)，得

$$v(r) = \left(\frac{M(r)G}{r} \right)^{1/2}$$

其中 $M(r)$ 是封闭在半径为 r 的圆内的质量

$$M(r) = \frac{\omega^2 r^3}{G}, \quad \frac{dM(r)}{dr} = \frac{3\omega^2 r^2}{G}$$

第四章 随机过程

4.1 随机事件

假如在房间的一端打开一个乙醚瓶，在房间的另一端就立刻可闻到乙醚蒸气的味道。但乙醚分子既不是沿直线穿过房间，也不是一跃而过。它们与空气分子经过无数次的碰撞，按随机游动方式一会儿弹向这边，一会儿又弹向那边，其中一些分子回到了原来的瓶里，一些穿过了门缝，而另一些则到达观察者的鼻子附近，当它们被观察者吸入后就产生了嗅觉。

一般地讲，分子通过两种方式向周围扩散：(i)与其它原子或分子的碰撞。(ii)大块的湍流和对流运动，包括整个气槽的传输。这两者也就是使恒星的大气以及行星的大气成分混合起来的机制。这两种过程都产生随机运动，都能用统计方法来描述。

从一个完全不同的角度来看问题，设想有一个宽带放大器，其输入端不与任何讯号源连接。如果在示波器上看其输出，我们会发现输出的仅是一些时大时小的尖峰波，看上去酷似浓密草坪上的草叶。要对这类现象作精细的描述实在太费劲了，但若用尖峰波的平均高度和平均间隔来给以统计概括则是容易的，在许多情况下这也就是实际需要的全部信息了。

这种尖峰波就是任何一种电子测量所固有的噪声。比如我们要探测进入放大器的射电天文讯号，我们就必须把讯号和噪声区分开来。而这只有当我们对噪声的统计量充分了解时才能做到。

再考虑第三种情况，设一颗恒星位于稠密的气体之中。从恒星表面发射出的光线只有穿过气云才能到达云的外层并进而向空间传播。单个光子可能接连多次地被吸收，再发射，再吸收，再发射。光子发射的方向可以与吸收前运动的方向根本无关。因而光子可以在云内以短的步长和随机的方向运动，直到它最终到达气云边缘并离开气云为止。这种随机游动就可以用统计方法来描述。我们能够估计光子逃逸前所经过的总行程，以及就其运动过程中任一给定时刻预期光子离开恒星的近似距离。

上述三种不同的物理过程可以用同一种数学方法来处理。在最简单的情况下，每一个问题都可化为一个随时游动。我们想象有一个人在走步。他可以往前走一步，也可以往后退一步。但为了简单起见，假定他的步长不变。若每一步的方向是随机地决定的，比如由掷硬币来决定，那么这个人就是在作随机游动。掷硬币后可能决定他第一步应该向后走，第二步向前，随后再向前，向后，向后，向前等等。十步后这个人离开起始位置多远？312步以后或10,000,000步后呢？我们无法给出准确的答复，但我们很容易估计处于离起点任一给定距离上的几率。

4.2 随机游动

把出发位置作为零点。我们由掷硬币来决定作随机游动的人是往前还是往后移动。走完第一步后他将停在+1或-1的位置上(图4.1)。若他停在+1位置，那么再掷一次硬币后他将到达+2或0的位置，这取决于

掷硬币决定他是向前还是向后。同样从? 1 位置他可以走到 0 或? 2 处。

走两步后有两种可能的途径回到零位，而仅有一种可能途径达到? 2 或+2 的位置。既然所有这些走法是同样可能的，所以经两步后这个人就有 1/4 的几率停在+2 位置上，有

图 4.1 经过 n 步后停在 m 位置上的几率 $P(m, n)$

1/4 几率停在? 2 位置上，而有 1/2 的几率停在零位上。因而若只允许走两步，那么走到零位的可能性就更大些。因为有两种不同走法可达到该位置，而仅有一种走法能到达+2 或? 2 的位置。

图 4.1 表示一个人共走 n 步后停在离原点距离为 m 步上的可能途径数目 $p(m, n)$ 。称 m 为距原点的偏离。我们称 $p(m, n)$ 为停在离原点距离 m 处的相对几率。经 n 步停在 m 位置上的绝对几率 $P(m, n)$ 为

$$P(m, n) = \frac{p(m, n)}{\sum_k p(k, n)}$$

$$= \frac{\text{到达}m\text{位置的可能途径数}}{\text{到达任一位置}k\text{的一切不同途径数总和}} \quad (4.1)$$

图 4.1 表明量值 $p(m, n)$ 具有二项分布，它们与展开式

$$\left[\frac{1}{x} + x\right]^n = x^n + nx^{n-2} + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-4} + \cdots$$

$$+ \frac{n! x^{n-2r}}{(n-r)! r!} + \cdots + \frac{1}{x^n} \quad (4.2)$$

中的系数相同。利用这一点，级数中系数的和即 $\sum_k p(k, n)$ 就可容易地

求得了。它就等于二项式展式中系数的和，只要在方程(4.2)右边令 $x=1$ 就立即可求得。

式(4.2)左边以 $x=1$ 代入后，可知这些项之和必为 2^n ：

$$\sum_{k=-n}^n p(k, n) = 2^n \quad (4.3)$$

以及

$$P(m, n) = \frac{p(m, n)}{2^n} \quad (4.4)$$

我们还看到，如果方程(4.2)中某一给定项的指数值代表图 4.1 中的偏离 m, 则该项的系数就代表其相对几率 $p(m, n)$ 。在这个意义下, 我们可将(4.2)式改写为

$$\left(\frac{1}{x} + x\right)^n = \sum_{k=-n}^n p(k, n) x^k \quad (4.5)$$

这个级数中偶数项系数均为零。现在我们来确定在随机游动 n 步后与零点的平均偏离。所谓平均偏离意味着我们所取的 2^n 种可能途径中每一种途径所达到的距离求和后再除以 2^n 。因为到达距离 k 的可能途径数为 $p(k, n)$, 因此平均偏离表达式中的分子是 $\sum_k kp(k, n)$ ，而整个平均偏离

$\langle k \rangle$ 就是

$$\begin{aligned} \langle k \rangle &\equiv 2^{-n} \sum_{k=-n}^n k p(k, n) \\ &= \frac{\text{走}n\text{步后一切可能的终端距离之和}}{\text{走}n\text{步时一切可能的途径数}} \end{aligned} \quad (4.6)$$

从图 4.1 及二项分布公式(4.2)可以看到，偏离为 k 时的相对几率 $p(k, n)$ 与偏离为 $-k$ 时的相对几率相等： $p(-k, n) = p(k, n)$ 。因为(4.6)式中是从 $-n$ 到 n 求和， $k=m$ 及 $k=-m$ 的项正好一一抵消，余下唯一没有抵消的是 $k=0$ 的项。这表明 $\langle k \rangle$ 值必定也是零。因此不管走多少步，离出发点的平均偏离必然为零。

这并不意味偏离的绝对值为零。完全不是这样！但因为到达某一距离的途径数与到达符号相反距离相同处的途径数目相等，平均位置就正好落到出发点上了。

从对称性来看上述结果是显然的。可是通常我们需要知道的是经 n 步后实际达到多远距离。例如我们需要知道从恒星发出的光子在周围星云中经过 n 次吸收和再发射后走过的实际距离。均方根偏离 Δ 便是这种实际距离的一种有效的量度。

$$\begin{aligned} \Delta \equiv \langle k^2 \rangle^{1/2} &= \left[\frac{\sum_{k=-n}^n k^2 p(k, n)}{\sum_{k=-n}^n p(k, n)} \right]^{1/2} \\ &= \left[\frac{\text{距离平方和}}{\text{一切可能途径之和}} \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (4.7)$$

首先取偏离平方的平均值 $\langle k^2 \rangle$ ，然后再把这平均值开方就可得到均方根偏离，这距离是用单位步长值表达的。如不取平方根，则所得的量当然就是要以(步长)² 为单位来量度了；而这与其说是距离或长度还不如说是面积。为了求和

$$\sum_{k=-n}^n k^2 p(k, n) \quad (4.8)$$

我们可以用一个简单的办法。在方程(4.5)中以 $x=e^y$ 代入，对 y 连续二次求导。当小量 y 取极限时就有

$$\begin{aligned} \sum_{k=-n}^n k^2 p(k, n) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{d^2}{dy^2} (e^{-y} + e^y)^n \\ &= [n(n-1)(e^{-y} + e^y)^{n-2} (e^y - e^{-y})^2 \\ &\quad + n(e^{-y} + e^y)^n]_{y=0} = n2^n \end{aligned} \quad (4.9)$$

最后我们有

$$\sum_{k=-n}^n k^2 p(k, n) = n2^n \quad (4.10)$$

现在可以把方程(4.3)和(4.10)代入(4.7)得出均方根偏离

$$\Delta = n^{1/2} \quad (4.11)$$

故经过 n 步后，离初始位置距离的绝对值约为 $n^{1/2}$ 个单位步长。

下列四个问题可扩大随机游动概念的应用。

问题 4.1 对不等步长的一维随机游动,试证明经一定步数后的平均偏离也为零,即仍在其出发点上。

注意对有限个数的不同步长,这一个游动可化为一系列随机游动之和,而其中每一个游动只包含一种步长。

问题 4.2 设一个随机游动是一系列游动之和,其中每一个游动的步长为 λ_i , 步数为 n_i 。证明这个游动的均方根偏离为

$$\Delta = N^{1/2} \lambda_{rms} \quad (4.12)$$

其中 $N = \sum_i n_i$, λ_{rms} 为步长均方根值

$$\lambda_{rms} = \left[\frac{\sum_i n_i \lambda_i^2}{N} \right]^{1/2} \quad (4.13)$$

问题 4.3 验证在步长为 L_0 的三维游动中,经过 s 步后的均方根偏离为 $s^{1/2} L_0$ 。证明时第 i 步的三个笛卡儿坐标分量(见图 4.2)分别取为

$$L_0 \cos \theta_i, L_0 \sin \theta_i \cos \phi_i, L_0 \sin \theta_i \sin \phi_i \quad (4.14)$$

图 4.2 用于描述三维随机游动的极坐标系沿三个坐标的均方偏离分别为

$$\begin{aligned} \Delta_z^2 &= \sum_{i=1}^s L_0^2 \cos^2 \theta_i, \quad \Delta_x^2 = \sum_{i=1}^s L_0^2 \sin^2 \theta_i \cos^2 \phi_i, \\ \Delta_y^2 &= \sum_{i=1}^s L_0^2 \sin^2 \theta_i \sin^2 \phi_i \end{aligned} \quad (4.15)$$

根据毕达哥拉斯定理可将这三个分量相加求得总的均方偏离为

$$\Delta^2 = s L_0^2 \quad (4.16)$$

问题 4.4 有一颗热星被一块部分电离、部分中性的氢云所包围。恒星在赖曼 a 线波长处所发出的辐射可被中性原子吸收和再发射。光子在发射和吸收之间经过的平均距离为 L_0 , 令氢云的半径为 R , 试问光子约需经过多少次吸收和再发射过程才能最终离开氢云? 我们将在 9.6 节中应用这一结果。

随机游动概念为一切辐射转移的计算提供了主要的基础,在后面讨论能量从恒星中心向外传输的方式时我们就要处理这类问题。恒星能量最初就是从其中心释放出来的,然后传输到表面层,再通过恒星大气逸入宇宙空间。在一般辐射转移理论中,物质的不透明度就与我们上面假定的随机游动的步长成反比。每一个光子的平均能量随着从恒星中心往外面传输而变得越来越小,这就使大多数实际问题变得更复杂化了。原始硬伽玛射线在最终离开恒星表面时已成为能量较低的可见光和红外辐射。在恒星中心核反应中所释放出的一个伽玛光子足以提供在恒星表面发射的一百万个光子所需的能量。故从恒星中心出发向外游动的就不仅是单一的光子,还包括了它的全部为数众多的衍生物。

4.3 分公布函数、几率和平均值

在 4.2 节中我们计算了在一个随机游动中经过若干步数后的平均偏离和均方根偏离。我们通常感兴趣的是计算偏离函数的平均值,对二项

分布以外的其它分布我们也有寻求这类平均值的方法。

设一个随机变量可取一组离散的值 x_i 。在任何一次测量中取得 x_i 值的绝对几率为 $P(x_i)$ 。若选取一个仅与变量 x 有关的函数 $F(x)$ ，那么我们可以计算当进行大量的测量后 $F(x)$ 应当取得的平均值。只要将 $F(x_i)$ 乘上在每次测量中变量 x_i 可能出现的几率 $P(x_i)$ ，再对一切 i 值求和即可得到这个平均值 $\langle F(x) \rangle$

$$\langle F(x) \rangle = \sum_i P(x_i) F(x_i) \quad (4.17)$$

有时绝对几率不是直接给出的，而只有相对几率 $p(x_i)$ 为已知。此时我们或按(4.1)式计算 $P(x_i)$ 或直接将公式化为

$$\langle F(x) \rangle = \frac{\sum_i P(x_i) F(x_i)}{\sum_i P(x_i)} \quad (4.18)$$

式中分母是在利用相对几率计算时为归一化目的而必需的。

若 x 可在一定区间内取连续值，相应于式(4.17)及(4.18)的积分表达式为

$$\langle F(x) \rangle = \int P(x) F(x) dx = \frac{\int p(x) F(x) dx}{\int p(x) dx} \quad (4.19)$$

积分对计算平均值 $\langle F(x) \rangle$ 有关的自变量范围内进行。某些场合中这一范围为？ $-\infty < x < \infty$ 。

我们看到式(4.17)到(4.19)是式(4.6)及(4.7)的一般化形式。实际上函数 $F(x)$ 在式(4.6)中就是 x 本身，而在(4.7)中则是 x^2 。我们只要把原来用位置符号 k 表示的量以新的符号 x 代替就可以了。

4.4 随机定向杆的投影长度

沿极坐标 (θ, ϕ) 的极轴方向考察一个系统(图 4.3)。长为 L 的杆对该轴成某个任意的方向角 θ ，杆在与视线垂直的方向上的投影长度为 $L \sin \theta$ ，它与 ϕ 无关，而 ϕ 的取值范围为 $0 \leq \phi < 2\pi$ 。我们欲求定观测到的投影长度的平均值，该平均值是在杆的一切可能的方向上求取的。杆的方向位于角度 θ 处增量 $d\theta$ 范围内的几率与单位半径球面上 $d\theta$ 所划出的狭球带的面积成正比。归一化后的几率 $P(\theta)$ 为

$$\begin{aligned} P(\theta) d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int p(\theta, \phi) d\theta d\phi \\ &= \sin \theta d\theta \end{aligned} \quad (4.20)$$

我们看到这个几率确实已经作了归一化，因为

$$\int_0^{\pi/2} P(\theta) d\theta = -\cos \theta \Big|_0^{\pi/2} = 1 \quad (4.21)$$

也即杆的方向角出现在 0 到 $\pi/2$ 范围内的几率为 1^①。因而杆的投影长度为 $L \sin \theta$ 的几率为 $\sin \theta$ ，也即一切方向角的投影长度平均值是

$$\frac{\int_0^{\pi/2} P(\theta) L \sin \theta d\theta}{\int_0^{\pi/2} P(\theta) d\theta} = \int_0^{\pi/2} L \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{4} L \quad (4.22)$$

这里分子上的积分是在所有方向上得到的长度之总和。分母上的积分可确保结果是由分子部分除以整个几率范围而得到的平均值。这里的分母实际上并不一定需要，因为我们已经作了正确的归一化。但是举个例来说，如果我们只是要求杆对极轴的交角在 $0 < \theta \leq \pi/4$ 范围内的投影长度平均值，那么分子和分母中的积分限都应当取 0 到 $\pi/4$ ，这时分母中的积分当然就不再是可有可无的了。将前面讨论的问题反过来，我们可以问，若仅能观测到随机投影长度的平均值 D ，那么杆的实际长度应为多少。这时我们有

$$S = \frac{4 \langle D \rangle}{\pi} \quad (4.23)$$

只要将式(4.22)推得的结果简单地颠倒一下，就可以得出这个结果。我们再提出一个略为不同的问题：给出一个特定观测值 D ，各种可能的 S 值的平均值为多少？为回答这个问题，我们以各向同性分布来计算 $D \sin \theta$ 的平均值，求得 $\langle S \rangle = \pi D/2$ 。在求双重星系成员间的平均距离时这个方法是有用的，因为这时我们所观测到的只是它们的投影距离。

同样，我们可以用这个方法去确定椭圆星系到底是扁长的——雪茄形的，还是扁平的——盘状的。为了进行这种分析，我们不得不假定一切椭圆星系都具有大致相同的形状。所以，从这个观点看来，球状星系就不过只是沿其对称轴方向看去的普通椭圆星系而已。

问题 4.5 观测一系列双重星系。每一对的总质量可由我们所测得的两星系间的距离投影值及它们相对运动视向分量的投影值，用统计方法来加以确定。记 R 为由平均红移求得的星系对与观测者间的距离， a 是两星系间的角距离，于是由此可求得投影间距 d_p 。再由两者红移之差给出轨道速度视向分量投影值 v_p 。假定星系绕圆形轨道相对运动，并假定一个星系的质量要比另一个大得多，试证明星系对质量的统计表达式为

$$M_{\text{星系对}} = \frac{\langle v^2 \rangle}{G \langle 1/r \rangle} = \frac{3\pi}{2} \frac{\langle v_p^2 \rangle}{G \langle 1/d_p \rangle} \quad (4.24)$$

先证明 $\langle v^2 \rangle = 3 \langle v_p^2 \rangle$ 及 $\langle 1/r \rangle = 2\pi \langle 1/d_p \rangle$ 是有益的。注意 $\langle r \rangle \neq \langle 1/r \rangle^{-1}$ 。在这例中投影角实际上与 r 及 v 有关。顾及这种相关性后还可以给出(4.24)的变换形式。

图 4.4 描述估求双重星系总质量的图

当我们考虑星系团质量时，也是利用同样的思路，因为维里定理(3.83)同样说明了平均势能等于（负的）动能的两倍；这时式(4.24)左边以星系团总质量代替，右边则是速度平方平均值及离星系团中心距离倒数的平均值。如 3.5 节所讨论的那样，当用这种方法估算星系团质量时，所得结果总是比由问题(3.9)所求出的单个星系质量之和大 10 倍左右。在第十章还要回到这个谜一般的问题上来；但即使在那里我们仍无法解决这个难题。

萨皮特 (Salpeter) 及巴可尔 (Bahcall) (Sa69a) 利用(4.24)式估求类星体 B264 的质量上限，该类星体看来位于一个星系团之中。他们所求出的上限为 $5 \times 10^{13} M_{\odot}$ 。这个估计主要说明了类星体质量必定小于星系团总质量。因为事先我们对类星体质量一无所知，故即使这个上限值

很大，它仍然是令人感兴趣的。

4.5 分子运动

一颗星际尘埃微粒周围的分子系集将对微粒表面产生压力。由于分子在作随机运动，有时就会与尘埃相碰撞，压力就是这样产生的。原先向着微粒运动的分子由于碰撞，在微粒表面发生偏折，然后就离开粒子运动。因为粒子速度发生变化，其动量 P 也就变化。根据定义，必须要有一个力的作用才能产生动量的改变，因而在一个很短的时间内微粒表面将有一个力作用在分子上。这个结论是从牛顿定律来的，因为方程(3.4)可写为

$$F = m \ddot{r} = \dot{p} \quad (3.4)$$

若微粒在给定的时间段 τ 内给分子一个力，则分子在这段时间内也必然给微粒以反作用力。于是，在任一给定时间，撞击在微粒单位面积上的所有单个分子的作用力的总和就构成了作用在尘埃上的压力，即单位面积上的作用力。

为了计算这个压力，我们必须先要确定单位时间内有多少分子撞击在微粒上。图 4.5 表示一个球面极坐标系，我们可以用这个坐标系来表示粒子的初始运动方向，这个方向由两个角 (θ, ϕ) ，给定。如果方向为 (θ, ϕ) ，立体角增量为 $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ ，且速度范围在 v 及 $v+dv$ 间的每单位体积中分子数为 $n(\theta, \phi, v)$ ，那么在单位时间内入射在单位面积上的分子数就是

$$\iiint v \cos\theta n(\theta, \phi, v) \sin\theta d\theta d\phi dv \quad (4.25)$$

因子 $\cos\theta$ 必须计入，因为包含一切入射分子的斜圆柱体的体积是其底面积和高的乘积（图 4.6）。

图 4.5 计算压力用的球面极坐标

图 4.6 在单位时间内，以速度 v 从方向 θ 撞击到微粒表面上的全部分子所构成的斜圆柱元

式(4.25)与 v 成正比，这是因为速度越大，在任何给定的时间间隔内粒子就可能从更远的地方撞击到这个表面上来。

如果我们假定每个分子都是作镜式反射，即如同光线从镜子上反射出来一样，那么这时的入射角就等于离开表面的反射角，而一个被反射粒子动量的总改变为

$$\Delta p = 2p \cos\theta \quad (4.26)$$

在这类反射中，改变的仅仅是与微粒表面相垂直的动量分量，因此就产生了因子 $\cos\theta$ 。现在我们就可以计算这个压力了，它刚好等于单位时间内入射在单位面积上的分子所引起的总的动量变化（负值）。

$$P = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty dv \int_0^{\pi/2} d\theta (2p \cos\theta) v \cos\theta n(\theta, \phi, v) \sin\theta \quad (4.27)$$

在各向同性气体中，从单位立体角到达表面的分子数与 θ 及 ϕ 无关，故可写为

$$n(\theta, \phi, v)dv = \frac{n(v)}{4\pi} dv \quad (4.28)$$

这里 $n(v)$ 是速度值在 v 到 $v+dv$ 范围内的分子数密度，因子 $1/4\pi$ 是归一化所用的常数，因为一切可能到达方向的总和为 4π 立体弧度。

用(4.28)式就能把(4.27)积分中与速度有关的部分分离出来，这一部分与方向坐标 θ 和 ϕ 无关。假若 $v \ll c$ ，——对非相对论性气体就属这种情况——那么 $p=mv$ ，而 m 是一个分子的质量。由此可得出

$$\int_0^\infty n(v)v^2 dv = n \langle v^2 \rangle \quad (4.29)$$

其中 n 是不顾及速度和方向情况下单位体积内的粒子数密度， $\langle v^2 \rangle$ 是速度均方值。式(4.29)不过就是均方速度的定义而已。

现在式(4.27)中其余部分的积分可写为

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\phi = \frac{1}{3} = \langle \cos^2 \theta \rangle \quad (4.30)$$

这个积分定义了半球 $0 \leq \theta \leq \pi/2$ 上的 $\cos^2 \theta$ 的平均值。撞击在微粒壁上的所有分子全都是从这个半球上来的。因为余弦函数对于 $\theta = \pi/2$ 是对称的，因此无论是对半球的积分或者对一切可能方向（即全球）进行积分，其均方值实际上总是等于 $1/3$ 。

以方程(4.29)及(4.30)代入(4.27)式，我们即可将压力的表达式改写为

$$P = \frac{nm \langle v^2 \rangle}{3} \quad (4.31)$$

记 n 个粒子的系集所占的体积为 V ，将压力 P 乘以 V 即可得表达式

$$PV = \frac{Nm \langle v^2 \rangle}{3} = N\Theta \quad (4.32)$$

式中 $N=nV$ ， $\Theta=m\langle v^2 \rangle/3$ 。

问题 4.6 星系的随机速度可达 $v \sim 100$ 公里·秒⁻¹，其数密度是 $n \sim 10^{-1}$ 百万秒差距⁻³，典型星系的质量为 3×10^{44} 克。试问由星系产生的宇宙压力是多少？第十章中将要考虑这个压力，在确定宇宙膨胀或收缩的宇宙动力学问题中，需要知道宇宙压力的大小。问题 4.7 在太阳附近，恒星的数密度为 $n \sim 10^{-57}$ 厘米⁻³。太阳相对这些恒星的速度是 $v \sim 2 \times 10^6$ 厘米·秒⁻¹。我们把太阳与其他恒星的碰撞截面积取为 $\sigma \sim 5 \times 10^{22}$ 厘米²。根据琼斯（Jeans）的太阳系形成理论，行星是因太阳与其他恒星相遇而产生的。试问在 $P=5 \times 10^9$ 年时间内，太阳按这种方式产生行星的可能性有多大？假定在银河系中共有太阳那样的恒星 10^{11} 颗，那么银河系中总共应当形成多少个行星系统？

4.6 理想气体定律

当温度远远高于凝固温度时，稀薄的气体服从一个简单的定律。这个定律将气体的温度与压力及密度联系起来。既然这个定律只有在十分高的温度以及很低的密度时才是准确的，因此它当然只能代表真实气体的一种理想化情况，于是就称它为理想气体定律。实际上在许多不同的情况下各种气体的性质与理想状态相差不远，因此这个定律是很有用处的。

为了理解这个定律，我们必须先搞清楚温度的含义是什么？我们可以很容易地“感觉到”一个物体的冷热，但假使要用某个可测定的物理量来描述这种感觉可就不那么容易了。可以应用一种装置，比如普通的水银泡温度计，来作为规定温度的一种方法。温度计插入一碗水中，倘若水是热的，那么水银泡中的水银就会膨胀而沿毛细管上升；而当温度计放入一碗冷水中时，水银就会收缩。我们可以在温度计的毛细管部分刻上任意的标度，于是就可以根据毛细管中水银面的位置读出温度值来。只要想想在西方世界人们至少普遍使用着五种不同的温标，我们就可以看出这种标度的任意程度了。

选定一种水银温度计为标准，我们就可以观测气体的状态，并最终可以得出某种给定气体的密度、压力以及温度之间的关系。这个关系就称为物态方程。其函数形式为：

$$F(T, P, \rho) = 0 \quad (4.33)$$

有时在公式中用密度的倒数，即单位质量的体积，来代替密度；或者更经常地是使用克分子体积，即每克分子气体的体积。克分子是由 $N = 6.02 \times 10^{23}$ 个分子所代表的物质质量。 N 是阿伏伽德罗常数。阿伏伽德罗常数就是碳同位素 C^{12} 重量刚好为 12 克时（即一个克原子重 C^{12} ）所包含的原子个数。

记克分子体积为 V ，我们即可得到下列形式的理想气体定律

$$PV = RT \quad (4.34)$$

式中 R 称为气体常数。当压力不变时，一定量气体的体积随温度增加而线性增加。而当体积不变时，压力随温度线性变化。某些气体，特别是氮气，其性质很象理想气体，因此就能利用它来定义出一个气体温度计温标。应该认识到，无论在什么情况下，温度只能用某种方便的装置来加以测定，这一点是很重要的。

我们看到，在式(4.32)及(4.34)间有相似性。当式(4.32)中的 N 选用阿伏伽德罗常数 N 时，我们得到

$$\frac{RT}{N} = \Theta = \frac{m \langle v^2 \rangle}{3} = mc_s^2 \quad (4.35)$$

这里我们引入了一个新的符号 c_s ，它代表理想气体中的声速。这样做的主要原因是因为声波和压缩波的传播速度就等于气体分子速度沿波传播方向分量的均方根值，注意到这一点是有益的。而在固体和液体中，在传播压缩波时，不可压缩性——劲度——所起的作用胜过了分子运动的作用，因而这时的声速就要比分子运动速度高得多（Mo68）。

我们可以定义一个新的常数 $k = R/N$ ，称为玻耳兹曼常数。于是式(4.35)就变为

$$\frac{3}{2} kT = \frac{m \langle v^2 \rangle}{2} \quad (4.36)$$

上式右端是系集中每个分子的平均动能，由此看出，温度不过是平均动能的一种指标而已。在热的气体中分子运动速度很高，而在较冷的气体中速度则慢得多。玻耳兹曼常数 k 只能通过实验来加以确定。具体的做法是用直接或间接的方法测定一定的温度下气体分子的动能，由此求得 $k = 1.38 \times 10^{-16}$ 尔格 $\cdot K^{-1}$ 。

现在，式(4.32)就可改写为

$$PV=NkT \text{ 或 } P=nkT \quad (4.37)$$

当我们所处理的是一种特定的气体或者一种由确定的分子所组成的气体时,上式直接可以应用。但当处理不同分子混合的气体时情况又怎样呢?根据前面推导的动能理论,我们可以预期,在这种情况下总的压力仍然应该根据方程(4.37),由总的分子数密度来确定。如果有 j 种不同的气体分子共处于热平衡之中,每一种分子的数密度为 n_j ,则完整的关系式为

$$P = \sum_{j=1}^j P_i = \sum_{i=1}^i n_i kT = nkT \quad (4.38)$$

这里 P_i 是单独由 i 型分子所造成的部分压力。式(4.38)所表达的就是所谓的道耳顿 (Dalton) 部分压力定理:理想气体的总压力等于各组成成分的分压力之和。

问题 4.8 星际原子氢经常在中性 HI 云内出现,其温度是 100K 。试问此时氢原子运动的均方根速度有多大?如果数密度 $n=1 \text{ 厘米}^{-3}$,那么星际空间的压力有多大?

问题 4.9 这些云内还含有尘埃微粒,微粒典型直径可能为 5×10^{-5} 厘米,典型密度为单位密度值。若把这些尘埃作理想气体处理,那么尘埃微粒的随机运动速度应有多大?

问题 4.10 如果气体相对尘埃微粒有一个系统性的速度 v ,试问单位时间内有多少动量传到每个尘埃微粒上?微粒的加速度是多少?在解题中假定气体密度为 $n=1 \text{ 厘米}^{-3}$, $v=10^6 \text{ 厘米} \cdot \text{秒}^{-1}$ 。且假定每次碰撞后气体原子就附着在微粒上。

问题 4.11 进一步欲问这微粒的质量增益率是多少?要过多久微粒的质量才会增加 1%?

问题 4.12 在电离氢(HII)区域,原子和电子是分离的。如果这种星际气体的温度是 10^4K ,试计算电子和质子的运动速度。

4.7 辐射动力学

电磁辐射以光子的形式传播,光子是离散的量子,它具有动量 p 及能量 ε 。由实验所确定的谱频率 ν (即辐射的颜色)与能量和动量之间的关系是

$$p = \frac{h\nu}{c} \quad (4.39)$$

$$\varepsilon = h\nu \quad (4.40)$$

式中 h 是普朗克常数, c 是光速, ν 是谱频率。

将(4.39)代入压力方程(4.27),用 c 取代 v ,又因为所有光子都具有相同的速度 c ,故可忽略对速度的积分,于是(4.27)即变为

$$P(\nu)d\nu = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{2h\nu}{c} \cos\theta c \cos\theta n(\theta, \phi, \nu) \sin\theta d\nu \quad (4.41)$$

分子分母中两个 c 可以消去, $h\nu$ 可由 ε 代替。此外对各向同性辐射场 $n(\theta, \phi, \nu)=n(\nu)/4\pi$,再利用方程(4.30)就可导出

$$P(\nu) = \frac{n(\nu)\varepsilon}{3} = \frac{h\nu n(\nu)}{3} \quad (4.42)$$

若有 j 种不同谱频率的量子存在，则表达式(4.42)就变为

$$P = \frac{U}{3} \quad (4.43)$$

其中 U 是对所有谱频率求和而得的总能量密度

$$U = \sum_{i=1}^j n_i h\nu_i \quad (4.44)$$

问题 4.13 假若认为在宇宙尺度上原来就有一个 3K 的辐射场存在(4.13)，宇宙中的辐射能密度约是 6×10^{-13} 尔格·厘米⁻³。试问这一个场所产生的压力是多少？它与问题(4.6)所求出的星系压力相比较又相差多少？

问题 4.14 单位时间内从太阳入射到地球单位面积上的辐射能量是 1.37×10^6 尔格·厘米⁻²·秒⁻¹。这个量称为太阳常数。试求在地球距离处一个 10^{-2} 厘米直径的（可全部吸收太阳辐射的）黑色微粒上所受到的辐射斥力。

问题 4.15 一个半径为 10^{-4} 厘米的微粒吸收了入射到其表面的 $1/3$ 太阳辐射，其余部分以各向同性形式散射掉了。假定微粒的密度是 6 克·厘米⁻³，试计算太阳对微粒的引力和辐射斥力之比。证明不论离太阳多远，这个比值保持不变。

问题 4.16 假若微粒辐射斥力是太阳引力的 $1/3$ ，则我们可定义一个

“有效”引力常数 $G_{\text{有效}} = \frac{2}{3}G$ ，这里的 G 是真正的引力常数。由这个 $G_{\text{有效}}$ 就可以表明微粒的运动特征。假如微粒位于地球轨道距离处，那么其公转周期应是多少？其轨道速度与地球轨道速度相比相差多少？

4.8 等温分布

若气体在它所据有的全部体积内温度都相同，我们就称这气体是等温的。考虑一个球对称空间，内中的气体呈等温分布。离中心距离 r 越大，气体的密度和压力就越小。在 r 及 $r+dr$ 之间的压力变化 dP (图 4.7) 可由作用在 r 及 $r+dr$ 间物质上的引力给出：

$$dP = -dr\rho(r)\nabla V(r) \quad (4.45)$$

图 4.7 球对称结构的压力？距离关系

这里 $\rho(r)=n(r)m$ ， $V(r)$ 是半径为 r 的球里面的质量所产生的引力势。对于理想气体（见式(4.38)） $P/\rho=kT/m$ 。把这个表达式去除方程(4.45)可得

$$\frac{dP}{P} = -\frac{m}{kT} \nabla V(r) dr \quad (4.46)$$

求积分后得

$$P=P_0 e^{-mV(r)/kT} \quad (4.46)$$

再应用理想气体定理还可得

$$n=n_0 e^{-mV(r)/kT} \text{ 或 } \rho=\rho_0 e^{-mV(r)/kT} \quad (4.47)$$

在式(4.46)及(4.47)中的指数项称为玻耳兹曼因子。它在整个统计热力学中起着重要的作用，此外在 4.21 节我们将会看到，它也是描述球状星

团中恒星分布以及原恒星中分子分布的有用出发点。

4.9 大气密度

利用方程(4.47)就可以容易地得出恒星、行星或卫星上的大气密度分布。在下面的讨论中，虽然我们取行星为母体，但这个理论对恒星、月球或其他大质量天体无疑也是同样有效的。

大气中任何地方的引力势是

$$V(r) = -\frac{MG}{r} \quad (4.48)$$

式中 r 是从行星中心起算的距离， M 是行星质量。在表达式(4.48)中还假定大气是稀薄的，因而 M 可认为是与 r 无关的常量。记 R 为行星半径，现在考察离行星表面高度为 x 处的一个点。高度 x 处的引力势与地面引力势的差是

$$\begin{aligned} V(R+x) - V(R) &= -\frac{MG}{R+x} + \frac{MG}{R} \\ &= \frac{MGx}{R^2}, \quad x \ll R \end{aligned} \quad (4.49)$$

由此方程(4.47)即变为

$$n = n_0 e^{-(mMG/kTR^2)x} = n_0 e^{-mgx/kT} \quad (4.50)$$

这里 n_0 现在代表行星表面处大气的密度，而 $MG/R^2 \equiv g$ 是行星表面重力。显然大气密度随高度依指数函数形式而减小。此外我们再定义一个标高

$$\Delta = \frac{kTR^2}{mMG} = \frac{kT}{mg} \quad (4.51)$$

可见在高度 $x+\Delta$ 的地方大气密度是高度 x 处的 $1/e$ 。值得注意的是，当气体温度很低，而组成气体的分子又很重（即 m 很大），以及母体密度很大时（即 M 很大而 R 很小时），这个标高 Δ 值就很小。

问题 4.17 证明当大气由不同气体成分构成时，每种气体成分有各自不同的标高存在。且证明气体的总压力是

$$P = \sum_i P_i = \sum_i P_{i0} e^{-(m_i g x / kT)} \quad (4.52)$$

总密度为

$$\rho = \sum_i n_i m_i = \sum_i n_{i0} m_i e^{-(m_i g x / kT)} \quad (4.53)$$

式中下标 0 表示大气低部（行星表面）的数值。证明时假定大气中无对流存在。（因为对流通常要求整个体积内气体的整体运动，并会产生风，这就使不同的气体组成部分无法分开。这样一来标高的概念就用不上了。）

地球大气就表现出某些这方面的特性。在上层大气低密度区域里，就出现随不同标高而产生的一些气体的分离现象。例如氦仅在高度很高的地方才具有相当的浓度。至于在低层大气中，存在有三个特征：即有风、温度梯度及水蒸汽存在，因此使任何分析工作都变得复杂化了。大气中的水蒸汽接近于凝固点，而局部的温度降低就可造成水蒸汽的凝固以及压力的降低，这样就形成了风。更重要的是低层大气内不是等温的，因此这里的大气性质就不象上面所描述的那样简单。

问题 4.18 大气的质量与地球质量相比可忽略不计，如果地球表面

的重力为 $980 \text{ 达因} \cdot \text{克}^{-1}$ ，试计算大气的主要成分氮气分子 N_2 的标高。

4.10 大气中粒子的能量分布

粒子密度随高度依指数形式减小，这对我们考虑粒子的速度分布是一个重要的启示。我们看到，在高度 x_1 处的分子，当具有向上的速度分量 $v_x = (2gh)^{1/2}$ 时，它们就具有了足够的能量可以上升到高度 $x_1 + h$ 的地方。至于具体某一个具有这样的瞬时速度的分子是否真会达到高度 $x_1 + h$ 还不能预测。这个分子可能会与其它分子相撞而失去其大部分能量。但是只要热平衡存在，气体温度保持不变，那么就可以断定，如果有一个分子因碰撞而失去能量，在其近旁必定会有一个回复碰撞，通过这种碰撞其他分子会获得同样的能量。这个概念有时称为细致平衡，根据这个道理我们在下面的讨论中就可以忽略碰撞效应。

既然在同温大气中，所有各个高度上温度都相同，那么速度分布也必然到处相同，因而随高度变化的仅是粒子的数目。在高度 $x_1 + h$ 处与高度 x_1 处粒子密度的比是 $\exp(-mgh/kT)$ （见式(4.53)）。因为在高度 $x_1 + h$ 处所有的粒子都是从较低的 x_1 高度上来的，并且它们最终还要落回到 x_1 高度处，所以我们可以断定，穿越过高度为 x_1 处的一个平面的所有粒子中，速度大于 $v_h = (2gh)^{1/2}$ 的粒子所占比例也应是 $\exp(-mgh/kT)$ 。因为只有这一部分粒子才具有足够的能量可以到达高度为 $x_1 + h$ 的地方。因而垂直速度 v_x 大于 v_h 的粒子数密度可表达为

$$\frac{N(v_x > v_h)}{N(v_x > 0)} = e^{-mgh/kT} = e^{-mv_h^2/2kT} \quad (4.54)$$

注意这里的 N 不是密度，而是在单位时间内穿过单位面积的粒子数。

考虑一个各向同性速度分布函数 $f(v)$ ，这函数根据下式积分进行归一化：

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z = 1 \quad (4.55)$$

我们可用如(4.54)式所给出的 v_x 的指数关系作为函数 f 的试验解。因为是各向同性，故 v_y 及 v_z 也应有相同的关系，因而由方程(4.55)给出的完整的函数为

$$f(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-(m/2kT)(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} \quad (4.56)$$

式中的系数是为了满足(4.55)而需要的归一化因子。这函数可对 v_x , v_y 及 v_z 进行变量分离。为验证这结果是否也满足(4.54)式，我们有

$$\frac{N(v_x > v_h)}{N(v_x > 0)} = \frac{\int_{v_h}^{\infty} v_x e^{-(m/2kT)v_x^2} dv_x}{\int_0^{\infty} v_x e^{-(m/2kT)v_x^2} dv_x} = e^{-mv_h^2/2kT} \quad (4.57)$$

积分号中 v_x 的作用就象它在方程(4.27)中的作用一样。这里考虑到较高速度的粒子可从较大体积内较远距离处到达某个给定的表面。我们还可根据速度

$$v = (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{1/2} \quad (4.58)$$

来改写式(4.56)的分布函数，由此得到

$$f(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} \quad (4.59)$$

问题 4.19 证明对 $f(v)$ 来说归一化条件是

$$4\pi \int_0^\infty f(v) v^2 dv = 1 \quad (4.60)$$

同时证明用动量来表达的分布函数的形式为

$$f(p) = \frac{1}{(2\pi mkT)^{3/2}} e^{-p^2/2mkT} \quad (4.61)$$

及

$$\int_0^\infty 4\pi f(p) p^2 dp = 1 \quad (4.62)$$

注意，方程(4.56)，(4.59)及(4.61)与原先所规定的引力势都无关。因而这儿所推得的公式除了可解决引力问题外，还有更为广泛的应用。我们将来在 4.15 节中对此作进一步的讨论。

根据两位经典动力学理论的奠基者 L. 玻耳兹曼和 J.C. 麦克斯韦的名字，我们把(4.59)及(4.61)速度和动量分布函数称为麦克斯韦-玻耳兹曼分布。在图 4.8 中画出了动量分布的情况。这种分布函数具有极为广泛的应用。

问题 4.20 假想月球大气是由 300K 的气体组成。试计算能够满足式 $3kT/2 < MmG/R$ 的最轻气体分子的质量。其中 m 是分子质量， M

图 4.8 麦克斯韦-玻耳兹曼动量分布

及 R 是月球的质量和半径，分别取为 7.3×10^{25} 克及 1.7×10^8 厘米。注意上式左端的量是与月球上的逃逸速度有关的。再要问月球上的逃逸速度有多大？当然实际上比上面计算所求出的质量 m 还要大的分子也会从月球上逃逸出去，因为(a)在麦克斯韦-玻耳兹曼分布中，还有许多气体分子的速度大于平均速度，(b)月面有连续两周时间暴露在阳光之中，在这段时间内，向阳的月面温度可达 400K。

尽管麦克斯韦-玻耳兹曼统计法很有用，但仍然有一些重要的场合不能使用这种统计法。在恒星中心密度很高时，或恒星发出的辐射温度很高时就会出现这些效应。它们是没有经典基础的量子效应，下面几节将涉及这类情况。

4.11 相空间

在与经典统计性质不同的量子效应中，常常出现一些性质相同的粒子。例如我们可能须要处理一些在位置、动量和自旋等方面几乎都相同的电子；或者我们所要研究的光子它们在频率、位置、传播方向及极化等方面都相同。

对电子而言，有一个重要的限制性条件在起作用。这就是泡利不相容原理。根据这个原理，任意两个电子不允许具有相同的性质。中子、质子、中微子以及事实上一切自旋量子数是奇半整数

$(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots)$ 的粒子都服从泡利原理。而另一方面光子和 π 介子

等则是具有整数（包括零）自旋量子数的粒子，无论多少个这种粒子都

可以具有相同的动量、位置和自旋。第一类粒子服从泡利原理的规定，称之为费米 (Fermi) ? 狄拉克 (Dirac) 粒子或费米子；另一类则称为玻色子，其性质服从玻色 (Bose) ? 爱因斯坦统计法。

至今我们还没有讲清“相同”是什么意思。当然，对任意两个粒子我们总可以想象它们在动量或位置上会有一个无限小的差别。那么这样的粒子是称为相同还是不同呢？海森堡测不准原理对这个问题作了实质性的回答。这个原理指出，当两个粒子的动量差 δp 与位置差 δr 的乘积小于 h 时，就不可能把这两个粒子区别开。这是因为同时测定任何一个粒子的动量和位置这两个成分时，其不确定性至少为

$$\Delta p_x \Delta x \sim \hbar, \quad \Delta x \equiv \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle^{1/2} = \langle x^2 - \langle x \rangle^2 \rangle^{1/2}$$

$$\Delta p_x = \langle p_x^2 - \langle p_x \rangle^2 \rangle^{1/2} \quad (4.63)$$

式中 $\hbar = h/2\pi$ ，而 h 是普朗克常数。如果要能区分两个粒子，则它们的 $\delta p_x \delta x$ 应比 $h = 6.627 \times 10^{-27}$ 尔格·秒大些。

如果两个粒子的动量差和位置差不超过下列范围

$$\delta p_x \delta x = h, \quad \delta p_y \delta y = h, \quad \delta p_z \delta z = h \quad (4.64)$$

且它们的自旋也相同，则从量子力学观点来说这两个粒子是相同的。

根据上面的描述，每个粒子可由六维相空间的一个点 (x, y, z, p_x, p_y, p_z) 来表征。它在六维空间占一个相格，其体积为 (图 4.9 及 4.10)：

$$\delta x \delta y \delta z \delta p_x \delta p_y \delta p_z = h^3 \quad (4.64a)$$

在同一相格内的粒子是相同的，即在物理上是不可区分的，而相格外的粒子则可以互相区分。既然 δx 是相格的尺度，那么它至少必须是离中心位置均方根偏离值 Δx 的两倍。 δp_x 及 Δp_x 之间的关系也是如此。这就说明了为什么在方程 (4.63) 的右端是 $\hbar$ ，而在方程 (4.64) 中却是用比它大的值 h (图 4.9)。

图 4.9 相格尺度间的关系，位置与动量的分布以及这些变量的不确定性。图中画出的仅是相应不同能量的分布函数族中最简单的一种

现在我们可以问，在体积为 V 的盒子中可以放多少电子？回答取决于我们所考虑的粒子动量有多大。如果最大允许动量为 p_m ，则全部相空间体积是 $2 \cdot 4\pi/3 \cdot p_m^3 \cdot V$ 。因为自旋不同的电子总是可以区分开的，因而它们当然是属于不同的相格，上式中的因子 2 就是因为顾及了不同的自旋极性而加上的。因而所有的相格数为 $8\pi/3 \cdot p_m^3 \cdot V/h^3$ ，这就是在这个盒子内最多能容纳的电子数。

一般而言，在动量 p 到 $p+dp$ 范围内的相格数为

$$Z(p)dp = 2V \frac{4\pi p^2 dp}{h^3} \quad (4.65)$$

图 4.10 相空间是一个六维假想空间，其中动量和空间各占三维。每个相格投影到 p_x-x 平面上后面积总是 h 。尽管相格的形状如图所示可能十分任意，但我们可以把它们想象为方的或长方的。这样做是有利的。它可以使计算工作简化。在 4.14 节的图 4.13 中，我们会看到，原始一个矩形相格是如何变得扭曲的

在恒星中心，电离物质有时是如此密集，以至所有最低的电子态都充满了。这时恒星进一步的收缩可迫使电子取得比通常在稀薄气体中的动量值 $(3kTm)^{1/2}$ 高得多的动量。这种密集的费米子气体称为是简并的。我们将要在 4.14 节及第八章中研究这种物质形式，在那里将讨论非常致密的恒星核。

有时我们宁愿用频率空间而不用动量空间。根据 $v=pc/h$ 定义粒子频率 ν ，我们可求得在频率 ν 到 $\nu+d\nu$ 范围内的相格数为：

$$Z(\nu)d\nu = 2\left[\frac{4\pi\nu^2 d\nu}{c^3}\right]V \quad (4.65a)$$

4.12 恒星的角直径

两个光子有时会占有同一相格，我们可以利用这个事实来测量恒星的角直径。其思路是：在相距 D 的两处放两个光子计数器，计数器的联线与恒星方向相垂直。若距离 D 足够小，那么同一相格中的两个光子就有可能一个落在一个探测器上，而另一个落在另一个探测器上。由切拍计数器可以发现它们是否同时到达。记恒星直径为 d ，距离为 R ，恒星所张的角度 $\theta = d/R$ 。撞击到任一探测器上的一对光子具有某种动量分布，它在沿 D 方向的量值是 $\Delta p_D = p \theta = (h\nu/c) \theta$ ，式中 ν 是探测器所敏感的辐射频率。因为 Δp_D 为非零的值，这就要求 D 本身很小，只有这样才能使到达两个探测器的光子是来自同一相格的。也即必须要求

$$D\Delta p_D \lesssim h$$

或

$$\frac{Dh\nu}{c} \theta \lesssim h \quad (4.66)$$

或

$$D\theta \lesssim \lambda, \quad \lambda = c/\nu$$

这里 λ 是辐射的波长。当距离 D 增加时，观测到的切拍率就降低，当 D 大到一定值时，切拍不再出现，此时角直径是 $\theta \lesssim \lambda/D$ 。由此，在这种观测中求出的恒星角直径为(图 4.11)

图 4.11 汉伯里·布朗-特威斯干涉仪

$$\theta \sim d/R \sim \lambda/D \quad (4.67)$$

这一技术首先是由 R. 汉伯里·布朗 (HanburyBrown) 及特威斯 (R.Q.Twiss) 首先发明的 (Ha54)。第二种测定恒星角直径的方法是利用迈克尔逊恒星干涉仪，其基本原理也是依据相同的现象，即都是根据测不准原理所给出的正常衍射的峰值宽度。

4.13 炽热天体内部及外部的光谱

任何不透明天体都会被辐射流所渗透。原子、分子或离子、电子都在连续地吸收和再发射光量子。一个光子常常会跑到天体的边缘并随后逃逸掉。光子从炽热天体内部扩散到它的边界，然后再逸入虚无空间之中，这就是恒星内部发生的一个重要过程。在恒星中心产生的能量就这样慢慢地扩散到外面并最终逃逸掉。这些逃逸的辐射流就使恒星闪闪发光。

为了比较仔细地理解这个现象，我们要对天体内部可能出现的辐射

过程作一番介绍。辐射谱总是随温度不同而不同，我们希望对这种辐射谱进行推演分析，并从而对整个辐射场作出全面的描述。

我们首先考虑位于温度为 T 的物质中的光子气体。如果光子有足够的机会通过散射或者通过吸收和再辐射与原子相互作用，那么辐射就会与物质处于热平衡之中。有两个因素必须考虑：

(a)光子是玻色？爱因斯坦粒子，它们可以集中在一个单一的相格中。

(b)如果集合在一个相格中的光子的频率为 ν ，并假定该相格中光子数为 n ，则我们可以认为在这个相格中的光子系集是处在能量为

$(n + \frac{1}{2}) h\nu$ 的能态中，当我们描述这类现象时，有时就说这是一个处

于第 n 态的量子振动子。即使系集处在基态，相格完全是空的，仍会有量值为 $h\nu/2$ 的基态残余能量存在。这个能量通常观测不到，因为它不参加吸收和发射过程，[可是，也存在着一些与可变形体的表面有关的过程 (Fr46)，在这些过程中，上述基态残余能引起表面张力效应。]

我们可以计算找到一个处在第 n 激发态中的量子振动子的几率。由玻耳兹曼因子 $e^{-(n+1/2)h\nu/kT}$ 给出了这一激发态的相对几率，而只要把这个相对几率除以一切相对几率的总和，就可以得到绝对几率：

$$P(\nu, T) = \frac{e^{-(n+1/2)h\nu/kT}}{\sum_n e^{-(n+1/2)h\nu/kT}} = \frac{e^{-(nh\nu/kT)}}{\sum_n e^{-nh\nu/kT}} \quad (4.68)$$

根据这个几率，我们就可以求出相应于频率 ν 的所有相格中，每个相格的平均能量 $\langle \epsilon \rangle$ 。我们把所有振动子的能量加起来，再除以振动子的总数。取 $x=h\nu/kT$ ，即可得

$$\begin{aligned} \langle \epsilon \rangle &= \sum_n (n + \frac{1}{2}) h\nu e^{-nh\nu/kT} [\sum_n e^{-nh\nu/kT}]^{-1} \\ &= \frac{kT(xe^{-x} + 2xe^{-2x} + 3xe^{-3x} + \cdots)}{1 + e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \cdots} + \frac{h\nu}{2} \end{aligned} \quad (4.69)$$

方程(4.69)右端的分母值可取为 $(1 - e^{-x})^{-1}$ 。为估求分子值，可连续两次利用同样的二项展开式。

$$\begin{aligned} &kT\{x(e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \cdots) + x(e^{-2x} + e^{-3x} + \cdots) + x(e^{-3x} + \cdots) + \cdots\} \\ &= kT\left\{\frac{xe^{-x}}{1 - e^{-x}} + \frac{xe^{-2x}}{1 - e^{-x}} + \frac{xe^{-3x}}{1 - e^{-x}} + \cdots\right\} \\ &= kT \frac{xe^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} \end{aligned}$$

由此

$$\begin{aligned} \langle \epsilon \rangle &= \frac{kTxe^{-x}}{1 - e^{-x}} + \frac{h\nu}{2} = \frac{kTx}{(e^x - 1)} + \frac{h\nu}{2} \\ &= \frac{h\nu}{(e^{h\nu/kT} - 1)} + \frac{h\nu}{2} \end{aligned} \quad (4.70)$$

已经知道单位体积内的相格数是 $8\pi\nu^2 d\nu/c^3$ ，并且每一个相格中的平均能量也已算出，于是我们就可以用频率和温度的函数形式写出光子的能密度。这就是黑体辐射谱：

$$\rho(v, T)dv = \frac{8\pi v^2 dv}{c^3} \left(\frac{hv}{e^{hv/kT} - 1} + \frac{hv}{2} \right) \quad (4.71)$$

如前所述， $hv/2$ 这一项是不可能依据光子的吸收或发射而被观测得到的。因此往后我们就把它忽略掉，而把注意力集中在另一项上。因为只有该项才会产生天文上观测得到的讯号。现在将方程(4.71)从零到无穷大对一切频率范围积分，我们就可得到总的能密度。总的光子密度也可类似地求得：

$$\begin{aligned} \rho(T) &= \frac{8}{15} \frac{\pi^5}{c^3} \frac{k^4}{h^3} T^4 = aT^4 = U \\ &= 7.6 \times 10^{-15} T^4 \text{ 尔格} \cdot \text{厘米}^{-3} \\ n(T) &= \frac{8\pi}{c^3} \int_0^\infty \frac{v^2 dv}{e^{hv/kT} - 1} = 20T^3 \text{ 光子} \cdot \text{厘米}^{-3} \end{aligned} \quad (4.72)$$

问题 4.21 注意，上述这些结果只有在介质的折射率 $n=1$ 时才是严格正确的。当 n 为任意值时，试证明

$$\rho(T) = n^3 a T^4$$

这是在恒星内部更为一般的情况。试进一步阐明，当折射率与频率有关时（情况通常是这样的），那么所得结果会有什么变化。

方程(4.72)是熟知的定积分。注意，如果把方程(4.71)括号中的第二项也参加积分，就会出现无限大的零点能量了。 T^4 项前面的系数有时缩写为 a （见方程(4.72)）。我们还可定义另一个有用的斯忒藩-玻耳兹曼常数 $\sigma = ac/4$ 。利用这个常数，我们就可以把炽热黑体在单位时间内单位面积上发射的能量写为

$$W = \sigma T^4 \quad (4.73)$$

为了证明上式，我们把从物体表面逸出的光子作为靠近这表面的物体内部光子密度的反映。我们仅考虑那些速度方向是指向外面的光子，也就是说只考虑全部光子的一半。记 θ 为发射方向与表面法线方向的夹角，则这些光子的速度在法线方向分量的平均值是 $c \langle \cos \theta \rangle$ 。因此，我们必须对一切可能的角度 θ 取平均值以求出 $\langle \cos \theta \rangle$ 值。这个值为

$$\begin{aligned} \langle \cos \theta \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi = \frac{\cos^2 \theta}{2} \Big|_0^{\pi/2} = 1/2 \\ \therefore c \langle \cos \theta \rangle &= \frac{c}{2} \end{aligned} \quad (4.74)$$

但既然只有一半光子方向是朝外的，因此总的能流就为 $1/2 \cdot c/2 \cdot aT^4 = aeT^4/4$ ，这就是前面所给出的结果。

大部分恒星的光谱接近于在黑体的光谱上叠加一些离散的发射和吸收谱线。如果恒星接近于黑体的情况，那么就有可能确定恒星光球的温度，星光大部分是从恒星光球发射出来的。利用两种不同的宽带滤光片，比如在观测上常用的 B 及 V 滤光片，我们就能定出在这些谱段范围内的辐射强度比。这个比值仅仅与温度有关。由此求出的温度称为色温度。下面是一个有用的公式(A163)：

$$T_0 = \frac{7300}{(B - V) + 0.73} \quad (4.75)$$

问题 4.22 假定恒星温度为 600K（光谱型 G）以及 10000K（光谱型

A) 。试利用表 A.1 所载的有效波长值，再分别根据(4.71)式及(4.75)式，比较这两种温度下蓝光波段和目视波段强度的预期比值。

另外还有一种确定温度的方法，它要用到恒星的光度。既然单位面积上发射的总功率仅与温度有关，那么只要能确定恒星的表面积及其光度，就可以由此计算其有效温度 T_e ：

$$L = \sigma T_e^4 4\pi R^2 \quad (4.76)$$

如果由第二章所描述的观测方法求出了恒星的距离，那么就可由 4.12 节所叙述的迈克尔逊干涉仪或者汉伯里·布朗·特威斯干涉仪求得恒星的直径。由式(4.76)易知

$$\log \frac{L}{L_\odot} = 4 \log \frac{T_e}{T_{e\odot}} + 2 \log \frac{R}{R_\odot} \quad (4.77)$$

式中有关太阳的量是 $T_{e\odot} \sim 5800K$ ， $R_\odot = 6.96 \times 10^{10}$ 厘米。 $T_{e\odot}$ 约有 50K 的不确定性，因为 $L_\odot$ 中紫外和红外分量还不确切知道。当我们如图 1.5 那样，根据有效温度及光度的对数点出赫罗图时，那么依据方程(4.77)的要求，半径相等的恒星应位于一条等倾斜线上。

有两个典型的天体物理情况值得一提，在这两方面的研究中温度是一个有用的概念。

(a) 太阳系的温度

一个黑的行星际天体的温度是由能量平衡方程

$$\frac{L_\odot}{4\pi R^2} \pi r^2 = \sigma T^4 4\pi r^2$$

所确定的。其中 $L_\odot$ 是太阳光度， B 是离太阳的距离， r 是天体的半径。记 ϵ_a 为（在可见光波段的）平均吸收效率， ϵ_r 为（在红外波段的）再辐射效率，则有

$$T = \left(\frac{\epsilon_a}{\epsilon_r} \frac{L_\odot}{16\pi\sigma R^2} \right)^{1/4} \quad (4.78)$$

我们看到：

(i) 在地球距离处

$$\begin{aligned} T &\sim \left(\frac{\epsilon_a}{\epsilon_r} \right)^{1/4} \left(\frac{4 \times 10^{33}}{16\pi(5.7 \times 10^{-5})2.3 \times 10^{26}} \right)^{1/4} \\ &\sim 282 \left(\frac{\epsilon_a}{\epsilon_r} \right)^{1/4} K \end{aligned}$$

(ii) 灰色天体 ($\epsilon_a = \epsilon_r$) 与黑色天体温度相同。

(iii) 当离太阳的距离有变化时， $T \propto R^{-1/2}$ 。

(iv) 如果一个天体导热性差且自转很慢，比如月球就是如此，那么日下点的温度为

$$T \sim \left(\frac{\epsilon_a}{\epsilon_r} \frac{L_\odot}{R^2 4\pi\sigma} \right)^{1/4} \quad (4.79)$$

这温度值约是自转快的同类天体温度值的 $(4)^{1/4} \sim 1.4$ 倍。

(b) 射电天文温度

我们可以借助于温度的概念理解射电天文测量的某些特性。对很低

的频率 $\nu \ll kT/h$ ，我们发觉一个源的能密度可（依据(4.71)式）写为：

$$\rho(r) = \frac{8\pi kT\nu^2}{c^3} = \frac{8\pi kT}{c\lambda^2} \quad (4.80)$$

式中 $\lambda \equiv c/\nu$ 是波长值。从单位立体角以及在表面法向单位面积上发出的流量称为在频率 ν 处的强度 $I(\nu)$ 。这也就是源的表面亮度，其值为

$$I(\nu) = \frac{c\rho(\nu)}{4\pi} = \frac{2\nu^2 kT}{c^2} = \frac{2kT}{\lambda^2} \quad (4.81)$$

如果通过观测测定了 $I(\nu)$ 值，那么不管这个源是否是热的，我们都可以对这个观测规定一个温度参数。这个温度称为亮温度 T_b ，在频率 ν 时其值定义为

$$T_b(\nu) \equiv \frac{I(\nu)c^2}{2k\nu^2} = \frac{I(\nu)}{2k} \lambda^2 \quad (4.82)$$

图 4.12 天线方向图。图上画出一个主瓣和一组边瓣。 θ 角是束宽（见正文说明）

于是 T_b 就是在特定的频率范围 ν 到 $\nu+d\nu$ 内，辐射能量与被观测源所发出的能量相等的理想黑体所具有的温度值。天线温度是与这个概念有关的一个概念。它与天线在环境气候条件下所具有的实际温度值毫不相关。为了阐明这个概念，我们必须先考虑天线的某些实际性质。一般地讲，由于源的方向不同，天线所吸收的功率值也不同。如果画出一个天线的方向图，那么它的一般形状就如图 4.12 所示。称天线的响应 $A(\theta, \phi)$ 为天线的有效面积。天线吸收的功率为

$$P \equiv \frac{1}{2} \int A(\theta, \phi) I(\nu, \theta, \phi) d\nu d\Omega$$

对一个很小的源则有

$$P(\nu, \theta, \phi) d\nu \equiv \frac{1}{2} F(\nu) A(\theta, \phi) d\nu, \quad F(\nu) = \int I(\nu) d\Omega \quad (4.83)$$

式中 $F(\nu)$ 是天线上的流量密度，因为天线仅接受一个极化分量，所以要乘上因子 $1/2$ 。假若 A 与 ϕ 无关，天线图就如图 4.12 所示，在 $\theta=0$ 这一特殊方向上 $A(\theta)$ 值最大，在这个方向周围有一个很大的瓣，称为主瓣。图中较小的瓣称为边瓣。还可能出现后瓣。一个设计得很好的射电望远镜其主瓣应该是很窄的，这样可使定位精度最高，同时其边瓣应该极小，这样可使所需观测的视场之外的那些源产生的干扰最小（Sh60）。

我们可以定出天线在所有方向上的有效面积的平均值，即：

$$\langle A \rangle \equiv \frac{1}{4\pi} \int A(\theta, \phi) d\Omega \quad (4.84)$$

天线的增益是一个无量纲的量

$$G(\theta, \phi) = \frac{A(\theta, \phi)}{\langle A \rangle} \quad (4.85)$$

它给出了天线在某个给定方向的有效面积与平均有效面积之比。当仪器设计得正确时，在 $\theta=\phi=0$ 的方向上， G 值应达到极大。在方向图上与 $A=A(0, 0)/2$ 相应的两个点间所夹的角度 θ 就称为束宽。

有了这些预备知识，我们现在就可以回过头来讨论天线温度 T_a 的概

念。如果一个源的方向谱亮度为 $I(\nu, \theta, \phi)$ ，那么具有有效面积为 $A(\theta, \phi)$ 的射电望远镜所接收到的功率值为

$$P(\nu) = \frac{1}{2} \int A(\theta, \phi) I(\nu, \theta, \phi) d\nu d\Omega \quad (4.86)$$

另一方面，我们可以用温度为 T 的电阻器连接在接收器上，以代替天线。可以从实验和理论上证明，这样的电阻器会产生量值为

$$P = kT\Delta\nu \quad (4.87)$$

的热噪声功率。其中 $\Delta\nu$ 是接收器带宽。由此，我们就可以把天线温度 T_a 定义为

$$T_a = \frac{1}{k\Delta\nu} \cdot \frac{1}{2} \int A(\theta, \phi) I(\nu, \theta, \phi) d\nu d\Omega \quad (4.88)$$

这个方程很有实用意义。利用这个方程可以很容易地比较从天体源接收到的功率与把接收器的输入端开关从天线拨到电阻器后所接收到的功率。式(4.87)中的噪声有时称为约翰逊 (Johnson) 噪声或乃古氏 (Nyquist) 噪声。约翰逊 (Jo28) 及乃古氏 (Ny28) 分别为导出(4.87)式提供了实验资料及理论证明。

4.14 玻耳兹曼方程及刘维定理

定义函数 $f(r, p, t)$ 为相空间中粒子的密度函数。那么在位置 r 处 dr 体积元内，同时动量值又在某个动量空间范围 dp 内的粒子数为 $f(r, p, t) dr dp$ 。现在来看函数 f 是怎样随时间而变化的。由于系集中每个粒子由三个动量和三个位置坐标来表达，因此函数 f 随时间变化的一般形式的方程为，

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial r_i} \frac{dr_i}{dt} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} = \left. \frac{df}{dt} \right|_{\text{碰撞}} \quad (4.89)$$

方程左端是体积单元 $dr dp$ 内粒子对时间的变化率，它是 n 个粒子的系集中坐标 r_i, p_i ($i=1, 2, \dots, n$) 的函数。当粒子运动时，包围粒子系集的相空间表面就会受到扭曲，上述表达式给出了由这种扭曲以及其他效应所引起的密度变化率。方程右端给出通过碰撞引起的粒子的损失率或增加率。方程(4.89)就称为玻耳兹曼方程。

假定方程(4.89)右端为零，即没有碰撞存在。为了考察在这种情况下会出现怎样的演化过程，我们来画一个简单的二维图形。在图 4.13 中，原始粒子系集的位置在 r_1 及 r_2 之间，动量在 p_1 及 p_2 之间。过一段时间后粒子的动量并没有变化，而位置移动了：动量高的粒子移动到 r'_1 及 r'_2 之间，而动量低的粒子则移动到 r''_1 及 r''_2 之间。但既然矩形面积的底和高不变，那么单位面积中粒子的数密度自然也就不变了。

图 4.13 二维相空间中无碰撞粒子系集的演变

当有作用力施加在粒子上时，类似的推论也是成立的。此时粒子的动量也会变化，因而图 4.13 中的平行四边形还会在垂直方向发生位移。但是，可用类似的推论证明粒子所覆盖的面积仍不变化，因此在这种二维情况下粒子的密度是不变的。如果作用在所有的粒子上的力都是相同的，那么上述证明就特别简单。因为在这种情况下 dp/dt 是相同的，故

差值 $p_a - p_b$ 保持不变。当气体的不同成分上的作用力不同时，每一种气体成分所占的体积仍然保持不变。当力场具有梯度时，上述结论仍然成立。

上述推论可以进一步推广到全部六维的情况。除非存在某些创造或者消灭系集中粒子的方法（如通过碰撞或者通过粒子-反粒子对的形成），否则在沿着六维空间的轨线上粒子的密度总是不变的。

这就是刘维定理的含义：除非发生碰撞，否则六维空间的粒子系集中密度是不变化的：

$$df/dt=0 \quad (4.90)$$

刘维定理对宇宙线粒子的研究有着有趣的应用。许多这种宇宙线粒子的能量大到足够可逃逸出银河系的磁场。因而，只要宇宙线粒子从创生以来已经具有足够的时间去穿越宇宙尺度那么大的距离，那么它们在银河系外的密度应该与地球附近测得的密度一样。如果我们考虑经过地球附近的高能粒子系集，情况就是这样。这些粒子在磁力线引导下穿过整个银河系（见 6.6 节对这个问题的进一步讨论）。因为银河系磁场不够强，不足以把这些粒子锁在银河系内，于是它们最终就会逸出银河系外。当这些粒子跑到星系空间去后，它们在相空间中的密度仍应不变。如果可以证明，地球上宇宙线粒子的到达强度为不随时间变化的常量，这就表明在河外星系空间的宇宙线空间密度与地球上测到的值一样。反之，如果低能粒子可以维持在银河系中局部磁场范围内，那么上述论述就不再正确了。但是，如果这种磁场仍会使少量的低能粒子泄漏到河外空间，那么根据刘维定理，仍要求在整个粒子可以到达的空间范围内，最终的密度仍然是均匀的。根据这个理由，只要对宇宙线粒子的强度进行局部的测试，就可能对整个宇宙内粒子密度给出有用的信息。然而另一方面我们也不能过于乐观，最近发现银河系中的脉冲星可能是我们所见到的宇宙线的主要来源，由此推测，在地球上局部测定的宇宙线密度值不一定与河外空间的宇宙线粒子密度有什么直接关系。因为宇宙线粒子可能还没有足够的时间在河外区域形成均匀分布。

刘维定理的另一个有趣的应用涉及到使用光学望远镜把光束集中在一个很小的探测器上的问题。在许多应用问题中，只要我们能将从宇宙源来的光线集中在尽可能小的探测器上，我们就可以得到极高的仪器灵敏度。记天体所张的立体角为 Ω ，望远镜面积为 A 。那么刘维定理表明，光线可能聚焦的最小探测器面积为

$$a = \frac{A\Omega}{4\pi} \quad (4.91)$$

而且仅当光线是从一切方向射到探测器上时，上式才是可能的。通常我们只能让光线从一个小得多的立体角 $\Omega' < 4\pi$ 内射到探测器上，故而探测器的最小面积就变为

$$a = A\Omega / \Omega' \quad (4.92)$$

如果违背上述情况就意味着违背了热力学第二定律。热力学第二定律表明，热量不能自由地从冷的物体流到热的物体。因为倘若探测器的面积可以做得更小，那么在探测器一端的光子相空间密度就变得大于源的密度了。这就意味着源的辐射温度要低于探测器的温度，或者说辐射就变成是从冷的物体流向热的物体去了。

最后我们还应提到在 3.16 节中已讨论过的一个问题，即粒子群在引力场中的运动。在第三章中我们讨论的是球状星团的潮汐瓦解。但同时注意到了当星团沿指向银河系中心方向伸长时，引力也会导致星团的横向收缩。这一收缩又产生附加的横向速度。因此总的演化方式就变得很复杂了。可是，刘维定理至少对我们理解这个总的发展过程给出了可靠的指导。它告诉我们，不管我们采用怎样细致的力学论证，如 3.16 节所做的那样，最后的结果至少必须与刘维定理所提出的相空间密度始终保持不变这一要求相一致。

4.15 费米-狄拉克统计法

在费米-狄拉克系集中，一个相格中只能容纳一个粒子或没有粒子。任何给定的系集中，存在一个费米能 ε_F ，当温度为零度时，该能量值以下的所有能态都是充满的。而当 $T > 0$ 时，就可能激发到更高的能态 ε 。处于能量 ε 和 akT 的相对几率分别为

$$e^{-(\varepsilon - \alpha kT)/kT} \text{ 和 } 1 \quad (4.93)$$

故当温度为 T 时，某个系集中能量为 ε 的能态被占有的相对几率为

$$\frac{e^{\alpha - \varepsilon/kT}}{1 + e^{\alpha - \varepsilon/kT}} = \frac{1}{1 + e^{(\varepsilon/kT) - \alpha}} \quad (4.94)$$

在此，我们还没有规定能量 akT 。但在温度很低时，即当 $T \sim 0$ 时， akT 必须接近于 ε_F ，因为费米函数

$$F(\varepsilon) = [1 + e^{(\varepsilon - \varepsilon_F)/kT}]^{-1} \quad (4.95)$$

具有图 4.14 所示的形式。

我们定义 $F(\varepsilon) = \frac{1}{2}$ 时的能量值为费米能。注意，在 $T = 0$ 时，若

$\varepsilon \neq \varepsilon_F$ ，在 (4.95) 式中的指数的绝对值将很大，因而

当 $\varepsilon < \varepsilon_F$ ， $F(\varepsilon) = 1$

当 $\varepsilon > \varepsilon_F$ ， $F(\varepsilon) = 0$ (4.96)

这就造成了图 4.14 中的阶梯函数。当所有的能级都充满时，也即意味着 $T=0$ 时，我们就说费米气体完全简并了。当 $T > 0$ 时 $F(\varepsilon)$ 就不再是阶梯形，而是较平滑地延展的曲线。几率 $F(\varepsilon)$ 与能量 ε 的乘积就给出了与能量 ε 相应的一切相格中所具有的能量的平均值。在求这个平均值时，空格及满格情况均需考虑在内

图 4.14 费米函数 $F(\varepsilon)$

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\varepsilon}{1 + e^{(\varepsilon/kT) - \alpha}} \quad (4.97)$$

我们知道在某一动量范围 p 到 $p+dp$ 中的状态数为

$$Z(p)dp = \frac{8\pi p^2 V dp}{h^3}$$

但因

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{p^2}{2m}, \quad d\varepsilon = \frac{p}{m} dp \\ \therefore Z(\varepsilon)d\varepsilon &= \frac{8\pi}{h^3} V \sqrt{2m\varepsilon} m d\varepsilon \\ &= \frac{4\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon\end{aligned}\quad (4.98)$$

因而对一切 ε 值积分求得的粒子总平均能量为

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\int_0^\infty Z(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon}{\int_0^\infty Z(\varepsilon) d\varepsilon} = \frac{\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{3/2} d\varepsilon}{1 + e^{\varepsilon/kT - \alpha}}}{\int_0^\infty \varepsilon^{1/2} d\varepsilon} \quad (4.99)$$

对温度 $T=0$ 的一个粒子系集，再令 αkT 等于费米能 ε_F ，我们有

$$\begin{aligned}\langle \varepsilon \rangle_{T=0} &= \int_0^\infty \varepsilon^{3/2} d\varepsilon \left[\int_0^{\varepsilon_F} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon \right]^{-1} \\ \langle \varepsilon \rangle_{T=0} &= \frac{3}{5} \varepsilon_F\end{aligned}\quad (4.100)$$

可以证明，当 $T>0$ 时， $\varepsilon_F < \varepsilon_{F_0}$ 。即费米能略为有所减小。

当 $\varepsilon - \varepsilon_F \gg kT$ ，也即在粒子能量很大的极限条件下，我们有

$$F(\varepsilon) \sim e^{-(\varepsilon - \varepsilon_F)/kT}$$

对高能的费米子， $F(\varepsilon)$ 接近于玻耳兹曼分布。

在恒星中心经常出现简并态。这主要是指电子，因为对一个给定的能量 ε 来说，电子的动量 $p = \sqrt{2\varepsilon m}$ 比质子的相应值就要小 $\sqrt{m_p/m_e}$

倍。因而低能电子态远比高能质子态容易被充满，也即电子容易简并化。

问题 4.23 假定宇宙充满了完全简并态的中微子，在中微子温度 $T_\nu=0$ 时其能量在 ϕ_ν 以下。试证明中微子的质量密度（即能量密度除以 c^2 ） ρ_ν 为

$$\rho_\nu = \frac{\theta \Phi_\nu^4}{h^3 c^5} \quad (4.101)$$

注意中微子仅存在一种自旋状态而不是两种（Wa67）。

尽管电子和质子确实是费米子，但为什么在许多天体物理状况中，它们好象具有麦克斯韦-玻耳兹曼粒子的性质呢？为了说明这一点，我们看下面的情况。对经典粒子我们能象推导费米-狄拉克分布一样推导出它们的速度分布。假定粒子可以在动量和尺度空间占有任意的位置，这就等于说相格为无限小。只要规定普朗克常数在极限情况下趋于零： $h \rightarrow 0$ ，我们就可得到这样的系统。这种情况下就使得 $\varepsilon_F=0$ ，因为这时可以有任意多的粒子能量取零值，或近似为零值。于是式(4.93)中的几率就变为 $e^{-\varepsilon/kT}$ 及 1。现在我们把系集中动量值为 p 左右的粒子数写为

$$n(p)dp \propto \frac{8\pi p^2 V}{h^3} dp e^{-p^2/2mkT} \quad (4.102)$$

对一切 p 值积分得

$$n = C \int_0^\infty \frac{8\pi V}{h^3} p^2 e^{-p^2/2mkT} dp \quad (4.103)$$

式中 C 为比例常数。这是一个误差函数积分，积分值就是粒子总数

$$n = C \frac{8\pi V}{h^3} \left(\frac{1}{4} \sqrt{\pi(2mkT)^3} \right)$$

因而

$$C = \frac{nh^3}{2V(2\pi mkT)^{3/2}} \quad (4.104)$$

最后有

$$n(p) = \frac{4\pi np^2 e^{-p^2/2mkT}}{(2\pi mkT)^{3/2}}$$

这个结果前面已得到过。

在处理恒星大气和行星大气中粒子的运动、恒星内部的非简并态物质、以及行星际和星际的气体及尘埃微粒随机运动的情况等所有这类问题中，麦克斯韦-玻耳兹曼统计法都有应用。在某些恒星动力学问题中，恒星可视为是一个系集中互相作用着的粒子，此时也可以应用这种统计法。星系团中运动的星系也认为是服从麦克斯韦-玻耳兹曼统计法的。因而在下一节中所推导的公式在天体物理学中有着广泛的应用。

4.16 萨哈方程

在一团很热的气体中，我们常发现任一种给定原子的多重电离态会处在热平衡状态中。这时不同电离状态的密度比由萨哈 (Saha) 方程给出

$$\frac{n_{r+1}n_e}{n_r} = \frac{g_{r+1}g_e}{g_r} \frac{(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3} \exp(-\chi_r / kT) \quad (4.105)$$

方程中 n_r 是处在第 r 次电离态的原子数密度， n_{r+1} 则是高一次电离态的原子数密度。电子密度为 n_e 。方程右端的 g_{r+1} ， g_r 及 g_e 则分别相应于两种不同电离态的原子以及电子这三者的统计权重。因为电子有两种极化态，因而 $g_e=2$ ；但其它两个权就复杂得多了。量 χ_r 是把原子从第 r 次电离态进一步电离到第 $(r+1)$ 态所需的能量。

现在大致定性地来讨论这个方程的意义。我们可以想象，一团炽热气体的热平衡需要经过大量的各种不同的平衡过程才能实现。一方面通过粒子的碰撞或通过对辐射的吸收可能会造成电离，另一方面离子和电子也可能复合形成次一级电离态的离子。复合强度正比于方程左端所给出的乘积 $n_{r+1}n_e$ 。比如设大量的电离是由辐射造成的，则电离强度就应当与 n_r 成正比，并且也与平衡温度 T 的某个函数成正比，因为这一温度确定了光子的密度。同时我们也预期数密度之比 n_{r+1}/n_r 可以通过指数形式的玻耳兹曼因子求定，该因子中包含了这两个电离态间的能量差 χ_r 。这个形式与我们以前讨论中所见的形式相似。最后引入了权重因子，而权重因子是根据充满不同组态所可能取的途径数目来定义的。总之，我们在这里并没有对方程 (4.105) 进行推导，只是说明了它的合理性而已。

这里写出的萨哈方程经过了两个方面的简化。第一，不考虑简并性，因此这里给出的公式形式仅对稀薄气体适用。在高密度结构中，我们还需顾及到，两个电子即使它们的动量和极化态都相同，也不可能在空间

占有同一位置。这样考虑后最后得到的表达式就比较复杂。第二，我们忽略了每一种电离态还可能有许多不同的激发级。第 r 电离级第 i 激发态的数密度与第 $r+1$ 电离级第 j 激发态的数密度之间的关系变为

$$\frac{n_{r+1, j} n_e}{n_{r, i}} = \frac{g_{r+1, j} g_e}{g_{r, i}} \frac{(2\pi m k T)^{3/2}}{h^3} \exp\left[-\frac{\chi_r + \varepsilon_{r+1, j} - \varepsilon_{r, i}}{kT}\right] \quad (4.106)$$

在讨论恒星内部的核反应时我们需要用到这个方程。

问题 4.24 在日冕中，原子碰撞激发的作用超过其他激发过程。在已被证认的谱线中有 CaXIII （钙的 12 次电离）及 CaXV （14 次电离）。这些离子的电离势分别为 655 及 814 电子伏特。 CaXIII 的谱线远较 CaXV 的谱线强。单由这个事实就可以粗略地告诉我们日冕温度的大小。试问求得的结果是多少？

4.17 平均值

一旦知道了一个系集中粒子的能量、频率或动量分布，我们就可计算这类参数的各种函数的平均值。对服从麦克斯韦-玻耳兹曼统计法的粒子，函数 $F(p)$ 的平均值就是：

$$\langle F(p) \rangle = \frac{\int_0^\infty Z(p) F(p) e^{-p^2/2mkT} dp}{\int_0^\infty Z(p) e^{-p^2/2mkT} dp} \quad (4.107)$$

这个方程的形式与方程(4.19)完全相同。分母中的被积函数是找到一个动量为 p 的粒子的几率。

问题 4.25 $\langle p \rangle$ 及 $\langle p^2 \rangle$ 是两个常用的量。证明

$$\langle p \rangle = \frac{\int_0^\infty p^3 e^{-p^2/2mkT} dp}{\int_0^\infty p^2 e^{-p^2/2mkT} dp} = \frac{\frac{1}{2}(2mkT)^2 T(2)}{\frac{1}{2}(2mkT)^{3/2} T(3/2)} = \sqrt{\frac{8mkT}{\pi}} \quad (4.108)$$

注意，这就是动量标量的平均大小，而动量矢量的平均值 $\langle p \rangle$ 则为零，因为不同方向的动量抵消了。此外再证明

$$\langle p^2 \rangle = \frac{\int_0^\infty p^4 e^{-p^2/2mkT} dp}{\int_0^\infty p^2 e^{-p^2/2mkT} dp} = 3mkT \quad (4.109)$$

问题 4.26 在 6.16 节中将要用到量 $\langle 1/v \rangle$ ，试证明

$$\left\langle \frac{1}{v} \right\rangle = \sqrt{\frac{2m}{\pi kT}} \quad (4.110)$$

问题 4.27 在天文光谱学中，根据谱线轮廓的观测，我们仅能测定原子沿视线方向的运动速度，那么当沿视线方向的均方随机速度 $\langle v_r^2 \rangle$ 已知时，为了确定气体的温度，我们就需要知道 $\langle v_r^2 \rangle$ 与温度 T 的关系。试证明，对麦克斯韦-玻耳兹曼分布，这个关系为

$$\langle v_r^2 \rangle = kT/m$$

上述所有这些积分都具有下列形式

$$\int_0^\infty x^{n-1} e^{-ax^2} dx = \frac{T(n/2)}{2a^{n/2}} \quad (4.111)$$

式中 $T(n) = (n-1)!$, $T(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ 。

在计算有关费米子或玻色子的能量或动量平均值时，需要用到类似的积分。

4.18 热力学第一定律

热力学第一定律表达了能量守恒。如果对气体加热，则所提供的能量就以两种方式之一起作用：或是升高气体的温度；或是气体克服外加压力而膨胀做功。用符号①来表达就是

$$\delta Q = dU + PdV \quad (4.112)$$

式中所有的量都是按一个克分子物质标准化的，式左边是供给这系统的热函变化量 δQ ； dU 是内能的变化， PdV 是系统所做的功。只要我们记得，如果在力 F 的方向有位移 D 发生，就是做了功，那么上面式中最后一项的性质就很容易理解了。比如体积的变化 dV 是面积为 A 的活塞经过位移后产生的，那么活塞的位移距离就是 $D=dV/A$ ，而作用力就是 $F=PA$ 。

内能 U 是各种能量之总和，包括分子朝四面八方运动时形成的平动动能；分子中各个原子的振动动能及势能；电子激发态的能量以及分子的转动动能。

Q 是系统的焓。为使系统产生一度的温度变化所需的热函 Q 称为系统的热容量。显然热容量依赖于系统所做的功。如果系统不做功，也就是说系统的体积不变，那么所有的热就都用来增加内能了，于是有

$$c_v = \left[\frac{\delta Q}{dT} \right]_v = \frac{dU}{dT} \quad (4.113)$$

下标 v 表示体积不变。

有时我们须要知道压力不变条件下的热容量。对理想气体来说这个关系很简单。理想气体定律(4.34)的微分形式是：

$$PdV + VdP = RdT \quad (4.114)$$

故热力学第一定律就变为

$$\delta Q = \left(\frac{dU}{dT} + R \right) dT - VdP \quad (4.115)$$

当压力不变时有

$$c_p = \frac{dU}{dT} + R \quad (4.116)$$

因而对理想气体，我们得到下面重要的关系式

$$c_p - c_v = R = Nk \quad (4.117)$$

这式子是由(4.113)式及(4.116)式推得的。 N 是阿伏伽德罗常数，而热容量以 1 克分子气体计算。

我们已经提到，内能包括分子的平动、振动、电子激发及转动动能。我们要了解，对一个典型的分子这些能量是如何分布的。我们知道任何一个经典粒子激发到能量 ϵ 值的几率与玻耳兹曼因子 $e^{-\epsilon/kT}$ 成正比。无论 ϵ 是振动能、电子激发能、转动能或平动能，情况都是这样的。因此对一个经典粒子系集，每个分子的平均内能仅仅与激发能量的途径数目有关，也即与自由度数目乘上 $kT/2$ 有关。这个因子 $kT/2$ 是与前面的结

果相一致的：即每克分子气体三个自由度的总平动动能是 $(\frac{3}{2})NkT$ 。因

此，每个平动自由度的能量就是 $\frac{1}{2}kT$ ，而在热平衡中其他每个有效的自由度也会激发到这个平均能量。这就称做均分原理。

问题 4.28 证明当星际微粒与 $T \sim 100K$ 的气体处于热平衡时，微粒应该是在快速自转着的。当微粒半径为 $\alpha \sim 10^{-5}$ 厘米，密度为 $\rho \sim 1$ 时，试证明其角速度为 $\omega \sim 10^{5.5}$ 弧度·秒 $^{-1}$ 。

均分原理是经典物理学的一部分，它与实际观测结果符合得并不很好；反之量子力学观点的解释就与观测符合得好得多。而经典理论与量子理论的差别在很大程度上取决于对什么才算是“有效”自由度的理解。当温度低时，原子和分子的电子激发态并不普遍。因而当温度为开氏几百度左右时，这类状态对热容量实际并无什么贡献。甚至振动状态对热容量的贡献相对来说也是很小的，因为通常振动能要比转动能大。因此，除了平动能外，只有低能的转动状态才对内能以及恒定体积下的比热有较重要的贡献。

双原子组成的分子其自转位置可由两个坐标 θ 及 ϕ 决定。因而它具有两个自由度。对三个或三个以上原子组成的多原子分子来说，除了原子排列成一直线形状而外，一般需要有三个坐标才能完全确定其位置，因此自由度就是三。双原子分子或直线排列的分子对热容量的贡献是 kT ，而非直线排列的分子对热容量的贡献就是 $3kT/2$ 。即使这种比较简单的规律也仅在低温时才适用。而在高温时情况就复杂得多，因为当粒子具有转高的自转能量时，粒子就可能处于简并态。为了顾及这种简并态粒子的数目，就必须引入量子力学权函数。

我们感兴趣的是星际气体的热容量。对星际气体而言，温度是不高的，因此上述许多困难就不存在了。记常压以及常体积时的热容量之比为 $c_p/c_v \equiv \gamma$ 。根据(4.115)就有

$$\gamma = \frac{c_v + Nk}{c_v} \quad (4.118)$$

对单原子气体，我们只要考虑平动内能，因而 $c_v = 3kN/2$ ； $\gamma = \frac{5}{3}$ 。

对双原子气体，除了三个平动自由度外还附加两个转动自由度，因而

$$c_v = 5kN/2, \quad \gamma = \frac{7}{5}。$$

4.19 等温过程和绝热过程

一个冷的星际气体云的收缩，以及同样地一个热的电离气体云的膨胀，都可以通过许多不同的方式来进行。在温度不变的条件下，一些与气体动力学有关的宇宙过程可能很慢地出现，这类过程称为等温过程。在这过程中内能不变化，送入该系统的热量等于系统做的功。另一类过程是描述许多快速演化系统的，称为绝热过程，在这类过程中，既没有热量输入气体中，也没有热量放出来，此时 $\delta Q=0$ 。

$$\delta Q = c_v dT + PdV = 0 \quad (4.119)$$

对理想气体

$$c_v dT + \frac{RT}{V} dV = 0 = c_v \frac{dT}{T} + (c_p - c_v) \frac{dV}{V} \quad (4.120)$$

积分后得

$$\log T + (\gamma - 1) \log V = \text{常数} \quad (4.121)$$

或

$$TV^{\gamma-1} = \text{常数} \quad (4.122)$$

$$PV^{\gamma} = \text{常数} \quad (4.123)$$

及

$$P(1-\gamma)TV = \text{常数} \quad (4.124)$$

这即是理想气体的绝热关系式。例如，当星际气体受到从刚形成的 O 型星或爆炸着的超新星所发出的冲击阵面的作用而发生突然的压缩时，星际气体的性质和状况就服从上述绝热关系。在第九章中将要研究这个现象。

对电磁辐射来说，单位体积的内能为

$$U = aT^4 \quad (4.125)$$

这正好就是能密度。因而根据(4.41)式可知，压力值就正好为 U 值的三分之一，若再令体积为 V ，此时绝热过程就可表达为

$$\begin{aligned} dQ &= dU + PdV \\ &= 4aT^3 V dT + \frac{4}{3} aT^4 dV \\ &= 3V dP + 4PdV \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.126)$$

$$P \propto V^{-4/3}, \quad \gamma = \frac{4}{3} \quad (4.127)$$

因为对绝热过程有 $c_p = \infty$ ，因此 γ 不能由 c_p/c_v 给出而要由(4.123)形式给出。对星际介质我们仅需考虑辐射及没有内能自由度的电离粒子或单原子粒子，这种近似处理已足够好了。根据压力主要是由气体粒子造成还是由辐射造成，星际介质中的 γ 值会从 $4/3$ 到 $5/3$ 之间变化。

4.20 凝聚的形成及星际介质的稳定性

我们认为恒星是由原来遍及于整个星系内的气体所形成，而星系则是由原先在整个宇宙中多少是均匀分布的介质所形成。

强有力的证据表明，现在恒星仍在继续形成。许多恒星处在仅能再维持数百万年的阶段，因为恒星的光度，也即恒星发出的能量，是如此之大，它们应当很快就会耗尽它们所具有的能量，并演化成为外表看来完全不同的天体。通常在高度密集的气体 and 尘埃附近发现这些明亮的恒星，因而相信恒星就是由这种高密度气体所形成的。

现在我们要问，星际气体云是怎样坍缩而形成恒星的呢？我们可以通过研究不同条件下气体的稳定性来解决这个问题。研究结果表明稳定性依赖于热容量之比 γ ，因而气体云的坍缩就可从这方面来说明。不过还不清楚这种观点是否在某种程度上反映了恒星的真实形成过程。

考虑一个分子系集，其每克分子的动能 T 为

$$T = \frac{3}{2} (c_p - c_v) T \quad (4.128)$$

或

$$T = \frac{3}{2}(\gamma - 1)c_v T \quad (4.129)$$

内能为

$$U = c_v T \quad (4.130)$$

因而

$$T = \frac{3}{2}(\gamma - 1)U \quad (4.131)$$

只要服从平方反比律的力在粒子间起主要作用，那么根据(3.83)的维里定理我们就有

$$3(\gamma - 1)U + V = 0 \quad (4.132)$$

这就表明，在引力起主要作用的时候，以及气体在小范围内的性质主要由带电粒子相互作用所决定的地方（见下面 4.21 节），上述方程就都能成立。在某些场合下，甚至当从周围恒星来的光压作用在系集中的粒子上时，上式也能成立。

若每克分子的总能量是

$$\varepsilon = U + V \quad (4.133)$$

那么从(4.123)式就可得

$$\varepsilon = -(3\gamma - 4)U = \frac{3\gamma - 4}{3(\gamma - 1)}V \quad (4.134)$$

由此明显可以得到下列三个结果(Ch39)*：

(a) 若 $\gamma = \frac{4}{3}$ ，则 ε 值与气团的结构无关，它永远为零。此时可能

会有膨胀和收缩，结构是不稳定的。这个情况相当于光子气体(4.127)。行星状星云在其早期阶段时，主要是由辐射压造成其膨胀的(Ka68)。因而行星状星云应该只是处于临界稳定状态。

(b) 当 $\gamma = 1$ 时，对任何的 ε 值来说 V 均为零，此时也不存在任何稳定的结构。

(c) 当 $\gamma > \frac{4}{3}$ 时，方程(4.134)表明 ε 值永远是负的，因而系统是有

界的。如果系统是在收缩，并用 ΔV 表示其势能变化，那么可见有

$$\Delta \varepsilon = + \frac{(3\gamma - 4)}{3(\gamma - 1)} \Delta V = -(3\gamma - 4) \Delta U \quad (4.135)$$

通过辐射损失掉的能量为？ $\Delta \varepsilon$

$$-\Delta \varepsilon = - \frac{3\gamma - 4}{3(\gamma - 1)} \Delta V \quad (4.136)$$

而通过温度的升高，内能的增加为

$$\Delta U = - \frac{1}{3(\gamma - 1)} \Delta V \quad (4.137)$$

由此当原恒星在收缩形成恒星时，它就变得越来越热。

应当说明两点：

(a) 当把这里推导的理论应用到宇宙尺度上去时，比如在研究星系或星系团的形成时，我们会碰到确定势能 V 时所带来的困难。这时，我们再不能单纯依靠牛顿理论去定义势能的零点，而应该使用如广义相对

论那样含义更为广泛的方法。这就使问题的处理变得相当复杂，至今还没有研究出很合适的理论来。

(b)在有些区域里，一些恒星刚刚形成，而它们对周围介质的压力作用正在开始出现，在这样的条件下还能再形成新的恒星。这就表明，实际上恒星的形成可能是与周围介质发生强烈的相互作用后才产生的。已经建立了一些理论，用来描述冷气体云经压缩而形成恒星的过程，而造成这种压缩的原因或者是由于周围热电离区的作用；或者是附近炽热恒星所发射的星光光压。由此看，上面讨论的电离介质的稳定性与这儿谈的问题并不严格有关。然而明显地可以知道，如果气体的结构非常稳定，它就会反抗外加的压力，而当气体结构确实不稳定时则容易受这种外加压力的影响。如 1.4 节所指出：磁场、绕银心的旋转运动、绕原恒星中心的自转都禀于原恒星物质的一种反抗坍缩的稳定性。因而气体随机运动以及辐射能并不是对(4.131)到(4.134)这些方程中的 U 值有贡献的仅有的因素。

4.21 电离气体和恒星系集

在很大程度上可用描述气体性质的方法对星团或星系团给以统计描述。特别是电离气体（等离子体）和恒星集团之间在物理特性上有着许多惊人的相似之处。这些相似性之所以产生是因为牛顿引力可写为与库仑静电力定理相类似的形式：

$$\begin{array}{cc} \text{牛顿力} & \text{库仑力} \\ \frac{(iG^{1/2}m_1)(iG^{1/2}m_2)}{r^2} & \frac{Q_1Q_2}{r^2} \end{array} \quad (4.138)$$

这里质量乘上引力常数的开方再乘虚数 i 就是库仑电荷的引力模拟。这种对应性可推广到场、势、势能和其它物理参数方面去。引力过程和静电作用的主要差别在于电荷可有正、负，而引力模拟量则只有一种符号，因为质量永远是正的。我们首先要推导相互间有引力作用的粒子系集的某些性质，然后再同等离子情况比较。如果取粒子为球形分布，这粒子可以是一群恒星或星系，则离中心距离为 r 处单位质量上的作用力为

$$F(r) = -\frac{1}{r^2} \int_0^r 4\pi Gr^2 \rho(r) dr \quad (4.139)$$

这表明：

$$\frac{d}{dr} r^2 F(r) = -4\pi Gr^2 \rho(r) \quad (4.140)$$

令力等于位的梯度，于是有

$$F(r) = -\nabla V(r) = \frac{d}{dr} V(r) \quad (4.141)$$

进而有

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} V(r) = +4\pi G \rho(r) \quad (4.142)$$

这就是泊松方程。以(4.47)代入，得到温度为 T 时气体的泊松-玻耳兹曼方程：

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{dV}{dr} = 4\pi \rho_0 G e^{-[mV(r)/kT]} \quad (4.143)$$

值得注意的是，方程右端指数中的势函数是真正从方程(4.46)的 $\nabla V(r)$ 求积分后得到的。因而，如果在整个宇宙中存在某个常数势，那么似乎只要在这个势上再加上 $V(r)$ ，星系系集或恒星系集的性质就应当（同气体）没有什么差别了。实质上在 4.20 节讨论均匀分布气体的稳定性问题时所提到的就是这一点。

问题 4.29 证明当进行变量代换

$$\frac{mV(r)}{kT} \equiv \psi \quad \text{及} \quad r \equiv \left(\frac{kT}{4\pi\rho_0 mG} \right)^{1/2} \xi \quad (4.144)$$

后，方程(4.143)就变为

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\psi}{d\xi} \right) = e^{-\psi} \quad (4.145)$$

我们现在必须决定加在这个微分方程上的边界条件。在星团中心没有任何的作用力，因而 V 或 ψ 的一阶导数必须为零。既然势可以有任意的附加常数，我们就选中心处的势为零。这两个条件用新的变量表示就是

$$\psi = 0 \quad \text{及} \quad \frac{d\psi}{d\xi} = 0 \quad (\text{在 } \xi = 0 \text{ 处}) \quad (4.146)$$

上式与方程(4.145)合起来可导出一个没有封闭形式的解(Ch43)。

问题 4.30 证明当 ξ 值在很小和很大两种极端情况下，方程相应的解为(Ch39)：

$$\psi \sim \frac{1}{6}\xi^2 - \frac{1}{120}\xi^4 + \frac{1}{1890}\xi^6 + \dots, \quad \xi \ll 1 \quad (4.147)$$

$$\psi \sim \log\left(\frac{\xi^2}{2}\right), \quad \xi^2 > 2 \quad (4.148)$$

把这结果代入方程(4.145)及(4.146)可以证明这解答是正确的。由此就可找到径向的密度和质量分布(Ch143)。图 4.15 中画出了密度分布曲线。

图 4.15 对照离分布中心的径向距离所画出的密度曲线(1)及面积密度曲线(2)对一个星团而言， σ / σ_0 代表恒星密度随着距离减小的情况。 ρ_0 及 σ_0 代表分布中心的值。 $\rho / \rho_0 = \exp(-\psi)$ ， $\xi = (4\pi\rho_0 mG/kT)^{1/2} r$ 。

(根据 S. 钱德拉赛卡 (Chandrasekhar) “恒星动力学原理”一文)

密度 $\rho_0 e^{-\psi}$ 与 ξ^2 成正比是作图以及处理渐近解(4.148)的一个困难，这使得积分上限的距离值取很大时积分总质量会趋于无穷大。因而我们需要有一个截尾机制，使星团半径限制在有限值内。我们已经提到，与星系核的相互作用可作为这类机制的一个代表（见 3.16 节）。

把这个结果与既具有正电荷又具有负电荷粒子的等离子体的结果相比较是颇为有趣的。泊松-玻耳兹曼方程的推导过程与粒子的电荷毫不相关。这个方程的推导中只要求力服从平方反比律，以及要求质量为均匀分布，因而对电荷分布也同样适用。利用不同种类粒子的系集的密度公式（见(4.53)式），则对于等离子体的泊松-玻耳兹曼方程可写为

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{dV}{dr} = -4\pi \sum_i n_i q_i e^{-q_i V/kT} \quad (4.149)$$

其中 q_i 是 i 型粒子的电荷。如果我们规定粒子间距离很大——对星系

际、星际和行星际空间是满足这个条件的——于是就有

$$q_i V \ll kT \quad (4.150)$$

利用泰勒级数得

$$e^{-q_i V/kT} = 1 - \frac{q_i V}{kT} + \frac{1}{2} \left(\frac{q_i V}{kT} \right)^2 + \dots \quad (4.151)$$

略去二次项及高次项，(4.149)式右端电荷密度值就变为

$$\rho = \sum_i n_{i_0} q_i - \frac{V}{kT} \sum_i n_{i_0} q_i^2 \quad (4.152)$$

因为对整个等离子体而言是呈电中性的，故第一项为零。注意在引力情况下这一项并不为零，相反在引力情况下它是主项。第二项可写为

$$\rho = -\frac{Ve^2}{kT} \sum_i n_{i_0} Z_i^2 \quad \text{其中 } q_i = eZ_i \quad (4.153)$$

代入(4.149)式有

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = \frac{4\pi e^2 V}{kT} \sum_i n_{i_0} Z_i^2 \quad (4.154)$$

或

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = r^2 V \left(\frac{1}{L^2} \right) \quad (4.155)$$

其中

$$\frac{1}{L^2} = \frac{4\pi e^2}{kT} \sum_i n_{i_0} Z_i^2 \quad (4.156)$$

L 具有长度量纲，它称为德拜 (Debye) 屏蔽距离。在这个距离之内，等离子体中的带电粒子才能产生一个可观的电场，在这个距离以外，带电粒子的静电影响很快消失。

在天体物理学中之所以对这屏蔽距离感兴趣，原因之一是它表明了在大尺度上保持一个电场是不可能的。在比距离 L 远得多的地方，场的影响就达不到了。对 $n_{i_0} = 10^{-3} \text{ 厘米}^{-3}$ ， $Z_i = 1$ 及 $T = 100K$ 的星际气体云， L 约为 20 米。它与典型的恒星间距离约 1 个秒差距相比，是完全可以忽略不计的。

在大尺度过程中静电力可能是重要的，但仅当电场与大尺度磁场同时出现时才是如此。因为磁场可以防止带电粒子沿电力线方向流动，因而可以防止产生静电屏蔽所必需的电荷分离。当磁场存在时，等离子体的性质由关于磁流体动力学过程的理论来处理 (Co57)，(Sp62)。在第六章中我们将简要地涉及这方面的问题。

问题选答

4.2 假定步长为 λ_i 时走的步数为 n_i ，那么其均方偏离就是 $n_i \lambda_i^2$ ；对一切其他步长值时情况均类似。因而最终的均方偏离就是

$$\sum_i n_i \lambda_i^2 = N \langle \lambda^2 \rangle。$$

4.4 为了逃逸，偏离大小必须为 $\sim n^{1/2}$ 个步长 L 。因而 $n \sim R^2/L^2$ 。

4.5 对给定的 r 值，改变 θ 后得出

$$\frac{1}{r} = \frac{\sin \theta}{R\alpha}, \quad \left\langle \frac{1}{R\alpha} \right\rangle = \frac{1}{r} \left\langle \frac{1}{\sin \theta} \right\rangle = \frac{\pi}{2r}。$$

因而

$$\frac{1}{r} = \frac{2}{\pi} < \frac{1}{R\alpha} >$$

以及

$$\text{总质量} = \frac{< v^2 >}{G < 1/r >} = \frac{3 < v_p^2 > \frac{\pi}{2}}{< \frac{1}{R\alpha} >}$$

$$4.6 \frac{nm < v^2 >}{3} \sim 3 \times 10^{-17} \text{ 达因} \cdot \text{厘米}^{-2}。$$

4.7 每一对星在单位时间的碰撞几率为

$$\text{几率} = nv \sigma \text{ 秒}^{-1}$$

在 P 秒时间内的碰撞几率就是 $nv \sigma P$, 或者说太阳在形成到现在这段时间内可能造成行星系统的几率约为 1.5×10^{-11} 。若银河系中总共有 10^{11} 颗恒星, 那么在这 5×10^9 年中就应当有 1.5 对星或三个太阳系由这种方式造成。因为太阳和巴纳德星两者的伴星一般大小都与木星相当, 又因如第一章所述, 这两个行星系统看来不象具有共同的起源, 由此看来太阳周围行星系统的密度已经太大而无法用琼斯假说来说明了。

$$4.8 \quad P \sim 10^{-14} \text{ 达因} \cdot \text{厘米}^{-2}。$$

$$4.9 \quad v \sim 0.8 \text{ 厘米} \cdot \text{秒}^{-1} \quad M = 4\pi \rho r^3/3 \sim 7 \times 10^{-14} \text{ 克}。$$

4.10 动量转移率为 $\pi r^2 nv^2 m = dp/dt = 3.1 \times 10^{-21} \text{ 克} \cdot \text{厘米} \cdot \text{秒}^{-1}$ 。微粒质量已由问题(4.9)给出, 因而 $dv/dt = 4.8 \times 10^{-8} \text{ 厘米} \cdot \text{秒}^{-2}$ 。这就是初始加速度, 但是, 随着粒子速度和质量的增加, 加速度就减小, 当微粒速度达到 v 时加速度就减小为零。

4.11 质量增益 $dM/dt = \pi r^2 nv m = 3 \times 10^{-27} \text{ 克} \cdot \text{秒}^{-1}$ 。根据这个速率, 在 2×10^{11} 秒以后微粒可增加 1% 的质量。

$$4.13 \quad P \sim 2 \times 10^{-13} \text{ 达因} \cdot \text{厘米}^{-2}。$$

4.14 若 n 是在单位时间内穿过单位面积的光子数, 压力就是

$$P = \frac{\int n(v) h v d v}{c}$$

也就是单位时间入射在单位面积上的能量除以光速。作用在微粒上的力就等于微粒面积乘 P 。

$$P = \frac{1.37 \times 10^6}{3 \times 10^{10}} = 4.6 \times 10^{-5} \text{ 达因} \cdot \text{厘米}^{-2}$$

$$F = 3.6 \times 10^{-9} \text{ 达因}$$

4.15 对各向同性散射情况, 我们对所有立体角增量计算函数 $(1 - \cos \theta)$ 的平均值, 以求得平均动量转移。由此得

$$P = \epsilon / 3c + \frac{2\epsilon / 3c}{4\pi} \iint (1 - \cos \theta) \sin \theta d\phi d\theta$$

θ 为零时表示前向散射的方向。 ϵ 为单位时间入射到粒子上的能量。于是 $P = \epsilon / c$, 当粒子位于日地距离上时, 就有 1.44×10^{-12} 达因的力作用在粒子上。而引力为 mMG/R^2 , 这里 m 是粒子质量, M 是太阳质量, R 是日地间的距离:

$$m = \rho 4\pi s^3/3 = 2.5 \times 10^{-11} \text{ 克}$$

引力是 1.5×10^{-11} 达因, 也即辐射斥力约是引力的 10%。

最后，因为从太阳看去微粒所张的立体角随 R^2 减小，而引力也是按 R^2 减小，因此引力和辐射斥力之比保持不变。

4.16 根据作椭圆运动微粒的周期公式

$$\tau = 2\pi a^{3/2} / (MG_{\text{有效}})^{1/2}$$

我们看到周期与有效引力常数的平方根值有关。因而这微粒的周期将是

$(\frac{3}{2})^{1/2}$ 年，即 1.22 年。轨道速度就是 $v_E / 1.22$ ，其中 v_E 为地球的轨道速

度，故轨道速度约为 24 公里·秒⁻¹。因此地球和这类粒子的碰撞速度应当约为 6 公里·秒⁻¹。

4.18 由于大气层很薄，可认为 g 到处为常数。由此标高 h 由方程 $ghm/kT=1$ 来求，得

$$h \sim 10^6 \text{ 厘米}$$

4.20 $m \sim 2 \times 10^{-24}$ 克

以及 $v \sim 2.3$ 公里·秒⁻¹

$$4.23 \quad Z(p)dp = \frac{4\pi p^2 dp}{h^3} V, \quad p = \frac{\epsilon}{c}, \quad dp = \frac{d\epsilon}{c}$$

$$\therefore Z(\epsilon)d\epsilon = \frac{4\pi \epsilon^2 d\epsilon}{h^3 c^3} V$$

总能密度为

$$\frac{\epsilon}{V} = \frac{\int_0^{\Phi_v} \epsilon Z(\epsilon) d\epsilon}{V} = \frac{\pi \Phi_v^4}{h^3 c^3}$$

而质量密度为

$$\rho_v = \frac{\epsilon}{c^2 V} = \frac{\pi \Phi_v^4}{h^3 c^5}$$

4.24 $kT \sim 655$ 电子伏特 $\sim 10^{-9}$ 尔格

$$T \sim \frac{10^{-9} \text{ 尔格}}{1.4 \times 10^{-16} \text{ 尔格 / K}} \sim 7 \times 10^6 \text{ K}$$

我们认为 kT 近似等于激发能。因为温度 T 不够高，不足以经常地把原子激发到较高的电离态，所以这较高的电离态仅产生很弱的谱线。也即对较高的电离态 $kT < \text{电离能}$ 。而对较低的激发态 kT 就可能与电离能差不多。日冕内实际温度为 $T \sim 1.5 \times 10^6 \text{ K}$ 。

第五章 光子和快速粒子

5.1 相对性原理

在讨论牛顿运动定律的时候，我们要是仔细一点的话，就会注意到，这些定律仅在一一定的限制条件下才成立。对于一切运动的描述，都只能是相对于惯性参考系而言的，这些参考系相对于周围星系的平均运动，或者是静止的，或者运动的速度恒定。

不仅是牛顿定律，而且其他所有的物理学定律也都要受这类条件的限制。这一普遍论述首先是由爱因斯坦加以系统阐述的，称为相对性原理。它意味着，一个观测者不可能确定他所在的惯性参考系的绝对运动，而只能确定它对于别的参考系的相对运动。这个原理还有一系列其他的重要推论，合在一起就构成了狭义相对论的理论基础(Ei05a)。如3.8节所指出，爱因斯坦还把牛顿的惯性系概念扩充了。牛顿的惯性系是指相对于固定恒星以恒定速度运动的参考系。而爱因斯坦指出，我们还可以把固定在非旋转的自由落体上的坐标系也纳入惯性参考系内。相对于远离一切大质量天体的惯性系来说这种局部惯性系可能有加速度，但是就相对性原理而言，这两者是完全等价的。最后爱因斯坦假定：在一切参考系中，无论这些参考系是运动着的还是静止的，光速都是相同的。这实际上是相对性原理的一个推论。要是光速不同的话，观测者就可以据此确定他究竟是静止的，还是运动着的了。

我们应该注意，相对性原理是建立在观测基础上的，单单根据逻辑推理是不可能加以预言的。

最近几个世纪以来，远在爱因斯坦诞生之前，人们早就有了这样的认识：即可能存在着某种相对性原理。在伽利略时代，人们相信光速是无限大的，那时候关于相对性原理的陈述几乎与爱因斯坦的陈述一样。当时认为，在任何参考系中测定的光速都是无限大，远距离的信号和信息的瞬时传播是可能存在的。既然任何有限速度加到无限大的速度上仍然得出无限大的速度，于是不管观测者怎样运动，显然他总是看到光线是以同一无限大速度在运动着；同样，其他所有物理学定律在任何牛顿惯性系中也都是一样的。

然而在1666年罗麦(Roemer)发现，光速尽管很大，却是有限的。这样就要破坏伽利略相对性原理了，因为朝着光源方向运动的观测者看到的光波比远离光源而去的观测者看到的光波似应走得快一些。但是在十九世纪末，迈克尔逊和其他一些人却发现，在一切他们可加检测的运动坐标系中，光速都是相同的。爱因斯坦独立地提出了一个新的相对性原理，这原理与伽利略的原理相似，不同之点是新的原理认为光速在一切参考系中都是有限而相等的。在一定意义上讲，这一概念早在麦克斯韦电磁理论中就已经存在了，但光速不变这一要求却被认为是麦克斯韦理论的一个缺陷而不是一个长处。

我们将会看到，相对性原理使得爱因斯坦得到了物体不能以超过光速的速度而运动的结论，光速 $c=2.998 \times 10^{10}$ 厘米·秒⁻¹。无限大速度的概念简直与实际运动物体不相对应的。

相对论的任务是要把一些物理定律这样加以公式化，使得在任何一

个运动坐标系中都可以准确地描述各种物理过程。这方面的研究可以方便地分为两个部分。第一种理论具有较大的局限性，它从惯性参考系的观点来处理各种物理过程，对引力不作任何考虑。这就是狭义相对论。第二种是更为普遍的理论，不仅包括狭义相对论，而且还研究引力场和任意的加速运动^①，因此就称为广义相对论。我们并不打算在这儿讨论这个理论，一方面是因为它很繁复，另一方面是因为怎样把现存形式的广义相对论应用到天体物理学中去的问题还没有完全解决。还可能存在着一些与相对论竞争的具有同样能力的理论，这些理论可能会使人们对于天体物理过程取得更为深入的了解。狄克所提出的理论就是其中之一 (Di67a)。

5.2 相对论术语

假定在一个相对于某个惯性参考系 K' 静止的参考系中发生了一个物理过程，有一个观测者在另一个惯性系 K 中观测这个过程。如果 K 和 K' 相互间以很大的运动速度 V 运动着，那么这个观测者所看到的过程在时间和空间两方面都会有改变。但是根据狭义相对论，观测者就可以重新建立起关于事件的固有标度使得这些过程就象发生在参考系 K 中一样。这就是相对论的一个十分有用的性质。在天体物理问题中，常常出现高速运动，因此我们可以看到，相对论在天体物理问题中有许多应用。但是狭义相对论的功能还不局限于能使从表观上改变了的观测结果重新建立起清晰的图象；它还能使我们进一步认识时间和空间之间的内在联系，以及动量、能量和质量之间的内在联系；它证实了超过光速是不可能的，并且还给出了其他许多新结果。

为了充分利用这个理论，我们还需要作一些准备工作。我们必须定义一些新概念，并用数学术语来表达它们。

(a)在狭义相对论适用的范围内，它废除了关于静止状态的绝对标准。狭义相对论指出，零速度是无法用一种绝对的方法加以定义的。物体的静止只能是相对于其他物体或相对于参考系而言的。

我们知道，上述论点并不一定是完全正确的：在宇宙内任何地方确实存在一个优越的自然静止状态。这就是相对于周围星系平均运动而言的静止状态。在相对论建立的时候还不知道这样一个事实，它倾向于减弱我们前面所述的论点，因而我们仅仅可以这样讲：绝对静止标准是与狭义相对论不一致的。狭义相对论不能区分绝对静止和匀速运动。

(b)在相对论中我们要谈到事件，它必定是由发生地点和发生时间两者来描述。我们描述一个事件需要四个坐标——三个空间坐标和一个时间坐标。

因此，就存在一个包括空间坐标和时间坐标在内的假想的四维空间。在这个空间中，事件由世界点 (x, y, z, t) 来表示。任何物理过程可由一系列的事件来描述，因而可由四维时空中的一组或连续的世界点来表示。每个物理粒子可由四维图中的一条世界线来代表。

(c)用记号 a 和 b 所表示的两个不同事件是被间隔 s_{ab} 所分开，间隔长度为

$$s_{ab}^2 = -[(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 + (z_a - z_b)^2 - c^2(t_a - t_b)^2] \quad (5.1)$$

上式提示我们可以定义一个新坐标， $\tau = ict$ ，这里 i 是虚数，从而使(5.1)

式变为

$$s_{ab}^2 = -[(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 + (z_a - z_b)^2 + (\tau_a - \tau_b)^2] \quad (5.2)$$

在这种形式下，时间和空间坐标就对称了。方程(5.2)正是四维平坦空间中两点之间距离的毕达哥拉斯表达式。这样的空间也可称为欧几里德空间，而(5.1)式所描述的特殊的四维空间则是所谓的闵可夫斯基(Minkowski)空间(Mi08)。方程(5.2)有助于说明时间和空间坐标的某些性质。公式(5.2)中的时间坐标是虚数，而空间坐标则是实数。遗憾的是代换 $\tau = ict$ 并不十分有用。完整形式的狭义相对论所处理的量用张量符号描述最为合适。但如果把时间取作虚数，就无法确当地应用张量形式。下面将会看到，更好的办法是我们应该把 x, y, z 及 ct 视作四维空间矢量的四个分量，也就是说其符号为 $(+++?)$ ，这表示两个事件之间间隔平方的毕达哥拉斯表达式就是这间隔的空间分量平方之和减去时间增量的平方。

(d)我们可把方程(5.1)表作微分形式

$$ds^2 = -(dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2) \quad (5.3)$$

式中 ds 称为线元。

(e)如果 $s_{ab}^2 > 0$ ，则两事件的间隔称为类时间隔，若 $s_{ab}^2 < 0$ 则称为类空间隔。若 s_{ab}^2 正好等于零，则从方程(5.1)或(5.3)我们看到

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \equiv v^2 = c^2 \quad (5.4)$$

包含了一切间隔 $s_{ab}=0$ 或线元 $ds=0$ 的表面称为光锥。光锥包括了以光速通过点 (x, y, z, t) 的所有轨迹。图 5.1 表示这种光锥的二维投影。二维投影的意思是我们选择坐标 $y=z=0$ ，于是表面

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad (5.5)$$

的投影就变成了 $x = \pm ct$ ，其斜率为

$$\frac{dt}{dx} = \pm \frac{1}{c} \quad (5.6)$$

图 5.1 表明不同类别事件之间关系的世界图

一切代表物理质点的世界线其速度必须 $v < c$ ，因此它一定处于包含 t 轴的那部分光锥之内。图的下半部表示过去。上半部分则包括了一切未来的世界点。图中包括 x 轴的那两部分表示绝对不可达到，因为若要达到它们就要求速度大于光速。

有趣的是绝对过去和绝对将来的概念竟然依赖于速度不能超过光速这样一个事实。倘若光速可以超过，那么我们就可以飞驶到足够远的世界点，并“追赶上”比如由公元 1054 年的超新星所发射的光线。也就是说，用一个足够好的望远镜，我们就可以往前“追溯”，看到刚刚要爆发的恒星。于是就可以把事件从过去拉回到我们的“今天”，但即使是这样，这个事件对我们来说仍然是不可达到的，这就是说我们不可能用任何方式对这一事件施加影响。在 5.12 节还要更仔细地考虑这个问题。

(f)在随着观测者所在参考系一起运动的钟上所读得的时间称为该参考系的固有时，而在该参考系中量得的物体长度称为固有长度。

5.3 相对运动

考虑两个惯性参考系 K 和 K' ，它们的轴 x, y, z 和 x', y', z' 互相平行（图 5.2）。 K' 以速度 V 沿 x 轴相对 K 而运动。在系统 K 中静止的观测者测得一个事件的坐标为 (x, y, z, t) ，而在 K 系统中静止的观测者测得的同一事件的坐标为 (x', y', z', t') 。

图 5.2 运动坐标系的示意图

令两个参考系的原点在一时刻 $t=t'=0$ 重合。其后的运动并不影响坐标分量 y 和 z 的相等，即： $y'=y$ 及 $z'=z$ ；但 t 和 x 却通过一组比较复杂的关系式与 t' 和 x' 联系起来。这组关系式就是洛伦兹变换，它是 (Lo04)：

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + V(x'/c^2)}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (5.7)$$

或

$$\begin{aligned} x_1 &= (x'_1 + \beta x'_4) \gamma(V), \quad x_2 = x'_2, \\ x_3 &= x'_3, \quad x_4 = (x'_4 + \beta x'_1) \lambda(V) \end{aligned} \quad (5.7a)$$

式中已令 $x=x_1, y=x_2, z=x_3, ct=x_4, \beta=V/c$ 以及 $\gamma(V)=(1-\beta^2)^{-1/2}$ 。后一种表述方式把空间坐标和时间坐标之间的对称性显示了出来。这些方程可以直接根据相对性原理以及光速不变性推导出来，但这里我们仅指出，这两个方程与相对性原理的一些预测结果是一致的。

例如，既然在系统 K 和 K' 中光速相同，那么可以预料，如果在 $t=t'=0$ 时，也即当坐标系原点重合时所发射出的一个光波，它在两个系统中都应当以球面传播。

问题 5.1 方程(5.5)描述了在坐标系 K 中球形波阵面的传播。试证：根据(5.7)式，描述 K' 中波阵面传播的相应方程为

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$$

因而这也是球面波。

相对性原理的另一个推论是，只要用 $-V$ 代替 V ，那么就可以容易地得到用 x, y, z 和 t 表达 x', y', z' 和 t' 的公式。

问题 5.2 实际求解方程(5.7)，求出 x', y', z' 及 t' ，以证明上述方法是正确的。

我们还要来考察一下，在任何参考系中观测到的光速是否总是等于 c 。只要我们来讨论一下，按照方程(5.7)速度是怎样变换的，那么上述问题自然就可以得到解答。我们将(5.7)式写成微分形式

$$\begin{aligned} dx &= (dx' + Vdt') \gamma(V), \quad dy = dy', \quad dz = dz', \\ dt &= (dt' + \frac{V}{c^2} dx') \gamma(V) \end{aligned} \quad (5.8)$$

式中
$$\gamma(V) \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

于是导数就可写为

$$\begin{aligned}
v_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + Vdt'}{dt' + \frac{V}{c^2}dx'} = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x \frac{V}{c^2}} \\
v_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{v'_y}{(1 + v'_x \frac{V}{c^2})\gamma(V)} \\
v_z &= \frac{dz}{dt} = \frac{v'_z}{(1 + v'_x \frac{V}{c^2})\gamma(V)}
\end{aligned} \quad (5.9)$$

由这些方程可以进行速度合成（相加）。如果 $v'_y=v'_z=0$ ，再记 $v'_x=v'$ ，那么方程(5.9)表明 $v_y=v_z=0$ 以及 $v_x=v$ 。这里

$$v = \frac{v' + V}{1 + \frac{v'V}{c^2}} \quad (5.10)$$

我们用下述方式解释这一方程：如果所有运动都是沿 x 轴方向的，那么在参考系 K' 中测得的速度值 v' ，在参考系 K 中将取 v 值。 v ， v' 和 V 之间关系由方程(5.10)给出，而 V 是 K' 系统相对 K 的速度（图 5.1）。

下面是令人感兴趣的三种情况

(a)如果 $v'=V=c$ ，那么代入后得 $v=c$ 。

(b)如果 $v'<c$ ， $V=c$ 或者 $v'=c$ ， $V<c$ ，那么仍有 $v=c$ 。这一结果仍然是把 v' ， V 值代入方程(5.10)得到的。这就表明，光速是不变的。在所有惯性参考系中光速值都是 c 。

(c)最后，如果 $v'<c$ 以及 $V<c$ ，那么 $v<c$ 。

问题 5.3 记 $v'=(1-\delta)c$ ， $V=(1-\Delta)c$ ，这里 $0<\delta, \Delta<1$ ，证明上面(c)的结果始终是正确的。

问题 5.4 如果光速为无穷大，就会得到伽利略相对论的结果。试给出与(5.7)到(5.9)式相当的变换公式，并由此确定速度合成的规则。所得表达式应该与牛顿理论一致。

表达式(5.10)是颇为有趣的，因为它还表明，如果粒子原来运动速度小于光速，那么它永远不可能加速到光速那么大。为了说明这一点，我们假定粒子初始时以速度 V 运动。现在给它一个附加的速度 v' ， v' 也小于 c 。根据上述情况(c)可知，合成速度总是小于 c 。我们可以不断给粒子加上小的速度增量，但没有用处，粒子的速度仍然小于光速。这正是高能宇宙线粒子的特征：它们以接近于光速的速度运动，经过加速，它们会运动得稍快一点，但永远不会比 c 快！

洛伦兹变换使两个事件间的间隔保持不变。但间隔不变的代价是事件之间的表现时间间隔和表现空间间隔变化了。表现时间间隔的变化是这样的：如果一个钟在 K 系统内 $x=0$ 的位置上静止不动，并且在 K 内的固有时为 t 的话，则 K' 系统内静止的观测者 O' 所测得的时间为

$$t' = (t - V \frac{x}{c^2})\gamma(V) \Big|_{x=0} = t\gamma(V) \quad (5.11)$$

事实上我们对绝对时间不感兴趣，而仅对时间间隔 $\Delta t=t_2-t_1$ 及 $\Delta t'=t'_2-t'_1$ 感兴趣。因此方程(5.11)就变为

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \equiv \Delta t \gamma(V) \quad (5.12)$$

在系统 K' 内测得的时间间隔应当比系统 K 内测得的值大些，即 $\Delta t' > \Delta t$ 。在观测者 $0'$ 看来，钟好象走慢了。我们就说这是在运动参考系内的时间膨胀。我们应该注意，并不一定要选择 $x=0$ 。 Δt 和 $\Delta t'$ 之间的关系与位置 x 的选择无关。

在问题(5.9)中我们将会看到，这个时间膨胀能使快速运动中的不稳定宇宙线粒子的衰变时间延长好几个量级！时间膨胀是这类粒子衰变的显著效应。

同样我们可以推导出两个同时观测到的事件之间空间间隔的变化。如果在系统 K 中静止的观测者 0 所测得的系统 K 中两个静止点的位置为 x_a 和 x_b ，连接这两个点的直线的固有长度是 $\Delta x = x_b - x_a$ 。而在 K' 中静止的观测者 $0'$ 在某一给定时刻 t' 也来测定这两个点的空间间隔，利用方程

$$x_a = (x'_a + Vt')\gamma(V), \quad x_b = (x'_b + Vt')\gamma(V) \quad (5.13)$$

因为 $0'$ 同时观测这两个点，所以在上面两个表达式中 t' 是相同的，于是得到从系统 K' 观测到的空间间隔为

$$\Delta x' = x'_b - x'_a = (x_b - x_a) \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = \frac{\Delta x}{\gamma(V)} \quad (5.14)$$

因为平方根项总小于 1，这就表明 $0'$ 测得的长度将比固有长度短。我们就称之为洛伦兹收缩 (Lo04)。

仅仅沿着运动方向，才会有洛伦兹收缩，而根据方程(5.7)，横向尺度 y 和 z 则保持不变。初看起来这结果可能会使我们以为：一个运动着的球会变扁，成为一个扁椭球，而立方体似乎也会变形，这种变形跟立方体相对于运动轴的取向有关。

从洛伦兹和爱因斯坦发现狭义相对论变换后半个或多个世纪以来都认为这种观点是对的。但在 1959 年特雷尔 (Terrell) 提出 (Te59)，球仍然应该是球形的，而立方体仍是立方的，等等。他提出，洛伦兹变换尽管会产生某种变形，但它主要是通过有效地将物体旋转而使物体的表观取向发生了改变。

为了知道这种情况是怎样发生的，我们假定有一个立方体，以速度 V 沿 x 方向运动。观测者从横向观测这个立方体的相对运动。

我们感兴趣的是棱边 1, 2 和 3 的表观长度。设与立方体相对静止的观测者所测得的每条棱边长度是 L ，令棱边 1 与运动方向和观测者方向垂直 (图 5.3)。

图 5.3 快速运动立方体的几条边

假定观测者同时观察 1, 4 两条棱边——正如他拍摄照片时所看到的那样——他不可能观测到从这两条棱同时发出的光子。从棱边 1 射到观测者的光线比从棱边 4 射来的光线，要早发出一段时间 L/c 。但在这个较早的时刻棱边 1 还在 $1'$ 的位置。因此照片所显示的是较远的棱边位置 $1'$ 和较近的棱边位置 4 所构成的立方体。而棱边 2 的投影长度就等于 $1'$ 和 4 之间的投影距离。或者说是加 Lv/c 。

上述因素在讨论棱边 4 的长度时不起作用，因为以后同时被观测到的是这条棱边的两个端点同时发射的光线。又因棱边 4 与运动方向垂直，因此洛伦兹变换并不改变其长度。此外，1 和 2 两条棱的长度也不因洛伦兹变换而改变。但棱 3 却缩短了一个因子 $\sqrt{1 - (V^2 / c^2)}$

(见方程(5.14))。

因而，照相所显示的 1, 2 和 3 三条棱的长度分别为 L , LV/c , 和 $L/\gamma(V)$ 。如果定义角 ϕ 为 $V/c = \sin \phi$ ，那么容易看出，这三条棱的表观长度就分别为 L , $L \sin \phi$ 和 $L \cos \phi$ 。这立方体看上去象是旋转了一个 ϕ 角！

虽然对于远距离的小立方体处于最接近观测者的地方时，上述论述是正确的，但如果在其运动轨线上还不到最接近观测者的地方观测同一个立方体，那么还是会看到额外的变形：当立方体向观测者靠近时，从最靠近观测者的棱边所射来的光线将比从立方体最远的棱边 4 射来的光线发射得晚。因而比较靠近观测者的一边看上去就不成比例地变长了。因此一般来说，立方体看上去既有变形又有旋转 (Ma72a) *。

5.4 四维矢量

现在我们再转而讨论随惯性系 K 和 K' 运动的两个观测者 O 和 O' 的世界图之间的关系。如图 5.2 那样，我们认为 K' 沿 K 的 x 轴正向以速度 V 运动。因而，原点的两个坐标分量始终是 $y=y'=0$ 以及 $z=z'=0$ 。

我们仍选择 K 和 K' 的原点在某个时间 $t=t'=0$ 时重合，这表明在这个时刻 $x=x'=0$ 。从观测者 O 看来， K' 的原点有如图 5.4 所示的世界线 t' 。这线经过原点，斜率为

$$\frac{cdt}{dx} = \frac{c}{V} \quad (5.15)$$

根据方程(5.7)中的第一式和最后一式，由于 $x'=0$ ，这个 t' 实际上就是 O' 的时间轴。如果在这两个方程中再令 $t'=0$ ，我们就看到，观测者 O 的世界图中 x' 轴的斜率必定是 $cdt/dx=V/c$ 。因此 ct 和 ct' 之间的夹角 ψ 就等于 x 和 x' 轴之间的夹角。

$$\psi = \tan^{-1} \frac{V}{c} \quad (5.16)$$

图 5.4 闵可夫斯基图，它表示了从一个惯性系内的观测者去看另一个运动惯性坐标系 K' 时的特征

对于不同的观测者 O 和 O' 说来，由确定的固有时所描述的空间是不相同的。在一个参考系内看来是同时发生的事件在另一个参考系中看起来就不再是同时的。这个概念在伽利略相对论中是没有的。伽利略相对论中光速是无穷大，而斜率 V/c 应当为零，于是 x 和 x' 轴以及 t 和 t' 轴必然重合。在这一图中，光锥把 K 和 K' 两个空间各等分为两个部分，这个图称为闵可夫斯基图 (Ro68) *。

对两个观测者来说，四维空间 K 和 K' 中的一个矢量，具有相同的长度。如果观测者 O 看到的是连接事件 $(0, 0, 0, 0)$ 和 (x_1, y_1, z_1, t_1) 的矢量，那么在 O' 看来这个矢量所连接的是 $(0, 0, 0, 0)$ 和 $(x'_1,$

y'_1, z'_1, t'_1) 两个点。但是, 因为我们总可以把运动方向选为 x 方向, 因此我们仍然可以设 $y=y'$ 及 $z=z'$, 于是两个矢量长度的平方就是

$$\begin{aligned} L^2 &= -\{x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2\} \\ &= -\{[(x'+Vt')^2 - (ct'+Vx'/c)^2]\gamma^2(V) + y'^2 + z'^2\} \\ &= -\{x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2\} \\ &= L'^2 \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$L = L' \quad (5.18)$$

因此从任何一个观测者来看, 矢量的长度是一样的。这种分量为 x, y, z 和 ct 的矢量称为四维矢量。在狭义相对论中, 四维矢量起着特别重要的作用。首先, 因为这理论是自然地建立在一个四维空间上的; 其次, 因为矢量的长度是坐标变换的不变量, 这表明任何一个观测者测得的同一四维矢量的大小是完全相同的。但是, 既然相对论假定, 物理定律在一切惯性系中是不变的, 因此在物理定律的公式化中, 长度的不变性具有特殊意义。

我们看到, 这里规定的长度 L 与方程(5.1)所定义的时间间隔 s 是相应的。因此间隔也是一个不变量。如果对观测者 O' 看来事件 1 和 2 是在同一

个地方发生的, 那么我们看到 $s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 > 0$ 。因为所经过的时间 t'_{12} 是实数, 因此间隔的平方 s_{12}^2 就是正的。式中 l_{12} 是 O 所在参考系中的空间间隔。我们还看到, 如果两事件之间的间隔是类时的, 那么一定存在有一个参考系, 在这个参考系中事件是在同一个地方发生的。而如果间隔是类空的, 我们同样可证明存在有一个参考系, 在这参考系中两个事件是同时发生的。

分量为 A_1, A_2, A_3 及 A_4 的四维矢量的一般变换形式是

$$\begin{aligned} A_1 &= [A'_1 + \beta A'_4] \gamma(V), \quad A_2 = A'_2, \quad A_3 = A'_3 \\ A_4 &= [A'_4 + \beta A'_1] \gamma(V) \end{aligned} \quad (5.19)$$

例如, 我们可以发现分量为 $(p_x, p_y, p_z, \varepsilon/c)$ 的四维动量的变换同四维矢量的变换是一样的。再如以电磁矢势及标势为分量的四维矢量 (A_x, A_y, A_z, ϕ) 也是这样变换的 (见 6.13 节)。还有许多这样类型的四维矢量, 它们都是有用的物理量。事实上根据狭义相对论, 一切有物理意义的量都必须按照四维观点进行改造。

5.5 光行差

下面我们想利用洛伦兹变换来考察一下角度的测量与观测者的相对运动有着怎样的关系。在这里我们发现, 角度测量或者说对角度的正弦和余弦值的测定, 根本不需要测量两个长度, 而是需要同时测定两个速度。之所以这样, 是因为遥远的观测者必须利用天体射来的光讯号进行角度测量, 而观测者看到的这些光线所张的角度是由速度合成法则确定的。

假定粒子的速度矢量位于 xy 平面内, 速度 v 在参考系 K 的 x 和 y 轴上的分量是 $v_x = v \cos \theta$ 以及 $v_y = v \sin \theta$ 。在 K' 中静止的观测者看来, 这

个速度分量是 $v'_y = v' \sin \theta'$ 以及 $v'_x = v' \cos \theta'$ 。根据速度变换方程可得

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v' \sin \theta'}{[v' \cos \theta' + V] \gamma(V)} \quad (5.20)$$

我们所讨论的是光线，于是 $v' = c = v$ ，因此光线所张的角度的变换式为

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta'}{[V/c + \cos \theta'] \gamma(V)} \quad (5.21)$$

因为仅仅对 v_x 及 v_y 时有

$$\sin \theta = \frac{\sin \theta'}{\gamma(V)[1 + \beta \cos \theta']}, \quad \cos \theta = \frac{\cos \theta' + \beta}{1 + \beta \cos \theta'} \quad (5.22)$$

当 $V \ll c$ ，因而 β^2 项可以忽略不计时，正弦方程变为

$$[\sin \theta + \beta \sin \theta \cos \theta'] = \sin \theta' \quad (5.23)$$

光行差角 $\Delta \theta = \theta' - \theta$ 就是

$$\Delta \theta \sim \beta \sin \theta' \quad (\text{当 } \Delta \theta \ll 1, \beta \ll 1 \text{ 时。}) \quad (5.24)$$

如图 5.5 所示，我们看到，因为光线是对着望远镜运动方向而运动， $\sin \theta'$ 就具有负值，也即 $\theta' < \theta$ 。这个光行差角在天文观测中具有重要的实际意义，因为如果在一年中不同的时刻测定恒星的位置（在天空上的方向），那么我们将会发现它有一个小小的周年运动。

图 5.5 光行差。一个望远镜（静止在某个参考系 K' 中）以速度 V 相对一颗恒星运动。星光进入望远镜时在位置 1。在光线穿过仪器长度的这段时间内，望远镜移动到位置 2。在整个这段时间中望远镜相对 x' 轴的方向角为 θ' 。但假若观测者的望远镜相对恒星的参考系 K 来说是不动的，那么它相对 x 轴的方向角就是 θ 。如若认为光速是有限的，那么在牛顿物理学中也有光行差，从效应的大小上已经可以看出这一点：光行差效应是 V/c 量级的，而纯相对论性的修正总是 V^2/c^2 量级，因此是比较小的。然而，为了得到光行差角的正确值，就需要对牛顿理论中的光行差进行相对论性修正

问题 5.5 地球绕日运动的轨道速度为 $30 \text{ 公里} \cdot \text{秒}^{-1}$ 左右，这表明地球的速度在六个月内要改变约 $60 \text{ 公里} \cdot \text{秒}^{-1}$ ，取 $V \sim 60 \text{ 公里} \cdot \text{秒}^{-1}$ ，试证明

$$\Delta \theta \sim \frac{60}{3 \times 10^5} \sim 40''$$

在精密的天文测量中，这样一个角度是很容易测出来的。

光行差首先是由詹姆斯·布拉得雷 (James Bradley) 在 1728 年发现的。这是地球绕太阳作周年运动的第一个证明，也是第一次明确地证明了哥白尼在大约还要早两个世纪的 1543 年所提出的假说是正确的。

5.6 动量、质量和能量

至今我们讲到的速度都是指三维速度。然而在相对论中的固有形式是四维矢量，因为正如 5.4 节所强调的那样，四维矢量的大小是不变的。我们用分量

$$u_1 = \frac{dx}{ds}, u_2 = \frac{dy}{ds}, u_3 = \frac{dz}{ds}, u_4 = c \frac{dt}{ds} \quad (5.25)$$

来定义一个四维速度。由于

$$ds = \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = \frac{cdt}{\gamma(v)} \quad (5.26)$$

于是方程(5.25)就变为

$$u_1 = \frac{dx}{dt} \frac{1}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v_x \gamma(v)}{c}$$

$$u_2 = v_y \gamma(v) / c \quad u_3 = v_z \gamma(v) / c \quad u_4 = \gamma(v) \quad (5.27)$$

或

$$u_i = [\lambda(v) dx_i / dt] c^{-1} \quad (5.28)$$

如果用 5.3 节引入的记号，我们就可以看到， u 是一个无量纲量，它不具有速度的单位：厘米·秒⁻¹。我们还可求得各 u 的大小的平方为：

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_4^2 = -1 \quad (5.29)$$

它具有不变量的性质，下面我们要用到它。

我们常常对粒子的动量感兴趣。动量可表为

$$p = m_0 v \lambda(v) \quad (5.30)$$

它包括三个分量，相应为

$$p_1 = m_0 c u_1, p_2 = m_0 c u_2, p_3 = m_0 c u_3 \quad (5.31)$$

m_0 是在静止时测得的粒子质量——静质量。因此，作为一个四维矢量，其前三个分量乃是动量，其第四个分量就是 $m_0 c u_4$ 。在相对论中，这四个分量通过下面方式与粒子的能量 ε 发生关系

$$p_4 = \frac{\varepsilon}{c} = m_0 c u_4 \quad (5.32)$$

整个相对论性动量四维矢量的分量就是

$$(p_x, p_y, p_z, \varepsilon / c) \quad (5.33)$$

显然，在 $v \ll c$ 的条件下，前三个分量就给出了经典动量 $p = m_0 v$ 。但是，能量采取了新的形式，明显写出来，能量方程就是

$$\varepsilon = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m_0 c^2 \gamma(v) \quad (5.34)$$

当速度为零时就简化为

$$\varepsilon = m_0 c^2 \quad (5.35)$$

这个表达式说明，质量和能量是等价的 (Ei05b) *。正是这种等价性才使得恒星能够发出辐射。因为最终造成恒星辐射的核反应，总是在能量以光子或中微子形式释放的同时，伴随着质量的损失。因为质能守恒，恒星在发出辐射的同时质量就变得越来越小。

如果速度不大，方程(5.34)可近似展开为

$$\varepsilon = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \cdots \quad (5.36)$$

上式第二项代表动能。下一个高阶项应当为 $m_0 v^4 / c^2$ 量级。在力学和化学

过程中 m_0 基本上保持不变, 在正常情况下我们看到的仅仅是 $mv^2/2$ 项的变化。因而尽管这一项比粒子质量所含的能量小得多, 在经典理论中却是十分重要的。

方程(5.34)表明, 当 $v \rightarrow c$ 时 $\varepsilon \rightarrow \infty$, 这就意味着一个粒子若要加速到光速就需要对它做无限大的功。因为在一切狭义相对论效应中, 上述结论在惯性系内才是正确的, 而在其他情况下就不见得一定成立, 所以, 这个结论与下列观测是不矛盾的。即遥远的星系以接近于光速的速度运动, 而且, 倘若它们相对于银河系运动的速度大于光速, 某一些星系还可能穿过宇宙地平线。由于相对这些遥远星系静止的参考系相对于银河系在作加速运动, 因此在这种情况下狭义相对论并不成立。因而, 除非使用广义相对论等更普遍的理论, 否则就不能对速度极限作出一般的规定。

还应该指出两个重要的关系。第一, 方程(5.30)和(5.34)表明

$$p = \frac{\varepsilon}{c^2} v \quad (5.37)$$

第二, 若把四维矢量的分量写成如下形式

$$p_i = m_0 c u_i \quad (5.38)$$

那么我们得到四动量矢量长度的平方为

$$-(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - p_4^2) = -p^2 + \frac{\varepsilon^2}{c^2} = m_0^2 c^2 \quad (5.39)$$

它也是不变量。方程(5.39)还可写为

$$\varepsilon^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \quad (5.40)$$

既然光子的静质量为零, 速度为 c , 式(5.37)和(5.40)就变为

$$p = \frac{\varepsilon}{c} \quad (5.41)$$

宇宙线粒子能量可高达 $\sim 10^{20}$ 电子伏特, 因此在宇宙线物理中关系式(5.37)和(5.40)具有特别重要的意义。这么大能量的一个质子, 其静质量能仅为 931 百万电子伏特, 因此宇宙线粒子的总能量将是静质量能的 $\sim 10^{11}$ 倍。正是由于这一性质, 一个原宇宙线粒子入射到地球上层大气后经过碰撞就会产生数以百万计的粒子簇射, 它们的总静质量超过原始质子静质量的好几个数量级。虽则经典的质量守恒概念在这儿不再成立了, 但是更广泛的质能守恒原理却容许这类过程发生!

5.7 多普勒效应

既然能量是四维矢量 $(p, \varepsilon/c)$ 的第四个分量, 那么, 当相对运动方向沿 x 轴时, 其变换形式就是 (见式(5.19)和(5.33))

$$\varepsilon = \gamma(V)[\varepsilon' + V p'_x] \quad (5.42)$$

我们来看光子的能量变换形式。若光线相对 x' 轴的方向角为 θ' , 那么(5.42)就成为

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon' + (\varepsilon' V / c) \cos \theta'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \varepsilon' [1 + \beta \cos \theta'] \gamma(V) \quad (5.43)$$

θ' 如图 5.5 所示。但我们必须记得, 光子运动的方向是与观测者的视

线方向相反的。从量子力学可知，能量 ϵ 等于辐射频率 ν 乘上普朗克常数 h ，普朗克常数是一个普适常量。把这个关系用到方程(5.43)中得到

$$\nu = \nu' (1 + \beta \cos \theta') \gamma(V) \quad (5.44)$$

上式就给出了运动光源所发出的辐射的多普勒频移。与经典情况相反，我们看到，即使光源的运动是完全横向的 ($\cos \theta = 0$, $\cos \theta' = \pm V/c$) 也会有红移。它相当于时间膨胀，也就是频率减小了。当光源的辐射方向与运动方向相反，即 $\beta \cos \theta' < 0$ 时， $\nu < \nu' \gamma(V)$ ；而当辐射方向向前时， $\nu > \nu'$ 。

在许多类星射电源中我们常常观测到经过红移后的频率

图 5.6 多普勒效应。探测器以速度 V 相对于光源运动。辐射频率的测定从时刻 t'_1 开始，结束于时刻 t'_2 。在这段时间内探测器离光源后退了，从位置 x'_1 移到 x'_2 。所以，在 t'_2 应该到达 x'_1 的波并没有被计测到，在 x'_1 到 x'_2 之间的全部光波在 t'_2 时刻也没能计测到。因此探测器感受到的是一个较低的频率 ν' 。上述解释基本上只给出了经典情况下也存在的与 V/c 成正比的一阶多普勒效应。而如方程

(5.44)所示，正确的相对论性表达式还应包含额外的因子 $(\sqrt{1 - v^2/c^2})^{-1}$ 为 ν_0 的一些发射线，同时又有一组对应于同一跃迁的吸收线，它们的频率为 $\nu_0 + \Delta_1$, $\nu_0 + \Delta_2$, $\dots$ ，都比 ν_0 高。这里 Δ 是相应于每秒几百到一千公里的频移。它们极其可能是沿视线方向上以不同速度运动着的冷云的吸收线，其中某些冷云可能还是从类星体中喷射出来的。

在银河系内，恒星速度的视向分量一般就是由光谱中所观测到的多普勒频移来确定的。类星体有很大的频移，有人认为这种频移的成因是由于我们银河系的爆炸而把这些天体向外抛去，但大部分天文学家则认为类星体红移主要是远距离星系的宇宙红移。总之，它们可能完全是一种多普勒位移现象，也可能还有其他方面的原因。

5.8 微粒的坡印廷？罗伯逊阻力

考虑一个在行星系空间绕太阳作轨道运行的尘埃微粒。它吸收太阳光并以各向同性方式把这个能量再发射出来。我们可以从两种不同的观点来考察这个两步过程。

(a)从太阳来看，粒子吸收了太阳从径向射来的光线，并在其自身的静止参考系中以各向同性方式重新辐射出去。这种再发射的光子所带走的角动量正比于下面几个量值：(i)光子的等效质量 $h\nu/c^2$ ，(ii)微粒的速度 $R\dot{\theta}$ ，以及(iii)微粒离太阳的距离 R 。光子的能量被微粒吸收并再发射，或者在粒子的静止参考系内被微粒各向同性地散射；如果我们仅考虑 V/c 的线性项而忽略全部高次项，那么当微粒受到每一个光子这样作用后轨道角动量 L 的损失率就是

$$dL = \frac{h\nu}{c^2} \dot{\theta} R^2 \quad (5.45)$$

$$\frac{1}{L} dL = \frac{h\nu}{mc^2} \quad (5.46)$$

其中 m 是粒子质量。

(b)从微粒来看，太阳发出的辐射不是与运动方向成 $\theta = 270^\circ$ 角，而是以受到光行差影响后的 θ' 方向射到粒子上的（见方程(5.22)）。

$$\cos \theta = \frac{\cos \theta' + \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c} \cos \theta'} = 0 \quad \cos \theta' = -\frac{V}{c} \quad (5.47)$$

这里 V 就是 $\dot{R}$ ，即微粒的轨道速度。由此可知光子给予微粒的角动量为 $pR \cos \theta' = (h\nu/c^2) R^2 \dot{\theta}$ 。

对截面为 σ_g 的粒子就有

$$\frac{dL}{dt} = -\frac{L_\odot}{4\pi R^2} \frac{\sigma_g}{mc^2} L \quad (5.48)$$

式中 $L_\odot$ 是太阳的光度。

由上可知，无论从哪一个观点来看，微粒在吸收光线后其速度都是减慢了。从第一种观点看，是因为微粒增加了质量，而在再发射中又失去了这个质量。从第二种观点看，是因为动量的转移。

问题 5.6 微粒的 $m \sim 10^{-11}$ 克， $\sigma_g \sim 10^{-8}$ 厘米²，在一个天文单位处绕太阳作圆轨道运动。假定在以后所有时间内轨道都近似为圆形，试计算它掉进太阳，即到达太阳表面所需的时间。

问题 5.7 假定太阳光度的 10^8 分之一被环绕太阳的微粒所吸收或各向同性散射掉，试问每秒钟内落进太阳的这类微粒的总质量是多少？

5.9 在宇宙微波背景辐射场中的运动

我们可以推导出在运动天体参考系中作各向同性发射的光线的表观角分布。设天体在 K' 系统中是静止的。于是对一切方向 θ' ，强度 $I(\theta')$ 取相同的值 I' （图 5.7）。单位时间内辐射到立体角环 $2\pi \sin \theta' d\theta'$ 内的能量是 $2\pi I' \sin \theta' d\theta'$ 。

图 5.7 在球面极坐标中所观察到的辐射分布

在参考系 K 中，强度分布是 $I(\theta)$ ，现在我们要找出 $I(\theta)$ 和 I' 之间的关系。我们知道，接收到的总能量与观测时间、强度 $I(\theta)$ 和立体角 Ω 三者成正比：

$$\varepsilon \propto \Delta t \cdot I(\theta) \cdot \Omega \quad (5.49)$$

但 ε 和 Δt 两者都按四维矢量的第四个分量那样变换，因此它们的比值是不变量。于是 $I(\theta) \cdot \Omega$ 也必定是不变量。这是非常重要的！它意味着所观测到的一个源的总辐射功率，在任何惯性系内的观测者看来都是一样的。在 6.19 节中我们将利用这个事实去计算绕磁场旋转的相对论性电子所发射的总功率。于是从方程(5.22)我们可得

$$\frac{I(\theta)}{I'} = \frac{\sin \theta' d\theta'}{\sin \theta d\theta} = [(1 + \beta \cos \theta') \gamma(V)]^2 \quad (5.50)$$

这就是(5.44)式多普勒位移的平方。

由此我们看到，一个快速运动的各向同性辐射体，看起来其辐射大部分都是朝前进方向（ $\beta \cos \theta' \sim 1$ ）发射的，而只有一小部分能量向后方（ $\beta \cos \theta' \sim -1$ ）辐射。

现时的观测表明，整个宇宙存在着一个各向同性的微波辐射场。有

趣的是，由于这种辐射场的存在，应该使我们能在局部性测量的基础上去确立一个绝对静止参考系。这个绝对静止参考系完全不会破坏狭义相对论的正确性，因为如前所述，狭义相对论对不同的惯性系之间是不加区分的。绝对静止参考系的建立将更强调这样一个事实，即狭义相对论实际上仅适用于处理小尺度的现象，而大尺度的现象则可使我们去确定一个更好的参考系，在这个参考系中，宇宙过程看起来就是各向同性的。

在各向同性宇宙（在 10.5 节中我们将要讨论这样的宇宙模型）中每个地方都必定存在有一个参考系，从这个参考系看来，宇宙在各个方向上都是相同的。当然这种各向同性只要求在邻近星系成群的尺度以外的大尺度内满足。在任何观测者近旁，在星系团尺度上总是各向异性的。微波辐射场的有趣特性就是它使我们能够测定地球相对任何这样一个坐标系的运动速度，在该坐标系中宇宙辐射流是各向同性的。预期地球相对这种坐标系的运动速度大约为 $300 \text{ 公里} \cdot \text{秒}^{-1}$ 的数量级。因为太阳绕银心的运动速度约是 $250 \text{ 公里} \cdot \text{秒}^{-1}$ 的数量级，此外我们知道，星系相互之间的表观随机速度为 $100 \text{ 公里} \cdot \text{秒}^{-1}$ 的数量级，这两个速度的矢量和可达 $300 \text{ 公里} \cdot \text{秒}^{-1}$ 的数量级。

根据相对性原理，一个物体若在一个惯性系中是热平衡的，那么在任何其他惯性系中也应当是热平衡的。因此一个辐射黑体在一切惯性系中将都呈现黑色。如果宇宙辐射流的各向同性微波分量有一个黑体谱 (4.71) (Pe65)*：

$$I(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \left[\frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \right] \quad (5.51)$$

那么由于多普勒位移，就会使地球运动方向上所观测到的辐射频率变高。这个效应会使方程 (5.51) 中的因子 ν^3 系统地变大，但不改变括号中表达式给出的光谱曲线形状。由于这时比值 ν/T 保持不变，因此观测者看到的仍是黑体谱，但相应的黑体温度提高了，温度的增量同多普勒频率位移的增量相同。

如果观测者相对宇宙辐射场有相对运动，那么他在运动前进方向上所观测到的黑体辐射流的温度要比相反方向上的温度来得高。事实上所观测到的辐射流温度是方向角的函数，运动方向相反时其值极小，以后慢慢增加，直到与运动方向一致时取极大值。在相对运动方向的每一个角度上，观测者所看到的都是一种黑体谱，然而黑体的温度是与角度有关的，其关系如方程 (5.44) 所示。

前向和后向黑体辐射流之间的差别在接近谱的峰值处最为明显。对目前所认为的 3K 宇宙背景温度来说，与这个谱峰频率相应的波长在亚毫米波段。

康克林 (Conklin) (Co69) 在射频 8000 兆赫处观测了这种背景辐射。由于仪器限制，他只能观测到赤纬 $\delta \sim 32^\circ$ 的天区，他发现在时角 $\alpha = 13^h$ 时讯号最大。在这一方向上的地球速度分量看来是 $160 \text{ 公里} \cdot \text{秒}^{-1}$ 。

问题 5.8 对极端相对论性的宇宙线粒子来说，洛伦兹收缩是一项重要的效应。例如对能量为 10^{20} 电子伏特的质子，银盘看起来是显得很薄。在相对银河系处于静止状态的观测者所在的参考系来说银盘宽度约为 100 秒差距，试证明对于随着宇宙线质子运动的观测者说来，这个宽度只有 $\sim 3 \times 10^9$ 厘米，也即仅仅与地球的周长相近。

问题 5.9 对宇宙线能量来说,时间膨胀因素同样是重要的。假定中子的能量与我们已观测到的质子能量 10^{20} 电子伏特相近,试考虑这种中子的衰变时间。试问这种中子在发生 β 衰变之前能穿越银河系的距离有多远?在中子的静止参考系中这个衰变时间大约是 10^3 秒,但在相对银河系静止的参考系中的观测者看来,这个时间要长得多。试证明这个中子足以穿过整个银河系。

问题 5.10 如果高能宇宙 γ 射线的能量足够大,它就能与低能光子碰撞并产生电子-正电子对。根据对称性考虑,这个电子-正电子对的运动速度必须等于这两个光子动量中心的运动速度。粒子对形成的能量大约是 1 百万电子伏特,而 3K 宇宙背景光子的典型能量约为 10^{-3} 电子伏特。试问能与背景光子碰撞并产生电子-正电子对的 γ 光子的最低能量应是多少?再证明在产生电子-正电子对的静止参考系中,由能量守恒可得出

$$\frac{h\nu_1(1-\frac{v}{c})}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{h\nu_2(1+\frac{v}{c})}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 2m_0c^2 \quad (5.52)$$

而动量守恒则要求上式左面的两项相等。由这两个要求给出:

$$(h\nu_1)(h\nu_2) = (m_0c^2)^2$$

$$h\nu_1 \sim \frac{1}{4} \times 10^{15} \text{ 电子伏特} \quad (5.53)$$

有趣的是这一过程的截面是如此之大,以致如果 γ 射线能量超过 $h\nu_1$, 而其原始位置又在一万秒差距以外,即在银心以远的地方,那么这种 γ 射线就不可能到达地球!

5.10 高能粒子

宇宙线是运动在宇宙空间中的一些能量极高的光子、原子核或亚原子粒子。这种粒子或光子有时会闯入地球大气或与寻常的星际原子碰撞。这种相互作用会发生什么结果呢?

因为我们在实验室中仅能把粒子加速到大约 3×10^{11} 电子伏特的能量,因此我们还无法得到能量高达 10^{20} 电子伏特的粒子的实验数据。可是根据相对性原理,就使我们能够洞察这种相互作用的某些方面。例如,我们可以问, 10^{20} 电子伏特的质子将与星际或星系际的低能光子怎样发生相互作用,这类 3K 黑体光子的频率是 $\nu \sim 3 \times 10^{11}$ 赫。

从质子的角度来看,这些毫米波长的光子就象是一些高能 γ 射线。这是因为质子的静质量能仅有 9.31×10^8 电子伏特,因而质子的 $\gamma(\nu)$ 必须高达 $\sim 10^{11}$; 根据同样原因,从质子看来,光子多普勒位移的因子约 10^{11} ((5.34)及(5.44))。在宇宙线质子的静止参考系中看来,光子的频率是 $\sim 3 \times 10^{22}$ 赫。这就相当于能量约为 100 百万电子伏特的 γ 光子。因此,质子就象受到 100 百万电子伏特的光子轰击一样。

这样一来问题就大大地简化了。100 百万电子伏特的光子是可以在实验室中产生的。事实上我们发现,在这个能量上的光子-质子碰撞的主要效应是通过下列反应产生 π 介子:



$$p + \gamma \rightarrow n + \pi^+ \quad (5.55)$$

在第一个反应中，质子—光子(p, γ)碰撞后产生一个中性 π 介子 π^0 和一个能量改变了的质子，第二个反应中产生一个中子和一个带正电荷的 π 介子。

这些反应的截面是可以在实验室中加以测定的，所得结果可直接用来解决我们原来提出的问题。结果发现截面非常大，以致即使星系外的光子仅仅只有 3K 微波光子流那么多，最高能量的宇宙线质子恐怕也不能在星系际空间穿过大于 20 百万秒差距的距离 (Gr66, St68)。

因为人们曾经认为类星体是高能宇宙线质子的最可能来源，而类星体又比 20 百万秒差距远得多，因此上面算得的结果在一段时间内就成了一个令人怀疑的不解之谜。可是由于提出了脉冲星有可能产生足够大能量的质子 (Gu69)，就部分地克服了上述的困难，因为这样一来，宇宙线质子可以认为是较为局部的现象了。

在其他许多涉及宇宙线粒子的问题中类似的相对论性讨论也是很有用的。在第六章中我们要讨论涉及到光子和电子碰撞的康普顿 (Compton) 效应和逆康普顿效应，我们还将考虑其他几种相对论性效应。如果我们能够选择合适的惯性参考系去观察问题，那么就往往可以大大简化一个物理问题。相对论原理就告诉我们应该怎样做，同时能使我们对种种物理过程的对称性取得许多新的理解。

5.11 高能碰撞

考虑一个低能粒子与一个原来处于静止状态的同类粒子发生弹性碰撞的情况。假如我们从静止粒子的参考系来观察这种相互作用，并假定两个粒子的质量均为 m ，那么质心将如图 5.8 所示以速度 $v/2$ 运动。由于运动粒子的原始速度为 v ，根据动量守恒，两个粒子相对于质心的运动速度在碰撞后仍与碰撞前一样，即是 $v/2$ ，在碰撞后任意时刻均可以通过两个粒子的位置 1 和 2，以及碰撞点 I 作一个圆，1 和 2 的连线是圆的直径。这就意味着，两个质点对碰撞点所张的角度总是直角。

图 5.8 同类粒子弹性碰撞示意图

到目前为止的讨论还都是非相对论性的。在相对论性情况中，质心仍在 1, 2 的连线上。实际上粒子 1 和 2 是从质心沿相反方向散射出去的。可是从静止参考系看来，它们主要是向前散射的。这正是我们所看到的情况：一个快速运动的光源在其本身所在的静止参考系中是各向同性发射出辐射的，而我们看上去却觉得其辐射集中在朝前的方向上 (见方程 (5.50))。

当宇宙线质子与自由运动的星际原子的核或与作为星际微粒组成部分的某个原子碰撞时，就可能把原子核中的一部分剥裂出来。这些剥裂物可以是质子或中子，也可以是如 He^3 核那样的较重的碎片。这些撞击出来的粒子主要是沿靠近原来质子运动方向向前抛出的。

同样，当原宇宙线粒子在空间经过长途跋涉而到达地球上层大气后，它将与大气中的原子核碰撞而产生高能的次级碎片、介子、重子以及它们的衰变物。这些东西又衰变为介子、 γ 射线、电子、正电子对或中微子，或者它们可以再与其他原子碰撞，直到最后形成一阵粒子簇射

雨降落下来。这样一种宇宙线空气簇射包括电子、 γ 射线、分子和其他粒子。即使原始粒子的高度达到 10 公里或更高，当这些空气簇射到达地面时，它们仍局限在一片直径不大于几百公尺的范围内，这种前向的集中性是如此强烈，以致尽管簇射中有时多达 10^9 个粒子，它们仍能局限在一定的范围之内！

正因为簇射局限在很小的范围之内，因此我们只需抽样测定射到面积相当小的若干探测器上的能量，就可以推得原始粒子开始时所携带的总能量。事实上我们关于高能宇宙线的许多知识正是利用宇宙线簇射探测器阵所做的这类研究中得到的。尽管麻省理工学院小组用了 3.6 公里那样大的探测器阵，但通常这种探测器阵的抽样面积的直径并不大于几百米。从这些抽样结果中可以确定簇射的总能量，而根据每个探测器上簇射到达的时间，就可定出原始粒子射来的方向 (Ro64a)。图 5.9 示明了宇宙线空气簇射的一些成分。

图 5.9 宇宙线空气簇射的成分。这里画出的原始粒子是质子，它与大气原子核碰撞后产生许多次级粒子，后者又会经受核碰撞、衰变、粒子对的产生或韧致辐射；所谓韧致辐射是带电粒子发射一个 γ 光子后减速的过程。有一系列这类的事件发生。当簇射到达地面时，我们所观测到的大部分带电粒子是电子、正电子和 μ 介子。尽管原始核中的大部分是质子，但仍还有百分之几的 α 粒子（氦核）和约为百分之一的重核。电子和正电子也可能是原始粒子。空气簇射是能量转化为静质量的一个重要例子。有时，一个原始粒子的能量足以产生 10^9 个簇射粒子

5.12 超光速粒子

当爱因斯坦首次发现狭义相对论概念时，他明确指出物体运动速度不可能大于光速。他认为静质量和能量之间的关系(5.35)式已经说明，为了把物体加速到光速就需要无限大的能量，因此如果粒子静质量不是零，粒子就不可能达到光速，当然更谈不上超过光速。

近年来，许多研究工作者却又重新提出了这个问题。他们认为连续的加速确实是无法达到光速的，但单凭这一点还不能排除超光速物质的存在，这是通过其他手段产生出来的。他们把以大于光速 c 的速度运动的粒子称为快子，并研究了这类实体可能具有的性质。

主张应该对超光速粒子存在的可能性进行研究的基本论点是：对于速度大于和小于光速的两种情况，洛伦兹变换在形式上是相似的，此外交换本身并未排除快子存在的可能性。

当然变换的相似性并不意味着粒子和超光速粒子的表观性质完全一样。如果我们看一下方程(5.34)，我们就发现当粒子运动的速度 $V > c$ 时分母中的量就是虚数。因此如果超光速粒子的质量是实数，那么其能量就应当是虚数。实际上，人们把超光速粒子的质量取为虚数，其主要的依据就是观测上不能排除这样的选择。也许这是一种消极的途径，但如果我们不作这种假设，我们就更难取得进展，即更没有办法对实验可能取得的结果作出某些预言。

把质量选为虚数后就能使能量 ϵ 变为实数，同时如式(5.37)所示，动量也是实数。

现在把方程(5.34)和(5.40)结合起来，我们得到

$$\varepsilon^2 = m_0^2 c^4 \gamma^2(V) = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \quad (5.56)$$

当 V 变大时，看来 ε 就会变小。在速度趋于无穷大的极限情况下能量变为零。但此时动量仍为有限值，并不断地朝 $|m_0 c|$ 这个值逼近。

至此，我们不过是在把质量取为虚数这一点上脱离了正统观念。

但是，现在我们来了解一下在前几年内引起概念上相当大困难的一个论述。这个论述所考虑的是：如果快子可以作为信息的载体，事情发生的顺序将会怎样。考虑两个观测者 O 和 O' 的世界线，如图 5.10 所示。令 O 向 O' 发射出第一个快子。在世界图上这轨线的斜率比光子斜率小。快子进入了图 5.1

图 5.10 说明快子传递情况的世界图

所示的“绝对不可到达”区域。

从 O' 的原点来看，快子 1 是从 x' 轴的上面到来的，它明显地是随着时间后退的。这当然是糟透了，但我们不妨再看下去。 O' 也能发送出快子，原则上讲，他向 O 发射的快子可以比快子 1 运动得更快。

现在我们可以提出下面的佯谬 (Th69)：观测者 O 等待了很长时间，但根本没有看到任何事件发生。于是他在时刻 A 发出了一个超光速粒子 1。事先规定当 O' 接收到从 O 来的快子后要马上再发出一个高速快子。于是现在 O' 观测者这样做了，他发出了快子 2，因为时间是后退的，于是就在观测者 O 认为没有事件发生的那段时间内的时刻 B ，快子 2 却到达观测者 O 了。这样一来原因和后果就完全混乱了！即使认为吸收了一个沿着逆时间方向运动的快子与发射一个顺时间方向的快子完全等价，上述情况仍然得不到多少改善。

那么我们是不是应该从根本上抛弃快子呢？这种极端的做法并不必要，因为我们这里所引用的因果论点受到了传统狭义相对论过分的影响，荒唐的结论也许是因为限制过严而产生的。例如在论述中所用到的同时性概念同信息传布不能大于光速的观念有关。在 5.4 节我们看到，如果信息传递的速度大于光速 c ，那么闵可夫斯基图的结果就会完全改观：图 5.4 中的 ψ 角就会变小，而在光速无穷大的极限时，即在伽利略极限时，我们得到 $\psi=0$ 。于是我们应当看到，对快子来说 ψ 角预期会比狭义相对论时要小。即在图 5.10 中 ct' 和 x' 轴之间的夹角将趋于直角。这样一来，上述的因果佯谬就不存在了，因为随着快子的轨迹和 x' 轴之间夹角的增加，就不可能再把信号传送到另一观测者的过去时间中去了。当然这类论述仍没有解决快子的存在与否的问题。如在第十章和第十一章将要看到的那样，快子的存在将会对宇宙学以及银河系内或河外宇宙空间的远距离快速通讯方面产生重要的结果。

人们已经为探索快子进行了初步的实验 (Al68)。但是至今还没有探测到，不过，或许将来有一天会发现它们。

5.13 强引力场

前面早已讲过，要引入引力场，就需要有一种比狭义相对论更为普遍的理论。因为狭义相对论仅限于惯性系。要研究包括引力在内的更为普遍的问题，就必须应用广义相对论 (Ei16) 或类似的引力理论 (Di67)，

然而只要我们记得，在引力场可认为是局部均匀的小尺度范围内，自由落体参考系也包括在惯性参考系内，那么即使不用这一类理论也能得到某些简单的引力结果。我们将考虑在中心对称引力势 Φ 中的两个这样的局部惯性系。

如图 5.11 所示，设观测者 $0'$ 离开中心质量的距离是 r ，我们要知道线元 ds^2 在这参考系中会取什么样的形式。我们假定观测者原来是静止的，他仅仅是刚刚开始向质量中心自由下落。因此他的速度实质上还是零，但他已开始向中心

图 5.11 靠近质量 M 的自由下落观测者

加速了。换一种讲法，我们也可以假设 $0'$ 原来是背离恒星朝外运动，但是他的速度小于逃逸速度，其动能只能使他到达离中心 r 的地方。于是在 r 的地方他的速度就变为零，并且刚刚开始他的返回中心的行程。我们正好是在他的速度为零时观测他的。

因为 $0'$ 是自由下落，在他自身看来他的线元具有方程 (5.3) 的形式，在球面极坐标中这个线元是

$$ds^2 = c^2 dt'^2 - r'^2 (\sin^2 \theta' d\phi'^2 + d\theta'^2) - dr'^2 \quad (5.57)$$

可是我们要问，如果观测者 0 离开质量分布足够远，以致 Φ 实质上为零或者是小得可以忽略时， 0 所看到的 ds^2 应有怎样的形式。这里用到的 Φ 就是式 (3.54) 中 V 的负值。

我们当然可以假定 0 是通过光讯号得到关于 $0'$ 系统的所有信息的。但是并不是非这样不可的，因为 0 和 $0'$ 之间的物理关系与观测信息的传递方式毫无关系。

因此我们设想 0 进行了一次自我追踪旅行。我们可以假定 0 原来离中心质量分布很近，此时，他开始离质量中心往外运动。而且我们假定他的运动不耗费动力的，即沿着径向自由地外抛，其能量正好够使他跑到无穷远的地方。

0 走到径向距离 r 时与 $0'$ 靠拢了，就在这个时刻， $0'$ 正好处于零速度并开始他的下落运动。既然两个观测者都在惯性系中，当然就可以用洛伦兹变换来确定，从 0 看来 $0'$ 的线元究竟应有怎样的形式。注意与相对运动方向相垂直的分量仍然是不变的，因此有

$$r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) = r'^2 (d\theta'^2 + \sin^2 \theta' d\phi'^2) \quad (5.58)$$

可是因为有相对运动，径向分量看来就会有变化。如果引力势很弱，那么根据下列事实立即就可得到 0 相对 $0'$ 的速度： 0 的动能仅仅够使他跑到无穷远，因而，动能就等于势能。对于单位质量就有

$$\frac{1}{2} V^2 = \Phi \quad (5.59)$$

因此现在方程 (5.12) 和 (5.14) 应当变成为

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - (2\Phi/c^2)}} \quad \Delta x = \Delta x' \sqrt{1 - (2\Phi/c^2)} \quad (5.60)$$

其实当势 Φ 很强时上述关系也是对的，不过这时经典动能概念就不再具有明确的意义。因此，我们可以把 0 所看到的线元 (5.57) 写为如下形式：

$$ds^2 = (c^2 - 2\Phi)dt^2 - r^2(\sin^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2) - \frac{dr^2}{1 - (2\Phi/c^2)} \quad (5.61)$$

此式表示了观测者 0 的坐标系中所看到的 0' 系内的长度和钟速的变化。观测者 0 把这些结果记下来，在他到达无穷远时，他就可以把这些印象传送出去。在整个这段时间内他都在惯性系内运动，因此他的结果是无可怀疑的。

(5.61) 式所描绘的线元，或说度规，常称为史瓦西 (Schwarzschild) 线元。如果势 Φ 是由质量 M 所产生，则我们还可将 (5.61) 式改写为

$$ds^2 = \left(c^2 - \frac{2MG}{r}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{2MG}{rc^2}\right)^{-1}dr^2 - r^2(\sin^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2) \quad (5.62)$$

我们看到在位于史瓦西半径

$$r_s = \frac{2MG}{c^2} \quad (5.63)$$

的地方必定会发生某种奇怪的事情。

根据 (5.60) 式在这里的钟看上去将会走得无限地慢。在某个时刻 t_0 发出的信号除非经过无限长的时间，否则不会到达这个半径以远的地方。事实上，在 $r < r_s$ 的地方发出的讯号永远跑不出 r_s 以外去。因此完全包围在 r_s 以内的一个大质量天体是不可能将其辐射发射到宇宙的其余地方去的，它就成了一个见不到的天体。这种天体称为黑洞。只能通过这些天体的引力场和电磁场才能探测到它们，而不可能通过它们所发出的辐射来发现它们 (Ru71a)。一颗恒星可以有一颗黑洞伴星绕着它作轨道运动。

对普通恒星那么大的质量来说，从中子星阶段坍缩后其 $r_s \sim 3 \times 10^5$ 厘米。这数值比中子星本身的半径小得不很多。对星系那么大的质量来说，相应的 $r_s \sim 10^{16}$ 厘米。这半径比所想象中的类星体的半径要小些——如果类星体是在宇宙学距离那么远的话。

后面我们还要再提到黑洞。然而现在还有两件事值得讨论。

第一，在银河系内，黑洞在数量上是不可能占优势的。因为根据目视和射电观测，我们可以粗略地认为银河系约 60% 的质量是普通恒星和星际物质。只有约 40% 的质量看来还没观测到，而其中可能还包括了不发光的的天体，如冷星、星际分子氢等。可是我们也不能排除，约有三分之一的银河系质量可能是以黑洞形式存在的。

第二，宇宙空间的旅行者必须十分小心。一旦他们进入了黑洞，他们将永远无法返回。这类天体的内部就象一个独立的宇宙一样，与我们是永世隔绝的！

问题选答

5.3 根据 (5.10)

$$v = \frac{c(2 - \delta - \Delta)}{(2 - \delta - \Delta + \Delta\delta)} < c_0$$

对于反向速度我们得到如下形式的表达式

$$-c < v = \frac{(\Delta - \delta)c}{\delta + \Delta - \delta\Delta} = \frac{(\Delta^2 - \delta^2)c}{\Delta^2 + \delta^2 + \delta\Delta(2 - \delta + \Delta)} < c_0$$

5.4 $x=x'+Vt'$, $y=y'$, $z=z'$, $t=t'$, 此外只因 $dx=dx'+Vdt'$, $dt=dt'$ 。
因此 $v_x=v'_x+V$, $v_y=v'_y$ 以及 $v_z=v'_z$ 。

$$5.6 \quad \frac{dL}{dt} = -\frac{L}{R^2} \cdot \left(\frac{L_\odot}{4\pi}\right) \cdot \frac{\sigma_g}{(mc^2)},$$

因为 $L=mvR$ 以及 $v^2/R=GM_\odot/R^2$,

$$\frac{dL}{L} = \frac{dR}{2R}。$$

$$\text{所以 } t = \int_{R_0}^1 \text{天文单位 } R dR \left\{ \frac{2\pi}{L_\odot} \cdot \frac{mc^2}{\sigma_g} \right\} = 5 \times 10^3 \text{ 年。}$$

5.7 根据问题(5.6), 对每一个微粒 i 有

$$m_i c^2 = t_i \frac{\sigma_g}{\pi(R_1^2 - R_\odot^2)} L_\odot$$

式中 R_1 是微粒的原始位置。

对一切微粒 $M_{\text{总}} c^2 \approx t_{\text{总}} \cdot (10^{-8} L_\odot)$ 。

$$\therefore \text{每秒钟落进太阳的质量是 } \frac{(10^{-8})(4 \times 10^{33} \text{ 尔格} \cdot \text{秒}^{-1})}{9 \times 10^{20} \text{ 厘米}^2 \cdot \text{秒}^{-2}}$$

$$= 4.5 \times 10^4 \text{ 克。}$$

5.8 $\varepsilon = \gamma(V) m_0 c^2$; 因为 $\varepsilon = 10^{20}$ 电子伏特, 所以

$$\gamma(V) = 10^{11} \text{ 以及 } \Delta x' = \Delta x / \gamma(V) = 3 \times 10^{20} / 10^{11} \sim 3 \times 10^9 \text{ 厘米。}$$

5.9 $\Delta t' = \gamma(V) \Delta t \sim 10^{14}$ 秒。当 $v \sim c$ 时, 运动的距离为 3×10^{24} 厘米=1 百万秒差距。

第六章 空间电磁过程

6.1 库仑定律及电介质位移

在前几章中我们已经看到，带电粒子间相互吸引的库仑定律与质量间相互吸引的牛顿定律有相似点。两者都出现服从平方反比律的作用力。库仑定律指出，两个带电粒子 q_1 和 q_2 之间的引力是：

$$F = \left(\frac{q_1 q_2}{r^3}\right)r \quad (6.1)$$

电荷 q 既可以是正的也可以是负的。在一般情况下，当有许多分离的电荷对某一给定电荷 q 产生静电力时，这合力就等于诸如(6.1)形式的一系列项的矢量和

$$F = q \sum_i \left[\frac{q_i}{r_i^3}\right]r_i \quad (6.2)$$

电场 E 就定义为

$$E = \frac{F}{q} \quad (6.3)$$

可以认为电场就是力所在的场所。上述讨论中都假定电荷 q_i 及 q 静止在真空中。如果电荷 q_i 在运动，那么电荷 q 还要受到一个附加力的作用。这个附加力具有磁的性质。再如果电荷不在真空中，而在可极化的电介质中，那么电介质内部就会自行调整以抵消一部分电场力。因此真正作用在电荷 q 上的力就小于方程(6.2)给出的值。

因此为了对这情况作出完整的说明，我们再定义一个电介质位移矢量 D ，它与电荷所在处物质的性质无关。 D 是一个严格的几何量，假定所有的电荷都在真空中，这时的电场就规定为 D 。当电荷位于均匀电介质内时，方程(6.2)变为

$$F = \frac{q}{\epsilon} \sum_i \frac{q_i}{r_i^3} r_i \quad (6.4)$$

此时方程(6.3)依然成立，因为事实上它就是电场的定义；但这时电介质位移就变为

$$D = \epsilon E \quad (6.5)$$

可见 D 与 ϵ 无关，而仅与电荷的位置及大小有关，也即仅与 q_i 及 r_i 有关。 ϵ 称为介电常数，当电场强度在临界值以下时，大部分实际材料的 ϵ 与 E 无关。

如果在电荷 q_1 周围作一个球面，电荷在球表面上产生的电介质位移服从下列关系：

$$D = \left(\frac{q_1}{r^3}\right)r = \left(\frac{4\pi q_1}{4\pi r^3}\right)r \quad (6.6)$$

因而

$$D \cdot n = \left(\frac{4\pi q_1}{rA}\right)r \cdot n \quad (6.7)$$

式中 n 是通过点 r 的表面法线， A 是封闭曲面总面积。点号表示标积。当存在许多电荷，或电荷为连续分布时，可用比方程(6.7)更一般的表达

式

$$\int D \cdot ds = \int 4\pi\rho dV = \int \nabla \cdot D dV \quad (6.8)$$

上面最后的等式是根据矢量积分的高斯定理得到的。高斯定理指出，对任何矢量 X ，有

$$\int X \cdot ds = \int \nabla \cdot X dV \quad (6.9)$$

这里左端积分是面积分， ds 是积分表面的面积元。 $\nabla \cdot$ 是散度算符。

读者可能要问，为什么在开始讨论空间电磁过程时就这么仔细地去强调 D 和 E 之间的关系。由于宇宙是如此地空无一物，我们或许会认为 D 和 E 总是完全相同的。然而事实并非如此；相反，我们对星际空间内的物质的许多知识就是依据 E 和 D 之间的微小差别而得到的。我们再定义一个以后用得着的矢量，即极化场 P ，它是电介质位移和电场之间差别的某种量度：

$$P = \frac{[D - E]}{4\pi} = \frac{(\epsilon - 1)E}{4\pi} \quad (6.10)$$

$4\pi P$ 是可极化物质中电荷重新排列所建立的场。它与外加场的方向相反，从而使外场的值从 D 减小到 E 。因子 4π 是一种约定的用法，其意义是：使得在单位面积电荷密度为 σ 的平面边界上 D 值正好为 $4\pi\sigma$ 。另外，极化场与每单位面积的感应电荷密度 σ' 有关。 P 就是每单位体积内的电偶极矩。如果在这体积中有 n 个电荷为 q 、距离为 d 的偶极子，那么 $P=nqd$ 。我们可以想象一个由 d^{-1} 个偶极子层组成的单位立方体，每层厚为 d ，包含 nd 个偶极子，于是电荷密度 σ' 就等于 nqd 。这就使 P 在数值上等于 σ' ——而不出现因子 4π ！

至此我们把静电场还当作是在宇宙尺度上好象也是很重要的一样来处理。一般地讲这种想法很可能是不对的，因为在近乎真空的状态下电荷往往能够很快地自行重新排列，结果全部电场都会被中和掉，就是说会成为一种中性的结构，内中任意一个小体积元内基本上包含了相同数量的正电荷和负电荷。这种小体积元的大小由第四章讨论的德拜屏蔽距离给出。这种一般规律有一个例外，而且是很重要的例外！在下一节中我们将要阐明，电荷通常是与空间磁力线联系在一起的；如果在与宇宙磁场相垂直的方向上施加一个电场，那么电荷就不可能穿越磁力线而流动，并去抵消外加电场。在这种情况下，大规模的电场仍可得到维持。

6.2 宇宙磁场

当电荷 q 穿越宇宙磁场而运动时，它就受到洛伦兹力 F 的作用：

$$F = \frac{qv \wedge B}{c} \quad (6.11)$$

式中 v 是电荷速度， B 是磁场强度， c 是光速。方程(6.11)中的矢积说明了力，因而也就说明了电荷所受的加速度是与速度和磁场两个方向都垂直的。因而电荷沿磁力线旋转（见图 6.1），但能量不改变。（因为若要对粒子做功，力必须在运动方向有分量）。在不变磁场中，粒子描绘出一种等螺距的螺旋运动。沿磁场方向的速度分量 v_z 是运动的一个常数分量，它与绕磁力线的圆周运动速度 v_c 一起定出了螺距角 θ ，因而

$$\tan\theta = \frac{v_c}{v_z} \quad (6.12)$$

图 6.1 磁场中的螺旋运动示意图

只要令磁场力等于作用在粒子上的离心力，就很容易求得这种运动的回转半径或拉莫尔（Larmor）半径 R_L 。如果粒子横向动量为 p_c ，回转频率 $\omega_c = v_c/R_L$ ，那么力的大小为

$$\dot{p} = \frac{p_c v_c}{R_L} = \frac{qBv_c}{c}, \quad R_L = \frac{p_c c}{qB} \text{ 以及 } \omega_c = \frac{v_c}{R_L} = \frac{qBv_c}{p_c c} \quad (6.13)$$

回转频率有时也称为回旋频率。

问题 6.1 当质子以 10 公里·秒⁻¹ 速度穿越 10⁻⁶ 高斯的磁场而运动时，证明其拉莫尔半径比星际距离甚至于行星际距离都要小。

因为拉莫尔半径比我们所预料的星际和行星际磁场的尺度都要小，因而带电粒子以宇宙气体的特征热运动速度运动时，它们将有效地为磁力线所约束。它们能够沿磁力线运动，但不可能穿越出磁力线外太大的距离。我们说粒子“冻结”在磁场中了。这种粒子和场结合的运动称为冻结流。磁流体动力学就是这样的一门学科，它专门处理由这种流所引起的问题（Co57）。

我们看到，粒子摆脱磁力线冻结的唯一途径是通过与其它粒子的碰撞。碰撞后每个粒子就会有全新的轨道。如果这种碰撞足够频繁，粒子就能穿越磁场而扩散。

因为宇宙磁场起源于粒子有组织的运动，所以冻结流就不仅由磁场存在而产生，而且反过来会起到维持这个磁场的作用。这种电荷的自洽运动并不是明显地可以看出来的，但磁流体动力学可证明它是真实的。因此上面提到的碰撞过程就不仅会妨碍粒子被冻结，而且其结果也会导致由冻结流所维持的磁场受到破坏。因而在稠密的气体中，由于碰撞频繁冻结场就不能维持。这些电荷与周围粒子的碰撞产生了电阻，进而耗散了粒子运动以及贮存在磁场中的能量。因而在耗散介质中冻结流是短命的（Sp62）。

磁流体动力学还告诉我们，当存在有引力、静电力等一类力的作用时，如果力的作用方向同磁场的方向正交，就会使电荷产生一种漂移运动，运动方向与作用力和磁场方向两者均相垂直。在组成地球磁层的带电粒子的范艾仑（Van Allen）带中就出现有这种粒子漂移运动。但是除非漂移粒子受到碰撞，否则这种漂移并不直接引起宇宙磁场的耗散。

6.3 欧姆定律和耗散作用

电流这个术语一般包括两种意思。第一种意思表示电荷响应外加电场所作的真实运动。第二种用法代表同外加电场变化相应的等效电流，这种电场的变化也会象运动着的电荷一样产生磁场（见 6.5 节）。这是非常重要的！我们把电流写为：

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (6.14)$$

式中速度 v 值由两种相反的作用所决定。外加电场不断使电荷得到加速，而与其他电荷的远碰撞则不断使粒子减速。介质的电阻率就是这种速度

减小的量度。电阻率的倒数是电导率 σ 。利用 E 和 σ 可将方程(6.14)写为

$$j = \sigma E + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial D}{\partial t} \quad (6.15)$$

一般地讲，电导率与气体的密度、温度、电离态有关，因此也就与气体的化学成分有关。远碰撞是使空间带电粒子运动减慢的主要过程， σ 值即由此确定。在 3.13 节及 3.14 节已讨论了这种碰撞。在 6.16 节中还要对此作全面的阐述。

6.4 粒子的磁加速

法拉第对电磁学的贡献之一是他发现随时间变化的磁场会在环绕磁场的导电介质中产生电流。电流流动的平面与磁场变化分量的方向垂直。法拉第定律的积分形式为

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int B \cdot ds = - \oint E \cdot dl \quad (6.16)$$

上式左端积分是面积分，它在电流流动的环所围的面积上求积（图 6.2a）。右端是线积分，它在环圈上求积。在积分式中法拉第所观测到的电流已由与方程(6.15)相应的产生电流的

图 6.2 法拉第定律及安培定律示意图。(a) 法拉第定律指出，导电环中的电流以及相关联的电场由环所包围的磁力线条数的变化率所确定（见方程(6.15)及(6.16)）。穿过单位面积的磁力线条数与磁场 B 成正比；(b) 安培定律指出，沿一个围绕电流的环进行积分所得到的磁场由穿过该封闭面积的总电流所确定（见方程(6.17)）

电场来代替。现在我们可以看到，如果星际空间任何区域突然受到增加着的磁场的影响，那么电荷就会经受与 B 的时间变化率成正比的有效电场 E 的作用。在实验室里常利用这个效应把电荷提高到很高的能量上。克斯特 (D.W.Kerst) 在 1940 年建造的电子感应加速器是第一个成功地完成这种电子加速的装置。在这以后，许多天体物理学家提出，电子感应加速过程可能也会在星际空间中起作用，从而把带电粒子加速到宇宙线中所观测到的那么高能量。

磁场强度的迅速增加可能是由宇宙云在与云内磁场相垂直的方向上的压缩所产生的。星际云碰撞时就可能出现这种压缩，这里或者是星际云相互碰撞，或者是与爆发着的超新星所喷发出的高速气体相碰撞。这种过程会产生低能宇宙线，有时也称为超热粒子。但这种过程还不足以产生能量极高的粒子。下面 6.6 节中将讨论更有效的机制。

问题 6.2 假定在空间某个区域中，在 10^{-7} 年内磁场从 10^{-6} 增加到 10^{-5} 高斯。如果电子和质子与磁场垂直运动且不发生碰撞，那么电子和质子将会加速到多大的能量？最后能量与初始能量之间有什么关系？先根据(6.13)及(6.16)两式推导能量与磁场的关系 $d\varepsilon / \varepsilon = dB/B$ ，这对求解上述问题是有用的。

6.5 安培定律以及宇宙电流和磁场间的关系

在 6.2 节中我们已经看到，宇宙磁场依靠冻结在磁场中的回转电荷

而存在。安培定律更精确地表达了这个概念，该定律指出电流能够产生环形磁场（图 6.26）：

$$\frac{4\pi}{c} \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s} = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \quad (6.17)$$

这里方程左边仍是面积分，右边为线积分，线积分在磁力线上进行，面积分在磁力线所包围的整个面积上进行。

我们相信宇宙磁云将形成一定的结构，其中任何局部地区均服从方程(6.17)。因此电流和磁场的形状可能是很复杂的。可以想象，初始状态是一种“无力”磁场，在这里磁场和电荷流的排列方式不会产生破坏这种结构的力。这种无力状态也许恰当地代表了宇宙磁场的结构。由方程(6.11)可知，“无力”结构中必须处处满足 $\mathbf{j} \wedge \mathbf{B} = 0$ 。

6.6 磁镜、磁瓶和宇宙线粒子

在 6.4 节中我们对电子感应加速过程加速带电粒子的情况作了说明。费米提出了另一种宇宙线粒子磁加速的设想。在费米机制中，认为宇宙线粒子是在宇宙气体云之间运动的，而每一块云的内部都有一个磁场。当一个粒子靠近云并从垂直云的磁场方向进入磁场时，由于受到方程(6.11)所给出的磁场力的作用，粒子就要被折回。因为当粒子经过半圈圆周运动后，可能再一次到达云的边缘，并且朝向它刚才进来的方向。如图 6.3 所示，当粒子沿磁力线方向接近云时就会出现类似这样的反射，对此下面还要再作解释。

如果粒子所撞击的云是离开粒子的，在相遇后粒子的动量就比碰撞前减少；反之如果粒子所撞击的云是接近粒子的，那么最后的动量就比碰撞前大。一般地讲当云和粒子接近时碰撞的几率比云和粒子背离时的几率大。（这与生活经验是一致的。在公路上遇见迎面开来的汽车数量总比遇见与我们同向行驶的汽车来得多。）

图 6.3 磁瓶中带电粒子的轨线。

细线条表示磁力线，磁力线密表示磁场强

因而从统计上讲，粒子在与许多云相遇后动量将会增加，并且可以加速到很高的能量。这个过程与乒乓球在两块慢慢地接近的球拍中加速的情况相似。当球在两拍之间多次弹跳后，球的速度就要比任何一块反射面（球拍）的速度快得多了。

为了说明宇宙线粒子的加速情况，人们还在费米过程的基础上提出了若干种稍有不同的解释机制，然而还没有一种足以克服下述的困难。

只要受到下列任何一种抵制加速的过程的作用，宇宙线粒子就会最终遭到某种破坏性的碰撞，比如它与其他粒子的非弹性碰撞，粒子离开银河系因而也就失去与加速它的云接触的机会等等。由于这些原因，两次破坏性过程之间粒子所经过的加速反射次数是有限的。因而，为了使宇宙线粒子确实达到很高的能量，粒子注入加速场时的初始能量就应该相当高。可能这种具有足够能量的粒子是由超新星爆发所提供的。当然类星体也可能在上述过程中产生高能宇宙线粒子，最高能量的宇宙线粒子可能就是从这些遥远的天体到达我们银河系来的。

总之费米机制不再认为是产生宇宙线的主要过程。首先，我们知道

能量最高的质子具有约为 10^{20} 电子伏特的能量，其回转半径可与星系半径相当。因而这些粒子不可能在银河系停留足够的时间以使粒子在这段时间内最后加速到我们所观测到的能量值。所以这些粒子必定是河外的，要不然就是在银河系某些磁场非常强的区域内产生的。

其次，我们知道重原子核组成了宇宙线流的很大部分。因为费米加速机制的加速过程很慢，这种重核在星际空间呆这么长的时间就会遭到破坏性的碰撞。可是至少来说，宇宙线中能量达到 $10^{12} \sim 10^{13}$ 电子伏特的铁核仍然是丰富的。在这些能量以上有关宇宙线粒子化学丰富度的情况我们知道得还很少。因此我们不得不再次去寻找能够快速提高这些粒子能量的机制。

当前，认为脉冲星以及或许是在作快速自转的白矮星可能是宇宙线的来源。进一步的观测可能会对这种假设作出说明。我们也希望，通过对太阳耀斑的研究至少可使我们对这种高能粒子加速的一种机制有较好的理解，因为太阳耀斑是太阳宇宙线成分的来源。

一般地讲，带电粒子沿磁力线运动时就会发生回转。其螺距角由方程(6.12)给出。如果粒子进入磁力线更为密集的磁场区域，那么它所经受的磁场强度就会增加，根据法拉第定律(6.16)，粒子的圆周运动速度 v_c 就增加。但是，因为磁场本身没有对粒子做功， v_c 的增加必然会消耗原始纵向运动的动能，也即 v_c 增加的代价是 v_z 的减小。当粒子在强磁场中进入一定深度后，所有的动量就都用在作圆周运动上了，此时螺距角 θ 变成 $\pi/2$ ，粒子就受磁场反射，往相反方向回旋出去。

当粒子开始往逐渐加强的磁场中旋进时，它对于运动对称轴的角动量是守恒的。因而磁矩 M ：

$$M = \frac{j \wedge r}{2c}, \quad j = qv \quad (6.18)$$

也是守恒的。 r 用(6.13)式拉莫尔半径代入，得到沿磁场方向的磁矩

$$M = \frac{v_c p_c}{2B} \quad (6.19)$$

由此得知横向动能与磁场强度 B 成正比。因此如果粒子在磁场 B 中的初始螺距角为 θ ，那么除非粒子达到磁场强度为 B_0 的区域，使得 $\sin \theta_0 = 1$ ：

$$B_0 = \frac{B}{\sin^2 \theta} \quad (6.20)$$

否则粒子就会一直穿越磁场。而当到达磁场 B_0 后，粒子就反射回去并从强磁场中旋出。

一个磁瓶是由两个这种磁镜组成的，粒子在两镜间来回反射而不允许逃离。费米乒乓加速机制可能包含着一个（收缩中的）磁瓶，其中两块磁镜在互相接近。

我们有时用磁刚性 BR_L 来表征宇宙线粒子。当运动严格与磁场垂直时磁刚性就等于 p_c/q (6.13)式)。磁刚性的量纲是每单位电荷的能量。

问题 6.3 考虑以速度 V 运动的星际云。其作用相当于磁镜，因此粒子每次从云反射出去时除了其原有的初速度外还要加上 $\Delta V = 2V$ 的速度变化。当两块云互相接近时就可能发生连接的碰撞。试利用速度合成规则计算当质子原来能量为 ϵ 时，要经过多少次碰撞其能量才能提高一倍。

计算中令 $V=7$ 公里·秒⁻¹，这是星际云的典型速度，同时令两块接近中的云（磁镜）之间距离为 10^{17} 厘米以及 $\varepsilon=10^{10}$ 电子伏特。再问粒子能量增加一倍要多少时间？对质子和电子这个时间的差别大吗？

问题 6.4 当前人们认为脉冲星至少是某些宇宙线粒子的来源，粒子是被与脉冲星中心的中子星共旋的磁力线所加速的，假定磁场速度就是 ωr ，其中 ω 是中子星角速度， r 是离中子星的距离。此外还认为粒子是冻结在磁力线中被拖着在一起运动的。假如在这问题中狭义相对论近似正确，试求粒子的能量与径向距离的函数关系是什么？在多大半径以外粒子就与磁场不共旋了？

图 6.4 在中子星附近宇宙线的加速情况

6.7 麦克斯韦方程

用四个电磁方程就可以推导出所有的经典电磁效应，这四个方程是：

$$\nabla \cdot D = 4\pi \rho \quad (\text{见方程(6.8)}) \quad (6.21)$$

$$\nabla \wedge E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} \quad (\text{与方程(6.16)等价}) \quad (6.22)$$

$$\nabla \wedge H = \frac{4\pi}{c} j \quad (\text{与方程(6.17)等价}) \quad (6.23)$$

以及最后一个

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (6.24)$$

最后一个方程表明不存在与电荷相类似的磁单极子（磁荷）。自然界中只能出现磁偶极子以及磁多极子的形式。在这方面请对照比较方程(6.24)及(6.21)。

尽管有上面这种讲法，但从狄拉克以来，对磁单极子的探索却一直没有停止过。狄拉克指出（Di31），只要在自然界中存在几个甚至那怕只有一个磁单极子，电荷的量子化就好理解了。至今还没有发现过这种狄拉克单极子。

通常还须要用四个辅助表达式来补充前面四个麦克斯韦方程。

$$D = \varepsilon E \quad (\text{方程(6.5)})$$

$$B = \mu H \quad (6.25)$$

$$j = \sigma E + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial D}{\partial t} \quad (\text{方程(6.15)})$$

$$\nabla \cdot j = 0 \quad (6.26)$$

方程(6.25)表达了磁向量 B 和 H 之间的关系，它与 D 和 E 之间的关系相类似。方程(6.26)表明，在方程(6.15)定义下的电流是连续的，它既无源也无潭。磁导率 μ 的值可以大于 1 也可以小于 1，这取决于介质是顺磁的还是抗磁的。对所有的实用目的来说，可以认为大部分宇宙气体 $\mu=1$ ，但（见 9.8 节）星际空间的顺磁微粒可能就会使被观测到的星光出现少量的极化。

6.8 波动方程

根据方程(6.22)及(6.23)以及根据关系式(6.15)及(6.25)，可得以

下表达式

$$\begin{aligned}\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{E}) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \wedge \mathbf{B} \\ &= \frac{-4\pi\mu}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sigma \mathbf{E} + \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (6.27)\end{aligned}$$

式中假定介电常数 ε 和磁导率 μ 不随时间变化，并假定 μ 是标量。事实上 μ 和 ε 都是张量，但它们的作用经常就象标量一样。利用恒等式

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} \quad (6.28)$$

此外只考虑空间电荷为中性的区域，即 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ 及

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (6.29)$$

在非导电介质中 $\sigma=0$ ，故

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (6.30)$$

这即是以速度

$$V = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad (6.31)$$

传播的波动方程。

问题 6.5 试对磁场推导类似的表达式

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (6.32)$$

特别注意在推导这结果时对 ε 、 μ 及 σ 所加的限制。

算符 ∇^2 称为拉普拉斯算符，有时也可写为 Δ 。如果 ε 及 $\mu=1$ ，则还可定义另一个算符 $\square = \nabla^2 - (1/c^2)(\partial^2/\partial t^2)$ ，称它为达朗伯(d'Alembertian)算符。

我们以前假定(6.3节)空间导电率很大，而现在却又同时在方程(6.30)和(6.32)中令 $\sigma=0$ 。这里顺便指出，这两者是不矛盾的，因为导电率与频率有关。在可见光以及甚至在射频范围内， σ 通常很低。毫无疑问在可见光区电磁波的波长比电荷间距离小，波就可以有效地在真空中传播。在较长的射电波长中情况就完全变了，介质中的电荷可以对传播着的波的电场和磁场起响应，因此 σ 就变成有限值。当方程(6.29)右边第二项起主要作用时，表达式就变成了漫射方程形式，波就被阻尼了。

我们注意，传播的波是横波(图 6.5)。如果一个平面波传播的方向是 x 方向，那么由对称性可知，对 y 和 z 方向的所有偏微分均应为零。由散度关系知

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \quad \text{及} \quad \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0 \quad (6.33)$$

由旋度方程(6.22)以及(6.23)得到

图 6.5 电磁波

(a)波沿 x 方向传播，电场平面沿 y 方向极化；(b)沿 x 方向传播的圆极化波。为了简化起见这儿仅画出电场方向。 $\mathbf{E}$ 矢量方向绕 x 轴转动。在这图所示的自转方向称为左旋圆极化(LHP)。任何电磁波都可以认为

是由左旋圆极化和右旋圆极化经过适当的叠加而构成。例如 LHP 波和 RHP 波以同样的振幅叠加即得平面极化波。它们相对的相位差就决定了 E 矢量所在的平面（见图 6.7）

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} &= \frac{1}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ 0 &= \frac{\partial H_x}{\partial t}, \quad 0 = \frac{\partial E_x}{\partial t}\end{aligned}\quad (6.34)$$

如果 $\mathbf{n}$ 是沿波传播方向的单位矢量，那么只要下面形式的表达式

$$\mathbf{H} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{E} \quad (6.35)$$

成立，则(6.33)及(6.34)式就均被满足了。因而 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 这两个场总是垂直的，并且波动方程(6.30)的解具有下列形式

$$f_i = A \cos(2\pi \nu t - kx), \quad i = y, z \quad (6.36)$$

式中 $k = \sqrt{\mu\epsilon} (\omega/c)$ 及 $\omega = 2\pi \nu$ 。 ν 称为波的频率， ω 称为波的角频率。 k 是波数——即沿波传播方向每单位长度中波的数目。 f_i 代表电场和磁场分量。

6.9 相速和群速

我们写出角频率分别为 ω 和 $\omega + \Delta\omega$ 的两个波 f 和 f^+ 的传播方程：

$$f = A \cos[(\omega) t - (k) x]$$

$$f^+ = A \cos[(\omega + \Delta\omega) t - (k + \Delta k) x]$$

这两个波的叠加给出

$$f = f + f^+ = A \{ \cos[(\omega) t - (k) x] + \cos[(\omega + \Delta\omega) t - (k + \Delta k) x] \}$$

$$f = 2A \cos(\omega t - kx) \cos[(\Delta\omega) t - (\Delta k) x] \quad (6.37)$$

这说明存在一个载波，其频率由 $\cos(\omega t - kx)$ 代表，其振幅受到波 $\cos(t \Delta\omega - x \Delta k)$ 的振幅调制。载波速度称为相速，即(6.31)，由(6.36)得

$$V = \frac{\omega}{k} \quad (6.38)$$

而调制速度称为群速：

$$U = \frac{\partial \omega}{\partial k} \quad (6.39)$$

下面将会看到，从物理上讲，量 U 是更令人感兴趣的。它代表信息传递或能量传输的速度。只要介质是纯色散性的，也即 $\omega = \omega(k)$ ，那么对定义 U 就没有困难。但若导电率相当可观，介质具有吸收，量 A 就变成复数， U 就不再具有明显的物理意义。对长波宇宙射电波，由于有这种吸收存在，就使它不能穿透地球的电离层，因此只能从火箭或卫星上对这种长波波段的射电波进行观测、至于更长的波长时，星际介质就会对它产生吸收，因此这种波就根本不能传到地球上来。在 6.11 节中我们还要回来再讨论这一问题。

6.10 能密度、压力和坡印廷矢量

将(6.23)式与 E 的标积减去(6.22)式与 H 的标积得

$$\frac{1}{c} H \cdot \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{E}{c} \cdot \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma E \cdot E}{c} = -(H \cdot \nabla \wedge E) + (E \cdot \nabla \wedge H) \quad (6.40)$$

利用矢量恒等式

$$\nabla \cdot (A \wedge B) = B \cdot \nabla \wedge A - A \cdot \nabla \wedge B \quad (6.41)$$

我们得到

$$\frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon E^2 + \mu H^2) = -\sigma E^2 - \nabla \cdot S \quad (6.42)$$

式中 $S = (c/4\pi) E \wedge H$ 。 S 称为坡印廷 (Poynting) 矢量。如果再利用表示体积分与面积分之间关系的高斯定理(6.9)，则式(6.42)可写为

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\epsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi} dV = - \int \sigma E^2 dV - \oint S \cdot ds \quad (6.44) \textcircled{1}$$

右边第一项等价于运动电荷的动能变化率。它涉及到作用在粒子上的力与粒子运动速度的标积，因为 σE 代表电流，即带电粒子的流动：

$$\int \sigma E^2 dV \rightarrow \sum e v \cdot E = \sum v \cdot \dot{p} \quad (6.45)$$

这就是所有粒子总动能对时间的导数。(6.44)中另两项代表电磁能流。方程(6.44)左边是体积中能量的变化率， $(\epsilon E^2 + \mu H^2)/8\pi$ 是场的能密度。右面第二项代表通过表面的能流，因而 S 就是电磁流量密度。方程(6.44)指出，某个体积中能量的变化率等于电荷动能变化率加上能量辐射率。

原先我们已知道，随机取向电磁波所引起的压力 P 正好是能密度数值的 $1/3$ 。在 4.7 节我们根据动力学原理求出了这一关系：

$$P = \frac{1}{3} \frac{1}{8\pi} (\epsilon E^2 + \mu H^2) \quad (6.46)$$

静止场的情况是相似的，只是有一点例外，即现在的磁压力可以脱离电压力而单独存在。此时导电率 σ 是高的，磁场由电流 σE 维持。由于电荷的流动存在一个动压力，这压力取决于 σE 。因为磁压力实际上是取决于磁场方向的一个张量，因此情况就更复杂了。对任何一个磁场总存在有一个沿磁力线方向的张力和一个垂直于力线的向外压力。

下面就说明这一点。单位立方体中的磁能密度为 $\mu H^2/8\pi$ 。如果立方体在平行于磁力线的方向压缩一个量 dl ，此时场强不变但体积减少了 dl 。既然体积变小而能密度又不变，立方体中的总能量就将减小 $(\mu H^2/8\pi) dl$ ，这一部分能量是在收缩时失去的。这意味着压缩立方体时做的功是？ $(\mu H^2/8\pi) dl$ ，也就说明沿磁力线方向有一个压力？ $\mu H^2/8\pi$ 。

如果立方体在与磁力线垂直的某个方向上被压缩，该体积中的力线数不变，那么压缩 Δl 后就使场强增加到 $H/(1 - \Delta l)$ 。此时的能密度就变为 $\sim (\mu H^2/8\pi)(1 + 2\Delta l)$ ，又因体积减少到 $(1 - \Delta l)$ ，因此由压缩产生的总能量变化就是 $\sim (\mu H^2/8\pi) \Delta l$ 。在这种情况下，为了压缩立

方体就要作 $(\mu H^2/8\pi)\Delta l$ 的功，而抗拒压缩的压力值是 $\mu H^2/8\pi$ 。当一个体积中包含有随机取向的磁力线束时，两个横向压力和一个纵向压力平均后所得到的净效应是一个向外的总压力 $P = (\mu H^2/8\pi)/3$ 。

正是这个原因，使得磁场存在时恒星形成的问题产生了理论上的困难（4.18 节）。解释物质怎样沿磁力线方向的收缩比较容易，但要理解怎样才能够在垂直磁场的方向上产生物质凝聚是比较困难的。因为气体是冻结在磁力线中，而磁场的压力会抵制任何收缩。我们看到横向压力高达 $H^2/8\pi$ ，由此可见问题的严重性。

问题 6.6 静磁场的横向压力是 $P_s = H^2/8\pi$ ，辐射压(6.46)中磁场作用

的部分是 $P_r = \frac{1}{3} H^2 / 8\pi$ 。试问因子 $1/3$ 的意义。

典型的初始磁场强度可能是 10^{-6} 高斯，因而 $P_{\text{初始}} \sim 10^{-13}$ 达因·厘米⁻²。当原恒星从 $\sim 10^{18}$ 厘米收缩到 10^{11} 厘米时，若要磁力线数保持不变则需要 $H \propto r^{-2}$ ，因而 $H^2 \propto r^{-4}$ 。如果确是这样的话，最后的结论是原恒星竟然就要具有 10^8 高斯的磁场以及 10^{15} 达因·厘米⁻² 的磁压力。引力太微弱了，根本不足以产生这样强的场。于是我们可以肯定的说，从这种思路去看问题总是有错误的。不管这些困难有多大，事实上恒星仍在形成。

6.11 在稀薄电离介质中波的传播

考虑一个没有电场或磁场的电离介质。设介质很稀薄，因而离子和电子间很少碰撞。当稍稍偏离平衡态时，位于电磁波中的电场就会使介质中电子相对于比电子重得多的离子而加速：

$$m\ddot{r} = eE(r, t) \quad (6.47)$$

这里 e 及 m 为电子的电荷和质量， E 是与波相关联的电场。令波的形式为

$$E(r, t) = E_0(r)e^{i\omega t} \quad (\text{实部}) \quad (6.48)$$

式中只考虑复数的实部。于是电子对平衡位置的位移就是

$$r = -\frac{e}{m\omega^2} E \quad (6.49)$$

这个结果同时满足方程(6.47)及(6.48)。这种电子位移有效地建立了许多偶极子，再如 6.1 节所述，它将会产生极化场 P 。如果 n 是电子数密度，则极化场可表示为由通过介质的波所产生的单个偶极子场的总和

$$P = mer = -\frac{ne^2}{m\omega^2} E \quad (6.50)$$

根据方程(6.10)对极化场的定义，介质的介电常数应是

$$\epsilon = 1 - \frac{4\pi ne^2}{m\omega^2} \quad (6.51)$$

因为相位传播速度与频率 ω 处的折射率 $n_\omega = \epsilon^{1/2}$ 成反比（在处理宇宙波传播的所有问题中可令 $\mu=1$ ），等离子体中的相速就会大于光速！但这个速度既不传递信息也不传递能量。因此并不破坏狭义相对论。更为重要的群速总是小于光速 c 的。

如果一个波沿 x 方向在宇宙介质中传播， E 和 B 场的横向分量的形式为(6.36)：

$$f=f_0 \cos (kx \pm \omega t) \quad (6.52)$$

以及

$$\omega^2 = \frac{k^2 c^2}{\epsilon} = \frac{k^2 c^2}{1 - (4\pi n e^2 / m \omega^2)} \quad (6.53)$$

推导中用到方程(6.51)，并要求 $\mu=1$ 。上式可进一步写为

$$\omega^2 = k^2 c^2 + \frac{4\pi n e^2}{m} \equiv k^2 c^2 + \omega_p^2 \quad (6.54)$$

其中

$$\omega_p \equiv \left(\frac{4\pi n e^2}{m} \right)^{1/2} \sim 5.6 \times 10^4 n^{1/2} \text{ 赫} \quad (6.55)$$

称为等离子体频率。它与德拜长度 L 有关（见方程(4.156)），其关系为

$(mL^2 / kT)^{1/2} = \omega_p^{-1}$ 。而 ω_p^{-1} 又是速度为 $(kT / m)^{1/2}$ 的电子穿过德拜长度所需要的时间。

如若 $\omega < \omega_p$ ， k 就变为虚数，波也就不能在介质中传播。

在 6.9 节中已提到在电离层以下进行低频的射电天文观测是不可能的。当射电波的频率低于电离层的等离子体频率时它就不能再传输了。因为电离层的电子密度是不均匀的，这个等离子体频率也在变化。不过这种截止频率的典型值为 n 兆赫。

如果 $\omega > \omega_p$ ，波就能传播。波的群速为

$$U = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{\sqrt{1 + \omega_p^2 / c^2 k^2}} \quad (6.56)$$

因此传播速度与频率有关。在关于脉冲星所发射的脉冲的传播问题中，这种频率相关现象是重要的 (He68b) *。如果所发射的脉冲包含一定范围的频率分量，那么频率越低的分量到达地球的时间延迟越长。

我们可将式(6.56)写为

$$U = \frac{c}{\sqrt{1 + \omega_p^2 / (\omega^2 - \omega_p^2)}} \quad (6.57)$$

脉冲运动一段距离 D 后到达的时间是 D/U ，到达时间与频率的关系是

$$\frac{d(D/U)}{d\omega} \sim -\frac{D}{c} \frac{\omega_p^2}{\omega^3} (\omega \gg \omega_p) \quad (6.58)$$

脉冲星的观测表明，脉冲到达时间的确与频率有关，并且观测到的到达时间的延迟也的确具有式(6.58)的形式。由此我们得出结论，在等离子体频率低于辐射频率的介质中会发生时间延迟。因此，方程(6.55)就给出了在色散介质中电子数密度的上限。但是更重要的结论是时间延迟同频率的关系直接与 D_n 成正比， D_n 就是沿发射天体视线方向单位截面积上的总电子数。这个有用的关系式直接可由(6.55)及(6.58)式得出。沿视线 S 积分而得出的电子数密度称为色散量 D ：

$$D \equiv \int_0^D n(s) ds = D \langle n \rangle \quad (6.59)$$

如果星际介质的平均电子数密度已知，由(6.58)的色散

图 6.6 1972 年初所知道的 63 颗脉冲星的色散量与银纬关系

关系就可得出脉冲星的距离。反过来如果从其他来源得知距离 D ，那么就求得沿视线方向的 n 平均值。由这种方法求出的平均值除了包括真正的星际电子外，还包括发射区域周围的任何电子以及发射天体所贡献的那部分电子。然而脉冲星内部的色散量应当与频率无关，而星际介质产生的色散则与频率有关。根据这一点，我们就可区分这两种贡献，我们发现脉冲星本身的贡献可忽略不计。根据在距离已知的发射源的视线方向上所观测得到的色散量，求出平均电子密度约为 $\langle n \rangle = 0.03 \text{ 厘米}^{-3}$ 。这个值视不同的源而不同，它与沿视线方向的亮星、热星、电离星的数目有关。利用星际空间量值约为 0.03 厘米^{-3} 的电子数密度平均值，我们发现近距离的脉冲星的分布与银河系较近的旋臂的距离相符合 (Da69)。这些脉冲星还表现出在银道平面附近成团的趋势 (图 6.6)。

在整个这一节中我们都假定离子和电子间的碰撞频率 ν_0 是低的。但是如果 ν_c 变高，由耗散引起的能量损失再不能忽略不计。这个问题将在 6.16 节中讨论。

6.12 法拉第旋转

通过波的极化平面的法拉第旋转也可以得到宇宙介质中电子数密度的信息。为了理解这个效应，我们来看一个在与磁场 B 方向垂直的平面上运动的电子。它会被 (6.11) 式所示的力所偏转

$$F = \frac{ev \wedge B}{c}$$

如果电子还受到电磁波的影响，那么电子还会受到波的电场 E 所施加的作用力。最后在电磁场综合影响下的回转必然同向外的离心力平衡。这三个力间的关系由式

$$eE \pm \frac{eB\omega r}{c} = -m\omega^2 r \quad (6.60)$$

给出。式中 E 是垂直于磁场的电场矢量分量，当沿 B 场方向看去电子为逆时针旋转时，左端第二项就取负号。它是平行于 B 方向传播的右旋圆极化电磁波 RHP 所感应产生的运动。左旋圆极化 LHP 产生的力是 $+eB\omega r/c$ ，它的方向与电子离开平衡位置位移的方向相同。但是应该注意，对电子而言 e 是负的。根据上式求解 r 得

$$r = -\frac{e}{m} \left(\frac{1}{\omega^2 \pm \frac{eB\omega}{mc}} \right) E \quad (6.61)$$

此时 (6.50) 式所示的电介质极化场就变为 $P = ner$ ，由此造成的介电常数为

$$\epsilon = 1 - \frac{4\pi ne^2}{m\omega(\omega \pm \omega_c)}, \quad \omega_c \equiv \frac{eB}{mc} \quad (6.62)$$

式中 ω_c 是回转频率或回旋频率 (见 (6.13) 式)。因为折射率 $\epsilon^{1/2}$ 不同，于是左旋及右旋极化辐射在纵向磁场中穿过电离介质时的速度就不同。

如果原来的波是具有一定极化方向的平面极化波，那么极化角就可以表达为两个振幅相同，相位差一定 (比如为 θ_0) 的圆极化波的叠加。当波传播时，因为一个波相对另一个波有延迟，因此两波间的相位差就

会发生改变，极化方向因而也就发生旋转。两个 E 矢量有时同相，其他时间就有相位差。

图 6.7 圆极化波相叠加造成平面极化辐射。时刻 $t=0$ 时的相位差是 θ_0

图 6.7 表示相反转向圆极化波的两种叠加方式。左面一组 $\theta_0=180^\circ$ ；右面一组 $\theta_0=90^\circ$ 。相应波在一个周期 P 中不同的时刻，图中画出了两个 E 矢量及它们的合成矢量。合成矢量用虚线表示。我们可以看到，相位延迟的半角定出了平面极化波的方向。但是还必须对两个 E 矢量中的一个的初始方向作出规定。例如在图 6.7 中我们取 $t=0$ 时的左旋极化 E 矢量指向右方。

现在回过头来看传播速度和折射率。我们发现折射率 n_L 及 n_R 之差 Δn 为：

$$n_L^2 - n_R^2 = \epsilon_L - \epsilon_R = 2n_\omega \Delta n \quad (6.63)$$

记

$$n_\omega \sim 1 - \frac{4\pi ne^2}{2m\omega^2} \quad (6.64)$$

这里假定 $n_\omega \approx 1 \ll 1$ ，于是就可由方程(6.51)求出(6.64)式。再把(6.62)介电常数代入(6.63)式得

$$\Delta n = \frac{\frac{4\pi ne^2(2\omega_c)}{m\omega(\omega^2 - \omega_c^2)}}{2(1 - \frac{2\pi ne^2}{m\omega^2})} \quad (6.65)$$

若 $\omega \gg \omega_c$ 及 $ne^2/m\omega^2 \ll 1$ ，则

$$\Delta n = \frac{4\pi ne^2 \omega_c}{m\omega^3} \quad (6.66)$$

单位时间的距离延迟为 $c\Delta n / n_\omega^2 \sim c\Delta n$ 因而 LHP 波相对 RHP 波的相位延迟就变为 $\omega \Delta n$ ，而单位时间内极化平面就转过了这个角值的一半：

$$\Delta\theta \sim \frac{\omega \Delta n}{2} \quad (6.67)$$

由此，传播速度差以及极化矢量旋转率就与数密度 n 和 B 成正比。当速度差一定时，相位旋转率就与波长 λ 成反比，因为波长越长，两个波之间的延迟距离就越大。另一方面，根据式(6.66)，两波间的速度差与 ω^{-3} 成正比，也即与 λ^3 成正比。因此经过距离 D 后极化平面所转过的角度 $\theta(D)$ 就与 λ^2 成正比。在观测发射极化辐射的遥远射电源时，我们就能把 θ 角作为波长的函数来确定。由此给出电子密度 n 和视线方向磁场分量的乘积值（假定路径长度已知）。因为旋转既有赖于一个有恰当取向的磁场又有赖于磁场所在地的区域性粒子密度，因而更确切地说旋转角 θ 实际上给出的是磁场强度和粒子密度的乘积沿视线方向的积分值。

如果象有时所设想的那样，粒子和场实际不在空间相同的位置，而是物理上互相分离的，那么法拉第旋转仅能给出场强和粒子密度的下限。尽管这样，由于我们对星际介质所知甚微，因此就是这么一点信息，在当前天体物理中也是很有意义的了。

对脉冲星来说，色散量可告诉我们关于视线方向平均电子数密度的情况（6.11 节）。于是法拉第旋转就可用来求定在视线方向上磁场强度分量的平均值。在求银河系局部磁场时就是根据这个方法（见图 9.9）。因为在这条路径上磁场方向有变化，因此由这方法仅能求得真实磁场强度的统计估值。

问题 6.7 假定磁场强度到处为 B ，其方向依不同区域而随机地变化，但在长度为 L 的任一区域内方向是不变的。如果源的距离为 NL ，电子数密度为 n ，试根据随机游动过程证明

$$\theta \sim \sqrt{NL} \left(\frac{2\pi n e^3 B}{m^2 c^2 \omega^2} \right)$$

为方便起见假定 B 总是直接指向或离开观测者。

6.13 慢运动电荷的光发射

假若使一个电荷作加速运动，它就能发出辐射。如果运动是由入射的电磁波感应产生的，我们就能发现，电荷或者带电粒子群会吸收或散射辐射能。为说明这一点，我们来考察一个与加速电荷有关的电流。这个电流将在离电荷所在位置的一定距离处感应出磁场，但磁场强度的变化与电流变化之间通常会有少量的相位差，这是因为电流强度信息从一个位置传播到另一位置时会发生时间延迟。这个信息只能以光速传播。我们暂且认为电荷和电流就是电磁场的源。如果我们应用真空中的麦克斯韦方程(6.22)及(6.23)，此时 $E=D$ ，及 $H=B$ ，再用符号 j_c 表示传导电流 σE ，那么可得到

$$\nabla \wedge H = \frac{4\pi}{c} j_c + \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} \quad (6.68)$$

$$\nabla \wedge E = -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} \quad (6.69)$$

现在认为磁场是由矢势 A 产生的，而电场是由标势 ϕ 和 A 联合产生的，那么就有

$$H = \nabla \wedge A \quad (6.70)$$

及

$$E = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} \quad (6.71)$$

这方程与上面麦克斯韦方程是一致的。再假定式

$$\nabla \cdot A + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (6.72)$$

成立，则可得到两个分离的方程，每个方程仅依赖一个势。方程(6.72)就称为洛伦兹条件。

问题 6.8 试直接把方程(6.70)，(6.71)及(6.72)代入麦克斯韦方程以检核上述论述的正确性。由此可得

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} j_c \quad (6.73)$$

以及

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho \quad (6.74)$$

在虚无空间中方程(6.73)及(6.74)的右端为零；仅在电荷和电流真实所在的那些地方右端才不为零。再进一步对静止场来说，对时间的导数项也没有了，于是 ϕ 就服从(4.142)的泊松方程。这一方程在前面讨论等离子体时已用到过了。在解泊松方程时，位势是通过分布电荷的体积内的积分除以电荷到需要求势的那个位置之间的距离来表示的。鉴于这些，我们把势写为

$$\phi(R_0, t) = \frac{1}{R_0} \int \rho(t - \frac{R_0}{c} + \frac{r \cdot n}{c}) dV \quad (6.75)$$

式中 R_0 是离电荷中心的距离， $r \cdot n$ 是电荷分布中一个点的投影距离，这距离从电荷中心出发，沿电荷中心到点 R 的连线方向量度（见图 6.8）。 n 就是沿这个方向的单位矢量。方程(6.75)告诉我们，任一给定时刻的势由比这时刻早 $R/c = (R_0 - n \cdot r)/c$ 时间的电荷分布所确定。方程(6.73)与(6.74)的相似性表明我们还可以有

$$A(R_0, t) = \frac{1}{cR_0} \times \int j_c(t - \frac{R_0}{c} + \frac{r \cdot n}{c}) dV \quad (6.76)$$

图 6.8 偶极子辐射示意图。参见方程(6.85)及(6.86)

我们看到真空中的平面波服从关系式(6.35)

$$H = n \wedge E \quad (6.35)$$

因而只要磁场强度是在离电荷分布很远的地方量度的，也即 $\nabla\phi$ 可以忽略不计，那么由式(6.71)就可求得

$$H = \frac{1}{c} \dot{A} \wedge n \quad (6.77)$$

现在再来求运动电荷所辐射出的能量就很容易了。从方程(6.35)及(6.43)立即可求得坡印廷矢量。

$$S = \frac{c}{4\pi} H^2 n \quad (6.78)$$

对偶极子——即两个略为分开的异性电荷——这种简单辐射情况来说，我们可认为(6.76)式对电流分布的积分就等于偶极矩的变化率

$$A = \frac{1}{cR_0} \dot{d} \quad (6.79)$$

式中

$$\dot{d} = \frac{d}{dt} \sum e r \quad (6.80)$$

这里 $d = \sum e r$ 是电荷分布的偶极矩；时间导数是对时间 $t' = t - (R_0/c)$ 取的，偶极子的尺度必须小于辐射波长 λ ；因为此时

$$\frac{r \cdot n}{c} \ll \frac{\lambda}{c} = P \quad (6.81)$$

且在方程(6.76)中忽略 $r \cdot n/c$ 项等于只忽略了比振荡周期 P 小得多的一个时间增量。从(6.77)及(6.35)两式可见，在离偶极子距离为 R_0 处的场强为

$$H = \frac{1}{c^2 R_0} \ddot{d} \wedge n \quad (6.82)$$

$$E = \frac{1}{c^2 R_0} (\ddot{d} \wedge n) \wedge n \quad (6.83)$$

而包含在立体角 $d\Omega$ 内的辐射强度 dI 是由坡印廷矢量在这个角度上积分而得：

$$dI = \frac{1}{4\pi c^3} (\ddot{d} \wedge n)^2 d\Omega \quad (6.84)$$

再对所有的立体角 $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ 进行积分就得

$$I = \iint \frac{\ddot{d}^2}{4\pi c^3} \sin^3\theta d\theta d\phi \quad (6.85)$$

$$= \frac{2}{3c^3} \ddot{d}^2 \quad (6.86)$$

对相距 r 的两个异性电荷 e 及 $-e$ ，其偶极矩为

$$d = er \quad (6.87)$$

而每秒钟的总辐射能就是

$$I = \frac{2e^2 r^2}{3c^3} \ddot{}^2 \quad (6.88)$$

问题 6.9 可以把磁偶极子想象是由相距为 a 的两个假想磁荷 Q 及 $-Q$ 组成。此时磁偶极矩应当为 $M=Qa$ 。试证明：(a) 沿这一结构轴向的磁场为 $H=2aQ/r^3$ 。(b) 脉冲星的 $r \sim 10^6$ 厘米， $\omega \sim 10^2$ ，其表面磁场就是 $H \sim 10^{12}$ 高斯。类似于方程(6.88)同样证明，当 a 与恒星自转轴垂直时，辐射强度为(Pa68)：

$$I = \frac{2}{3c^3} \ddot{M}^2 \sim 10^{36} \text{ 尔格秒}^{-1} \quad (6.89)$$

我们还应注意，如果一个系统是由荷质比相同的带电粒子构成，则这系统就不可能有偶极子辐射。对这种系统来说电荷中心和质量中心是重合的；如果质心 $\Sigma m r$ 保持不动，则导数 $\ddot{d}$ 就都消失了：

$$\ddot{d} = \Sigma e \ddot{r} = \Sigma \frac{e}{m} m \ddot{r} = 0 \quad (6.90)$$

然而对这种电荷系集，我们仍可得到电四极辐射或更高的电或磁的多极过程所产生的辐射。这一过程需要我们把原来忽略的项 $r \cdot n/c$ 重新引进，这时电流 j_c 就用 $r \cdot n/c$ 的级数来表示：

$$j_c(t' + \frac{r \cdot n}{c}) = j_c(t') + \frac{\partial}{\partial t} (\frac{r \cdot n}{c}) j_c(t') + \cdots \quad (6.91)$$

这里如以前一样 $t' = t - R_0/c$ 。如果只保留级数的前两项，并对所有电荷

求和，由方程(6.76)得到

$$A = \frac{\sum e v}{c R_0} + \frac{1}{c^2 R_0} \frac{\partial}{\partial t} \sum e v (r \cdot n) \quad (6.92)$$

式中第一项仍然是由随时间变化的偶极矩所产生。现在我们懂得， v 和 r 值都是对时间 t' 量度的，尽管为了书写方便所有的撇号都省去了。可以证明（见 La51）这就导致

$$A = \frac{\dot{d}}{c R_0} + \frac{1}{6 c^2 R_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} D - \frac{1}{c R_0} (\dot{M} \wedge n) \quad (6.93)$$

式中

$$M = \frac{1}{2c} \sum e r \wedge v \quad \text{及} \quad D = \sum e (3r(n \cdot r) - nr^2) \quad (6.94)$$

分别为磁偶极矩及电四极矩。注意当所有粒子的荷质比相同时磁偶极子项也消失了。这是因为角动量与 M 成正比，角动量守恒意味着 $\dot{M} = 0$ 。方程(6.93)右端第二项称为电四极项。

高阶多极项比偶极子辐射项小，因为它们明显地展开为 v/c 的级数项，而如式(6.81)所示，当系统的尺度比波长小时 v/c 是小量。

这里，经典理论中所作的种种考虑同样也适用于量子辐射理论。在量子辐射中，我们不讲运动电荷系统所产生的辐射强度，而讲辐射的发射几率。同样在荷质比并不消失的场合下，电偶极辐射的发射几率通常要比多极辐射的几率大得多。如果系统中所有构成系统的粒子具有相同的 e/m 比，则根据量子力学的选择定则，电偶极辐射是“被禁戒的”。例如在宇宙中可能有大量的星际或星系际分子氢 H_2 。但通过红外观测却没能满意地确证这些气体的存在，主要就是因为氢分子的对称性，迫使我们不得不去寻找那些只能由极微弱的电四极过程所产生的发射或吸收线。（紫外跃迁打破了这种对称性，因此实际上已被观测到了，见 Ca70a）。

由此附带给出一个极为重要的结论：辐射的发射就是吸收的逆过程，在一个原子系统中吸收的几率恒等于感应发射的几率（见 7.10 节）。当原子或分子受到与原子所能够发射的波的频率精确相等的光波所激发时就会发生相应的辐射，这种过程称为感应发射。我们发现，激发辐射和致激发辐射具有完全相同的性质，也就是说其光子全都属于同一格。这种感应发射与量子力学自发发射不同，后者与吸收无直接相似性。自发发射相应于未微扰的原子或分子产生的发射，它是原子或分子不受外界影响自己发出的辐射。

同样很有意义的是，这里所给出的导致辐射过程的一般途径与引力辐射有关，如以前几节所讨论的那样，引力和静电力都随离开质量或电荷的距离平方而减小。这就使我们在处理引力辐射时能够采用多少与电磁理论相似的形式。根据这种思路得出的一个直接结果是关于预期的引力辐射强度的说明。因为一切物质的惯性质量与引力质量之比为常数，故引力偶极辐射是不允许存在的。很微弱的四极辐射就是第一项允许的多极发射过程。此外，在任一给定的多极水平上所能预料的辐射量也必定是很小的，道理很简单，因为引力质量与惯性质量之比值，较电荷？质量之比值要小得多。如果采用电子的荷质比，那么两者强度之比估

计会差约 $e^2/m^2G \sim 10^4$ 倍。由此显见，只有质量很大而且加速度也很大时，才可能会有引力辐射。这就要求在宇宙中存在很密集的质量系统。我们现在正在探索寻求这种天体，看这种天体是否存在。通常双星的质量及致密程度还不够，不足以产生能测量得到的引力辐射量。但对某些致密双星，引力辐射能在 10^{10} 年期间内对其轨道产生相当的影响 (Fa71)。

问题 6.10 试利用方程 (6.77) 以及四极矩的表达式 (6.93) 求定 (6.78) 形

式的坡印廷矢量，并证明四极辐射的辐射强度与 $(\ddot{D})^2$ 及 c^{-5} 成正比。

三个点号表示对时间的三阶导数。

引力四极辐射的实际强度为 (La51)：

$$I = \frac{G}{45c^5} \ddot{D}^2 \quad (6.95)$$

式中 D 是具有 (6.94) 形式的张量，但应以质量代替原式中的电荷 e 。四极

矩与椭率 $\xi \sim \frac{1}{2}[1 - (a_{\max}^2 / a_{\min}^2)]$ 成正比。如果旋转椭球体的质量对称轴

与旋转轴垂直，则有 (Ch70)

$$I \sim \frac{GM^2 a^4 \xi^2 \omega^6}{c^5} \quad (6.96)$$

这里假定 $(\xi \geq 1) \ll 1$ 。

如果脉冲星 $a \sim 10^6$ 厘米， $M \sim 10^{33}$ 克， $\xi \sim 10^{-5}$ 以及 $\omega \sim 10^2$ ，那么引力辐射强度就是 3×10^{32} 尔格·秒⁻¹。这个值比磁偶极辐射小。但在脉冲星一生的最早期，当其旋转周期约为 1 毫秒时，由于强度依 ω^6 增加，此外 ξ 在早期可能也还要大些，因此引力辐射可能等于甚至超过磁偶极子辐射。

除了脉冲星外，超新星、类星体及星系核可能也是引力辐射源。

6.14 无束缚电荷的光散射

当沿 z 方向运动的平面极化电磁波入射到质量为 m ，电荷为 e 的带电粒子上时，粒子就要受到形式为

$$E = E_0 \cos(K \cdot r - \omega t + a) \quad (6.97)$$

的电场的作用。如果电场足够弱，使得它赋予电荷的速度总是小的，即 $v \ll c$ ，那么电场力 eE 就总要比作用在粒子上的力 $ev \wedge H/c$ 大。这一结果从式 (6.35) 看是很显然的。粒子受到的加速度为

$$m \ddot{r} = eE \quad (6.98)$$

由电荷位移产生的偶极矩 $d = er$ 具有对时间的二阶导数

$$\ddot{d} = \frac{e^2}{m} E \quad (6.99)$$

现在我们知道，方程 (6.84) 就预示了沿 n 方向单位立体角内所散射的光强度

$$dI = \frac{e^4}{4\pi m^2 c^3} (E \wedge n)^2 d\Omega \quad (6.100)$$

我们说微分散射截面为

$$d\sigma(\theta, \phi) = \frac{dI(\theta, \phi)}{S} = \left[\frac{e^2}{mc^2} \right]^2 \sin^2 \theta d\Omega \quad (6.101)$$

式中 θ 是散射方向 n 及入射波电场方向 E 之间的夹角。而 S 由(6.43)式给出。我们看到：

(a) 辐射频率不因散射而改变。

(b) 散射光的角分布与频率无关。

(c) 总截面积与频率无关。总截面积是由 $d\sigma(\theta, \phi)$ 对一切角度 θ, ϕ 求积分而得：

$$\sigma = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sigma(\theta, \phi) \sin \theta d\phi d\theta$$

对电子而言

$$\sigma_e = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 = 6.65 \times 10^{-25} \text{ 厘米}^2 \quad (6.102)$$

这就是所谓的汤姆孙 (Thomson) 散射截面。

(d) 微分散射截面对 θ 角是对称的，对称轴在 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 处。

(e) 质子的 σ 值比电子小 $(m_p/m_e)^2 \sim 10^6$ 倍。

我们再考虑 E 矢量的极化对辐射的实际角分布的影响。如果原始入射在粒子上的波是无极化的，我们可得到一个散射截面，该截面与 ϕ 无关，但与入射波方向与散射波方向间所夹的极角 Θ 有关 (见图 6.9)。由此可知 θ 角必定是 ϕ 及 Θ 角的函数，即

$$\cos \theta = \sin \Theta \cos \phi \quad (6.103)$$

图 6.9 入射波和散射波的方向 (见方程(6.101)及(6.105))

对任一给定的 Θ 角就有

$$\begin{aligned} \therefore \langle \sin^2 \theta \rangle &= 1 - \sin^2 \Theta \langle \cos^2 \phi \rangle = 1 - \frac{\sin^2 \Theta}{2} \\ &= \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \Theta) \end{aligned} \quad (6.104)$$

式中应用了这样一个事实，即对一切 ϕ 角取平均值时 $\langle \cos^2 \phi \rangle = 1/2$ 。因此对非极化辐射就有

$$d\sigma = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 (1 + \cos^2 \Theta) d\Omega \quad (6.105)$$

由此得到下述重要结果

(f) 对非极化辐射，散射截面在正向及后向两个方向上达到峰值，也即大部分光线是沿波原来运动方向或背离波原来的方向被散射掉了。

问题 6.11 证明作用在散射粒子上的力沿波传播方向上的分量为

$$F(\Theta) = (1 - \cos \Theta) d\sigma \frac{S}{c}$$

并证明对一切 Θ 角取平均得到沿入射方向总的作用力 F 为：

$$F = \frac{2}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 E^2 = \frac{\sigma S}{c} \quad (6.106)$$

在明亮的热星附近，上述的力可能是作用在电子上的主要的力。从日

冕中射来的相当大一部分可见光看来也是由电子散射产生的。但是，黄道光，即在黄道平面上漫散射的太阳光，是由在行星轨道平面上环绕太阳转动的微小固体微粒散射出来的。黄道光一直延伸到日冕中，使日冕亮度略为增加。

现在我们同样可以来考虑谐和束缚电荷所引起的散射。这种电荷通常以自振频率 ω_0 振荡，而电场力则欲强使这种振子作频率为 ω 的振动。这种受迫振动的运动方程为

$$\ddot{r} + \omega_0^2 r = \frac{eE}{m} \quad (6.107)$$

如果 $E=0$ ，即得频率为 ω_0 的振动。如果 E 的形式如(6.97)，则方程(6.107)的解为

$$r = \frac{eE}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (6.108)$$

及

$$\ddot{d} = \frac{e^2}{m} E \left(\frac{1}{1 - (\omega_0^2 / \omega^2)} \right) \quad (6.109)$$

于是（见方程(6.99)）散射截面显然就是

$$\sigma = \frac{\sigma_{\text{汤姆孙}}}{(1 - \omega_0^2 / \omega^2)^2} \quad (6.110)$$

当 $\omega \gg \omega_0$ 时，电子就象自由电子一样，我们再一次得到 $\sigma = \sigma_{\text{汤姆孙}}$ 。如果 $\omega_0 \gg \omega$ 则有

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \frac{e^4}{m^2 c^4} \frac{\omega^4}{\omega_0^4} \quad (6.111)$$

上式称为瑞利（Rayleigh）散射截面。瑞利散射造成了可见光在白天天空的散射。此时电子紧紧地为其母分子所束缚，所以 ω_0 比可见光频率 ω 大。蓝光的 $(\omega / \omega_0)^4$ 大约是红光的约 $(2^4)=16$ 倍，因而蓝光的散射更强烈。也正因为如此红光就更容易直接穿过大气而不受偏折，而蓝光则易从直线路径上散射出去，因而当我们看太阳以外的天空时，天空就呈现蓝色。

在天文学中还有一种令人感兴趣的散射情况，这就是由细小的尘埃微粒所引起的散射。对折射率为 n 的球状微粒，如果球半径 a 比波长 λ 小得多，那么可以证明其散射截面是

$$\sigma = 24\pi^3 \left[\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right]^2 \frac{V^2}{\lambda^4} \quad (6.112)$$

V 是体积，等于 $(4\pi/3)a^3$ 。我们看到，上式中因子 λ^{-4} 与瑞利散射有相似之处，事实上这两种散射是有关系的。由汤姆孙散射或由瑞利散射所求得的微分截面与角度的关系是完全相同的（见式(6.105)）。这类散射近似地表明了上述黄道（行星际）微粒散射的特征，因而也就说明了下一节中所要讨论的星际微粒的散射特征。

6.15 星际微粒消光

星际微粒对辐射有吸收和散射作用，因此星光不是直接到达观测者

的。我们来讨论微粒的消光 (Gr68)。消光这个名词表示光线中被阻挡而到达不了观测者的那一部分。要是我们无法知道有多少辐射被散射，有多少被吸收，那么这时消光这个名称就成了一个有用的概念。有时被散射的辐射可以在反射星云中观测到，所谓反射星云就是由亮星所照亮的尘埃微粒云。这些云的光谱与照射它的亮星的光谱极其相似。由此看来，辐射的散射部分与雪的散射极相似。从这个意义上讲，粒子基本上是白色的或灰色的。另一方面当我们观测穿过星际云的星光时，我们发现作为一阶近似，消光量是与波长 λ 成反比的。图 6.10 给出了有关的观测资料。 λ^{-4} 形式的散

图 6.10 星际消光曲线，它表明消光的星等是波长倒数的函数。这些资料是从英仙座 ζ 及 ϵ 两颗星的观测得到的，并已经过 $V \sim 0$ 及一个星等的消光差 $\mathbb{E}$ ($B - V$) 的标准化。因此这曲线大致表征了通过银河平面光程约为 1 千秒差距时的消光特性 (St69)

射可能是主要的散射过程；微粒大小也许大致与辐射波长相近，而微粒的大小分布可能又是如此凑巧，使得视散射截面对所有不同大小粒子积分后得出的总平均截面正好与 λ^{-1} 成正比。这些想法都是很不可靠的！

根据现有观测还不清楚这些微粒代表什么样的物质。有些天体物理学家相信石墨粒子象是一种组成成分。另一些人则更倾向于认为这些粒子是冰或硅酸盐。最新的一些红外光谱观测显示在 3μ 波长处有一个微弱的吸收带，这一波长相当于冰晶体可能产生吸收的位置。于是推测有这种可能性，即微粒是由覆盖在石墨核上的冰所构成：在碳星的稠密大气中石墨可能凝聚成微粒；当这些石墨微粒往外流向星际空间时，在恒星大气外层较冷的部分，水就可能冻结在它的上面。一般大家都有一种强烈的感觉，即认为星际微粒应该在宇宙中某些密度比较高的区域内形成，比如在恒星大气中，或在稠密的星云中形成。因为一般的星际介质太稀薄了，分子间简直很少有机会相撞，因而物质不可能生长成微米大小的微粒。在 9.4 节中还要进一步讨论这个问题。

还应提一下另外一个因素。至今我们讨论的都是球形纯电介质微粒。但是微粒也可能具有金属性质；于是它们就能吸收和发出辐射——也即它们不是单纯的散射。对金属性微粒介电常数还有虚数分量，此时我们就说是复折射率 m 。这时对尺度比波长小的微粒来说，吸收就超过散射，而消光由式 (Gr68)

$$\mathbb{E} = 6\pi N \left(\frac{1 - m^2}{m^2 + 2} \right) \frac{V}{\lambda} (\text{IP}) \quad (6.113)$$

给出。其中 $\mathbb{E}$ 是单位入射能量的总消光量，符号 (IP) 表示在计算时应该使用括号中的虚数部分。

当粒子的大小与被消光的辐射波长相当时，即使对球形粒子来说消光的表达式也是十分复杂的；对非球形粒子建立消光理论更是极其麻烦。

我们也许会认为星际消光仅仅是由金属性的吸收所产生的，因为如果是这样的话 $1/\lambda$ 的关系就可直接得到了。然而事情并不如此简单。折射率 m 和 n 是与波长有关的，而这种波长相关性由微粒的化学成分所确定。如果这些参量都可任意变动，那么 $1/\lambda$ 关系当然能够比较容易确立，

——但其代价是：天文学家为了说明星际微粒而造出了为数很多的理论模型。如同天文学的其他部分一样，模型数量之多正反映了不确定程度之大。

最后一点说明涉及到散射光的总体极化，这即是散射与再发射光线的差别。来自星际尘埃或拱星尘埃的热再发辐射应该是非极化的，但上述三种过程中任何一种所散射的辐射应该是极化辐射，且可以证明极化与 Θ 有关

$$P = \frac{\sin^2 \Theta}{1 + \cos^2 \Theta} \quad (6.114)$$

此外椭圆形的粒子也会引起散射光的极化。我们相信位于银道面附近的遥远恒星射向我们的光线就是由这种过程引起极化的。在 9.8 节中将讨论小微粒怎样排列才能产生一致的极化辐射。微粒和辐射的相互作用是一个复杂的课题。在参考文献 (Gr68) 及 (vdHu57) 中可找到有关的详细讨论。

6.16 等离子体辐射的吸收和发射

在 6.11 节讨论了辐射在稀薄电离介质中的传播问题。然而，在有些天体物理场合中所遇到的等离子体是稠密的，在这种等离子体中离子和电子间碰撞以比较高的频率 ν_0 出现。在这种意义下讲，一个介质对高频波可能是稀薄的，而对较低频率的波则可能是稠密的。这正是常见的情况。由于在这两种情况下介质的透射性的差异是如此之大，因此从同一个源接收到的辐射谱在高频和低频处也是很不一样的。通过谱的这种比较突然的变化，再加上其他的资料，我们就能够确定出碰撞频率，同时还能确定介质的密度，这一点下面还要说明。因此射电天文学就为测定星际电离气体的密度提供了极有用的手段。

为了说明所有这一切是如何发生的，我们就来考察一个电离介质，同时定义碰撞频率 ν_c 为电子运动方向出现 90° 偏折的频率，通常这种偏折是通过与离子的一系列小的碰撞而实现的。我们之所以选择 90° 是因为电子在原先碰撞前所具有的方向动量经过 90° 偏折后就完全丧失了；也就是说，原来施加在电子上的力所产生的加速度方向通过 90° 偏折后就完全失去作用了。此外我们只考虑电子与离子的碰撞，因为我们感兴趣的只是通过碰撞引起的能量耗散。当一个电子和另一个电子相撞时产生对称偶极子运动，在这种过程中没有能量辐射掉。因此电子-电子碰撞是可以忽略的。

我们现在考虑电子被外加电场 E 加速的情况——在这里 E 是电磁波的电场分量。当粒子受电场感应而达到一定速度时，它就会受到碰撞并失去其所有的方向动量。这就表明由于电磁波穿过介质运动因此使电子产生加速，而又由于碰撞使电子造成减速。这两种作用抵消后余下的净效应就等于在电子上施加一个力，即

$$m \ddot{r} = eE(r, t) - m \dot{r} \nu_c \quad (6.115)$$

这里 m 是电子的约化质量。右端第二项表示的动量损失等于电子每出现一次碰撞时的瞬时动量 $m \dot{r}$ ，或者说每单位时间间隔的损失为 $m \dot{r} \nu_c$ 。以前我们形式上对 ν_c 作了定义，而我们的问题是要计算实际的 ν_c 值。然而

在求 v_c 之前，我们可以先解方程(6.115)，以求得在与 v_c 相应的不同频率范围内等离子体的透射性能。

我们已经看到，由电磁波传输给电子的一部分动量在碰撞中失去了。这意味着从波传递到粒子的能量耗散掉了，既然电磁波的能量与波的振幅的平方，即与 E^2 有关，因此我们可以预计，当波在介质中传播时 E 会减小。于是我们就可以把形式如

$$E(r, t) = E_0 e^{-Kx/2} \cos \omega t \quad (6.116)$$

的 $E(r, t)$ 函数应用到方程(6.115)中去，这里 K 是吸收系数。在阻尼项的指数中出现 2，是为了使得经过距离 $x=1/K$ 后，波的能量而不是波的振幅减小为 $1/e$ 倍。注意吸收系数的量纲总是（长度） $^{-1}$ 。

因为波中能量的损失率是由单位体积内碰撞总数所确定的，因此我们可将方程(6.115)改写为

$$nm \ddot{r} + nm v_c \dot{r} = ne E_0 e^{-Kx/2} \cos \omega t \quad (6.117)$$

式中 n 是电子密度。

如果用复数场强 E 代替方程(6.117)中的实数场，那么微分方程的解就要简单得多。但是在这种情况下为了记住仅仅是方程的实部才有物理意义，我们就加上记号(RP)

$$nm \ddot{r} + nm v_c \dot{r} = ne E_0 e^{-(Kx/2) + i\omega t} = ne E(RP) \quad (6.118)$$

问题 6.12 用代入法证明式(6.118)的一个特解为

$$r = -\left(\frac{eE_0}{m\omega}\right) e^{(i\omega t - Kx/2)} \left[\frac{iv_c + \omega}{v_0^2 + \omega^2}\right] \quad (6.119)$$

我们现在就可以把由单位体积内 n 个粒子所产生的电流写为：

$$j = ne \dot{r} = \frac{ne^2}{m} \left[\frac{v_c - i\omega}{v_c^2 + \omega^2}\right] E(RP) \quad (6.120)$$

如同方程(6.50)式一样， ner 为感应极化场，因而式(6.120)右端括号中第二项是感应极化电流

$$\frac{dP}{dt} = i\omega P = i\omega \frac{\epsilon - 1}{4\pi} E(RP) \quad (6.121)$$

由于假设场的形式如(6.118)，因此这里自然就出现了虚数 i ，而式(6.121)则是(6.10)式这个定义的直接结果。(6.120)式括号中的实数项就是由电荷流动产生的电流 σE 。我们看到方程(6.120)有两个特点。右面与 v_c 成正比的项代表能量耗散，因而就与吸收系数 K 直接有关。第二项与 $i\omega$ 成正比，依赖于介质中的介电常数，因此使波通过介质时以速度 $c\epsilon^{-1}$ 传播。形式上可写出

$$j = (\sigma + i\omega \frac{\epsilon - 1}{4\pi}) E(RP) \quad (6.122)$$

其中

$$\epsilon = 1 - \frac{4\pi e^2 n}{m(\omega^2 + v_c^2)} \quad \text{和} \quad \sigma = \frac{e^2 n v_c}{m(\omega^2 + v_c^2)} \quad (6.123)$$

如果再把虚介电常数和复介电常数写为

$$\epsilon_i = -\frac{i4\pi\sigma}{\omega} \quad \text{和} \quad \epsilon_c = \epsilon + \epsilon_i \quad (6.124)$$

那么方程(6.122)就可写为纯介电性质的形式。事实上一切麦克斯韦方程都取这种形式。只要注意 j 仅在麦克斯韦微分方程组的(6.15)及(6.23)两式中出现,也就可以直接看出这一点。对如(6.118)式那样的复数场,传播中的波将取以下形式(见方程(6.36))

$$E = E_0 \exp[i(\omega t \pm \frac{\omega \epsilon_c^{1/2} x}{c})] \quad (\text{RP}) \quad (6.125)$$

因而如果有

$$\frac{K}{2} = \frac{i\omega}{c} \epsilon_c^{1/2} \quad (\text{RP}) \quad (6.126)$$

则(6.118)式就会成立。我们总可将 ϵ_c 写为下面形式

$$\epsilon_c = (N + iQ)^2 \quad (6.127)$$

只要我们选择

$$\epsilon_i = 2NQi = -(\frac{4\pi\sigma}{\omega})i \quad \text{及} \quad \epsilon = N^2 - Q^2 \quad (6.128)$$

那么式中 N 和 Q 就是实数。因此我们感兴趣的是量值

$$\frac{K}{2} = -\frac{\omega Q}{c} = \frac{4\pi\sigma}{2Nc} \quad (6.129)$$

事实上对射电天文中所碰到的任何情况来说有 $\omega \gg v_c$, ω_p , 故由(6.123)及(6.128)两式给出

$$|\epsilon| \gg \frac{4\pi\sigma}{\omega} \quad \text{及} \quad N \sim \epsilon^{1/2} \quad (6.130)$$

因此在同样的近似程度下还可得

$$K = \frac{4\pi(e^2 n / m\omega^2) v_c / c}{\sqrt{1 - 4\pi e^2 n / m\omega^2}} = \frac{v_c (\omega_p^2 / \omega^2) / c}{\sqrt{1 - \omega_p^2 / \omega^2}} \quad (6.131)$$

式中 ω_p 是等离子体的频率(6.55)。

我们还需要计算碰撞频率 v_c , 但因大部分准备工作都已做好余下事情就简单了。每单位体积内有密度为 n 的散射中心,使粒子在平方反比律场中产生一个叠加的偏折,方程(3.72)即给出了在约化质量为 μ 的粒子上的这种偏折作用力。式(3.72)中的符号 μ 与这里的磁导率容易混淆。为避免这种混淆,我们仍用符号 m 表示电子的约化质量。在方程(6.115)中我们已定义了阻力 $m \dot{v}$, 我们现在就把它代入式(3.67)的右端。同时,注意 $\dot{v}$ 是碰撞前的速度,它与式(3.67)中 v_0 的作用相同,因此

$$m v_0 v_c = m 2\pi n v_0^2 \int_{s_{\min}}^{s_{\max}} s(1 - \cos \Theta) ds \quad (6.132)$$

当偏折 Θ 很小时有

$$1 - \cos \Theta \approx 2 \tan^2 \frac{\Theta}{2} = 1 \left[\frac{Ze^2}{v_0^2 s m} \right]^2 \quad (6.133)$$

上面近似式的后半部分是根据与方程(3.69)类似的情况得出的。但这里用库仑力代替了引力。式中 Z 是一个离子的典型电荷。由此可得

$$v_c = 4\pi n < \frac{1}{v_0} > \frac{1}{< v_0^2 >} \frac{Z^2 e^4}{m^2} \int_{s_{\min}}^{s_{\max}} s^{-1} ds$$

$$= \frac{4\sqrt{2}\pi}{3} n \frac{Z^2 e^4}{\sqrt{m(kT)^{3/2}}} \ln \frac{s_{\max}}{s_{\min}} \quad (6.134)$$

推导上式时利用了表达式(4.109)及(4.110)。再从(6.131)及(6.134)两式得

$$K(\omega) = \frac{32\pi^{3/2} e^6 n^2 Z^2}{3\sqrt{2} c \omega^2 (kTm)^{3/2}} \ln \frac{s_{\max}}{s_{\min}} \quad (6.135)$$

这里假定有许许多多很微弱的偏折发生，致使最小碰撞参数 $s'_{\min}$ 也足够大，因而就使势能比动能小。特别当 $Z=1$ 时有

$$s'_{\min} \gg \frac{2e^2}{mv_0^2} \quad (6.136)$$

星际介质中 s 很少会小于 10^{-2} 厘米，而 $2e^2 = 5 \times 10^{-19}$ ；此外在电离区域中典型的 mv^2 值为 10^{-12} 尔格。这就说明，一般说来(6.136)式是充分满足的。小碰撞参数的情况只是少有的例外。

s 的第二个下界由电子的德布罗意 (de Broglie) 波长 $\lambda_e = h/mv$ 所给出。当电子距离比这波长更近时，电子的性质就不再象是点电荷。因此可用 $s'_{\min} > \lambda_e/2$ 作下限。我们还可确定 s 的两个上界。第一，我们要求碰撞是瞬即出现的，即时间 $1/\omega \gg s'_{\max}/v_0$ ；电场改变的时间要比电子碰撞或说电子通过最短行程所需的时间长。第二个上限是 $s'_{\max} = L$ ， L 是方程(4.156)表达的德拜长度。当距离大于 L 时，由于邻近电子的屏蔽作用，电荷效应被隔开了。对星际电离物质应用极限 $s'_{\max}$ 及 $s'_{\min}$ 就可写出

$$\frac{s'_{\max}}{s'_{\min}} = \frac{mv_0^2}{2e^2} \frac{v_0}{\omega} \sim \frac{(2kT)^{3/2}}{2e^2 \omega m^{1/2}}$$

对电离氢有 $Z=1$ ，此时完整的表达式为

$$K(\omega) = \frac{32\pi^{3/2}}{3\sqrt{2}} \frac{e^6 n^2}{c(ckT)^{3/2} \omega^2} \ln \left[\frac{1.32(kT)^{3/2}}{e^2 m^{1/2} \omega} \right]$$

$$K(\nu) = \frac{8}{3\sqrt{2}\pi} \frac{e^6 n^2}{c(mkT)^{3/2} \nu^2} \ln \left[\frac{1.32(kT)^{3/2}}{2\pi e^2 m^{1/2} \nu} \right] \quad (6.137)$$

6.17 热射电源的辐射

现在来看上一节所得的结果，我们发现我们已得到了一个吸收系数 $K(\nu)$ ，它告诉我们穿越电离介质每单位长度后的吸收量。当一束电磁波穿过介质走了距离 $D = \int dx$ 后，它所经过的光学深度为

$$\tau(\nu) = \int K(\nu) dx \quad (6.138)$$

如果整个区域内温度不变，而仅有密度随位置 x 而改变，那么我们有

$$\tau(\nu) = F(T, \nu) \int n^2 dx \quad (6.139)$$

这里函数 F 就是 $K(\nu)/n^2$ (见方程(6.137))，而积分

$$\varepsilon_m = \int n^2 dx = \langle n^2 \rangle D \quad (6.140)$$

称为发射量度；它是在 D 这么一段距离上所预期的吸收和发射量的某种量度。在射电天文习惯用厘米⁻³为单位来表达电子密度 n ，而所经过的路径长度 D 则用秒差距表示。因此发射量度的单位是厘米⁻⁶·秒差距。

发射量度是这样的一种量度，它告诉了我们在给定区域内沿视线方向上原子粒子互相密切接近的频繁程度。根据这种理解，某些量值，如产生某一条发射线的原子的复合数等，也应该与 ε_m 成正比。通常对某一给定谱线 ν_1 ，其复合线强度 R_1 也还是温度的已知函数。因此有

$$R(\nu_1) = F_1(T) \varepsilon_m \quad (6.141)$$

由此如果我们既测得了复合线的强度——这在可见光谱部分是可能做到的，同时又测得了射电热发射，那么该区域内的发射量度和温度就都能求出。如果真能这样做的话，射电测量就最好在这样的频率上进行，使这个区域对这个频率来说光学上是薄的。这样一来由云所产生的辐射自吸收作用就可不必考虑了。

光学薄云产生自吸收的一个有趣性质是其亮度应该与频率 ν 无关。这是因为如果忽略式(6.137)中对数项与频率的微弱相关性，那么吸收率 $K(\nu)$ 与 ν^2 成反比。同时相应气体温度为 T 时黑体的射电波能密度在波长很长时应当为

$$\rho(\nu) \sim \frac{8\pi k T \nu^2}{c^3} \quad h\nu \ll kT \quad (4.80)$$

因此只要区域是光学上薄的，气体区域的光学深度或有效发射率与黑体强度 $I(\nu) = \rho(\nu)c/4$ 的乘积就与频率无关。在低频时 $\tau(\nu) \geq 1$ ，这性质就不再满足。此时有效发射率仍保持接近于 1，而与频率有关的项仅是 $I(\nu)$ 。因此在这种低频时，热源应该呈现与 ν^2 成正比的谱。

在谱的平坦部分，乘积 $S(\nu) = \tau(\nu)I(\nu)$ 与 $T^{-1/2} \varepsilon_m$ 成正比；而这后一个乘积则可直接由测量这频率范围内任意地方的表面亮度而求得。在谱的陡峭部分，区域是不透明的。在频率 D 处测得的表面亮度仅与 T 有关（见方程(4.81)）。这两组数据放在一起就既可提供温度的信息又可提供发射量度 ε_m 的信息。图 6.11 画出了某些很致密的电离氢区域的谱，这些图清楚地表明我们所期望的曲线形式。

在这幅对数-对数图上，低频部分谱的斜率的期望值是 2，高频部分是平坦的。

NGC7027 是一个行星状星云。曼兹格 (Mezger) (Me68) 发现其发射量度为 5.4×10^7 厘米⁻⁶·秒差距，温度为 $\sim 1.1 \times$

图 6.11 在致密 HII 区域若干次观测所得到的数据。

(见正文说明) (Me68)

$10^4 K$ (见图 6.11 的数据)。如果假定这个天体在视线方向的光学深度与观测到的直径相近，那么就可以计算出它的实际密度。曼兹格给出这天体的密度值为 $n \sim 2.3 \times 10^4$ 厘米⁻³。根据密度和总体积我们还能计算出星云的质量，在本例中星云质量约为 $0.25 M_\odot$ 或 5×10^{32} 克。观测得到的 NGC7027 的直径约为 0.1 秒差距。

在银河平面上明亮的年轻星附近可能找到的其他一些致密 HII 区域，其温度较上述温度略为低些，而密度则几乎相同，但有时质量比上述质量要大得多——可达到几个恒星质量。我们相信这个数值就代表了星云形成大质量恒星后的残余质量。当大质量原恒星接近主星序而变亮时，它就发射出强烈的紫外辐射流，这辐射流加热了气体并使之电离。这类 HII 区域将在第九章中讨论。

6.18 同步加速辐射

当带电粒子以相对论性速度穿越磁场时，它就描述出某种螺旋运动。螺旋线的轴沿磁场方向，粒子所受到的加速是沿垂直磁力线的方向。当粒子运动时，加速度矢量的方向不断地在改变。

我们首先考虑作相对论性运动的粒子在垂直于磁场的平面上的轨道运动情况。这并不失一般性，因为沿磁力线方向的恒定速度分量并不会影响辐射率。

图 6.12 相对论性带电粒子在磁场中的轨道运动。

磁力线方向从纸外指向纸面

只要我们记得力代表动量的变化率，我们就可用式(6.111)去计算粒子的偏转率。把图 6.12 中的运动方向视为 x 方向，径向代表 y 方向。在 Δt_0 时间内，沿 y 方向的动量变化将达

$$\Delta p_y = \frac{evB}{c} \Delta t_0 \quad (6.142)$$

因为初始相对论性动量 p_x 为

$$p_x = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (5.30)$$

由此可见在 Δt_0 时间内的角偏转为

$$\delta = \frac{\Delta p_y}{p_x} = \frac{eB}{m_0 c} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta t_0 = \frac{eB \Delta t_0}{m_0 c \gamma(v)} \quad (6.143)$$

式中 m_0 是粒子的静质量。由此得出，为了使粒子偏转一个弧度 ($\delta=1$) 所需要的时间 Δt_1 为：

$$\Delta t_1 = \frac{m_0 c}{eB} \gamma(v) \quad (6.144)$$

如果用(5.40)式的 $m_0 \gamma(v)$ 去代替(6.13)式中的 p_c/v_c ，则可知方程(6.13)给出的回转频率就是 Δt_1 的倒数。

得到粒子回转频率后，我们或许会认为问题已经完全解决了，粒子就将简单地以这个频率辐射能量。但事实并非如此。运动电荷辐射的谱的频率实际上往往比 ω_c 高几个量级。造成这个现象的直接原因是因为粒子所发出的辐射是高度集中在运动前进方向附近角半宽度为（由方程(5.50)可得）：

$$\Delta \theta \sim \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \gamma(v)^{-1} \quad (6.145)$$

的窄束内。正因为如此，粒子回转运动的每一圈内除了在很短暂的时间

间隔：

$$\Delta t_2 = 2\Delta\theta\Delta t_1 = \frac{2m_0c}{eB} \quad (6.146)$$

内之外，在其余时间内观测者不能恰当地定向接收到粒子所发出的辐射。

但在时间间隔 Δt_2 所发出的辐射到达观测者所在的地方时，实际上变成了更短的时间间隔 Δt 。这是因为在 Δt_2 之初粒子发射的辐射比 Δt_2 之末发射的辐射需要移动更长的距离才能到达观测者，在 Δt_2 之末粒子离观测者当然更近些。如果粒子在 Δt_2 时间内移动距离为 L ，那么在 Δt_2 之末发出的辐射将仅仅比 Δt_2 间隔之始发出的辐射晚一个时间 Δt ：

$$\Delta t \sim -\left(\frac{L}{c} - \frac{L}{v}\right) \quad (6.147)$$

又因

$$L \sim v\Delta t_2 \quad (6.148)$$

我们得到

$$\Delta t \sim \left(1 - \frac{v}{c}\right)\Delta t_2 \sim \frac{m_0c}{eB}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \quad (6.149)$$

又因为对高度相对论性粒子有

$$\left(1 - \frac{v}{c}\right) \sim \frac{1}{2}\left(1 + \frac{v}{c}\right)\left(1 - \frac{v}{c}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \quad (6.150)$$

与 Δt 时间间隔成倒数关系的辐射频率就是

$$\omega_m \sim \frac{1}{\Delta t} \sim \frac{eB}{m_0c}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} = \gamma^2(v)\omega_c = \frac{eB}{m_0c}\left(\frac{\varepsilon}{m_0c^2}\right)^2 \quad (6.151)$$

式中 ε 是粒子总能量， $\varepsilon \gg m_0c^2$ ， ω 是在磁场中运动的非相对论性粒子的辐射频率。对在磁场中运动的相对论性粒子，我们可以指望在 ω_m 这个频率量级上看到辐射。因 $(1 - v^2/c^2)$ 是一个很小的量，显然 ω_m 就要比回转频率大几个数量级

$$\omega_m \gg \omega_c = \frac{eB}{m_0c} \quad (6.152)$$

我们来总结一下：

(1) 首先，我们计算在磁场中运动的粒子的轨道频率。

(2) 其次，我们在观测者所在的参考系中计算粒子能够向观测者方向发出辐射的时间。

(3) 最后，计算电磁波列初始和最后部分到达观测者位置所经过的时间间隔。这个时间间隔与粒子在磁场中的回转周期相比是很小的，因此与这时间间隔相应的频率 $\omega_m \sim 1/\Delta t$ 就比这磁场中非相对论性粒子的回转频率高 $(\varepsilon/m_0c^2)^2$ 倍。

6.19 同步加速辐射谱

对单能电子进行上面所概述的严格计算后，就可实际得出预期的同步加速辐射谱，这种谱在回转频率高谐波处排得非常致密的一组谱线。谱分布的峰值出现在频率 $\omega = 0.5\omega_m$ 处。图 6.13 表明了谱函数 $p(\omega/\omega_m)$

的形状。 p 的极大值是 $p(0.5)=0.1$ 。这方面的理论细节在参考文献 (Gi64) *及 (Sh60) *中有讨论。

可以证明，在单位时间单位频率区间 $d\nu$ 内，能量为 ε 的粒子的实际辐射能量为

$$P(\nu, \varepsilon)d\nu = P(\omega, \varepsilon)2\pi d\omega = \frac{16e^3 B}{m_0 c^2} p(\omega / \omega_m) d\omega \quad (6.153)$$

在频率很高及很低的两种极端情况下 $p(\omega / \omega_m)$ 的渐近值为

$$p(\omega / \omega_m) = 0.256 \left(\frac{\omega}{\omega_m} \right)^{1/3}, \quad \omega \ll \omega_m$$

$$p(\omega / \omega_m) = \frac{1}{16} \left(\frac{\pi \omega}{\omega_m} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{2\omega}{3\omega_m}\right), \quad \omega \gg \omega_m \quad (6.154)$$

图 6.13 在同步加速谱中致密分布的谱线的包络线。粒子的频率 $\omega_m = (eB/m_0 c) (\varepsilon / m_0 c^2)^{1/2}$ 。在实际情况中粒子能量可能有一定范围的变化，因此致密分布的谱线实际上是看不见的，所能见到是连续包络线的形状 (Sh60)

问题 6.13 在 5.9 节中我们看到，只要源和观测者两者都在惯性参考系内运动，那么天体的辐射功率就与观测者的静止参考系无关。我们利用这个事实来求以同步加速辐射形式所发射的总功率，其中在计算回转电荷的发射时，应从随电荷的瞬时速度运动着的某个惯性系来观测电荷。当电荷垂直磁场运动时，如电荷总能量为 ε ，其总功率就是

$$P(\varepsilon) = \frac{2}{3} \frac{e^4 B^2}{m_0^2 c^3} \left(\frac{\varepsilon}{m_0 c^2} \right)^2 \quad (6.155)$$

对一个电子来说

$$P(\varepsilon) = 158 \times 10^{-15} B^2 \left(\frac{\varepsilon}{m_0 c^2} \right)^2 \text{ 尔格} \cdot \text{秒}^{-1}$$

$$= 2.48 \times 10^{-2} \left(\frac{B^2}{8\pi} \right) \left(\frac{\varepsilon}{m_0 c^2} \right)^2 \text{ 电子伏特} \cdot \text{秒}^{-1}$$

注意，粗略地说 $P(\omega, \varepsilon) \omega_m$ 是与 $P(\varepsilon)$ 相应的，试证明上述表达式至少与表达式 (6.151)，(6.153) 及 (6.154) 是近似一致的。并证明方程 (6.153) 在图 6.12 的曲线下进行数值积分后所得的结果与上面结果是相同的。

问题 6.14 蟹状星云是同步加速辐射起着重要作用的一个天体。取蟹状星云中某些明亮纤维云的磁场强度约为 10^{-4} 高斯，证明经典运动电子应该大约在频率 300 赫处发出辐射。这个值与能量无关。反过来如果电子能量变为 10^9 电子伏特，即比静质量能约大 2×10^3 倍，那么辐射峰值就将出现在 600 兆赫左右。而如果能量再变为 10^{12} 电子伏特，则辐射峰值就将出现在谱的可见光部分，即频率为 6×10^{14} 赫的地方。

显然，观测到的谱的具体形式既要取决于辐射粒子的能谱又取决于函数 $P(\nu, \varepsilon)$ 。如果我们对沿视线不同距离 y 上来的辐射进行积分，一直积到某个距离 R ，那么在频率 ν 处合成的谱强度为

$$I_\nu d\nu = \int_0^{\varepsilon_{\max}} \int_0^R P(\nu, \varepsilon) n(\varepsilon, r) dr d\varepsilon d\nu \quad (6.156)$$

式中 $n(\varepsilon, r)$ 是距离 r 处能量为 ε 的粒子数密度。

经常遇到的情况是 $n(\varepsilon) \propto \varepsilon^{-\gamma}$ ，也即电子具有指数值 $-\gamma$ 为常数的指数谱，这时强度服从正比关系 $I_\nu \propto \nu^{-\alpha}$ ，这里 $\alpha = (\gamma - 1)/2$ ，为了证明这个关系，我们从图 6.13 及 (6.153) 式看到，因为带宽为 $\Delta\nu = \Delta\omega$ ， $2\pi \sim 3\omega_m/2\pi$ 所以 $P(\nu, \varepsilon)$ 等于 $16e^3 B/m_0 c^2$ 乘幅度 0.1 再乘 2π 。

现在我们假定每个电子把它的全部辐射功率贮存在频率 ω_m 处。方程 (6.151) 表明 $\varepsilon \propto \omega_m^{1/2}$ ，因而 $\varepsilon^{-\gamma} \propto \omega_m^{-\gamma/2}$ ，以及 $\Delta\varepsilon \propto \Delta\omega / \omega_m^{1/2}$ ，而如果谱的形式沿积分途径不变，(6.156) 式中的总辐射功率就服从正比关系：

$$I(\nu) \Delta\nu \propto \omega_m \varepsilon^{-\gamma} \Delta\varepsilon \propto \omega_m^{(1-\gamma)/2} \Delta\omega \quad (6.157)$$

由此得到

$$I(\nu) \propto \nu^{-\alpha}, \quad \alpha = \frac{(\gamma - 1)}{2} \quad (6.158)$$

α 就称为源的谱指数。为了求出这个电子能量和电磁辐射谱之间的关系，要求源必须是光学上薄的。光学上厚的（自吸收）源在后面讨论。许多非热宇宙源 $0.2 \lesssim \alpha \lesssim 1.2$ 。对河外天体谱指数可大到 $\alpha = 2$ 。当频率范围低于几千兆赫时，许多类星体 $\alpha < 0.5$ ；但它们常包含光学上厚的分量。大部分射电星系 $\alpha > 0.5$ (Co72)。某些河外源的谱如图 9.13 所示。

上述这些一般概念对银河系是符合得很好的。我们观测到一个 $\gamma \sim 2.6$ 的银河宇宙线电子谱。它是在地球的位置处所测量到的值，但电子是从很远的地方来的。同时射电波也表明有一个谱指数 $\alpha \sim 0.8$ 的总银河射电谱——这个观测值是符合 (6.158) 式的。

方程 (6.158) 在天体物理中具有重要意义，因为当我们观测了遥远天区来的同步射电发射后，就可利用这公式估计相对论性电子的能谱。但是射电波的总强度不仅是沿视线方向电子总数的函数，它也与产生相对论性电子辐射的区域内的磁场强度有关。另外，质子的同步加速辐射可能也是重要的 (Re68b)。

问题 6.15 证明 $I(\nu)$ 与 $B^{(\gamma+1)/2}$ 成正比。对随机取向的场 B^2 取垂直视线方向分量的（磁场强度）² 平均值。因此

$$\begin{aligned} I(\nu) &\propto B^{(\gamma+1)/2} \nu^{-(\gamma-1)/2} \\ &\propto B^{\alpha+1} \nu^{-\alpha} \end{aligned} \quad (6.159)$$

作为这些讨论的总结我们还应指出，同步加速发射象其他任何发射过程一样，也具有相应的吸收过程。我们相信某些强河外射电源的辐射是由同步加速发射方式产生的。然而这些源的谱却在同步加速辐射本应是具有最高发射率的地方呈现黑色。这一点可解释（见 7.10 节）为这些源对它们自己的辐射是不透明的。图 9.13 表明许多非热源在低频处的流量就是高。另一方面在这些低频处的流量不可能超过黑体的流量

$$I(\nu) d\Omega = \frac{2kT}{c^2} \nu^2 d\Omega \quad (4.81)$$

这里温度 T 是由电子能量 $kT \sim \varepsilon$ 来确定的。方程 (6.151) 给出了 ε 和源的磁场 B 以及发射频率 $\nu \sim \omega_{\max}/2\pi$ 三者之间的关系。把由此得到的 kT 值代入 (4.81) 式即得

$$I(\nu)d\Omega = \left(\frac{8\pi\nu^5 m_0^3 c}{eB}\right)^{1/2} d\Omega$$

它表达了根据频率 ν 处观测到的流量值所求得的源的磁场强度与源的角直径之间的关系。这种情况下的低频谱不再是黑体辐射谱，因为在较低的辐射频率处电子的能量减小了。实际上电子的温度 ε/k 是与频率有关的。计算源的磁场所必需的资料可用射电干涉仪 (Ke71) 收集到，这种具有峰值的同步加速自吸收谱正是射电源 3C147 的特征 (图 9.13)。

6.20 康普顿效应和逆康普顿效应

当高能光子射到带电粒子上时，它常把动量传递给粒子，使粒子在光子原先传播的方向上获得一个冲量分量。在处理低能汤姆孙散射过程时我们是忽略这一效应的。尽管我们在讨论低能电磁辐射与带电粒子相互作用时称为汤姆孙散射，而在这里讨论高能辐射时改称为康普顿散射，但我们必须知道这两者的基本过程是完全相同的，我们在这里谈的只是它们在数学处理上的差别。而这样做正是为了便于分析在不同能量范围内的极重要的物理效应。

逆康普顿效应是与康普顿效应相应的完全类似的效应，在这个效应中是高能粒子将动量传递给低能光子，给与它很大的动量和能量。除了观测它们的坐标系不同外，这两个过程是完全相似的。相对于高能粒子静止的观测者看来，逆康普顿效应就象是某种普通的康普顿散射过程。在他看来好象是高能光子被静止的带电粒子散射了。

正因为这种相似性，我们就只推导讨论康普顿效应所需要的表达式；然后根据坐标转换来讨论逆效应。我们要建立四个支配光子和粒子间相互作用的关系式。这里我们还须注意，在讨论康普顿效应时用光子来描述比用电磁波更方便；当然，这依旧是为了方便而已，并不表明所讨论的辐射有物理上的差别。我们须要考虑的四个因素是：

(i) 质能守恒。它由式

$$m_0 c^2 + h\nu = \varepsilon + h\nu' \quad (6.160)$$

所表达。这里 ν 及 ν' 分别是碰撞前及碰撞后的辐射频率， m_0 是静质量， ε 是反冲粒子的相对论性质量能量 (见图 6.14)。

(ii) ε 与 m_0 之间的关系是式 (5.34)：

$$\varepsilon = m_0 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \equiv m_0 \gamma(v) c^2 \quad (6.161)$$

(iii) 根据沿入射光子方向的动量守恒得到

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c} \cos\theta + m_0 \gamma(v) v \cos\phi \quad (6.162)$$

(iv) 相应的横向动量表达式为

$$0 = \frac{h\nu'}{c} \sin\theta - m_0 \gamma(v) v \sin\phi \quad (6.163)$$

这样，我们就对四个未知量 ν , ν' , θ 和 ϕ 建立起了四个方程式。

问题 6.16 证明解这四个方程可得出表达式

$$\frac{c}{h} \left(\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} \right) = \frac{1 - \cos\theta}{m_0 c} \quad (6.164)$$

取辐射波长为 $\lambda = c/v$, $\lambda' = c/v'$, 我们得到

$$\lambda' - \lambda = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (6.165)$$

这里

$$\lambda_c \equiv \frac{h}{m_0 c} \quad (6.166)$$

称为粒子的康普顿波长。对电子而言 $\lambda_c = 2.4 \times 10^{-2}$ 埃或 2.4×10^{-10} 厘米。我们看到对可见光来说, 当波长为 5000 埃时, 波长的变化仅约为 ~ 0.05 埃, 因此这个效应几乎可忽略。这就是在汤姆孙散射中动量转移可以忽略的原因。但是在 X 射线区域, 比如当波长为 0.5 埃时, 我们所遇见的效应就相当于波长的 10% 对更高能量的辐射则预期波长还能有更大的相对移动, $(\lambda' - \lambda) / \lambda \gg 1$ 。

必须用量子力学来计算康普顿散射截面, 由此得知截面与入射光子的能量有关。这个截面的表达式 (见图 6.15) 称为克莱因-仁科 (Klein-Nishina) 公式, 它是

$$\begin{aligned} \sigma_c = 2\pi r_e^2 \left\{ \frac{1+\alpha}{\alpha^2} \left[\frac{2(1+\alpha)}{1+2\alpha} - \frac{1}{\alpha} \ln(1+2\alpha) \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2\alpha} \ln(1+2\alpha) - \frac{1+3\alpha}{(1+2\alpha)^2} \right\} \end{aligned} \quad (6.167)$$

这里 r_e 是经典电子半径, 而 α 是光子对电子的能量比。对电

图 6.15 康普顿和汤姆孙散射截面的比较, 它是 $\alpha = hv/m_0 c^2$ 的函数 (Já50)

子来说

$$r_e \equiv \frac{e^2}{m_0 c^2} = 2.82 \times 10^{-13} \text{ 厘米}, \quad \alpha = \frac{hv}{m_0 c^2} \quad (6.168)$$

当能量取两个极端时, 式(6.167)的近似式为

$$\sigma_L = \sigma_e \left\{ 1 - 2\alpha + \frac{26}{5} \alpha^2 + \cdots \right\}, \quad \alpha \ll 1, \text{ 低能} \quad (6.169)$$

$$\sigma_H = \frac{3}{8} \sigma_e \frac{1}{\alpha} \left(\ln 2\alpha + \frac{1}{2} \right), \quad \alpha \gg 1, \text{ 高能} \quad (6.170)$$

式中

$$\sigma_e = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \quad (6.171)$$

是汤姆孙散射截面。

因为散射截面与质量成反比, 因此质子散射截面就要小得多。这表明康普顿散射主要是一种电子散射现象。原子也会产生散射。就同每个原子有 Z 个自由电子一样, 原子散射截面正好是单个电子散射截面的 Z 倍。原子的结合能比康普顿散射中所遇到的光子能量小, 电子基本上可认为是自由的。

再来看逆康普顿效应。这时是高度相对论性的电子碰撞到低能光子上, 把动量传递给光子使之成为高能光子。我们可以从与电子一起运动的观测者的角度来处理这个过程。这时的观测者将看到入射辐射谱线发

生蓝移，移到（见方程(5.44)）下列波长处

$$\lambda_D = \lambda \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \quad (6.172)$$

因为对原来相对电子静止不动的观测者来说这就是一个普通的康普顿过程，因此在这个参考系中散射波的波长为（见方程(6.165)）

$$\lambda' = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda_D \quad (6.173)$$

当向后散射时有 $\sin^2 \theta / 2 = 1$ 。

现在如果不从与快速电子一起运动的参考系而从静止的参考系再来观测这个波，那么向后散射光子的波长值将为

$$\lambda_s \sim \lambda' \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \sim \lambda \left(\frac{c-v}{c+v} \right) + 2\lambda_c \left(\frac{c-v}{c+v} \right)^{1/2} \quad (6.174)$$

这是与(6.172)式相同的转换，静止观测者也看到向后散射辐射有蓝移。注意在这里的推导中所有方向性的量都省去了，因此这表达式只是在数量级上是正确的。但是显然在这个过程中光子的波长明显地缩短了，而其能量增加的倍数约为

$$\frac{c+v}{c-v} \sim \frac{(1+v/c)^2}{(1-v^2/c^2)} \sim \frac{\epsilon^2}{m_0^2 c^4} \quad (6.175)$$

式中 ϵ 是粒子的初始能量。9.10 节的讨论将表明，电子在逆康普顿散射中辐射的总功率与以同步加速辐射形式辐射的功率密切相关。总的同步加速发射与空间磁场能密度 $B^2/8\pi$ 成正比。这两个过程的比例常数是相同的。

6.21 宇宙尺度的同步加速发射和逆康普顿效应

我们发现，大量的迹象表明，我们所观测到的许多从类星体来的辐射是与相对论性过程有关的。首先，我们发现这些能够被观测到的谱线所相应的气体温度约为 $10^6 K$ 。这些谱线很宽，这说明存在有约 10^3 公里 s^{-1} 的整体运动速度。这些谱线常常迅速变亮，接着流量又减小，这就表明，在规则辐射的基础上还有短期的激烈事件发生。第二，我们还要补充指出，我们观测到了很强的射电连续流，而且这些天体在可见光区域呈现蓝色。所有这些都说明了在超新星或者可能在更大的质量规模上有激烈的爆发，在这种过程中形成了相对论性粒子。

一部分能量用来产生整体运动，并使气体发生电离。另一部分能量应当在相对论性粒子中，这部分能量就能够通过同步加速发射或者逆康普顿效应产生射电辐射，或者还可能有红外、可见光、X 射线以及 γ 射线辐射。

例如在图 6.16 中画出了 3C273B 类星射电源的谱。该天体所发出的能量大部分在频率约为 10^{13} 赫的远红外区。各种各样的理论对这种辐射流提出了各种不同的起源，而其中最可信的是同步加速辐射或逆康普顿效应。同步加速发射理论的主要困难是在观测中发现有起伏。一个同步加速辐射电子的寿命是（见方程(6.155)）

$$\tau \sim \frac{\epsilon}{P(\epsilon)} = \frac{3m_0^4 c^7}{2\epsilon e^4 B^2} \quad (6.176)$$

对 10^9 电子伏特的电子,当 $B \sim 10^{-3}$ 高斯时,上述寿命大约为 10^5 年,而 $B \sim 10^{-3}$ 的场强是与图 6.16 中的谱曲线相一致的。但是在实际上观测到的辐射强度中,可见起伏所存在的时间却大大地短于一年。还不清楚红外发射是否也有起伏;但是

图 6.16 银河中心和其他红外源的谱。注意这些谱一直从射电波段延伸到紫外区。这是最新修证的结果 (Ha72), 原图首先是由伯比奇 (Burbidge) 和斯坦 (Stein) 提出 (Bu70)

如果红外发射也有起伏,那么看来发出辐射的粒子一定要能够快速地把其大部分能量发射出去,而同步加速发射或逆康普顿效应也许能很好地做到这一点。

此外,还可以用逆康普顿效应来解释银河 γ 射线、X 射线流以及看来是从银河系外来的各向同性 X 射线流的存在。这里的想法是,由于磁场的加速作用,相对论性电子能够相当容易地产生,但是产生高能光子的方式还很不清楚,除非首先产生高能粒子,然后粒子在某个交换过程中放出能量,由此再产生高能光子。逆康普顿效应就是这种能量转换的最可能机制。银河辐射流可能就是由相对论性电子与电子源处所发出的可能光辐射流碰撞后产生的,而这里的电子源举个例来说,可以是在一次超新星爆发中出现。河外辐射流可能是由于河外电子与 3K 宇宙黑体辐射间的相互作用而造成。

有趣的是在光学上厚的同步加速发射源上可以建立起某个 $10^{12}K$ 的极大亮温度。在这个亮度上,由源内部发出的辐射所产生的逆康普顿散射会使相对论性电子的能量很快地降低,因而也就降低了亮温度。

6.22 切伦可夫效应

我们现在来讨论对研究宇宙线粒子来说是头等重要的一个过程,即切伦可夫 (Cherenkov) 效应。这个效应对研究入射粒子与地球大气的作用是重要的,而对研究宇宙线与宇宙中其他物质相互作用就不那么重要了。切伦可夫效应使宇宙线粒子减速并发出辐射,而所发出的光线就可以用来作为探测这些粒子的灵敏手段。

为了理解这个效应是如何起作用的,我们来考察一个进入地球大气的高度相对论性粒子。因为粒子从密度很低的区域进入到密度比较高的区域,粒子本身的状态就必然会发生某些相应的变化。进入上层大气的带电粒子给大气中的原子一个冲量,并使之产生辐射。这种冲量之所以产生,是因为粒子运动的速度比辐射在这种密度比较高的介质中的传播速度来得快,因而粒子产生的电场对原子来说好象是非常突然地出现的;在受干扰的原子所处的位置上产生了随时间快速变化的电场。这正是引起原子产生辐射的必要条件。相对论性粒子会通过这种方式在它所经过的路上继续影响其他原子,直到它的速度减小到等于区域性的(即所在介质的)光线传播速度为止。此时在原子周围产生的电场不再具有那种快速变化的性质,于是辐射效应也就消失了。

切伦可夫辐射和流体动力学冲击之间有许多共同之点。超声体产生声激励,同时不断损失能量,直到它减慢到区域性声速时为止;宇宙线粒子也正象超声体一样,它会不断地通过切伦可夫效应而失去能量,直

到其速度降到它所在介质中的区域性光速为止。

就象同步加速发射或任何其他的相对论性辐射效应一样，这种方式所产生的辐射也是在一个很小的角度范围内向前发射的，整个角度的大小 $\Delta\theta$ 为（见方程(5.50)及图 6.17）

图 6.17 切仑可夫辐射示意图

$$\Delta\theta \sim 2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

只要象同步加速辐射那样来考虑问题，我们便同样可以求出辐射的到达时间。如果辐射在变得相当慢之前所穿越的介质的厚度为 d ，那么波列从第一个光子到最后一个光子先后到达观测者所经历的时间为

$$\Delta t_c \sim \left(\frac{d}{v} - \frac{d}{c}\right) \sim \frac{d}{v} \left(1 - \frac{v}{c}\right) \sim \frac{d}{2c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \quad (6.177)$$

这一点与方程(6.147)是类似的。而相应的频率约为

$$\omega_c = \frac{1}{\Delta t_c} \sim \frac{2c}{d} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} \sim \frac{2c}{d} \left(\frac{\epsilon}{m_0 c^2}\right)^2 \quad (6.178)$$

如果在上层大气中穿越的距离约是 $d \sim 10^6$ 厘米 = 10 公里，所考虑的质子能量为 3×10^{14} 电子伏特，那么就有 $\epsilon / mc^2 \sim 3 \times 10^5$ 以及 $\omega_c \sim 6 \times 10^{15}$ 或 $\nu_c \sim 10^{15}$ 赫。

在许多场合下一个高能的原宇宙线粒子通过与上层大气中原子的碰撞产生次级粒子的簇射。这些次级粒子也能产生切仑可夫辐射，其切仑可夫辐射谱峰一般不在频率 ω_c 附近。它更多地取决于大气中气体原子的辐射性质，因此对原粒子能量的关系相对地说就不那么密切了。

切仑可夫探测的一个有趣的性质是，它不仅可证认宇宙线粒子的存在，而且能以相当高的精度给出粒子到达的方向；其测定误差 $\Delta\theta$ 是很小的。

如果 γ 射线的能量足够大，在它们到达地球时也可以通过切仑可夫辐射来加以探测。这种探测过程是间接的，它取决于上层大气中能量很大的次级带电粒子的形成。

附加问题 6.17 一个自转质量的能量为 $I\omega^2/2$ ，这里 I 是惯性矩， ω 是角频率。假定能量变化率与 ω 的 $n+1$ 次方正比：

$$\dot{\epsilon} = K\omega^{n+1}$$

试证明

$$n = \frac{\ddot{\omega}\omega}{\dot{\omega}^2} \quad (6.179)$$

对蟹状星云脉冲星我们观测到 $n \sim 2.5$ 。试问这一结果与磁偶极子理论所预期的结果更一致还是与引力辐射所预期的结果更一致？

问题选答

$$6.1 \quad R_L = \frac{p_c c}{qB} = \frac{m_p v_p c}{qB} = 10^3 \text{ 厘米}$$

$$1 \text{ 天文单位} = 1.5 \times 10^{13} \text{ 厘米}$$

$$m_p = 1.6 \times 10^{-24} \text{ 克}$$

$$v_p = 10^6 \text{ 厘米} \cdot \text{秒}^{-1}$$

$$q = 4.8 \times 10^{-10} \text{ 静电单位}$$

$$B = 10^{-6} \text{ 高斯}$$

6.2 对拉莫尔半径 R_L 处的圆周运动有

$$\varepsilon = \frac{p_c v_c}{2} = \frac{q B v_c R_L}{2c} \quad (6.13)$$

$$\dot{\varepsilon} = -q \dot{B} \pi R_L^2 \frac{\omega}{2\pi} \quad (6.16)$$

因为圆周运动使粒子绕磁场转 $\omega/2\pi$ 圈。

$$\therefore \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{dB}{B}$$

由此知粒子的能量增加了十倍。

6.3 $\Delta V = 2$ (7 公里 $\cdot$ 秒 $^{-1}$) = 14 公里 $\cdot$ 秒 $^{-1}$ 是碰撞后给予宇宙线的速度值，它是从静止参考系来测定的。 $\varepsilon_i = \gamma(v_i) m_0 c^2$ ，它是初始能量值 ($\varepsilon_i = 10^{10}$ 电子伏特)，这里

$$\gamma(v_i) = \frac{1}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}}$$

v_i 是初速，

对质子来说， $m_0 c^2 \sim 10^9$ 电子伏特，因而 $\gamma(v_i) \sim 10$ 。如果能量加倍 $\gamma(v_e) \sim 20$ ，那末

$$\left(\frac{v_i}{c}\right)^2 \cong (1 - 0.01) \Rightarrow \frac{v_i}{c} = 1 - 0.005$$

$$\left(\frac{v_f}{c}\right)^2 \cong (1 - 0.0025) \Rightarrow \frac{v_f}{c} = 1 - 0.00125$$

上式中的 v_f 是末速。

由此 $v_f - v_i = (0.0037)c = 1.1 \times 10^3$ 公里 $\cdot$ 秒 $^{-1}$ 。

若 v' 是一次弹跳后的速度，根据速度合成法则

$$v' \cong (v_i + \Delta V) \left(1 - \frac{v_i \Delta V}{c^2}\right) \sim v_i - v_i^2 \frac{\Delta V}{c^2} + \Delta V - O\left[\frac{(\Delta V)^2}{c^2}\right]$$

$$v' - v_i = \Delta V \left(1 - \frac{v_i^2}{c^2}\right) = \frac{\Delta V}{\gamma^2(v_i)}$$

现在 γ 由 10 变为 20。取平均值 $\gamma^2 \sim 280$, $\Delta V/\gamma^2 \sim 14/280 \sim 0.05$ 公里 秒 $^{-1}$ 。于是碰撞次数就是 2×10^4 。

当弹跳一次的距离为 10^{17} 厘米，速度为 $\sim 3 \times 10^{10}$ 厘米 $\cdot$ 秒 $^{-1}$ 时，能量增加一倍所需时间对质子来说约需 $[10^{17}/(3 \times 10^7 \times 3 \times 10^{10})] 2 \times 10^4 \sim 2 \times 10^3$ 年。在这段时间内两块云已互相接近甚至快要碰在一起了。电子的 γ 值更大，在同样这段时间内能量的增加还没这么多。

$$6.4 \quad \varepsilon = m_0 c^2 \gamma(\omega r), \quad \gamma(\omega r) = \frac{1}{\sqrt{1 - \omega^2 r^2 / c^2}}$$

在 $\omega r = c$ 时粒子与场再不能共旋。

6.7 由问题(4.3)得知, 步长为 L 的随机游动经 N 步后其均方根偏离

为 $\sqrt{NL}$ 。在每一步中法拉第旋转角由 $\theta(L) = \frac{1}{2}(\omega/c)L\Delta n$ 给出, 以(6.66)

式代入, 再由(6.62)式的回转频率即可给出最后结果。

6.9 如果我们想象有一些虚假的磁荷, 根据与电荷类似的情况有

$$H = \frac{Q}{(r-a/2)^2} - \frac{Q}{(r+a/2)^2} = \frac{2Qa}{r^3} = \frac{2M}{r^3}$$

由此 d 和 M 是类似的, 用代入法即可求得(6.89)式的结果。

$$6.10 \quad H = \frac{\dot{A} \wedge n}{c} \quad \text{及} \quad A = \frac{1}{6c^2 R_0} \ddot{D}$$

$$H = \frac{1}{6c^2 R_0} \frac{\ddot{D} \wedge n}{c}$$

$$S = \frac{c}{4\pi} H^2 n \propto \frac{(\ddot{D})^2}{c^5}$$

6.13 为了证明这个结果, 利用总辐射功率公式(6.86):

$$\frac{2}{3c^3} \ddot{d}^2 = \frac{2e^2}{3c^3} \left(\frac{\dot{p}}{m_0} \right)^2$$

再由(6.13)及(5.40)可得

$$\dot{p} = \frac{eB}{m_0 c} p_c = \left(\frac{eB}{m_0 c} \right) \left(\frac{\varepsilon}{c} \right)$$

代入上式后可得(6.155)式结果。

6.14 $B = 10^{-4}$ 高斯

$$v_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{eB}{2\pi m_0 c} = 300 \text{ 赫}$$

$$\omega_m = \gamma^2 \omega_c = 1200 \text{ 兆赫 (在 } \gamma = 2 \times 10^3 \text{ 时)}$$

谱峰在 $\omega = \omega_m/2 = 600$ 兆赫处。

$$6.15 \quad I(v) \Delta v \propto \int_0^\varepsilon P(\varepsilon) n(\varepsilon) d\varepsilon \quad (\text{根据(6.156)式})$$

这里根据(6.155)式有

$$P(\varepsilon) \propto \varepsilon^2 B^2$$

$$\therefore I(v) \Delta v \propto B^2 \int_0^\varepsilon \varepsilon^2 \varepsilon^{-\gamma} d\varepsilon \propto K B^2 \varepsilon^{3-\gamma}$$

但根据式(6.151) $\varepsilon \propto \left[\frac{\omega_m}{B} \right]^{1/2}$

$$\therefore I(v) \Delta v \propto B^2 B^{(\gamma-3)/2} \omega_m^{(3-\gamma)/2}$$

$$I(v) \propto B^{(\gamma+1)/2} v^{(1-\gamma)/2}$$

6.16 将(6.162)及(6.163)两式平方相加得出

$$-2h^2 v v' \cos \theta + h^2 (v^2 + v'^2) = m_0^2 v^2 \gamma^2 c^2 = m_0^2 c^4 (\gamma^2 - 1)$$

将(6.160)式平方得

$$m_0^2 c^4 (\gamma^2 - 1) = h^2 (v^2 + v'^2 - 2vv') + 2hm_0 c^2 (v - v')$$

令这两式相等，由此得到 $hvv'(1-\cos\theta) = (v-v')m_0 c^2$ ，这结果与(6.164)式是等价的。

$$6.17 \quad \dot{\varepsilon} = K\omega^{n+1} = I\dot{\omega}\omega$$

$$\therefore \dot{\omega} = \frac{K}{I}\omega^n, \quad \ddot{\omega} = \frac{K}{I}n\omega^{n-1}\dot{\omega} \quad \text{及} \quad \ddot{\omega}\omega = n\dot{\omega}^2$$

方程(6.88)及(6.96)表明，对磁偶极子 $n+1=4$ ，对引力四极辐射 $n+1=6$ 。因而目前的资料与磁偶极子机制符合得较好。因为脉冲星在其开始形成时可能主要是发出引力辐射，因此在这类天体刚开始形成后就有可能由观测结果得出 $n=5$ 。如果是这样的话那就应当是很有意义的了，因为这些观测能够在射频范围进行，但是它却可以给出引力辐射的证据，而引力辐射本身是难以直接观测到的。

第七章 天体物理学中的量子过程

7.1 原子系统对辐射的吸收和发射

在第六章中，我们已经考虑了粒子吸收或发出辐射的一系列过程。但是，我们只是把自己限制在经典电动力学的麦克斯韦方程可以适用的范围内。在原子系统的尺度上，这些方程就不适用了。尽管电子有加速运动，它在带正电荷的原子核的束缚下也不会损失能量，而经典辐射理论预期应该有这种能量损失发生。与此相反，举个例子来说，基态氢可以在无限长的时期内处于稳定状态。还有，如果处于某种激发态的原子一旦辐射出能量并最终到达基态，那么在每次跃迁中所放出的能量始终只能是不连续的。这一点又是同经典的预期结果不相一致。

由于对天文观测结果的解释取决于我们对原子各个能级之间所发生的跃迁的理解，因此就有必要来研究一下跃迁究竟是怎样发生的，而从中我们又能学到些什么。

在这个问题上有一点是十分重要的，那就是我们所知道的有关恒星或星系的几乎每一种知识都是通过分光观测取得的。我们关于太阳化学以及其他恒星化学组成的种种概念，全部建筑在对不同原子、离子或者分子的谱线强度的解释之上。我们对日冕中温度分布的认识，就是以所观测到的几种高度电离了的原子（特别是铁原子）的跃迁强度为基础的。我们有关太阳表面不同部位磁场分布的图象完全建立在用太阳表面的磁场来解释原子谱线的分裂现象之上。还有，我们所得到的关于太阳表面上空不同高度处的气体运动以及气体温度的知识，主要也是以光谱资料为依据的；在这项研究中，从谱线位置的少许位移，谱线的轮廓以及它们的宽度，都会提供许多我们所需要的资料。从谱线的宽度和轮廓，还可以获得有关太阳不同大气层中原子、离子或电子的密度的某些概念。

当然，对太阳来说，这些资料中有一部分是可以通过其他途径取得的，这是因为太阳离我们很近，可以很仔细地加以分辨。所以，我们就能够通过直接观测确定太阳边缘气体云的运动速度，而且我们最终也许可以借助雷达观测来进行视向速度的测定。利用雷达也许还能探测出气体的密度，而测定穿过太阳附近的宇宙射电波的色散度也可以获得许多资料。因此，为了清楚地认识太阳大气中的运动和密度状况，以经典理论为基础的直接的目视和射电观测确实是行之有效的。但是，一旦涉及到象发射线恒星或类星体这一类更为遥远的天体时，由于看来不可能对这种天体加以详细的分辨，为了取得大量的崭新的资料，我们就只能求助于对原子过程的了解，而这些原子过程则要通过分光技术来加以观测。当然，量子过程并不就囊括一切。例如，我们对类星射电源中发出同步辐射的相对论性粒子的认识，就只是建立在经典理论的基础之上。有关星际等离子体云的热射电辐射的许多现象，也可以用经典的方法来加以理解（见 6.16 节）。但是，除此之外，我们所知道的有关这些天体的几乎全部知识，都在一定的程度上同辐射的量子理论有关。

在下面几节中，我们将要介绍量子过程的知识怎样帮助我们认识有关天体物理特征的许多内容。我们力求做到只是用那些作为量子理论基础的基本条件来理解这些过程。一般情况下，这样做对那些我们所需知

道的参数来说只能得到它们的大致数值；然而尽管如此，我们还是能够对量子过程在天文学中所发挥的作用有一个正确的认识。

7.2 原子系统的量子化

对于原子那样大小的尺度来说，经典的物理学理论已经不再适用，因而我们的许多预见就不得不加以改变。但是，有若干重要特征对于量子理论和经典理论却是共同的。具体来说，在一个封闭系统内我们发现：

(a) 质能始终是守恒的。

(b) 动量和角动量始终是守恒的。

(c) 电荷始终是守恒的。

在原子尺度上，这些守恒定律的表达形式与经典场合中有某些不同。但是，即使这些差别十分重要，我们仍然可以确信：

(d) 如果把原子系统的规模不断放大，那么量子理论所预言的特性就会逼近经典物理学所推得的结果，这叫做对应原理。

与上面这些类似的特性相反，在经典和量子性能之间还存在三个主要差别：

(a') 作用量，这是一个量子化了的量，其单位是（能量 $\times$ 时间）或（动量 $\times$ 距离）。作用量的最小单位为 $\hbar$ 。这就是说，在一个束缚原子系统内，作用量只能变化 $\hbar$ 的整数倍， $\hbar$ 等于普朗克常数 h 除以 2π ： $\hbar \equiv h/2\pi$ 。这点说明会带来许多重要的结果，其中某些内容将在本章给以介绍。

(b') 即使某个原子系统各种状态的特征作用量可以相差小于 $\hbar$ 的某个量——事实上这是不存在的，那么我們也不可能把它们区别开来。这就是海森堡测不准原理。

(c') 具有半整数自旋的两个粒子不可能有相同的性质，就是说不可能有相同的动量、位置和自旋方向。这就是泡利不相容原理（见 4.11 节）。

以上(a')，(b')，(c')三点说明并不是量子力学的公理。应当说，可以把它们看作是从某种更复杂的量子力学理论所导出的一些有用的法则，而这种复杂的量子力学理论则还可以对电子、原子以及原子核的性能作出定量的预言。

作用量的概念不如角动量概念来得熟悉，后者具有同样的单位并且用同样的方法加以量子化。因此，我们可以简要地观察一下，在原子内部角动量是怎样发生变化的。

在任意一个束缚原子系统内，角动量沿着任意给定方向——我们把这一方向选作为测量方向——的变化数值始终应该为 $\hbar$ ，这个角动量的方向是很重要的①。因此，我们要来讨论一下测量角动量分量，这里的前提条件是我们在作每次测量时总要记着有一个确定的方向。

我们可以通过一些比较基本的概念来理解这种角动量的量子化。原子结构中所涉及到的每种基本粒子都有自己确定的测量自旋值。对电子、质子和中子来说，这一数值为 $\pm\hbar/2$ 。因此，某个原子电子从一种自旋取向变为另一种自旋取向就相当于测量的角动量分量改变一个单位 $\hbar$ 。这种变化是很容易通过吸收或发射一个光子而产生的，这是因为光子沿着其运动方向的自旋角动量分量即为 $\pm\hbar$ 。由于光子自旋分量的量子

化，原子系统在角动量上的任何可能的变化都必然具有一个分量 $\hbar$ 。因为，只要通过一系列光子吸收或发射过程，或者通过电子或原子核内部的一组自旋变相跃迁，原子便可以从某一种状态转变为任何另一种不同的状态。

但是，不管怎么说，即使没有关于光子的这些说明，量子化也是原子的内禀特征。所以，我们可以肯定，如果某个原子系统具有零角动量状态，那么所有其他的状态必然具有整数角动量分量。同样，要是最低角动量状态值为 $\hbar/2$ ，那么所有其他的状态就必然具有半整数角动量分量（还可见 7.7 节）。

上面提到的说明(a')，就是通过这样一条途径使我们能深入了解量子化系统的结构状况。另外，原理(b')给我们提供了某些一般性的定量信息。让我们用这一条原理来考察一下最简单的原子——氢。这时，最低态的能量可以直接估算出来。因为，一个静电束缚原子的最小可能尺度必然通过下式与动量的不准确度联系在一起：

$$p^2 r^2 \sim \langle \Delta p^2 \rangle \langle \Delta r^2 \rangle \sim \hbar^2 \quad (7.1)$$

这儿我们认为径向动量和径向位置的均方值等于这两个参数的不准确度。把维里定理用于受平方反比律力束缚的系统，我们就可以把某一状态的能量或者表达为质子和电子相互作用时的静电势能的一半，或者表达为该系统动能的反号(3.83)。因此，最低能态为

$$\varepsilon_1 = -\frac{Z e^2}{2 r} = -\frac{p^2}{2\mu} \sim -\frac{\hbar^2}{2\mu r^2} \quad (7.2)$$

式中 μ 是电子的约化质量。这儿，在引出式(7.2)最右端部分时我们用到了方程(7.1)。从这个方程消去 r 后立可以写出

$$\varepsilon_1 = -\frac{Z^2 \mu e^4}{2\hbar^2} \quad (7.3)$$

$$r = \frac{\hbar^2}{Z\mu e^2} \quad (7.4)$$

这一均方根半径 r 被称为原子的玻尔(Bohr)半径，而 ε_1 则是原子的基态能量。对氢来说 $Z=1$ ，因而 $\varepsilon_1=-13.6$ 电子伏特， $r \sim 5.29 \times 10^{-9}$ 厘米。这儿我们是根据静电势把电子限制在质子周围，有限体积内这样一个假设来进行推导的，并且得到了一个与测不准原理相一致的解。至于对电子绕着质子运转的可能有的轨道情况则没有作任何的假定；而且，实际上令位置和动量的均方值等于这两个参数的不准确度的均方值这一事实本身，就意味着在整个上述的体积内都有可能找到电子，而不一定要求电子位于 r 或 p 值范围很窄的某个确定轨道内。

问题 7.1 如果我们想要把具有不同径向位置和动量的一系列状态区分开来，那么对于这些能态来说乘积 pr 就一定要相差 $\hbar$ ；不然的话，它们在海森堡的意义上来说是不可区分的。如设 $p_n r_n = n\hbar$ ，试证明

$$\varepsilon_n = -Z^2 \frac{\mu e^4}{2n^2 \hbar^2} \quad (7.5)$$

如果原子的第 n 径向态的相空间体积正比于 $4\pi p_n^2 \Delta p_n$ 和 $4\pi r_n^2 \Delta r_n$ ，试证明主量子数为 n 的可能状态数与 n^2 成正比。我们将会看到这一结果

是非常有用的!

为了求得与量子数 n 相应的实际状态数目, 我们仍然不得不援用上面对说明 (c') 中的泡利不相容原理。我们知道, 能态 $n=1$ 相应于在相空间中只有一个相格。因此, 可能的状态只有两种, 一种是核自旋与电子自旋相平行, 另一种是两者为逆平行。于是利用问题(7.1)我们便知道第 n 径向态包含有 $2n^2$ 种不同的亚态, 它们所具有的能量全都和这儿所考虑的近似值相同。

从这里我们知道, 仅仅由最基本的概念 (a') , (b') , (c') 就足以为我们提供有关氢和类氢原子在结构方面的许多情况, 这里所谓类氢原子指的是象单次电离氦、五次电离碳或者任何别的在裸核外层只有一个电子的一类原子。

但是我们切不可认为原子结构的全部问题就可以这样简单地得到解决。我们忽略了组成原子的各个粒子自旋的全部相对论效应以及彼此之间的全部相互作用。例如, 方程(7.2)就仅仅用到了牛顿力学和静电相互作用。一旦涉及到这类问题, 或者涉及到粒子与各种类型的场之间的相互作用问题时, 应用量子力学所提供的完整的数学结构就是十分重要的了。不过作为任何这一类结构的基础却是 (a) 到 (d) 以及 (a') 到 (c') 这些基本原理, 因而在下面几节中我们将要多次用到它们。

问题 7.2 我们可以证明, 原理 $(a') \sim (c')$ 还可以用来确定原子核的大小。为了说明这一点, 我们来考虑核子, 也就是被短程引力势彼此束缚在一起的质子和中子。

$$\text{如果 } r < r_0, V = -V_0; \text{ 如果 } r \geq r_0, V = 0 \quad (7.6)$$

试利用方程(7.1)证明

$$r = \frac{\hbar}{[2M(V - \varepsilon_b)]^{1/2}} \quad (7.7)$$

式中 M 是核子质量, 而 $-\varepsilon_b$ 是每个核子的结合能, 其值大致为 6 百万电子伏特。如果 $V_0 \sim 2\varepsilon_b$, 试证明典型的核半径约为 10^{-13} 厘米。由此得出核子的特征相互作用截面约为 10^{-26} 厘米²。在介绍恒星内部核过程的第八章中, 我们将会看到这一点是至关重要的。

注意, 这一核半径对势与距离间的关系是不敏感的。势阱深度和结合能便决定了核的大小。

7.3 原子氢和类氢原子的光谱

有了前面一节所考虑的内容, 我们就可以来讨论天文学中所观测到的原子氢光谱的某些主要特征。我们所观测到的谱线能量只是代表了原子的各个能级间的能量差, 而在吸收或者发射一个光子时所发生的跃迁便是在这些能级之间进行的。

为了从某种最简单的概念开始, 我们注意到(7.3)和(7.5)两式中的能量与氢的约化质量有关。因此, 普通氢和氘的约化质量便稍有不同, 前者的核内仅有一个质子, 而后者则包含了一个中子和一个质子。氘的额外中子使它的核的质量为普通氢的两倍, 所以氘的约化质量 μ_D 为

$$\mu_D = \frac{m_e m_D}{m_e + m_D} \sim \frac{2m_e m_p}{m_e + 2m_p} \sim m_e \left(1 - \frac{m_e}{2m_p}\right) \quad (7.8)$$

$$\text{而} \quad \mu_p \sim m_e \left(1 - \frac{m_e}{m_p}\right) \quad (7.9)$$

这儿的下标 e, D 和 P 表示电子、氘核和质子。因此, 根据普通氢的谱线我们应该可以找到氘的谱线, 相对而言它的能量要比前者约大 $m_e/2m_p$, 即 $1/3700$ 在光谱的可见部分这就相当于谱线向波长较短的一端位移 1.5 埃左右。虽然这样的谱线位移可以很容易地加以确定, 然而有趣的是直到目前为止尽管已经做了大量的探索工作, 却一直没有在任何地方任何一个天体中找到有氘存在^①。相反, 地球上的氘丰富度是很容易测到的, 其大约占原子总数的 2×10^{-4} 。如果这样的丰富度存在于宇宙中的其他地方, 那么氘早就应该被我们探测到了, 因为已经做了大量的探索工作。氘的消声匿迹可谓是一个真正的天体演化学之谜。通常在一颗恒星诞生后不久氘就会遭到破坏(第八章), 然而不知什么原因在太阳系诞生的过程中却可以形成氘。不然的话氘也许是原初就有的, 而且任何氘只要参与恒星内部的循环那就会遭到破坏。如果我们星系内的全部星际物质至少经历过一次这样的循环, 那么在银河一生中早期形成的行星也许就是今天可以找到有氘存在的唯一的场所了!

约化质量对于区分氢跃迁和电离氦谱线也是有用的。单次电离氦 He II 在核的周围有一个电子, 其电荷数为 $Z=2$ 。因此, 由方程(7.5)可知, 任何给定状态的能量应该正好是相应的氢能量的四倍。有时候可以利用这一整数关系来对那些主量子数为 n 的跃迁进行准确的谱线能量证认, 这儿氦的主量子数为氢的两倍。但是, 约化质量上的这种差异足以使这些谱线产生相当大的位移, 所以在天文观测中通常就不会把这两种谱线混淆起来。然而如果我们不知道某一运动源的谱线多普勒位移, 那么根据一两条谱线也许无法进行证认, 在这种情况下就一定要设法寻找与氢光谱不相同的其他熟悉的原子谱线或者氦谱线, 也就是寻找在奇主量子数的某一能级和 n 为偶数的某一能级之间进行的那些跃迁。

尽管我们把光谱的这种类似性好象作为一个困难问题提了出来, 然而实际上它却往往很有用处。人们从事了多年的理论工作, 解释了许多细节现象, 从而对氢光谱有了充分的了解。因此, 一旦能把复杂原子的性质同氢原子所特有的同一类性质联系起来, 我们也就可以同时建立起一套完整的理论知识, 而这往往又会导致我们对比较复杂的系统取得进一步的了解。

就在不多几年前, 人们对氢光谱的兴趣主要还是集中在至少有一种状态的主量子数是比较低(比如说 $n \leq 5$)的那些跃迁上。对于非常高的能态人们并没有太多的概念, 并且始终认为在这些状态之间所出现的跃迁只会产生非常微弱的谱线。因此, 当人们在射电天文领域内观测到了涉及 $n=90, 104, 159, 166$ 的那些状态、以及同一范围内其他许多状态的一类跃迁时就感到非常惊讶(HÖ65)。不仅如此, 我们还可以由此证认出相应的氦的电离态, 识别的方法同样是以约化质量差为依据。由于这些谱线的存在, 使得我们可以对银河系内遥远的电离氢区进行观测。现在, 要探测出在照相波段内所无法探测到的电离区是一件很容易的

事，这是因为尘埃云虽然吸收了银河系内除最近部分外的全部可见光，但是射电波却可以畅通无阻。这些区域往往是事先知道的，因为致密的电离等离子体所发出的连续热辐射很容易给我们测到（6.16 节）。但是，线辐射的发现可以使我们推算出该区域的视向速度，再根据较差自转模型便可推得它在星系内的距离（3.12）。

为了完整起见，我们还应该介绍一下有关氢光谱的讨论中常常用到的某些术语。涉及 $n=1, 2, 3, 4$ 这几个低态的跃迁分别为赖曼（Lyman）系、巴耳末（Balmer）系、帕邢（Paschen）系和布喇开（Braoket）系的成员（见图 7.1），知道这一点是有用处的。每一种这类谱系中波长最长的谱线用 α 来表示；次一条谱线称为 β ，其余依此类推。因此，由 $n=4$ 到 $n=2$ 的跃迁产生巴耳末 β 发射线。巴耳末谱的成员有时又记作 H_α, H_β 等等，赖曼谱线则记作 $L_\alpha, L_\beta, \dots$ 或 $L_y? \alpha, L_y? \beta \dots$ 。

图 7.1 原子氢的能级图

在问题(7.1)中，我们证明了与氢原子的第 n 能级有关的共有 $2n^2$ 个量子态。我们还必须懂得怎样才能把这些状态彼此区分开来。

最低态或者说基态实际上是由两种不同的成分组成的，分别对应着电子自旋相对于核自旋方向的两种不同的取向。这两种结构的能量稍有不同，因此从高态到低态的跃迁可以自发产生。这种跃迁在射电天文学中占有主导地位。它发生在频率为 1420 兆赫处，相应的能量差约为 0.6×10^{-6} 电子伏特，或者说不到原子处于基态时结合能（ ~ -13.6 电子伏特）的两百万分之一。人们就是根据 1420 兆赫的观测首次描绘了银河系内氢的分布图。正如上面已经说过的那样，之所以能够做到这一点是因为射电波不会被那些能吸收可见光的尘埃所吸收。有趣的是我们今天已经有了一些表明银河系内气体分布情况的颇为不错的天图，然而却没有可资比较的、能说明恒星分布情况的天图。这完全是因为恒星在波谱的射电区或远红外区所发出的辐射量还不够强。

电子和核的自旋反向时为最低能级，此时总的自旋角动量量子数 $F=0$ ，而平行自旋取向时 $F=1$ ；这两种状态之间的能量差称为基态的超精细分裂（图 7.2）。这种分裂在所有的能级 n 处都存在，从而保证在任何给定能级处状态的总的多重性为 $2n^2$ 。

图 7.2 说明氢原子基态超精细分裂的能级图。电子自旋和质子自旋取向相同时的状态具有稍高一些的能量

如果我们来观察一下氢原子的第一激发态 $n=2$ ，那么就会发现有两种亚能级，它们的能量刚好是很接近的。首先，同基态的情况完全一样，这儿也有两种超精细态，在这两种状态下的电子对于原子核具有零轨道角动量。从这种状态通过放出一个光子而到达基态的跃迁是禁戒跃迁，因为在这样一种跃迁过程中原子系统的角动量必须保持不变；但是这一点不可能做到，原因是在那样的跃迁过程中光子总要带走角动量。因此，在星际空间稀薄的电离区域中，处于 $n=2$ 这样一种状态下的原子的寿命就可能很长。最终，原子可以通过放出两个而不是一个光子回复到基态；但是，这种双光子衰变过程大约需要 0.1 秒时间（Sp51b），这同通常的容许跃迁大不一样，后者一般只要 10^{-8} 秒。类似地，对亚稳态氢原子所

测得的双光子衰变时间约为 2×10^{-2} 秒 (Va70)。

我们也许还会提出这样的疑问：如果电子跃迁由从平行结构到逆平行结构的自旋变相过程所引起，那么这类跃迁中的角动量判据是否能得到满足？但是，在电子自旋和电磁辐射之间的耦合几率是很低的，它不足以使那种跃迁出现的可能性有双光子衰变那么多。

在状态 $n=2$ 中，全部第二组能级的轨道角量子数 l 都等于 1，相应的（总角动量） 2 为 $l(l+1)\hbar^2=2\hbar^2$ 。（角动量） 2 之所以不是 l^2 ，原因在于除了对于一根（任意）选定的轴的确定角动量分量外，总还有对于两根正交轴的某个不确定的角动量分量。后者使（角动量） 2 增大 $l\hbar^2$ （见 7.7 节）。相应于 $l=1$ ，存在三种亚能级，每一种又进而分裂为两种超精细态。其中一种亚能级对于某给定方向的角动量分量为 $\hbar$ ，另一个沿着这一方向的分量为零，第三者则为 $-\hbar$ 。这三个分量分别以 $m=1, 0$ 和 -1 来表示。标识符 m 称为磁量子数，因为这些状态的原子在外加磁场的作用下会具有不同的能量。在没有磁场作用的情况下，这些状态之间的分裂有的可以达到 10^{-5} 电子伏特左右。这就是所谓原子的精细结构，图 7.3 说明了这种情况①。

图 7.3 说明氢能级为 $n=2$ 时的精细结构的能级图。左边一栏中符号的含义如下：字母 S 和 P 分别表示总轨道角动量为 0 或 1，字母右下方的数字给出电子角动量和轨道角动量取矢量和后的合成总角动量，左上方的数字为多重项数 $(2S+1)$ ，现在这儿的 S 代表总电子自旋。S 的这种双重含义有时会引起某种混淆。作为一个例子， $^2P_{3/2}$ 态有 $l=1$ ，轨道和电子自旋是平行的，总自旋为 $3/2$ ；还有，因为单个电子的自旋值为 $1/2$ ，故左上标为 2

激发态 $n=3$ 也具有零角动量 ($l=0$) 的一种超精细分裂亚能级。对于 $l=1$ 有三对这样的状态；而对于 $l=2$ 则有五对，相应的磁量子数为 $m=2, 1, 0, -1, -2$ 。在通常条件下，这些能级是简并的，这意味着它们的能量完全相同。然而在外加磁场的作用下，这些状态的能量会有少量的改变，如果 H 值较低，各态之间的能量差与场强 H 成正比。这种分裂称为塞曼 (Zeeman) 分裂。

我们可以通过下面的途径来理解塞曼分裂。电子的轨道角动量意味着存在一种回路电流，同时也就存在一个磁偶极场。这一偶极子可以同外场的方向一致、垂直或者相反，对应这三种情况原子状态的能量分别就减小、不变或者增大。

从定量上来看，电子对于核的轨道角动量产生一个磁偶极矩，其沿着磁场方向的分量为

$$\mu_B m_i = \frac{e\hbar}{2mc} m_i, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7.10)$$

式中 μ_B 称为波尔磁子。因而位于磁场内的某一状态的能量就是

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \mu_B H m_i = \varepsilon_0 + \hbar \omega_L m_i, \quad \omega_L = \frac{eH}{2mc} \quad (7.11)$$

具有最小能量的状态其角动量与场的方向呈逆平行，就是说在这种结构中量子数 m_i 具有最小值。 ω_L 为拉莫尔频率。 ω_L 应该与回转频率 (6.13)

相对应，后者比 ω_L 大一倍： $\omega_c=2\omega_L$ 。

我们注意到磁场内磁偶极子的经典能量为 $M \cdot H$ 。但是，如果把这个表达式引入方程 (6.18) 以求得与磁场方向一致的磁偶极子的能量，我们就得到

$$\varepsilon = M \cdot H = \frac{e(v \wedge r) \cdot H}{2c} = \frac{eLH}{2mc} = \frac{\omega_c L}{2} \quad (6.18a)$$

这儿我们已经利用了方程 (6.13) 以便弄清楚经典能量与 ω_c 的关系。现在我们就可以看出为什么 ω_L 只及回转频率的一半。另一方面来说，如果我们利用式 (7.11) 中的拉莫尔频率，对于 $m_l=1$ 来说磁场能就变为 $\varepsilon - \varepsilon_0 = \hbar \omega_L$ ，这个结果是同光子相类似的。

图 7.4 说明了与量子数 $l=2$ 和 $l=1$ 相应的能级分裂情况，并给出由这些状态间的某种跃迁所产生的谱线。

塞曼分裂为我们提供了太阳表面以及遥远恒星内部有关磁场的有用的信息。并已发现，在某些光谱型为 A 型的强磁星中，场强高于 30000 高斯。太阳总的偶极场约为一个高斯，但是局部场强的变化很大。在太阳黑子内， 3×10^3 高斯的磁场也并不罕见。

图 7.4 因外部磁场作用而发生偏移后的能态间的跃迁。这张图既说明了角动量分量相对于作用场方向的取向，又说明了跃迁能量的变化情况。我们注意到沿着场方向的角动量分量的取值始终为 $\hbar$ 的整数倍。角动量矢的总长度为 $[l(l+1)]^{1/2}$ ，就是说不是一个整数。 σ 和 π 表示所发出的辐射的极化态（见正文）。能级间的水平距离很长，这表示在两种状态之间有很高的跃迁能

通常情况下，仅仅从光谱资料来确定磁场的强度是很困难的，因为谱线很宽，而分裂却很小，于是谱线往往就重叠在一起。但是，幸好图 7.4 中用 σ 标记的谱线与以 π 标记的谱线具有不同的极化。磁强仪方法就是根据这种极化状况利用一些检偏振器来区分不同成分的谱线，其中每个检偏振器只能使具有某个确定极化方向的光线通过。于是只要对那些具有不同极化分量的谱线的中心位置进行仔细的测定，我们就能够取得状态间的能量分裂，即使这些谱线因干扰因素而被强烈增宽也没有关系。对太阳工作而言，经常用到的是铁或铬的谱线。知道了能量分裂，通过方程 (7.11) 便立即可求得 H 。

星际磁场就是按类似的方法利用射电观测来加以测定的，这一技术的原理同太阳工作中所用到的原理完全一致。

由于相当多的理论取决于星际磁场的存在，因此我们在这儿要对测定磁场的唯一直接的方法加以比较详细的介绍。

在星际空间的中性氢区域内，可以利用原子氢的 21 厘米谱线来确定磁场的存在。在磁场内能级会发生分裂，从而可以出现三种不同的跃迁谱线，它们对应于 $\Delta m=0, \pm 1$ 。沿着磁场方向来看，在频率 $\nu=\omega/2\pi$ 处出现的只有两条谱线，它们分别为（参见方程 (7.11)）：

$$\nu = \nu_0 \pm \frac{eH}{4\pi mc}, \quad \nu_0 = 1420 \text{ 兆赫} \quad (7.12)$$

这两个分量是方向相反的圆极化分量（图 7.5），它们称为 σ 分量（图

7.4)。如果沿着垂直于磁场的方向看它们就好像是两个线极化分量，极化的方向与场的方向成直角。

图 7.5 沿磁场方向观测时，1420 兆赫氢线两个圆极化分量位置的塞曼位移

还存在一个无位移分量，即 π 分量，如果沿着垂直于磁场的方向来看，这一分量便出现在频率为 ν_0 的地方；它是线极化的，极化方向与场的方向相平行。如果沿着场力线来看的话，这个无位移分量就一点也观察不到了。

由于星际气体原子的快速运动，使得塞曼分裂的观测颇为困难。这种运动造成谱线的多普勒致宽（7.6 节）。1 公里·秒⁻¹ 的随机运动所造成的频率位移约为 $\delta\nu/\nu \sim 3 \times 10^{-6}$ 。21 厘米谱线的频率为 1420 兆赫，其相应的频移大约为 4×10^3 赫。作为比较，因磁场造成的频率分裂 $\Delta\nu$ 在两个 σ 分量之间为 2.8×10^6 H 赫。这意味着强度约为 10^{-5} 高斯的磁场所引起的分裂 $\Delta\nu$ 大约只有 30 赫。

通常，由于存在迭加的多普勒致宽，这种分裂几乎是不可能观测到的。但是，正如已经指出的那样，极化上的差异可以帮助我们做到这一点。谱线边缘的斜率是比较大的，因而观测谱线的边缘就可以很好地确定两个极化分量的强度差 ΔI （图 7.5）。利用这种技术至少已经确定了在猎户座的某些致密星云中有强度高达 5×10^{-5} 高斯左右的磁场存在（Ve69）。在别的天区中磁场要比 10^{-5} 高斯弱得多。

7.4 电离氢的光谱

(a) 正离子

氢可以通过吸收一个能量在 13.6 电子伏特以上的光子而发生电离。一旦达到电子脱离质子所需要最小能量后，剩余能量总是能够以电子和质子的平移动能形式而被吸收。这一特性对于确定非常炽热的恒星的状态是很重要的。我们决不会观测到超出电离极限——赖曼系限——的紫外光子，任何这类光子一旦它们发射出来就立刻被恒星周围的气体所吸收；而如果在那儿没有足够的气体存在，那么这种吸收也必然会在恒星和地球之间的星际空间中发生。

我们也许会以为，在这种情况下电子和质子的复合一定会再产生出紫外光子。但是，这种情况是很少见的。复合的结果往往使原子保持在它的某个激发态上，接着按级联跃迁的方式经过一些较低的激发态而到达基态。在这一过程中，产生出若干个能量较低的光子。要是在初次复合时没有发生这类能量降级，那么它通常也会在以后的某一次机会中出现。这种机会是很多的，因为对致电离辐射来说平均自由程非常之短，所以原子发生电离的几率极大。能量略为大于电离极限时的吸收截面约为 10^{-15} 厘米²。因此，即使星际密度只是每立方厘米 0.1 个原子，吸收的平均自由程也只有 10^{16} 厘米左右，与此相比典型的星际距离约在 10^{18} 厘米以上。由于致电离光子所作的是某种随机游动，因而在通过 10^{18} 厘米距离的过程中它将会有 10^4 次机会进行电离和复合；一个致电离光子能穿过整个 10^{18} 厘米距离而不使任何一个氢原子发生电离的几率约为 e^{-100} 。

(b)负离子

氢原子不仅可以因失去一个电子而发生电离，也可以因获得一个电子而成为负离子 H^- ，即氢化物离子



这种离子的结构同中性氢原子有点类似，就是说它们的核都束缚着两个电子。核对第二个电子只有微弱的束缚作用，这是因为第一个电子相当有效地屏蔽了核电荷。结合能为 0.75 电子伏特，而且只存在一种束缚态。因此，从这个状态出发或者到达这一状态的全部跃迁便构成了连续光谱，也就是一个中性氢原子和一个自由电子形成的光谱（图 7.6）。

图 7.6 H^- 离子的能级图。这儿只有一种束缚态，结合能为 0.75 电子伏特。全部辐射跃迁或者在束缚态和具有一个自由电子的某一状态之间发生，或者在两种自由态之间进行，二者必居其一（波长 1 微米即为 10^{-4} 厘米。）

因为 0.75 电子伏特的结合能是很低的，所以从象太阳那样的冷星所发出的可见星光就可能被吸收掉。这种吸收一直延续到波长 1.65 微米处，因束缚—自由跃迁所造成的吸收到这一波长处便不再发生。但是，波长更长的吸收是可以发生的，因为 H^- 离子还能够有自由—自由跃迁——在这种吸收中能量被转换为氢原子存在条件下非束缚电子的平动能。这种平动能的影响决不能忽视， H^- 离子在太阳大气内的能量传输过程中起着重要的作用（Ch58）！

我们还应该解释一下，为什么 H^- 居然还能存在于冷星的大气之中。造成这一现象的原因在于，象钠、钙、镁这样一类具有低电离势的金属原子，甚至在冷星星光的作用下也很容易发生电离。在这个过程中所产生的电子有一些便自行与氢原子相结合，于是就形成了 H^- 离子。

当然，在 H^- 所引起的吸收之后，接下来总是会出现再发射。所以，下面这一点是很有趣的：我们从太阳那儿所接收到的大部分光线起因于一种连续跃迁，在这一跃迁过程中原子和电子复合而形成了氢化物离子，也就是 H^- 离子！

许多别的元素当然也会具有那些在天体物理学中起着重要作用的离子，它们的物理性质往往同氢所表现出来的那些典型性质相类似。

二次电离氢的物理性质同单次电离氢十分相象，唯一不同的地方是前者的核电荷较大，因而有关的跃迁能量就有所不同。正如已经说明的那样（7.3 节），单次电离氢表现出许多氢原子所具有的分光性质。但是，在充满了自由电子的高度电离介质内，这种氢离子也会发挥类似于质子所具有的那种作用，因为这两种粒子都是单电荷粒子。

当然，分子也可以被电离，而分子离子则具有它们自己的特征光谱。

7.5 氢分子

总的说来，分子可以有三种量子化状态。第一，分子中的原子可以彼此作相对振动，在这种情况下被量子化的是振动能。第二，可能存在量子化的自转，这意味着量子化了的是角动量。第三，就象在原子中的情况一样，存在不同的量子化的电子态。

相对说来原子间的结合能是比较弱的。这就是说，把形成某个分子

的两个原子分离开来所需要的能量，通常要比使原子电离所需的能量来得小，只有某些大的碱原子所具有的致电离能才低于最高的分子结合能。与此相应，在激发振动态之间所出现的辐射跃迁的能量，就往往要比大部分原子低能级之间的跃迁能量来得低。具体来说，有关原子或分子内部的电子跃迁，或者说电子激发态之间的跃迁，出现于光谱的可见或紫外部分；振动跃迁发生在光谱的近红外部分，其波长大致在 1 到 20 微米之间；而转动跃迁则出现在 $\lambda \geq 20$ 微米的远红外区以及微波频谱区。

当然，这仅仅是一种经验规律，实际情况并非严格如此。我们已经知道，氢原子的电子跃迁一直可以延续到与射电波长有关的能量最低的部分，7.4 节中已经对这种情况作了讨论。但是，在通常情况下，纯振动跃迁确实不会发生在对天体物理学研究具有重要意义的那些物质的可见光谱区，而纯转动光谱也不可能出现于短于几个微米的波段。

在许多场合下，两个原子彼此间的相对振动可以作为谐振动来处理；这是量子化了的振动。图 7.7 表明了氢 H_2 在分子的最低电子态中的各种能级。如果这种振动变得过分剧烈，分子就分解为两个分离的原子。分解能为 4.48 电子伏特，这个能量正好大于第十四激发振动态的能量。

图 7.7 氢分子 H_2 中的振动能级，电子处于基态。平行于横轴的线段的长度和位置表示了分子内核与核之间距离的大小 d 。平衡距离以 d_e 来表示。在连续能区以下只有 14 种振动状态，每一种状态可以分裂为若干个亚态，每一种亚态对应着不同的角动量

基态分子的能量并不为零。说得确切一点，正如在有关光子的讨论中所已经提到的那样（4.13 节），相对于零存在某个特征位移，其值大致等于基态和第一激发态之间能量差的一半。这一位移是全部振动效应所特有的。

氢分子可能是星际空间的主要成分，而且也许是银道面上暗星云的主要成分。遗憾的是我们对此却无所确知！

首先，对气体的探测是有困难的：氢是一种对称的偶极分子，而正如在 6.13 节中我们所已经看到的那样，对称结构充其量也只有当它们具有四极矩时才能发出辐射。氢确实会有这样一种矩，然而这类跃迁的跃迁几率，要比更为普遍的、非对称分子的偶极辐射的跃迁几率小好几个数量级。由于这个原因，分子氢几乎就观测不到，无论是振动光谱或是转动光谱的情况都是如此。

目前，在木星的大气中已经观测到了 H_2 的振动光谱，那儿的光学深度非常之厚。但是，关于星际空间的暗区域中是否包含有分子氢的问题仍然存在着很大的疑问。通过电子容许跃迁中光的吸收已经探测到了某些 H_2 的存在（Ca70），但是我们不知道银河系内 H_2 的实际丰富度是多少。

在正常情况下，我们应该可望有大量的这种气体存在，因为它在低温条件下是稳定的。但是，问题在于氢很容易分解，甚至可以被那些能量还不足以使氢原子发生电离、因而没有太大阻碍就可以穿过中性原子气体的紫外光子所分解。然而，这种辐射仍然可能被星际尘粒所吸收。在暗星云内部，尘粒吸收的程度足以把紫外辐射屏蔽掉，而氢分子在那

儿也许是很丰富的。

图 7.8 振动基态 H_2 的转动能级图。各个状态中两个核的自旋按两种取向交替排列：平行、同向(0)，或逆平行、反向(P)

因为直接的目视途径走不通，而我们又不知道中性分子氢的任何射电跃迁，这就使得 H_2 几乎探测不到。又由于四极辐射及吸收都很微弱，因此振动光谱和转动光谱也就很难观测到。分子氢所具有的转动光谱主要集中在远红外区；从第一激发态跌落到最低态的跃迁（见图 7.8）相当于波长为 84 微米，即 0.084 毫米。鉴于大气对这部分光谱区的吸收非常强烈，必须从大气外进行观测才能探测到这种跃迁（He67）*。

问题 7.3 如果某粒子系统绕其自转轴的转动惯量为

$$I = \sum_j m_j r_j^2 \quad (7.14)$$

试证明，只要我们所谈及的是一个经典的、刚性的非相对论性转子，那么能量和角动量之间就有以下的关系

$$\varepsilon = \frac{\omega L}{2} = \frac{L^2}{2I} \quad (7.15)$$

ω 是自转角频率。由此证明，由于角动量的量子化 $\hbar$ ，每个辐射量子所带走的能量必然为

$$\delta \varepsilon = \hbar \omega \quad (7.16)$$

在量子理论中总角动量由 $\hbar[J(J+1)]^{1/2}$ （见 7.7 节）给出，试证明每种状态的能量为

$$\varepsilon = \hbar^2 \frac{J(J+1)}{2I} \quad (7.17)$$

而在 $J \rightarrow J-1$ 跃迁中所释放出来的量子的能量为

$$\delta \varepsilon = \hbar^2 \frac{J}{I} \quad (7.18)$$

试证明：对于高速自转的大质量天体来说，上述公式与经典公式是等效的。

问题 7.4 如果某个星际分子在同周围的气体取得热平衡（比如说 $T \sim 100K$ ）条件下所具有的转动能量为 kT （4.18 节），那么这一能量便决定了当原子重量典型值取 10^{-23} 克、典型分子半径取 2 埃时，该分子的辐射频率范围。试利用上一个问题中所得某些表达式来证明，辐射可望出现于远红外和亚毫米波区。

问题 7.5 如果分子同温度为 T 的气体处于热平衡状态，试确定在绕某给定自旋轴的转动惯量为 I 的分子中，转动状态为 J 的分子所能出现的几率。由此你将会相信，在冷星际云（ $T \sim 100K$ ）内的分子不可能被激发到非常高的转动状态。

问题 7.6 如果星际尘粒同周围的气体（ $T \sim 100K$ ）处于热平衡状态，其典型半径为 10^{-5} 厘米，典型质量为 10^{-15} 克，试问这些微粒可能会在什么频率处向周围辐射出角动量？事实上这一过程是不可能实现的。因为，可以预料这些又小又不均匀的尘粒会具有显著的电偶极矩。但是，观测工作只能在大气外进行，地面上的广播通讯以及星际等离子体吸收可能会妨碍这种观测工作的顺利开展。

问题 7.7 有人认为，可能会存在一些角动量很大、以至不可能收缩成为高密度状态的大质量天体。在这种情况下，天体也许会慢慢地冷却下来，永远不会变为一颗恒星，因为它的中心温度不够高，不足以维持核反应的进行。

但是，这类天体也许能够通过不断地发出圆极化辐射而失去角动量。

象这样一类天体也许还会发出引力辐射。由于引力子所带走的角动量为光子的两倍，试观察一下如果把问题(7.3)中的几个公式用于引力子，那么它们将会有哪些变化。把同样的问题用在中微子上，它所带走的角动量只是光子的一半。在通常条件下，上述任何一种情况中发射出一个量子的几率是相当小的，下面几节中有关跃迁几率的讨论将会说明这一点。如果事实上确有电磁辐射在发射出来，那么它也不会来自星际介质，因为大质量天体的预期自转频率 ω 总是很低的。那么为什么不会呢？对能量来说又会发生些什么呢？(Be71)

7.6 光谱线中所包含的信息

任何受激原子系统，如果没有外界的影响，那就会自发地跃迁到某种低能状态。在这一类跃迁发生之前所需经历的平均时间则随具体情况的不同而异，它同诸如状态的对称性、系统的大小等等因素有关（见 7.7 节）。如果在任意单位时间间隔内系统离开这一激发态的总的几率为 P ，那么它停留在该激发态上的总的寿命就是 $\delta t = 1/P$ 。因此，我们就不可能对状态的能量作任意高精度的测定。停留在激发态上的有限时间，意味着能量只能确定到由测不准原理所规定的精度 $\delta \varepsilon$

$$\delta \varepsilon = \frac{\hbar}{\delta t} \quad (7.19)$$

因此，跃迁谱线的固有宽度通常就不会很窄。在确定 i 和 k 两种状态之间的跃迁能量时所能达到的精度，同高、低两态的寿命都有关系，因而谱线的总的频宽 $\delta \nu$ 为这两种能级宽度之和。这一总宽度通常表以

$$\delta \omega = \frac{(\delta \varepsilon_i + \delta \varepsilon_k)}{\hbar} = \gamma = 2\pi\delta \nu \quad (7.20)$$

γ 称为跃迁的谱线固有宽度。

我们在 7.8 节中将要证明，自发衰变原子所发出的辐射的光谱分布或说谱线轮廓为

$$I(\omega) = I_0 \frac{\gamma}{2\pi} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4} \quad (7.21)$$

在频率 $\omega_0 \pm \gamma/2$ 处强度降低到极大值的一半。

在天文学研究中，谱线固有宽度很少能直接观测到；但是实测宽度和固有宽度之间的偏差可以为我们提供大量的信息，因而列出各种谱线增宽效应对我们将是有用的。

(a) 多普勒致宽

这一效应是原子或分子随机运动的结果，而我们所观测到的便是这些原子和分子所发出的辐射。如果运动速度不大，则辐射的频率位移大致与视向速度分量 v_r 成正比（见方程(5.44)）：

$$\Delta\omega = \omega_0 \frac{v_r}{c}, \quad v_r \ll c \quad (7.22)$$

引起多普勒致宽的可以有两类运动：云内致发射原子的热速度，以及沿视线方向重迭在一起的各个云块所特有的湍流速度，有时候这两种效应是可以分离的。

例如，我们可以观测星际钠原子对恒星辐射的吸收情况。钠对可见光谱中黄光部分的吸收是很强烈的，在 5890 和 5896 埃处有一对被称为钠 D 线的吸收谱线。要是我们在研究这些谱线时的分辨率高到可以检测出 10^{-6} 的谱线位移，那么我们就能够鉴别出速度小到 $\sim 3 \times 10^4$ 厘米·秒⁻¹ 的运动。这时我们所观测到的将是一系列离散状的增宽吸收线，这些谱线是由吸收了视线方向的光线的各个云块所造成的，同时还能看到对应于每一块星际云的各条谱线都有一个确定的特征宽度。这种各别的谱线宽度可能完全是由热运动造成的，也可能部分起因于每块云内尺度更小的湍流运动，至于究竟是哪一种情况我们现在还不能很快地把它弄清楚 (Ho69)。

问题 7.8 如果原子的质量为 m ，运动速度服从麦克斯韦-玻耳兹曼统计法，那么观测到某一给定视线速度 v_r 的几率同 $\exp(-v_r^2 m / 2kT)$ 成正比 (见方程 (4.56))。试证明，在这样的前提条件下，多普勒致宽的谱线轮廓应该具有的形式为

$$I(\omega)d\omega = I_0 \exp\left[-\frac{mc^2(\Delta\omega)^2}{2\omega_0^2 kT}\right]d\omega \quad (7.23)$$

再注意到问题 (4.27)，从而说明谱线宽度怎样可以通过方程 (7.22) 直接同温度联系起来。

一般来说，因多普勒致宽所造成的半极大值宽度

$$\delta = \omega_0 \left[\frac{2kT(\ln 2)}{mc^2} \right]^{1/2} \quad (7.24)$$

要比谱线的固有宽度 γ 大得多。但是，它按照指数规律下降，因此减小的速率要比谱线固有宽度快得多。所以，对非常强的谱线——比如说星际空间的赖曼 α 线——来说，我们观测到的谱线翼通常是由谱线固有宽度以及下面所列举的其他原因造成的 (Je69)。

(b) 碰撞致宽

在比较稠密的恒星大气中，处于激发态的原子或者离子常常会遭到碰撞。由于任何一次碰撞都有可能引起向低能态的跃迁，不断碰撞的结果就会使总的跃迁几率增大。因此，如果自发跃迁的几率为 γ ，而单位时间内引起跃迁的碰撞次数为 Γ

$$\frac{\delta \mathcal{E}}{\hbar} = \gamma + \Gamma \quad (7.25)$$

所发射的谱线的强度分布和谱线固有轮廓的分布相同，不过 γ 应代之以 $\gamma + \Gamma$ 。

(c) 其他类型的致宽效应

相邻原子之间的相互作用还会产生其他的一些效应，这些效应可以通过电场的影响 (斯塔克 (Stark) 效应)、原子系统间的共振耦合等途径引起能态的位移和分裂。所有这些过程都会导致谱线的增宽，不过在低密度状态下它们的效应是很小的。

问题 7.9 对于从恒星大气所得到的可见光谱来说,为了能对其中多普勒和碰撞两种效应的谱线宽度的相对重要性有一个比较明确的概念,试证明:如果大气密度为 n , 热速度为 $(3kT/M)^{1/2}$, 碰撞截面为 σ , 则就有

$$\frac{\Gamma}{\delta} \sim \frac{n\sigma}{\omega_0} \quad (7.26)$$

其中数值在 1 左右的因子均已略去。对于可见光 $\omega_0 \sim 10^{15}$, 而碰撞截面等于原子的典型大小, 即 10^{-16} 厘米²。在普通的恒星光球中 $n \ll 10^{21}$ 厘米⁻³, 由此得 $\Gamma \ll \delta$ 。

7.7 选择定则

在 7.2 节中我们已经指出, 原子系统与辐射之间的相互作用要服从一定的守恒定律。为了满足这些定律, 必然有一些跃迁是禁戒的, 而另一些则是容许的。说明容许跃迁的那些定则称为选择定则。前面我们已经看到这些定则大致是怎样得来的, 这一节我们就要比较深入地来研究这个问题。

当任何两个原子系统结合而形成一个较大的系统时, 它们的角动量就会相加; 结果, 沿着任意选定方向 z 的最终角动量 J_{zf} 便是沿着该方向的两个初始角动量之和。

$$J_{zf} = J_{z1} + J_{z2} \quad (7.27)$$

这儿下标 1 和 2 表示两个不同的初始系统。

由于对 z 分量作了精确的测定, 这就不可能同时对横向分量也进行精确的测定, 因而对 x 和 y 两个方向便不存在 (7.27) 这种形式的方程。无论把记号 J_{zi} 解释为角动量的 z 分量, 或者只是把它理解为该角动量分量的量子数, 上述公式都是成立的, 在后一情况下量子数乘以 $\hbar$ 就表示了实际角动量分量。下面我们就把记号 J_{zi} 理解为量子数, 这些量子数可取的值为零、半整数、或整数。

有关角动量平方的相加问题还可以补充一点说明。(角动量)² 也是一个可精确测定的量, 然而它可以与 J_{zi} 同时加以测定。这条补充说明稍微有点复杂。尽管如此, 归根结蒂它就是说 (角动量)² 的容许值始终只能取以下的数值

$$(\text{角动量})_i^2 = J_i (J_i + 1) \hbar^2, \quad i = 1, 2, f, \quad (7.28)$$

其中 J_i 和 J_{zi} 间的关系要求 J_{zi} 的取值为

$$J_{zi} = J_i, J_i - 1, J_i - 2, \dots, 1 - J_i, -J_i \quad (7.29)$$

我们说过, z 方向是可以任意选定的, 让我们把这一方向选为光子趋近原子系统时的方向。在这儿所用的标记中可以令下标 1 代表光子, 2 代表原子的初态, 而 f 则是吸收光子后的原子的状态。于是由 z 方向的这样选择就得到

$$J_{zf} = J_{z2} \pm 1 \quad (7.30)$$

因为 $J_{z1} = 1$ 。这就告诉我们, 具有半整数 J_{zi} 值的原子系统其 J_i 值也必然是半整数, 因而通过光子的吸收或者发射不可能产生 J_{zi} 或 J_i 为整数值值的任何跃迁。同样, 角动量量子数为整数的系统, 在光子吸收过程中始

终将保持它所具有的那些性质。

让我们再来设法弄清楚为什么方程(7.28)会采取它所具有的特定形式。我们知道, J_{zi} 可取的极大值为 J_i 。对于这一特定状态, 方程(7.28)说明了存在一项由横向角动量分量引起的附加角动量 $J_i \hbar^2$ 。因此, 这些分量永远不会等于零, 除非 J_{zi} 本身也为零时它们才必然为零。造成横向角动量分量附加项的原因是, 测不准原理不允许同时精确地测定两个或两个以上的角动量分量。

我们注意到, 如果换一种方法, 则还可以用量子数 J_{zf} 和 J_{z2} 来对应前面以 m 标记的磁量子数。这时, 方程(7.30)给出了一条当光子沿磁力线方向发射时说明了 $\Delta m = \pm 1$ 的选择定则, 这就是为什么沿着这一方向只能观测到两条塞曼位移谱线的原因。如果发射方向与磁场相垂直, 方程(7.30)仍然是正确的, 但是这时 J_{z2} 与 m 的对应关系便不再成立。在这种情况下如果把光子划分为 $J_{z1} = \pm 1$ 的两组, 也就是根据左旋或右旋极化来划分的话, 那就会把不同磁能级 m 的影响混淆起来。这种情况是必然会发生的, 因为当我们沿着上述方向来看的话, 来自不同能级 m 的光子是一些面极化光子; 正如 6.12 节中已经说明的那样, 面极化光可以看作是左旋或右旋两类极化分量的某种迭加。因此, 沿着与磁场相垂直的方向来看的话, 即使式(7.30)仍然得到满足, Δm 可能的取值为 0 以及 ± 1 。

方程(7.30)引出又一条选择定则, 它是非常重要的: 对于一个原子系统来说, 不可能通过吸收或发射一个光子, 来实现取值为零的两种角动量状态之间的任何跃迁。我们很容易看出这一点必然是正确的。如果 $J_2 = 0$, 那么 $J_{z2} = 0$; 同样如果 $J_f = 0$, 则 $J_{zf} = 0$ 。但是根据式(7.30)这两个 z 分量不可能同时为零, 因而上面所述的选择定则必然是正确的。无论所述及的是电子跃迁还是振动跃迁, 这条定则绝对不可违背, 它永远保持正确无误!

$$J=0 \leftrightarrow J=0 \quad (7.31)$$

在量子力学中, 象这一类的选择定则是同原子系统的对称性联系在一起的。如果系统的对称性相当复杂, 那么选择定则也会相应地变得很复杂。这儿我们只是说明一两个最简单的选择关系, 但是应当记着, 即使表面上看来是一些比较复杂的定则, 实际上就是对基本对称性的一些说明, 如果我们用适当的对称性来剖析的话它就会变得比较简单。这儿所讨论的几个角动量选择定则就是建立在原子系统转动对称性的基础之上。

方程(7.31)仅仅对那些涉及到单个光子的跃迁才能成立。在极为罕见的双光子跃迁中, 上述跃迁便有可能出现, 这时两个光子所带走的角动量是方向相反的。这类跃迁有可能在星际空间的稀薄星云中出现, 那儿, 处于零角动量激发态的原子, 可以毫无干扰地存在很长的一段时间 (Va70, Sp51b)。实验室系统内的压力比较高, 这些激发态通常就会通过原子碰撞而变为去激发态。

角动量量子化的一个有趣的特性是, 对所有的物质来说, 量子化状态的存在就意味着同具有非量子化角动量的辐射之间不存在相互间的作用。因此, 无论什么场, 不管是电场还是磁场, 弱核场还是强核场, 引力场或者宇宙中可能存在的其他什么场, 它们都应该同量子化了的辐射

联系在一起，它们或者具有半整数自旋角动量，或者其值为 $\hbar$ 的整数倍。例如，一旦探测到引力波并对它进行了研究之后，我们深信将会发现它们具有量子化的自旋角动量。目前预言引力波的自旋应该是 $2\hbar$ ，即为光子自旋的两倍（Gu54）。

7.8 吸收线和发射线的轮廓

如果我们要估计一下在一颗紫外发射星和地球之间、沿着视线方向的天然星际氢的含量，那么就需要知道赖曼 α 吸收线的轮廓以及它的总强度。有了这两方面的资料以后，我们就可以根据所观测到的吸收线宽度来确定氢的含量。从本质上来说，谱线强度和轮廓的计算是一个量子力学的问题。但是，我们可以用经典理论并根据谐振子模型来计算谱线的轮廓，这个模型还能给出有关谱线强度的数量级的正确估计。不过我们一定要注意，切勿以为这种经典模型是万能的，因为单是用这一模型推导不出原子系统的量子化能态。首先，我们要用一些半经典的方法来导出一个有关发射线轮廓的表达式。

我们从方程(6.88)开始，一个带电振子每秒钟所辐射出的总能量为 $I = 2e^2 \ddot{r}^2 / 3c^3$ 。我们可以看出，与这一强度相应的力为

$$F = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{d} \quad (7.32)$$

因为这时该力在单位时间内所做功的平均值为

$$\langle F \cdot \dot{d} \rangle = \left\langle \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{d} \cdot \dot{r} \right\rangle = \left\langle \frac{2}{3c^3} \frac{d}{dt} (\dot{d} \cdot \ddot{d}) - \frac{2}{3c^3} \ddot{d}^2 \right\rangle = I \quad (7.33)$$

其中，因为在简谐运动中 $\dot{d}$ 和 $\ddot{d}$ 为严格反相，故含有 $\dot{d} \cdot \ddot{d}$ 的一项便等于零。阻尼力 F 同谐和力相比为一小量；换句话说，振荡可以延续好多周期。因此，我们可以把运动方程写为

$$m \ddot{r} = -m\omega_0^2 r + \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{r} \quad (7.34)$$

这个方程同式(6.107)非常相象。不同的只是这儿用的是阻尼力（而不是谐和力）。因为阻尼是微弱的，运动近乎是谐运动，我们就有近似

$$\ddot{r} = -\omega_0^2 r \quad (7.35)$$

于是式(7.34)可改写为

$$\ddot{r} = -\omega_0^2 r - \gamma \dot{r} \quad \text{其中} \quad \gamma = \frac{2}{3} \frac{e^2 \omega_0^2}{mc^3} \ll \omega_0 \quad (7.36)$$

其近似解为

$$r = r_0 e^{-\gamma t/2} e^{-i\omega_0 t} \quad (7.37)$$

因为 $\gamma \ll \omega_0$

因此振荡偶极子建立了一个以下形式的振荡场

$$E(t) = E_0 e^{-\gamma t/2} e^{-i\omega_0 t} \quad (\text{RP}) \quad (7.38)$$

其中只有实数部分有物理意义。该场已经不是单色场，原因在于它要随时间而变化，而只有不随时间变化的振荡场才可能是严格的单色场。强度随时间的变化对频谱会有影响。既然如此，对全部频率成分取积分而得的总场为

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (7.39)$$

根据傅里叶理论中的一条定理，这一形式的积分可以变换为

$$E(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{i\omega t} dt \quad (7.40)$$

如果我们现在把场(7.38)引入这一方程，并注意到 $E(t)$ 仅对时间 $t \geq 0$ 才有定义，那么积分是很容易的，可以得到

$$E(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{E_0}{i(\omega - \omega_0) - \gamma/2} \quad (\text{RP}) \quad (7.41)$$

于是我们可以求得谱线强度（见图 7.9）：

$$I(\omega) = |E(\omega)|^2 = I_0 \frac{\gamma}{2\pi} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4}$$

$$I(\nu) = I_0 \left(\frac{\Gamma}{4\pi^2} \right) \left[(\nu - \nu_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} \right]^{-1}, \quad \gamma \equiv 2\pi\Gamma \quad (7.42)$$

式中 I_0 是整个频率空间积分后的总强度，而 $\omega = 2\pi\nu$ ， $\omega_0 = 2\pi\nu_0$ ：

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} I(\omega) d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} I(\nu) d\nu \quad (7.43)$$

这种类型的谱线轮廓有时称为洛伦兹轮廓，而 Γ 和 γ 称为谱线固有宽度，它是半极大值处的全频宽。迄今为止我们还没有证明吸收线和发射线具有同样的轮廓，不过这一问题将会在 7.9 节中再一次加以讨论。

图 7.9 谱线的固有宽度。曲线已标准化，使峰值强度为 $2I_0/\pi\gamma$ （见方程(7.42)）

7.9 量子力学的跃迁几率

许多天体物理信息要根据吸收线或发射线的强度才能取得。从谱线强度可以确定辐射源内、或者沿着辐射源视线方向上的各种原子、离子或分子的密度，而不同谱线的强度之比则可以用来确定气体的激发温度——其中需要用到萨哈方程（4.16 节）。

但是，要取得这类信息的有效形式，我们首先一定要把吸收线或发射线的强度同各类能级中原子或离子的数密度联系起来；而要做到这一点我们就必须知道系统各状态间的跃迁几率。

大体上说来，跃迁几率同三方面的因素有关：(a)原子系统的对称性质，(b)原子系统对于吸收或发射波长的相对大小，及(c)辐射场的统计性质。其中第一项因素包括 7.7 节中所讨论过的选择定则、6.13 节中关于荷质比的说明以及其他类似的一些限制。第二项因素反映了偶极辐射、四极辐射以及更高的多极辐射的相对几率，这一几率与系统的大小有关，作为一个例子，我们可以在式(6.93)中看到这一点。第三项因素就是现在所要讨论的问题，它仅仅同辐射场有关；不管所涉及的是原子系统还是核系统，对于任何一种跃迁来说这项因素的作用是完全相同的。

如果我们要计算原子系统从某个状态 i 到另一个状态 j 的跃迁几

率，那么这个几率将同光子场内发生某一变化可能取的途径的数目成正比。例如，对于在某一特定方向上极化的光子来说，发射一个径向频率为 ω 的光子的几率正比于（见方程(4.65a)）

$$\frac{\omega^2 d\omega d\Omega}{(2\pi c)^3} = \frac{v^2 dv}{c^3} d\Omega \quad (7.44)$$

这儿 $d\Omega$ 为立体角增量。如果孤立的来考虑这一项因素，那么在 $\omega \sim 3 \times 10^{15}$ 的光学区中的跃迁几率，比方说就要比 $\omega \sim 3 \times 10^9$ 的射电区大得多。

方程(7.38)仅仅对光子自发发射才能成立。一般说来，发射几率与 $n_\omega + 1$ 成正比，其中 n_ω 为每相格内已经具有表征被发射光子特性的动量和极化态的那些光子的数密度。沿着已经出现在原子附近的那些光子方向上的这种光子的优先发射称为受激发射或感应发射，它与通常的光子吸收严格反向。如果把 n_ω 看作是原子到达高能态后每相格剩余光子的数密度，那么吸收的数目同样与 $n_\omega + 1$ 成正比。因而我们知道每单位立体角、单位频率范围内的跃迁几率 $P(\omega, \theta, \phi)$ 普遍地服从以下的关系式

$$P(\omega, \theta, \phi) d\Omega d\omega = [n(\omega, \theta, \phi) + 1] \frac{\omega^2}{(2\pi c)^3} d\Omega d\omega \quad (7.45)$$

这儿 $n(\omega, \theta, \phi)$ ，为原子系统处于高能状态时每单位频率范围内占有某一光子态的几率，而 ω 是平均跃迁频率。现在让我们回过头来看一下前面所提到的因素(a)和(b)。这两个因素只能用量子力学的方法来加以考虑。一般说来，这类计算的结果是一个矩阵，其元素 U_{ij} 给出了原子系统在任意两个状态 i 和 j 之间的跃迁幅度，这两个状态间的实际跃迁几率与 $|U_{ij}|^2$ 成正比。

为了得到每单位立体角的跃迁几率，规定要用数字系数 $2\pi/\hbar$ 乘以乘积 $|U_{ij}|^2 P(\omega, \theta, \phi)$ ，因此

$$\begin{aligned} \text{每单位时间的跃迁几率} &= \frac{2\pi}{\hbar^2} |U_{ab}|^2 [P(\omega, \theta, \phi)] d\Omega \\ &= \frac{2\pi}{\hbar^2} |U_{ab}|^2 [n(\omega, \theta, \phi) + 1] \frac{\omega_{ab}^2}{(2\pi c)^3} d\Omega \end{aligned} \quad (7.46)$$

因为状态能量的范围是相当窄的，通常情况下 $n(\omega, \theta, \phi)$ 在谱线带宽的范围内不会有显著的变化。矩阵的元素已经包括了对方程(7.45)中所显含的频率带宽的积分。因此，跃迁几率(7.46)包括了对整个频率范围 ω 的积分，具体说来已经考虑到了谱线中心被强烈吸收或发射的光子以及在谱线两翼不太容易吸收和发射的光子。说得更明确一点，它已经考虑到了整个谱线的轮廓(7.42)。

我们还需要建立量子力学的跃迁几率同方程(6.86)之间的关系，后者表示了振荡偶极子所吸收的强度 I ，它是由偶极矩 d 对时间取二阶导数求得的

$$I = \frac{2}{3c^3} \ddot{d}^2 = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{r}^2 \quad (6.86)$$

因为 r 与时间有关(7.37)，方程(6.86)很容易改写为

$$I = \frac{2e^2\omega^4}{3c^3} \langle r^2 \rangle = \frac{32\pi^4}{3c^3} e^2 v^4 \langle r^2 \rangle \quad (7.47)$$

这儿括号 $\langle \rangle$ 表示对时间取平均。强度 I 与量子力学中的自发跃迁几率有关；因此，如果要同式(7.47)加以比较，我们就必须在方程(7.46)中令 $n=0$ 。在偶极近似中，矩阵元素 U_{ab} 的贡献是：

$$|U_{ab}|^2 = 2\pi \hbar \omega_{ab} e^2 |r_{ab}|^2 \sin^2 \theta d\Omega \quad (7.48)$$

这儿已经对各种可能的极化方向进行了积分， $e^2 |r_{ab}|^2$ 的物理意义将在下面加以讨论。在现在的情况下总强度由跃迁几率(7.46)和光子能量 $\hbar \omega_{ab}$ 的乘积给出

$$I d\Omega = \hbar \omega_{ab} \cdot \frac{2\pi}{\hbar^2} \frac{\omega_{ab}^2}{(2\pi c)^3} \cdot 2\pi \hbar \omega_{ab} e^2 |r_{ab}|^2 \sin^2 \theta d\Omega \quad (7.49)$$

其中 θ 表示矢量 r 和所发出辐射的传播方向之间的交角。对全部发射角进行积分后我们便得到自发发射的辐射的总强度为

$$I = \frac{4}{3} \frac{e^2}{c^3} \omega_{ab}^4 |r_{ab}|^2 = \frac{64}{3} \pi^4 \frac{e^2}{c^3} v_{ab}^4 |r_{ab}|^2 \quad (7.50)$$

我们看到，用量子力学方法所得到的公式几乎同经典表达式一模一样。如果要得到完全一致的形式，只需用 $2|r_{ab}|^2$ 取代时间平均值 $\langle r^2 \rangle$ 。这个关系是和对应原理相一致的。但是，我们要注意量子力学中的 $e^2 |r_{ab}|^2$ 并不与均方偶极矩相严格对应。对于原子系统的每一个个别的状态 a 或者 b 来说，偶极矩应当分别由有关矩阵对角线元素 er_{aa} 或 er_{bb} 的表达式来给出。而量 er_{ab} 的情况则不然，由它所代表的性质要同时受到系统的初态和终态两者的影响，它们没有任何与之相严格对应的经典物理量，因而我们就无须为方程(7.51)中所出现的系数 2 而感到奇怪。事实上我们也没有理由要求经典形式同量子力学的形式完全一致。在解释跃迁的不连续性问题，辐射的量子理论毕竟是比较经典结果前进了一步。因此，在某些基本形式上，量子理论的结果必然同经典理论会有所不同。

迄今为止我们所得到的仅仅是一种形式上的解，我们还不能利用它来估算发射线或吸收线的强度。不过，我们还是可以利用方程(7.36)来达到这个目的。我们注意到 γ^{-1} 是一个不随时间而变的常数，因而只要取 γ 这个量就可以等效于某种跃迁几率。所以，只要使 γ 的数值等于跃迁几率(7.46)，我们就可以估算 U_{ab} 以及辐射的某种吸收截面。我们写出

$$\gamma = \frac{2}{3} \frac{e^2 \omega_{ab}^2}{mc^3} = \frac{2\pi}{\hbar^2} \frac{\omega_{ab}^2}{(2\pi c)^3} \int |U_{ab}|^2 [n(\omega, \theta, \phi) + 1] d\Omega \quad (7.51)$$

对于自发发射来说，可以令 $n(\omega, \theta, \phi)$ 等于零。这儿所用的 γ 值当然是根据偶极辐射体模型导出来的。因而，对方程(7.51)右端的积分就会包含有用经典表达式(6.85)计算时已经出现过的同一个系数 $2/3$

$$\int |U_{ab}|^2 d\Omega = \frac{2}{3} |U_{ab}|^2 4\pi \quad (7.52)$$

这儿

$$|U_{ab}|^2 = \frac{\pi e^2 \hbar^2}{m} \quad (7.53)$$

对我们来说，利用这个结果就可以求得原子系统对辐射的吸收截面。

设这一截面为

$$\sigma = \int \sigma(\omega) d\omega \quad (7.54)$$

再假定在原子系统周围的是密度为 $n'(\omega, \theta, \phi)$ 的各向同性的光子气体，于是被吸收的光子总数可以表达为

$$n'(\omega, \theta, \phi) \sigma d\Omega = \frac{2\pi}{\hbar^2} |U_{ab}|^2 [n(\omega, \theta, \phi) + 1] \frac{\omega_{ab}^2}{(2\pi c)^3} d\Omega \quad (7.55)$$

上式的左边表示单位时间内该截面积所截得的某连续光谱中、每单位频率范围内的光子数目，而右边则给出吸收一个光子的几率；这与式(7.46)所表示的意义是一样的。如果我们还是遵循这样的做法，即用 $n(\omega, \theta, \phi)$ 表示原子系统在高能态时所占有的那些光子态的比例，那么就可以在方程(7.55)中把光子的密度消去。因为我们用 n' 表示吸收之前、也就是原子系统还处于它的低能态时所存在的光子的数密度，故显然有

$$n'(\omega, \theta, \phi) = [n(\omega, \theta, \phi) + 1] \frac{\omega_{ab}^2}{(2\pi c)^3} \quad (7.56)$$

因子 $\omega_{ab}^2 / (2\pi c)^3$ 的出现是因为 n 是每相格的数密度，而 n' 为三维空间中每单位体积的密度。

于是从(7.53)和(7.55)两式就得到

$$\sigma = \frac{2\pi^2 e^2}{mc} = 2\pi^2 r_e c \quad (7.57)$$

式中

$$r_e \equiv \frac{e^2}{mc^2} \quad (6.168)$$

如果对方程(6.107)进行修正，使之包括辐射反作用力（见方程(7.32)），

$$F_{\text{辐射}} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{r} \quad (7.58)$$

那么截面(7.57)就同经典方法所得到的数值完全一致了，这里的 $F_{\text{辐射}}$ 代表由于辐射存在而对运动电荷所产生的力。

现在我们把一系列应当注意的地方依次说明如下：

(1) 这儿所得到的截面仅仅对那些完全可以用一个带电振荡偶极子来代表的原子系统才能成立。我们必须特别强调这一点！每种原子或分子都有它自己的结构，因而也就按其自己的方式同光子相互作用。但是，许多原子系统所共有的一个基本特性就是电子被束缚在原子核或核心的周围。这时，处于某种稳定量子态的电子就会反抗外加电磁场迫使它离开平衡位置的作用，或者说得更确切一些就是会反抗外场迫使它离开原子系统内的平衡轨道分布的作用。

从这一点来说，电子就好像被束缚在大质量核的周围在作谐运动，这就证实了可以用经典的偶极近似作为量子处理的先导。然而，只是对那些具有某种偶极矩的原子或分子，并且当波长比原子尺度大时才能这样做。因此，经典辐射体所有的那些限制在量子范围内同样也是成立的。这一点在 6.13 节中指出过，但是也许值得在这里再提一次。

(2)任何一个原子的性能都不会同经典谐振子完全相同，因此，它的截面也就不会精确地等于式(7.57)所给出的值。我们可以定义一个振子强度 f ，用它来表示给定谱线的实际吸收强度， f 以 $2\pi^2 e^2 (mc)^{-1}$ 为单位。 $f=1$ 就表示吸收等于经典偶极子的吸收。

(3)正如在方程(7.54)中已经注意到的那样，原子系统的截面是随频率而变的。如前所述，频率的分布具有方程(7.42)所示的形式。

问题 7.10 如果吸收截面为

$$\sigma_{ab}(\omega) = \frac{2\pi e^2}{mc} f_{ab} \frac{\gamma/2}{(\omega - \omega_{ab})^2 + (\gamma/2)^2}$$

$$\sigma_{ab}(\nu) = \frac{2\pi e^2}{mc} f_{ab} \frac{\Gamma}{2} [(\nu - \nu_{ab})^2 + (\frac{\Gamma}{2})^2]^{-1}, \quad \Gamma = \frac{\gamma}{2\pi} \quad (7.59)$$

证明就上式对全部频率积分后所得到的结果等于式(7.57)所求得的总截面乘以振子强度 f_{ab} 。

(4)吸收和发射截面的一致性已经包含在方程(7.46)所取的形式之中，这一点无论对吸收量还是对它的谱分布来说都是如此。如果任何辐射场都完全不存在，即 $n(\omega, \theta, \phi) = 0$ ，我们仍然有真空场或说零能级光子族存在，而这个场就会引起辐射的自发发射，关于这一点将在 7.10 节作比较详细的讨论。

(5)吸收截面的大小与不同种类的跃迁有关，这一点也是很有意义的。对应于单位振子强度的吸收截面(7.57)为 $\sigma \sim 0.17 \text{ 厘米}^2 \cdot \text{秒}^{-1}$ ，如果把这个数字乘以单位频率间隔内的辐射流，就得到原子所吸收的总辐射量。有时候知道谱线中心的极大吸收是有用的，因而峰值吸收截面是一个应该知道的有用的量。

问题 7.11 试证明极大吸收截面的大小为 $\sigma(\omega_{ab}) = (3\lambda^2/2\pi) f_{ab}$ ，所以对于 $f_{ab} \sim 1$ 来说，共振时原子的视大小大约比波长 λ 的平方小一半。

问题 7.12 试问，在发射线或吸收线中，处于谱线固有宽度所确定的带宽 γ 内的辐射量，在总辐射中所占的比例是多少？

问题 7.13 证明厘米·克·秒制单位内的自发跃迁几率大致为 $\gamma \sim (5\lambda^2)^{-1}$ 。因此，对可见光来说其值为 10^8 秒^{-1} 。

从另一个不同的角度来说，我们可以用式(7.50)把跃迁几率 ω 写为

$$\omega \sim \frac{e^2}{c^3} \frac{\omega_{ab}^3}{\hbar} |r_{ab}|^2 \sim \frac{e^2}{c^3 \hbar} \left(\frac{me^4}{\hbar^3}\right)^2 \left(\frac{\hbar^2}{me^2}\right)^2 \omega_{ab}$$

$$\sim \left(\frac{e^2}{ch}\right)^3 \omega_{ab} \sim \frac{1}{(137)^3} \omega_{ab} \quad (7.60)$$

这儿为了大致估计辐射频率 ω_{ab} ，我们已用到了有关类氢原子的方程(7.3)，并且令波尔半径(7.4)等于 $|r_{ab}|$ 。这时，对于精细结构常数

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \sim \frac{1}{137} \quad (7.61)$$

我们取到三次幂，它出现于方程(7.60)的最后一部分中。可见辐射的跃迁几率约为 10^8 秒^{-1} ，与此相应，我们从式(7.60)可以知道，X射线的跃迁几率应为 $\sim 10^{11} \text{ 秒}^{-1}$ ， γ 辐射为 $\sim 10^{14} \text{ 秒}^{-1}$ ，而射电波的跃迁几率则 $\lesssim 10^4$

秒⁻¹。有趣的是式(7-60)与致发射粒子的质量无关，它不一定就是电子，也可以是离子。自然，状态的寿命恰好就是辐射几率的倒数。

振子强度的量值可以有很大的变化，对于氢赖曼系我们有以下的数值： $L\alpha$ (0.42)， $L\beta$ (0.08)， $L\gamma$ (0.03)， $L\delta$ (0.01)等等。 f 偶而可以稍大于 1，而在另一个极端有时也可能出现 f 为 10^{-10} 甚至更小。因此，必须针对任何给定的原子或分子具体计算它们的振子强度，这一强度与原子系统的结构特性是很有关系的。

在某个原子或分子内，不同跃迁的 f 值是不独立的。具体来说，给定一个原子，它的强吸收或发射谱线的数目不可能有任意多条：如果我们把原子或离子内各种可能状态之间能够发生的全部跃迁的 f 值相加，那么其结果应该等于原子内电子的总数。如果原子对内层电子的束缚作用非常强，那么 f 值之和应该等于受核束缚较弱的价电子的数目。这就是托马斯·库恩 (Thomas·Kuhn) 求和定则 (A163)*。对氢来说，所有 f 值之和应该等于 1。

问题 7.14 许多年来，天文学家们相信原子会受到太阳光的斥力作用，其程度足以形成我们所观测到的很长的彗尾。

对于一个小分子来说，设它的振子强度 $f=1$ ，质量 $m=5\times 10^{-23}$ 克，试计算太阳辐射斥力与引力之比值。就彗尾而言，与所观测到的斥力加速度相当的有效比值约为 $10^2\sim 10^3$ 。假定全部阳光大致上平均分布在 4×10^{-5} 到 7×10^{-5} 厘米波长范围之间，试问阳光的辐射作用是否有可能产生这么大的斥力？

现在，人们认为造成彗尾结构的加速度的主要原因是磁流力；但是，辐射压在彗尾的形成过程中仍然可能起着一定的作用。目前，用任何一种理论来解释都存在一定的困难。

(b) 无偶极矩的原子系统充其量也只是通过四极辐射或磁偶极辐射来实现跃迁。这类过程的跃迁几率大约要小 $(r/\lambda)^2$ 倍，这儿 r 是原子系统的典型尺度。这一点同我们在 6.13 节中所看到的是一致的，因为 $r/\lambda \sim r\omega/c \sim v/c$ 。从式(7.60)我们又知道，对原子来说 $(r\omega/c)^2 \sim (1/137)^2$ 。我们发现磁偶极子辐射和四极辐射的实际跃迁几率分别约为 10^3 秒⁻¹ 及 1 秒⁻¹ (He50)*，这同上述估计大体上是符合的。

7.10 受激发射、相干过程及黑体辐射

受激发射并不是同我们在第六章中讨论过的那些过程（比如说电偶极子、四极子或同步加速发射）具有相同意义的一种机制，这种过程需要通过上述任何一种机制的帮助才能发挥作用。一旦频率为 $\nu = \varepsilon/h$ 的电磁波冲击到一个处于激发态的粒子，而该粒子的能量又要比另外某个状态高 ε ，这时就可能发生受激发射。

因此，频率为 ν 的电磁波或光子可以激发或感应某种附加光子的发射，后者的极化、传播方向以及频率都与致激发光子的相应量严格相同。从 4.11 和 4.13 两节中已经讨论过的意义上来说，这种新生成的光子的特征同致激发光子是无法加以区别的，因而我们称这类辐射为相干辐射。

让我们先来说明受激发射（有时称为感应发射）在黑体发射过程中所起的作用。同样，黑体辐射也不是一种机制。这是与辐射机制的存在

有关的一种过程，而我们可以通过各种各样不同的机制得到黑体谱。也正因为这个原因，对天体物理辐射源的特征黑体谱的形状的分析，只能告诉我们有关该辐射源的表面温度的某些信息，至于实际上造成所观测到的辐射情况的物理过程，从这种分析是无从知道的。

黑体辐射总是一系列发射和吸收过程的综合结果。这儿有两项基本要求：第一，处于发射表面附近的致吸收粒子的温度必须是常数，这样，从该表面所发出的光子就同具有某个确定温度值的粒子处于热平衡状态；第二，为了建立这样一种平衡状态，我们要求具有常数温度的致吸收粒子系集应足够大，这样才能保证在能量从这一粒子系集的表面逸出之前可以经历一系列的吸收和再发射阶段。

处于某激发能态 ε 的粒子的数密度 $n(\varepsilon)$ 由 n_0 按玻耳兹曼分布(4.47)给出，这儿 n_0 为处于某一低能态的粒子数密度：

$$n(\varepsilon) = n_0 e^{-\varepsilon/kT} \quad (7.62)$$

为了确定光子和粒子之间的平衡条件，我们可以用一种与第四章中所采取的途径不同的方法来加以处理。我们可以来寻找使得被粒子系集所吸收的光子数恰好等于每单位体积所发射的光子数的那些条件，因为这就是平衡的条件。为了分析这种状况，我们要考虑的只是在粒子的给定两个能态之间发生的跃迁，其他状态的存在不会改变我们的结论。

设有一个粒子，处于两个能态中的低态，它可以通过吸收一个光子而跃迁到高能态。处于高能态的粒子或者可以自发地发射出一个光子，也可以在一定频率的辐射的激发下感应发射出一个光子。平衡时，向下的感应和自发跃迁的总和必然等于向上跃迁的数目。设单位时间间隔内发出频率为 ν 的光子的几率为 $A(\nu)$ 。设吸收光子的几率为 $n(\nu, T) c B(\nu)$ ，这儿 $n(\nu, T)$ 是温度为 T 、频率为 ν 的光子密度，而 $B(\nu)$ 是单位时间的跃迁几率；于是我们容易看出，对于一个给定的激发粒子来说，其出现受激发射的几率将等于处于低能态的另外一个粒子的吸收几率。正如图 7.10 所说明的那样，这是时间反演对称性的必然结果，它对一切电磁过程都是成立的。

现在，我们马上可以写出频率为 ν 、频率范围为 $d\nu$ 的光子的吸收和发射之间的平衡方程。

$$n(\nu, T) B(\nu) n_0 c d\nu = [A(\nu) + n(\nu, T) c B(\nu)] n(\varepsilon) d\nu \quad (7.63)$$

把这一方程与方程(7.62)联合起来便得到

$$n(\nu, T) d\nu = \frac{A(\nu) / B(\nu)}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu \quad (7.64)$$

如果我们把自发跃迁看作是基态辐射场所产生的事件，这一点在 4.13 节中已经作了讨论，那么我们就可以令 $A(\nu)$ 等于辐射振子的数密度乘以每单位时间的跃迁几率 $B(\nu)$ 。这一点基本上相当于说明了下面几点：(a) 所有的发射过程都是感应产生的；(b) 发射几率同辐射振子的各类状态的总和成正比；(c) 每个基态振子 ($n=1$) 总是包括在内的；以及(d) 某些辐

图 7.10 (a) 表示频率为 ν 的一个光子激发出一个类似的光子，而粒子的能量则减少 $\varepsilon = h\nu$ 。(b) 表示的是时间反演过程，粒子因吸收一个光子而跃迁到较高的能态 ε 。(c) 说明的是辐射的自发发射，正如本节所讨论的

那样，我们可以认为这种发射是由处于基态的辐射振子所引起的。(d)表示从单激发辐射振子吸收能量的过程，而(d)相当于(c)的时间反演过程。辐射振子包含了我们称之为光子的粒子，这些振子处于高能态 n 。因此，通过对频率为 ν 的辐射振子的数密度进行相空间计数（方程(4.65a)），我们就知道

$$A(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^2} B(\nu) \quad (7.65)$$

为了把这些系数同前面的工作联系起来，我们注意由(7.50)式给出

$$\frac{I}{h\nu} = \frac{64}{3h} \pi^4 \frac{e^2 \nu^3}{c^3} |r_{ab}|^2 = \int A(\nu) d\nu = A_{ab} \quad (7.66)$$

问题 7.15 根据对应原理，跃迁几率应该同大的原子系统范围内的经典辐射强度有关。在星际空间的电离区内，跃迁常常发生在原子氢的各个高激发态之间（Ka59, HÖ65）。试证明从对应原理可以得到

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = h\nu A_{n, n-1} = \frac{\omega^4 e^2 a_n^2}{3c^3} \quad (7.67)$$

式中 a_n 为第 n 态的玻尔半径。试证明上式给出

$$A_{n, n-1} = \frac{64\pi^6 m_e e^{10}}{3c^3 h^6 n^5} = \frac{5.22 \times 10^9}{n^5} \quad (7.68)$$

问题 7.16 说明 $B(\nu)$ 与(7.59)式的 $\sigma_{ab}(\nu)$ 仅仅差一个因子 2。试导出 A_{ab} 和 f_{ab} 之间的关系式。

我们现在知道

$$n(\nu, T) d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{d\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (7.69)$$

这相当于黑体辐射所用的方程(4.71)，它说明了黑体过程在很大程度上取决于受激发射的概念。

上面我们所说明的过程是一个稳定的自动调节过程。如果 $n(\nu, T)$ 低于方程(7.69)给出的值，那么自发发射就会超过吸收和受激发射过程的总和；而光子的总数将会由此而不断增加，直至达到式(7.69)所给出的数值为止。相反，如果 $n(\nu, T)$ 偏高的话，则吸收过程将会使它减小而回复到平衡值。

值得注意的是 $A(\nu)$ 和 $B(\nu)$ 这商个爱因斯坦系数的定义有时候稍为有些不同——例如，它们可以分别按发射或吸收能来定义。只要我们始终保持某种一致的能级图，那么这种差异将是无关紧要的。

7.11 受激发射和宇宙微波激射器

我们要问，如果 n_0 和 $n(\varepsilon)$ 之间的关系不遵循玻耳兹曼关系(7.62)，那将会发生什么样的情况。要是热平衡有微小的偏离，则光子场往往会使 n_0 和 $n(\varepsilon)$ 回复到平衡状态。但是，如果高能态的粒子数开始超过低能态的粒子数，那么就会出现一种完全不同的过程。很明显，这种状况在热平衡条件下是决不会出现的，因为 ε 和 T 为正数， $\exp(-\varepsilon/kT)$ 永远小于 1。因此，粒子数反转，即 $n(\varepsilon) > n_0$ 的状况只能由某种人为的过程来引起。有时候我们把粒子数反转描写为一种负温度状态，因为在这种状态下方程(7.62)中的指数项可以大于 1。但是，这主要是一种描

述性的说法，它并不对应着任何的物理过程。

为了了解出现粒子数反转时所发生的情况，我们要注意在这种场合下受激发射的几率总是大于吸收几率。因此，在任何一次给定的跃迁中，辐射振子到达高能态的几率要比到达低能态来得大。所以，随着辐射在粒子系集中的传播，辐射就得到放大。而且，由于被发射的光子同致激发光子具有相同的特性，放大后的辐射是相干辐射；在实验室内这儿所述的过程就相当于一个微波激光器。因此，当这一过程在某一宇宙尺度上出现时，我们所谈到的就是微波激光器过程。

如果能量不断地注入粒子系集，这就是说高能态的激发率可以跟得上向下的自发跃迁和感应跃迁，因而处于高能态的粒子密度 $n(\epsilon)$ 将保持比低能态的粒子密度 n_0 来得高，在这样的前提下，宇宙微波激光器的作用就会始终维持下去。

这种能量注入过程可以有若干种形式。也许存在一种能量很高的光子，它们会把粒子激发到某个能态 ϵ' ，并且从该能态向基态的跃迁几率比较低，而进一步上升到能量为 ϵ 的状态的几率比较高，这一类微波激光器称为三能级微波激光器。化学作用可能是产生粒子数反转的另一条途径。假定在两个原子的相互作用过程中形成了一个分子，而且该分子具有高能状态，那么如果形成的速率足够高，粒子数反转就可以维持下去，而微波激光器的作用也就可以建立起来了。

看来，在星际空间的某些区域中，具有确定能态的 OH 基或者水蒸汽分子 H_2O （或两者兼之），会因能量注入而出现粒子数反转。对于这种注入作用我们还没有理解，而且奇怪的是空间的不同区域表现出被反转的 OH 能级有很大的不同。因此，好象存在若干种不同的注入机制，它们显然是在不同的条件下各自发挥自己的作用。

宇宙微波激光器发出极强的相干辐射。由于所有的感应光子都沿着同一方向运动，它们看上去就好像是从一块致密程度令人不可思议的区域内发出来的（图 7.11）。到达我们望远镜中的辐射被限制在一个边界非常确定、范围又极小的立体角之内。

图 7.11 观测者不可能根据相干辐射观测到整个粒子云（图中虚线）。他所能看到的只是产生相干波的那一部分区域，这可能是一个非常小的区域，其体积也许小到只有 λ^3 ，这儿 λ 为微波放射器所发出辐射的波长

我们所观测到的这样小的立体角很容易使人产生误解。它也许并不代表星际云的真实大小，而可能只是代表了产生相干辐射的区域的大小。根据相空间理论我们可以知道，这一范围等于 h^3/p^3 ，或说 $c^3/v^3 = \lambda^3$ ，这儿 λ 是光线的波长。今天，某些微波激光器已经用长基线射电干涉仪进行了分解，这说明宇宙空间中产生微波激光作用的区域可能是比较大的。

我们已经知道的有两类微波激光器。一种是 OH 微波激光器，它们的位置同 蝎 型变星相重合。这种微波激光器的光度大约是 $10^{-4}L_{\odot}$ ，它们表现出有光变特性，周期为几个月，与恒星的脉动同步。我们还发现一些同 H II 区内或 H II 区附近的尘埃云有关联的 OH 和 H_2O 微波激光器。 H_2O 微波激光器的光度可达一个 $L_{\odot}$ 左右，并表现出周期为几个星期的光变特

性。这种变化实在是太缓慢了，所以它不可能是闪烁——由尘埃云在行星际或星际空间内运动所引起的辐射的折光现象——所造成的。

注入这两类微波激射器的能量都可以来自与微波激射区有关的强红外辐射流。

星际微波激射器有一个特征就是辐射是高度极化的。正如已经所解释的那样，受激发射中所形成的光子的极化方向始终与致激发光子的方向相同。这意味着从某种给定原始粒子所产生的全部光子都具有相同的极化性质，而辐射的极化率达 100%。

设想在某一块星际云内粒子数已经反转，那么一束光在穿过这一云块时它的强度就会增大；为了弄清楚这一过程进行的速度有多快，我们注意到如果每次相互作用的增益为 g ，而云内的光学深度为 n ，则出射光束的强度为

$$N = g^n$$

假定增益为 1.1——这就是说，受激发射的几率比吸收几率高 10%。经 100 倍平均自由程后，光束内光子的总数将为 10^4 倍，而经过 200 次连续这样的吸收？发射过程后，数目将会达到 10^8 倍，如此等等。因此，某个发射区域如要能发出极其明亮的脉塞辐射，则它的不透明度并不需要高达几百以上。这些辐射全部集中在谱带宽度很窄的一段范围内，因而它在这样窄的光谱范围内就会有相当于温度 T 高达 $6 \times 10^{13} \text{K}$ 这样一个令人不可思议的、极其炽热的天体的亮度 (Ra71) *。

7.12 恒星的不透明度

在恒星内部物质是高度电离的，光子同物质间的相互作用往往就决定了能量在恒星内部的传输速率。

毫无疑问，从这种光子的相互作用我们无法知道有关中微子能量的传输情况，后者在有一些恒星模型中也许是非常重要的。但是，中微子在以光速离开恒星中央区域时只不过就是一走了事而已。同光子相反，中微子对恒星的结构不会有什么影响；要说有影响的话，也只是一旦有中微子产生时，恒星中心的核反应对恒星物质的加热程度会有所减少。这时我们就说产生了中微子能量损失。

在没有这种能量损失的情况下，有三种机制可以使能量从发生核反应的恒星中心区传输到恒星的边缘，然后辐射便进入宇宙空间。恒星物质的对流，简并电子气体所产生的热传导作用，或者辐射的转移。这三者都可以实现能量的传输。这些过程将要在第八章中予以讨论，每一种机制在不同类型的恒星中起着重要的作用。这儿我们所关心的只是决定光子传输能量的速率的那些因素。

在核反应中所释放出来的 γ 光子差不多在瞬息之间就把它的能量转给了恒星物质；这里，或者是通过中性原子或部分电离原子的电离作用，或者是通过与电子的碰撞。辐射同物质之间的相互作用是很强烈的，以至从恒星中心最初释放出来的能量通常要经过几万年之后才能最终逸出恒星表面。恒星对于辐射是高度不透明的，因而弄清楚造成这种不透明性的原因是很有意义的，需知有关恒星结构和演化的许多特征都同这个物理性质有关。

我们的兴趣在于辐射和物质之间以下四种不同类型的相互作用：(a)

自由电子造成的汤姆孙散射或康普顿散射 (6.14, 6.20) ; (b) 自由? 自由吸收或发射 (6.16 节) ; (c) 束缚? 自由相互作用, 在这一过程中电子经历了束缚态和自由态之间的某种跃迁; (d) 束缚? 束缚跃迁, 这就是由光子引起的原子或离子的激发或去激发过程。

为了计算恒星物质的平均不透明度, 我们必须分三步来处理。首先, 我们需要知道每一种过程中辐射同物质之间的相互作用截面; 这一步通过简单的比例关系给出了各种相互作用所造成的不透明度。但是, 恒星物质的总的透明度并不正好就是各个透明度的总和, 因而必须计算出经过适当选择后的平均不透明度, 这儿要对 (a) 到 (d) 这四种过程各自所起的作用适当地加权, 也还要考虑到感应发射所起的作用。由于受激发射使能量传输率增大, 结果是不透明度就会降低。

各种过程对透明度的贡献同温度有非常密切的关系。在恒星的表面各层中, 温度比较低, 原子仅仅是部分电离, 不透明度可能受束缚? 束缚跃迁和束缚? 自由跃迁所支配。在高温区域, 原子可能已近乎完全电离, 这时由自由? 自由相互作用所引起的不透明度便成为起支配作用的因素。在温度最高的地方, 感应辐射会使 (b), (c), (d) 三种因素所造成的不透明度减小, 而电子散射便起着支配作用。

我们用消光这个名词来表示光束因吸收和散射作用所减少的辐射量, 于是我们可以定义辐射按垂直入射方向通过单位厚度物质层的消光 $\mathcal{K}$ 为

$$\mathcal{K} = \kappa \rho \quad (7.70)$$

式中符号 κ 表示物质的不透明度, 而 ρ 代表密度。光谱中某一特定频率 ν 处的辐射的不透明度用 $\kappa(\nu)$ 来表示。因此, 把任意给定频率处 (a) 到 (b) 四种过程对透明度的贡献相加, 我们就可以写出频率 ν 处的总不透明度 $\kappa^*(\nu)$

$$\kappa^*(\nu) = \kappa_e + [\kappa_{ff}(\nu) + \kappa_{bf}(\nu) + \kappa_{bb}(\nu)] [1 - e^{-h\nu/kT}] \quad (7.71)$$

式中四个下标的含义分别为电子散射、自由? 自由、束缚? 自由和束缚? 束缚。 κ_e 与频率无关, 因此随着温度的增加它便成为主要因素。 κ^* 表示已考虑了感应发射后的真不透明度。

κ^* 就整个频率范围适当取平均的问题将取决于我们工作的目的。对于第八章中将要讨论的恒星能量传输问题来说, 我们实际上需要知道的是辐射通过恒星时的平均自由程。由于平均自由程与不透明度成反比, 我们实际上做的时候是就整个光谱范围对 $1/\kappa^*(\nu)$ 取平均。但是, 这个平均值还必须考虑到辐射谱不是平谱, 因而能量传输率还取决于由恒星内部任意给定点处的局部温度所确定的辐射谱的具体情况; 关于这个问题我们将要在后面的第八章中加以考虑。现在, 我们只是要说明 $\kappa^*(\nu)$ 同原子尺度上所发生的各种过程有什么样的关系, 以及各个不透明度同辐射的原子相互作用截面又有着什么样的关系。

(a) 自由电子散射

当温度足够低, 以致光子的能量与电子的静质量能不相称, 也就是说 $T \ll mc^2/k \sim 10^{10}K$, 则相对论效应可以忽略, 散射截面仅仅就是汤姆孙截面。

$$\sigma_e = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 = 6.65 \times 10^{-25} \text{ 厘米}^2 \quad (6.102)$$

这一结果与频率无关。但是，在密度很高的星核中心，温度可能会变得很高，于是对康普顿散射(6.167)来说，用克莱因-仁科截面比较精确，这时截面的大小就同频率有关了。太阳的密度 $\rho \sim 1 \text{ 克} \cdot \text{厘米}^{-3}$ ，每立方厘米电子数约为 10^{24} 个，所以在电子散射事件之间的辐射的平均自由程大约只有 1 厘米。如果 n_e 是单位体积内的电子数，则散射所造成的不透明度由下式给出

$$\kappa_e \rho = \sigma_e n_e \quad (7.72)$$

(b) 自由-自由相互作用

这一过程已在 6.16 节中就稀薄等离子体的情况进行了讨论，现在则是要用同样的理论来说明恒星内部密度较高的等离子体。我们注意到经典表达式 (6.137) 必定很自然地包含有感应发射因子 $[1 + \exp(-h\nu/kT)]$ ，在长波段其值就趋近于 $h\nu/kT$ 。因此，如果我们用这一因子以及数密度来除 (6.137) 式，就得到对单位密度离子和电子而言的每个离子的吸收系数。该系数的形式为

$$\alpha_{ff} = \frac{8}{(6\pi)^{1/2}} \frac{Z^2 e^6}{\text{cm}^2 h \nu^3 v} \ln[\dots] \quad (7.73)$$

其中我们设 $v = (3kT/m)^{1/2}$ ，且假定对数函数的引数与式 (6.137) 中的引数具有相同的性质。实际上，量子力学的正确结果是 (To47)

$$\alpha_{ff} = \frac{4\pi e^6}{3\sqrt{3} \text{chm}^2} \frac{Z^2}{v} \frac{g_{ff}}{v^3} \quad (7.74)$$

式中 Z 是所考虑的离子的有效电荷，而 g_{ff} 是所谓冈特 (Gaunt) 因子，它包含了式 (6.137) 中的对数，对我们所感兴趣的大部分情况来说有 $g_{ff} \approx 1$ 。

(c) 束缚-自由吸收

如果在吸收辐射的过程中每个原子只有一个电子起作用，那么我们还可以用量子力学的方法计算束缚-自由跃迁的吸收系数，其形式为 (Cl68) *

$$\alpha_{bf} = \frac{64\pi^4 m e^{10} Z^4}{3\sqrt{3} \text{ch}^6 n^5} \frac{g_{bf}}{v^3} \quad (7.75)$$

这儿 n 为主量子数，而其中的冈特因子 g_{bf} 同样有 $g_{bf} \approx 1$ ，且对 n 和 v 仅有中等程度的相关。当然，这个方程仅当光子能量超过处于第 n 态的电离能 x_n 时才能成立，即要求

$$h\nu > x_n \sim \frac{2\pi^2 m e^4 Z^2}{n^2 h^2} \quad (7.76)$$

(d) 束缚-束缚跃迁

这种情况下的截面大小已在上一节中作了讨论。它们同各个原子的实际结构有很密切的关系，而且同 (a)，(b)，(c) 这三个因素一样不会产生某种连续的吸收截面。正如下一节中所要讨论的那样，这第四种过程的截面在确定通过恒星大气的辐射转移率时起着重要的作用；但是在恒星的内部它们并不起显要的作用，在那儿由 (a)，(b)，(c) 三种过程决定

辐射转移率的大小。

低密度电离物质的不透明度也是对给定温度 T 时单位体积所发出的辐射功率的一种量度。如果等离子体的化学组成具有“宇宙丰富度”的特征（图 1.7，表 1.2），则图 7.12 就表示了辐射功率；其中假定等离子体的自吸收作用可以忽略。密度很高时这一假定不再有效，这时，等离子体应当只是以温度为 T 的任何黑体所特有的亮度发出辐射。

我们注意到，对于这些低密度物质来说，以禁线的发射为主。禁戒跃迁指的是选择定则所不容许的偶极辐射跃迁（以及有时还包括更高的多极辐射跃迁）。如果等离子体的密度足够低，以至碰撞很少出现，那么与此相应的禁戒辐射跃迁的跃迁几率就很低，这意味着受激亚稳原子的亚稳寿命为数秒或数年。尽管在低密度介质内碰撞出现的机会很少，这种跃迁还是可能发生的。随着气体密度的增大，碰撞开始对原子的去激发起支配作用，而禁线也就消失了。

图 7.12 处于碰撞平衡条件下单位体积低密度电离气体的辐射功率。图 7.12 中所指出的功率是就电子和氢的浓度为 $n_e = n_H = 1 \text{ 厘米}^{-3}$ 而言的， n_H 代表氢原子和质子的总数密度。为了求得单位体积所辐射的总功率，必须把纵坐标值乘以 $n_e n_H$ 。这儿所考虑的等离子体具有一般宇宙源所有的化学组成（见图 1.2，表 1.7）

如果我们知道了在炽热星际云内若干种不同的亚稳原子的寿命，那么我们常常可以通过对禁线的研究取得有关温度和密度状况的许多结论。

在恒星以及稠密的恒星大气内，原子和离子间的碰撞是很频繁的，因而也就不会有任何禁线出现；但是即使象地球上层大气那样的稀薄状态，也已足以使氧的禁线在极光光谱中出现。

7.13 恒星大气的化学组成——辐射转移问题

为了确定恒星大气中各种化学元素的丰富度，我们一定要能够对所观测到的恒星光谱作出正确的解释；这种解释是一个很复杂的过程。首先，这要取决于恒星大气模型的正确选择。就是说我们必须选择好有效温度 T_e ，恒星的表面重力值以及表示大气内湍流速度的参数 ξ_t 。

设处于某一给定状态的某一类原子或离子 i 的数密度为 n_i ，我们在用 n_i 来解释每一条夫琅和费（Fraunhofer）（吸收）谱线的过程中发现，理论所给出的表达式总是同 $n_i f g$ 成正比，这儿 f 是跃迁的振子强度， g 表示跃迁发生时粒子所处的低能级的统计权重。对于氢、氦以及其他的单电子或双电子离子来说， f 值可以通过量子力学方法加以计算。然而，对于诸如铁一类复杂光谱来说， f 值必须通过实验室的实验才能取得。

当吸收线非常强时确定丰富度所必需的另一个重要参数就是阻尼常数 γ ，它表示由以下两个原因所引起的谱线增宽：(1) 各种状态的内禀寿命本来就是有限的；(2) 由于同电子和原子的碰撞使这一寿命更要缩短。

我们可以就每一条夫琅和费线定义一个等值宽度 W_λ ，它表示该谱线所吸收的总能量除以恒星在它的连续光谱中波长为 λ 的地方每单位波长所发出的能量，图 7.13 说明了这一关系。

对于很弱的谱线来说，所吸收的辐射量——因而也就是等值宽度——同丰富度 n_i 以及乘积 $gf n_i$ 线性相关，随着 W_λ 趋近于由热运动和湍流运动所造成的多普勒宽度时，吸收线便慢慢饱和，而反映 W_λ 随光线所穿越的物质的增加而变大的所谓生长曲线（图 7.14）也就变得比较平坦了。对于更强的谱线来说，它的两翼也可能出现吸收。这儿，参数 γ 便确定了谱线所吸收的总辐射量。

在确定恒星中各种化学元素丰富度的过程中，我们一定

7.13 夫琅和费线的轮廓和等值宽度，连续谱的强度取为 1。谱线轮廓所围的面积等于光谱中宽度为 W_λ 的整个“黑色”带所占的面积， W_λ 通常以毫埃来量度（Un69）

图 7.14 生长曲线，它表明了吸收随着光线所穿过的恒星大气物质的增加而增加的情况。这张图反映了等值宽度 W_λ 与 $n_i gf$ 之间的关系，其中 n_i 为处于某特定能态下的某一元素的丰富度， f 为夫琅和费线的振子强度，而 g 是致吸收态的统计权重（Un69）

要记着各种原子或离子可能有的能态总数同大气温度有着极其密切的关系，而且在一定程度上也与表面重力有关，后者决定了压力的大小。在这些计算中要用到玻耳兹曼方程和萨哈方程，并假定大气处于热力学平衡状态。通常情况下，我们对某个给定跃迁的 f 值知道得是不够精确的；不过即使这样，我们有时候也至少可以对给定恒星内元素的相对丰富度取得某种概念，这儿相对的意思是指同太阳内的元素丰富度相比而言。

为了确定恒星或星云所发出的总辐射流同它们的化学及物理性质之间的定量关系，我们按以下方式进行处理：在特定频率 ν 处的辐射强度 $I(\nu)$ 随辐射所穿过的物质层的厚度 dx 而变，其中包括因吸收引起的辐射强度的损失以及因发射带来的相应的辐射增益。设辐射方向对物质层垂直入射，则总的强度变化为

$$\frac{dI(\nu)}{dx} = -\kappa(\nu)\rho I(\nu) + j(\nu)\rho \quad (7.77)$$

式中第一项表示消光作用部分（见方程(7.70)，而 $j(\nu)$ 为每单位质量的发射量。 $j(\nu)$ 可能与辐射强度本身有着密切的关系，这一点同强散射或感应发射的情况是一样的。当 $j(\nu)$ 完全起因于感应发射时，则式(7.71)中的不透明度 κ^* 即为 $\kappa(\nu)$ 和 $j(\nu)/I(\nu)$ 两个量之差。

方程(7.77)可以改写为

$$\frac{1}{\rho\kappa(\nu)} \frac{dI(\nu)}{dx} = -I(\nu) + J(\nu) \quad (7.78)$$

式中 $J(\nu) \equiv j(\nu)/\kappa(\nu)$ ，称为源函数，而式(7.78)称为转移方程（Ch50）*。

在 8.7 节中我们将要讨论辐射从恒星中心朝边缘的转移过程。为此，我们不仅要考虑辐射对物质层垂直入射的情况，而且还须考虑以任意方位角 θ 入射的情况。对于任意入射角 (θ, ϕ) ，我们可以把辐射的能密度表达为

$$\int \rho(v) dv = \frac{1}{c} \iint I(v, \theta, \phi) d\Omega dv \quad (7.79)$$

这儿 $I(v, \theta, \phi)$ 为方向 (θ, ϕ) 上的辐射强度。

辐射流同强度之间的关系式是

$$F = \int F(v) dv = \iint I(v, \theta, \phi) \cos \theta d\Omega dv \quad (7.80)$$

如果我们认为 $I(v, \theta, \phi)$ 是一种分布函数，它说明了频率为 v 的辐射的角分布情况，那么 $\rho(v)$ 和 $F(v)$ 关系到该函数的零阶矩和一阶矩，而二阶矩则引出辐射压

$$P = \int P(v) dv = \frac{1}{c} \iint I(v, \theta, \phi) \cos^2 \theta d\Omega dv \quad (7.81)$$

这个关系式是 4.5 和 4.7 两节所讨论内容的必然结果。辐射压在恒星结构理论中是很重要的，因为流体静力平衡要求引力和压力梯度之间达到某种平衡状态。在恒星演化的某些阶段，特别是在形成行星状星云的那些阶段中，上述压力梯度同辐射压的关系要比同气体运动压的关系更为密切。在确定恒星的大气结构、特别是巨星和超巨星的大气结构时，辐射压同样也起着一定的作用。

让我们再来对决定恒星大气中所观测到的吸收线或发射线轮廓的若干因素作一些介绍。我们已经对引起谱线增宽的那些因素作了讨论，但是我们还应该指出的是，对于一定温度 T 的气体来说，发射强度 $I(v)$ 一般不会超过相同温度和同一频率 v 的黑体辐射强度。所以，受激发射和自发发射往往会使发射线两翼的光度增大，原因就在于辐射是通过恒星大气转移出去的。在靠近恒星表面的地方，谱线中心可能已经处于饱和状态，也就是达到了它的峰值强度；这一效应就会引起发射线的增宽。同样，在穿过恒星中温度较低的外层大气后吸收线也会增宽，这是因为随着所穿过物质的增加，对谱线两翼吸收的可能性也会越来越增加。我们谈到了谱线的生长曲线，我们用生长曲线图来表示等值宽度 W_λ （图 7.13）同乘积 $n_i f$ 之间的关系，这儿 n_i 是大气中单位底面积圆柱体内的原子数，而 f 是跃迁的振子强度。有时候，比如在图 7.14 中，生长曲线所表示的不是 W_λ 同 $n_i f$ 之间的关系，而是 W_λ 同其他一些特定函数之间的关系——在图 7.14 中用的是 $\log n_i g f$ ，其中 g 是致吸收状态的统计权重。

问题选答

$$7.1 \quad E_n = -\frac{p_n^2}{2\mu} = -\frac{n^2 \hbar^2}{2r_n^2 \mu} = -\frac{Ze^2}{2r_n}, \quad E_n = -\frac{Z^2 e^4 \mu}{2n^2 \hbar^2}$$

$$\text{状态数} = \frac{\text{相空间体积}}{\text{单位相格体积}} = \frac{16\pi^2 n^2 \hbar^2 \cdot \hbar}{\hbar^3} \propto n^2$$

$$7.2 \quad r \sim \frac{\hbar}{\sqrt{p^2}} \quad \text{这儿} \quad \frac{p^2}{2M} = V_0 - \varepsilon_b$$

$$7.3 \quad \varepsilon = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2$$

$$I = \sum m_i r_i^2$$

$$\text{及 } \varepsilon = \frac{\omega L}{2} = \frac{L^2}{2I}$$

$$\delta \varepsilon = \frac{L}{I} \delta L = \omega \hbar$$

$$\text{因 } L = \hbar[J(J+1)]^{1/2}$$

$$L = \sum m_i v_i r_i$$

$$L = \omega I, \quad \omega L = \sum m_i v_i r_i \omega$$

$$\varepsilon_J = \frac{L^2}{2I} = \frac{\hbar^2(J+1)J}{2I} \quad \text{及} \quad \delta \varepsilon = \varepsilon_J - \varepsilon_{J-1} = \hbar^2 \frac{J}{I}$$

对于高速自转的大质量天体来说, $\hbar J \sim L$ 及 $\delta \varepsilon = L \delta L / I$

$$7.4 \quad \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{3}{2} kT, \quad T = 100K$$

$$I \sim \frac{2}{5} m r^2 \sim \frac{2}{5} (10^{-23} \text{克}) (2 \times 10^{-8})^2$$

$$\omega \sim 5 \times 10^{12} \text{秒}^{-1}, \quad v = \frac{\omega}{2\pi} \sim 8 \times 10^{11} \text{赫}, \quad \lambda \sim \frac{3}{8} \text{毫米}$$

7.5 在 4.18 节中我们说过, 转动激发的几率同玻耳兹曼系数成正比, 其形式为

$$\exp\left[-\frac{\hbar^2 J(J+1)}{2IkT}\right]$$

当 J 很大 T 又很小时这个量是很小的。

$$7.6 \quad E = \frac{1}{2} I \omega^2 = kT \sim 1.4 \times 10^{-14} \text{ (厘米} \cdot \text{克} \cdot \text{秒制单位)},$$

$$I = \frac{2}{5} (10^{-15}) (10^{-10}) \text{克} \cdot \text{厘米}^{-2}$$

$$\therefore \omega \sim 8 \times 10^5 \text{秒}^{-1}$$

$v \sim 10^5$ 赫, 这比调幅射电波段略为低些。

$$7.7 \quad \delta \varepsilon_{\text{乳力子}} = 2\hbar\omega, \quad \delta \varepsilon_{\text{中微子}} = \frac{1}{2}\hbar\omega, \quad \text{且可以直接利用问题(7.3)的结果。}$$

$$7.8 \quad \text{几率} \propto \exp\left(-\frac{v_r^2 m}{2kT}\right)$$

$$f(v_r) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv_r^2}{2kT}\right)$$

$$\text{由(7.22), } v_r = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} c$$

$$I(\omega) = I_0 \exp\left(-\frac{mc^2 \Delta\omega^2}{2\omega_0^2 kT}\right)$$

$$\text{由问题(4.27) } \langle v_r^2 \rangle = \frac{kT}{m} = \frac{\langle \Delta\omega^2 \rangle}{\omega_0^2} c^2$$

$$7.10 \quad \sigma_{ab}(\omega) = \frac{2\pi e^2}{mc} f_{ab} \frac{\gamma/2}{(\omega - \omega_{ab})^2 + (\gamma/2)^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\gamma/2)d\omega}{(\omega - \omega_{ab})^2 + (\gamma/2)^2} = \pi$$

$$\therefore \sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{ab}(\omega)d\omega = \frac{2\pi^2 e^2}{mc} f_{ab}$$

$$7.11 \quad \sigma_{\max} = \frac{2\pi e^2}{mc} f_{ab} \frac{1}{\gamma/2}$$

$$\text{式中 } \frac{\gamma}{2} = \frac{e^2 \omega_{ab}^2}{3c^3 m}, \quad \omega_{ab} = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

$$\therefore \sigma_{\max} = \frac{3}{2} \frac{\lambda^2}{\pi} f_{ab}$$

$$7.12 \quad I_1 = \frac{I_{cb}}{\pi} \int_{\omega_{ab} - \gamma/2}^{\omega_{ab} + \gamma/2} \frac{(\gamma/2)d\omega}{(\omega - \omega_{cb})^2 + (\gamma/2)^2} = \frac{I_{ab}}{2}$$

$$I_2 = \frac{I_{ab}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\gamma/2)d\omega}{(\omega - \omega_{ab})^2 + (\gamma/2)^2} = I_{ab}$$

$$I_1 / I_2 = 1/2$$

$$7.13 \quad \gamma = \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^3} \omega_{ab}^2 \sim \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^3} \frac{4\pi^2 c^2}{\lambda^2} \sim \frac{1}{5\lambda^2}$$

$$7.14 \quad F_{\text{辐射}} = \int \sigma(\omega) \frac{I(\omega)d\omega}{c} = \frac{\sigma}{\Delta c} I_{\text{总}} = \frac{\sigma}{c} \frac{L_{\odot}}{4\pi r^2 \Delta}$$

这儿 Δ 是频带宽度。

$$F_{\text{引}} = \frac{GM_{\odot} m}{r^2}, \quad \sigma = \frac{2\pi^2 e^2}{mc} f \sim \frac{2\pi^2 e^2}{mc}$$

$$\therefore \frac{F_{\text{辐射}}}{F_{\text{引}}} = \frac{(\sigma / \Delta c)(L_{\odot} / 4\pi r^2)}{GM_{\odot} m / r^2} = \frac{\sigma L_{\odot}}{\Delta 4\pi c GM_{\odot} m}$$

$$7.15 \quad \text{由(7.47)} \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{2e^2 \omega^4 \langle r^2 \rangle}{3c^3} = \hbar \omega A_{n \rightarrow n-1} \quad (\text{根据(7.47)和(7.66)})$$

$$\varepsilon_n = \hbar \omega = \frac{me^4}{2\hbar^2} \left\{ \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} \right\}$$

$$\text{当 } n \text{ 很大时有 } \omega \cong \frac{me^4}{\hbar^3} \cdot \frac{1}{n^3}$$

从(7.2)和(7.5)两式有 $a_n^2 = (n^2 \hbar^2 / me^2)^2 = 2 \langle r^2 \rangle$, 由此得到

$$A_{n \rightarrow n-1} = 64 \pi^6 me^{10} / 3c^3 n^5 \hbar^6$$

7.16 在方程(7.63)和(7.65)中, 我们记每一种粒子在每秒钟内所吸收的具有一定极化态的光子数为 $n(\nu, T)$ $cB(\nu)$ 。在确定 σ 的过程中, 我们谈到了有两种不同极化态的光子, 所以 $\sigma(\nu) = 2B(\nu)$ 。

$$\frac{I}{h\nu} = \int A(\nu) d\nu = A_{ab} \quad (7.66)$$

$$I(\omega) = \frac{I_{ab}}{\pi} \frac{\gamma/2}{(\omega - \omega_{ab})^2 + (\gamma/2)^2} \quad (7.42)$$

$$\sigma(\omega) = \frac{2\pi e^2}{mc} f_{ab} \frac{\gamma/2}{(\omega - \omega_{ab})^2 + (\gamma/2)^2} \quad (7.59)$$

$$\therefore A(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{A_{ab}(\gamma/2)}{(\omega - \omega_{ab})^2 + (\gamma/2)^2}, \quad A(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^2} B(\nu)$$

$$\begin{aligned} \therefore A(\omega) &= \frac{2\omega^2}{\pi c^2} B(\omega) \\ &= \frac{\omega^2}{\pi c^2} \sigma(\omega) \end{aligned}$$

$$\therefore A_{ab} = \frac{8\pi^3 e^2 \nu^2}{mc^3} f_{ab}$$

第八章 恒 星

8.1 观测

我们既不知道恒星是怎样形成的，又不知道它们究竟怎样地死去。但是，我们相信我们掌握了大多数现已发现的普通恒星的结构及其产能机制，这种能量为我们所看到的就是星光。

我们有多大的把握能确信关于这方面的知识呢？恒星结构理论的可靠程度又是怎么样呢？诸如此类的问题是很难给以回答的。许多最重要的物理过程发生在恒星内部的深处，而对我们来说可以做到的观测工作主要是和它们的表面特征发生关系。所以，有关恒星中心区域内的物理状态必然是推论出来的，因而我们的论据也就是间接的。

一般说来，一种理论的价值要由它所能解释的、彼此无关的观测现象的数目来加以鉴定，而如果这些观测工作是间接性的话，那么所需要的观测资料就应该更多一些。对于恒星结构和演化理论来说，我们有若干种不同类型的观测资料：

(a)我们测得了各种不同类型恒星的质量。但是，其中测得很准确的只是少数；每一次精确的测定都需要对双星系统作详细的分析（见 3.5 节）。

(b)我们可以相当精确地测定恒星的光度，其前提条件是恒星要靠近太阳，这样它们的距离就容易测量，而星际消光则可以忽略不计。但是即便如此，对热星等还是没有测得很准，原因是远红外流量和紫外星等要从火箭上进行测量，而只有一小部分恒星做了这方面的工作。从这些为数不多的观测资料发现，恒星的辐射特性往往同黑体的特性有相当大的偏离。

(c)恒星的表面温度可以通过三条不同的途径来求得。

(i)我们可以观测某种色温度（4.13 节）；

(ii)如果知道了恒星的角直径或者线直径，我们就可以确定它的有效温度（4.13 节）；或者

(iii)我们可以观测谱线的强度，而谱线则是表示了各种不同的激发原子态之间的跃迁情况。由于各种激发态的总相对数是由（与温度有关的）玻耳兹曼因子所决定的，因此只要知道了有关的跃迁几率我们就可以直接算出温度。这些几率是可以计算的，也可以在实验室内通过观测取得，其中后者更要好些。

这三种独立的方法可以对恒星表面温度给出令人满意的估计；但是恒星内部的温度还是观测不到。

(d)我们可以通过干涉测量的办法测定恒星的角直径（4.12 节）。如果恒星的视星等和温度这两者都知道的话，角直径也可以通过间接的方法求得。但是，只有同时知道了角直径和恒星的距离我们才能确定它的线直径。在某些场合中，食双星的观测资料也可以给出恒星的直径。

要是恒星的光谱十分简单，从而可以对恒星给定某个单一的、有代表性的温度，那么恒星的光度、直径和表面温度这三者是相互有关联的，其中独立参数仅仅只有两个。

(e)恒星的化学组成是通过分光观测来加以确定的，用这种方法所得

到的不同元素的丰富度仅仅适用于恒星的表面层。利用现有的观测技术还不能直接证实我们对于恒星内部化学成份的种种猜测。

我们发现这种表面元素丰富度随着恒星类型的不同而有所不同。通常情况下，氢含量遥遥领先，它是最丰富的成分，以质量计它的浓度接近 70%。氦是次一个最丰富的元素，以重量表示的浓度为 25~30%。按照丰富度递减的次序接下去就是氖、氧、氮、氩；它们的含量加在一起约为总质量的 2%再下去是碳、镁、硅、硫和铁，其中每一种元素以重量计的大致丰富度约为千分之一。

恒星演化理论的一项重要任务就是必须对不同类型恒星中的化学元素丰富度作出正确的预言，恒星内部看来是较重元素最有可能出现的地方，这些元素或者是从比较纯的氢形成的，或者是从某种氢-氦混合物形成的，后者的可能性更大些，而氢看来是球状星团中最早的恒星形成时的银河系的主要成分。

无论在恒星中，星际介质中，陨星碎片中，或者是地壳中，我们都一再发现不同元素各类同位素的相对丰富度具有类似的比例。这些比例上的类似性不可能是偶然的，因而详细解释数百种已知的丰富度比的问题，便向恒星演化理论提出了一项严肃的任务。

(f)对于为数不多的恒星我们已测得了它们的表面磁场。A 型特殊星是其中研究得最好的一种，它们的磁场强度可以高达 1 万高斯左右，这种磁场是比较容易测量的。估计白矮星也会有一个强磁场，B 值在 10^5 到 10^8 高斯之间的也许并不鲜见，而对这类天体进行详细的研究可能是有价值的 (Ke70)。恒星演化理论最终必将把磁场也考虑进去，而现有的理论还没有给磁场的影响以任何足够的重视。

(g)恒星的表面自转速度可以用统计的方法通过对不同光谱型星的研究来加以确定。尽管投影效应给单颗恒星自转速度的研究造成了一定的困难，然而大量恒星的统计研究表明，年轻的 O、B 型星的自转速度极高，到晚期 A 型星速度逐渐地减慢，而从 G 型到 M 型这些比较红的星其自转速度则非常缓慢 (见图 1.9 及表 A.4)。关于自转对恒星演化的影响问题我们才刚刚开始加以考虑。

(h)同样，银河系内恒星速度的统计研究 (见表 A. 6) 告诉我们，不同光谱型星的起源必然是不一样的。看来，这些恒星是在银河系一生中的不同时期形成的。恒星演化理论最终一定要考虑恒星在年龄上的这种差异；而且也一定要考虑到随着银河系年龄的增长，形成恒星的星际气体的化学组成也必然在起着变化。

(i)对于若干种不同的恒星，特别是 K 型巨星、O 型星以及行星状星云的核，我们现在已经取得了有关它们质量损失的观测资料。其中前两种天体的资料来自对外流气体的光谱测量、对行星状星云而言，我们确实观测到了抛射气体的累积效应。这类证据对于以下两个问题的研究都是很重要的：(i)恒星的不稳定状态；(ii)当恒星内部的物质在经历了核反应之后回到星际空间时，星际气体所可能发生的化学变化。新星和超新星爆发也为这方面工作提供了重要的观测资料。遗憾的是到目前为止，我们还没有足够的资料去判断那些剧烈然而少见的爆炸事件，对于恒星和星际空间之间的物质循环是起着支配作用呢，还是仅仅有一些影响而已。

(j)对于太阳，我们也取得了有关其内部自转速度的观测资料 (Di 67b)，这是从太阳扁率的研究得到的；我们还知道太阳的中微子发射比预期的要少 (Da68)。有关其他恒星的这方面资料则完全是一无所知。同样，我们已取得了关于太阳宇宙线和 X 射线发射的资料；我们也确实得到了少数其他恒星的间接形式的 X 射线观测资料。然而，无论哪一种情况，我们所观测到的这类辐射都来自恒星周围的区域，至于对恒星内部起着支配作用的条件是怎样影响着这部分区域的问题我们是不清楚的。

(k)最后，从赫罗图和颜色-星等图中 (见图 A.3, 1.4, 1.5 和 1.6) 可以找到一批非常重要的统计资料。

恒星在赫罗图上的分布范围是很狭窄的，这个事实确立了一种比较详细的判据，而这种判据是任何恒星结构和演化理论所必须满足的。在这种理论中，具有相应于图中空区那些特征的恒星是不能出现的。还有，赫罗图上密集区中恒星的相对密度也必须由理论作出解释。最后，一颗模型星的理论演化途径必须始终保持从图上一个比较密集的部分走向另一个比较密集的部分，它不会闯入空区，也不会恒在恒星稀少的区域逗留太长的时间。因为，要是一颗正确的模型星会偶而跑入上述区域的话，那么对于真实的恒星我们肯定会观测到类似的情况。

由此可见，赫罗图的详细结构为我们提供了一种真正严密的观测上的判据，恒星演化理论必须满足这一判据。一种理论要能成立，它必须解释主星序的含义，为什么会存在红巨星分支和水平分支，对于不同的星群主星序和红巨星分支在不同部位相联接的可变转折点的含义是什么，以及种种别的特征。因此，我们发现，关于恒星的质量和直径我们所知道的实在是太少了，以至没能使这两个参数在恒星结构理论中发挥它们的关键作用；但是，对于不同的星群和星族。已有大量的赫罗图可用，加之对许多天体已编纂了它们的化学元素丰富度表，这就为估计我们理论的价值提供了丰富的观测细节。

本章的目的就是要对我们现有的恒星结构理论中所述及的基本思想作一扼要的介绍，同时指出这些理论同观测事实符合的程度。

8.2 恒星能量的来源

我们已经说明了怎样来确定恒星的总体特征——它们的半径、质量，以及光度。知道了这些之后，我们就要问问自己是什么原因使恒星会发出如此明亮的光辉？发光显然是因为它们是炽热的，但它们又为什么是炽热的呢？是什么样的能源能够使恒星得以加热、并不断补充以星光形式迅速消耗了的能量呢？

在这些问题可以进行讨论之前，我们也许先要回答一个性质稍有不同的问题：一颗典型的恒星在它的整个一生中要辐射出多少能量？在这点上我们也许就要知道恒星的平均光度以及它死亡时的年龄——不管其死亡的形式如何。要确定某颗恒星的年龄有多大这是不容易的，因为可靠的天文观测只有数百年的历史，而恒星的年龄比这要大得多；但是，有两种资料是有用的。

第一，大约一个世纪以来，照相技术已经取得了充分的发展；在这段时间内，我们发现象太阳那样位于赫罗图上主星序下部的恒星，无论

在亮度或者颜色上都没有发生显著的变化。

第二，太阳的年龄一定比地球来得大，而从放射性同位素 U^{238} 及其衰变产物的丰富度可以判断地球的年龄大于 40 亿年。我们相信太阳的年龄在 45 亿年左右。我们从古生物证据推测出太阳的温度在过去 3×10^9 年内没有发生很大的变化，而地球上的生命便存在于这段时期之内。我们今天所发现的化石遗迹表明，在整个这段时间内地球上的水必然以液态形式出现。如果在这一期间内太阳曾经一度变得更冷或者更热，那么大洋中的水就会冻结或蒸发掉，因而我们所观测到的早期的生命形式就要灭绝。

因此，我们可以十分粗略地假定，太阳以它现有的速率已经辐射了大约 50 亿年。由于太阳的光度是 $L_{\odot} = 4 \times 10^{33}$ 尔格·秒⁻¹，所以到目前为止太阳所发出的总辐射能大约等于 6×10^{50} 尔格。因为太阳的质量是 $M_{\odot} = 2 \times 10^{33}$ 克，相应的能质比为 3×10^{17} 尔格·克⁻¹。

我们要问自己，这么多的能量能否由化学反应提供，不然的话会不会是来自缓慢的引力收缩；从方程(4.136)可知，后者所产生的大量的辐射能大致上等于收缩中天体势能绝对值的增加数。

我们发现这两种能源都是不够用的。化学反应所产生的能量通常不超过 100 千卡·克⁻¹，或说约 4×10^{12} 尔格·克⁻¹。要是太阳只能依赖于化学能源的话，它的总年龄不会超过 $\sim 5 \times 10^4$ 年，这个数字太小了，比实际年龄短了 10^5 倍！

如果说，作为一种大致的估计，我们假定太阳内部的密度是均匀的，那么它的总势能就是

$$V = - \int_0^R \left(\frac{4\pi}{3} \rho r^3 \right) \frac{G}{r} (4\pi \rho r^2) dr = - \frac{3}{5} \frac{M_{\odot}^2 G}{R_{\odot}} \quad (8.1)$$

大致等于 2×10^{48} 尔格。这相当于 10^{15} 尔格·克⁻¹，还是比所需要的能量小 2~3 个数量级。即使恒星中心的密度增大 100 倍，也不可能使这一结果有显著的改变。

仅仅根据这些讨论还不能排除这样的一种可能性，即有一个极其致密的中央核， $\rho \sim 10^{15}$ 克·厘米⁻³，半径 $R \sim 10^5$ 厘米；这时大致上就有足够数量的引力能可资应用了。但是，尽管这种能源对于非常致密的恒星似乎很重要，然而对普通恒星来说看来是不会有有多大作用的。

剩下的唯一能源就是核反应了。我们发现宇宙中氢和氦的丰富度很高，这一点显然说明了氢可能在恒星中心嬗变为氦。在这个反应中每一克氢所释放出来的能量是非常大的。

我们注意到四个氢原子和一个氦原子之间的质量差是

$$4m_H - m_{He} = 0.029m_H \quad (8.2)$$

因此在氢嬗变为氦的过程中出现了质量损失，每转变一克氢的质量损失约为 7×10^{-3} 克。因为质量为 m 的物质在湮没中所释出的能量是 mc^2 ，这就等于释放了 6×10^{18} 尔格·克的能量——即使恒星中只有一部分氢转变为氦，这个数目与所需要的能量相比也已足够了 (Be39)。如果我们现在要问恒星在主星序上所停留的时间以及恒星生成的速率，那么可以采用以下的方法：首先假定我们知道某种给定类型主序星 i 的生存时间为 τ_i ，设这类恒星在银河系中的数密度为 ϕ_i 。然后我们就可以定义一个出

生率函数——通常称为萨尔佩特 (Salpeter) 出生率函数 ψ_i

$$\psi_i = \frac{\Phi_i}{\tau_i} \quad (8.3)$$

它给出了银河系单位体积内恒星的生成速率。盘族恒星的生成率当然只是在银盘上以及银盘附近才比较高，在银晕中它的出生率可以忽略不计。

我们也可以对恒星在离开主星序时的年龄作一番极其粗略的估计。假定恒星在进入红巨星分支之前耗去的氢在恒星质量中所占的比重为 $f(M)$ ；如果在恒星物质的初始成分中，可用作核转化的氢所占的比例（以质量计，而不是以原子个数计）为 X ，那么当恒星还停留在主星序上时所释出的能量 ε 是

$$\varepsilon = 6.4 \times 10^{18} f(M) X M \text{ (尔格)} \quad (8.4)$$

式中数字部分是一克氢转化为氦时所释出能量的尔格数。用掉这些能量所花的时间就等于能量 ε 除以恒星的光度 L 。图 8.1 说明了主序星的质光关系大致为 $L = L_{\odot} (M/M_{\odot})^{\alpha}$ ，其中 $3 \leq \alpha \leq 4$ 。如取 $\alpha \sim 3.5$ ，恒星在主星序上的寿命 τ 就是

$$\tau = 6.4 \times 10^{18} X f(M) \left(\frac{M_{\odot}}{M} \right)^{5/2} \frac{M_{\odot}}{L_{\odot}} \quad (8.5)$$

对于化学组成类似太阳的那些恒星来说， $f(M)$ 约为 15%，而 $X \sim 0.7$ 。把这两个数字代入上式，再一次运用质光关系，并把时间化为以年为单位，我们发现

$$\tau \sim \left(\frac{L_{\odot}}{L} \right)^{5/7} \times 10^{10} \text{ 年} \quad (8.6)$$

因此太阳的总生存时间应该是 10^{10} 年，而比太阳亮几万倍的 O 型星应该只能生存几百万年。

图 8.1 主序星的质量——光度图 (Sc58b)

8.3 恒星模型所必须满足的要求

即使从氢“燃烧”(8.2)——也许还要从别的核反应——可以取得足够的能量，我们仍然需要研究有关核能转化的假设是否同时满足恒星中所观测到的所有其他的特征。这些特征是：

(a) 恒星内部的条件必须同足够的核反应速率相一致，这种速率必须保证产能率大体上同所观测到的恒星光度相一致；而且，恒星表面所释出的能量必须主要是作可见光、紫外以及红外形式的辐射，因为大部分普通恒星的辐射实际上都是在这些波段发出的。如果核反应所产生的大部分能量是作其他形式的发射，比如说中微子发射的话，那么我们仍然面临着要对可见星光作出解释的问题。

(b) 我们将会看到，核反应速率取决于恒星内部物质的温度、密度以及它们的化学组成，而重要的是要看这些参数值在满足于维持某种确定光度的同时是否能与稳定的恒星结构协调一致。

例如，整个恒星必须保持压力平衡。但是，这种压力是由两方面因素决定的。第一，任何区域内的压力由局部温度、密度及化学组成所决

定。这些量之间的关系可归结为某种物态方程，如理想气体定律或某种类似的表达式。第二，局部压力必须刚好能够支持上部物质的重量，这里的上部指的是离恒星中心径向距离较远的那一部分。这就是所谓流体静力学平衡条件。

如果温度和密度过高，那么局部压力就太大，恒星就会膨胀。要是压力太低，恒星就会收缩。我们将会看到，对于压力平衡出现任何显著的偏离都会导致恒星内部状态的某种重新调整，这种调整所需的时间不会超过一个小时。因此，存在了好几十亿年的恒星必然始终是非常接近于压力平衡状态的，除非恒星有脉动。

(c) 恒星中心所产生的能量必须能很快地到达恒星表面，所经历的时间与宇宙年龄或恒星演化年龄相比应该是很短的；不然的话，恒星的整个生命就不得不用一些瞬变条件来加以描述，我们也就无法解释主序星的稳定特性。

(d) 离恒星中心任何给定距离处的温度不仅必须形成适当的压力（条件 b），而且必须与适当的能量转移率取得一致，这样才能保证光度正好等于产能率（条件 c）。

(e) 在恒星中心光度必须为零。这意味着从恒星中心周围的一个无穷小体积内，既没有任何有限的外流能量，也没有任何会发出能量的神秘的能源。

同时，在恒星中心周围无穷小体积内只能有无穷小的质量，这两个条件给表达(a)到(d)四项要求的微分方程加上了边界条件。

(f) 在恒星表面，压力和温度通常可以取非常小的值，这是同中心区域相比而言的。这个条件来自物态方程及条件(b)，它们要求整个恒星保持压力平衡。这个条件说明了下面的事实；恒星内部压力很高，而恒星和它周围虚无空间之间的分界面是比较明确。尽管如此，应用最后这一个条件时必须谨慎小心；在早型星和晚型星之间会有一些差别，前者把能量输送到表面各层去的主要方式是辐射，后者的表面则处于对流状态。

8.4 理论的数学方程表达式

上述各项要求可以归纳为若干个微分方程。在给出这些公式的过程中，我们将会看到把 8.3 节中的顺序稍加变动是会有好处的。

(a) 从恒星中心朝外方向上移动一段距离 dr 所造成的压力变化 dP 为

$$dP = -\frac{\rho G M(r)}{r^2} dr \quad (8.7)$$

这儿 ρ 是局部密度，而 $M(r)$ 是半径为 r 的球面所包含的那部分质量。式中的压力增量是由 $M(r)$ 和质量 ρdr 之间的万有引力所产生的，其中 ρdr 是单位底面积上高度为 dr 的体积增量所围的质量， G 是引力常数。

(b) 从中心朝外方向上运动 dr 距离所引起的质量变化 $dM(r)$ 是

$$dM(r) = 4\pi r^2 \rho dr \quad (8.8)$$

(c) 离开恒星中心 r 距离处增量 dr 内光度 $L(r)$ 的变化为

$$dL(r) = 4\pi r^2 \rho \epsilon dr \quad (8.9)$$

式中 ϵ 是每单位质量的产能率。

(d) 一般说来，这一产能率是局部密度 ρ ，温度 T 以及第 i 种元素的

质量浓度 X_i 的某个函数。氢和氦的质量浓度通常分别以 X 和 Y 表示：

$$\varepsilon = \varepsilon(\rho, T, X, Y, X_i), i=1, \dots, n \quad (8.10)$$

这儿氢、氦以外的 n 种元素的含量应该是显著的。

(e)局部温度与压力、密度以及化学组成有关。我们发现这一关系式写成如下形式是方便的

$$P = P(\rho, T, X, Y, X_i), i=1, \dots, n \quad (8.11)$$

因为这样一来很容易把表达式(8.7)和(8.11)所导出的压力加以比较。上述方程的右边是物态方程的一种表达形式，用理想气体定律(4.37)来近似地表示这个式子往往是比较恰当的。

(f)接下来，温度梯度必须同保证整个恒星具有某种稳定光度轮廓的一些参数联系起来。这儿有两种可能性：

(i)如果恒星的不透明度 κ 很低，

$$\kappa = \kappa(\rho, T, X, Y, X_i), i=1, \dots, n \quad (8.12)$$

则光线在被吸收或散射之前可以在恒星内部通过一段很长的距离，于是不可能出现很大的温度梯度。这种情况下，只能通过辐射来实现能量的转移。光子被发射、散射、吸收以及多次地再发射；它们通过复杂的随机游动在恒星内部扩散开来，在这个过程中光子的能量和数密度不断地改变，最终从中心到达恒星的表面，从那儿光子开始了它们在宇宙空间的长途旅行。

(ii)如果不透明度很高，这一随机游动就可能进行得极其缓慢。这时，恒星中心会变得很热；同时，恒星内部的物质便开始进行对流。于是就建立起一种热量转移的对流图形，而且正如我们下面将要看到的那样，温度梯度由所谓绝热递减率给出，后者取决于物质的热容量之比， $r=c_p/c_v$ (见 4.18 节)。

对应于这两种不同的情况，我们可以导出下列形式的温度梯度：

$$\text{对于辐射转移} \quad \frac{dT}{dr} = F_1[\kappa, L(r), T, r] \quad (8.13)$$

或

$$\text{对于对流转移} \quad \frac{dT}{dr} = F_2(T, P, r, \gamma) \quad (8.14)$$

(g)8.3 节中(e)和(f)所确定的两个边界条件是

$$(i) \text{在 } r=0 \text{ 处, } M(r)=0, \text{ 及 } L(r)=0. \quad (8.15)$$

$$(ii) \text{在 } r=R \text{ 处, } T \ll T_{\text{中心}}, \text{ 及 } P \ll P_{\text{中心}} \quad (8.16)$$

这儿 R 是恒星的半径。为了计算流体静压力，关系式(8.16)可以改写为

$$T(R) \approx 0, P(R) \approx 0 \quad (8.17)$$

方程(8.7)到(8.17)构成了恒星结构理论的基础。在整个这一章内，我们要用相当大的篇幅对它们进行比较深入的研究。但是有一点特别重要，因此现在就应该把它提出来：这些方程并没有对有关所产生的能量的物理来源给以任何的说明。因此，核反应是否确实是造成恒星光度的原因，或者有什么特定的反应在任何给定的演化阶段起着支配的作用，对于这方面的问题，恒星的总体结构和外形是不可能为之提供任何线索的。我们只能通过间接的方法来取得这方面的资料——主要是通过观测恒星变得不稳定时所抛出的碎片，或者是对能够把早先已在中心部分经

过演化了的物质暴露于表面层的那些恒星进行光谱分析。

8.5 弛豫时间

假设我们可以任意改变恒星内部的温度或者压力，那么在这种扰动停止之后，恒星便再度回复到它初始的温度和压力平衡状态。

恢复过程所需要的时间称为弛豫时间。我们将会看到，因压力改变而来的弛豫时间要比重新建立温度平衡所需的时间快得多。

(a) 我们首先来估计一下达到压力平衡所需的时间。设扰动压力 $P_p(r)$ 同平衡压力 $P(r)$ 的相对差为 f ，即

$$P_p(r) - P(r) = fP(r) \quad (8.18)$$

这个压力作用在径向距离大于 r 处的一部分质量 $M - M(r)$ 之上，作用力为 $F = 4\pi r^2 f P(r)$ 。结果，所引起的物质运动的加速度为

$$\ddot{r} = \frac{4\pi r^2 f P(r)}{M - M(r)} \quad (8.19)$$

我们假定解除这一压力差所需要的位移 Δr ，等于总半径 R 的 g 倍，这儿 g 是一个小于 1 的正数，即

$$\Delta r = gR \quad (8.20)$$

那么以方程(8.19)给出的加速度走过这段位移所需的时间为

$$\tau_p \sim \left(\frac{2\Delta r}{\ddot{r}} \right)^{1/2} = \left[\frac{gR[M - M(r)]}{2\pi r^2 f P(r)} \right]^{1/2} \quad (8.21)$$

让我们来估计一下 τ_p 的大致数值。在估计 $P(r)$ 和 $M(r)$ 时可以假定整个恒星内部的密度是均匀的；考虑这样一个恒星，其质量等于太阳的质量， $M = M_\odot = 2 \times 10^{33}$ 克，半径等于太阳的半径， $R = R_\odot = 7 \times 10^{10}$ 厘米。这时密度 $\rho \sim 1$ ，而从(8.7)式有

$$P(r) = - \int_R^r \frac{4\pi}{3} \rho^2 r G dr = \frac{2\pi}{3} \rho^2 G (R^2 - r^2) \quad (8.22)$$

我们选取 $r \sim R/2$ ，这时

$$P\left(\frac{R}{2}\right) \sim 10^{15} \text{ 达因} \cdot \text{厘米}^{-2}$$

$$M(R) - M\left(\frac{R}{2}\right) \sim 2 \times 10^{33} \text{ 克}$$

及

$$\tau_p \sim 5 \times 10^3 \sqrt{\frac{g}{f}} \text{ 秒}$$

对于小的扰动来说， g/f 可望在 1 左右，因而弛豫时间大约为 1 小时。

我们知道压力信息的传播速度大致等于 $(P/\epsilon)^{1/2}$ （见方程(4.31)），这一速度约为 3×10^7 厘米 $\cdot$ 秒 $^{-1}$ 。因此，压力信息可以在 $\sim 2 \times 10^3$ 秒内传过整个距离 $R_\odot$ ，这段时间和压力调整所需的时间是同数量级的。

问题 8.1 (a) 证明在上述的假定条件下，温度 $T(R/2) \sim 10^7 \text{ K}$ 。

(b) 在行星和恒星之间有一点是不同的 (Sa70a)，对于行星来说，作用在电子和离子上的库仑力要比引力来得重要，而恒星的情况则恰恰相反。设 ϵ_c 是典型的库仑式相互作用能，试证明行星的质量 M_p 约为

$$M_p \approx \frac{1}{\rho^{1/2}} \left[\frac{\varepsilon_c}{G A m_H} \right]^{3/2} \sim \frac{R \varepsilon_c}{G A m_H} \quad (8.23)$$

(c) 如果 ε_c 大致等于固体物质的结合能 (约为 10^{-11} 尔格), 试证明主要由氢所组成的木星的质量已接近行星质量范围的上限。

(b) 下一步我们要估算一下热量从恒星内部的一点传到另一点所花的时间。如果传输过程是辐射性的, 这一时间可以作为某种随机游动过程来加以计算; 我们只须知道辐射的平均自由程, 而平均自由程则由物质的不透明度 κ 给出 (见 7.12)。当由 n 个光子所组成的一束光通过厚度为 dl 的一层物质时, 其中一部分光子 dn 将被该层物质所吸收或散射。因此, 这束光中的光子损失可以表达为

$$dn = -n \kappa \rho dl \quad (8.24)$$

式中 ρ 是物质的密度。请注意我们没有对散射过程作详细的考虑。某些过程对光线朝前方散射非常有利, 这种散射体使介质的不透明度比各向同性散射中心所造成的不透明度要小得多。我们在这儿假定散射是各向同性的。换句话说, 如果光束中的某个光子经过大量的碰撞之后, 它的前进方向与原始传播方向之间的交角增加到某个比较大的数值, 比如说是 90° , 这时原始方向的全部记忆均已失去, 仅仅在这种情况下我们才能算这个光子是从光束中损失掉了。对于式 (6.16) 中的电子散射我们也作过类似的假设。我们就是要计算在这种条件下光子的平均自由程。对方程 (8.24) 进行积分后得到

$$n = n_0 e^{-\kappa \rho l} \quad (8.25)$$

因此, 光子在被吸收或强烈散射前所通过的平均距离 $\langle l \rangle$ 是

$$\langle l \rangle = - \frac{\int_0^\infty l dn}{n_0} = \int_0^\infty l \kappa \rho e^{-\kappa \rho l} dl = \frac{1}{\kappa \rho} \quad (8.26)$$

对于一颗象太阳那样的恒星来说, $\kappa \rho$ 约等于 1, 因而平均自由程差不多是 1 厘米。如果要通过大致相当于太阳半径 $R \sim 10^{11}$ 厘米那么一段距离, 就需要游动 10^{22} 步, 游动的总距离约为 10^{22} 厘米。如果不计入吸收和重新发射之间所需的时间, 则完成上述过程所花的总的时间约为 $R^2 \kappa \rho / c$ 秒。因此时间常数至少约为 10^{11} 秒, 也就是几千年。

(c) 能量也可以通过对流来传输, 条件是只要能建立起足够高的温度梯度。在这种情况下, 浮力使一团一团热的物质朝上加速, 同时较冷的物质便向恒星中心沉落。对于非简并物质来说, 我们可以把冷、热物质的密度差 $\Delta \rho$ 取为

$$\Delta \rho \sim \frac{\rho}{T} \Delta T \quad (8.27)$$

作用在单位体积较热物质上的向上的力是

$$F(r, \rho, \Delta T) = \frac{M(r)G}{r^2} \frac{\rho}{T} \Delta T \quad (8.28)$$

由此产生的对流运动的加速度为

$$\ddot{r} = \frac{M(r)G}{r^2} \frac{\Delta T}{T} \quad (8.29)$$

如果热物质团通过的距离约为十分之一太阳半径, 所需的时间就是

$$t = \left[\frac{2R_{\odot}}{10r} \right]^{1/2} \sim 3 \times 10^6 \text{ 秒} \sim 1 \text{ 个月} \quad (8.30)$$

计算中取 $M_r \sim 10^{33}$ 克, $T \sim 10^7 \text{K}$, 及 $\Delta T \sim 1 \text{K}$ 。

这种传输速度是相当快的。只要辐射热转移过慢, 以至不能维持恒星内部的热平衡状态, 那么这种情况就会出现。在 8.9 节中我们要对这种稳定性问题再一次进行讨论, 同时我们在该节中还要证明选择 $\Delta T \sim 1 \text{K}$ 是正确的。

(d) 如果恒星中心是简并状的, 电子传输热量的速度就很容易大大地超过辐射或对流方式所可能有的速度, 其原因是电子不可能把它们的能量传给别的粒子。所有较低电子能态都已处于饱和, 留给别的随时可以放出能量的那些电子的位置已经没有了。因此, 电子的平均自由程变得很长很长, 热量传输过程便进行得异常迅速。极端情况下电子可以通过整个简并区, 在到达非简并外围部分之前不会出现能量损失。如果我们所讨论的这个范围相当于大约 $R_{\odot}/10^2$ 的一段距离, 那当 $T \sim 10^7 \text{K}$ 时的渡越时间为 1 秒左右。这个数字就代表了恒星简并核的热弛豫时间。

8.6 物态方程

物态方程用来确定压力同温度、密度及化学组成之间的关系, 它取决于 (i) 恒星中心的状态是简并性的还是非简并性的, 以及 (ii) 温度是否高到足以造成相对论性状态。

(a) 非简并等离子体

在恒星内部所处的高温条件下, 除了最重元素外的所有其他元素都已完全电离。这时, 电子和离子间的距离远远超过它们本身的半径, 因为电子和裸核的半径约为 10^{-13} 厘米。因此, 预期在这种情况下理想气体定律是可以成立的:

$$P = nkT \quad (4.38)$$

式中 n 为单位体积中的粒子数。

表 8.1 中我们列举了各类粒子对于数密度的贡献

表 8.1 数密度

	离子数	电子数
氢	$\frac{X_{\rho}}{m_H}$	$\frac{X_{\rho}}{m_H}$
氦	$\frac{Y_{\rho}}{4m_H}$	$\frac{Y_{\rho}}{2m_H}$
其他	$\frac{Z_{\rho}}{\langle A \rangle m_H}$	$\frac{Z_{\rho}}{2m_H}$

符号 X, Y, Z 个别代表以质量计的氢、氦和较重元素的浓度, $\langle A \rangle$ 是较重元素的平均原子量。表内最后一栏中, 较重元素所贡献的电子数是在每个原子的电子数为 $\langle A \rangle / 2$ 的假设下取得的, 对于不太重的元素来说这种近似是完全合理的。较重元素所贡献的离子数只占总数中的很少一部

分——差不多只有千分之一，它们可以忽略不计。因此，代入理想气体定律关系式中的粒子总数密度大致为

$$n = \frac{\rho}{m_H} \left[2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z \right] \quad (8.31)$$

而物态方程为

$$P = \frac{\rho kT}{m_H} \left[2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z \right] \quad (8.32)$$

初看，我们也许会以为 P 就代表了总的压力；实际上并非如此，它只是由粒子所贡献的那部分压力。由于电磁辐射的存在还会有另一种压力，必须把后者同粒子压力相加才能给出总的压力，无论非简并态还是简并态都应如此。

在 4.7 节中我们已经看到辐射压的数值等于能密度的三分之一。恒星内部的能密度为 aT^4 ；折射系数实际上等于 1，问题(4.21)的关系式便简化为方程(4.72)，因此

$$P_{\text{辐射}} = \frac{aT^4}{3} \quad (8.33)$$

于是，非简并物质的物态方程为

$$P_{\text{总}} = \frac{\rho kT}{m_H} \left(2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z \right) + \frac{aT^4}{3} \quad (8.34)$$

(b) 简并等离子体

单位体积内可能有的极大电子数（见 4.11 节）是

$$n_e = \frac{8\pi}{3} \frac{p_0^3}{h^3} \quad (8.35)$$

式中 p_0 是对应费米能的动量。电子数密度同样可以写成

$$n_e = \left(X + \frac{1}{2}Y + \frac{1}{2}Z \right) \frac{\rho}{m_H} \equiv \frac{1}{2}(1+X) \frac{\rho}{m_H} \quad (8.36)$$

其中因为

$$X+Y+Z=1 \quad (8.37)$$

这时，作各向同性运动的电子所贡献的压力由(4.27)，(4.28)和(4.30)三个方程给出：

$$P_e = \int_0^{p_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} 2n_e(p) p \cos\theta v \cos\theta \sin\theta d\theta d\phi dp \quad (8.38)$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{p_0} \frac{8\pi p^2}{h^3} p v dp \quad (8.39)$$

这里 $n_e(p)$ 是动量范围在 p 到 $p+dp$ 之间的电子的数密度。

(i) 在非相对论性情况中， $v=p/m_e$ ，电子压力是

$$P_e = \frac{8\pi}{15} \frac{p_0^5}{m_e h^3} \quad (8.40)$$

其中 p_0 以(8.35)和(8.40)两式代入，方程(8.40)变为

$$P_e = \frac{h^2}{20m_e m_H} \left(\frac{3}{\pi m_H} \right)^{2/3} \left(\frac{1+X}{2} \rho \right)^{4/3} \quad (8.41)$$

(ii) 在相对论性情况中 $v \sim c$ ，方程(8.38)积分得

$$P_e = \frac{2\pi c}{3h^3} p_0^4 \quad (8.42)$$

用同样的方法消去 p_0 ，我们得到

$$P_e = \frac{hc}{8m_H} \left(\frac{3}{\pi m_H}\right)^{1/3} \left(\frac{1+X}{2} \rho\right)^{4/3} \quad (8.43)$$

为了求得总压力我们需要加上由单个离子所贡献的压力 P_i ；这些离子通常是非简并态的，这点在（4.15 节）中已经指出过。

$$P_i = \left(X + \frac{1}{4}Y\right) \frac{\rho kT}{m_H} \quad (8.44)$$

最后，我们还必须加上方程(8.33)所给出的辐射压，于是得到

$$P_{\text{总}} = P_e + P_i + P_{\text{辐射}} \quad (8.45)$$

8.7 光度

我们已对一颗恒星经受某种热扰动后恢复原状所需的时间进行了估算，并就支配恒星内部物理状态的各种不同条件分别作了说明。但是，我们仍然必须对自己提出这样一些问题：“这些不同的条件各自在什么时候起支配作用的呢？在什么样情况下辐射热的转移占主要地位？在什么时候对流是主要的贡献者？有利于简并性的条件又是什么？”这些就是我们下一步所必须弄清楚的问题。当我们找到了某种答案时，我们也就能够定量地表达能量转移的速率，同时也就给出了恒星的总光度。

离恒星中心径向距离为 $r=r_0$ 处的总流量，就是向外、向内两个方向的能流之差。设 r_0 处的温度为 T_0 。辐射沿着各个不同的方位角 θ 通过 r_0 处的球面——这个球面可以看作是一个平面，因为辐射的平均自由程与 r_0 相比是非常小的（图 8.2）。在距离为 l 处沿着方向 θ 所发出的无衰减流量为

$$aT^4(l, \theta) \cdot c \cos\theta \cdot \frac{2\pi \sin\theta d\theta}{4\pi} \quad (8.46)$$

它在单位时间内通过 r_0 球面，式中

$$T(l, \theta) = T_0 - \frac{dT}{dr} l \cos\theta \quad (8.47)$$

$c \cos\theta$ 表示单位时间内通过球面单位面积的辐射所构成的圆柱体的体积，而 $2\pi \sin\theta d\theta / 4\pi$ 给出 (l, θ) 处总立体角中的一部分，这部分立体角所包含的辐射将通过 r_0 处相应的单位面积。

图 8.2 本图说明了光度和温度梯度之间的关系

实际上从 (l, θ) 处所发出的辐射并不是无衰减地到达 r_0 球面，从相距 l 的地方发出的光子到达 r_0 球面的几率仅为

$$\pi(l) = \kappa \rho e^{-\kappa \rho l} \quad (8.48)$$

此式由方程(8.24)而来，并且也作了适当的规范化

$$\int_0^\infty \pi(l) dl = 1 \quad (8.49)$$

现在，我们就可以正式给出通过单位面积的辐射流为

$$F(r_0) = \int_0^\infty \int_0^\pi a(T_0 - \frac{dT}{dr} l \cos \theta)^4 \cdot c \cos \theta \cdot \frac{2\pi \sin \theta d\theta}{4\pi} \pi(l) dl \quad (8.50)$$

但是，为了求得实际辐射流，我们还必须确定方程(8.48)中的 κ 应取什么样的值。方程(8.24)并没有把受激发射考虑在内，而这种发射是重要的，7.12 节中已对这一点作了说明。另一方面，如果我们采用式(7.71)所得的 $\kappa^*(\nu)$ ，那就必须对所有的频率适当地取平均以能求得一个比较合理的平均不透明度。这步工作将在下面的 8.8 节中进行。

问题 8.2 恒星内部任意径向距离处的光度 $L(r)$ 是

$$L(r) = 4\pi r^2 F(r) \quad (8.51)$$

试通过积分证明，作为一级近似有

$$L(r) = -\frac{16\pi ac}{3\kappa\rho} r^2 T^3 \frac{dT}{dr} \quad (8.52)$$

8.8 恒星内部的不透明度

在 7.12 节中我们已经讨论了造成不透明性的四种原因：电子散射，自由—自由跃迁，自由—束缚跃迁，以及束缚—束缚跃迁。但是，我们还没有说明怎样从这四种作用因素来计算平均不透明度，而在计算表达式(8.52)时一定要用这种平均不透明度。

在考虑这个表达式中所用的平均不透明度时要注意两个因素。第一，我们必须要对所有的辐射频率取平均；但是很明显，如果要用这个不透明度给出对于辐射转移率的精确估计，那么辐射密度梯度为最大的那些频率在平均过程中应该给以较大的权。第二，不透明度最小的那些频段对能量转移的贡献最大。因此，我们所关心的是对 $1/\kappa(\nu)$ 而不是对 $\kappa(\nu)$ 取平均。

让我们用更基本的形式来表达(8.52)式，其中要涉及到频率为 ν ，温度为 T 时辐射的能密度 $\rho(\nu)$ （见方程(4.71)）。

$$L(r, \nu) = \frac{-4\pi r^2}{3\kappa^*(\nu)} c \frac{d\rho(\nu)}{dr} \quad (8.53)$$

这儿我们所确定的是频率 ν 对距离 r 处的总光度 $L(r)$ 的贡献 $L(r, \nu)$ ；同时我们规定总的能密度 U 等于黑体能密度。 $\kappa^*(\nu)$ 是频率为 ν 时的不透明度，其中已考虑了受激发射：

$$L(r) = \int_0^\infty L(r, \nu) d\nu \quad \text{及} \quad U = \int_0^\infty \rho(\nu) d\nu = aT^4 \quad (8.54)$$

我们可以略去束缚—束缚跃迁，因为它在恒星内部所起的作用是微不足道的。所以，方程(7.71)便简化为

$$\kappa^*(\nu) = [\kappa_{bf}(\nu) + \kappa_{ff}(\nu)](1 - e^{-h\nu/k}) + \kappa_e \quad (8.55)$$

于是我们可以确定某种平均不透明度

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa^*(\nu)} \frac{d\rho(\nu)}{dT} \frac{dT}{dr} d\nu}{\int_0^\infty \frac{d\rho(\nu)}{dT} \frac{dT}{dr} d\nu} \quad (8.56)$$

称为罗斯兰 (Rosseland) 平均不透明度，式中 $d\rho(\nu)/dT$ 可用式(4.71)来代替。从(8.53)式可以看出，在罗斯兰平均不透明度中，对转移过程起重要贡献的那些频率的权重确实是比较大的，因为式中用能密度梯度 d

$\rho(v)/dr$ 作为 $1/\kappa^*(v)$ 的权函数, 而 $1/\kappa(v)$ 即是频率为 v 时平均自由程的某种量度。任何频率处的不透明度就是束缚-自由(bf)、自由-自由(ff)以及电子散射(e)这三者的贡献之总和。

恒星内部径向距离为 r 的地方存在有各种各类的原子及离子 A , 它们各又处于某种激发态 n , 因而 $\kappa_{bf}(v)$ 和 $\kappa_{ff}(v)$ 本身就是全部 (A, n) 对不透明度所作贡献之总和:

$$\kappa_{bf}(v)\rho = \sum_{A, n} \alpha_{bf} \left(\frac{X_A \rho}{A m_H} \right) N_{A, n} \quad (8.57)$$

$$\kappa_{ff}(v)\rho = \sum_A \int \alpha_{ff} \frac{X_A \rho}{A m_H} n_e(v) dv \quad (8.58)$$

这儿, $X_A \rho / A m_H$ 就是 A 类原子的数密度, X_A 是以质量数为 A 的原子或离子的质量来表示的丰富度, m_H 是氢原子的质量, 而 $N_{A, n}$ 是处于第 n 激发态的那些原子或离子所占的比例。 $n_e(v)$ 是速度在 v 附近、速度范围为 dv 的那部分电子的数密度。 α_{bf} 和 α_{ff} 是原子吸收系数, 由式(7.74)和(7.75)给出。正如式(7.72)所表明的那样

$$\kappa_e \rho = \sigma_e n_e \quad (8.59)$$

式中右端就是电子数密度和汤姆孙 (或者, 在高能情况下是康普顿) 散射截面的乘积。

为了估算 $N_{A, n}$, 我们利用萨哈方程(4.105), 对于高度电离情况来说由该方程得出

$$N_{A, n} = n^2 \left[n_e \frac{h^3}{2(2\pi m_e kT)^{3/2}} e^{x_n/kT} \right] \quad (8.60)$$

这儿我们认为大部分离子处于 $r+1$ 次电离态。我们可以通过如下的方式来理解这个方程:

x_n 是使 A 类原子从第 n 激发态电离所需要的能量; m_e 是电子质量。

如果用玻尔原子模型, 这一能量就是(7.5)

$$x_n \sim \frac{2\pi^2 e^4 m_e}{h^2} \frac{Z'^2}{n^2} \quad (8.61)$$

式中 Z' 是有关离子的有效电荷。方程(8.61)假定了在距恒星中心径向距离为 r 的地方, 给定某一类原子 A 中所有受激原子都具有相同的电离状态。在我们现在所用的记号中, 这就意味着方程(4.105)内 $n_r/n_{r+1} = N_{A, n}/n$ 。我们注意到 $N_{A, n}$ 与 n^2 成正比, 这是因为第 n 激发态的统计权重 g_r (亚能级的数目) 为 $2n^2$ (见问题(7.2))。由 4.16 节我们也有 $g_e = 2$ 。类似地, 离子也可以表现出两种极化态 $g_{r+1} = 2$ 。但是, 对于任何给定的终态来说, 极化的可能组合情况就只有两种

$$g_{r+1} g_e = 2.$$

利用方程(7.75)来求 α_{bf} , 并把由式(8.61)所求得的 x_n 代入这一表达式, 于是我们就可以得到

$$\kappa_{bf}(v) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \frac{Z'^2 e^6 h^2 \rho (1+X) Z}{c A m_H^2 m_e^{15} (kT)^{35}} \times \left[\frac{1}{n} \frac{x_n}{kT} e^{x_n/kT} \left(\frac{kT}{h\nu} \right)^3 g_{bf} \right] \quad (8.62)$$

这儿 Z 是金属丰富度, 以它在总质量中所占的比例来表示。由于氢

和氦对于束缚？自由跃迁没有太大的贡献，因而在求(8.57)的和式时就只需考虑其中的金属成份。对于各能态取和也都已略去，这是因为贡献最大的通常就是最低能态 n 。我们取表 8.1 中的电子密度：

$$n_e = \frac{1}{2}(X+1) \frac{\rho}{m_H} \quad (8.63)$$

要是我们只需要计算不透明度的近似值，那么方程(8.62)便可以大大地简化。例如，我们可以只考虑 $x_n/kT \sim 1$, $h\nu/kT \sim 1$ 的那些能级，因为这样已经把对不透明度贡献最大的那些频率和电离电势包括在内了。

那些在比较低的温度下就会电离的成份 ($x_n \ll kT$) 已经差不多全都电离了，它们实际上对电子几乎已毫无束缚作用，而那些 x_n 值较高的成份对于所碰到的光子则很少有什么吸收。类似地，频率为 $\nu \sim kT/h$ 的光子在罗斯兰平均值中的权重最大。

对于大多数元素我们也可以选择一个典型数值 $Z^{1/2}/A \sim 6$ 。

通过这些近似，我们对束缚？自由吸收得到克雷默 (Kramer) 不透明度定律：

$$\kappa_{bf} = 4.34 \times 10^{25} Z(1+X) \frac{\rho}{T^{3.5}} \frac{\langle g_{bf} \rangle}{f} \quad (8.64)$$

式中 $\langle g_{bf} \rangle$ 是平均冈特因子，它总是近似地等于 1，而 f 中已包括了由我们所作的近似引起的各种改正因子，它们同样都近似地等于 1。对于自由？自由跃迁，我们类似地可以得到一些表达式 (Sc58b) *：

$$\begin{aligned} \kappa_{ff} &= \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \frac{e^2 h^6 (X+Y)(1+X)\rho}{\text{cm}^2 m_e^{1.5} (kT)^{3.5}} \frac{1}{196.5} g_{ff} \\ &= 3.68 \times 10^{22} \langle g_{ff} \rangle (X+Y)(1+X) \frac{\rho}{T^{3.5}} \quad (8.65) \end{aligned}$$

式中 $\langle g_{ff} \rangle$ 为平均冈特因子(7.74)。我们看到，如果取方程(6.137)中的 $\kappa(\nu)$ ，并用它代替式(8.56)中的 $\kappa^*(\nu)$ ，那么由此所得到的不透明度表达式就正比于 $e^6 n^2 c^{-1} (m_e kT)^{-1.5}$ ，而权平均函数正比于 ν^{-2} ，后者又与 $h^2 (kT)^{-2}$ 成比例，这正好就是(8.65)式所表达的关系。对于电子散射来说，由(8.59)式并利用式(8.63)的自由电子数，我们便得到

$$\kappa_e = \frac{4\pi}{3} \frac{e^4}{c^4 m_H m_e^2} (1+X) \sim 0.19(1+X) \quad (8.66)$$

图 8.3 不透明度作为星族 I 恒星的密度和温度的函数。图上分为四个区域，分别表征不同的能量传输机制。这些机制也就是造成不透明性的原因，它们分别是电子散射、束缚？自由跃迁、自由？自由跃迁，以及由简并电子承担能量传输作用的有效不透明度。图中的点划线表示简并性参数 α (见方程(4.93)) 等于零的位置(Ha62c)

电子散射是低密度、高温条件下对不透明度的主要贡献因素，因为在这种条件下电子和离子间的相互作用是很弱的。

图 8.3 表示在不同的密度和温度条件下，散射与吸收过程的相对重要性。在密度很高的地方，电子是简并性的，热量可以通过这些电子的传导作用极其迅速地转移出去。

图 8.4 把不透明度表示为温度的函数，其中所考虑的恒星的化学组成是和太阳类似的。

图 8.4 和太阳有类似化学组成的恒星的不透明度。每条曲线代表不同密度 ρ ，单位是克·厘米⁻³(Ez65)

迄今为止我们所讨论的只是恒星内部的辐射转移。但是，辐射转移方程在能量通过恒星大气的传输过程中同样起着支配的作用(7.13 节)。

问题 8.3 利用方程(8.7)，(8.52)及理想气体定律，证明恒星的光度大致应该与 M^3 成正比。

实际上我们发现，主序星很好地服从质光关系(图 8.1)

$$L \propto M^\alpha \quad 3 \leq \alpha \leq 4 \quad (8.67)$$

这一关系之所以对主序星成立大概是因为辐射转移在那里起着支配作用，而在巨星中对流转移(下面的 8.9 节)更为重要，至于在致密星以及致密的星核中起主要作用的就是简并电子的转移了。

不过，即使别的过程在起着支配作用的话，辐射转移始终是存在的。因此，总的能量转移率便是所有各种转移率之总和。

8.9 对流转移

要是温度梯度变得很大，以至介质开始发生对流，那么对恒星中心呈球对称的温度分布便会处于不稳定状态。现在，我们就来建立出现上述情况的条件。

考虑一个密度为 ρ'_1 ，压力为 P'_1 的物质元，其周围区域的特征(ρ_1, P_1)和它完全相同(见图 8.5)

$$\rho'_1 = \rho_1 \quad P'_1 = P_1 \quad (8.68)$$

然后，这个物质元运动到一个新的位置，以下标 2 表示，它在新位置处的最终压力 P'_2 等于周围环境的压力 P_2 ：

$$P'_2 = P_2 \quad (8.69)$$

利用(8.30)式我们发现，这类对流运动同热的辐射转移所需要的时间相比是进行得很快的，因此，我们可以把这个过程作为绝热过程来考虑。这时，方程(4.123)意味着

$$\rho'_2 = \rho'_1 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{1/\gamma} \quad (8.70)$$

对于恒星内部高度电离了的等离子体来说，热容量之比为

$$\gamma = c_p/c_v = 5/3。$$

如果物质元的初始位移是朝上的，而且我们知道 $\rho'_2 > \rho_2$ ，那么这个物质元就会受到一种朝着初始位置 1 的向下的力的作用；这时，介质是稳定的。但是，如果 $\rho'_2 < \rho_2$ ，那么初始的位移就会导致物质元继续沿着同一方向(朝上)运动，这时介质就是不稳定的。在后一种情况下对流就可以建立起来了。

图 8.5 一个低密度“物质泡”向外作对流运动。当温度梯度很大时这种对流运动就会建立起来并且成为热量传输的主要方式
因此，稳定性的条件就是

$$\rho_2 < \rho'_2 = \rho'_1 \left(\frac{P'_2}{P'_1} \right)^{c_v/c_p} = \rho_1 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{c_v/c_p} \quad (8.71)$$

其中我们已用到了表达式(8.68)，(8.69)和(8.70)。上式可以改写为

$$\frac{d\rho}{\rho} < \left(\frac{P + dP}{P} \right)^{c_v/c_p} - 1 = \frac{c_v}{c_p} \frac{dP}{P} \quad (8.72)$$

如用径向梯度表示便成为

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} < \frac{c_v}{c_p} \frac{dP}{P dr} \quad (8.73)$$

考虑到理想气体方程(4.37)，上式引出稳定性条件

$$\frac{dT}{dr} > \frac{T}{P} \left(1 - \frac{c_v}{c_p} \right) \frac{dP}{dr} \quad (8.74)$$

式中 dP/dr 和 dT/dr 均为负数。式(8.74)的右端称为绝热温度梯度，因而我们的结论是：当温度梯度的绝对值小于绝热梯度的绝对值时，稳定性在恒星内部占主要地位。当 dT/dr 的绝对值变得大于绝热梯度的绝对值时，不稳定性便开始出现，于是热量就通过对流进行转移。

为了计算热量转移率我们必须知道四个量：浮动物质元的速度 v ，它的热容量 C ，它的密度，以及它和周围物质间的温度差 ΔT ——浮动物质元最终要把温度传给它周围的物质。因此，每单位面积的热传输率为

$$H = C \rho v \Delta T \quad (8.75)$$

这儿的 C 就是在我们所假定的绝热条件下的热容量。利用方程(8.29)给出的加速度，并假定传输距离为十分之一太阳半径，则平均速度 v 约为

$$\left[r \frac{R_\odot}{10} \right]^{1/2}$$

$$\begin{aligned} H &\sim C \rho \left[\frac{GM(r)}{Tr^2} \frac{R_\odot}{10} \right]^{1/2} (\Delta T)^{3/2} \\ &\sim C \rho \left[\frac{GM(r)}{Tr^2} \right]^{1/2} \left(\frac{d\Delta T}{dr} \right)^{3/2} \left(\frac{R_\odot}{10} \right)^2 \end{aligned} \quad (8.76)$$

距离 $R_\odot/10$ 的选择是带有某种随意性的，因为我们不知道怎样来估计单元的大小；对流理论目前正在设法解决这一问题。我们取 $d\Delta T/dr$ 作为实际梯度与绝热梯度之差。这儿所得到的方程对于热的物质向上对流或者冷的物质向下对流同样都是成立的。就某个给定的梯度 $d\Delta T/dr$ 而言，如果知道了热容量，那么我们现在就可以求得 H 的量级。尽管上面我们假定了某种理想气体定律，但是至今还没有对物态方程进行讨论。对于完全电离的等离子体来说，热容量是大致知道的，即使这儿所述的过程既不是在等压力也不是在等体积条件下进行的也没有关系。但是，我们如果取每克 $2RT$ 也不会有太大的错误，这儿 R 是气体常数（见方程(4.34)）。

我们现在要弄清楚在什么样的梯度条件下对流流量将超过辐射转移。为了做到这一点，我们可以计算一下当总对流流量等于光度时 $d\Delta T/dr$ 的值为多少。取 $r \sim R_\odot/2$ ， $M(r) \sim M/2$ ， $C \sim 2 \times 10^8$ 尔格·克⁻¹， $p \sim 1$ 克·厘米⁻³， $T \sim 10^7$ K 以及 $L \sim 10^{34}$ 尔格·秒⁻¹。我们有

$$L = 4\pi R_{\odot}^2 H \sim 4\pi R_{\odot}^2 C\rho \left(\frac{GM(r)}{Tr^2}\right)^{1/2} \left(\frac{R_{\odot}}{10}\right)^2 \left(\frac{d\Delta T}{dr}\right)^{3/2},$$

$$\frac{d\Delta T}{dr} \sim 10^{-10} \quad (8.77)$$

对恒星而言，平均温度梯度约为 $T_c/R \sim 10^7/10^{11} \sim 10^{-4}$ ，这儿 T_c 是中心温度。所需要的剩余梯度仅为总梯度的百万分之一左右。在 $\Delta r \sim R_{\odot}/10$ 这么一段距离上，剩余温度降相当于 $\sim 1K$ ，这就是我们在前面方程 (8.29) 和 (8.30) 中建立对流传输的时间常数时所采用的数字。

所有 8.4 节中所讨论过的各个微分方程我们现在都已用到了；但是，我们还必须推算恒星中心所发生的核反应的产能率，这便是下一节中所要做的工作。

8.10 核反应的速率

在恒星内部所发生的核反应的基本方式是两个粒子彼此充分接近并互相结合在一起，同时就释出能量。这种放能过程是恒星能量的最主要来源。

我们来研究一下决定核反应速率的各方面因素。下面我们假定问题所涉及到的有两类粒子，并分别以下标 1 和 2 表示之。于是，反应速率正比于：

(i) 第一类核的数密度 n_1 ，

(ii) 第二类核的数密度 n_2 ，

(iii) 碰撞频率，这一频率又取决于彼此接近的粒子间的相对速度 v ，以及取决于

(iv) 与相互作用截面 $\sigma(v)$ 有关的速度， $\sigma(v)$ 通常则与 $1/v^2$ 成正比。但是，为使反应得以发生，阻碍带正电荷粒子向核接近的库仑壁垒必须穿透。因此，反应速率就正比于

(v) 穿透库仑壁垒的几率 $P_p(v)$ ，该几率具有以下的指数形式

$$P_p(v) \propto \exp\left(-\frac{4\pi^2 Z_1 Z_2 e^2}{hv}\right) \quad (8.78)$$

这儿 $Z_1 e$ 和 $Z_2 e$ 是核电荷。

一旦核壁垒被穿透以后，就有可能发生核相互作用，其几率为 P_N 。 P_N 与粒子的能量或速度没有多大关系，但却取决于所涉及到的核的类别。因此，我们引进一个因子，它正比于

(vi) 发生核相互作用的几率 P_N 。对于两个质子间的相互作用来说，其作用情况是可以从理论上知道的。至于所有其他形式的反应，就只能用实验室的观测资料来估计这一几率的大小。相互作用过程的速率还正比于

(vii) 粒子的速度分布。由于核通常是非简并性的，我们就可以假定它们服从麦克斯韦分布。方程 (4.59) 给出

$$D(T, v) \propto \frac{v^2}{T^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{m_H A' v^2}{kT}\right) \quad (8.79)$$

式中 $A' = A_1 A_2 / (A_1 + A_2)$ ，为原子的约化质量，以原子质量单位为单位。

我们现在可以写出单位体积内的总反应速率为

$$\dot{r} = \int_0^{\infty} n_1 n_2 v \sigma(v) P_p(v) P_N D(T, v) dv \quad (8.80)$$

这个积分是容易估算的。因为在一个很窄的速度范围内， P_p 和 D 的乘积很大，而在这一范围外被积函数的值很小，对积分没有多大的贡献。我们用下面的方法来处理这个问题。方程(8.80)中的积分具有形式

$$\int_0^{\infty} v \exp[-(\frac{a}{v} + bv^2)] dv \quad (8.81)$$

在指数取极小值时被积函数有一个很明显的极大值。我们把指数对 v 求导并令其等于零，于是给出 v_m 值为

$$v_m = (\frac{a}{2b})^{1/3} = (\frac{4\pi^2 Z_1 Z_2 e^2 kT}{hm_H A'})^{1/3} \quad (8.82)$$

不过，为了估算这个积分，我们仍然需要估计积分时必须考虑的有效速度范围。因为我们的目的只是追求数量级的概念，于是只要取使被积函数值下降 e 倍的两点之间的范围就够了。为此 v 值应满足下式

$$(\frac{a}{v} + bv^2) - (\frac{a}{v_m} + bv_m^2) = 1 \quad (8.83)$$

由于 v 的变化是个小量，我们令

$$v = v_m + \Delta \quad (8.84)$$

把上式代入方程(8.83)后 Δ 的线性项消去，保留 Δ^2 项可得

$$(\frac{a}{v_m^3} + b)\Delta^2 = 3b\Delta^2 = 1 \quad (8.85)$$

$$\Delta = \pm \sqrt{\frac{1}{3b}} = \pm \sqrt{\frac{2kT}{3A'm_H}} \quad (8.86)$$

现在，式(8.80)的积分就很容易计算了。不过，我们首先要把所有的比例常数合并为单一常数 B ，并把每个因子中的速度和温度联系起来。

我们注意到

$$\Delta \propto T^{1/2} \quad (8.87)$$

以及被积函数正比于

$$v_m \cdot \frac{1}{v_m^2} \cdot \frac{v_m^2}{T^{3/2}} = \frac{v_m}{T^{3/2}} = T^{-7/6} \quad (8.88)$$

其中我们已经用到了关系式(8.82)。由上式可知 $r \propto T^{-7/6} \Delta \propto T^{-2/3}$ 。

我们可以设

$$n_1 = \frac{\rho_1}{m_1} = \frac{\rho}{m_1} X_1 \quad \text{及} \quad n_2 = \frac{\rho}{m_2} X_2 \quad (8.89)$$

式中 X_1 和 X_2 为 1, 2 类核的浓度， m_1 和 m_2 是它们的质量。

把因子 m_1 和 m_2 并入比例常数 B ，于是反应速率

$$\dot{r} = B \rho^2 X_1 X_2 T^{-2/3} \exp[-3(\frac{2\pi^4 e^4 m_H Z_1^2 Z_2^2 A'}{h^2 kT})]^{1/3} \quad (8.90)$$

到目前为止，我们在推导反应速率的估值时并没有很好地考虑到问题所涉及的各个反应的情况，反应时所需要的温度和密度，以及最终的能量释放率。现在我们回过头来考虑这几方面的问题。

我们首先要问自己，要使两个粒子发生相互作用应赋予多大的能量。很明显，核反应只有当粒子间接近到大约等于核的直径（ $D \sim 10^{-13}$ 厘米）那么一段距离时才有可能发生。但是，对两个都带正电荷的核来说，它们之间有一种相互排斥的倾向，而克服斥力所需的功为

$$E = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{D} \sim 2 \times 10^{-6} Z_1 Z_2 \text{ 尔格} \sim Z_1 Z_2 \text{ 百万电子伏特} \quad (8.91)$$

因此，我们也许会以为进行核反应所需的温度应为 10^{10}K ，这要比我们在问题(8.1)中所算得的温度（ 10^7K ）高得多。

有两个因素使实际核反应温度可以下降到 10^7K 。第一，在热分布为 $D(T, v)$ 的核中，有一小部分核的能量要远远超

图 8.6 核反应中所涉及的能量

过平均值。第二，如果粒子的能量虽然不足以克服库仑势垒，但是能借助隧道效应穿过它，那么两个粒子也就可以彼此接近，出现这种情况的几率虽小但是却很重要。这一几率由量子力学所确定，它包括在函数 $P_p(v)$ 之中。

由于这两个因素的存在，尽管平均能量比实验室中产生核的相互作用时所用的能量大约小一千倍，也已足以使核反应持续下去。两者的主要差别在于：实验室里速度是一个关键问题，而对恒星来说反应是缓慢地进行的。要是反应有可能使某个给定粒子经大约 100 亿年之后发生嬗变，那么这对于产生许多象太阳那样的恒星所具有的光度来说就已经是足够快的了。但是，在实验室内我们希望有比较高的反应速率，以能在几分钟或者最多在几小时内就取得结果。可利用的时间延长了约 10^{14} 倍，这便是主要区别之所在；这一差异使得核能可以在较低的温度条件下产生，使种种元素可以在恒星中心发生嬗变，而从宇宙的角度来说这种产能和嬗变的速率是具有重大意义的。

8.11 基本粒子及其相互作用

恒星内所发生的大多数核反应涉及到若干种基本粒子，我们在表 8.2 中列出了它们的一些性质。

粒子的自旋说明了它所服从的统计法类型。整数自旋意味着该粒子服从玻色-爱因斯坦统计法，而半整数值自旋表明粒子是一种费米子。

所有的核反应都要受若干基本守恒定律的支配：

(a) 质能必须守恒（5.6 节）。

(b) 相互作用中的粒子的总电荷是守恒的。

(c) 粒子数和反粒子数必须守恒。粒子不可能由反粒子形成，反之亦然。但是粒子-反粒子对可以形成或者消失，这

表 8.2 参与恒星内多种核反应的某些粒子

粒 子	符号	静质量		电 荷 (静电 单位)	自旋	平均寿命 (秒)	类 别
		(克)	(百万电 子伏特)				
光 子	γ	0	0	0	1		光 子
中 微 子	ν	0	0	0	$\frac{1}{2}$		轻 子
反中微子	$\bar{\nu}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$		反轻子
电 子	e	9×10^{-28}	0.511	-5×10^{-10}	$\frac{1}{2}$		轻 子
正 电 子	e^+	9×10^{-28}	0.511	$+5 \times 10^{-10}$	$\frac{1}{2}$		反轻子
质 子	p	1.6×10^{-24}	938.256	$+5 \times 10^{-10}$	$\frac{1}{2}$		重 子
中 子	N	1.6×10^{-24}	939.550	0	$\frac{1}{2}$	1.1×10^3	重 子

并不违反上述的规则。具体来说：

(d)轻子数和反轻子数之差必须守恒（轻子守恒）；以及

(e)重子数和反重子数之差必须守恒（重子守恒）。

记住了这些规则之后，我们就来对恒星中所发生的某些最为普遍的核反应情况逐一加以介绍。

(i) β 衰变

中子，作为自由粒子或者是原子核内的一种核子，它可以衰变而生成一个质子、一个电子以及一个反中微子：

$$N \rightarrow P + \bar{e} + \bar{\nu} \quad (8.92)$$

这一反应通常是放能的，它可以自发地进行下去。如果式(8.92)以相反的方向进行，我们就称为逆 β 衰变。

$$P + e^{-1} \rightarrow N + \nu \quad (8.92)$$

(ii) 正电子衰变

这里，由一个质子生成一个中子、一个正电子和一个中微子。这个过程是吸能的，也就是需要某种输入阈能，这是因为中子的质量加上正电子的质量要比质子的质量大好多。

$$P \rightarrow N + e^+ + \nu \quad (8.93)$$

原则上说，所有这类反应可以从左向右，也可以从右向左进行；但是，在通常情况下可予利用的中微子或反中微子数目是很少的，因此我们就只需要考虑从左向右方向的反应。

(iii) (P, γ) 过程

在这个过程中，一个质子同一个电荷数为 Z、质量为 A 的核发生反应，生成一个电荷为 (Z+1)、质量较大的粒子，而能量以光子的形式释出：

$$Z^A P \rightarrow (Z+1)^A \gamma \quad (8.94)$$

这类反应中的一个典型例子涉及到碳同位素 C^{12} 和氮同位素 N^{13}

$$C^{12} + H^1 \rightarrow N^{13} + \gamma \quad (8.95)$$

(iv) (a, γ) 和 (γ , a) 过程

在这类过程中，一个 a 粒子（氦核）同核相结合，或者从核放出一个 a 粒子。结合 a 粒子时所释出的剩余能量为一个光子所带走，从核分裂出一个 a 粒子时所需要的能量同样可以由一个光子来提供。这两种过程对于质子和中子数均为偶数（偶-偶核）来说显得特别重要。这类核特

别稳定，它们在形成重元素的过程中起着主要的作用。

(v) (N, γ) 和 (γ, N) 过程

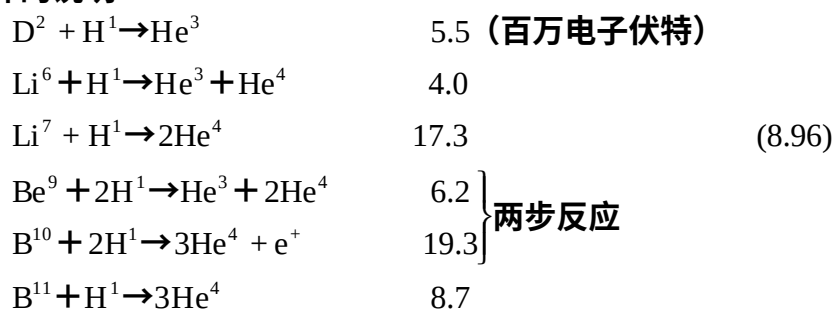
这类过程包括一个中子同核相结合，或者从核中放出一个中子。在反应过程中放出或吸收一个光子，从而保证能量取得平衡。

8.12 恒星内的产能过程

在恒星中可以有各种各样不同的产能过程，我们将按照它们在恒星一生中先后出现的次序——我们相信有这样一种次序——逐一加以说明。

(a) 当恒星从星际介质形成之初，它是一边收缩，一边把引力能辐射出去，收缩过程中所获得的能量已由式(8.1)作了计算。在这个阶段中没有发生任何的核反应。

(b) 当恒星中心的温度达到一百万度左右时，第一轮核反应便开始出现。通过 8.10 节的讨论已经清楚地认识到，当温度超过某个给定数值时这些反应并不是一下子出现的。从这个意义上说，即使要涉及到阈值能量，上述温度也不是阈值。我们采用另一种概念，即可以设想有一个临界温度，到达这一温度时反应便以某种确定的速率进行下去。我们选取的标准是定义平均反应时间缩短到 50 亿年时的温度为临界温度 T_c 。由于反应速率随温度而迅速地增加，因此，一旦温度超过 T_c ，反应就会在一个很短的时间（十亿年左右）内全部进行完毕。首批出现的核反应破坏了最初存在于星际介质中的许多轻元素，并把它们转变为氦的同位素。下面我们列出了这些反应以及每一种反应中所释放出来的能量 (Sa55)。请注意，这部分能量是由光子或中微子带走的，但是我们在这儿并没有作具体的说明：



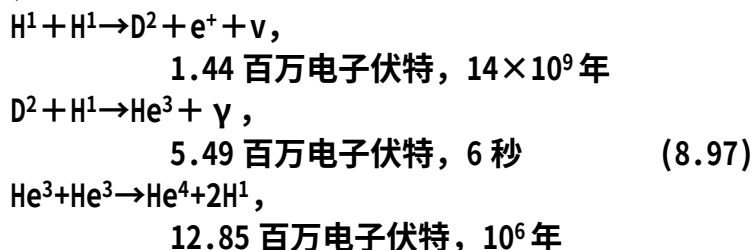
这些反应的寿命约为 5×10^4 年，反应时的温度分别为 $\sim 10^6$, 3×10^6 , 4×10^6 , 5×10^6 , 8×10^6 及 8×10^6 (K)。当温度大致在五十万度到五百万度范围内时，上述反应进行得很快，而恒星便沿着林忠四郎轨迹收缩 (图 8.11) ——这是在恒星的主序前收缩中的一个全对流阶段。由于这些温度是很低的，元素到处都在燃烧，其中包括恒星的表面层，由于对流作用的存在元素可以在表面层中遭到破坏。

除少数情况外，一般说来在恒星表面层内所找到的这些元素的浓度都是很低的。但是，比方说锂在某些恒星中的浓度却很高；这些星就称为锂星，它们成了恒星之谜！恒星演化理论要能解释这种反常现象，就必须同有关化学元素起源的思想密切结合起来。

式(8.96)中所列出的任何一种反应对于恒星在一生中所放出的总能量都没有太大的贡献。但是，就元素的形成理论来说它们是很有意义的；

而且，这些化学元素的低丰富度实际上为判断我们概念的准确性提供了一项检验的标准。

(c) 当恒星中心的温度达到一千万度左右时氢便开始燃烧 (Be39)。下面给出了 $T=3 \times 10^7 K$ 时对于任何给定粒子所发生的反应以及平均反应时间，同时还给出了每一步反应中所放出的能量。



其中第三个反应每发生一次，第一、第二两种反应必须发生两次。反应中所放出的能量并没有全部贡献给恒星的光度，第一步反应所释出的能量中有 0.26 百万电子伏特是被中微子带走的，因而就损失掉了。所以，每形成一个氦原子对于光度的总贡献为 26.2 百万电子伏特。

这组反应是质子—质子反应中的主要分支，另外一些分支在图 8.12 中作了说明。氢燃烧也可以按另一种略为不同的方式进行，其时要用到碳同位素 C^{12} 的催化作用。这组反应由碳循环组成，说得更准确些有时叫做 CN 双循环，这是因为在反应过程中要涉及到碳、氮、氧三种元素；其中 CN 部分从放热作用来说是比较重要的部分 (C168)*。下面给出了 15×10^6 及 $20 \times 10^6 K$ 两种条件下的反应时间

这里有好些反应的时间仍然是不太确定的。循环第二部分出现的机会为第一部分的 4×10^{-4} 倍，这是因为 $N^{15}(p, \alpha) C^{12}$ 反应的可能性比 $N^{15}(p, \gamma) O^{16}$ 反应要大 2.5×10^3 倍左右。

在 N^{13} 粒子衰变中有 0.71 百万电子伏特的能量为中微子所带走；而在 O^{15} 衰变中平均损失 1.00 百万电子伏特。因此，每形成一个氦原子，恒星可以获得的总能量只有 25.0 百万电子伏特，这要比从质子—质子反应所获得的能量略为少一些。这儿所给出的反应速率是就碳、氮同位素总浓度 X_{CN} 为 ~ 0.005 而言的。图 8.7 中给出了作为温度的函数的质子—质子反应和碳循环的相对优势。同别的、质量数为 $4n+1$ 的粒子一样，在 CN 循环中生成的 C^{13} 可以起中子源的作用，在下面的反应 (8.102) 和 (8.103) 中我们将会看到这一点。作为一个例子， N^{21} 可以通过如下的反应产生：

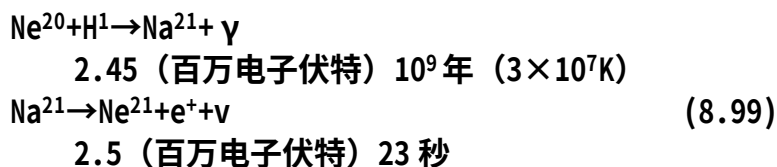
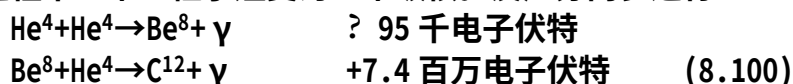


图 8.7 核能产生率作为温度的函数 (其中 $\rho X^2=100$ 。对于 $p-p$ 反应和碳循环来说 $X_{CN}=5 \times 10^{-3} X$ ，但对 3α 过程来说 $\rho^2 Y^3=10^8$) (Sc58b)

我们在这里所讨论的氢燃烧反应，就是恒星停留在主星序上的漫长岁月中能量的贡献者。一旦恒星中心的氢基本用完，氢燃烧就会出现，这个过程将在下一段中予以说明。一般说来，核内的氢用完之后，氢燃

烧将会在核周围的一个壳层中继续进行。

(d)当恒星的氢燃烧阶段完成时，在一段时间内可能没有任何别的核能产生过程出现，这时恒星作缓慢的收缩(图 8.8)。结果，中心的温度就继续上升，当温度达到 10^8K 左右时氦燃烧就开始出现(Sa52)。在这个过程中三个 α 粒子嬗变为一个碳核。反应分两步进行：



第一个反应是吸热的，要使反应进行下去就必须补充能量。 Be^8 核是不稳定的，它衰变后重新形成两个 α 粒子。于是在 α 粒子和 Be^8 粒子间就会建立起某种平衡，其中 Be^8 的浓度是相当低的，大约为 α 粒子浓度的 10^{-10} 倍。决定这样一种特定的丰富度的因素有：亚稳态 Be^8 的寿命，氦的密度和能量(温度)，以及(负)结合能的大小(? 95 千电子伏特)。

(e)恒星核在氦燃烧阶段内停留的时间是不会太长的，这是因为同氢燃烧阶段所产生的能量相比，氦燃烧可用的能量是很少的($\sim 10\%$)。在较高的内部温度下可以出现一系列的(α , γ)过程，并形成 O^{16} , Ne^{20} 及 Mg^{24} 。这类过程被称为 α 过程。核内的氦用完之后氦燃烧可以在该核周围的一个壳层中继续进行，而在它的外面就是氢燃烧壳层。

(f)温度再高，到 10^9K 时反应就可以在 C^{12} , O^{16} 和 Ne^{20} 这些核之间进行。到这一阶段，游离态的氦已全部用完，但是这种粒子可以通过(γ , α)反应得到。这一阶段中的密度约为 $\rho \gtrsim 10^6 \text{ 克} \cdot \text{厘米}^{-3}$ 。下面是一种有代表性的反应



Mg^{24} 可以通过俘获 α 粒子而形成 Si^{28} , S^{32} , A^{36} 和 Ca^{40} 。

这些同位素的天然丰富度要比元素周期表中同样物质或相邻元素的丰富度来得高，这一点也许部分地证实了上述过程确实是存在的(图 8.10)。

图 8.8 红巨星的壳层结构，其中中心区的氢已经用完(Ib70)。左剖面图为右图中心部分小圆点放大后的情况

这一链式反应最终以形成稳定性最高的铁族元素的核而告结束，铁族元素内每个核素的质量对这些元素来说是最小的。在这些偶-偶核之间的浓度取得某种平衡的那段时间内，温度和密度的预期值为

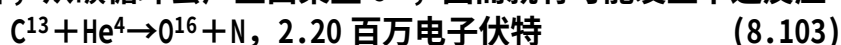
$$T \sim 4 \times 10^9 \text{ 和 } \rho \sim 10^8 \text{ 克} \cdot \text{厘米}^{-3}$$

这个过程称为平衡过程或 e 过程、 α 过程和 e 过程可以很迅速地——也许是爆发式地出现。

(g)在第二代恒星——由含有相当数量较重元素的星际气体所形成的恒星——中，我们也许会找到 Ne^{21} 。这时，在高温的氦核内就可以出现吸热反应



同样，从碳循环会产生出某些 C^{13} ，因而就有可能发生下述反应



反应中所产生的中子首先为重核、特别是为铁族中的核所俘获，从而就可以合成更重的核。每个铁族元素可以分配到上百个 C^{13} 和 Ne^{21} 核，因此中子之多可谓比比皆是。象 Bi^{209} 这样的重元素可能就是通过这种方

式合成的。这一链式反应到 Po^{210} 才告结束， Po^{210} 是不稳定的，会发生 α 衰变。另外，也可以合成象 Ne^{22} 这样的轻核，而且除了偶质子-偶中子核外，我们相信大多数 $24 \leq A \leq 50$ 的核就是通过中子俘获过程合成的。这种中子过程是缓慢的，因此称为 s 过程。在这一阶段中，中子俘获过程通常需要几年到几千年时间，同 β 衰变的速率相比，这段时间就显得很慢，而且只能合成那些由中子和比较稳定的核相结合所构成的元素。

中子丰富度曲线在质量数 $A \sim 90, 138$ 和 208 时达到峰值，这便证明了具有大量中子的阶段是存在的。这些核具有 $N=50, 82$ 和 126 的封闭中子壳层。

在图 1.6 这张赫罗图中，线段 EF 可能就代表了恒星演化过程中由 s 过程起有效作用的那个阶段。在这个第二红巨星阶段中，壳层内的一系列氦闪可能会产生某种对流状态，结果使氦燃烧层外的富氦壳层同富碳的核发生混合，最终甚至可以使最外面的富氢层通过对流进入星核 ($\text{Sc}70$)。在这种情况下 C^{12} 和 H^1 (见方程(8.98)) 就可以生成 C^{13} ，后者通过同 He^4 的相互作用产生所需要的中子。

(h)看来，除了缓慢的中子过程外，中子同样能在一种快速过程 (γ 过程) 中同重核相结合，至少在某些恒星中有这种情况发生。如果要用化学元素的合成理论来解释比 Po^{210} 更重的元素的存在 (Po^{210} 发生 α 衰变的半衰期只有 138 天)，那么某种这一类的过程无论如何是少不了的。

要是恒星用完了它的全部能源，那就会以自由落体的速度很快地向内压缩，正如我们在前面的章节中所看到的那样，这一过程所经历的时间大约为 1000 秒。于是，极其高的温度便出现了，铁族核就能分裂为 α 粒子和中子；因为，在 Fe^{56} 中除了有 13 个 α 粒子外还有 4 个剩余中子，所有这一切都发生在大约 10^{10}K 温度的条件下，中子的流量约为 10^{32} 厘米⁻²·秒⁻¹。 γ 过程可以合成重到 $A \sim 260$ 的元素，这时，进一步的中子辐照会引起裂变，结果使物质发生循环，从而回复到比较小的原子量范围。

在铁族元素分裂成氦的过程中，比热之比 γ 变得小于 $4/3$ ，从而出现向内的压缩 (4.20 节)。伴随而来的是 γ 光子的产生，粒子对的形成，以及电子-正电子对的湮没，在这样的高压之下湮没反应可能会产生大量的中微子流。接着，中微子流从恒星的外层逸出，同时发生快速中子过程，而恒星便再度膨胀——爆发式的膨胀。我们认为，至少有一些超新星在

图 8.9 就太阳系估算的 r 过程丰富度，其中已从观测所得到的核质量总丰富度中扣除了经计算后求得的 s 过程的贡献量。某一种元素的同位素用线联在一起，偶数 Z 值用的是虚线，奇数 Z 值用的是实线。图上最显著的特征是有三个峰值及一段宽的稀土元素隆起带。问号表示在产生氦的过程中，对 r 过程和 s 过程两者的相对作用大小是很不确定的 ($\text{Se}65$)

爆发中会发生这样的过程，而中央部分收缩着核便形成了一颗中子星。

根据中子俘获截面及核衰变时间——这两个参数都是在实验室里测定的——所作的详细计算表明，在 $A=80$ 到 $A=200$ 这段范围内的丰富度曲线的许多特征可以用 r 过程的出现来加以解释 (图 8.9)。这使我们相信

上述一系列事件至少是大致正确的。也许还要作两点有关的说明：

(i) 富质子的同位素比较少见，尽管它们可以在 (p, γ) 过程（有时称为 p 过程）或 (γ, n) 反应中产生。要是恒星外层的氢可以在对流过程中同来自星核内的炽热物质相接触，那么这类核是可以产生的。但是，一般说来， r 过程可以半定量地说明许多较重元素的丰富度比。

(ii) 可以预料，铀同位素 U^{235} 和 U^{238} 在 r 过程中以大致相等的丰富度出现。但是，它们现有的比例（如在地球上所发现的那样）约为 0.0072。如果我们假定这二者大约在 60 亿年前同时形成，由于它们的半衰期分别为 7.1 和 45 亿年，那么预期的丰富度比也必然就是这个数字。这就为我们在确定地球上物质起源时间的问题上提供了某种方法。我们仍然面临着许多不确定的因素，其中有一些将由 10.13 节中的问题(10.14)加以说明。

质量范围为 20 到 $40M_{\odot}$ 的恒星在爆发过程中温度会越来越高，于是碳、氧和硅便接连发生燃烧，有人认为 (Ar70) 这个短暂的阶段可能就是造成 $20 \leq A \leq 64$ 范围内所观测到的元素丰富度的原因。最初，在用完了氦的星核内碳必然会经历这样一类的聚变反应：

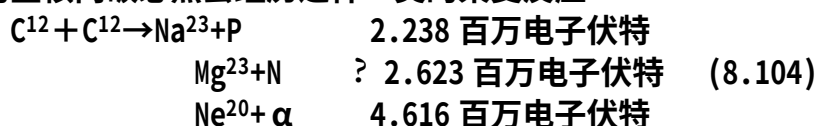


图 8.10 通过爆发燃烧所产生的元素。圆圈表示以质量计的太阳系丰富度，+ 字记号为计算值。碳的爆发燃烧温度为 $2 \times 10^9 K$ ，密度 $\rho \sim 2 \times 10^5 \text{ 克} \cdot \text{厘米}^{-3}$ ，所贡献的最大原子量为 $A \sim 30$ 。氧燃烧时的温度为 $3.6 \times 10^9 K$ ，密度 $\sim 5 \times 10^5 \text{ 克} \cdot \text{厘米}^{-3}$ ，所贡献的最大原子量是 $A \sim 50$ 。硅燃烧时温度范围为 $4.7 \sim 5.5 \times 10^9 K$ ，密度 $2 \times 10^7 \text{ 克} \cdot \text{厘米}^{-3}$ ，并生成质量更大的核，其丰富度如图所示。本图系由阿内特 (Arnett) 和克莱顿 (Clayton) 两人的工作所合成 (Ar70)，我们也许可以从瓦戈纳 (Wagoner) 的爆发式核聚变工作获得类似的丰富度 (见 8.16 节) (Wa67)。

注意，实线联结的是同一元素的不同同位素

这些反应是在 $2 \times 10^9 K$ 温度下发生的，初始密度约为 $10^5 \text{ 克} \cdot \text{厘米}^{-3}$ 。假定这些反应持续十分之一秒左右，在这之后所出现的爆发便会把恒星物质冷却到足以使这个过程停止。在较高的温度 ($3 \times 10^9 K$) 下，氧也燃烧起来，随后硅 Si^{28} 发生裂变。后一个过程中硅分裂为七个 α 粒子，这些 α 粒子又为别的 Si^{28} 核吸收，从而形成质量越来越大的核，这个过程一直进行到 Fe^{56} 。如果核燃料在用完了氦的核内温度为 $\sim 5 \times 10^9 K$ 、峰值密度为 $2 \times 10^7 \text{ 克} \cdot \text{厘米}^{-3}$ 条件下点火，上述过程就会发生。爆发过程结束时元素丰富度比的具体情况部分取决于中子剩余，也就是原始状态核内中子对于质子的相对剩余数。例如，要是中子剩余

$$\eta = \frac{(n_N - n_p)}{(n_N + n_p)} \quad (8.105)$$

在 0.002 左右，则所得到的结果就会同图 8.10 表示的情况符合得相当好。至于在这种爆发期间恒星应该具有什么样的结构我们是不清楚的。不同的物质是不是排列成若干个同心壳层，或者还是因为某种什么原因在整个核内作不规则的分布呢？我们对这些过程的了解是不够充分的。

8.13 赫罗图和恒星演化

我们相信，恒星是从星际介质形成的。最初，冷的星际气体云一面收缩，一面在远红外区发出热辐射。随着收缩过程的进行，云的温度就不断上升。根据林忠四郎的观点，那个时候的表面温度在一个长期内保持不变，而恒星则越来越小。这意味着在这个阶段中恒星的亮度在减小，但颜色却一直没有变化。因此，恒星在赫罗图上的林忠四郎轨迹是一条近乎垂直的线。依本（Iben）指出，在这一阶段以后恒星大致沿着水平方向往左朝着主星序运动（图 8.11）。当轻元素燃烧时，这条轨迹可能出现某些短暂的变化，但最后恒星总要进入主星序，并在那儿作长时间的停留。

实际上，正如图 1.6 所表示的那样，甚至在整个氢燃烧阶段中恒星在赫罗图上的运动也是微乎其微的。在整整几十亿年时间内，恒星只是从初始的零龄主序运动到 B 点，恒星变得更亮也更大。我们相信，太阳的零龄光度为 2.78×10^{33} 尔格·秒⁻¹，半径为 6.59×10^{10} 厘米；作为比较，经过 45 亿年之后，目前这两个量为 3.90×10^{33} 尔格·秒⁻¹ 和 6.94×10^{10} 厘米（St65）。

图 8.11 恒星向主星序收缩。恒星在这张赫罗图上的路径是向左进行的，曲线的左端大致与主星序重合。质量为 $15M_{\odot}$ 的恒星大约在 6×10^4 年内完成图上所示的过程； $0.5M_{\odot}$ 的恒星需历时 1.5×10^8 年。曲线右端的陡直部分称为林忠四郎轨迹（Ha66, Ib65）

当氢燃烧在恒星中心完成之时，这一过程仍然可以在中央氦核周围的一个薄薄的壳层中继续进行。核不断收缩直至温度高到足以引起氦的燃烧。在这一阶段中恒星在膨胀，它变得更亮也更红。图 1.6 中的轨迹 BC 说明了恒星是怎样向上运动并到达颜色—星等图的右方。图上的这一分支便是红巨星分支。

到这一步为止，理论工作已经相当完善，而下一步发生了什么还不很清楚。不知什么原因，红巨星把它的一部分质量抛了出去，并且在主星序的左下方以白矮星的形式结束了它的一生。

我们相信（Sc70）*，当恒星到达图 1.6 中的 C 点时便通过 3α 过程开始了它的氦燃烧。这种燃烧可能是以某种闪烁的方式出现的，并迫使恒星膨胀；但是在对流着的中央核内保持了速率比较慢的氦燃烧，而氢燃烧则在外部壳层中进行。环路 DE 可能就代表了这一个阶段，对于质量约为 $1.2M_{\odot}$ 的恒星来说，这个阶段要持续 10^8 年左右。正如 1.5 节中所指出的那样，对于在这以后连续发生的一系列快速阶段我们是不太清楚的。也许存在某个碳燃烧阶段，并且正如已经指出的那样，这个过程可能进行得很快。我们把氦燃烧在壳层中进行、同时在外围又有一个氢燃烧壳层的这些阶段同水平分支恒星联系在一起。这种过程必然是短暂的，因为我们所观测到的水平分支恒星为数甚少，造父变星也许同这一阶段的核演化有关；这种恒星的光变周期是在变化的，大约在一百万年时间内其变光周期会有显著的改变。

恒星演化的理论使我们能对球状星团恒星的年龄问题作出一种有意义的结论。利用合理的恒星模型，我们可以计算出不同质量恒星所应

有的氢燃烧时间尺度。在一个星团内包含了质量大小各不相同的许多恒星；但是，对任意给定的时间来说，只是那些具有一定颜色和星等的恒星才会处于即将离开主星序而进入红巨星分支的地位。既然恒星的光度和质量是相互有关的（见问题(8.3)），那么我们就可以利用恒星离开主星序时的转折点位置作为刚好完成氢燃烧阶段的那些恒星质量的标志。于是便可以计算这些恒星的年龄，而这就确定了星团最初形成时所应有的时间——当然，这儿要假定所有的恒星大致上是同时诞生的。

用这种方法推算出来的球状星团年龄大约是 100 亿年。各种不同的星团所算得的年龄并不一致，这说明它们是在不同的历元形成的，也许是在银河系一生中的不同阶段形成的。

小质量恒星在演化中的最后阶段看来就是白矮星阶段，这时恒星的内部变成了简并态，它不再会发生更进一步的收缩。于是，恒星便在一个漫长的时期内逐渐冷却下来，但是再不会发生进一步的核反应了。

大质量恒星并不经历白矮星阶段，它们的最终归宿是不清楚的。也许它们在发生爆炸后只留下一小块残迹，这个残迹可能就变为一颗白矮星。也许它们只是非爆发式的把质量抛射出去；也许它们继续收缩，直到成为简并中子星。在 8.16 节中我们将对这几种恒星作比较详细的介绍。

8.14 从某些恒星的表面化学组成所观测到的、有关恒星演化的证据

正如 1.6 节中已讨论过的那样，从好多种恒星的光谱可以看出，它们的大气组成是和太阳非常相似的。表 8.3 说明了这一点，其中少许差异也是在观测和资料归算的预期误差范围之内。表中列出了较重元素相对于氢的数密度之比的对数值，为比较起见，所有恒星的 $\log n_H$ 值都规定等于 12.00。

恒星在年龄上的差异极为悬殊：B0 型星大概只不过是在几百万年前才形成的，而红巨星或行星状星云应该列入银河系内最年老的天体之内，它们的年龄在七十亿年以上。但这些不同年龄恒星的元素丰富度却是类似的，这说明在这些不同恒星的形成期之间的这段时间内星际介质也许没有发生多大的变化。尽管介质在化学组成上的不变性可以归因于恒星表面层没有同它的内部物质相混合，然而关于化学演化方

表 8.3 “正常”恒星的相对丰富度，设 $\log n_H = 12$ (Un69)*

原子序数	元素	丰富度：logn					
		太阳		天蝎座 τ B0 V	英仙座 ζ B1 Ib	行星状 星云	log(n/n _☉) 室女座 eG8III
		戈德堡(Goldberg) 缪勒(Mueller) 阿勒尔(Aller) (1960, 1967)	不同来源 的最新数据				
1	H	12.00	12.00	12.00	12.00	12.00	0.00
2	He		11.2	11.12	11.31	11.25	
3	Li	2.34	0.97 ≈0.38				
4	Be	2.34					
5	B	3.6					
6	C	8.51	8.518.55	8.21	8.26	8.7	-0.12
7	N	8.06	7093	8.47	8.31	8.5	
8	O	8.83	8.77	8.81	9.03	9.0	
9	F					5.5	
10	Ne			8.98	8.61	8.6	
11	Na	6.30	6.18				+0.30
12	Mg	7.36	7.48	7.7	7.77		+0.04
13	Al	6.20	6.40	6.4	6.78		+0.14
14	Si	7.24	7.55	7.66	7.97		+0.13
15	P	5.34	5.43				
16	S	7.30	7.21	7.3	7.48	8.0	+0.09
17	Cl					6.5	
18	A			8.8		6.9	
19	K	4.70	5.05				+0.10
20	Ca	6.04	6.33				+0.10
21	Sc	2.85					-0.07
22	Ti	4.81					-0.07
23	V	4.17					-0.04
24	Cr	5.01					0.00
25	Mn	4.85					+0.07
26	Fe	6.80		7.4			+0.01
27	Co	4.70					-0.03
28	Ni	5.77					+0.03
29	Cu	4.45					+0.06

(续表)

原子序数	元素	丰富度：logn					
		太 阳		天蝎座 τ B0 V	英仙座 ζ B1 Ib	行星状星云	log(n/n _⊙) 室女座 ε G8 III
		戈德堡 勒阿勒尔 (1960 , 1967)	不同来源的最新数据				
30	Zn	3.52					+ 0.05
31	Ga	2.72					
32	Ge	2.49					
37	Rb	2.48	2.63				
38	Sr	3.02	2.82				+0.02
39	Y	3.20					-0.17
40	Zr	2.65					-0.15
41	Nb	2.30					
42	Mo	2.30					
44	Ru	1.82					
45	Rh	1.37					
46	Rd	1.57					
47	Ag	0.75					
48	Cd	1.54					
49	In	1.45					
50	Sn	1.54					
51	Sb	1.94					
56	Ba	2.10	1.90				-0.09
57	La	2.03					-0.08
58	Ce	1.78					-0.08
59	Pr	1.45					+0.37
60	Nd	1.93					+0.06
62	Sm	1.62					+0.01
63	Eu	0.96					
64	Gd	1.13					
66	Dy	1.00					
70	Yb	1.53					
72	Hf						
82	Pb	1.63	1.93				+0.18

面这种证据不足的事实仍然有点使人感到迷惑不解。我们必须把这一点同下面的事实联系起来：每当超新星或别的不稳定恒星抛射物质之时，只有恒星的表面物质重新变成星际介质。当然（见表 1.1 或 1.6 节），我们知道某些金属含量非常贫乏的恒星是存在的，而从这些特殊天体也确实体现了化学演化的可能性。显然，这种证据还是含糊的。

在我们所观测到的恒星中，有那么一小部分恒星，它们中心的某些物质看来是能够到达表面部位的，而且数量相当可观。在某些密近双星内，这类现象也许是经常发生的：一颗子屋的表面物质源源不断地流向

它的伴星，结果就把核演化已经进行得相当充分的内层暴露了出来。也可能还存其他的一些过程会使单颗恒星的内部物质对流到表面层去 (Un69) *。

不管具体程度怎样，密近双星的某些子星总是表现出含有丰富度特别高的氦、碳或者金属元素。对于这些天体来说，分光观测所确定的丰富度比是和已经提到过的那些过程相一致的：氢燃烧通过质子—质子反应或 CNO 循环生成氦，氦燃烧变为碳，而碳燃烧又生成更重的元素。有关 e, s 和 r 这三种过程的证据看来也在逐步累积之中。

与表 8.3 所列出的那些恒星相比，氦星 (表 8.4) 的氦丰富度普遍地显得偏高。事实上，如果初始氢丰富度假定为 $\log n_H = 12.00$ ，而初始氦丰富度取为 $\log n_{He} = 11.2$ ，同表 8.3 中列出的那些数值相当，那么表 8.4 上所取的名义丰富度 $\log n_{He} = 11.61$ 就是表示每组四个氢核已完全燃烧而产生出一个氦核。

两张表的比较也说明了下面这样的事实：尽管恒星 HD160641 中 CNO 的组成几乎保持不变，恒星 HD30353 中的碳和氧相对氮来说已显示出某种程度的减少。这也许说明了质子—质子反应支配了所提到的第一颗星中的氢燃烧，而第二颗

表 8.4 氦星内的元素丰富度，取 $\log n_{He} = 11.61$ (Un69)

原子序数	元素	丰富度：logn				
		HD 160641	HD 168476	HD 124448	BD+10 ° 2179	HD 30353
1	H		< 7.1	< 7.8	8.49	7.6
2	He	11.61	11.61	11.61	11.61	11.6
6	C	8.66	9.16	9.01	9.51	6.2
7	N	8.77	8.35	8.38	8.67	9.2
8	O	8.91	< 8.3	< 8.4	< 8.2	7.5
10	Ne	9.42	9.05			8.5
12	Mg	7.61	7.53	7.75	7.2	
13	Al		6.19	6.61	5.8	
14	Si	7.61	7.12	7.21	7.42	7.6
15	P		6.06			
16	S		6.75	7.19		7.8
18	A			6.9		
20	Ca		6.00	6.40	5.91	
21	Sc		4.3			
22	Ti		5.98	6.3		
23	V		4.65			
24	Cr		5.20	4.8		
25	Mn		4.57	4.84		
26	Fe		7.42	7.58		
28	Ni		5.4	5.2		

星则已经历了 CNO 循环，这后一种过程把大部碳和氧变成了氮。无论在什么情况下，这个循环中氮的预期平衡丰富度总是高的，因为式 (8.98) 中所表明的从 N^{14} 向 O^{15} 的转换是一种缓慢的过程。某些恒星的光谱表现出碳①的丰富度比较高，这说明别的一些过程可能也在发挥作用。HD168476 和 HD124448 中的情况也都是如此，在这些恒星中氮燃烧可以使 CNO 双循环中转换掉的碳重新得以补充。

碳星是一些红巨星，它们呈现异常高的表面碳丰富度，其中碳或者以原子的形式出现，或者是作为某些小原子团的一个成员；这类恒星证明了 3α 过程在起着重要的作用。各种各样的碳星表现出不同的历史。有些碳星的重元素丰富度相对氢要低一个数量级；这些碳星还含有钡以后的一些元素，其丰富度要比铁高一个数量级，这种超额丰富度必然是由中子补充过程产生的。

由双原子基的光谱所确定的 C^{12} 对 C^{13} 之比值，同样可以得到有意义的资料。在表示同位素 C^{12} 的谱线附近，我们发现了含有 C^{13} 的原子团所产生的一种较弱的谱带结构。在地球上以及太阳内， C^{12}/C^{13} 这一比值约为 100。但是对 CNO 双循环来说，8.11 节中所给出的寿命表明平衡比值在 5:1 左右，大部分碳星中实际观测到的就是这个数值；其他碳星则呈现太阳的化学丰富度。在比值低的那些地方，说明由氮燃烧所生成的碳不知为什么原因后来又经历了 CNO 双循环。但是，由于在各个碳星中所发现的碳、氮、氧三者丰富度之比常常同 CNO 双循环不一致 (Th72)，因而也许只能求助于另外的一些解释。

钡星是又一类恒星，它们在波长为 4554 和 4934 埃处呈现出特别强的钡双重线。一般说来，对这类恒星而言，原子序数 $Z > 35$ 的那些元素特别丰富，要比太阳上的丰富度高约一个数量级。在这些恒星中， $Z=26$ 的铁的含量还是正常的，然而 $Z=38$ 的锶已经是特别丰富了。这些观测事实是同中子辐射相一致的。

类似的特征也适用于 S 星，在那儿又一次出现高强度的 ZrO, LaO, YO 谱带，以及原子态锆、钡、锶、镧和钇的谱线，这就表明了高 Z 值范围内的超额丰富度。这些元素起源于中子过程，这一点也是和锆谱线的存在相一致的。 Tc^{99} 的半衰期为 2×10^5 年，和沿红巨星分支恒星演化所算得的演化寿命相似。这种同位素可以在 S 过程中产生出来。因此，我们就可以推测出这种同位素是在最近二、三十万年内、甚至在更近一些时候从恒星表面形成的；不然的话那就是在这个时期中它于恒星内部形成，然后再带到恒星表面。但是，如果它出现于几十亿年前恒星最初形成之际，那么到今天所能剩下的少许痕迹已经是不可能观测出来了。这一点为现有的恒星核聚变理论提供了直接的证据，而且因为我们只知道中子过程能形成这类重元素，上述情况就更使我们相信在恒星内部确实是发生了 S 过程。

稀土元素钷已在 HR465 的大气中推测性地得到证认，这一元素最长寿命同位素的半衰期只有 18 年；HR465 还显示出许多别的稀土元素谱线。这表明核反应必然在对衰变中的钷不断地加以补充 (A170)。因为对流时间(8.30)约为一个月，这种钷就不一定要求在很靠近恒星表面的地方产生，尽管这类可能性也是存在的。这些观测结果仍然有待于作进一步

的证实。

8.15 直接观测恒星内部核过程的可能性

迄今为止，我们按照人们所普遍预测的先后次序，介绍了在恒星内部可能进行着的种种核事件，并且把这些事件同赫罗图上不同部分所代表的恒星一生中的各个阶段紧紧地联系在一起。由于事件发生的顺序、可能的核反应种类，以及所需要的假设的数目都是很大的，因而亟须对我们所假定的核反应进行直接的验证。

在这一方面可以做的、最有希望的观测工作就是测量核反应所放出的中微子。正如业已指出的那样，中微子大约带走了氢→氦转换能的 2~6%，具体数值取决于起支配作用的是质子-质子反应还是 CN 循环。中微子实际上可以毫无阻碍地从恒星中逸出，因为在底面积为 1 厘米²、深为一个恒星半径的柱体内，中微子通常会碰到 $\rho R/m_H \sim 10^{35}$ 个核，这儿 $\rho \sim 1$ 克·厘米⁻³， $R \sim 10^{11}$ 厘米，及 $m_H \sim 10^{-24}$ 克。由于中微子同核的相互作用截面通常约为 10^{-45} 厘米²，所以在恒星内部所走过的路上只有百亿分之一中微子被截走。

布鲁克黑文 (Brookhaven) 国立实验室的小戴维斯 (Davis, Jr.) 和他的同事们完成了一项直接观测来自太阳的中微子的工作 (Da68)。他的实验的基础是下述反应中氯同位素 Cl^{37} 对中微子所表现出来的很大的吸收截面：



这个反应要求中微子的最小能量为 0.81 百万电子伏特。氩同位素 Ar^{37} 是有放射性的，这使我们可以记录到半衰期为 34 天的 2.8 千电子伏特俄歇 (X 射线) 跃迁，因而就很容易发现 Ar^{37} 的存在。但是，这一过程中的反应截面只是对那些高能的中微子来说才是大的，因而用这种方法就不可能记下太阳所发出的全部中微子。实验者们通过计算表明，他们只能观测到硼同位素 B^8 在衰变中所产生的中微子，核理论预测到这种核素形成的数量是非常少的。在这一衰变中所放出的中微子的能量可以高达 14 百万电子伏特。图 8.12 中表示了首次产生硼的过程，图中还列出了每项反应所出现的几率。

为了探测这一过程，该小组人员所用的氯化物是 520 吨 C_2Cl_4 。他们用氦气把这种液体中所产生的氦从槽内清洗出来，再在低温下使氦与氦分离从而把氦回拢，然后把收集到的氦送入一架计数箱。硼衰变中所产生的中微子俘获截面为 $\sigma \sim 1.35 \times 10^{-42}$ 厘米²，因而预期的俘获数大约是每天 2~7 个。实际上观测到的、因 Ar^{37} 衰变所引起中微子计数上限比这个数字要略为低些，并说明了地球上从这一反应所得到的中微子流量不会超过 2×10^6 厘米⁻²·秒⁻¹。对于 0.86 百万电子伏特的中微子来说， $\sigma \sim 2.9 \times 10^{-46}$ 厘米⁻²，因而由 Be^7 电子俘获所作的贡献要比 Be^8 来得少。

图 8.12 引起太阳中 B^8 的产生和衰变的核反应，其中标明了各个核反应出现的相对几率以及所产生的中微子的能量。分叉时的比例是由温度决定的，相应于图中所示比值的预期温度在 $1.5 \times 10^7 \text{K}$ 左右，浓度为

$$X=0.726, Y=0.26, Z=0.014 \quad (\text{Ba72})$$

这个实验显然还得到另一个结果，那就是 CNO 循环对太阳产能所作

的贡献的上限约为 10%。如果这一过程起着更大的作用的话，那么在这个循环中由 ^{15}O 衰变所产生的中微子也必然会被我们观测到。

在这项实验完成之后，理论家们根据对太阳化学组成以及核反应几率的进一步测定，重新对他们的预报进行了研究，但是预期的流量并没有显著的改变。同时，用数量较多的 C_2Cl_4 (610 吨) 继续进行了实验，结果所得到的产生率为 0.3 ± 0.2 个 Ar^{37} 原子，其中已扣除了由宇宙线及快中子所产生的每天 0.2 个 Ar^{37} 原子 (Da71)。预期的数值是太阳来的中微子每天应产生 2 个 Ar^{37} 原子。人们对这种矛盾正在进行深入的研究；这个问题一旦得到解决，也许会使我们对恒星内核演化的情况取得更为深入的了解！

8.16 初始温度为 10^{10}K 的爆发天体中元素合成的可能性

人们在银河系内所能找到的最年老恒星的大气中探测到了某些重元素，对于这个观测事实恒星演化理论还不能给出令人满意的解释。由此说明，作为球状星团成员的这些恒星，包含有已经经历过某种核过程的物质。这一点意味着银河系内最早形成的恒星并不是仅仅由氢或氦—氦混合物所生成的，它们必然是从那种已经掺入了较重元素的物质生成的。从宇宙学的观点来看，这一点可能具有重大的意义。如果我们所知道的最老的恒星包含有较重的元素，那么它们是从哪儿来的呢？这些元素是否一定要——或者甚至有可能——在宇宙的某种原初爆发状态中形成呢？或者我们能不能通过别的途径来对它们的存在作出解释呢？

在深入了解这一问题之前，我们先应该考虑到这样一种可能性：我们所观测到的重元素不过只是一种表面污染而已，我们要问，恒星有没有可能吸积到足够数量的星际物质，比如说能不能就在通过稠密星际云时做到这一点。星际物质现有的化学组成中，肯定有足够丰富度的重元素可以很好地解释我们所观测到的现象。但是，经计算之后（计算方法与问题(3.8)类同）我们发现，对于星际物质的吸积率，或说俘获率是很低的，它不能形成所观测到的金属丰富度。

瓦戈纳 (Wa67) 以及其他一些人的计算表明，球状星团恒星中所观测到的重元素丰富度可以用下面的假设来加以解释：在球状星团恒星形成前的某个时候，银河系中的氢集聚到一个或几个大质量天体之中，当它们的中心温度升高到 10^{10}K 后便发生爆炸，结果把物质抛回银河系。爆发之后接着就是膨胀，在恰当的膨胀条件下就会形成应有的丰富度比。这里所设想的是这类爆发可以在星系那么大的尺度上出现，也许它就代表了某种类星射电源型——非常致密而又非常明亮——的现象。于是，通过这一阶段循环的物质便可以用来下一步形成球状星团中的恒星。这些大质量天体可以包括整个星系的质量，也可以比这来得小——这就是说，它们可能就是球状星团或者甚至只有一颗大质量恒星那么大。无论哪一种情况，这条思路可以解释我们银河系内最年老恒星中较重元素的存在问题。

这个理论同样可以解释在最老的恒星——银河系内的晕族恒星 (Wa71) *——中氦大量存在的问题，尽管演化宇宙模型的支持者们认为这种氦可能是在宇宙演化的初期阶段（这时物质处于高密度和高温度条件之下）中形成的。

如果大质量天体所代表的是初始致密状态下的整个宇宙，那么我们可以证明，目前所观测到的 3K 黑体背景辐射（要是这种辐射在原初时间就存在的话）规定了最早期演化阶段的温度。我们可以计算宇宙半径的变化速率，以及与半径有关的温度和密度的变化率。然后就可以用核反应速率来确定密度最终变得很低以至不再进一步发生核变化时物质的化学组成。

当然，这种化学组成与宇宙中各种初始成份有关。具体来说，最后的中子？质子比在很大程度上取决于初始存在的中微子和反中微子的数目。如果电子中微子十分丰富，那么反应



主要朝右端进行并产生出大量的质子。当中微子密度比较低时，另外两个反应也将发挥作用



它们所产生的中子和质子的密度大致相等。要是反中微子的丰富度很高，这些反应就从右向左进行。当然，这儿所考虑的中微子是电子中微子而不是 μ 介子中微子； μ 介子中微子只是通过它们对宇宙膨胀速度——这与物质的总的密度有关——的贡献，给反应的进展以非常间接的影响（10.9 节）。

质子与中子之比决定了现存元素的最后丰富度。在大多数宇宙学模型中，演化过程终止于质量为 7 个原子质量单位的地方，因为质量数为 8 的原子核是不稳定的。这儿，因为密度太低，不可能出现 3α 过程。图 8.13 说明了可能发生的核过程。

图 8.13 演化宇宙早期的各阶段内，核聚变中所发生的重要反应。箭头表示放热的方向，不过反应速率通常在两个方向上都是很高的。括号中表示在反应过程中被吸入和放出的其他一些粒子，它们在方框中没有加以说明。虚箭头表示 β 反应。有时从一类核变为另一类核可以有几种反应，它们处于互相竞争之中（Wa67）

通过改变各种基本粒子的初始密度所作的详细计算，可以预测出 D, He^4 , He^3 以及 Li^7 的不同丰富度，而这些丰富度也许可以在现阶段通过对星系际介质的观测来加以测定。这类观测是十分困难的，直到今天我们还没有证认出任何星系际气体。但是，随着天文观测方法的改进，对于这些气体的证认应该是有可能做到的。

8.17 致密星

迄今为止我们所谈到的恒星的密度大体上都同太阳差不多，例外的情况出现在恒星一生中的晚期，那时它们的中心部分会变得十分致密。

现在，我们来谈谈那些密度高几个数量级的恒星，也就是白矮星和中子星。这里，同样可以用我们理解普通恒星内部过程的一般观点来考虑这些恒星的结构状况。但是，在着手这样做之前，我们应该重温一下专门用来阐明恒星内部核反应重要性的那段论述。在 (8.1) 式中我们说明了单位质量恒星物质的势能是 $\sim 3MG/5R$ ，而可用的核能约为 $10^{-2}c^2$ ；这里不考虑物质？反物质的湮没反应。因此，非常致密的恒星所释出的引

力能也许会超过一般情况下的可用核能。对于一个太阳质量的恒星来说，只要

$$R \lesssim \frac{MG}{10^{-2}c^2} \sim 10^7 \text{ 厘米} \quad (8.110)$$

就会出现这种情况。这个数值仍然比史瓦西半径 R_s 来得大，半径为 R_s 时单位质量势能的通式即等于 c^2 ：

$$R_s = \frac{2MG}{c^2} \quad (8.111)$$

因为典型的白矮星质量约为 10^{33} 克，相应的史瓦西半径为

$$R_s \sim 10^5 \text{ 厘米} = 1 \text{ 公里}$$

这要比下面 8.18 节中所算得的白矮星半径来得小，但是同 8.19 节中所要讨论的中子星半径（ ~ 10 公里）比较接近。

8.18 白矮星

我们认为致密星的密度很高，以至它们内部的物质变成了简并态。白矮星的表面密度是比较低的，这类恒星的外层不会出现任何简并物质，但是，非简并层的实际厚度是很薄的，所以我们可以把这种恒星里里外外都当作简并态来处理。

在进行这类计算的时候，我们首先要记着恒星内部的大部分压力必然由简并电子所提供，核造成的那部分压力是非常小的。这是因为在简并条件下，电子气体的最低动量状态总是填满的。恒星越是致密，电子的费米能越高，电子气体的压力也就越大。因为只有电子是简并的，这一点在 4.15 节中已作了讨论；所以，核子的压力相对说来就比较低。这儿，我们就把这部分压力略去，认为总压力等于电子压力， $P=P_e$ 。

在 8.6 节中我们已给出了非相对论性及完全相对论性电子气体的电子压力，它们分别是：

非相对论性电子气体

$$P = \frac{h^2}{20m_e m_H} \left(\frac{3}{\pi m_H} \right)^{2/3} \left(\frac{1+X}{2} \rho \right)^{5/3} \quad (8.41)$$

及

相对论性电子气体

$$P = \frac{hc}{8m_H} \left(\frac{3}{\pi m_H} \right)^{1/3} \left(\frac{1+X}{2} \rho \right)^{4/3} \quad (8.42)$$

一般说来，还应存在一个重要的过渡区域，那儿的气体既不是高度相对论性、又不是完全非相对论性状态。我们可以证明（问题(8.4)），这部分区域中的压力具有形式

$$P = \frac{8\pi m_e^4 c^5}{3h^3} f(x), \quad \rho = \mu_e \frac{8\pi m_H m_e^3 c^3}{3h^3} x^3 \quad (8.112)$$

其中

$$\mu_e = \frac{2}{1+X} \quad (8.113)$$

函数 $f(x)$ 为

$$f(x) = \frac{1}{8}[x(2x^2 - 3)(x^2 + 1)^{1/2} + 3\sinh^{-1} x] \quad (8.114)$$

这儿

$$x = \frac{p_0}{m_e c} \quad (8.115)$$

问题 8.4 对于某简并相对论性气体,所有的动量状态(4.65)均已填满,且方程(5.30)成立。试以与(4.27)至(4.30)诸式相类似的方程为线索,证明

$$P = \frac{1}{3} \int_0^{p_0} p v(p) n_e(p) dp \quad (8.116)$$

$$= \frac{8\pi}{3m_e h^3} \int_0^{p_0} \frac{p^4 dp}{[1 + (p/m_e c)^2]^{1/2}} \quad (8.117)$$

如设 $\sinh u = p/m_e c$, 证明

$$P = \frac{8\pi m_e^4 c^5}{3h^3} \int_0^u \sinh^4 u du \quad (8.118)$$

我们看到,式(8.118)的系数与式(8.112)相同。同样,我们可以通过积分的办法证明式(8.118)中的积分等于 $f(x)$ 的表达式(8.114)。

小的 x 值($x \ll 1$)相应于密度较低的部分,那儿的气体是非相对论性的;而大的 x 值则对应于总是处于相对论性状态的恒星中心部分。

问题 8.5 就 $x \ll 1$ 和 $x \gg 1$ 两种情况计算 $f(x)$, 并证明由此得到方程(8.41)和(8.43)。

方程(8.112)是以统计力学为基础求得的,并不牵涉到有关恒星的任何假定。它是一个对部分相对论性简并气体普遍适用的物态方程,至于这类气体可能出现在什么地方对方程本身是没有影响的。我们应该注意,在这个方程中压力同温度无关;它仅仅依赖于 x , 而 x 则是对具有费米能电子气体的动量的一种量度;因而压力只同密度有关。所以,计算恒星中心有关条件的数学问题可以分为两个部分,即流体静力学部分和热力学部分。

流体静力学平衡条件同以前所导得的结果是相同的:

$$\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{GM(r)}{r^2}, \quad \frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad (8.7, 8.8)$$

为了对这两个方程进行积分,我们假定白矮星的化学组成为已知,这是因为化学组成决定了方程(8.113)中 μ_e 值的大小。接下来任意选择一个 ρ_c 作为恒星的中心密度,然后对流体静力学方程进行积分,从恒星中心开始直到使压力降低为零的半径 r 处为止。在这个模型计算中,上述半径即代表了恒星的表面。这一径向距离处的 $M(r)$ 值相应于恒星的总质量,而 r 的大小就代表了恒星的实际半径。

显然,这一过程可以在某个范围内对不同的中心密度重复进行,因而我们便可以得到具有不同中心密度的、一套完整的恒星模型。同样,取不同的化学组成可以获得一套新的模型;但是,这时无须重新进行计算,因为化学组成的改变在数学上相当于简单地换一组变量。下面我们来证明这一点:

如果初始计算值以带撇的符号表示,而相应于新化学组成的新变量

以不带撇的符号表示，那么我们发现所需要的关系式是

$$\begin{aligned}
 P &= P' \\
 \rho &= \frac{\mu_e}{\mu'_e} \rho' \\
 M(r) &= \left(\frac{\mu'_e}{\mu_e}\right)^2 M(r') \\
 r &= \left(\frac{\mu'_e}{\mu_e}\right) r'
 \end{aligned}
 \tag{8.119}$$

容易看出，把这些表达式代入方程(8.112)、(8.7)和(8.8)后，原方程的形式保持不变；这说明化学组成的改变相当中心密度的某种改变，于是所涉及的只是单一参数的一套模型，这是因为有关某个给定恒星各种情况完全可以用某个等值中心密度来加以描述。我们以表 8.5 的形式来说明上述计算所得的结果。

表 8.5 不同白矮星模型的中心密度、总质量和半径，
取 $\mu_e=2$ (氢的浓度可以忽略不计) *

$\log \rho_c$	$M/M_\odot$	$\log R/R_\odot$	$\log \rho_c$	$M/M_\odot$	$\log R/R_\odot$
5.39	0.22	-1.70	7.72	1.08	-2.15
6.03	0.40	-1.81	8.21	1.22	-2.26
6.29	0.50	-1.86	8.83	1.33	-2.41
6.56	0.61	-1.91	9.29	1.38	-2.53
6.85	0.74	-1.96	∞	1.44	$-\infty$
7.20	0.88	-2.03			

*参见 (Sc58b)

在迄今所作的推论中略去了若干改正因子，它们会使表中最后几个质量值减少约 20% (Sc58b)。但是，我们在这儿主要关心的不是影响精度的因素，而是这些恒星的总体性质，这些性质是：

- (1) 白矮星的质量越大，它的半径就越小。
- (2) 质量和太阳差不多的白矮星，其半径要比 $R_\odot$ 小 10^2 倍左右。

(3) 存在某个质量上限——钱德拉赛卡极限，超过这一上限的白矮星就不能保持稳定的结构，因为即使中心压力为无穷大也不能阻止恒星作进一步的坍缩。考虑上面所提到的 20% 的改正量后，实际的上限值应该在 $1.2M_\odot$ 左右。

如果我们考虑到相对论性和非相对论性两种情况下中心的压力和密度间所具有的完全不同的关系，那么存在质量上限的原因就很清楚了。从式(8.41)和(8.43)：

非相对论性情况：

$$P \propto \rho^{5/3}, \quad \frac{dP}{dr} \propto \rho^{2/3} \left(\frac{d\rho}{dr} \right) \tag{8.120}$$

相对论性情况：

$$P \propto \rho^{4/3}, \quad \frac{dP}{dr} \propto \rho^{1/3} \left(\frac{d\rho}{dr} \right) \quad (8.121)$$

同时，引力所造成的压力梯度是

$$\frac{dP}{dr} \propto -\frac{\rho(r)}{r^2} \int_0^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr' \quad (8.122)$$

作为最粗略的近似，我们可以认为密度等于恒星的质量除以半径 R 的三次方，所以

$$\begin{aligned} \text{非相对论性情况} \quad \frac{dP}{dr} &\propto \frac{M^{5/3}}{R^6} \\ \text{相对论性情况} \quad \frac{dP}{dr} &\propto \frac{M^{4/3}}{R^5} \\ \text{引力的压力梯度} \quad \frac{dP}{dr} &\propto \frac{M^2}{R^5} \end{aligned} \quad (8.123)$$

我们看到，相对论性压力梯度与半径的关系和引力的压力梯度具有相同的幂次，两者都随着恒星的收缩按 R^{-5} 增加。这意味着一旦相对论性白矮星核在流体静压力作用下受迫收缩，那么因收缩而产生的反力就会增加，其增加的速率同引力的增长率相同，结果恒星就可以继续收缩下去。所以，恒星无论如何也不可能出现平衡状态，另一方面，白矮星中心的非相对论性气体总是可以随着收缩过程的进行而实现自身调节，一直到压缩恒星的引力受到抵销为止。

这样，我们就有下面的情况：质量比较小的恒星可以用非相对论性近似较好地确定它们的中心压力，而恒星总可以到达某种稳定的平衡状态。对于质量比较大的天体来说，它们的中心密度在收缩过程会变得很高，结果就形成相对论性的结构，而进一步的收缩再也不会导致某种平衡状态的出现。因此，钱德拉赛卡极限表征着从主要是非相对论性气体的中心核向主要是相对论性气体的中心核过渡的界限（Ch39）*。

我们还必须考虑一下白矮星在赫罗图上的情况。我们记得，恒星有效温度的定义是

$$L = \sigma T_e^4 (4\pi R^2) \quad (4.76)$$

用太阳的光度和表面温度改写上式就有

$$\log \frac{L}{L_\odot} = 4 \log \frac{T_e}{T_{e\odot}} + 2 \log \frac{R}{R_\odot} \quad (8.124)$$

然后，如果我们应用表 8.5 所列出的白矮星半径和质量，就可以得到作为不同质量的函数的 $L-T_e$ 图。我们选择了大小不同的五个有代表性的质量值，所得的曲线表示于图 8.14。

图 8.14 白矮星的赫罗图。图中所画的是等半径线，并注明了根据完全简并核模型所算得的质量，对核内所含的元素有 $\mu_e=2$ (We68)

这些结果同观测的符合情况是令人满意的，因而我们可以有充分的信心认为这儿所作的讨论至少是大致正确的。这一点至关重要！因为，在银河系内太阳附近的区域，白矮星的局部数密度约为每立方秒差距 2.5×10^{-2} 个——相当于总质量的 10% 到 20% (We68)。如果我们要想知道恒星的归宿何在，那么白矮星正是我们应该加以充分认识的天体！

8.19 中子星和黑洞

有这么一些恒星，它们在演化的最后阶段好象是形成了一个密密麻麻地挤满了中子的核，我们可以按下面的过程来想象它们朝着这一状态的演化情况 (Sa67) *。

凡是涉及致密星的问题都可以应用(8.112)中的两个方程，不过，随着恒星的演化 μ_e 值的大小是在变的。我们知道，氢用完时 μ_e 所取的值为 2；例如，对于主要成份是 C^{12} 的恒星来说情况就是这样。但是，随着化学成份朝着中子较多的那些元素演化的时候，方程式(8.36)便不再成立，因而(8.113)式也不再成立；对一颗富有 Fe^{56} 的恒星来说，我们发现 $\mu_e = 2.15$ 。既然钱德拉赛卡极限质量与 μ_e^{-2} 成正比——这一点可由式(8.119)看出，于是我们就可以作出若干条质量-中心密度曲线，如图 8.15 所示。在这些曲线中我们假定了一个最低可能温度，而不同的曲线表示了不同化学组成恒星的有关情况。与每一种化学组成相应的是恒星中心电子的不同费米能 E_F ，而费米能的不同则是恒星中心密度改变后的直接结果。

就某种给定的化学组成而言，随着中心密度的增高，电子的费米能始终是增高的，一直到逆 β 衰变出现，而同时电子则被驱入原子核内。其结果是产生含中子越来越多的一些元素，表 8.6 中所列出的是其中的一部分。用符号表示的反应

图 8.15 冷星的质量作为中心密度的函数。图中的完整曲线对应于某种有代表性的初始化学组成，同时假定恒星处于相对论性流体静力平衡。注有 C 和 Fe 的两条曲线是假定恒星的组成为纯碳和纯铁 (Ru71a, Sa67)。曲线中斜率为负的部分表示不存在流体静力稳定结构的范围。密度单位是克·厘米⁻³。曲线在中心密度约为 10^{18} 克·厘米⁻³ 处的虚线部分是很不确定的，因为物质在这种密度时的物理状态是不确定的（取自 Lecturas in Applied Mathematics 第 10 卷第 3 部分，“Stellar Structure”。）式是



如果费米能足够高，逆反应便不可能发生，因为使放射性核可以实现衰变的全部电子状态都已占满了；这就使本来不稳定的核处于一种由周围环境所造成的稳定状态。

表 8.6 不同化学组成致密星的极大中心
密度和电子费米能 (Sa67)

	C^{12}	S^{32}	Fe^{56}	Sn^{120}
$\log \rho$ (克·厘米 ⁻³)	10.6	8.2	9.1	11.5
E_F (百万电子伏特)	13	1.7	3.7	24

作为每个自由电子有效核质量的 μ_e 值，在收缩过程中也是增加的。当费米能达到 24 百万电子伏特时，密度为 $\rho \sim 10^{11.5}$ 克·厘米⁻³，而 $\mu_e \sim 3.1$ 。在这一阶段自由中子的能量变得很高，以至密度的进一步增大会导致中子部分的密度增高，而离子的密度实际上保持不变，电子费米能也

就维持在 24 百万电子伏特。

随着密度的增高， E_F 增大到使反应(8.125)迅速地进行，电子被驱入核内，结果造成中央核的坍缩，这是因为在收缩过程中电子的压力不会再以足够高的速率增大了。

在图 8.15 中，含有 C^{12} 和 F^{56} 的恒星的那两条曲线呈现有某个极大质量，此时的中心密度为 ρ_c ，逆 β 衰变在这个地方首次出现，而 μ_e 是在增大的。图中右下方所表示的自由中子的曲线，它在略大于 $\rho_c \sim 10^{15}$ 克·厘米⁻³ 的地方有一个极大值。

如果我们就非相对论性中子气体及极端相对论性气体分别计算预期的质量，那么出现这一极大值的原因是比较容易理解的 (Sa67) *。

维里定理给出以恒星质量表示的压力 P 对密度 ρ 之比为

$$3 < \frac{P}{\rho} > \sim \frac{M}{R} \propto M^{2/3} < n^{1/3} > \quad (8.126)$$

式中尖括号表示平均值，而 n 是中子的数密度。正如我们可以从(8.35)、(8.40)及(8.42)三式所看出的那样

$$\text{对非相对论性气体} \quad P \propto n^{5/3} \quad (8.40a)$$

$$\text{极端相对论性气体} \quad P \propto n^{4/3} \quad (8.42a)$$

同样，质量密度对数密度之比为

$$\text{非相对论性气体} \quad < \rho > / < n > \sim m_N \quad (8.127)$$

$$\text{极端相对论性气体} \quad < \rho > / < n > \sim \frac{E_F}{c^2} \quad (8.128)$$

这是因为在极端情况下，静质量能是可以忽略的。但是由于 $E_F \propto n^{1/3}$ ，于是就有

$$\text{极端相对论性气体} \quad < \rho > \propto < n >^{4/3} \quad (8.129)$$

然后从方程(8.126)我们有

$$M^{2/3} \propto 3 < \frac{P}{\rho} > < n^{1/3} >^{-1} \propto \begin{cases} < n^{1/3} > \text{非相对论性气体} \\ < n^{1/3} >^{-1} \text{极端相对论性气体} \end{cases} \quad (8.130)$$

因而这意味着随着密度的不断增加，质量先是按 $< n >^{1/3}$ 增大，然后按 $< n >^{-1/3}$ 减小。

在大质量中子星的核内，除了中子外可能还有各种各样的介子、重子和超子。在这种极高的密度条件下还必须考虑广义相对论效应，因为，举个例子来说，势能的牛顿表达式在这时已经没有意义了。这个领域最引人注意，因为恒星可能就是在这些最后演化阶段中把它的绝大部分能量充分地释放出来，释放的途径是把很大一部分质量转变为某种形式的辐射，也许是转化为引力辐射。然后，恒星就转变为黑洞。不过，在着手讨论恒星死亡的这一最终形式之前，应该对我们所忽略掉的若干重要因素作一些说明。

在中子星内所具有的这种甚高密度条件下，核本身便排列成一种晶格，因而我们所假定的物态方程和结构特性就不是严格正确的了。在中子星的某些区域内还可以出现超流体状态。图 8.16 是一个模型星，它表示在一个超流体层上浮着一圈固态的核壳。总而言之，在恒星内不同深度的地方可能存在各种各样不同的晶相或液相。只有在对这些细节情况

作比较彻底的了解之后，我们才能进一步认识中子星的结构（Sa70a 和 Ru71b）。

另外一个重要问题就是磁场。要是象太阳那样的一颗恒星会坍缩到半径几公里那么大，那么它的磁场就大约是 10^{12} 高斯。中子星内的磁场真有这么强吗？而如果是的话，那么这个强磁场是否贯穿于整个星体内部，或者只是存在于恒星的表面呢？如果在中子星的核内出现了超导效应，那么磁场

图 8.16 白矮星和中子星的密度与结构。左图是白矮星模型，右边的壳层结构代表中子星。注意，白矮星半径是 6400 公里，而中子星半径仅为 15 公里（Ru72b）。在中子星的中心部分我们预期会找到介子和超子就有可能受到排斥，实验室超导体内的情况正是如此。但是，在一个迅速坍缩中的恒星内部怎样才能发生这种排斥作用呢？

我们也知道，一颗普通的恒星要是突然发生坍缩，那么如果保持角动量守恒的话它就必然要作快速自转。我们认为，在中子星外围区域内，这种快速自转着的磁场便是使带电粒子加速到具有宇宙线能量的原因，它也许还会把一部分恒星自转能辐射出去。自转可能也会影响恒星的结构，因为这时不会再保持完整的球对称性。

如果蟹状星云确实有代表性的话，那么中子星、脉冲星和超新星这三种现象看来就有着一个共同的起源。当然，可能存在着若干种导致超新星爆发的不同过程，因为我们已经观测到几种不同类型的超新星。也许只有其中的某几种会继而形成中子星和脉冲星；另一些则可能是形成重元素并使其回复到星际介质中去的原因（Ar70），但它们并不一定也产生某种致密态的遗迹。事实上，在这些内容中提出了超新星和下面一系列天体间相互关系的全部问题：这里有普通新星或者还有再发新星；有行星状星云恒星，它们抛出了大量物质并在中心留下一颗炽热的中央星；以及最后还有白矮星，它们也许是行星状星云的遗迹。所有这些天体是怎样联系起来的呢？在白矮星和中子星这两种归宿形式之间，起决定因素是否仅仅在于恒星的最终质量是小于还是大于钱德拉赛卡极限质量呢？对这些问题我们至今还无可奉告！

同样，我们对黑洞知道得也不多。要是一颗中子星的质量足够大，它是否会进而坍缩到某种最后状态，同时（正如第五章中所讨论过的那样）就不再可能发出任何形式的辐射，因而在这颗恒星之外也就接收不到任何辐射了呢？黑洞形成之时磁场的情况怎么样？电荷的情况又怎么样？一旦发生这种形式的坍缩，全部重子都消失得无影无踪；留下的只有光子或引力辐射和中微子；这时，关于宇宙中重子的守恒我们还能谈些什么呢？这类坍缩中正确的动力学方程是什么？它们是否就是广义相对论中的方程呢？对此还需要不断地进行详细的讨论；我们只不过是刚刚在开始摸索我们解决问题的路子（Op39a, Op39b, Ru71a, Pe71, Ke 63）！

8.20 恒星的脉动和自转

我们从维里定理知道，势能的绝对值等于每单位质量动能的两倍。在恒星中这一动能以原子粒子的热运动来表示，它们的运动速度大致等

于声速 u_s 。因此，我们可以写出

$$\frac{GM}{R} \sim v_s^2 \quad (8.131)$$

式中 G 是引力常数， M 是质量，而 R 是恒星的半径。现在我们可以对恒星脉动频率作非常粗略的数量级的估计；这儿要记着，周期 P_{vib} 应该同有关压力变化的信息传过整个恒星那么一段距离所需要的时间相当。这段时间等于 $2R/v_s$ ，于是我们可以写出 (Sa69)

$$P_{\text{vib}}^{-1} = v_{\text{vib}} \sim \frac{v_s}{2R} \sim \sqrt{\frac{GM}{4R^3}} \sim \sqrt{G\rho} \quad (8.132)$$

式中 ρ 是恒星物质的密度。

我们还要记着，极大自转频率由离心力与引力间的平衡所决定，因为频率过高恒星就会土崩瓦解。在非相对论情况下

$$Rv_{\text{rot, max}}^2 = \frac{GM}{(2\pi R)^2}$$

及

$$(8.133)$$

$$\therefore P_{\text{rot, min}}^{-1} \sim \frac{1}{\pi} \sqrt{G\rho}$$

我们发现中子星的脉动周期应该在十分之一毫秒左右，而白矮星的脉动周期应该为秒级。当然，这些恒星的密度范围变化很大，表 8.7 中所给出的只是有代表性的周期值，它们可以变化一个量级以上。蟹状星云脉冲星被发现时，它的周期仅为 33 毫秒，这就很清楚地说明了它的脉冲星现象不可能是白矮星在起作用，因为白矮星的脉动频率要比这低得多。另一方面，中子星的自转周期也可能为几个毫秒。蟹状星云脉冲星的周期一直在增加，因此在公元 1054 年的超新星爆发后不久，它的周期可能接近中子星自转周期的预期极小值；这一发现进一步证实了关于脉冲星是高速自转着的中子星的理论，这样的中子星正在不断失去自己的角动量，并随着岁月的推移而越转越慢。由于磁压有使快速自转着的中子星发生分裂的趋向，所以实际极小自转周期要比表 8.7 所列的值略为大一些。

表 8.7 也说明了天琴 RR 型变星及造父变星的周期与本节所讨论的、十分简单的脉动图象相一致。这些恒星确实是在不断脉动，这一点可以由周期性的多普勒谱线位移和色温度的变化来加以证明。我们所观测到的周期性就是这种脉动周期。新星遗迹 DQ Her (武仙座新星, 1934) 的周期是 71 天；在某些白矮星内已观测到具有周期性的特点，不过这些周期太长，所以不能作为基本脉动现象的代表。

表 8.7 恒星密度、脉动周期和极小自转周期三者之间的近似关系

	密度 ρ	P_{vib}	$P_{\text{rot}}, \text{ min}$
中子星	$10^{15} \text{ 克} \cdot \text{厘米}^{-3}$	10^{-4} 秒	$3 \times 10^{-4} \text{ 秒}$
白矮星	10^7	1	3
天琴 RR 型星	10^{-2}	$10^{4.5}$	10^5
造父变星	10^{-6}	$10^{6.5}$	10^7

补充问题

在下面的一组问题中我们使用了一些大大简化了的恒星模型，主要想说明即使不作复杂的计算，我们也能对恒星的光度和寿命的数量级大小作出合理的估计。

质子？质子反应和碳循环的反应速度具有方程(8.90)所给出的形式。史瓦西给出了质子？质子反应中单位时间、单位质量物质的产能是(Sc58b)

$$E_{\text{pp}} = 2.5 \times 10^6 \rho X^2 \left(\frac{10^6}{T}\right)^{2/3} \exp[-33.8 \left(\frac{10^6}{T}\right)^{1/3}] \quad (8.134)$$

克莱顿就 CN 循环给出了一个类似的表达式 (Cl68)

$$E_{\text{CN}} = 8 \times 10^{27} \rho X X_{\text{CN}} \left(\frac{10^6}{T}\right)^{2/3} \exp[-152.3 \left(\frac{10^6}{T}\right)^{1/3}] \quad (8.135)$$

式中 f 是电子屏蔽因子，有 $f \sim 1$ 。

对问题(8.6)到(8.8)，假定初始浓度 $X_{\text{CN}}=0.005X$ 及 $Y=0.12$ 。

8.6 设有如下 B1 型模型星，这是一个大质量年轻恒星：质量 $M=10M_{\odot}$ ，半径 $R=3.6R_{\odot}$ ，中心密度为 $10 \text{ 克} \cdot \text{厘米}^{-3}$ ，且主要产能区的径向距离为 $0.1R$ 。假定在这一区域内的密度为常数，温度是 $2.7 \times 10^7 \text{ K}$ 。试确定这颗恒星的产能率及其表面温度；计算中可以认为恒星的辐射是同样半径的黑体辐射。在核燃烧不使其发生显著变化的前提下，恒星以目前的状态可以存在多久？也就是说，恒星中央核内的氢按现有的燃烧率燃烧可以维持多长时间？

8.7 对于处在主星序早期阶段中象太阳样的一颗恒星重复上述计算，这儿假定中央燃烧区域外伸到 $0.2R$ 。中心密度大致取 $55 \text{ 克} \cdot \text{厘米}^{-3}$ ，中心温度 10^7 K ；假定进行的是氢燃烧。

8.8 目前，太阳中心以质量计的氢浓度约为 70%，整个中央区域范围大致为 $0.11R$ ，中心密度约为 $10^2 \text{ 克} \cdot \text{厘米}^{-3}$ ，整个这一区域的平均温度取 $1.5 \times 10^7 \text{ K}$ 。对于这么一颗恒星重新计算上列参数。

8.9 有一颗红巨星，半径是太阳的一百倍，它处于核内的氢已全部用完而氦燃烧尚未建立这么一个演化阶段，主要能源是发生在惰性氦核周围一个薄的壳层中的氢燃烧(图 8.8)。设氢燃烧发生区域的径向距离范围为 $1.8 \sim 2 \times 10^9 \text{ 厘米}$ ，该层中的平均密度约为 $50 \text{ 克} \cdot \text{厘米}^{-3}$ ，温度是 $5 \times 10^7 \text{ K}$ 。试计算上述参数，取 $X_{\text{CN}}=10^{-3}X$ ， $X \sim 0.5$ 。

8.10 设想有一颗白矮星靠它所贮备的热能在发光。假定它的质量是 $0.45M_{\odot}$ ，半径为 $0.016R_{\odot}$ ，而整颗星的密度大致均匀(但是，要参见图 8.16)。试计算这颗星以它现有的发光本领可以辐射多久。它的光度

是 $10^{-3}L_{\odot}$ 。

8.11 有一颗恒星，它的内部以辐射转移为主；即使辐射流 $L(r)$ 主要方向是从恒星中心朝外进行，它在每一点上（所有频率 ν 处的）能密度仍十分接近黑体辐射密度。试说明就某一给定的不透明度值 $\kappa(\nu)$ 而言，辐射密度 ρ 与黑体辐射的实际差异有多大？这儿在方程(8.50)中要考虑到高阶项。

8.12 在 8.2 节中我们论证了太阳的能量一定是核能，因为按方程(8.1)所得的势能不足以提供过去几十亿年内的总太阳光度。试证明这一推论实际上是不正确的，因为如果有大约一半的太阳质量均匀分布在半径为 $R_{\odot}$ 的整个球内，而另一半质量是集中在半径为 10 公里的一个核内，这样一种结构就可以满足所需要的势能值。有趣的是，在几年前天体物理学家们深信宇宙中的大部分辐射能直接与热核反应有关；随着脉冲星的发现，这种想法有了改变，至少说引力坍缩有可能贡献出核反应所能提供的那么多能量。

问题解答

8.1 (a) $P=nkT$

$$P\left(\frac{R}{2}\right) \sim 10^{15} \text{ 达因} \cdot \text{厘米}^{-2}, \quad n = \frac{\rho}{m_H} = \frac{1}{1.67 \times 10^{-24}} \text{ 厘米}^{-3}$$

$$T\left(\frac{R}{2}\right) = \frac{10^{15} \cdot 1.67 \times 10^{-24}}{1.38 \times 10^{-16}} \sim 10^7 \text{ K}$$

$$(b) \text{ 引力势能是 } \frac{GM_p m}{R} \leq \varepsilon_c$$

这儿 m 是原子质量, $m = Am_H$

$$\text{有} \quad M_p \lesssim \frac{\varepsilon_c R}{GA m_H}$$

$$\text{但是 } M_p \sim \rho R^3, \text{ 即 } R \sim \left(\frac{M_p}{\rho}\right)^{1/3}$$

$$\therefore M_p \lesssim \frac{\varepsilon_c M_p^{1/3}}{GA m_H \rho^{1/3}}$$

$$\text{即} \quad M_p^{2/3} \lesssim \frac{\varepsilon_c}{GA m_H \rho^{1/3}}$$

$$\therefore M_p \leq \left(\frac{\varepsilon}{GA m_H}\right)^{3/2} \cdot \frac{1}{\rho^{1/2}}$$

$$(c) \quad \left. \begin{array}{l} \varepsilon_c \sim 10^{-11} \text{ 尔格} \\ R_J = 7.1 \times 10^9 \text{ 厘米} \\ M_J = 2 \times 10^{30} \text{ 克} \end{array} \right\} \text{见表 1.3}$$

$$\text{而} \quad M_p \lesssim \frac{\varepsilon_c R}{G m_H} = 10^{30} \text{ 克}$$

$$8.2 \quad F(r) = - \int_0^\infty n_\rho e^{-n_\rho l} dl \int_0^\pi a(T - \frac{dT}{dr} l \cos \theta)^4 \frac{c}{2} \cos \theta d(\cos \theta) \text{ 展开,}$$

只取到 dT/dr 的一次项, 有

$$F(r) \simeq \frac{4acn_\rho}{3} \frac{dT}{dr} T^3 \int_0^\infty e^{-n_\rho l} dl$$

再利用(8.26)和(8.51)两式, 我们有

$$L(r) = - \frac{16\pi a c r^2}{3n_\rho} T^3 \frac{dT}{dr}$$

$$8.3 \quad dP \propto \rho \frac{M(r)dr}{r^2} \quad (8.7)$$

$$P = nkT \text{ 所以有 } dP \propto \rho dT$$

$$\therefore \frac{dT}{dr} \propto \frac{M(r)}{r^2} \text{ 及 } T(r) \propto \frac{M(r)}{r}$$

$$L(R) \propto \frac{R^2 T^3}{\rho} \frac{dT}{dr} \bigg|_{r=R} \propto \frac{M^4}{\rho R^3} \propto M^3$$

8.4 单位时间、单位立体角内落入一个假想表面上的粒子数为
 $n(\theta, \phi, p) v \cos \theta d\Omega$

这时压力为

$$P = \int_0^{p_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} 2p \cos \theta \cdot v \cos \theta n(\theta, \phi, p) d\Omega dp$$

如果气体是各向同性的, 就有

$$n(\theta, \phi, p) = \frac{n(p)}{4\pi}, \quad P = \frac{1}{3} \int_0^{p_0} p v n(p) dp$$

这儿 $n(p)$ 由式(4.65)给出, 因为所有的状态均已填满。既然 $P = m u_y(u)$, 我们可以由此解得 v 为

$$v = \frac{p}{m \sqrt{1 + p^2 / m^2 c^2}}$$

$$\therefore P = \frac{8\pi}{3mh^2} \int_0^{p_0} \frac{p^4}{\sqrt{1 + p^2 / m^2 c^2}} dp$$

如果 $p/mc = \sinh u$, $dp/d\theta = m c \cosh u$, 于是

$$P = \frac{8\pi m^4 c^5}{3h^3} \int_0^u \sinh^4 u du$$

$$8.5 \quad f(x) = \frac{1}{8} [x(2x^2 - 3)(x^2 + 1)^{1/2} + 3 \sinh^{-1} x], \quad x = \frac{p_0}{m_e c} \text{ 如果 } x \ll 1,$$

$$\sinh^{-1} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40} x^5 - \dots$$

把上式展开有

$$8f(x) \approx x(2x^2 - 3)(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8}) + 3x - \frac{x^3}{2} + \frac{9}{40} x^5 - \dots$$

$$\approx \frac{8}{5} x^5 \quad (x \ll 1)$$

把 $f(x)$ 和式(8.113)代入(8.112)后则给出(8.41)。

如果 $x \gg 1$, $\sinh x \sim \frac{e^x}{2}$, 而 $\sinh^{-1} x = \ln(2x)$

$$\therefore f(x) = \frac{x^4}{4} \quad (x \gg 1)$$

代入式(8.112)得出(8.43)。

8.6 在方程(8.134)和(8.135)中, 温度取 $2.7 \times 10^7 K$, 密度 $\rho = 10$ 克·厘米⁻³, 于是给出

$$E_{pp} = 27 \text{ 尔格} \cdot \text{克}^{-1} \cdot \text{秒}^{-1}$$

$$E_{CN} \sim 3 \times 10^3 \text{ 尔格} \cdot \text{克}^{-1} \cdot \text{秒}^{-1}$$

所以总的产能为 $(4\pi/3) \rho E_{CN} (0.54R_{\odot})^3 \sim 7 \times 10^{36}$ 尔格·秒⁻¹。恒星的总表面积为 $4\pi (0.36R_{\odot})^2 \sim 8 \times 10^{23}$ 厘米², 因此单位截面积的流量为 0.9×10^{13} 尔格·厘米⁻²·秒⁻¹; 再利用黑体定律 $T^4 \sigma =$ 单位截面积流量, 就有

$$T \sim 20000K$$

每个氢原子的总可用能量约为 10^{-5} 尔格, 而 $n \sim 6 \times 10^{24}$ 厘米⁻³; 由此得出每立方厘米的总可用能量约为 6×10^{19} 尔格, 因而星核能够维持能量供应的总的时间约为 7×10^7 年。

8.7 由温度为 $10^7 K$, 密度 55 克·厘米⁻³ 以及氢燃烧的范围为 $0.2R_{\odot}$, 我们看出质子-质子反应起主要作用, 其产能率为 190 尔格·厘米⁻³·秒⁻¹。由此求得表面温度约为 $5000K$ 。

8.8 利用 $X=0.7$ 和 $\rho=10^2$ 克·厘米⁻³, 以及 $T=15 \times 10^7 K$, 我们再一次发现 pp 反应居支配地位, 得产能率约为 2300 尔格·厘米⁻³·秒⁻¹。总的产能为 $\sim 4 \times 10^{33}$ 尔格·秒⁻¹, 这一数字给出表面温度为 $5900K$ 。

8.9 在 $5 \times 10^7 K$ 时碳循环起主要作用。如果我们假定发生燃烧的薄壳层范围为 $1.8 \times 10^9 \sim 2 \times 10^9$ 厘米, 则可求得在 10^{28} 厘米³ 体积内碳循环产能率为 4×10^8 尔格·厘米⁻³·秒⁻¹。因此光度为 4×10^{36} 尔格 $\sim 10^3 L_{\odot}$, 而在 $R=7 \times 10^{12}$ 厘米处的表面温度是

$$T = (L/4\pi R^2 \sigma)^{1/4} = 3300K$$

8.10 白矮星所能辐射的仅是其内部离子的动能, 因为电子是简并性的, 所以不可能释出能量, 它们是支持流体静压力的主要因素。在电子简并压力开始起主要作用之前不久, 离子的动能约为白矮星势能的十分之一。由维里定理可以推知应该有一半的能量是动能, 但是每个离子可以分配到两个以上电子, 而因为部分简并性的出现电子会具有较高的能量。所以, 总的可用离子能量约为 $0.1M^2 G/R$, 而寿命约为 $0.1M^2 G/RL$ 。也许我们还应该对光度的推算方法作一番说明。白矮星的非简并外层可以进行辐射转移, 利用方程(8.52), 并顾及

$$T \sim 0.1 M g_m / kR \text{ 及 } dT/dr \sim T/R,$$

如果不透明度已知的话我们就可以求得光度。尽管图 8.4 好象说明了在密度条件下不透明度几乎与密度无关, 在我们所关心的温度范围内其值很接近于 $\sim 10^8/T$, 但是不透明度应该用克雷默表达式计算。因此, 冷却时间可以唯一地表达为恒星质量、半径及化学组成(离子质量)的函

数。如果一颗质量为 $0.45M_{\odot}$ 的恒星，其光度约为 $10^{-3}L_{\odot}$ ，半径是 1.1×10^9 厘米，则 $\tau \sim 0.1M^2G/RL \sim 1.2 \times 10^{18}$ 秒，因而冷却时间约为 400 亿年。文献 (Sc 58b) 中对这一问题有比较严格的讨论。

8.11 在问题(8.2)中，因为 $\frac{dT}{dr} \ll 1$ ，略主高阶项后可以导得

$$F(r) = \frac{4ac}{3\kappa\rho} T^3 \frac{dT}{dr}$$

下面一项是

$$\begin{aligned} & \frac{4ac\kappa\rho}{5} \int_0^{\infty} e^{-\kappa\rho l} T \left(\frac{dT}{dr}\right)^3 l^3 dl \\ &= \frac{4ac}{(\kappa\rho)^3} \frac{T}{5} \left(\frac{dT}{dr}\right)^3 \int_0^{\infty} e^{-y} y^3 dy = \frac{24acT}{5(\kappa\rho)^3} \left(\frac{dT}{dr}\right)^3 \\ \rho^*(\nu) &= \int_0^r 4aT \left(\frac{dT}{dr}\right)^3 \frac{18}{5(\kappa\rho)^2} dr \end{aligned}$$

这就是恒星内部实际状态对于黑体能量密度的偏差。

$$\begin{aligned} \text{由此} \quad \frac{d\rho}{dr} &= 4a \left[T^3 \frac{dT}{dr} + T \left(\frac{dT}{dr}\right)^3 \frac{18}{5} \frac{1}{(\kappa\rho)^2} \right] \\ &= \frac{d\rho(\nu)}{dr} + \frac{d\rho^*(\nu)}{dr} \end{aligned}$$

8.12 对于一个致密球体，若 $R=10^6$ 厘米， $M=10^{33}$ 克，则

$$\nu = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \sim 4 \times 10^{52} \text{ 尔格}$$

第九章 宇宙气体和尘埃

9.1 观测

在这一章中我们要尝试确立某种带有普遍意义的框架，以便能在这—框架中正确理解有关宇宙气体和尘埃云的大多数物理过程。不过，在可以这样做之前，我们应该对这类云的温度、密度、电离状态以及线度大小有一定的了解，并且应该对有关尘埃微粒的观测资料作一番概略的介绍。

表 9.1 所列出的是一些大致的数值，在确定这些数值时我们所用的方法对于不同类型的介质是很不一样的。因此，对如何取得这些资料的方法作一些定性的说明也许是有用的。

(a) 河外介质

有关河外介质的内容我们知道得很少。关于粒子密度或场密度的全部数据都是一些上限；也许星系际的空间完全是空无一物。

由于在类星体所发出的连续光谱中观测不到赖曼 α 吸收谱线，我们就可以由此确定星系际空间内中性氢密度的某个上限。在这个推论中我们假定类星体是一些河外天体，它们的距离由红移所标志，可以按哈勃的红移—距离关系加以计算。然而，哈勃关系式也许只适用于普通星系。还有，在我们和类星体之间也许处处都有中性氢存在，它们会吸收红移量不同的辐射，而这种形式的吸收可能就不会形成一条清晰的谱线。这种情况下，在类星体的赖曼 α 线和我们这儿的赖曼 α 线（波长 1216 埃）间的整个波长范围内，吸收的程度必然是大致均匀的。

如果假定电子处于高温状态之下，那我们就可以从 X 射线背景观测推算星系际空间内电子数的某个上限，因为高温状态下在电子的自由—自由发射中会有相当数量的 X 射线成分。但是，如果电子的温度不高，则自由—自由发射所造成的 X 射线背景就比较低，因而也就观测不到任何的 X 射线流。这儿所得到的上限的正确数值取决于对膨胀宇宙所用的模型（见第十章）。我们可以为河外气体中电离成分的密度确定又一个上限，其前提是认为实际电离强度可以由那些我们所知道的紫外辐射源求得，后者主要是类星体。由此求得的上限又同我们选用的宇宙学模型有关；但是一般说来数密度值的范围为 $\lesssim 10^{-27}$ 厘米⁻³。

关于河外磁场的上限同样取决于我们所作的假设。这些场不可能强到会使它们的压力超过我们银河系内的气体压力，否则的话星际氢必然会实际上受到压缩。这种压力也不可能大到使得从某些星系伸展出去的延伸射电源受到压缩。不过这些射电源的特性是很不确定的，因此，相对说来它们所提供的资料就显得很少。一个粗略的上限是 $B \lesssim 10^{-5}$ 高斯，这个数字可能会偏高好几个量级。

(b) 类星体

为了阐明各种类星体所表现出来的观测特征，已经提出了许多不同的模型。我们必须说明它们的射电、红外和 X 射线光度，还应该对它们的可见光发射线作出解释。而且，所有类星体的性质是否基本相同也还不清楚。

有一个模型 (Ca70b, Cr64) 假定类星体具有宇宙学距离, 它指出类星体可能是一个电子密度约为 $3 \times 10^6 \text{ 厘米}^{-3}$ 、半径

表 9.1 气体和尘埃集团的大致特征

	代表性天体	中性气体密度 n_H (厘米 ⁻³)	电子密度 n_e (厘米 ⁻³)	半径 (厘米)	磁场 (高斯)	湍流或整体速度 (厘米·秒 ⁻¹)	温度 (K)	微粒 n_g (厘米 ⁻³)
河外介质		$< 3 \times 10^{-11}$	$\lesssim 10^{-4}$	$\sim 10^{28}$ 厘米到宇宙范围	$<< 10^{-6}$?		如果介质产生弥漫 X 射线背景, 则 $> 2 \times 10^4 \text{ K}$	$\blacksquare 10$
类星射电源	SC273		3×10^6	3×10^{18}	中心部分 $\sim 10^5$?	$10^8 \sim 10^9$	17000	
旋涡星系臂	银河系	$0.1 \sim 0.7$	0.03	厚 3×10^{20} ; 盘直径 10^{23}		10^6		10^{-}
臂间介质		≤ 0.05						
HII 区	猎户星云		10^4	5×10^{18}		4×10^6	10^4	10^{-}
行星状星云	NGC6543		6×10^3	10^{17}			8400	$\sim 3 \times 10^{-}$
超新星遗迹	蟹状星云		40	5×10^{18}	3×10^{-4}	10^8	< 17000	
HI 云	海勒斯 (Heiles)	$40 \sim 125$	~ 0.3	10^{19}	$\lesssim 10^{-5}$	$10^4 \sim 10^6$	$4.5 \sim 100$	10^{-}

(续表)

	代表性 天体	中性气体 密度 n_H (厘米 ⁻³)	电子密 度 n_e (厘米 ⁻³)	半径 (厘米)	磁场 (高斯)	湍流或 整体速度 (厘米· 秒 ⁻¹)	温度 (K)
恒星风	O 型星 猎户 δ	0.14	10^8	离恒星 达 1 天文单位		1.4×10^8	10^4
太阳风			2	离太阳 达 1 天文单位	3×10^{-5}	4×10^7	$10^4 \sim$
彗头	阿伦—罗兰 彗星 (Arend-Roland) 1957III	$n_{\text{分子}} \sim 10^4$		10^{10}		2×10^5	
尘埃彗尾	阿伦—罗兰 彗星 1957III			长 10^{10}		10^6	
电离彗尾	阿伦—罗兰 彗星 1957III		$n_{\text{离子}} \sim 2(10^{11} \text{ 厘米}^{-3})$	长 5×10^{12}	$\sim 3 \times 10^{-5}$	10^7	

在 1 秒差距左右的气体云，云内离子高度激发，从而造成了可见光发射线。至于其余的辐射，有相当大一部分是由云核心部分内的相对论性粒子的发射所造成的，核内磁场强度高达 10^5 高斯左右。在这类计算中所取的实际磁场强度总是有误差的。首先，在所观测到的辐射中有一些可能由逆康普顿散射产生，这时就不需要有任何的磁场。至于剩下的部分我们常常认为主要来自同步加速辐射；但是，观测到的波谱通常并没有包括全部有关的波长，因而要准确地确定磁场用迄今所得到的部分性资料是不够的。基本上来说，就象式(6.159)中所表明的那样，这儿的问题有两个独立参数：相对论性粒子的能量指数 γ 和磁场强度。如果 γ 不知道，磁场强度同样还是确定不了。

类星体内部的法拉第旋转是确定磁场强度的一种可行的方法。但是，如果对场的不规则性没有掌握，那我们所得到的也不过只是一个上限（6.12 节）。要用法拉第旋转来确定磁场强度还必须知道电子密度的大小，而如果有了复合线的观测资料，或者观测到了自由？自由发射，我们才能求得电子的密度（见 6.16, 6.17, 7.12 三节）。

(c) 银河系

我们可以通过 21 厘米波长原子氢吸收线或发射线，来观测银河系及某些河外天体内的中性氢。在银河系内我们还观测到了由 O 型星和 B 型星所发出的赖曼 α 吸收线。这两类观测资料有时并不一致，但是它们说

明太阳附近的中性氢数密度大约是每立方厘米 0.1 到 0.7 个氢原子。旋臂之间的密度要比过低一些 (Je70) (Ke65)。

用脉冲星作为射电发射源，从它们的色散资料可以确定电子的数密度 (6.11 节)；不同频率的射电波在通过脉冲星和地球之间这段距离的过程中所产生的时间延迟 (6.58) 是不同的。

除了蟹状星云脉冲星外，其他源的距离都是很不准确的。但是，从统计学的角度来看，要是假定脉冲星都聚集在旋臂附近，那么就可以得到一个自洽的模型 (Da69)。由此求得的电子密度为 0.03 厘米⁻³，这是对太阳所处的那部分银盘中、旋臂和旋臂间区域所求得平均数。

尘埃微粒的数密度和半径是用下面的方法进行计算的。由不同波长光线的较差消光来估计微粒的大小，如果对红光的消光作用没有蓝光那么厉害，我们就认为微粒的大小至少应该小于红光的波长。这个道理同样可以推广到紫外波长，由此求得微粒的半径 $\approx 10^{-7}$ 厘米；从反射星云内的微染色效应和极化效应也得到了同样的结果。就任意给定大小的微粒来说，我们可以计算它们的有效消光截面，然后再利用距太阳几千秒差距内恒星的消光资料就可以大致确定太阳附近尘埃微粒的数密度。

(d) H II 区和行星状星云

从射电区域所观测到的自由-自由发射很容易确定电子的温度和密度 (6.17 节)，目视和射电复合谱线的观测资料可以互相进行比较。这种复合强度可以按以下的方法从式 (7.75) 算得。设温度为 T 的气体中电子的复合截面为 $Q_n(T)$ ，这儿 n 是类氢离子中终态的主量子数。考虑某种理想化的热平衡状态，内中同一能级的电离数和复合数相等。速度范围 dv 内每个电子的复合强度正比于电子的速度 $v \sim (3kT/m)^{1/2}$ ，截面 $Q_n(v)$ 以及电子的数密度 $n_e(v)$ 和电离原子的数密度 n_{r+1} 。电离强度则正比于 c ， α_{bf} (7.75)、处于低一级电离态的原子数密度 n_r ，以及光子的数密度；其中光子的频率 ν 应足够高，以既能使电离发生又可使电子具有速度 v 。如果 X_r 是致电离能，

$$v = \frac{1}{h} \left(\frac{m}{2} v^2 + X_r \right) \quad (9.1)$$

那么我们就可以把电离和复合间的平衡条件大致地写为

$$n_e(v) n_{r+1} v Q_n(v) dv = c \cdot n_r \cdot \frac{8\pi \nu^2 \alpha_{bf}(\nu)}{c^3 (e^{h\nu/kT} - 1)} dv \quad (9.2)$$

式中对光子的数密度 $\rho(\nu)/h\nu$ 已经用了黑体谱 (4.71)。然后，应用萨哈方程 (4.105) 和表达式 (7.75) 所给出的吸收系数，即得到关系式

$$\begin{aligned} & \frac{g_{r+1} g_e (2\pi m k T)^{3/2}}{g_r h^3} e^{-X_r/kT} Q_n(v) v dv \\ &= \frac{8\pi}{c^3} \frac{64\pi^4 m e^{10} Z^4}{3\sqrt{3} h^6 n^5} g_{bf} \frac{dv}{v (e^{h\nu/kT} - 1)} \quad (9.3) \end{aligned}$$

利用 v 和 ν 两个变量之间的关系式 (9.1)，我们又知道 $g_r \propto n^2$ (见问题 (7.1))，于是就得到关于单位电子和离子密度的复合强度 a_n 的一个关系

$$a_n = \int_0^\infty v Q_n(v) dv$$

$$= \frac{g_r}{g_e g_{r+1}} \int_0^\infty \frac{2^9 e^{10} \pi^5 Z^4 m e^{x_r/kT}}{h^3 n^5 (6\pi m k T)^{3/2} [e^{(x_r + mv^2/2)/kT} - 1]} \frac{d\left(\frac{mv^2}{2}\right)}{\left(\frac{m}{2} v^2 + x_r\right)} \quad (9.4)$$

式中积分号外这部分近似等于 n^2 (8.8 节)。

对于可见辐射来说，式(9.4)可以大大简化；因为 kT 与 x_r 相比是个小量，所以与 x_r 有关的指数项就可以略去。于是积分可以近似地表达为 (Za54)：

$$a_n = \frac{2.08 \times 10^{-11}}{T^{1/2}} \phi(T) \quad (9.5)$$

式中 $\phi(T)$ 的值在 1580K 时为 3.16，在 7.9×10^4 时为 1.26。因此，它随温度的变化是缓慢的。

尽管离子的热运动速度已经引起谱线的增宽，我们仍然可以确定湍流运动的整体速度，条件是这种速度应高到足以使谱线外形出现实际上的分裂，或者如果能够从独立的温度观测资料计算出热致宽贡献量的话也可以做到这一点。

表 9.2 氢和氦的吸收与复合系数*

原子	项数	a_{v_0}	f	a_n	Q_n
				10000K	
HI		10-18		10^{-14}	10^{-22}
		厘米 ²		厘米 ³ ·秒 ⁻¹	厘米 ²
	1s	6.3	0.436	15.8	32
	2s	15	0.362	2.3	4.7
	2p	14	0.196	5.3	11
	3s	0.293	0.100	0.8	1.6
	3p	26	0.217	2.0	4.1
	3d	18	0.100	2.0	4.1
	4s	38	0.248	0.4	0.7
	4p	40	0.214	1.0	2.0
	4d	39	0.149	1.0	2.0
	4f	15	0.057	0.6	1.2
	总和			43	88
HeI	ls ² 1S	7.6	1.50	15.9	33
	ls ² s ³ S	2.80	0.25	1.4	2.9
	ls ² s ² 1S	10.5	0.40	0.55	1.1
	总和			43	88
He II	ls	1.8	0.44	73	150

* a_{ν_0} 为电离极限处的吸收截面；振子强度 f 已在 7.9 节中作了定

义；复台系数 α_n 和 Q_n 由 (9.4) 式确定 (A I 64)。

通过测量星际云在光谱可见部分的连续辐射，可以确定这类云内部的尘埃密度。大量的连续辐射可能是尘埃所散射的星光；因而仍然要对粒子的大小给以某种假定，而且最好我们还应该知道微粒的化学组成和物理结构。它们可能是硅酸盐、含有矿物的铁，或者是石墨微粒；但是对此我们还没有明确的认识。正如 9.6 节中将会看到的那样，来自 H II 区和行星状星云的红外发射也可能会提供有关尘埃密度方面的观测资料。

(e) 超新星遗迹

这些遗迹的直径可以延伸好几十个秒差距，并且通常呈现某种圆弧形结构。分光观测可以测出它们高速膨胀的（多普勒）速度；而对于蟹状星云来说，比较今天和 50 年前的照片可以观测到它的实际膨胀情况。蟹状星云的膨胀速度约为 10^8 厘米·秒⁻¹。对于蟹状星云还观测到在垂直于连续发射亮条的长度方向上表现有强烈的极化。如果假定这种极化现象来自同步加速辐射，发出辐射的高度相对论性电子在磁场中回旋运动，而场的磁力线则是沿着亮条的长度方向，那么我们就可以估计出磁场强度的大小，这个数字大约等于 10^3 高斯。除了相对论性电子外，还存在温度比较低的等离子体，这可以通过它所发出的、在可见光谱中的红色 H α 发射线探测出来。

(f) 恒星风

恒星风，比方就 O 型和 B 型星中的恒星风来说，可以通过观测高激发态离子谱线的多普勒位移来加以探测。这一点最早是通过火箭观测在光谱的紫外部分发现的 (Mo67)。假定太阳的丰富度同样表示了这些恒星的表面物质的特征，那么就有可能用这些恒星所抛出的物质的总数来解释观测到的谱线强度。典型情况下，一个大质量 O 型星所具有的抛射速度看来可以使它在 10^6 年内抛出一个太阳质量的物质；所以，在恒星的一生中所抛出的物质相当于总质量的百分之几。

(g) 太阳风

太阳风的密度可以用行星际探测器直接加以测定，探测器在离开地球适当距离的地方——那儿地球的磁层不再会妨碍观测工作的进行——收集等离子体的样品。这种空间飞船所携带的磁强计可以测定磁场的大小。在太阳宁静和活动时期之间观测到太阳风有相当大的变化；太阳耀斑出现后总的风速可以达到 1000 公里·秒⁻¹ 左右，然而在宁静期间则没有多大的变化，平均风速约为 400 公里·秒⁻¹。宁静期的密度为每立方厘米几个粒子，出现一个耀斑后密度可以增大一个数量级。

(h) 彗星

这种天体有三个明显不同的部分：一个大致呈球形的彗头，一个长的直彗尾，以及一个比较短的曲彗尾。彗头的直径通常在 10^{10} 厘米左右，其中包括有 C_2 , C_3 , CN, NH, CH, OH 以及 NH_2 等分子，以及诸如 OH^+ , CH^+

及 CO^+ 一类离子。典型的分子密度范围约为 10^7 厘米⁻³。最近，通过空间飞船上所作的赖曼 α 观测，发现在彗头周围还有一个很大的原子态氢的包壳。彗头内部分子的速度可以通过多普勒观测加以测定，其值为每秒几公里。彗头内还有一个固体彗核，但是范围太小，所以不能直接观测到。

彗星中所看到的长的直彗尾有时会伸展到超过一个天文单位。它们是太阳系内最大的天体，然而密度甚低，以至全部质量加在一起还是少得可怜。在这些彗尾中所观测到的只有离子而没有中性分子，离子的数密度由分子谱线的强度所确定。计算出激发过程中的 f 值后，我们就知道在所观测到的发射线亮度同视线方向上分子离子的数目之间、以及同这些离子因吸收太阳光而进入激发态的速率之间存在有什么样的关系。

彗星中较短的曲彗尾的夫琅和费（吸收）线光谱同太阳的光谱一样，这一点说明它反射了太阳光。由于经过反射后的太阳谱线没有出现增宽的现象，这说明散射粒子的运动速度一定很慢，所以它们不可能是电子；需知电子的热运动速度约为 10^8 厘米·秒⁻¹，由此可见彗尾内含有尘埃。向后方拖曳的彗尾所具有的弯曲形状同样证明了这一点。因为一方面尘埃受到阳光的推斥，同时为保持绕太阳作轨道运动中角动量不变，微粒离开太阳越远就越往后拖曳，结果彗尾便发生弯曲。尘埃微粒的大小大致可以从它们在太阳辐射压作用下离开彗头的程度来加以确定。微粒的大小不同，所受到的辐射斥力就不同，因而走过的路径也不同；于是就有可能对彗尾所展开的宽度上不同部位处的微粒大小作出大致的估计。最小的微粒离开朝太阳方向的矢径最近，而最大的微粒则离开这根轴线最远。通过对微粒大小的大致估计，我们就可以根据彗星所散射的全部太阳光计算出微粒的数密度。

表 9.1 概括了有关太阳系内、银河系内，以及银河系外各种弥漫天体现有的部分资料。在第一栏中所列出的每一类天体中，它们的大小、密度等等特征上的差异往往可以达到几个数量级，所以我们必须谨慎小心，不能认为同类天体的不同成员始终会有同样的性质。

9.2 斯特雷姆格伦球

1939 年，斯特雷姆格伦 (Strömgren) (St39) 对非常年轻的恒星同星际介质之间的相互作用进行了研究。为了使问题简化起见，他作了两个假定。第一，他认为恒星变亮的过程是很快的，在很短的时间内就能达到充分大的强度；第二，周围的介质是处处均匀的。有了这两个假定，斯特雷姆格伦就可以简洁地描述出在作紫外辐射的大质量恒星周围，电离氢区域的发展情况。

我们看到，如果恒星发射出若干个能使周围气体电离的光子 dN_i ，那么要能维持平衡，在相同的时间间隔内原子所失去的电子数同样为 dN_i 。这种观点在实际情况中始终是正确的，因为对高能光子所引起的电离来说，截面的大小约为 $\sigma \sim 10^{-16}$ 厘米²，而年轻恒星周围的典型气体密度大概是 $n_H \sim \sigma 10^3$ 厘米⁻³；在这样的密度条件下，一个光子在中性介质内使一个原子发生电离前所通过的距离大约只有 $(n_H \sigma)^{-1} \sim 10^4$ 厘米。但是，这段距离与通常所观测到的电离区半径相比是个小量。需知

电离区半径范围约为 $10^{16} \sim 10^{20}$ 厘米；因而实际上没有一个致电离光子能不经吸收就通过气体逸出。

尽管高能光子在中性介质内只能通过一段很短的距离，然而它在电离气体内所走过的路程是很长的。这里偶尔会发生散射；但是散射截面相对说来是比较小的——汤姆孙截面只有 $\sim 6.7 \times 10^{-25}$ 厘米² (6.102)，因而我们可以假定致电离光子能够毫无干扰地通过紧靠着恒星的那一层电离气体，一直到它们碰到中性气体出现的边界区域为止。边界区域的厚度也就是电离平均自由程：

$$\delta = (n_H \sigma)^{-1} \quad (9.6)$$

我们把中性云称为 H I 区，称电离云为 H II 区。

我们设想有一颗致电

图 9.1 斯特雷姆格伦球示意图。H II 是电离气体，H I 是中性区域， δ 为分界层的厚度

离恒星，它的四周围绕着一圈 H II 区，H II 区的外面是厚度为 δ 的薄薄的一层边界区，它把 H II 区和外部不断退缩中的 H I 区分隔开来。图 9.1 中说明了这种情况。如果气体是均匀的话，分界面就是球形的，而包括了电离气体在内的这个球就称为斯特雷姆格伦球。

我们现在要问自己，这样一个球的快速建立过程需要多少时间。为了做到这一点，我们注意到在半径为 R 、厚度为 dR 的一个球壳内，原子粒子的数目为 $4\pi R^2 n_H dR$ ；所以，当恒星发出 dN_i 个致电离光子时，这个区域的半径增大 dR ， dR 由下式给出

$$\frac{dN_i}{dt} = 4\pi R^2 n_H \frac{dR}{dt} \quad (9.7)$$

这儿我们已经多做了一步，从形式上看就是在等式的两边都除上了 dt ，目的是为了求得发展过程对时间的变率。

但是，方程(9.7)仅仅在球成长的初始阶段中才是正确的，它没有考虑到在斯特雷姆格伦球内部同时还发生着的离子和电子的复合。因为，如果一个电子和一个离子复合而形成一个原子，那么为使这两个粒子分离开来就需要有一个新的致电离光子，这个光子是决不会到达边界 R 的，所以它对 H II 区的成长不起作用。单位体积的复合强度与乘积 $n_e n_i$ 成正比，这是因为每个电子的碰撞几率与它所遇到的离子数成正比。另外，单位体积的复合强度又正比于复合因子 $a \sim 4 \times 10^{-8}$ 厘米³·秒⁻¹， a 由式(9.5)所确定，它与电离气体的温度（通常 $\leq 10^4 K$ ）有关，因而复合强度代表了形成各种状态 n 的复合因子之总和（见表 9.2 中的第五栏）。所以，气体所满足的完整的方程是

$$\frac{dN_i}{dt} = 4\pi R^2 n_H \frac{dR}{dt} + \frac{4\pi}{3} R^3 n_i n_e a \quad (9.8)$$

在发展过程的晚期阶段中，这个非常简单的模型应该预测出随着球的成长 dR/dt 最终将会变为零，因为球变得足够大的时候恒星所发出的光子仅能刚好抵上复合所用去的光子总数。出现这种情况时的平衡半径为

$$R_s^3 = \frac{3}{4\pi n_i n_e \alpha} \frac{dN_i}{dt} \quad (9.9)$$

方程(9.7)和(9.9)是方程(9.8)的两个极端情况，它们说明了在最简单的假定条件保持成立的前提下，斯特雷姆格伦球半径的原始生长和最终平衡值。

有几点是需要注意的：

(1)方程(9.8)只能用于恒星作紫外辐射的那种模型。如果恒星的光度和温度为已知，那么我们就很容易从普朗克黑体关系式(4.71)估算 N_i 。实际情况是非常炽热的恒星的紫外光谱同黑体不是很接近的，因为恒星外层大气的吸收会使所发出的辐射谱发生改变，这就是所谓覆盖效应。但是，尽管存在覆盖效应，黑体近似仍然能大致给出方程(9.8)中所用的致电离光子数的正确数值。目前，无论在什么情况下，我们只是对少数最明亮的紫外星才知道它们到波长 1000 埃左右的实际紫外光谱。但是，在以后的几年内，应该会取得许多新的资料，这是因为现在进行大气外紫外观测已经比较容易了。轨道天文台哥白尼号正在收集这方面的资料。

(2)电子和离子在复合时往往会产生一个光子，而这个光子又能使别的原子发生电离。事实上，仅仅当复合最初就使原子处于高能激发态时才没有光子产生；相反，直接进入基态的复合过程总要产生一个光子，而这个光子又能进一步引起电离。由于这个原因，方程(9.8)右端的第二项乃是复合过程中致电离光子损失的某个上限。同样，方程(9.9)中的 R_s 是平衡半径的下限。这一效应对于高密度区域的影响要比对恒星周围的稀薄气体更为来得重要。对于密度很高的区域来说，真正的 R_s 可能要比(9.9)式所给出的数值大 10 倍以上。对于常见的密度比较高的电离区来说， n_H 的典型数值约为 $10^4 \sim 10^5$ 厘米⁻³，这时的半径 R_s 要比式(9.9)所预期的大 2~3 倍。

(3)我们很快会发现，方程(9.8)和(9.9)并非完全正确，因为它们没有考虑到压力平衡的问题；这一点是比较容易看到的。因为在任何情况下，电离区内每单位体积的粒子数至少等于非电离区的两倍；这就是说对每一个原子至少形成一个离子和一个电子。根据理想气体定律(4.37)，这意味着电离区和非电离区分界层内侧的压力至少为分界层外侧压力的两倍；而且，还必须假定两边的温度是相同的。实际上，H I 区的温度可能约为 70K，而 H II 区的温度通常等于~7000K。因此，分界层内侧的总压力比外侧约高 200 倍，而扩张过程必然进行得十分迅速。

(4)如果我们要对扩张过程描绘一幅最简单的图象，那么可以把它具体比作为对一个气球的充气。要是外围 H I 区的质量为 M ，分界面上每单位面积分配到的质量是 $M/4\pi R^2$ ，而内侧的压力为 $2n_i kT_i$ 。 T_i 为电离区的温度，系数 2 是假定离子数 n_i 等于电子数。略去球外部的少量气体压力后，我们便得到分界层向外运动的加速度为

$$\ddot{R} = \frac{2n_i kT_i}{(M/4\pi R^2)} \quad (9.10)$$

如果我们先对上式的两边都乘以 $\dot{R}$ ，那么就可以积分得

$$\frac{\dot{R}^2}{2} = \frac{8\pi}{3} \frac{n_i k T_i}{M} R^3 \quad (9.11)$$

由此求得斯特雷姆格伦球发展的时间尺度约为

$$t \sim \left(\frac{3M}{16\pi n_i k T_i R} \right)^{1/2} \quad (9.12)$$

如果 M 大致取等于一个太阳质量 $\sim 2 \times 10^{33}$ 克, $n_i \sim 10^4$ 厘米⁻³, $T_i \sim 10^4$ K 及 $R \sim 10^{17}$ 厘米, 我们发现

$$\dot{R} \sim 3 \times 10^5 \text{ 厘米} \cdot \text{秒}^{-1}, t \sim 3 \times 10^{11} \text{ 秒} \quad (9.13)$$

这个速度一定要同冷介质中原子的随机运动速度进行比较, 后者在低温的 H I 区内仅为 $\sim (3kT/m_H)^{1/2} \sim 1.5 \times 10^5$ 厘米 $\cdot$ 秒⁻¹。所以, 正确的动力学状况不能用(9.10)至(9.13)这些方程来描述, 因为压力在 H I 区内通常大致以声速传播。如果这个区域内缘的扩张进行得要比声速来得快, 那么区域的外边部分就感觉不到压力正在对内部边界起作用, 因而这一部分就没有运动。结果, 任何给定瞬间实际受到加速作用的物质质量就小于亚声近似式(9.10)中所用的质量 M , 因而实际速度 $\dot{R}$ 必然要大大地增加。所以我们必须用超声流体动力方程, 这些将在下面的9.3节中加以说明。

(5)在着手对扩张中的 H II 区作动力学处理之前, 我们指出下面的情况是有意义的, 这就是方程(9.7)对于发展最早期的一些阶段也许仍然能很好地成立; 这是因为 dR/dt 值在那时是很高的, 结果电离阵面进入介质的速度可能比介质中的声速高两个数量级, 这儿所谓电离阵面指的是把电离区和中性区分隔开来的那部分区域。在这种情况下, 介质的密度完全不可能及时作出较大的调整来适应电离和非电离区之间的压力差。这一点同样要在 9.3 节中进行讨论。

(6)有趣的是气体压力所产生的扩张会使 H II 区中电离物质的密度下降, 结果就使单位体积内的复合强度减小。方程(9.8)中第二项内的因子 $n_e n_i \propto$ 随 $R^{2/3}$ 而下降, 这是因为如果只考虑仅仅由剩余压力(而不是由进一步电离)所引起的扩张, 则 n_i 和 n_e 两者都随 $R^{2/3}$ 下降。这一点意味着由压力所造成的扩张始终使式(9.8)右端第二项减小, 结果边界的扩张速度 $\dot{R}$ 就会变得更大。

(7)最后, 重要的是我们关于斯特雷姆格伦球发展的总体概念是建筑在中央恒星突然变亮, 并产生致电离辐射这样一个图象之上。但是, 这和图 8.11 所表明的大质量恒星的发展情况完全不同。在那儿我们曾经指出, 一个大质量的 O 型或 B 型星大约经过 6×10^4 年收缩到主星序, 在这个过程中的相当一部分时间内恒星是明亮的, 但并没发射出很多致电离辐射。戴维森 (Davidson) 证明了在收缩阶段中光压要把气体和尘埃推离恒星 (Da70a)。出现这种情况的原因如下: 设尘埃微粒的半径为 α , 在光压的加速作用下相对气体的运动速度为 v , 则微粒与原子发生碰撞的频率为 $n_H v \pi \alpha^2$, 于是它相当于受到某种阻力(动量损失), 阻力产生的减速度为

$$\dot{v}d = -\frac{n_H m_H v^2 \pi \alpha}{(4\pi/3)\alpha^3 \rho} \quad (9.14)$$

式中 ρ 是微粒的密度。

对于一个光度为 L 的恒星来说，辐射加速度是

$$\dot{v}r = \frac{L}{4\pi c R^2} \frac{\pi \alpha^2}{(4\pi/3)\alpha^3 \rho} \quad (9.15)$$

所以平衡建立时的速度为

$$v \sim \left[\frac{L}{4\pi c R^2 n_H m_H} \right]^{1/2} \quad (9.16)$$

对于 $L \sim 10^{38}$ 尔格·秒⁻¹， $R \sim 10^{17}$ 厘米及 $n_H \sim 10^4$ ，上式给出 v 值约为 1.5×10^6 。建立这一速度所需的时间为

$$\tau \sim \frac{v}{\dot{v}} = \frac{(4/3)\rho \alpha}{\sqrt{(L/4\pi c R^2) n_H m_H}} \quad (9.17)$$

如果 $\rho \sim 3$ 克·厘米⁻³， $a \sim 10^7$ 厘米，有 $\tau \sim 2.5 \times 10^9$ 秒。由此可见微粒大约在一个世纪的时间内达到平衡速度。而恒星收缩到主星序则需要化上几万年。

在这个过程中微粒会把气体拖出很大的一段距离。因为，比方说辐射压 $(L/cR^2 4\pi)$ 作用在长为 R 的一个圆柱体上，圆柱内的质量就是 $n_H m_H R$ ，那么辐射压所产生的平均加速度约为

$$\dot{v} = \frac{L}{4\pi c n_H m_H R^3} \quad (9.18)$$

而如果除 $R \sim 3 \times 10^{17}$ 厘米外其余条件与前面计算中所选用的相同，则

$\dot{v} \sim 10^{-6}$ 厘米·秒⁻²；在 3×10^4 年内就可遍及大约 R 这么远的距离。因此，戴维森证明了当恒星开始大量地发出致电离辐射之时，大部分气体已经被推出了好大一段距离。当然，电离还是会发生的，但是这个时候恒星周围是一个密度很低的空腔，电离就发生在空腔的边缘区。于是，可能会发生这样一种情况：刚刚电离了的气体会向内朝着恒星流去，而不是从恒星向外流出。对此，人们迄今还一无所知！

9.3 冲击阵面与电离阵面

在上一节中我们给出了一个例子，说明在炽热恒星的附近会出现超声流；象这样一类例子还是很多的。把恒星物质不断送入周围空间的风或说气流，就是以超声速向外运动着，速度范围从最热的 O 型星为每秒约数千公里，到太阳那样的恒星约为 400 公里·秒⁻¹。

来自太阳的高速气流同地球的磁层发生作用并引起各种各样不同的后果，从产生美丽的北极光一直到对中波段弱无线电波传播的干扰；太阳风还会造成长长的电离彗尾。

从比较大的尺度上来说，在各种类型的恒星爆发中都会遇到超声现象；规模小的如耀星中出现的经常性爆炸，规模大的如超新星爆发以至气体从星系核中爆发性的抛射现象。

这些简单的例子说明，超声速在天体物理学中乃是屡见不鲜的。其实，在恒星或如行星和尘埃微粒一类固态物体外部所发生的全部现象

中，实际上都会涉及到比声速更高的速度。

在这一节中我们所要关心的是用来说明 H II 区和其周围中性介质间相互作用的一些方程；但是处理问题的方法是带有普遍性的、它们可以用在天文学中许多别的超声现象上。

我们假定一颗恒星的亮度突然有了增加，结果就很快地使周围的介质发生电离，并出现一个冲击阵面或一个电离阵面（或两者兼有之），它以超声速朝外向冷的 H II 区冲去。下面我们就来看看这些阵面的性质究竟如何。

对于膨胀中的电离气体与尚未受干扰的中性氢区域之间的阵面（或者说分界区）有两种理解的方法。我们或者可以把这个阵面看作是以某个速度 v 朝外向着中性气体内部在运动着，或者也可以设想为中性气体以速度 v 朝着一个静止的阵面运动。气体通过阵面后就受到压缩，而且可能发生电离；于是就发生了能量交换——主要方式就是加热。

图 9.2 冲击阵面或电离阵面两边的条件

我们所要采取的是第二种观点，即认为两个区域间的阵面是静止的，同时我们还要对通过阵面（图 9.2）的气流提出几点要求。

(a) 我们要求流入阵面的质量与流出阵面的质量相等，这也就是连续性条件。如果流入气体的密度和速度为 ρ_i 和 v_i 而流出气体的密度和速度以 ρ_0 和 v_0 表示，那么这个要求就是

$$\rho_i v_i = \rho_0 v_0 \equiv I \quad (9.19)$$

这儿 I 为单位时间内通过单位面积的物质流。

(b) 我们可以把阵面看作为吸收流入气体、同时又放出流出气体的一个表面。在这种情况下，即使流入气体不存在由于原子的随机运动所引起的内禀压力，流入物质也必然会有压力 $\rho_i v_i^2$ 。 $\rho_i v_i^2$ 其实就是单位面积、单位时间内，由于吸收流入粒子——而这便是我们所指的压力——而转移给这个表面的动量。同样，由于想象中放出的流出气体所造成的反向压力为 $\rho_0 v_0^2$ 。因为式 (9.19) 一定要得到满足，又因为 v_0 一般说来与 v_i 不同，所以这两个压力通常是不相等的，而且方向相反。在作用于阵面两侧的总压力中，还应该再加上由于气体原子的随机热运动而造成的两项热压力。如果阵面没有受到加速——我们在这儿假定流入和流出的速度都是不变的，那么动量守恒定律要求阵面两侧的总压力大小相等且方向相反。

$$P_0 + \rho_0 v_0^2 = P_i + \rho_i v_i^2 \quad (9.20)$$

这就是稳流的条件。

(c) 气体在通过阵面时能量会发生改变。对总能量作出贡献的有若干种不同的来源；就流入气体来说，它们是 (i) 由于整体流动所引起的、单位质量流入阵面的动能 $v_i^2 / 2$ ；

(ii) 单位质量的内能 U_i （见 4.18 节）；

(iii) 流入阵面对单位体积所做的功。由于我们总是设想气体到达阵面就停止下来——被阵面吸收，这就等于说气体到达阵面时其体积被压缩为零。因而单位时间内所做的功便与等于速度 v_i 的一段体积有关：

$$\text{功/时间} = P_i v_i \quad (9.21)$$

式(9.21)右端的乘积称为气体的焓。如果归化到单位体积则焓在数值上正好等于压力 P_i ，如果归化到单位流入质量即为 P_i / ρ_i 。

通过阵面时每单位质量流体可以获得的能量为 Q ，所以每单位质量流入物质的实际能量增益就是 Q 。

在单位时间内，通过阵面的流入物质的质量为 $\rho_i v_i$ 。这部分质量中所包含的能量必须等于单位时间内从阵面流出的气体中所含有的能量，例外的情况下流出的能量可能要大上一个量 Q 。流出的能量由类似于上面所述的(i)，(ii)，(iii)三项组成，因此我们就有能量守恒方程

$$Q + \left(\frac{v_i^2}{2} + U_i + \frac{P_i}{\rho_i} \right) - \left(\frac{v_0^2}{2} + U_0 + \frac{P_0}{\rho_0} \right) = 0 \quad (9.22)$$

式中我们还是用下标“0”表示流出气体中的量。

问题 9.1 试证明内能可以表为

$$U = c_v T = \frac{R}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho} = \frac{P}{(\gamma - 1)\rho} \quad (9.23)$$

(见 4.18 节)。

由此导得

$$\left[\frac{v_i^2}{2} + \left(\frac{\gamma_i}{\gamma_i - 1} \right) \frac{P_i}{\rho_i} \right] - \left[\frac{v_0^2}{2} + \left(\frac{\gamma_0}{\gamma_0 - 1} \right) \frac{P_0}{\rho_0} \right] = -Q \quad (9.24)$$

而因为无论是由中性原子组成的气体，还是仅含有电子及原子离子的气体，两者的 γ 值都是 5/3，我们最终可以把(9.24)式写成形式

$$\left[\frac{v_i^2}{2} + \frac{5}{2} \frac{P_i}{\rho_i} \right] - \left[\frac{v_0^2}{2} + \frac{5}{2} \frac{P_0}{\rho_0} \right] = -Q \quad (9.25)$$

方程(9.19)，(9.20)和(9.25)描述了一个阵面在进入某个单原子介质时的运动状况。

首先让我们来研究一下电离阵面的结构状况。设在单位时间内落入单位面积阵面的有 J 个致电离光子；这些光子的平均能量为 $x_r > x_0$ ，这儿 x_0 是使原子发生电离所需要的能量 ($Ka54$)^{*}。因为 J 是落入电离气体与中性气体分界阵面上的致电离光子数，因而在单位时间内就有 J 个原子流入阵面，又从阵面流出 J 个离子和 J 个电子。

参见式(9.19)我们看出，经过阵面的质量流同致电离光子流之间的关系是

$$I = mJ \quad (9.26)$$

这儿 m 是中性原子的质量，对于一个纯粹由氢组成的云来说， $m = m_H$ 。现在，我们定义密度比为

$$\frac{\rho_0}{\rho_i} = \psi \quad (9.27)$$

那么由(9.19)和(9.20)两式有

$$P_0 = P_i - \frac{\rho_i v_i^2 (1 - \psi)}{\psi} \quad (9.28)$$

然后从式(9.19)，(9.25)和(9.28)我们得到：

$$\left[5\frac{P}{\rho} + v^2 + 2Q\right]\psi^2 - 5\left[\frac{P}{\rho} + v^2\right]\psi + 4v^2 = 0 \quad (9.29)$$

这儿我们省去了所有的下标，不过压力、密度和速度这三个量都是对流入物质而言的。我们看出，在致电离阵面处所补充到的能量中有一部分用于电离，有一部分转化为粒子的动能。转化为动能的那一部分能量平摊给每一离子对后就是 $x_r - x_0$ 。就单位质量电离物质来说这一关系同均方速度相对应

$$u^2 = \frac{2(x_r - x_0)}{m} = 2Q \quad (9.30)$$

注意， Q 在这个意义上仅仅代表热能，而不是克服原子键所需要的能量。

这种结合能并没有在我们这儿的表现形式中专门列为一项。实际上我们总可以把它忽略掉，而只需注意满足 $x_r > x_0$ 的那些光子。要是结合能比较高，那只有为数不多的光子才能使物质发生电离。

我们也注意到中性介质内的声速具有某个等温速度

$$c = \left[\frac{\gamma P}{\rho}\right]^{1/2} = \left[\frac{5P}{3\rho}\right]^{1/2} \quad (9.31)$$

所以方程(9.29)现在完全可以用 v , u , c 这三个速度以及密度比 Ψ 来加以表达

$$(3c^2 + v^2 + u^2)\Psi^2 - (3c^2 + 5v^2)\Psi + 4v^2 = 0 \quad (9.32)$$

我们可以把这个式子作为 Ψ 的二次方程来处理，它可能有一对重根，两个正数根或一对复根，这取决于

$$(3c^2 + 5v^2)^2 \geq 16v^2(3c^2 + v^2 + u^2) \quad (9.33)$$

或者说取决于

$$9(c^2 - v^2)^2 \geq 16v^2u^2 \quad (9.34)$$

在两个条件下有实根。第一个条件是

$$3(c^2 - v^2) \leq -4vu \quad (9.35)$$

此式意味着 v 大于某个临界速度 v_R ：

$$v \geq v_R = \frac{1}{3}(2u + \sqrt{4u^2 + 9c^2}) \quad (9.36)$$

这就要求致电离光子流大于某个临界值 J_R ；由式(9.19)和式(9.26)有

$$J \geq J_R = \frac{n}{3}(2u + \sqrt{4u^2 + 9c^2}) \quad (9.37)$$

式中 n 是中性介质内原子的初始数密度。 R 表示“稀”， D 表示“密”。

实根存在的第二个条件是要

$$3(c^2 - v^2) \geq 4vu \quad (9.38)$$

这个式子的含义是阵面的速度小于某个临界值 v_D ，而致电离光子流要小于 J_D ：

$$v \leq v_D = \frac{1}{3}(-2u + \sqrt{4u^2 + 9c^2}) \quad (9.39)$$

$$J \leq J_D = \frac{n}{3}(-2u + \sqrt{4u^2 + 9c^2}) \quad (9.40)$$

对于某个给定的致电离光子流而言，与这两个临界速度 v_R 和 v_D 相应的密度是

$$\rho_R = \frac{I}{v_R} \text{ 和 } \rho_D = \frac{I}{v_D} \quad (9.41)$$

如果致电离阵面前的气体密度值为 ρ_R 或 ρ_D ，那么由此可以得到 ρ_0 的唯一可能取的值，这就是说阵面后的电离介质密度具有某个确定的值。因为(9.32)是 $\psi = \rho_0 / \rho$ 的二次式，我们看到对于 $\rho < \rho_R$ (以及同样对于 $\rho > \rho_D$)， ρ_0 可以有两个可取的值；而如果初始密度介乎两个临界密度值之间，即 $\rho_R < \rho < \rho_D$ ，则 ρ_0 的解不存在。这意味着电离阵面不可能直接与未受干扰的 HI 区发生接触。

因此，以下便是一颗恒星突然发亮并发出致电离辐射时，恒星周围电离氢区的发展情况。最初，电离区与中性区间的界面同恒星靠得很近；流量 J 仍然非常之高，并且大大超过临界值 J_R 。这时，我们就有所谓 R 条件。阵面朝着中性气体（或者，反过来按照我们这儿所采用的处理方式也是一样）的运动速度为 $v = J/n$ 。这正好就是方程(9.7)所说明的情况。但是，随着电离阵面远离恒星继续运动， J 值就下降，因而阵面的运动便减慢下来，直至到达临界速度 v_R 为止。这一速度的近似值是

$$v_R \sim \frac{4}{3}u \quad (9.42)$$

因为光子的平均能量很高，所以电离粒子所带走的剩余能量使得这些粒子以远远超过声速的速度在未受干扰的中性介质内运动。毫无疑问，电离介质的温度大大超过中性气体的温度，星际空间电离区内的典型温度值在 5000~10000K 之间，而 HI 区的温度大概要比这个数字低 100 倍。

一旦到达临界速度 v_R ，电离阵面不再同未受干扰的介质直接发生接触。这时，电离阵面已经运动得很慢了，在它的前面出现了一个预示着电离区即将抵达的冲击阵面，结果在冲击阵面的压缩作用下介质的密度就要变得比未受干扰状态时的密度来得高。

实际上，这恰恰意味着电离使气体加热，加热后的气体迅速地向中性介质扩张开去，扩张的速度很高，结果就在中性气体内形成了一个压缩波，波的运动速度超过同一介质中的声速。因此，一个冲击阵面先于电离阵面进入中性介质，并使这一介质内的密度发生改变，于是边界条件(9.19)，(9.20)和(9.22)再一次在电离阵面处得以满足。随着电离阵面更进一步远离恒星而运动，其相对于未受干扰中性介质的运动速度便减小到低临界值 v_0 之下。这时，扩张过程进行得非常缓慢，没有任何冲击波再会传入中性介质，电离阵面再一次直接同未受干扰介质相接触，这就是所谓 D 条件。

问题 9.2 试证明

$$v_0 \sim 3C^2/4u \quad (9.43)$$

我们还应该注意，普通冲击阵面所处的条件与电离阵面的条件是一样的，唯一不同之处是没有电离能可供应，即 $Q=0$ 。因此，这儿所导出的方程具有广泛的用途。同样值得注意的是通常情况下还有磁场存在，因而在能量平衡条件和压力条件中还必须把磁场的贡献包括进去。磁流体冲击特别重要，因为在粒子间很少发生碰撞的条件下，磁场是使压力信息遍及介质各处的主要传递者。磁场的压缩力使粒子间发生相互作用，

而气体粒子间的压力平衡就是通过这种相互作用建立起来的。

在 HII 区和 HI 区的交界面上我们有时会看到一些亮环，环内是尚未电离的、充满了尘埃的暗区 (Po56)。这些亮环一般位于未电离物质的边缘，它们好象指向致电离恒星所在的方向，而这种致电离恒星的光谱型通常早于 O9 型。一旦到达 HI 区的致电离辐射满足 D 临界条件，并且建立起一个朝着中性气体运动的电离阵面，而该阵面之前的冲击波已不复存在，这时，就可能出现上面所述的那种亮环 (Po58)。

9.4 分子和微粒的形成

有关星际微粒的难题之一就是它们的起源问题。星际空间的密度是如此之低，以至微粒似乎不可能在那儿形成。为了说明这一点，我们来考虑一颗微粒的生长率。设时间 t 时微粒的半径为 $a(t)$ ，星际原子和分子以速度 v 同该微粒发生碰撞。如果质量为 m 的重原子的数密度为 n ，则该微粒的生长率为

$$4\pi a^2 \frac{da}{dt} = \frac{\pi a^2 n m v}{\rho} \alpha_s \quad (9.44)$$

式中 ρ 是沉积在微粒表面上的星际原子的密度， α_s 是原子同微粒碰撞时的粘着系数，式(9.44)的左端表示微粒体积的增量。取 $v \sim \sqrt{3kT/m}$ ，对于 $T \sim 100K$ ， $m \sim 20$ 原子质量单位 $\sim 3 \times 10^{-23}$ 克， $\rho \sim 3$ 克·厘米⁻³， $n \sim 10^{-3}$ 厘米⁻³，以及极大值 $\alpha_s = 1$ ，我们得到

$$\frac{da}{dt} \sim \frac{n\sqrt{3kTm}}{4\rho} \alpha_s \sim 10^{-22} \text{ 厘米} \cdot \text{秒}^{-1} \quad (9.45)$$

为了使微粒增长到 10^{-5} 厘米那么大小，就必须化上 10^{17} 秒 $\sim 3 \times 10^9$ 年的时间。要是 α_s 的值取更客观一些，那么所需要的时间就会长到超过银河系的年龄。这里我们没有考虑氢在微粒上的沉积，因为纯氢通常会很快地蒸发掉。

当然，在宇宙空间的某些区域内，象氧、氮、碳、铁这一类原子的数密度可达 ~ 1 厘米⁻³，猎户天区的密度就差不多有这么高。如果不存在破坏效应，又取 $\alpha_s \sim 1$ ，则微粒也许可以在 $\sim 3 \times 10^6$ 年时间内形成。再进一步说，要是在高密度的冷气体云内温度可以低到足以能使氢在微粒上凝固而不会很快地重新蒸发，那么微粒的生长率可以再快上 2~3 个数量级。

到目前为止我们还没考虑破坏效应的作用。举个例子说，在 HII 区内，辐射压使微粒得到加速，而且小的微粒的速度通常要比大的微粒来得高，于是微粒之间便可能出现相互碰撞，碰撞时的速度高达 $\geq$ 公里·秒⁻¹，结果使碰撞中的双方都发生蒸发；然后，蒸汽又必然再度凝聚。另外，快速运动光子的溅射作用，可以使原子在同微粒表面粘附之后重新被赶走。诸如此类的破坏效应往往会使方程(9.45)所表示的微粒生长过程朝反方向进行，或者至少要使生长率减慢。受破坏作用影响大的是那些象冰这一类分子间结合得比较松散的物质，而不是象硅酸盐或石墨一类分子间结合得很紧的物质；以上这三种物质都可能是星际微粒的组成部分。

另一种影响不太严重的破坏效应与构成微粒的物质的蒸发压有关。

在温度为 T 的热平衡状态下，蒸发压决定了分子或原子从微粒表面蒸发的速率。平衡蒸发压就是生长率刚好等于蒸发率时微粒周围蒸汽的压力。这一局部压力 $P_{\text{蒸发}}$ 通过物态方程同蒸汽密度联系起来；所以，如果道耳顿定律(4.38)成立的话，则每单位面积分子质量碰撞率为

$$nmv \sim \left(\frac{m}{kT}\right)^{1/2} P_{\text{蒸发}} \quad (9.46)$$

因而这必然同时也代表了脱离微粒表面的蒸发率。我们知道，如果要使微粒增长，则周围空间中的压力就一定要超过蒸发压。氢在 4K 时的蒸发压约为 10^{-7} 托（表 9.3），这大约相当于每立方厘米 10^{11} 个分子。当然，这一密度大大超过星际空间可能出现的任何密度值。另一方面，微粒的温度大概决不会低于 4K；因此，这意味着氢不可能很牢固地依附于微粒表面，除非在微粒表面有别的物质通过化学作用同氢结合起来，或者把它吸附于基本微粒物质上。至于其他物质的情况就不是这样；例如，硅酸盐和石墨的蒸发压是很低的，以至这些微粒差不多在银河系一生那么长的时期内都不会有任何明显的蒸发。对于冰来说，情况就比较复杂一些。在靠近某一颗恒星时， H_2O 分子会因微粒温度的升高而蒸发；彗星从太阳系外围部分接近太阳时所发生的情况基本上就是这样，表面温度升高的结果就把水、氨和别的冰粒都蒸发掉了。在大多数恒星附近，通过与原子碰撞所造成的溅射是主要的破坏机制；仅仅当十分靠近某一颗恒星的时候蒸发才能够成为一种重要因素！

微粒最初可能是在温度很低的巨星或红巨星型变星的大气中形成的，这类天体会把气体抛入星际空间。这些恒星有着稠密的大气，所以式(9.45)中的 n 值就很高。但是，微粒必须在一段很短的时间（比如说一个月）内形成，因为过了这段时间后外流气体马上就会变得极度稀薄。对于较重的原子取 $n \sim 10^5 \text{ 厘米}^{-3}$ ， $T \sim 2 \times 10^3 \text{ K}$ ， $m \sim 12$ （碳），这时也许就有可能以 $da/dt \sim 3 \times 10^{-14}$ 的速率形成一颗石墨微粒，在一个月的时间内微粒的半径可达 $a \sim 10^{-7}$ 厘米。这仅仅是一个核，它可以继续生长，其原因可能是辐射压使它始终保持以略大于外流气体的速度远离恒星运动（见方程(9.15)）。

红巨星型变星和冷的巨星常常显示出有过量的红外辐射（Jo67a），这一事实说明了在这些恒星的附近必然有尘埃存在，这些尘埃很可能就是从它们的大气中形成并抛射出来的。

盖泽尔（Geisel）、克兰曼（Kleinmann）和洛（Low）发现，当新星巨蛇 1970 的可见光强度在减弱的时候。它的红外辐射却变得更强烈了；由此推知尘埃可能是在几个星期时间内从这颗新星所抛出的气体中形成的。因为我们在天鹰 1970 和海豚 1967 这两颗新星中也观测到了类似的现象，所以新星很可能是大量尘埃形成的普遍原因。

最后，行星状星云所发出的红外辐射可能表明有尘埃存在；也许在那儿所发生的抛射过程至今还在以方程(9.45)所给出的速率形成相当数量的尘埃。

分子的形成提出了与尘埃形成相类似的一些问题。在过去的一些年内，人们用微波技术发现了越来越多的星际分子，其中有 NH_3 （氨）， CO ， H_2O ， HCN （腈化氢）， H_2CO （甲醛）， CN （氰）， HC_3N （丙炔腈），羟基

OH 以及许多别的分子。毫无疑问，分子作为一些较小的聚合体它们必然首先形成，然后才会有某种机会再形成较大的微粒。但是，一旦较小的稳定分子已经形成之后，由几个重原子组成的复杂分子也许就不大容易形成了。因为，这些较小的分子在形成之后就不容易再接受其他的原子。但是，有关星际空间这种极其稀薄状态下的分子形成理论至今还没有很好地加以解决；比如说有关象甲醛和甲酸这样一类复杂分子的形成问题我们简直是一无所知。我们发现，在通常情况下这些较大的分子总是与 HII 区附近的致密暗星云相处在一起。最有利于分子形成的是电离区还是中性区，或者也许会不会仅仅是这些区域的边界部分，对于这类问题我们还没有找到它们的确切答案。

我们还应该对若干种破坏效应作一些说明。分子可以因离解而遭到破坏，这种离解常常是因为吸收了紫外光子或者因紫外光子的电离作用所造成的结果。计算表明，银河系内的普通星光可以在大约一百年的时间内把 CH_4 ， H_2O ， NH_3 和 H_2CO 这样一类分子破坏掉，除非这些分子因为处于强吸收性尘埃云内部而没有受到星光的照射 (St72)。高能电子或宇宙线粒子的电离作用可以产生类似的结果。星际云的碰撞能够产生出高能粒子，因而也就可能对分子起破坏作用；不过我们可以证明这时也会有相反的效应出现；在两个碰撞中气体云的接触面上密度是比较高的，这就可能促使分子更快地形成。我们必须对各个具体位置上这种竞争中的形成和破坏速率进行比较，这样才能知道总的情况对于分子形成说来是起着促进作用还是破坏作用。

9.5 原始太阳星云中的凝聚过程

在 1.7 节中我们已对目前有关太阳系起源的某些观点作了介绍。

问题 9.3 在太阳最初形成之际，它的周围可能就存在着一团稠密的气体云，行星便是从这团气体云最终凝聚而来的；第一步形成的可能就是小的微粒。假定整个星云内的质量分布是均匀的话，其总质量等于全部行星质量之和的两倍（见表 1.3），半径为 10 天文单位，而初始丰富度则与太阳的丰富度（表 1.2）相同。试利用表 9.3 计算铁凝聚的地方到太阳的大致距离；再对碳作同样的计算。水或冰能在这块星云内凝聚吗？注意，这个时期太阳可能位于林忠四郎轨迹上（图 8.11）。计算时假定太阳的光度是现在的十倍。

问题 9.4 光压的作用往往有助于造成太阳星云内的均匀性 如果离开太阳 r 天文单位处的向外能流为 $1.4 \times 10^7 / r^2$ 尔格·厘米⁻²·秒⁻¹，有两颗微粒在木星距离处绕太阳作轨道运动，它们的半径都是 $s \sim 10^{-3}$ 厘米，其中一个的密度为 2 克·厘米⁻³，另一个为 4 克·厘米⁻³，试求出这两颗微粒的轨道速度；设微粒是黑色球形的，对光的吸收截面为 πs^2 。注意轨道速度作为 s 的某个函数是怎样变化的；这种变化对于小的 s 值最为明显。因此，微粒之间在密度或大小（或两者兼之）上的差异越大，彼此相碰撞的机会就越多，其结果是微粒遭到破坏；而性质相近的微粒往往可以存在比较长的一段时间。

问题 9.5 在小的粒子和星子通过凝聚作用形成之后，看来就会发生第二阶段凝聚，这时引力将起着支配的作用。在到达这一阶段之前，离开太阳任何给定距离处粒子的轨道形状大概都已近乎相同，它们的偏心

率都很小，倾角也都很小，因而这些微粒的相对速度必然很低。由于速度大的和速度小的微粒通过彼此间无数次的破坏性碰撞已经都互

表 9.3 温度和蒸发压之间的关系
选自 (Ro65)，(Du62) 及 (Le72) *

	(1 托 = 1.33×10^3 达因·厘米 ⁻²)					托
	10 ⁻¹¹	10 ⁻¹⁰	10 ⁻⁹	10 ⁻⁸	10 ⁻⁷	
C	1695	1765	1845	1930	2030	K
Fe	1000	1050	1105	1165	1230	

大多数固体物质服从形式为 $\log P = A - B/T$ 的压力-温度关系

低压	碳	$A=12.73$ 及 $B=4.0 \times 10^4 K$
P (托)	铁	$A=9.44$ 及 $B=2.0 \times 10^4$
	氯化钠	$A=7.9$ 及 $B=8.5 \times 10^3$

对于水可取以下数据：

H ₂ O	7×10^{-9}	3×10^{-10}	7.4×10^{-15}	1.4×10^{-22}	托
	143.2	133.2	123.2	90.2	K

对于氢：

H ₂	3.1×10^{-7}	8.8×10^{-9}	7.5×10^{-11}	4.5×10^{-13}	托
	4.0	3.5	3.0	2.6	K

* 注意，内行星主要由低蒸发压物质组成，而外行星所包含的基本上是比较容易挥发的物质。

相抵消掉了，所以必然会出现这样的结果。

(a) 某天体的密度 ρ 为 3 克·厘米⁻³，要是它的引力俘获截面是几何截面的两倍，那么这个天体应该有多大？设被俘获的微粒的相对速度为 V_0 ，可以用问题(3.7)所得的结果。

(b) 导出密度为 $\rho = 3$ 克·厘米⁻³ 的天体在通过密度为 $\rho_0 = 3 \times 10^{-12}$ 克·厘米⁻³ 一团气体云时的生长率；设它们的相对速度为 $V_0 = 1$ 公里·秒⁻¹，开始时天体的引力俘获截面为其几何截面的两倍。

(c) 设有一个球形的引力天体，它的俘获截面要比几何截面大得多，密度 $\rho = 3M/4\pi R^3$ 为一定值，试证明该天体的质量增长与 $M^{4/3}$ 或 R^4 成正比。因此，质量较大的天体与质量较小的天体相比，前者具有较高的质量俘获率；后者的几何俘获截面决定它的质量俘获率只是与 R^2 成正比。

问题 9.6 假定一颗微粒在俘获质量而增长的过程中始终保持为球形，它以速度 $V_0 = 1$ 公里·秒⁻¹ 穿过太阳星云运动，而且没有出现因破坏性碰撞所造成的意外事件，它从 $\sim 10^{-8}$ 厘米（一个分子）增长到 10 公里。

如果星云的密度为 3×10^{-12} 克·厘米⁻³，其中可以为微粒俘获的非挥发性物质占 1%，而粒子的密度是 2.5 克·厘米⁻³；试证明这一增长过程所化的时间大致为 10^8 年。

9.6 来自银河源的红外发射

目前，我们已经观测到了由各种各样不同的源所发出的红外辐射。在冷超巨星的周围常常好象是包有一层尘埃云，它们遮掉了大量的可见辐射，而这些拱星气体云便在近红外区发出强烈的辐射。我们发现，行星状星云看来在波长较长——主要在 10 微米（1 微米 = $1 \mu = 10^{-4}$ 厘米）以上——的波段有很强的发射，HII 区的情况也是这样。银河中心也是非常强的辐射源；尽管这一区域现有的分光观测资料不是很精确，我们还是可以看出相当大一部分红外发射的峰值波长大致出现在 100 微米附近（见图 6.16 和图 9.4）。

对拱星尘埃云所发出的近红外辐射是比较容易加以解释的。方程 (4.78) 确定了离恒星一定距离 R 处的微粒所应该具有的温度；这儿总会有一定的误差，因为我们不知道可见光或红外区内微粒的发射率有多大。所以，无论是平衡温度还是发射光谱都会有少量的误差；这里，平衡温度服从关系式

$$T = \left(\frac{\epsilon_a}{\epsilon_r} \frac{L_\odot}{16\pi\sigma R^2} \right)^{1/4} \quad (4.78)$$

在任何情况下，所有的微粒总不会都恰好位于离开母恒星同样距离的地方。微粒离开恒星的距离不同，它们发射时所处的有效温度也就不同，因而由这些微粒所产生的辐射有一个相当宽的发射谱是理所当然的。

与行星状星云和 HII 区有关的发射过程其情况就稍有不同，相对来说这儿几乎没有多少尘埃。通常在电离区内的遮光效应是不显著的，然而我们还是观测到有强烈的红外发射。那么为什么这么少量的尘埃却能够起这样大的作用呢？

为了解释这一现象，我们必须回到 9.2 节中所给出的有关电离平衡问题的讨论上来。我们在那儿已经看到，对于一个平衡的斯特雷姆格伦球来说，复合强度等于电离强度。每当一个电子同一个质子复合而形成一氢原子时，可能出现两种情况：复合后的原子或者处于第一激发态 $n=2$ ，或者处于某个较高的能级；对于后一种情况，通过某种级联光子发射过程最终会使该原子进入 $n=2$ 或 $n=1$ 能态。不管是从 $n=2$ 到 $n=1$ ，还是从任意一个较高的激发态跌落到 $n=1$ ，这两种情况下跃迁所发出的每一个光子都非常可能重新为 HII 区内处于 $n=1$ 能态的其他氢原子所吸收。因此，光子就以一种随机游动的方式在 HII 区内曲折前进，在这个过程中光子不断地被吸收又不断地再度发射出来（见问题 (4.4)）。赖曼 α 光子在这种游动中的平均自由程可能只及 HII 区半径的 0.03 倍；所以，在最终到达电离云边界之前作交叉运动的光子所通过的距离，必然是 HII 区半径范围的 30 倍左右。因此，每个赖曼 α 光子被微粒吸收的几率就要比可见星光大 30 倍左右，后者是笔直穿过 HII 区而进入外部的冷气体云的。这儿，我们把全部赖曼谱光子都作为赖曼 α 辐射来处理，这样做是没有什么问题的。一个氢原子所发出的赖曼 β 光子很可能被吸收，并且在 $n=3$ 到 $n=2$ 的原子跃迁中放出一个 $H\alpha$ 光子，接着又是 $n=2$ 到 $n=1$ 的一

次赖曼 α 跃迁。

作为一种经验规则，我们可以说对于每一个致电离光子而言，HII 区最终必然会产生一次复合。复合之后便是一系列的发射、再吸收、再发射过程，最终必然会放出一个巴耳末谱光子以及一个赖曼 α 光子。对赖曼 α 光子的吸收来说，振子强度近乎等于 1，所以每个氢原子的有效截面积是很大的。即使中性氢密度所占的比例很小，赖曼 α 吸收通常还是很大的，足以在星云内捕获赖曼 α 光子。

图 9.3 电离氢区所发出的 45~750 微米红外辐射与 2 厘米波长射电辐射间的关系图 (Ha71)

问题 9.7 设在某个 HII 区内，每一个致电离光子通过半径 R 这么一段距离的光学深度为 1。试确定中性原子的数密度 n_H 和表 9.2 所列出的吸收系数 α_ν 之间的关系。

(a) 参考问题(7.11)，确定赖曼 α 吸收的平均自由程与 R 之间的关系。

(b) 一般情况下吸收带宽 γ 与多普勒频移 $\Delta \nu \sim \nu \langle v^2 \rangle^{1/2} / c$ 相比是一个小量，这儿 $\langle v^2 \rangle^{1/2}$ 是 HII 区内的均方根速度。对于 $\langle v^2 \rangle^{1/2} \sim 30$ 公里 $\cdot$ 秒 $^{-1}$ ，赖曼 α 吸收的平均自由程为多少（见问题(7.13)）。

图 9.4 来自银河系中心的 2 厘米射电辐射和 100 微米红外辐射 (Ho71, Te68)。请注意，在 29° ， 17^h42^m5 和 $28^\circ20'$ ， 17^h44^m 附近两个主要峰值位置上的相似性，该天区的红外光度约为射电辐射的 10^6 倍（还可参见银心附近的 X 射线辐射源图 A.7）

因为每个致电离光子都会引起一个赖曼 α 辐射量子，又因为这种辐射在它逸出 HII 区的边界之前就很可能被微粒吸收掉，所以我们可以预料到转换为赖曼 α 的全部辐射最终都必然要 (Kr68) 为微粒所吸收，而能量就会在远红外区以热辐射的形式释放出来。恒星所发出的大多数致电离光子的能量小于两倍赖曼 α 能；由此我们可以断定，在恒星所发出的致电离能中，有一半以上最终必然会转变为红外辐射。这一结论看来至少大体上是正确的。我们可以同射电波范围内所观测到的来自电离区的自由-自由发射作一番比较。通过象式(9.5)或(6.141)和(6.139)这一类方程，可以把这种自由-自由发射直接同预期的复合线强度联系起来。因此，我们就能够推导出自 HII 区的预期自由-自由射电辐射同由微粒所造成的远红外流之间的某种比例关系。哈珀 (Harper) 和洛 (Ha71) 就若干区域对这一比例关系作了验证。尽管他们所观测到的红外发射普遍地显得略为偏大一些，但符合的程度还是相当好的；其中的差异部分可以用若干方面的原因来加以解释。图 9.3 表示了哈珀和洛的观测结果，而图 9.4 则给出银心天区射电与红外辐射图的比较情况。两者的相关性很强，由此说明，红外和射电流之间存在某种联系看来是确定无疑的。

在塞佛特星系内，有时可以观测到来自其核区的强红外发射，这种红外发射的机制或许也在我们上面所述之列。但是，通过诸如同步加速辐射或逆康普顿散射一类过程同样可以产生红外辐射，而且我们知道塞

佛特星系可能是一些 X 射线的强发射源，因而很可能有高能电子存在。目前，我们所有的观测证据还不足以把这些机制——区别开来。

9.7 恒星的形成

在 1.4 节中我们提出了有关恒星形成的若干问题。如果要形成一颗恒星，有三个基本过程是一定要发生的：(1)形成恒星的气体必须把能量辐射掉，这样才能使原恒星的总能量不断减少，从而使它的结构越来越致密。(2)从庞大的氢云发展到恒星，必须通过某种机制使角动量减小；前者参与绕银心的较差自转运动，范围大，角动量很大，后者的角动量很小。(3)用法拉第旋转和塞曼分裂这两种方法所观测到的磁场，同恒星表面的实际磁场强度相比，后者是很弱的，因此必须通过某种机制把大部分磁场从收缩中的星际气体云中排除掉。

除了这三个要求外我们还应该再补充一个要求——这个要求显然是比较容易满足的：(4)为了触发收缩过程的顺利进行，要求气体云的初始压缩进行得比较快；在这种压缩的同时必须使气体云冷却，而且总的能量损失必须足够大，以使云不可能再度膨胀到接近它的初始直径。换句话说，压缩一定要是高度非弹性的。之所以需要某种这一类的触发机制，其原因在于星际介质中通常存在着湍流运动。要是没有这种机制，湍流运动甚至会使收缩过程在刚开始不久便遭到破坏。这些湍流运动是由电离区的膨胀以及辐射压所引起的，后者通过尘埃微粒对气体发生作用 (Ha62a)。

这种特定的压缩要求，显然可以通过在 HII 区周围所形成的强有力的压缩冲击波而得到满足。尽管这些膨胀中的 HII 区往往使冷云产生湍流运动，然而正如 9.3 节中我们所已看到的那样，它们也同样可以造成快速压缩。由于这种压缩，再加上剧烈的辐射性冷却，就可以使收缩过程得以持续地进行下去；其中引起冷却的过程有微粒发射，分子氢的辐射 (Go63)，或者也许还有来自 H_2O 蒸汽的发射。在暗星云内分子氢可能是很丰富的；而 H_2O 蒸汽分子有很高的偶极矩，并且可以通过低能碰撞依次地得到激发。

因此，(1)，(4)两个要求显然是可以得到满足的。但是，角动量损失和磁场分离则仍然是两个无法解决的问题；我们只能指出一、二种解决这些难题的可能途径。

让我们先来考虑角动量的问题。我们也许可以论证我们对原恒星物质中所存在的初始总角动量是估计过高了，较差自转效应可能并没有原来估计的那么大。

要使较差自转所产生的角动量减小，一个可能的途径就是仅仅收集对银心有相同角动量的那些物质。比方说，如果假定全部气体粒子都绕着银心作圆周运动，那么我们就只能收集到距银心为某个确定半径 R_c 的一个环上的物质。这个环的周长为 $2\pi R_c$ ；从与银道面垂直的方向上来看，太阳附近气体物质的面密度约为每平方厘米 10^{20} 个原子，或说 $\sigma \sim 10^{-4}$ 克·厘米⁻²。在我们太阳附近周长 $2\pi R_c$ 约为 2×10^{23} 厘米，所以要形成一个太阳质量的恒星，环的宽度应为

$$W \sim \frac{M_{\odot}}{2\pi R_c \sigma} \sim 10^{14} \text{ 厘米} \quad (9.47)$$

利用 1.4 节中所采用的有关较差自转的数字，我们发现这一宽度两边的速度差约为 3×10^{-2} 厘米·秒⁻¹，收缩一旦发生之时的每单位质量角动量大约只有 3×10^{12} 厘米²·秒⁻¹，这个数字比每单位质量太阳物质的角动量小 3×10^3 倍，比整个太阳系的相应角动量值小 3×10^5 倍。这个结果意味着①必须收集的质量仅仅涉及到半径为 R_c 的一段较短的弧，其长度约为 600 秒差距；②这样， W 可以增大到 10^{16} 厘米左右，于是每单位质量的角动量便大致增加到 3×10^{16} 厘米²·秒⁻¹；③因此，具有适当角动量特征的一个太阳系或者恒星是有可能形成的。

我们的结论是：如果恒星是从一段薄薄的柱形气壳——它们最初绕银心运动的轨道角动量范围是很窄的——形成的话，那么具有适当角动量特征的恒星的形成是有可能的。然而，从另外一些理由来看，这样一种过程能否出现则又是性质完全不同的一个问题，要回答这个问题困难就更大。

首先，引力收缩在这类薄片状云块内部看来是不大可能进行的 (Eb55)；一般情况下，如果收缩的范围大致呈球形的话，则引力收缩最为有效，因为相对说来在这种条件下体积上的少量压缩可以使引力势能发生较大的变化。

第二，在这样一种结构内磁场问题是回避不了的。如果磁力线基本上与半径 R_c 正交——由于较差自转所造成的剪切力对于这一点也许是有利的，那么沿着磁场方向的收缩就不会受到磁场的抵抗；但是，还存在与磁场方向相垂直的收缩分量，它还是会压缩磁力线。这里我们仍然涉及到把大约 100 秒差距范围的物质压缩到太阳系 ($\sim 10^{15}$ 厘米) 那么大小的这样一个问题，而仅仅这个过程就会在直径 10^{15} 厘米的范围内产生约 1 个高斯的磁场。再发展到太阳那么大的一个天体就需要在两维方向进一步压缩，而最终的磁场约为 10^9 高斯。

因此，无论如何一定要把磁场排除掉。需知，为了避免某些角动量上的困难我们要求沿着一个离银心有相同径向距离的区域进行收缩，然而在这条途径中要避免磁场问题就很不容易。即使我们采取极端情况，即收集银心周围某个圆圈上的全部物质，我们还是不能完全克服磁场的困难，而必须寻求某种机制把磁场排除出去。

还应该说一下的是，为了克服角动量上的困难，人们已经提出了许多种办法。例如，收缩中的物质与外部气体的磁耦合可能是一条途径，由磁耦合所产生的粘性摩擦会使收缩气体的自转变慢。这种情况下，磁场确实有助于克服有关恒星形成问题中的一项困难，然而也从另一方面带来了它自己所固有的麻烦。

我们在 9.9 节中要对磁场进行比较详细的讨论，并推测星际磁场的种种起源；有关磁场形成的某些问题同试图破坏磁场时所遇到的问题在性质上是一样的。

在过去的十年内，人们就恒星如何形成的问题所提出的看法简直可以数以百计，但是离开真正解决问题仍然还十分遥远。这里我们所能介绍的只是一两种简单的概念，问题的真实答案可能要比这复杂得多。另

一方面，我们也许还会发现我们对某些观测结果的理解是错误的，星际空间的实际条件对恒星的形成来说也许确实要比迄今我们所认识到的情况远为有利得多。

9.8 星际微粒的取向问题

分析表明，银道面附近恒星所发出的星光既受到红化又发生了极化。人们对这一现象所作的解释（见 6.15 节）是这样的：在银道面附近有规则地排列着许多长条形或扁平状的微粒，微粒有自旋，自旋时微粒的长轴又大致位于与银盘相垂直的一些平面上；结果，透过微粒的星光便产生极化，极化的方向基本上与上述平面相平行（图 9.5）。

微粒怎样会变得按这种方式进行排列的呢？在问题(7.6)中，我们证明了微粒的角频率大约为 10^5 赫；因此，讨论静止粒子的取向问题是没有任何意义的。但是，有关微粒角动量矢量最优方向的另一类取向问题是存在的。

这可以通过一种简单的过程来加以说明。假设有一颗相当长的棒状微粒，它沿着一定的方向以速度 v 有规则地通过气体。气体是十分稀薄的，所以我们可以认为每次只有一个气体原子与棒发生碰撞。让我们先假定气体原子本身没有任何形式的随机运动速度，那么在任意一次给定的碰撞中转移给棒的均方根角动量值为

$$\delta L = \left[\frac{1}{a} \int_0^a (mvr)^2 dr \right]^{1/2} \sim \frac{mva}{\sqrt{3}} \quad (9.48)$$

式中 a 为棒长的一半， m 是原子的质量， v 是原子接近棒时

图 9.5 星光的极化。图(a)表示低银纬处的观测资料，而(b)、(c)则表示高纬度的资料。每根短线的中点即是恒星所在的位置，线的长度与极化率 P 成比例，线的方向就是电场矢量 E 的方向。小圆圈表示 $P < 0.08\%$ ，对于 $P < 0.6\%$ 用细线表示，而 $P > 0.6\%$ 就用粗线（见左上角所画的标度）
(Ma70)

的速度。通过随机游动计算（如方程(4.12)，(4.13)）可以求得经 N 次碰撞后的均方根（rms）角动量为 $N^{1/2} \delta L$ 。如果微粒的密度为 ρ ，宽度为 s ，而它的长度是 $2a$ ，我们就可以计算出使微粒可能具有的任何初始角动量发生显著改变时所经历碰撞次数 N ，这个数字是

$$N = \frac{M}{m} = 2\rho s^2 \frac{a}{m} \quad (9.49)$$

这儿 M 是微粒的质量。这个方程只是说明了微粒在经受 N 个原子——它们的总质量等于 M ——的碰撞之后，它的自转速度将会发生显著的改变；在发生这一系统性变化的同时还存在一项随机的角动量。一颗典型微粒最后所获得的均方根角动量值 $\langle L^2 \rangle^{1/2}$ 为：

$$\langle L^2 \rangle^{1/2} = N^{1/2} \delta L \sim \left[\frac{2m\rho a^3}{3} \right]^{1/2} sv \quad (9.50)$$

如果取 m 为原子氢的质量 1.6×10^{-24} 克， $v = 10^5$ 厘米·秒⁻¹， $a = 10^{-5}$ 厘米 $= 3s$ ， $\rho = 1$ 克·厘米⁻³，我们就得到 $L \sim 10^{-20}$ 克·厘米²·秒⁻¹。

问题 9.8 试证明这种情况下微粒的角速度为 $\omega \sim 10^6$ 弧度·秒⁻¹，并证明 $L \sim 10^{-20}$ 克·厘米²·秒⁻¹ 也代表了温度为 100K 时的热平衡值。

因为我们知道量子化后的角动量以 $\hbar$ 为单位,于是我们得到典型情况下的角量子数为

$$J \sim 10^7 \hbar \quad (9.51)$$

请注意,这个过程所获得的角动量的方向一定与 v 相垂直,这是因为作用在棒上的全部推力所产生的角动量变化 δL 的方向就在与 v 垂直的平面上。所以,在气体有规则地流过微粒之后就会使角动量轴产生某种最优取向。

现在我们来考虑另一种情况:微粒不再是以一定的速度有规则地通过气体,与此相反,气体中的原子也具有某个随机速度 u 。于是,随机游动过程赋予微粒的角动量要比式(9.48)所给出的值大 $\sim [(u^2/v^2)+1]^{1/2}$ 倍。这时,系统角动量大约只是随机角动量的 $[(u^2/v^2)+1]^{-1/2}$ 倍。在许多场合下, $u \gg v$,因而可能出现的角动量最优取向是不很明显的。但是,这也许已经足够了,因为星光只是部分极化而没有全极化。

我们还必须研究角动量矢量在哪些取向上会占有优势。为此,我们来考虑单次碰撞对椭长微粒的作用情况。我们看到,当 $v \gg u$ 时,如果棒的长度与 v 的方向相垂直,则碰撞发生的可能性很大。在这样的条件下,入射气体原子可投射的面积是比较大的。这时,任何一次碰撞的方向所引起的角动量变化将同时与气流方向及微流的长度相垂直。因此,绕着沿 v 方向上的某根轴的自转几乎是不可能出现的,而由于沿着这一方向的角动量取向不再存在,就可能使棒产生某种有选择性的最优取向——其长轴和气流的方向平行。上述过程由戈尔德(Gold)提出(Go52),在这一过程中与气流方向相垂直的取向几乎总是不会出现的(图9.6),即使 $v < u$ 这一普遍性的结论仍然成立。

由于极化的方向说明了在星光中电矢 E 垂直于银道面振荡的那部分光线最容易被散射或吸收,因而我们认为微粒的取向同样是以它们的长轴与银道面相垂直。这样,微粒就会吸收或散射与长轴相平行的光线(其情况有点象射电天线),在振荡 E 场的作用下电子在这一个方向上最容易流动。

尽管这儿所谈及的是微粒同气体原子间的碰撞问题,有关的结论对于微粒同光子的碰撞(图9.6(c))同样也是成立的。这时,如果要用方程(9.48)来计算 δL ,那就一定要用光子动量 $h\nu/c$ 代替原子动量 mv 。可以预料,在亮星附近这种光子效应将是很显著的。

哈威特(Ha70)提出了对小颗微粒起支配作用的另一种

图9.6 星际微粒的定向排列机制:(a)顺磁弛豫过程;(b)通过气体时射流所形成的定向排列;(c)通过光子场时射流所形成的定向排列,在过程(c)中光子的线动量使微粒产生自旋;过程(d)中光子的内禀自旋角动量是很重要的(见正文)

光子效应。在7.2节中我们说过,每个光子必然具有某个内禀角动量 $\hbar$ 。因此,当一个光子被一颗微粒吸收时,它的内禀角动量 $\hbar$ 也就转移了过去(图9.6(d));这意味着对每一个光子有 $\delta L = \hbar$ 。

现在,我们可以对这三种效应来作一番比较。每次碰撞时,由气体原子、光子的内禀和非内禀这三种角动量过程所转移的角动量分别为

$$\delta L_g \sim \frac{mva}{\sqrt{3}}, \delta L_i \sim \hbar \text{ 及 } \delta L_e \sim \frac{h\nu a}{\sqrt{3}c} \quad (9.52)$$

如果

$$\frac{a}{\sqrt{3}} \lesssim \frac{\lambda}{2\pi} \quad (9.53)$$

则第二项的作用要比最后一项来得大，这儿 $\lambda = c/\nu$ 为光子的波长。有关光线散射的资料表明， $a \sim 5 \times 10^2$ 埃 $= 5 \times 10^{-6}$ 厘米，所以对可见光来说光子的内禀效应要超过它的非内禀效应。在这种情况下，

$mva/\sqrt{3} \sim 10^{-29}v$ ，那么只要气体的碰撞频率与光子碰撞频率一样高，当所有的系统速度 v 大于 10^2 厘米·秒⁻¹ 时单个原子的效应就比较大。但是，实际情况完全不是这样，现在我们就来说明这一点。

如果我们认为气体和光子在同微粒发生相互作用时两者的作用截面是相同的，那么每秒钟内同气体和光子的碰撞次数差不多分别为 nv 和 Nc ； N 是星光——其中主要是可见光和近红外光——光子的数密度。星际空间气体密度 n 的典型数值在 $1 \sim 10^3$ 厘米⁻³ 这个范围内。

对于系统速度 v 的估计是比较困难的。在气体云之间的一次碰撞中，微粒可能以高达 10^6 厘米·秒⁻¹ 的系统速度穿过气体。但是，这种状况所能持续的时间大约只有

$$t = \frac{M}{2sanvm} \quad (9.54)$$

在这段时间内同微粒发生了碰撞的气体质量等于微粒本身的质量。对于 $n=10$ 厘米⁻³， $v=10^6$ 厘米·秒⁻¹ 以及前面所用的一些参数，我们有 $t \sim 2 \times 10^{11}$ 秒。因为在云的加速——能够使微粒穿过周围的气体作系统运动的就是这些加速作用——或碰撞之间的时间约为 10^{14} 秒，所以高速度状态所占的时间可能不到 1%。另一方面，辐射效应始终是存在的，在银河系内 $N > 0.02$ 厘米⁻³，所以 $Nc \sim 6 \times 10^8$ 秒⁻¹·厘米⁻²，与此相比 $nv \sim 10^7$ 。如果 $\sqrt{3}Nc\hbar > nmv^2a$ 或 $Nh\nu > mnv^2$ ，则光子效应起主要作用。

到目前为止我们只是考虑了气体和光子的定向效应，下一步我们就必须考虑它们的随机效应。当 v 与 u 相比为一小量时，每次原子碰撞的随机角动量为 $mu a/\sqrt{3}$ ，这也就是随机游动过程中的步长。每单位时间的碰撞次数与微粒的截面成正比，因为没有进一步确定这个截面的大小，我们就以 σ 表示之；碰撞次数还和气体密度与速度的乘积 nu 成正比。经过一段时间 τ 后，碰撞的随机游动过程所产生的均方根角动量为

$$L_g \sim \frac{mau}{\sqrt{3}} [\sigma nu \tau]^{1/2} \quad (9.55)$$

我们可以证明，在同样这段时间内微粒所发出的热光子数为 $\sim 1.5 \times 10^{11} T^3$ 厘米⁻²·秒⁻¹。每一个这样的光子所能赋与微粒的角动量为 $\hbar$ ，方向是随机的。因此，对于典型的星际微粒温度，比如说 15K，我们就有

$$L_p \sim [5 \times 10^{14} \sigma \tau]^{1/2} \hbar \quad (9.56)$$

以 $a=5 \times 10^{-6}$ 厘米， $u=10^5$ 厘米·秒⁻¹， $n=10$ 厘米⁻³ 代入之，我们发现

$$\frac{L_g}{L_p} \sim 2 \times 10^{-2} \quad (9.57)$$

仅仅对于大的微粒，或者是 $n \geq 10^3$ 的高密度区，或者这两个条件兼而有之的情况下，气体效应才和重发辐射的效应相等。

现在我们可以看出，如果发射出去的光子波长大致上比吸收波长长 100 倍，那么由于随机光子效应的存在，矢量 L_p 要比任何系统性辐射的各向异性效应所造成的分量 L_i 大十倍左右。光子的定向效应与造成微粒规则排列的辐射场的内禀非对称性有关。来自近银道面方向光子的照度要比垂直银道面方向的照度大 10 倍左右——正如我们所知道的那样银河的明亮部分只是一条狭长的带子。如果一颗典型微粒的角动量轴与位于银道面上某条直线间的交角为 θ ，那么 $\cos^2 \theta$ 的平均值大约就是 $L_i^2 / L_p^2 \sim 0.01$ 。观测得到的数字表明，这一比率可能比较接近于 0.02。

但是，因为我们对于星际微粒的实际比值 a/s 并不很了解，这就不可能很精确地计算出一个预期比值；因而在我们对微粒的结构取得更为详细的了解之前，也就只能满足于上面所得到的那些数字了。

下面我们来看一下由戴维斯和格林斯坦 (Greenstein) 首次提出的一种效应 (Da51)。在这个过程中，微粒受到它周围星际空间气体的轰击，于是就绕着某根任意的轴旋转。现在，我们可以预先假定微粒物质是顺磁性的。如果把这种物质放入某个磁场内，它就会建立起一个内场，场的方向与外场的方向平行 (图 9.6a)。但是，这种内场是不可能瞬即发生改变的。如果微粒以角速度 ω 绕着垂直与磁场的某个方向旋转，那么内场就被迫——同样以频率 ω ——改变它自己对于微粒内某根固定轴之间的相对方向。但是，由于内场方向的这种重新调整不是瞬即进行的，因而内场和外场之间就会出现某种不太大的错向，图 9.6(a) 说明了这种情况。感应内场和外加作用场之间的相互作用力图迫使两者的方向平行，作用力的方向和自转运动相反。这一阻力矩的大小与外场 B 、内场、微粒的体积 V 以及 ω 成正比，而内场的大小又与 B 成正比，所以：

$$\text{扭矩} = KVB^2\omega \quad (9.58)$$

这个式子所表示的是微粒自转轴与 B 的方向相垂直时的情况。当微粒绕着与 B 平行的某根轴旋转时，感应场与外场间的相对方向不会发生变化，因而也就没有任何阻力存在。

因此，对于任意方向的自转来说，其中旋转轴与磁场相垂直的自转分量将会在一时间

$$\tau = \frac{I}{KVB^2} \quad (9.59)$$

内因阻尼作用而停止，这儿 I 是绕该旋转轴的惯性矩。另一方面，旋转轴与 B 相平行的分量仍然是无阻尼的。这种阻尼过程称为顺磁弛豫。

对于一颗非球形的微粒来说，随着旋转运动的减慢它就往往会以这样一种方式排列起来，即它的最大惯性轴会变得与角动量轴相平行。这根惯性轴与椭长微粒的长轴相垂直，因而顺磁弛豫的净效应就会使椭长微粒以一定的方式排列起来——它们的长轴和磁场相垂直。对于那些我们在实验室内所熟悉的物质来说，考虑到在远离恒星的星际空间中典型的微粒温度约为 10K，则 K 值可能要小于 10^{-12} 。正如我们会看到的那样，由这一 K 值所算得的弛豫时间是比较长的，除非磁场至少为 10^{-5} 高斯。但是，这样的场强已经比我们估算得的银河系内所存在的总体磁场高了

三倍左右。而对于 $\sim 3 \times 10^{-6}$ 高斯这样一个更为合理的磁场来说（图 9.9），弛豫时间还要加长 10 倍。因此，琼斯（Jones）和施皮策（Spitzer）认为（Jo67b），微粒内铁原子之间的相容效应可能会产生一种被他们称之为超顺磁性的作用，这种作用可以产生足够大的 K 值。有关这类物质存在的实验证据看来还没有找到。

现在，我们必须把上述弛豫时间 τ 同由随机气体碰撞所产生的弛豫时间、以及还要同由于红外光子的再发射所产生的弛豫时间作一番比较。同气体效应(9.54)的比较表明

$$\frac{\tau}{t} \sim \frac{I}{M} \frac{2s_{\text{anum}}}{KVB^2} \sim 10^{-1} \quad (9.60)$$

这儿我们取 $I \sim Ma^{2/3}$ ， $n=10 \text{ 厘米}^{-3}$ ， $u \sim 10^5 \text{ 厘米} \cdot \text{秒}^{-1}$ ， $3s=a \sim 5 \times 10^{-6} \text{ 厘米}$ ， $V \sim s^2 a$ ， $B \sim 10^{-5} \text{ 高斯}$ ， $K \sim 10^{-12}$ 。因此，顺磁弛豫约为 $\tau/t \sim 10\%$ 。对于更合理的 B 值来说则为 ~ 0.01 ；这一数值同光子排列差不多。即使这样，对于 K 值的估计可能还是偏高了，因而顺磁弛豫效应可能比上面估计的结果更为微弱。

所以，我们就面临着这样一种状况：如果银河系的磁场很强，而且它的主要方向与银道面平行的话，那么我们就有可能用磁场来解释微粒的定向排列。如果气体对微粒的相对运动与银道面垂直，那么戈尔德过程就可以对微粒的取向给出正确的解释，而且我们知道光子流正处在光子过程中应有的方向上。但是，为了在定量计算中取得比较一致的结果，我们对上述每一种机制都不得不人为地改变有关微粒、气体或磁场、或者所有这三者的性质或预期参数。很可能所有这些过程在微粒的定向排列中都起着重要的作用，但是因为任何一种过程都没有能完全克服所存在的种种困难，这也就说明了很可能我们还没有考虑到某种在各个方面都是更为重要的、起着支配作用的因素！

9.9 宇宙磁场的起源

我们知道，在恒星以及星际介质中都有磁场存在。象太阳那样的恒星，典型的表面磁场大约为一个高斯，但是某些 A 型星的表面磁场可以高达 40000 高斯数量级。星际介质中的磁场自然要比这微弱得多，典型的场强约为 10^{-6} 高斯；不过变化是很大的。尽管测量的精度应该探测出强度为 10^{-6} 高斯的磁场，但是在银河系的某些区域内却什么磁场也没有探测到；然而在另一些区域中则存在着相当强的磁场。例如，我们相信在蟹状星云这个超新星遗迹中的磁场强度要高达 10^{-4} 高斯，弗舒尔（Verschuur）在猎户座内观测到了强度约为 5×10^{-5} 高斯的一些磁场（Ve70）。

这些磁场是从什么地方来的？它们是原始就有的吗？它们的起源是一个需要追溯到宇宙某些早期阶段的宇宙学问题吗？对于这一切我们都毫无所知！

如果磁场和物质引进宇宙无关——不论是原始引进的也好、还是不断地引进的也好，那么它们应该是在后来某个时期生成的。因此，我们可以设想有两种不同的可能途径。

(1) 磁场是在星际或星系际介质中形成的，而它们之所以出现于恒星内部主要是因为恒星形成于星际介质，或者

(2)磁场在恒星内部形成，然后随着物质从恒星向外抛出，磁力线便进入星际空间。这种过程可能同蟹状星云的强磁场是一致的，也同太阳风沿着磁场运动这一观测事实相符。我们不知道这种磁场的某些部分会不会脱离太阳而在星际介质内到处游荡；但是，许多恒星的恒星风要比太阳风的质量大得多，因而随着质量的外流，磁场的外流也许就是一件很平常的事了。

一旦存在某个磁场，不管它多么微弱，总可以通过气体的湍流运动，或者通过携带磁场的介质所产生的其他形式的运动而得到加强。穿过任何给定表面的总磁通量是不可能通过这种方式增大的，但是如果把场的方向折迭多次，局部的磁场强度就可以大大增强，而同时却并不要求有很高的总磁通量（图 9.7）。因此，由于湍流运动的存在就不需要有很强的初始磁场。湍流使磁力线扩展并折迭起来，结果微弱的种子磁场就可以得到加强。

让我们来看一下这种作用的效果可以有多大。如果银河

图 9.7 总磁通量相同时的两种磁场结构。(a)表示场强处处都是很弱的；(b)表示某些地方的场强很高。图中场强的大小与通过单位横坐标长度的磁力线数目成正比。本图所表示的是磁力线所在的平面同纸面相垂直时的情况

系内某处所存在的初始磁场为 B_0 ，速度为 v 的气流可以使磁力线扩展，扩展的最大速度为 v 。同样，磁场本身的折迭作用最大可能以速度 v 出现，所以湍流运动增强磁场的的能力要受到运动速度的限制。

磁场增强的倍数基本上可以由包含种子磁场的初始体积 V_0 同最终体积 V_f 之比来给出，其中 V_f 是速度为 v 的直线运动使该区域扩展后所得的体积。

$$\therefore \frac{B_f}{B_0} = \frac{V_f}{V_0} \quad (9.61)$$

式中 B_f 为通过恒定体积 V_0 内的扩展和折迭作用所得到的最终磁场强度。

在银河系内有时会观测到 10^3 公里·秒⁻¹ 左右的爆发式运动速度，我们可以用这个数字表示极大湍流速度。银河系的初始直径约为 30 千秒差距，银盘厚 100 秒差距。如果扩展运动以 10^3 公里·秒⁻¹ 的速度持续进行了 10^{10} 年，则最后达到的距离将为 10 百万秒差距，于是湍流的折迭作用将使磁场强度增大 300 倍或 10^5 倍，这取决于发生湍流运动的主要方向是在银道面内还是与银道面相垂直。

由于我们估计目前银河系内的场强约为 3×10^{-6} 高斯，因而最初的种子磁场至少必须为 3×10^{-11} 高斯左右。看来，这个结论是确定无疑的。

因此，这样强度的原初磁场必然一开始就已存在，不然的话就一定存在能产生这样一个磁场的某种机制。人们提出了若干种过程来说明这样一个种子磁场得以建立的原因，这个磁场在后来可以通过湍流运动的作用使磁场强度增大。

坡印廷？罗伯逊(Poynting？Robertson)效应所提供的一种过程也许是比较容易理解的，这种效应可以对绕着某个明亮的大质量天体作轨道运动的电子产生减速作用，而质子却几乎不受任何影响，由此所产生

的电流就会建立起一个微弱的磁场（Ca66）。

这类效应所赋予电子和质子的作用力是不同的，有时被称为蓄电池效应，因为它所建立的电流就象一个蓄电池的作用一样。这儿我们仅仅对图 9.8 所表示的坡印廷-罗伯逊效应作一些说明，这种效应能够为建立磁场提供足够的能量。不过，一部分也许甚至大部分能量可能最终转变为某种形式的非磁场能。对这类效应进行全面的分析是十分复杂的，其详细情况与以下诸方面因素有关：电子和质子间的相互作用，作用在电子和质子上的辐射压的直接差异，对光源的矢径方向略有不同的正负电荷的合成趋向，等等。在我们能够肯定蓄电池效应确实是星际磁场的发生器之前仍然有大量的工作要做，但是这儿所讨论的效应应该作为可能有效的那类机制的一个实例。

图 9.8 作用在电子上的坡印廷-罗伯逊阻力，因发光天体对作轨道运动的等离子体的作用所产生。对质子的阻力要小得多，因此就能产生某种微弱的净电流

我们看到，作用在电子上的坡印廷-罗伯逊阻力是很大的，这是因为汤姆孙截面（见方程(6.102)）对电子来说要比质子大 $(m_p/m_e)^2 \sim 3 \times 10^6$ 倍；这儿 m_e 和 m_p 是电子和质子的质量。对电子的负加速度比对质子更要大上 $(m_p/m_e)^3$ 倍，因为对电子而言阻力所作用的质量比较小。由 (5.48) 式我们看出，对于一个作圆周运动的电子来说，轨道角动量 L 的变化率为

$$\frac{1}{L} \frac{dL}{dt} = \frac{L_s}{4\pi R^2} \frac{\sigma_T}{m_e c^2} \quad (9.62)$$

式中 L_s 为源的光度， R 是到光源的距离，而 σ_T 是汤姆孙截面。单位时间内在电子上所作的功 dW/dt ，等于作用在电子上的力 F 乘以电子在单位时间内通过的距离 v 。

$$\frac{dW}{dt} = Fv = \left(\frac{1}{R} \frac{dL}{dt} \right) \frac{L}{m_e} = \frac{L_s \sigma_T L^2}{4\pi R^4 m_e^2 c^2} \quad (9.63)$$

可以通过这种方式获得减速的电子数目最多为 $N \sim 4\pi R^2 / \sigma_T$ ，因为要是电子数比这更多的话，有一些电子就会把另一些电子遮蔽掉。由此可见，能够对云所做的极大总功为

$$\frac{NdW}{dt} \sim \frac{L_s}{R^2} \frac{L^2}{m_e^2 c^2} = L_s \frac{v^2}{c^2} \quad (9.64)$$

这就给出了能够在体积 V 内建立起一个磁场的最大功：

$$NW \sim V \int \frac{d}{dt} \left(\frac{B^2}{8\pi} \right) dt \sim \frac{B_f^2}{8\pi} V \quad (9.65)$$

式中 $B^2/8\pi$ （见 6.10 节）是瞬时磁场能量密度。对银河系来说，气体包含在一个体积为 $V \sim 3 \times 10^{66}$ 厘米³ 的盘内，且有 $B_f \sim 3 \times 10^{-6}$ 高斯。

$$\therefore NW = \frac{L_s v^2}{c^2} \tau \sim 10^{54} \text{ 尔格} \quad (9.66)$$

让我们先来了解一下这样一个问题：如果银河系曾经在某个时期，比如说在 3×10^6 年内有类星体那么明亮，试问它能否产生这样一个总体磁

场。取典型类星体的内部速度 $v \sim 10^8$ 厘米·秒⁻¹, $\tau \sim 3 \times 10^6$ 年 $\sim 10^{14}$ 秒; 我们必然要求峰值效率处 $L_s \sim 10^{45}$ 尔格·秒⁻¹ 才能产生强度为 $\sim 3 \times 10^{-6}$ 高斯的磁场。

对于产生这样大小的总磁通量来说, 上面这个要求看来并不是毫无根据的, 所以也许我们甚至都不一定再要求有下一步的湍流放大作用。但是, 如果想在现在这样一个银河系内办成同一件事, 那我们会发现电子数是太少了, 以至大约只有总磁通量的十万分之一受到银心附近——那儿的的速度约为 10^8 厘米·秒⁻¹——电子的散射。在那儿 $L_s \lesssim 10^{43}$ 尔格·秒⁻¹, 所以, 作用在电子上的总功率要减小 $\sim 10^7$ 倍。在 10^{14} 秒内, 对银河系说可以形成一个 $\sim 3 \times 10^{-10}$ 高斯的种子磁场——在 10^{10} 年内强度可达 $\sim 2 \times 10^{-8}$ 高斯。这样的种子磁场可以通过上面所说的湍流作用来加以增强。

人们还提出了能够通过对电子和离子的不同作用来产生类似的电流的其他一些过程, 其中有一种过程的工作原理以粘滞阻力为基础 (Br68)。

这一类的过程同样可以用来破坏磁场。如果作轨道运动的等离子体包含有一个初始磁场, 那么电子所受阻力在某一方向上也许会产生一种与磁场反向的电流。这类过程在原恒星阶段中可能会起到某种破坏磁场的作用。

为了完整起见我们也还应该提一下所谓发电机效应, 这种效应同样也能产生磁场: 但是, 关于它们在建立宇宙磁场中可能起的作用我们知道得并不多。这是一个很困难的理论问题。

9.10 星际介质中的宇宙线粒子

宇宙线粒子主要是高能电子和质子, 它们对星际介质所贡献的能量密度约为 10^{-12} 尔格·厘米⁻³。这同平均星光密度以及气体原子、离子和电子的动能差不多: 前者约为 7×10^{-13} 尔格·厘米⁻³, 后者的范围在低密度气体云中约为 10^{-13} 尔格·厘米⁻³, 在高密度 H II 区中大约是 10^{-9} 尔格·厘米⁻³。

在宇宙线、气体和辐射场这三者之间会不会存在某种相互作用呢?

事实上这种相互作用还是相当强的, 在这一节中我们就要来估算不同条件下的作用强度。对宇宙线粒子来说, 这种相互作用通常就意味着某种能量损失。

这类损失可以按下述方式进行分类 (Gi69), (Gi64):

(a) 能量 $\epsilon \gg mc^2$ 的高度相对论性电子通过若干种不同的过程把能量释放给星际介质, 这些过程有时通称为电离损失。其中包括 (i) 原子和离子的电离, (ii) 高能原子或离子态的激发, 以及 (iii) 切仑科夫辐射的产生。这些效应有时是联系在一起的, 决定它们之间相互关系的部分因素是电子能, 还有部分因素是介质的性质。中性气体和电离气体所引起的损失率是不同的, 表 9.4 给出了有关这些能量损失以及下面所要讨论的其他一些宇宙线损失过程的表达式。

(b) 这些超相对论性电子也可能遭受阻尼损失, 当电子受到其他电子或介质中原子核的偏转作用时就会发生这种损失。偏转相当于某种加速作用, 结果使粒子产生辐射。对于氢已经普遍电离的等离子体和中性气

体这两种情况来说，损失率也是不同的。

(c)同步加速损失和康普顿损失（见 6.18 和 6.20 两节）的损失率是相互有牵连的，它们分别与磁场和辐射场的能量密度成正比。我们可以认为这两种过程具有类似的性质，从下面的简化讨论就可以看出这一点。设想有两束电磁波（光子），它们的传播方向恰好相反，并且两者的磁场矢在幅度和频率上都是相同的，而它们的电场幅度则正好反向，但频率也是相同的。在某些确定的时刻这两个波的电场和坡印廷矢量 S 都互相抵销，于是剩下的就是一个纯磁场，场的能量密度等于辐射场内的总能量。这时同步加速损失应该出现，而这种同步加速损失应该相当于因逆康普顿散射而产生两个能量相等

表 9.4 星际介质中宇宙线粒子的能量损失 (Gi69)

(a)	$\epsilon \gg mc^2$ 电子的电离损失	等离子体	$-\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{2\pi e^4 n}{mc} \left\{ \ln \frac{m^2 c^2 \epsilon}{4\pi e^2 n \hbar^2} - \frac{3}{4} \right\}$ $= 7.62 \times 10^{-9} n \left\{ \ln \left(\frac{\epsilon}{mc^2} \right) - \ln n + 73.4 \right\} \text{ 电子伏特} \cdot \text{秒}^{-1}$
		中性气体	$-\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{2\pi e^2 n}{mc} \left\{ \ln \frac{\epsilon^3}{mc^2 x_0^2} - 0.57 \right\}$ $= 7.62 \times 10^{-9} n \left\{ 3 \ln \left(\frac{\epsilon}{mc^2} \right) + 20.2 \right\} \text{ 电子伏特} \cdot \text{秒}^{-1}$
	电子辐射损失	等离子体	$-\frac{d\epsilon}{dt} = 7 \times 10^{-11} n \left\{ \ln \left(\frac{\epsilon}{mc^2} \right) + 0.36 \right\} \frac{\epsilon}{mc^2} \text{ 电子伏特} \cdot \text{秒}^{-1}$
		中性气体	$-\frac{d\epsilon}{dt} = 5.1 \times 10^{-10} \frac{\epsilon}{mc^2} \text{ 电子伏特} \cdot \text{秒}^{-1}$
	电子同步加速损失及康普顿损失		$- \left[\left(\frac{d\epsilon}{dt} \right)_s + \left(\frac{d\epsilon}{dt} \right)_c \right]$ $= 1.65 \times 10^{-2} \left[\frac{H^2}{8\pi} + \rho_{ph} \right] \left(\frac{\epsilon}{mc^2} \right)^2 \text{ 电子伏特} \cdot \text{秒}^{-1}$
	核的损失	中性气体	如果 $Mc^2 \ll \epsilon \ll \left(\frac{M}{m} \right) Mc^2$, $-\frac{d\epsilon}{dt} =$ $7.62 \times 10^{-9} Z^2 n \left\{ 4 \ln \left(\frac{\epsilon}{mc^2} \right) + 20.2 \right\} \text{ 电子伏特} \cdot \text{秒}^{-1}$ 如果 $\epsilon \gg \left(\frac{M}{m} \right) Mc^2$, $-\frac{d\epsilon}{dt} =$ $7.62 \times 10^{-9} Z^2 n \left\{ 3 \ln \left(\frac{\epsilon}{mc^2} \right) + \ln \frac{M}{m} + 19.5 \right\} \text{ 电子伏特} \cdot \text{秒}^{-1}$
		等离子体	$-\frac{d\epsilon}{dt} =$ $7.62 \times 10^{-9} Z^2 n \left\{ \left(\ln \frac{W_{\max}}{mc^2} \right) - (\ln n) + 74.1 \right\} \text{ 电子伏特} \cdot \text{秒}^{-1}$ 如果 $Mc^2 < \epsilon \ll \left(\frac{M}{m} \right) Mc^2$, $W_{\max} = 2mc^2 \left(\frac{\epsilon}{mc^2} \right)^2$ 如果 $\epsilon \gg \left(\frac{M}{m} \right) Mc^2$, $W_{\max} = \epsilon$

ρ_{ph} 是光子的能量密度, M 是核的质量, Z 是核电荷, ϵ 是粒子能量, n 是介质中的电子密度, 而 x_0 是电离能。

的光子时所造成的能量损失。表 9.4 中给出了这两种损失之和的表达式。

(d) 在表 9.4 中我们还给出了宇宙线场中有关质子和核的各项电离损失。同步加速损失和康普顿损失应该比电子的同类损失约小 10^{13} 倍, 也就是两种粒子质量比的四次方倍。在宇宙线核同星际气体介质的核及微粒之间, 也存在着各种各样的相互作用。

表 9.5 截面、平均自由程 A 和吸收长度 λ^*

宇宙线粒子	碰撞截面	平均自由程 Λ	吸收长度 λ
P	3×10^{-26} 厘米 ²	72 克·厘米 ⁻²	—克·厘米 ⁻²
α	11	20	34
Li, Be, B	25	8.7	10
C, N, O, F	31	6.9	7.8
$Z \geq 10$	52	4.2	6.1
Fe	78	2.8	2.8

*几组不同元素的宇宙线粒子，同由 90%的氢和 10%的氦（以原子的数密度计）所组成的星际介质之间的相互作用情况（参见正文）(Gi69)。

表 9.5 给出了若干组不同的核粒子与星际气体的相互作用情况，其中气体原子数的 90%是氢，10%是氦。

表中的平均自由程 Λ 给出了核在两次碰撞之间所经过的距离。实质上，在质子所通过的物质层的有效厚度内所包含的质量为 72 克·厘米⁻²，对于密度约为 10^{-23} 克·厘米⁻³ 的冷云来说，这相当于要通过大约 2 百万秒差距这么长一段距离。由于宇宙线粒子在银河磁场内的运动路径是螺旋形的，它们通过这么一段距离大约需要 6×10^6 年。质量比较大的那几组宇宙线核的碰撞较为频繁，它们的吸收长度 $\lambda = \Lambda / (1 - P_i)$ （如果某次碰撞重新产生出一个属于原来同一组的宇宙线核，则 P_i 就表示出现这样一次碰撞的几率）要比平均自由程略为长一些，表 9.5 中的第四栏说明了这一点。

图 9.9 太阳附近的磁场方向，图中的标度为银道坐标系。这些资料实际上就是由自转及色散测量求得的脉冲星磁场的平均视向分量。场强大于 0.3 微高斯者，圆的直径与场强成比例。如果磁场方向朝向观测者（正向自转测定），图上以黑色圆表示之；而背离观测者时就以不涂黑的圆圈表示。图中标出了 1 微高斯场强的圆直径大小。这些观测结果同沿着本旋臂方向存在一个大约 3.5 微高斯的比较均匀的磁场是相一致的。注意，尽管有相当大的变化，最大场强方向出现在银经 60° 和 240° 附近；这两个方向大致上也就是本旋臂内恒星和气体成分集中的方向(Bo71, Ma72b)

问题 9.9 如果宇宙线核子同行星际介质核每次碰撞所引起的能量损失可以同核子的总能量相比较

$$\left(-\frac{d\epsilon}{dt}\right)_{\text{核子}} = c n \sigma \epsilon \quad (9.67)$$

试证明对宇宙线粒子来说，这种损失要超过表 9.4 所列出的其他过程的作用。

问题 9.10 试利用上述质子能损率，以及具有图 9.11 所示谱分布的宇宙线电子的能损率，来计算宇宙线中电子和质子这部分能量损失的大致速度，并估计宇宙线对星际介质的加热速度。有人认为这种宇宙线加热效应是很重要的。

图 9.10 表示进入地球大气的宇宙线质子和 α 粒子的观测流量，许多

元素都有类似这样的观测资料。在大气顶部的

图 9.10 地球附近质子和 α 粒子的宇宙线流量。任何给定能量处的质子流量约比电子流量强 100 倍 (Me69) (误差棒已略去)。能量更高时流量继续下降, 流量 J 服从指数规律 $dJ/dE \propto E^{-\lambda}$, 其中 $\lambda \sim 2.6$ 。不同元素所有的核看来都服从这样的规律, 它们的流量? 能量曲线是十分相象的宇宙线流量中大约有 90% 的核是由质子组成的, α 粒子约占 9%, 剩下的粒子是一些比较重的核。奇怪的是 Li, Be, B 和 He^3 的含量特别多, 而它们在别的天体内的总体丰富度是不高的, 其原因可能是在恒星中心那样的温度条件下这些元素很容易遭到破坏 (8.12 节)。如果它们是由碳、氮、氧这些宇宙线粒子通过和星际介质中的氢核的碰撞所产生的话, 那么我们就可以对这些元素之所以存在的原因作出解释。因而, 较轻的元素就是质量较大的母粒子的散裂产物。要使这些低质量元素的含量与实测数值相等并得到应有的 He^3/He^4

图 9.11 地球附近的宇宙线电子谱 (Me69), 电子和正电子的丰富度是差不多的

比, 则能量超过十亿电子伏特的宇宙线粒子所必须通过的物质大约为 $3 \text{ 克} \cdot \text{厘米}^{-2}$ (Re68C)。这说明如果粒子在银河系内始终作螺旋状运动的话, 它的年龄可能在 2×10^6 年左右。显然, 这个数字代表了宇宙线粒子从银盘扩散出去所需要的平均时间。

我们还发现, 宇宙线流中的重元素远比陨星或太阳大气中的含量丰富得多。这一点意味着这些高能粒子可能起源于超新星爆发、脉冲星或白矮星, 这类天体处于恒星演化的后期阶段, 它们所产生的重元素浓度是很高的 (Co71b)。

银河系内宇宙线的流量看来是相当稳定的。人们分析了陨星和月面样品中重核所留下的踪迹, 结果表明, 宇宙线的总流量以及重核的相对丰富度, 在过去的 5×10^7 年内不可能有很大的变化。

正电子的丰富度比电子稍微低一些, 两者在任何给定能量处的流量约为质子流量的 1% (图 9.10 和 9.11)。有意思的是, 到达地球的 X 射线流的能谱 (图 9.12) 和宇宙线电子谱大体上是相似的, 这一点表明 X 射线可能由宇宙毫米和亚毫米辐射流对电子的逆康普顿散射所形成。不过, 其他的机制也许同样可以成立 (Po71)。

图 9.12 从地球大气外所观测到的弥漫 X 射线谱 (We71)

9.11 X 射线星系和类星体

许多星系, 特别是塞佛特星系 NGC1275 和 NGC4151, 巨椭圆星系 M87 ——它也是一个射电源, 射电源半人马 A, 以及类星体 3C273 等, 它们是一些强有力的 X 射线发射源。NGC1275 所发出的 X 射线流总计达 2.4×10^{44} 尔格 $\cdot \text{秒}^{-1}$ (Gu71), 而 3C273 如果是处于它的红移所标志的宇宙距离处的话, 那么所发出的 X 射线流量为 1.5×10^{46} 尔格 $\cdot \text{秒}^{-1}$ (Po71)。这些天体在 X 射线频段所发出的能量比所有其他频段的总和还要来得多, 而 NGC1275 的 X 射线流可以比得上普通旋涡星系所发出的可见光的流量。

3C273 和上面提到的两个塞佛特星系都是强有力的红外辐射源 (K170a)(K170b)。因此,很可能某些这类致密源中的相对论性电子,通过逆康普顿散射使强烈的红外辐射变成 X 射线频段的辐射 (We71)。至于射电发射则是由高能电子

图 9.13 若干个河外天体的射电谱。注意某些天体具有 6.19 节中所讨论过的正常斜率,而另一些则表现出很为可观的曲率(Ke69, Ja70a)。流量密度单位是 10^{-26} 瓦·米⁻²·赫⁻¹

在它们局部磁场内作螺旋状运动时发出的同步加速辐射所产生的。

红外发射源可能就是微粒,它们发出热辐射,而通过相对论性宇宙线粒子的轰击作用不断地给这些微粒补充能量。

天体辐射中的某一成分是否起因于热发射、逆康普顿散射、同步加速辐射或者别的什么机制——关于这样一个问题,当对这些天体在不同波长范围内亮度的变化有了更多的了解之后是应该会弄明白的。正如 6.21 节中所已讨论的那样,某些辐射机制由于内在的原因它们的起落或衰落时间要比另一些机制来得快,因而我们就可以根据亮度的变化率来确定波谱中哪些频段的发射与同一种发射机制有关,而可能的机制又该是哪一种。

补充问题

9.11 一颗纯粹由氢所组成的恒星的极大光度是有限度的。当它的光度? 质量比超过 $4 \times 10^4 L_{\odot}/M_{\odot}$ 时,恒星的表面层就会被抛出去;行星状星云外壳的发展可能就是这样一种情况。(a)如果电子的辐射斥力超过了恒星对质子的引力,恒星便束缚不住这些氢离子,证明在这种情况下就会出现上述的抛射现象。(b)试证明一颗主要由 He^4 , C^{12} , O^{16} 或 Si^{28} 组成的恒星,在它的外部包壳被抛射之前其光度? 质量比可高达 $8 \times 10^4 L_{\odot}/M_{\odot}$ 。

9.12 太阳风是由温度高达 $\sim 2 \times 10^6 \text{K}$ 的日冕产生的。风速约为 400 公里·秒⁻¹,高于质子的声速;在这个温度下电离氢的声速约为 130 公里·秒⁻¹。试说明这一差异的部分原因如下:对于一团有限气体来说,粒子的运动速度方向是随机的;如果这团气体可以自由膨胀,当体积变得非常大、以致粒子间的碰撞很少出现时,全部粒子都将沿着径向运动。在所有恒星风内发生的过程大概都与上述情况相类似。假定冕内的质子、电子和磁场这三者是能量均分的。

9.13 彗星内的电离气体因受斥力的作用背向太阳沿着直线彗尾运动。这一过程看来是以下述方式进行的:我们相信,象 C0 这一类最初出现于彗头内的分子要同太阳风中的质子发生电荷交换。在这个过程中,一个电子从 C0 分子转移给质子,而且交换作用的截面是很大的,达 10^{-15} 厘米² 左右。于是,新生的 C0^+ 离子就被迫随同太阳风所携带的磁场一起运动;磁场的方向基本上与风的方向正交。如果在任何给定的磁力线上大约有半数质子经历了电荷交换,试利用表 9.1 中有关太阳风的数据计算彗尾内离子的运动速度。

9.14 我们相信 X 射线源天蠍 X? 1 是一个银河天体,其中电子密度约为 10^{16} 厘米⁻³ 的等离子体从半径为 $\sim 10^9$ 厘米、温度为 $5 \times 10^7 \text{K}$ 的一个

范围内发出 X 射线。人们已经提出了几种可能的模型，有一种模型认为，能量是由跌落在一颗白矮星表面上的物质的引力能产生出来的。考虑到物质吸积得越快，由它所产生的辐射的强度就越高，因而物质在白矮星表面上的跌落率必然很大，比方说要在了一颗密近双星内通过虹吸作用使物质落在白矮星的表面上。试计算所必要的物质跌落率，并通过引力能和热能间的比较从数量级上证明这种跌落所产生的能量是足够的 (Pr68)。人们还提出了许多涉及到白矮星和中子星的其他模型，我们希望能通过这些模型的不同的预期结果来对它们各自的可能性作出判断。

问题解答

9.1 由式(4.117)有 $c_v = R / (\gamma - 1)$ 。理想气体定律给出 $T = P / R \rho$ ，于是就得到式(9.23)的结果。

9.2 因为 $u \gg c$ ，我们可以写出

$$\begin{aligned} v_D &= \frac{1}{3}(-2u + 2u\sqrt{1 + \frac{9c^2}{4u^2}}) \sim \frac{2u}{3}(-1 + 1 + \frac{9c^2}{8u^2}) \\ &= 3c^2 / 4u \end{aligned}$$

9.3(a)

$$\rho_{\text{总}} \sim \frac{4 \times 10^{30}}{\frac{4\pi}{3}(15 \times 10^{14})^3} \sim 4 \times 10^{-13} \text{ 克} \cdot \text{厘米}^{-3}$$

从表 1.2

$$\rho_{\text{Fe}} / \rho_{\text{总}} \sim 8.9 \times 10^5 / 4.7 \times 10^{10} \sim 2 \times 10^{-5}$$

$$\rho_{\text{Fe}} \sim 8 \times 10^{-18} \text{ 克} \cdot \text{厘米}^{-3}$$

$$P_{\text{Fe}} = \frac{\rho_{\text{Fe}}}{m_{\text{Fe}}} kT \sim 10^{-11} T, \text{ 由式(4.78)} T \sim \left(\frac{L}{16\pi R^2 \sigma} \right)^{1/4}$$

对于 $T \sim 10^3 \text{ K}$, $P_{\text{Fe}} \sim 10^{-8} \text{ 达因} \cdot \text{厘米}^{-2} \sim P_{\text{Fe 蒸发}}$

因此，铁可能凝聚的地方离太阳的距离要大于

$$R \sim \left(\frac{L}{16\pi\sigma T^4} \right)^{1/2} \sim 10^{12} \text{ 厘米}$$

(b) 碳凝聚的地方离太阳的距离大约是铁的四分之一。

(c) 10 天文单位处的温度大于 $T \sim 160 \text{ K}$ 。利用表 9.3 中 H_2O 的数据可以导出有关 H_2O 的两个系数 A 和 B 的大致数值，于是我们发现在整个星云范围内蒸发压 $P_{\text{H}_2\text{O}} \gtrsim 10^{-7} \text{ 托} \sim 10^{-4} \text{ 达因} \cdot \text{厘米}^{-2}$ 。另一方面，如果假定全部氧元素都以 H_2O 的形式出现，则由表 1.2

$$\rho_{\text{H}_2\text{O}} \sim 1.5 \times 10^{-15} \text{ 克} \cdot \text{厘米}^{-3}, P_{\text{H}_2\text{O}} \gtrsim \frac{\rho_{\text{H}_2\text{O}}}{m_{\text{H}_2\text{O}}} kT_{\text{mm}} \sim 10^{-4} \text{ 达因} \cdot \text{厘米}^{-2}$$

因此， H_2O 就有可能在星云的边缘凝聚。但是，由于再靠近太阳温度就迅速上升，因而 H_2O 凝聚的地方到太阳的距离就不可能比大行星来得近。但是，我们应该注意的是象氨 (NH_3) 这一类其他物质的存在可能会使蒸发压有所降低，因为这时的 H_2O 分子被束缚得更牢固了。

9.4 对于圆周运动由力的平衡导得

$$r\omega^2 = \frac{3}{4\pi\rho s^3} \left(\frac{4\pi M\rho s^3 G}{3r^2} - \frac{L\pi s^2}{4\pi cr^2} \right)$$

$$\text{速度} = \omega r = \left[\frac{1}{r} \left(MG - \frac{3 \times 4 \times 10^{34}}{16\pi\rho sc} \right) \right]^{1/2}$$

速度差为

$$\Delta v = \left[\frac{1}{r} \left(MG - \frac{3 \times 4 \times 10^{34}}{32\pi sc} \right) \right]^{1/2} - \left[\frac{1}{r} \left(MG - \frac{3 \times 4 \times 10^{34}}{64\pi sc} \right) \right]^{1/2}$$

对于 $\rho=2$ 和 4 克·厘米⁻³，以及 $s \sim 10^{-3}$ 厘米，得 $\Delta v \sim 10^5$ 厘米·秒⁻¹。

9.5 (a) 从问题(3.7)我们知道，半径为 s 、密度为 ρ 的一个物体，其总俘获截面等于几何截面的两倍

$$\frac{4\pi}{3} \frac{2G}{V_0^2} \rho R^2 = 1$$

$$(b) \frac{dM}{dt} = 4\pi\rho R^2 \frac{dR}{dt} = \rho_0 V_0 \pi R^2 = \rho_0 V_0 \pi \left[R^2 + \frac{2MGR}{V_0^2} \right]$$

$$\int \frac{4\rho dR}{\rho_0 V_0 \left[1 + \frac{8\pi}{3} \frac{GR^2}{V_0^2} \right]} = \int dt = \tau$$

$$\text{开始时} \frac{dM}{dt} = 2\rho_0 V_0 \pi R^2 = \frac{3}{4} \frac{\rho_0}{\rho} \frac{V_0^3}{G} \sim 10^{10} \text{ 克} \cdot \text{秒}^{-1}$$

(c) 对于大天体 $\frac{dM}{dt} \propto R^4$ ，因为 $M \propto R^3$ ，所以又有

$$\frac{dM}{dt} \propto M^{4/3}$$

$$9.6 \text{ 开始时} \frac{dM}{dt} \sim 4\pi s^2 \frac{ds}{dt} \rho = 10^{-2} \rho_0 V_0 s^2$$

$$s = 10^{-2} \frac{\rho_0 V_0}{4\pi} t \sim 3 \times 10^{-10} t$$

s 为粒子的半径。从问题(9.5(a))我们知道，当

$$s \sim [3V_0^2 / 8\pi\rho G]^{1/2} \sim 10^8 \text{ 厘米}$$

时引力开始起作用，所以对于一个 $s \lesssim 10^6$ 厘米=10 公里的天体来说，引力的作用可以忽略不计。于是增长过程所需的时间为

$$t \sim \frac{10^6}{3 \times 10^{-10}} \sim 3 \times 10^{15} \text{ 秒} \sim 10^8 \text{ 年}$$

9.7 $n_H Ra_v = 1$

因为大部分原子处于最低能态，我们就用 $a_v \sim 6.3 \times 10^{-18}$ 厘米²，所以有

$$R \sim \frac{1.6 \times 10^{17}}{n_H} \text{ 厘米}$$

(a)对赖曼 α 来说，振子强度 f 为 0.42，所以

$$\sigma \sim \frac{3\lambda^2 f}{2\pi} \sim 3 \times 10^{-11} \text{ 厘米}^2$$

这就给出了吸收距离为

$$\frac{1}{\sigma n_H} \sim \frac{3 \times 10^{10}}{n_H} \text{ 厘米} \sim 2 \times 10^{-7} R$$

但是，

(b)多普勒位移可能使得某个原子不能吸收另一个原子在中央发射频率处的辐射。因此，平均吸收截面为

$$c \sigma \gamma / v < v^2 >^{1/2}$$

而平均自由程约为

$$\frac{v < v^2 >^{1/2}}{c \gamma \sigma n_H} \sim \frac{10^{13}}{n_H}$$

9.8 对于 $T \sim 100K$ 的气体来说， $kT \sim 1.4 \times 10^{-14}$ 尔格，而惯性矩 $1 \sim 10^{-26}$ 克·厘米²的微粒要使 $kT \sim I\omega$ ，就有 $\omega \sim 10^6$ 弧度·秒⁻¹。因此，角动量 $L \sim I\omega$ 有一个热平衡值，该值同样为 $L \sim 10^{-20}$ 克·厘米²·秒⁻¹；这并不是什么巧合。在 $N=M/m$ 次碰撞中所获得的“随机”角动量变成了“系统”角动量，并为下一轮 N 次碰撞所改变。这些碰撞所赋予微粒的随机角动量与微粒的初始角动量一样大，然而取向是完全任意的，与原始方向不一样。

9.9 表 9.5 给出碰撞平均自由程约为 20 克·厘米⁻²，对于密度为 10^{-23} 克·厘米⁻³ 来说，这就给出了程长约为 2×10^{24} 厘米，以及寿命约为 6×10^{13} 秒。

$$\therefore \frac{d\varepsilon}{dt} \sim 1.6 \times 10^{-14} \varepsilon \text{ 秒}^{-1}$$

表 9.4 中的能损率约为 $10^{-6} Z^2$ 电子伏特·秒⁻¹，因此对于所有能量超过 $\sim 10^9$ 电子伏特的核来说，碰撞损失是主要的。

9.10 对电子来说，在图 9.11 中所涉及的主要能量范围内，表 9.4 所给出的典型能损率为 10^{-6} 电子伏特·秒⁻¹。对于 $\sim 10^8$ 电子伏特，寿命约为 10^{14} 秒。如果把问题(9.9)时的结果也考虑在内，便得出宇宙线转移给星际介质的能量为 10^{-12} 尔格·厘米⁻³/ 10^{14} 秒，即 $\sim 10^{-26}$ 尔格·厘米⁻³·秒⁻¹。

如果考虑到银河系内气体所占有的体积为 10^{66} 厘米³，则总的辐射损失率约为 10^{40} 尔格·秒⁻¹。银河系的总光度比这一数值高 $10^3 \sim 10^4$ 倍；但是大约只有其中的 1% 可以对星际介质产生加热作用；在最暗的云内辐射是不容易穿透的，这时宇宙线的加热作用可能就成为一种主要的因素。

9.11 离开恒星距离为 R 处的一个电子所受到的辐射斥力为

$$\frac{L \sigma_T}{4\pi R^2 c} \sim 1.8 \times 10^{-36} \frac{L}{R^2}$$

式中 σ_T 是汤姆孙截面(6.102)。

质子的引力是 $m_H (MG/R^2)$ 。

对太阳来说，斥力与引力之比为

$$\frac{\sigma_T L_\odot}{4\pi c M_\odot G m_H} \sim (3 \times 10^4)^{-1}$$

对于 L/M 比太阳大 $\sim 3 \times 10^4$ 倍的一颗恒星来说，电子在斥力的作用下把质子也一块带走。对 He^4 ， C^{12} 等等来说，每个电子带走一个质子和一个中子，这时所需要的质光比就要大一倍。

9.12 冕内每个质子的总能量为 $3kT/2$ 。因为有磁场存在，质子以及电子就会随着太阳风的扩张而一起运动，所以电子的随机运动也就能够转变为质子的扩张速度。在质子速度损耗的同时总的磁场能也会减少；这是因为 $B \propto r^{-2}$ ，所以能量与 $B^2 r^3$ 成正比也就是与 r^{-1} 成正比。这时，电子、质子和磁场这三种能源对从太阳发出的每个氢原子质量 m_H 所提供的能量均为 $9kT/2$ 。对于 $T=2 \times 10^6 \text{K}$ 来说，我们就有 $v \sim (9kT/m_H)^{1/2} \sim 4 \times 10^7 \text{厘米} \cdot \text{秒}^{-1}$ 。

9.13 如果有半数质子经历了电荷交换，那么其余半数质子所携带的动量就必然要分配给同样数目的 CO^+ 离子。一氧化碳离子的质量是质子质量的 28 倍。进行了电荷交换的质子所转移的动量是极少的，所以只有剩下的那些质子在提供动量。总的说来，速度应该放慢大约 29 倍。如果质子的初始速度为 $400 \text{公里} \cdot \text{秒}^{-1}$ ，那么最终的离子速度约为 $14 \text{公里} \cdot \text{秒}^{-1}$ 。实际上所观测到的速度要比这来得高，这里可能有两方面的原因：一方面是电荷的交换并没有全部完成，于是对应每一个离子可以分配到好几个质子；另一方面是来自太阳风质子的一般补充压力进入运动得比较慢的等离子体，并且通过这种质子？ CO^+ 等离子体中磁场所产生的压力转移作用，使等离子体加速离开太阳。

9.14 自由跌落在白矮星表面上的一个质子的能量为 mMG/R ，对于 $B \sim 10^9 \text{厘米}$ 来说就是 $\sim 10^7$ 尔格。这等于 $\sim 10^5$ 电子伏特，因而质子就能够发出这么高能量的 X 射线。温度为 $5 \times 10^7 \text{K}$ 时的实际能量为 5×10^3 电子伏特。等离子体的辐射作用就好像是一层光学厚度很薄的气体，从图 8.3，8.4 以及方程 (8.64) 和 (8.65) 进行外推就可以看出这一点。

第十章 宇宙的结构

10.1 有关宇宙的若干问题

在前面的一些章节内，我们讨论了有关恒星和恒星系统的若干问题，并且对太阳——它是一颗最近、最容易研究的恒星——周围的一些天体进行了比较详细的观察。现在，我们要对太阳、恒星以及恒星系统所处的太空环境来作一番研究，也就是说我们要来了解有关宇宙的一些性质。

我们首先要问的、具有刺激性的问题是：

- (1) 宇宙的形状是怎样的？
- (2) 它有多大？
- (3) 它的质量是多少？
- (4) 它存在了多长时间？
- (5) 它的化学组成是什么？

这是在研究任何一个物体时通常都会提出一些最简单、最基本的问题。而且我们会发现，为了确定宇宙的有关性质，从概念上设想一些简单的实验性观测方案那是比较容易的。但是，要把这些设想变为现实却非常的困难，正因为如此，大部分上面这些问题迄今为止只是局部性地得到了一些解答。

为了解决这个问题我们可以采取两条迥然不同的途径。第一条途径是观测，我们应该尽力观测宇宙的“本来面目”；另一条途径是综合，我们提出一些假设性的宇宙模型，并注意观测结果同这些模型的符合情况。表面上看，这第二道工序似乎是多余的，我们所要做的全部工作好象就是观测而已。然而情况绝非如此！

任何观测必须、而且也只能在理论的框架中加以解释，即使那种理论仅仅是由构成常识的一些偏见组成的也行。常识本身就意味着是一种模型，它是三维的：时间测量完全可以同距离测量分离开来；物体服从牛顿运动定律；能量和动量的守恒定律同时成立。我们可以用心地进行观察，看看常识在宇宙学中能把我们带到多远。我们将会发现，它在不少地方都是很有用处的；但是，弄得不好也可能会带来很大的概念上的错误。

10.2 宇宙的各向同性和均匀性

如果我们用现代最强有力的望远镜来对宇宙进行尽可能仔细的观察，那么我们会发现，不论朝哪个方向去看，宇宙在我们眼前所呈现的图案本质上都是相同的。我们发现，在宇宙的深处布满了星系，而且从各个方向来看星系的种类和数目大致上都是相同的。偶尔也会出现统计上的变化，然而这种变化是随机性的。无论从哪个方向去看，星系的总体颜色也是相同的，我们在颜色上所察觉的唯一的系统性差异同星系的距离有关；但是，遥远星系光谱中的宇宙红移好象同观测的方向也没有什么关系。

严格来说，仅仅当我们所观测的视野限于银道面以外的天区时，所有上面这些结论才能成立。银河的吸光作用极其强烈，以至我们始终只

能对其知之任之，别无它法。

与方向无关的性质称为各向同性。就我们所知，宇宙是各向同性的。除了时间箭头（见后面的 10.11 节）之外，没有任何标记可以说明存在有什么与众不同的方向。

下面我们再来考虑所有这些效应同距离之间的关系。我们要问自己，宇宙深处的各种条件同我们这儿的局部条件相比是否会表现出某些不同之处。宇宙红移是我们所观测到的唯一效应吗？或者还会不会存在与距离有关的其他一些因素呢？要是红移确实是唯一的一种效应，那么我们可以用某种膨胀宇宙模型为前提，来解释所有的观测事实。红移是作为遥远星系退行所引起的多普勒位移来考虑的，我们的意思就是说，如果这种由速度产生的位移不存在的话，那么远方的那部分宇宙着来就应当同我们这儿的局部环境一致无异的了。在这样一种模型内。宇宙不同部分之间不存在任何结构上的差异，因而我们就可以把宇宙看作是均匀的。

讨论到这一步，我们应该停下来重新作一番考虑。我们的推论并非严格正确！我们忘记考虑到这样一个事实：宇宙的范围极其广大，我们的全部信息都是通过光讯号来取得的，有时候这些光讯号在到达我们之前已经旅行了几十亿年。我们今天所观测到的某个遥远星系的外貌，不见得就一定同在这个星系附近的一位本地观测者所看到的情况一模一样，它应当更象这样一位观测者在好几十亿年前所看到的样子；那时，星系当然就比较年轻，因此，我们能否预期到这样一种结果，即随着观测视野的推远，我们所看到的遥远星系会越来越年轻呢？

并非必然如此！而正是在这一点上，理论模型开始发挥它的重要作用。我们必须考虑到可能存在的两种完全不同的模型，也就是演化模型和稳恒态模型，这些模型各有其不同的演化历史。

在大部分演化模型中，物质最初以一种高密度状态集聚在一起，到了某个阶段——这个阶段所占的时间范围是不会太长的——星系就形成了。由于星系彼此间的退行引起了某种宇宙膨胀，也造成了我们所观测到的红移。在这样的模型内，离我们越远的星系看起来应该越是年轻。迄今为止我们还没有谈到随着年龄的增长星系的外貌该发生什么样的变化，或者说没有考虑到怎样才能把年老的星系同年轻的星系区分开来，有关这方面的情况确实也没有一个人知道。但是，由于能量总是以星光的形式在不断地释放出来，因而我们应当可以预料，星系的外貌迟早总会发生某些变化。我们的结论是，遥远的星系至少看上去应该同邻近的星系“有所差异”。如果某种这一类差异——不管它的具体表现形式如何——可以通过天文观测得到确认，那么我们就为证明演化宇宙的正确性取得了强有力的证据。

现在，让我们来研究一下稳恒态模型。这儿所提出的是这样的一种宇宙图象，它始终是一直存在着的，而且还将会继续存在下去。随着遥远的星系远离我们流逝而去，新的物质就从宇宙的每一个地方创生出来，而新创生的物质便形成了新的星系。通过这样的不断补充，物质的密度就可以永远保持不变；因宇宙膨胀所造成的空缺，正好从新物质的创生而得到补偿。

在稳恒态模型中，大致相同的时间内创生出来的两个星系必然会彼

此作相对的退行，并且退行速度始终是增加的。随着星系之间的彼此分离，就会在原来各个星系间的空间中形成新的、比较年轻的星系。这些比较年轻的星系本易，同样会彼此远离开去，从而留下新的空位，以为后来不断诞生的各代星系栖身之用。于是，在任何选定的空间范围内，就会包含有各种不同年龄的星系；其中相对来说年轻星系为数较多，而随着年龄的增长，星系的数目就会越来越少；这是由于老年星系经历了一段退行时间，彼此间分得很开，因而它们的数密度必然就比较低。

在稳恒态宇宙中，对相隔好几十亿年的两个历元来说，某一给定范围内各种星系的分类情况大体上是相同的。不管什么天区，总是既有年轻星系，也有老年星系，而且两者彼此混杂在一起，它们之间的比例始终保持不变。正由于这个原因，不论我们是在今天观测某一遥远天区，还是从几十亿年前来观测它，这种观测时间上的差异是无关紧要的。即使对每个具体的星系来说，它们所占有的位置前后有所不同，然而这一天区的样子必然自始至终大体上没有什么变化。

这种思想的一个重要结果是，在稳恒态模型中，我们今天所观测到的某一遥远天区的景色，应该同该天区内部一位本地观测员所体验到的景色大致相同。因此，由于光行时间所带来的延迟，应该不会影响到空间某一给定区域内所观测到的星系的年龄分布情况。这种年龄分布应该同某个观测者在他自己周围那一块局部天区内所观测到的年龄分布相一致。因此，稳恒态理论预言，从总体来说，遥远星系的样子就同邻近星系一样；相反，演化理论声称，位于不同距离处的星系在外貌上应该存在差异。到目前为止，这种差异还没有得以确认，但是，这也许仅仅是因为望远镜还无法对能够展现出这类差异的那些非常遥远的天区给出精确的观测结果。

从原则上来说，我们可以通过观测的方法寻求遥远星系在年龄上的差异，从而在稳恒态模型和演化模型之间作出鉴别。但是，实际上我们还不具有能够可靠地完成这类比较的手段。

我们还可以介绍一下关于鉴别稳恒态模型和演化模型的另一种检验方法。在稳恒态宇宙中，不论在哪一个历元，或者无论从哪一个地方来观测，星系际的平均距离永远也不会改变。对演化模型来说情况恰恰相反。在演化宇宙中，我们通常假定大多数星系是在某一个特定历元形成的。因此，过去年代的星系际距离应该比现在来得近。只要观测遥远星系之间的距离，我们也就是在测量它们好几十亿年前的间隔，那个时候这些星系仍然还紧紧地靠在一起。因此，远距离星系的数密度应该同邻近星系的密度有所不同。对于星系数密度的计数工作已经从光学和射电两种天文技术进行了努力，最新的射电天文结果是有争议的。这些结果可能说明了数密度随距离不同会出现少许的变化，也可能并没有说明这一点。这种变化仍然是有争议的（Sh68），也许本来就并不显著。要是在数密度上存在明显的差异，那当然就排除了用稳恒态模型来描述宇宙的可能性。

显然，对于宇宙视均匀性的观测可能是十分重要的，在不同的天区内所观测到的、有关星系的数目以及星系的种类，可以为宇宙过去的历史以及今后的演化情况提供资料。但是，只有通过不同宇宙学模型进行仔细的研究，才能对观测结果作出正确的理解。常识也许会拒绝物质

不断创生的可能性，然而从常识出发来考虑问题的途径不再是令人满意的了。我们从来也没有观测到物质在创生出来，因而从常识的角度来看也就不存在物质创生的观念，然而这样一个事实是无关紧要的，唯一重要的问题应当是我们需要的物质创生率是否会高于实际观测所能发现的水平。

10.3 宇宙学原理

在可以就任何理论进行深入的讨论之前，我们一定要对宇宙作出某些假设。其次，这些假设，或者说公理，必须是自治的；不过，我们还希望能通过同这些假设所作的预言有关的观测证据，来证实这些假设是可以成立的。

宇宙学原理就是其中的假设之一（Bo52），它又可以有不同的表达形式。这儿，主要的假设是认为我们在空间和时间中并没有处于一种特殊的、与众不同的地位。因此，我们的局部地区物理学，以及从我们的局部地位对宇宙所作的观测，应该同位于宇宙中不同区域的其他观测者的相应内容没有显著的差别。

完善的宇宙学原理认为，对于任何一个观测者来说，不管他位于什么地方，也不管他处于宇宙历史中的哪一个时间，他所看到的宇宙的样子，始终和位于另外某一个地方的一名观测者，在同一时刻或者甚至完全不同时刻所观测到的样子是完全相同的。这条原理具有极为深远的意义，具体来说，稳恒态宇宙就是在它的基础上发展起来的。

许多宇宙学家始终没有接受这条完善的宇宙学原理，他们所赞成的是一条作了更多约束的宇宙学原理，后者认为在（作了适当规定的）任意一个时刻，宇宙中不同位置的观测者所观测到的宇宙特征总是相同的，不同的只是存在一些局部性的微小变化。

在某种意义上说，所有这些原理都是哥白尼假说的推广，这就是说我们决不能以为我们自己是一些得天独厚的观测者。

宇宙学原理仅仅具有统计学上的意义，因为，一个星系看上去同它的周围邻居们显然并不相同；尽管如此，当它连同若干个简单的抽象性概念一起应用时还是非常有用的。

第一个抽象概念就是基础的概念。在任何宇宙模型中，基础是一些几何点的某种集合，而所有这些点子都以模型所要求的理想化方式在运动着，具体的每一个星系相对于这一基础的运动速度是随机的。另一方面，在某一位对基础处于相对静止的观测者看来，遥远星系的预期平均运动应当为零。同样，对这样一位观测者来说，3K微波背景辐射也应当是各向同性的。因此，对基础保持相对静止的某种状态，可以通过若干种实测途径来加以确定。这样一种状态在宇宙学中起着基本的作用；因此，我们就把对基础处于相对静止的粒子称为基础粒子，而把处于同样含义下相对静止状态中的观测者称为基本观测者，引入这样两个定义是很有用处的。

如果一位基本观测者带了一只手表，那么这样一只表对基础是相对静止的，它所量度的就是这位观测者的原时，而由作局部运动的钟所测得的时间就会同这个时间有所不同。我们可以考虑把一位基本观测者的原时定义为宇宙时间尺度，而所有的基本观测者都可以用这种时间来对

他们的测量结果进行互相比。例如，在描述某种宇宙模型的演化情况时，我们通常就会用宇宙图来反映某个特定宇宙时间的宇宙的相貌。相反，我们也可以用所谓宇宙相片，它只是反映了对某个特定的基本观测者来说的、宇宙在任何给定时间的样子。为了弄清楚这两种概念之间的差别，我们应该注意，宇宙图上的全部星系都是静止的，而图本身可以处于不断膨胀之中。另一方面，在宇宙相片上看来，遥远星系应当正在远离观测者退行而去，至少在目前阶段就是这样。

10.4 物质的创生

在稳恒态宇宙学理论中，最令人不可思议的部分就是它认为物质正在不断地被创生出来，而且这并不是通过从一种物质来形成另一种物质——比如，我们可以在实验室内用氧和氢来生成水——那样的途径。

这种物质居然是从虚无中创生的！

事实会是这样吗？某些理论家推测，这种物质应当是从一种新的场创生出来的，但是，迄今为止这样做主要是为了保持物理学的守恒定律不致受到破坏。因而从这样的意义上来说，这种新场——称为 C 场——就是一种人造膺品。

在稳恒态宇宙中，观测者应当会看到物质从各个不同的地方创生出来，而我们也许会感到奇怪的是物质的创生率能不能直接地观测到。计算创生率应有的大小是很容易的。考虑一个半径为 r 的球体积，这个半径以正比于 r 的某个速率不断膨胀，设这一速率为 Hr 。

$$\frac{dr}{dt} = Hr \quad (10.1)$$

球体积的膨胀速率为

$$\frac{d(4\pi r^3 / 3)}{dt} = 4\pi r^2 \left(\frac{dr}{dt} \right) = 4\pi r^3 H \quad (10.2)$$

如果在膨胀过程中球的密度要保持不变，比如说具有某个值 ρ_0 ，那么增加的那部分体积就必须用密度为 ρ_0 的物质来填满，所以在一个半径为 r 的球内物质的创生率便为 $4\pi r^3 H \rho_0$ 。把这个数值除以球体积，我们就得到单位体积内物质的创生率为 $3H \rho_0$ 。量 H 就是哈勃常数，它是宇宙膨胀的某种量度，必须通过观测来加以测定。目前， H 的最优估值大致是

①

$$\begin{aligned} H &= 75 \text{ 公里} \cdot \text{秒}^{-1} \cdot \text{百万秒差距}^{-1} \\ &= 25 \times 10^{-18} \text{ 秒}^{-1} \end{aligned} \quad (10.3)$$

这意味着对距离为 1 百万秒差距的天体来说，典型的退行速度为 75 公里 $\cdot$ 秒⁻¹。如果天体的距离为这一距离的 N 倍，那么退行速度也同样增大 N 倍。

把星系的数密度（见 2.10 和 2.11 节）乘上典型的星系质量，就可以求得 ρ_0 的大致数值，由此求得的密度大约是 10^{-30} 克 $\cdot$ 厘米⁻³。这是密度 ρ_0 的一个下限，因为在宇宙中可能还存在大量的、不发光的不可见物质。现在，我们就可以算得创生率为

$$3H \rho_0 \sim 10^{-47} \text{ 克} \cdot \text{厘米}^{-3} \cdot \text{秒}^{-1} \quad (10.4)$$

如果物质以氢的形式创生出来，那么上述数字就意味着创生率为每五十

亿年、每一升体积内大约一个氢原子。目前来说，这么微小的创生率是我们无论如何也测不出来的。

10.5 宇宙的均匀各向同性模型

到目前为止来说，观测工作没有发现在宇宙中存在有任何特殊的方向，也没有任何密度特别高的天区。观测资料是同一个均匀各向同性的宇宙模型相一致的，就是说在这样一个宇宙中，不存在任何可供特别挑选的位置或者方向。

处于宇宙中任何位置上的观测者，不论他选择哪一个方向去进行观测，总可以看到遥远的星系有红移现象，也就是说从表面上来看它们都在不断退行之中。

为了对这样一种宇宙建立一个模型，我们假定红移确实是标志着某种真正的膨胀。这一假定已经在宇宙学中牢固地确立下来，其主要原因是除此一招别无他法。在遥远星系的红移发现之初，人们曾经提出若干种可能的解释。由于同观测事实不符，或者在其他一些方面站不住脚，一个又一个不同的假设都被抛弃了。速度红移则是迄今还不能加以放弃的唯一的一种假设，它保留了下来，而且也许正是造成红移的真正原因。今天，人们还在不断地探求不同的解释机制，这方面的工作也许会一直进行下去，直到最后能使有关星系退行的假设建立在一个比较牢固的基础之上。

重要的问题是应该通过某种方法把宇宙模型具体化，从而使得位于这一模型中每一个点上的观测者，可以看到对他作退行运动的遥远星系中所有其他的观测者。二维空间的一种简单模型就是一块橡胶薄膜（图 10.1），假定在这块薄膜上以某种随机的方式标上许多点子。现在，如果使薄膜在长度 L 和宽度 W 这两个方向上分别伸长确定的量 αL 和 αW ，那

图 10.1 (a) 平坦宇宙的膨胀；(b) 弯曲宇宙的膨胀

么全部距离就按比例因子 $(1+\alpha)$ 增大。如果薄膜上的点子所代表的就是星系，那么某个星系要是离开一个给定星系的初始距离为 $r=(x^2+y^2)^{1/2}$ ，薄膜伸展后这两个星系间的距离就是 $(1+\alpha)r=\{[(1+\alpha)x]^2+[(1+\alpha)y]^2\}^{1/2}$ ，这儿 x 和 y 分别为沿 L 和 W 方向上的距离分量。

一块平的橡胶薄膜并不是有关均匀各向同性膨胀宇宙的唯一的一个二维模型，我们也可以用一个橡胶做的气球，并且在气球表面标上一些点子来代表星系。设给定某一时刻气球的半径为 a ，两个星系对气球中心所张的角为 χ ，沿气球表面所测得的星系间距离就是弧长 $a\chi$ 。如果气球膨胀时角 χ 保持不变，但是半径增大到某个新的数值，比如说是 $a'=?$

$(1+\beta)a$ ，这儿 β 是半径的相对增长数。现在，星系间的距离为 $(1+\beta)a\chi$ ，我们发现距离的相对增长数与 χ 无关。这意味着如果宇宙在某个给定时刻是均匀各向同性的话，那么在各向同性的膨胀过程中原来的状态就会一直保持下去。

如果 β 随时间的变化率为 $\dot{\beta}$ ，则两个星系之间的退行速度为 $a\dot{\beta}\chi$ ，同张角 χ 成正比。把彼此间的退行速度除以距离，我们就得到比例 $\alpha\dot{\beta}$

$\chi / \alpha \chi = \beta$ 。我们在这儿所讨论的是一种线性的距离-速度关系，因为，要是把两个星系间的距离增大，那么它们之间的退行速度就会随着间距按比例地增大。

在 2.10 节和图 2.4 中，我们看到遥远星系以及星系团是服从这样一种线性关系的，至少大体上如此。

半径为 a 的球可以用下面的方程来表达

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2 \quad (10.5)$$

式中 x_1, x_2, x_3 是三个互相正交的笛卡儿坐标。球面上的长度元 dl 为

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \quad (10.6)$$

用方程(10.5)消去坐标 x_3 ，我们有

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2)^2}{a^2 - x_1^2 - x_2^2} \quad (10.7)$$

我们可以用球面极坐标把 dl^2 表达为

$$dl^2 = a^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (10.8)$$

我们完全可以用严格类比的方法对一个四维球重复上面的过程。现在，我们所涉及的不再是二维平面或者三维空间；说得确切一点，我们关心的是在三维方向上表现为各向同性和均匀性的一个空间；而且同三维方法中所用到的式(10.5)到(10.8)这些方程相类似，我们要来研究在一个四维超球面上的一个三维超曲面的性质。这时，问题(10.1)证明了与方程(10.8)相应的关系具有以下形式

$$dl^2 = a^2 [dx^2 + \sin x (\sin^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2)] \quad (10.9)$$

问题 10.1 对于一个超球面有以下的方程

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = a^2 \quad (10.10)$$

试证明怎样从上式出发求得关系式(10.9)，并进一步证明用三维极坐标来表示时我们有

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{(r dr)^2}{a^2 - r^2} \quad (10.11)$$

其中已引入了新的变量

$$r = a \sin x \quad (10.12)$$

考虑在普通三维空间中半径为 R 的一个球。在这个球的两维球面上，球面距离由 $R\theta$ 给出。在现在所用的极坐标系统中，圆的周长为 $2\pi R \sin \theta$ ①；随着离开极点距离的增大，圆的周长也增大，在极距为 $\pi R/2$ 处达到极大值 $2\pi R$ 。极距再增大，圆就开始变小，并在极距为 πR （对映位置）处收缩为一个几何点。

问题 10.2 试证明在一个四维超球面上

(i) 圆的周长与半径之比小于 2π ；

(ii) 一个球的表面积是

$$S = 4\pi a^2 \sin^2 x \quad (10.13)$$

(iii) 随着 x 角的增加，球变得越来越大，当距离为 $\pi a/2$ 时这个球的表面积达到极大值 $4\pi a^2$ ；然后便开始缩小，当距离为 πa 时收缩成为一点。此外，试证明式(10.9)所表示的长度元确定了总的体积为

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi a^3 \sin^2 x \sin \theta dx d\theta d\phi \quad (10.14)$$

所以

$$V=2\pi^2 a^3 \quad (10.15)$$

我们可以选择一个参数 λ

$$\lambda = \frac{1}{a^2} \quad (10.16)$$

它规定了空间的曲率特性。曲率半径为无穷大时 $\lambda=0$ ，这时，空间便具有零曲率，这样一个空间称为平坦空间，或者叫欧几里德空间。当 $\lambda > 0$ 时，我们就说空间具有正曲率。如果用 λ/a^2 取代式(10.10)的右端——就象下面的(10.17)式那样，则我们也可以定义 $\lambda < 0$ 的为负曲率空间。注意，上面所述的两种二维宇宙具有不同的曲率常数。薄膜模型就是欧几里德空间，而气球模型具有正曲率。

问题 10.3 负曲率空间，也就是双曲空间，有时又称为伪球形空间，在这样一个空间中有

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = -a^2 \quad (10.17)$$

这儿 a 是实数。

试证明

(i)

$$dl^2 = r^2(\sin^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2) + (1+r^2/a^2)^{-1} dr^2 \quad (10.18)$$

式中 r 可以取从 0 到 ∞ 之间的任意值。

(ii) 定义 $r = a \sinh x$ (x 可以取 0 到 ∞)

$$dl^2 = a^2 [dx^2 + \sinh^2 x (\sin^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2)] \quad (10.19)$$

试证明圆的周长和半径之比大于 2π 。

(iii) 证明一个球的表面积为

$$S = 4\pi a^2 \sinh^2 x \quad (10.20)$$

S 可以无止地增大。

(iv) 这一空间的体积是

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty a^3 \sinh^2 x \sin \theta dx d\theta d\phi \quad (10.21)$$

其值为无穷大。

总之，我们看到正曲率空间具有有限的体积，它是闭的。当 x 值超过 π 继续增大时，又会把我们带回到已经由 0 到 π 之间的 x 值所确定的某个区域之中。负曲率空间是开的。闭空间的体积是有限的，方程(10.15)给出了这一体积的大小；而开空间的体积则是无限的。

稳恒态宇宙只能存在于平坦空间。之所以必然如此，其原因是在一个弯曲的膨胀空间中，曲率半径应当始终在不断地改变，而这就意味着在不同距离的地方所观测到的星系的数目总是在不断地变化，因而实际上这便成了对宇宙演化状态（年龄）的某种量度。这个结论并不意味着在弯曲宇宙中物质就一定不可能创生出来；但是，它确实意味着这样一种宇宙应当处于不断演化之中，而且可以通过观测来发现这一点。

我们通常知道，宇宙学模型的曲率是用常数 k 来描述的，其可取的值为 +1, 0 或 -1。 k 就是黎曼曲率常数，上述三个 k 值分别描述了正曲率、零曲率和负曲率三种宇宙， k 表示了方程(10.16)中参数 λ 的代数符号。

在我们的气球宇宙模型中，靠近观测者的星系所张的角直径很大。

同样大小的星系，随着距离的增大，角直径就越越来越小，当距离为 $\pi a/2$ 时角直径便达到某个极小值，这儿 a 就是气球的曲率半径。此后，角直径又开始增大，一直到气球的对跖点——也就是在距离为 πa 的地方，所观测到的角直径便达到了它的极大值 2π 。这时，观测者可以从他所愿意的任意一个方向上来观测这个星系，并且会发现这个特定星系不管从哪个方向上来看离开他的距离都是一样的。图 10.2 说明了这些效果。

图 10.2 (a)平坦空间的距离？角直径关系；

(b)三维球面上的距离？角直径关系

在严格类比的三维超曲面上也会发现这些效应。为了检测出对于射电天文观测源来说是否存在某个极小的角直径，人们进行了多方面的观测。迄今为止，这些观测都还没有获得成功，因为某些类星体的真直径是非常小的，而现有技术的发展还不足以对这些微小的角度作出精确的测定。

10.6 测量宇宙的几何特性

至少从原理上讲，我们有可能根据天文观测来确定宇宙的大小和曲率 (Ro55)*, (Ro68)*。在直接观测量同比较抽象的宇宙的几何特性之间，最简单的定量关系是对那些处处都表现出具有完全的均匀性和各向同性特征的模型推导出来的。本节就要对这些关系作一定的介绍；它们最大的优点就是同描述宇宙学模型的演化特性时所用的专门动力学理论——比如说广义相对论——毫无关系。实际上，我们可以对宇宙在目前宇宙时间中所表现的几何特性给以一定的描述，至于宇宙在到达今天这种状态之前曾经是怎样演化过来的，或者它在未来的岁月中又将会怎样地演化，对于这样一些问题我们不可能——或者，对这个问题来说也并不需要——给以任何的说明。就我们现有的认识阶段来说，对问题的讨论作这样的限制是有好处的。我们还不知道宇宙曲率的大小和符号；而值得庆幸的是我们至少可以取得有关这一问题的许多资料，这里并不需要首先知道描述宇宙演化的动力学定律，因而也就避免了由此而来的种种麻烦。

根据群论理论 (Ro33) (Wa34) 可以证明，描述均匀各向同性空间的最一般性度规是罗伯逊-沃尔特 (Robertson-Walter) 度规，

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2 \quad (10.22)$$

对于这一度规有

$$dl^2 = a^2(t) \{ dx^2 + \sigma^2(x) [d\phi^2 + \sin^2 \theta d\phi^2] \} \quad (10.18)$$

这儿 dl^2 是均匀各向同性三维空间的度规。函数 $\sigma(x)$ 的形式是 $\sin x$, x 或 $\sinh x$, 这取决于三维空间的黎曼曲率 k 是等于 1, 0 还是 -1 。

在这样的表示方法中：

(a) 一个静止星系的宇宙线是一条曲线，其中 x , θ 和 ϕ 均为常数，沿着这条曲线的 ds 即为宇宙时间间隔 dt 的某种量度。

(b) 任何光讯号的宇宙线是一条零测地线，这意味着该条曲线具有特征 $ds=0$ 。

(c) 如果我们选择一种特殊的宇宙时间： $t=\text{常数}$, $dt=0$ ，那么我们就可以借助度规 ds^2 来测量宇宙中的空间距离。这时，如果我们知道了 k

和 $a(t)$ 这两个值，那么宇宙曲率 k/a^2 也就完全确定了。为此，我们来考虑这么一张宇宙图，它表示了位于 $(x, \theta, \phi) = (0, 0, 0)$ 处的一个观测者 0 以及位于 $(x_0, \theta_0, \phi_0) = \text{常数}$ 的曲线上的一个星系。当 $a(t)$ 随时间而变化时，在辅助三维空间中的常数间隔 dl (10.23) 就会使 $ds^2 = c^2 dt^2$ 的值不断地改变。具体来说，如果有一束光线，从 t_1 运动到 t_0 (图 10.3)，我们就可以令 $ds=0$ ，然后沿着某一根固定视线 (θ, ϕ) 对方程(10.22)进行积分，于是就得到

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = x \quad (10.24)$$

图 10.3 星系和观测者之间的关系 (Ro55)

这就是观测者 0 在 t_0 时间所测量到的，距离参数 x 和发射时间 t_1 之间的关系。我们要记着，这儿称为距离参数而不是距离。因为，我们究竟应该把什么内容叫做“距离”这是不太清楚的。也许，宇宙距离（见方程 (10.12)）

$$r = a(t_0) \sigma(x) \quad (10.25)$$

是一种有用的量度，它代表了宇宙时间为 t_0 时在辅助三维空间中所观测到的距离。

关于距离问题还存在其他一些不同的表达方法。我们将会看到，根据遥远天体的视光度，我们可以用量 $a(t_0) \sigma(x) (1+z)$ 作为距离的一种有用的量度。这儿 z 是红移的某种量度，下面的方程(10.26)给出了有关 z 的表达式；在方程(10.26)之后我们还要对星系的光度加以推导，结果可见方程(10.32)。现在提一下这个问题仅仅是由于这样的原因：如果对我们通常在谈到距离时所涉及的全部概念没有提出某种严格的类比，那么对有关问题的讨论会是十分麻烦的；但是，在宇宙学研究中所用的更一般性的数学空间中，我们不可能指望把所有这些特性统统纳入某个单一参数之内。

如果光线发出的时间间隔为 (t_1, t_1+dt_1) ，接收到的时间为 (t_0, t_0+dt_0) ，那么我们可以从两条途径来计算增量 dt_0 ：一种是对方程(10.24)进行微分，另一种是在方程(10.22)中令 $ds=0$ ，并用不变的距离参数 x 取代 dx ；这两种方法实际上是等价的。如果发射讯号的频率为 ν_1 ，而接收到的讯号频率为 ν_0 ，那么

$$\nu_0 dt_0 = \nu_1 dt_1$$

因为在传播过程中光波总的振荡次数是守恒的。由于波长 $\lambda = c/\nu$ ，我们有

$$z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{dt_0}{dt_1} - 1 = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} - 1 \quad (10.26)$$

方程(10.26)确定了我们所测得的、对 t_1 时间发出的辐射而言的红移参数 z 。

问题 10.4 方程(10.26)还不是一种有用的形式，因为我们不知道 $a(t)$ 随时间的具体变化情况。但是，如果我们假定 $a(t)$ 的变化是有规则

的，那么就可以根据 $a(t_0)$ 的各阶导数用泰勒展开式来确定 $a(t_1)$ ，试证明

$$z = \frac{\dot{a}_0}{a_0}(t_0 - t_1) + \left[\left(\frac{\dot{a}_0}{a_0} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\ddot{a}_0}{a_0} \right] (t_0 - t_1)^2 + \cdots \quad (10.27)$$

式中 $\dot{a}_0$ 和 $\ddot{a}_0$ 是 t_0 观测时间所求得的、 $a(t)$ 对时间的一阶和二阶导数。

下面我们就可以来讨论关于从 0 点进行观测时某个星系所张的角直径 δ 的问题了。如果从局部地区测得该星系的真直径为 D ，那么我们可以定义一个参数距离 dx ，使得 $D = a_1 dx$ 。但是，如果在 t_1 宇宙时间星系的中心具有确定的位置 (x, θ, ϕ) ，则方程(10.23)说明了下面这样一个事实：如果在与视线垂直同时又与星系长轴垂直的方向上画一个圆，那么这个圆的总参数长度就是 $2\pi a_1 \sigma(x)$ ，这个长度相当于 θ 和 ϕ 可能取的全部数值范围。由此可见，星系的线直径相当于一个整圆上的某一段弧 $D/2\pi \sigma(x) a_1$ ，所以角直径为

$$\delta = \frac{D}{a_1 \sigma(x)} \quad (10.28)$$

为了把这个公式转化为用现时历元测得的 $a_0(t)$ 所表示的形式，我们仍然可以利用方程(10.26)，于是得到

$$\delta = \frac{(z+1)D}{a_0 \sigma(x)} \quad (10.29)$$

这第二个关系式对观测宇宙学是很有意义的，它与 $N(x)$ 中的 x 有关，而这儿 $N(x)$ 是表示参数距离小于或等于 x 的星系的数目。如果在度规 dl^2 (10.23)所定义的辅助三维空间中，星系的数密度为 n ，那么只要把演化效应略去不计， n 就与 t 无关：在一个均匀模型中它也与 x 无关：

$$N(x) = 4\pi n \int_0^x \sigma^2(x) dx \quad (10.30)$$

现在，我们在上面这个公式中用更一般性的函数 σ 来表示函数 $\sin$ 或 $\sinh$ ，而 $\sin$ 和 $\sinh$ 只是在关系式(10.13)和(10.20)这两种特殊情况 ($k=+1$ 及 $k=-1$) 中才会出现，图 10.5 说明了这些概念。

问题 10.5 试证明可以把式(10.30)展开成级数关系式

$$N(x) = \frac{4\pi n}{3} x^3 \left(1 - \frac{k}{5} x^2 + \cdots \right) \quad (10.31)$$

如果要用(10.29)和(10.31)这两个关系式对观测结果进行解释那就必须知道 z 的大小。但是，距离一远星系就相当暗，这时 z 往往是很难测定的。因此，我们也许宁肯用总的观测流量而不用红移参数，前者是一个比较容易测定的量。为此，我们就需要对观测者 0 在我们的历元时刻所观测到的遥远星系的视光度有更多的了解。为了确定这一视光度，我们必须进一步假定光子是守恒的，而且能量与频率之间的关系由普朗克表达式 $\varepsilon = h\nu$ 给出，其中 h 是一个与宇宙时间无关的普适常数。

如果 L_1 是星系在发射时间的热光度，那么 0 点所观测到的视热光度

■为

$$\blacksquare = \frac{L_1}{4\pi a_0^2 \sigma^2(x)} \cdot \frac{1}{(1+z)^2} \quad (10.32)$$

这儿第一项代表辐射因几何位置引起的减弱因子，因为 $4\pi a_0^2 \sigma^2$ 就是在辅助三维空间中以发出光线的星系为中心、以该星系到观测者之间的距离为半径所作的一个球面积（方程(10.13)和方程(10.20)）。第二项表示红化，式中所出现的是 $(1+z)$ 的平方项。其中一个因子 $(1+z)$ 正是由于在观测者看来，光谱频率——因而也就是每个光子的能量——有所减小而引起的。第二个 $(1+z)$ 因子的出现是因为所有可能的频率同时都减小了，其中包括由星系发出的光子在到达观测者所在地时的强度。在单位时间间隔内，观测者所接收到的光子数要比单位时间内星系所发出的光子数来得少，前者只是后者的 $(1+z)$ 分之一。这相当于时钟普遍地有所减慢，也就意味着单位时间内到达 O 点的能量减少了。

我们现在要做的是，纯粹用一些可观测的量来表示角直径关系式(10.29)。如果把方程(10.32)中的光度 $\blacksquare$ 用角直径 δ (10.29) 的平方来除，我们就得到

$$\log \blacksquare = 2 \log \delta - 4 \log(1+z) + \log \frac{L_1}{4\pi D^2} \quad (10.33)$$

通常情况下，观测工作是在辐射探测器接收灵敏度比较高的某个确定的光谱频率范围 $\Delta \nu$ 内进行的。设这一光谱范围内 O 点的光子接收强度为 $\Delta \blacksquare$ ，用 ΔL_1 表示在发射频率范围 $\Delta \nu_1$ 内相应的光子发射强度，要是红移，它就会迭加在接收谱带 $\Delta \nu$ 之上，于是

$$\log \Delta \blacksquare = 2 \log \delta - 3 \log(1+z) + \log \frac{\Delta L_1}{4\pi D^2} \quad (10.34)$$

现在回到方程(10.32)，我们要把这个式子转化为热星等之间的某种关系。我们现在写出

$$m = M_1 + 5 \log[\sigma(x)(1+z) \frac{a_0}{10}] \quad (10.35)$$

式中的 a_0 现在是用秒差距来量度的，并且还要除以 10；这样做是完全必要的，因为我们规定绝对星等就是距离为 10 秒差距时天体的视星等。知道了现有的观测值，我们就可以用它的展开式来替代星等 M_1

$$M_1 = M_0 - \dot{M}_0(t_0 - t_1) + \cdots \quad (10.36)$$

问题 10.6 试证明，如果我们把关系式(10.35)进一步展开为 z 和 x 的幂级数，则可以得到

$$m = M_0 - 45.06 + 5 \log\left(\frac{a_0 z}{\dot{a}_0}\right) + 1.086\left(1 + \frac{a_0 \ddot{a}_0}{\dot{a}_0^2} - 2\mu\right)z + \cdots \quad (10.37)$$

式中

$$\mu = 0.46 \frac{\dot{M}_0 a_0}{\dot{a}_0} \quad (10.38)$$

μ 是星系星等变化的某种量度。
量

$$q_0 \equiv - \frac{a_0 \ddot{a}_0}{\dot{a}_0^2} \quad (10.39)$$

在宇宙学中是经常出现的。在方程(10.37)中, 含有对数的那一项给出了红移? 距离线性关系。如果 $\ddot{a} \neq 0$, 则哈勃常数

$$H \equiv \frac{\dot{a}_0}{a_0} \quad (10.40)$$

就会发生变化, 利用 H 我们可以写出下面的一级近似式 (方程(10.25), (10.27)) :

$$cz = a_0 H x \quad (10.41)$$

这说明我们可以把 cz 看作为星系的线性速度, 而把 $a_0 x$ 看作是它的距离。如果在整个过去的年代里始终保持了这样一种线性的速度关系, 那么最早的宇宙应当是一个点, 而宇宙的生涯就只能是在某个时间 $1/H$ 之前从这个点源开始的。

q_0 有时称为减速参数, 它的观测值是很不确定的。观测资料还无法把具有不同 q_0 值的宇宙模型区别开来, 我们可以用表格的形式列出对应于不同空间曲率 k 的各个 q_0 值。

问题 10.7 试从 q_0 的定义, 以及在稳恒态宇宙学中 $a(t)$ 与 e^{tH} 成正比这样一个事实, 证明对于一个稳恒态宇宙来说, 有 $q_0 = -1$ 。

图 10.4 (还可见图 2.4) 中画出了有关的观测资料。由图可见, 对于不同的模型是很难加以区别的。

利用式(10.37)中所包含的有关星系视星等的信息, 我们可以回到表达式(10.31), 这样就能确定小于某一给定视星等限 m 所应当观测到的星系的数目。在表达式(10.31)中用星等代替距离, 我们就可以得到 (Ro55)。

表 10.1

	k	q_0
具有零宇宙学常数和压力的爆炸模型 (见下面的 10.9 节)	+1	$> \frac{1}{2}$
	0	$= \frac{1}{2}$
	-1	$0 \leq q_0 < \frac{1}{2}$
稳恒态模型	0	$q_0 = -1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \frac{dN}{dm} = 1.382 \{ 1 - (1 - \mu)z + [\frac{3}{2} + \frac{kc^2}{5a_0^2} + \frac{\ddot{a}_0 a_0}{2a_0^2} (1 + \mu) \\ - \frac{7}{2} \mu + \mu^2 - K]z^2 + \cdots \} = 0.4 \frac{d(\log N)}{d(\log S)} \end{aligned} \quad (10.42)$$

上式是按红移 z 来展开的, $\log S$ 的含义在下面讨论。 z 的线性项仅仅取决于星系绝对星等的变化率 μ , 而 z 的平方项还同 K 项有关

$$K \equiv 0.46 \frac{\ddot{M}_0}{H^2} \quad (10.43)$$

在射电天文学中，我们经常用到的是（2.11 节）有关从某个星系所接收到的局部流量 S 的对数，这时方程(10.42)所给

图 10.4 红移？星等关系（Ho56）。曲线 A 对应于 $q_0 \sim 2.5$ ，对曲线 B

有 $K = 0$ ， $q_0 = \frac{1}{2}$ ，曲线 C 代表了稳恒态模型（还可参见图 2.4）

图 10.5 (a)平坦空间中星系的距离？计数关系；(b)球面上的距离？计数关系。因为这时以观测者为中心、以任意给定距离为半径所作的圆或者曲面，总是要比平坦空间中相应的圆或平面来得小，所以在球面宇宙中任意距离处所计得的星系数也就要比平坦宇宙（或者说欧几里德宇宙）中所计得的星系数来得少

出的结果在 $\log S - \log N$ 图（图 2.7）上就是斜率 $d \log N / d \log S$ ，它表示了各个不同模型的特征。因为对射电源来说， $\log S$ 是“射电星等”的 $(2.5)^{-1}$ 倍，所以我们看到(10.42)式的右边可以写为 $0.4 d (\log N) / d (\log S)$ ，这时的 K 和 μ 可以解释为射电频段内的两个演化参数。

关系式(10.34)，(10.37)和(10.42)都有一个共同的缺点，这就是说，我们必须首先取得诸如表达式(10.38)或(10.43)中所固有的那一类独立观测资料，然后才能得出有意义的宇宙学结论。如果没有下面的事实，上述的问题是并不严重的。这个事实是，在今天我们考虑的大多数宇宙学模型中，象图 10.5 中所说明的那种宇宙的曲率效应，要是确实有所明显反映的话，那么所涉及的距离必然是十分遥远的，以至那儿的星系以及星系中的恒星在它们的讯号传到地球上来的这段时间中可能已经经历了非常充分的演化过程。因此，我们完全不知道怎样才能可靠地测出对时间的导数 $\dot{M}_0$ 或 $\ddot{M}_0$ 。今天，我们知道星系的结构常常会经受突然性的灾变。比方说，来自星系 M82 核区的物质的爆炸，或者巨球状星系 M87 的极其强有力的射电“喷流”等等，这一些便是星系发生灾变的明证。如果类星体具有宇宙学距离的话，那么我们还可能在亮度上观测到更大程度的变化，而且在类星体演化中的不同时期，它所发出能流的谱范围可能会发生极大的变动。在研究迄今所取得的观测结果时，我们必须把所有这一切牢牢地记在心里。不管在哪一种场合下，人们总要对星系演化的速率提出一些有说服力的假设，而这些假设便构成了在推导方程过程中所引进的那些必不可少的改正因子的基础。

唯一不用满足上述要求的例外情况就是稳恒态模型，在这类模型中，我们可以简单地认为，在观测历元时刻局部地区所观测到的各种条件正是代表了宇宙中任何部分所具有的特征，而且对所有的时间来说一直都是如此。但是，即使这样，我们仍然会碰到由下面这样的事实所带来的另一种困难：进行观测的频谱范围同遥远天体所发出的辐射的频谱范围是不一样的。因此，如果要在波谱的可见区进行观测，那么我们至少需要对有关观测者附近天区内的辐射源的紫外特性取得充分的了解。人们正是在不断地收集这一类的资料；现在，利用轨道天文台可以进行这方面的观测工作了。所以，局部性河外天体在某些波长范围内的辐射情况迄今还没有进行仔细的研究，而看来也许只有等到我们对这些波长

范围内的辐射规律取得比较完整的认识之后，才能对观测资料作出许多宇宙学的解释。

10.7 宇宙的拓扑学

到目前为止我们总认为宇宙是简单连通的，这就是说它具有最简单的拓扑结构。在二维模型中，我们所讨论到的有球面、平面、或者具有负曲率的双曲面。

还存在若干种比较复杂的曲面，其中有一些是很容易构造的。如果我们取一张矩形纸片，并且对它的四条边分别标以 a, b, c, d 字母，如图 10.6(a)所示；那么第一步我们先把 a 和 b 两条边粘结起来，这样就可以得到一个圆柱面。

但是，实际上粘结 a, b 两边的方法有好几种。我们可以把纸片先扭一个弯再进行粘结，这样就得到了一个梅比乌斯(Möbius)带，图 10.6(b)中两个箭头的方向说明了纸片扭曲的情况。

如果不仅把 a, b 两边，而且把 c, d 两边也粘结起来，那么我们就可以得到一个轮胎或者一个克莱茵瓶，前者是纸片没有扭曲时做成的，后者是先把纸片扭一个弯后所得的结果，图 10.6(c)表示了这两种结构。

梅比乌斯带和克莱茵瓶都是自我封闭的。从面的外侧出发，兜一个圈后我们可以重新回到出发点，但这时却到了面的内侧；在这个过程中并不需要翻过面的边缘，或者在面上穿一个孔钻过去。不过，在方向上是有变化的。如果按某一特定方向画上一个箭头，那么当它转一圈回到出发点时箭头的指向就倒了过来（出现在带的反面）。

人们对这些模型的研究是很不充分的，它们有许多与众不同的特性。在某些自我封闭模型内，一只右手套在宇宙中周游一圈回到出发点处时，会成为一只左手套。在另外一些模型内，一位观测经过长途跋涉也许会回到他自己的童年时代。也还有这样一些模型，当人们在其中漫游一周回到原来的出发点时，他的时间箭头同他周围环境正好相反。如果采用复杂的拓扑形结构，那么某些负曲率空间就不是开空间。显然，在宇宙的拓扑学研究中人们仍然有大量的工作要做（He62）。

10.8 宇宙尺度上的动力学

在第三章中，我们用物理学中的牛顿定律对星系的质量作了估算。用这种方法所算得的星系团的质量，同根据光度估算到的质量是大致相符的。因此，在这样大的尺度上用牛顿力学来研究宇宙中所发生的事件，由此引起的误差大概不会超过一个数量级。但是，对于大尺度的现象来说，牛顿理论的某些特征就会给研究工作带来一些困难：

(a)引力讯号的传播时间变得很长，所以我们不能再认为作用力是瞬时传播的了。应该在考虑这种时间延迟的前提下对运动定律作出修正。

(b)已经在实验室内作了充分验证的狭义相对论定律，应该在整个宇宙中的每一个局部地区都保持成立。牛顿力学中也没有考虑到这一特征，但应该做到这一点。

如果我们用广义相对论的场方程来取代牛顿运动定律，上面两个缺陷以及其他的一些困难就可以得到克服。但是，这并不意味着广义相对

论本身在处理甚大尺度宇宙现象时就不会有它自己的缺点。对于广义相对论的验证尺度并没有超过太阳系的范围[$o(10^{13}$ 厘米)], 我们不清楚在 $o(10^{28}$ 厘米) 的宇宙尺度上, 同样的定律是否还能成立。几乎任何的物理学定律都没有涉及到这样大的范围。

在非常致密的爆发天体或者致密的坍缩天体中, 广义相对论可能也会碰到一些困难; 前者如宇宙本身, 当它的年龄仅为 $\sim 10^{-23}$ 秒时就是一种致密的爆发天体, 而诸如黑洞就属于后一类天体。巴考尔 (Bahcall) 和弗朗奇 (Frautschi) 指出 (Ba71b), 在这样一类高密度的爆发或坍缩状态中, 如果距离相差 10^{-13} 厘米, 也就是基本粒子的大小范围, 则速度差可以接近光速。这说明对于涉及到高度致密态的理论来说, 应该把量子效应考虑进去。

10.9 几种简单的宇宙模型

如果我们掌握了适当的动力学理论, 它们可以用来研究涉及到整个宇宙那么大尺度的各种现象, 那么我们就可以来描述不同模型的演化情况, 并给出它们的历史发展过程。尽管事实上有关动力学的问题至今还没有得到最后的解决, 我们仍然可以充分利用现有的资料, 以便至少能够对有关演化宇宙的若干理论模型逐一加以简单的介绍。然后, 我们就可以把宇宙的观测特征同这些模型进行拟合, 并尽力剔除那些同观测不符的模型。

(a) 稳恒态宇宙

首先由邦迪 (Bondi) 和戈尔德 (Bo48) 以及霍意耳 (Hoyle) (Ho48) 提出; 这种宇宙是平坦的, 无论在什么时间、无论从什么地方来看, 它都具有相同的樣子。膨胀速率在空间和时间两个方面都是均匀的。不论离开观测者有多远距离, 从统计学角度来看, 老年星系和年轻星系总是以某种确定的比例分布于宇宙空间。

(b) 爱因斯坦的静态宇宙

在宇宙膨胀发现以前, 爱因斯坦 (Ei17) 根据他的广义相对论场方程提出了一种宇宙模型。这个模型是静态的, 它不存在膨胀。爱因斯坦根据宇宙的半径, 利用广义相对论力学计算了这样一个宇宙的密度; 因为, 如果我们认为宇宙中的压力很小, 可以忽略不计, 那么对应于静止状态的密度值是唯一的。实际上, 大多数相对论模型都假定在动力学研究中压力可以忽略不计。这种假定与观测并不矛盾, 而如果压力可以忽略的话, 则计算工作就会大大地简化。爱因斯坦宇宙是球形的 ($k=1$), 它的曲率半径 a 是一个常数 (图 10.7)。

1930 年, 勒梅特和爱丁顿 (Eddington) 发现, 爱因斯坦宇宙是不稳定的 (Ed30)。只要对于爱因斯坦所假定的理想化条件出现有少量的偏离, 其结果必然是要末不断地膨胀下去, 要末就会发生加速性的坍缩。他们俩人就利用这一不稳定性建立了一种模型。这一点特别有意思, 因为星系也许就可以在这种不稳定阶段中得以诞生。

(c) 德西特 (De Sitter) 模型

在爱因斯坦于 1917 年提出他的静态模型后不久, 德西特 (deS17) 指出, 可以从广义相对论的场方程得出第二个模型, 这个模型所在的是平坦空间, $k=0$, 它是一个膨胀模型。最初, 德西特模型只有理论上的意

义；但是在二十世纪二十年代末期，哈勃发现了宇宙膨胀（Hu29），从而重新引起人们对这个模型的广泛兴趣。它的主要缺陷是这样一个宇宙的密度必须为零。不过，无论怎么说宇宙的密度总是很低的，因而这也就不能算是一种令人不能容忍的困难。

(d)爱丁顿模型

这种宇宙模型是从爱因斯坦状态开始的，然后它要经受某种扰动，引起扰动的因素同星系的形成过程有关，而形成星系的气体最初是作均匀分布的；宇宙在经受扰动之后便开始作均匀的膨胀。它的一项困难是我们还不能肯定星系的形成是否不应该造成某种不稳定性，而这种不稳定性所带来的后果应当是收缩而不是膨胀。这个模型是很有意义的，因为它充分地注意到了宇宙学问题并不仅仅是一个几何学问题这样一个事实。作为一种模型，还必须能说明宇宙中所存在的物质的物理状态。星系可能是从某种均匀分布的原始气体凝聚收缩而来的，要是这种气体处于高速膨胀之中，那么怎样才能做到克服这种膨胀的作用，并迫使气体收缩而为星系呢？我们不知道应该怎样来回答这个问题，但是爱丁顿和勒梅特试图对此提出某种比较合乎逻辑的推测性看法。

(e)勒梅特模型

勒梅特（Le50）提出了另外一种模型：宇宙从一种高度紧缩状态开始膨胀，最初的膨胀速度是很高的，然后便越来越慢，一直到达某种停顿状态，这时几乎同爱因斯坦状态完全一样。星系就在这一阶段中形成，并引起新一轮膨胀，这个新的膨胀阶段便无休止地一直进行下去（图 10.7）。

图 10.7 几种宇宙学模型。对不同的曲线来说， $a(t)$ 和 t 的标度是不同的。图中唯一重要之点是每条曲线的形状，而不是它们具体尺寸

勒梅特模型的一个有趣的特征是，宇宙的初始密度极高。我们可以计算出在那个时候必然出现的温度和压力，因此也就可以确定应该发生哪一些核反应。我们可以取得有关宇宙早期阶段中物质的化学组成方面的信息，这里的早期阶段指的是在星系有机会形成之前。我们可以要求，这样得到的化学组成，应该同星系内所观测到的某些最年老恒星表面物质的化学组成一致。

这样就指出了宇宙的化学特征的重要性。一个宇宙学模型不仅一定要能够模仿宇宙的总密度和压力，或者星系的存在，而且一定要能够对那些形成最年老恒星的物质的化学组成作出比较具体的预言。至于后来形成的那些恒星的化学组成就不需要通过这种方式来进行预报了，因为恒星内部发生了核反应，所以早的几代恒星可以产生出较重的化学元素，然后又通过抛射或爆炸过程把这些元素分布到星际空间中去。后面的几代恒星就可以吞食这些最新形成的物质，在它们的大气中也就会含有这些化学元素了。

(f)弗里德曼（Friedmann）模型

到现在为止，我们所介绍过的那些相对论宇宙学模型都有一个共同的特征。它们都涉及到相对论场方程中所出现的一个非零宇宙常数 Λ ，这些方程（10.44，10.45）将在下面予以讨论。这个常数相当于在宇宙基底上的一种张力，所以为使宇宙膨胀就一定要对它做功；换一种方式

说，功可以在某种膨胀过程中推算出来，它仅仅同 Λ 值的大小有关。弗里德曼 (Fr22) 假设这一常数等于零，实质上就是干脆否认它的存在。

这样一个常数是否应该采用的问题是多年来热烈争论的焦点之一。目前来说，用它或者不用它只是一种尝试性的问题。但是，某些希望还是存在的，这就是说我们可以通过对一个星系团内的星系的动力学研究来部分地确定 Λ 的实际数值。由于含 Λ 项的存在，维里方程的形式会有所改变，所以当然不会再要求星系的动能严格地等于星系团势能 V 的一半 (Ja70b)。至于利用现有的技术怎样才能观测到这一类效应，而工作的困难程度又究竟如何，对此仍然是有争论的。

在弗里德曼模型中可以有两种黎曼曲率，即 $k=0$ 或 $k=+1$ 。某些模型是从一种极其致密的状态出发的，然后膨胀可以一直不断地进行下去。另外一些模型从某种致密状态开始，先是膨胀，然后是收缩，最后坍缩到原始的致密状态。这种循环可以不断地重复进行，于是这一类模型就作脉动式的演化。重复循环后核物质的状态是不清楚的；为了知道所观测到的宇宙化学组成是否同这种循环过程相一致，人们已经作了一定的努力。原则上讲，一个脉动宇宙可以存在于无限的未来，而且也许会在无限的未来一直存在下去——差不多就象一个稳恒态宇宙一样。尽管这种脉动模型无须以物质的创生为先决条件，但它必须保证在经过某一个坍缩阶段后能够形成恰当的化学组成。

(b)到(f)这几种模型都有一些类似的数学表达形成：罗伯逊 (Ro33) 和沃尔克 (Walk 0 r) (Wa34) 发现，在一个均匀各向同性空间中，爱因斯坦场方程简化为与曲率半径 a 有关的两个简单的微分方程

$$k\rho = -\Lambda + 3\left(\frac{\dot{a}^2}{c^2 a^2} + \frac{k}{a^2}\right) \quad (10.44)$$

$$\frac{kP}{c^2} = \Lambda - \left(\frac{2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k}{c^2 a^2}\right) \quad (10.45)$$

这儿 $k=8\pi G/c^2=1.86\times 10^{-27}$ 厘米 $\cdot$ 克 $^{-1}$ ，其中 G 为 (牛顿) 引力常数； k 有时称为爱因斯坦引力常数。 Λ 是宇宙常数，而 ρ 和 P 为宇宙的密度和压力；小圆点表示对时间取导数。

问题 10.8 对于爱因斯坦宇宙有 $a=\text{常数}$ 及 $k=1$ 。

(i) 试证明

$$\Lambda = \frac{1}{c^2 a^2} + \frac{kP}{c^2} \quad (10.46)$$

并证明宇宙的密度 ρ 具有确定的数值

$$\rho = \frac{2}{c^2 a^2 k} - \frac{P}{c^2} \quad (10.47)$$

我们知道，就目前而言， $P/c^2 \ll \rho$ 。要是我们生活在一个爱因斯坦宇宙中，则 Λ 当然只能为 $\sim c^{-2}a^{-2}$ ，而 $\rho \sim 2(c^2 a^2 k)^{-1}$ 。

(ii) 证明，如果 $k=0$ ， $P=0$ ，则一个静态宇宙必然要求 $\Lambda=0$ 及 $\rho=0$ ，而只有 a 是不确定的。

问题 10.9 德西特模型是平坦的，而且空无一物，有 $k=\rho=P=0$ 。试证明膨胀宇宙的尺度因子 a 服从以下关系

$$a = a_0 e^{(\Lambda c^2/3)^{1/2} t} \quad (10.48)$$

而从哈勃常数 H 所求得的宇宙年龄为

$$\frac{1}{H} = \sqrt{\frac{3}{\Lambda c^2}} \quad (10.49)$$

问题 10.10 如果在场方程中宇宙常数 $\Lambda=0$ ，且具有零压力，试导出以下关系

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G\rho}{3} \quad \text{及} \quad H^2 q_0 = \frac{4\pi G\rho}{3} \quad (10.50)$$

因而从(10.40)式还可求得

$$(2q_0 - 1) = \frac{k}{H^2 a^2} \quad (10.51)$$

问题 10.11 试验证 $P=0$ 时爱因斯坦宇宙的不稳定性。注意，某种无穷小膨胀会引起 $\rho < 2(kc^2 a^2)^{-1} P c^2$ ，所以即使 $\dot{a}=0$ ，我们有 $\ddot{a} > 0$ ，因而膨胀必须继续进行下去。如果初始扰动是某种收缩，我们也可以得出类似的结论。

问题 10.12 试就某种弗里德曼宇宙 ($\Lambda=0$) 证明

(a) 如果 $k=1$ ，且对于一个处于初始阶段的高密度宇宙有 $P/c^2 = \rho/3$ ，则解的参数形式为

$$a = b_0 \sin x, \quad t = b_0(1 - \cos x) \quad (10.52)$$

式中 x 为参变量。

(b) 对于这个宇宙的晚期阶段， $k=1$ ， $P=0$ ，则有

$$a = a_0(1 - \cos x), \quad t = a_0(x - \sin x) \quad (10.53)$$

注意， x 随 t 单调增大，所以 $(1 - \cos x)$ 最后必然趋向于零。宇宙先是变大，但是后来就发生坍缩。

(c) 对于双曲宇宙 ($k=-1$) 的高密度阶段，有

$$a = b_0 \sinh x, \quad t = b_0(\cosh x - 1) \quad (10.54)$$

(d) 对于双曲宇宙的晚期阶段有

$$a = a_0(\cosh x - 1), \quad t = a_0(\sinh x - x) \quad (10.55)$$

10.10 奥伯斯佯谬

假设在欧几里德空间内均匀地分布着许多恒星。在离开观测者的距离范围为 r 到 $r+dr$ 之间的一个球壳内，全部恒星所发出的光线与 $4\pi r^2 dr$ 成正比。其中进入观测者望远镜的那部分光线又与 $1/r^2$ 成正比，这是因为光线的强度是随距离的负二次方而下降的。所以，观测者从厚度为 dr 的每个球壳中所接收到的光量应当只是同 dr 成正比。如果把对距离积分的上限取为无穷大，那么我们发现观测者所接受到的光线也应该具有无穷大的亮度。之所以造成这种无穷大的结果，仅仅是因为我们没有考虑到恒星的自遮光效应。如果有两颗恒星位于同一视线方向上，那么前面那颗恒星就会使观测者无法看到位于较远球壳内的第二颗恒星。要是把遮光效应也考虑进去的话，天空的亮度应该只相当于布满了普通亮度恒星的球面那么亮，但并不是无穷亮。当然，这仍然要比白昼的天空明亮得多；而实际上夜晚的天空更要比这来得暗。

对于在欧几里德空间面前顶礼膜拜、而且对宇宙具有无限大尺寸和

无限大年龄的观点深信不疑的那些人来说，上面的结论显然就是一种佯谬。奥伯斯于 1826 年首先提出了这一推论，他认识到这样一种宇宙学观点是站不住脚的。

如果我们企图通过引入弯曲空间来避免上面的推论，那结果必然是徒劳的。在这样一种空间内，以观测者为中心作的一个球的球面积，具有方程(10.13)或(10.20)的形式——表面积 $S=4\pi a^2 \sigma^2(x)$ 仅仅是距离 x 的函数。位于球壳内恒星的数目与 $S(x)dx$ 成正比。但是，从那个壳层到达观测者的光量也是随因子 $S(x)$ 的增大而下降，这两项因素互相抵销，于是接受到的光线与距离无关，这同平坦空间所求得的结果是一样的。

接下来我们还可以提出一条理由——星际尘埃也许会把光线吸收掉。但是，在一个无限老的宇宙内，尘埃应当已经同恒星处于某种辐射平衡状态，因而它所发出的光线就同吸收掉的光线一样多。这时，尘埃要末就象恒星一样闪闪发光，要末就蒸发为气体，而这些气体或者可以让光线畅通无阻，或者可以发出象恒星那样明亮的光线。

只要星系本身在一定程度上也是作某种随机分布，那么关于明亮夜间天空的推论仍然是有效的，这时我们需要考虑的仅仅是恒星在宇宙中的总体空间密度。尽管恒星以星系这样一种群居的形式出现，而不是在整个天空作均匀分布，但这对上述推论的有效性没有任何的影响。

除非我们打算承认，对于这样大尺度上的现象来说，任何物理学定律都是不能成立的——当然，在这种情况下我们决不会再听任自己去同宇宙学纠缠不清；否则的话，我们就只能在下面三种结论中认定一条(Bo52)，(Ha65)；

(a)距离一大，恒星的密度和光度就会减小。

(b)物理学常数随时间而变化。

(c)恒星存在着大规模的整体运动，从而造成谱线的位移。

举个例子来说，如果宇宙还是非常年轻，那么恒星发出辐射的时间也必然是不长的，在这种情况下推论(a)应当可以成立。

某些宇宙学家认为，诸如引力常数这一类物理量可以随时间的推移而发生变化，而推论(b)就构成了这类宇宙学的基础。由于这些常数要影响到恒星的发光强度，所以恒星也许只是在最近这些时期内才开始发出明亮的光辉。这样的话，宇宙就不会包含有奥伯斯所算得的那么多辐射量。

推论(c)指出，一个膨胀宇宙不一定就很明亮，因为来自遥远星系的辐射传到观测者这边需要一段时间，而这就会使辐射的强度减弱。在靠近宇宙地平线那边，星系的红移已接近于无穷大，当这些星系所发出的光子到达观测者这边时，它的能量以及到达强度已接近于零。事实上，当超过一定的距离后，就再也没有任何能量会传给观测者了。至于这一距离究竟有多远就同各个具体的宇宙学模型有关，这个问题将在下一节中加以讨论。

大多数人都用推论(a)和(c)来解释奥伯斯佯谬。这个佯谬颇有用处，因为它对宇宙学模型提出了一些相当严格的条件。一种模型如果的确有道理，那它就必须保证夜间天空确实处于黑暗状态。

10.11 宇宙的地平线

如果在航行于大海之中的一艘远洋轮船上，有一个人想要确定地平线的距离，那么他只需要往水中放下一个浮筒，然后在浮筒于地平线上消失之前的最后一瞬间量出它的距离就可以了。要是这个人动作十分敏捷，那这时他也许还来得及爬上轮船的桅杆再看一看这只浮筒，但是不用多久浮筒终于又第二次消失在地平线之外。这里，有两点是值得注意的。

首先，地平线的距离同观测者的位置有关。如果我们要确定一种我们所需要的地平线距离，那就应该根据位于海平面之上某个特定高度上的某个基本观测者来加以选择。

第二，不管观测者升到离海平面有多高，总会存在某个绝对地平线，超出这一范围之外的部分观测者就永远也不可能看到了。观测者不可能看到去对跖点一半路途更远的地方，它的绝对地平线把地球表面分成了两个半球。

对位于宇宙中某一给定位置上的一名观测者来说，他同样可以确定一种地平线，而超出这一地平线以外的部分他也是无法看到的。事实上，规定地平线的方法可以有若干种。到地平线的距离也许同观测者的运动速度有关，所以我们最好根据基本观测者来确定地平线，这样一位观测者相对于他周围的星系的平均运动来说是静止不动的。

W. 林德勒 (Rindler) 对不同宇宙学模型中的地平线作了某种分类 (Ri56) *，他确定了三类地平线：事件地平线、粒子地平线、以及最后还有绝对地平线。

(a) 在某些宇宙学模型中，遥远的星系离开观测者作退行运动，而且退行的速度在不断地增大，稳恒态宇宙就是其中的一例。在这一类宇宙中会存在着这样一个宇宙时间 t_1 (图 10.8a)，对于某个特定的星系 P 来说，到了 t_1 时间它同观测

图 10.8 (a) 事件地平线。P 点所发出的光线要在宇宙时间为 ∞ 时到达 A 点。P 点以远的地方所发生的事件超出了 A 的事件地平线，就和 P 点处 t_1 时间之后发生的事件一样。 t_1 之前于 P 点出现的事件在有限的宇宙时间内到达 A 点。随着 $t_0 \rightarrow t_1$ 值的增大，极限光子沿着一条渐近线与 A 一起运动

(b) 粒子地平线。光线在一个四维球形膨胀宇宙中的实际轨迹。 t_1 宇宙时间在 P 点形成的粒子，在 t_0 时间之前不会出现于 A 点的地平线之上者 A 之间的距离就会以恰好等于光速的速度增大①。在 t_1 时间之前，这个星系所发出的辐射最终可以传到观测者这边来；但是在 t_1 时间之后，它所发出的辐射就再也不可能传给观测者了，因为这时两者之间那段距离的增大速率已经超过了光速。因此，发生在 t_1 之前的事件可以传到观测者这边来，而在 t_1 之后发生的那些事件对于这位观测者来说必然是永远也看不到了。要是有一些事件刚好发生在 t_1 时间之前不久，那么它们一定表现出有很大的红移，而且会出现时间膨胀。由于时间膨胀的结果，必然使得观测者要在 t_1 之后的无限长时间内才能接收到正好在 t_1 时间所发出的事件讯号。当然，对他来说在 t_1 时间之后出现的任何事件仍然是

一点也观测不到的。于是我们就会发现一个有趣的现象，对于一位观测者来说，某个时间他所看到的那些粒子就会永远看到，尽管它们会变得越来越暗而且产生红移。这样，我们就可以把事件地平线定义为时空宇宙中的一个超曲面，它把所有的事件分成了两大类：对于某一位给定的观测者来说，有一类事件在过去是、现在是、而且将来仍然是一直可以观测到的；而另一类事件对他来说是永远不可见的。

(b)在别的一些宇宙学模型中，另一种不同的地平线有着重要的地位。考虑一个物质最初处于高度致密状态下的爆炸模型，当 $t=0$ 时这个宇宙突然发生爆炸，原来相距很远的两个粒子 P 和 A 可能以近乎光速的速度彼此远离。由于它们之间的距离会变得很大，于是最初由粒子 P 发出的光线在很长的一段时间内不可能到达 A 点。具体来说， t_1 时间 P 点所发出的光线，在 t_0 时间之前不可能到达位于 A 点的观测者。在 t_0 之前，这位观测者对粒子 P 的存在毫无所知，在 t_0 之后他可以接收到 P 点所发出的信息。实质上，粒子 P 在 t_0 时间进入观测者的地平线（图 10.8b）。

现在，我们可以就给定的宇宙时间 t_0 ，对任何基本观测者确定一个粒子地平线。它是一个曲面，把所有的基础粒子分成了两类：一类是观测者已经所看到的，另一类则还没有看到。

很明显，可以有这样的一类模型，对于它们来说粒子地平线和事件地平线都是存在的；勒梅特模型就属于此类。因为存在着从某种致密状态发生的一次原始爆炸，粒子地平线一定存在；又因为在经过了处于爱因斯坦状态下的星系形成时期之后，跟着发生的是星系的加速运动，所以事件地平线也必然会发挥它的作用。

(c)我们也许会为地平线同一名运动着的观测者之间的距离而感到有些不可思议。显然，如果观测者本身朝着某个快速退行中的星系作加速运动，那么他的事件地平线就可以扩大。我们可以证明有下面的几种结果 (Ri56)。

(i)对一个不存在事件地平线的模型来说，基本观测者迟早总能观测到所有一切事件。

(ii)在一个有事件地平线，但是不存在任何粒子地平线的模型中，观测者可以发现任何一个指定的事件，条件是只要他愿意去作一番旅行，并且动身的时间应该足够早。

情况(i)取决于粒子的退行速度不可能大于光速，这时就不存在任何的事件地平线。情况(ii)同这样一个事实联系在一起：对任何给定的粒子来说，它必定在遥远的过去年代内的某个时间中，曾经处于某个基本观测者的事件地平线之内。

(iii)要是在一个模型中既有事件地平线，又存在粒子地平线，那么在开始时同某个基础粒子相处在一块的一位观测者看来，存在一类对他来说绝对不可见的事件，不管他在整个空间中怎样旅行也没有用。这类事件就确定了一个绝对地平线，我们通过下面的论述来证明这一点。

假定有一名基本观测者，他位于宇宙中的某个位置 A 处。于是，可以存在一个临界粒子 P，它一开始就严格地以光速退行，在时间 $t=\infty$ 时进入 A 的粒子地平线。设 P 和 A 之间的初始距离(10.25)为 D。然后，我们再来考虑这样的一位基本观测者，他位于视线 AP 方向上比 P 点再远

一段距离 D 的 B 点上。同样， P 也必然在 $t=\infty$ 时进入 B 的粒子地平线。如果 A 点的观测者以光速朝着 P 运动，那么他会发现 P 是静止的，因而他应当在 $t=\infty$ 时才能到达 P 。 B 以光速相对 P 作退行，因此他应当在时间 $t=\infty$ 时进入 A 的粒子地平线；但是 B 以远的所有粒子对 A 来说当然是永远不可能观测到的。位置 B 便对初始位置在 A 点的一名基本观测者确定了一个绝对地平线（图 10.9）。

图 10.9 位于 A 点的观测者的绝对地平线（见正文）

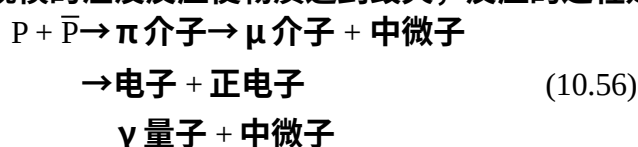
10.12 具有物质和反物质的宇宙模型

如果隔开一段距离，那反物质几乎是探测不到的：由反氢形成的光谱同氢光谱一模一样，因此对于一个遥远的星系来说，不论它是由物质还是由反物质所组成，我们看上去应当是相同的。

由于这些原因，我们就无法知道我们的宇宙是否仅仅由普通的物质——象我们在地球上所观测到的质子和中子——所组成的呢，或者在宇宙中有没有可能还存在着大量的反物质。

两条出路，各有难处。要是没有任何反物质存在，或者为数甚少，那么我们怎样来解释宇宙的这种非对称性呢？形成反质子和质子的几率看来应该是相同的。那么决定宇宙应该主要由质子和电子组成的原因又是什么？我们看不出有任何明显的理由可以对此作出解释！

开始，我们可以设想质子和反质子可能是随机形成的，而且具有相同的形成几率。这种情况就同随机游动过程（第四章）一样，于是我们应当预料到在粒子和反粒子这两者之间总有一种会比较地多一些。然后，如果大规模的湮没反应使物质遭到毁灭，反应的过程是



那么现在剩下的就只能是产生较多的那一类粒子，显然，这就是质子。这条思路是走不通的；因为，在随机游动过程中，经 N^2 步后的波动（即对于平均状态的偏离）等于 N 。由于目前的宇宙包含了 $N \sim 10^{78}$ 质子，那么质子和反质子的原始数目必须为 10^{156} 。但是，毁掉了这么一批数目大得惊人的粒子后，所产生的辐射量应当是压倒一切的，肯定没有任何证据可以说明有这样的辐射存在。因此，波动假说必须予以抛弃。

我们还可以这样的争辩：物质和反物质也许由于某种什么原因被分离开来，各自形成星系或恒星那么大的天体，而这些天体之间发生相互作用的几率是很低的。要是这样的话，我们就应当对造成这种分离的原因作出解释。物质和反物质之间看来不存在互相排斥的某种作用力（Sc58b，见 3.7 节），因而我们必须寻找其他的解释机制。

如果宇宙中的反物质确实是很丰富的话，那么我们可以从两条途径去进行探索。第一，从反物质区产生的宇宙线粒子，可能会不断地跑到地球上。因此，宇宙线流中反粒子所占的比例就是其宇宙丰富度的一种标志。遗憾的是，对于能量最高的那些宇宙线粒没有作有关这方面问题的分析，做这类实验目前还是不可能的。能量较低的宇宙线没有说明

有大量的反质子存在，但是这些粒子可能有着较为局部性的发源地，因而从这一点上来说我们还不能排除反星系存在的可能性。

证认反质子的另一条途径就是设法观察物质和反物质交界处的湮没反应。这种湮没反应最终应当会释出 ≈ 100 百万电子伏特能量的伽玛射线。目前为止，我们还没有取得有关这类辐射的充分的观测资料。因此，问题仍然还没有得到解决，宇宙并非不可能处于由半数物质和半数反物质组成的那么一种状态。

在把阿尔芬 (Alfvén) 和克莱茵 (Kl71) *这两个人的思想联合起来后所发展的一种理论中，就提出了存在着这样一种状态的可能性。在这个理论中，原始宇宙的成份一半是物质，一半是反物质，称为双等离子体。这样一个宇宙模型应该由一些孤立的“总星系”所构成，于是不同的部分就可以由宇宙地平线分隔开来，而它们之间也没有什么联系。在上述的前提下，这一理论认为，我们所在的局部宇宙开始时的范围是相当大的，然后它发生了引力坍缩，随着密度的增加以及质子-反质子湮没反应出现几率的增大，双等离子体在某个时候便开始发生剧烈的反应，这时引力坍缩便告结束。于是，物质中的基本部分统统遭到毁灭，同时产生了巨大的能量，这些能量足够在接下来的宇宙膨胀中发挥它的威力。

如果我们仅仅假定收缩过程在到达史瓦西半径 $R_s(8.111)$ 之前结束，那我们就可以得出一些很有意义的结论。上述假定意味着达到最大程度收缩时的半径 R (见图 10.10) 服从不等式

$$\frac{2MG}{R} \lesssim c^2 \quad (10.57)$$

这儿 M 是所观测到的那部分宇宙的质量。

图 10.10 克莱茵-阿尔芬宇宙的半径与时间的函数关系

有一种观点认为 R 不会比 R_s 大很多：如果我们取 $M \sim 10^{54}$ 克，这也就是从目前的天文观测所推算出来的最合理的质量值，那么我们发现在最大程度收缩时的半径为 $R \sim 10^{26}$ 厘米。要是大多数物质应该大约在半径为 R 的时候猝然遭到毁灭，那么每个粒子在通过 R 这么一段距离中发生湮没反应的几率必然接近于 1：

$$n \sigma R \sim 1 \quad (10.58)$$

这儿 σ 为湮没和碰撞的截面，碰撞使粒子作随机运动并最终使粒子发生湮没。 n 是该一时候的数密度：

$$n \sim \frac{M}{R^3 m_H} \quad (10.59)$$

m_H 为质子质量。由最后两个方程得到

$$\frac{M \sigma}{R^2 m_H} \sim 1 \quad (10.60)$$

如果再考虑到有关半径的不等式(10.57)，并消去一些项后，我们就得到

$$\frac{\sigma}{4M m_H} \gtrsim \frac{G^2}{c^4} \quad (10.61)$$

当然，正如提出该理论的两位学者所指出的那样，这个式子是应该可以

验证的。把关于 σ 、 m_H 、 G 以及 c 的已知数值代入上式后，我们发现对于 $\sigma \sim 10^{-25}$ 厘米² 有

$$M \lesssim 10^{55} \text{ 克} \quad (10.62)$$

这个结果看来同观测是一致的。因此，这两位学者认为，他们在宇宙物理量和原子物理量之间建立了某种关系，而这当然是非常有意义的。

下面的设想是很有趣的：如果 M 比上面所假定的数值略为大一些，或者说

$$M > \frac{c^4 \sigma}{4G^2 m_H} \quad (10.63)$$

这时坍缩就应当会越过史瓦西奇点一直进行下去，那么我们今天当然也就不会存在于世了。我们之所以能逃脱这一厄运，仅仅是因为质量 M 小得恰到好处——尽管已经到了岌岌可危的地步！

即使我们这部分宇宙经受了坍缩，其他一些部分只要它们的质量足够小就仍然可以原封不动地保留下来。因此，在这样一种由许多互相分离、而又近乎彼此独立的部分所组成的宇宙中，并不是每一样东西都会丧失殆尽的。从概念上来说，即使存在有许多黑洞的一个宇宙也不会有太多的与众不同之处；它同样应当分隔为好几个部分，而在这些部分之间通讯联系是不可能建立起来的。

10.13 星系的形成

星系形成的问题是同宇宙演化紧紧地联系在一起的。因此，关于星系及其过去历史的研究不仅有它本身研究范围内的意义，而且也为我们深入了解我们所居住的宇宙的性质提供了一种方法。

实际上，这儿所涉及到的的是两个几乎丝毫没有关系的问题。第一，我们必须知道，这么多的物质怎么会集聚在一个很小的范围内，从而形成了星系。当然，无论在过去还是现在，星系可能都是自然形成的；而且，至少在某个时期内，也可能从星系核所在的区域向外抛出物质。这些概念应当可以为某些形式的稳恒态理论所接受。但是，通常情况下我们总是把星系看作是一些从普遍存在的宇宙介质中形成的天体，因而我们要寻求能使星系在这类介质中形成的某些特有的不稳定性。这儿所考虑的稳定性问题要比恒星形成问题（4.20 节）中涉及到的稍微复杂一些。原因有两个方面：其一，要对每单位质量宇宙物质确定某种合理的势能是有一定困难的；其二，宇宙的高速膨胀看来会使介质具有某种稳定性，从而能反抗收缩过程的进行，因此星系居然能以足够快的速度凝聚成长，这是令人难以理解的。我们要在下面比较详细地讨论这个问题；但是，我们首先要注意，这儿还存在第二条途径，星系按照这条途径形成时同宇宙的演化会有更为密切的关系。因为，如果假定有足够的物质可以通过这种或那种方式集聚在一起，那么我们接下来就要问这样一个问题：一旦集聚起来之后，这种物质将会表现出什么样的性质。星系中含有老年恒星的晕是怎样形成的，星系盘又会怎样地演化？如果掌握了这些情况（见图 10.11a，它说明了一种可能性），那么正如后面 10.14 节中所说明的那样，我们就必然会对有关化学元素的形成问题取得更为深入的了解，因而也就能对银河系确定一个合适的年龄。我们应当会知道初始不稳定性是在什么时候建立起来的，而且也许能知道当时所处的

宇宙密度又是多少。这样一来，我们对宇宙尺度上所发生的动力学过程的了解必然会大大地前进一步。

让我们比较细致地来研究一下有关星系形成的几种不同的情况。

(a) 星系由爆炸形成的可能性

二十世纪五十年代末期，苏联的安巴楚勉提出了一种看法，他认为星系可能不是由河外物质凝聚而成的；按照他的看法，应该通过物质从某些确定区域的向外爆发过程来形成星系。他注意到星系是通过某种爆炸过程成对形成的，我们可以举出若干件观测事实来证实他的这种假设。

(i) 星系好象从来不会单独地出现，它们总是构成星系对或者更大的星系集团。

(ii) 有些星系对或多重星系由发光的物质桥联接在一起。在某一些场合下，单是星系在视线方向上的运动速度就

图 10.11 星系演化途径的两种可能性。(a) 哈勃提出的演化序列；(b) 在这种演化方式中，星系核的一次对称性爆炸造成了一个棒旋星系，接着由于自身的旋转便发展成为规则的旋涡星系，然后经过扩散变成椭圆星系，并最终演变为球状的一团，之后又可能会发生下一轮的爆炸。也许还会有这样的可能性，即旋涡星系始终保持它的旋涡结构，椭圆星系始终维持椭圆的形状。对此我们还不清楚

已高达每秒数千公里，可见万有引力不大可能把这些星系束缚在一起。因此，它们看来是在最近诞生的，而且也许已经是一些成熟的、或近乎成熟的星系。

(iii) 一般说来，如果有一个同外界没有什么物理学上联系的孤立的群或团，那么它的成员星系的质量好象总是要比能把这些星系通过引力的作用束缚在一起的质量来得小。因此，维里表达式(3.38)——它说明了势能和动能之间的关系——要能成立，那么在星系之间必然存在大量的、被星系所束缚住的不可见物质。如果牛顿力学在这样的尺度上仍然有效的话，则不可见物质的总质量应当比可见物质大一个数量级左右。

(iv) 通过对诸如 M82 (Ly63) 和 M87 这一类星系的研究，已经证实了在星系内部确实发生着一些大规模的爆炸性活动。人们发现，M82 从它的核区把大量的氢抛入星际空间；而 M87 正在抛出一个气体喷流，内中包含了相对论性粒子，我们可以通过这些粒子所发出的同步加速辐射来观测这个喷流。

(v) 类星体有时也会带有喷流 (Ha63)。这些天体中观测到有速度很高的吸收线，从而说明物质正在以大约 $10^4 \sim 10^5$ 公里·秒⁻¹ 的速度向外爆发。这些类星射电源也许正是代表了星系在形成之中。

如果这类爆发起源机制的确是星系形成的实际途径（例如，见图 10.11b），那么凝聚理论中所碰到的许多困难也许就可以迎刃而解了。但是，目前来看观测资料还不够充分，因而还不能对这类灾变式形成机制的后果作出定量的估计。我们也没有很好的学说可以作为验证这类爆炸起源假设的理论指导。

(b) 稳恒态宇宙中星系的形成

如果我们认为爆炸起源假设不能成立，那么在稳恒态宇宙中星系的

形成就会存在一些问题。因为，在那样的情况下，凝聚形成的速率完全取决于哈勃常数 H 值的大小。之所以这样，是因为在稳恒态宇宙中任何一项特征必须通过某种方式不断地进行繁殖，繁殖一代的时间是（见 10.4 节）

$$\tau_s = (3H)^{-1} \quad (10.64)$$

为了说明这里的困难，我们来考虑一种最有利的简单情况。设已经存在一个质量为 M 的星系，为了形成一个新的星系，我们假定只要求河外物质以足够大的速率跌入原有的那个星系，使得经过 τ_s 这么一段时间后总的引力束缚质量达到 $2M$ 。一旦星系的质量增加了一倍之后，我们可以发现它随之就分裂为两个星系，也就是形成了一个附加的星系。显然，这要比星系在某一部分空间中自然形成来得容易，因为在自然形成过程中一开始并不存在任何具有吸引力的“种子”星系。但是，这里有一个先决条件，那就是在造成这种分裂之前必须吸积足够数量的物质。

在最有利的情况下，外部气体除了退行速度外不再具有任何其他形式的运动。要是还存在热运动速度，那么它也会起到反抗引力收缩的作用。因此，我们假定宇宙气体在创生时的温度为零。首先，我们来建立一个模型，在这个模型中牛顿力学仍然有效。这一点是可以做到的，因为我们所考虑的速度和质量都不算大。于是，起作用的便是中心引力势。靠近质量 M 的粒子主要应受 M 的影响，距离一大，粒子便主要受宇宙斥力的影响（图 10.12）。于是，能量守恒所要求的速度关系是

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dr_0}{dt}\right)^2 = H^2(r^2 - r_0^2) + 2GM(r^{-1} - r_0^{-1}) \quad (10.65)$$

图 10.12 稳恒态宇宙中星系对物质的吸积情况

式中 G 是引力常数， r 是粒子离开 M 的瞬时距离，而 r_0 是某个初始距离。我们来设想这样一种情况：在某个时间 t_0 之前，所有的粒子都具有速度 Hr ；当 $t=t_0$ 时， M 的引力场开始发挥作用，于是对 $t>t_0$ 我们有

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = H^2 r^2 + 2GM(r^{-1} - r_0^{-1}) \quad (10.66)$$

第二，如果 r_0 不大，星系的引力就可以使最初朝外运动的物质减速，并最终使它回过头来反方向运动。至于初始距离很大的那些粒子将永远不停地离开 M 向远方飞跑。但是，也会存在某种处于临界状态的粒子，其初始距离为 $r_{0\max}$ ，当 $t=\infty$ 时它的速度刚好可以减小到零。因此，在时间 τ_s 内星系所能够收集到的最大物质为 $4\pi\rho r_{0\max}^3 / 3$ ，其中在半径为 r_0 的球内所创生出来的物质没有考虑在内。下面，我们在计算出 $r_{0\max}$ 之后还要回到这个问题上来。

怎样来计算 $r_{0\max}$ 呢？我们知道，对于初始距离小于 $r_{0\max}$ 的那些粒子来说，当 $t=\infty$ 时它具有负速度 $V \equiv (dr/dt) < 0$ ，而初始距离超过 $r_{0\max}$ 的那些粒子则有 $V > 0$ 。因此，我们应当寻求 $V^2=0$ 和 $d(V^2)/dr=0$ 这两个条件同时满足时方程(10.66)的解。

问题 10.13 试证明满足上述要求的解为

$$r_{0\max} = \left(\frac{8GM}{27H^2}\right)^{1/3} \quad (10.67)$$

稳恒态理论对于宇宙的总密度有各种不同的说法，有的认为是 $3H^2/8\pi G$ ，或者是 $3H^2/4\pi G$ ，而有的干脆主张根本不存在任何确定的密度值。如果取比较大的值 $3H^2/4\pi G$ ，则我们发现最初包含在球

$(4\pi/3)r_{0\max}^3$ 内的物质总数为 $8M/27$ 。这个数字代表了在时间 τ_s 内，可以跌入质量 M 凝聚范围内的最大物质量，而不管 M 可取的值为多少。

现在，如果我们把在 τ_s 这段时间中半径 $r_{0\max}$ 范围内所可能创生的质量同上面求得的结果一并加以考虑，那么我们就可能把物质的吸积量增大一倍，但是总的质量仍然大大地低于所要求的数量 M 。我们可以比较严格地证明，对于稳恒态宇宙来说，如果星系仅仅通过引力的作用来形成的话，那么所需要的密度至少应当为 $\rho_{\min}=15H^2/4\pi G$ (Ha61)。就目前对哈勃常数的估计来说， $\rho_{\min}$ 大约为 10^{-28} 克·厘米⁻³，这要比从凝聚物质（星系）总数所估得的密度大两个数量级以上。尽管现有的观测结果还没有作出绝对否定的结论，然而这样的密度毕竟太高了，如果说在稳恒态宇宙中星系是通过星系际气体的坍缩过程形成的话，那么可能就得求助于非引力的形成机制。

(c) 演化宇宙中星系的形成

稳恒态宇宙中所固有的那些困难在演化模型中同样也是存在的。要是只考虑引力的自吸引作用，那由于宇宙膨胀的缘故物质是很难凝聚起来的。就演化宇宙来说，困难之一在于开始的时候不存在任何的大尺度凝聚块，而这对星系的形成来说是很需要的，它们是星系形成的核心。这种核心可能只有在稳恒态宇宙中才会出现，因为它们始终是存在的。然而，在演化宇宙中，我们所假定的出发点是一种均匀的、处于迅速膨胀之中的介质，这样的介质对于形成星系来说，不大可能会具备足够的不稳定条件。

如果我们所考虑的是弗里德曼所提出的那一套宇宙，那么星系形成的过程看来会有很大的困难。在 1946 年所发表的一篇经典文献中，利夫希茨 (Lifshitz) 对这一组宇宙模型的稳定性问题进行了分析 (Li46)；他证明，不稳定性的发展速度完全不足以形成任何象在星系中所观测到的凝聚物质这一类的天体。他在得出这一结论的过程中对各种最有代表性的干扰因素进行了分析，这里所考虑的干扰是一些原始扰动，由于它们的存在就可以发展出较大的凝聚块。不过，他假定这些扰动的发展是彼此独立无关的。近年来，人们已经对若干个这种干扰因素作非线性迭加的情况进行了研究。这样做看来对凝聚比较有利，也许星系的形成就应当解释得通了 (Ko69)。

要是上面这条路子走不通，那么在演化宇宙中，看来只有爱丁顿？勒梅特模型才能做到通过引力的凝聚作用来形成星系，因为这两个模型在爱因斯坦状态中所停留的时间很长，星系就可以在这样的模型中形成了。但是，这种情况下，星系的形成应当只是在过去才有可能。上面(a)这一小节中的五种观测事实充分说明了目前阶段中星系形成的情况，这是爱丁顿？勒梅特模型所无法加以解释的。

还有，爱因斯坦场方程中的宇宙常数 Λ 实际上是否可能具有非零的数值，许多宇宙学家对于这一点感到没有把握。当然，正是这个常数使得勒梅特模型可以出现一个静止阶段，然后再继续作第二阶段的高速膨胀。

从以上种种情况我们可以清楚地看出，在任何宇宙学模型中，要收集足够的物质来形成一个星系是有困难的。条件是如此的苛刻，如果星系确实要能存在的话，也许就一定得对所有的宇宙学模型加上若干项相当严格的限制。星系形成理论的目的之一就是应该把这些限制的具体情况弄个水落石出，从而对我们所栖居的宇宙取得更为深刻的了解。

(d) 我们自己银河系的形成问题

对我们自己的星系来说，在有关它最初如何诞生的问题上我们所掌握的线索确实是比较多的。资料主要来自银河系内最年老的那些恒星的轨道参数。这些老年恒星的金属含量很少，因此，同那些较近时期形成的富金属星相比，前者的紫外星等大得出奇。 U ， B 星等之差 $\delta(U-B)$ 随着年龄的增大而增大。

现在，我们可以来看一下太阳附近天区内恒星的轨道特征。伊根 (Eggen)、桑德奇和林登·贝尔 (Lynden-Bell) 做了这方面的工作 (Eg62)。他们发现，银河系内最年老的那些恒星的运动特征是：偏心率大，轨道角动量低，垂直于银道面方向上的速度很高，图 10.13 表明了这些情况。所有这些特征给我们提出了这样一种可能性：在最早的时候，几乎所有的物质都沿着向径方向朝银河中心进行坍缩；或者也可能都从银心沿着向径方向朝外抛出。正如奥尔特 (Oort) 所指出的那样 (Oo65)，对于金属含量很少的天琴 RR 型星来说，它们绕银心所测得的每单位质量角动量为太阳附近银盘或旋臂中恒星的八分之一。因此，从最早同晕星族有关联的物质怎样会形成盘星族的问题是一个真正的谜。也许，晕、盘两族的恒星有着完全不同的起源，冯·霍尔纳 (VonHoerner) 发现 (voH55)，

图 10.13 恒星的年龄及其轨道特征：对银心的角动量，绕银心运行轨道的偏心率 e ，垂直于银道面方向的速度 $|W|$ ，以及离开银道面的高度 $Z_{\max}$ 。 $\delta(U-B)$ 大的是银河系内的老年恒星 (Eg62，请参见正文)

球状星团的轨道特征同晕族恒星是类似的。

在经常闯到地球上来的陨星中，有一类叫碳粒陨星，如果我们假定它们代表了过去年代内形成太阳的原始物质，那么就可以求得银河系的大致年龄。我们对钍和铀的同位素 Th^{232} ， U^{235} 及 U^{238} 的含量进行了分析，这些元素是在 r 过程中形成的 (8.12 节)，三者之比为 $1.6:1.6:1$ ，它们的 α 衰变半衰期分别为 1.4×10^{10} ， 7.1×10^8 及 4.5×10^9 年。目前对 $\text{Th}^{232}:\text{U}^{238}$ 这一比值的测定还不大可靠，但是最好的估计看来是 $3.3:1$ ，而 U^{238} 与 U^{235} 之比为 $1:0.007$ 。

问题 10.14 如果银河系诞生时所形成的铀和钍占 60%，而剩下的 40%是在银河系诞生同太阳系诞生之间大约 5×10^9 年中陆续形成的，试证明银河系的年龄应该只有 7×10^9 年左右。如果全部金属都是以某种均匀的速率陆续形成的话，银河系的年龄应该有 200 亿年。对于这个年龄仍然是有争论的 (Di69)。

10.14 自然界的常数是随时间变化的吗？

我们怎么知道在宇宙的整个历史中光速就是一成不变的呢？或者，它确实是自始至终保持同一个数值吗？普朗克常数、引力常数或者电子的电荷会不会在非常缓慢地发生着变化，只是在宇宙尺度上这种变化还觉察不出来呢？事实上，我们甚至有没有可能来回答诸如此类的问题呢？

第一个想到这类问题并发现了某些定量标志当推狄拉克 (Di38)，他注意到自然界的一些常数经过适当的组合之后，可以得出 10^{39} 或 $(10^{39})^2=10^{78}$ 这样的无量纲数。一般来说，这种无量纲数可以由宇宙量与微观量之比来加以构成。当然，我们并不指望在任何场合下所得到的比值刚好就是 10^{39} ，不过幂指数部分总是应该很接近 39 和 78 这两个数。

狄拉克认为，如果这不是巧合的话，那就说明了在微观量和宏观量之间，也就是在原子或亚原子物理量与宇宙物理量之间确实存在着某种关系。宇宙在不断地膨胀，因而宇宙的大小也在发生着变化，所以，在原子尺度上应该也会发生相应的变化。实际上，如果用宇宙半径同原子或原子核的大小之比来构造一些无量纲的量，那么我们就可以由此看出这样的变化应该会达到多大的程度。

(a) 我们相信宇宙的半径约为 10^{28} 厘米。

(b) 玻尔原子轨道半径为

$$\frac{\hbar^2}{me^2} = 5 \times 10^{-9} \text{ 厘米} \quad (7.4)$$

(c) 电子的康普顿波长是

$$\lambda_c = \frac{\lambda_c}{2\pi} = \frac{\hbar}{mc} = 4 \times 10^{-11} \text{ 厘米} \quad (6.166)$$

(d) 经典的电子半径为

$$\frac{e^2}{mc^2} = 3 \times 10^{-13} \text{ 厘米} \quad (6.168)$$

(e) 原子核的范围大约也是 10^{-13} 厘米。 (7.7)

把(a)同后面四个量相比，我们就得到范围为 $10^{36} \sim 10^{41}$ 的一些数。

狄拉克认为，既然这些数是无量纲的，那么由于某种什么原因它们应该不会随着时间的推移而发生变化。因为一个纯粹的无量纲数同构成这个数的时间和长度是没有关系的，所以这些数在宇宙演化过程中应该保持为常数。至于在宇宙量和微观量之间究竟发生了什么样的作用，从而使这些无量纲量在演化宇宙中始终是一些常数，对于这样的问题我们是不知道的。一般来说，自从爱因斯坦试图把马赫原理引入他的广义相对论引力理论以来，引力场一直是我们所考虑的唯一合适的候选因素。实际上狄拉克关于不变无量纲数的假设是马赫原理的另一种说法，也是用马赫原理来寻求物质的甚大尺度性质同局部范围性质之间的同一性时所得的结果。引力实际上是可以起作用的，这一点可以用原子物理量和引力物理量所构成的某个无量纲长度体现出来。我们注意到，在上面所提到的四个比值中，没有一个出现有引力常数 G 。但是，我们可以构造这样一个比例

$$(f) \quad \frac{\hbar^2}{m^2 m_p G} = 10^{31} \text{厘米} \quad (10.68)$$

这儿 m_p 是质子的质量。如果假定电磁力不存在，整个原子的结构只靠引力来维持，那么上面所算得的长度就代表了在这样的前提下氢原子所应当有的半径。因此，引力长度和电磁力作用下的玻尔轨道半径之比刚好是

$$\frac{e^2}{m m_p G} = 10^{39} \quad (10.69)$$

由此我们得出了这样的结论：电磁力和引力在强度上同样也相差 39 个数量级；因为，(b)和(f)这两个长度之比，正好就是质子和电子之间相互吸引的电磁力和引力之比： $F_E/F_g = e^2/mGm_p$ 。

如果这个比值应该是常数，那么只要宇宙演化对引力常数值产生影响，我们就应当预料到电子的质量和电荷要发生变化。

再比如说，宇宙质量和原子或核的质量之比又意味着什么呢？这是一个特别有意义的量，因为宇宙质量除以质子质量后，所得到的正好就是宇宙内质子的数目 N 。我们有

$$N = \frac{M}{m_p} = 10^{78} \quad (10.70)$$

有关这一比值的令人莫明其妙的问题是，由于粒子越过宇宙地平线向外流去，这显然就一定会破坏 N 的不变性，而产生破坏效应的时间尺度大致为哈勃常数的倒数 $T=H^{-1}=4 \times 10^{17}$ 秒。经过 10^{10} 年这么一段时间后， N 就应当发生显著的变化。是不是这样一来也许就破坏了狄拉克关于这些巨大的无量纲常数必须保持不变的论点呢？

对这个问题的回答有两条路子可走。第一，我们可以明确的说，逸出宇宙地平线的粒子流确实是动摇了狄拉克的论点。另一方面，我们也可以说，狄拉克的观念同宇宙的稳恒态理论是完全一致的。在这样的模型中，由于经常不断地有物质补充进来，从而使 N 保持为常数，于是实际上也就使所有的宇宙参数都保持为常数，这样一来微观量就根本不需要作任何的改变。

这是稳恒态理论的一个富有吸引力的特征，因为，正如我们将要看到的那样，不管我们手头所占有的观察结果是多么的粗糙，全部资料都说明了自然界的物理常数很可能是不随时间而变的。

每当我们谈到力、质量和长度的无量纲比值时，我们总可以从时间、长度以及质量这三个参数的一些比值，来有效地构成这些独立的（无量纲）量，即使不是全部，也可以构成其中的大部分。总之，我们通常就是根据这三个基本参数来描述所有的物理学研究对象。

尽管如此，我们还要提出几个另外一类的无量纲数，其中一部分原因在于它们具有普遍的意义，而另一方面原因是迄今为止所构成的全部比值都同物质的电磁或引力特性有关；我们并没有对核的强相互作用和弱相互作用作很多的考虑。

因此，我们还可以来看一下从不同的时间尺度之比所构成的一些无量纲常数。

(a') 如前所述，宇宙时间尺度为 $T=H^{-1}=4 \times 10^{17}$ 秒。

$$(b') \quad \frac{e^2}{mc^3} \sim 10^{-23} \text{秒} \quad (10.71)$$

$$(c') \quad \frac{\hbar}{mc^2} \sim 10^{-21} \text{秒} \quad (10.72)$$

最后这两个数不是完全独立的，它们通过精细结构常数联系在一起，这一常数的大小约为 $1/137$ 。这些短暂的时间足以表现核相互作用的特征，这种相互作用的时间尺度通常就在 10^{-22} 秒左右。我们又一次发现，宇宙和微观这两种时间尺度之比大约是 $10^{38} \sim 10^{41}$ 。

核的大小及核的时间尺度，同纯电磁力作用下的相应物理量并没有太大的差别，造成这一事实的原因在于，强相互作用同电磁相互作用的强度是比较接近的。两者的差别大约只有三个数量级，而我们在这里讨论的是有关大约 39 个数量级的问题。

弱相互作用在这儿一点也没有加以考虑，也许甚至不应当指望用它们来配成一幅说明宇宙和原子间相互作用情况的合理的图象。也许我们根本不应该指望从一种简单的观念引出太多的内容来！

最后，我们还可以提到一个仅仅用引力和宇宙参数就可以构成的无量纲常数

$$\rho_0 \frac{G}{H} \approx 1 \quad (10.73)$$

式中 ρ_0 是宇宙的密度。这是一个观测的结果，要使上面的关系式严格成立， ρ_0 的值应当取 $\sim 10^{-28}$ 克·厘米⁻³，这同我们所估计的星系质量密度很接近，后者约为 10^{-30} 克·厘米⁻³；尽管如此，我们必须记着，星系的质量可能只是提供了宇宙所包含的总质量的一部分。这样一个数字也代表了使宇宙具有球状外形所应当有的密度值，比如说，爱因斯坦或与之有关的宇宙模型就是一些球形宇宙。

上面我们举出了若干种情况，它们可以使自然界的无量纲数正好等于 10^{39} 或 10^{39} 的低次幂（包括零次幂），有关这方面的问题就讨论到这儿。许多科学家认为这不过是一些巧合而已，另一些人则认为它们可能构成了某些基本关系的基础，而这些关系是我们应该作出解释的。我们不准加入这场争论之中，但是应该继续进行观测，这样才能对由狄拉克的观念所引起的、有关自然界常数随时间而演变的问题开展进一步的探索研究。

这些常数的变化速度应该有多快呢？我们当然是不知道的，但是，哈勃常数的倒数 H^{-1} 可能会提供某种适当的时间单位，以使我们应该可以根据这一单位来测出常数的变化情况。

如果由于宇宙引力场的作用引起了微观尺度上的全部变化，那么弄清楚最近几十亿年内引力常数是否发生显著的改变可能是很有意义的。爱德华·特勒 (Edward Teller) 首先分析了这个问题 (Te48)，他探求了地球上作为时间函数的气候变化情况，这种变化应当同由于常数 G 随时间变化所引起的太阳光度的变化以及地球轨道的变化有关。推论过程是相当复杂的，但是结果表明，即使 G 确实有变化的话，那么每年的相对变化为 $(dG/dt)/G \lesssim 10^{-10}$ 。

最近，利用雷达观测研究了金星和水星轨道的不变性问题 (Sh71)，

结果是类似的，其中除牛顿引力理论外没有用到任何其他的假设。在接下来的一些年内，有可能把这类结果的精度提高一个数量级。

威尔金森 (Wilkinson) 对有关普朗克常数随宇宙时间而发生变化的可能性问题作了一项有趣的研究 (Wi58)。他当时所感兴趣的是，在相当于地球年龄这么长一段时期内普朗克常数变化的累积效应。地球和陨星的年龄可以从若干种不同的放射性衰变方式独立地加以测定，其中有的涉及到 α 粒子的发射，另一些同 β 衰变有关。这两种过程有着完全不同的物理基础，因而如果自然界常数发生了显著变化的话，那么我们就不能指望从 β 和 α 这两种衰变方式会得到相同的年龄。

威尔金森所引用的证据来自对古代慢性晕轮的一项研究，这些晕轮是在含有少量放射性物质的石块中所观测到的一些球状壳层。随着物质的衰变，任何 α 粒子都要在粒子穿出石块的那一端形成一圈薄薄的可见壳层，而大部分能量都在穿过石块之后散失掉了。于是，对应于各种不同速度 v 的 α 粒子就得到不同的壳层，这些壳层很容易用给定的 α 衰变方式来加以证认。这样，我们就可以得出两点有趣的结论：

(i) 带电粒子穿过物质的过程是纯电磁性的，这种粒子的物理性质在 2×10^9 年、或者也许再长一点的时间内不会有任何的变化。否则的话壳层就应当发生扩散现象，而不会是一些薄片。这一点是很有意思的，因为威尔金森所讨论的 α 衰变方式既牵涉到电磁力，又与核力有关。

(ii) 某些发射 α 粒子的核也可以通过 β 衰变进行发射，这两类衰变之比称为分支比。威尔金森可以得出这样的结论：如果分支比在过去的 2×10^9 年内总的增大或者减小了 10 倍左右，那么我们就应当发现，引起晕轮的某些 α 粒子应该不存在了，而另一些粒子则会增强一倍，由于没有发现任何这一类的反常现象，因此在过去的几十亿年内，与这项研究有关的许多基本物理常数所发生的任何变化可能都是很微小的。

有关基本物理常数变化情况的探索工作刚刚才开始，这方面的研究也许最终会导致我们对宇宙取得更好的了解。

10.15 时间箭头

我们往往认为时间始终是在增加的，然而，这是对什么而言的呢？而“增加”又意味着什么呢？

最简单的回答当然应该说时间是由钟来测量的一种量。我们对钟的作用是很清楚的，然而也就是仅仅如此而已！当然 (3.10 节)，钟可以有各种不同的类型，而我们也许想要把这些钟拿来作一番比较，以便知道所有这些钟是否在以相同的速率走动，或者还想知道另外一些问题，比如说某一类钟是否普遍地比别的钟走得慢。

这儿，我们总认为各种可能的钟始终只是在一个方向上走动。但是，在这样的情况下，我们根本不可能判断时间究竟是在“朝前”还是“朝后”走动，因为这两个方向是不可能加以区别的。

对引力和电磁过程来说，我们不知道怎样确定时间箭头的方向。不管地球在绕太阳的轨道上是顺行还是逆行，描述地球绕太阳作轨道运动的物理学都是同样适用的。如果把时间也来一下反转，那么对于太阳系中的地球和所有其他行星来说，以前它们按照什么样的轨道走过来，现在也会沿着同样的轨道按原路转回去。但是，这些轨道同对全部有关的

运动速度作一种简单的反转之后所能预报的一组未来轨道不应当会有任何的差异。

同样，我们可以用电子在磁场中的轨道运动来确定时间。这儿，有趣的是电子运行的轨道同正电子的轨道一模一样，只要正电子沿着同样的路径在时间上倒退回去就行了。

这两个例子都说明了一种基本的对称性，而这种对称性看来渗透到自然界的一切物理过程之中：如果我们把时间箭头 T 反转，把物质所带电荷的极性 C 反转，再把所有的位置和运动的符号 P 反转（这又称为反演），那么由此所观测到的结果，同没有发生任何反转或反射的原始过程中所得到的结果是无法加以区别的。动作 P 称为宇称动作； C 称为电荷共轭；而 T 叫做时间反转动作。物理学的一条基本定理要求，同时进行 CPT 三个动作后，全部物理过程都保持不变。

因为存在这些对称性，我们显然无法知道在我们所生活的这个世界中，到底是时间在往前跑、还是在往回转，宇宙是在不断地膨胀、还是在不断地收缩。这些宇宙运动和电荷没有任何关系，所以电荷共轭当然也就不会引起人们的注意。我们只不过自以为我们是由物质组成的，但是实际上也许正是我们通常称为反物质的那一种东西。

那么，我们怎样从实际上来确定时间箭头所指的方向呢？很长时间以来，人们认为热力学第二定律以唯一的方式确定了时间的方向。这条定律指出，随着时间的增加，任何孤立的系统往往会越变越没有规则。光线开始集中在恒星表面附近，以后就发散出去，充满整个空间，逆过程决不可能出现。充满在整个空间中的光线再也不会集中起来注入到单个致密天体之中。这种有规则的运动通常是不会发生的，尽管从某种简单的时间反转观点来看完全允许做到这一点。它们的可能性不能说没有，然而实际上根本不可能办到。热力学第二定律从根本上指出，随着时间的增加，系统就越来越杂乱无章，这是因为使系统处于无规则情况的状态可以有很多种，而能使它高度规则化的状态是极其稀少的。如果任何给定状态出现的可能性同所有其他状态都是一样的话，那么命运总是使演化后的系统处于某种不规则状态，而不会出现任何有规则的结构，前者为数极多，后者寥寥无几。

但是，我们可以争辩说，热力学第二定律实际上只是宇宙膨胀的必然结果：一个无干扰系统不会表现出随时间的任何系统性变化，宇宙膨胀正是这儿所需要的干扰因素。因为宇宙在膨胀，总是有更多的虚无空间不断地创生出来，而星光就可以流入这部分空间并把它填满。遥远的星系发生了红移，天空看上去是黑色的，而热力学上的不平衡状态自动地得以维持下去。在一个静态宇宙中，平衡状态是可以达到的，时间的方向性也就不存在了。

让我们来看一下把所有这一切反转过来后的情况：如果宇宙可以坍缩，遥远的星系就会以很大的速度向我们接近，而我们应当观测到它们有很大的蓝移，夜间天空就变得明亮了，也许光线就会从夜间天空流入恒星，而不是按另一种方式到处乱跑。在这些条件下第二定律还能成立吗？或者说，我们会不会发现随着宇宙的坍缩，物理过程就朝着更规则的方向发展呢？

如果朝不规则方向发展的趋势同宇宙膨胀有关——正如戈尔德所认

为的那样 (Go62)，那么时间箭头就同朝向规则状态的流动很有关系；但是，我们仍然无法区别时间是朝前跑还是往后退，因为时间的反转也许同宇宙坍缩、随机性的减小、星系蓝移等等现象有关。

因此，我们怎样看待我们在宇宙中所观测到的一切，这取决于我们怎样来定义时间箭头。如果我们先从楼梯上跌下来，然后就受了伤，那么宇宙是膨胀的，时间箭头“朝前”，而物理系统就往往会向随机状态发展。如果我们先使自己受了伤，然后跑上楼去，实际上时间就在往后退，那么宇宙是收缩的，而物理系统越变越有规则。因而我们所讨论的也许只是一个定义的问题。

由于我们并不喜欢把这样一个基本问题建筑在这么一种不能令人满意的随意状态之上，因而我们希望也许会有比较简捷的方法来确定时间箭头的方向。在过去的几年内，这样一类的可能性已经展现在我们面前。

1956 年，杨振宁和李政道 (Le56) 指出，在弱相互作用中，宇称可能会遭到破坏，这一点通过各种各样的实验很快地得到了证实。因此，我们认识到，同时进行 CP 两个动作后的不变性看来是普遍成立的。这应当意味着对某个物体的电荷所实行的反转必然会对它的初始物理特性产生一个镜象。在电磁过程中这无疑是正确的，一个正电子在负方向上运动所走过的轨迹，就同电子以同样的速度沿着正方向通过同样的电磁场时的运动轨迹一样。相同的规则看来对于其他形式的相互作用同样是正确的，其中也包括了“弱”相互作用， β 衰变就是后者的一个例子。CP 不变性，加上前面所谈到的 CPT 不变性，这就说明了物理学定律在时间上仍然应当保持它的不变特性。

但是，在二十世纪六十年代中期，普林斯顿 (Princeton) 大学的一个小组 (Ch64b) 发现了在中性 K 介子的衰变中偶尔会出现 CP 对称性遭到破坏的情况。这应当说明了在这些反应中时间反转同样有可能遭到破坏，因为不然的话 CPT 不变性就不能成立，于是物理学定理必然会遇到许多最基本的困难。要是时间反转对称性确实遭到了破坏，那么我们至少可以确定时间的一个主要方向，而关于时间箭头问题的讨论也许就比较容易了。因此，人们进行了一系列的实验，想通过这些实验来探求时间反转的不对称性。到目前为止人们还没有发现这种对称性有任何的破坏。

为了说明我们正在探求中问题的性质属于哪一类型，有一个例子可能是有用处的。

如果我们来考察一下 Λ^0 粒子（它始终具有零电荷）的衰变产物



也就是一个质子和一个带负电荷的 π 介子，那么我们所讨论的就是一种弱相互作用。开始的时候，我们可以认为 Λ^0 的自旋方向朝上，如图 10.14(a) 所示。质子垂直于该自旋方向离开粒子运动，而质子本身的自旋是未知的，它可以有三个互相垂直的分量 a, b, c ，图中表示了这种情况。时间反转后，所有的自旋方向都发生了改变，速度的方向也是如此。但是，这些分量的数值却没有变化。把整个过程绕 c 轴转 180° 就得到图 (c)，这时 Λ^0 粒子的自旋方向与初始自旋方向相同，质子也沿着与初始方向相同的方向运动，但是自旋的 c 分量现在反转了过来。因为我们所

做的 180° 的旋转只不过相当于一种观测角度的问题,所以只要时间反转对称性成立,我们应当预料到(a), (c)两张图必然是完全一样的。但是,也正因为这一点,质子自旋的 c 分量只能等于零。因此,只有当质子自旋 c 分量的大小始终为零时, Λ^0 衰变中的时间反转对称性才能成立。在有一些实验中质子是从小靶上散射出来的,我们可以通过这一类实验来确定质子自旋的方向。迄今为止有关

图 10.14 Λ^0 粒子衰变为一个质子和一个 π 介子,图中表示 Λ^0 粒子的自旋处于“朝上”的方向。虚线表示了质子的速度矢量,它的自旋分量是用实线表示的,而 Λ^0 粒子的自旋方向用粗箭头指示。时间反转变换后所观测到的衰变情况如图(b)所示,而(c)则表示再旋转 180° 后的结果。如果这个过程应该表现出时间反转不变性,那么质子的自旋分量 c 必然为零 (0v69)

这方面的实验说明了 c 分量实际上等于零,观测结果相对于零的差异仅仅是由于衰变时 π 介子和质子间强相互作用所引起的一种偏差,它是可以预测出来的。算出这一改正数后可以从实验所测得的 c 值中加以扣除,最后的 c 分量实际上就等于零了,这正是时间反转不变性所要求的结果。

同时,我们发现对 Λ^0 衰变来说宇称遭到了破坏,因为在这样一种反演的情况下所有线动量的方向都发生了改变;但是自旋的符号没有改变,它可以看作是二个有向量的矢量积。如果要使宇称不受破坏,那么质子的速度和它的自旋分量 b 应该始终具有同样的关系,而要能满足这一条件 b 值就必须为零。实际情况是 b 值并不为零,有时候 b 分量与速度矢同向,而有时候则两者反向,但是其中总有一个方向是主要的。因此,在这一过程中宇称就受到了破坏,不过我们还不知道联合动作 CP 是否也会遭到破坏。问题的复杂性之一在于,如果我们知道发生了 CP 遭到破坏的事件,那么通常情况下用 T 的对称性很难对事件发生的地点加以检验,反过来的情况也是一样。但是,在接下来的几年中发现 T 对称性受到破坏的可能性看来是存在的,到那个时候我们也许就可以把时间的主要方向确定下来了。我们现在清楚地知道,时间对称性的问题乃是观测物理学所要研究的问题之一,我们完全没有必要把它放到哲学的范畴中去加以讨论。

核尺度上所发生的基本过程看来同宇宙的重要结构特征有着很密切的关系,这一点好象也是不成问题的了。我们要是能掌握这种关系那该多好啊!

问题解答

$$10.1 \quad x_4^2 = a^2 - r^2, \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$dx_4^2 = \frac{(rdr)^2}{a^2 - r^2}, \quad dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

这样就得到了式(10.11)。再把(10.12)式代入后就给出式(10.9)。

10.2 圆的半径是 $ax=\text{常数}$ 。

从(10.9)式我们知道,在距离 ax 处的长度元为

$$dl^2 = a^2 \sin^2 x (\sin^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2)$$

(i)如果我们选择 $\theta = \pi/2$, 这就相当于化成了平面问题,于是圆的

周长为

$$\oint dl = \int_0^{2\pi} a \sin x d\phi = 2\pi a \sin x$$

所以周长与半径之比为

$$x^{-1} 2\pi \sin x \leq 2\pi$$

(ii) 球上的面积元为

$$d\sigma = (a \sin x \sin \theta d\phi)(a \sin x d\theta)$$

于是整个球的面积是

$$\iint (a \sin x \sin \theta d\phi)(a \sin x d\theta) = 4\pi a^2 \sin^2 x$$

(iii) 由式(10.9)可知三维体积元是

$$\begin{aligned} dV &= (adx)(a \sin x d\theta)(a \sin x \sin \theta d\phi) \\ &= a^3 \sin^2 x \sin \theta d\theta d\phi dx \end{aligned}$$

由此就可得出(10.14)和(10.15)两式。

$$10.3 \quad (i) \quad x_4^2 = -a^2 - r^2, \quad dx_4^2 = -\frac{r^2 dr^2}{(a^2 + r^2)}$$

$$dl^2 = dr^2 + r^2(\sin^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2) - \frac{r^2 dr^2}{a^2 + r^2}$$

这和式(10.18)是等价的, 其中 $r = a \sinh x$ 。

$$(ii) \quad dl^2 = a^2 \sinh^2 x (\sin^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2) + \frac{a^2 (d \sinh x)^2}{1 + \sinh^2 x}$$

但是

$$1 + \sinh^2 x \equiv \cosh^2 x, \quad d \sinh x = \cosh x dx$$

所以我们就得到式(10.19)。因为 $ax = \text{常数}$, $\theta = \pi/2$, $dl = a \sinh x d\phi$, 故圆的周长为 $2\pi a \sinh x \geq 2\pi ax$ 。

(iii) 这时, 我们知道面积元是

$$d\sigma = (a \sinh x \sin \theta d\phi)(a \sinh x d\theta)$$

就一个 $ax = \text{常数}$ 的球面来说, 对全部 θ 和 ϕ 积分就得到式(10.20)。

(iv) 类似地, 体积元为

$$dV = (a \sinh x d\theta)(a \sinh x \sin \theta d\phi)(adx)$$

由此导得式(10.21)。

10.4 $1+z = a(t_0)/a(t_1)$ 。按 $(t_1 - t_0)$ 表为泰勒展开式有

$$1+z = a_0[a_0 + \dot{a}_0(t_1 - t_0) + \ddot{a}_0(t_1 - t_0)^2/2]^{-1}$$

上式按 $(t_1 - t_0)$ 展开即得式(10.27)。

$$10.5 \quad \sinh^2 x = \left(x + \frac{x^3}{6} + \cdots\right)^2 = x^2 + \frac{x^4}{3} + \cdots$$

$$= x^2 - \frac{kx^4}{3} + \cdots, \quad k = -1.$$

$$\sin^2 x = \left(x - \frac{x^3}{6} + \cdots\right)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + \cdots$$

$$= x^2 - \frac{kx^4}{3} + \cdots, \quad k = 1.$$

$$N(x) = \frac{4\pi}{3} nx^3 \left(1 - \frac{k}{5} x^2 + \cdots\right)$$

10.6 对式(10.27)求逆级数后我们有

$$\Delta \equiv t_0 - t_1 = z \frac{\dot{a}_0}{a_0} \left[1 - z \left(1 - \frac{\ddot{a}_0 \dot{a}_0}{2 \dot{a}_0^2} \right) \right]$$

这时积分(10.24)就变为

$$x \sim \int_{t_0 - \Delta}^{t_0} \frac{cdt}{a_0 - \dot{a}_0(t_0 - t)} \sim \frac{e}{a_0} \left[\frac{za_0}{\dot{a}_0} - \frac{z^2}{2} \frac{\dot{a}_0}{a_0} \left(1 - \frac{\ddot{a}_0 \dot{a}_0}{\dot{a}_0^2} \right) \right]$$

现在, 由于 $\sigma(x) \sim x$, 我们就有

$$5 \log \left(\frac{\sigma(x) a_0 (1+z)}{10 \text{pc}} \right) = 5 \log \left\{ \left[\frac{a_0 z}{\dot{a}_0} \right] \left[\frac{c}{10 \text{pc}} \right] \left[1 + \frac{z}{a} \left(1 + \frac{\ddot{a}_0 \dot{a}_0}{\dot{a}_0^2} \right) \right] \right\}$$

取到一阶项有

$$\dot{M}_0(t_0 - t_1) = -\dot{M}_0 \frac{za_0}{\dot{a}_0} \quad \text{及} \quad \log(1+A) = \frac{A}{2.303}$$

$\therefore A \ll 1$, 所以得

$$m = M_0 - 45.06 + 5 \log \frac{a_0 z}{\dot{a}_0} + \frac{2.5}{2.303} \left(1 + \frac{\ddot{a}_0 \dot{a}_0}{\dot{a}_0^2} - 2\mu \right) z$$

$$10.7 \quad q_0 = -\frac{\ddot{a}_0 \dot{a}_0}{\dot{a}_0^2}$$

$$\dot{a}_0 = a_0 H, \quad \ddot{a}_0 = a_0 H^2 \quad \therefore q = -1$$

10.8 (i) 在式(10.45)中因为 $\dot{a} = \ddot{a} = 0$, 所以有

$$\Lambda = (c^2 a^2)^{-1} + \frac{\kappa P}{c^2}$$

于是, 从式(10.44)和(10.45)就得到式(10.47)。

(ii) 把题中给出的两个值代入(10.44)和(10.45)就必然得出应有的结果。

10.9 由式(10.44)和(10.45)得到

$$\Lambda = \frac{3\dot{a}^2}{c^2 a^2} = \frac{2a\ddot{a} + \dot{a}^2}{c^2 a^2}$$

它的解就是式(10.48)。宇宙年龄是 $a / \dot{a} = H^{-1} = \sqrt{3 / \Lambda c^2}$ 。

10.10 由式(10.44)和(10.45)给出

$$-2a\ddot{a} = \dot{a}^2 + k = \frac{\kappa \rho c^2 a^2}{3}$$

所以

$$-\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{4\pi\rho G}{3} = -\frac{\dot{a}^2}{a^2} \left(\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} \right) = H^2 q_0$$

及
$$2q_0 - 1 = \frac{-2a\ddot{a}}{\dot{a}^2} - 1 = \frac{k}{\dot{a}^2} = \frac{k}{h^2 a^2}$$

10.11 开始时, 由式(10.44), (10.45)知

$$6\ddot{a} = ac^2(2\Lambda - \kappa\rho)$$

如果 ρ 因为某种扰动而减小, $\ddot{a} > 0$, 宇宙就发生膨胀, 它会引起 ρ 的进一步减小, 这个过程可以一直进行下去(Ed30)。

$$10.12 \text{ (a)} \quad \frac{\kappa\rho}{c^2} = -\left[\frac{2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + 1}{c^2 a^2}\right] = \frac{\kappa\rho}{3} = \frac{1 + \dot{a}^2}{c^2 a^2}$$

所以对于初始阶段有 $\ddot{a}a = ? (1 + \dot{a}^2)$ 。

由式(10.52)可以设法解出

$$\dot{a} = \cot x, \quad \ddot{a} = \frac{-1}{b_0 \sin^3 x}$$

它们可以满足上面的微分方程。

(b)到达这一演化阶段时式(10.45)变为

$$2a\ddot{a} = -(\dot{a}^2 + 1)$$

式(10.53)的试探解满足上面的方程, 因为

$$\dot{a} = \sin x [1 - \cos x]^{-1} \quad \ddot{a} = -1[a_0(1 - \cos x)^2]^{-1}$$

(c)现在要求满足的方程是 $\ddot{a}a = 1 - \dot{a}^2$, 按照上面的步骤可知式(10.54)是满足这个方程的。

(d)同样, 对于双曲宇宙的晚期阶段来说, 式(10.55)满足

$$2\ddot{a}a = -\dot{a}^2 - 1.$$

10.13 对式(10.66)所加的两项要求是

$$v^2 = 0 = H^2 r^2 + 2GM\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_{0\max}}\right]$$

$$\frac{dV^2}{dr} = 0 = 2H^2 r - \frac{2GM}{r^2}; \quad r^3 = \frac{GM}{H^2}.$$

把这一结果代入第一个关系式后就给出 $r = 3r_{0\max}/2$, 因此有

$$r_{0\max}^3 = \frac{8}{27} \frac{GM}{H^2}$$

10.14 如果 Th^{232} 和 U^{238} 是从过去的某一个时间 t 以来, 分别按速率 dn_r/dt 和 dn_u/dt 陆续形成的话, 那么现有的丰富度比 R 应该是

$$R = \frac{\int_0^t \frac{dn_r}{dt} 2^{-t/\tau_r} dt}{\int_0^t \frac{dn_u}{dt} 2^{-t/\tau_u} dt}$$

式中 τ_r 和 τ_u 为以十亿年计的半衰期。

$$\therefore R = \frac{14}{4.5} 1.6 \frac{[1 - e^{-0.69t/\tau_r}]}{[1 - e^{-0.69t/\tau_u}]} = 3.3$$

故 $t \sim 200$ 亿年, 但是这与比值 $\text{U}^{238} : \text{U}^{235}$ 不一致。

如果 60%的物质是在时间 t 时已经形成。而剩下的 40%在 t 和 50 亿年前形成, 则这一比例应当是

$$R = 1.6 \left[0.6 \frac{e^{-0.69t/\tau_T}}{e^{-0.69t/\tau_U}} + 0.4 \frac{\tau_T}{\tau_U} \frac{e^{-3.45/\tau_T} - e^{-0.69t/\tau_T}}{e^{-3.45/\tau_U} - e^{-0.69t/\tau_U}} \right] = 3.3$$

由此得出 $t \sim 70$ 亿年。

第十一章 宇宙中的生命

11.1 引言

从史前时期以来，人们就一直为人类是从哪里来的、生命又是从哪里起源的这样一些问题而深感奇怪。人们慢慢地认识到，地球不过是绕太阳运行的一颗行星，太阳又仅仅是我们银河系内大约 10^{11} 颗恒星中的一个成员，而银河系本身也只不过是分布于整个宇宙之中近 10^{11} 个这类天体系统中的一个而已。于是，人们就开始清楚地意识到，在其他的行星上，在其他某个恒星的附近，或者在另一个某个星系中生命也是可能存在的。宇宙学原理（10.3 节）从哲理上给这种观念以更大的魅力。

人们总是认为，生命是某种极为普通的物质形态，它一定遍及于整个宇宙之中。从这种观点来说，在太阳系内其他行星上，或者在太阳系附近其他恒星的周围发现某种不管怎样原始的生命形态的几率看来是很大的。尽管如此，对于生命应该在哪里存在我们仍然不能作出明确的预言。主要是因为我们还不懂得生命有机体的热力学，也不知究竟可取哪些不同的形态。

11.2 生物系统的热力学

在热力学中要区分三种类型的系统。孤立系统，它与周围环境既不交换能量也不交换物质。封闭系统，仅交换能量但不交换物质。而开放系统则与其周围环境既交换能量又交换物质。生物系统总是开放系统，但在实现它们的某些功能时，也能象封闭系统一样起作用。

在生命系统中所发生的过程还以某种与时间相关的形式为其特征。无论是时间向前推移或者向后追溯，有些物理过程同样都可以发生。如果观察钟摆摆动的影片，我们将难以断定影片是在正常放映还是在倒片。仅仅当影片同时拍摄出带动钟面指针运动的棘轮机械装置时，我们才能够得知影片确实是在正常放映。摆的运动是可逆的，但棘轮的动作是一种不可逆过程。生命过程必定也是不可逆的。

在不可逆过程中，熵总是不断地增加的。熵是不规则性的某种量度。假若一颗冷的星际微粒吸收了可见星光，然后再发出热辐射，在这个过程中微粒放出了大量的低能光子。在平衡时，发射光子的总能量等于被吸收的星光的能量，但是所发出的辐射之熵是增加了。大量的低能光子沿任意的、不可预测的方向运动，熵的增加正是这种运动方向不规则性的一种量度。原先携带着较大能量的单个光子的初始状态是比较规则的，因此这种特征就由一个较低的熵来表示。

生物系统正因为这种不规则性的增加而繁茂发展。它们把周围环境的规则性转化为不规则性。可是，在这个过程中，它们又增加了它们自身的内部规则性程度。周围环境的熵增加了，内部的熵可以减小，但生物系统加上外界环境后，总的熵总是增加的。因而这没有违反热力学第二定律。该定律指出，在整个宇宙的任何发展过程中，整个熵的总变化永远是正的。

生物系统竟然能如此地增加其内部的规律性，这看起来是很奇怪的，但事实上我们在星际微粒的规则排列问题上已经遇到过类似的过程

(9.8 节)。在那儿我们已经看到,到达银河系内微粒上的各向异性星光,主要是从位于银道面内的各个方向射来的,这些星光使微粒取得某个规则的定向,也就是使得微粒绕着位于银道面内的角动量轴旋转。一个有确定取向的微粒集合比随机取向的尘埃微粒当然显得更有规律性;而微粒熵的减小是通过吸收熵很小的各向异性星光以及发射熵很大的各向同性红外辐射而实现的。

这些星际尘埃微粒处于一种平稳不平衡状态。这种状态的特征是在高温热源(恒星)及低温的潭穴(宇宙)之间进行能量传输。尽管有时候微粒在取向、角动量以及其他性质方面会有统计起伏出现,但整个系统并不随时间而发生系统性的变化。

我们希望,通过对平稳不平衡过程的研究将能导致对生物系统特性的更为深入的理解(Pr61)。因为当一株植物吸收了太阳光后——太阳光子的典型能量约是 2 电子伏特——植物将以 0.1 电子伏特能量的光子再发射,总的热辐射能量与吸收的光子能量相同。整个这一作用过程就象是一种平稳不平衡系统。事实上,范围更为广泛的生物过程看来也是以这种方式进行的①。摆钟也是平稳系统,上紧发条的能量是低熵的,它以不可逆的方式转化为高熵的热能。如施勒丁格(Schrödinger)指出(Sc44),生命有机体与摆钟有热力学上的相似性。

实际上,每一种天体物理过程都是以不平衡为其特征的,因为能量总是从高度致密的能源流到无限广袤的虚无空间去的。当任何生物系统靠近某一个这样的能源时,它就可以充分利用这些能流。由此看来,好象这种或那种形式的生命存在所必需的条件应当是普遍存在的。生命确实可能是很多的,但或许它们以我们还不能识别的形式存在于世。

弗雷德·霍伊尔(Ho57)推测,星际尘埃云可能是有生命的。从热力学观点来看,这种想法可能是虚构的。我们知道,象我们银河系这样的旋涡星系所发射的星光大约有十分之一被尘埃云所吸收。微粒的温度太低了,以致熵能够产生最大程度的增加。可是还不能肯定的是,微粒是否已冷到这种程度,以致根本不能有效地利用所提供的能量。星际微粒的典型温度可能是 10 到 20K,在这样的条件下,微粒内原子的活动能力是很低的,因而一些与生命相联系的普通特性都可能无法存在了(Pi66)。

弗里曼·戴森(Freeman Dyson)(Dy60)从热力学角度提出了一种类似的设想。他认为,有智慧的文明生物可能会在恒星的周围造起一层薄壳,以用来捕获星光,也就是汲取有用的能量,然后再在红外波段把热量辐射掉。一些红外源可能就是这类天体(Sa66b)。

我们在地球上的经验是:生命会不断地繁殖发展,直到由于能源的缺乏、原材料的缺乏或者由于毒素过多才会停止。在宇宙中不断会有大量的能量倾泻出来,这些能量眼看就要浪费掉。如果竟然没有任何形式的生命去充分地适应这种环境,去利用这样巨大的能量,这似乎就很奇怪的了。

对未知生命形式的探索可能就集中在寻找显著的不平衡性的例子上。比如,火星上的天文学家应当能够发现地球上存在生命的两种最有力的证据。其一是射电流,它相应于几百万度的温度不平衡性。这些射电流是由无线电、电视以及雷达发射器所产生的。其二是有过多的甲烷

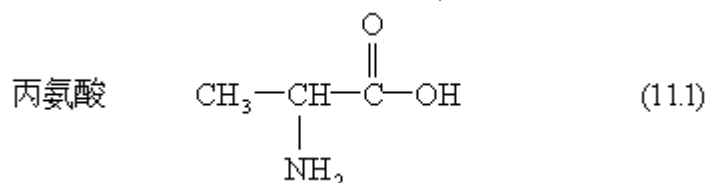
CH₄。当大气中有氧气存在时，甲烷仅能存在很短的时间，它会转化为 CO₂ 和 H₂O。可以从火星上通过光谱分析发现地球上这种甲烷浓度的不平衡性，而这是由于生存在沼泽中，以及在牛和其他反刍动物肠胃中的沼气细菌给甲烷浓度以不断迅速的补充而造成的 (Sa70b)。

11.3 自然界和实验室中的有机分子

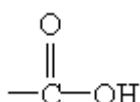
就算我们并不特别知道寻求外来生命形式的方法，难道当地球外的生命以地球上所熟悉的形式存在时，我们也不能发现它们的痕迹吗？在地球上全部有生命物质中都含有相当复杂的有机分子——例如蛋白质和核酸，我们当然很希望能够发现这类分子的痕迹，或者至少也要发现它们的衰变物。

近年来的工作表明，可以通过两条完全不同的途径来发现这类复杂的分子，当然还可能有更多的路子可走。第一，通过对微波波段的光谱分析观测到星际分子中有象氰化氢、甲醇、甲醛、甲酸等一类有机分子存在 (见 9.4 节)。星际空间中还存在水蒸气和氨，因而在今后几年内很可能会发现更大更复杂的分子①。

第二，通过对 1969 年 9 月 28 日落在澳大利亚默奇森 (Murchison) 附近的一块陨星——这是一颗碳粒陨星——的分析，表明存在着许多碳氢化合物和 17 种氨基酸，其中有 6 种可以在有生命的物质中找到 (Kv70)。丙氨酸是这类氨基酸中的一种，它具有下列分子结构式：



一切有机酸均含有羧基：



而氨基酸另外还有一个特征，即含有氨基 NH₂。

上述观测结果具有以下的三个特征，因此它们看来与地球上的氨基酸之间是有区别的。

(a) 丙氨酸以两种不同的形式出现。一种形式是由 CH₃，NH₂，COOH 以及 H，再加上在它们包围之中的碳原子所构成，它们的排列结构使偏振光产生左旋。在另一种形式中则使偏振光反向旋转。它们分别标为 L⁺ 和 D⁺ 丙氨酸。符号 L 来源于 levo 这个词，意思是“左”；而 D 则来源于 dextro，意思是右。

所有的氨基酸都可由丙氨酸衍生出来。从 L⁺ 丙氨酸衍生出来的称为 L⁺ 氨基酸；而从 D⁺ 丙氨酸衍生出来的则称为 D⁺ 氨基酸。在蛋白质中所发现的全部氨基酸都是 L⁺ 氨基酸。尽管不是所有这些氨基酸都会引起光线的左旋，但从结构来看，它们都是从 L⁺ 丙氨酸衍生出来的。

然而，默奇森陨星的分析表明，D⁺ 和 L⁺ 这两种形式的氨基酸实质上同样丰富。因而这些氨基酸就完全不象是地面酵母促生物原沾污的结果。

地球上的氨基酸绝大多数是左旋形式的。但为什么会这样的呢？这确实是一个谜。因为从化学上讲，右旋和左旋形式是同样可能的，它们彼此互为简单的镜象。之所以左旋占优势，可能是进化论方面的原因在起作用。原始生命可能是存在于一种消旋混合体中，即既有 L⁺ 形式，又有 D⁺ 形式；可是在为生命所必需的原材料而发生的竞争过程中，L⁺ 形式得胜了。

事实上，消旋形式的生命也许不可能以有效的方式存在，因为它寻找养料的效率不高。假若螺栓和螺帽都具有右旋螺纹，一个螺栓就很容易配到一个螺帽。但若要从消旋的混合体中去为螺栓和螺帽配对那就很麻烦了。

(b)默奇森陨星物质的第二个突出的性质是碳同位素 C^{13} 与 C^{12} 之比约是普通地球上所发现的物质的两倍。这也说明它不可能是沾染的结果。

(c)最后，在陨星物质中发现某些氨基酸由非蛋白氨基酸构成，这就更不可能是沾染后的产物了。

因此，酵母促生物原的分子以及其他为生命存在所必需的分子看来在宇宙中到处普遍存在。它们自然不会只在地球上出现。

我们还必然会问，这些分子是怎样产生的。它们是在通常的天体物理条件下得以形成的吗？对这个问题的回答看来应该说“是的”。

根据米勒 (Miller) (Mi57a, Mi59) 的工作为基础所做的一系列实验表明：若把氨 NH_3 ，甲烷 CH_4 以及水蒸气等气体混合在一起，并用紫外线照射，或使其受到电击或放电，也可以用 X 射线、 γ 射线、电子及 α 粒子来进行轰击，这样，就可以通过人工的方法制造出氨基酸以及生命有机体中其他的分子。至此，这些分子还总是在消旋混合体中产生出来的。既然上述实验所用的所有气体都是一些行星大气的组成部分，从宇宙丰富度的角度来看，可以认为这些气体也是普遍存在的。当这些气体受到太阳紫外线、X 射线的照射及宇宙线的轰击，以及受到较近的超新星偶然爆发的照射和其他自然辐射源的作用后，似乎应该能够在这样的行星大气中产生出具有生物学意义的分子来。

上述这些论点不仅应该在太阳系内是正确的，而且在其他类似的系统中也应该如此。或许环绕巴纳德星运行的行星也已经走过了一段非常类似的经历，因此在那里似乎也应该有生命存在。

尽管很容易通过能量轰击形成这一类分子，但它们也同样容易受能量轰击而遭到毁坏。因此，在大气中形成的酵母促生物原的分子除非马上转移到安全的地方去，否则就会被毁坏掉。在地球上，可能就是由雨水把这类分子从大气层内冲刷到了海洋中，在那里海水形成的保护层使它们免受辐射的破坏。

我们看到，生命——或者说高度规则的酵母促生物原的分子——所形成的条件，从热力学观点来看是很容易具备的（见 11.2 节）。一方面具有一个低熵的太阳紫外线或宇宙线辐射能源；同时，通过与大气分子的碰撞或通过长波波段的再辐射，又具有了将这低熵的能量转化为高熵形式的可能性。

11.4 地球上的生命起源

在我们能够对地球上生命起源问题作大致的推测之前，我们应该知道一些关于太阳系刚刚形成后最初几十亿年内地球大气的情况。

原先大气中看来不会有任何的分子氧。占优势的大气分子可能是由于氢的大量存在而被强烈还原了的分子，如甲烷、氨、水蒸气和乙烷。

一、二十亿年过去以后，大气中的氢不那么丰富了。也许因为上层大气中的水蒸气被紫外辐射照射后氢原子被分离了出来，于是游离态氧也就出现了。分离出来的氢原子可能已经从大气中完全逃逸掉了，尽管逃逸的方式看来还没有完全搞清楚（Va71）。

在这种最早期的还原条件下所能形成的生命形式大概是厌氧性的，设想最先第一个形成的有机体是生活在具有丰富的大有机分子的环境之中（Op61a, b），而这些有机分子又是由 11.3 节所讨论的紫外辐射及其他轰击机制所造成的。于是这个有机体就可以随意地取食和生殖，直到有机分子的供应减少以至不足时为止。这种通过破坏先存分子而获取能量的有机体称为他营养体，显然，它们比不上自营养体的，后者是一种还能够利用其他形式能量的有机体，能够利用日光的自营养体称为光合自营养体。自营养体可能很快就占了上风。想必它们原先是一些厌氧菌，但因为氢气不断从大气上部逃逸掉，而氧气却越来越占优势，这时厌氧菌所处的地位就开始显得不及需氧菌优越了。今天的全部高等有机体就是从需氧菌基础上进化来的。当大气中氧的浓度达到现在丰富度的百分之一左右时，呼吸作用就会比发酵作用更为有效了，而需氧菌可能就是在这个时候起源的。

有机生物在它们的遗传结构中，也就是在确定其后代结构的编码中，自然要经受各种的变异。通过 X 射线和其他破坏性轰击的作用，可以人为地增加这种变异率。需氧菌或许就是通过这种变异过程而由厌氧菌形成出来的。因为需氧菌能够利用大气中的氧，它们很快就变成了占优势的生命形式。现今，只有在气体氧能够被设法排除的地方，厌氧菌才能繁殖下去。

在那些得以成功地进化发展的生命形式中，变异性和稳定性之间的平衡看来特别重要。没有变异性，一个有机体就不能适应周围环境的变化；但如果如果没有一定的稳定性，也就不能进化为较高级的形式。在达尔文的“适者生存”的理论中，那些“适者”可能就是从相当稳定的生命形式经过偶尔的变异而产生出来的。为了使生命的形式能够进化下去，个体的死亡看来是必要的。可是为了使生命最顺利地进化，每个适应环境的个体应该争取生存，力拒死亡。据推想，存在有一个最适当的优生学的寿命长短。对不同类的生命体，这个寿命长短各不相同。某些雄蜘蛛在交尾后立即就死亡了。而对男人，则必须有一个相当长的寿命，因为还需要他们帮助抚育下一代。

我们认为，小的有机体经过可能的合群而成为较大的有机体，进而导致多细胞形式的形成，并最终导致我们今天所见到的较高级的生命形式。有趣的是，不可逆的热力学过程并不仅仅如 11.2 节所示，在生命的新陈代谢中应该起作用；而且通过变异及由此引进的代谢形式和代谢率的变化，生命更高级的组织形式的发展也可能用不可逆的热力学过程加以描述。

今后几年内，在由热力学方法研究有关生命的理论方面，在实验室

研究合成十分复杂的生物形式方面，以及在探索维持生命所需要的分子在地球外存在的证据方面，应该显示出重要的突破。

11.5 通讯和空间旅行

如若宇宙中其他地方也存在生命，他们或许也是有智慧的。又如果他们真是有智慧的，那么他们或许就会组成文明社会。那么我们应该怎样和他们交换信息呢？而其他的智慧生物又可能通过怎样的方式来与我们接触呢？(Sh66) (Dr62)。

这是一个通讯问题。怎样才能远距离上最有效地发送信息呢？电磁波信号从发送到接收之间需要很长的时间，这对通讯问题又会有怎样的影响呢？对这些问题的研究一直是很活跃的。但还没有能够找到唯一最适宜的途径。这个问题在很大程度上取决于我们最希望用什么方式来做这一点。

如果你喜欢进行旅行，那么用以相对论性速度飞行的火箭进行旅行对你可能就是最合适的了。但这时你必须考虑在这样的长途旅行中怎样活下去。有人建议用冷冻宇宙飞行员进行这种飞行。但至今还没能够使比青蛙更大的东西成功地冷冻和复活；因此，我们还不清楚，这个技术能否推广到大的哺乳动物。不载人的宇宙飞行，或者经过几代人传种接代后才着陆的宇宙飞行也是可能的。

换一种方式，我们也许仅仅希望限于通过发射射电，可见信号，或者红外，X射线讯号进行通讯联络。那么这时是否存在有一个最佳的电磁波频率呢？即使说我们找到了这个频率，我们还应该问：仅仅是因为我们所特有的技术能力，才决定了这个频率性能最佳，还是因为有更基本的理由才选择这样一种特殊的通讯方式？很明显，如果我们选择错误的频率来传输我们的讯号，那么结果可能是谁也不能收到。同样，如果我们不知道应该把我们的接收机调谐到怎样的频率，我们也可能会错过了其他文明生物所发来的信息。我们无法对所有一切频率都进行调谐，因为这会引起难以克服的财政开支上的困难。为了使第一次通讯联络有更大的实现把握，我们必须预先猜测出正确的频率。

那么，用超光速粒子又会怎么样呢？在 5.12 节中我们已经提到，它们是以超过光速的速度运动着的粒子。显然，如果超光速粒子存在的话，它们必将具有许多令人感兴趣的特性。它们或许能以数百万倍于光速的速度而运动，因而就可能使人类与其他智慧生物的有意义的双边谈话成为现实可行。更何况超光速粒子仅仅需要不高的发送能量(5.56)，因而可能是相当经济的。最后，超光速粒子显然会使我们能够摆脱由宇宙地平线问题而产生的强制性的限制(10.11 节)。看来，超光速粒子不容易与通常的物质发生相互作用，这是它的一个缺点。如果不是这样，我们现在就可能已经发现它们了。因而合适的发射器和接收器的制造可能是很困难的问题。

显然，在一个与其他文明生物进行通讯的手段产生之前，还会有无数多的问题需要回答。我们仅仅需要注意，如果超光速粒子能够很容易地产生和接收的话，那么别的文明生物可能就会利用这种粒子而不再去使用其他的通讯手段了。可是我们甚至还不知道，超光速粒子是否能够存在。

为了说明必须考虑的一些问题，思考下面两个问题也许是值得的。

问题 11.1 一条宇宙飞船在从地球飞向遥远星系的旅途中慢慢地加速。由于不断地加速，速度便越来越高，飞船就会与星际气体和微粒发生碰撞，与横贯宇宙空间游弋的光子发生碰撞，以及与磁场和宇宙线粒子发生碰撞。估计上述这些粒子以及星际和星系际空间可能存在的其他粒子和场对飞船的影响。这些影响包括对飞船动量的影响、对飞船上电荷分布的影响以及电荷分布所产生的效应、对船舱的侵蚀和剥落效应、热效应等等。对飞船的飞行来说，最严重的限制条件是什么呢？在第六章和第九章中讨论到的每一件事情几乎都与这个问题有关。

问题 11.2 在能够接收到的信息和发射的信息之间是有一定比率的，这个比值通常与接收器的面积 A 以及接收器对于发射点所张的立体角 Ω 成正比。我们现在假设发送出去的微粒或波的动量范围为 Δp ，并假设在单位时间内能够被发送出去的讯息比特数——比特率——等于在这段时间内包含在被发送出去的波束中的相格数(4.65)。

(a) 试证明，电磁波的比特率为

$$\text{光子比特率} = A\Omega \frac{v^2}{c^2} \Delta v \quad (11.2)$$

其中 v 是光子频率， Δv 是发射波束的带宽，并且认为天线仅仅传送一种极化方向的光子。

(b) 对超光速粒子系统，如果(4.65)式可以适用，试证明有

$$\text{超光速粒子的比特率是} \left| \frac{A\Omega}{h^3} m^3 c^4 \frac{\Delta N}{N^3} \right| N \gg 1 \quad (11.3)$$

式中假定传送讯号的超光速粒子的速度范围是在 $V=Nc$ 到 $V=(N+\Delta N)c$ 之间， N 是个大数。假若超光速粒子的质量与电子的质量是同一个量级，并且假定辐射频率为可见光频率，试证明当 $N \lesssim 10^7$ 及 $\Delta N \sim 0.5N$ 时，超光速粒子的比特率比电磁波的比特率大几个数量级。然而当 $N \sim 10^8$ 时，证明其比特率及能量消耗就与可见光的相应值差不多了。在证明这个问题时，方程(5.56)是有用的。

问题 11.2 的解答

这个问题是高度臆测性的，特别是考虑到第五章中所叙述的一些困难后，就更觉得是如此：

我们假定，超光速粒子的可区分性是由其相空间参数决定的，而单位时间内所发送出去的可区分的超光速粒子数就决定了比特率。设接收器面积为 A ，接收立体角为 Ω ，单位时间内它可以接收大小为 ANc 的体积内的超光速粒子，其中 N 是以光速 c 为单位的超光速粒子的速度值。对每一种极化模式，这些超光速粒子所据有的动量空间范围是 $\Omega p^2 dp$ 。因而，在单位时间内入射到探测器上的可区分的超光速粒子数（在这里称为比特率）就是

$$\left| \frac{ANc\Omega p^2 dp}{h^3} \right|$$

利用相对论性表达式

$$\epsilon^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 = m^2 c^4 (1 - N^2)^{-1}$$

将能量 ϵ 和静质量 m 与动量和速度联系起来。这就导出了（虚数的）动

量值

$$p = \frac{N}{\sqrt{1 - N^2}} mc$$

当速度范围为 dNc 时，所得到的比特率是

$$\left| \frac{A\Omega}{h^3} m^3 c^4 \frac{dN}{N^3} \right| \quad N \gg 1$$

对电磁辐射来说，相应的表达式为

$$\frac{A\Omega v^2 dv}{c^2}$$

其中 v 是频率， dv 是频宽。假如在式中频率取为可见光的频率值，质量 m 取为电子质量，则只要 N 小于 10^7 以及 $dN/N \sim dv/v$ ，那么超光速粒子的比特率就将比电磁波的比特率大好几个量级。在这个速度值时，每个超光速粒子的能量仅约为 $10^{-7}mc^2$ 左右，这大约相当于 0.1 电子伏特，而可见光辐射所需要的发射能量则要比这个值高一个量级左右。

如果 $N \sim 10^8$ ，则此时的比特率及单位讯号能量消耗就都将与可见光的相应值差不多了，但它毕竟能够在大约 100 年时间内完成贯穿宇宙的通讯联系。

近来，还提出了一个有关超光速粒子的稳定性问题 (Be71)。如果超光速粒子存在但不稳定，那么仍然不宜于用来作为信息的载波。显然，目前我们关于超光速粒子的各种想法仍然还是臆测性的。

结 束 语

在本书的若干关键之点，我们在一些没有解决的疑难问题面前停顿了下来，某些最重要的问题至今尚未找到答案，它们是：

- (1) 我们所知道的物理学定律能应用在宇宙尺度上吗？
- (2) 在宇宙结构和基本粒子的结构之间是否存在某种联系呢？
- (3) 宇宙在时间上有否开端和终结，其确切的时间又是什么？
- (4) 星系是怎样诞生和死亡的？
- (5) 恒星是怎样形成的，它们又会如何地死去？
- (6) 宇宙磁场的起源是什么？
- (7) 宇宙中物质对反物质是否占有某种基本的优势？
- (8) 生命的起源是什么？会不会存在别的有智慧的文明生物？
- (9) 想得更深一些，我们所提的那些问题本身是否提得恰当呢？

附录 A 天文学名词

A.1 导言

当我们在天空的照相底片上或是在射电天文的记录中发现一种前所未有的星体时，我们便称它为新的天体。它不一定就是恒星，也可能是星系、行星或者是星际物质云。采用“天体”这个名词所以方便，是因为可以使我们在确定星体的真正特性之前就能对它加以讨论。天文学就是要对地球大气以外的一切自然天体提供精确的描述。

有时一个天体的亮度可能发生变化，或者它的颜色可能改变，或者还可能经历别种形式的变动。这时我们就说发生了一个事件。天体物理学就是要力图对这些标志着天体演化过程的一系列事件作出解释。

宇宙中存在着各种各样不同的天体。其中三个天体与我们日常生活的关系最为密切：这就是太阳，它在白天照亮我们的大气，并造成生命存在所必需的适宜温度；其次是地球，这是我们栖居之地；再其次是月球，它有时会照亮夜间的天空。更暗而又为数甚多的，则是我们在日落后才能看见的星星。

我们所发现的天体可以分为两类。有许多天体是很暗的，只是因为它们离开太阳近，才能被我们看到；另一些是亮的，但距离远得多。第一类天体连同太阳在内组成太阳系，它们构成一个绕公共质心作轨道运动的引力结合群。从许多方面来看，太阳本身在太阳系内具有最大的天文意义。它是距离很近又能被我们详尽地加以研究的一颗恒星。这种研究最终将会正确地揭示出太阳内部在发生什么样的核过程，以及恒星的能量究竟是怎样来的。除了这类观测之外，再加上对行星、彗星和陨星的研究，将会最终揭示出太阳系的历史和生命起源的奥秘，这两个都是引人入胜的课题！

A.2 太阳

太阳是一颗恒星。恒星是一些发光的天体，它们的质量范围约为 10^{32} 到 10^{35} 克。恒星在光谱目视部分的光度范围一般为太阳能流的 10^{-4} 到 10^4 倍。恒星的表面温度范围从不大于 1000K 到大约 50000K。我们将在本附录的后面部分介绍恒星相对亮度的测定方法。关于温度的测定在第四章中讨论。

作为一颗恒星来看，太阳具有下列特征：

(a) 半径为 6.96×10^{10} 厘米。尽管太阳表面有时会喷出一些日珥，但其基本形状是球形的。相对而言赤道半径仅仅比极半径大 5×10^{-5} ： $[(r_{\text{赤道}} - r_{\text{极}})/r] \approx 5 \times 10^{-5}$ (di 67b)。

(b) 太阳所辐射的总流量为 3.9×10^{33} 尔格·秒⁻¹。其中约有半数辐射为可见光，但光谱的近紫外和近红外部分也辐射相当一部分的能量。在太阳总的光度中 X 射线和射电辐射的贡献甚为微小。

(c) 太阳质量为 1.99×10^{33} 克。

(d) 我们知道太阳大气主要分为三层，它们是光球、色球和日冕。

(i) 光球，它是太阳的表面层，可见光就从这一层发出，其温度约为 6000K。

(ii)色球，这一层的厚度约为一万到一万五千公里。它处于温度比它低的光球与很热的日冕之间。

(iii)日冕，它从 $1.03R_{\odot}$ （约在光球外 20000 公里）处一直延伸到至少有几个太阳半径以外，日冕的外部界限尚未确定，很可能一直延伸到与行星际气体连成一片，后者是以每秒数百公里的速度从太阳喷出的气体。这种由太阳喷射出来的电离气体主要是质子和电子，称为太阳风。日冕的温度约是 $1.5 \times 10^6 K$ 。

(e)黑子和黑子群是太阳表面温度较低的区域，它随太阳自转而运动，从而使我们测得太阳的自转周期为 27 天。这一周期仅仅是从绕太阳作轨道运动的地球上所观测到的视太阳自转速率，太阳相对于远处恒星的真自转周期在纬度 15° 处大约只有 25 天半，并随纬度的改变略有变化；太阳表面并不象固体壳层一样转动。太阳呈现出一个十一年的太阳活动周，在这期间内太阳黑子数增至极大随后又降至极小。在极小时太阳上可能一个黑子也没有，极大时单个黑子总数或一个黑子群内的成员黑子数可达 150 个。有约定的黑子数记数方法，人们通过许多天文台的协同工作保持对黑子数进行连续的记录。

十一年周期实际上只是更长的二十二年周期的一半。考虑了黑子对内磁场的排列和极性后太阳的活动周期为二十二年。

(f)太阳上会发生各种各样不同的事件，每一种事件都有它自己的名称。其中最有趣的要算耀斑，它是黑子群附近太阳光的短期爆发。产生可见耀斑的同时太阳还发出宇宙线粒子、X 射线、紫外辐射和射电波。耀斑也与电子和质子云的发射有关，后者构成正常太阳风中的很大一部分。这些粒子的速度约为 10^3 公里·秒⁻¹，它们可以在一、二天内穿过日—地距离并冲击地球的磁层（磁场和电离层），同时产生磁暴和极光。这些扰动往往使电离层发生扭曲，结果就难以平滑地反射无线电波。由于无线电通讯依赖于平滑而又连续的电离层的反射作用，所以在这种磁暴出现期间可靠的无线电通讯就会遭到破坏，这种情况有时会长达一天。

A.3 太阳系

围绕太阳运行的有各种不同的天体，它们合起来构成太阳系。地球是行星天体的代表。行星是绕日运行的大天体，它们主要靠反射太阳光才能被我们看到，大部分行星本身几乎不发出任何辐射。按离太阳距离增加的顺序来排列的话，大行星是水星、金星、地球、火星、木星、土星、天王星、海王星及冥王星。所有的行星都沿同一方向围绕太阳作轨道运动。这个方向称为顺行；而沿相反方向运动的天体，称它们具有逆行轨道。表 1.3 给出行星的一些主要数据。它表明不同的行星在大小、表面温度、化学成份、磁场强度等方面差别很大。天体物理学的目的之一就是认识这些差异，而其中也许要用太阳系的历史来加以解释。

除了我们所列出的九大行星外，还有许多绕太阳运行的比较小的行星，它们有时也称为小行星。大部分小行星在火星和木星的轨道之间运行，这一区域通常称为小行星带。最大的小行星是谷神星，半径 350 公里，质量约为地球的万分之一。

许多我们所知道的较小的小行星的直径约为 1 公里，这些天体数以

千计。必定还有更多小得看不出的小质量天体在作轨道运动，其中有的可能直径仅有数米或者更小。经常有一些小行星来到地球附近，甚至可以穿过地球的大气层。真正撞到地球表面的天体称为陨星。人们以极大的兴趣研究陨星，因为它们至少对一小部分地球外太阳系天体的物理化学史的研究提供了直接的样品。

比陨星更小的是尘埃微粒，它们同样沿着与行星相类似的轨道绕太阳运动。尘埃微粒常常会进入大气层，它们大部分因穿越大气时发热而燃烧。因燃烧发光而被我们观测到时就称为流星，历史上曾称为射星。

与陨星物质不同的是到达地面的流星物质通常已面目全非，无从识别。不过，看来确实也有某些碎片会残留下来。人们认为不断落到地球上的细小的尘埃雨就是由这种碎片造成的。这些尘埃大部分来自微陨星，而微陨星则起源于行星际空间。这是一些大小为微米（ 10^{-4} 厘米）或亚微米级的粒子，它们穿过大气层漂落下来并撞到地面上。这些微粒的面积？质量比很大，因而很容易在上层大气中没有过分发热就慢了下来。一旦当它们失去速度后就慢慢地穿过空气漂下。这些微粒中的一部分可能是由较大的流星燃烧而产生的；有一些则可能是原封不动地从行星际空间而来。我们可以在远离工业大城市的北极雪地或深海沉积物中收集到这类微粒。

对这些地球外尘埃的证认是不容易的，比如说要把宇宙尘埃与火山爆发产生的尘埃区别开来就很困难。尽管如此，一些研究工作者认为，每天降落到地球上的尘埃总数约为几百到几千吨。这些数字可与卫星携带的专用装置所收集到的尘埃量进行比较。但人造卫星上用的测量技术与地面上的相差甚远，因此相互间的比较颇为困难。

在行星际空间存在着这样一块微陨星尘埃云，它同时又可能是环绕地球的一圈稀薄的尘埃带。带内的尘埃因反射太阳光而发光，这就是所谓的黄道光。在清晰度很好的日子里有可能看到黄道光。它的形状犹如人舌，突出在日出前东方地平线或日落后西方地平线上。这片亮光集中在黄道面附近，而黄道面就是地球绕日运行的轨道平面。

我们认为这些行星和行星际天体在不断地相互作用。有迹象表明行星及其卫星常常同和小行星一样大小的巨大陨星相撞，火星和月球的表面都布满了那些我们相信是由碰撞形成的陨星坑。地球上也有这种轰击的痕迹；但我们的大气在几百万年内就侵蚀和毁坏了陨星坑的轮廓，而月球上的这种侵蚀过程则要几十亿年时间。

应当注意，在谈到行星、小行星、陨星、流星以及微陨星尘埃时，我们只是列举了大小不同而其他性质相同的天体的各个成员。这些天体之间我们所知道的主要差异就是它们的大小，其他差异可能与大小直接有关。例如，很清楚，行星能有大气而微陨星则没有。但造成这一差别的原因就是因为只有大质量的天体才能在它们周围维持着一层大气。小颗粒的引力不够强，不足以在行星际空间所处的温度条件下保持气体。对不同大小的天体给以不同的名称是因为它们原先就是通过各种不同的技术手段所发现的；尽管我们早就知道行星、陨星、流星以及其他的行星际天体，但我们仅仅在最近才开始认识到它们的起源和相互间的关系。

与行星相似的一类天体就是卫星，或者说月球。卫星绕着它的母行

星作轨道运动，而两者又一起绕太阳运行。从物理构造和大小来看，卫星和行星没有显著的差别。水星的质量只是我们月亮质量的四倍。木卫三、土卫六、海王卫一的质量差不多是月亮的两倍，土卫六甚至还有大气。其他许多卫星的质量比较小，它们看上去很象小行星。土星光环提供了一个卫星现象的极端例子，它是由细小的尘埃——微陨星粒子云构成的，它们全部一起绕行星运行，就象许多互相作用着的极微小的小卫星。

显然，卫星和行星这两类大小相近的天体在若干物理特性上颇为相似，主要差别在于它们的轨道运动。有趣的是小行星可能被木星所俘获而成为它的一个卫星，相反的过程同样也可能发生。

行星和行星际天体之间这种难以明确加以区分的情况并

图 A.1 行星、小行星和短周期彗星轨道的比较。尽管地球、火星、木星具有近乎圆形的轨道，但小行星伊卡鲁斯、赫米斯、爱神星、阿波罗、开普勒以及希达尔戈的轨道都相当扁。彗星恩克、庞斯、温纳克、坦普尔、斯威夫特、惠普尔、塔特尔、贾可比尼、克雷萨克以及比拉的轨道也都如此。彗星是用发现者的名字来命名的。许多彗星和小行星的远日点在木星轨道附近，故木星对它们的轨道形状有决定性的影响，并能俘获彗星使之从抛物线轨道变为短周期轨道

图 A.2 (a) 仙女座星系，NGC224，即梅西耶 31 (M31)，这是一个带有两个小的伴星系的旋涡星系；其中伴星系 NGC205 是一个椭圆星系，(d) 是它的放大的象。棒旋星系。(b) 是 NGC1300，它的分类是 SBb。以上三张照片为威尔逊山天文台所摄。球状星团(c)是梅西耶 3 (M3)，也即 NGC5272。(e)是布鲁克斯彗星，摄于 1911 年 10 月 21 日。照片仅表示出彗头附近的区域。与彗尾约成 45° 方向伸长的线条是背景星，这表明彗星运动方向与彗尾成 45° 角，彗尾并没有拖曳在彗头的正后方。照片(c)及(e)由里克天文台所摄

不是唯一的，类似的问题在恒星和行星之间也同样存在。我们称两个绕公共重心作轨道运动的恒星为双星，其中的一颗常比另一颗小得多，有时两颗星的质量可相差一千倍以上。木星的质量也大约是太阳的千分之一。如同某些天文学家所认为的那样，也许把木星称为恒星更合适些。显然，单有大小还不能把恒星和行星合理地区别开来。或许可以根据内部结构的状况来建立一条识别恒星的比较合理的判据，而人们也正在为明确阐述这种判据而努力 (Sa70a)。

我们应该再提一下太阳系内最后一类天体——彗星。彗星的轨道既与严格的行星轨道不同，又与卫星的轨道毫不相似。某些彗星具有绕日运行的椭圆轨道，它们的周期从几年到几百年不等。另一些则具有近乎抛物线的轨道，它们一定是从太阳系的遥远边界来到太阳的附近。彗星这类天体，当它们从远处接近太阳时会因太阳的加热而瓦解：原来处于凝固状态的气体蒸发了，而原来被这些挥发性物质凝结住的尘埃也就散了开来。尘埃和气体分别由于对太阳光的反射和再辐射而被我们看到，它们使彗星呈弥散形 (图 A.2)。气体和尘埃因电子和质子的轰击以及太阳的光压作用而被驱向背离太阳的一边，这时就形成了彗尾。当地球穿

过彗尾的残迹时彗尾中的尘埃便产生流星雨 (Wa56)。

A.4 恒星系统和星系

在着手介绍单个恒星之前，我们应首先考虑恒星出现的成群现象。

恒星常常结合成一些有特定形状集团，而我们主要是根据这些系统的大小和外形来进行分类。许多恒星是单个出现的。另一些只有一个伴星，这样的星对称为双星。根据它们分离的程度和空间取向，双星又可分为目视双星、分光双星和食双星。双星的目视分辨极限取决于现有光学技术。它不断地在提高，而现代干涉技术可以使我们分辨出相距仅为 0.01 角秒左右的星对 (Ha67)。靠得更近的双星用干涉技术也无法分辨。这种密近星对中的两颗恒星就构成分光双星，它们只能间接地通过两者不同的光谱来加以分辨。我们有时会遇到一类特殊的但也是重要的分光双星，它们互相绕行的轨道大致和观测者的视线在同一个平面内。这时，一颗星就可能掩食另一颗，于是就会观测到光变。这种掩食现象仅当两颗子星十分接近，即相距不大于几个恒星半径时才可能发生。我们把这类系统称为食双星。双星具有重要的地位，因为它们提供了精确测定 (太阳之外) 恒星质量的唯一途径。我们在有关轨道运动的讨论 (3.5 节) 中介绍双星质量的测定方法。

密近双星也是很重要的，因为如果两颗星中有一颗开始膨胀，在赫罗图 (A.5g 节及图 1.5) 上表现为向红巨星分支移动；这时它的表面物质就会更强烈地为伴星所吸引，于是就可能发生物质交换，我们也就有可能看到原来处在恒星内部而这时已被暴露出来的某些部分。这种过程使我们能检核恒星内部的重元素是怎样逐步地产生的，因而也就可以检验恒星内部的化学演化和产能理论 (8.13 节)。

双星并不是唯一所知的密近结构形式。还有许多由三颗恒星组成的三合星，更多重的聚星系统也并不少见。也许每五颗“恒星”中就可能有一颗是双星，大约每二十颗“恒星”中可能有一颗聚星。在比太阳质量更大的恒星中，这个比例还要高得多；在我们所观测到的恒星中，单星只占三分之一左右。这一比例随恒星光谱特性不同而异。

有时六、七个以至十来颗恒星形成一个集团，我们称它为星群。还有一种叫星协，它们是由 30 颗左右恒星组成的星群，而其中的恒星彼此都在不断地分离。看来，这些恒星在过去曾有一个公共的起源点。我们相信星协中的恒星是同时形成的，而且在形成后不久就开始分离。通过对星协大小及其膨胀速度的观测，就可以确定膨胀开始的时间以及恒星的确切年龄。

称为星团的恒星群又分为银河星团及球状星团两大类。银河星团通常由 50 颗以至数百颗恒星组成，它们分布得很疏散，而且没有确定的形状，但是都以同一个速度相对周围的星场运动。相反，球状星团要比这大得多 (图 A.2)，它们包含有几十万颗恒星，外形明显地呈圆 (球) 形。星团中的恒星看来有着共同的起源。我们相信这些恒星是在很久以前的一段比较短的时期内形成的，并且具有共同的演化史。

星团中并不是仅仅只有单颗的恒星，双星、聚星和星群常在星团中构成小的次级系统。通常恒星和星团都是星系的成员。星系的边界多少是比较明确的，它们是一些具有特定形状的系统，内中包含有 10^8 到 10^{12}

颗恒星（图 A.2）。有些星系看上去是扁长的，称为椭圆星系或 E 星系。拉得很长的椭圆星系的分类标记为 E7；看不出扁度的圆形星系称为球状星系，分类为 E0.0 到 7 之间的其他数字则依次表示视扁度的逐渐增加。观测到的扁度不一定就反映了星系的实际扁度，这是因为对任意一个星系来说，地球上的观测者只能看到它在某个确定方向上的投影。

椭圆星系除了中心部分最亮以及边缘处密度较低之外，再没有任何其他的特殊结构。相反，旋涡星系（S 系）及棒旋星系（SB 系）则表现出明显的旋涡结构。为了说明它们旋臂张开的程度，在表示旋涡的符号后面再加上字母 0, a, b 或 c。根据这种记法，紧卷旋涡星系记为 S0，而一个旋臂张得很开、结构松散的棒旋星系则记为 SBc（见图 A.2）。（也可见图 10.11(a)）

人们在对照相底片上的星系进行比较时，总认为近邻星系看起来要比较远的星系来得大。这意味着一个规则星系的角直径可近似作为星系距离的标志。当我们研究不同星系的光谱和距离之间的关系时，发现除了几个近邻星系有光谱蓝移现象（Bu71b）外，所有较远星系的光谱都毫无例外地向红端移动。如果根据星系的角直径或亮度来判断它们的距离，则星系的视距离越远，其红移就越大！这个关系是如此的确定，以至我们现在就是把所观测到的遥远星系的红移看作为它们距离的标志。

有些星系的形态并不属于有确定外形的 E, S 或 SB 系，相反，它们的形状显得没有一定的规则。我们把这样的星系分类为不规则星系，用符号 Ir 表示。对于各种特殊星系就在星系分类符号之后加一个字母 p 来表示，如 E5p。

当然，星系并不只是包含有恒星，在恒星之间还存在星际气体和尘埃。某些旋涡星系内尘埃和气体的总质量与该星系中所观测到的恒星总质量相当。确切的质量比还不知道，因为我们无法肯定星系中所存在的全部气体是否已经都探测到了。

尘埃云的消光作用使远方的星光减弱，我们就可以通过这种消光作用来探测尘埃云。此外，高温电离区附近的尘埃会吸收辐射并在远红外波段再发出辐射。这种发射显然是很有效的，以至某些星系的红外辐射要比其他波段辐射的总和还要强（K170a, b）。

对于气体，同样可以利用它们对辐射的吸收或再发射作用来加以探测。通过对光谱中射电、红外、可见光和紫外波段的分光研究，人们证认出许多离子、原子和分子，并且测得了这些气体的温度、密度及视向速度。

星系并不是宇宙中最大的集团，还有许多星系对及星系群。图 1.10 所表示的就是一个星系群。我们太阳所属的银河系又称银河，它是由十来个星系所组成的本星系群中的一员。仙女座星云和银河系是其中最大的两个成员，本星系群其他成员的质量加在一起约为银河系质量的十分之一（表 1.4）。

还存在一种范围更大的星系团，其中所包含的星系数可多达几千个。比星系团范围更大的大尺度成群现象至今还没有定论，也可能并不存在。

星系的这种分类方法在若干临界情况下是有问题的。小的 E0 星系与最大的球状星团没有明显的差别，双重星系有时无法同不规则星系区分

开来。对星系群和星系团的划分也可能掺入人的主观因素。但无论如何这种分类是有用的，它为常见的天体提供了方便的名称，而无需考虑严格的区分标准。

当我们考虑比星系团的尺度更大的结构时，所涉及到的看来就是整体宇宙了。中间看不出任何进一步划分的可能性。最好就把宇宙看作是星系团的随机组合。

飞行在星系际广袤空间的有电磁辐射量子和高能宇宙线粒子——后者的运动速度近乎等于光速。它们就是使我们能探测到遥远天体存在的信息载体。

绝大多数星系都有一个共同的特性，即不管它们的距离有多远，星系或星系团的光谱都有红移，也就是朝光谱的长波端移动。距离越远，红移就越大。大多数天体物理学家把红移归因于高速度的退行。星系仿佛正在飞快地互相离开，宇宙正在膨胀！

A.5 恒星的亮度

(a) 星等尺度

如果我们随便往天上一看就立刻会感觉到某些星星要比另一些来得亮。我们可以用目视的方法把恒星按亮度进行分类。在这样做的时候我们会发现，只有当两个天体的亮度大约相差 2.5 倍时人眼才能对它们有确定的明暗之分。所以大致可以用 2.5 这个倍数作为恒星视亮度或视目视星等 m_v 的级差标志。

一等星 ($m_v=1$) 比二等星 ($m_v=2$) 亮 2.5 倍左右，……以此类推。星等的范围一直扩展到负数；不过只有太阳、月亮、水星、金星、火星、木星以及三颗恒星：天狼星、老人星和南门二①这些明亮天体才具有负星等。

通常，用倍数 2.5 来计算不同星等恒星的相对亮度是不太方便的。这个倍数不是取决于我们所研究的恒星的某种内在特性，它同眼睛的能力有关，这是很不严密的。既然如此，我们就宁肯用纯粹的十进制来代替它；但亮度比为 10 对目视工作却又不适用。因此，为了兼顾两者的优点便采用了一种折衷的办法。我们这样来定义恒星的星等，使得星等差为 5 等时亮度比正好等于 100。因为 $100^{1/5}=2.512$ ，这样仍然可以同眼睛所看到的结果取得很好的一致，而计算工作中则可以利用以 10 为底的常用对数表。

(b) 颜色

我们所观测到的恒星亮度，依它是眼睛看到的、还是记录在照相底片上的、或者是由射电望远镜探测的结果而有所变化。对于不同的天体来说，它们在可见光部分及射电波段所发出的辐射强度之比是很不一致的。在若干个不同的波段上用各种不同的探测器来进行观测，就能够粗略地描述出一个天体的波谱。然后，我们可以把这些测量手段所得到的视星等进行比较。为此人们设计了若干种标准滤光片和专用仪器，以便对全世界各个天文台所得到的资料进行相互比较。以下便是由这类方法所得出的几种亮度指标：

m_v 表示目视亮度。

m_{pg} 表示照相亮度。照相底片对蓝光要比眼睛更为敏感；故现在这一亮度通常用字母 B 来表示，意思是“蓝色” (blue)。如果要用照相底片来取得等价的目视亮度，就要加上一块能滤掉一部分蓝光而让黄光通过的专用滤光片。

V 或 m_{pv} 表示利用照相底片以及上面说到的黄色滤光片获得的仿视亮度。一般用字母 V 来表示，意思是“目视” (visual)；而 m_{pg} 及 m_{pv} 是早期的符号。

U 表示紫外亮度，这要通过专用的紫外透射滤光片采取得（见表 A.1）。

表 A.1 标准亮度测定所用的有效波长

符号	有效波长(微米①)	符号	有效波长 (微米)
U	0.3540	K	2.2
B	0.4380	L	3.4
V	0.5750	N	5.0
R	0.6840	N	10.2
I	0.8040	Q	20
J	1.25		

I 表示用红外照相技术测得的红外亮度。对于比较长的波长，照相底片就不再感光。但是已经定义了若干种红外星等，这样可以对不同观测者用硫化铅、锑化铟或其他红外探测器所测得的各种结果互相进行比较。这些星等用字母 J, K, L, M, N 和 Q 来表示。

表 A.1 列出了测定这些星等所用的波长。

m_{bol} 表示包括所有波长范围内的天体的总视亮度。这种热星等是由测辐射热计——一种对所有波长的辐射能量都同样敏感的探测器——测得的亮度。

(c)色指数

用不同滤光片测得的亮度差给出了恒星颜色的标志。我们可以用蓝色和黄色两种滤光片来测定一颗恒星的星等——亮度的对数，这两种星等之差给出了从这颗恒星所接收到的蓝光与黄光的强度之比。这个量就是所谓色指数：

$$C=B-V$$

诸如 U—B 这一类差数也称为色指数。

为了比较恒星的色指数就要取得可靠的色指数，而这一点只有当测量所用的底片和滤光片标准化后才可能做到。即使做到了这一点，相互比较时仍然会有一些误差。为此选择了一些标准星来定出色指数的零点，这些星的光谱型记号用 A0 来表示（见 A.6）。

(d)热星等改正

通常，恒星的热亮度只能用间接的方法求得。我们能够测定的是视

目视亮度；但是为了估计恒星在整个波谱范围内所发出的总辐射量，就必须对它的表面温度和发射率给以某些假定。这种估计是用热星等改正 BC 这样一个因子来得到的，BC 的定义为恒星热星等与目视星等之差。热星等改正总是正的

$$BC = m_v - m_{bol}$$

对热星等改正的估计并不是一件容易的事。我们可以用色指数 B—V 来大致估计恒星的表面温度。然后，假定我们又掌握了电磁辐射在恒星大气中的传输规律，这样就能估计出总的辐射输出。一般说来这种假定不见得就一定正确。近十年来，由紫外及红外波段所求得的恒星亮度总的来说与早期理论模型所预报的数值并不一致。当然，现在正在把这些新的资料使用到恒星大气的理论中去，以便提供更可靠的热星等改正值。目前所使用的则是一些对于不同谱指数恒星的暂时性热星等改正表。

(e) 绝对星等

对许多工作来说，我们需要知道的是恒星的绝对星等而不是它的视亮度。所以重要的问题是要把视星等转换为绝对星等。我们定义把恒星距离放到离观测者 10 秒差距（1 秒差距 = 3×10^{18} 厘米，见 2.2 节）处所测得的视星等为绝对星等。

假定恒星距离为 r 秒差距，由于恒星的亮度与观测者到恒星间距离的平方成反比，所以恒星的视星等要比它的绝对星等多一项 $2.5 \log \frac{r^2}{r_0^2}$

①

$$m = M + 2.5 \log \frac{r^2}{r_0^2} = M + 5 \log \frac{r}{r_0}$$

其中对数符号无下标即表示以 10 为底。因 $r_0 = 10$ 秒差距，进一步得

$$M = m + 5 - 5 \log r \quad (A.1)$$

到现在为止我们还没有考虑到星际尘埃的消光作用。显然，星际消光使恒星的视亮度减小。因此，为了求得 M 的正确数值，必须在方程 (A.1) 的右边减去一个正的因子 A

$$M = m + 5 - 5 \log r - A \quad (A.2)$$

估计星际消光 A 往往要比求恒星的距离 r 还来得困难。有关情况我们将在下面 A.6a 节中加以讨论。

由于绝对星等 M 需按方程 (A.2) 求得，因而 M 的数值也就与测定视星等 m 时所用的探测器和滤光片有关。所以下标 v , p_v , p_g 及 bol 也可以用在绝对星等上，其含义同视星等的下标完全一样。

(f) 光度

知道了恒星的绝对热星等后，我们就可以求得恒星所发出的总辐射强度或者说光度 L ，如果直接以太阳的光度为单位就有：

$$\log \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right) = \frac{1}{2.5} [M_{bol_{\odot}} - M_{bol}] \quad (A.3)$$

太阳光度 $L_{\odot}$ 为 3.8×10^{33} 尔格·秒⁻¹，而太阳的热星等 M_{bol} 为 4.6。恒星的光度范围是很大的。超新星爆发时可以在短时间（几天）内保持同整

个星系一样明亮，最亮的稳定恒星的光度要比太阳大十万倍。另一个极端就是白矮星，它的光度只有太阳的千分之一；甚至比这更暗的恒星也完全可能存在。

(g) 赫罗图

纵观天文学全貌，其中最有用的图表之一便是赫罗图，又称 H-R 图，它表示了任何一个恒星群的亮度和温度间的图解关系。在第二章中我们将会看到赫罗图对于估计星系和星系间距离尺度是很有价值的；更重要的是，由不同年龄的恒星群所作出的这类赫罗图为我们提供了恒星演化理论的主要经验依据。

赫罗图可以有許多不同的形式。如第四章所述，色指数是恒星表面温度的一种标志。所以，横坐标有时就表示恒星的色指数，这时我们就不说赫罗图而称为颜色-星等图。纵坐标可以表示 M_v ， M_{bol} 或光度。如果只是比较距离相等的那些恒星，那么标出视星等就够了。图 A.3 表示昴星团恒星的颜色-星等图，图 1.6 则说明了 M3 的特性。M3 是我们银河系内的一个老年球状星团，而昴星团则由银河系内最年轻的恒星组成。两张不同的图反映了两个星团在年龄上的这一差别。

图 A.3 经过星际消光效应改正后的昴星团颜色-星等图。昴星团中包含了一些银河系中最近形成的恒星 (M157b)

这两张图（以及图 1.4）表明，恒星仅仅出现在赫罗图或说颜色-星等图中的某些确定部位。绝大多数恒星集中在一条称为主星序的相当平直的带形区域内，对昴星团这一点特别明显。主星序一直从图的左上方延伸到右下方，也就是从亮而蓝的星一直延伸到暗而红的星，在主星序的右上部（图 1.5）是一些又红又亮的恒星，它们组成红巨星分支。图上还有一条水平分支，它把红巨星分支的远端与主星序连了起来。这两条分支在图 1.6 中显得格格外清楚。在水平分支中我们发现有一些恒星的亮度呈周期性变化。最后，在主星序的左下方还有一些暗的白矮星。通常情况下，图上的其余部分都是空的。

A.6 恒星的分类

(a) 分类系统

恒星的分类是很困难的，主要是因为我们发现有许多特殊的情况，很难把它们纳入任何一种明确的类型中去。当前普遍接受一种“二维”的分类法。其中的一“维”为恒星的光谱；另一“维”为亮度。因而对每一颗恒星，均给以一个双参数分类码。尽管本节的目的是要对这种码进行描述和说明，但我们应该看到，分类法的最终基础乃是广泛收集如图 A.4 那样的光谱。在图 A.4 中每一条光谱都是某一种类型恒星的代表。

恒星的分类主要根据它们的光谱，而光谱是与恒星颜色有关的。尽管光谱是恒星的主要识别标志，然而恒星分类序列在大多数情况下却是根据恒星表面温度渐降的次序来排列的，也就是根据恒星在长波段辐射量的逐渐增加来排列的。最蓝的普通恒星标为 0，而随着恒星红色成分的增加，恒星将根据下面的序列进行分类（表 A.2），



99%以上的恒星属于基本序列 B, A, F, G, K 及 M。由符号 O, R, N 及 S 所表示的恒星比较稀少。同样, 下列光谱型的恒星也是很少的: Q 表示新星——这类恒星会突然变亮好几个星等, 变得比任何非变光恒星都亮得多。

P 表示行星状星云, 它是很热的星, 四周为高度电离的气体外壳所包围。W. 表示佛耳夫-拉叶星, 它们的光谱中呈现出很宽的电离碳、氮和氦的发射带。人们发现在这类恒星中有少数几个是密近双星的成员。

R 型及 N 型表示恒星光谱中有异常强烈的双原子碳分子 C_2 氰分子 CN 的谱带。S 星的特点是有氧化钛 TiO 及氧化锆 ZrO 的谱带。

W, O, B 型星常称为早型星。而 G, K, R, N, S 型的星则称为晚型星。

从一种光谱型过渡到另一种光谱型又分为十档。每种光谱型细分为十种次型, 由附在光谱型后面的阿拉伯数字来表示。A5 在光谱型 A0 和 A9 中间; F0 仅比 A9 略为红一些。

使用这种分类法, 我们还能在光谱型后加上一个罗马数字以表示恒星的光度型。每种光度型有一个名字:

- I——超巨星
- II——亮巨星
- III——普遍巨星
- IV——亚巨星
- V——主序星
- 亚矮星
- 白矮星

太阳的光谱型为 GIV, 这就表明它是一个黄色的主序星。

有时把 I, II 和 III 型总括起来冠以“巨星”的称号, 而整

表 A.2 恒星光谱分类*

类型	主要特征	次型	光谱区分准则	典型的恒星
Q	新星：亮度骤增 10 ~ 12 星等			罗盘座 T，天鹅座 Q
P	行星状星云：热星周围为高度电离化气体外壳			NGC6720，NGC6853
W	佛耳夫-拉叶星		有 OIII 到 OVI，NIII 到 NV，CII 到 CIV 及 HeI 和 HeII 的很宽发射线	
O	最热的恒星，在 UV 波段有很强的连续光谱（从 O5 到 Q9）		OII λ 4650 显著 HeII λ 4686 显著 } 发射线 谱线较窄 吸收线显著；仅 HeII 及 CII 为发射线 SiIV λ 4089 极大 OII λ 4649、HeII λ 4686 强	BD + 35 ° 4013 BD + 35 ° 4001 BD + 36 ° 3987 船尾座 ζ ，仙王座 λ 大犬座 29 大犬座 τ
B	中性氦显著	B0 B1 B2 B3 B5 B8 B9	CIII λ 4650 极大 HeI λ 4472 > OII λ 4649 HeI 谱线极大 HeII 谱线消失 Si λ 4128 > He λ 4121 λ 4472=Mg λ 4481 HeI λ 4026 刚可见	猎户座 ϵ 大犬座 β ，半人马座 β 猎户座 δ ，豺狼座 α 猎户座 π^4 ，孔雀座 α 金牛座 19，船帆座 ϕ 英仙座 β ，天鹅座 δ 天鹰座 λ ，半人马座 λ
A	氢线从 A0 极大以后逐步递减	A0 A2 A3 A5	巴耳末谱线极大 CaIIK=0.4h δ K=0.8H δ K > H δ	大犬座 α 大犬座 S，半人马座 τ 南鱼座 α ，波江座 τ^3 三角座 β ，绘架座 α

(续表)

类型	主要特征	次型	光谱区分准则	典型的恒星
F	金属线开始可见	F0	$K=H + H\delta$	双子座 δ ，船底座 α
		F2	G带开始可见	人马座 π
		F5	G带变成连续	小犬座 α ，船尾座 ρ
		F8	巴耳末谱线比太阳略强	室女座 β ，天炉座 α
G	大阳型光谱	G0	$Ga \lambda 4227=H\delta$	御夫座 α ，长蛇座 β
		G5	在小比便尺底片上 $Fe\lambda 4325\lambda > H\lambda$	双子座 μ ，网罟座 α
K	金属线显著	K0	H和K这极大强度	牧夫座 α ，凤凰座 α
		K2	蓝色光增段连续光谱变弱	巨蟹座 β ，天秤座 ν
		K5	G带不再连续	金牛座 α
M	TiO带		TiO带可见 TiO带明显 光谱受强 TiO带影响呈现凹形 蒺藜型变星， $H\lambda$ ， $H\delta$	猎户座 α ，长蛇座 α 英仙座 ρ ，南十字座 γ 天鹅座 W，宝瓶座 RX 天鹅座 x，鲸鱼座 o
R， N	CN，CO， C_2 带		CN，CO， C_2 带代替 TiO带出现。R星呈现显著的H和K线	
S	ZrO带		ZrO带	双子座 R

* 主要来源为 (Ke63b) (根据(Ca24))。此外还取材于 (Al55)。本表以亨利·德雷伯 (Henry Draper) 分类法为基础，可作为恒星光谱特征的粗略指导。当然，恒星分类是一个不断改进的过程，因此上面的表可能会有改变。

个 V 型这一群恒星通称为“矮星”。用字母“g”或“d”放在光谱分类记号前，分别表示巨星和矮星。同样，对亚矮星和白矮星就分别加上字母“sd”及“w”。关于超巨星还有一个分类特征，通常我们把它分为两个光度型，根据其亮度的大小分别标为 Ia 及 Ib。

光谱分类符号后面加上字母“e”就表示光谱中有发射线。但这个规则有一个例外，即 0e5 是表示从 05 到 09 中所有的 0 型星；它与有无发射线无关。

光谱型符号后面加字母“p”表示这类恒星有特殊的形态。

图 A.5 无红化主序星 (点号) 以及微红化超巨星和黄巨星 (+号) 的 $U-B$ 及 $B-V$ 之间的关系。直线表示黑体辐射的情况 (Jo53)

这里给出的颜色名称 (恒星光谱型) 与色指数 $B-V$ 几乎是线性对应的。但是同色指数 $U-V$ 的关系就不是这样的了， $U-V$ 的值不随光谱型的变晚而单调减小。具有同一光谱型的巨星和主序星的色指数还有不大的差别。这一个不幸的困难是由于历史的原因造成的，在将来改进的光谱分类法中理应加以修正。我们还可以看到恒星的顏色与相应黑体的顏色接近的程度。图 A.5 表明了这种情况，这种图就称为颜色-颜色图。

存在有四个有关的因素造成恒星与黑体有颇大的差别：(i) 光谱型 A 附近的恒星与黑体的符合程度最差，因为恒星中处于第一激发态的氢原子会产生吸收。我们称之为巴耳末跳变，就是由恒星外层大气中这类受

激原子所产生的、在巴耳末连续谱相应位置处的陡然强烈地增加的吸收。(ii)冷星外层大气中有 H 离子，这些离子选择性地吸收辐射，使这类恒星看起来发蓝。(iii)在星族 I 恒星中，金属的丰富度比较高，它们产生一系列的吸收线，使恒星颜色改变而移向图 A.5 的右下方。(iv)最后，没有一颗恒星看上去是完全黑的，因为恒星外层并不是对一切波长的光线同样地不透明。不同波长的光线实际上是从恒星内部不同深度的地方射到我们这里来的，而恒星在不同深度处的温度是不同的。故由此产生的星光的谱线相应于一个混合温度的黑体辐射，而不是某个具有确定温度的黑体辐射。

单纯由色指数方法来确定恒星光谱型是很困难的，因为还需要正确顾及由星际尘埃产生的颜色变化。小的尘埃粒子吸收和散射蓝光比红光更强烈，所以从遥远恒星射来的星光看起来就要比其真正发射时红些。为求得恒星的真实色指数，必须引入一项星际红化的改正。可是为了进行这种改正，我们必须知道沿一个给定恒星的视线方向总共有多少星际尘埃，以及一定量的尘埃会引起多少颜色变化。通常这些信息是不知道的。我们只得使用循环推理法。我们知道，我们附近的任何一颗给定光谱型的恒星都显示出一定的特征谱线，这些特征谱线或是吸收线或是发射线。因为这些星很近，介入的星际尘埃甚少，因此认为它们的光谱未被红化。由此我们就能够作出一个表，列出每一种色型的谱线特征。对于一颗遥远的恒星，我们宁可根据其谱线而不根据色指数来分类。而色指数则可作为指定分类的验证。如果恒星颜色比预期的要红，我们就得到了星际尘埃红化的证明。在许多实例中，我们通过观察某一给定天体近旁其它恒星是否与该给定天体有同样程度的红化，来检核星际尘埃是否存在。如果观察表明星际尘埃确实存在，我们的分析就结束了。其结果就给出了选定天区内恒星光谱的正确证认，同时也给出了这个天区内星际尘埃改变色指数的程度。用类似的方法也可确定星际尘埃的消光作用对恒星总亮度减小的情况。我们可以用这种分析方法来确定所有观测波段上星光减弱的程度。

如前所述，恒星的颜色和光谱取决于其表面温度。表 A.3 中给出了一些有代表性的恒星的有效温度。如第四章所讲，有效温度是由恒星单位表面积上发出的辐射功率来测定的。因为我们对恒星红外及紫外辐射所知有限，我们可以预期 (Da70b) 这个表所给出的结果在若干年内可能还会有所变化。O 型星的温度不确定性更甚，因此表中没有列出其有效温度。资料的暂定性在表头中作了强调。

我们可以根据恒星光谱的分析，从谱线的增宽而求恒星的自转速度。如果恒星自转轴对视线的倾角为 i 。那么我们所得到的将是 $v_e \sin i$ ，其中 v_e 是恒星赤道处的自转速度。仅当旋转轴与视线正交时，恒星自转产生的多普勒致宽现象才能最充分地显示出来。但通过分析线宽的分布情况，我们可以用统计的方法同时确定转速和 i 角的分布函数 (Hu65)。表 A.4 给出了不同类型恒星的某些典型 v_e 值。图 1.9 表示这些恒星单位质量的角动量。

表 A.3 暂定的恒星有效温度*

光谱型		Te(K)		光谱型		Te(K)		
B0		27000		A0		10400		
B2		20000		A3		8500		
B5		16000		F0		7200		
B8		12500						
光谱型	主序星 亚巨星		Te(K)		巨星 Te(K)		超巨星 Te(K)	
	V	IV	III	II	Ib	Ia		
F5	6700	6600	6500	6350	6200	…		
G0	6000	5720	5500	5350	5050	…		
G5	5520	5150	4800	4650	4500	…		
K0	5120	4750	4400	4350	4100	…		
K5	4350	…	3700	3600	3500	…		
M0	3750	…	3500	3400	3300	…		
M2	3350	…	3100	2050	…	…		

*根据 (Ke63) 改编, 另外参见正文。

表 A.4 光度型 III 和 V 恒星的自转速度 (A164)

光谱型	平均的 v_e (公里·秒 ⁻¹)		光谱型	平均的 v_e (公里·秒 ⁻¹)	
	III	V		III	V
O5		190	F0	130	95
B0	95	200	F5	60	25
B5	120	210	G0	20	< 12
A0	140	190	K, M	< 12	< 12
A5	170	160			

(b) 变星

可以列出主要的两类变星。外因变星, 如(i)密近双星, 其总亮度可以因为一颗星被另一颗星掩食而改变; (ii)星云状物质中的恒星, 这类恒星有时会被星云所食, 有时会照亮经过其附近的星云。这类恒星称为金牛 T 型变星。因为这种变化特征首先在金牛 T 型星中发现, 故由此而命名。

第二类变星就是内因变星——恒星的光度确实随时间而发生变化。其亮度变化可以是重复的, 如周期变星; 也可以是不稳定的, 如不规则变星; 此外, 其变化性质也可能是半规则的。它们之间的区分并不总是很明确的。表 A.5 给出了脉动变星的某些主要特征, 这些恒星对建立可靠的宇宙距离尺度是重要的。

另一种内因变星就是爆发星, 如新星、再发新星、超新星、矮新星及气壳星。

新星亮度在几小时内可增加 10~12 个星等。新星回复到原来的亮度

有时仅需几个月，有时也许要经过一个世纪。这两种极端情况都已经观测到了。新星的最大绝对照相亮度约为 $M_v = -7$ 等。

再发新星在数十年周期内星等变亮约 7.5 等。它们的峰值亮度与普通新星差不多。通常其亮度在 10 到 100 天内减小，但有时也有例外。

超新星约比新星亮 10 个星等。其亮度可达整个星系一样大。已识别到两种类型的超新星。类型 I 极大亮度为 $M_v = -16$ 。类型 II 极大亮度为 $M_v = -14$ ，并且显示出普通新星的光谱。

超新星爆发时，可能以大约 $1000 \text{ 公里} \cdot \text{秒}^{-1}$ 的速度向星际空间抛出大致为一个太阳质量的物质。这种气体外壳常常作为超新星遗迹留存数千年。在照相底片上它们看上去象是在原来爆发点周围的一些纤维状弧。

矮新星的亮度变化大约为 4 个星等，极大绝对星等 M_v 可达 +4 到 +6 等。其光谱型通常为 A 型。它们的喷发为几

表 A.5 脉动变星的性质

类型	周期范围 P	光谱型	平均亮度 M_v 和亮度变化 ΔM_v	说明
开琴 RR (星团变星)	< 1 天	A4 到 F4	$M_v = 0.6$, $\Delta m \sim 1.0$	在银晕中发现
经典造父变星	1 ~ 50 天	F 到 K	$M_v = -2.6$ 到 -5.3 , M_v 及 ΔM_v 与 P 有关, $\Delta M_v \sim 0.4$ 到 ~ 1.4	在银盘中发现
室女 W 星 (造父 II 型)	> 10 天	F , G	M_v 较同样周期的经典造父变星小 1 ~ 2 个星等。 $\Delta M_v = 1.2$	晕星族
蒺藜型变星 (长周期变星)	100~1000 天	红巨星	M_v 大约从 - 2.2 到 0 , 当周期增加时 ΔM_v 从 3 增加到 5	介于银晕和银盘之间
半规则变星	40~150 天	红巨星	$M_v = 0$ 到 -1 , $\Delta M_v \sim 1.6$	盘星族

周重复一次。

气壳星是具有明亮谱线的 B 型星。这类恒星看上去象是在抛出一些壳层。可以出现一个星等的亮度增加。

耀星会在短期内增加亮度近 1 个星等，然后又复原。它们是低光度的黄矮星或红矮星。其耀斑可能与太阳上的相似，只是出现的规模较大。

北冕座 R 型星会突然变暗达 8 个星等，然后逐渐回复到原来的亮度。在极大时其光谱为 R 型，含碳丰富。

变星并不十分常见，但从两方面理由来看它们是很有意义的。首先，某些变星的亮度变化很有规律。因此可以把它们作为距离的标志（见第二章）。其次，内因变星是恒星内部或表面不稳定性的征兆。从这个意义上说，变星为处于不同演化阶段的恒星结构，也许还为能量平衡或不平衡情况提供了重要的线索。

金牛 T 型星和新星显然喷发出形成尘埃的物质，我们发现这类星体是强烈的红外辐射发射源。

A.7 恒星的空间分布和运动速度

我们通过谱线位移判断恒星的视向速度。对近距离的恒星又通过自行求得其横向角速度，如果再知道恒星的距离，那么还可以计算它的线速度。我们发现，不同光谱型的恒星运动情况很不一致。银道面上的恒星相对速度很低，而构成银晕的恒星相对太阳的运动速度则很大。我们称后一类天体为星族 II 恒星，而把贴近银道面运行的称为星族 I 恒星。实际上这两个星族间没有截然的分界 (Ku54)，由表 A.6 列出的速度值的连续变化就很好地说明了这一点。恒星的速度与其距银道面的平均高度有关。

恒星是否从形成到现在一直在现行的轨道上运动，这是真正令人感兴趣的问题。假如是这样的话，我们将可以依据速度的大小来定出由星际气体形成恒星的先后次序。如果不是这样，那么不同的速度可能是后来恒星之间远相遇的结果 (见 3.14 节)。而假如情况确是如此，那么恒星可能都是在银道面内形成，且初始速度是很底的。对这个问题我们还没弄清楚，但希望恒星动力学的研究将能够阐明这个重要的问题！

根据观测太阳附近恒星的分布，我们至少可以对某种给定类型的恒星在银河系中所形成的数目取得一些概念。如果我们还能象第八章所叙述的那样去计算恒星的寿命，那么我们也就可以判断恒星诞生的速率。对短寿命的恒星，这种诞生率就代表现在形成的速率。一旦知道了某种类型恒星的空間数密度，就可以通过观测来证实我们对恒星寿命的估计 (图 A.6)。这方面的研究还处于初始阶段，因为我们还不能十分肯定，恒星在其诞生时的外貌应该是怎样的，特别是当它还被某些形成它的尘埃所包围着的时刻就更是如此 (1.4 节) (Da67)。

表 A.6 恒星相对太阳的运动速度，以及距银道面的平均高度*

天 体	速 度**v (公里 秒 ⁻¹)	密 度 ρ (10 ⁻³ M _☉ 秒差距 ⁻³)	高度 h (秒差距)
星际云： 大星云 小星云	8 25		
早型主序星： O5 ~ B5 B8 ~ B9 A0 ~ A9 F0 ~ F9	10 } 12 } 15 20	0.9 1 3	50 60 115 190
晚型主序星： F5 ~ G0 G0 ~ K6 K8 ~ M5	23 25 32	12 } 30 }	350
红巨星： K0 ~ K9 M0 ~ M9	21 23	0.1 0.01	270
高速星： 天琴 RR 型变量 亚矮星 球状星团	120 150 120 ~ 180	10 ⁻⁵ 1.5 10 ⁻³	

* 恒星速度资料见 (Sp51a)。密度 ρ，高度 h 资料见 (A164)。

** 系指速度在银道面上的投影分量的均方根值。

图 A.6 在 10¹⁰ 年内 (投影在银道面上的) 每平方秒差距面积上亮星现在的形成速率 ψ。图中还表示出不同亮度恒星的质量 (Sc63)

A.8 脉冲星、射电星和 X 射线源

(a) 脉冲星

除了蟹状星云脉冲星外，目前为止脉冲星仅在射电波段内得到证认。它们发出宽度约为 1 秒的尖脉冲。脉冲的规律性是其显著的特点，许多这类天体脉冲频率的相对稳定性达 10⁻⁸。

在每个脉冲内还有若干个子脉冲，相对于整个包络线它们在相位和极化方向的变化上都很有规律。我们希望，对这些子脉冲迹线的详尽分析会使我们对发射机制有更透彻的理解。

相干性和脉冲频率已告诉我们，这些辐射源比普通的恒星要小。我们想，我们所涉及的或许是中子星，这些恒星的核由密集的简并态中子组成。对于这种恒星来说，太阳那么大的质量仅仅集中在直径约为 10 公里的体积中。

最普遍接受的脉冲星的模型认为，它是以两个主脉冲间的时间间隔

为自转周期的中子星。但是产生脉冲的方式仍没确定。根据我们现有的全部理论，辐射的方向应该与带电粒子随恒星自转运动的方向相切，因此应该产生角动量的损失，因而恒星自转和脉冲频率相应地都应减慢。仔细观测的结果也确实发现了一些脉冲星有这种变慢的趋势（Go68）。

脉冲周期常常还会出现不连续的变化，我们对这类变化还没有能够理解。另外还有一些明显的特征也还没法解释：(i)巨脉冲，它比普通的脉冲亮数千倍，但仅仅在约一万次脉冲中才会出现一次；(ii)零脉冲，有时会出现脉冲强度为零的情况；(iii)脉冲结构的突然变化，而又同样突然地回到原来的脉冲样式。这些都是我们应该探索的谜一般的问题。

有两个脉冲星与已知的气体超新星遗迹有关。一个在船帆座；另一个是蟹状星云中的恒星，后者是公元 1054 年所见到的超新星的遗迹。早在脉冲星发现前 25 年，它就被证认为超新星的恒星遗迹了。根据探测，它不仅发出脉冲射电波，而且在目视和 X 射线波段上也是脉动的，象这样的脉冲星就只有这么一颗。

有趣的是蟹状星云脉冲星的周期是一切已知脉冲周期中最短的，只有 0.033 秒。在船帆座方向的脉冲星周期也很短，为 0.089 秒。既然脉冲频率在逐渐变慢，由此推测，这两个快速脉冲星可能是很年轻的天体。根据现在测得的频率减慢的速率，我们可以线性外推过去时间蟹状星云的脉冲周期，并且发现它确实是公元 1054 年爆发的天体。十分奇怪，尽管也在其他的超新星遗迹中对脉冲星进行了彻底的搜查，然而却没能找到。看来仅仅是蟹状星云和船帆座遗迹与脉冲星有关。

宇宙线粒子可能由脉冲星产生，这是脉冲星的一个特别有趣的特性。人们相信，那些产生观测到的脉冲电磁辐射的带电粒子是高度相对论性的；在脉冲星中产生的某些粒子，其能量完全可能与观测到的最高能量的宇宙线能量一样大（5.10 节）。在这种情况下，宇宙线就可能只是一种相当局部性的现象，这就与过去长期的认识不一样了。假若这个假设是正确的，那么我们可以预期，在最高能量处的宇宙线流量是各向异性的。同样，宇宙线的化学组成也应当与普通恒星物质中的化学成分不同，因为中子星内的物质可能在演化过程中已经历过了剧烈的核反应。

不同射频的脉冲到达的时间不同，这是脉冲星的一个有趣的性质。尽管它们的位置是相同的，但脉冲到达的时间却会略有差别，这是因为星际介质以及脉冲星的任意一个外层对不同的射频具有略有不同的折射率。这就使我们能够在沿天体视线的方向对电子进行计数，因而也可以对天体的距离和射电亮度作一个粗略的估计（6.11 节）。

脉冲星——其中约有 60 个是在 1971 年发现的——集中在银道面上。根据距离和集中性，我们断定这些天体是银河系中的恒星。当然，其他星系无疑也有脉冲星。

(b)射电星

第一颗发现的射电星就是太阳（Re44）。太阳的射电发射很弱，只是因为距离近，我们才能清晰地发现它。太阳射电发现后十多年来，所有发现的射电源都还是河外射电星系或类星射电源，或者是银河系内诸如超新星或电离氢区一类复杂的星云状物质。然而，近几年来发现了

几类新的射电星。除了脉冲星外，新星和 X 射线发射星在射频波段也有辐射被探测到。对红超巨星、红矮星以及作为红巨星伴星的蓝矮星也进行了射电研究。因为这些天体很暗弱，因而只有使用我们所可能具有的最尖端技术，才适合进行这样的研究 (Hj71)。

(c) X 射线星

已知一些河外源有 X 射线发射：M87，是一个球状星系，它发射射电波，还明显地带有相对论性粒子喷流。这些喷流显然是从星系中心抛射出来的；3C273，最亮的类星射电源；此外还有几个其他的射电星系和塞佛特星系。另外，从几个星系团所在的方向也测到了 X 射线。但是，一般地讲，现今观测到的 X 射线源大部分是银河源。图 A.7 表明这类 X 射线源在银道面附近的成团性。这些源与恒星有关，并分为几群。

(i) 蟹状星云脉冲星发射极规律的 0.33 秒周期的 X 射线脉冲。我们还没测到其他 X 射线脉冲星。

图 A.7 X 射线天图——1971 年 (Gi72)。此图是把 1971 年所知的 X 射线源点在银道坐标系上而得到的。注意在银心和银道平面上的集中性。

中心源有 2° 范围，它与图 9.4 上所画的延伸射电源和红外源均相重合

(ii) 半人马座 X₃ 是一个半规则的 X 射线脉冲源。在一天半时间内它发射脉冲，而脉冲周期慢慢地由 4.84 秒增加到 4.87 秒。然后它在一小时期间内强度又突然下降，半天后又从头开始。这一类源看来就是密近双星。

(iii) 不少 X 射线源在亮度变化上看来具有某些规律性，这些亮度变化在秒级尺度上出现。但我们还不能确定这些规律性，这些规律性也可能是真实的。

(iv) 新星状的 X 射线源。在一个月左右的时间内它会突然亮起来，然后又消失。每年约发现两个这类天体。某些 X 射线星可能与白矮星、行星状星云或中子星有关，但目前我们还不确知。某些天体物理学家推测，X 射线源与处于最后坍缩状态的恒星，即黑洞有关 (8.19 节)。

A.9 类星射电源和类星体

我们把这两类天体分开列出 (Ha63, Gr64)，是因为我们对它们的性质还没能确切地理解。

类星射电源与某些类型的射电星系有许多共同的特性；特别是类星射电源在可见光波段与塞佛特星系核的可见光波段具有明显的相似性。塞佛特星系是具有致密核的旋涡星系，它在红外波段有很强的发射，并且呈现十分宽的电离气体发射线。在类星射电源和塞佛特星系核中，我们都发现有高度电离的气体，根据光谱来判断，说明其温度约为 $10^5 \sim 10^6 \text{K}$ ，数密度约为 10^6厘米^{-3} ，这就与日冕中所观测到的条件相似。在类星射电源和塞佛特星系核中，这些气体的光谱显示有 1000 或 2000 公里·秒⁻¹ 左右的速度差存在，这说明或者 (a) 气体是以很高的速度从这些天体里抛射出来的，或者 (b) 气体以高速度落进天体，或者 (c) 存在有快速自转，或者 (d) 存在有大规模的湍流运动。当然更可能同时涉及到两种或叁种因素。

类星射电源有几个月周期的光变现象。因此我们认为它们的直径应小于 1 个光月，即约 10^{17} 厘米。但是这个论据是不充分的，因为它假定了亮度变化是由整个天体造成的；而实际上我们遇到的可能是一个很大的天体，在这个天体的不同部分会各自出现时间尺度为几个星期的爆发现象。

图 A.8 类星体红移？视目视星等关系图。图中把所有在 1969 年时 $z=\Delta\lambda/\lambda$ 值已知的类星体都画上了。注意这张图和图 2.4 的差别 (Bu69)

这些类星射电源的光谱也呈现出非常突出的红移。这里有三种可能性：(a)类星体有很大的宇宙距离，(b)它们是新近从我们银河系抛出去的天体，因而具有很大的退行速度，或(c)它们是邻近的天体，我们所观测到的是一种引力红移。看来第二种可能性吸引了许多天文学家，他们指出，类星体在亮度和红移间没有相关性，这与规则星系是完全不同的，图 A.8 说明了这一点。第三种情况同样有可能是正确的。

如果红移就意味着类星射电源具有宇宙距离，那么它们的光度必定大得出奇。某些类星射电源所发出的能量要超过 10^{46} 尔格·秒⁻¹——比我们银河系发射的能量大一百倍以上！又因为这些天体是如此之小，所以其表面亮度一定要比通常的星系大数十个星等！

“类星射电源”和“类星体”两个术语常常可以互相替代使用。但是，某些天文学家专门用“类星射电源”这个名称表示有强烈射电发射的那些类星体；而类星体这个名称则既表示射电宁静、又表示有很强烈射电发射的类星天体。也即，用“类星体”这个名称作为整个这类致密天体的总称。

A.10 光子和宇宙线粒子

地球、太阳和星系都沐浴在由光子和高度相对论性粒子所组成的辐射流之中。星系内的光子要比星系外来得多，因为星光和红外发射产生了一个较强的区域性照度。但有一种相当于 3K 黑体谱的微波辐射，其辐射强度看来在星系内以及在星系周围的宇宙空间中都是一样的 (Pe65)。

宇宙线粒子、高能电子和核子在地球周围形成了一个比星光和微波光子合起来还更为密集的能量场；河外空间粒子的分布情况我们还不知道。表 A.7 表明了这些成分的能密度。X 射线和 γ 射线都是一些高能光子，它们的能密度比可见光和微波辐射小得多。

表 A.7 光子和宇宙线的能密度和数密度

	宇宙线粒子	可见光	微波
银河系能密度 (尔格·厘米 ⁻³)	10^{-12}	$\sim 2 \times 10^{-13}$	$\sim 5 \times 10^{-13}$
河外能密度 (尔格·厘米 ⁻³)	$\sim 10^{-9}$	$\sim 2 \times 10^{-14}$	$\sim 5 \times 10^{-13}$
银河系数密度 (厘米 ⁻³)	2	$\sim 10^{-1}$	$\sim 10^3$
河外数密度 (厘米 ⁻³)	2	$\sim 10^{-2}$	$\sim 10^3$

附录 B 天体物理常数①

B.1 物理常数

光速	$c=2.998 \times 10^{10}$ 厘米·秒 ⁻¹
普朗克常数	$h=6.626 \times 10^{-27}$ 尔格·秒
引力常数	$G=6.67 \times 10^{-8}$ 达因·厘米 ² ·克 ⁻²
电荷	$e=4.803 \times 10^{-10}$ 静电单位
电子质量	$m_e=9.1096 \times 10^{-28}$ 克
质子质量	$m_p=1.6724 \times 10^{-24}$ 克
氢原子质量	$m_H=1.6733 \times 10^{-24}$ 克
中子质量	$m_N=1.6747 \times 10^{-24}$ 克
原子质量单位	$\text{amu} = (1/12)m_{C^{12}} = 1.661 \times 10^{-24}$ 克
阿伏伽德罗常数	6.0222×10^{23}
玻耳兹曼常数	$K=1.380 \times 10^{-16}$ 尔格·度 ⁻¹
电子伏特	$\text{ev}=1.602 \times 10^{-12}$ 尔格
斯忒藩·玻耳兹曼常数	$\sigma=5.67 \times 10^{-5}$ 尔格·厘米 ⁻² ·度 ⁻⁴ ·秒 ⁻¹
里德伯常数	$R_\infty=2.17992 \times 10^{-11}$ 尔格

B.2 天文常数

年	3.156×10^7 秒
天文单位 (日地平均距离)	$\text{AU}=1.496 \times 10^{13}$ 厘米
秒差距	$\text{pc}=3.086 \times 10^{18}$ 厘米 $=2.06 \times 10^5 \text{AU}$ $=3.261$ 光年
太阳质量	$M_\odot=1.99 \times 10^{33}$ 克
太阳半径	$R_\odot=6.96 \times 10^{10}$ 厘米
太阳光度	$L_\odot=3.9 \times 10^{33}$ 尔格·秒 ⁻¹
热星等 $M_{\text{bol}}=0$ 的恒星的辐射功率	3.02×10^{28} 瓦
依恩 (Aeon) $=1\text{æ}=10^9$ 年	

