由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

# 第一章　平面杆件体系的几何构造分析

**计算公式**

1）　平面体系自由度($W$)的一般计算公式为：

$$W = 3D - 2\text{Ⅲ} - C_0 \qquad (1—1)$$

式中：$D$——刚片(或称盘体) 数；

Ⅲ——单铰数；

$C_0$——支承连杆数.

2）　平面铰接连杆体系自由度的计算公式为：

$$W = 2Y - C - C_0 \qquad (1—2)$$

式中：$Y$——体系的结点数；

$C$——体系内部的连杆数；

$C_0$——体系的支承连杆数.

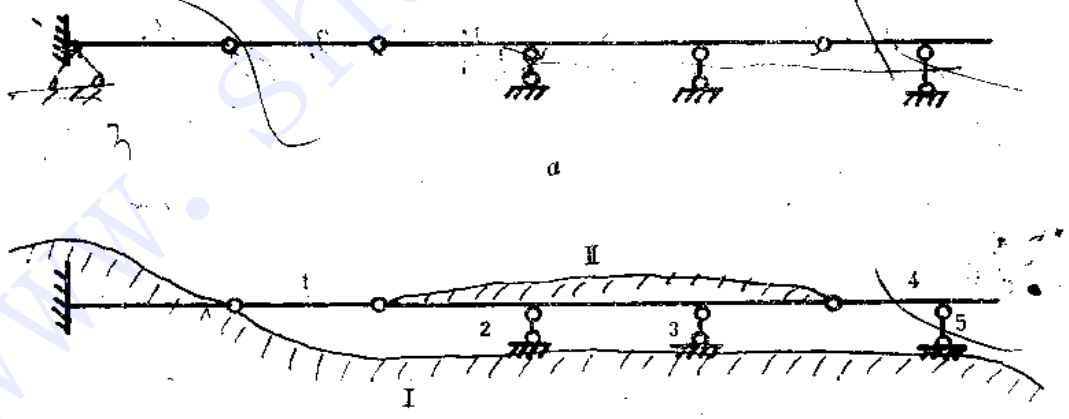
3）　平面体系和平面铰接连杆体系的内部可变度($V$)的计算公式为：

$$V = 3D - 2\text{Ⅲ} - 3 \qquad (1—3)$$

$$V = 2Y - C - 3 \qquad (1—4)$$

**1—1～1—9题**　按相应的公式求出下列各平面杆件体系的自由度并分析其几何构造.

**题 1—1**(图 1—1$a$)



$a$




$b$

图　1—1

**解**：1）　计算自由度　因为体系是具有支座的，故用式(1—1)计算它的自由度。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

# 第一章　平面杆件体系的几何构造分析

**计算公式**

1）　平面体系自由度($W$)的一般计算公式为：

$$W = 3D - 2\text{Ⅲ} - C_0 \qquad (1—1)$$

式中：$D$——刚片(或称盘体) 数；

Ⅲ——单铰数；

$C_0$——支承连杆数.

2）　平面铰接连杆体系自由度的计算公式为：

$$W = 2Y - C - C_0 \qquad (1—2)$$

式中：$Y$——体系的结点数；

$C$——体系内部的连杆数；

$C_0$——体系的支承连杆数.

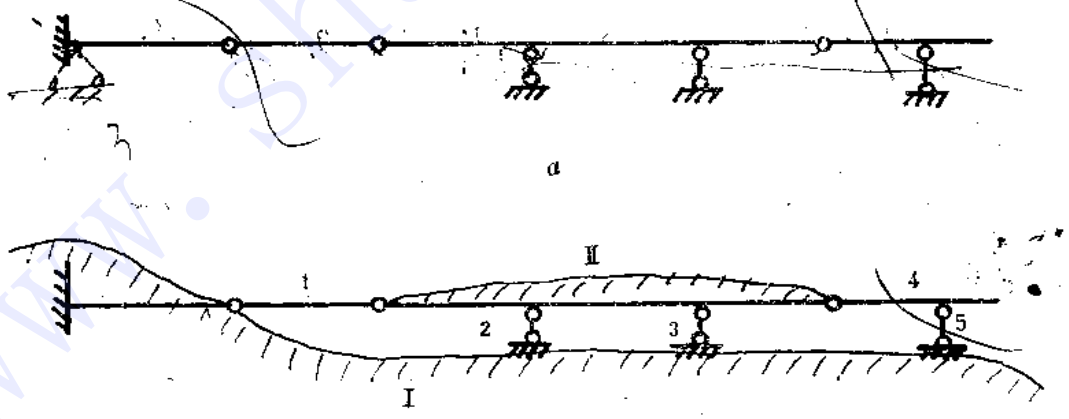
3）　平面体系和平面铰接连杆体系的内部可变度($V$)的计算公式为：

$$V = 3D - 2\text{Ⅲ} - 3 \qquad (1—3)$$

$$V = 2Y - C - 3 \qquad (1—4)$$

**1—1～1—9题**　按相应的公式求出下列各平面杆件体系的自由度并分析其几何构造.

**题 1—1**(图 1—1$a$)



$a$




$b$

图　1—1

**解**：1）　计算自由度　因为体系是具有支座的，故用式(1—1)计算它的自由度。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

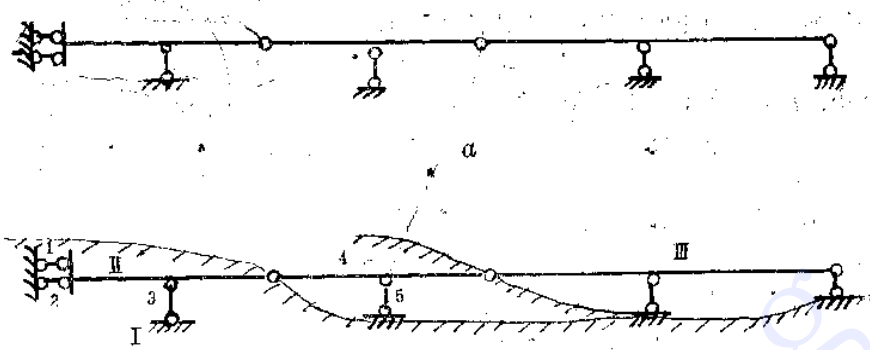
$$D=4,\ \text{Ⅲ}=3,\ C_0=6$$

$$W=3D-2\text{Ⅲ}-C_0=3\cdot4-2\cdot3-6=0$$

以上结果说明体系满足几何不变的必要条件。

2） 几何组成的分析　组成分析图见图 1—1b。首先以地基和悬臂梁Ⅰ和杆Ⅱ为二钢片，它们之间用三连杆(1、2、3)联接，且三连杆不完全交于一点，也不相互平行，满足二钢片三连杆规则，组成几何不变体系，将此部分视为刚片，再加以右侧的二元体(4、5)，而二元体具有不改变体系的几何可变性的性质，故整个体系仍为几何不变体系。

**题 1—2**(图 1—2a)



a




b

图 1—2

**解**：1） 计算自由度　因为体系是具有支座的一般情况的体系，故用式(1—1)计算自由度。

$$D=3,\ \text{Ⅲ}=2,\ C_0=6$$

$$W=3D-2\text{Ⅲ}-6=3.3-2.2-6=-1$$

说明体系有一个多余联系。

2） 几何组成分析　组成分析见图 1—2b。首先地基Ⅰ和钢片Ⅱ用三连杆(1、2、3)相联接。此三杆不完全交于一点，也不相互平行，故组成几何不变体系。如题 1—1 所述，在此不变体系上又加以二元体（4、5）仍构成几何不变体系。该体系连同地基又组成一大钢片，它和刚片Ⅲ用一铰二杆相联，故多了一个联系。因而给定的体系是几何不变且有一个多余联系的体系（超静定体系）。

**题 1—3**(图 1—3a)

**解**：1） 计算自由度　因为体系是具有支座的一般情况的体系，故用式（1—1）。

$$D=5,\ \text{Ⅲ}=6,\ C_0=3$$

$$W=3D-2\text{Ⅲ}-C_0=3.5-2.6-3=0$$

该体系满足几何不变的必要条件。

2） 几何组成分析　组成分析见图 1—3b。取Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ为三钢片并用三个不共点、不共线的铰(1，2)、(1，3)、(2，3)相联接，因而得几何不变部分。在此刚片上又加以右部的二元体 $DB$ 和 $CB$，体系仍为几何不变的，这个内部几何不变体系和地基用三杆联

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

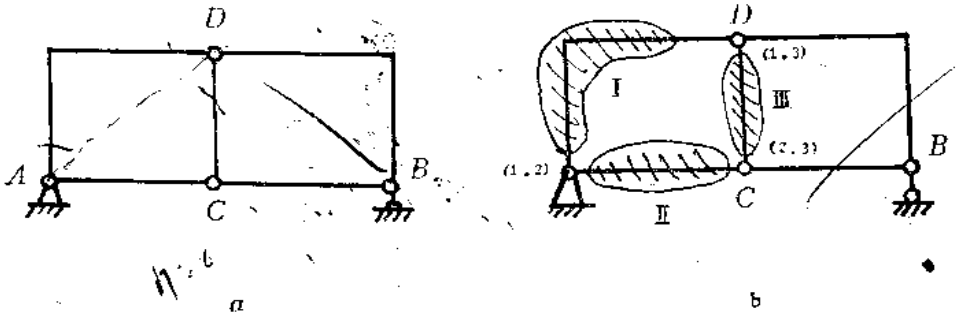



图 1—3

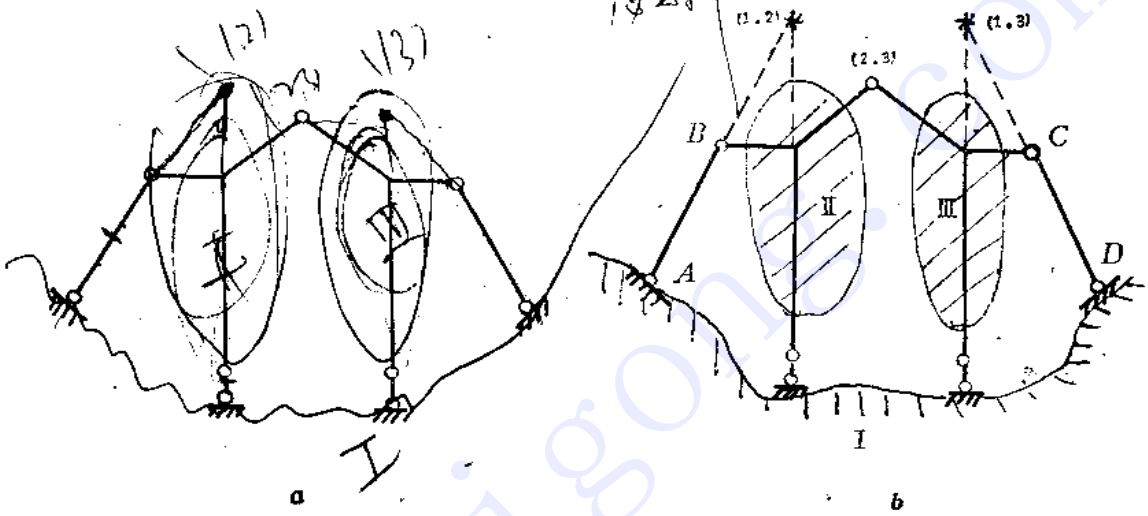



图 1—4

接，故整个体系是几何不变的.

**题 1—4**(图 1—4*a*)

**解**：1) 计算自由度 因为体系是具有支座的一般情况的体系，故用式(—1)计算.

$$D=4,\ \text{Ⅲ}=3,\ C_0=6$$

$$W=3D-2\text{Ⅲ}-C_0=3\cdot4-2\cdot3-6=0$$

该体系满足几何不变的必要条件.

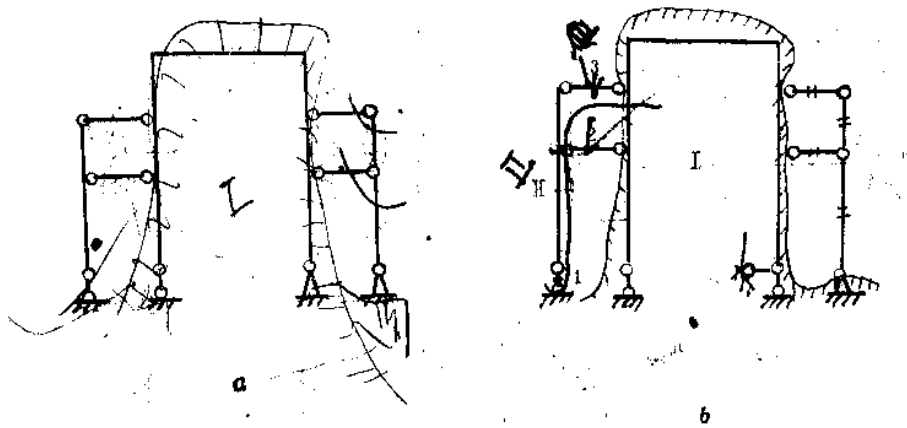
2) 几何组成分析 组成分析见图 1—3*b*. 取Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ为三刚片并用三个不共点、不共线的铰(1,2)、(1, 3)、(2,3)相联接，所得体系符合三钢片用三铰相联结的规律，组成几何不变体系.

如果改变杆 *AB* 和 *CD* 的倾角，则能使虚铰(1, 2)、(1, 3)和(2, 3)共处在一条直线上，此时该体系将成为瞬变体系.

**题 1—5**(图 1—5*a*)

**解**：1) 计算自由度 由于图 1—5*a*中所示平面体系的右侧明显为二双杆系，为简化计算起见，可将其忽略不计. 此时可视体系为具有支座的一般情况的体系，故用式(1—1)计算自由度.

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！




a　　b

图 1—5

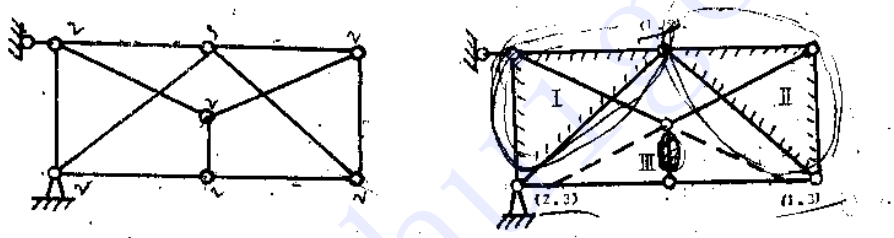
$$D=4,\text{ш}=4,C_0=4$$

$$W=3D-2\text{ш}-C_0=3\cdot4-2\cdot4-4=0$$

在该体系中无多余联系，满足几何不变的必要条件。

2) 几何组成分析　组成分析见图 1—5b。以支杆将中间刚架和基础联成刚片Ⅰ，此钢片又和左柱Ⅱ用不全交于一点、又不相互平行的三杆(1、2、3)相联，组成几何不变体系。在此几何不变体系上加以右侧二双杆系，则整体仍为几何不变体系。

**题 1—6**(图 1—6a)




a　　b

图 1—6

**解**：1) 计算自由度　因为体系是具有支座的连杆系，故用式(1－2)计算自由度。

$$Y=7,C=11,C_0=3$$

$$W=2Y-C-C_0=2\cdot7-11-3=0$$

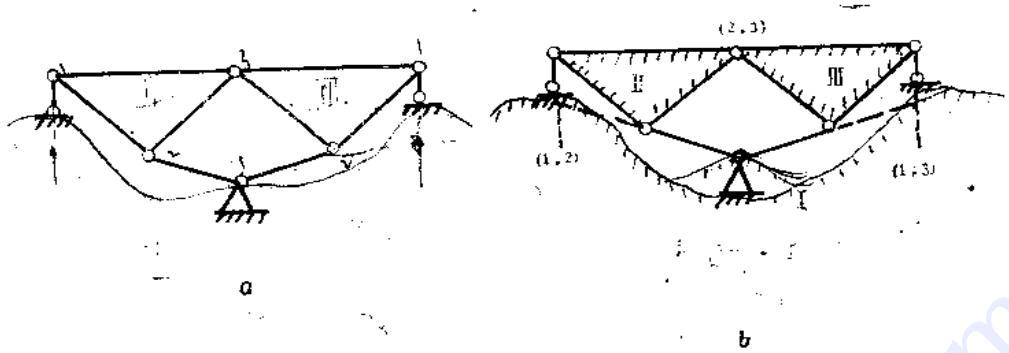
该体系满足几何不变的必要条件。

2) 几何组成分析　组成分析见图 1—6b。取Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ为三钢片，它们由三个不共线的实铰(1，2)和虚铰(1，3)、(2，3)相联，所组成的体系是几何不变的。

**题 1—7**(图 1—7a)

**解**：1) 计算自由度　该体系是具有支座的连杆系，用式(1－2)计算自由度。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！




a　　b

图 1—7

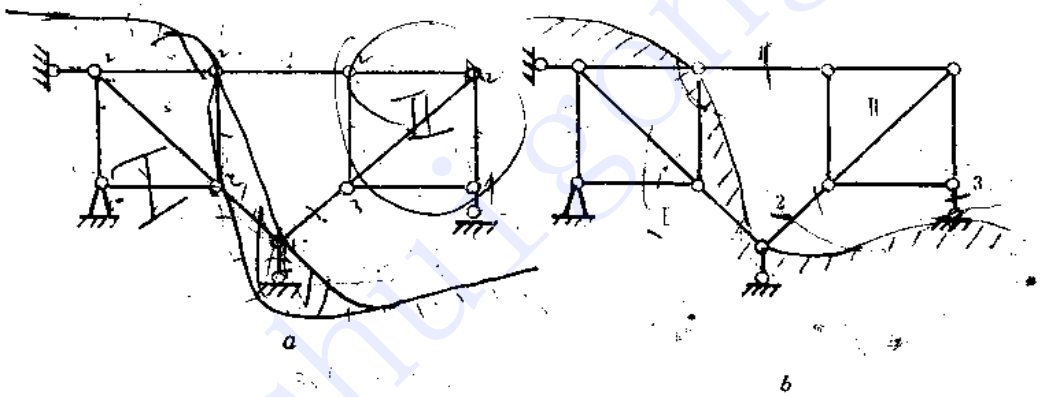
$$Y=6, C=8, C_0=4$$

$$W=2Y-C-C_0=2\cdot6-8-4=0$$

该体系满足几何不变的必要条件.

2) 几何组成分析　组成分析见图 1—7b. 取地基为钢片Ⅰ，Ⅱ、Ⅲ为另二钢片，它们由不共线、不交于一点的实铰(2,3)、虚铰(1，2)、(1，3)相联，组成几何不变体系.

**题 1—8**(图 1—8a)



a　　b

图 1—8

**解**：1) 计算自由度　该体系是具有支座的连杆系，用式 (1－2) 计算自由度.

$$Y=9, C=13, C_0=5$$

$$W=2Y-C-C_0=2\cdot9-13-5=0$$

该体系满足几何不变的必要条件.

2) 几何组成分析　组成分析见图 1—8b. 将地基和图示左侧部分视为钢片Ⅰ，它和钢片Ⅱ用三个交于一点 $A$ 的连杆(1,2,3)相联，故为瞬变体系.

**题 1—9**(图 1—9a)

**解**：1) 计算自由度　该体系是具有支座的一般情况的体系，用式(1—1)计算自由度.

$$D=11, \text{ш}=15, C_0=3$$

$$W=3D-\text{ш}-C_0=3\cdot11-2\cdot15-3=0$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

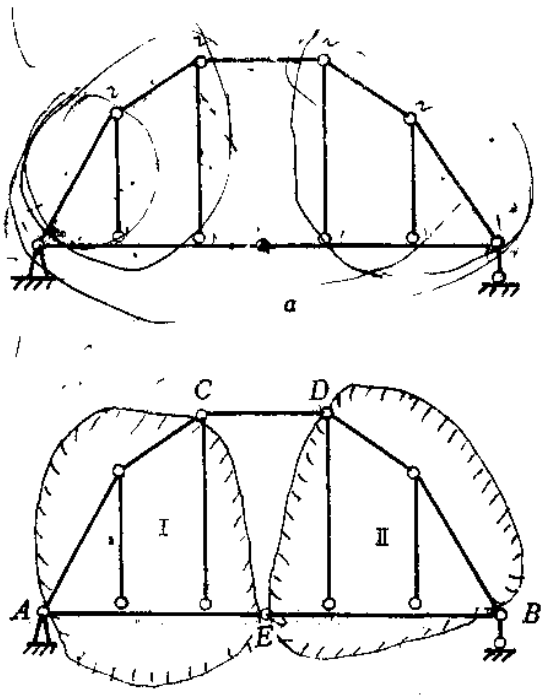



图 1—9

该体系满足几何不变的必要条件.

2) 几何组成分析 组成分析见图 1—9 *b*. 图示刚片Ⅰ、Ⅱ是由杆 *AE* 和 *BE* 上各加二双杆系而组成的几何不变体系. 它们（Ⅰ、Ⅱ）之间用符合二钢片联接规律的杆 *CD* 和铰 *E* 相联接，组成几何不变的体系，故整个体系是几何不变的.

对下列各平面杆件体系 1—10～1—14 做几何构造分析.

**题 1—10** (图 1—10a)

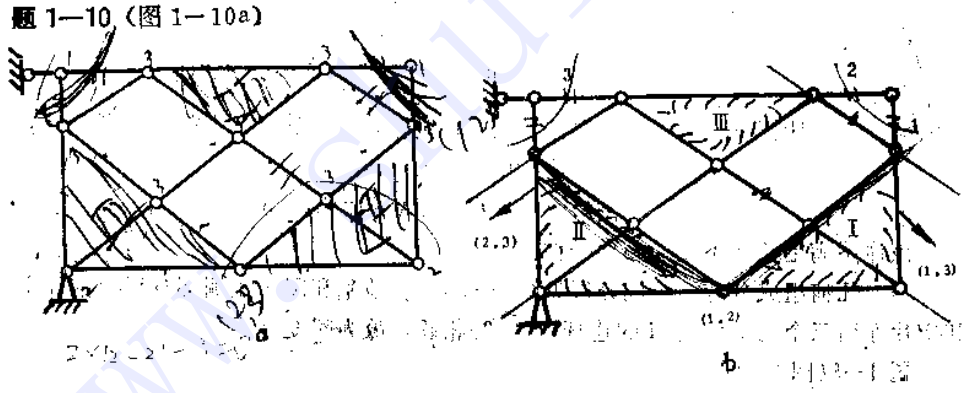


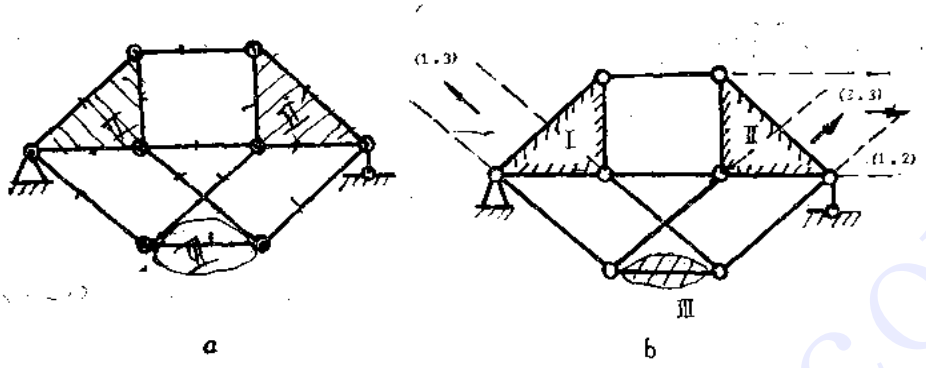

图 1—10

**解**：几何组成分析 组成分析见图 1—10b. 由于杆件体系和地基是用三根互不平行，又不交于一点的杆相联接，故这种联接是几何不变的. 为进一步分析几何组成，将二双杆系去掉. 取Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ为三刚片并用三铰(1，2)、(1，3)、(2，3)相联. (1,3)—

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

和(2，3)为虚铰，且在无穷远处．此三铰不交于一点，也不在一条直线上，故该体系为几何不变体系．

**题 1—11**(图 1—11*a*)

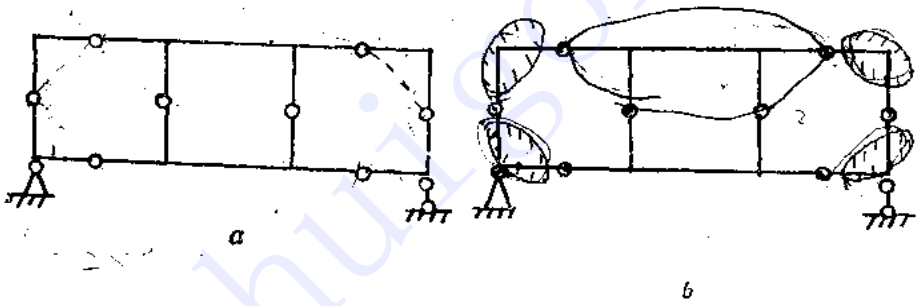



*a*　　*b*

图　1—11

**解**：几何组成分析　组成分析见图 1—11*b*．图示钢片Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ用三虚铰(1，2)、(1,3)、(2,3)相联．由于三虚铰全在无穷远处，可认为是交于一点的，故该体系为瞬变体系．

**题 1—12**(图 1—12*a*)



*a*　　*b*

图　1—12

**解**：几何组成分析　见图 1—12b．按式 (1—1) 可见，该体系有一个多余联系．

不考虑体系与地基的联系时，左右两部分为二元体，故可不考虑其对体系几何构造的影响．其中间部分为有一个多余联系的超静定体系．

**题 1—13**(图 1—13*a*)

**解**：几何组成分析　见图 1—13*b*．取Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ（地基）为三刚片，并将它们用不共点、不共线的三铰 1、2、3 相联，组成该体系的几何不变部分．在此基础上由左至右逐次加支杆，整体为几何不变体系．

**题 1—14**(图 1—14*a*)

**解**：几何组成分析　见图 1—14*b*．钢片Ⅰ（地基）和刚片Ⅱ、Ⅲ用三虚铰 (1,2)、(1，3)、(2，3)相联，其中铰(1，2)与铰(1，3)重合于一点 *A*，而铰 (2，3) 在无穷远处．此三虚铰处于一条直线上，故该体系为瞬变体系．

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

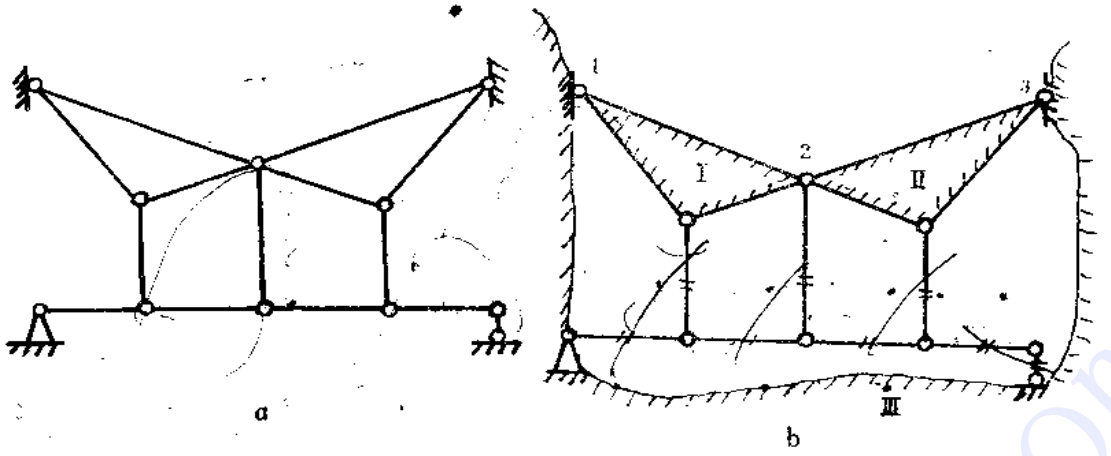



图 1—13

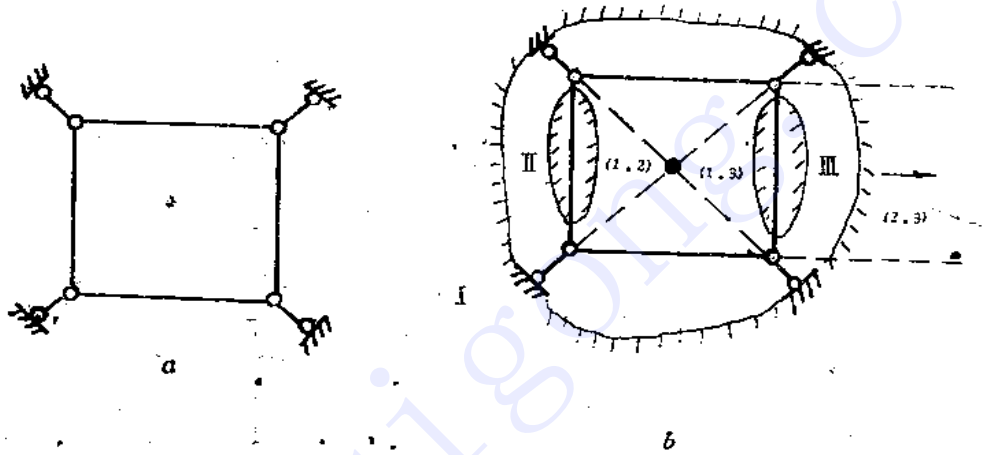



图 1—14

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

# 第二章 静 定 梁

**2—1～2—4 题** 写出下列各梁的弯矩方程、剪力方程，并作 $M$、$Q$ 图。

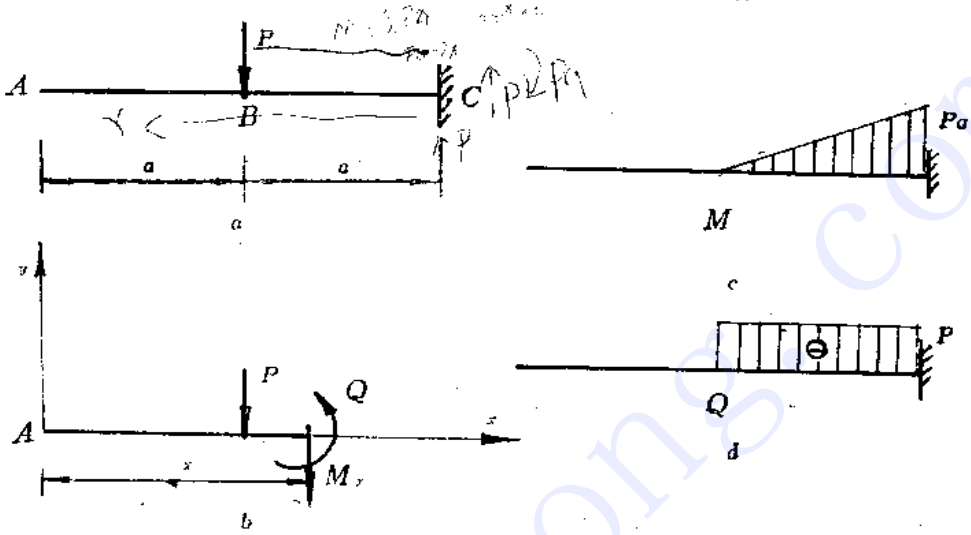



图 2—1

**题 2—1**(图 2—1a)

**解**：取图 2—1b 所示的坐标与隔离体，则

当 $0 \leqslant x \leqslant a$ 时，$M_x = 0 \quad Q_x = 0$

当 $a \leqslant x \leqslant 2a$ 时，$M_x = -(x-a)P \quad Q_x = -P$

由于 $AB$、$BC$ 这两段内没有荷载作用，所以弯矩图和剪力图在这两段内都应为直线，如图 2—1 $c$、$d$ 所示。

**题 2—2**(图 2—2a)

**解**：求支座反力 $\Sigma M_B = 0 \quad R_A \cdot 2a - qa \cdot \frac{3}{2}a = 0 \quad R_A = \frac{3}{4}qa \uparrow$

当 $0 \leqslant x \leqslant a$ 时，$M_x = R_A x - \frac{1}{2}qx^2 \quad Q_x = R_A - qx = \frac{3}{4}qa - qx$

当 $a \leqslant x \leqslant 2a$ 时，$M_x = R_A x - qa\left(x - \frac{a}{2}\right) = \frac{3}{4}qax - qa\left(x - \frac{a}{2}\right) \quad Q_x = R_A - qa$

$$= \frac{3}{4}qa - qa = -\frac{1}{4}qa$$

$AC$ 段弯矩图为曲线，剪力图为斜直线，$BC$ 段弯矩图为斜直线，剪力图为水平线，分别如图 2—2c、$d$ 所示。

**题 2—3**(图 2—3a)

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

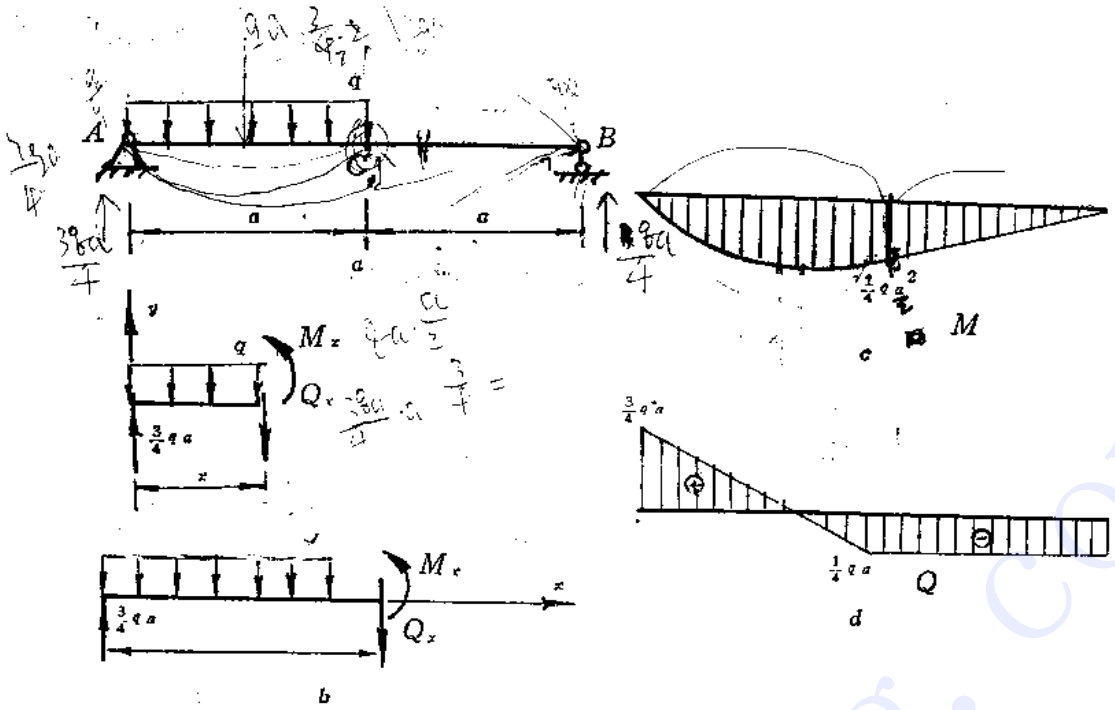



图 2—2

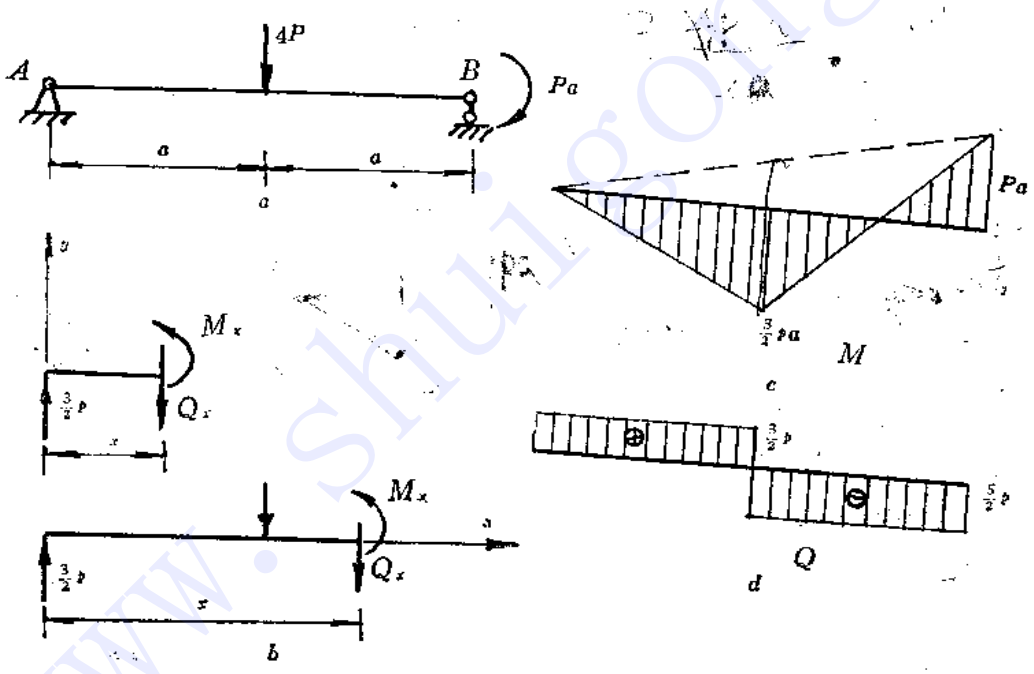



图 2—3 .

**解：** 求支反力 $\Sigma M_B = 0 \quad R_A \cdot 2a - 4Pa + Pa = 0 \quad R_A = \frac{3}{2}P \quad \Sigma y = 0 \quad R_B = \frac{5}{2}P$

取图 2—3*b* 所示的坐标与脱离体。

当 $0 \leqslant x \leqslant a$ 时，$M_x = \frac{3}{2}Px \quad Q_x = \frac{3}{2}P$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

当 $a \leqslant x \leqslant 2a$ 时，　$M_x = \frac{3}{2}Px - 4P(x-a)$　　$Q_x = \frac{3}{2}P - 4P = -\frac{5}{2}P$

弯矩图，剪力图在 $AC$、$CB$ 段都为直线，如图 2—3$c$、$d$ 所示。

**题 2—4**(图 2—4$a$)

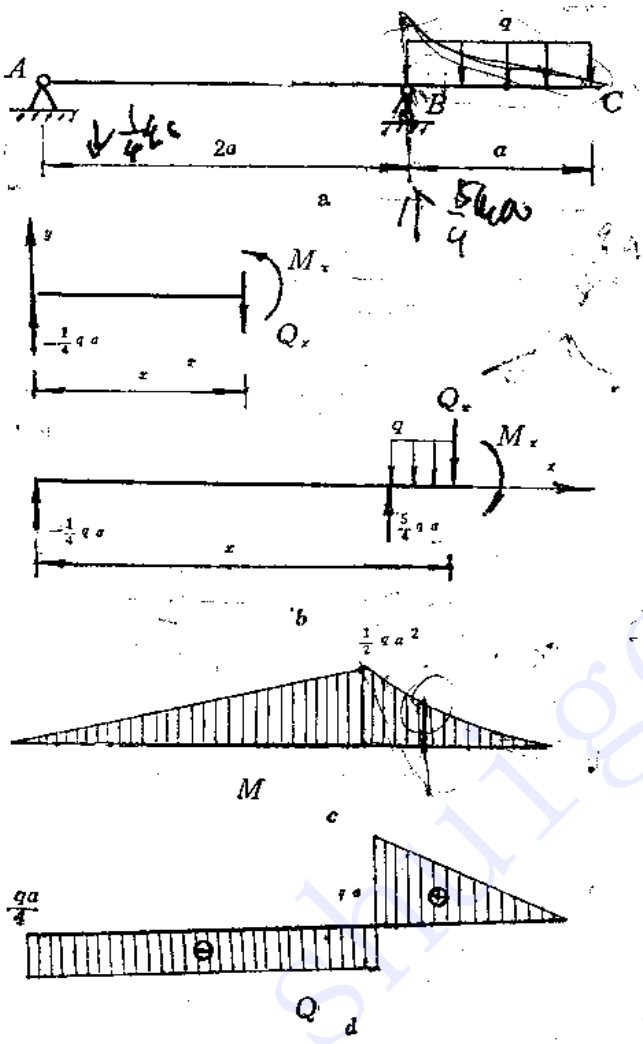



图　2—4

**解**：求支反力 $\Sigma M_B = 0$

$$R_A \cdot 2a + qa \cdot \frac{a}{2} = 0$$

$$R_A = -\frac{qa}{4}\downarrow$$

$$\Sigma y = 0$$

$$R_B = \frac{5}{4}qa\uparrow$$

取图 2—4$b$ 所示的坐标与脱离体。

当 $0 \leqslant x \leqslant 2a$ 时，

$$M_x = -\frac{1}{4}qax$$

$$Q_x = -\frac{1}{4}qa$$

当 $2a \leqslant x \leqslant 3a$ 时，

$$M_x = \frac{5}{4}qa(x-2a) - \frac{1}{4}qax - \frac{q}{2}(x-2a)^2$$

$$Q_x = \frac{5}{4}qa - \frac{1}{4}qa - q(x-2a)$$

弯矩图在 $AB$ 段为斜直线，$\overline{BC}$段为曲线；剪力图在这两段都为直线，分别如图 2—4$c$、$d$ 所示。

**2—5～2—10 题**　用叠加法求下列各题的 $M$、$Q$ 图。

**题 2—5**(图 2—5$a$)

**解**：根据叠加原理，结构在所有荷载作用下的内力应等于各个荷载单独作用下的内力相叠加后得到的内力。因此，结构的最终弯矩图、剪力图应该等于每个荷载分别作用下的弯矩图、剪力图相叠加。此题将荷载分为两种，分别求出这两种荷载的内力图，如图 2—5$b$、$c$ 所示。最终弯矩图、剪力图应由下列式子确定：

$$M = M_1 + M_2$$

$$Q = Q_1 + Q_2$$

将 $M_1$，$M_2$ 图的对应值代数相加，得到图 2—5$d$ 所示的最后弯矩图 $M$。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

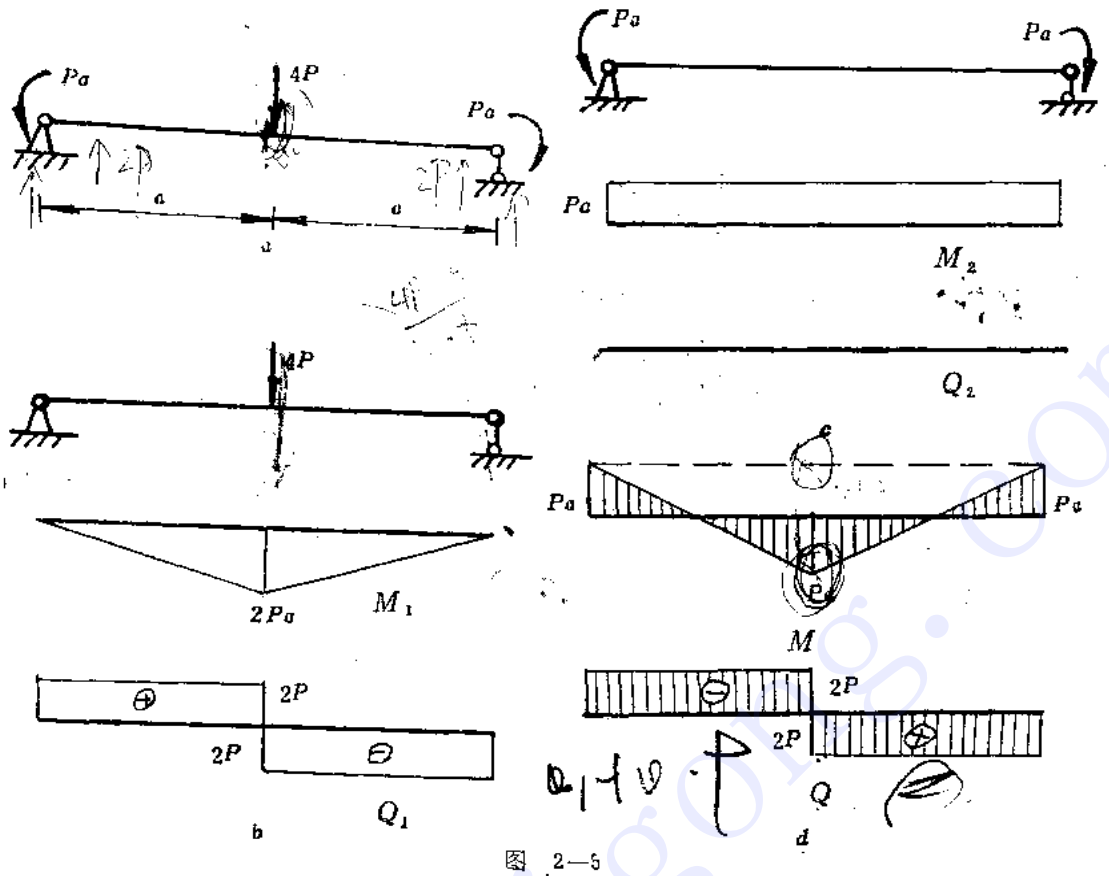



图 2—5

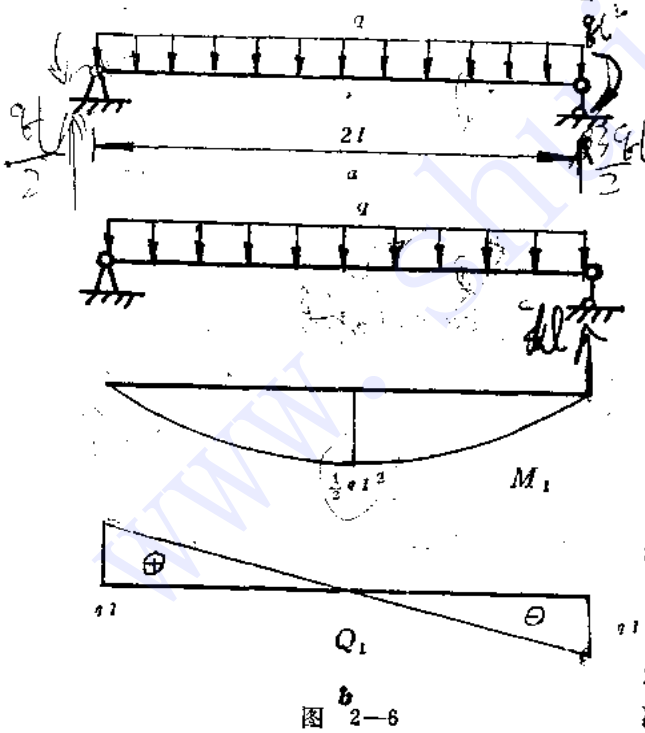



图 2—6

同样方法得到最后剪力图 $Q$（图 2～5$d$）.

**题 2—6**(图 2—6$a$)

**解**：将图 2—6$a$ 所示的荷载分为图 2—6$b$、$c$ 所示的两种形式，分别作出这两种情况下的弯矩图、剪力图(图 2—6$b$、$c$)．最后将这两种情况下的内力图分别对应相叠加就得到图 2—6$d$所示的最终弯矩图和剪力图．

**题 2—7**(图 2—7$a$)

**解**：将图 2—7$a$ 结构上的荷载分为图 2—7$b$、$c$ 所示的两部分，其余的作法和上题相同．最终 $M$、$Q$ 图如图 2—7$d$ 所示．

**题 2—8**(图 2—8$a$)

**解**：将图 2—8$a$ 结构上的荷载分为图 2—8$b$、$c$ 的两种形式，分别作出这两种情况下的内力图（图 2—8$b$、$c$），然后将这两

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

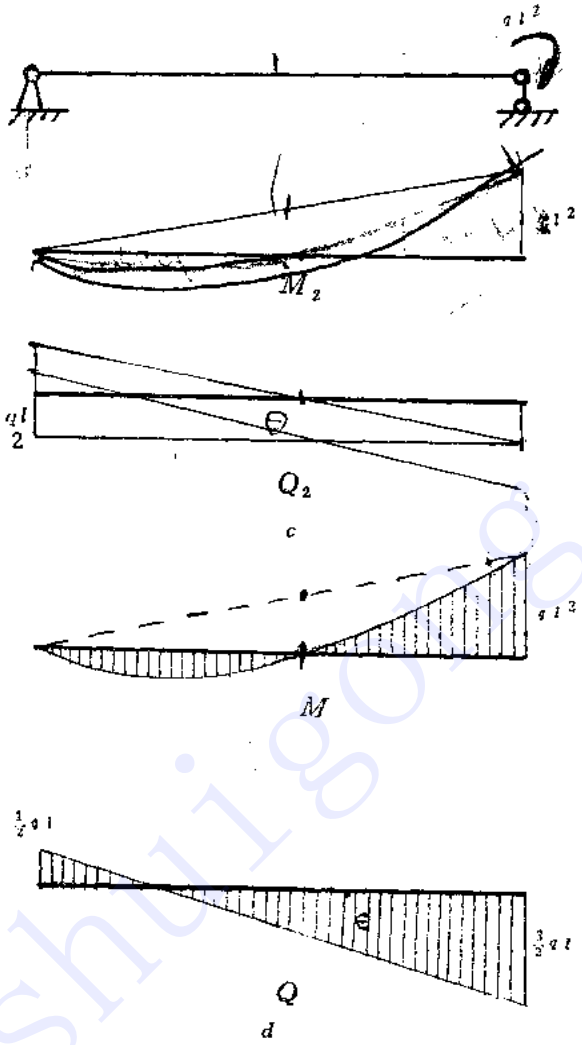



图 2—6

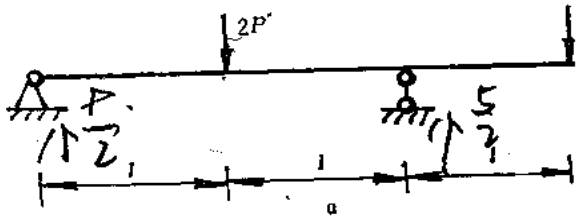



图 2—7

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

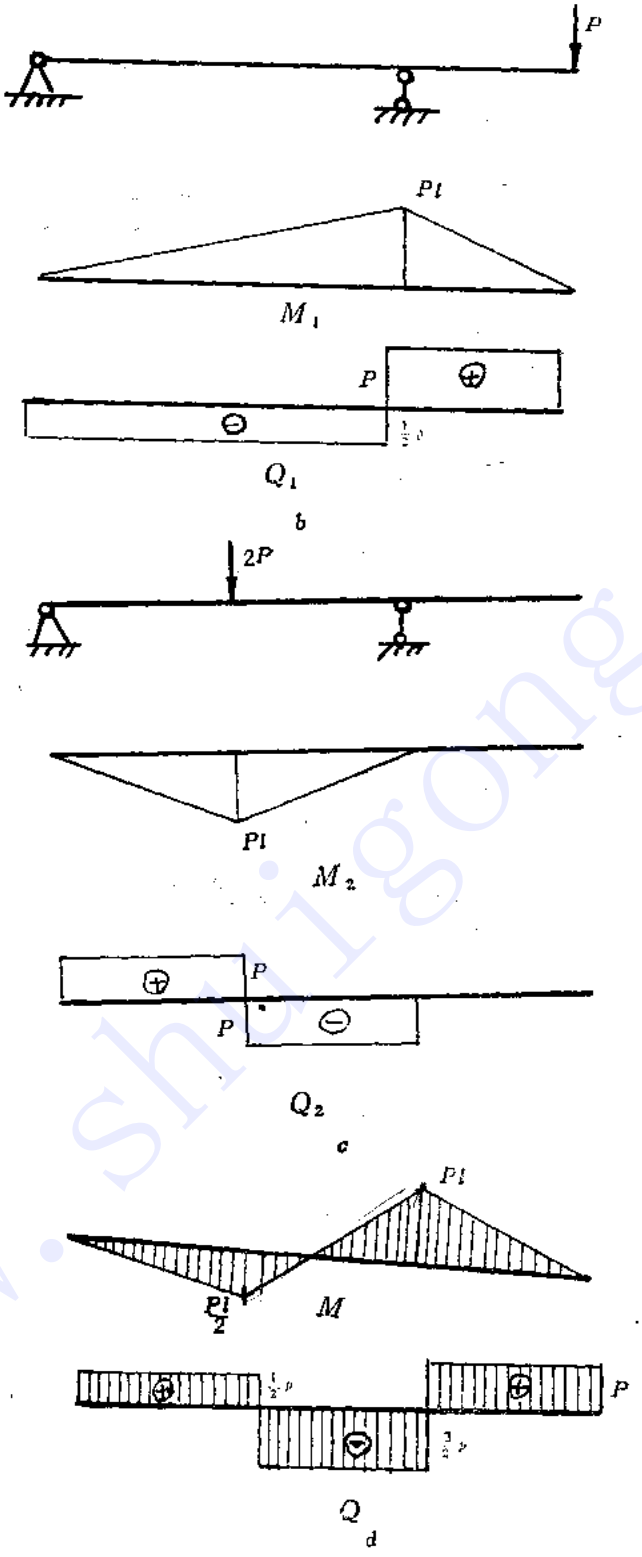



图 2—7

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

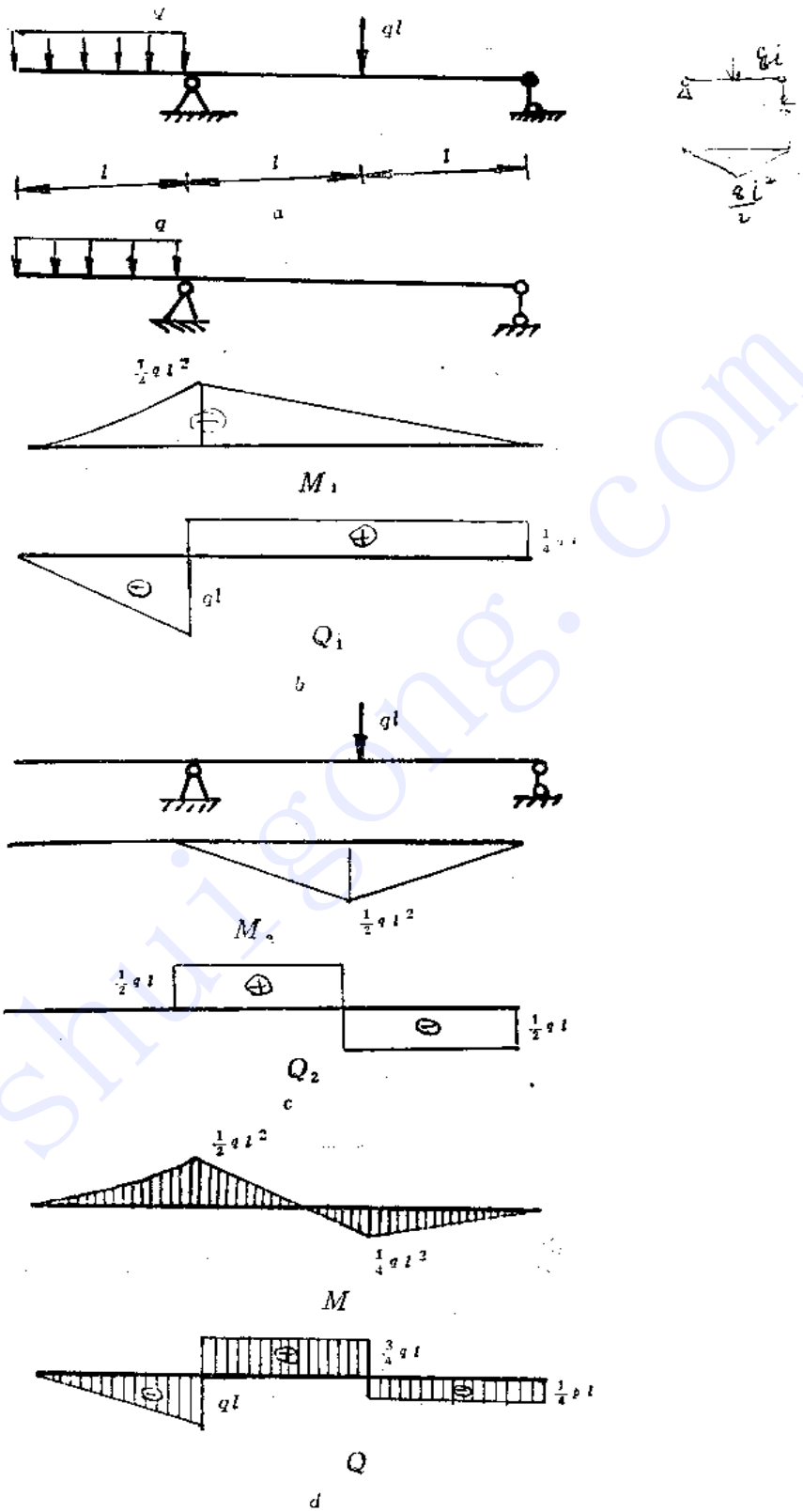



图 2—8

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

种情况下的内力图分别对应相加就得到最终 $M$，$Q$ 图(图 2—8d)，作法同上。

**题 2—9**(图 2—9*a*)

**解**：将图 2—9*a* 结构上的荷载分为图 2—9*b*、*c* 的两种形式。其余作法同上。最后得 $M$、$Q$ 图如图 2—9*d* 所示。

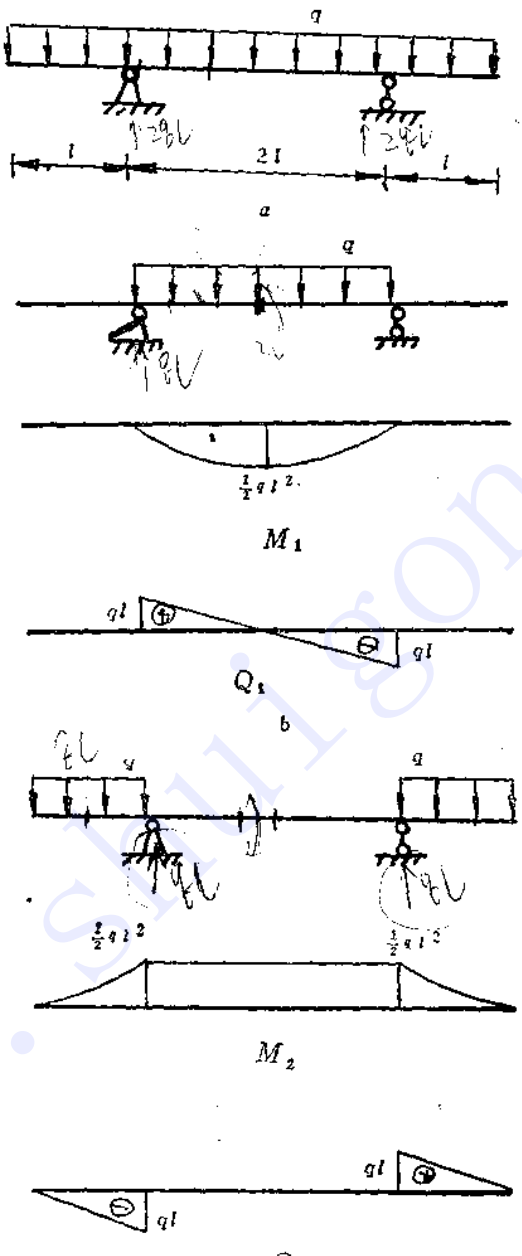
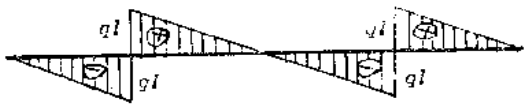



图 2—9

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！



M



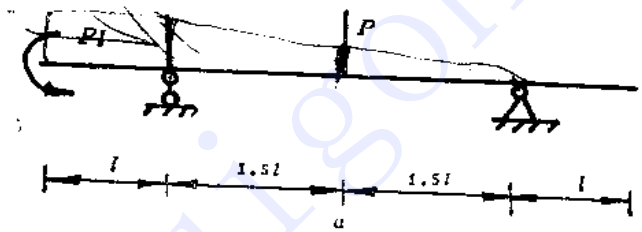
Q

d

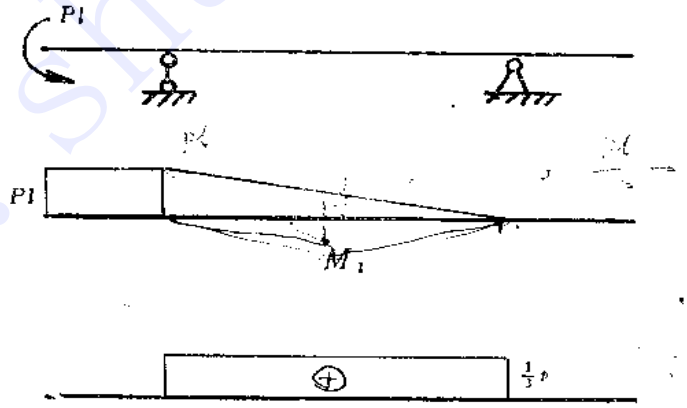
图 2—9

**题 2—10**(图 2—10*a*)

**解**：将图 2—10*a* 所示结构上的荷载分为图 2—10*b*、*c* 的两部分，作法同上。最后得 *M*、*Q* 图如图 2—10*d* 所示。



a



$Q_1$

b

图 2—10

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

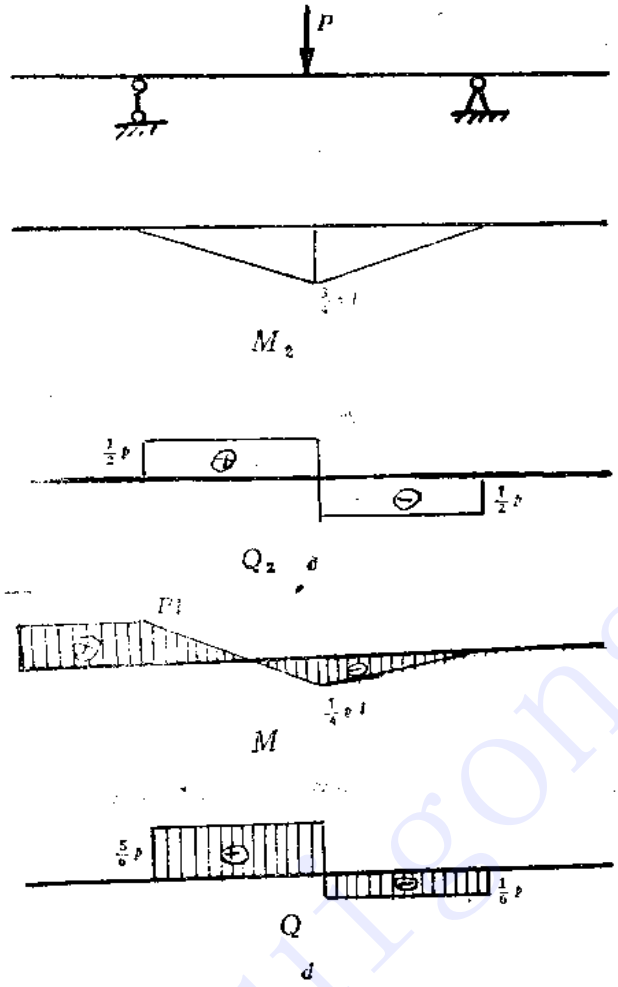



图 2—10

2—11～2—12题求下列斜梁的内力图.

**题 2—11**（图 2—11*a*）

**解：** 为求图2—11*a*所示斜梁的内力图，需先取一与斜梁同跨度、同荷载的水平简支梁(如图 2—11*b* 所示)。理论上已经给出这两种梁的内力关系为：

$$M_x = M_x^0$$

$$Q_x = Q_x^0 \cos\alpha$$

$$N_x = -Q_x^0 \sin\alpha$$

其中 $M_x$、$Q_x$、$N_x$ 分别为斜梁任意截面的弯矩、剪力和轴力，$M_x^0$、$Q_x^0$分别为水平梁与斜梁相应截面的弯矩和剪力.

因此，只要求出水平梁的弯矩图和剪力图，则根据上述关系式就可以得到斜梁的内力图，

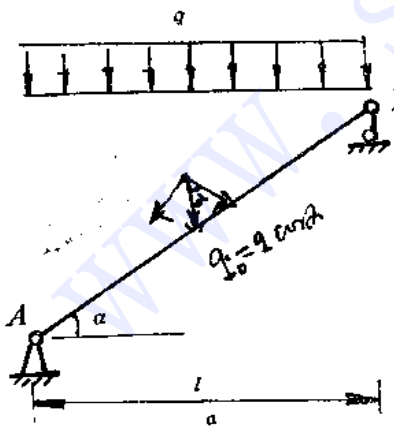



图 2—11

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

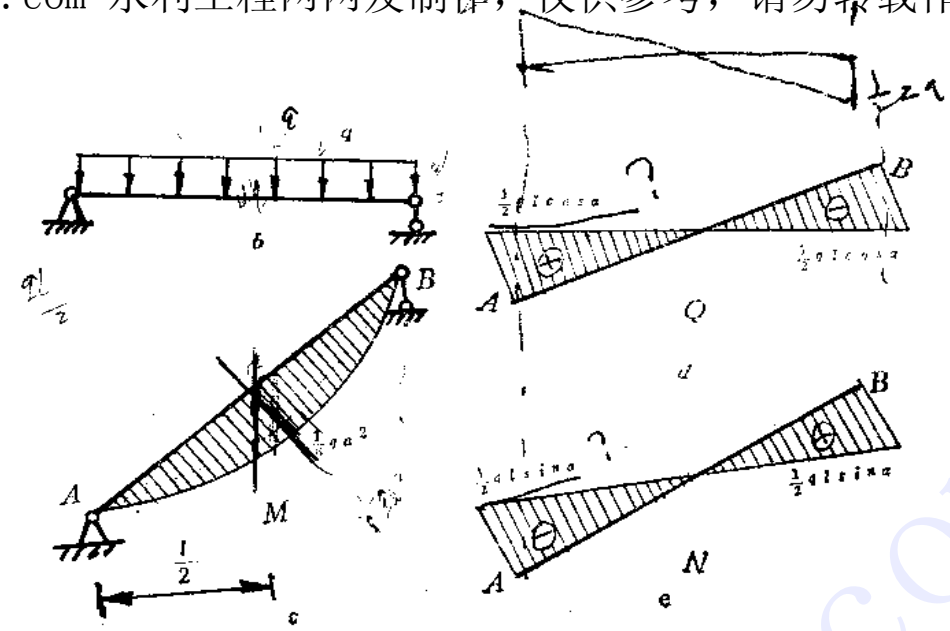


图 2—11

水平简支梁在均布荷载作用下的弯矩图和剪力图是我们非常熟悉的．由此利用上述关系式就得到了斜梁的三个内力图如图 2—11c、d、e 中所示．

**题 2—12**(图 2—12a)

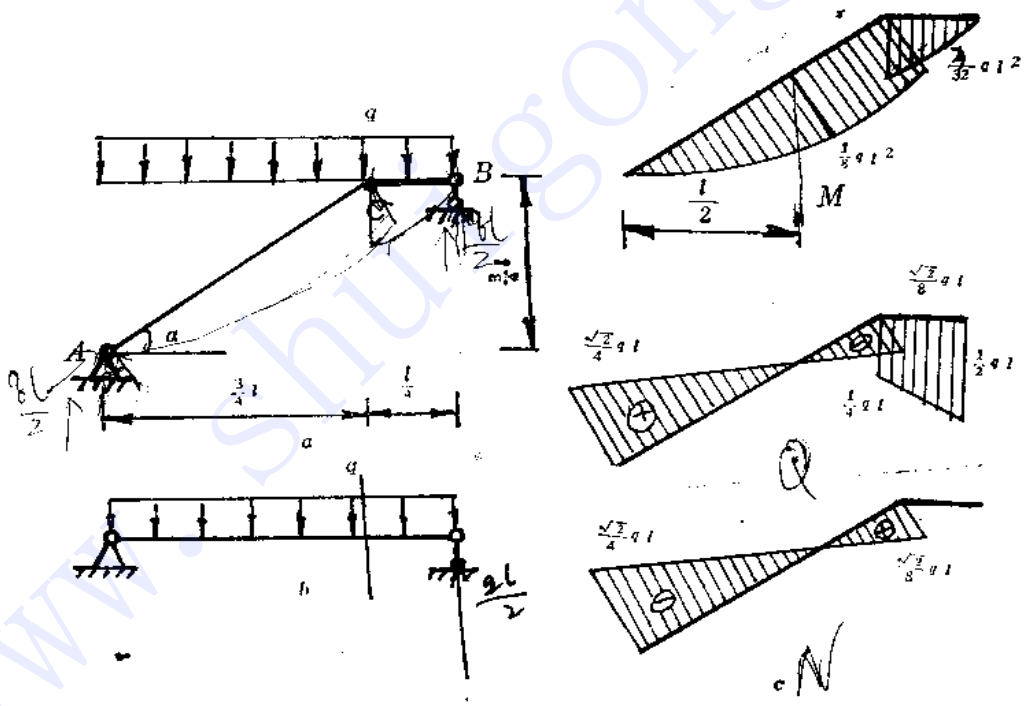


图 2—12

**解**：取同跨度、同荷载的水平简支梁如图 2—12b 所示．由斜梁与同跨度同荷载的水平梁的内力计算公式

$$M_x = M_x^0$$

$$Q_x = Q_x^0 \cos\alpha$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$$N_x = -Q_2^0 \sin\alpha$$

得：

当 $0 \leqslant x \leqslant \frac{3}{4}l$ 时，$M_x = M_2^0$　$Q_x = \frac{\sqrt{2}}{2}Q_2^0$　$N_x = -\frac{\sqrt{2}}{2}Q_2^0$

当 $x > \frac{3}{4}l$ 时，$M_x = M_2^0$　$Q_x = Q_2^0$　$N_x = N_2^0$

由此可见，在 $AC$ 段是斜梁，应按斜梁计算其内力，$CB$ 段是水平梁，应按水平梁计算其内力．最终内力图如 2—12$c$ 所示．

**2—13～2—15 题**　求下列多跨静定梁的 $M$、$Q$ 图．

**题 2—13**(图 2—13$a$)

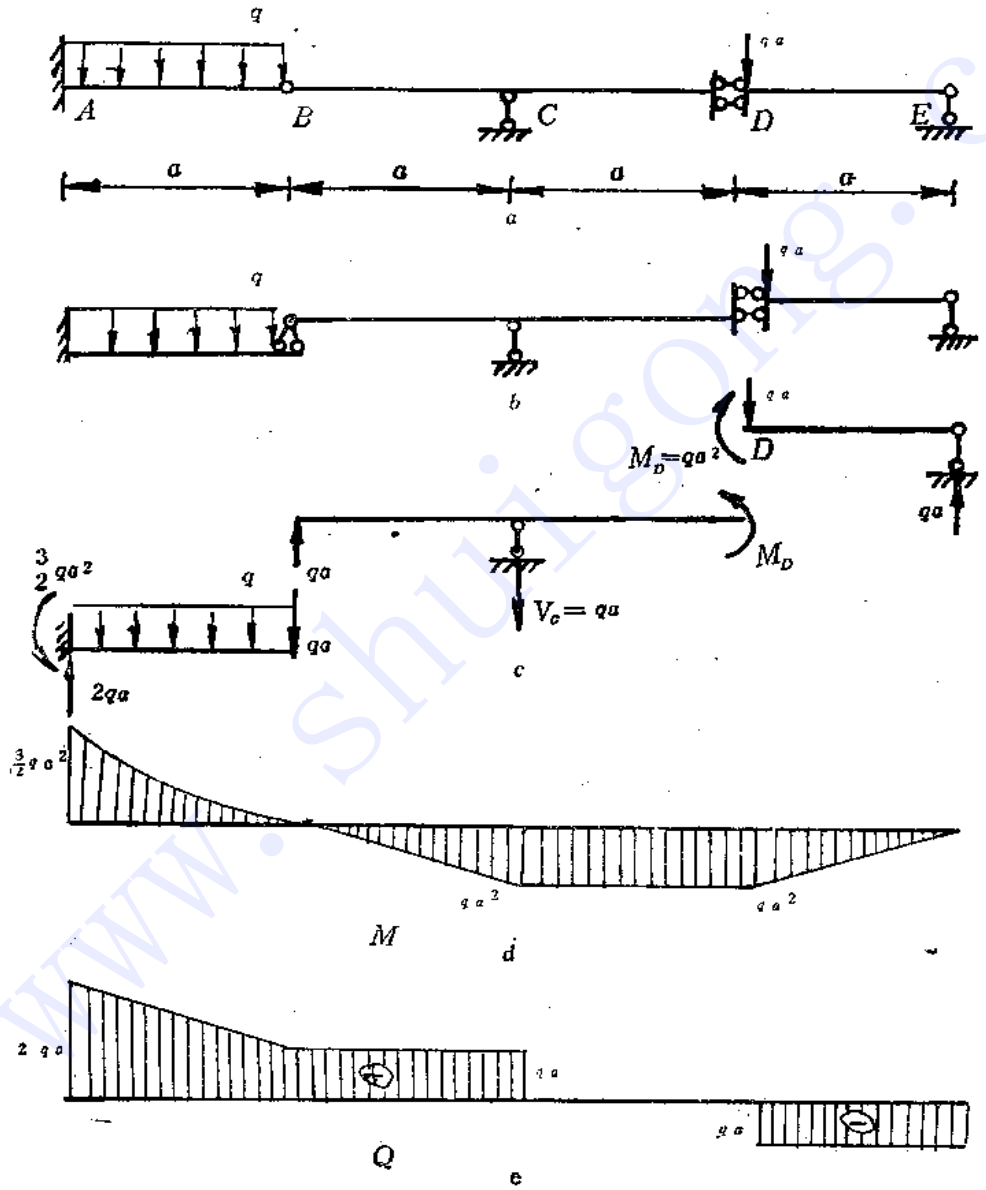



图　2—13

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

**解**：作构造分析，找出基本部分和附属部分如图 2—13*b* 所示。先计算附属部分*DE*。将*DE* 梁 *D* 点的反力反其指向作用在 *BD* 上，然后计算 *BD*；再将 *BD* 梁 *B* 点的反力反其指向作用在 *AB* 梁上，最后计算 *AB* 梁(如图 2—13*c* 所示)。

由图 2—13*c* 的受力情况可作出弯矩图和剪力图（由图 2—13*d*、*e* 给出）。

**题 2—14**(图 2—14*a*)

**解**：作法与上题相同。最后弯矩图和剪力图分别由图 2—14*d*、*e* 给出。

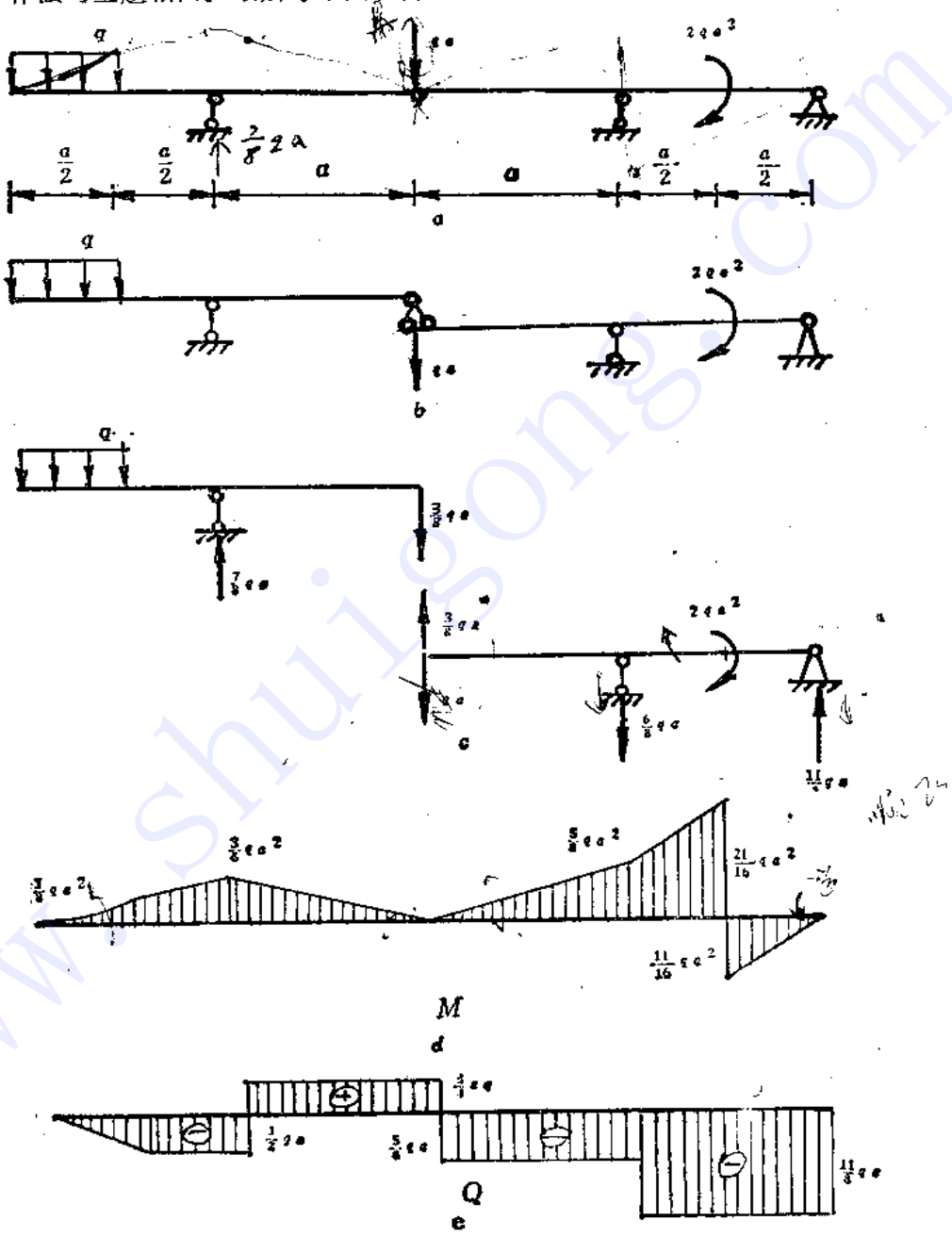
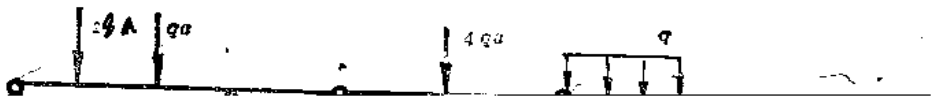



图 2—14

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

**题 2--15**(图 2—15*a*)

**解**：作法同上。内力图分别由图 2—15*d*、*e* 给出。



由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

**题 2—16**(图 2—16*a*)　选择图 2—16*a* 所示静定梁铰 $E$ 和 $F$ 的位置，使中间一跨的支座 $B$、$C$ 两点的弯矩与跨中弯矩在数值上相等，即绝对值相等。

**解**：以 $x$ 表示铰 $E$ 和 $F$ 距 $B$ 点和 $C$ 点的距离（如图 2—16*a* 所示）。先计算附属部分 $AE$ 和 $FD$，求出反力并作出 $M$ 图（如图 2—16*b* 所示）。再计算基本部分 $EF$。将附属部分 $E$ 点和 $F$ 点的约束反力作为荷载反其方向加于基本部分，

中间一跨支座弯矩的绝对值为：

$$M_B = M_C = \frac{q(l-x)x}{2} + \frac{qx^2}{2}$$

根据要求，

$$M_B = M_C = M_2$$

且　$M_B + M_2 = \frac{1}{8}ql^2$

故有　$M_B = \frac{ql^2}{16}$

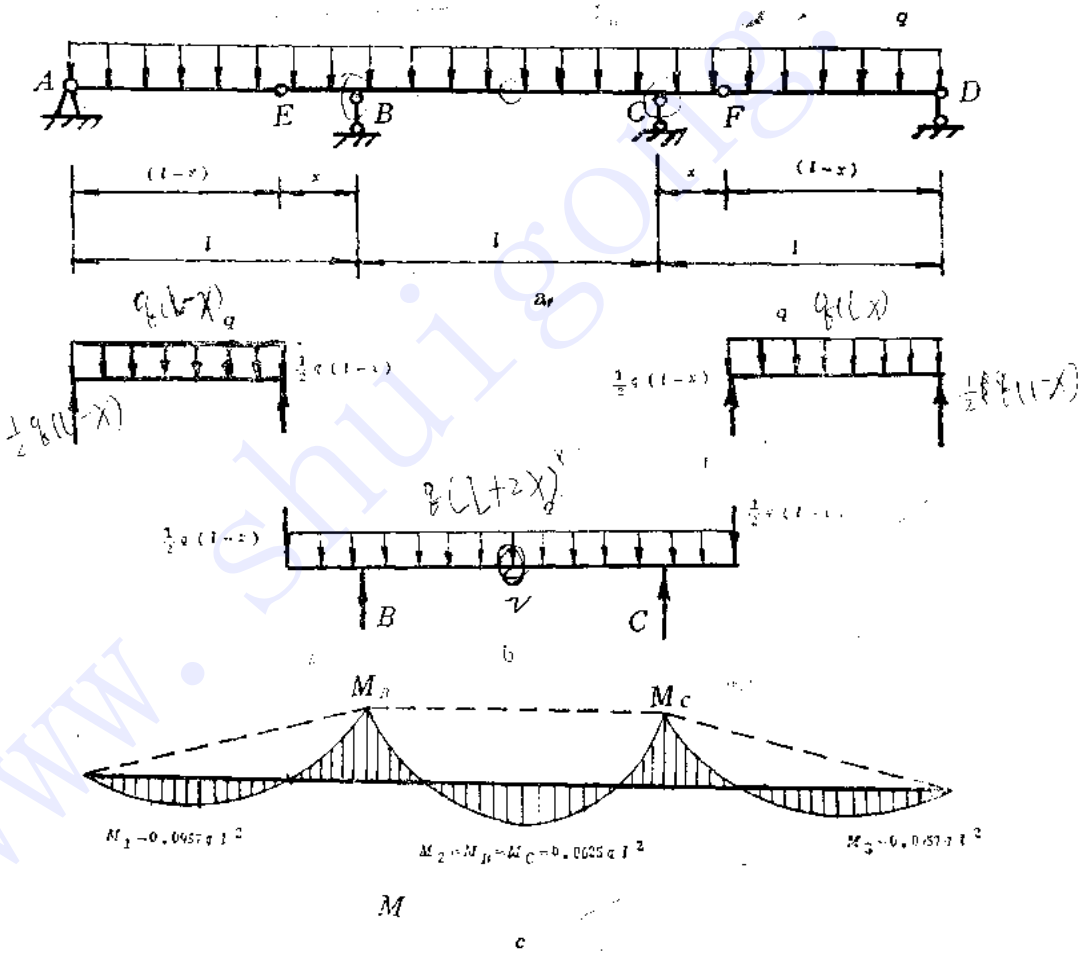



图　2—16

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

即 $\frac{q(l-x)x}{2}+\frac{qx^2}{2}=\frac{ql^2}{16}$

解得：$x=\frac{l}{8}=0.125l$

有了铰的位置，就可以作出整个梁的弯矩图，如图 2—16c 所示。

其中：

$$M_B=M_C=M_2=\frac{ql^2}{16}=0.0625ql^2$$

$$M_1=M_3=\frac{q(l-x)^2}{8}=0.0957ql^2$$

www.shuigong.com

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

# 第三章　静定平面刚架

**题 3—1**　求图 3—1a 所示结构的内力图。

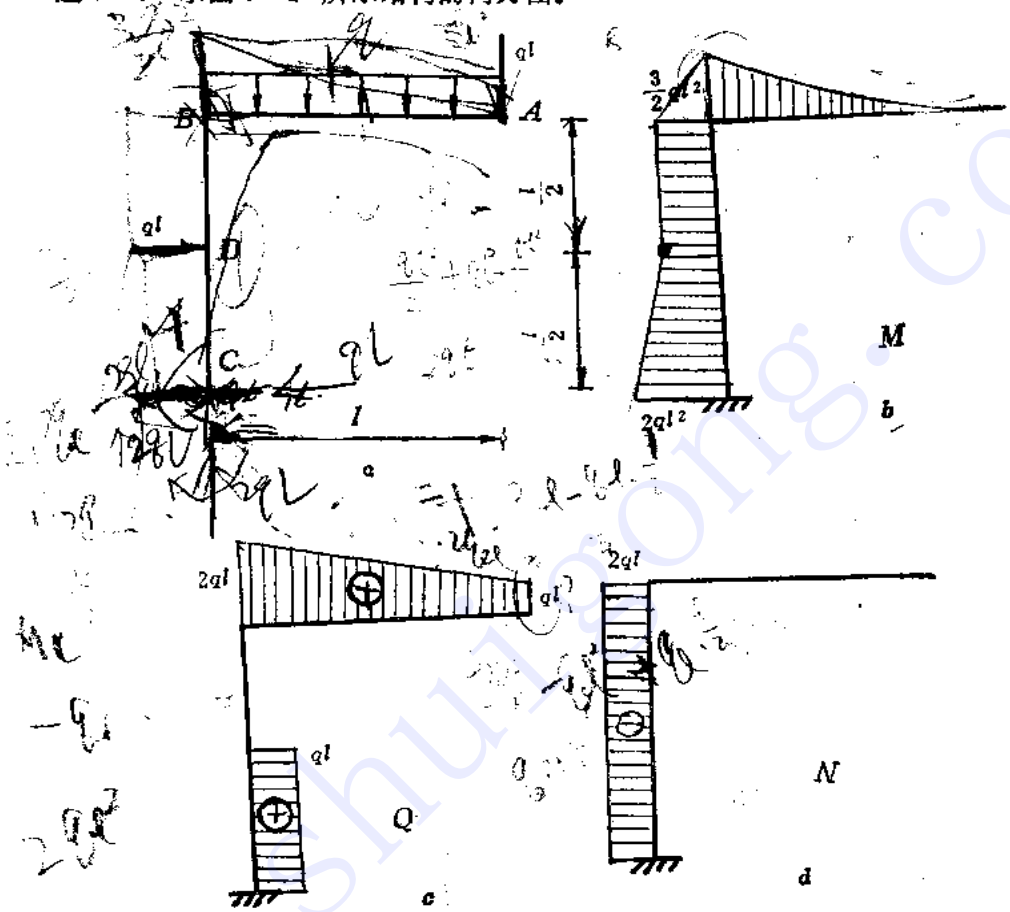



图　3—1

**解**：$M$ 图：$AB$ 杆 $M$ 图为曲线，$AB$ 杆相当于悬臂梁，其内力应等于集中力 $qe$ 和均布力 $q$ 分别引起的内力相叠加

所以　$M_{BA}=ql\cdot l+\frac{1}{2}qll=\frac{3}{2}ql^2$　　（上侧受拉）

$M_{AB}=0$

由结点 $B$ 的平衡条件

$$M_{BD}=M_{BA}$$

所以　$M_{BD}=\frac{3}{2}ql^2$　　（左侧受拉）

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$$M_{CD}=\frac{3}{2}ql^2+ql\,\frac{l}{2}=2ql^2 \qquad \text{（左侧受拉）}$$

$BC$ 杆的 $M$ 图为折线。

$M$ 图如图 3—1$b$ 所示。

剪力图：

$AB$ 杆：斜直线　$Q_{AB}=ql$　$Q_{BA}=2ql$

$BD$ 段剪力为零。

$DC$ 杆：$Q$ 图为直线　$Q_{CD}=Q_{DC}=ql$

$Q$ 图如图 3—1$c$ 所示。

轴力图：

$AB$ 段轴力为零，$BC$ 段轴力为负 $2ql$。

$N$ 图如图 3—1$d$ 所示。

**题 3—2**　求图 3—2$a$ 所示结构的 $M$、$Q$、$N$ 图。

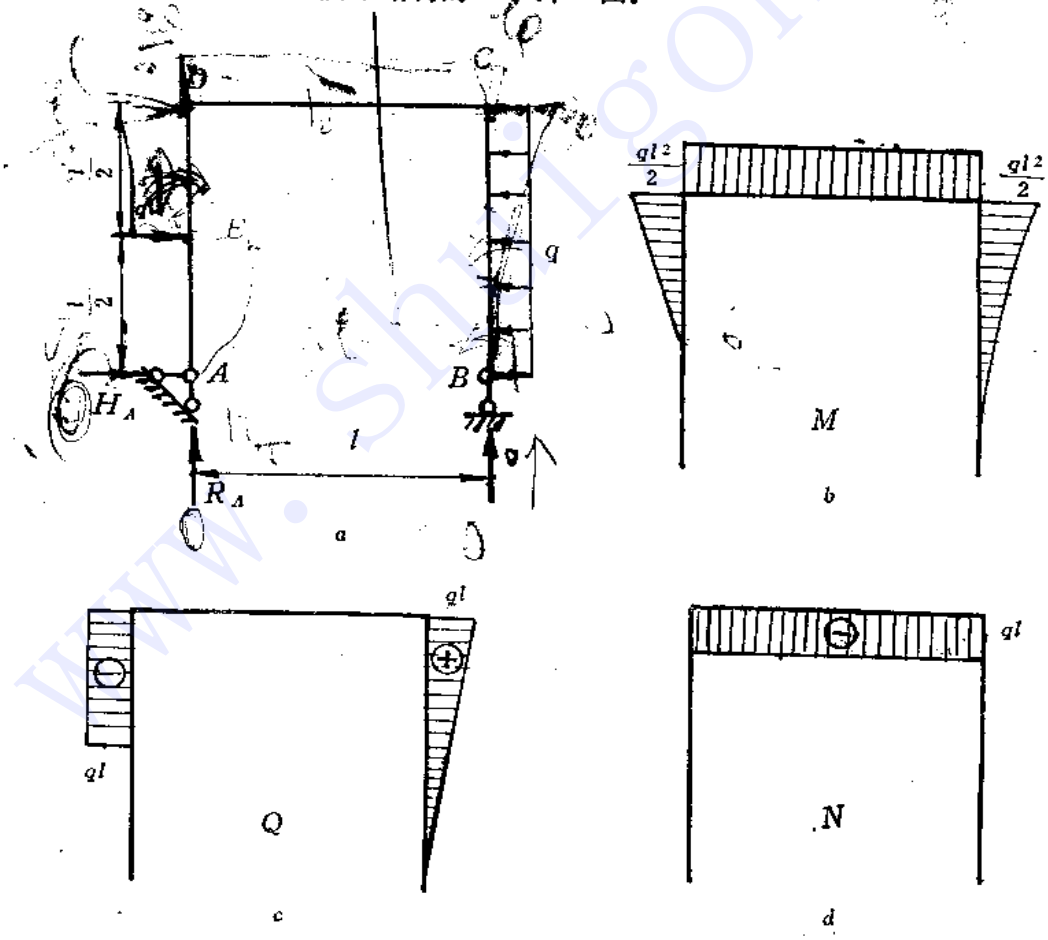



图　3—2

**解**：1）　求支座反力

$$\Sigma X=0 \qquad H_A=0$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$$\Sigma M_B = 0 \qquad R_A l + ql \cdot \frac{l}{2} - ql\frac{l}{2} = 0$$

$$R_A = 0$$

$$\Sigma Y = 0 \qquad R_B = 0$$

2) 绘内力图

弯矩图：

$BC$ 杆：受均布载荷 $q$ 作用，$M$ 图应为曲线。

$$M_{BC} = 0 \quad M_{CB} = \frac{1}{2}ql^2$$ （右侧受拉）

$AE$ 杆：$M$ 图为直线，

$$M_{AE} = 0 \quad M_{EA} = 0$$

$ED$ 杆：$M$ 图为直线，

$$M_{ED} = 0 \quad M_{DE} = \frac{1}{2}ql^2$$ （左侧受拉）

$CD$ 杆：$M$ 图为直线，由结点 $D$、$C$ 的平衡条件知：

$$M_{DC} = M_{DE} = \frac{1}{2}ql^2$$ （上侧受拉）

$$M_{CD} = M_{CB} = \frac{1}{2}ql^2$$ （上侧受拉）

$M$ 图如图 3—2$b$ 所示。

剪力图：

$BC$ 杆：$Q$ 图为斜直线，由图 3—2$a$ 知，

$$Q_{BC} = 0 \quad Q_{CB} = ql$$ （使杆顺时针转为正）

$CD$ 杆：$Q$ 图为直线，

$$Q_{CD} = Q_{DC} = 0$$

$DE$ 杆：$Q$ 图为直线，

$$Q_{EA} = Q_{AE} = -ql$$

$EA$ 杆：$Q$ 图为直线，

$$Q_{AE} = Q_{EA} = 0$$

剪力图如图 3—2$c$ 所示。

轴力图：

由图 3—2$a$ 可明显得到各杆轴力，如图 3—2$d$ 所示。

**题 3—3** 求图 3—3$a$ 所示结构的内力图。

**解**：此结构只有一个集中荷载 $P$ 作用，所以，各杆 $M$ 图都是直线，只要求出一些控制截面的 $M$ 值，然后用直线连接起来就得到 $M$ 图。

由图 3—3$a$ 的受力状态得：

$M_{CB} = Pl\frac{1}{2}$ （右侧受拉） $M_{DC} = Pl\frac{1}{2}$ （上侧受拉）

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

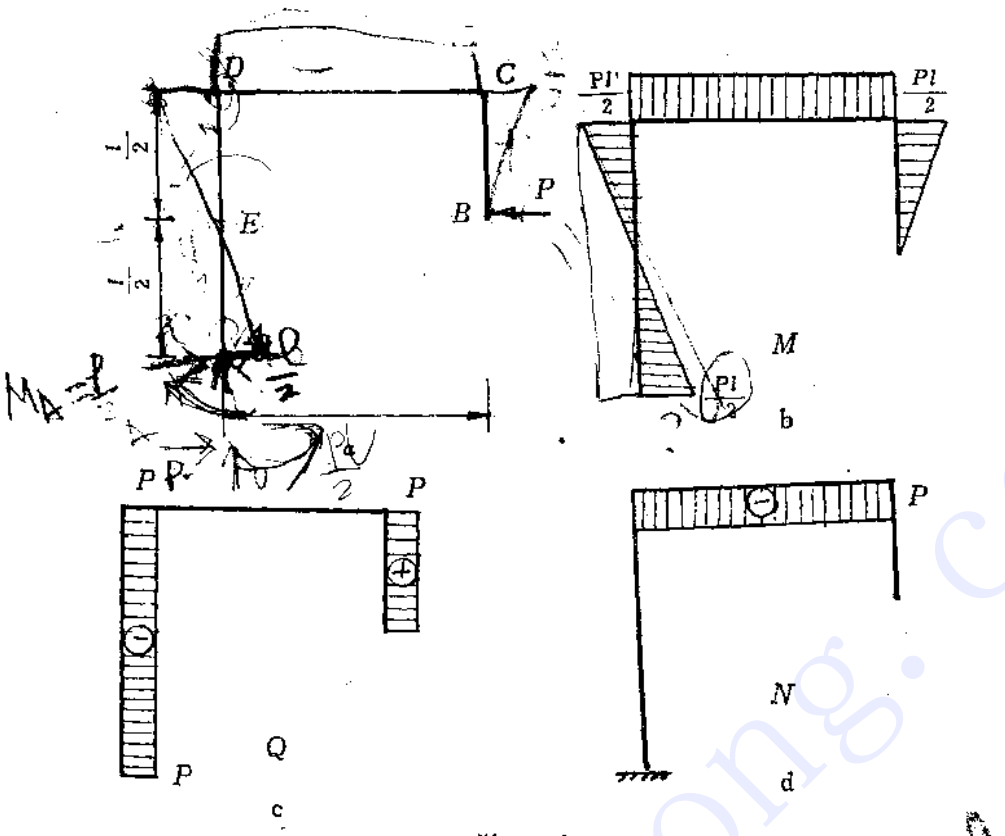



图 3—3

$M_{ED}=O \quad M_{AE}=Pl\frac{1}{2}$ （右侧受拉）

$M$ 图见图 3—3b 所示。

各杆剪力图也是直线，由图 3—3a 得：

$$Q_{BC}=P \quad Q_{CD}=Q_{DC}=0$$
$$Q_{AD}=Q_{DA}=-P$$

剪力图由图 3—3c 给出。

各杆轴力图为直线，显然，只有 $DC$ 杆受轴向压力 $P$，轴力图如图 3—3d 所示。

**题 3—4** 求图 3—4a 所示结构的 $M$、$Q$、$N$ 图。

**解：** 1） 求支座反力

$$\Sigma X=0 \qquad R_B=0$$
$$\Sigma M_A=0 \qquad R_C 2l-m_0=0$$
$$R_C=\frac{m_0}{2l}$$
$$\Sigma y=0 \qquad R_A=-\frac{m_0}{2l}$$

2） 绘内力图

$M$ 图：求出各控制截面的弯矩值，然后用直线连接起来即得到 $M$ 图。由图 3—4a 得：

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

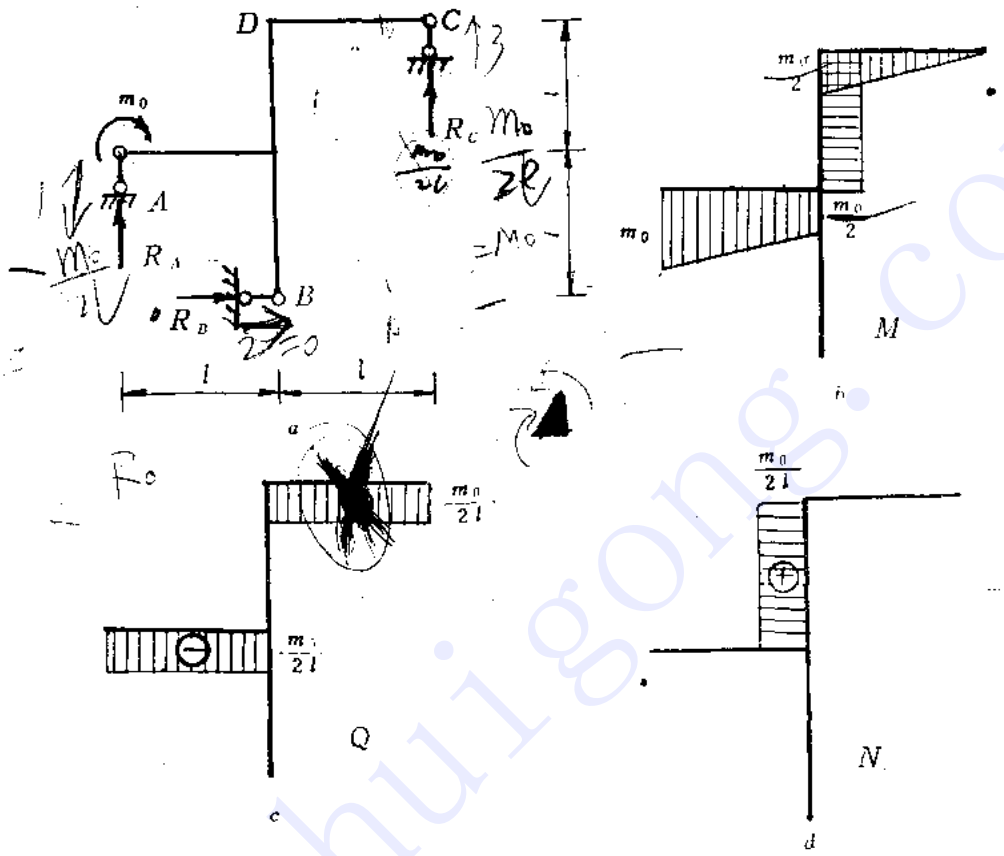



图 3—4

$$M_{DC} = R_C \cdot l = \frac{m_0}{2} \quad \text{（下侧受拉）}$$

$$M_{EA} = m_0 + R_A l = m_0 - \frac{m_0}{2l} l = \frac{m_0}{2} \quad \text{（下侧受拉）}$$

$$M_{EB} = R_B \cdot l = 0$$

由结点 $D$ 的平衡条件，

$$M_{DE} = M_{DC} = \frac{m_0}{2} \quad \text{（右侧受拉）}$$

$$M_{ED} = M_{DE} = \frac{m_0}{2} \quad \text{（右侧受拉）}$$

$M$ 图由图 3—4$b$ 给出。

$Q$ 图：由图 3—4$a$ 的受力状态可得到 $Q$ 图如图 3—4$c$ 所示。

$N$ 图：只有 $DE$ 杆受轴向拉力 $\frac{m_0}{2l}$，其余各杆轴力为零。$N$ 图如图 3—4$d$ 所示。

**题 3—5** 求图 3—5$a$ 所示结构的内力图。

**解：** 1） 求支座反力

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

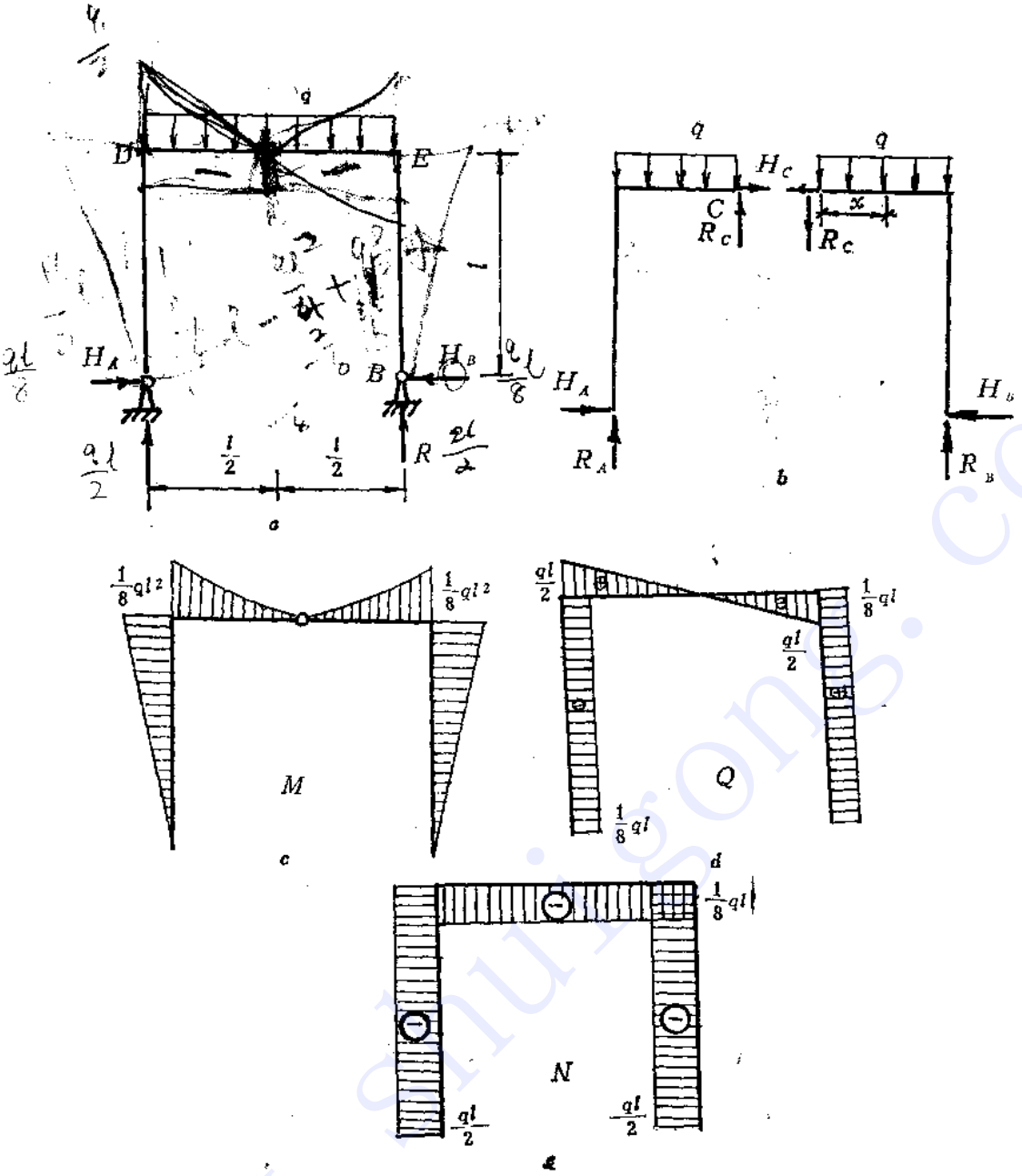



图 3—5

$$\Sigma M_A = 0 \qquad R_B \times l - ql \cdot \frac{l}{2} = 0$$

$$R_B = \frac{1}{2}ql$$

$$\Sigma M_B = 0 \qquad R_A l - ql \cdot \frac{l}{2} = 0$$

$$R_A = \frac{1}{2}ql$$

由图 3—5b 得：

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$$\Sigma M_C = 0 \qquad H_B l + \frac{1}{2} ql \cdot \frac{l}{4} - R_B \frac{l}{2} = 0$$

$$H_B = \frac{1}{4} ql - \frac{1}{8} ql = \frac{1}{8} ql$$

$$\Sigma X = 0 \qquad H_C = H_B = \frac{1}{8} ql$$

$$\Sigma y = 0 \qquad R_C = R_B - \frac{1}{2} ql = 0$$

2) 绘内力图

由于结构与荷载都是对称的，所以只需作内力图的右边一半即可得到全部内力图。

$M$ 图：由图 3—5$b$ 知，$BE$ 杆 $M$ 图为直线，$CE$ 杆 $M$ 图为曲线，即

$$M_{BE} = 0 \qquad M_{EB} = H_B \cdot l = \frac{1}{8} ql^2 \quad \text{（右侧受拉）}$$

$CE$ 杆：任意一点的弯矩为

$$M_x = qx \frac{1}{2} x = \frac{1}{2} qx^2$$

$$M_{CE} = 0 \qquad M_{EC} = \frac{1}{8} ql^2 \quad \text{（上侧受拉）}$$

由此得到 $M$ 图如图 3—5$c$ 所示。

$Q$ 图：由图 3—5$b$ 知，

$BE$ 杆：$Q_{BE} = Q_{EB} = \frac{1}{8} ql$

$CE$ 杆：$Q_{CE} = \quad Q_{EC} = -\frac{ql}{2}$

$CD$ 杆：$Q_{CD} = 0 \quad Q_{DC} = \frac{1}{2} ql$

$AD$ 杆：$Q_{AD} = Q_{DA} = -\frac{1}{8} ql$

$Q$ 图如图 3—5$d$ 所示。

$N$ 图：由图 3—5$b$ 知，

$$N_{DC} = N_{CE} = -\frac{1}{8} ql$$

$$N_{DA} = N_{EB} = -\frac{1}{2} ql$$

$N_1$图如图 3—5$e$ 所示。

**题 3—6** 求图 3—6$a$ 所示的结构内力图。

**解：** 1) 求支反力

$$\Sigma M_B = 0 \qquad R_A l + ql \frac{l}{2} + ql^2 = 0$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

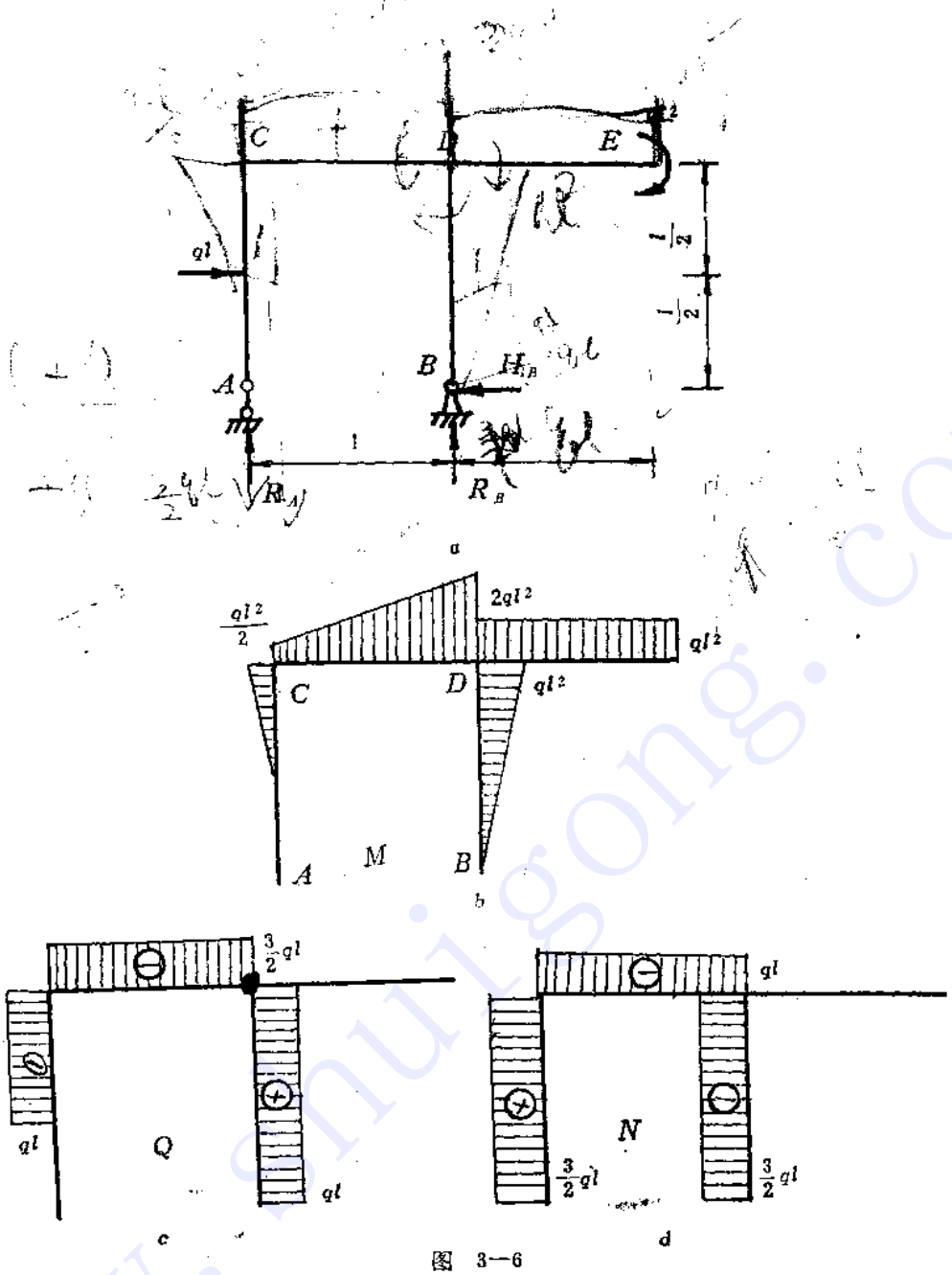



图 3—6

$$R_A = -\frac{3}{2}ql$$

$$\Sigma y = 0 \qquad R_B = -R_A = \frac{3}{2}ql$$

$$\Sigma x = 0 \qquad H_B = ql$$

2） 绘内力图

$M$ 图：由图 3—6$a$ 可知各杆 $M$ 图均为直线。

$$M_{DB} = H_B \cdot l = ql^2 \quad \text{（右侧受拉）}$$

$$M_{DE} = ql^2 \quad \text{（上侧受拉）}$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$$M_{CF}=\frac{1}{2}ql^2 \quad \text{（左侧受拉）}$$

由结点 $C$、$D$ 的平衡条件知，

$$M_{CD}=M_{CF}=\frac{1}{2}ql^2 \quad \text{（上侧受拉）}$$

$$M_{DC}=ql^2+ql^2=2ql^2 \quad \text{（上侧受拉）}$$

将以上各控制截面的 $M$ 值用直线连接起来，即得到 $M$ 图如图 3—6$b$ 所示。

$Q$ 图：由图 3—6$a$ 可知，$AF$、$DE$ 杆的剪力为零，而

$CF$ 杆　$Q_{FC}=Q_{CF}=-ql$

$CD$ 杆　$Q_{CD}=Q_{DC}=R_A=-\frac{3}{2}ql$

$BD$ 杆　$Q_{BD}=Q_{DB}=H_B=ql$

将这些值用直线连接起来即得到 $Q$ 图如图 3—6$c$ 所示。

$N$ 图：$DE$ 杆轴力为零，$CD$ 杆受轴向压力 $ql$，$AD$ 杆受轴向拉力 $\frac{3}{2}ql$，$DB$ 杆受轴向压力 $\frac{3}{2}ql$。

$N$ 图如图 3—6$d$ 所示。

**题 3—7**　求图 3—7$a$ 所示结构的内力图。

**解**：进行构造分析（如图 3—7$b$）

1）　求支反力

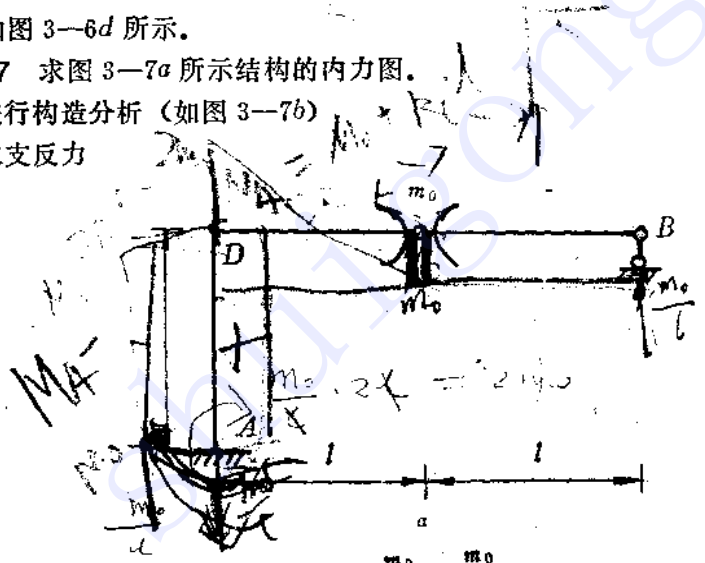



图　3—7

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

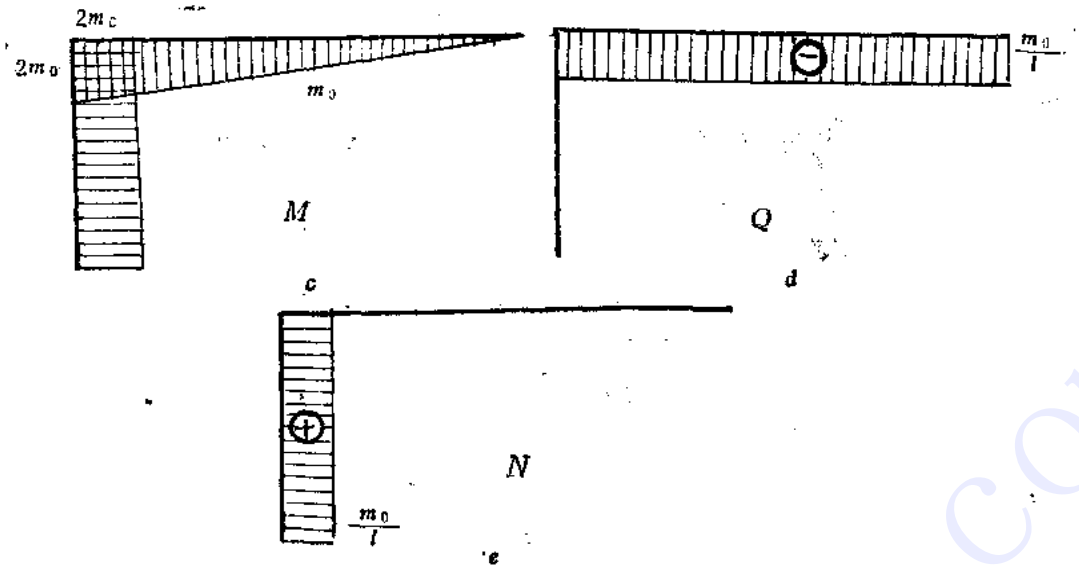



图 3—7

$$\Sigma M_C = 0 \qquad R_B l - m_0 = 0$$

$$R_B = \frac{m_0}{l}$$

$$\Sigma y = 0 \qquad R_C = R_B = \frac{m_0}{l}$$

$$R_A = -R_C = -\frac{m_0}{l}$$

$$\Sigma M_A = 0 \qquad M_{AD} = R_C l + m_0 = 2m_0$$

2) 绘内力图

$M$ 图：各杆 $M$ 图均为直线。

$BC$ 杆：$M$ 图按简支梁绘出，

$$M_{BC} = 0 \qquad M_{CB} = m_0 \quad \text{（下侧受拉）}$$

$DC$ 杆：$M_{CD} = m_0$ （下侧受拉）

$$M_{DC} = m_0 + R_C l = 2m_0 \quad \text{（下侧受拉）}$$

$AD$ 杆：$M_{DA} = M_{AD} = 2m_0$ （右侧受拉）

$M$ 图如图 3—7$c$ 所示。

$Q$ 图：$AD$ 杆剪力为零，$BD$ 杆受负剪力 $\frac{m_0}{l}$，$Q$ 图如图 3—7$d$ 所示

$N$ 图：$BD$ 段轴力为零，$AD$ 段受轴向拉力 $\frac{m_0}{l}$，$N$ 图如图 3—7$e$ 所示。

**题 3—8** 求图 3—8$a$ 所示结构的内力图。

**解**：1)求支反力

$$\Sigma y = 0 \qquad R_B = ql + ql$$

$$= 2ql$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

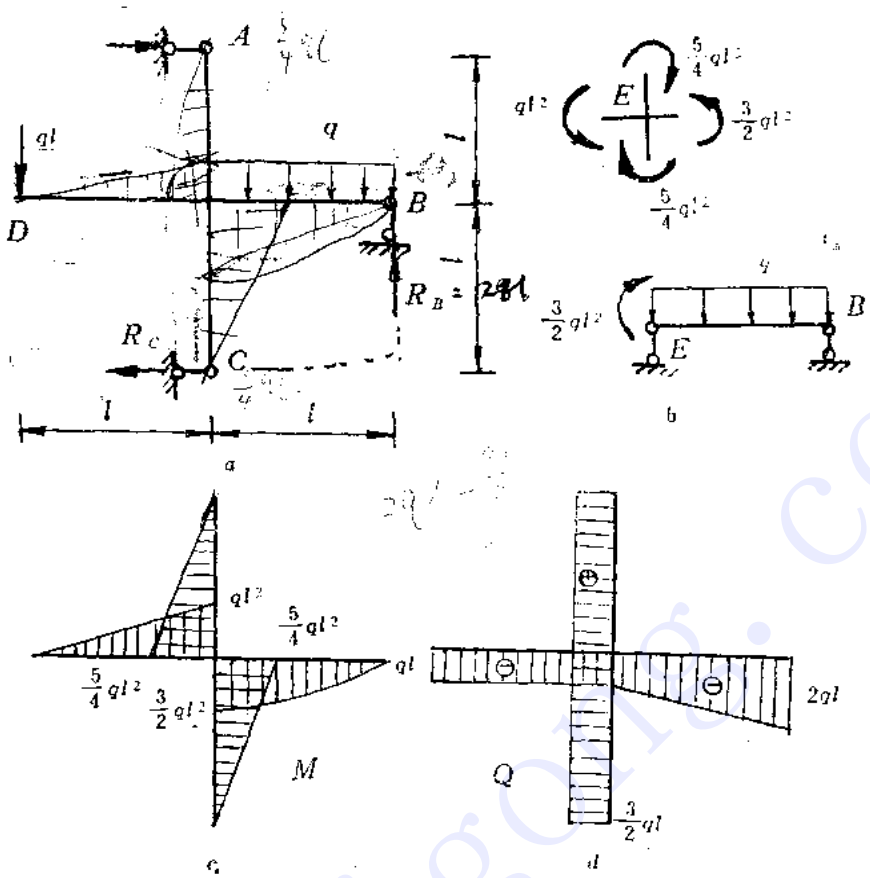



图 3—8

$$\Sigma M_C = 0 \qquad R_A \cdot 2l + ql \cdot \frac{l}{2} - 2ql \cdot l - ql \cdot l = 0$$

$$R_A = \frac{5}{4}ql$$

$$\Sigma X = 0 \qquad R_C = R_A = \frac{5}{4}ql$$

2） 绘内力图

$M$ 图：$AE$、$DE$、$CE$ 杆的 $M$ 图为直线。

$AE$ 杆：$M_{AE} = 0$　　$M_{EA} = \frac{5}{4}ql^2$　（左侧受拉）

$DE$ 杆：$M_{DE} = 0$　　$M_{ED} = ql^2$　（上侧受拉）

$CE$ 杆：$M_{CE} = 0$　　$M_{EC} = \frac{5}{4}ql^2$　（右侧受拉）

由结点 $E$ 的平衡条件（如图 3—8$b$）知，

$$M_{EB} = \frac{5}{4}ql^2 + \frac{5}{4}ql^2 - ql^2 = \frac{3}{2}ql^2 \quad （下侧受拉）$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$EB$ 杆相当于简支梁受均布荷载 $q$ 作用，同时在端点 $E$ 作用一集中力偶 $\frac{3}{2}ql^2$，所以此杆的弯矩值应为这两种荷载分别引起的弯矩相叠加，且图形为曲线．$M$ 图如图 3—8$c$ 所示。

$Q$ 图：$DE$ 杆剪力的负 $ql$，$AC$ 杆剪力为正 $\frac{5}{4}ql$．

$EB$ 杆：$Q_{BE}=-2ql$　　$Q_{EB}=-2ql+ql=-ql$

$Q$ 图如图 3—8$d$ 所示。

$N$ 图：由图 3—8$a$ 可以得到各杆的轴力均为零

**题 3—9**　求图 3—9$a$ 所示结构的内力图。

**解**：1）　求支反力

$$\Sigma X=0 \qquad R_B=0$$

$$\Sigma y=0 \qquad R_A=ql$$

$$\Sigma M_A=0 \qquad M_{AC}+ql\cdot\frac{1}{2}l=0$$

$$M_{AC}=-\frac{1}{2}ql^2$$

2）　绘内力图

$BC$ 杆：$M$ 图为曲线，相当于悬臂梁作用均布荷载 $q$，其任意截面的弯矩：

$$M_x=\frac{1}{2}qx^2$$

$$M_{BC}=0 \qquad M_{CB}=\frac{1}{2}ql^2 \quad (\text{上侧受拉})$$

$AC$ 杆：$M$ 图为直线，由结点 $C$ 的平衡条件知，

$$M_{CA}=M_{CB}=\frac{1}{2}ql^2 \quad (\text{左侧受拉})$$

$M$ 图如图 3—9$b$ 所示。

$Q$ 图：$AC$ 杆的 $Q$ 图为零，$BC$ 杆的 $Q$ 图为斜直线。

$$Q_{BC}=0 \qquad Q_{CB}=ql$$

$Q$ 图如图 3—9$c$ 所示。

$N$ 图：$BC$ 杆的轴力为零，$AC$ 杆受轴向压力 $ql$．$N$ 图如图 3—9$d$ 所示。

**题 3—10**　求图 3—10$a$ 所示结构的内力图。

**解**：构造分析如图 3—10$b$ 所示．$ECA$ 为基本部分，$CFB$ 为附属部分，先计算附属部分，后计算基本部分。

1）　求支反力

$$\Sigma M_C=0 \qquad R_Bl-Pl=0$$

$$R_B=P$$

$$\Sigma X=0 \qquad X_C=R_B=P$$

$$\Sigma y=0 \qquad R_C=P$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

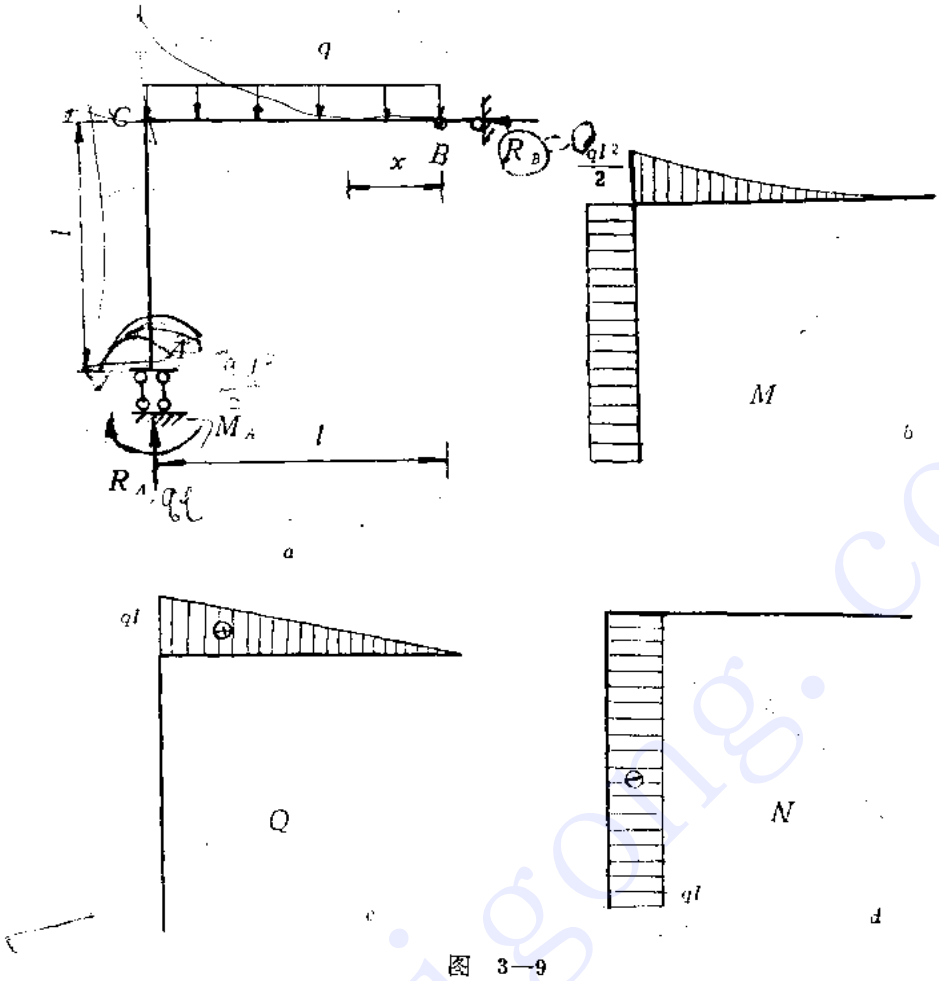



图 3—9

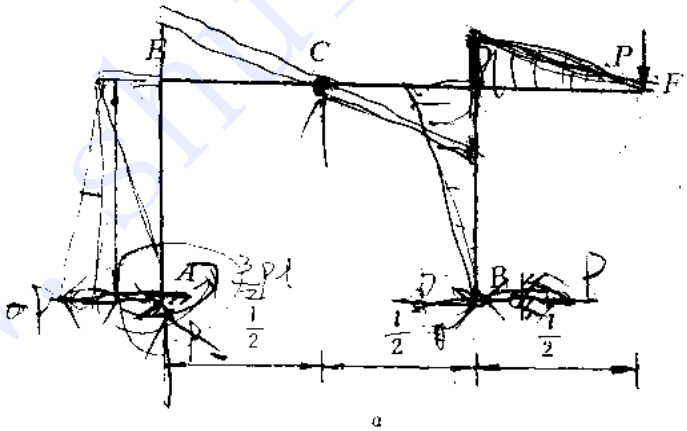



图 3—10

将附属部分 $C$ 点的约束反力反其指向作用于基本部分上（如图 3—10*b* 所示）。

2） 绘内力图

$M$ 图：各杆 $M$ 图均为直线。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

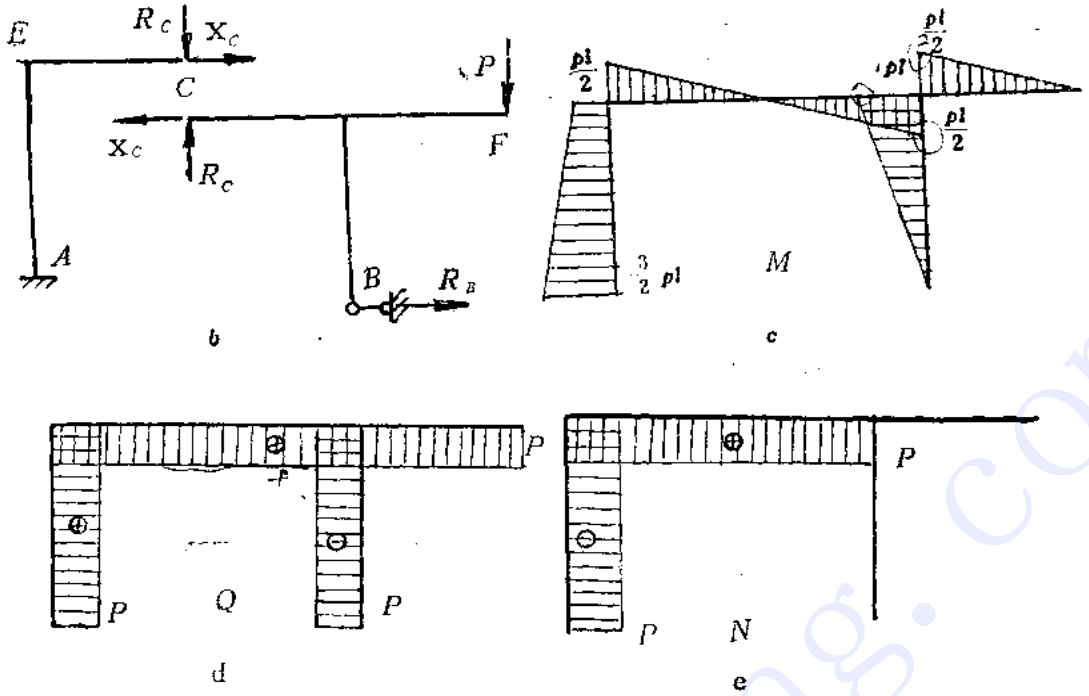



图 3—10

$DF$ 杆：$M_{FD}=0$　　$M_{DF}=\frac{1}{2}Pl$　（上侧受拉）

$BD$ 杆：$M_{BD}=0$　　$M_{DB}=Pl$　（左侧受拉）

$CD$ 杆：$M_{CD}=0$　　$M_{DC}=\frac{1}{2}Pl$　（下侧受拉）

$CE$ 杆：$M_{CE}=0$　　$M_{EC}=\frac{1}{2}Pl$　（上侧受拉）

$AE$ 杆：$M_{EA}=M_{EC}=\frac{1}{2}Pl$　（左侧受拉）

$$M_{AE}=R_C\cdot\frac{1}{2}l+X_C l=\frac{3}{2}ql^2$$　（左侧受拉）

$M$ 图如图 3—10$c$ 所示。

$Q$ 图：各杆 $Q$ 图均为直线，由图 3—10$b$ 的受力状态可知：

$DF$ 杆：$Q_{DF}=Q_{ED}=P$

$BD$ 杆：$Q_{DB}=Q_{BD}=-P$

$ED$ 段：$Q_{ED}=Q_{DE}=P$

$AE$ 段：$Q_{AE}=Q_{EA}=P$

$Q$ 图如图 3—10$d$ 所示。

$N$ 图：$BD$、$DF$ 杆的轴力为零。

$AE$ 杆的轴力为负 $P$。

$ED$ 段的轴力为正 $P$。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$N$ 图如图 3—10$e$ 所示。

**题 3—11** 求图 3—11$a$ 所示结构的内力图。

**解：** 1) 求支反力

$$\Sigma y = 0 \qquad R_A = ql$$

$$\Sigma M_B = 0 \qquad R_C 2l - ql^2 - R_A l + ql \cdot \frac{l}{2} = 0$$

$$R_C = \frac{3}{4} ql^2$$

$$\Sigma X = 0 \qquad R_B = R_C = \frac{3}{4} ql$$

2) 绘内力图

$M$ 图：$CD$、$BD$ 杆的 $M$ 图为直线。

$CD$ 杆：$M_{CD} = 0$ $\quad M_{DC} = \frac{3}{4} ql^2$

$BD$ 杆：$M_{BD} = 0$ $\quad M_{DB} = \frac{3}{4} ql^2$

$AD$ 杆 $M$ 图为曲线，由结点 $D$ 的平衡条件（如图 3—11$b$）知：

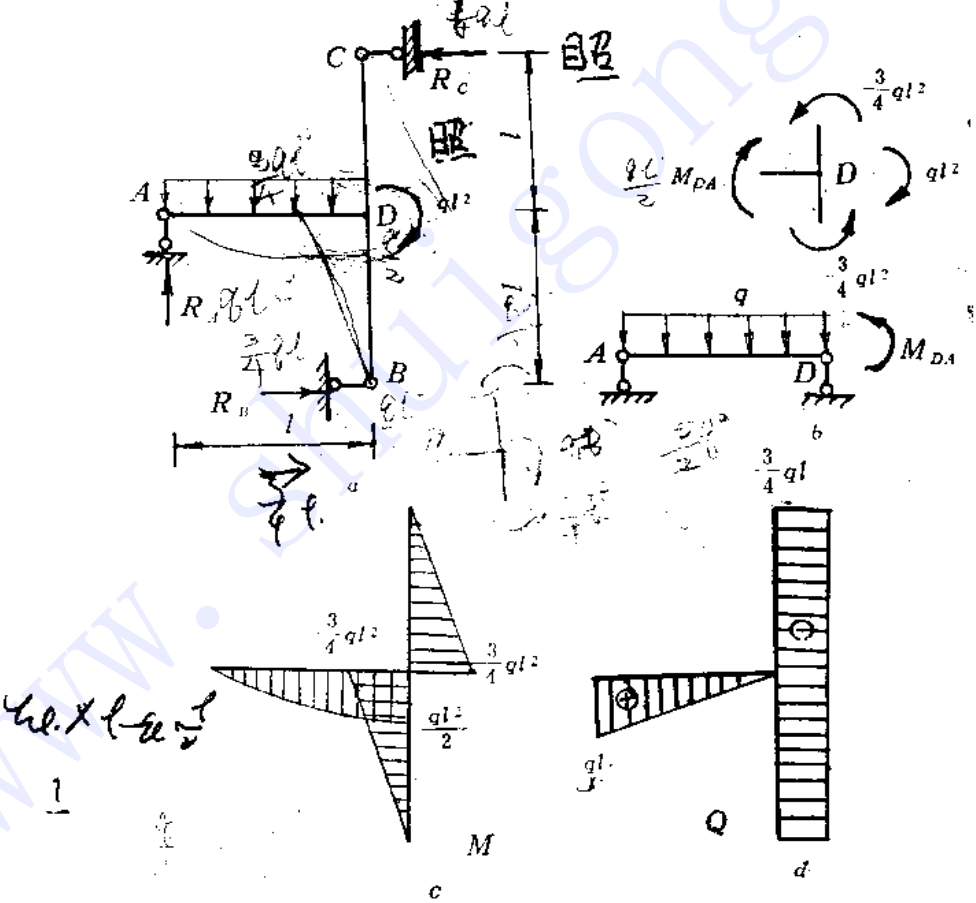



图 3—11

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$$M_{DA}=\frac{3}{4}ql^2+\frac{3}{4}ql^2-ql^2=\frac{1}{2}ql^2$$

$AD$ 杆的 $M$ 图可按图 3—11$b$ 所示的简支梁情况求出。

$M$ 图如图 3—11$c$ 所示，$Q$ 图示于 3—11$d$。

**题 3—12** 求图 3—12$a$ 所示结构的内力图。

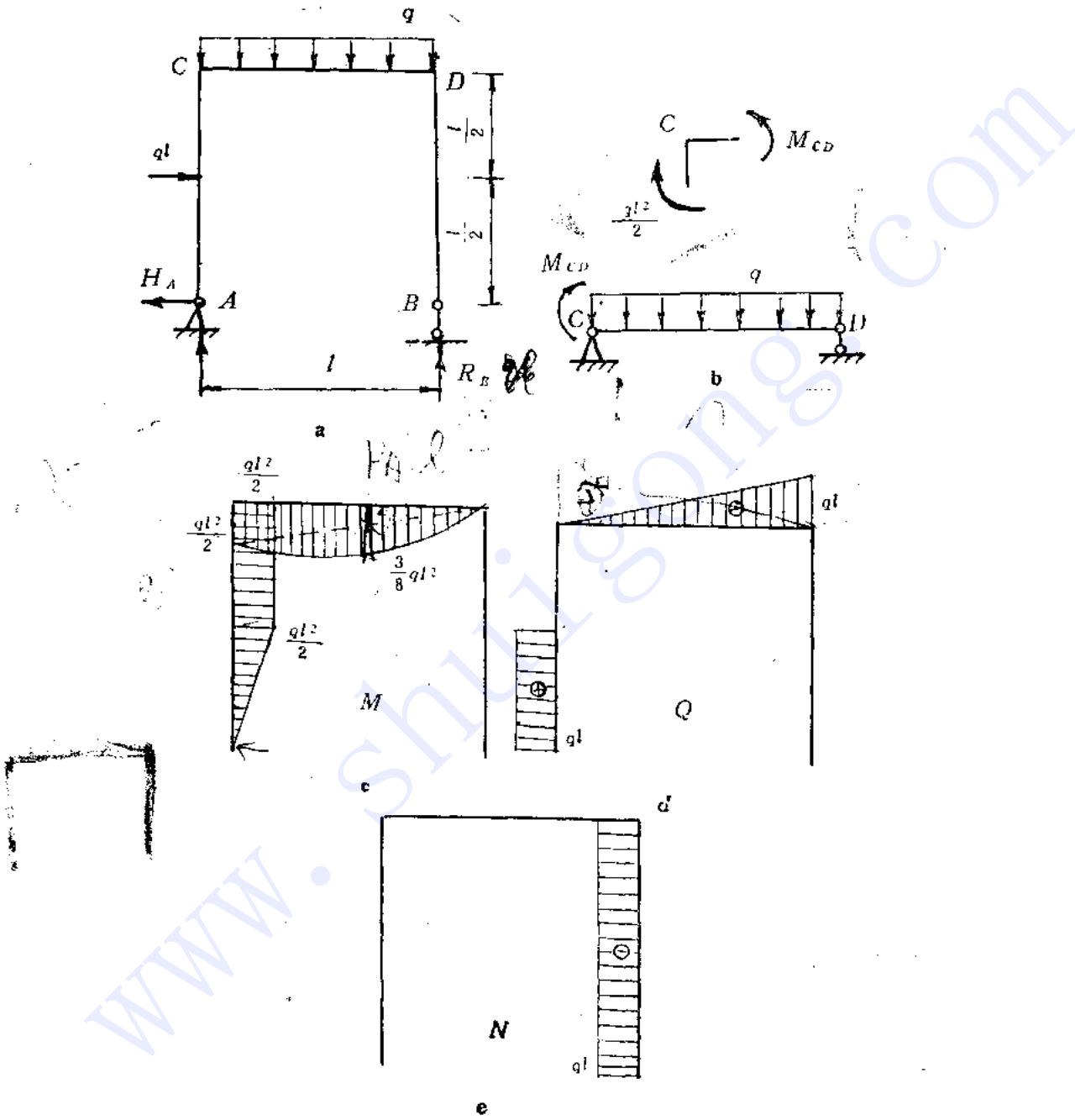



图 3—12

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

**解：** 1） 求支反力

$$\Sigma X=0 \qquad H_A=ql$$

$$\Sigma M_A=0 \qquad R_B l-ql\cdot\frac{l}{2}-\frac{1}{2}ql^2=0$$

$$R_B=ql$$

$$\Sigma y=0 \qquad R_A+R_B-ql=0$$

$$R_A=0$$

2） 绘内力图

$M$ 图：$AC$、$BD$ 杆 $M$ 图为直线。

$AC$ 杆：$M_{AE}=0$　　$M_{EA}=M_{CE}=\frac{1}{2}ql^2$　　（右侧受拉）

$BD$ 杆：$M_{BD}=0$　　$M_{DB}=0$

$CD$ 杆：$M$ 图为曲线，由图 3—12$b$ 的脱离体得

$$M_{CD}=\frac{1}{2}ql^2 \qquad \text{（下侧受拉）}$$

$CD$ 杆的 $M$ 图按简支梁计算，$M$ 图如图 3—12$C$ 所示。

$Q$ 图：$CE$ 段、$BD$ 段剪力图为零。

$AE$ 杆：$Q_{AE}=Q_{EA}=ql$

$CD$ 杆：剪力图为斜直线，

$$Q_{DC}=-ql \qquad Q_{CD}=0$$

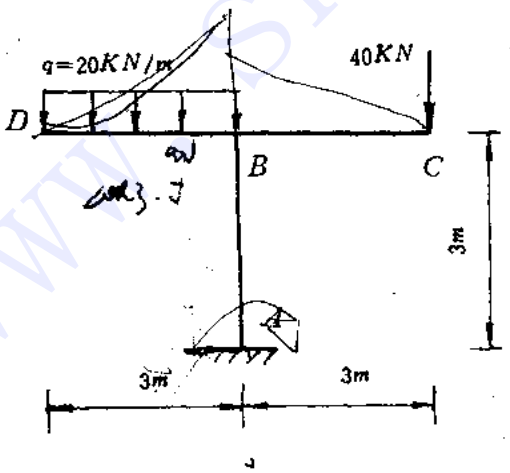
$Q$ 图如图 3—12$d$ 所示。

$N$ 图：$AC$、$CD$ 杆轴力为零，$DB$ 杆有轴向压力 $ql$。如图 3—12$e$ 所示。

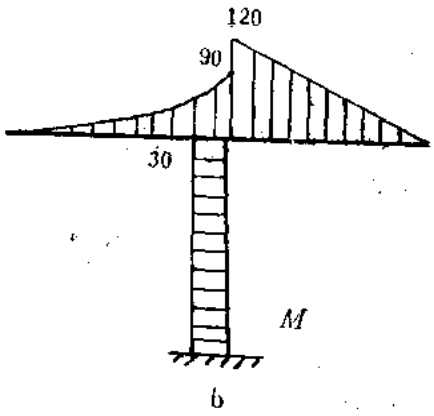
**题 3—13** 求图 3—13$a$ 所示结构的内力图。

**解：** $BD$、$BC$ 都可看作悬臂梁。

$M$ 图：

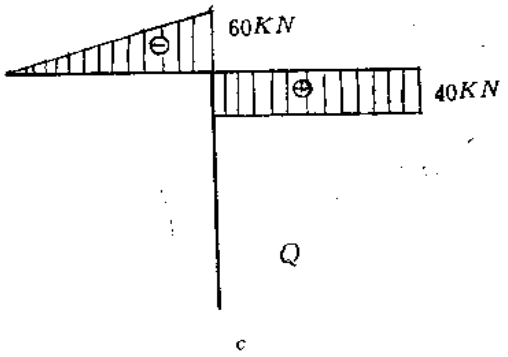



a




b

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！



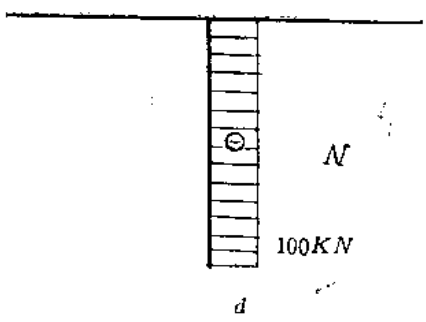




图 3—13

$BC$ 杆：$M$ 图为直线，

$M_{CB}=0$　　$M_{BC}=120KN-m$　（上侧受拉）

$BD$ 杆：$M$ 图为曲线，

$M_{DB}=0$　　$M_{BD}=\frac{1}{2}ql^2=90K-m$　（上侧受拉）

$AB$ 杆：$M$ 图为曲线，由结点 $B$ 的平衡条件：

$M_{BA}=120-90=30KN-m$　（左侧受拉）

$M_{AB}=M_{BA}=30KN-m$　（左侧受拉）

$M$ 图如图 3—13$b$ 所示。

$Q$ 图：$AB$ 杆剪力为零，$BC$ 杆剪力为常数，$40KN$，$BD$ 杆剪力图斜直线（$Q_{DB}=0$，$Q_{BD}=-60_{KN}$）。$Q$ 图如图 3—13$c$ 所示。

$N$ 图：$BD$、$BC$ 杆轴力为零，$AB$ 杆受轴向压力 $100KN$。$N$ 图如图 3—13$d$ 所示。

**题 3—14**　求图 3—14$a$ 所示结构的内力图。

**解**：构造分析如图 3—14$b$ 所示，附属部分 $AB$ 为简支梁，基本部分为 $EDCB$。

1）求反力，

$$R_A=R_B=\frac{1}{2}ql$$

将 $R_B$ 反其指向作用在基本部分 $EDCB$ 上。

2）绘内力图

$M$ 图：$AB$ 的 $M$ 图按简支梁绘制，$BC$ 杆的 $M$ 图为零。

$DC$、$DE$ 杆 $M$ 图为直线。

$DC$ 杆：$M_{CD}=0$　　$M_{DC}=\frac{1}{2}ql^2$　（上侧受拉）

$DE$ 杆：$M_{DE}=\frac{1}{2}ql^2$　（右侧受拉）

$M_{ED}=\frac{1}{2}ql^2+ql^2=\frac{3}{2}ql^2$　（右侧受拉）

$M$ 图如图 3—14$c$ 所示。

$Q$ 图：$AB$ 杆的 $Q$ 图仍按简支梁绘出，$BC$ 杆剪力为零。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$DC$ 杆，$Q$ 图为直线，

$$Q_{CD}=Q_{DC}=\frac{1}{2}ql$$

$DE$ 杆：$Q$ 图为直线

$$Q_{DE}=Q_{ED}=ql$$

$Q$ 图如图 3—14$d$ 所示。

$N$ 图：$AB$ 杆的轴力为零，$BC$ 杆的轴力为 $\frac{1}{2}ql$(压力)，$DC$ 杆的轴力为 $ql$(压力)，$ED$ 杆轴力为 $\frac{1}{2}ql$ 拉力。$N$ 图如图 3—14$e$ 所示。

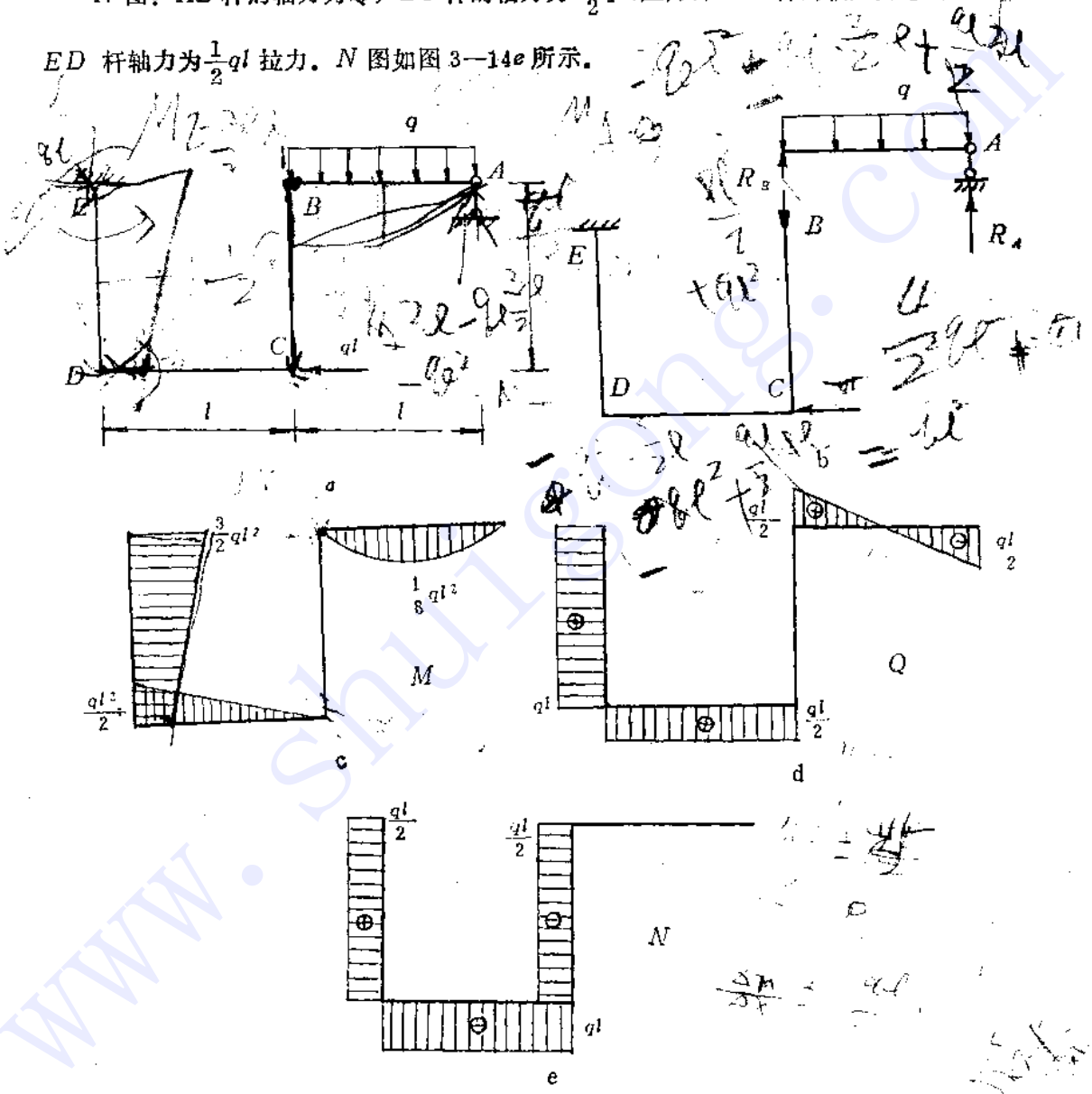



图 3—14

**题 3—15** 求图 3—15$a$ 所示结构的内力图。

**解：** 1) 求支反力

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

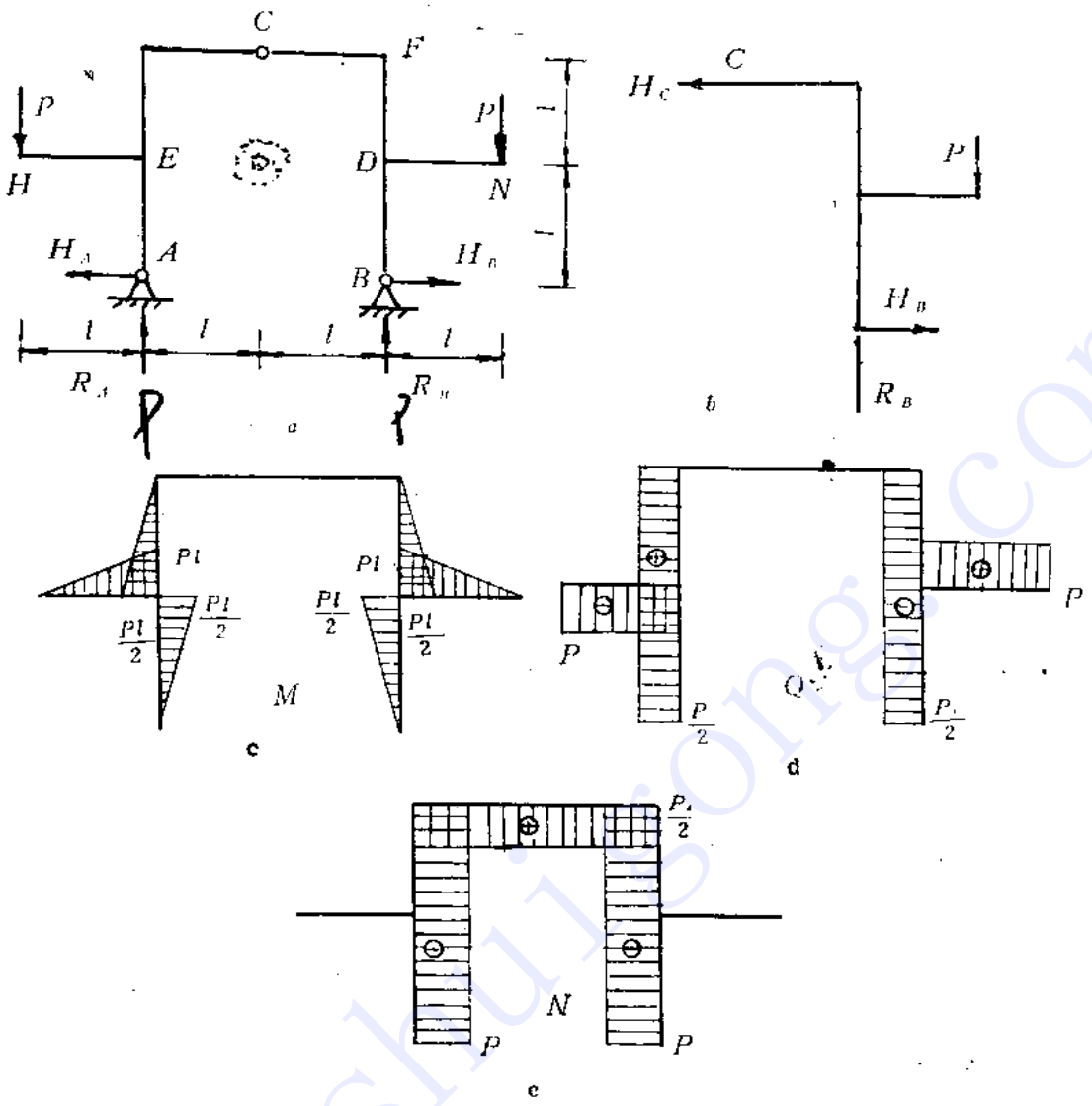



图 3—15

由对称性得：

$$R_A = R_B = P$$

由图 3—15*b* 得：

$$\Sigma M_C = 0 \qquad H_B 2l + R_B l - 2Pl = 0$$

$$H_B = \frac{P}{2}$$

$$\therefore \quad H_A = \frac{P}{2}$$

2） 绘内力图

*M* 图：各杆 *M* 图均为直线，由于结构与荷载都是对称，故只需作出右部分的 *M* 图即可。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$DN$ 杆：$M_{ND}=0$　　$M_{DN}=Pl$　（上侧受拉）

$BD$ 杆：$M_{BD}=0$　　$M_{DB}=\frac{1}{2}Pl$　（左侧受拉）

$FD$ 杆：$M_{FD}=0$　　$M_{DF}=\frac{1}{2}Pl$　（右侧受拉）

$CF$ 杆：$M$ 图为零

$M$ 图如图 3—15$c$ 所示。

$Q$ 图：$GC$、$CF$ 杆剪力为零，其余各杆剪力均为直线。

$ND$ 杆：$Q_{DN}=Q_{ND}=P$

$BD$ 杆：$Q_{BD}=Q_{DB}=-\frac{P}{2}$

$FD$ 杆：$Q_{DF}=Q_{FD}=-\frac{P}{2}$

左部分剪力与右部分反对称。$Q$ 图如图 3—15$d$ 所示。

$N$ 图：$DN$ 杆轴力为零，$BF$ 段受轴向压力$\frac{P}{2}$，左部轴力与右部轴力正对称。$N$ 图如图 3—15$e$ 所示。

**题 3—16**　求图 3—16$a$ 所示结构的内力图。

**解**：1）　求支反力

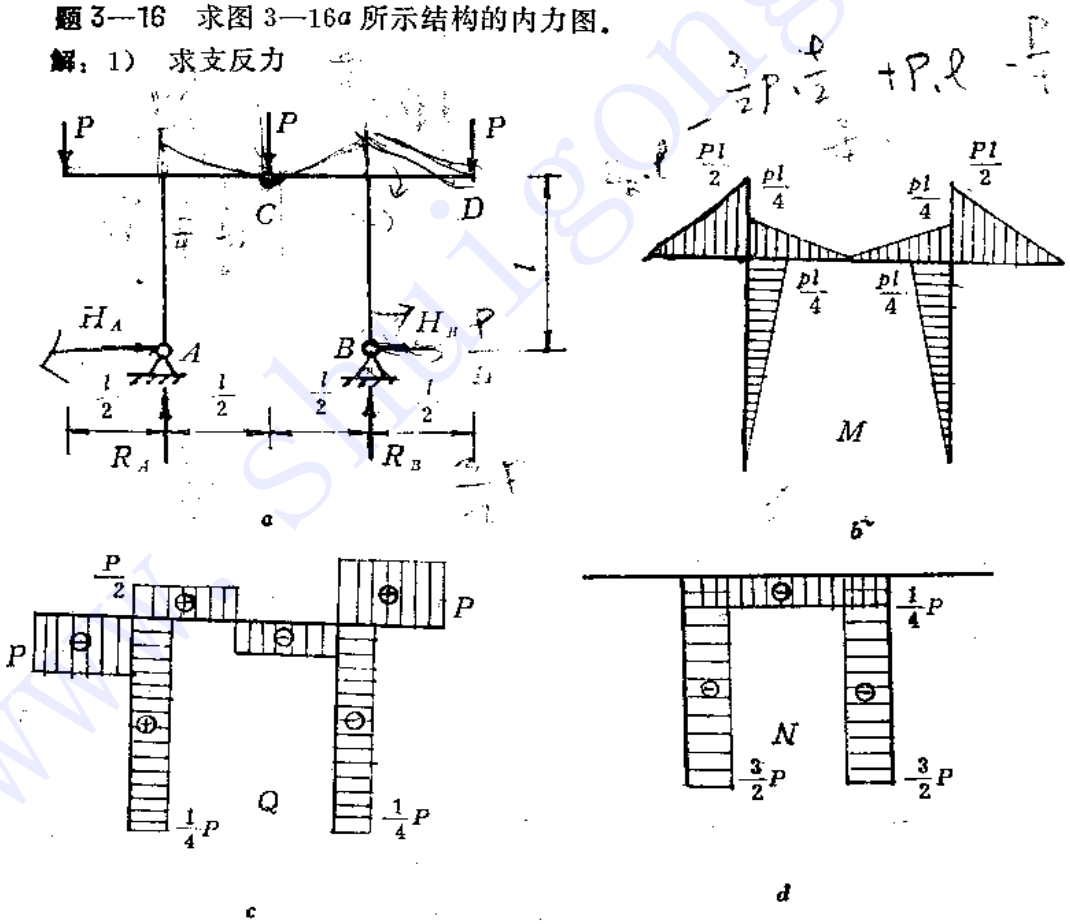



图　3—16

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

由对称性得：

$$R_A = R_B = \frac{3}{2}P$$

$$\Sigma M_C = 0 \qquad -H_B l + R_B \cdot \frac{l}{2} - Pl = 0$$

$$H_B = -\frac{1}{4}P$$

$$\Sigma X = 0 \qquad H_A = -\frac{1}{4}P$$

2) 绘内力图

$M$ 图：各杆 $M$ 图均为直线，研究右部（左部与右部对称）。

$BE$ 杆：$M_{BE} = 0$　　$M_{EB} = \frac{1}{4}Pl$　　（左侧受拉）

$DE$ 杆：$M_{DE} = 0$　　$M_{ED} = \frac{1}{2}Pl$　　（上侧受拉）

$CE$ 杆：$M_{CE} = 0$　　$M_{EC} = \frac{1}{4}Pl$　　（上侧受拉）

$M$ 图如图 3—16$b$ 所示。

$Q$ 图：左部与右部反对称，

$BE$ 杆：$Q_{BE} = Q_{EB} = -\frac{1}{4}P$

$DE$ 杆：$Q_{DE} = Q_{ED} = P$

$CE$ 杆：$Q_{CE} = Q_{EC} = -\frac{1}{2}P$

$Q$ 图如图 3—16$c$ 所示。

$N$ 图：左部与右部正对称，

$BE$ 杆：$N_{BE} = N_{EB} = -\frac{3}{2}P$

$DE$ 杆：轴力为零

$CE$ 杆：$N_{CE} = N_{EC} = \frac{1}{4}P$

$N$ 图如图 3—16$d$ 所示。

**题 3—17** 求如图 3—17$a$ 所示结构的 $M$、$Q$、$N$ 图。

**解：** 1) 求支反力

$$\Sigma X = 0 \qquad R_B = \frac{3}{14}P$$

$$\Sigma y = 0 \qquad R_A = \frac{1}{4}P$$

$$\Sigma M_B = 0 \qquad M_{BC} - R_A l + \frac{3}{14}P \cdot \frac{l}{2} = 0$$

$$M_{BC} = \frac{1}{7}Pl$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

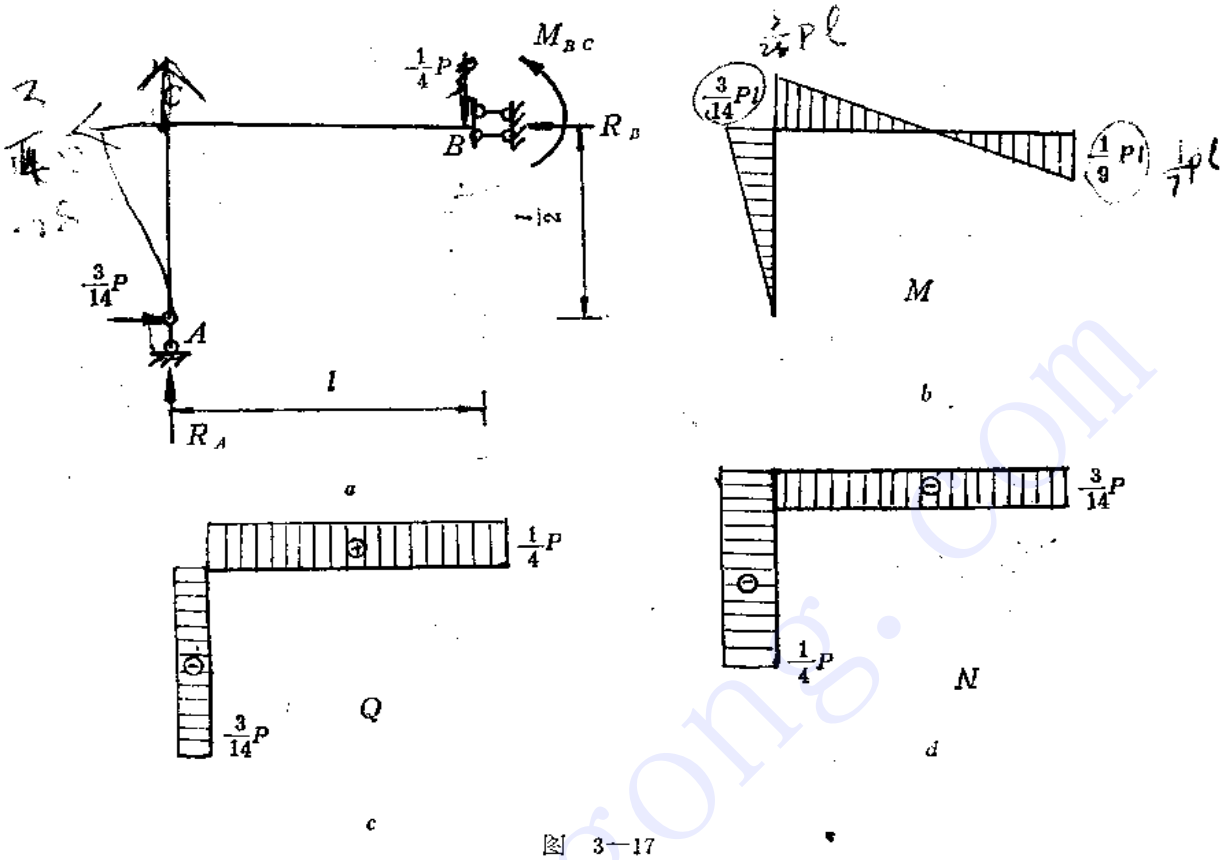



图 3—17

2) 绘内力图

$M$ 图：各杆 $M$ 图均为直线，

$AC$ 杆：$M_{AC}=0$　　$M_{CA}=\frac{3}{28}Pl$　　(左侧受拉)

$BC$ 杆：$M_{BC}=\frac{1}{7}Pl$　　(下侧受拉)

$M_{CB}=\frac{3}{28}Pl$　　(上侧受拉)

连接各控制截面的 $M$ 值即得到 $M$ 图如图 3—17$b$ 所示。

$Q$ 图：

$AC$ 杆：$Q_{AC}=Q_{CA}=-\frac{3}{14}P$

$BC$ 杆：$Q_{CB}=Q_{BC}=\frac{1}{4}P$

$Q$ 图如图 3—17$c$ 所示。

$N$ 图：$AC$ 杆受轴向压力 $\frac{1}{4}P$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$BC$ 杆受轴向压力 $\frac{3}{14}P$

$N$ 图如图 3—17$d$ 所示。

**题 3—18** 求图 3—18$a$ 所示结构的内力图。

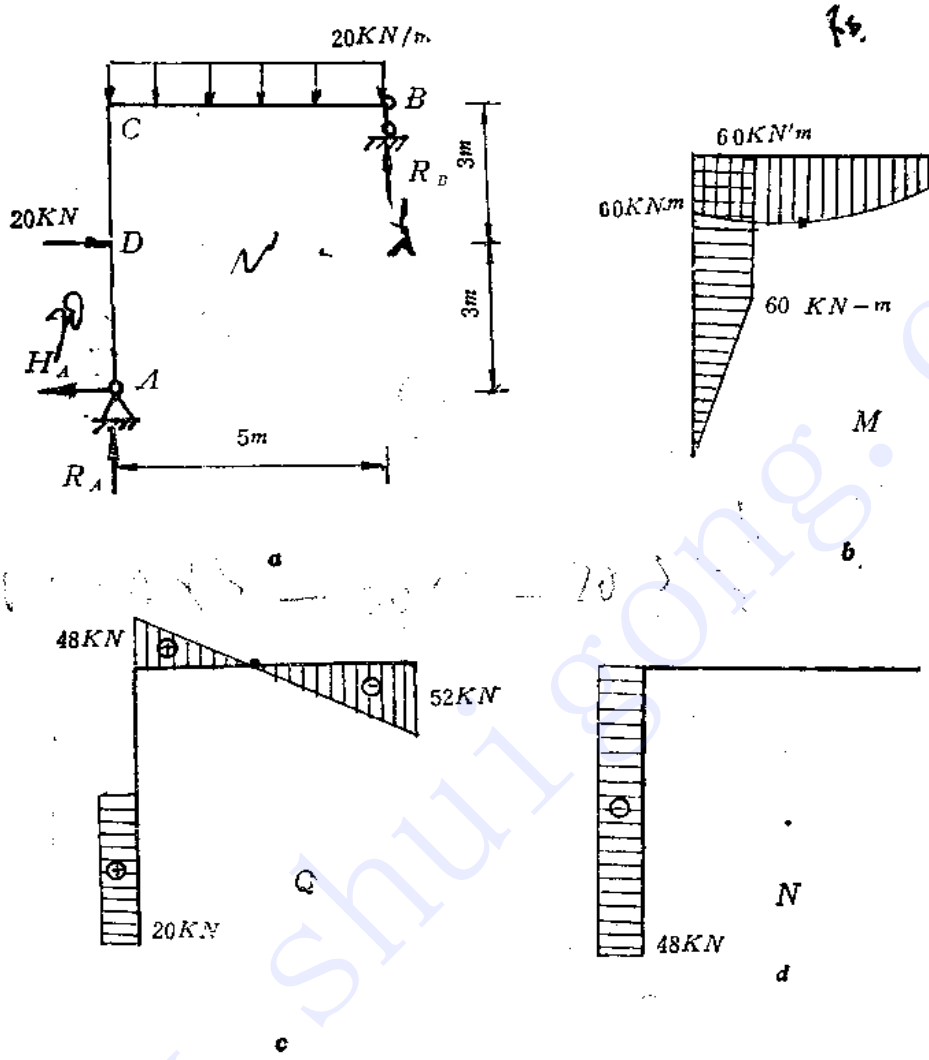



图 3—18

**解：** 1) 求支反力

$$\Sigma X = 0 \qquad H_A = 20KN$$

$$\Sigma M_A = 0 \qquad R_B \cdot 5 - \frac{1}{2} \times 20 \times 5^2 - 20 \times 3 = 0$$

$$R_B = \frac{265}{5} = 52KN$$

$$\Sigma y = 0 \qquad R_A + R_B - 20 \times 5 = 0$$

$$R_A = 100 - 52 = 48KN$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

2） 绘内力图

$M$ 图：$AD$、$DC$ 段 $M$ 图为直线

$$M_{AD}=0 \qquad M_{DA}=H_A\times 3=60KN/m \quad \text{（右侧受拉）}$$

$$M_{CD}=M_{DC}=60KN/m \quad \text{（右侧受拉）}$$

$BC$ 杆的 $M$ 图为曲线，由结点 $C$ 的平衡条件：

$$M_{CB}=M_{CD}=60KN/m \quad \text{（下侧受拉）}$$

$M$ 图如图 3—18$b$ 所示。

$Q$ 图：$AD$ 段剪力为常数 $20KN$，$CD$ 段剪力为零，$BC$ 杆的 $Q$ 图为斜直线，$Q_{BC}=-52KN$，$Q_{CB}=48KN$（如图 3—18$c$ 所示）。

$N$ 图：$BC$ 杆轴力为零，$AC$ 杆轴向压力为 $48KN$ 如图 3—18$d$ 所示。

**题 3—19** 求图 3—19$a$ 所示结构的内力图。

**解**：构造分析如图 3—19$b$ 所示，基本部分为 $ABC$，附属部分为 $CDE$。

1） 求支反力

$$\Sigma M_C=0 \qquad R_D\cdot 4-4\times 8=0$$

$$R_D=8T$$

$$\Sigma y=0 \qquad R_C=4T$$

$$\Sigma X=0 \qquad X_C=0$$

$$\Sigma M_B=0 \qquad R_A=4T$$

$$R_B=-8T$$

2） 绘内力图

$M$ 图：各杆 $M$ 图均为直线，求出各控制截面的弯矩值，然后连以直线即得到 $M$ 图。注意全铰处的 $M$ 值为零。$M$ 图如图 3—19$c$ 所示。

$Q$ 图：由图 3—19$b$ 的受力分析可容易得到各杆的剪力。$Q$ 图如图 3—19$d$ 所示

$N$ 图：$AB$、$DE$、$FC$、$GC$ 杆的轴力为零，$BF$、$DG$ 杆受轴向压力 $4t$。$N$ 图如图3—19$e$ 所示。

**题 3—20** 求图 3—20$a$ 所示结构的内力图。

**解**：1） 求支反力

由对称性知

$$R_A=R_B=\frac{1}{2}q\cdot 8=\frac{1}{2}\times 20\times 8=80KN$$

$$\Sigma X=0 \qquad H_A-H_B=0$$

利用 $M_C=0$ 的条件，取 $C$ 右边部分为脱离体，可得

$$R_B\times 4-H_B\times 8-20\times 4\times 2=0$$

$$H_B=20KN \qquad H_A=20KN$$

2） 作内力图

$M$ 图：由于对称关系，只作左部即可。

$AD$ 杆：$M_{AD}=0$ $\quad M_{DA}=20\times 6=120KN-m$ $\quad$（左侧受拉）

$DC$ 杆：它受均布荷载作用，$M$ 图为二次抛物线，

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

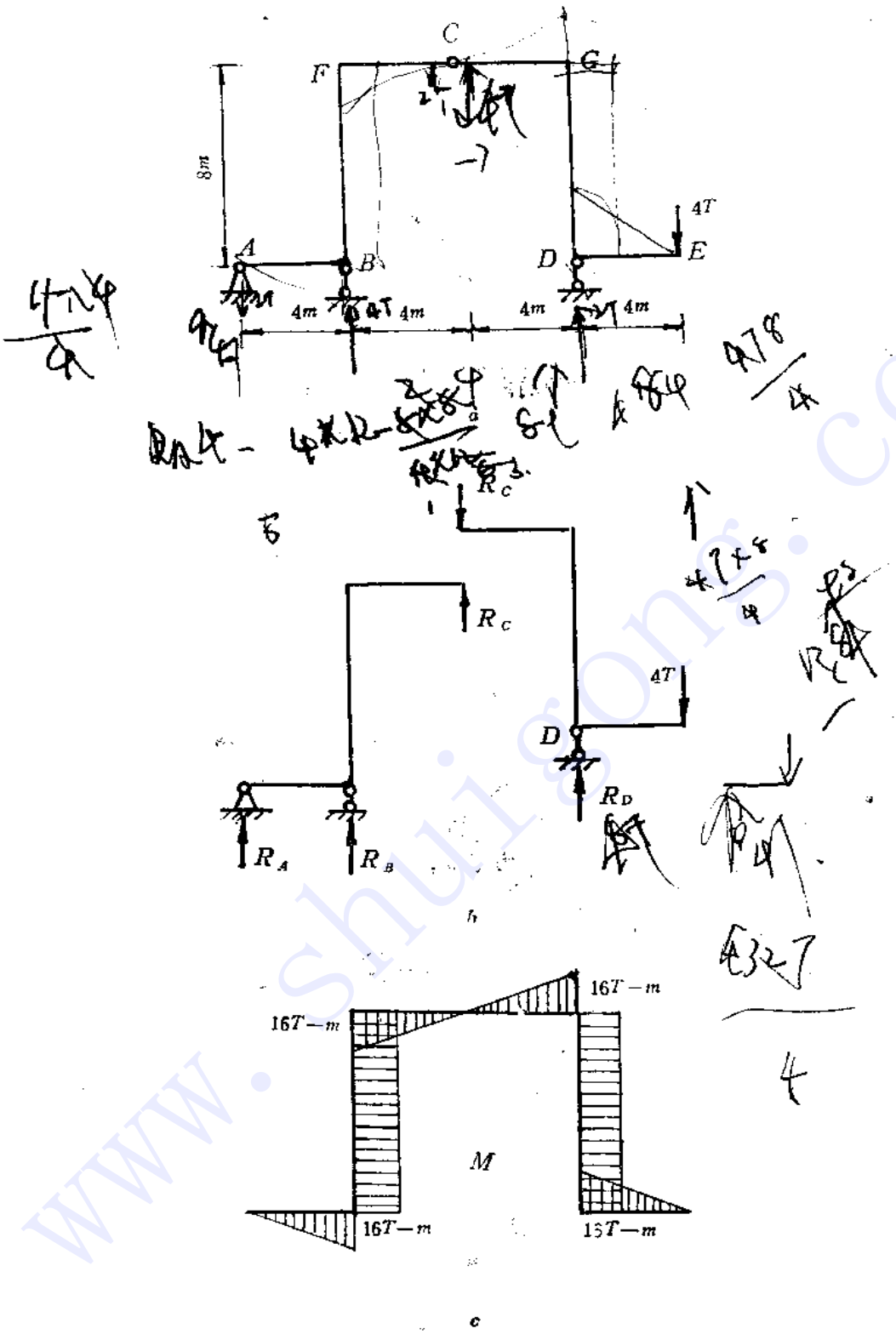



图 3—19

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

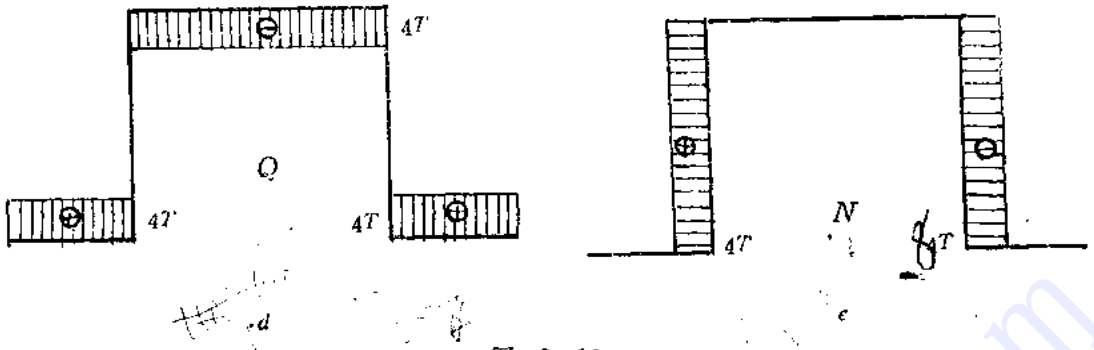



图 3—19

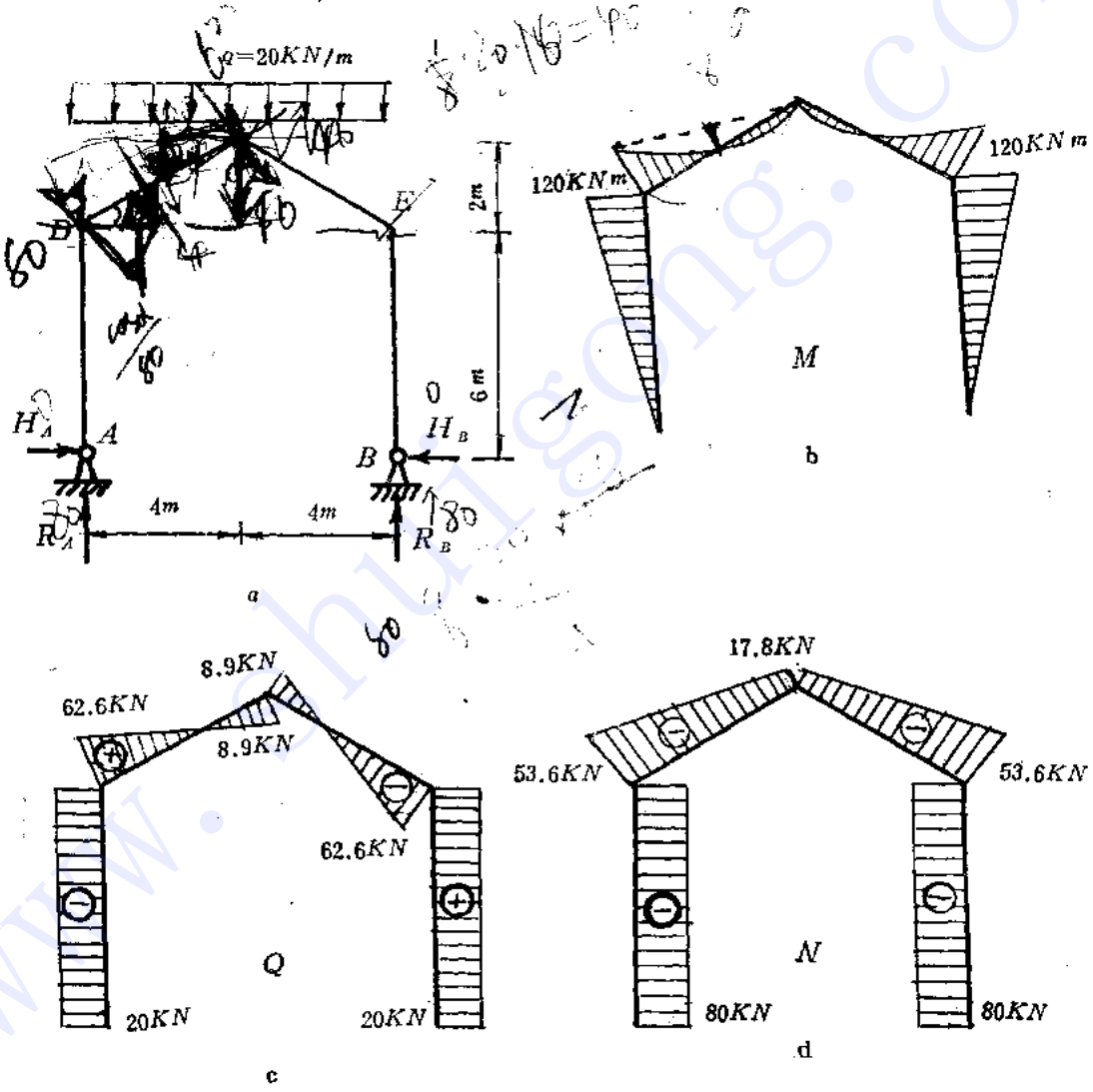
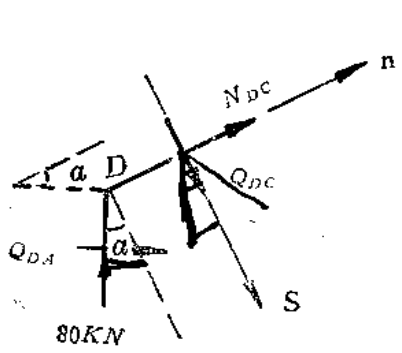
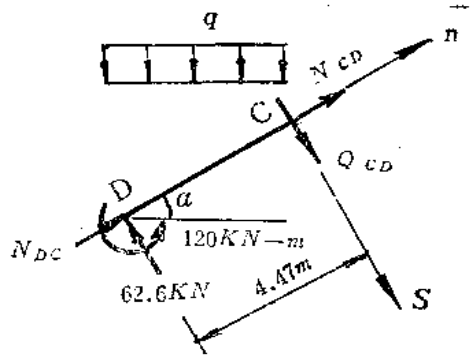



图 3—20

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！




e




f

图 3—20

$$M_{DC}=20\times 6=120KN-m \quad \text{（上侧受拉）}$$

$$M_{CD}=0$$

$DC$ 杆中点的弯矩 $=-\frac{1}{2}\times 120+\frac{1}{8}\times 20\times 4^2=-20KN-m$ （上侧受拉）

$M$ 图如图 3—20$b$ 所示.

$Q$ 图和 $N$ 图：

$AD$ 杆：$Q_{AD}=-20KN \qquad Q_{DA}=-20KN$

$$N_{AD}=N_{DA}=-80KN$$

$DC$ 杆：$DC$ 杆是斜杆，在均布荷载作用下它的剪力图和轴力图都是与杆轴线成倾斜的直线.

取图 3—20$e$ 所示的结点 $D$ 为脱离体，且取与 $DC$ 杆轴平行和垂直的坐标轴 $n$、$S$，则

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}=0.894 \qquad \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}=0.447$$

$\Sigma S=0$ $\quad Q_{DC}-80\cos\alpha+20\sin\alpha=0$

$$Q_{DC}=80\cos\alpha-20\sin\alpha$$

$$=80\times 0.894-20\times 0.447=62.6KN$$

$\Sigma n=0$ $\quad N_{DC}+80\sin\alpha+20\cos\alpha=0$

$$N_{DC}=-80\sin\alpha-20\cos\alpha$$

$$=-80\times 0.447-20\times 0.894=-53.6KN$$

再取隔离体 $DC$ 杆（如图 3—20$f$ 所示），则

$\Sigma S=0$ $\quad Q_{CD}-62.6+80\cos\alpha=0$

$$Q_{CD}=62.6-80\times 0.894=-8.9KN$$

$\Sigma n=0$ $\quad N_{CD}+53.6-80\times\sin\alpha=0$

$$N_{CD}=-53.6+80\times 0.447=-17.8KN$$

根据以上数据作出如图 3—20$c$、$d$ 所示剪力图和轴力图，

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

# 第四章　三　铰　拱

**题 4—1**　如图 4—1$a$ 所示圆拱，跨度 16$m$，矢高 4$m$，$P=10KN$。

求：1)圆拱的半径 $R$ 及 $D$ 点到 A.B 两点连线的距离 $y_D$；

2)求支反力；

3)求 $D$ 点左截面的内力。

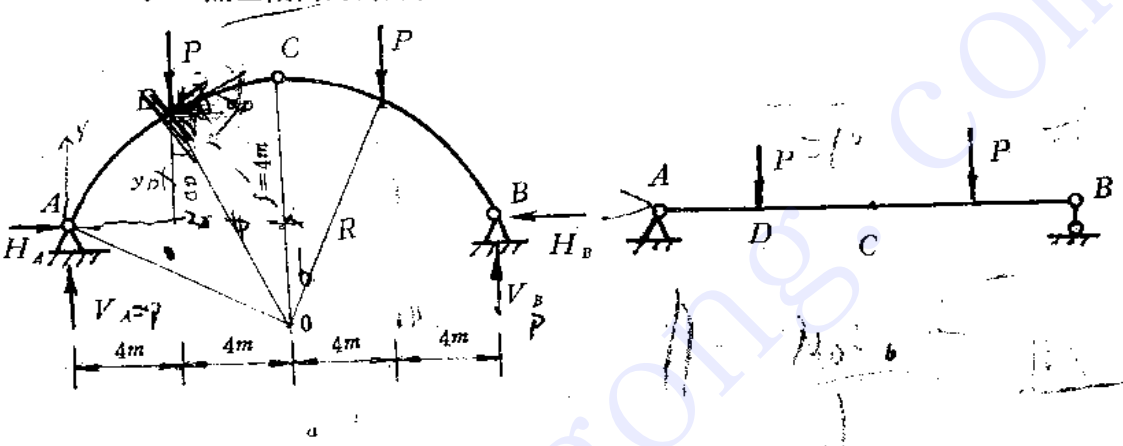



图　4—1

**解**：1)由图 4—1$a$ 得

$$R^2=(R-4)^2+8^2$$

$$R=10m$$

$$y_D=\sqrt{R^2-4^2}-6=3.165m$$

2)取代梁如图 4—1$b$ 所示，由对称性得

$$V_A=V_B=V_A^0=V_B^0=10KN$$

$$H=\frac{M_C^0}{f}=\frac{10\times 8-10\times 4}{4}=10KN$$

3)$D$ 点左截面

$$M_D=M_D^0-Hy_D=10\times 4-10\times 3.165=8.35KN-m$$

$$Q_D^{左}=Q_D^{0左}\cos\alpha_D-H\sin\alpha_D$$
$$=10\times 0.916-10\times 0.4=5.16KN$$

$$N_D^{左}=-Q_D^{0左}\sin\alpha_D-H\cos\alpha_D$$
$$=-10\times 0.4-10\times 0.916=-13.16KN$$

其中：$\sin\alpha_D=\frac{4}{10}=0.4$　　$\cos\alpha_D=\frac{3.165+6}{10}=0.916$

$Q_D^{0左}$为代梁 D 点左截面的剪力，$V_A^0$.$V_B^0$为代梁的支反力，$M_D^0$为同

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

梁 D 截面弯距。

**题 4—2** 求图 4—2 所示三铰拱的支反力及拉杆的内力。

已知：

$P = 10KN$

$f = 8m$

$l = 25m$

**解：** $\Sigma M_A = 0$

$V_B \cdot 25 - 10 \times 8 = 0$

$V_B = 3.2KN \uparrow$

$\Sigma y = 0 \quad V_A = 3.2KN \downarrow$

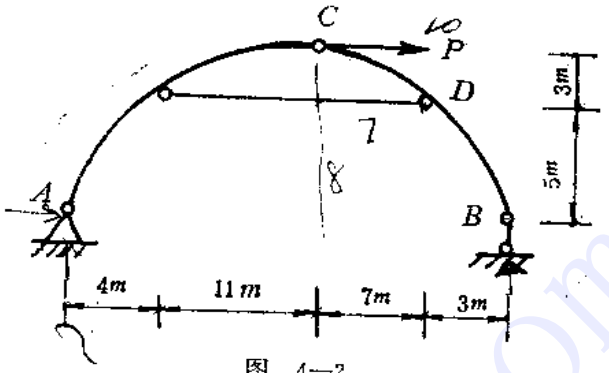



图 4—2

将拉杆切断、令拉力为 $S_{ED}$，则

$$\Sigma M_C = 0 \quad S_{ED} \cdot 3 - 3.2 \times 10 = 0$$

$$S_{ED} = 10.67KN \text{（拉）}$$

**题 4—3** 用数解法求图 4—3a 所示三铰拱的支反力。

已知 $P = 8KN, m = 10KN-m, f = 6m$。

**解：** 取代梁如图 4—3b 所示，则

$$V_A = V_A^0 = \frac{8 \times 18 - 10}{24} = 5.58KN$$

$$V_B = V_B^0 = \frac{8 \times 6 + 10}{24} = 2.4KN$$

$$M_C^0 = V_A^0 \times 6$$

$$= 5.58 \times 6$$

（$M_C^0$ 一代梁与三铰拱对应截面的弯距）

$$H = \frac{M_C^0}{f}$$

$$= \frac{5.58 \times 6}{6} = 5.58KN$$

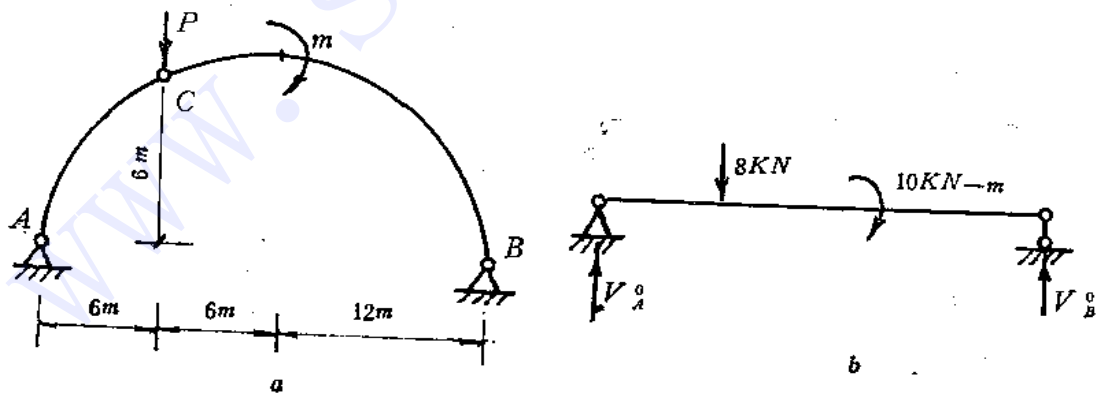



图 4—3

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

**题 4—4** 用数解法求图 4—4a 所示拱的支反力及 $K$ 截面的内力。

已知：$q=1KN/m$，$l=18m$，$f=4m$，$y=\frac{4f}{l^2}x(l-x)$。

$l$ 为拱跨

**解**：1)支反力

$$V_A=V_B=\frac{1\times 18}{2}=9KN$$

将 DE 杆切断并令其内力为 $S_{DE}$，则

$$\Sigma M_C=0$$

$$S_{DE}\cdot 3+1\times 9\times\frac{9}{2}-9\times 9=0$$

$$S_{DE}=\frac{81}{6}=13.5KN$$

2)求 $K$ 截面内力

$$y'=\mathrm{tg}\alpha=\frac{4f}{l^2}(l-2x)$$

当 $x=3m$ 时，

$$\mathrm{tg}\alpha_K=\frac{4\times 4}{18}(18-6)=0.529$$

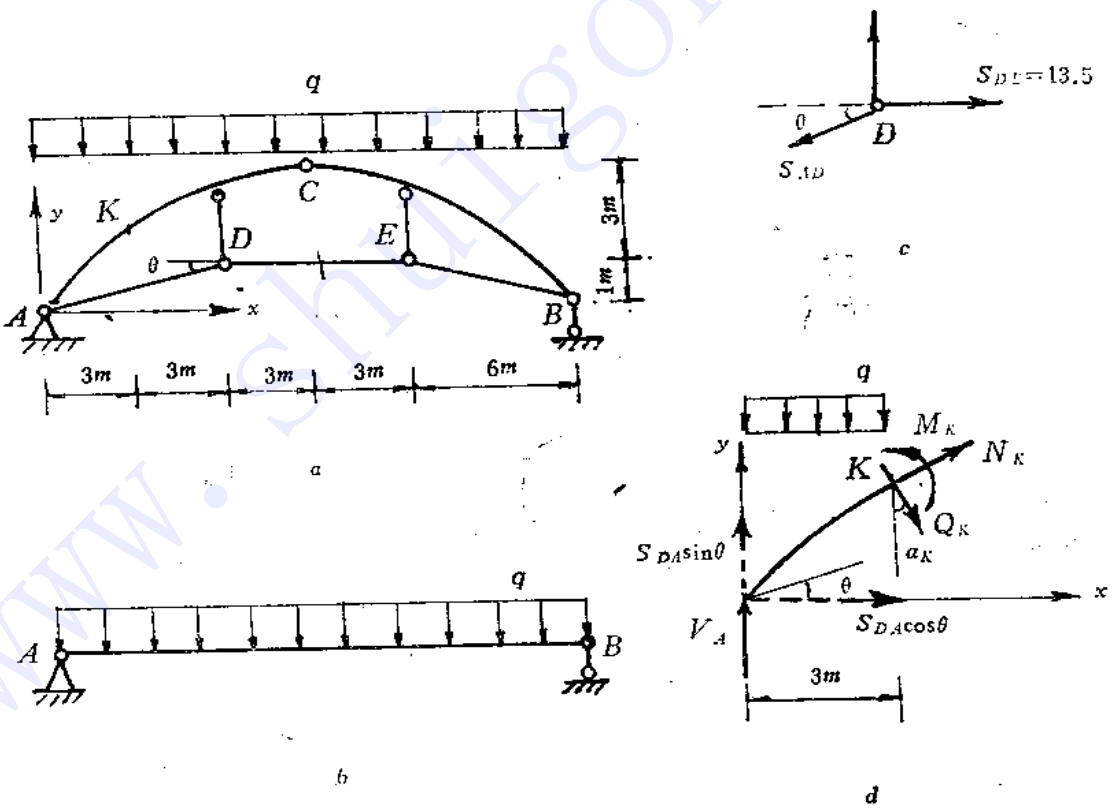



图 4—4

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$\alpha_K = 30°40'$

$\cos\alpha_K = 0.863,$

$\sin\alpha_K = 0.51$

$$y_K = \frac{4\times 4}{18^2}(18\times 3 - 9) = 2.22m$$

截取结点 $D$ 如图 4—4c，则

$S_{AD}\cos\theta = 13.5$

而 $\cos\theta = \frac{6}{\sqrt{37}}$

$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{37}}$

所以 $S_{AD} = 13.5/\cos\theta$

取如图 4—4d 所示的隔离体，则

$$M_K = (V_A + S_{AD}\sin\theta)\times 3 - S_{AD}\cos\theta y_K - q\times 3\times\frac{3}{2}$$

$$= \left(9 + 13.5\frac{\sqrt{37}}{6}\times\frac{1}{\sqrt{37}}\right)3 - 13.5\times 2.22 - \frac{9}{2}$$

$$= -0.72KN-m \text{（上侧受拉）}$$

$$Q_K = (V_A + S_{AD}\sin\theta)\cos\alpha_K - S_{AD}\cos\theta\sin\alpha_K - q\cdot 3\cdot\cos\alpha_K$$

$$= (9 + 13.5/6)\times 0.863 - 13.5\times 0.51 - 3\times 0.863$$

$$= 0.235KN$$

$$N_K = q\cdot 3\cdot\sin\alpha_K - S_{AD}\cos\theta\cos\alpha_K - (V_A + S_{AD}\sin\theta)\sin\alpha_K$$

$$= 3\times 0.51 - 13.5\times 0.863 - 11.25\times 0.51$$

$$= -15.858KN \text{（压）}$$

**题 4—5** 用数解法求图 4—5a 所示圆形三铰拱的支反力及绘内力图。

已知：$f = 6m$，$l = 16m$，$q = 2KN/m$，$P = 12KN$。（$l$—拱跨长，$f$—拱高）

**解**：取代梁如图 4—5b 所示。

1)求支反力

$$V_A = V_A^0 = \frac{2\times 8\times 12 + 12\times 4}{16} = 15KN$$

$$V_B = V_B^0 = 2\times 8 + 12 - 15 = 13KN$$

$$H = \frac{M_C^0}{f} = \frac{13\times 8 - 12\times 4}{6} = 9.3KN$$

2)求内力

圆拱的半径 $R$，由图 4—5a 可知为

$$R^2 = (R-6)^2 + 8^2$$

解得 $R = 8.33m$

在 $xoy$ 坐标系内圆拱的轴线方程为

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

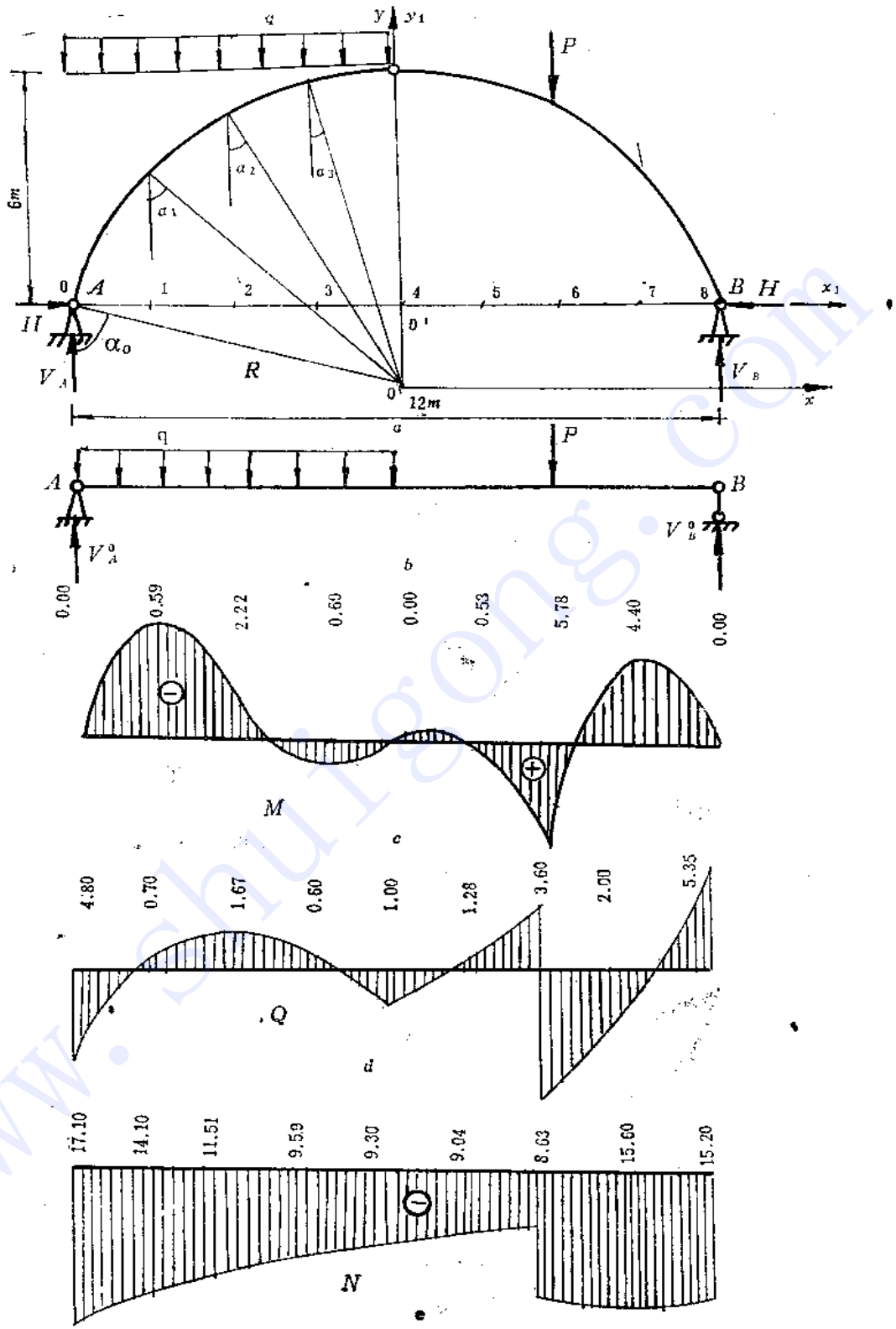



图 4—5

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$$y=\sqrt{R^2-x^2}$$

在$x'o'y'$坐标系内圆拱的轴线方程为

$$y'=\sqrt{R^2-x'^2}-(R-6)$$

即 $$y'=\sqrt{R^2-x^2}-(R-6)$$

取9个截面，将拱分为八等分，利用公式

$$M_x=M_x^0-Hy'$$

$$Q_x=Q_x^0\cos\alpha-H\sin\alpha$$

$$N_x=-Q_x^0\sin\alpha-H\cos\alpha$$

求出各截面的内力。取两截面为例，

当$x=-4m$时，即对截面2时，

$$M_2=M_2^0-Hy'_2$$
$$=(15\times4-2\times4\times2)-9.3\times4.97$$
$$=-2.22KN-m\ (外侧受拉)$$

$$Q_2=Q_2^0\cos\alpha_2-H\sin\alpha_2$$
$$=(15-8)\times0.876-9.3\times0.48$$
$$=1.668KN$$

$$N_2=-Q_2^0\sin\alpha_2-H\cos\alpha_2$$
$$=-(15-8)\times0.48-9.3\times0.876$$
$$=-11.51KN$$

其中 $$\cos\alpha_2=\frac{\sqrt{R^2-4^2}}{R}=0.876$$

$$\sin\alpha_2=\frac{4}{8.33}=0.48$$

当$x=4$时，即取截面6时，

$$M_6=M_6^0-Hy'_6$$
$$=(13\times4)-9.3\times4.97$$
$$=5.78KN-m$$

$$Q_{6左}=(-13+12)\times0.876-9.3(-0.48)=3.588KN$$

$$Q_{6右}=-13\times0.876-9.3(-0.48)=-6.924KN$$

$$N_{6左}=-(-13+12)(-0.48)-9.3\times0.876=-8.627KN$$

$$N_{6右}=-(-13)(-0.48)-9.3\times0.876=-14.387KN$$

在$P$的作用处剪力的突变值为 $P\cos\alpha_6=10.512$

在$P$的作用处轴力的突变值为 $P\sin\alpha_6=5.76$

即 $$P\cos\alpha_6=|Q_{6左}|+|Q_{6右}|$$

$$P\sin\alpha_6=|N_{6右}|-|N_{6左}|$$

表4—1列出了给定截面的内力及有关数据。

3)绘内力图

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

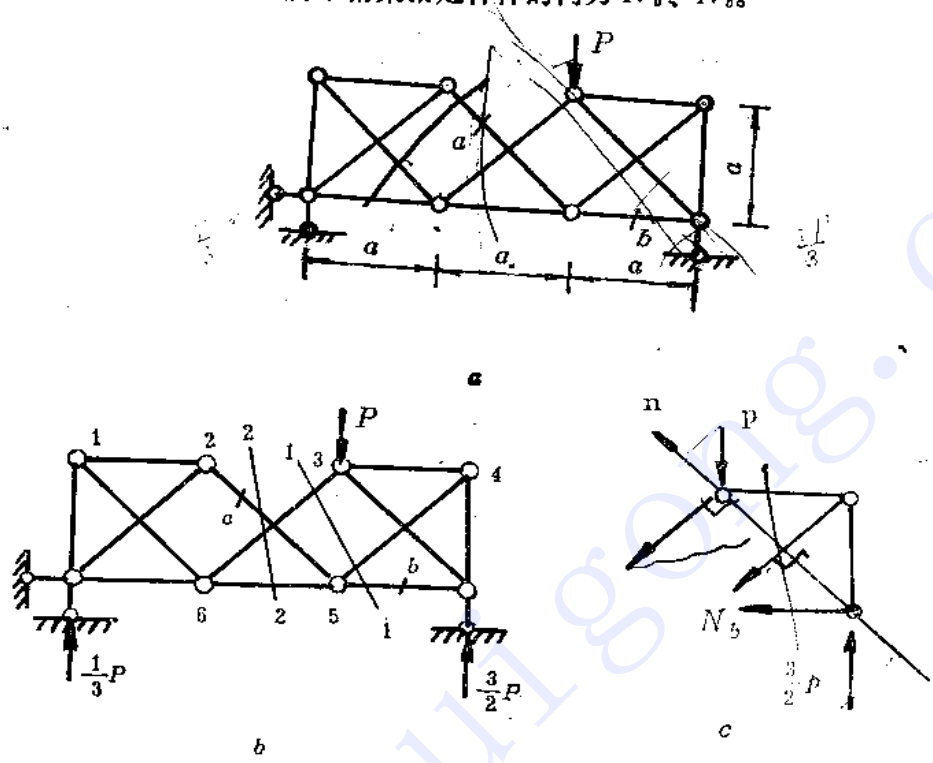
表 4—1

| 截面号 | $x$ (m) | $y$ (m) | $\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $M^0$ (KN－m) | $Q^0$ (KN) | $M$ (KN－m) | $Q$ (KN) | $N$ (KN) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | －8 | 0 | 0.96 | 0.28 | 0 | 15 | 0 | －4.8 | －17.1 |
| 1 | －6 | 3.44 | 0.72 | 0.67 | 16 | 11 | －5.9 | 0.7 | －14.1 |
| 2 | －4 | 4.97 | 0.48 | 0.876 | 44 | 7.0 | －2.2 | 1.67 | －11.51 |
| 3 | －2 | 5.75 | 0.24 | 0.95 | 54 | 3.0 | 0.5 | 0.61 | －9.52 |
| 4 | 0 | 6.00 | 0 | 1 | 56 | －1.0 | 0 | －1.0 | －9.3 |
| 5 | 2 | 5.75 | －0.24 | 0.95 | 54 | －1.0 | 0.53 | 1.28 | －9.04 |
| 6 | 4 | 4.97 | －0.48 | 0.876 | 52 | 左－1.0<br>右－13. | 5.78 | 左3.6<br>右－6.92 | 左－8.63<br>右－14.39 |
| 7 | 6 | 3.44 | －0.72 | 0.67 | 26 | －13 | －4.4 | －2.0 | －15.6 |
| 8 | 8 | 0 | －0.96 | 0.28 | 0 | －13 | 0 | 5.35 | －15.2 |

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

# 第五章　静定平面桁架和组合结构

**题 5—1**　求图 5—1*a* 所示桁架指定杆件的内力 $N_a$、$N_b$。




*a*　　*b*　　*c*

图　5—1

**解**：求反力

$$\Sigma M_A = 0 \qquad R_B = \frac{2}{3}P$$

$$\Sigma M_B = 0 \qquad R_A = \frac{1}{3}P$$

取图 5—1*b* 所示的截面 1—1，以右部为脱离体（如图 5—1*c*），则

$$\Sigma n = 0 \qquad N_b\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{3}P\frac{\sqrt{2}}{2} - P\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

于是　$N_b = \frac{1}{3}P$（拉）

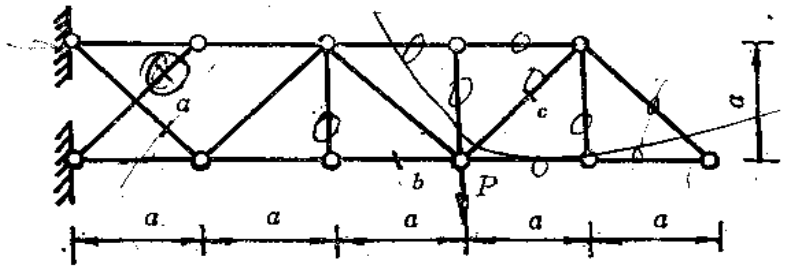
取图 5—1*b* 所示的截面 2—2，以左部为脱离体，则

$$\Sigma M_6 = 0 \qquad N_a\frac{\sqrt{2}}{2}a + \frac{P}{3}a = 0$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$$N_a = -\frac{\sqrt{2}P}{3}\ (压)$$

**题 5—2** 求图 5—2*a* 所示桁架的指定杆件的内力 $N_a$、$N_b$、$N_c$。



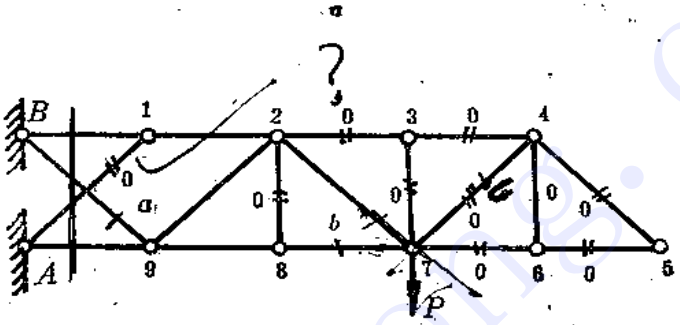




图 5—2

**解**：找出零杆如图 5—2*b* 所示。

$$N_C = 0$$

取结点 7，将结点 7 上的所有力沿垂直 2—7 杆方向投影，得

$$\frac{\sqrt{2}}{2}P + \frac{\sqrt{2}}{2}N_b = 0$$

$$N_b = -P\ (压)$$

取图 5—2*b* 所示的截面，以右部为隔离体，列竖向投影方程，得

$$\frac{\sqrt{2}}{2}N_a - P = 0$$

$$N_a = \sqrt{2}P(拉)$$

**题 5—3** 求图 5—3*a* 所示桁架指定杆件的内力 $N_a$、$N_b$、$N_c$。

**解**：先将所给均布荷载转换为结点荷载如图 5—3*b* 所示。

$$P_A = P_B = 0.38 \times 2 \times \frac{1}{2} = 0.38KN$$

$$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = 0.38 \times 2 = 0.76KN$$

支反力为：

$$R_A = R_B = 2.28KN$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

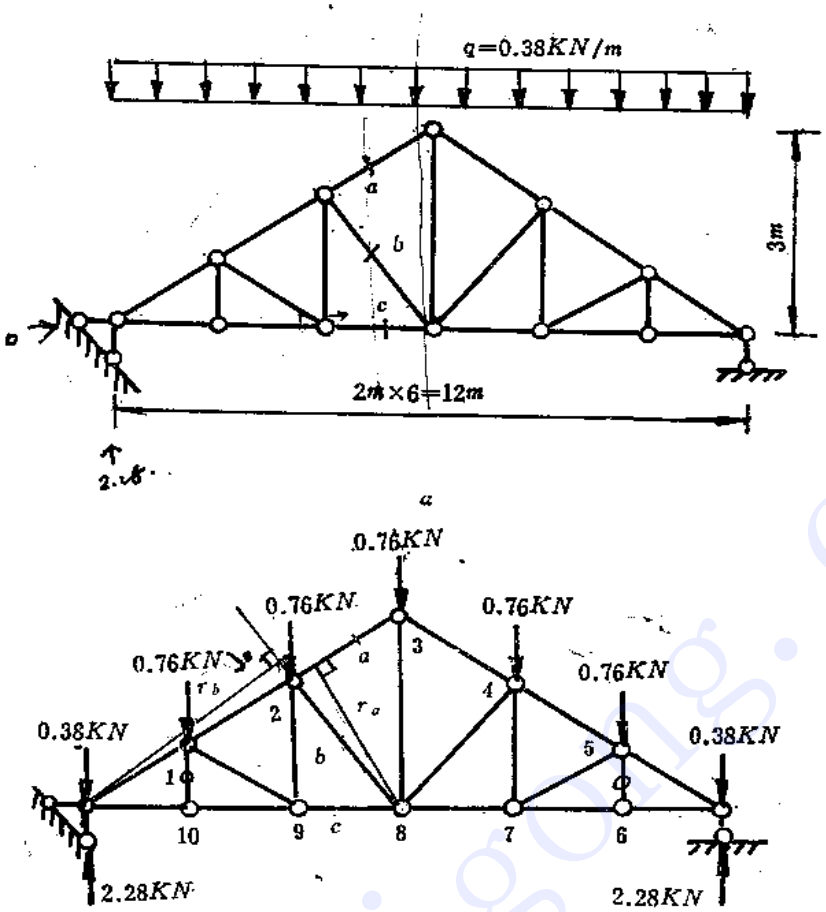



图 5—3

取图 5—3b 所示的截面，以左部为脱离体，则

$\Sigma M_B = 0 \quad N_a \cdot r_a - 0.76 \times 2 - 0.76 \times 4 - 0.38 \times 6 + 2.28 \times 6 = 0$

$N_a = -2.55KN$（压）

$\Sigma M_A = 0 \quad N_b \cdot r_b + 0.76 \times 2 + 0.76 \times 4 = 0$

$N_b = -1.075KN$（压）

$\Sigma M_2 = 0 \quad N_c \cdot 2 + 0.38 \times 4 + 0.76 \times 2 - 2.28 \times 4 = 0$

$N_c = 3.04KN$（拉）

**题 5—4** 求 5—4a 所示桁架指定杆件的内力 $N_a$、$N_b$、$N_c$。

**解：** 求支反力

$\Sigma X = 0 \quad H_A = 4KN \leftarrow$

$\Sigma M_A = 0 \quad R_B = 4.8KN \uparrow$

$\Sigma y = 0 \quad R_A = 3.2KN \uparrow$

取结点 8 为研究对象（图 5—4b），则

$\Sigma y = 0 \quad N_b \sin\alpha - 1 = 0$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

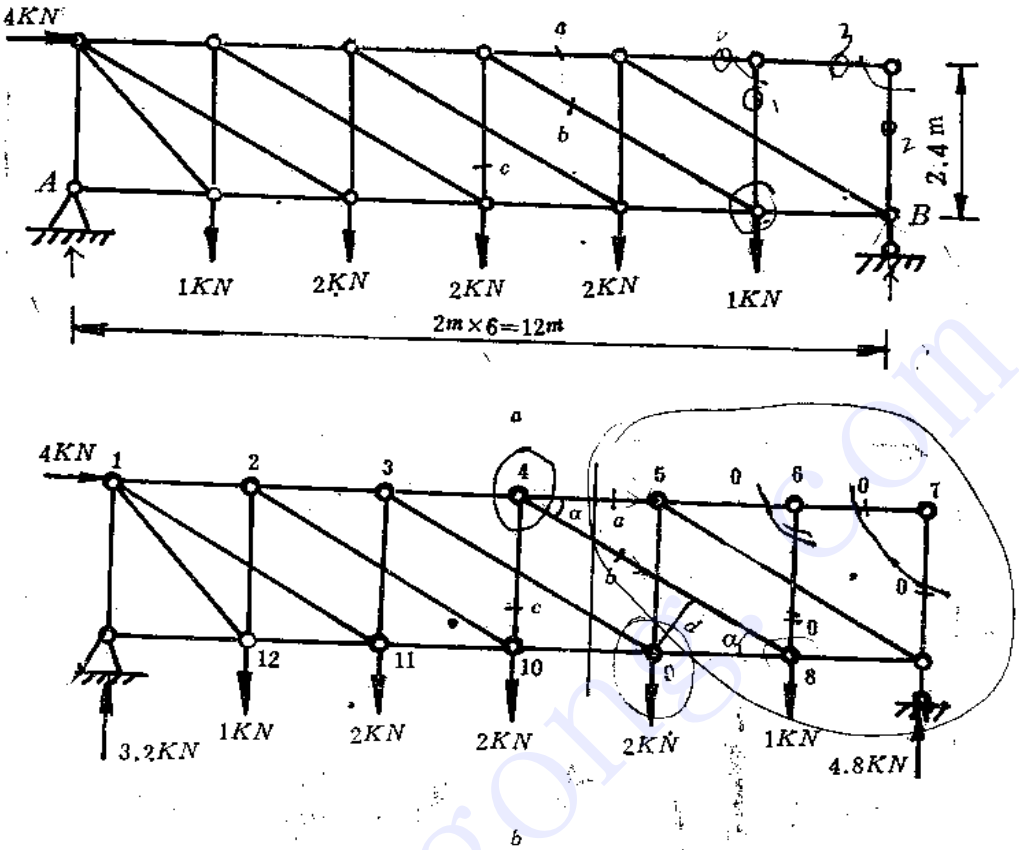



图 5—4

$$N_b = -\frac{1}{\sin\alpha} = 1.9KN \quad (拉)$$

取图 5—4*b* 所示的截面，以右部为脱离体，则

$$\Sigma M_9 = 0 \qquad N_a \times 2.4 + N_b d - 1 \times 2 + 4.8 \times 4 = 0$$

$$N_a = -8KN \quad (压)$$

取结点 4 为研究对象，则

$$\Sigma y = 0 \qquad N_c + N_b \sin\alpha = 0$$

$$N_c = -1KN \quad (压)$$

其中：　$d = 1.04m$　　$\sin\alpha = 0.515$

**题 5—5**　求图 5—5*a* 所示桁架指定杆件的内力 $N_a$、$N_b$、$N_c$。

**解**：取图 5—5*b* 所示的截面 1—1，则有

$$\Sigma M_7 = 0 \qquad N_b \times 3 - 1 \times 3 - 2 \times 4 - 2 \times 2 = 0$$

$$N_b = 5KN \quad (拉)$$

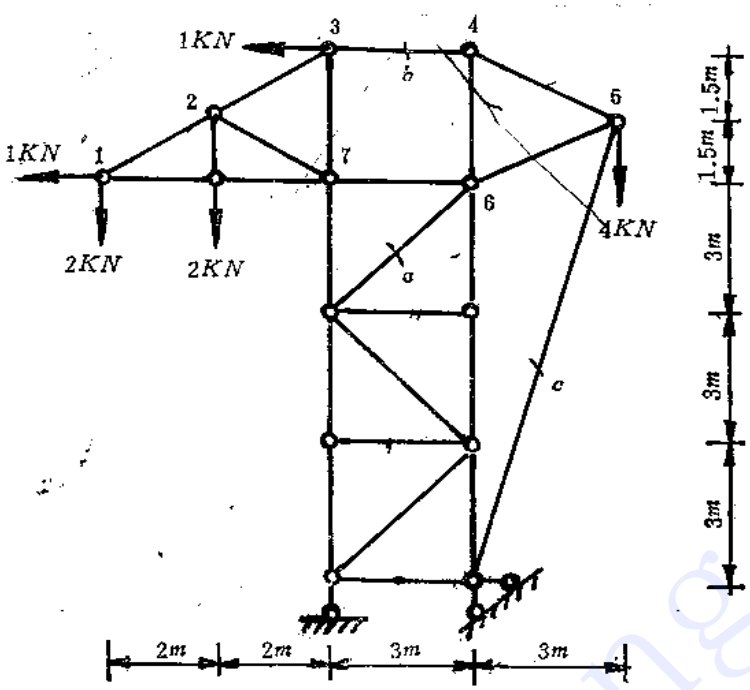
再取图 5—5*b* 所示的截面 2—2，则

$$\Sigma M_6 = 0 \qquad N_c \times d + 4 \times 3 - 5 \times 3 = 0$$

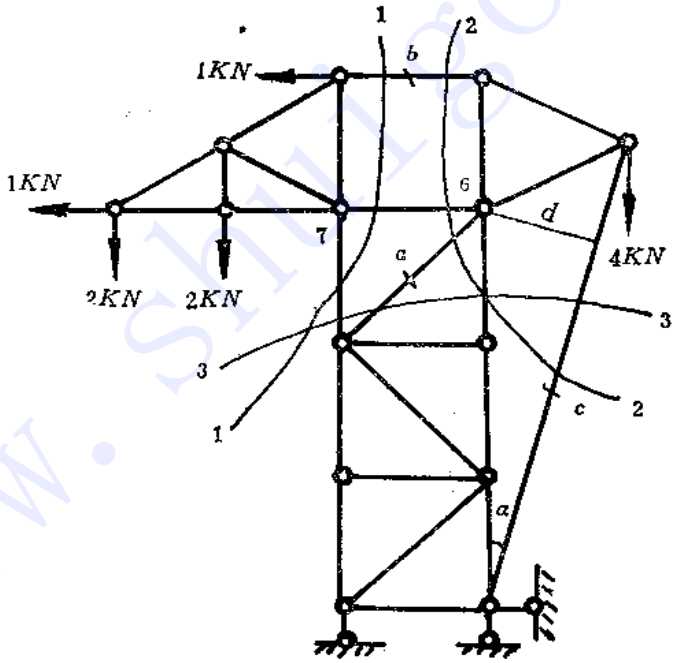
$$N_c = 1.21KN \quad (拉)$$

再取图 5—5*b* 所示的截面 3—3，则

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！




a




b

图 5—5

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

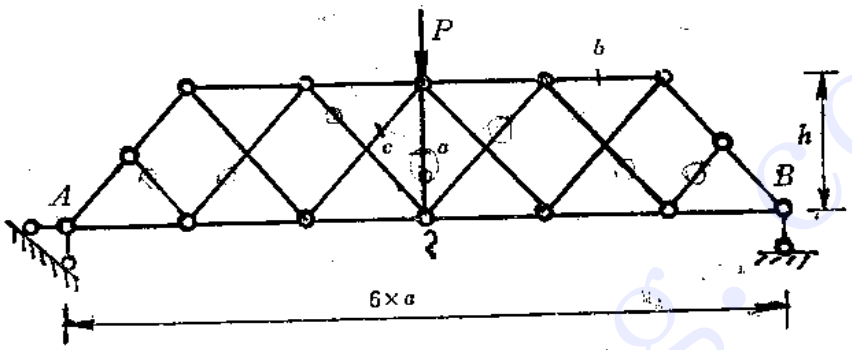
$$\Sigma X = 0 \qquad N_a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 1.21\sin\alpha + 1 + 1 = 0$$

$$N_a = -3.28KN \text{（压）}$$

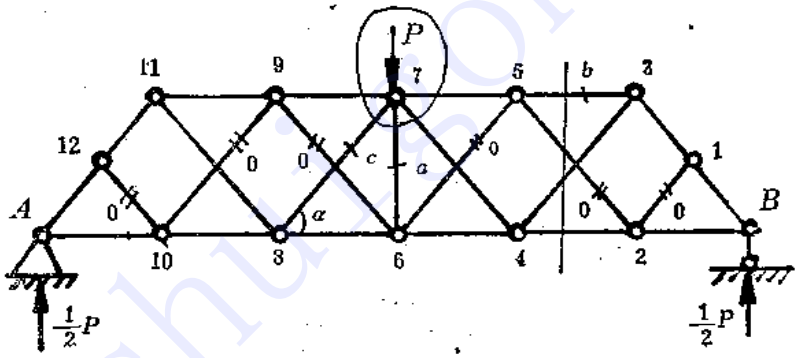
其中 $$\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{10.5^2 + 3^2}} = 0.275$$

此类悬臂桁架的特点是不求支反力，而由自由端取截面求各杆内力。

**题 5—6** 求图 5—6*a* 所示桁架指定杆件的内力 $N_a$、$N_b$、$N_c$。




*a*




*b*

图 5—6

**解**：由对称性得支反力为

$$R_A = R_B = \frac{P}{2} \uparrow$$

判断出零杆如图 *b* 所示，故

$$N_a = 0$$

取图 *b* 所示的截面，以右部为脱离体，则

$$\Sigma M_4 = 0 \qquad N_b \cdot h + \frac{P}{2} \times 2a = 0$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

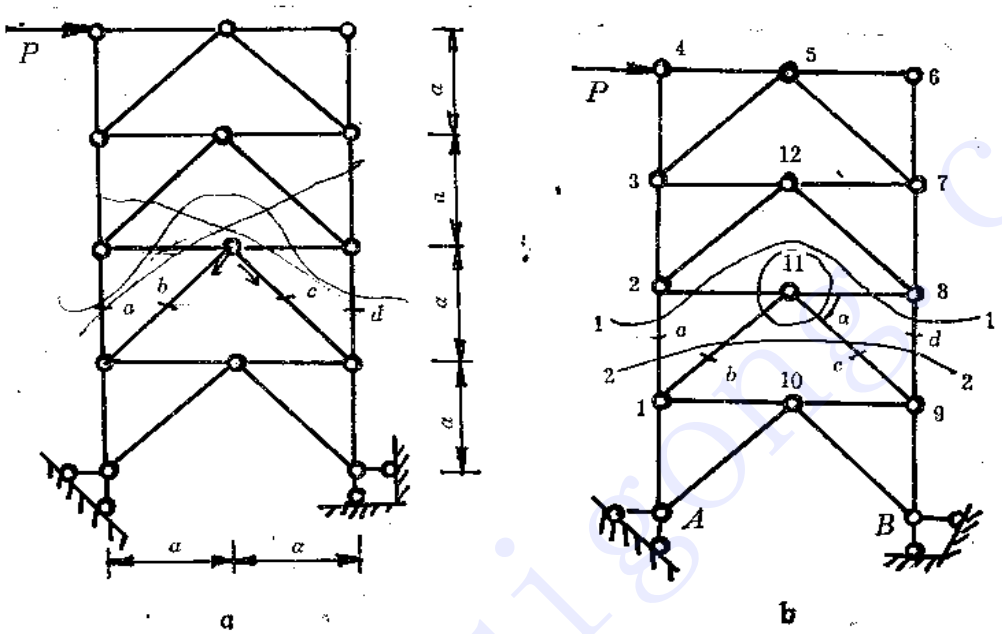
$$N_b = -P\frac{a}{h}\ (压)$$

取结点 7 为研究对象，由于对称得：

$$\Sigma y = 0 \qquad 2N_e\sin\alpha + P = 0$$

$$N_e = -\frac{P}{2\sin\alpha} = -\frac{P}{2}\frac{\sqrt{h^2+a^2}}{h}$$

**题 5—7** 求 $K$ 式桁架（如图 5—7$a$ 所示）指定杆件的内力 $N_a$、$N_b$、$N_c$、$N_d$。




a　　b

图　5—7

**解**：取图 5—7$b$ 所示 1—1 截面，以上部为研究对象，则

$$\Sigma M_2 = 0 \qquad N_d \times 2a + P \times 2a = 0$$

$$N_d = -P\ (压)$$

$$\Sigma M_8 = 0 \qquad N_a \times 2a - P \times 2a = 0$$

$$N_a = P\ (拉)$$

为求 $N_b$、$N_c$，采用结点法和截面法的联合应用，取如图 5—7$b$ 所示 2—2 截面和结点 11。

对截面 2—2 得到的隔离体，有

$$\Sigma X = 0 \qquad N_b\cos\alpha - N_c\cos\alpha - P = 0 \qquad (1)$$

对结点 11，有

$$\Sigma y = 0 \qquad N_b\sin\alpha + N_c\sin\alpha = 0 \qquad (2)$$

**解**：(1)、(2)方程得

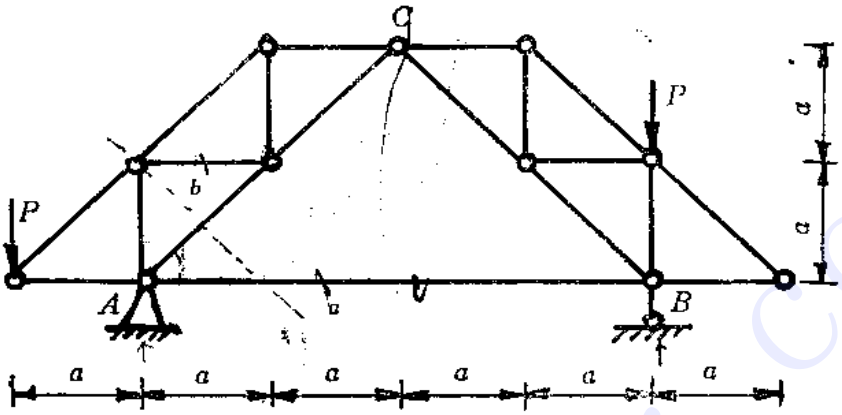
$$N_b = \frac{\sqrt{2}}{2}P\ (拉)$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$$N_c = -\frac{\sqrt{2}}{2}P \quad (压)$$

此题所用方法是解一般 $K$ 式桁架杆件内力的通用方法。

**题 5—8** 求图 5—8*a* 所示桁架指定杆件的内力 $N_c$、$N_1$。



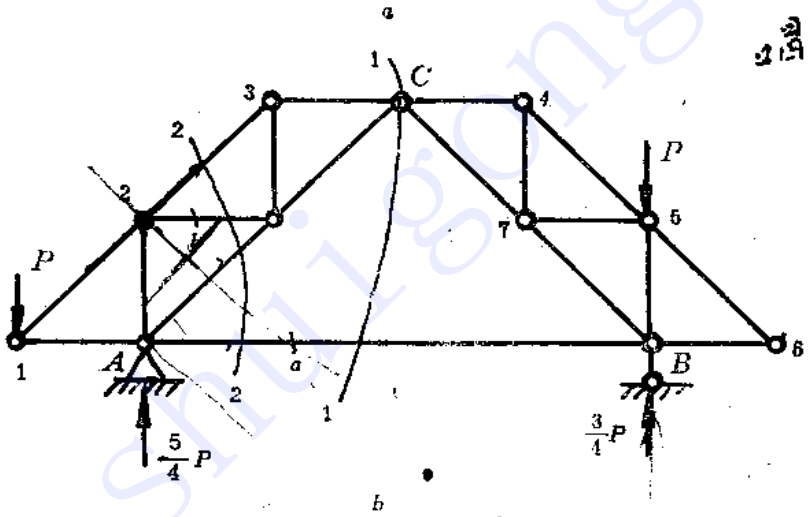




图 5—8

**解：** 求支反力

$$\Sigma M_A = 0 \qquad R_B = \frac{3}{4}P \uparrow$$

$$\Sigma y = 0 \qquad R_A = \frac{5}{4}P \uparrow$$

取图 5—8*b* 所示的 1—1 截面，以左部为隔离体，则

$$\Sigma M_C = 0 \qquad \frac{5}{4}P \times 2a - P \times 3a - N_6 \times 2a = 0$$

$$N_6 = -\frac{1}{4}P \quad (压)$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

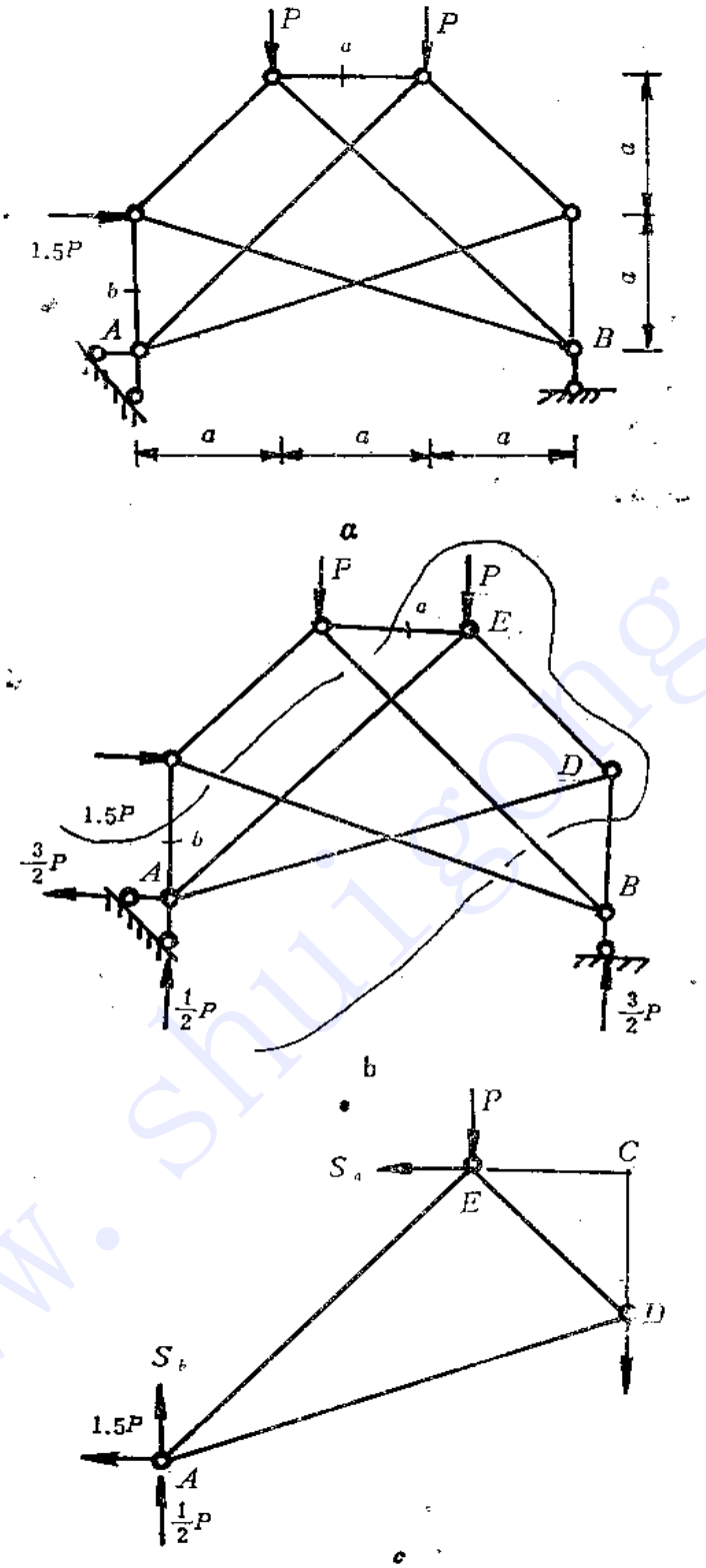



图 5—9

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

再取图 5—8b 所示的 2—2 截面，以左部为脱离体，取垂直杆 2--3 杆方向的投影方程，则

$$N_b\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{P}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{5}{4}P\frac{\sqrt{2}}{2}+P\frac{\sqrt{2}}{2}=0$$

$$N_b=\frac{1}{2}P\quad(\text{拉})$$

**题 5—9** 求图 5—9a 所示桁架指定杆件的内力 $S_a$、$S_b$。

**解**：求支反力

$$\Sigma M_A=0\qquad R_B=\frac{3}{2}P\uparrow$$

$$\Sigma y=0\qquad R_A=\frac{1}{2}P\uparrow$$

$$\Sigma X=0\qquad H_A=1.5P\leftarrow$$

取图 5—9b 所示的截面，得到图 5—9c 所示的隔离体为研究对象，则

$$\Sigma X=0\qquad S_a+1.5P=0$$

$$S_a=-1.5P\quad(\text{压})$$

$$\Sigma M_c=0\qquad S_b\cdot 3a+\frac{P}{2}3\cdot a+\frac{3}{2}P\cdot 2a-P\cdot a=0$$

$$S_b=-\frac{7}{6}P\quad(\text{压})$$

**题 5—10** 用最简便方法求图 5—10a 图示桁架全部杆件的内力。

**解**：由于结构和荷载是对称的，所以

$$R_A=R_B=\frac{P}{2}\uparrow\qquad H_A=0$$

由对称条件和结点 4 的平衡条件得

$$S_{41}=S_{43}=0$$

由此 $S_{13}=0$

取结点 2 为研究对象并考虑对称条件，则

$$2S_{12}\frac{\sqrt{2}}{2}+P=0$$

$$S_{12}=S_{23}=-\frac{\sqrt{2}}{2}P\quad(\text{压})$$

由此 $$S_{1A}=S_{3B}=-\frac{\sqrt{2}}{2}P\quad(\text{压})$$

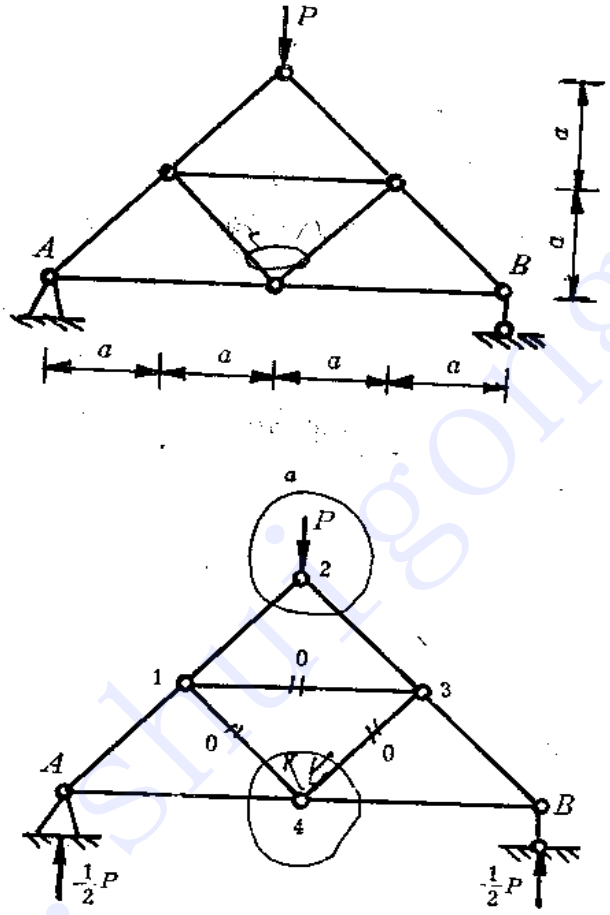
由结点 $B$ 的平衡得

$$S_{4B}=\frac{1}{2}P\quad(\text{拉})\qquad S_{4A}=\frac{1}{2}P\quad(\text{拉})$$

全部杆件内力见下表：

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

| 杆　　件 | 内　　力 |
|---|---|
| $S_{12}=S_{23}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}P$ |
| $S_{1A}=S_{3B}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}P$ |
| $S_{4A}=S_{4B}$ | $\frac{1}{2}P$ |
| $S_{13}=S_{14}=S_{34}$ | 0 |




b

图　5—1）

**题5—11**　求图 5—11*a* 所示桁架指定杆件的内力 $S_a$。

**解**：此题为对称结构对称荷载，因此有

$$R_A=R_B=\frac{3}{2}P\uparrow \qquad H_A=0$$

由对称条件和平衡条件得

$$S_{86}=S_{84}=0$$

由结点 3 平衡条件得

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

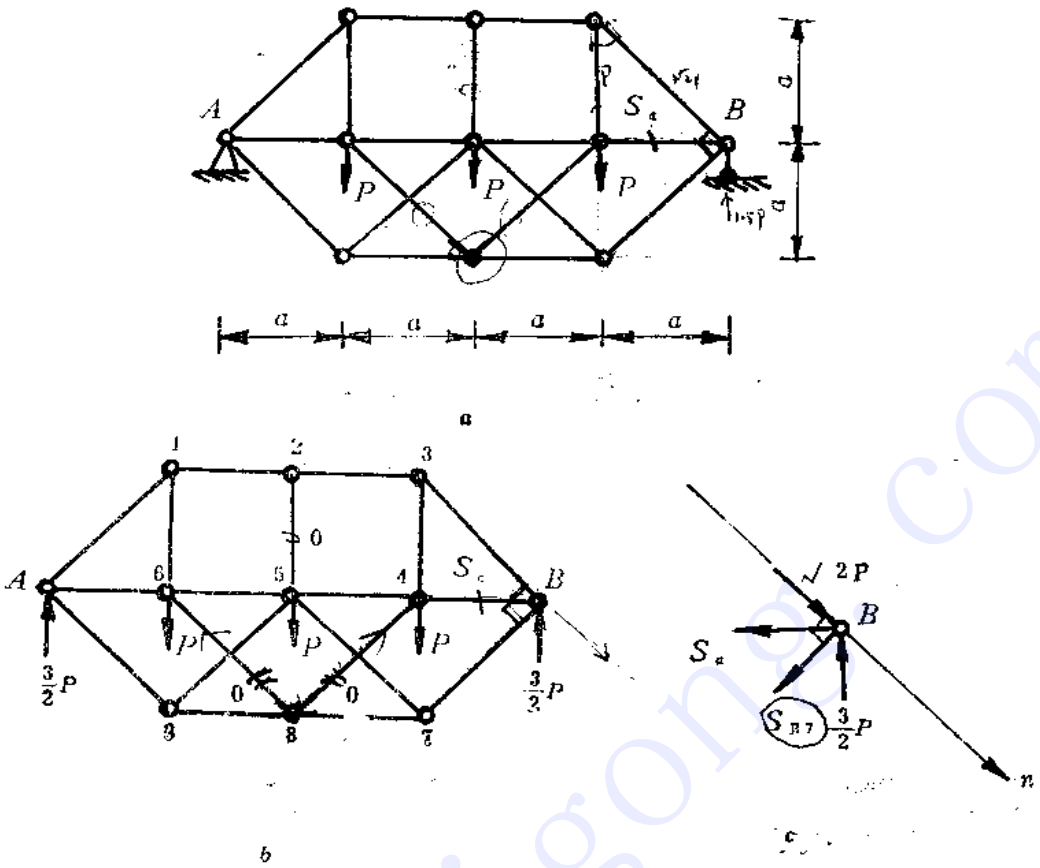



图 5—11

$$S_{3B} = -\sqrt{2}P \quad (压)$$

取结点 $B$ 为研究对象（如图 5—11$c$），则

$$\Sigma n = 0 \qquad -S_a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}P - \frac{3}{2}P \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$S_a = \frac{1}{2}P \quad (拉)$$

**题 5—12** 利用对称条件求图 5—12$a$ 所示桁架 A 点、$B$ 点的支座反力。

**解：** 将荷载分解为正对称和反对称两组（如图 5—12$b$ 和 $c$ 所示），分别求出 $b$ 和 $c$ 两种情况下的 $A$ 和 $B$ 点的反力，然后相叠加即得到最终支反力。

对称情况（图 $b$）

$$S_{25} = S_{24} = 0$$

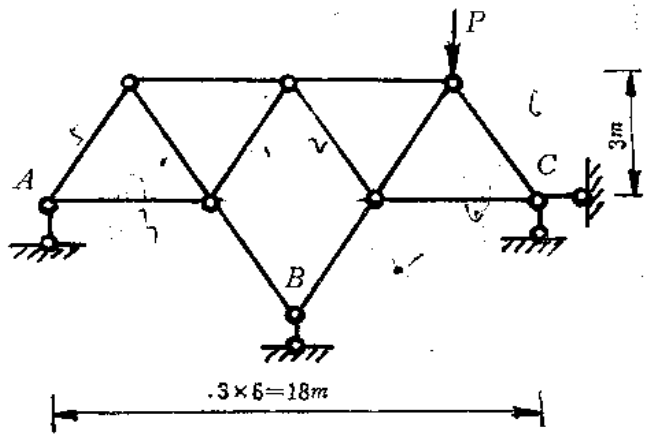
故 $S_{A5} = 0$

所以 $R_{A对} = 0$

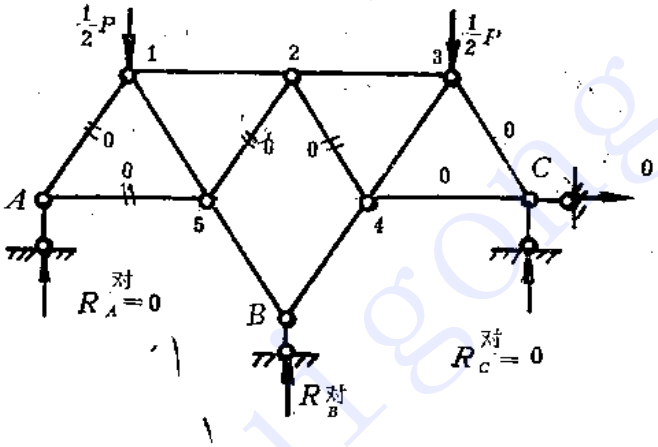
由对称性知： $R_{c对} = 0$

故 $R_{B对} = P \uparrow$

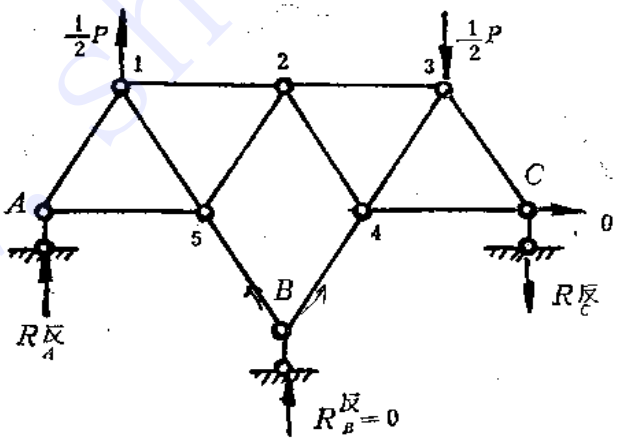
由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！




a




b




c

图 5—12

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

反对称情况（图 $c$）：

由反对称条件和平衡条件得

$$R_B^{反}=0$$

$$\Sigma M_c=0 \qquad R_A^{反}\times 18+\frac{P}{2}\times 15-\frac{P}{2}\times 3=0$$

$$R_A^{反}=-\frac{1}{3}P\downarrow$$

最终支反力

$$R_A=R_A^{对}+R_A^{反}=0+\left(-\frac{1}{3}\right)P=-\frac{1}{3}P\downarrow$$

$$R_B=R_B^{对}+R_B^{反}=P+0=P\uparrow$$

题 5—13　求图 5—13$a$ 所示结构的内力图.

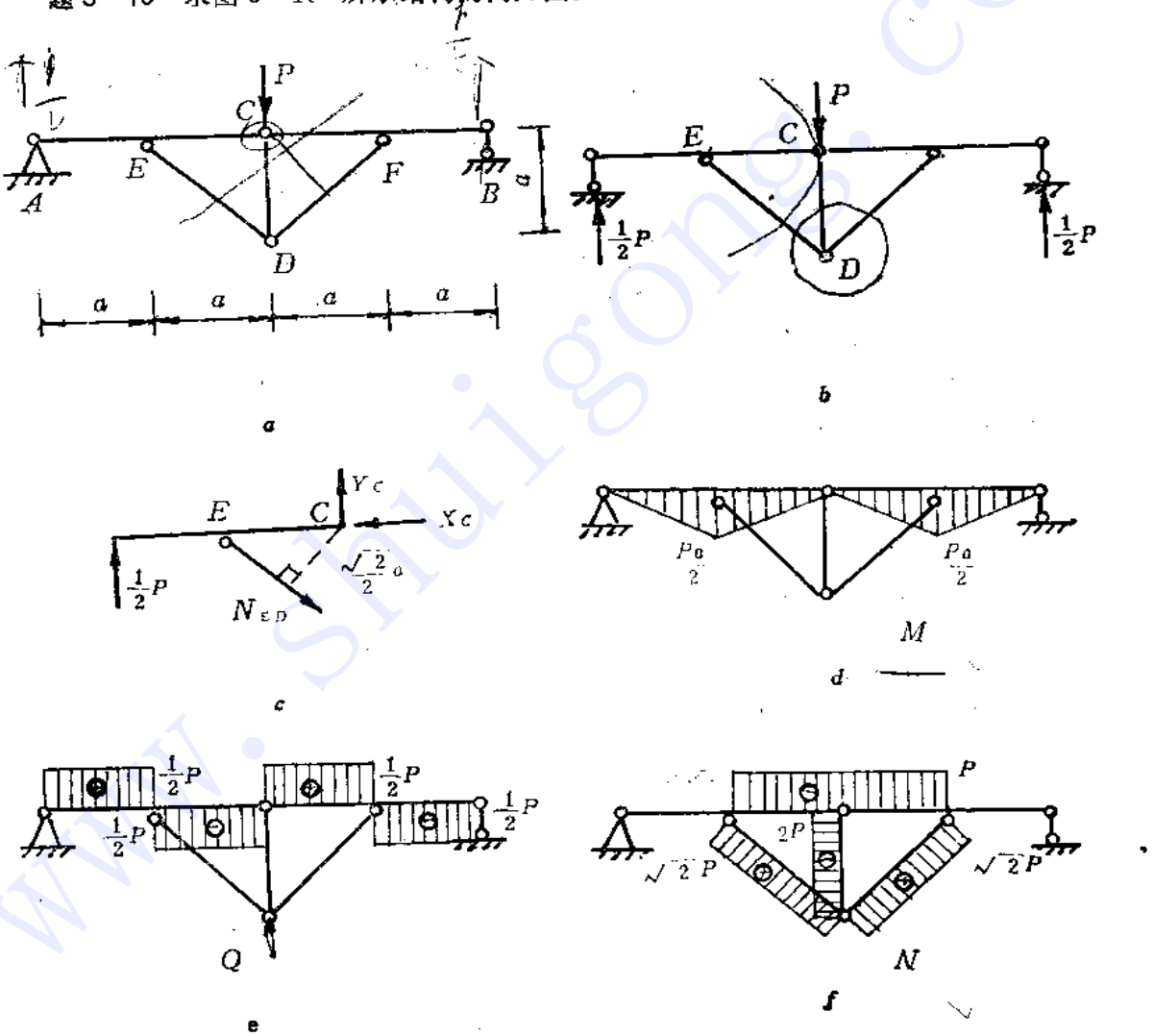



图　5—13

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

**解**：求反力

$$R_A = R_B = \frac{P}{2}$$

取图 5—13*b* 所示的截面，以左部为脱离体（如图 5—13*c* 所示），则

$$\Sigma M_c = 0 \qquad N_{ED}\frac{\sqrt{2}}{2}a - \frac{P}{2}\cdot 2a = 0$$

$$N_{ED} = \sqrt{2}P$$

$$\Sigma X = 0 \qquad X_C - \frac{\sqrt{2}}{2}N_{ED} = 0$$

$$X_C = P$$

$$\Sigma y = 0 \qquad Y_C + \frac{P}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}N_{ED} = 0$$

$$Y_C = +\frac{1}{2}P$$

由于结构是对称的，荷载也是对称的，所以右部的受力状态与左部一样。

取结点 $D$，则

$$\Sigma y = 0 \qquad N_{CD} + 2N_{ED}\cos 45^\circ = 0$$

$$N_{CD} = -2\sqrt{2}P\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$N_{CD} = -2P$$

绘内力图

$AC$、$BC$杆是受弯杆件，同时存在三种内力（弯矩剪力和轴力），而 $ED$、$FD$、$CD$ 只受轴力作用，无弯矩和剪力作用。

弯矩图：如图 5—13*d* 所示。

剪力图：由图 5—13*c* 的受力状态很容易得到图 5—13*e* 所示的剪力图。

轴力图：由图 5—13*c* 的受力状态可以看到 $AC$ 杆的轴力在 $AE$ 段值为 0，在 $EC$ 段值为 $X_C$，受压。其余杆件的内力前面已求出。轴力图如图 5—13*f* 所示。

**题 5—14** 求图 5—14*a* 所示结构的内力图。

**解**：支反力全部为零。

取结点 $C$ 如图 5—14*b* 所示，则

$$\Sigma X = 0 \qquad N_{AC}\cos 45^\circ - P = 0$$

$$N_{AC} = \sqrt{2}P$$

$$\Sigma y = 0 \qquad N_{CE} + N_{CA}\cos 45^\circ = 0$$

$$N_{CE} = -P$$

由对称性得 $\qquad N_{BD} = \sqrt{2}P \qquad N_{FD} = -P$

绘内力图

弯矩图：$AB$梁是受弯杆件，弯矩图如图 5—14*d* 所示。

剪力图：由图 5—14*c* 可以得到剪力图如图 5—14*e* 所示。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途!

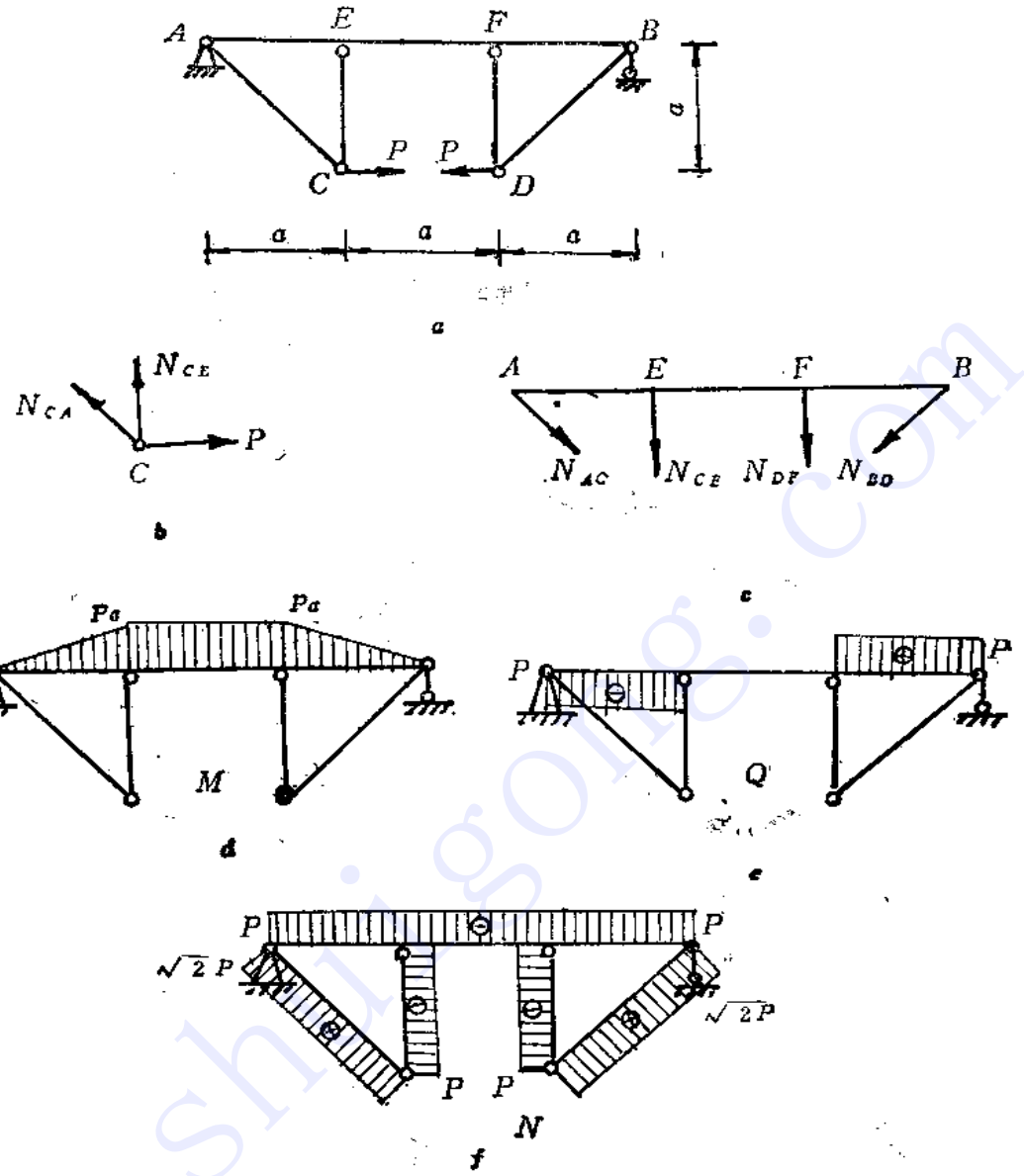



图 5—14

轴力图：由图 5—14*c* 可以得到 *AB* 杆的轴力为 *P* 且受压，其余杆的轴力上面已经求出．其轴力图如图 5—14*f* 所示．

**题 5—15** 求图 5—15*a* 所示结构的内力图．

**解**：受力状态如图 5—15*b* 所示．*AC*、*BC* 实质是两个简支梁，*DC* 杆相当于这两个梁的共同支座，所以 *DC* 杆的受力应为

$$N_{DC}=\frac{qa}{2}+\frac{qa}{2}=qa$$

取图 5—15*c* 所示的脱离体，则

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

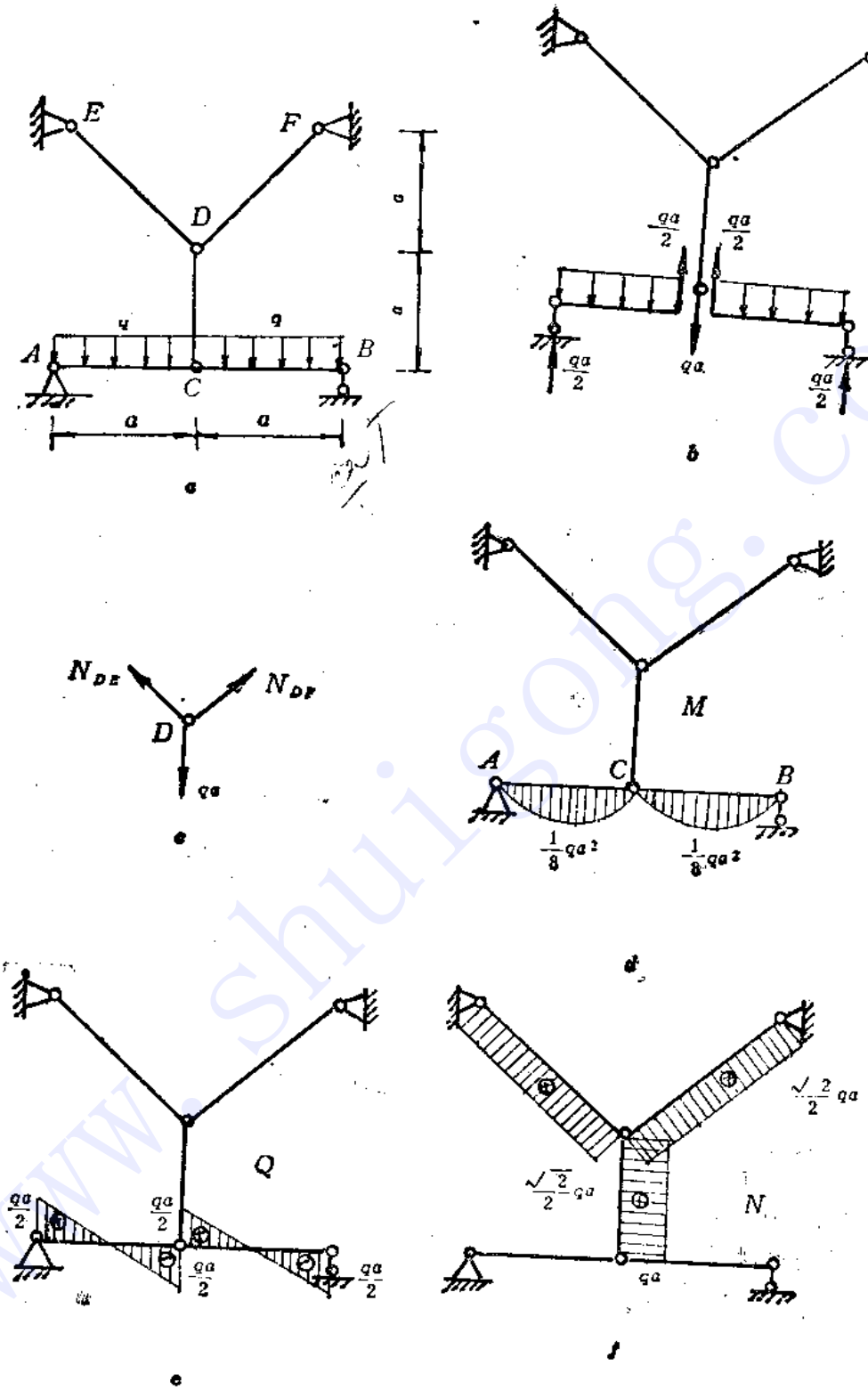



图 5—15

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$$\Sigma y=0 \quad N_{DE}\frac{\sqrt{2}}{2}+N_{DF}\frac{\sqrt{2}}{2}=qa$$

由对称性

$$\sqrt{2}N_{DE}=qa$$

$$N_{DE}=N_{DF}=\frac{\sqrt{2}}{2}qa$$

弯矩图：$AC$、$CB$ 是受弯杆件，弯矩图如图 5—15$d$ 所示。

剪力图：只有 $AC$、$CB$ 存在剪力，如图 5—15$e$ 所示。

轴力图：$CD$、$ED$、$DF$ 只受轴向拉力，$AC$、$CB$ 不存在轴力。轴力图如图 5—15$f$ 所示。

**题 5—16** 求图 5—16$a$ 所示结构的内力图。

**解**：首先进行构造分析。取出附属部分（如图 5—16$b$ 所示），求出 $D$ 点的约束反力（图 5—16$b$），将此约束力反其指向作用在基本部分上如 5—16$c$ 所示。取图 5—16$c$ 中所示的截面，以上部为脱离体，则

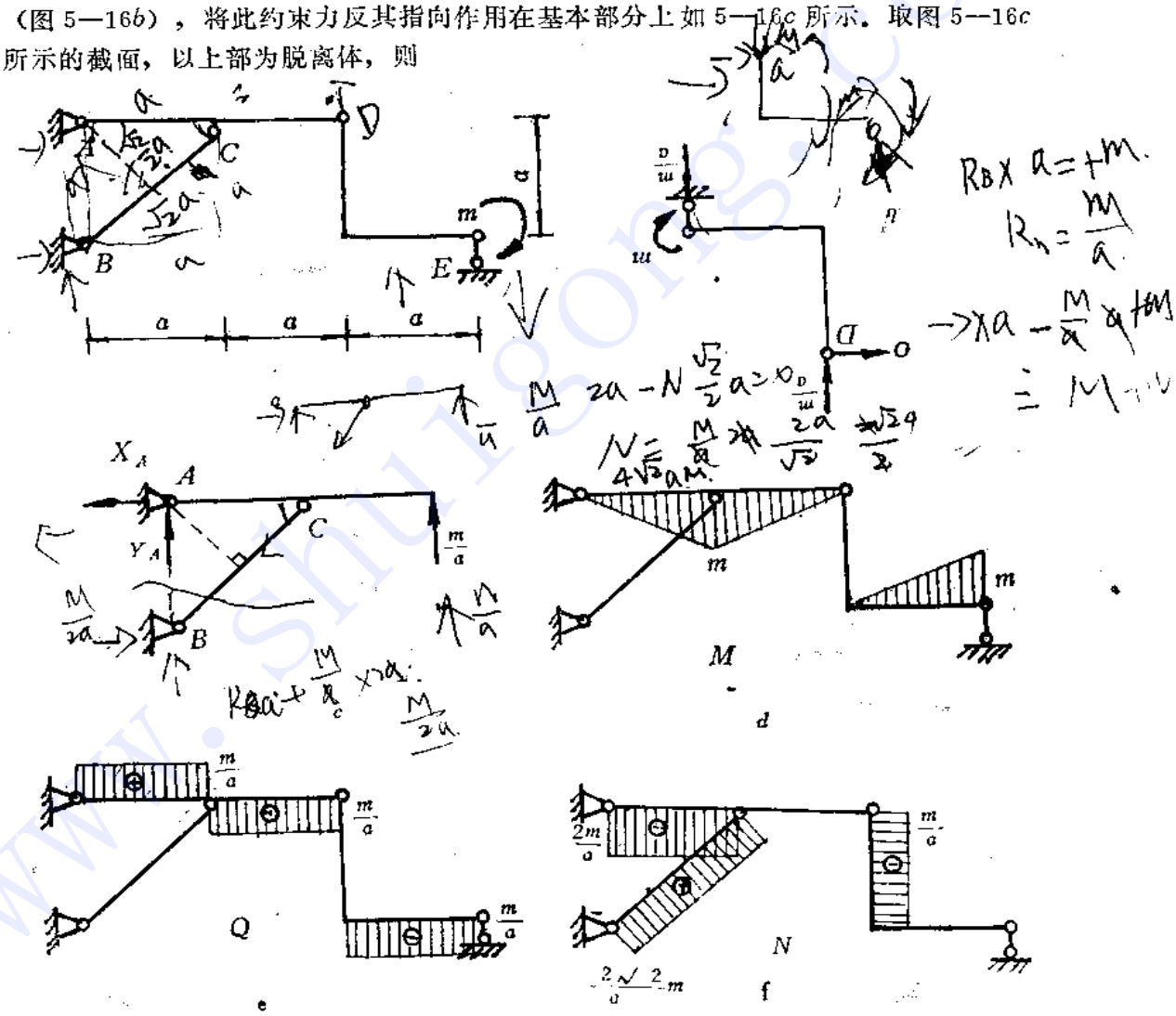



图 5—16

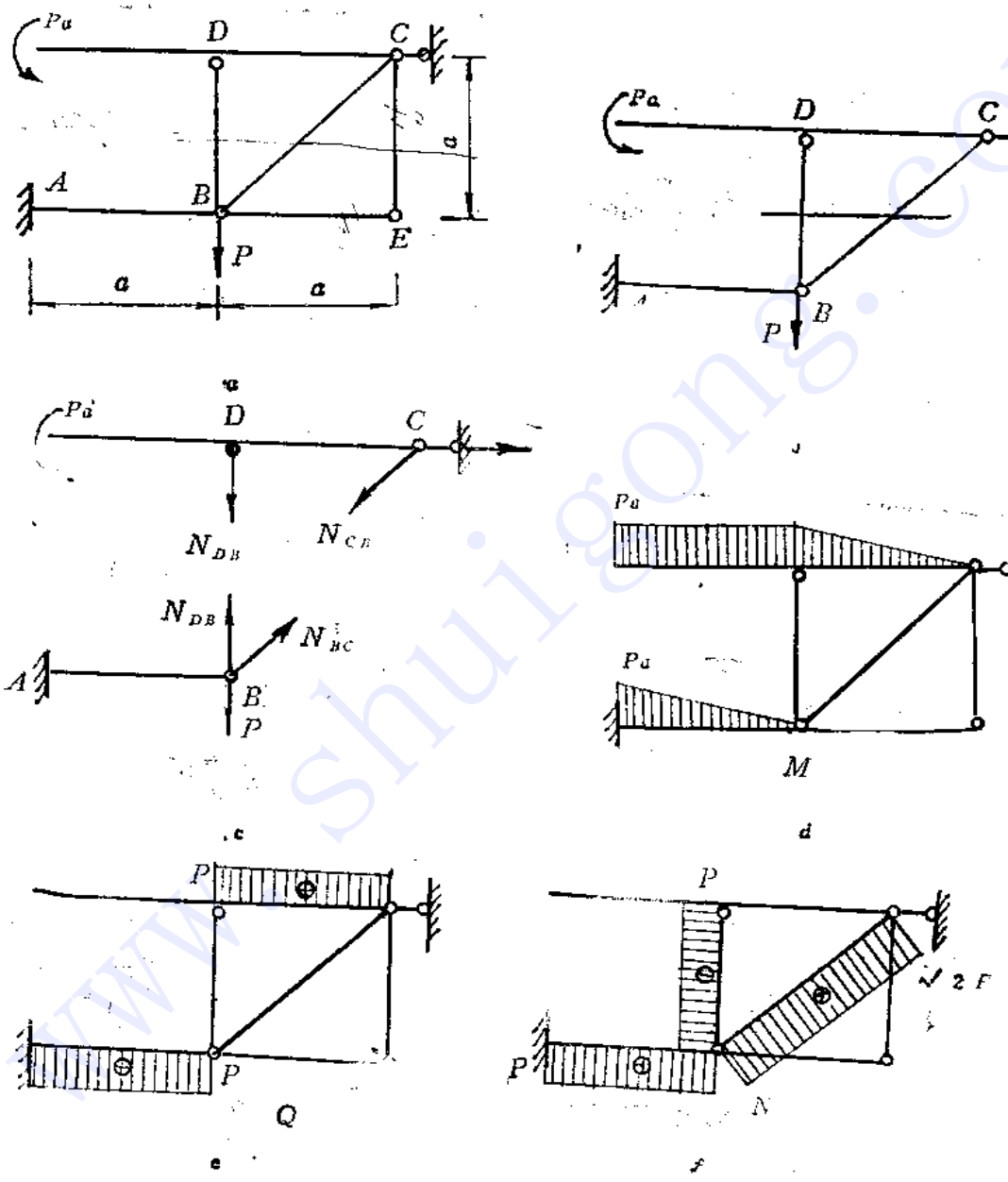
由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$$\Sigma M_A = 0 \quad N_{BC}\frac{\sqrt{2}}{2}a - \frac{m}{a}\cdot 2a = 0$$

$$N_{BC} = 2m\cdot\frac{2}{\sqrt{2}a} = \frac{2\sqrt{2}m}{a}$$

$$\Sigma X = 0 \quad X_A + N_{BC}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$X_A = -\frac{2m}{a}$$




a　　b　　c　　d　　e　　f

图　5—17

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$$\Sigma y=0 \qquad Y_A+\frac{m}{a}-N_{BC}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=0$$

$$Y_A=\frac{2m}{a}-\frac{m}{a}=\frac{m}{a}$$

由以上计算、可绘出此结构的内力图，它们分别由图 5—16*d*、*e*、*f* 所示。

**题 5—17** 求图 5—17*a* 所示结构内力图。

**解**：去掉零杆，*BE* 和 *CE* 取一截面如图 5—17*b* 所示。将结构分为两部分（如图 5—17*c* 所示），则

$$\Sigma M_C=0 \qquad N_{DB}a+Pa=0$$

$$N_{DB}=-P$$

$$\Sigma y=0 \qquad N_{DB}+N_{CB}\frac{\sqrt{2}}{2}=0$$

$$N_{CB}=-\sqrt{2}N_{DB}=\sqrt{2}P \text{（拉）}$$

由以上计算，可绘出此结构的弯矩图、剪力图、轴力图分别如图 5—17*d*、*e*、*f* 所示。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

# 第六章　用联系代替法解算静定结构

联系代替法是以静定结构的静力和几何条件为基础的解算静定结构的方法。其具体作法是将所给静定结构中的任意一个或几个联系去掉，用相应的力代其作用。与此同时在结构的另外部分加上同样数目的联系，这样所得到的结构叫做替用结构，被去掉的联系叫做被代替联系，加上去的联系叫做替用联系。利用在替用结构上替用联系的内力为零的条件，根据叠加原理求出被代替联系的内力，从而解算出所给结构在已知荷载作用下的内力。

这种方法可用来校核其它方法的计算结果。当体系的几何构造较复杂时，可以通过这种方法将其转换为简便易算的结构。当然，所选用的替用结构必须是几何不变的。

本章习题只介绍有一个联系被代替的情况，下边用简单的例题说明计算原理并解算部分习题。

**例题**：用联系代替法解算静定刚架（图 1）的内力。

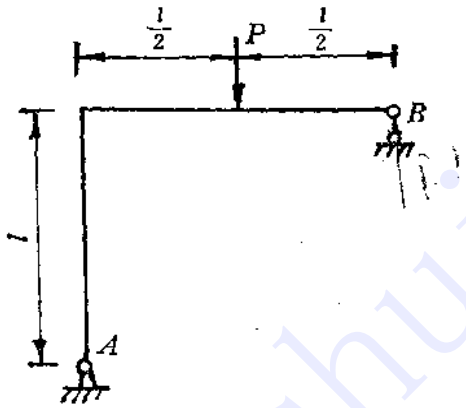



图 1

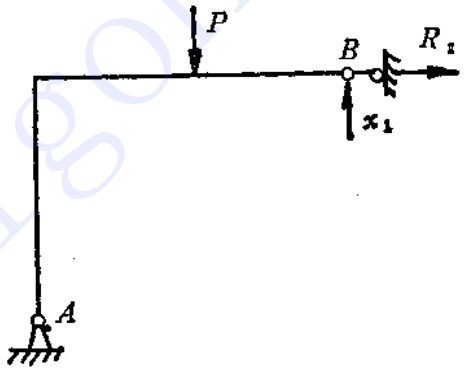



图 2

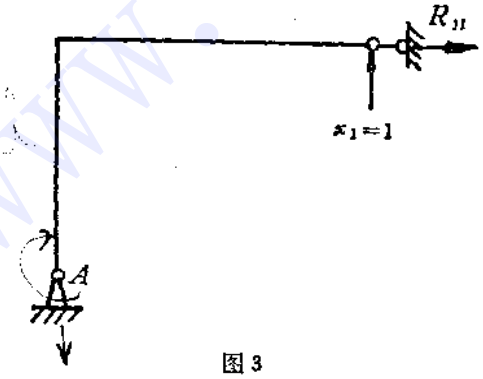



图 3

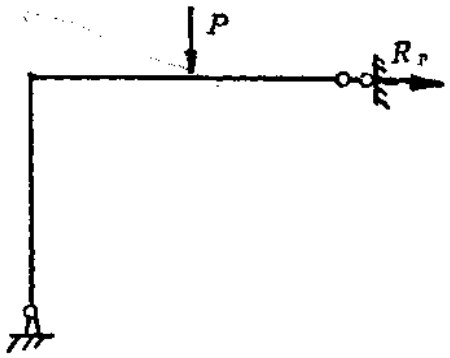



图 4

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

**解**：1)将图1$B$处竖向支杆去掉，用力$X_1$代其作用，加上水平支杆得到替用结构如图2。

2)在替用结构上，由于水平支杆是不存在的，故其反力为零，即：

$$R_1 = 0$$

由图3、4知

$$R_1 = X_1 R_{11} + R_P = 0$$

故

$$X_1 = -\frac{R_P}{R_{11}}$$

$X_1$——被替用联系的反力；

$R_{11}$——只有$X_1 = 1$作用时替用联系的反力；

$R_P$——只有外荷载作用时替用联系的反力。

3)由图3和图4分别求出$R_{11}$、$R_P$：

$$R_{11} = 1, R_P = -\frac{P}{2}\quad (\text{和 } R_{11} \text{方向相反})$$

则

$$X_1 = -\frac{R_P}{R_{11}} = -\left(-\frac{P}{2}\right)/1 = \frac{P}{2}$$

利用$X_1$就可以求得结构其它部分的内力。

计算步骤：

1)选择替用结构，即将结构某一联系（或几个联系）去掉，在结构其它部分加上另一联系（或几个联系），以未知力代替原来联系的作用，可得到替用结构。

2)写出替用联系的反力（或内力）的表达式，令其为零。即：

$$R_1 = R_{11} X_1 + R_P = 0\ (\text{去掉一个联系的情况})$$

3)分别求出$R_{11}$、$R_P$，从而得到$X_1$。

4)根据所求得的$X_1$来求出结构其它部分的内力，绘出内力图。

应当注意：替用结构的形式可能是多种多样的（对同一个结构而言），但都必须满足几何不变性。所以，应用此法进行结构计算时，适当选择替用结构能使计算得到简化。无论采用那种替用结构，计算结果应是一样的。

**习题及解答**

**题6—1** 求图6—1$a$所示结构$B$点的支反力。

**解**：选择替用结构如图6--1$b$所示，因原结构在$A$点没有限制转动的约束，故

$$M_A = 0$$

即

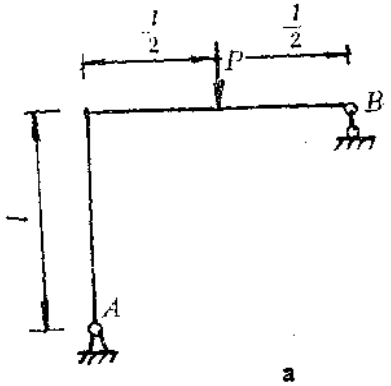
$$M_A = M_1^A X_1 + M_P^A = 0$$

$$X_1 = -\frac{M_P^A}{M_1^A}$$

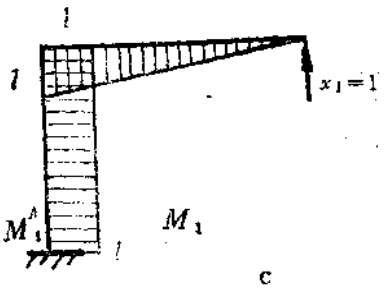
分别作出$M_1$，$M_P$图如图6—1$c$、$d$所示，

$$M_1^A = l \qquad M_P^A = -\frac{Pl}{2}\quad (\text{设 } M \text{ 图在内侧为正})$$

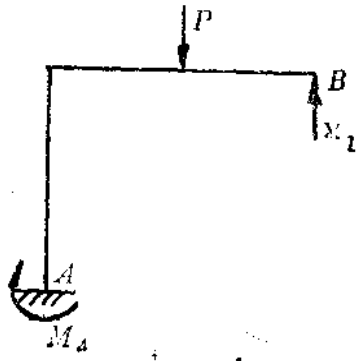
由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！



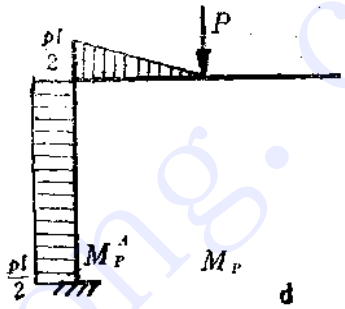

a




c




b




d

图 6—1

则 $$X_1 = -\left(-\frac{Pl}{2}\right)/l = \frac{P}{2}$$

由此可见，所得结果与上例相同。

**题 6—2** 求图 6—2*a* 所示三铰刚架的 $M$ 图。

**解：** 取替用结构如图 6—2*b* 所示，即

$$M_C = M_1^C X_1 + M_P^C = 0$$

$$X_1 = -\frac{M_P^C}{M_1^C}$$

当 $M_1^C$、$M_P^C$ 在同侧时，$X_1$ 为负，$M_1^C$、$M_P^C$ 在异侧时，$X_1$ 为正。这由 $M_1$，$M_P$ 图可以得到。

由图 $M_1$ 即图 6—2*c* 所示得

$$M_1^C = l$$

由图 $M_P$ 即图 6—2*d* 所示得

$$M_P^C = \frac{Pl}{2}$$

由于 $M_1^C$、$M_P^C$ 在异侧，故

$$X_1 = \frac{Pl}{2}/l = \frac{P}{2}$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

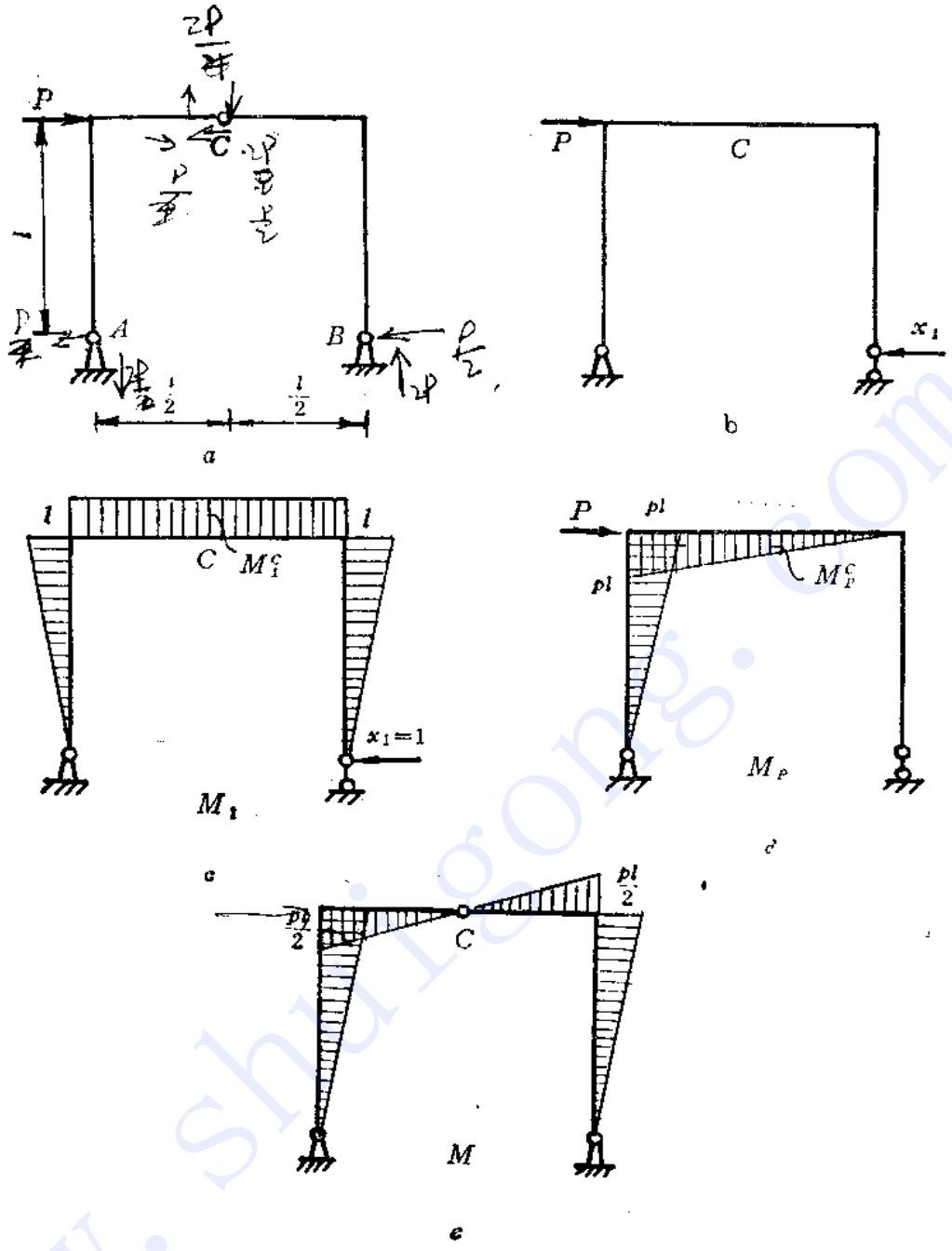



图 6—2

而最后弯矩应为

$$M = M_1 X_1 + M_1$$

$M$ 图如图 6—2e 所示。

**题 6—3** 用联系代替法绘制图 6—3a 所示刚架的内力图。

**解：** 取图 6—3b 所示的替用结构，则

$$R = R_{11} X_1 + R_P = 0$$

分别作出由 $X_1 = 1$、$P$ 单独作用下的 $M_1$、$M_P$ 图（如图 6—2c、d 所示），并求出

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

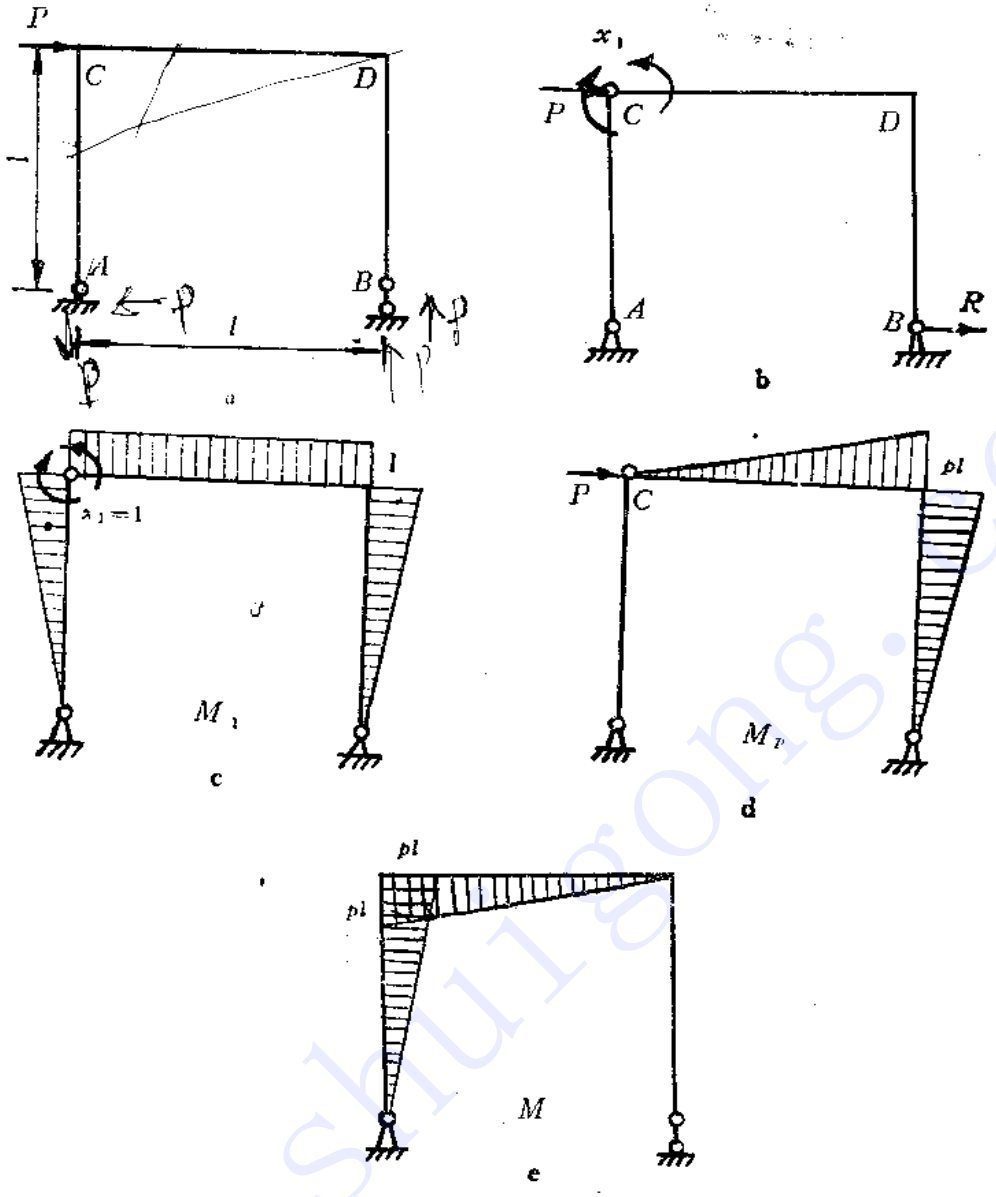



图 6—3

$$R_{11}=-\frac{1}{l},\quad R_P=-P\ (\text{设向右为正})$$

所以 $$X_1=-P/\frac{1}{l}=-Pl$$

由 $$M=M_1X_1+M_P$$

得到 $M$ 图如图 6—3*e* 所示.

此题的替用结构不是最简单的，只是说明可以采用这种形式的替用结构，最简便的方法请读者自行考虑.

**题 6—4** 用联系代替法求图 6—4*a* 所示结构的 $M$、$Q$、$N$ 图.

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

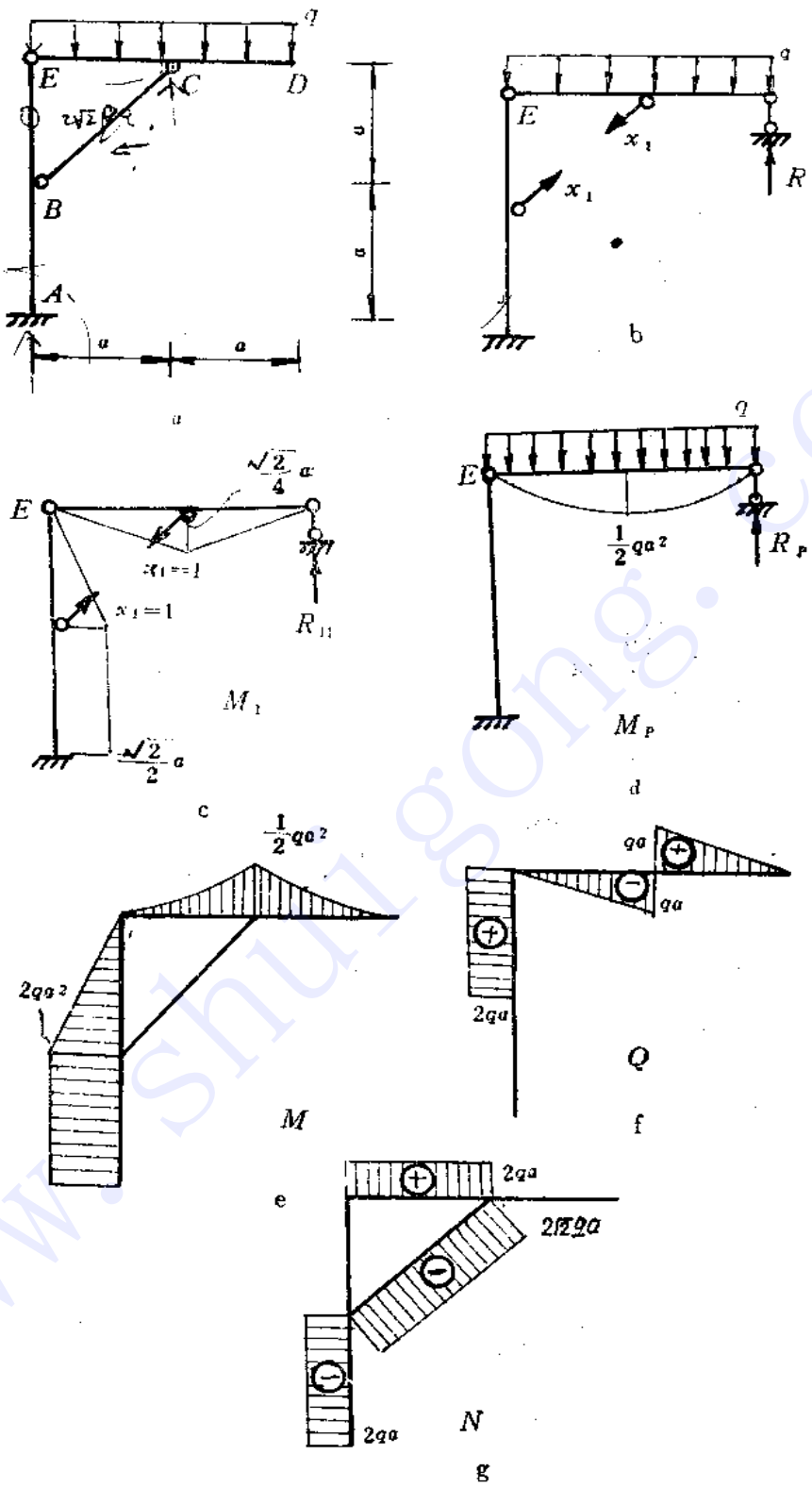



图 6—4

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

**解**：取图 6—4*b* 所示的替用结构，则

$$R = R_{11}X_1 + R_P = 0$$

由图 6—4*c* 得

$$\Sigma M_E = 0 \qquad R_{11}2a - \frac{\sqrt{2}}{2} \times 1 \times a = 0$$

$$R_{11} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

由图 6—4*d* 得

$$\Sigma M_E = 0 \qquad R_P \cdot 2a - 2qa \cdot a = 0$$

$$R_P = qa$$

则

$$X_1 = -\frac{R_P}{R_{11}} = -qa/\frac{\sqrt{2}}{4} = -2\sqrt{2}qa$$

由 $M = M_1X_1 + M_P$ 求出 $M$ 图如图 6—4*e* 所示。然后根据 $M$ 图求出 $Q$ 图、$N$ 图如图 6—4*f*、*g* 所示。

**题 6—5** 用联系代替法求解三铰刚架弯矩图（如图 6—5*a* 所示）。

**解**：取如图 6—5*b* 所示的替用结构则

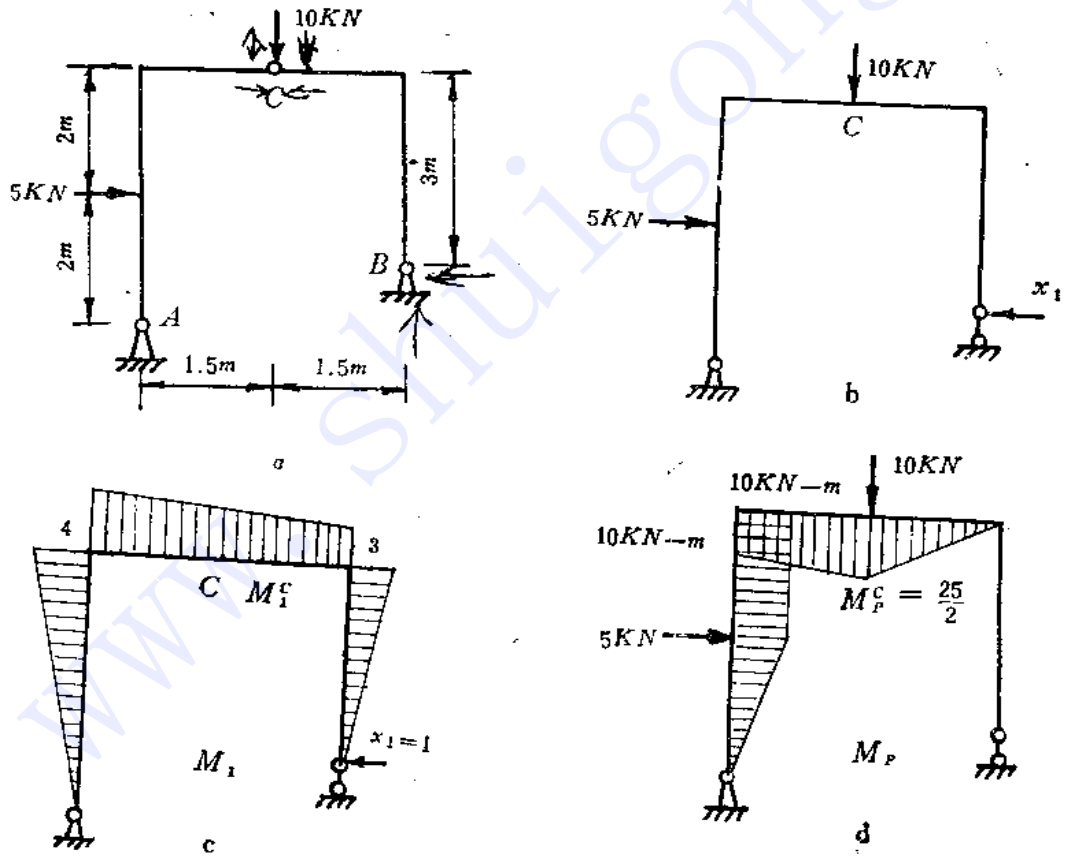
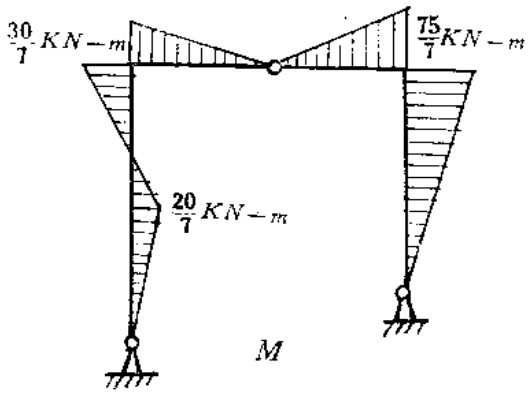



图 6—5

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！




e

图 6—5

$$M_C = M_1^c X_1 + M_P^c = 0$$

分别作出 $M_1$、$M_P$ 图（如图 6—5c、d 所示）。

$$M_1^c = \frac{7}{2} \qquad M_P^c = \frac{25}{2}$$

又 $M^c$、$M_P^c$ 在异侧，故

$$X_1 = \frac{25}{2} / \frac{7}{2} = \frac{25}{7}$$

$$M = M_1 X_1 + M_P$$

$M$ 图如图 6—5e 所示。

由此看到，对于这类三铰刚架（$AB$ 二铰不在一条水平线上）用这种方法计算比较简单。

**题 6—6** 用联系代替法求图 6—6a 所示组合结构的内力图。

**解**：取图 6—6b 所示的替用结构，则

$$R = R_{11} X_1 + R_P = 0$$

分别由图 6—6c、d 求得 $R_{11}$ $R_P$：

$\Sigma M_D = 0$ $\quad -1 \times 2a + R_{11} \times 3a = 0$

得 $\quad R_{11} = 2/3$

$\Sigma M_D = 0$ $\quad R_P \times 3a - P \times 2a = 0$

得 $\quad R_P = 2/3P$

故 $X_1 = -\frac{R_P}{R_{11}} = -P \downarrow$ $\qquad X_1 = R_B$

求得 $R_B$ 之后，可按一般方法求得 $M$ 图如图 6—6e 所示，根据 $M$ 图求得 $Q$ 图、$N$ 图分别如图 6—6f，g 所示。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

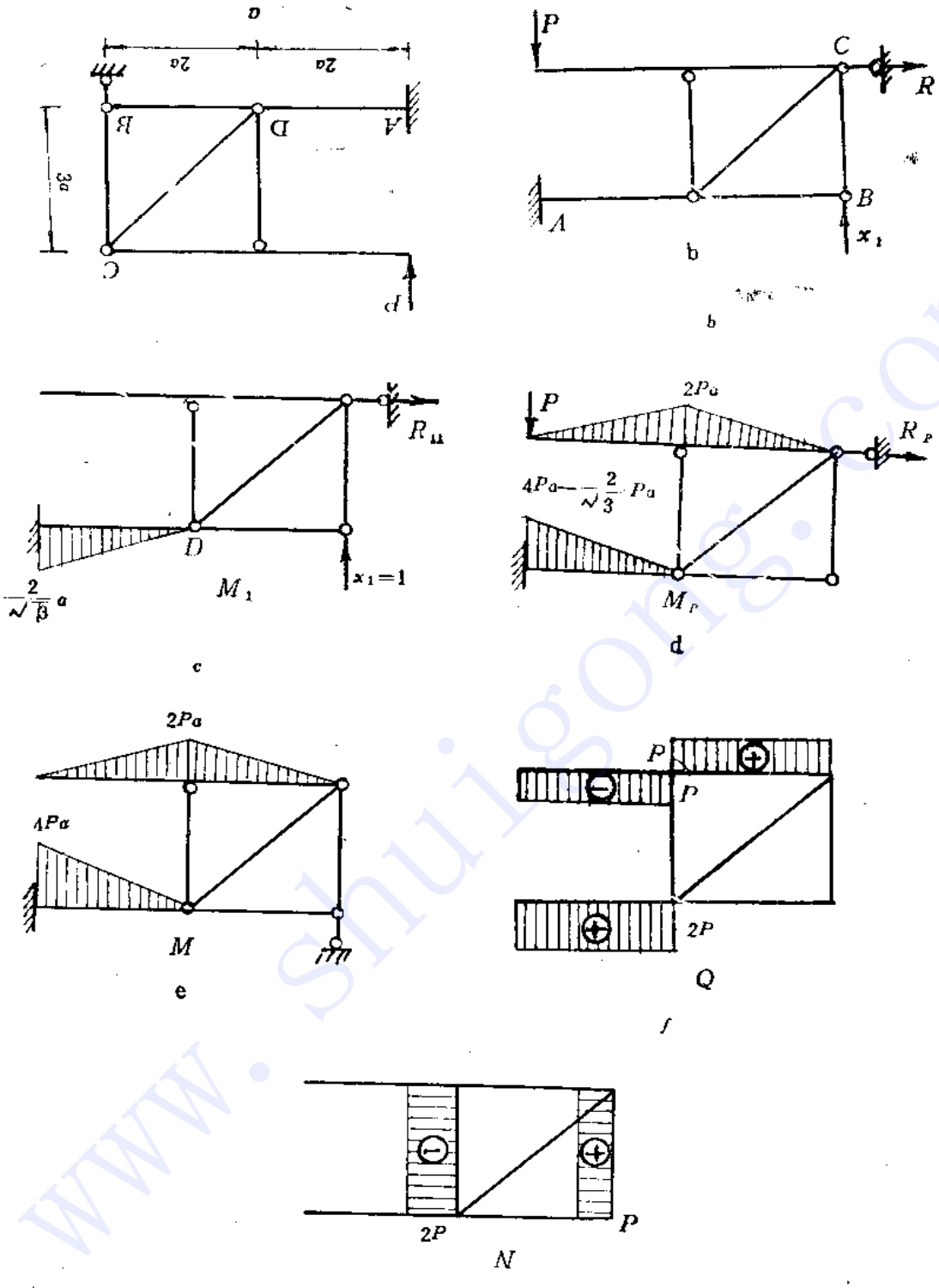



图 6—6

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

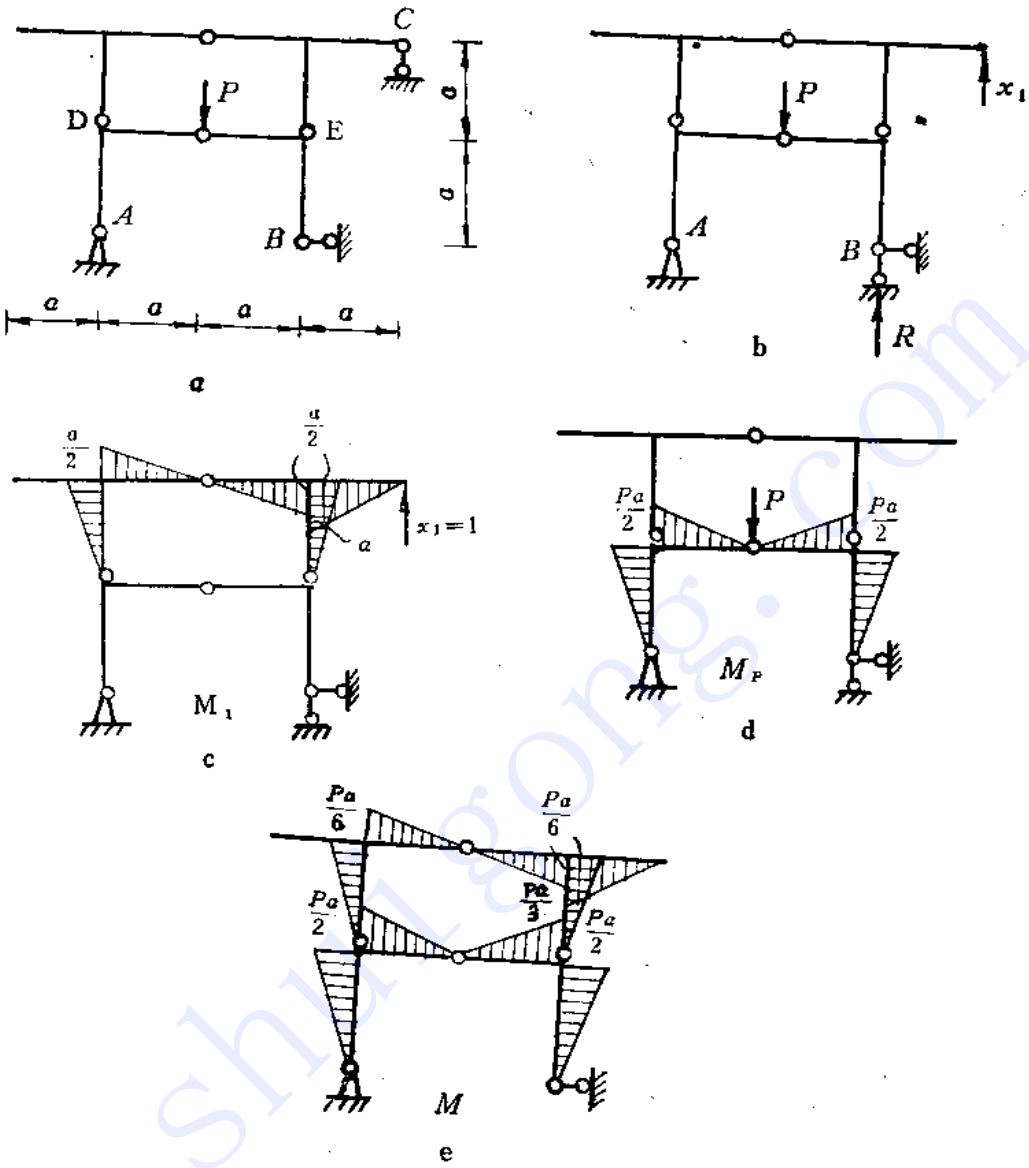



图 6—7

**题 6—7** 用联系代替法解图 6—7*a* 所示结构的 $M$ 图。

**解：** 取如图 6—7*b* 所示的替用结构，则

$$R = R_{11}X_1 + R_P = 0$$

分别绘出 $M_1$、$M_P$ 图如图 6—7*c*、*d* 所示。

由图 6—7*c* 得

$$R_{11} = \frac{3}{2}$$

由图 6—7*d* 得

$$R_P = -\frac{P}{2}$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

故 $$X_1 = -\frac{R_P}{R_{11}} = \frac{P}{2}/\frac{3}{2} = \frac{P}{3}$$

利用 $M = M_1 X_1 + M_P$ 求得 $M$ 图如图 6—7e 所示。

**题 6—8** 用杆件代替法求图 6—8a 所示结构 $A$、$B$ 两点的反力和内力 $S_{CD}$（联系代替法用于桁架时叫做杆件代替法）。

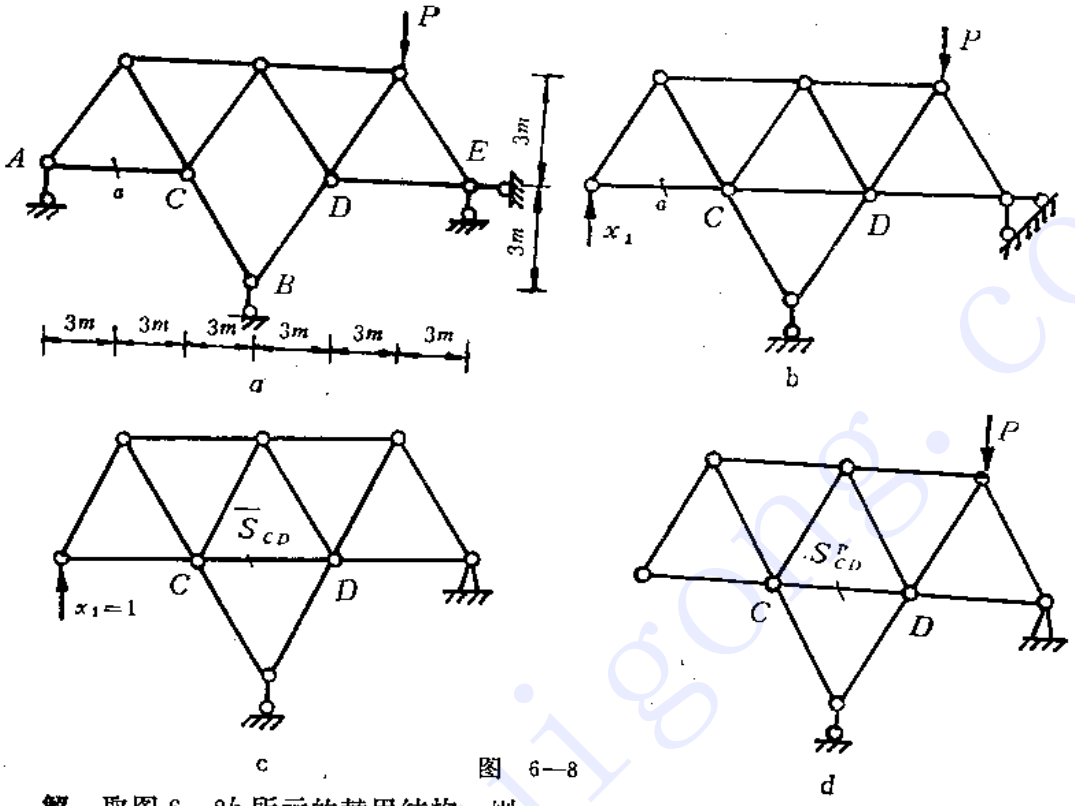



图 6—8

**解**：取图 6—8b 所示的替用结构，则

$$S_{CD} = \overline{S}_{CD} x_1 + S^P_{CD} = 0$$

$\overline{S}_{CD}$——由于 $X_1 = 1$ 引起的替用杆内力；

$S^P_{CD}$——由于外荷作用引起的替用杆内力。

由图 6—8c 求得 $\overline{S}_{CD} = 1$

由图 6—8d 求得 $S^P_{CD} = P/3$

故 $$X_1 = -\frac{S^P_{CD}}{\overline{S}_{CD}} = -\frac{P}{3}$$

任意杆件的内力： $S = \overline{S} x_1 + S^P$

$\overline{S}$——$X_1 = 1$ 引起替用结构任意杆的内力（或反力）；

$S^P$——外荷单独作用引起与 $\overline{S}$ 相应杆件的内力（或反力）。

所以 $$\overline{R}_A = \overline{R}_A x_1 + R^P_A = 1 \times \left(-\frac{P}{3}\right) = -\frac{P}{3}\downarrow$$

$$R_B = \overline{R}_B x_1 + R^P_B = -2 \times \left(-\frac{P}{5}\right) + \frac{P}{3} = P\uparrow$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$$S_a = \overline{S}_a x_1 + R_a^p = 1 \times \left(-\frac{P}{3}\right) + 0 = -\frac{P}{3}$$

**题 6—9** 用杆件代替法求桁架指定杆件的内力 $N_a$（如图 6—9*a* 所示）。

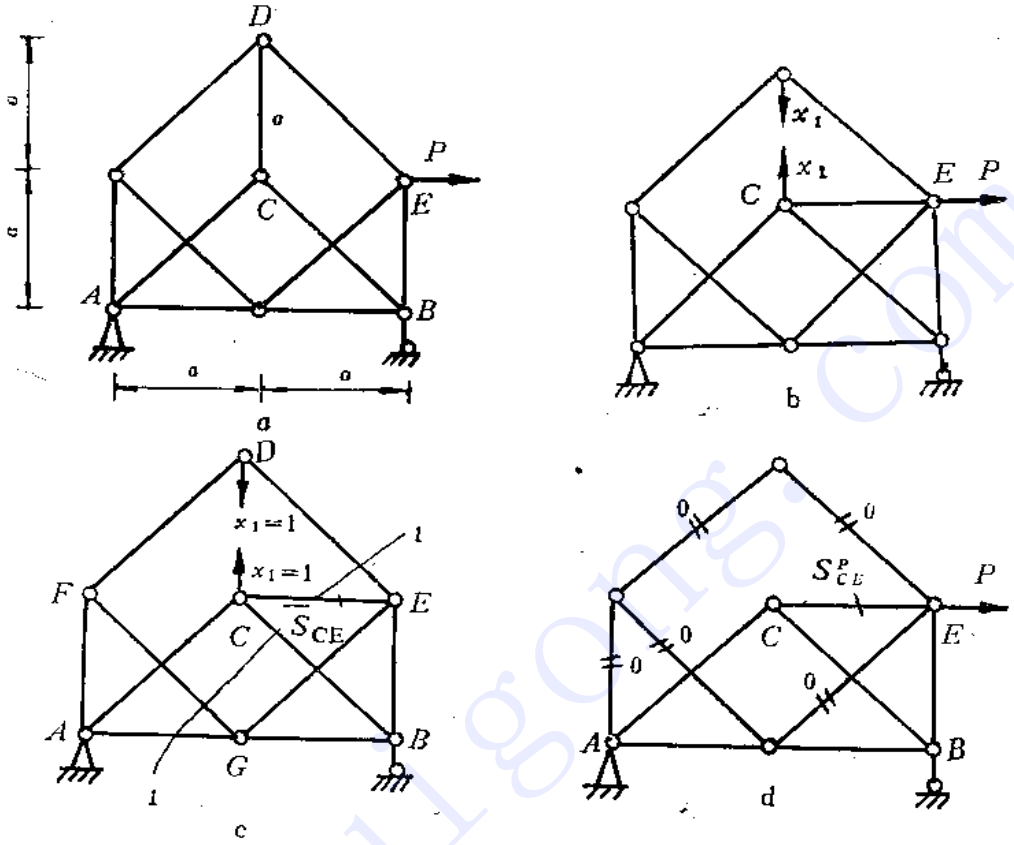



图 6—9

**解**：取图 6—9*b* 所示的替用结构，则

$$S_{CE} = \overline{S}_{CE} X_1 + S^P_{CE} = 0$$

由图 6—9*c* 得

$$\overline{R}_A = R_B = 0$$

取结点 $D$ $\quad S_{DF} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$，$S_{DE} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

取结点 $F$ $\quad S_{FG} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

取截面 1—1 $\quad \Sigma M_B = 0 \quad S_{FG}\frac{\sqrt{2}}{2}a + S_{DE}\frac{\sqrt{2}}{2}a - S_{CE}a = 0$

得 $\quad \overline{S}_{CE} = 1$

由图 6—9*d* 得

$$R_A^p = -\frac{P}{2}\downarrow \qquad R_B^p = \frac{P}{2}\uparrow$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

取结点 $A$　　$S_{AC}^{P}=\frac{\sqrt{2}}{2}P$

取结点 $C$　　$S_{CE}^{P}=P$

故　　$X_1=-S_{CE}^{P}/\overline{S}_{E}=-P$

即　　$S_a=-P$

**题 6—10**　用杆件代替法求图 6—10*a* 所示结构指定杆件的内力 $S_a$、$S_b$。

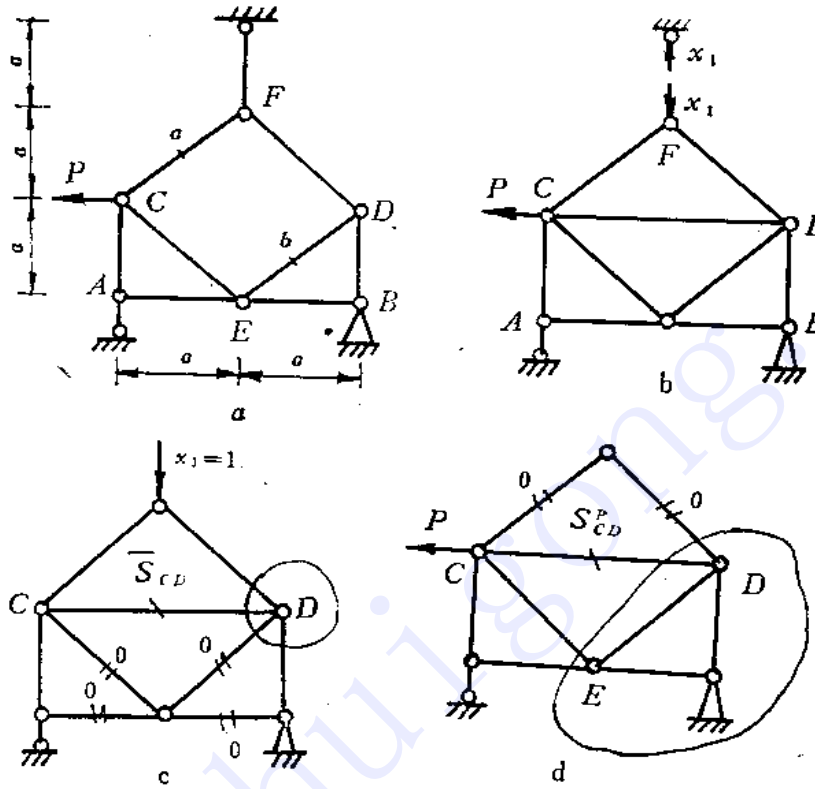



图　6—10

**解**：取图 6—10*b* 所示的替用结构，则

$$S_{CD}=\overline{S}_{CD}X_1+S_{CD}^{P}=0$$

由图 6—10*c* 得：　　$\overline{S}_{CD}=\frac{1}{2}$

由图 6—10*d* 得：　　$S_{CD}^{P}=\frac{P}{2}$

故　　$X_1=-S_{CD}^{P}/\overline{S}_{CD}=-P$

$$S_a=\overline{S}_aX_1+S_a^{P}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\times(-P)+0=\frac{\sqrt{2}}{2}P$$

$$S_b=\overline{S}_bX_1+S_b^{P}=0+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)P=-\frac{\sqrt{2}}{2}P$$

**题 6—11**　用联系代替法求图 6—11*a* 所示结构的 $M$ 图。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

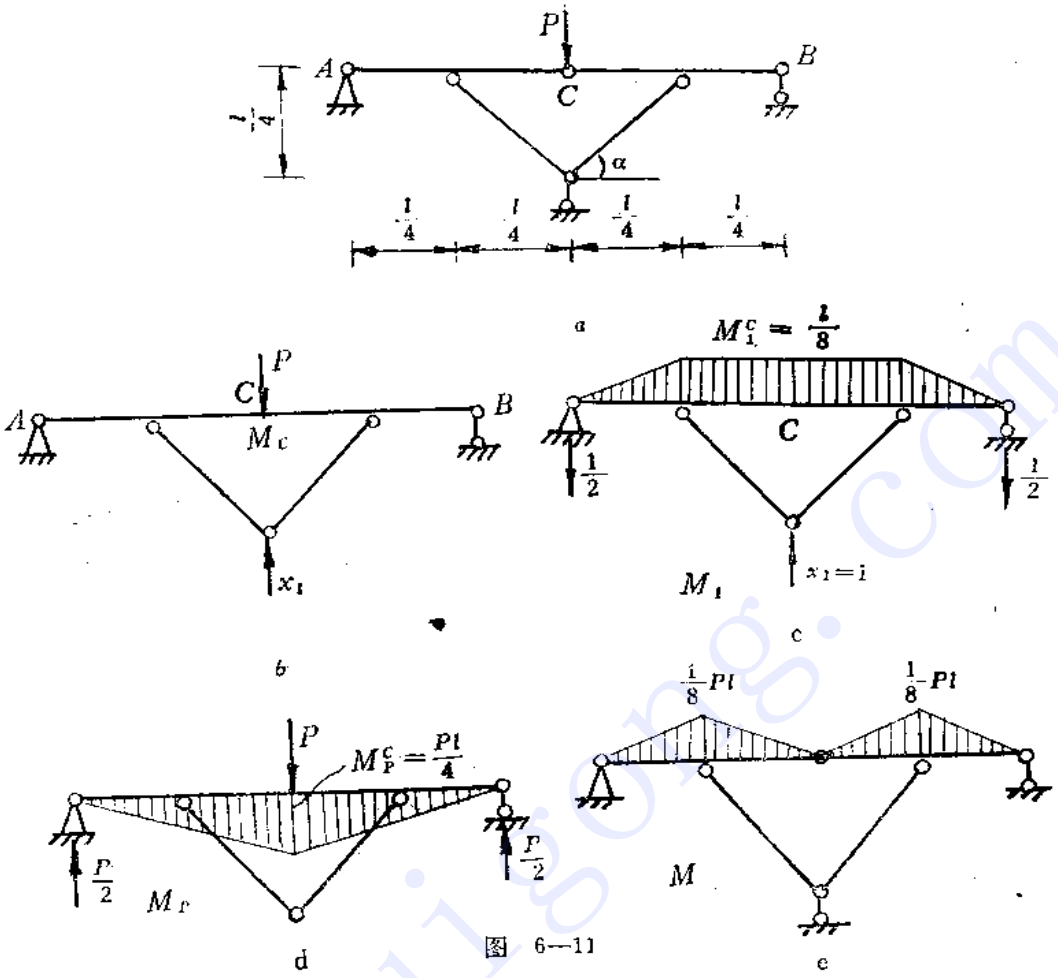



图 6—11

**解**：取如图 6—11*b* 所示的替用结构，则由于原结构 *c* 点弯矩为零的条件，有

$$M_C = M_1^C x_1 + M_P^C = 0$$

由图 $M_1$（如图 6—11*c*）得：

$$M_1^C = \left| -\frac{l}{8} \right|$$

由图 $M_P$（如图 6—11*d*）得，

$$M_P^C = \left| -\frac{Pl}{4} \right|$$

由于 $M_1^C$、$M_P^C$ 在 $C$ 点两侧，

所以

$$X_1 = \frac{M_P^C}{M_1^C} = 2P \uparrow$$

由结构的平衡条件和对称性知：

$$R_A = R_B = \frac{P}{2} \downarrow$$

$M$ 图如图 6—11*e* 所示，用式 $M = M_1 x_1 + M_P$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

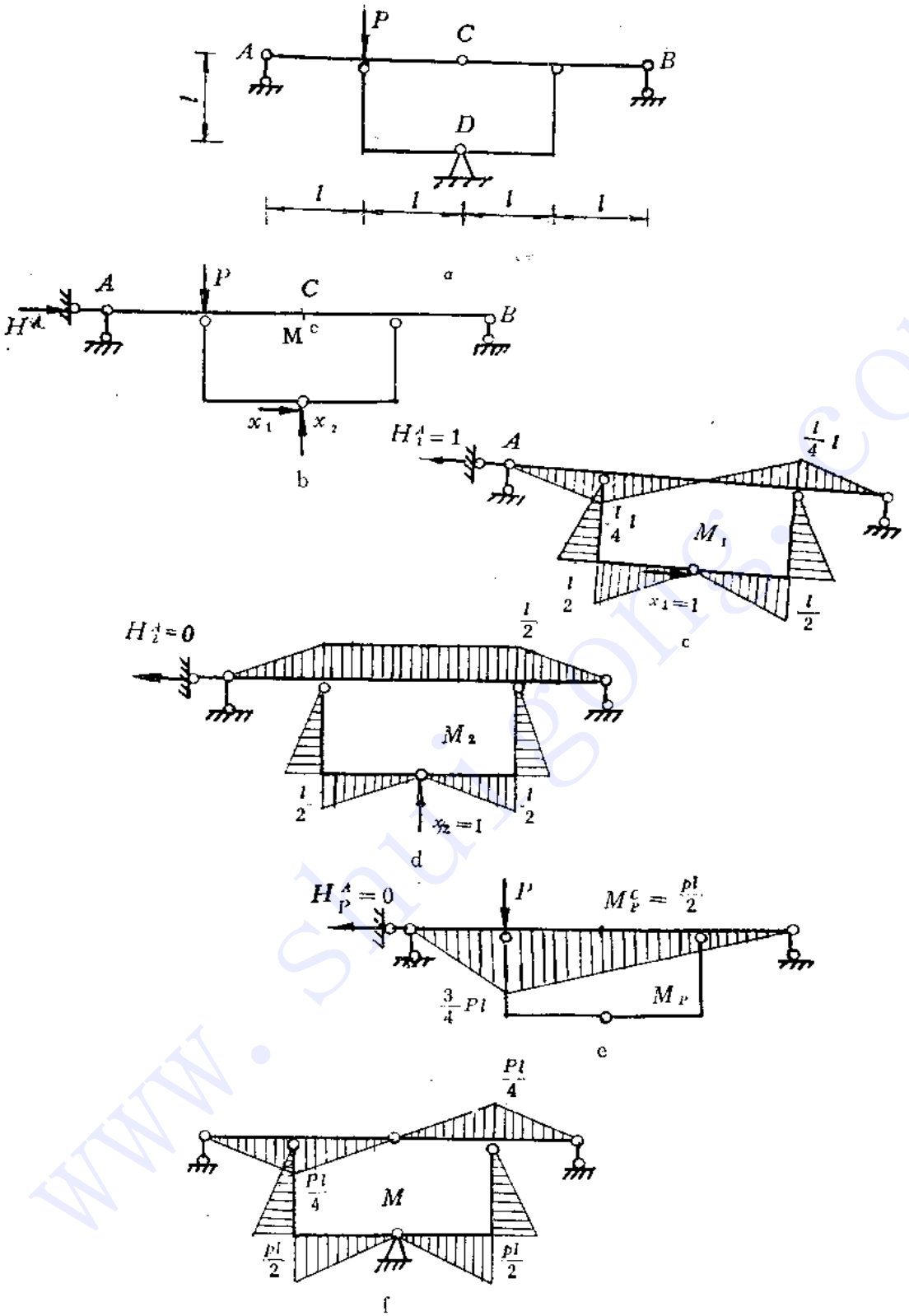



图 6—12

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

**题 6—12** 求图 6—12*a* 所示结构的 $M$ 图。

**解**：利用联系代替法求解。取图 6—12*b* 所示的替用结构，则由于原始条件，有

$$H^A = H_1^A x_1 + H_2^A x_2 + H_P^A = 0$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

# 第七章　静定结构影响线

**题 7—1**　求图 7—1 *a* 所示多跨静定梁的 $R_A$、$R_B$、$M_G$、$Q_G$、$M_H$、$Q_H$ 影响线。

**解**：$R_A$ 影响线：

由于 $AE$ 梁是附属部分，故当 $P=1$ 移至 $E$ 点以右时，$R_A=0$。而 $P=1$ 在 $AE$ 上移动时 $R_A$ 的影响线和简支梁反力影响线相同（如图 7—1 *b* 所示）。

$R_B$ 的影响线：

由于 $BC$ 梁是基本部分，故当 $P=1$ 在 $E$ 点以左或 $F$ 点以右时，$BC$ 梁都受力，$R_B$ 的影响线在 $EF$ 部分相当于简支伸臂梁的影响线，而 $P=1$ 在 $A$、$D$ 两点时，$R_B=0$。所以，分别将 $A$、$E$、$F$、$D$ 的值用直线连接起来就得到 $R_B$ 的影响线（如图 7—1 *c* 所示）。

$M_G$ 的影响线：

在 $AE$ 部分相当简支梁弯矩的影响线，其它部分为零（如图 7—1*d* 所示）。

$Q_G$ 的影响线：

在 $AE$ 部分相当简支梁剪力的影响线，其它部分为零（如图 7—1*e* 所示）。

$M_H$ 的影响线：

在 $EF$ 部分相当简支伸臂梁弯矩的影响线，$A$、$D$ 两点处 $M_H$ 值为零，用直线将各点值连接起来即得到 $M_H$ 的影响线（如图 7—1*f* 所示）。

$Q_H$ 的影响线：

在 $EF$ 部分相当简支伸臂梁剪力影响线，$A$、$D$ 两处的 $Q_H$ 值为零，所以将各点值用直线连接起来即得到 $Q_H$ 的影响线（如图 7—1*g* 所示）。

**题 7—2**　求图 7—2*a* 所示静定多跨梁 $R_C$、、$Q_B$左、$Q_B$右、$M_G$、$Q_G$、$M_H$ 的影响线。

**解**：$R_C$ 的影响线：

$P=1$ 在 $AF$ 上移动时，$R_C=0$。$P=1$在 $FE$ 上移动时相当于简支伸臂梁的影响线，并延伸到 $ED$ 部分（如图 7—2*b* 所示）。

$Q_B$左 影响线：

在 $AF$ 部分相当于简支伸臂梁剪力的影响线。$P=I$ 在 $F$ 点 $Q_B$左 $=-1\backslash 4$ 逐渐延伸到 $ED$ 梁上（如图 7—2*c*所示）。

$Q_B$右 的影响线：

在 $AF$ 部分相当于简支伸臂梁剪力的影响线，并延伸到$ED$梁上(如图 7—2*d*所示)。

$M_G$ 的影响线：

在 $AF$ 部分相当于简支伸臂梁弯矩的影响线，并延伸至 $ED$梁上(如图 7—2*e*所示)。

$Q_G$ 的影响线：

在 $AF$ 部分相当简支伸臂梁剪力的影响线，并延伸至 $ED$梁上(如图 7—2*f* 所示)。

$M_H$ 的影响线：

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

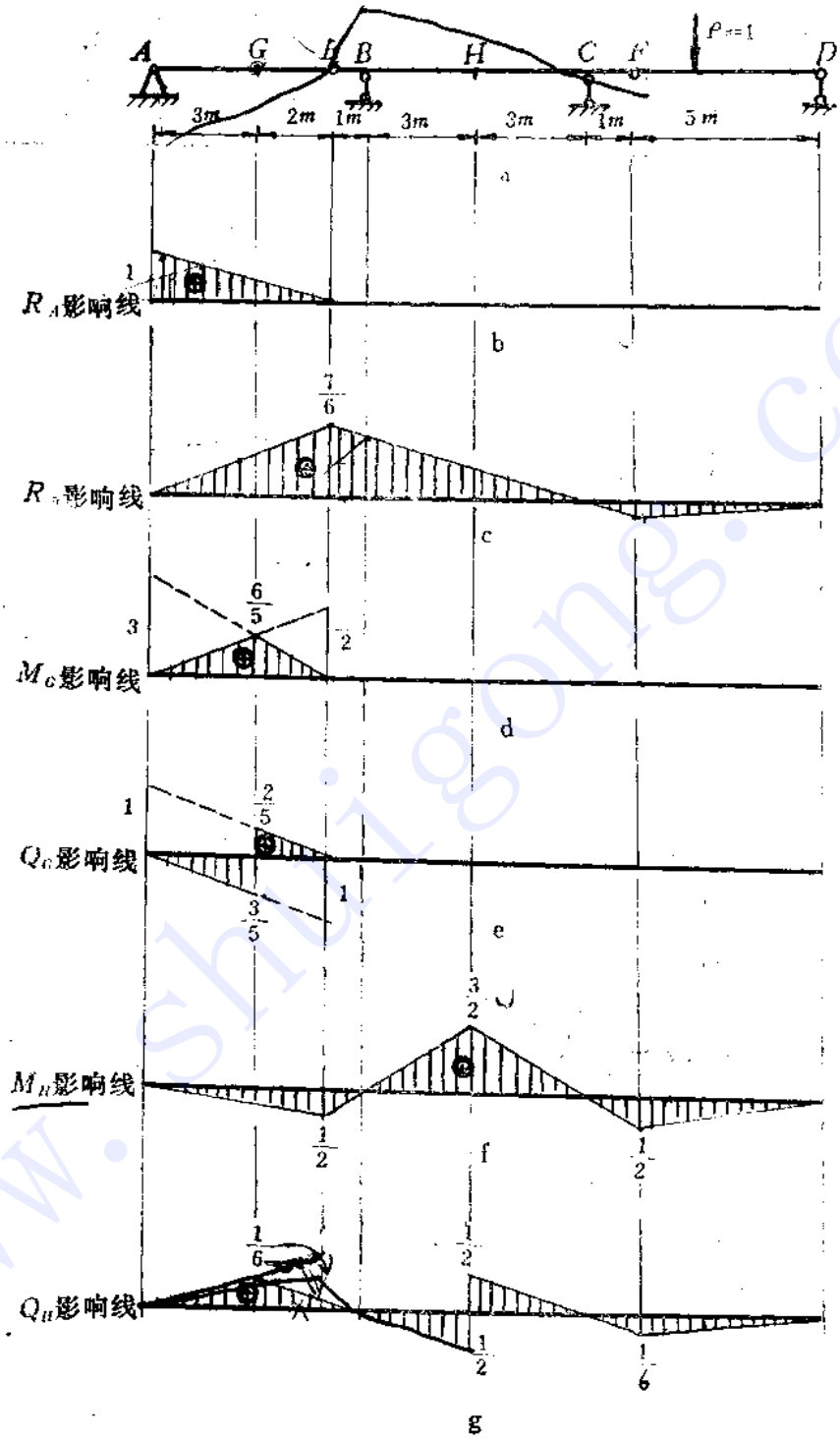



图 7—1

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

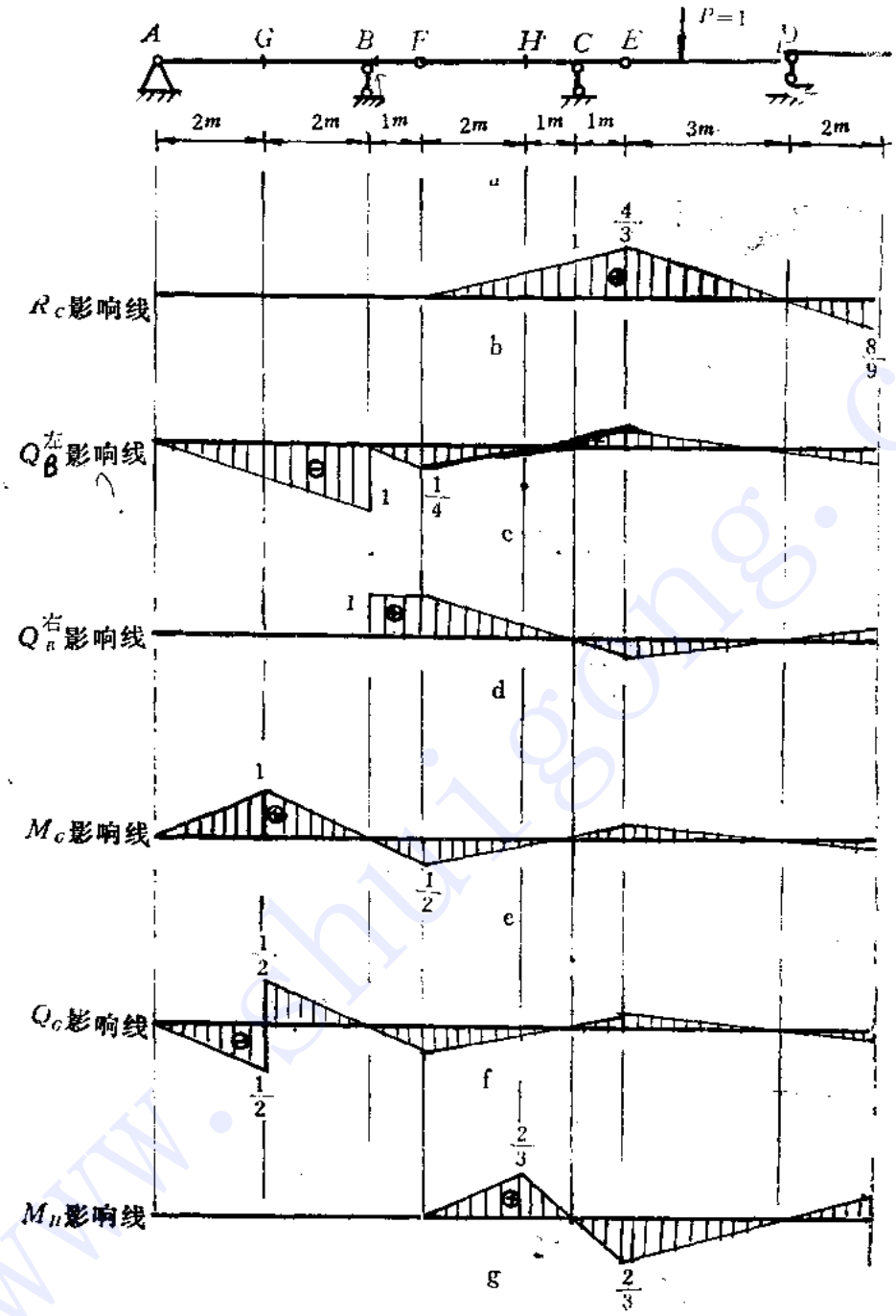



图 7—2

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

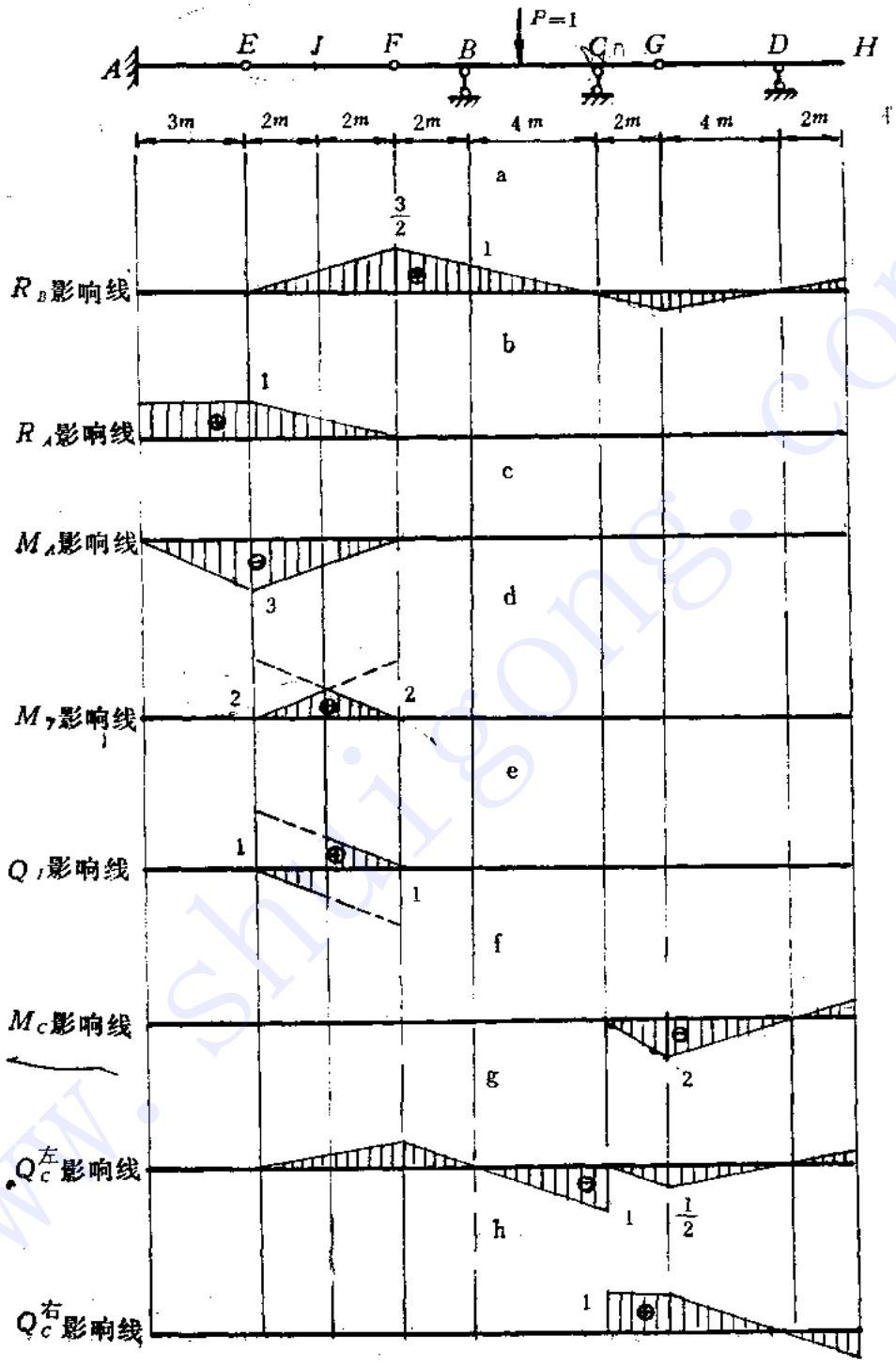



图 7—3

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$P=1$ 在 $AF$ 上移动时，$M_H=0$。$P=1$ 在 $FE$ 上移动时，相当于简支伸臂梁弯矩的影响线，并延伸至 $ED$ 梁上（如图 7—2$g$ 所示）。

**题 7—3** 求图 7—3$a$ 所示多跨静定梁 $R_A$、$R_B$、$M_A$、$M_I$、$Q_I$、$M_C$、$Q_C$左、$Q_C$右 的影响线。

**解**：$R_A$ 的影响线：

当 $P=1$ 在 $AE$ 上移动时，$R_A=1$。当 $P=1$ 在 $FH$ 移动时，$R_A=0$。故得 $R_A$ 的影响线如图 7—3$c$ 所示。

$R_B$ 的影响线：

$P=1$ 在 $FG$ 上移动时相当于简支伸臂梁反力的影响线，在 $AE$ 上移动时 $R_B=0$。所以，$R_B$ 的影响线如图 7—3$b$ 所示。

$M_A$ 的影响线：

$P=1$ 在 $AE$ 上移动时相当于悬臂梁弯矩的影响线，在 $FH$ 上移动时 $M_A=0$。$M_A$ 影响线如图 7—3 $d$ 所示。

$M_I$ 的影响线：

$P=1$ 在 $EF$ 部分上移动时，相当于简支梁弯矩的影响线，在其它部分上移动时，$M_I=0$。其影响线如图 7—3 $e$ 所示。

$Q_I$ 的影响线：

$P=1$ 在 $EF$ 上移动时，相当于简支梁剪力的影响线，在其它部分上移动时，$Q_I=0$。$Q_I$ 的影响线如图 7—3$f$ 所示。

$M_C$ 的影响线：

$P=1$ 在 $C$ 点以左 $M_C=0$，在 $C$ 点以右如图 7—3$g$ 所示。

$Q_C$左 的影响线：

$P=1$ 在 $FG$ 部分上移动时，相当于简支伸臂梁剪力的影响线，左延伸到点 $E$，当 $P=1$ 在 $G$ 点时 $Q_C左=-\frac{1}{2}$，右延伸到 $H$ 点（如图 7—3$h$ 所示）。

$Q_C$右 的影响线：

$P=1$ 在 $C$ 点以左 $Q_C右=0$，在 $C$ 点以右 $Q_C右$ 如图 7—3$e$ 所示。

**题 7—4** 求图 7—4$a$ 所示多跨静定梁在结点荷载作用下的 $R_B$、$M_H$、$M_G$、$Q_G$ 的影响线。

**解**：结点荷载作用下，结构反力或内力的影响线在相邻结点之间都为直线。故求结点荷载作用下内力或反力的影响线时，先求出一般结构（即去掉结点荷载作用的结构）的内力或反力的影响线，然后将各结点投影到这个影响线上，用直线连接各相邻投影点得到一条新的折线，就是结点荷载作用下的影响线。

$R_B$ 的影响线：

先求出无结点时 $R_B$ 的影响线（如图 7—4$b$ 虚线所示），然后，将各结点投影到虚线上，用直线连接各投影点即得到 $R_B$ 的影响线（如图 7—4$b$ 实线所示）。

$M_H$ 的影响线：

作法同上。$M_H$ 的影响线如图 7—4$c$ 所示。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

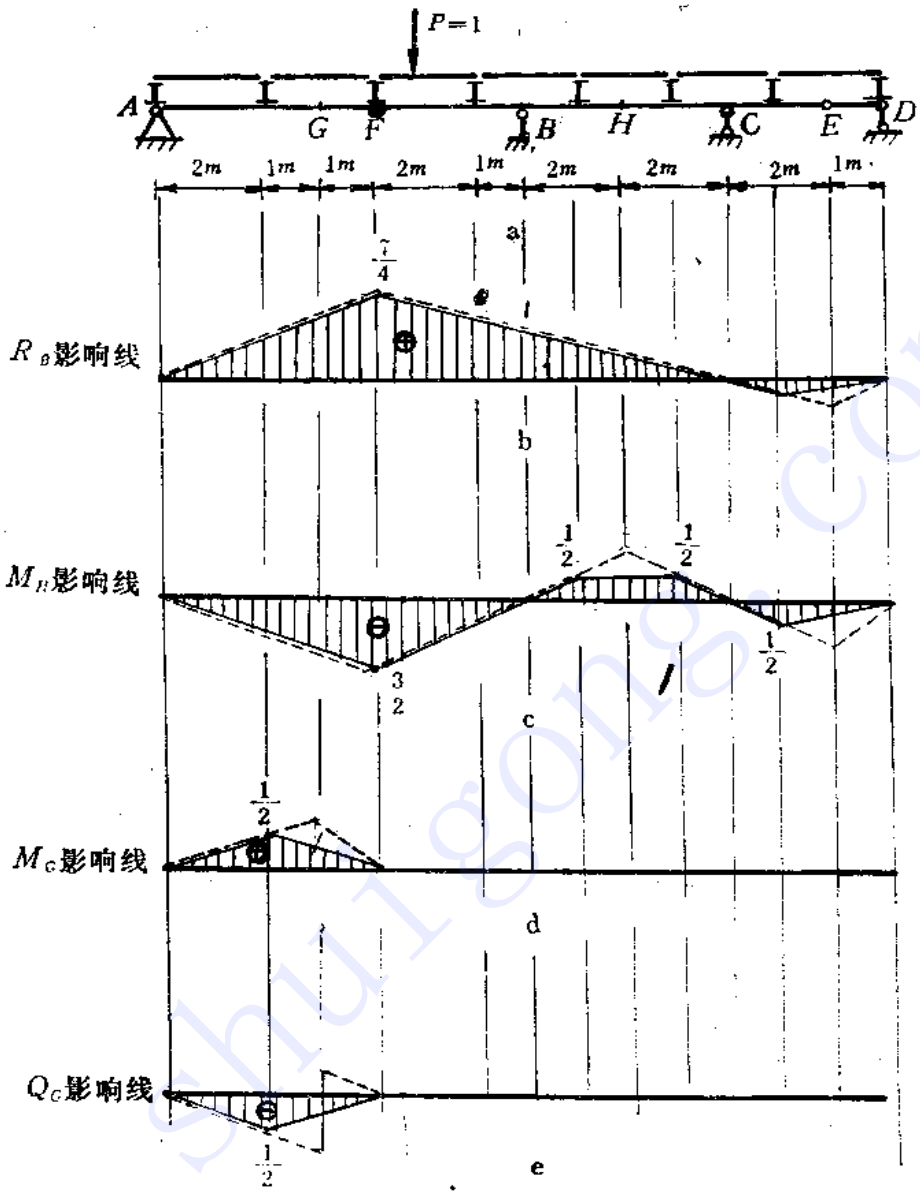



图 7—4

$M_G$ 的影响线：

作法同上。$M_G$ 的影响线如图 7—4*d* 所示。

$Q_G$ 的影响线：

作法同上。$Q_G$ 的影响线如图 7—4*e* 所示。

**题 7—5** 求图 7—5*a* 所示刚架 $M_K$、$Q_K$、$N_K$ 的影响线，单位水平荷载不变方向由 *A* 经 *C*、*D* 至 *B* 移动。

**解**：$M_K$ 的影响线：

设 $M_K$ 内部受拉为正。当 $P=1$ 在 *K* 点以左移动时，得

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

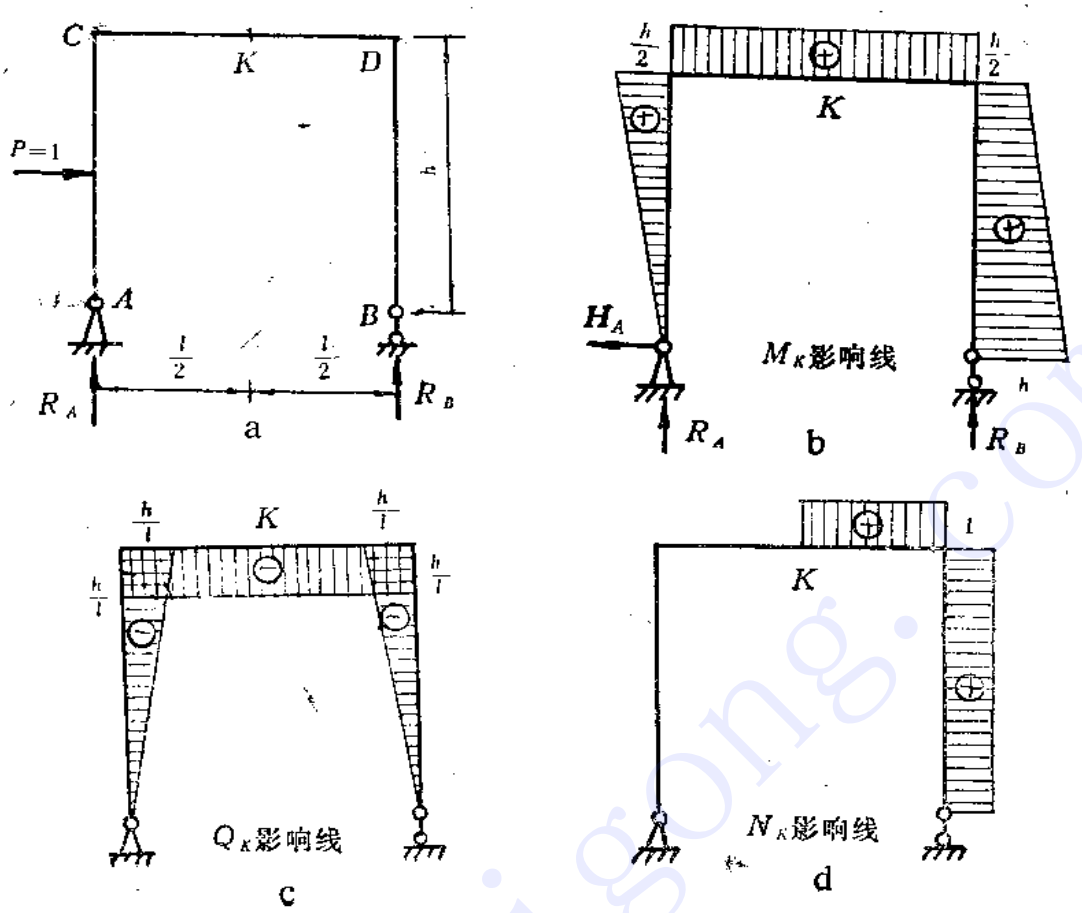



图 7—5

$$M_K = R_B \cdot \frac{l}{2}$$

$P=1$ 在 $A$ 处 $R_B=0$，$M_K=0$。

$p=1$ 在 $CK$ 段移动时，$R_B=\frac{h}{l}$、$M_K=\frac{h}{2}$（内拉）

$p=1$ 在 $K$ 点以右移动时，有

$$M_K = H_A h + R_A \cdot \frac{l}{2}$$

$p=1$ 在 $KD$ 段上时，$H_A=1$，$R_A=-\frac{h}{l}$，所以 $M_K=\frac{h}{2}$（内拉）。

$p=1$ 在 $B$ 点时，$H_A=1$，$R_A=0$，$R_B=0$，$M_K=h$（内拉），

$M_K$ 的影响线如图 7—5$b$ 所示。

$Q_K$ 的影响线：

当 $p=1$ 在 $K$ 以左移动时，

$$Q_K = -R_B$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

在 $A$ 点，$R_B=0$；在 $CK$ 段，$R_B=\frac{h}{l}$，$Q_K=-\frac{h}{l}$。

当 $p=1$ 在 $K$ 以右移动时，

$$Q_K=R_A$$

在 $B$ 点时 $R_A=0$，$Q_K=0$；在 $KD$ 段 $R_A=-\frac{h}{l}$，$Q_K=-\frac{h}{l}$。

$Q_K$ 的影响线如图 7—5c 所示。

$N_K$ 的影响线

当 $P=1$ 在 $K$ 以左移动时，

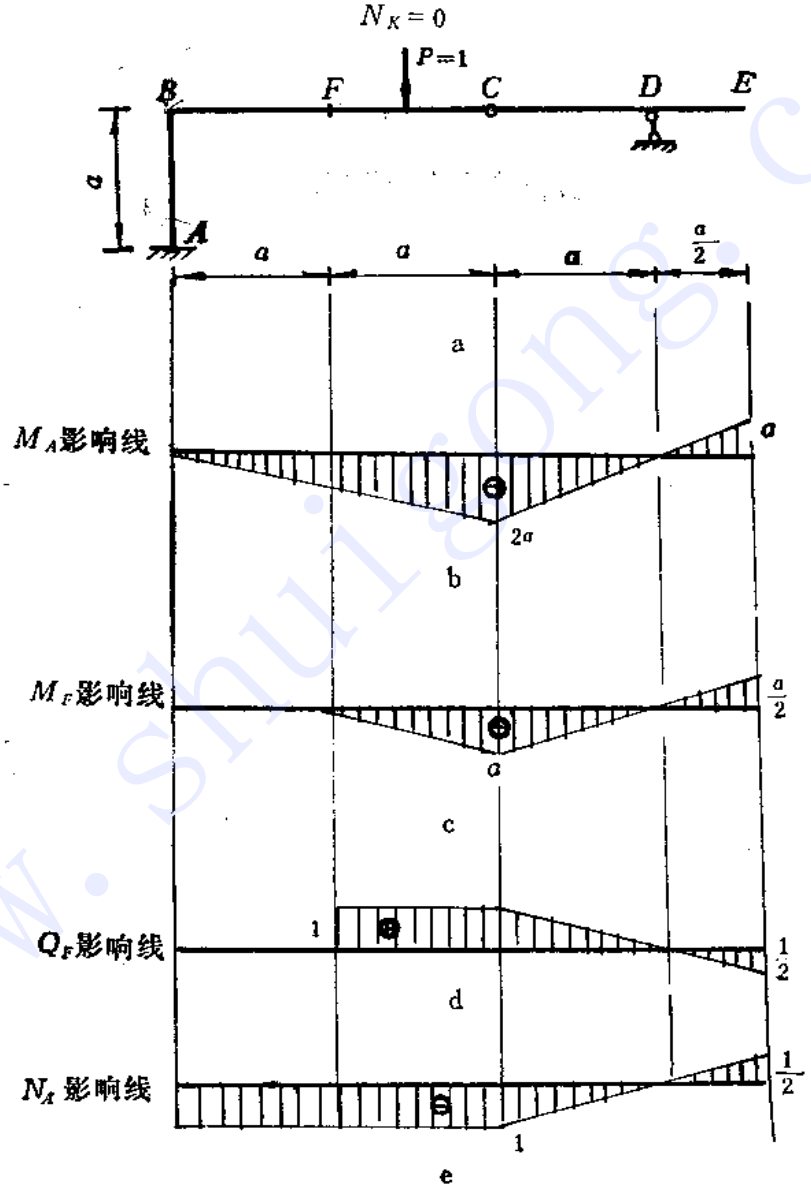



图 7—6

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

当 $P=1$ 在 $K$ 以右移动时，

$$N_K = H_A = 1$$

$N_K$ 的影响线如图 7—5$d$ 所示。

题 7—6　求刚架（如图 7—6$a$所示）$M_A$、$M_F$、$Q_F$、$N_A$ 的影响线。单位荷载在$BE$段移动。

**解**：$M_A$ 的影响线：

设弯矩内拉为正。此题是带有基本部分和附属部分的结构。

$p=1$ 位于 $B$ 点：$M_A=0$；

$P=1$ 位于 $C$ 点：$M_A=-2a$；

$p=1$ 位于 $D$ 点：$M_A=0$；

$p=1$ 位于 $E$ 点：$M_A=a$。

将各点值用直线连接起来即得到 $M_A$ 的影响线如图 7—6$b$ 所示。

$M_F$ 的影响线：

$P=1$ 在 $F$ 以左：　$M_F=0$；

$P=1$ 位于 $C$ 点：　$M_F=-a$；

$P=1$ 位于 $D$ 点：　$M_F=0$；

$P=1$ 位于 $E$ 点：　$M_F=\frac{a}{2}$。

$M_F$ 的影响线如图 7—6$c$ 所示。

$Q_F$ 的影响线：

$P=1$ 在 $F$ 以右：　$Q_F=0$；

$P=1$ 在 $FC$ 段：　$Q_F=1$；

$P=1$ 在 $D$ 点处：　$Q_F=0$；

$P=1$ 在 $E$ 点处。　$Q_F=-\frac{1}{2}$。

用直线将各点值连接起来即得到 $Q_F$ 的影响线如图 7—6$d$ 所示。

$N_A$ 的影响线：

$P=1$ 在 $BC$ 段：　$N_A=-1$；

$P=1$ 在 $D$ 点处：　$N_A=0$；

直线连接 $B$、$C$、$D$、$E$ 各点值即可得到 $N_A$ 的影响线如图 7—6$e$ 所示。

**题 7—7**　求图 7—7$a$ 所示结构 $M_K$、$Q_K$、$N_{BE}$、$M_F$、$Q_F$ 的影响线。

**解**：$M_K$ 的影响线

当 $P=1$ 在 $K$ 点以左移动时，取 $K$ 以右为脱离体得：　$M_K=0$；

当 $P=1$ 在 $C$ 点时，　$M_K=-\frac{a}{2}$；

当 $P=1$ 在 $D$ 点时，　$M_K=0$。

$M_K$ 的影响线如图 7—7$b$ 所示，下部受拉为正。

$Q_K$ 的影响线：

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

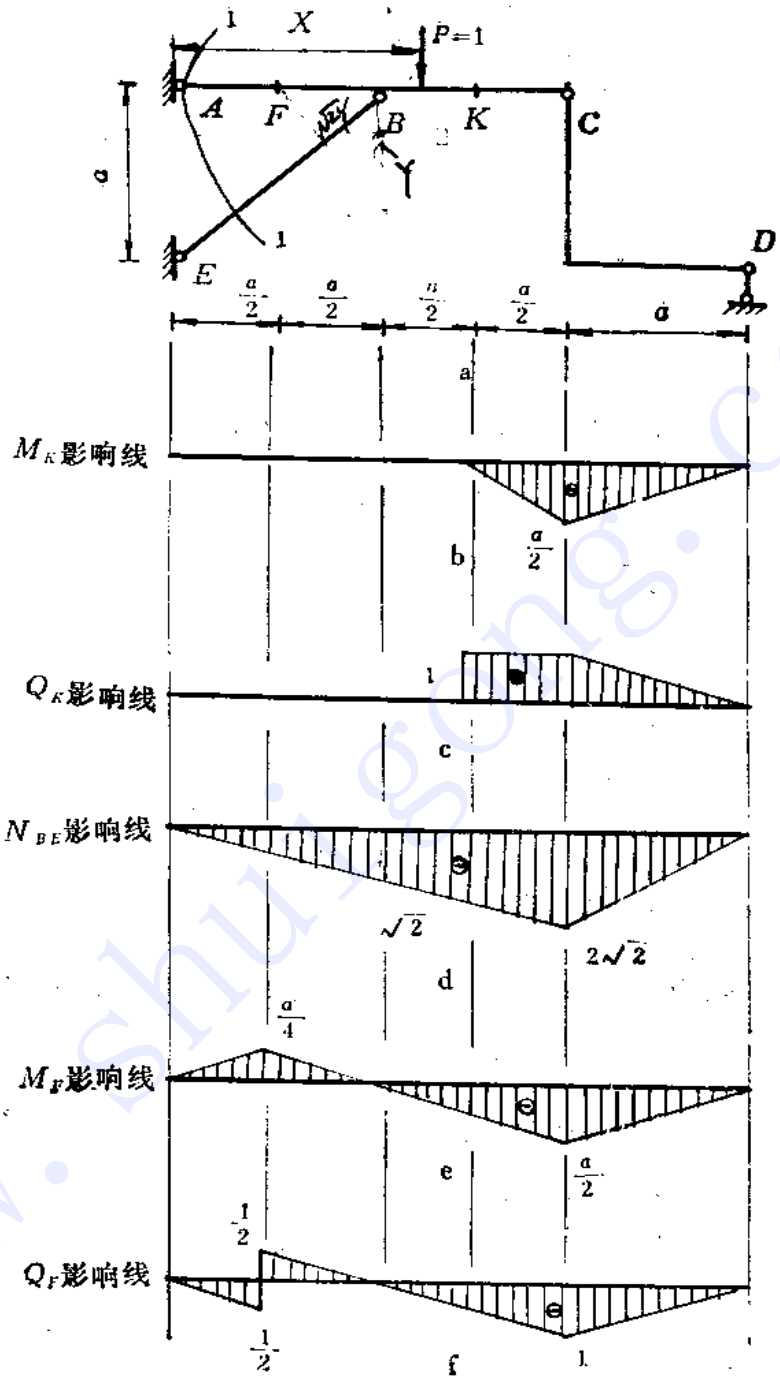



图 7—7

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

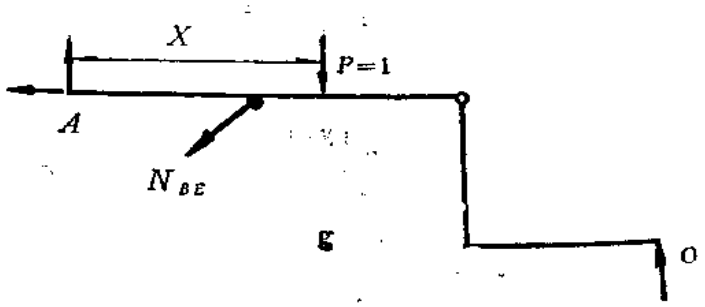



图 7—7

$P=1$ 在 $K$ 以左移动时，　$Q_K=0$；

$P=1$ 在 $KC$ 段移动时，　$Q_K=1$；

$P=1$ 在 $D$ 点处时　　$Q_K=0$。

直线连接各点值得到如图 7—7c 所示的 $Q_K$ 影响线。

$N_{BE}$ 的影响线：

取如图 7—7g 所示的脱离体。当 $P=1$ 在 $AC$ 上移动时，

$$\Sigma M_A=0 \qquad N_{BE}\frac{\sqrt{2}}{2}a+1\cdot x=0$$

$$N_{BE}=-\sqrt{2}\frac{x}{a}$$

$A$点：　$x=0$　　$N_{BE}=0$，

$B$点：　$x=a$　　$N_{BE}=-\sqrt{2}$；

$C$点：　$x=2a$　　$N_{BE}=-2\sqrt{2}$；

$P=1$ 在 $D$ 点：　　$N_{BE}=0$。

$N_{BE}$ 的影响线如图 7—7d 所示。

$M_F$ 的影响线

如图 7—7g 所示的脱离体，当 $P=1$ 在 $F$ 以左移动时，取右部为研究对象，有：

$$\Sigma M_F=0 \qquad M_F=-\frac{\sqrt{2}}{4}aN_{BE}$$

因此，$AF$ 段 $M_F$ 的影响线是 $N_{BE}$的影响线的 $-\frac{\sqrt{2}}{4}a$ 倍。

当 $P=1$ 在 $F$ 以右移动时，取左部为研究对象，有

$$\Sigma M_F=0 \qquad M_F=R_A\frac{a}{2}$$

而　$R_A=(a-x)/a$　　$\left(\frac{a}{2}\leqslant x\leqslant 2a\right)$

所以　　$M_F=(a-x)/2$

$F$ 点：　$x=\frac{a}{2}$　　$M_F=\frac{a}{4}$；

$B$ 点：　$x=a$　　$M_F=0$；

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$C$ 点：　$x=2a$　　$M_F=-\frac{a}{2}$；

$D$ 点：　$M_F=0$

$M_F$ 的影响线如图 7—7e 所示。

$Q_F$ 的影响线

用求 $M_F$ 影响线的方法求得 $Q_F$ 影响线如图 7—7f 所示。

**题 7—8**　求图 7—8a 所示桁架指定杆件 $N_1$、$N_2$、$N_3$、$N_4$ 内力的影响线。

**解**：$N_1$ 的影响线

当 $P=1$ 在 $E$ 点以右时，取结点 $A$ 为研究对象，则

$$\Sigma y=0 \qquad R_A+N_1\sin\alpha=0$$

而　　$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$

所以　　$N_1=-\sqrt{5}R_A$

故在 $E$ 点以右 $N_1$ 的影响线是反力 $R_A$ 影响线的 $-\sqrt{5}$ 倍。

当 $P=1$ 在 $A$ 点时；$N_1=0$

直线连接 $A$、$E$、$B$ 点的数值得到如图 7—8b 所示 $N_1$ 的影响线。

$N_2$ 的影响线

作截面 1—1，当 $P=1$ 在 $F$ 以左移动时，取截面以右为脱离体，则

$$\Sigma M_O=0 \qquad N_2\cdot 2-R_B\cdot 8=0$$

$$N_2=4R_B \qquad (左支)$$

当 $P=1$ 在 $D$ 以右移动时，取截面以左为脱离体，则

$$\Sigma M_O=0 \qquad N_2\cdot 2-R_A\cdot 4=0$$

$$N_2=2R_A \qquad (右支)$$

因此，$N_2$ 的影响线在 $F$ 点以左是反力 $R_B$ 影响线的 4 倍，在 $D$点以右是反力$R_A$影响线的 2 倍，$F$、$D$ 两点以直线连接。$N_2$ 的影响线如图 7—8c 所示。

$N_3$ 的影响线：

$P=1$ 在 $F$ 点以左移动时，取右部为研究对象，则

$$\Sigma M_A=0 \qquad N_3\cdot r_3+R_B\cdot 12=0$$

而　　$r_3=3\sqrt{2}$

所以　　$N_3=-2\sqrt{2}R_B$　　(左支)

$P=1$ 在 $D$ 点以右移动时，取左部为研究对象，则

$$\Sigma M_A=0 \qquad N_3r_3+R_A\cdot 0=0$$

$$N_3=0 \qquad (右支)$$

故 $N_3$ 的影响线在 $F$ 点以左是 $R_B$ 影响线的 $-2\sqrt{2}$ 倍，在 $D$ 点以右为零。以直线相连 $F$、$D$ 两点。$N_3$ 影响线如图 7—8d 所示。

$N_4$ 的影响线：

取结点 $C$ 为研究对象（如图 7—8f 所示），则

$$\Sigma_y=0 \qquad N_4+N'\sin\alpha+N''\sin\alpha=0$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

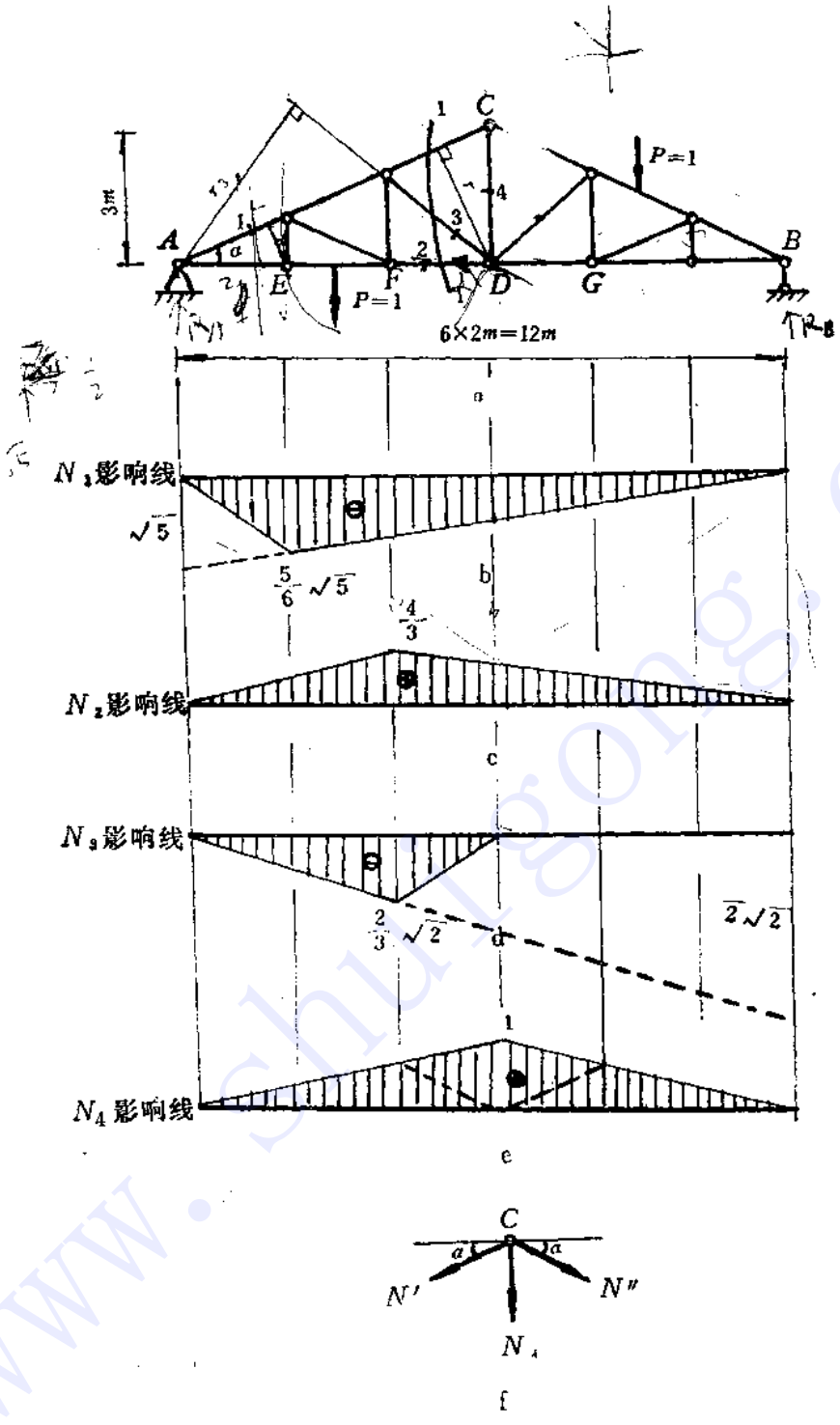



图 7—8

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

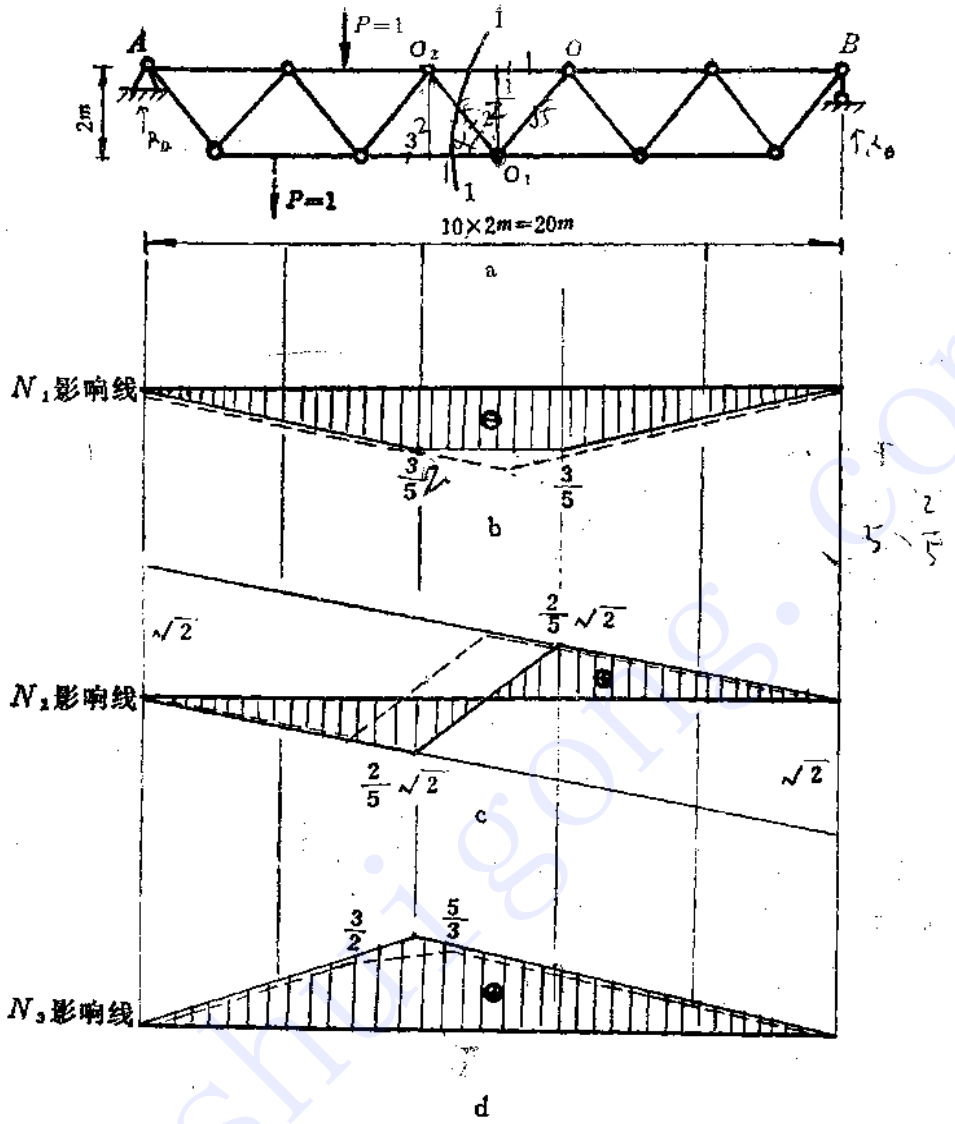



图 7—9

虚线表示单位荷载在下弦移动时的影响线

$$N_4 = -(N' + N'')\sin\alpha$$

$$N_4 = -\frac{1}{\sqrt{5}}(N' + N'')$$

为求出 $N_4$ 的影响线，需先求出 $N'$、$N''$ 的影响线。

$N'$ 的影响线：

$P=1$ 在 $F$ 以左移动时，

$\Sigma M_D = 0$　　$N'r + R_B \cdot 6 = 0$

而　　$r = \frac{6}{\sqrt{5}}$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

所以　　$N'=-\sqrt{5}R_B$

$P=1$ 在 $D$ 点以右移动时，

$$N'=-\sqrt{5}R_A$$

故 $N'$ 的影响线在 $D$ 点以左为 $R_B$ 影响线的 $-\sqrt{5}$ 倍，在 $D$ 点以右为 $R_A$ 影响线的 $-\sqrt{5}$ 倍。

$N''$ 的影响线与 $N'$ 的影响线相同，所以有

$$N_4=-\frac{1}{\sqrt{5}}(2N')=-\frac{2}{\sqrt{5}}N'$$

$D$ 点以左　　$N_4=2R_B$

$D$ 点以右　　$N_4=2R_A$

$N_4$ 的影响线如图 7—8e 所示。

**题 7—9**　作图 7—9a 所示桁架指定杆件 $N_1$、$N_2$、$N_3$ 内力的影响线。

**解：**作截面 1—1 如图 7—9a 所示。

$N_1$ 的影响线

$P=1$ 在 $O_2$ 以左，取右部为脱离体，则

$$\Sigma M_{O_1}=0 \qquad N_1\cdot 2+R_B\cdot 10=0$$

$$N_1=-5R_B$$

$P=1$ 在 $O$ 以右，取左部为脱离体，则

$$\Sigma M_{O_1}=0 \qquad N_1\cdot 2+R_A\cdot 10=0$$

$$N_1=-5R_A$$

故 $N_1$ 的影响线在 $O_2$ 以左、$O$ 以右分别为 $R_B$、$R_A$ 影响线的 $-5$ 倍，$O_2$、$O$ 之间以直线相连。$N_1$ 的影响线如图 7—9b 所示。

$N_2$ 的影响线

$P=1$ 在 $O_2$ 以左移动时，研究右部，有

$$\Sigma y=0 \qquad \frac{\sqrt{2}}{2}N_2+R_B=0$$

$$N_2=-\sqrt{2}R_B$$

$P=1$ 在 0 以右移动时，研究左部，有

$$\Sigma y=0 \qquad \frac{\sqrt{2}}{2}N_2-R_A=0$$

$$N_2=\sqrt{2}R_A$$

故 $N_2$ 的影响线在 $O_2$ 以左为 $R_B$ 影响线的 $-\sqrt{2}$ 倍，在 $O$ 以右为 $R_A$ 影响线的 $\sqrt{2}$ 倍。$O_2$、$O$ 之间直线相连。$N_2$ 的影响线如图 7—9c 所示。

$N_3$ 的影响线

$P=1$ 在 $O_2$ 以左移动时，研究右部，有

$$\Sigma M_{O_2}=0 \qquad N_3\cdot 2-R_B\cdot 12=0$$

$$N_3=6R_B$$

$P=1$ 在 $O$ 以右移动时，研究左部，有

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

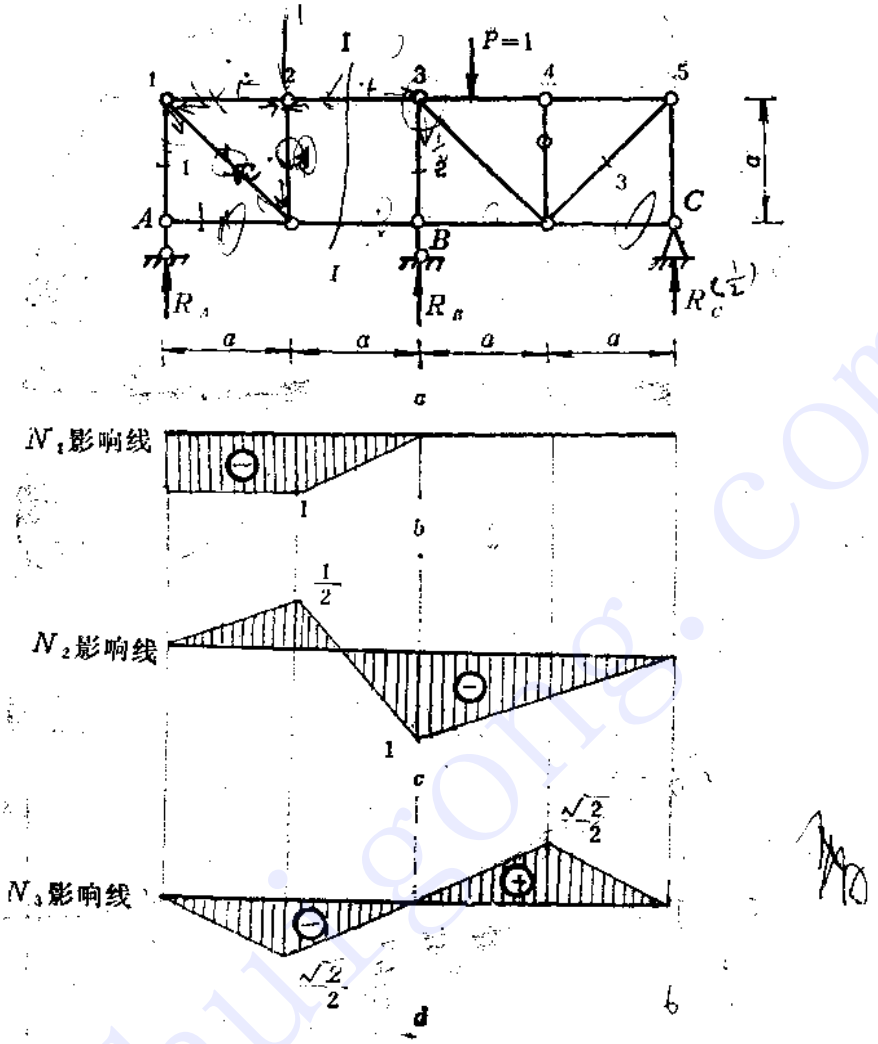



图 7—10

$$\Sigma M_{O_2}=0 \qquad N_3\cdot 2-R_A\times 8=0$$

$$N_3=4R_A$$

故 $N_3$ 的影响线在 $O_2$ 以左、$O$ 以右分别为 $R_B$ 影响线的 6 倍、$R_A$ 影响线的 4 倍，$O_2$、$O$ 之间连以直线。$N_3$ 的影响线如图 7—8$d$ 所示。

$P=1$ 在下弦移动时作法相同。

**题 7—10** 求图 7—10$a$ 所示桁架指定杆件内力 $N_1$、$N_2$、$N_3$ 的影响线。

**解**：此题是有老小关系的桁架，作截面 1—1。

$N_1$ 的影响线

取结点 $A$ 为研究对象，则

$$N_1=-R_A$$

$P=1$ 在 1、2 之间移动时，

$$R_A=1 \qquad N_1=-1$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$P=1$ 在 3、5 之间移动时，

$$R_A=0 \qquad N_1=0$$

$P=1$ 由 2 到 3 时，$R_A$ 由 1 变到 0，$N_1$ 由 $-1$ 变为 0.

$N_1$ 的影响线如图 7—10$b$ 所示.

$N_2$ 的影响线

取 $B$ 点为研究对象，则

$$N_2=-R_B$$

$P=1$ 在 1 点

$$R_B=0 \qquad N_2=0$$

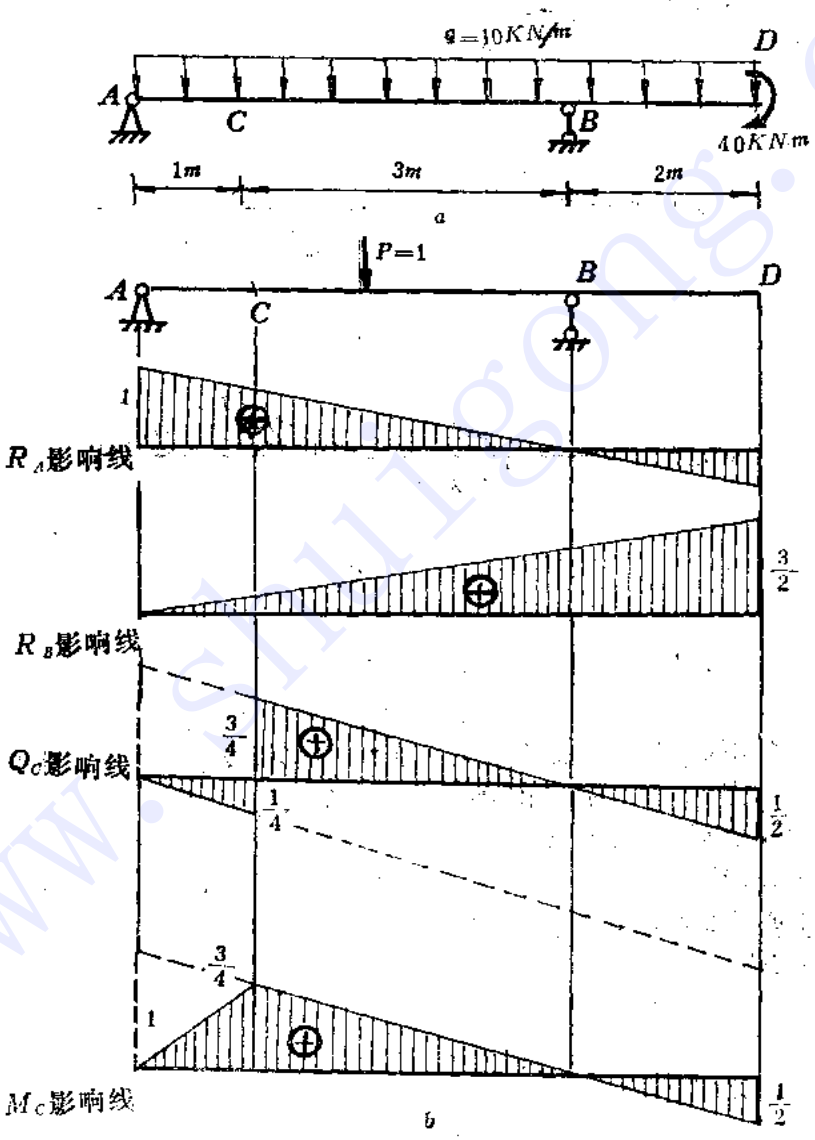



图 7—11

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

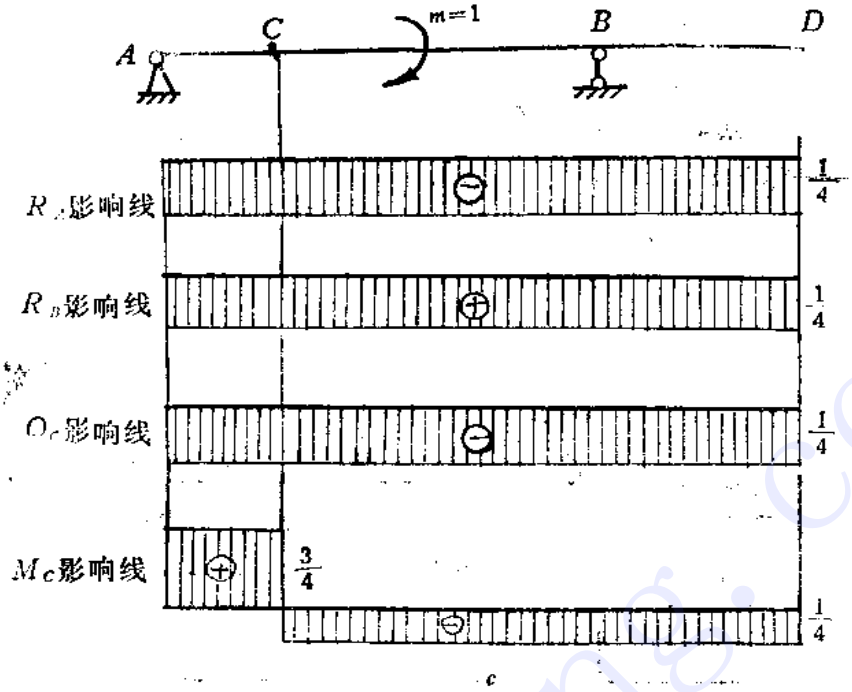



图 7—11

$P=1$ 在 2 点　　$R_B=-\frac{1}{2}$　　$N_2=\frac{1}{2}$

$P=1$ 在 3 点

$R_B=1$　　$N_2=-1$

$P=1$ 在 4 点　　$R_B=\frac{1}{2}$　　$N_2=-\frac{1}{2}$

$P=1$ 在 5 点

$R_B=0$　　$N_2=0$

将各点值以直线相连即得到 $N_2$ 的影响线如图 7—10$c$ 所示。

$N_3$ 的影响线

当 $P=1$ 在 2 点以左、4 点以右时，由结点 3 的平衡条件可知

$$N_3=-\sqrt{2}N_2$$

$P=1$ 在 3 点时，　$N_3=0$

$N_3$ 的影响线如图 7—10$d$ 所示。

**题 7—11**　利用影响线求图 7—11$a$ 所示结构 $R_A$、$R_B$、$Q_C$、$M_C$ 的数值。

**解**：1）单位集中力 $P=1$ 在梁上移动时 $R_A$、$R_B$、$Q_C$、$M_C$ 的影响线如图 7—11$b$所示。

2）单位力偶在梁上移动时 $R_A$、$R_B$、$Q_C$、$M_C$ 的影响线(如图 7—11$c$ 所示)。

3）利用影响线求各力的值：

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$$Z=\sum_{i=1}^{n}P_iy_i+\int qydx$$

$Z$——所求未知力；

$P_i$、$q$——表示结构上的荷载；

$y_i$、$y$——表示与 $P_i$、$q$ 相应的影响线值。

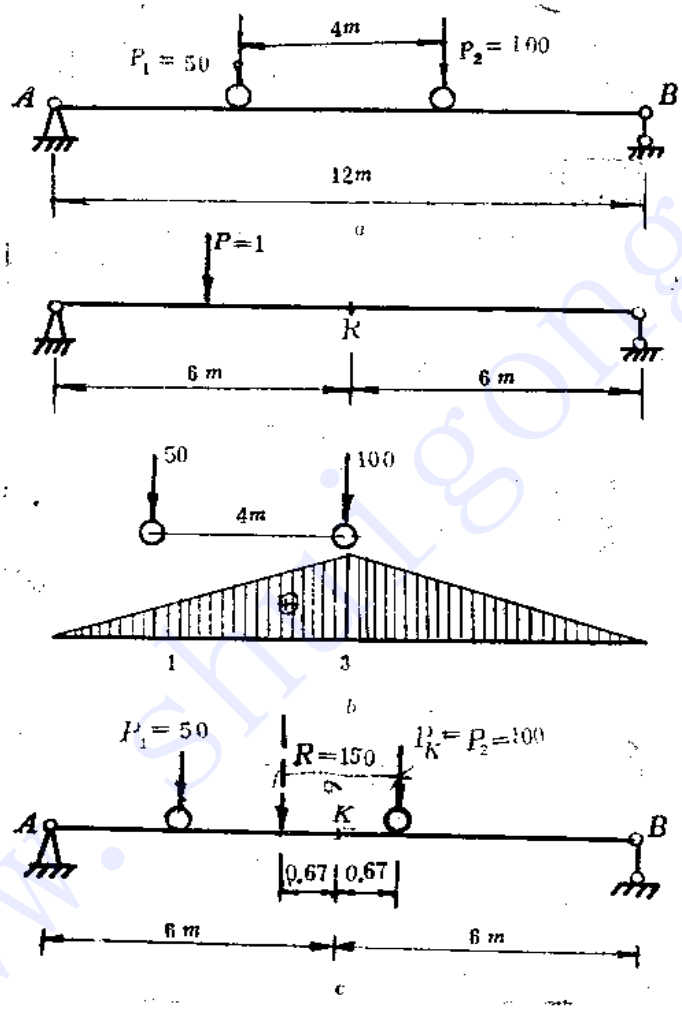



图 7—12

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

由上述公式得

$$R_A = 10\left(\frac{1}{2}\times 1\times 4 - \frac{1}{2}\times 2\times\frac{1}{2}\right) - 40\times\frac{1}{4} = 5(KN)$$

$$R_B = 10\times\frac{1}{2}\times 6\times\frac{3}{2} + 40\times\frac{1}{4} = 55(KN)$$

$$Q_C = 10\left(\frac{1}{2}\times 3\times\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\times 2\times\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}\times 40 = -5(KN)$$

$$M_C = 10\left(\frac{1}{2}\times 4\times\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\times 2\times\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}\times 40 = 0$$

**题 7—12** 设数量和间距不变的一组荷载在简支梁上移动（如图 7—12*a* 所示）。求此简支梁的绝对最大弯矩，并和跨中截面的最大弯矩相比较。

**解**：1）利用影响线求跨中截面的最大弯矩 $M_{Kmax}$。

将最大的集中力 $P_2 = 100KN$ 放置在影响线的顶点如图 7—12*b*，则

$$M_{Kmax} = 100\times 3 + 50\times 1 = 350(KN—m)$$

2）求简支梁的绝对最大弯矩。

利用公式

$$M_{max} = R\left(\frac{l}{2} - \frac{a}{2}\right)\frac{1}{l} - M_K$$

上式中：$R$——梁上实有荷载之合力；

$l$——梁跨长；

$a$——梁上实有荷载合力 $R$ 与 $P_2$ 作用线的距离；

$M_K$——$P_K$ 左面荷载对 $P_K$ 作用点的力矩之和。

显然，$P_K = P_2 = 100KN$ 的作用点下有绝对最大弯矩 $|M_{max}|$，利用平行力系的平衡条件求得

$$a = -1.34m$$

这里负号表示 $R$ 在 $P_K$ 以左（如图 7—12*c* 所示）。

于是 $$M_{max} = 150\left[\frac{12}{2} - \left(-\frac{1.34}{2}\right)\right]^2\frac{1}{12} - 50\times 4 = 356.1(KN-m)$$

$$|M_{max}| = 356.1 > M_{Kmax}$$

**题 7—13** 图 7—13*a* 所示结构上有移动吊车，求在此车作用下梁上 $C$ 截面的弯矩和剪力的绝对最大值。（$Q = 0.9KN, G = 4.5KN$）。

**解**：先求出吊车轮对梁的压力如图 7—13*b* 所示。

作出梁中点 $C$ 的弯矩 $M_C$、剪力 $Q_C$ 的影响线如图 7—13*c* 所示。将最大集中力放在影响线的顶点处。

$$M_{C,max} = 4.5\times\frac{5}{2} + 0.9\times\frac{3}{2} = 12.6(KN-m)$$

$$Q_{C,max} = 4.5\times\frac{1}{2} + 0.9\times\frac{3}{10} = 2.52(KN)$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

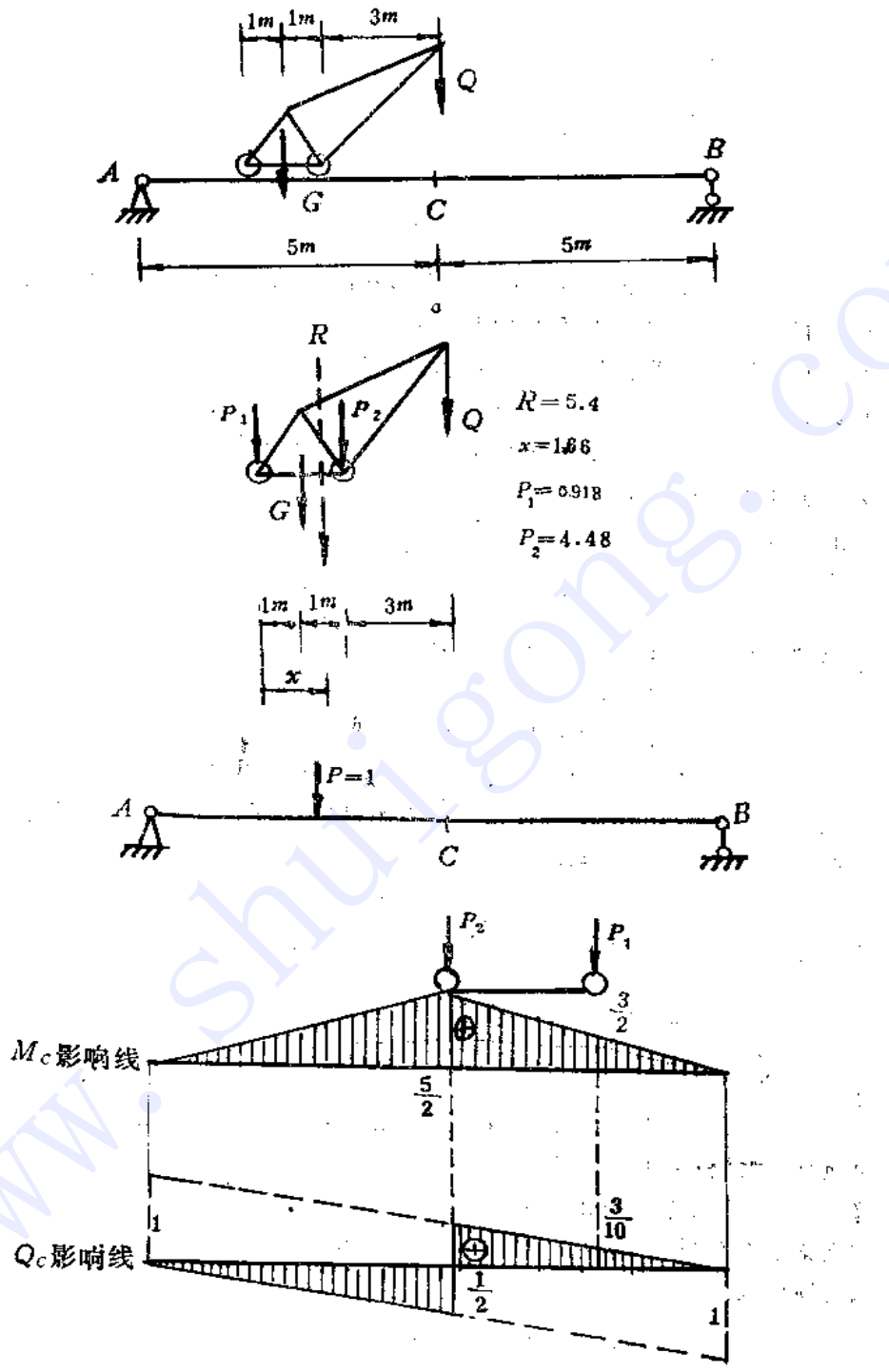



图 7—13

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

# 第八章　结构位移计算

**计算公式与符号：**

1）图乘法求位移计算公式：

$$\Delta=\sum\frac{1}{EI}wy_c$$

式中：$w$——$M_1$、$M_P$图中其中任意一图的面积；

$y_C$——与$w$的形心对应的另一直线形$M$图坐标；

$EI$——结构刚度（抗弯）；

$\Delta$——广义位移。

2）积分法求位移计算公式：

$$\Delta=\sum\int\frac{M_1M_P}{EI}ds+\sum\int\frac{kQ_1Q_P}{GA}ds+\sum\int\frac{N_1N_P}{EA}ds$$

刚架和梁

$$\Delta=\sum\int\frac{M_1M_P}{EI}ds$$

桁架

$$\Delta=\sum\frac{N_1N_Pl}{EA}$$

混合结构

$$\Delta=\sum\int\frac{M_1M_P}{EI}ds+\sum\int\frac{N_1N_P}{EA}ds$$

$$\left(\Delta=\sum\frac{1}{EI}wy_C+\sum\frac{N_1N_P}{EA}l\right)$$

式中 $M_1$——单位力作用下结构产生的弯矩；

$M_P$——结构在原载荷作用下产生的弯矩；

$Q_1$——单位力作用下结构产生的剪力；

$Q_P$——结构在原载荷作用下产生的剪力；

$N_1$——单位力作用下结构产生的轴力；

$N_P$——结构在原载荷作用下产生的轴力；

$EA$——抗拉（压）刚度。

题8—1　求图8—1$a$所示简支梁$B$截面的转角$\varphi_B$，$C$截面的竖向位移$\Delta_C$（$EI$=常数）。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

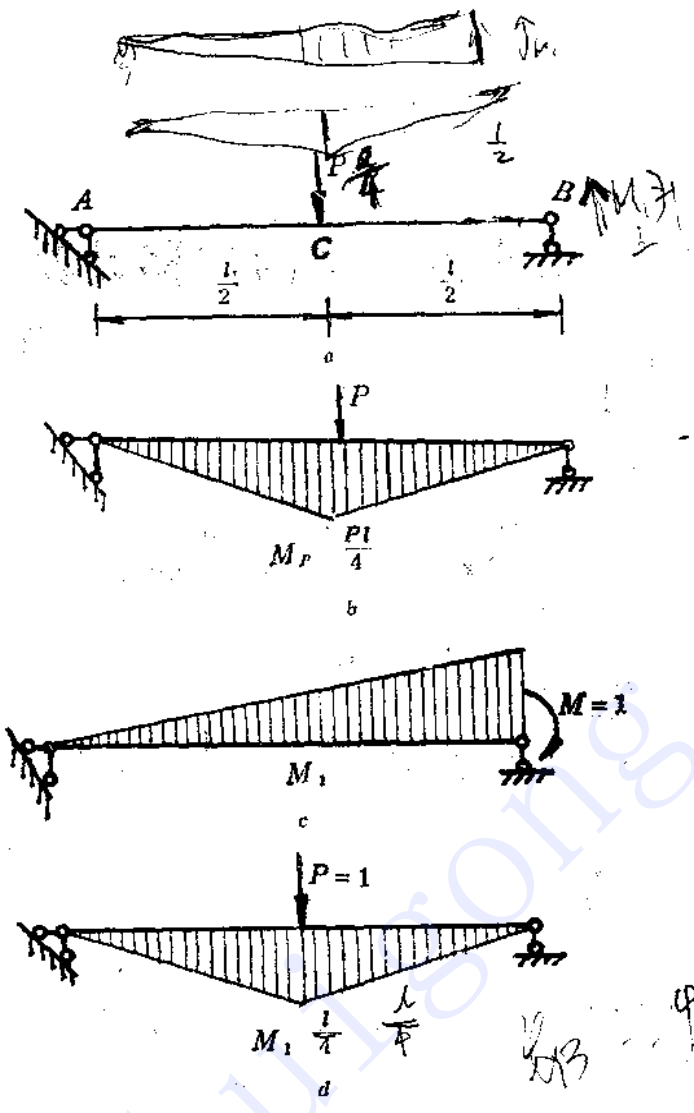



图 8—1

**解：** 在所求位移的截面加虚设相应的单位广义力，并作弯矩图如图 8—1、$d$ 所示，$M_P$ 图如图 8—1$b$ 所示。

1）求 $\varphi_B$：取 $M_P$ 图的面积，$M_1$ 图的坐标，

$$\Delta = \varphi_B = \frac{1}{EI} wy_0$$

$$= -\frac{1}{EI}\frac{Pl}{4} l \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{Pl^2}{16EI}$$

这里负号说明所求位移和所设单位力方向相反。

2）求 $\Delta_C$：取 $M_P$ 图的面积，$M_1$ 图的坐标，

$$\Delta_C = \frac{1}{EI} wy_C$$

$$= \frac{1}{EI}\left(2\frac{Pl}{4} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{4}\right) = \frac{Pl^3}{48EI} \downarrow$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

题：8—2　用积分法及图乘法求图 8—2*a* 所示悬臂梁 *A* 端的竖向位移和转角（*EI* = 常数）。

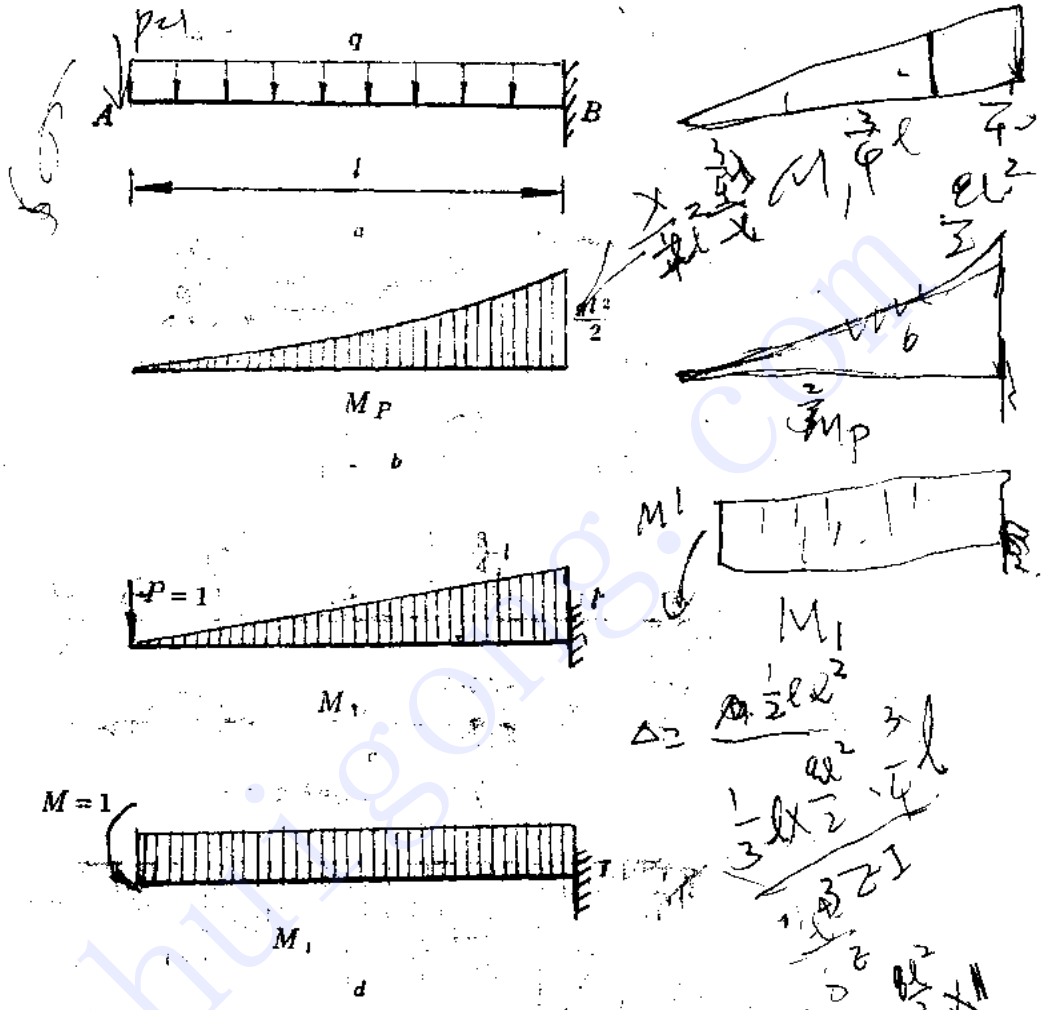



图　8—2

**解：**　$M_P$ 图如图 8—2*b* 所示，两个 $M_1$ 图分别如图 8—2*c*、*d* 所示。

1）积分法

$$\Delta_A = \int_0^l \frac{M_1 M_P}{EI}\,dx$$

而　$M_1 = x$，　$M_P = \frac{1}{2}qx^2$

所以　$\Delta_A = \frac{1}{EI}\int_0^l q\frac{x^2}{2}x\,dx = \frac{q}{2EI}\int_0^l x^3\,dx = \frac{ql^4}{8EI}$ ↓

$$\varphi_A = \int \frac{M_1 M_P}{EI}\,dx$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

而 $M_1=1$　　$M_p=\frac{1}{2}qx^2$

所以 $\varphi_A=\frac{1}{EI}\int_0^l q\frac{x^2}{2}dx=\frac{ql^3}{6EI}$

2）图乘法

由图 8—2b、c 的图乘得，

$$\Delta_d=\frac{1}{EI}w y_c=\frac{1}{EI}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{ql^2}{2}\cdot l\cdot\frac{3}{4}l=\frac{ql^4}{8EI}\downarrow$$

由图 8—2b、d 得

$$\varphi_A=\frac{1}{EI}w y_c=\frac{1}{EI}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{ql^2}{2}\cdot l\cdot 1=\frac{ql^3}{6EI}$$

**题 8—3**　求图 8—3a 所示简支梁 $C$ 截面之竖向位移 $\Delta_c$。

已知　$P=3000KN, E=2\times10^6 KN/cm^2, I_1=6560cm^4, I_2=12430cm^4$

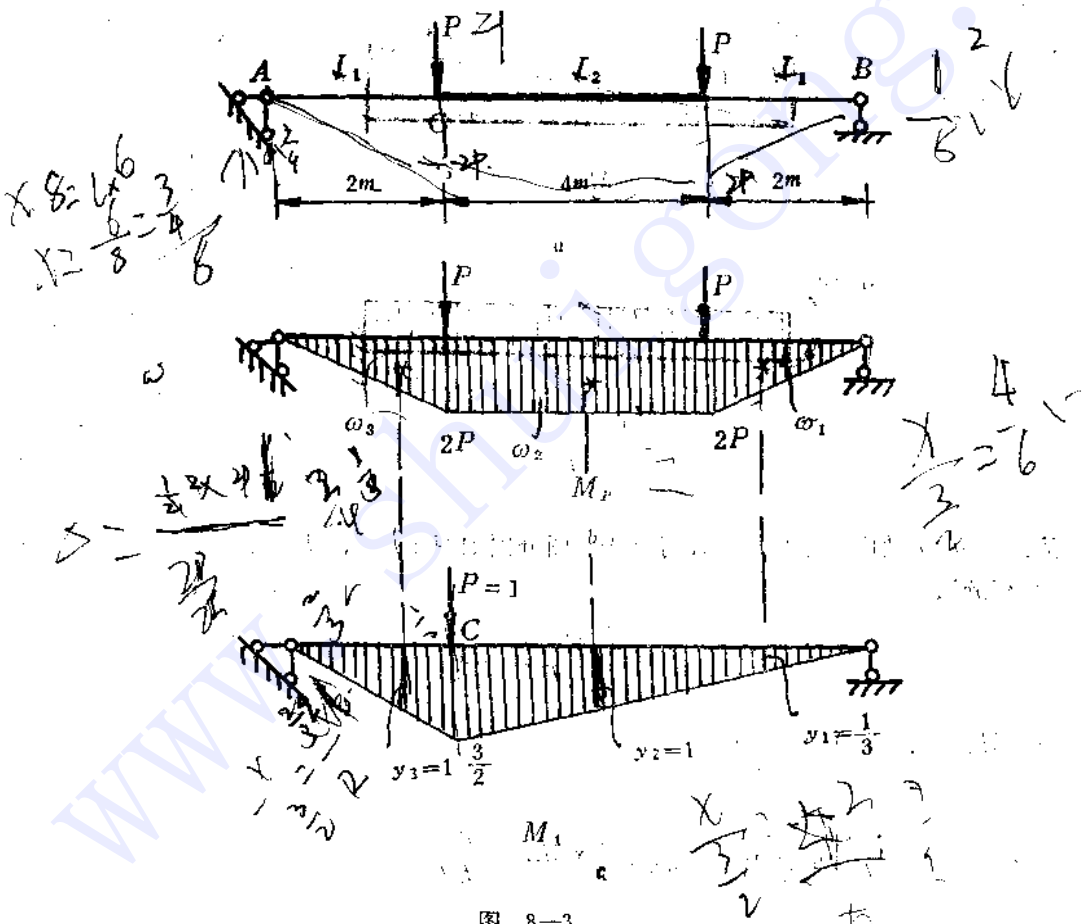



图　8—3

解：绘出梁的 $M_p$、$M_1$ 图如图 8—3b、C。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$$\Delta_C = \frac{1}{EI_1}w_1y_1 + \frac{1}{EI_2}w_2y_2 + \frac{1}{EI_1}w_3y_3$$

$$= \frac{1}{EI_1}\left(2\times 2P\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{EI_2}\left(4\times 2P\times 1\right) + \frac{1}{EI_1}\left(2P\times 2\times\frac{1}{2}\times 1\right)$$

$$= \frac{8P}{E}\left(\frac{1}{3I_1} + \frac{1}{I_2}\right) = \frac{8\times 3000\times 10^6}{2\times 10^6}\left(\frac{1}{3\times 6560} + \frac{1}{12430}\right)$$

$$= 1.56cm\downarrow$$

**题 8—4** 求图 8—4*a* 所示结构 $B$ 点的竖向位移 $\Delta_B(EI=常数)$。

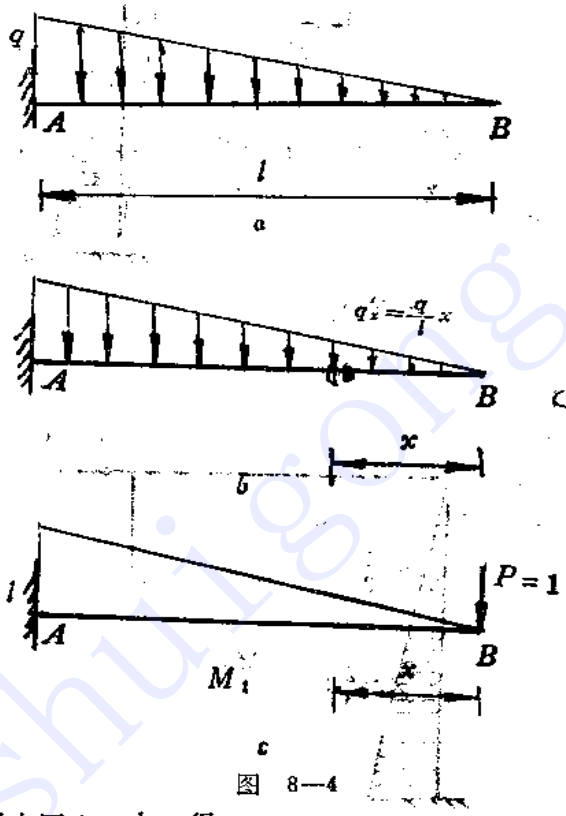



图 8—4

**解**：$M_1$、$M_P$ 分别由图 8—4*b*、*c* 得，

$$M_1 = x\ (上侧受拉)$$

$$M_P = \frac{1}{2}q_x x\cdot\frac{1}{3}x = \frac{1}{6}q_x x^2\ (上侧受拉)$$

$$\Delta_B = \int_0^l \frac{M_1M_P}{EI}ds$$

$$= \frac{1}{6EI}\int_0^l q_x x^3 dx$$

$$= \frac{1}{6EI}\int_0^l \frac{q}{l}x^4 dx$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$$= \frac{q}{6EIl}\left|\frac{x^5}{5}\right|_0^l$$

$$= \frac{ql^4}{30EI}\downarrow$$

**题 8—5** 求图 8—5*a* 所示结构的 $B$ 点水平位移 $\Delta_B$（$EI$ = 常数）。

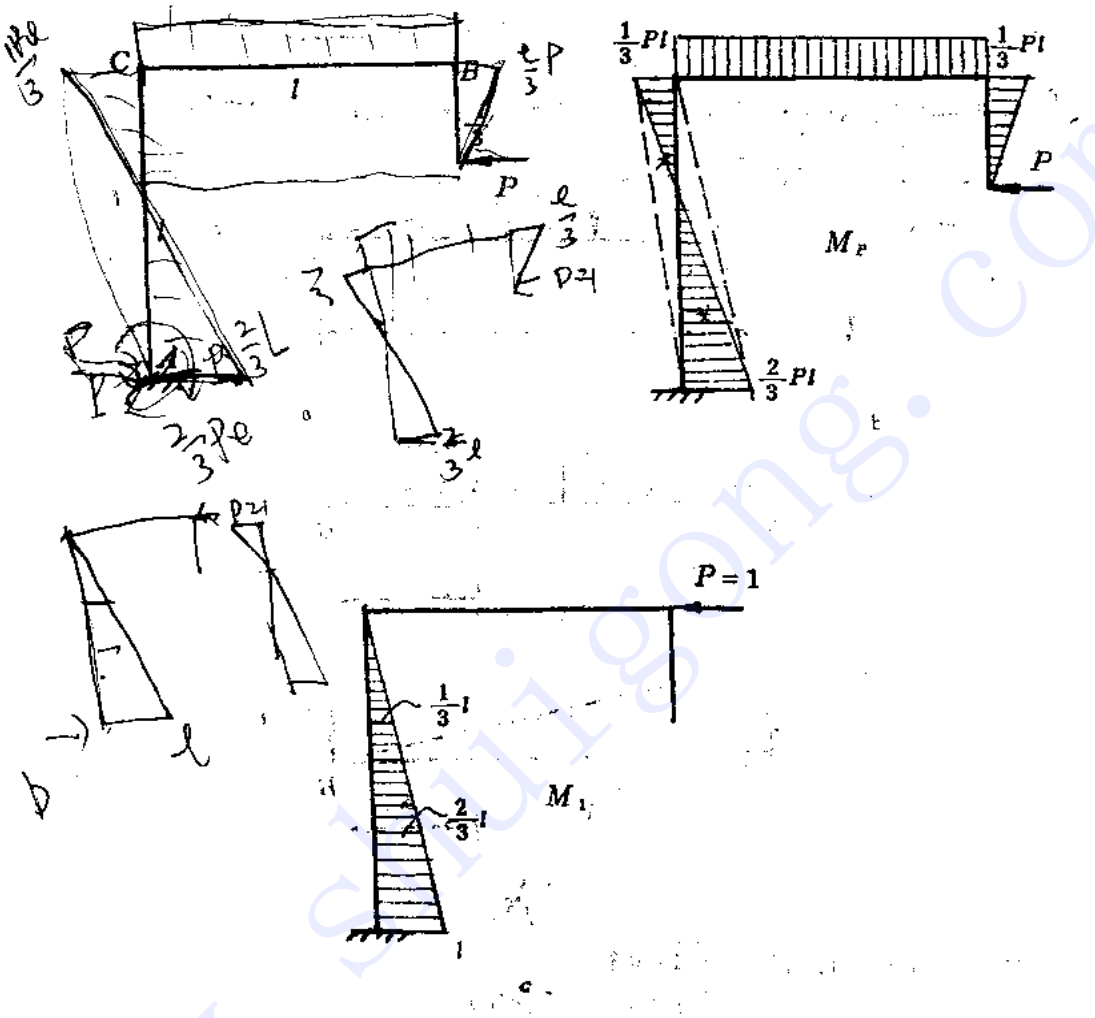



图 8—5

**解**：作 $M_P$、$M_1$ 图如图 8—5*b*、*c* 所示。用图乘法求位移时，$AC$ 杆的弯矩图分为如图 *b* 所示的两部分相图乘。

$$\Delta_B = \Sigma \frac{1}{EI} w y_C$$

$$= -\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2} l \frac{2}{3} Pl \cdot \frac{2}{3} l - \frac{1}{2} l \frac{1}{3} Pl \cdot \frac{l}{3}\right)$$

$$= \frac{Pl^3}{6EI}\leftarrow$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

**题 8—6** 求图 8—6*a* 所示刚架 $D$ 点的竖向位移 $\Delta_D$（$EI$ = 常数）。

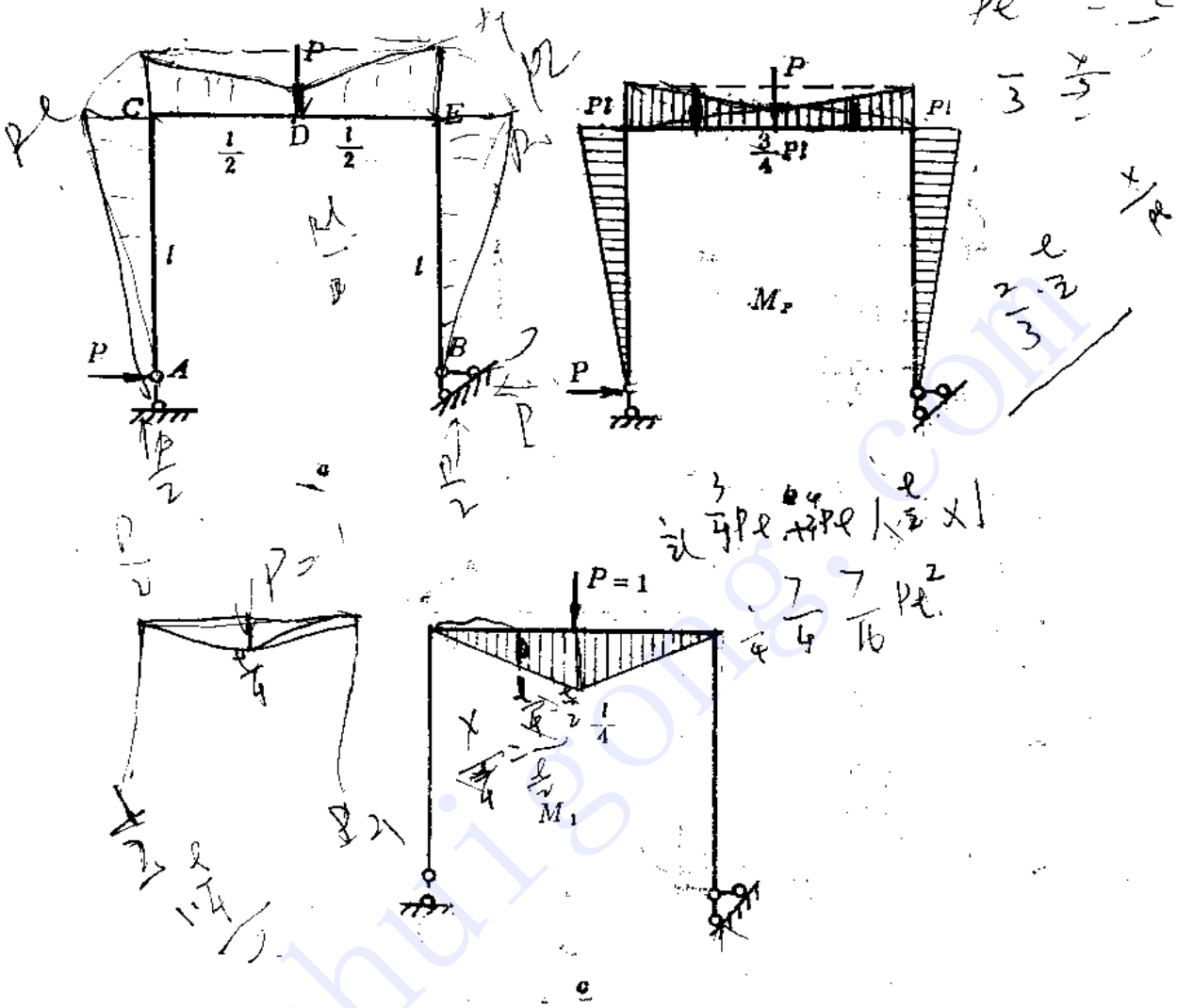



图 8—6

**解**：分别绘出 $M_P$、$M_1$ 图如图 8—6*b*、*c* 所示，图乘时将 $CD$ 和 $DE$ 杆的 $M_P$ 图分为两三角形，则

$$\Delta_D = \frac{-1}{EI}\left[2\,\frac{l}{4}\,\frac{l}{2}\,\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}Pl+\frac{2}{3}\,\frac{3}{4}Pl\right)\right]$$

$$= \frac{-1}{EI}\left[2\,\frac{l^2}{16}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)Pl\right] = -\frac{5}{48}\,\frac{Pl^3}{EI}\ \uparrow$$

**题 8—7** 求图 8—7*a* 所示结构 $A$ 截面的转角 $\varphi_A$。

**解**：在原结构所求位移地点沿所求位移方向虚设一单位力（如图 8—7*c* 所示），分别作出 $M_P$、$M_1$ 图如图 8—7*b*、*c*，则

$$\varphi_A = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\,\frac{Pl}{2}\,\frac{l}{2}\times 1+\frac{1}{2}\left(\frac{Pl}{2}+\frac{3Pl}{2}\right)\frac{l}{2}\times 1\right]+\frac{1}{2EI}\,\frac{3}{2}Pl\times l\times 1$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

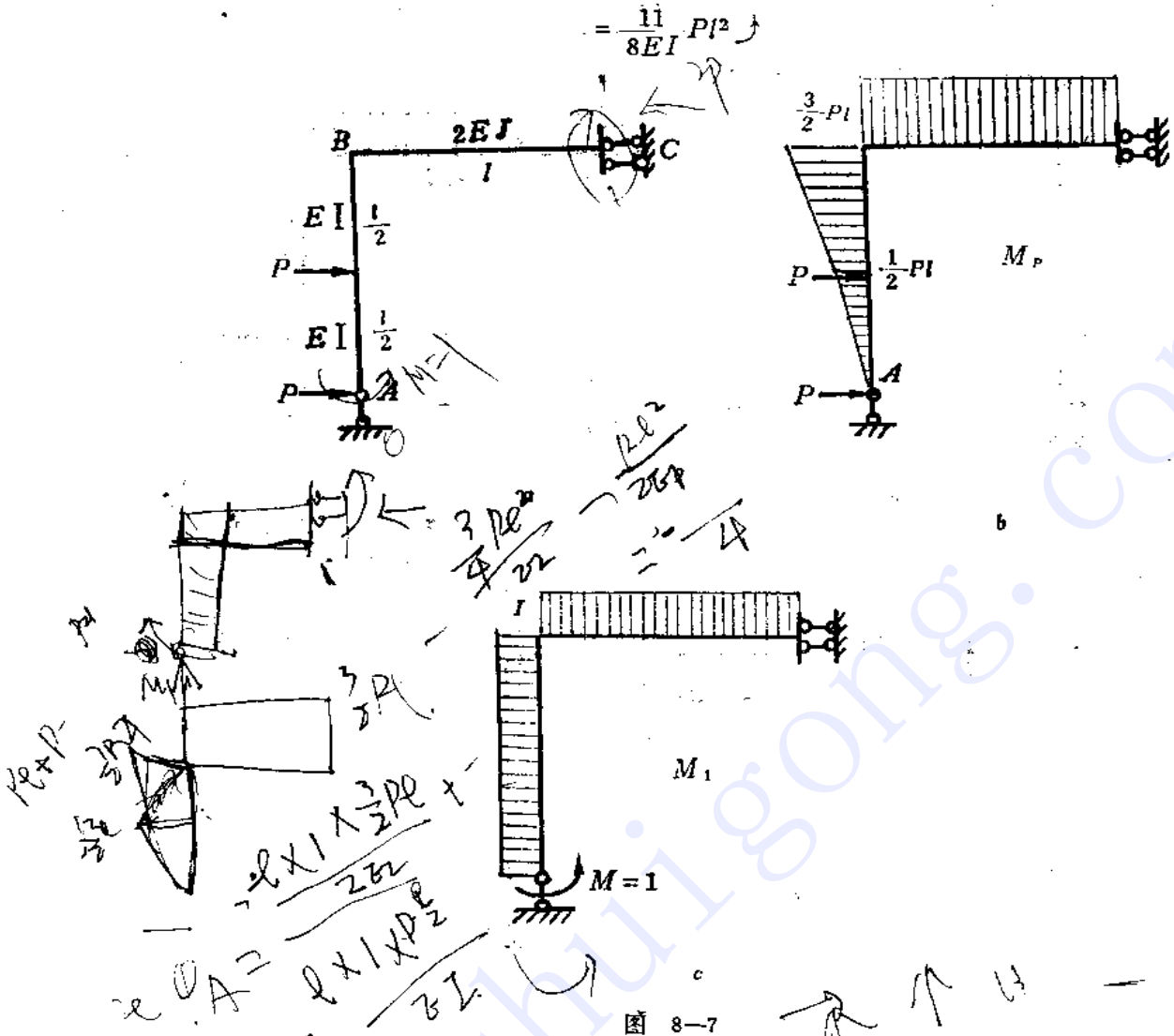



图 8—7

**题 8—8** 求图 8—8*a* 所示结构 $B$ 截面的转角 $\varphi_B$。

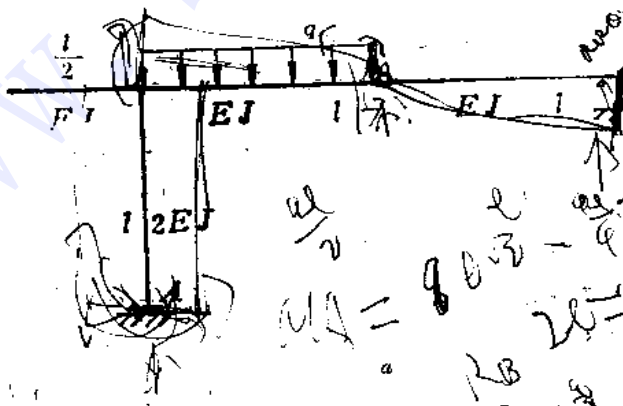



图 8—8

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

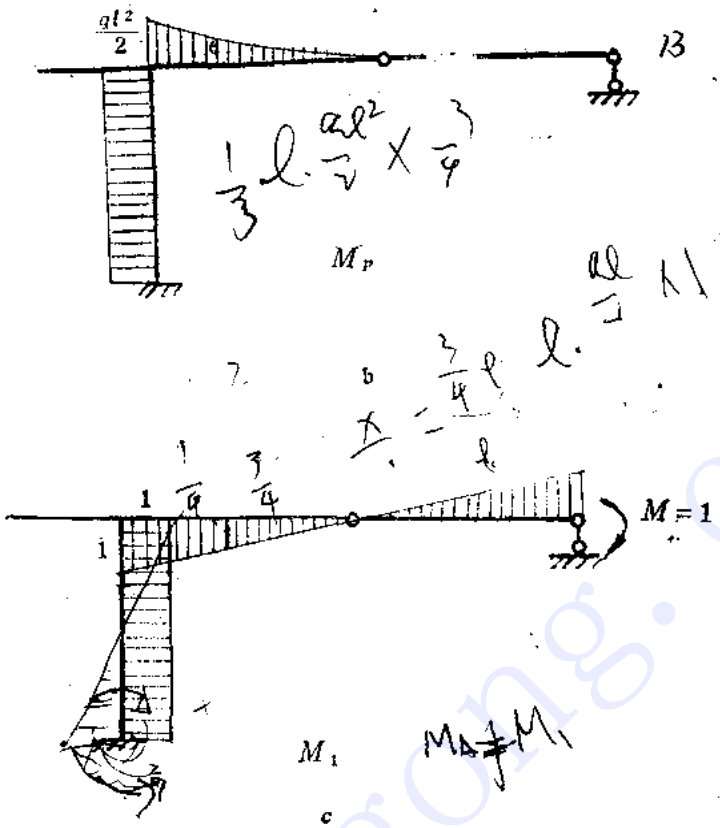



图 8—8

**解：** 分别绘出 $M_P$、$M_1$ 图，然后各杆的 $M$ 图对应相图乘。则

$$\varphi_B = \Sigma \frac{1}{EI} w y_C$$

$$= \frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}ql^2 \cdot l \cdot \frac{3}{4}\times 1\right) + \frac{1}{2EI}\left(-\frac{ql^2}{2}\cdot l \cdot 1\right)$$

$$= -\frac{3}{8EI}ql^3 \curvearrowright$$

**题 8—9** 求图 8—9$a$ 所示结构 $c$ 截面的竖向位移 $\Delta_C$。

**解：** 分别作 $M_P$，$M_1$ 图，为了图乘方便，将荷载弯矩图 $M_P$ 分为两种情况相叠加如图8—9$b$、$c$ 所示，求位移时，$M_1$ 图需分别与 $M'_P$，$M''_P$ 相图乘，然后相加在一起，即

$$\Delta_C = \frac{1}{2EI}\left(\frac{1}{2}\cdot 2\times 6q\times\frac{2}{3}\times 2 + \frac{1}{2}\cdot 2\times 2q\times\frac{1}{3}\times 2 + \frac{1}{3}\times 2\times 2q\frac{3}{4}\times 2\right)$$

$$+ \frac{1}{EI}(6q\times 3\times 2 + 2q\times 3\times 2)$$

$$= \frac{1}{EI}\left(4 + \frac{2}{3} + 1 + 36 + 12\right)q$$

$$= \frac{161}{3EI}q \downarrow$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

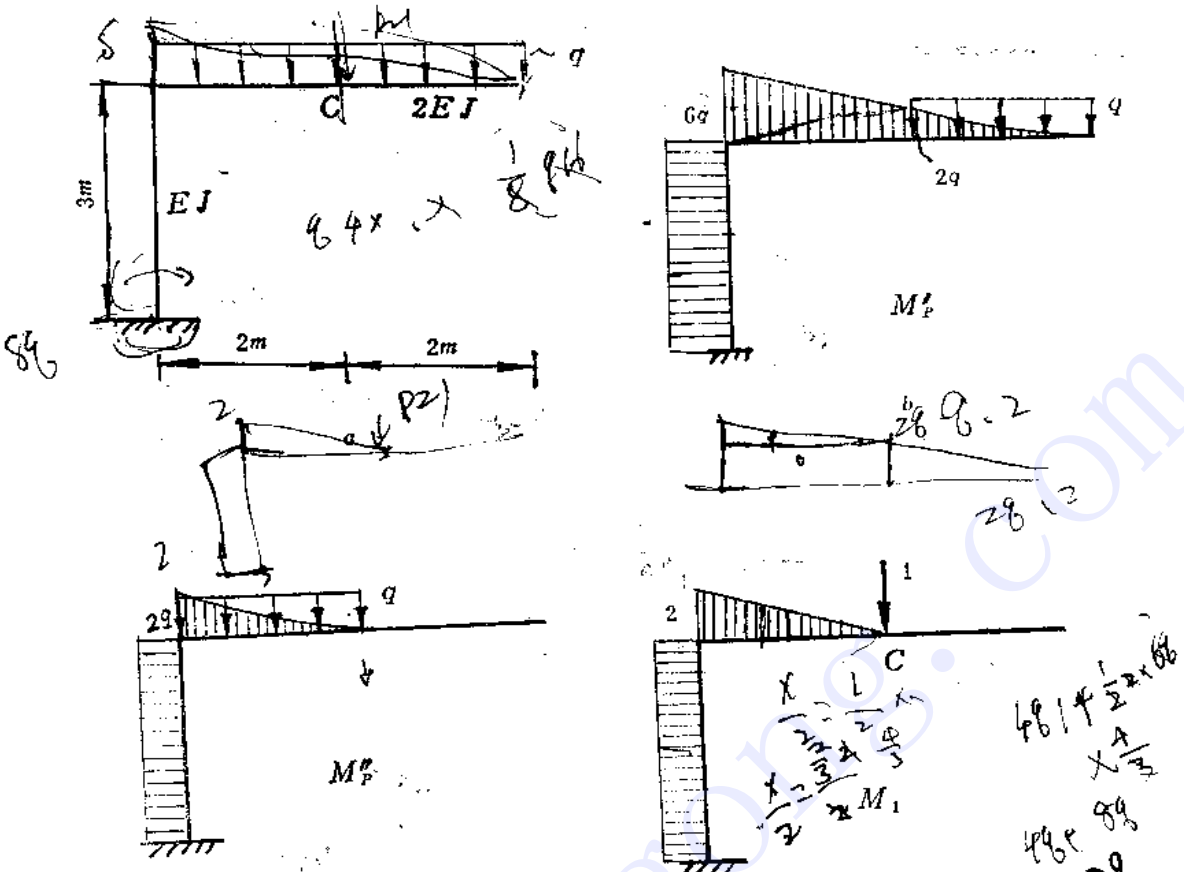
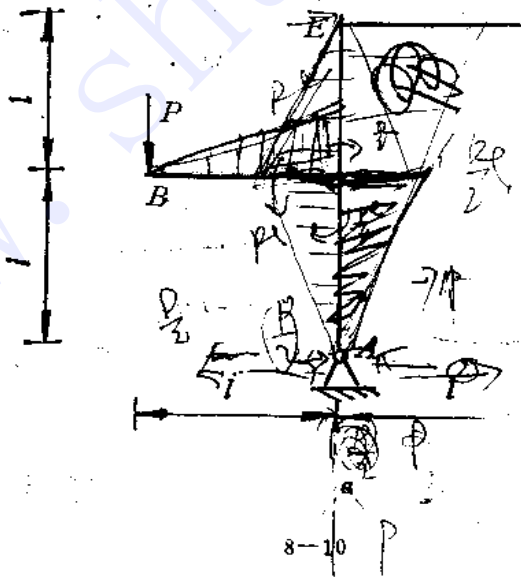



图 8—9




8—10

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

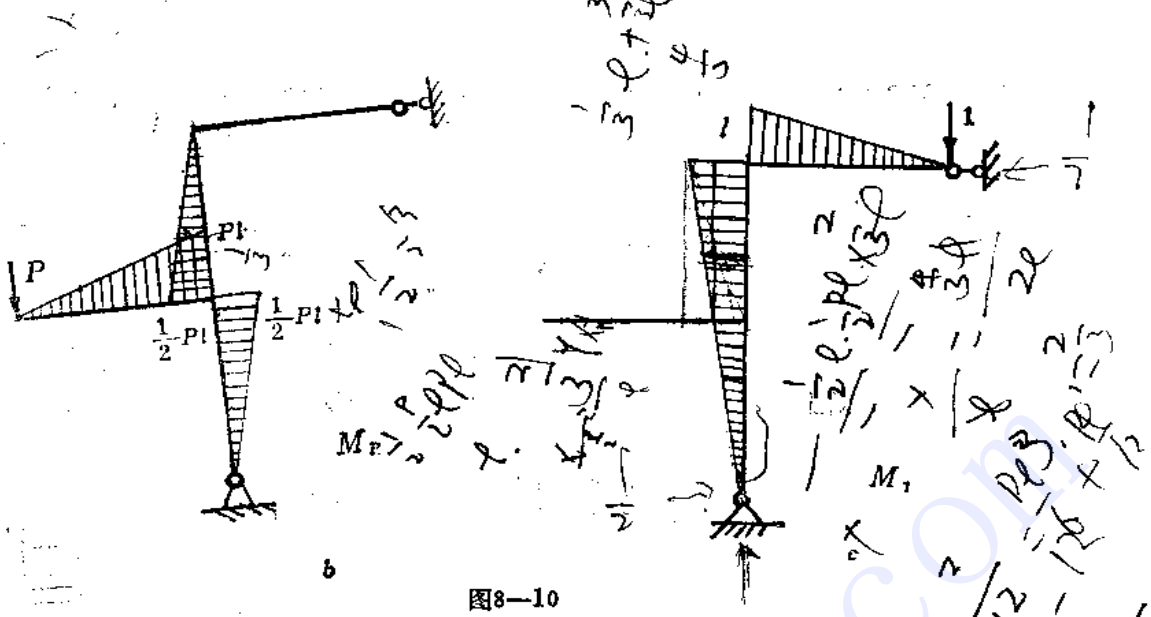



图8—10

**题8—10** 求图8—10*a*所示结构*C*点的竖向位移$\Delta_C$（$EI$=常数）。

**解：** 分别求出$M_P$、$M_1$图如图8—10*b*、*c*所示，则

$$\Delta_C=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}l\cdot l\,\frac{1}{3}\,\frac{P}{2}l+\frac{1}{2}\cdot\frac{l}{2}\times\frac{2}{3}\cdot\frac{P}{2}l-\frac{1}{2}l\cdot\frac{Pl}{2}\times\frac{2}{3}\,\frac{l}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{12}Pl^3+\frac{1}{12}Pl^3-\frac{1}{12}Pl^3\right)=\frac{Pl^3}{12EI}\downarrow$$

**题8—11** 求图8—11*a*所示结构*B*下面截面的转角$\varphi_B$（$EI$=常数）。

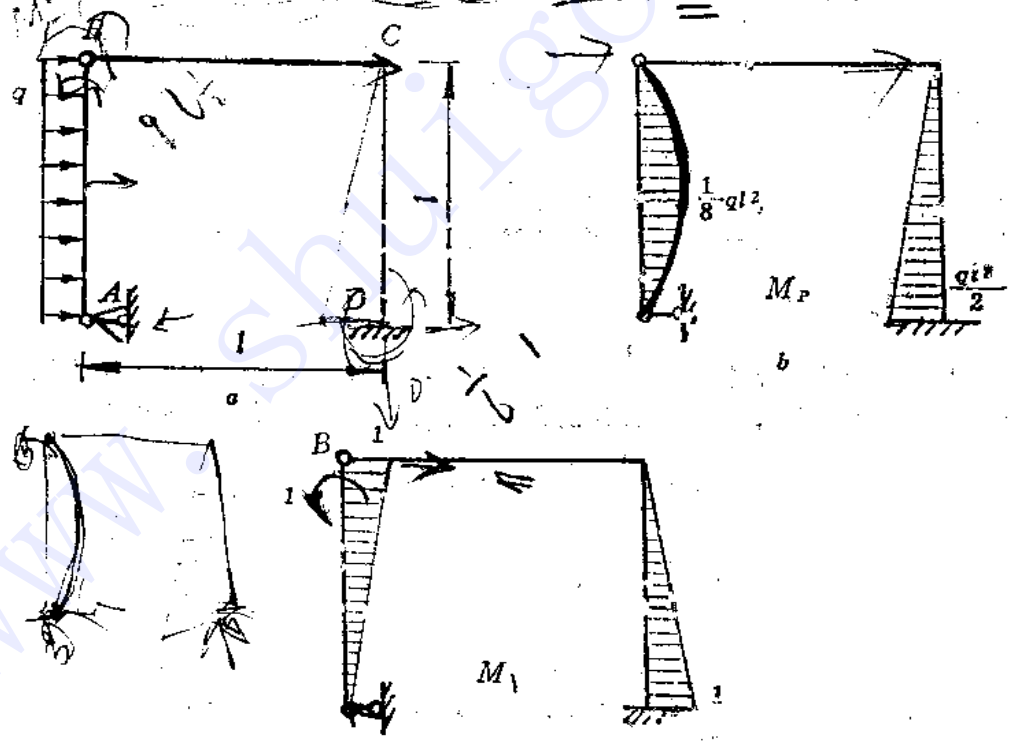



图 8—11

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

**解**：分别作出 $M_P$、$M_1$ 图如图 8—11b、c 所示，对应杆件弯矩图相乘，得

$$\varphi_B = \sum \frac{1}{EI} w y_C$$

$$= \frac{1}{EI}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}ql^2 \cdot l \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot l \times \frac{1}{2}pl^2 \times \frac{2}{3} \times 1\right)$$

$$= -\frac{ql^3}{8EI}$$

**题 8—12** 求图 8—12a 所示结构 $C$ 点左右截面的相对转角 $\varphi_C$（$EI$ = 常数）。

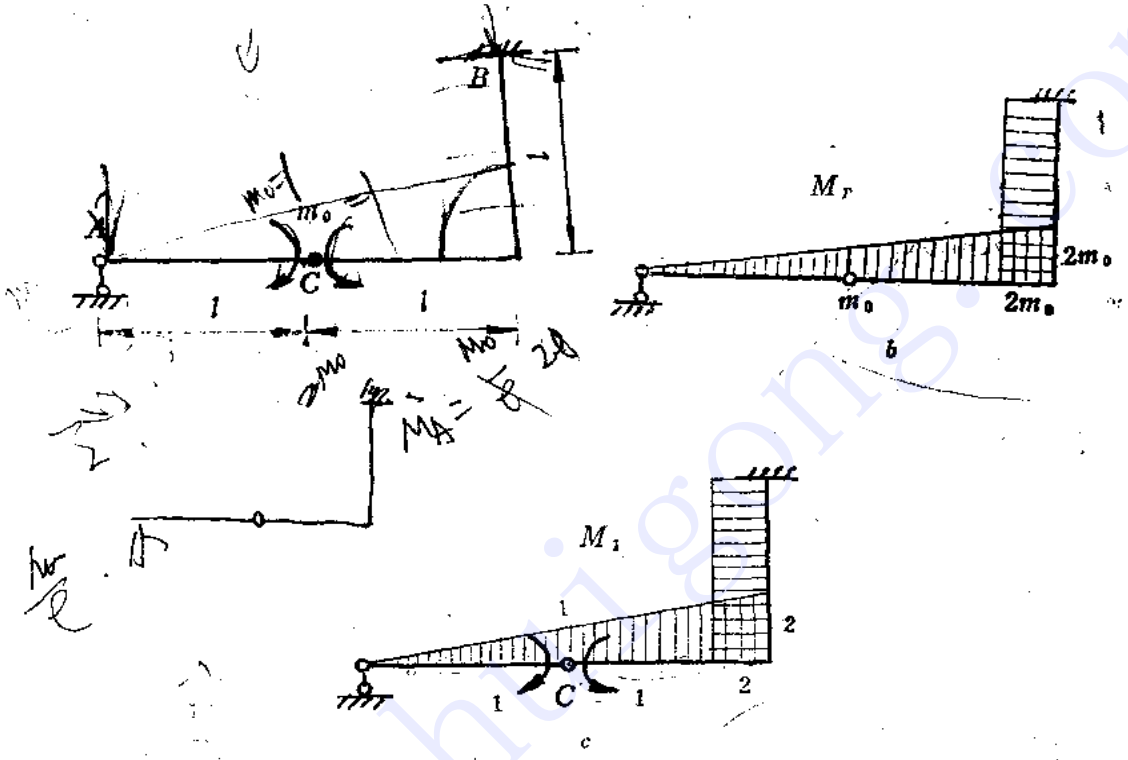



图 8—12

**解**：因为此题求的是相对转角，所以应在所求位移地点，沿所求位移方向设一对单位力偶如图 8—12c 所示，然后分别作出 $M_P$、$M_1$ 图，则利用图乘法公式得

$$\varphi_C = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\cdot 2l \cdot 2m_0 \times \frac{2}{3} \times 2 + 2m_0 l \times 2\right)$$

$$= \frac{20m_0}{3EI} l$$

**题 8—13** 求图 8—13a 所示结构 $A$、$B$ 两截面的相对转角 $\varphi_{AB}$（$EI$ = 常数）。

**解**： 加如图 8—13c 所示的一对单位力偶，分别求出 $M_P$、$M_1$ 图。

$$\varphi_{AB} = \frac{1}{EI}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}ql^2 \cdot l \times 1\right) = \frac{ql^3}{12EI}$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

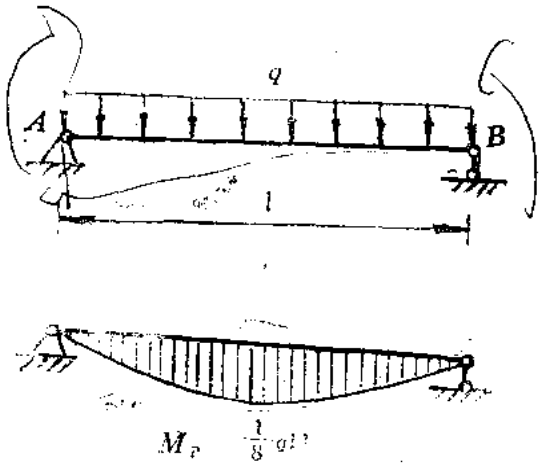



图 8—13

**题 8—14** 求图 8—14*a* 所示结构 *C* 点的水平位移 $\Delta_{Cc}$。

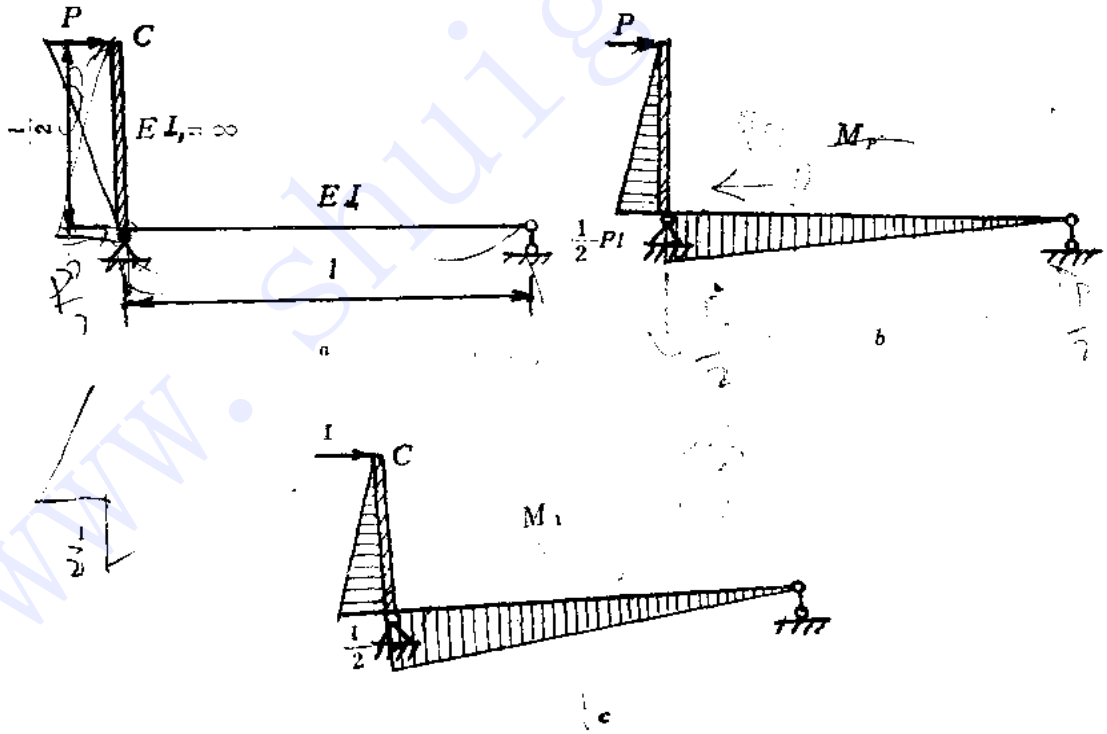



图 8—14

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

**解：** 分别作出 $M_P$、$M_1$ 图如图 $b$、$c$ 所示，则

$$\Delta_C = -\frac{1}{EI_1}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{l}{2}\,\frac{1}{2}Pl\times\frac{2}{3}\,\frac{l}{2}\right)+\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}l\,\frac{P}{2}l\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{l}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{\infty}\left(\frac{Pl^3}{24}\right)+\frac{1}{EI}\left(\frac{Pl^3}{12}\right)$$

$$=0+\frac{Pl^3}{12EI}$$

$$=\frac{Pl^3}{12EI}\rightarrow$$

**题 8—15** 求图 8—15$a$ 所示结构 $A$、$B$ 两点的相对线位移 $\Delta_{AB}$（考虑轴向变形，$EI$ = 常数）

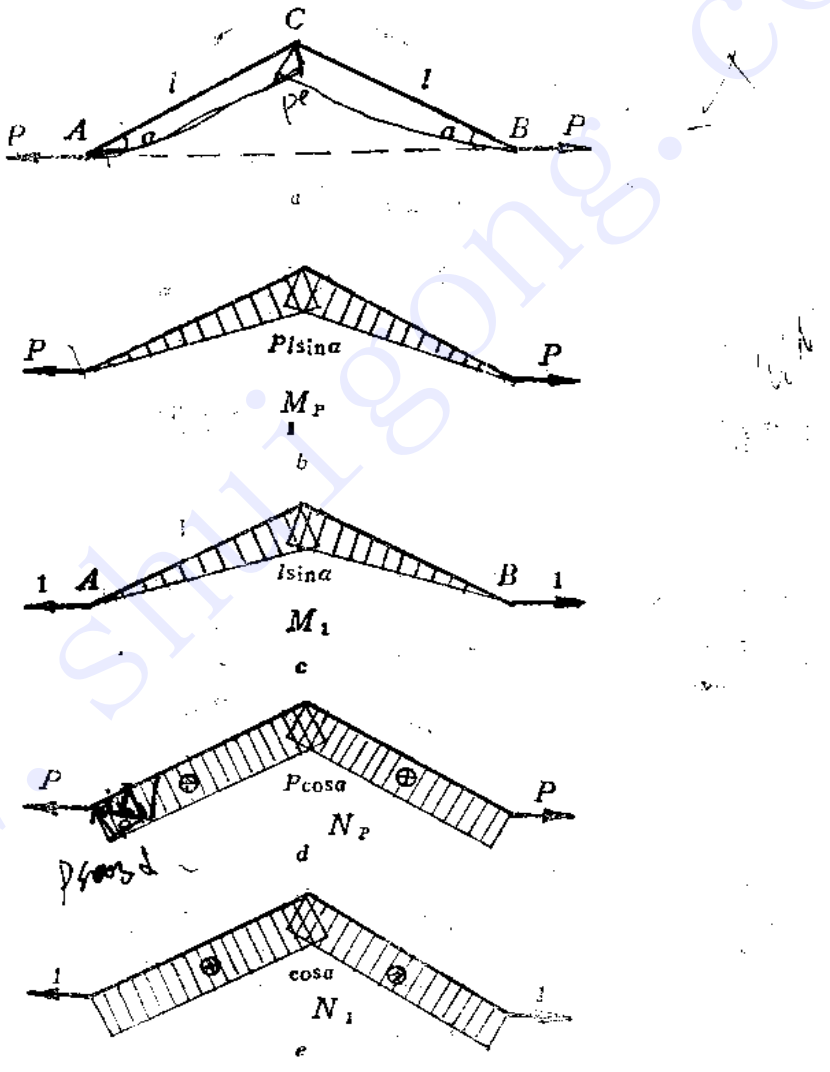



图8—15

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

**解：** 因为本题考虑轴向变形，所以需分别绘出 $M_P$、$N_P$、$M_1$、$N_1$ 图如图 $b$、$c$、$d$、$e$ 所示，则

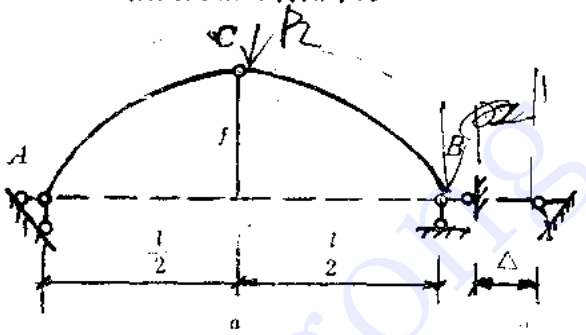
$$\Delta_{AB}=\Sigma\frac{1}{EI}wy_C+\Sigma\frac{N_1N_P}{EA}l \qquad (EA=\text{常数})$$

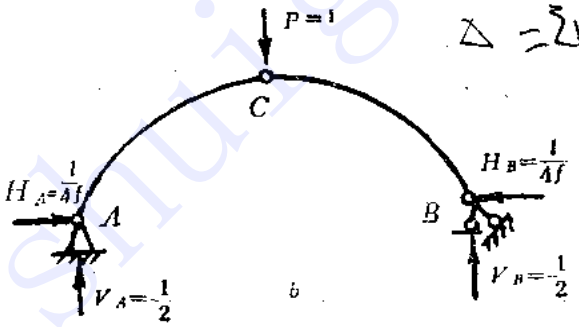
$$=\frac{1}{EI}\left(2l\cdot Pl\sin\alpha\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}l\sin\alpha\right)+\frac{1}{EA}(2P\cos\alpha\cdot\cos\alpha\cdot l)$$

$$=\frac{1}{EI}\left(\frac{2}{3}Pl^3\sin^2\alpha\right)+\frac{1}{EA}(2Pl\cos^2\alpha)$$

$$=\frac{2Pl}{E}\left(\frac{l^2}{3I}\sin^2\alpha+\frac{1}{A}\cos^2\alpha\right)\longleftrightarrow$$

**题 8—16** 求图 8—16a 所示三铰拱由于支座 $B$ 向右移动 $\Delta$ 时所引起 $C$ 点的竖向位移 $\Delta^1_C$、水平位移 $\Delta_C$ 及其左右截面的相对转角 $\varphi_C$。



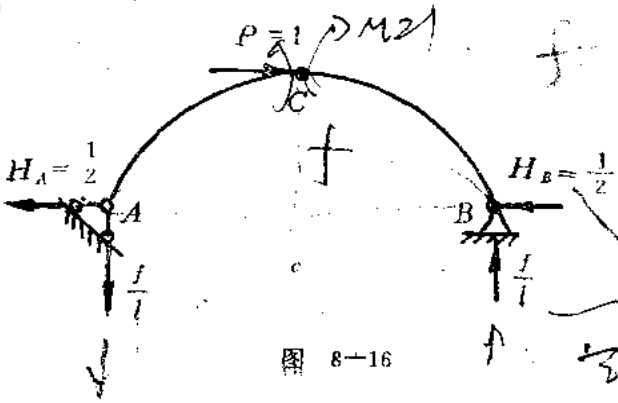




图 8—16

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

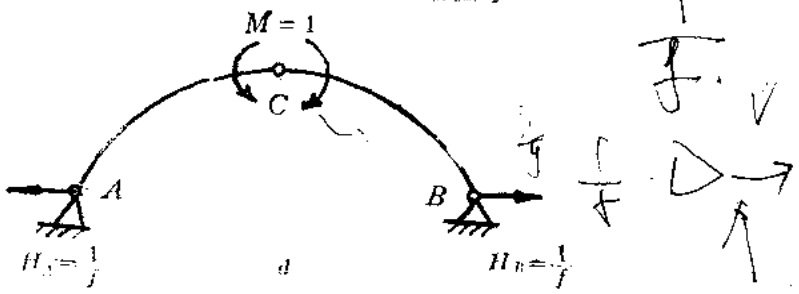



图 8—16

**解：** 1）求 $C$ 点竖向位移 $\Delta^1_C$。设图 8—16$b$ 所示的虚拟状态，根据虚功原理，有

$$\Delta^1_C \cdot 1 - H_B \cdot \Delta = 0$$

由图 8—16$b$ 所示的受力状态得

$$V_A = V_B = \frac{1}{2} \quad H_A = H_B = \frac{M^0_C}{f} = \frac{\frac{l}{4}}{f} = \frac{l}{4f}$$

其中 $M^0_C$ 为代梁与拱 $C$ 点对应截面的弯矩，

所以 $\Delta^1_C = H_B \Delta = \frac{l}{4f}\Delta \downarrow$

2）求 $C$ 点的水平位移，

设图 8—16$c$ 所示的虚拟状态、

$$V_A = \frac{f}{l} \quad H_B = \frac{1}{2}$$

由虚功原理知

$$\Delta^2_C \times 1 - \Delta \times \frac{1}{2} = 0$$

$$\Delta^2_C = \frac{1}{2}\Delta \rightarrow$$

3）求 $C$ 点左右截面的相对转角 $\varphi_C$，

设 图8—16$d$ 所示的虚拟状态，

$$H_B = \frac{1}{f}$$

根据虚功原理得

$$\varphi_C \times 1 + \frac{1}{f} \times 1 = 0$$

$$\varphi_C = -\frac{1}{f}$$

**题 8—17** 图 8—17$a$ 所示三铰拱，在拉杆 $AB$ 的中点 $D$ 处装有花兰螺丝，如果拧紧螺丝使 $D_1$、$D_2$ 相对靠近的距离为 $\lambda$，求由此引起 $C$ 点的竖向位移 $\Delta_C$。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

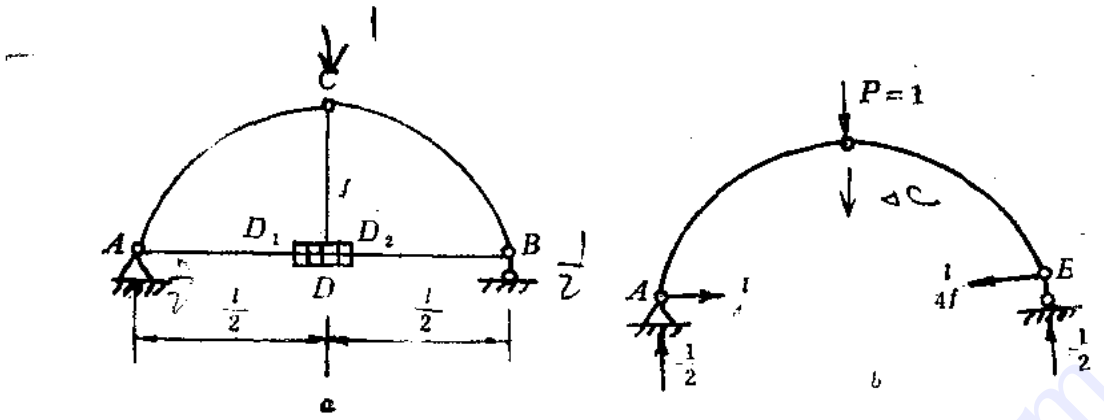



图 8—17

**解：** 由于 $A$ 点不动，所以 $D_1$、$D_2$ 两点相互靠近入，就等于 $B$ 点向左移动了入。设图 8—17$b$ 所示的虚拟状态，并求出支座反力如图所示。由虚功原理知：

$$1 \cdot \Delta_C + \frac{l}{4f} \cdot \lambda = 0$$

$$\Delta_C = -\frac{l}{4f}\lambda \uparrow$$

**题 8—18** 求图 8—18$a$ 所示桁架结点 $C$ 的水平位移 $\Delta_C$（$EA$ = 常数）

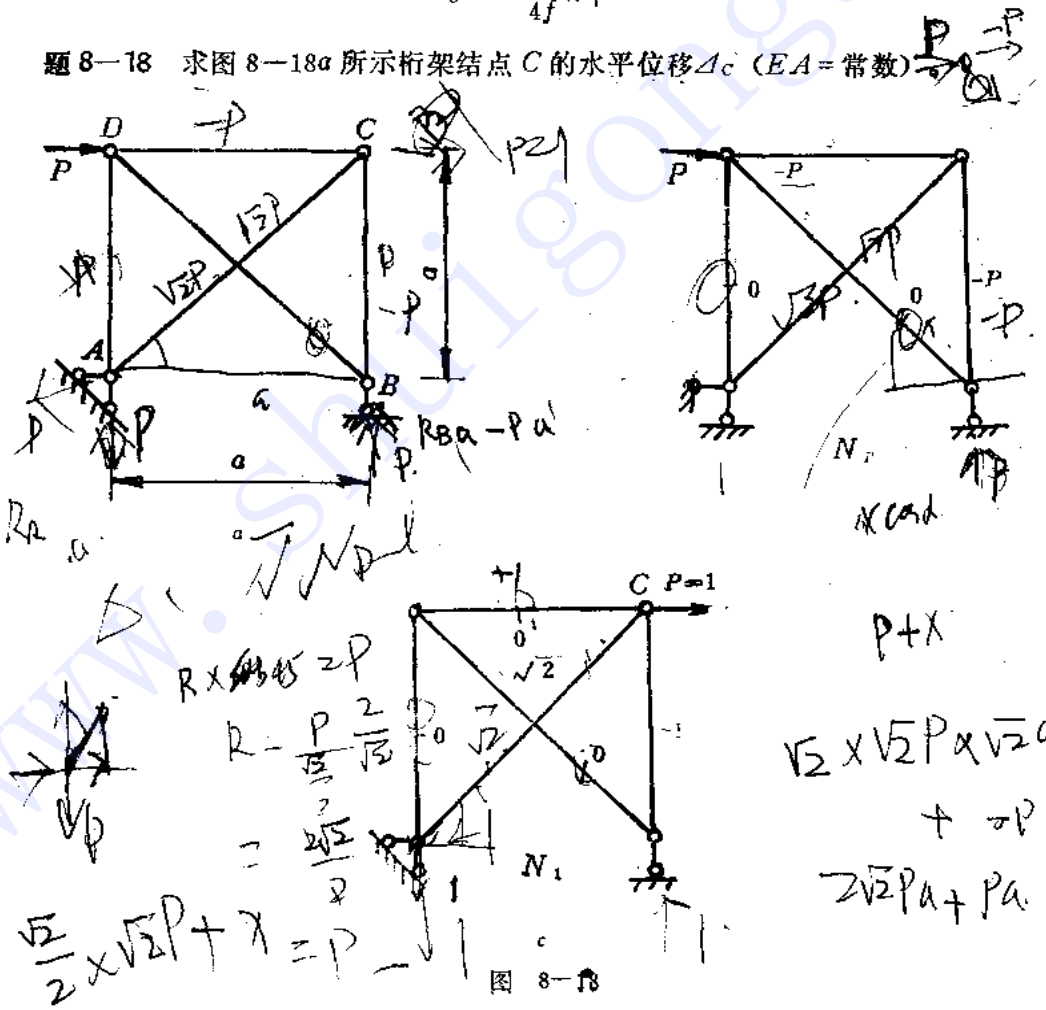



图 8—18

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

**解：** 求出原结构各杆的内力如图 8—18 *b* 所示，再求出虚设结构各杆的内力如图 8—18*c* 所示。根据虚功原理，有

$$\Delta_C = \Sigma \frac{N_1 N_P}{EA} l$$

$$= \frac{1}{EA}\left[\sqrt{2}P \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}a + (-P)(-1)a\right]$$

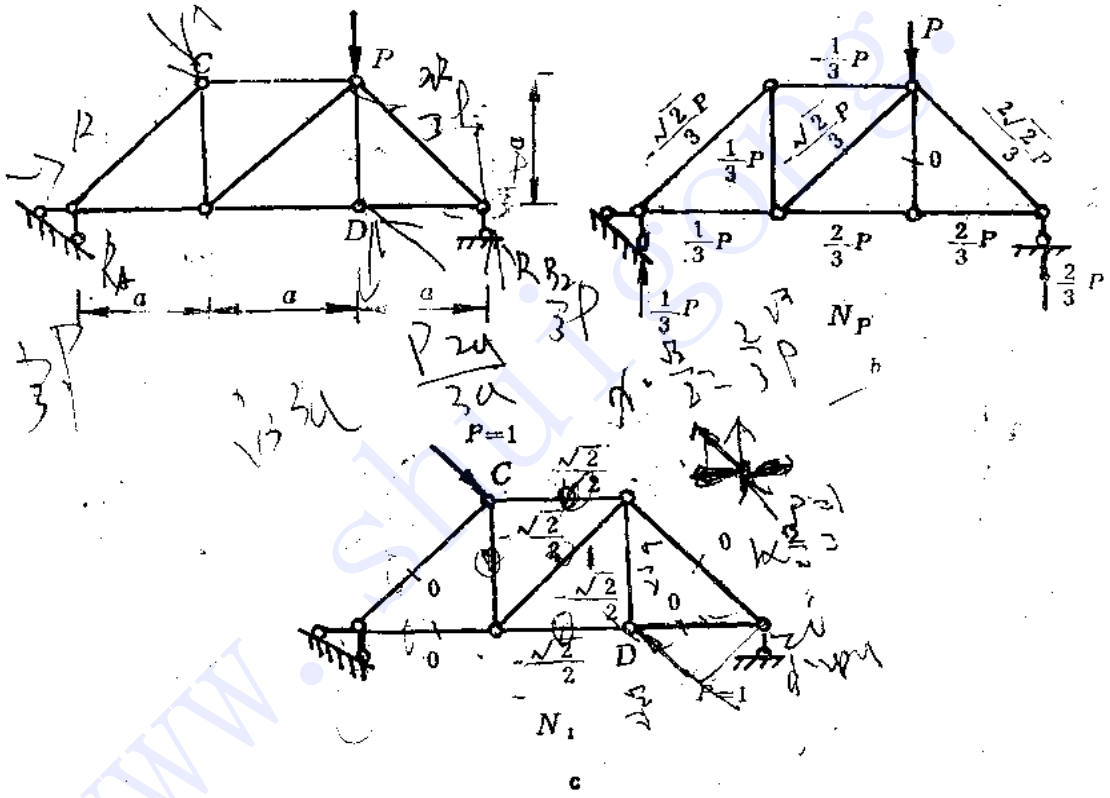
$$= \frac{Pa}{EA}(2\sqrt{2}+1) \rightarrow$$

设 $E = 2\times10^6 \mathrm{Kg/cm^2}$　　$A = 20\mathrm{cm^2}$

$P = 10000\mathrm{Kg}$　　$a = 300\mathrm{cm}$

则 $\Delta_C = -\frac{10000\times300}{2\times10^6\times20}(1+2\sqrt{2}) = 0.287\mathrm{cm} \rightarrow$

**题 8—19** 求图 8—19*a* 所示结构 *CD* 两点的相对线位移 $\Delta_{CD}$。




c

图 8—19

**解：** 首先求出结构在原荷载作用下的各杆内力（如图 8—19*b* 所示）。设一相应的虚拟状态如图 8—19*c* 所示，由于求的是 *C*、*D* 两点的相对位移，所以所设单位力应是如图8—19*c* 所示的一对单位集中力，求出由这对单位集中力所引起的各杆内力，则

$$\Delta_{CD} = \Sigma \frac{1}{EA} N_1 N_P l$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$$= \frac{1}{EA}\left[\left(-\frac{1}{3}P\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot a + \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}P\right)\cdot\sqrt{2}a + \frac{2}{3}P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)a + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3}P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot a\right] = \frac{-Pa}{3EA}\left(\sqrt{2}+2\right)$$

所求位移与所设单位力方向相反。

**题 8—20** 求图 8—20$a$ 所示结构由于温度改变所引起 $C$ 点的竖向位移$\Delta_C$。

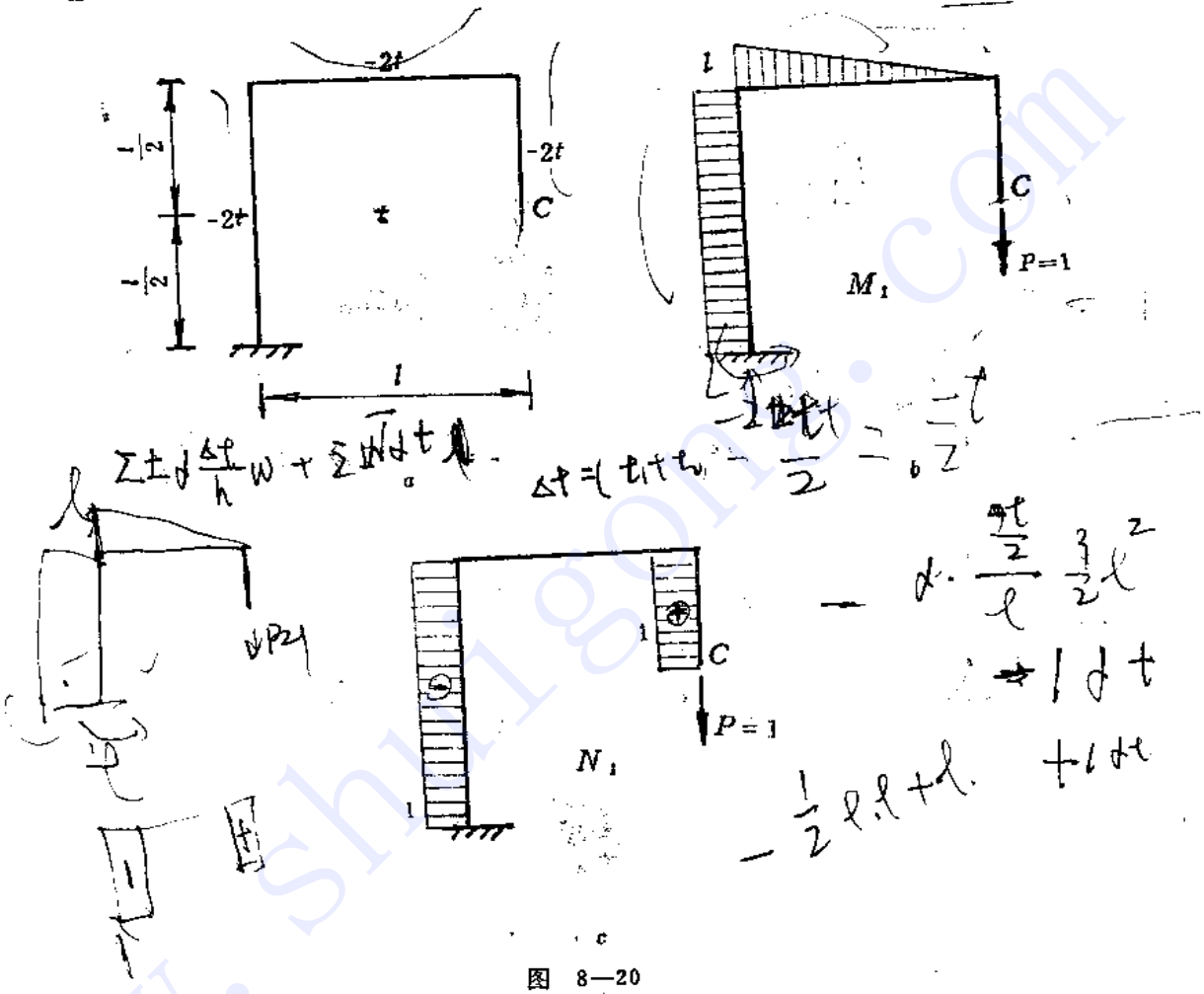



图 8—20

**解：** 分别作出$\overline{M}_1$、$\overline{N}_1$ 图如图 8—20$b$、$c$ 所示。温度所引起的位移计算公式为

$$\Delta_C = \Sigma\alpha\frac{\Delta t}{h}M_W + \Sigma\alpha t_0 N_W$$

其中 $\alpha$——线膨胀系数；

$M_W$——$M_1$ 图的面积；

$N_W$——$N_1$ 图的面积；

$\Delta t$——杆件两侧温差；

$t_0$——杆轴线温度；

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$h$——杆件截面高度（矩形截面）。

设各杆截面为矩形$h=\frac{l}{20}$，由题给知

$$\Delta t=t-(-2t)=3t \qquad t_0=\frac{t+(-2t)}{2}=-\frac{t}{2}$$

则 $$\Delta_C=-\frac{\alpha}{h}3t\left(\frac{1}{2}l\cdot l+l\cdot l\right)-\alpha\frac{t}{2}\left(\frac{l}{2}\cdot 1-l\cdot 1\right)$$

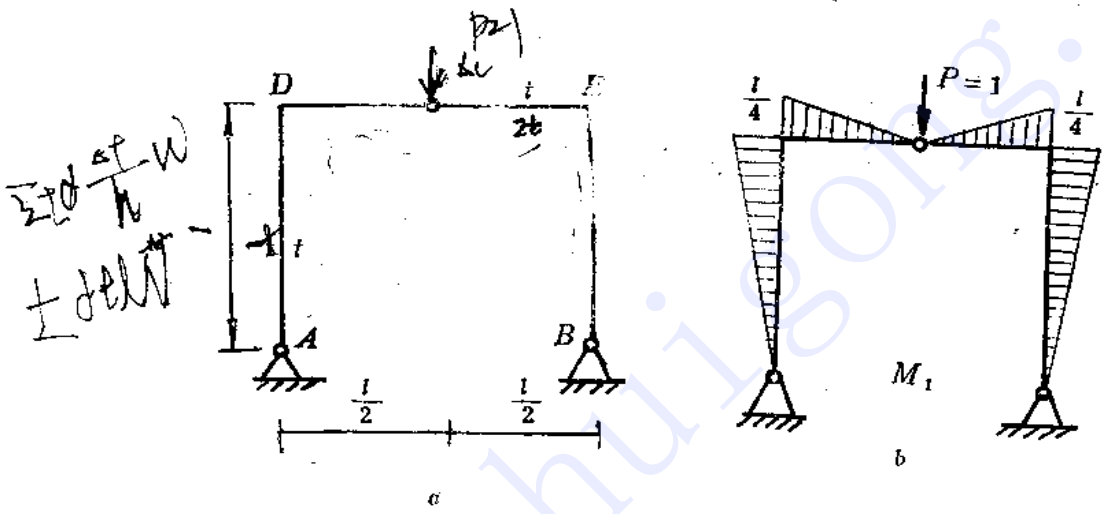
$$=-\frac{359}{4}\alpha lt\uparrow$$

注意两点：

1）计算由于温度引起的变形时不能略去轴向变形的影响；

2）每项正负号应按规定的原则确定。

**题 8—21** 求图 8—21$a$ 所示结构 $C$ 点竖向位移$\Delta_C$（各杆截面高度为 $h=\frac{l}{20}$）。



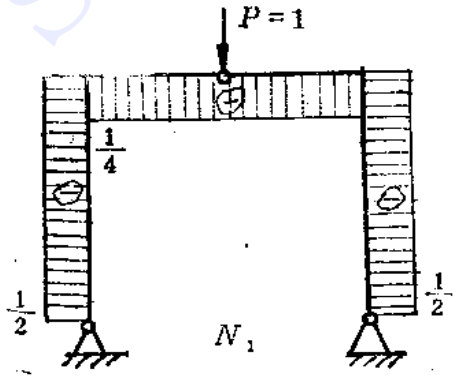




图 8—21

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

**解：** 分别作出 $M_1$、$N_1$ 图如图 8－21b、c 所示。

$$\Delta_C = \Sigma \alpha \frac{\Delta t}{h} M_W + \Sigma \alpha t_0 N_W$$

$$= -\frac{\alpha}{h}(2t)\frac{1}{2}l \cdot \frac{l}{4} - \frac{\alpha}{h}t\frac{1}{2}l \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{1}{2} - \alpha\frac{3}{2}t\frac{l}{2} \cdot \frac{1}{4}$$

$$= -\frac{5}{16}\frac{\alpha}{h}tl^2 - \frac{3}{16}\alpha tl$$

$$= -\frac{5}{16}\alpha t\frac{20}{l}l^2 - \frac{3}{16}\alpha tl = -\frac{103}{16}\alpha tl \uparrow$$

**题 8--22** 求图 8—22a 所示混合结构 $C$ 点的竖向位移 $\Delta_C$。($EI$ = 常数、$EA$ = 常数)

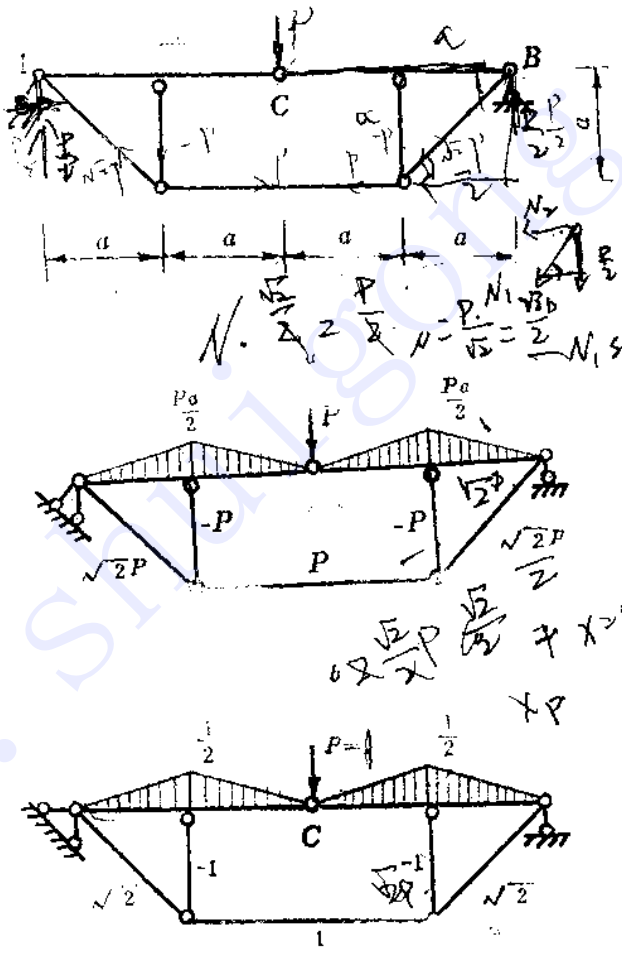



图 8—22

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

**解：** 原结构受荷和虚设的受力状态如图 8—22b、c 所示。

$$\Delta_C = \Sigma \frac{1}{EI} w y_C + \Sigma \frac{1}{EA} N_1 N_P l_0$$

$$= \frac{1}{EI}\left(4 \cdot \frac{1}{2} a \cdot \frac{P}{2} a \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{EA}(2 \times P \cdot 1 \cdot a + 2\sqrt{2} P \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} a + P \cdot 1 \times 2a)$$

$$= \frac{Pa^2}{3EI} + \frac{4}{EA}(\sqrt{2} + 1) Pa \downarrow$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

# 第九章　用力法计算超静定结构

**题 9—1**　用力法计算图 9—1*a* 所示结构，绘出 $M$、$Q$ 图（已知 $EI$ = 常数）。

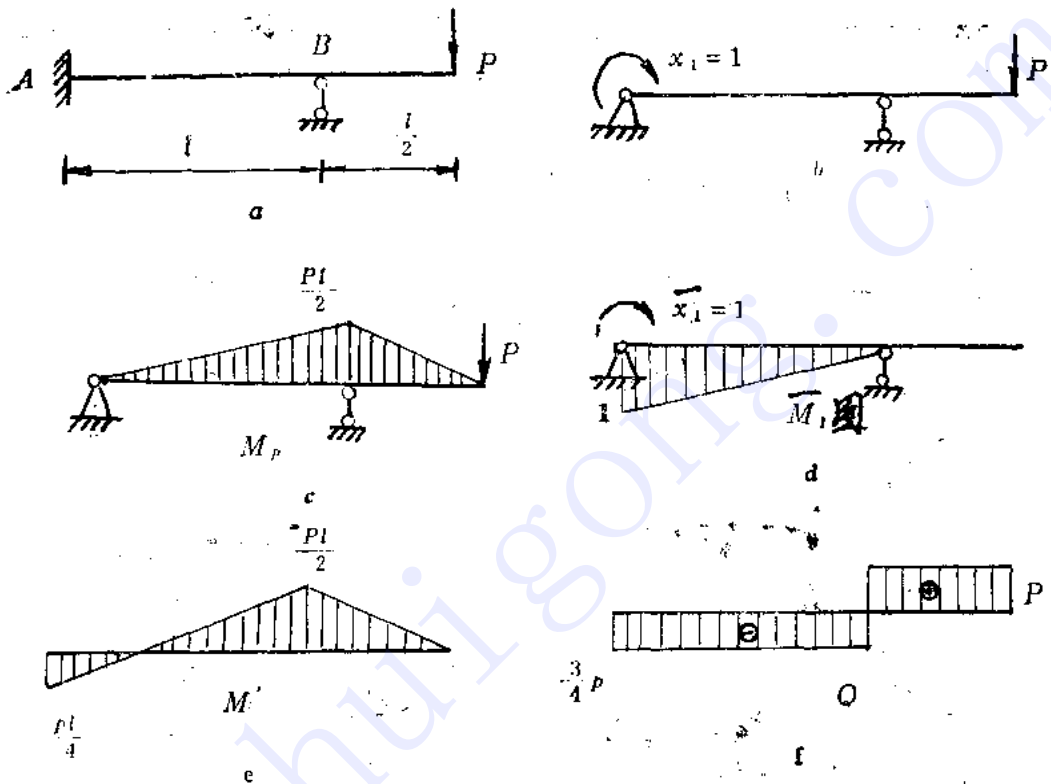



图　9—1

**解**：确定超静定次数。本题为一次超静定。去掉多余联系，得到图 9—1*b* 所示的基本体系，则得力法方程为：

$$\Delta_1 = \delta_{11}x_1 + \Delta_{1P} = 0$$

分别绘出 $M_P$、$M_1$ 图如图 9—1*c*、*d* 所示。再计算方程中的系数和自由项：

$$\delta_{11} = \Sigma\int\frac{M_1^2 ds}{EI} = \frac{1}{EI}1\cdot l\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{l}{3EI}$$

$$\Delta_{1P} = \Sigma\int\frac{M_1 M_P}{EI}ds = -\frac{1}{EI}\frac{1}{2}l\cdot\frac{1}{2}Pl\times\frac{1}{3}\times 1 = -\frac{Pl^2}{12EI}$$

又有

$$\frac{l}{3EI}x_1 - \frac{Pl^2}{12EI} = 0$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

得 $$x_1=\frac{Pl}{4}$$

最后弯矩图等于单位弯矩图 $M_1$ 乘以 $X_1$ 与 $M_P$ 图代数值相加，即

$$M=M_1x_1+M_P$$

由此得 $M$ 图如图 9—1$e$ 所示。$M$ 图求出后可根据 $M$ 图求剪力图（如图 9—1$f$ 所示）。

为了保证所求内力结果正确，要对其进行校核，校核平衡条件和位移条件。这里我们只校核位移条件，即变形条件。校核 $A$ 点的转角 $\Delta_1$，原结构 $\Delta_1=0$，要想知道计算结果是否正确，检验 $\Delta_1$ 是否等于零即可。为此，把单位弯矩图 $M_1$ 与最终弯矩图 $M$ 相图乘，则

$$\Delta_1=\int\frac{M_1M}{EI}ds=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}l\cdot\frac{Pl}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot1-\frac{1}{2}\cdot l\cdot\frac{Pl}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot1\right)=0$$

可见所求结果是正确的。如 $\Delta_1\neq0$，说明所求最后 $M$ 图是错误的。

**题 9—2** 求图 9—2$a$ 所示钢架的 $M$、$Q$、$N$ 图（各杆 $EI$ = 常数）。

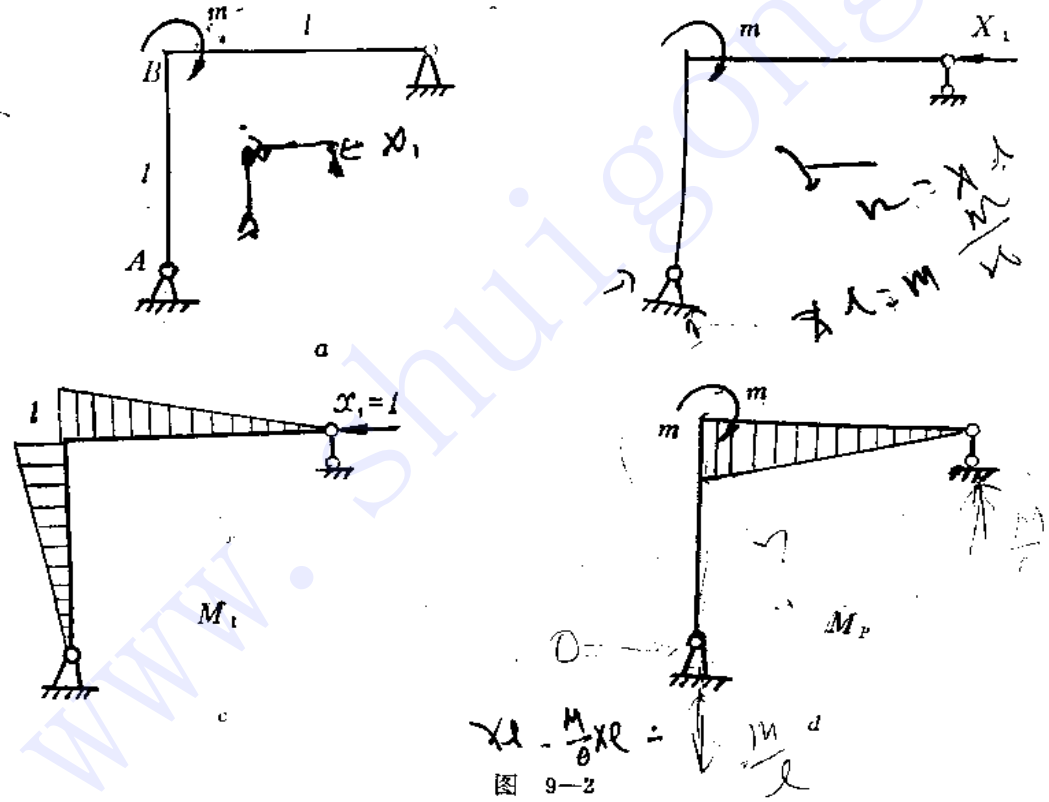



图 9—2

**解：** 本题为一次超静定，选取如图 9—2$b$ 所示的基本体系，则力法方程为

$$\delta_{11}x_1+\Delta_{1P}=0$$

分别作出基本体系的单位弯矩图和荷载弯矩图如图 9—2$c$、$d$ 所示。则

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

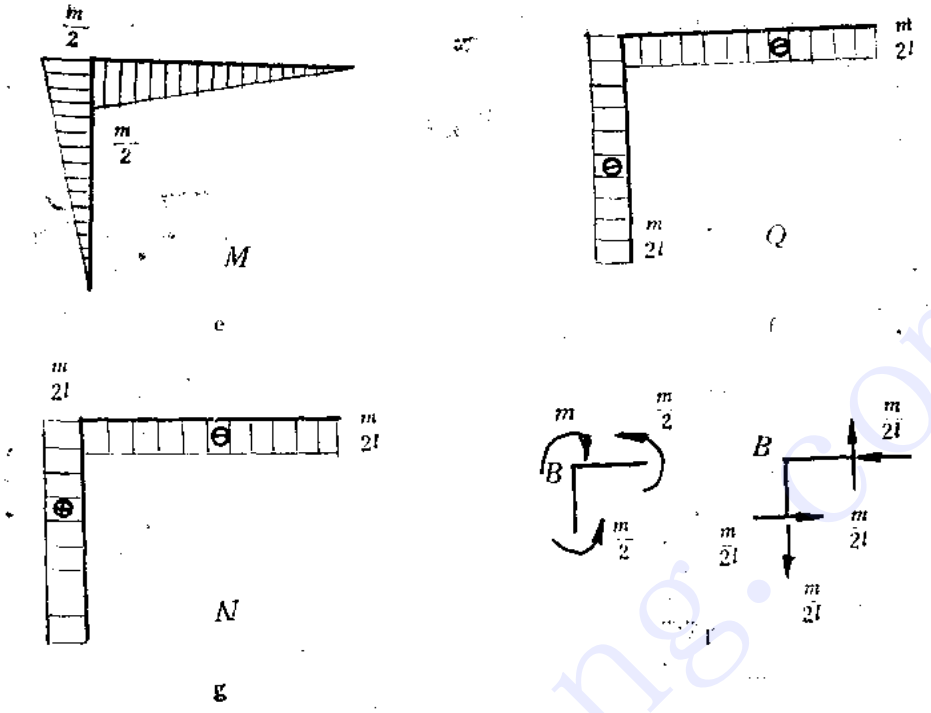



图 9—2

$$\delta_{11}=\Sigma\int\frac{M_1^2ds}{EI}=\frac{1}{EI}\cdot2\cdot l\cdot l\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}l=\frac{2l^3}{3EI}$$

$$\Delta_{1P}=\Sigma\int\frac{M_1M_Pds}{EI}=-\frac{1}{EI}\cdot\frac{1}{2}m\cdot l\cdot\frac{2}{3}l=-\frac{ml^2}{3EI}$$

有 $\frac{2l^3}{3EI}x_1-\frac{ml^2}{3EI}=0\quad x_1=\frac{m}{2l}$

根据式

$$M=M_1x_1+M_P$$

绘出弯矩图 $M$ 如图 9—2$e$. 然后根据 $M$ 图绘出 $Q$ 图和 $N$ 图分别如图 9—2$f$、$g$ 所示。

校核平衡条件：取结点 $B$ 如图 9—2$l$ 所示。

$\Sigma M_B=0\quad m-\frac{m}{2}-\frac{m}{2}=0$ 满 足

$\Sigma X=0\quad \frac{m}{2l}-\frac{m}{2l}=0$ 满 足

$\Sigma y=0\quad \frac{m}{2l}-\frac{m}{2l}=0$ 满 足

变形条件明显被满足，故此题内力图正确.

**题 9—3** 求图 9—3$a$ 所示钢架的 $M$ 图. （已知各杆 $EI$ = 常数）.

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

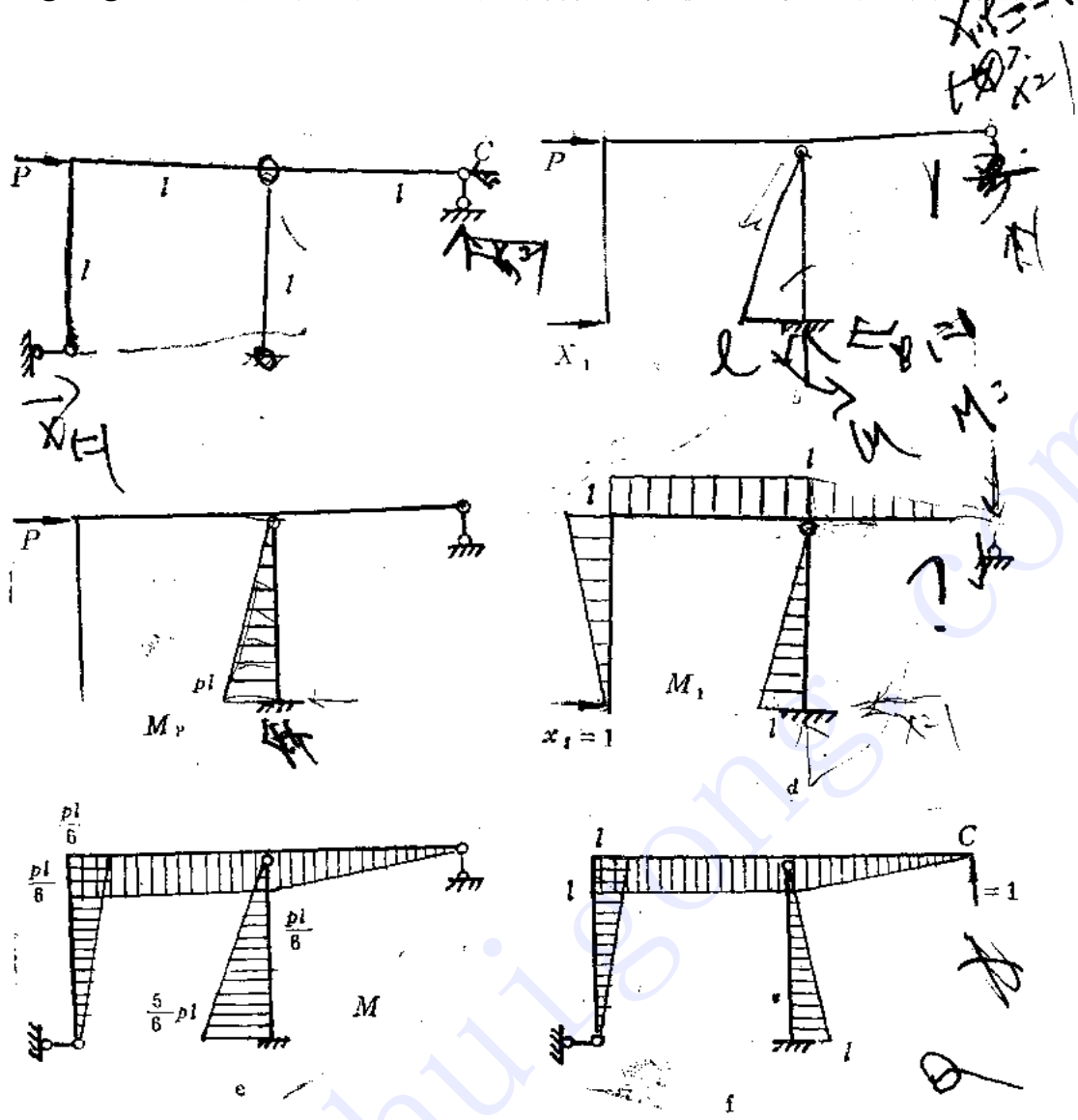



图 9—3

**解：** 由构造分析知，该结构为一次超静定结构，选取如图 9—3*b* 所示的基本体系，则力法方程为

$$\delta_{11}x_1+\Delta_{1P}=0$$

分别绘出 $M_P$、$M_1$ 图如图 9—3*c*、*d* 所示。

$$\delta_{11}=\Sigma\int\frac{1}{EI}M_1^2ds=\frac{1}{EI}\left(3\cdot\frac{1}{2}l\cdot l\,\frac{2}{3}l+l\cdot l\cdot l\right)=\frac{2l^3}{EI}$$

$$\Delta_{1P}=\Sigma\int\frac{M_1M_P}{EI}ds=\frac{1}{EI}\,\frac{1}{2}l\cdot Pl\cdot\frac{2}{3}l=\frac{Pl^3}{3EI}$$

有

$$\frac{2l^3}{EI}x_1+\frac{Pl^3}{3EI}=0$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$$x_1 = -P/6$$

最终弯矩图由公式

$$M = M_1 x_1 + M_P$$

给出，（如图 9—3*e* 所示）。

校核支座 $C$ 点的竖向位移：

$$\Delta_C = 0$$

取如图 9—3*f* 所示的静定体系，在 $C$ 点加上竖向单位力，绘出其弯矩图．将此弯矩图与 $M$ 图相图乘，得

$$\Delta_C = \frac{1}{EI}\left(2\cdot\frac{1}{2}l\cdot\frac{Pl}{6}\cdot\frac{2}{3}l + \frac{Pl}{6}\cdot l\cdot l - \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}Pl\cdot l\cdot\frac{2}{3}l\right) = 0$$

此题计算正确．

**题 9—4** 求图 9—4*a* 所示结构的 $M$ 图（各杆 $EI$ = 常数）．

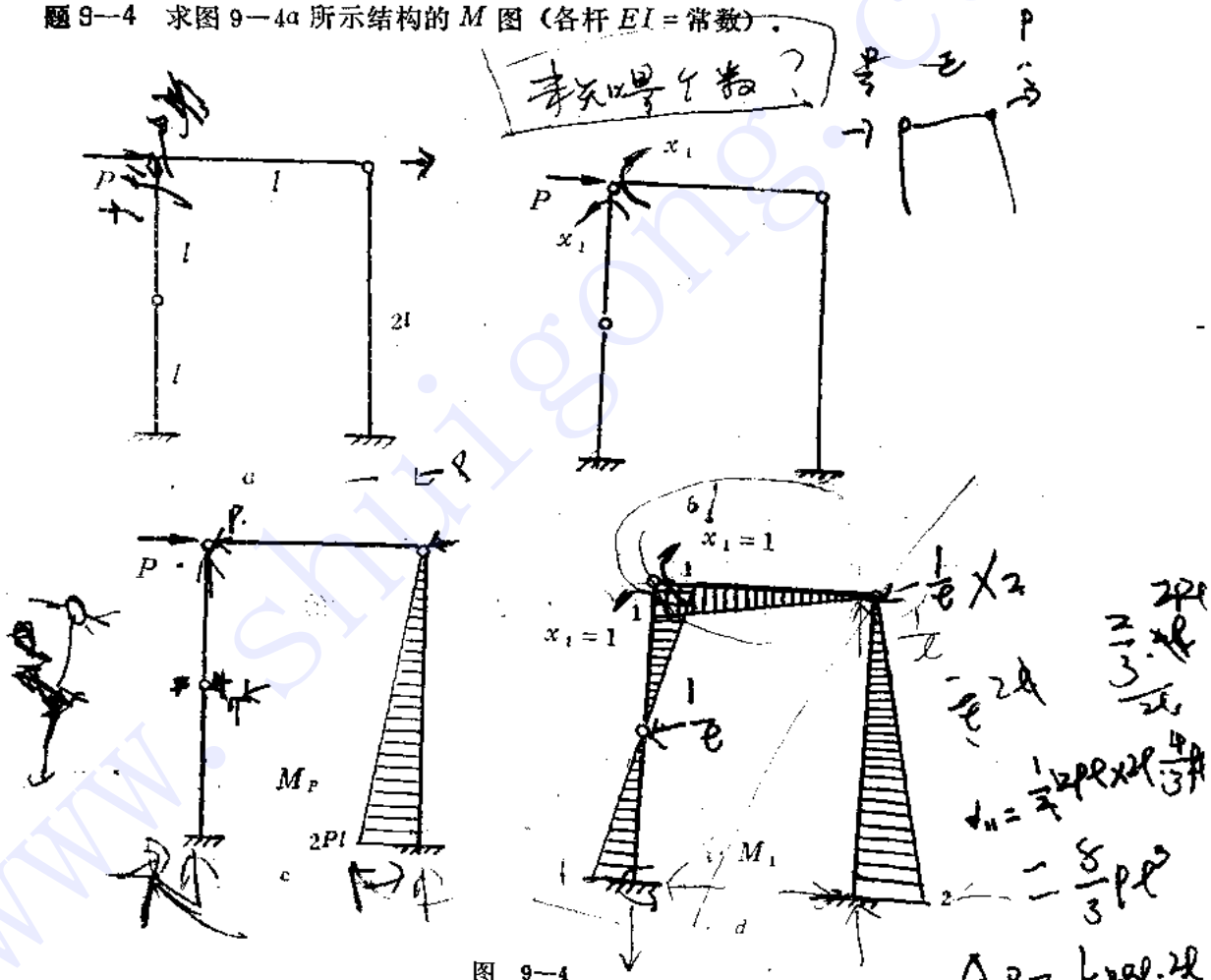


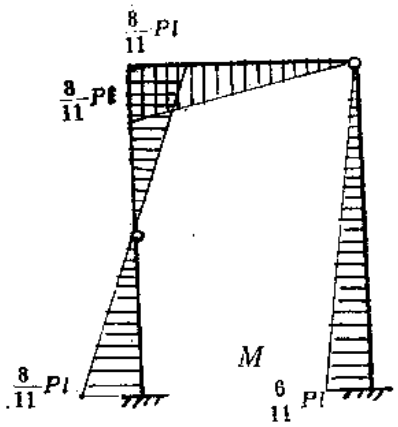

图 9—4

**解：** 此结构为一次超静定结构，取如图 9—4*b* 所示的基本体系，有力法方程

$$\delta_{11}x_1 + \Delta_{1P} = 0$$

分别绘出 $M_P$、$M_1$ 图如图 9—4*c*、*d* 所示。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！




e

图 9—4

$$\delta_{11}=\Sigma\int\frac{M_1^2}{EI}ds=\frac{1}{EI}\left(3\cdot\frac{1}{2}l\cdot1\cdot\frac{2}{3}\cdot1+\frac{1}{2}\cdot2\cdot l\cdot2\,\frac{2}{3}\cdot2\right)=\frac{11l}{3EI}$$

$$\Delta_{1P}=\Sigma\int\frac{M_1M_P}{EI}ds=\frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{2}2l\cdot2Pl\cdot\frac{2}{3}\cdot2\right)=-\frac{8Pl^2}{3EI}$$

$$x_1=-\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}=\frac{8}{11}Pl$$

求最终弯矩图 $M$

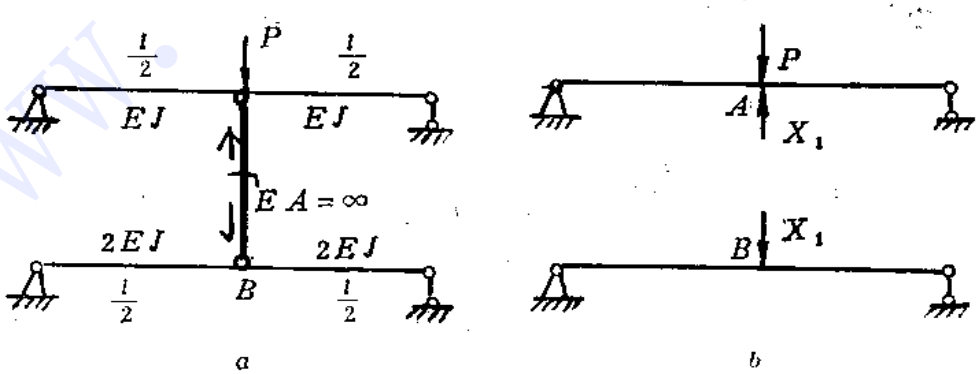
$$M=M_1x_1+M_P$$

$M$ 图如图 9—4*e* 所示。

此题可以选择另外的基本体系求解。适当选择基本体系可使计算工作简化。

**题 9—5** 求图 9—5*a* 所示纲架的 $M$ 图。

**解：** 此结构为一次超静定结构，取如图 9—5*b* 所示的基本体系。则力法方程如下：




a　　b

图 9—5

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

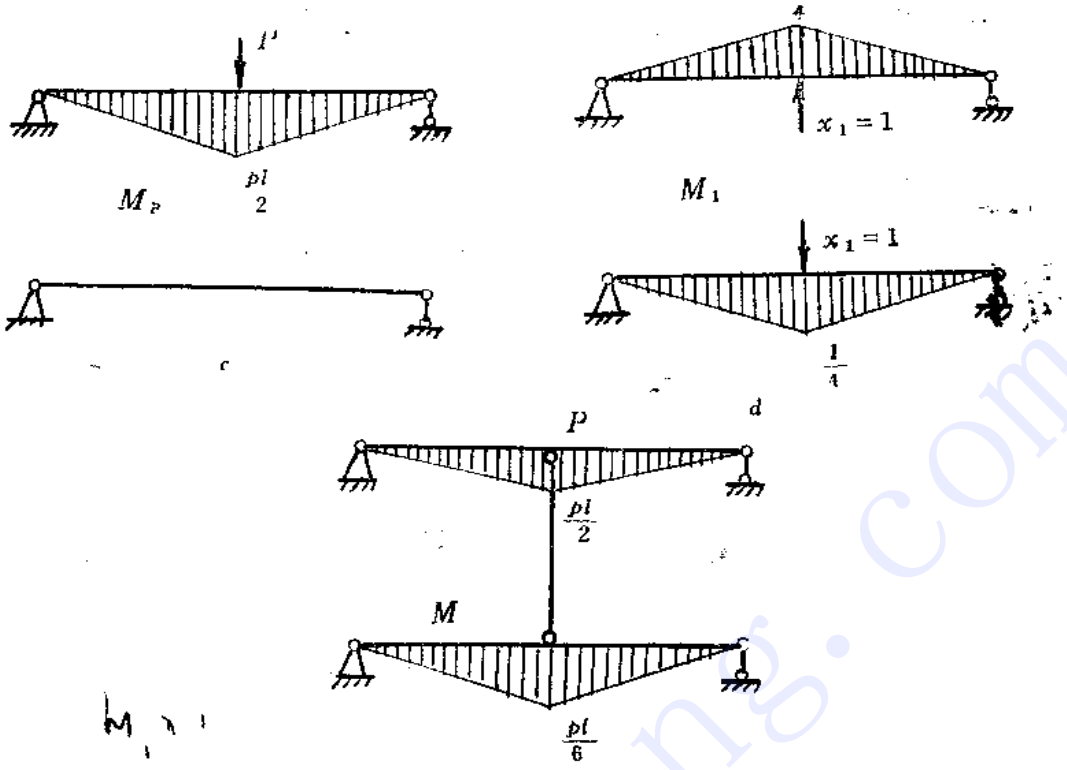



图 9—5

$$\delta_{11}x_1+\Delta_{1P}=0$$

此方程的含义为 $AB$ 两点的相对位移为零。分别绘出基本体系的 $M_P$、$M_1$ 图如图 9—5$c$ $d$ 所示。系数 $\delta_{11}$ 及 $\Delta_{1P}$ 为：

$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\left(2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{l}{4}\right)+\frac{1}{2EI}\left(2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{l}{4}\right)$$

$$=\frac{l^3}{32EI}$$

$$\Delta_{1P}=-\frac{1}{EI}\left(2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{Pl}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{l}{4}\right)=-\frac{Pl^3}{48EI}$$

$$x_1=-\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}=\frac{2}{3}P$$

求最后弯矩图：

$$M=M_1x_1+M_P$$

$M$ 图如图 9—5$e$ 所示。

**题 9—6** 求图 9—6$a$ 所示结构的 $M$ 图。

**解：** 此结构为两次超静定钢架。选取图 9—6$b$ 所示的基本体系，则力法方程为

$$\delta_{11}x_1+\delta_{12}x_2+\Delta_{1P}=0$$

$$\delta_{21}x_1+\delta_{22}x_2+\Delta_{2P}=0$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

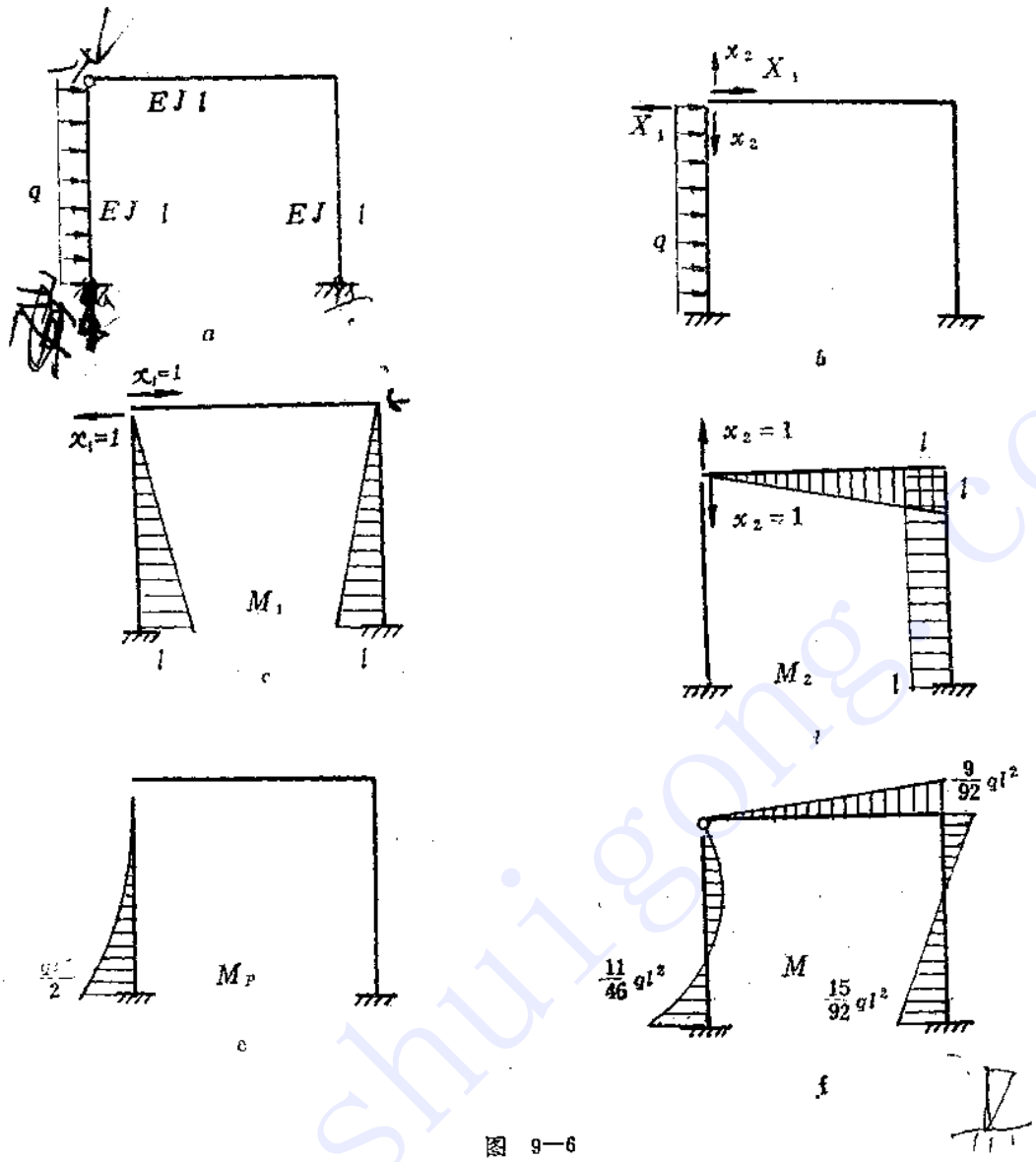



图 9—6

分别作出 $M_1$、$M_2$、$M_P$ 图如图 9—6c、d、e 所示。

求方程系数：

$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\left(2\cdot\frac{1}{2}l\cdot l\,\frac{2}{3}l\right)=\frac{2l^3}{3EI}$$

$$\delta_{12}=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}l\cdot l\cdot l\right)=\frac{l^3}{2EI}=\delta_{21}$$

（位移互等定理）

$$\delta_{22}=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}l\cdot l\cdot\frac{2}{3}l+l\cdot l\cdot l\right)=\frac{4l^3}{3EI}$$

$$\Delta_{1P}=-\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{ql^2}{2}\cdot l\cdot\frac{3}{4}l\right)=-\frac{ql^4}{8EI}$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$$\Delta_{2P}=0$$

将以上系数代入方程经整理后得

$$\frac{2}{3}x_1+\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{8}ql$$

$$\frac{1}{2}x_1+\frac{4}{3}x^2=0$$

解得 $$x_1=\frac{6}{23}ql \qquad x_2=-\frac{9}{92}ql$$

由下式求最终弯矩图 $M$：

$$M=M_1x_1+M_2x_2+M_P$$

$M$ 图如图 9—6$f$ 所示。

校核：

$$\Delta_2=\Sigma\int\frac{M_2M}{EI}ds=\frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{2}l\cdot l\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{92}ql^2-\frac{1}{2}l\cdot\frac{9}{92}ql^2\cdot l+\frac{1}{2}\frac{15}{92}ql^2\cdot l\cdot l\right)=0$$

故所求结果正确。

题 9—7　求图 9—7$a$ 所示钢架的 $M$ 图。

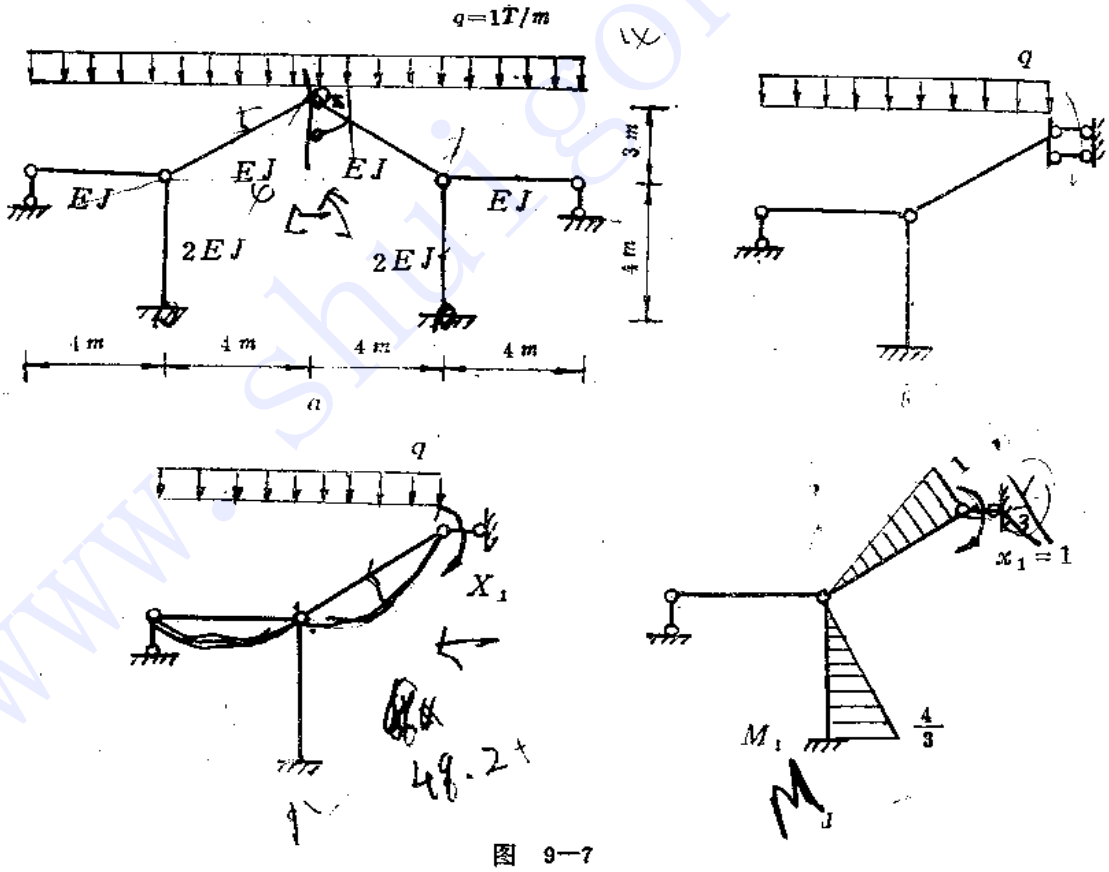



图　9—7

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

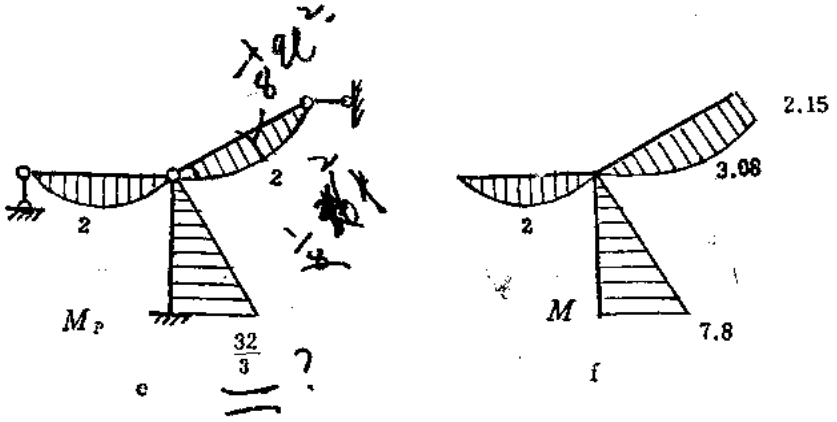



图 9—7

**解：** 此结构为对称体系。荷载也是对称的，所以可利用对称性求解，取等代结构如图 9—7*b* 所示。等代结构为一次超静定结构，其基本体系可取为图 9—7*c* 所示的形式，其力法方程为：

$$\delta_{11}x_1+\Delta_{1P}=0$$

分别作出 $M_1$、$M_P$ 图如图 9—7*d*、*e* 所示。

$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 1\cdot\frac{2}{3}\cdot 1\right)+\frac{1}{2EI}\left(\frac{1}{2}\times 4\times\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)$$

$$=\frac{5}{3EI}+\frac{32}{27EI}=\frac{154}{54EI}$$

$$\Delta_{1P}=-\frac{1}{EI}\left(\frac{2}{3}\cdot 5\cdot 2\times\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2EI}\left(\frac{1}{2}\times 4\times\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{32}{3}\right)$$

$$=-\frac{10}{3EI}+\frac{256}{27EI}=\frac{166}{27EI}$$

$$X_1=-\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}=-\frac{166}{77}(t)$$

最后弯矩图：

$$M=M_1x_1+M_P$$

$M$ 图如图 9—7*f* 所示，右部弯矩图与左部对称。

题 9—8 求图 9—8*a* 所示钢架的 $M$、$Q$、$N$ 图（$EI$ = 常数）。

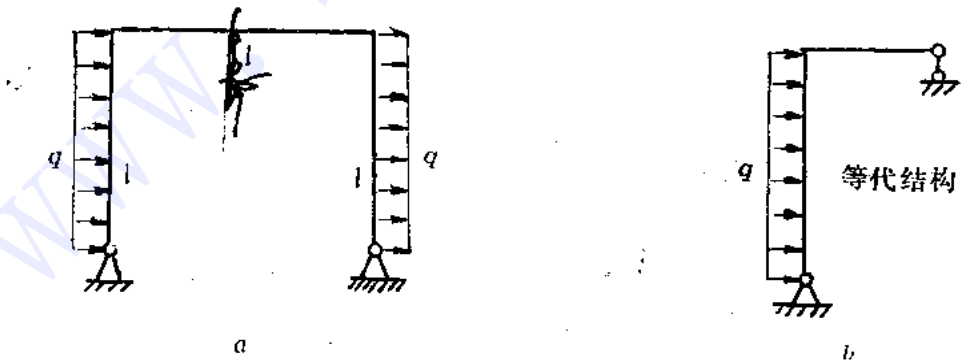



图 9—7

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

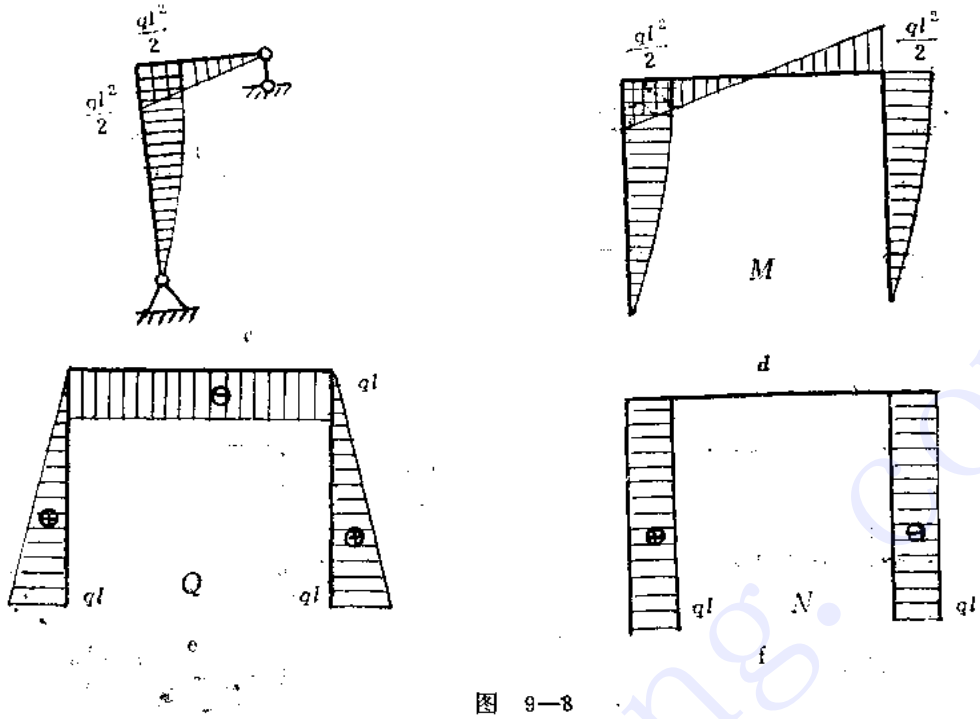



图 9—8

**解：** 此题的特点是对称结构反对称荷载。利用对称结构在反对称荷载作用下的结构受力性质，可取等代结构如图 9—8*b* 所示，绘出这一结构的内力图，然后根据对称性质就可绘出整个结构的内力图。

等代结构是静定的，其弯矩图很容易求出（图 9—8*c*）。最终 $M$、$Q$、$N$ 图分别示于图 9—8*d*、*e*、*f*。

题 9—9 利用对称性求图 9—9*a* 所示刚架的 $M$ 图（$EI$ = 常数）。

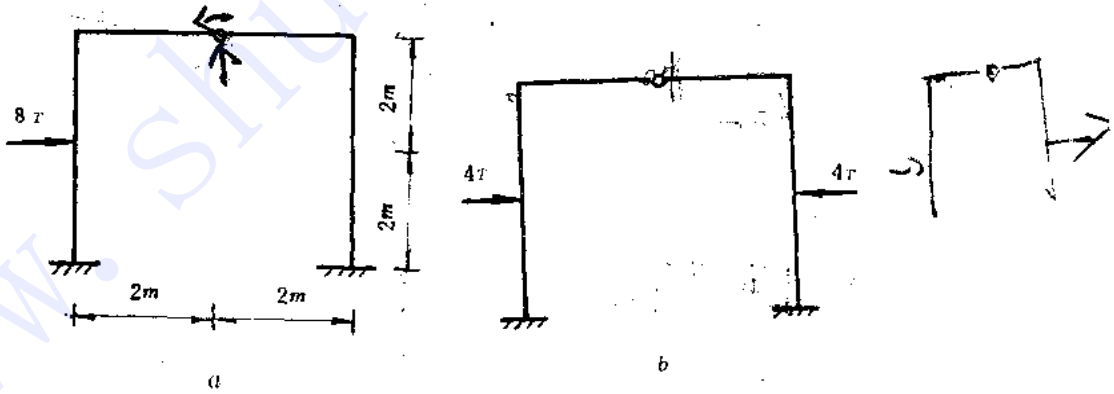
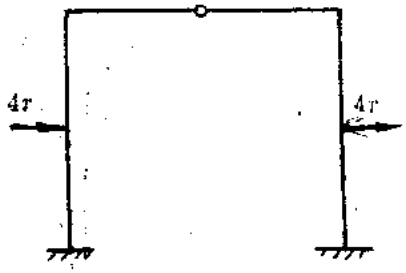



图 9—9

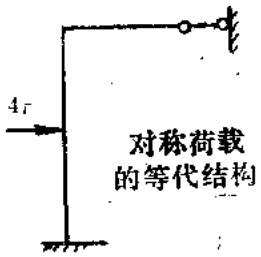
**解：** 由于结构是对称的，故可将原结构上的荷载分解为正对称和反对称两组（如图 9—9*b*、*c* 所示），显然，在这两组荷载作用下结构的内力相叠加应与原结构在原荷载作用下的内力相等。

1）对称情况（图 9—9*b*）

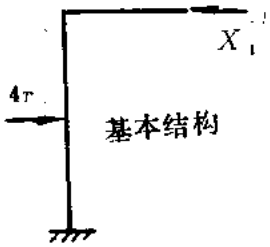
由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！



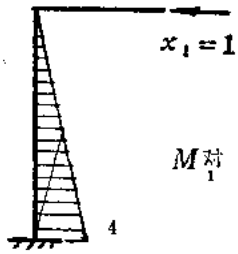

c



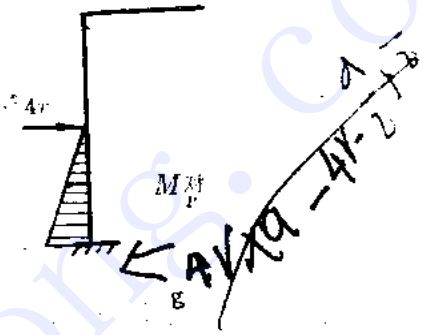

d



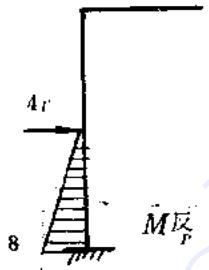

e




f



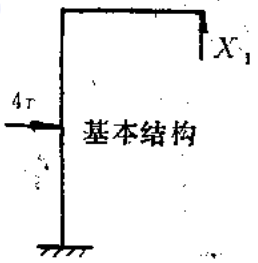

g



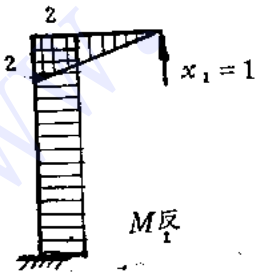

h



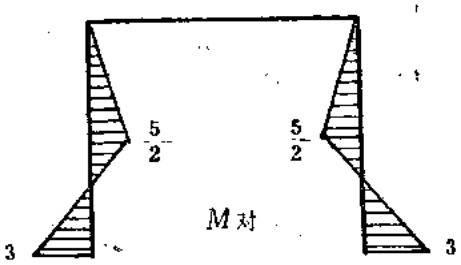

i




j




k




l

图 9—9

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

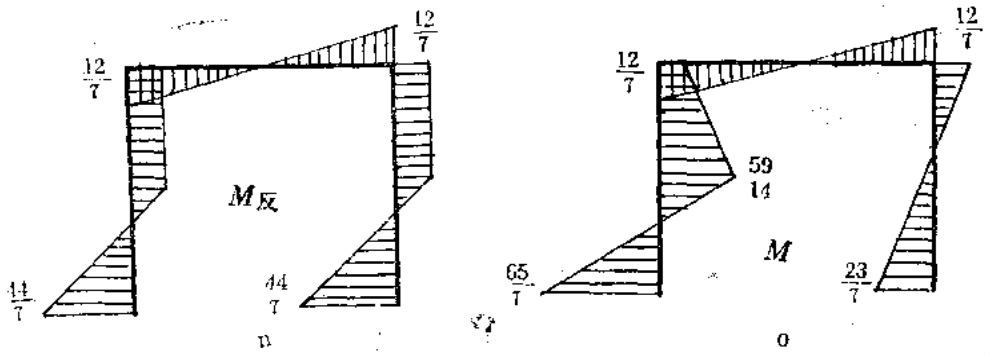



图 9—9

等代结构如图 9—9$d$ 所示。取图 9—9$e$ 所示的基本体系，分别作出其 $M_1$、$M_P$ 图如图 9—9$f$、$g$，其典型方程为

$$\delta_{11}x_1+\Delta_{1P}=0$$

$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\cdot\frac{1}{2}4\times4\times\frac{2}{3}\times4=\frac{64}{3EI}$$

$$\Delta_{1P}=-\frac{1}{EI}\cdot\frac{1}{2}\cdot8\cdot2\left(\frac{2}{3}\times4+\frac{1}{3}\times2\right)=-\frac{80}{3EI}$$

$$X_1=-\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}=\frac{5}{4}(t)$$

$$M_{对}=M_{1}^{对}x_1+M_{P}^{对}$$

$M_{对}$图如图 9—9$l$ 所示。

2）反对称情况（图 9—9$c$）

等代结构如图 9—9$i$。取图 9—9$j$ 所示的基本体系，分别作出 $M_1$、$M_P$ 图如图 9—9$k$、$h$ 所示，其典型方程为

$$\delta_{11}x_1+\Delta_{1P}=0$$

$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\times2\times2\times\frac{2}{3}\times2+2\times2\times4\right)=\frac{56}{3EI}$$

$$\Delta_{1P}=\frac{-1}{EI}\left(\frac{1}{2}\times2\times8\times2\right)=\frac{-16}{EI}$$

$$X_1=-\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}=\frac{6}{7}(t)$$

$$M_{反}=M_{1}^{反}x_1+M_{P}^{反}$$

$M_{反}$ 图如图 9—9$n$ 所示。

最后弯矩图

$$M=M_{对}+M_{反}$$

$M$ 图由图 9—9$o$ 给出，请读者自行校核。

本题如不分解荷载，计算工作将相对简便，这里用的将荷载分解为正对称和反对称的做法是为了说明计算方法的。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

**题9—10** 计算图 9—10*a* 所示封闭框架的 $M$ 图（已知各杆 $EI$ = 常数）.

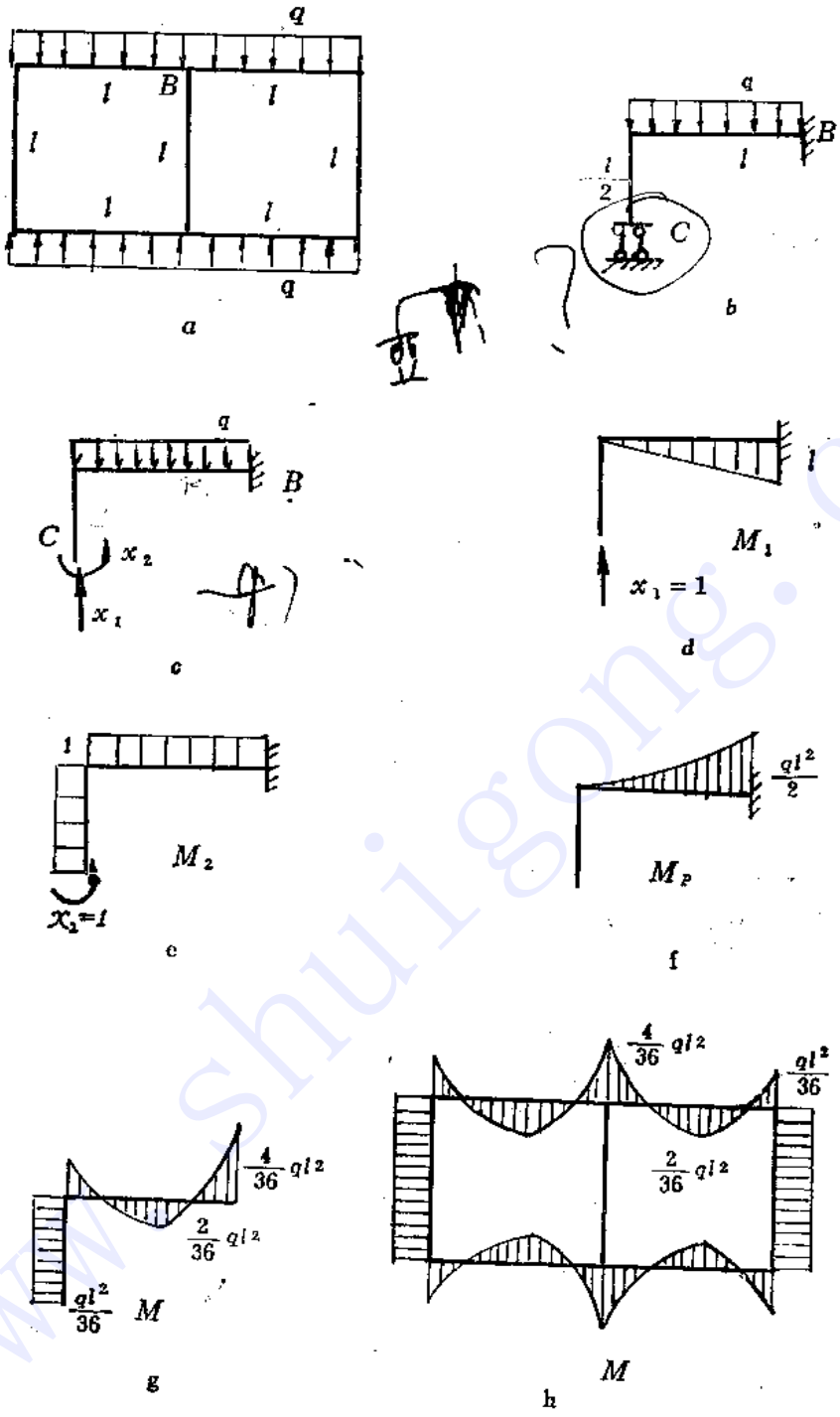



图 9—10

**解：** 此结构有两个对称轴，并且荷载也对称，所以可取其$\frac{1}{4}$等代结构(如图9—10

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$b$ 所示），其基本体系如图 9—10$c$。$M_1M_2M_P$ 由 9—10 $def$ 所示。

力法方程：

$$\delta_{11}x_1+\delta_{12}x_2+\Delta_{1P}=0$$
$$\delta_{21}x_1+\delta_{22}x_2+\Delta_{2P}=0$$

求方程系数：

$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\times l\cdot l\cdot\frac{2}{3}l\right)=\frac{l^3}{3EI}$$

$$\delta_{22}=\frac{1}{EI}\left(1\times\frac{l}{2}\times 1+1\times l\times 1\right)=\frac{3l}{2EI}$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=\frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{2}l\cdot l\cdot 1\right)=-\frac{l^2}{2EI}$$

$$\Delta_{1P}=-\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{3}l\times\frac{ql^2}{2}\times\frac{3}{4}l\right)=-\frac{ql^4}{8EI}$$

$$\Delta_{2P}=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{3}l\times\frac{ql^2}{2}\times 1\right)=\frac{ql^3}{6EI}$$

将各系数代入方程并经整理后得

$$\begin{cases}2lx_1-3x_2=\dfrac{3}{4}ql^2\\ -3lx_1+9x_2=-ql^2\end{cases}$$

解方程得

$$X_1=\frac{5}{12}ql\qquad X_2=\frac{1}{36}ql^2$$

最终弯矩图：

$$M=M_1x_1+M_2x_2+M_P$$

等代结构的 $M$ 图如图 9—10$g$ 所示，整个结构的 $M$ 图由图 9—10$h$ 给出。

**题 9—11** 计算图 9—11$a$ 所示超静定桁梁各杆的的内力（已知各杆的$EA$=常数）。

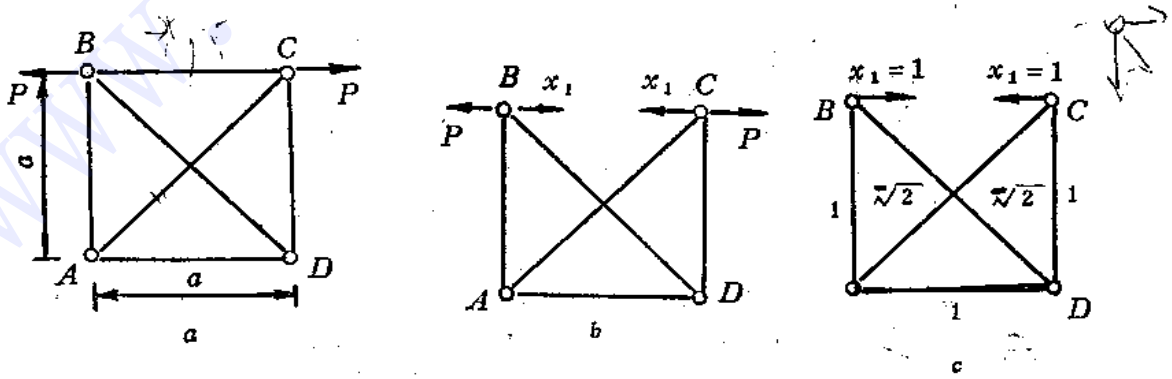



图 9—11

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

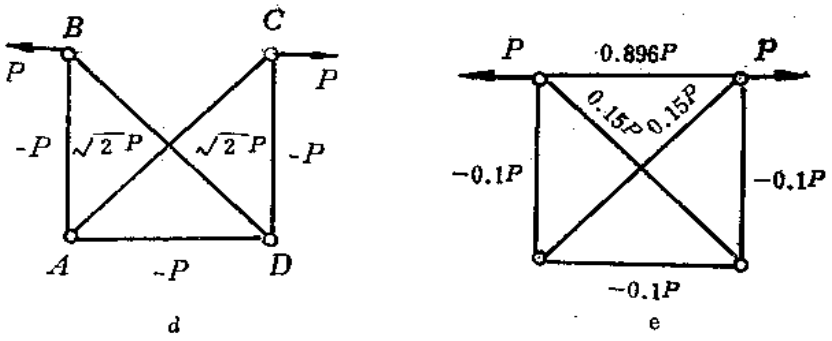



图 9—11

**解**：此桁架为一次超静定桁架。取图 9—11*b* 所示的基本体系，则有变形条件：

$$\Delta_1 = 0$$

其含义是 $BC$ 杆切断面的相对位移为零，即 $BC$ 杆切口处要保持原来的连续性。

$$\Delta_1 = \delta_{11}x_1 + \Delta_{1P} = 0$$

分别求出基本体系在 $x_1 = 1$ 作用下和在原荷载作用下各杆的内力（图 9—11*c*、*d*）。

$$\delta_{11} = \Sigma\frac{N_1^2 l}{EA} = \frac{1}{EA}\left[4\times 1^2\times a + 2(-\sqrt{2})^2\times\sqrt{2}a\right]$$

$$= \frac{4a}{EA}(1+\sqrt{2})$$

$$\Delta_{1P} = \Sigma\frac{N_1 N_P l}{EA} = \frac{1}{EA}\left[3\times(-P)\times a\times 1 + 2\sqrt{2}P\times(-\sqrt{2})\times\sqrt{2}a\right]$$

$$= -\frac{Pa}{EA}(3+4\sqrt{2})$$

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{P}{4}\frac{(3+4\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})} = 0.896P$$

各杆的内力计算公式如下：

$$N = N_1 x_1 + N_P.$$

各杆内力由图 9—11*e* 给出。

所求最终内力之校核请读者自行思考。

**题 9—12** 求图 9—12*a* 所示排架的 $M$、$Q$、$N$ 图。

**解**：此题为两次超静定，采用图 9—12*b* 所示的基本体系，则力法方程为

$\Delta_{AB} = 0$ （$A$、$B$ 两点的相对位移为零）

$\Delta_{CD} = 0$ （$C$、$D$ 两点的相对位移为零）

即

$$\Delta_{AB} = \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \Delta_{1P} = 0$$

$$\Delta_{CD} = \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \Delta_{2P} = 0$$

分别作出 $M_1$、$M_2$、$M_P$ 图（图 9—12*c*、*d*、*e*），并求系数：

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

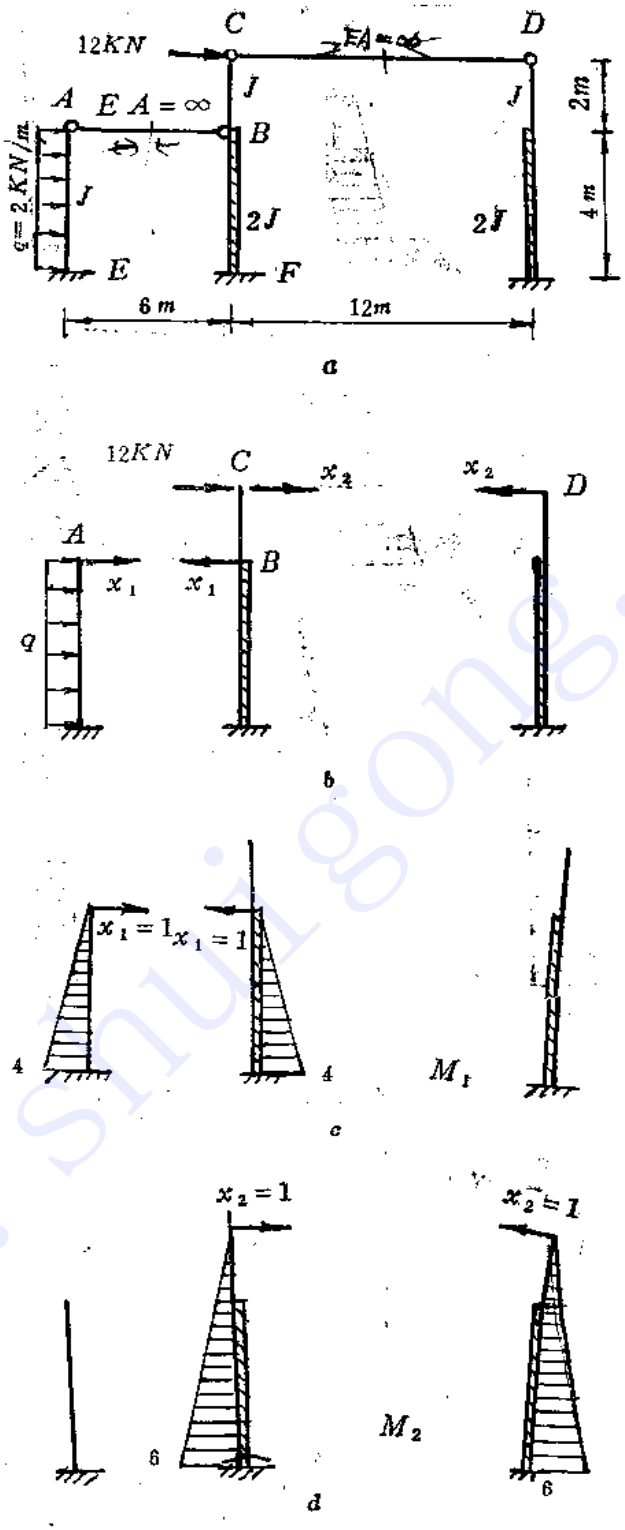
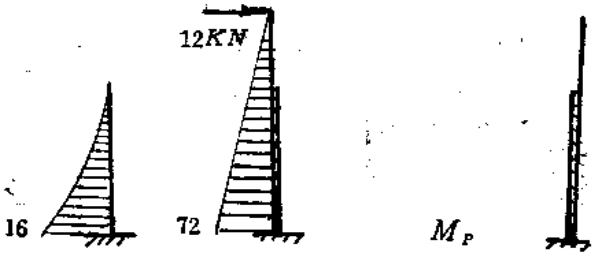
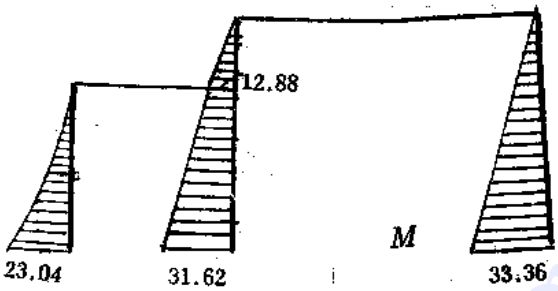



图6—12

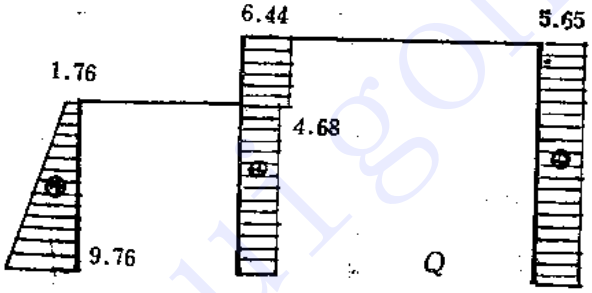
由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！



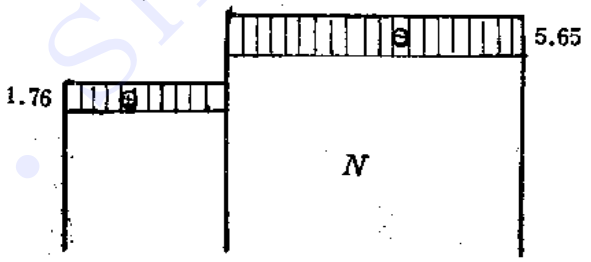

e




f




g




h

图 6—12

$$\delta_{11}=\Sigma\int\frac{M_1^2}{EI}ds=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\times4\times4\times\frac{2}{3}\times4\right)+\frac{1}{2EI}\left(4\times4\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times4\right)$$

$$=\frac{32}{EI}$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$$\delta_{12}=\Sigma\int\frac{M_1M_2}{EI}ds=-\frac{1}{2EI}\left[\frac{1}{2}\times4\times4\times\left(\frac{2}{3}\times6+\frac{1}{3}\times2\right)\right]$$

$$=-\frac{56}{3EI}=\delta_{21}$$

$$\delta_{22}=\Sigma\int\frac{M_2^2}{EI}ds=\frac{1}{EI}\left(2\times\frac{1}{2}\times2\times2\times\frac{2}{3}\times2\right)$$

$$+\frac{2}{2EI}\left[\frac{1}{2}\times4\times6\times\left(\frac{2}{3}\times6+\frac{1}{3}\times2\right)\right.$$

$$\left.+\frac{2}{2EI}\left[\frac{1}{2}\times4\times2\times\left(\frac{1}{3}\times6+\frac{2}{3}\times2\right)\right]\right.$$

$$=\frac{224}{3EI}$$

$$\Delta_{1P}=\Sigma\int\frac{M_1M_P}{EI}ds=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{3}\times16\times4\times\frac{3}{4}\times4\right)$$

$$-\frac{1}{2EI}\left[\frac{1}{2}\times4\times4\times\left(\frac{2}{3}\times72+\frac{1}{3}\times24\right)\right]$$

$$=-\frac{160}{EI}$$

$$\Delta_{2P}=\Sigma\int\frac{M_2M_P}{EI}ds=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\times2\times24\times\frac{2}{3}\times2\right)$$

$$+\frac{1}{2EI}\left[\frac{1}{2}\times2\times4\times\left(\frac{1}{3}\times72+\frac{2}{3}\times24\right)\right]$$

$$+\frac{1}{2EI}\left[\frac{1}{2}\times6\times4\times\left(\frac{1}{3}\times24+\frac{2}{3}\times72\right)\right]$$

$$=\frac{448}{EI}$$

将以上系数代入方程并经整理后得

$$\begin{cases}32x_1-\dfrac{56}{3}x_2=160\\[2ex]-\dfrac{56}{3}x_1+\dfrac{224}{3}x_2=-448\end{cases}$$

解方程组，得

$$x_1=1.756KN\qquad x_2=-5.56KN$$

而

$$M=M_1x_1+M_2x_2+M_P$$

$M$ 图如图 9—12$f$ 所示。

由 $M$ 图可求出 $Q$ 图和 $N$ 图分别如图 9—12$g$、$h$ 所示。

**题 9—13** 求图 9—13$a$ 所示结构由于支座 B 下沉$\Delta$所引起的 $M$ 图。

**解**：取如图 9—13$b$ 所示的基本体系，则力法方程为

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

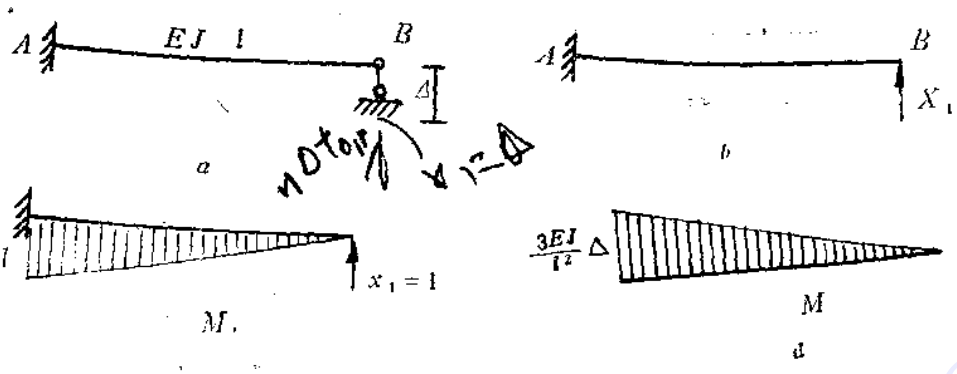



图 9—13

$$\delta_{12}x_2 = -\Delta$$

绘 $M_1$ 图如图 9—13c 所示

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} l \cdot l \cdot \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} l = \frac{l^3}{3EI}$$

$$X_1 = -\frac{\Delta}{\delta_{11}} = -\frac{3EI}{l^3}\Delta$$

最终 $M$ 图：

$$M = M_1 x_1$$

$M$ 图如图 9—13$d$ 所示。

**题 9—14** 求图 9—14a 所示结构由于支座转动 $\varphi$ 角所引起的 $M$ 图。（不计轴变）。

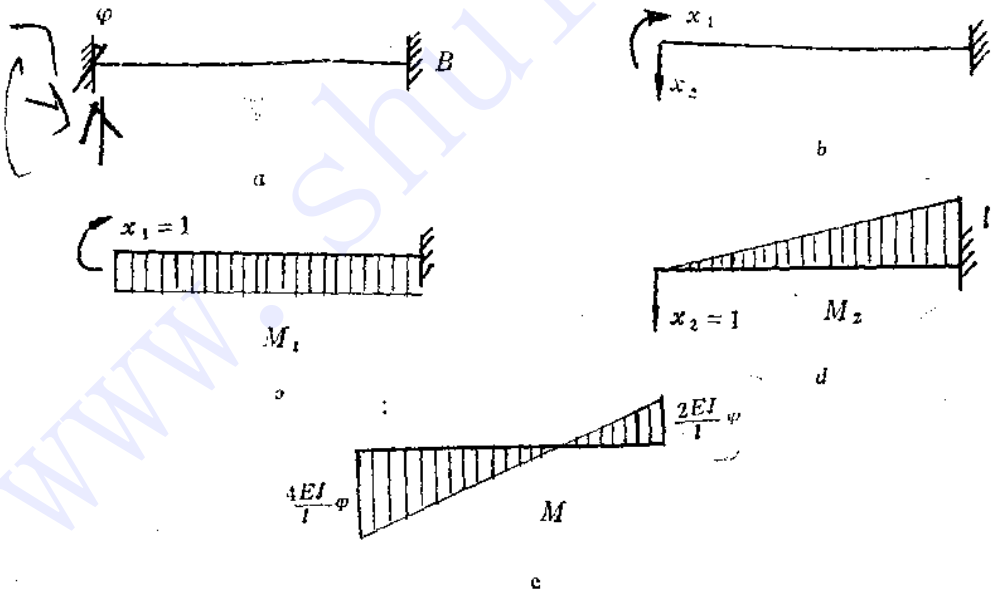



图 9—14

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

**解：** 由于不计轴向变形，所以此结构为两次超静定结构。取图 9—14*b* 所示的基本体系，则力法方程为

$$\begin{cases}\delta_{11}x_1+\delta_{12}x_2=\varphi\\ \delta_{21}x_1+\delta_{22}x_2=0\end{cases}$$

$$\delta_{11}=\Sigma\int\frac{M_1^2}{EI}ds=\frac{l}{EI}$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=\Sigma\int\frac{M_1M_2}{EI}ds=-\frac{l^2}{2EI}$$

$$\delta_{22}=\Sigma\int\frac{M_2^2}{EI}ds=\frac{l^3}{3EI}$$

$$\begin{cases}\dfrac{l}{EI}x_1-\dfrac{l^2}{2EI}x_2=\varphi\\ -\dfrac{l^2}{2EI}x_1+\dfrac{l^3}{3EI}x_2=0\end{cases}$$

解方程得

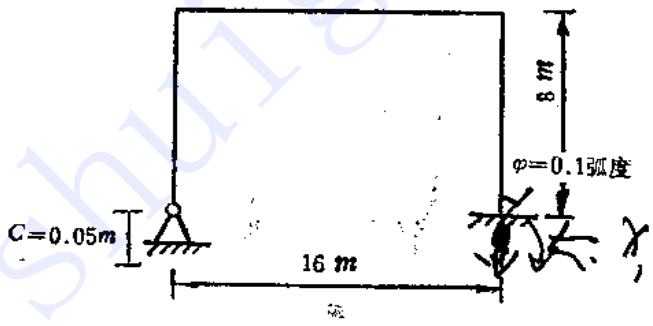
$$x_1=4\frac{EI}{l}\varphi\qquad x_2=6\frac{EI}{l^2}\varphi$$

$$M=M_1x_1+M_2x_2$$

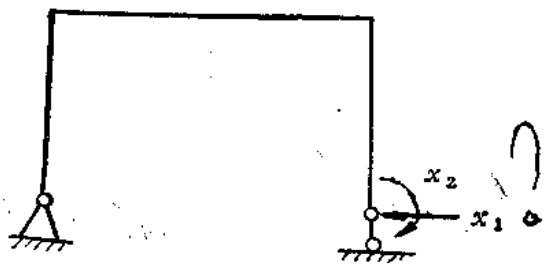
最终 $M$ 图如图 9—14*e* 所示。

**题 9—15** 求图 9—15*a* 所示结构由于支座位移所引起的 $M$ 图。

已知：$EI=3750T-M^2$




*a*




*b*

图 9—15

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

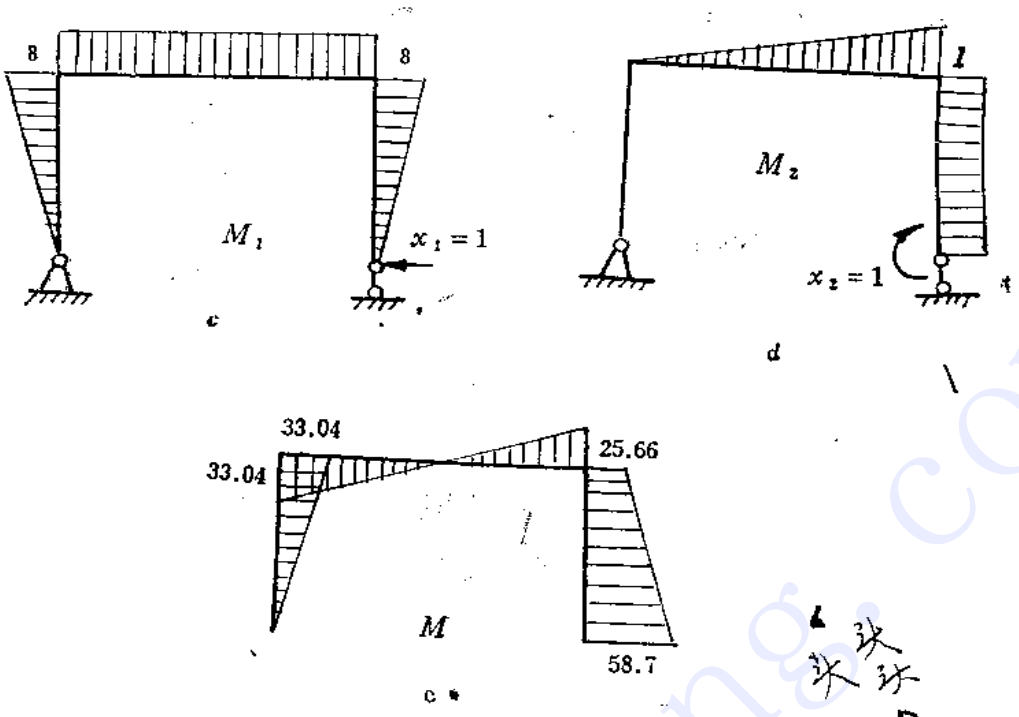



图 9—15

**解**：选取图 9—15*b* 所示的基本体系，则力法典型方程为

$$\delta_{11}x_1+\delta_{12}x_2+\Delta_{1C}=0$$

$$\delta_{21}x_1+\delta_{22}x_2+\Delta_{2C}=0.1$$

分别绘出 $M_1$、$M_2$ 图如图 9—15*c*、*d* 所示，并求系数：

$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\left(2\times\frac{1}{2}\times8\times8\times\frac{2}{3}\times8+8\times16\times8\right)=\frac{8^4}{3EI}$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\times16\times1\times8+\frac{1}{2}\times8\times8\times1\right)=\frac{96}{EI}$$

$$\delta_{22}=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\times16\times1\times\frac{2}{3}\times1+8\times1\times1\right)=\frac{40}{3EI}$$

$$\Delta_{1C}=-\Sigma R_1C=0$$

$$\Delta_{2C}=-\Sigma R_2C=-\left(\frac{1}{16}\times0.05\right)=-0.0031$$

将以上各系数代入方程

$$\frac{8^4}{3EI}x_1+\frac{96}{EI}x_2=0$$

$$\frac{96}{EI}x_1+\frac{40}{3EI}x_2-0.0031=0$$

解得：　$x_1=4.13(T)$　　$x_2=58.73(T-m)$

最终 $M$ 图：

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$$M = M_1 x_1 + M_2 x_2$$

$M$ 图由图 9—15$e$ 给出。

**题 9—16** 求图 9—16$a$ 所示结构由于温度变化引起的内力并绘出 $M$ 图。

已知：各杆 $EI$ = 常数，截面为矩形，高度 $h = \frac{l}{10}$，线膨胀系数为 $\alpha$。

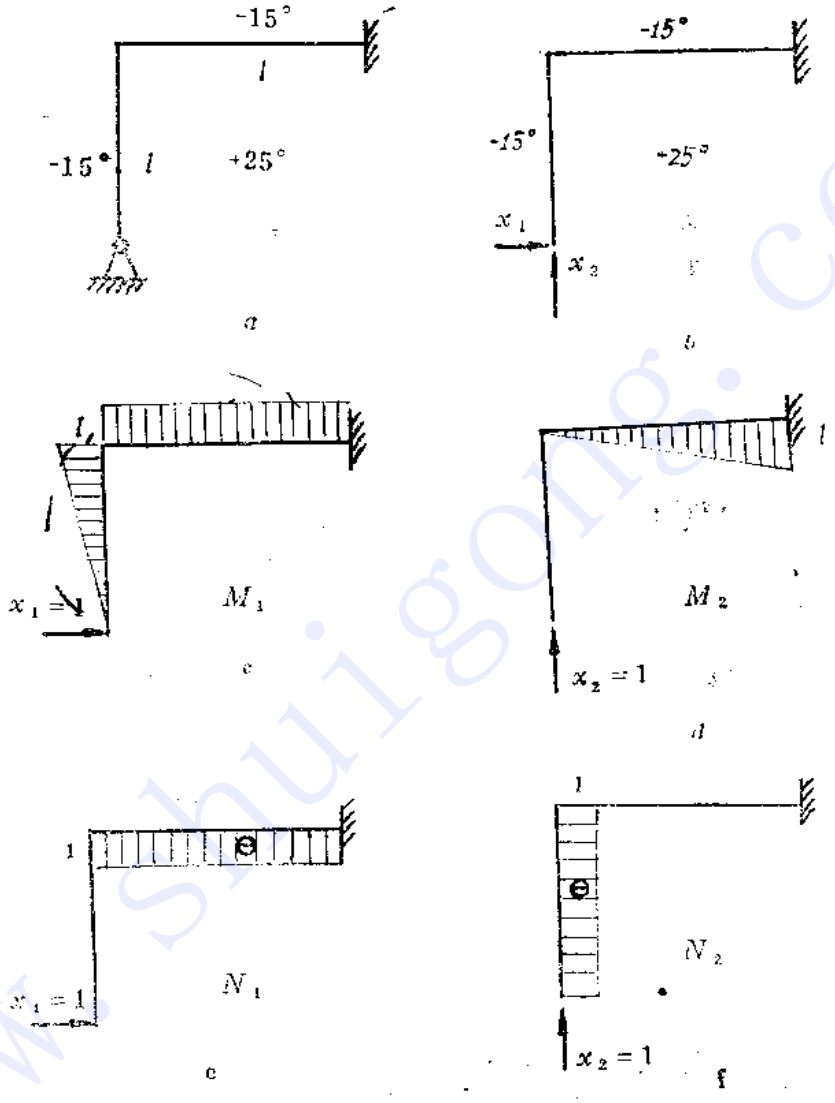



图 9—16

**解**：此结构为两次超静定结构，选取图 9—16$b$ 所示的基本体系，则力法典型方程为

$$\delta_{11} x_1 + \delta_{12} x_2 + \Delta_{1t} = 0$$

$$\delta_{21} x_1 + \delta_{22} x_2 + \Delta_{2t} = 0$$

给 $M_1$、$M_2$、$N_1$、$N_2$ 图如图 9—16$c$、$d$、$e$、$f$ 所示。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

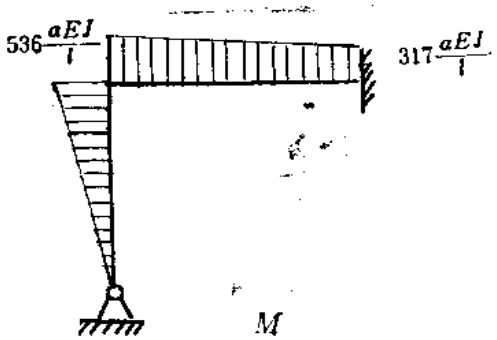



图 9—16

$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\left(1\cdot l\cdot\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}l+l\times l\times l\right)=\frac{4l^3}{3EI}$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=\frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{2}l\cdot l\cdot l\right)=-\frac{l^3}{2EI}$$

$$\delta_{22}=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\times l\cdot l\frac{2}{3}l\right)=\frac{l^3}{3EI}$$

$$\Delta_{1t}=\Sigma(\pm)\frac{\alpha\Delta t}{h}w_M+\Sigma(\pm)w_N\alpha t_0$$

$$\Delta t=25^\circ-(-15^\circ)=40^\circ$$

其中

$$t_0=\frac{-15+25}{2}=5^\circ$$

$$\Delta_{1t}=-\frac{40\alpha}{l/10}\left(\frac{1}{2}l\cdot l+l\cdot l\right)-5\alpha\cdot l\cdot 1$$

$$=-600\alpha l-5\alpha l=-605\alpha l$$

$$\Delta_{2t}=\frac{40\alpha}{l/10}\left(\frac{1}{2}l\times l\right)-5\alpha l\cdot 1$$

$$=200\alpha l-5\alpha l=195\alpha l.$$

将以上各系数代入方程得

$$\frac{4}{3}x_1-\frac{1}{2}x_2=605\alpha\frac{EI}{l^2}$$

$$-\frac{1}{2}x_1+x_2=-195\alpha\frac{EI}{l^2}$$

解方程得：

$$x_1=535.7\alpha\frac{EI}{l^2}\qquad x_2=218.57\alpha\frac{EI}{l^2}$$

$$M=M_1x_1+M_2x_2$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

最终 $M$ 图由图 9—16$g$ 绘出。

**题 9—17** 已知图 9—17$a$ 所示刚架各杆温度均上升 $t$ 度，$EI$ = 常数，求 $M$ 图。

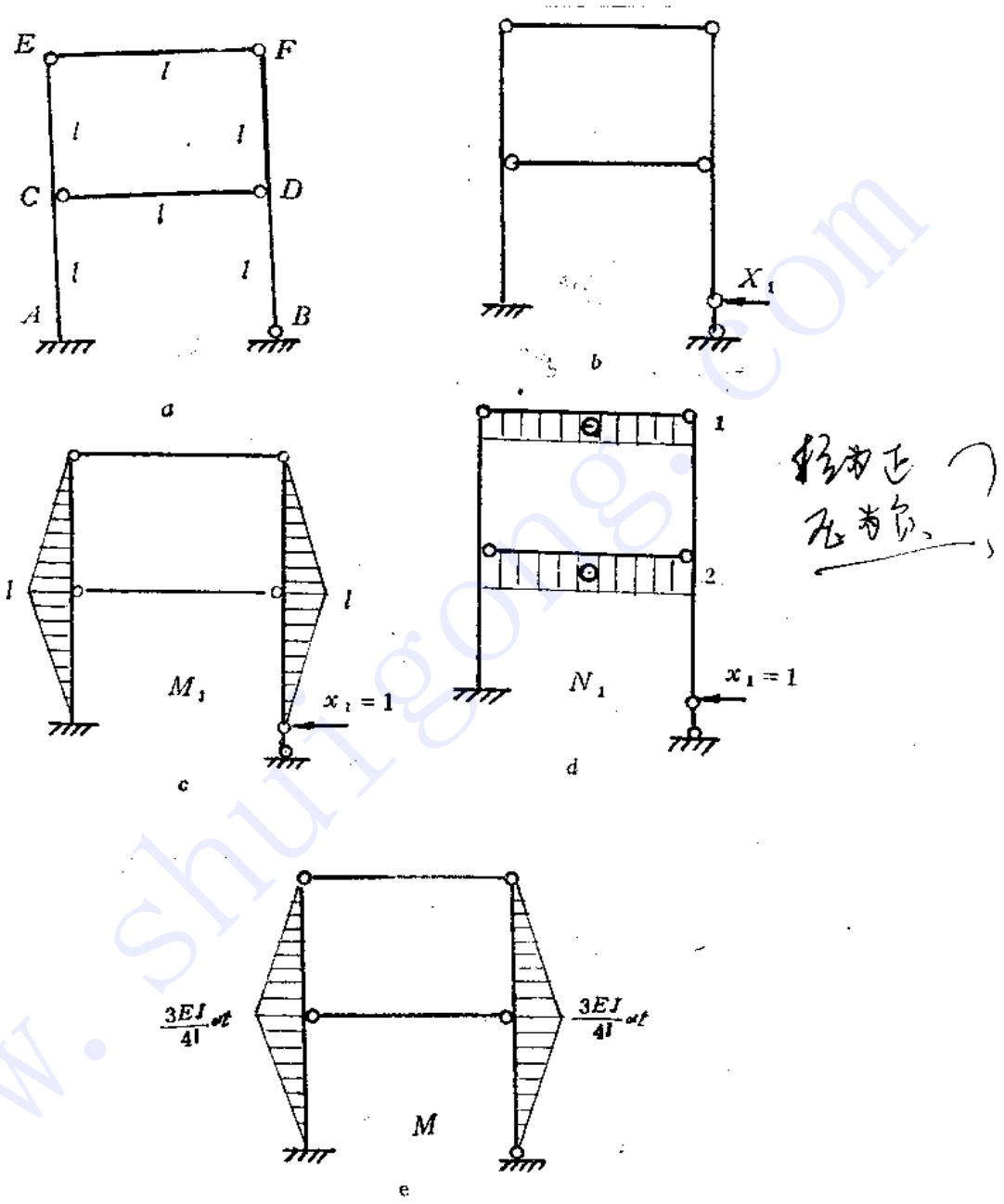



图 9—17

**解：** 由构造分析可知，本题为一次静不定结构，取图 9—17$b$ 所示的基本体系，则

力法方程为 $\delta_{11}x_1 + \Delta_{1t} = 0$

绘出 $M_1$、$N_1$ 图如图 9—17$c$、$d$ 所示，

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\cdot 4\times\frac{1}{2}\cdot l\cdot l\cdot\frac{2}{3}\cdot l=\frac{4l^3}{3EI}$$

$$\Delta_{1t}=\Sigma\alpha t_0 w_{N_1}+\Sigma\frac{\alpha\Delta t}{h}w_{M_1}\qquad \Delta t=0$$

$$=\Sigma\alpha t_0 w_{N_1}$$

$$=\alpha t1\cdot l-\alpha t2\cdot l$$

$$=-\alpha t l$$

$$x_1=-\frac{\Delta_{1t}}{\delta_{11}}=\frac{3}{4}\frac{EI}{l^2}\alpha t$$

$$M=M_1x_1$$

最终 $M$ 图由图 9—17$e$ 绘出。

**题 9—18** 求图 9—18$a$ 所示静不定结构支座 $c$ 的反力 $R_C$

已知：弹簧刚度为 $K$，各杆 $EI$ = 常数）。

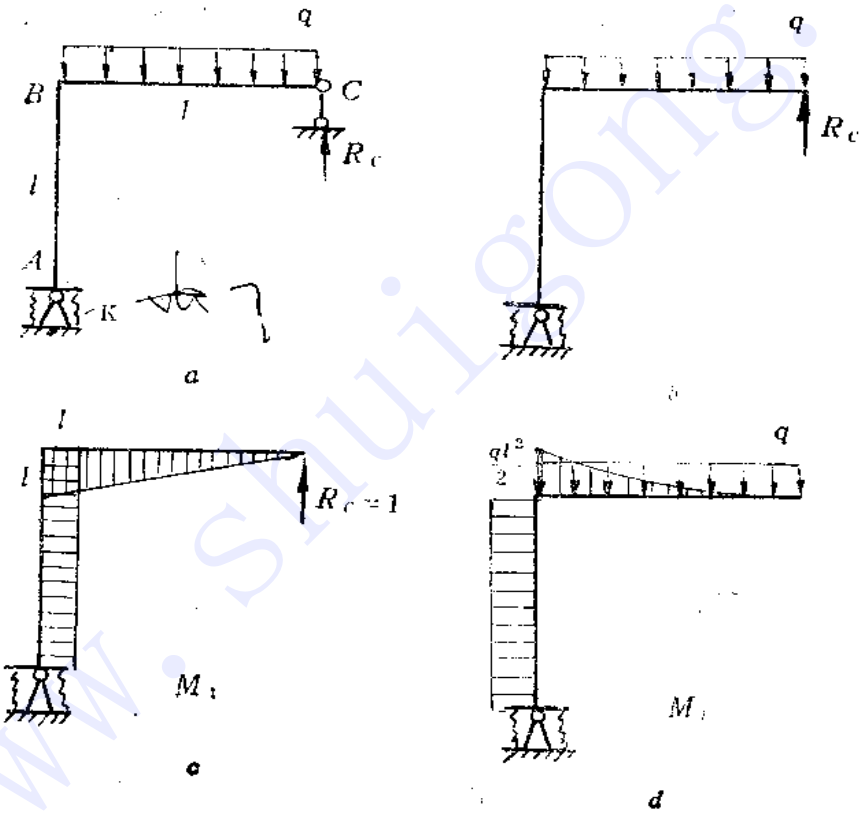



图 9—18

**解**：取图 9—18$b$ 所示的基本体系，力法方程为

$$\delta_{11}R_C+\Delta_{1P}=0\qquad (x_1=R_C)$$

分别绘出基本体系当 $R_C=1$ 时和原荷载单独作用下的 $M_1$、$M_P$ 图（如图 9—18$c$、$d$ 所示）。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\cdot l\cdot l\cdot\frac{2}{3}l+l\cdot l\cdot l\right)+l\cdot\frac{l}{K}$$

$$=\frac{4l^3}{3EI}+\frac{l^2}{K}$$

$$\Delta_{1P}=-\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{3}\times l\cdot\frac{ql^2}{2}l\times\frac{3}{4}+\frac{ql^2}{2}\cdot l\cdot l\right)-\frac{ql^2}{2}\cdot\frac{l}{K}$$

$$=-\frac{5}{8EI}ql^4-\frac{ql^3}{2K}$$

将以上系数代入方程

$$\left(\frac{4l^3}{3EI}+\frac{l^2}{K}\right)R_C-\left(\frac{5}{8EI}ql^4+\frac{ql^3}{2K}\right)=0$$

解得 $R_C=\frac{3}{8}ql\times\frac{5+\frac{4EI}{lK}}{4+\frac{3EI}{lK}}$

**题 9—19** 求当图 9—19 所示结构的 $B$ 点左右截面发生相对转角 $\varphi$ 时 $m$ 值的大小（各杆 $EI$ = 常数，转动刚度 $C=\frac{3EI}{l}$。）

**解**：先求出原结构在 $m$ 作用下的弯矩图，为此取图 9—19$b$ 所示的基本体系，力法方程为

$$\delta_{11}x_1+\Delta_{1P}=0$$

绘出 $M_1$、$M_P$ 图如图 9—19$c$、$d$ 所示。

$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\left(2\times\frac{1}{2}l\cdot\frac{l}{2}\times\frac{2}{3}\cdot l+\frac{1}{2}\cdot l\cdot l\cdot\frac{2}{3}l\right)+\frac{l}{c}\cdot l$$

$$=\frac{2l^3}{3EI}+\frac{l^2}{c}=\frac{l^3}{EI}$$

$$\Delta_{1P}=\frac{1}{EI}\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot m\cdot\frac{1}{3}l+\frac{1}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot l\cdot\left(\frac{1}{3}m+\frac{2}{3}2m\right)\right]+2m\cdot\frac{l}{c}$$

$$=\frac{ml^2}{EI}$$

$$x_1=-\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}=-\frac{m}{l}$$

$$M=M_1x_1+M_P$$

$M$ 图如图 9—19$e$ 所示。

到此并没有求出 $m$ 的确定值，为了求出 $m$，先来求 $\varphi$ 的表达式，为此取图 9—19$f$ 所示的基本体系，在 $B$ 点加一对单位力偶并作出 $\overline{M}_1$ 图，将 $\overline{M}_1$ 与 $M$ 图相图乘，即得

$$\varphi=\Sigma\int\frac{\overline{M}_1M}{EI}ds+m\cdot\frac{2}{c}$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

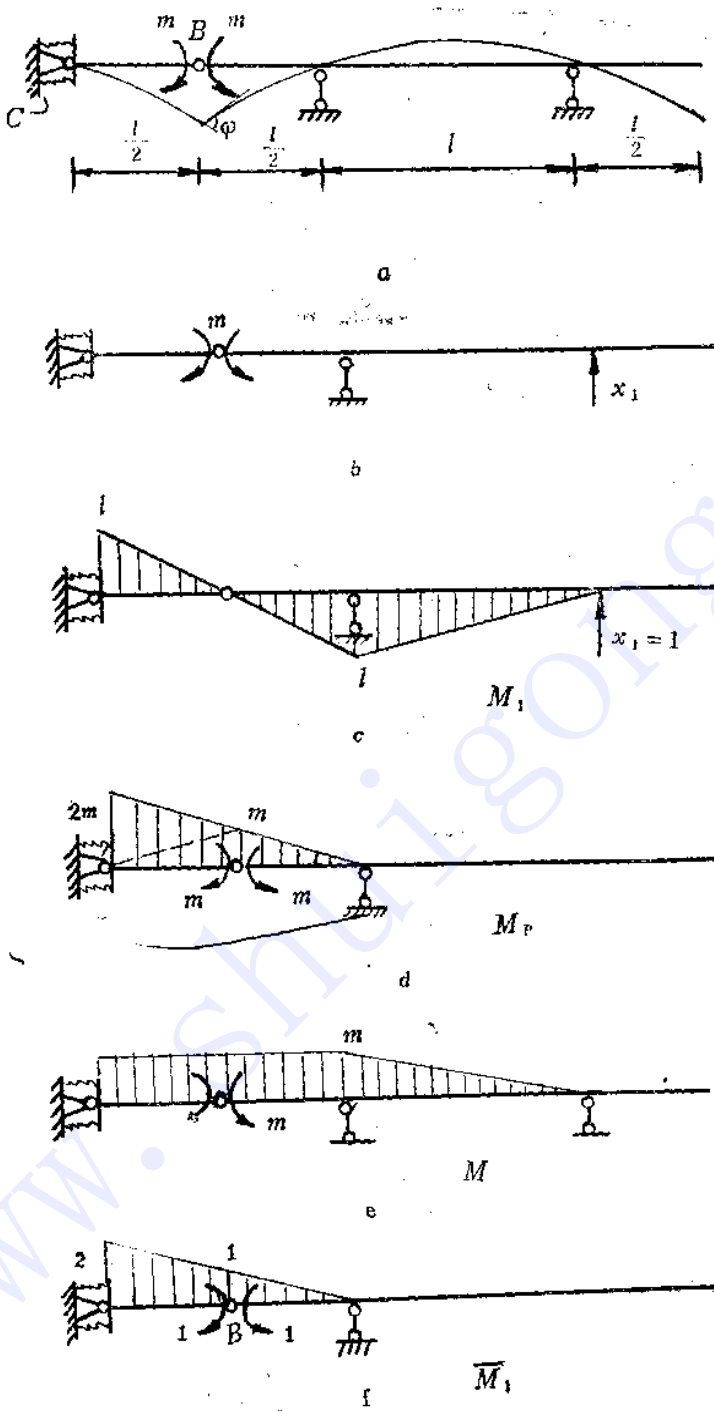



图 9—19

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$$= \frac{1}{EI}\left(2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot m\right) + 2m \cdot \frac{l}{3EI}$$

$$\varphi = \frac{5ml}{3EI}$$

这里 $\varphi$ 已知，所以

$$m = \frac{3EI}{5l}\varphi,$$

www.shuigong.com

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

# 第十章　位移法及混合法计算超静定结构

**题 10—1**　求图 10—1a 所示结构的杆 1、2、3 的轴力。

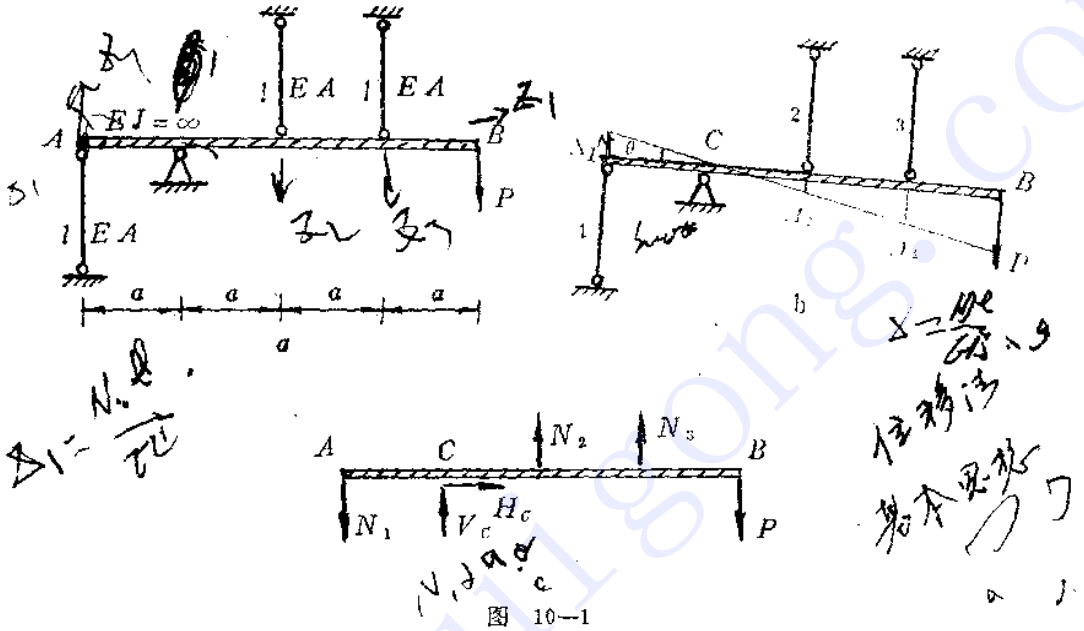



图 10—1

**解**：由于 $AB$ 梁 $EI=\infty$，所以在 $P$ 力的作用下 $AB$ 梁绕 $C$ 点发生刚性转动。设转角为 $\theta$（如图 10—1b 所示），则各杆的伸长为

$$\Delta_1=\frac{N_1 l}{EA}=\theta a$$

$$\Delta_2=\frac{N_2 l}{EA}=\theta a$$

$$\Delta_3=\frac{N_3 l}{EA}=2\theta a$$

于是

$$N_1=\frac{EA}{l}\theta a$$

$$N_2=\frac{EA}{l}\theta a$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$$N_3 = \frac{EA}{l} 2\theta a$$

只要求出 $\theta$ 的确定值，各内力值也就知道了．为此取图 10—1c 所示的脱离体，则有

$$\Sigma M_C = 0 \quad N_1 a + N_2 a + N_3 2a - P3a = 0$$

即

$$\frac{EA}{l}\theta a^2 + \frac{EA}{l}\theta a^2 + \frac{EA}{l} 2^2 \theta a^2 - 3Pa = 0$$

$$\theta = \frac{Pl}{2EAa}$$

将 $\theta$ 日值代回 $N_1$、$N_2$、$\Lambda$ 的表达式中得到各杆内力数值如下：



$$N_1 = \frac{P}{2}\text{(拉)}$$

$$N_2 = \frac{P}{2}\text{(拉)}$$

$$N_3 = P\text{(拉)}$$

题 10—2　求图 10—2a 所示结构的 $M$、$Q$ 图．

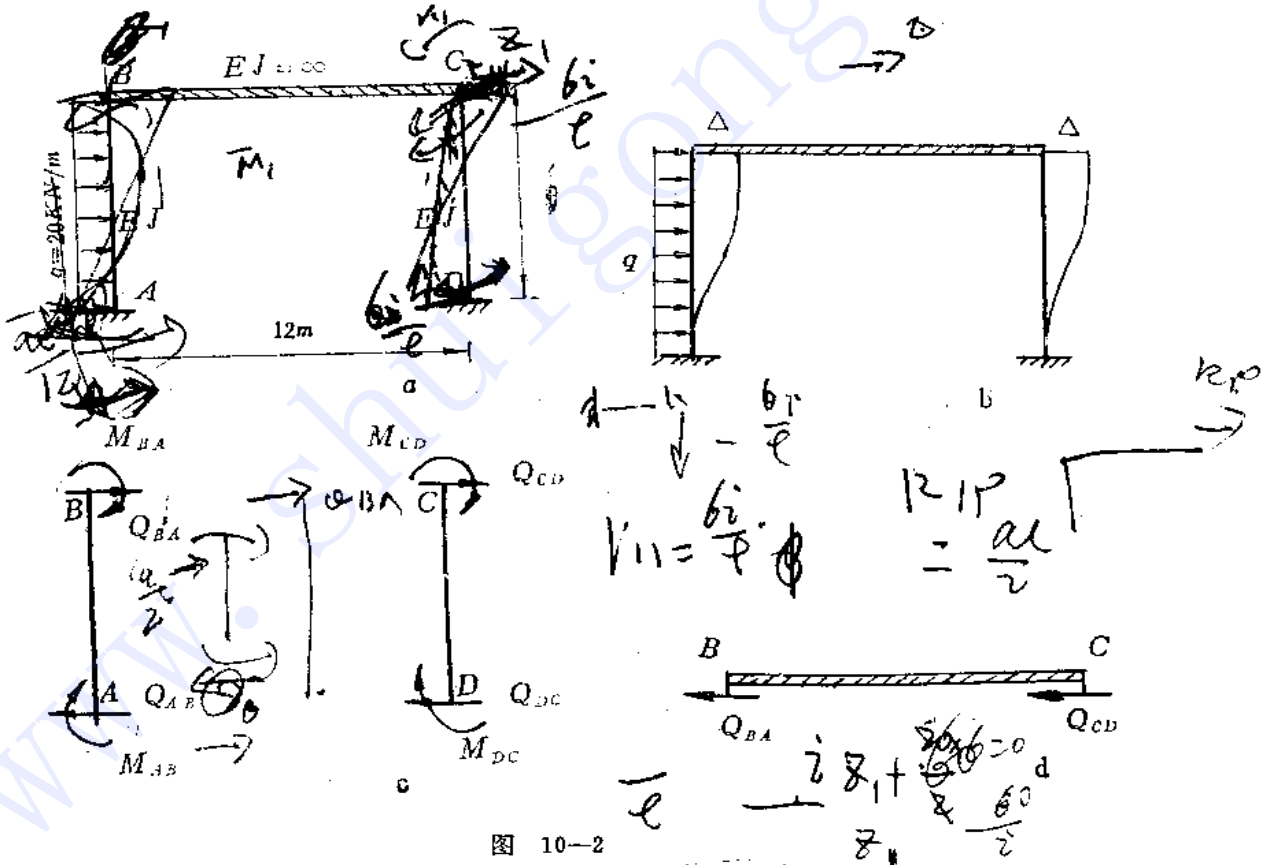



图　10—2

解：　由于横梁 $EI=\infty$，故变形时 $BC$ 结点不会发生转动，而只有水平位移 $\Delta$（如图 10—1b 所示）．

杆端弯矩为

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

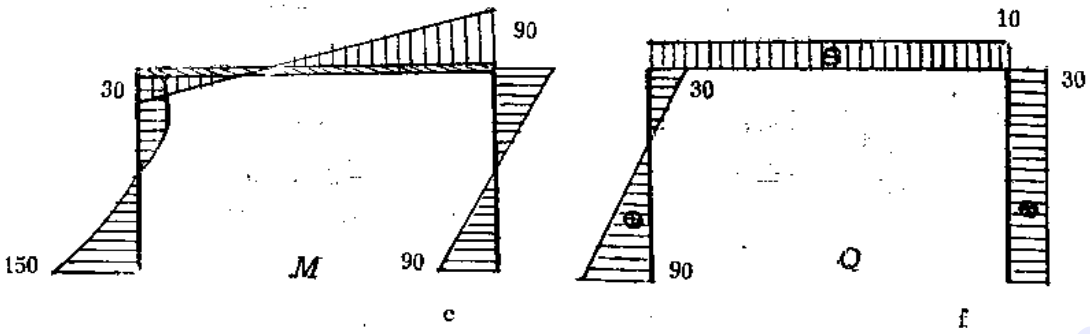



图 10—2

$$M_{AB}=-6\frac{EI}{l^2}\Delta-\frac{ql^2}{12}=-\frac{EI}{6}\Delta-60$$

$$M_{BA}=-6\frac{EI}{l^2}\Delta+\frac{ql^2}{12}=-\frac{EI}{6}\Delta+60$$

$$M_{CD}=M_{DC}=-6\cdot\frac{EI}{6^2}\Delta=-\frac{EI}{6}\Delta$$

杆端剪力为（也可由图 10—1c 推得）

$$Q_{BA}=\frac{12EI}{l^3}\Delta-\frac{ql}{2}=\frac{EI}{18}\Delta-60$$

$$Q_{CD}=\frac{12EI}{l^3}\Delta=\frac{EI}{18}\Delta$$

取图 10—2 $d$ 所示脱离体，由平衡条件得

$$Q_{BA}+Q_{CD}=0$$

$$\frac{EI}{18}\Delta-60+\frac{EI}{18}\Delta=0$$

则

$$\Delta=\frac{540}{EI}$$

故

$$M_{AB}=-\frac{EI}{6}\times\frac{540}{EI}-60=-150(T-m)$$

$$M_{BA}=-\frac{EI}{6}\times\frac{540}{EI}=-30(T-m)$$

$$M_{CD}=M_{DC}=-\frac{EI}{6}\times\frac{540}{EI}=-90(T-m)$$

$$Q_{BA}=\frac{EI}{18}\times\frac{540}{EI}-60=-30(T)$$

$$Q_{AB}=\frac{EI}{18}\times\frac{540}{EI}+60=90(T)$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$$Q_{CD}=Q_{DC}=\frac{EI}{18}\times\frac{540}{EI}=30(T)$$

最终 $M$、$Q$ 图由图 1—2$e$、$f$ 给出。

**题 10—3** 求图 10—3$a$ 所示结构的 $M$ 图（$EI$ = 常数）。

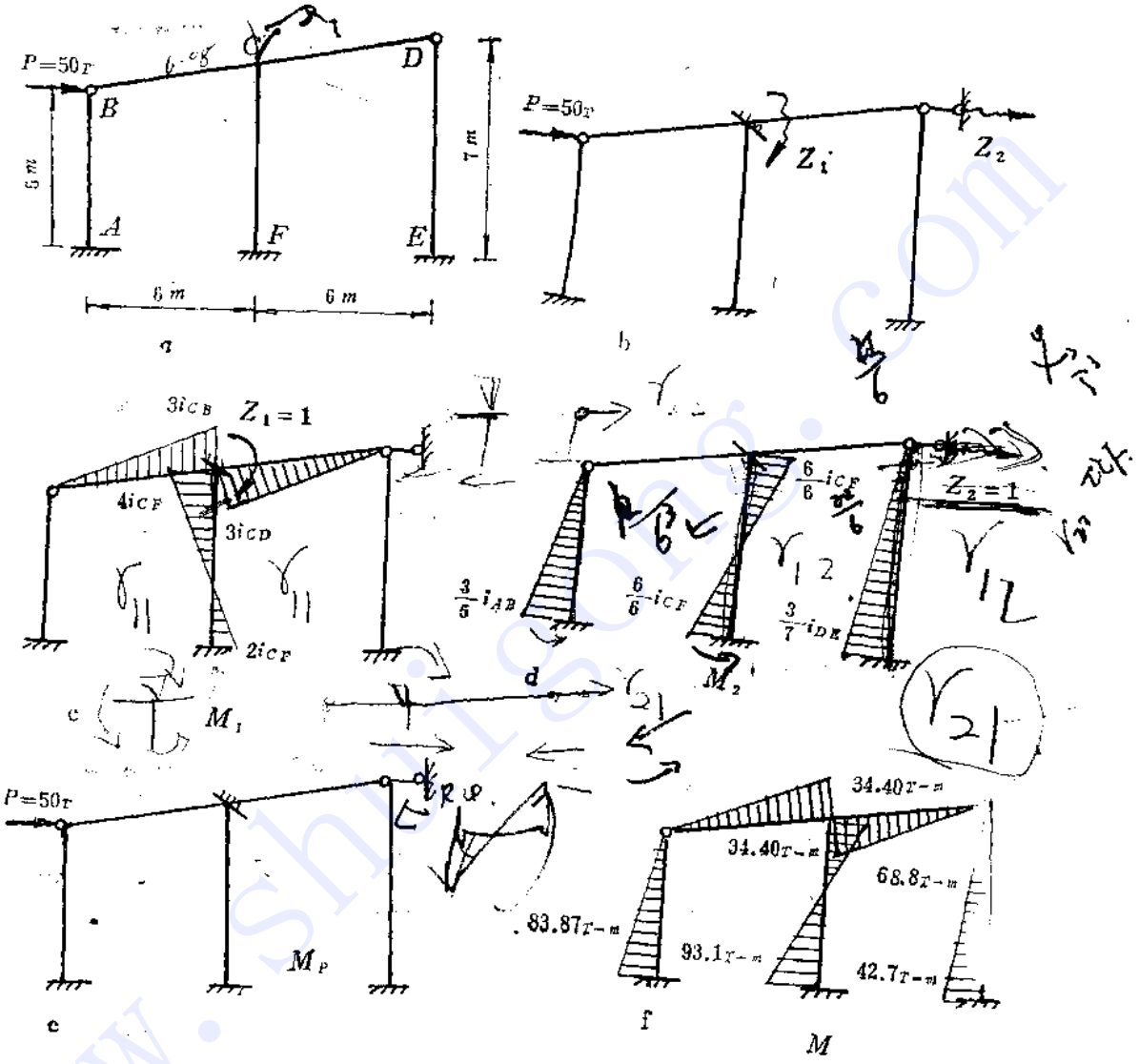



图 10—3

**解**：此题用位移法求解，取图 10—3$b$ 所示的基本体系，位移法典型方程为

$$r_{11}z_1+r_{12}z_2+R_{1P}=0$$

$$r_{21}z_1+r_{22}z_2+R_{2P}=0$$

给出 $M_1$、$M_2$、$M_P$ 图如图 1—3$c$、$d$、$e$ 所示，并求系数：

$$r_{11}=3i_{CB}+3i_{CD}+4i_{CF}$$

$$=3\times\frac{EI}{6.08}+3\times\frac{EI}{6.08}+4\times\frac{EI}{6}$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$$=\frac{5}{3}EI$$

$$r_{12}=r_{21}=-6\times\frac{EI}{6^2}=-\frac{EI}{6}$$

$$r_{22}=3\times\frac{EI}{5^3}+12\times\frac{EI}{6^3}+3\times\frac{EI}{7^3}$$

$$=0.024EI+0.0087EI+0.0556EI$$

$$=0.0883EI$$

$$R_{1P}=0$$

$$R_{2P}=-50(T)$$

将以上系数代入方程

$$\frac{5}{3}EIZ_1-\frac{EI}{6}Z_2=0$$

$$-\frac{1}{6}EIZ_1+0.0883EIZ_2=50$$

解方程得：

$$Z_1=69.8\frac{1}{EI}\quad Z_2=698\frac{1}{EI}$$

最终 $M$ 图为：

$$M=M_1Z_1+M_2Z_2+M_P$$

$M$ 图由图 10—3$f$ 给出。

**题 10—4** 求图 10—4$a$ 所示结构的 $M$ 图（各杆 $EI$ = 常数）。

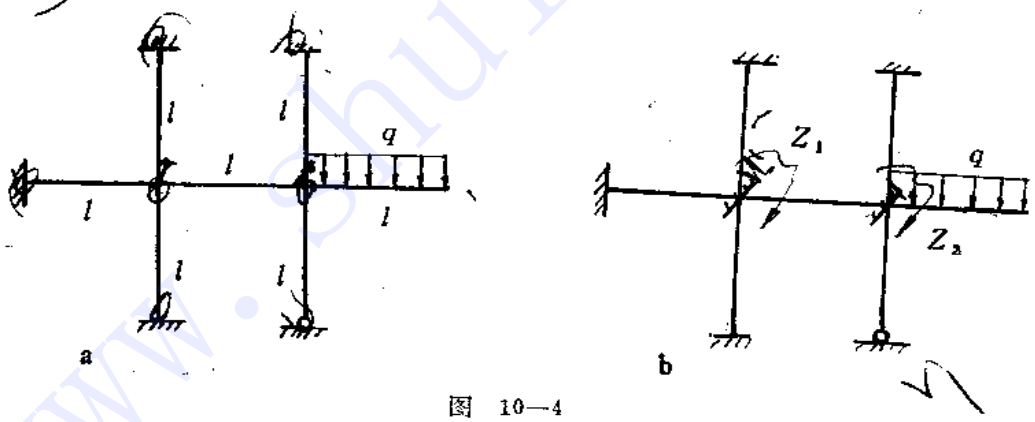



图 10—4

**解**：取图 10—4$b$ 所示的基本体系，位移法典型方程为

$$R_1=0\quad r_{11}z_1+r_{12}z_2+R_{1P}=0$$

$$R_2=0\quad r_{21}z_1+r_{22}z_2+R_{2P}=0$$

分别绘出 $M_1$、$M_2$、$M_P$ 图如图 1—4$c$、$d$、$e$ 所示，并求系数

$$r_{11}=4i+4i+4i+4i=16i$$

$$r_{12}=r_{21}=2i$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

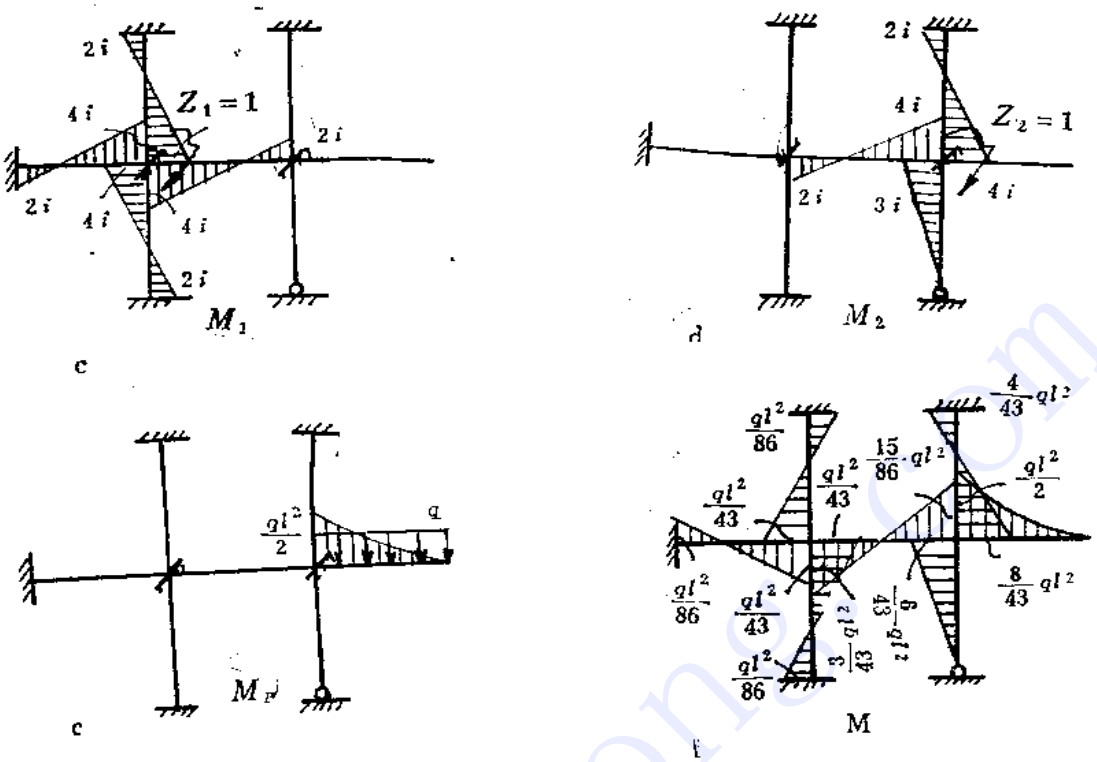



图 10—4

$$r_{22}=4i+4i+3i=11i$$

$$R_{1P}=0$$

$$R_{2P}=-\frac{ql^2}{2}$$

将各系数代入方程

$$16iZ_1+2iZ_2=0$$

$$2iZ_1+11iZ_2=\frac{ql^2}{2}$$

解方程得

$$Z_1=-\frac{ql^2}{172i}\qquad Z_2=\frac{8ql^2}{172i}$$

$$M=M_1Z_1+M_2Z_2+M_P$$

$M$ 图如图 10—4$f$ 所示。

**题 10—5** 求图 10—5$a$ 所示结构的 $M$ 图（已知各柱 $EI$ = 常数）。

**解：** 取图 10—5$b$ 所示的基本体系，有

$$r_{11}Z_1+R_{1P}=0$$

绘出 $M_1$、$M_P$ 图如图 10—5$c$、$d$ 所示。

$$r_{11}=3\frac{i}{l^2}+3\frac{i}{l^2}+3\frac{i}{l^2}=9\frac{i}{l^2}$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作,仅供参考! 请勿转载作为盈利用途!

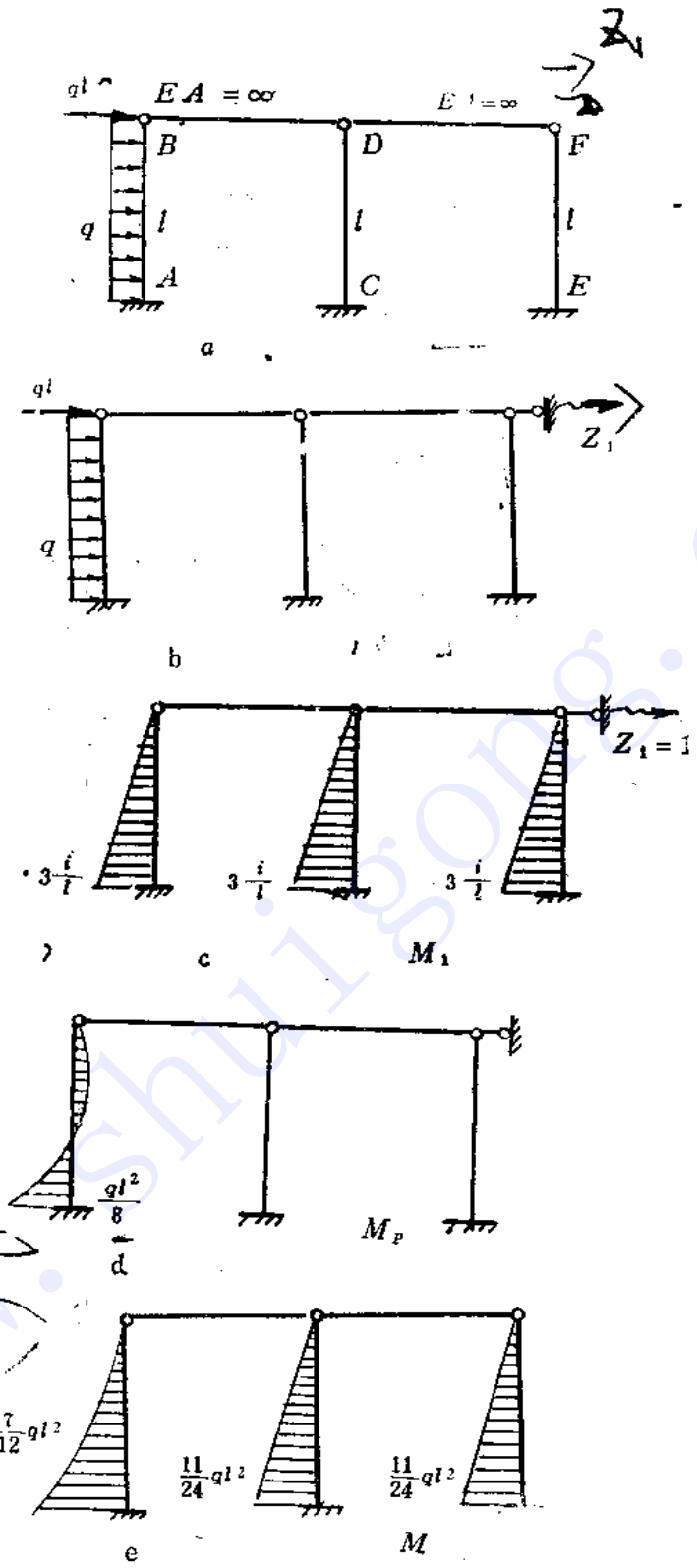



图 10—5

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$$R_{1P} = -\left(\frac{3}{8}ql + ql\right) = -\frac{11}{8}ql$$

将各系数代入方程

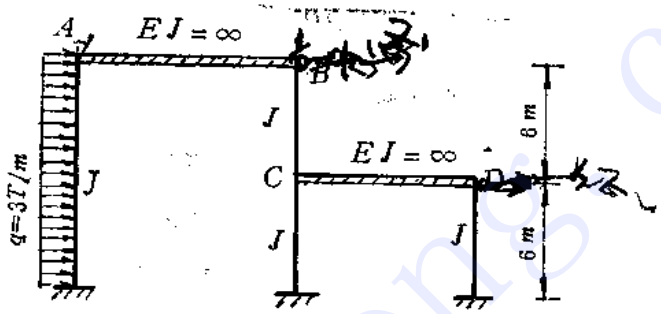
$$9i/l^2 Z_1 - \frac{11}{8}ql = 0$$

$$Z_1 = \frac{11}{72}\frac{ql^3}{i}$$

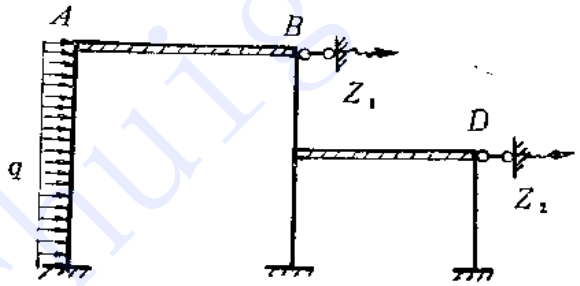
$$M = M_1 Z_1 + M_P$$

最后 $M$ 图如图 10—5e 所示。

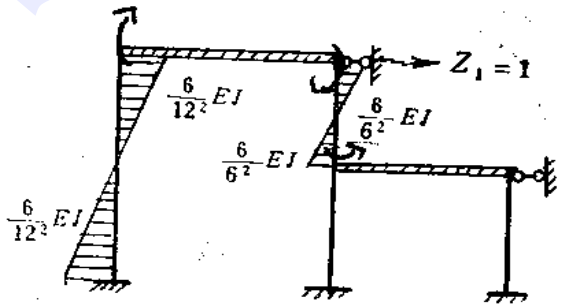
**题 10—6** 求图 10—6a 所示结构的 $M$ 图。




a



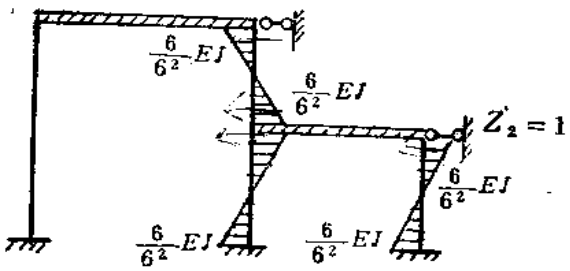

b



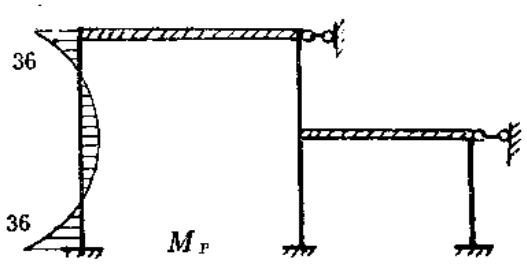

c $M_1$

图 10—6

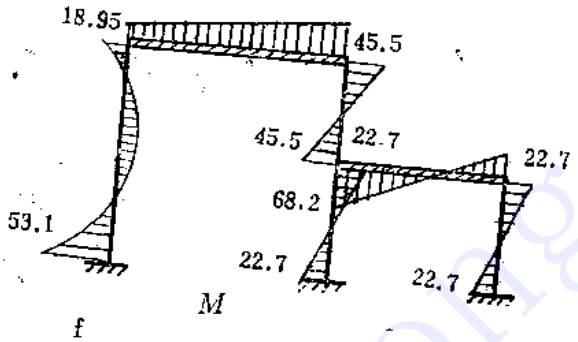
由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！




d $M_2$




e




f

图 10—6

**解**：取图 10—6*b* 所示的基本体系，则有

$$R_1=0 \quad (B\text{ 点的水平反力为零})$$

$$R_2=0 \quad (D\text{ 点的水平反力为零})$$

即 $r_{21}Z_1+r_{22}Z_2+R_{1P}=0$

$r_{21}Z_1+r_{22}Z_2+R_{2P}=0$

分别作出 $M_1$、$M_2$、$M_P$ 图如图 *c*、*d*、*e* 所示。

$$r_{11}=12\times\frac{EI}{12^3}+12\times\frac{EI}{6^3}=\frac{EI}{12^2}+\frac{EI}{18}=\frac{9}{144}EI$$

$$r_{12}=r_{21}=-\frac{EI}{18}$$

$$r_{22}=3\times\frac{EI}{18}=\frac{3EI}{18}$$

$$R_{1P}=-18$$

$$R_{2P}=0$$

将各系代入方程，得

$$\frac{9}{144}EIZ_1-\frac{EI}{18}Z_2-18=0$$

$$-\frac{EI}{18}Z_1+\frac{3}{18}EIZ_2=0$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

解方程得

$$Z_1 = 409.26\frac{1}{EI},\quad Z_2 = 136.42\frac{1}{EI}$$

$$M = M_1 Z_1 + M_2 Z_2 + M_P$$

最终 $M$ 图如图 10—6 $f$ 所示。

**题 10—7** 求图 10—7$a$ 所示结构的 $M$ 图。

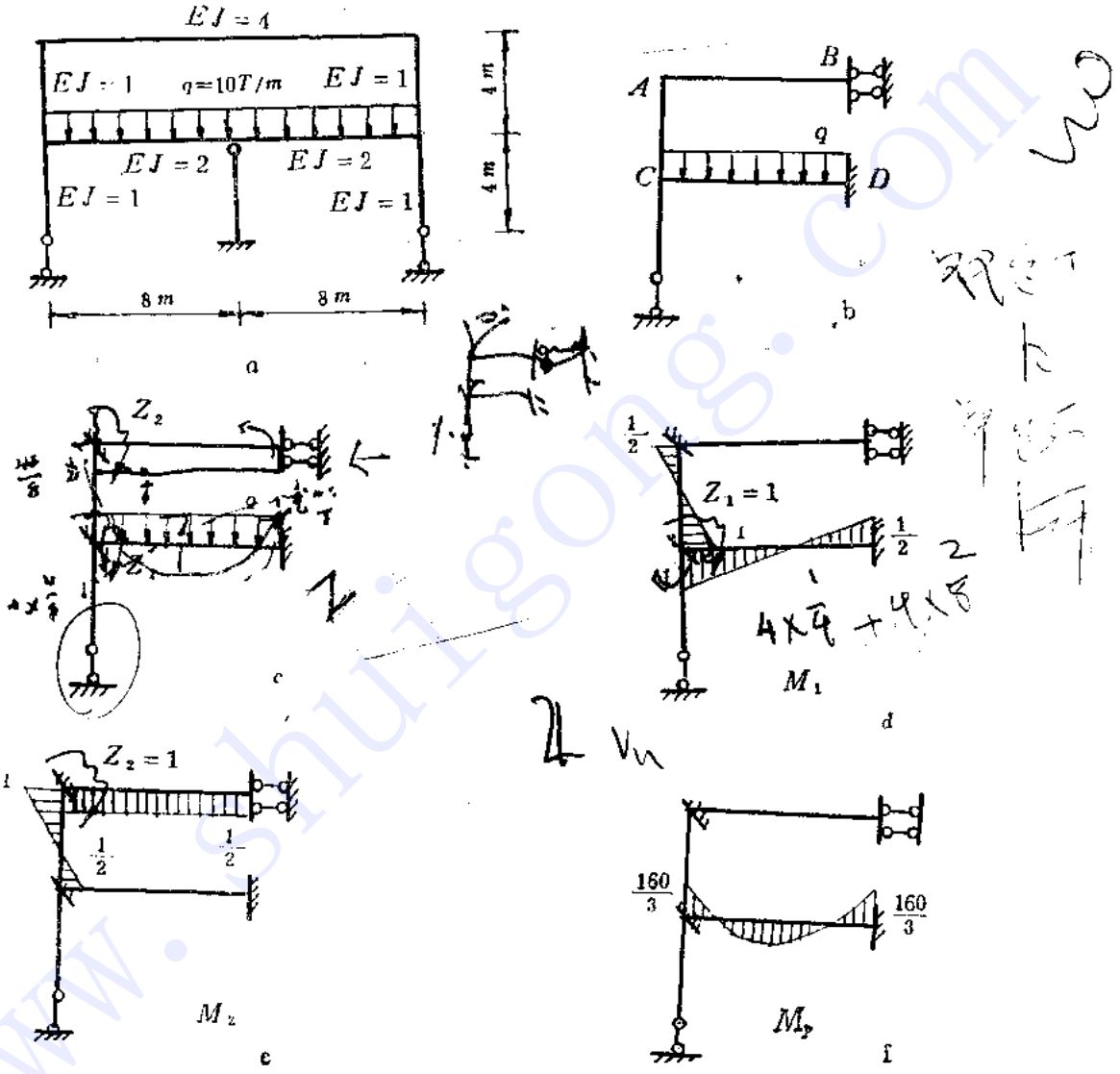



图 10—7

**解**：由于结构对称荷载对称，故取等代结构（如图 10—7$b$ 所示）进行计算。取10—7$c$ 所示的基本体系，位移法典型方程如下：

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1P} = 0$$
$$r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2P} = 0$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

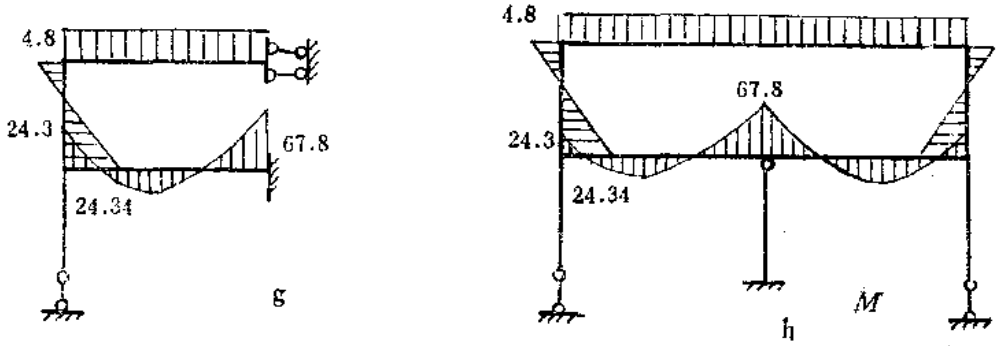



图 10—7

绘出 $M_1$、$M_2$、$M_P$ 图分别如图 10—7$d$、$e$、$f$ 所示。

$$r_{11}=4\times\frac{1}{4}+4\times\frac{2}{8}=2$$

$$r_{12}=r_{21}=\frac{1}{2}$$

$$r_{22}=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$$

$$R_{1P}=-\frac{160}{3}$$

$$R_{2P}=0$$

将各系数代入方程中

$$2Z_1+\frac{1}{2}Z_2=\frac{160}{3}$$

$$\frac{1}{2}Z_1+\frac{2}{3}Z_2=0$$

解之得：

$$Z_1=\frac{320}{11}\qquad Z_2=-\frac{320}{33}$$

$$M=M_1Z_1+M_2Z_2+M_P$$

等代结构的 $M$ 图如图 10—7$g$ 所示，最后 $M$ 图由图 10—7$h$ 给出。

**题 10—8** 求图 10—8$a$ 以示刚架由于支座移动所引起的 $M$ 图。

**解：** 取图 10—8$b$ 所示的基本体系，典型方程为

$$r_{11}Z_1+R_{1\varphi}=0$$

分别绘出 $M_1$、$M_\varphi$ 图（如图 10—8$c$、$d$ 所示）。

$$r_{11}=4i+\frac{16}{3}i=\frac{28}{3}i\qquad\left(i=\frac{EI}{l}\right)$$

$$R_{1\varphi}=2i\varphi$$

将系数示入方程，得

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

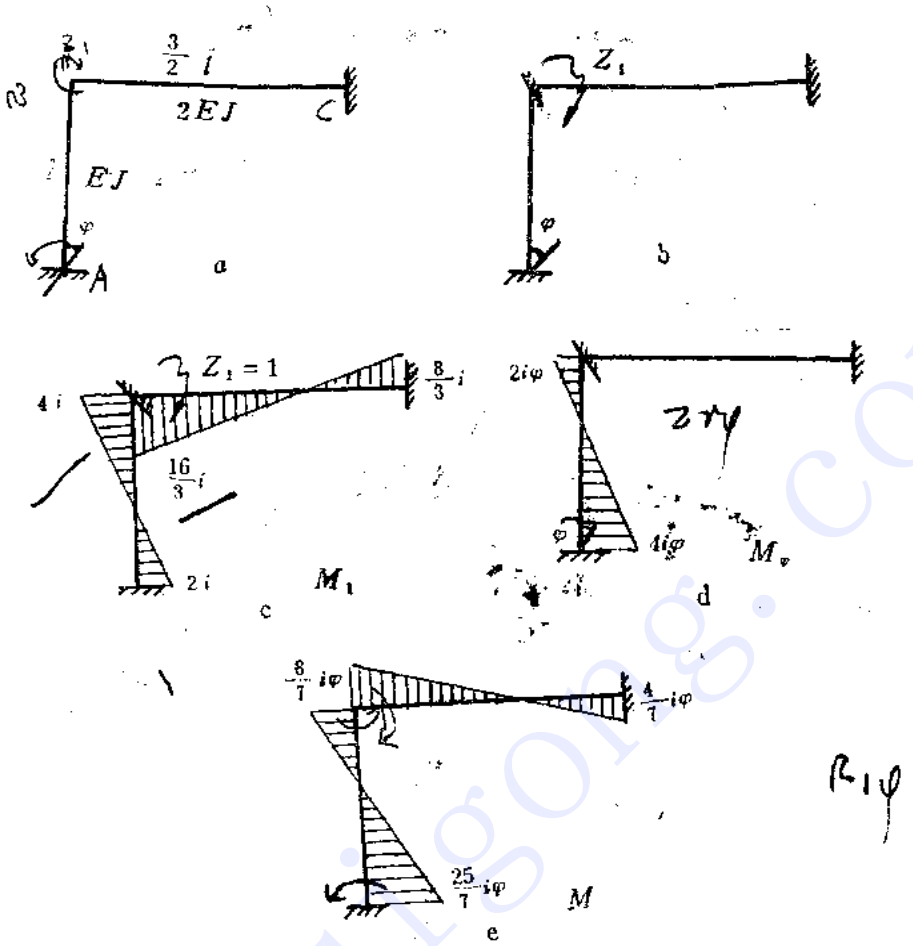



图 10—8

$$\frac{28}{3}iZ_1+2i\varphi=0$$

$$Z_1=-\frac{3}{14}\varphi$$

$$M=M_1Z_1+M\varphi$$

最终 $M$ 图如图 10—8$e$ 所示。

**题 10—9** 求图 10—9$a$ 所示结构的 $M$ 图（已知 $EI$ = 常数，支座 $B$ 下沉$\Delta$值）。

**解：** 由于结构是对称的，可把原结构的支座位移分解为图 10—9$b$ 对称位移、$c$反对称位移所示的两种情况相叠加。

1）对称情况

取等代结构如图 10—9$d$ 所示，取图 10—9$e$ 所示的基本体系，位移法方程为

$$r_{11}Z_1+R_{1C}=0$$

绘出 $M_1$、$Mc$图（如图 10—9$f$、$m$ 所示）并求系数

$$r_{11}=3i+4i=7i$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

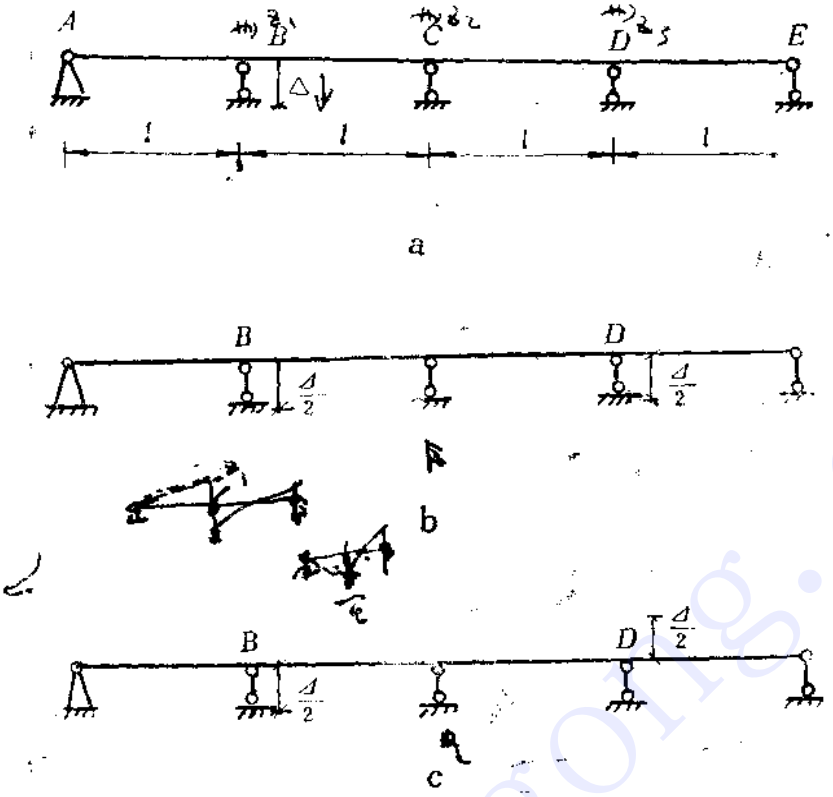



图 10—9

$$R_{1C}=\frac{6i}{l}\Delta/2-\frac{3i}{2l}\Delta/2=\frac{3i}{2l}\Delta$$

则有

$$7iZ_1+\frac{3i}{2l}\Delta=0$$

$$Z_1=\frac{3}{14}\cdot\frac{\Delta}{l}$$

$$M_{对}=M_1Z_1+M_C$$

$M_{对}$图如图 10—9*k* 所示。

2）反对称情况

取图 10—9*g* 所示的等代结构，基本体系如图 10—9*h* 所示，位移法典型方程为

$$r_{11}Z_1+R_{1C}=0$$

绘出 $M_1$、$M_C$ 图如图 10—9*l*、*n* 所示。

$$r_{11}=3i+3i=6i$$

$$R_{1C}=0$$

故有

$$6iZ_1+0=0$$

$$Z_1=0$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

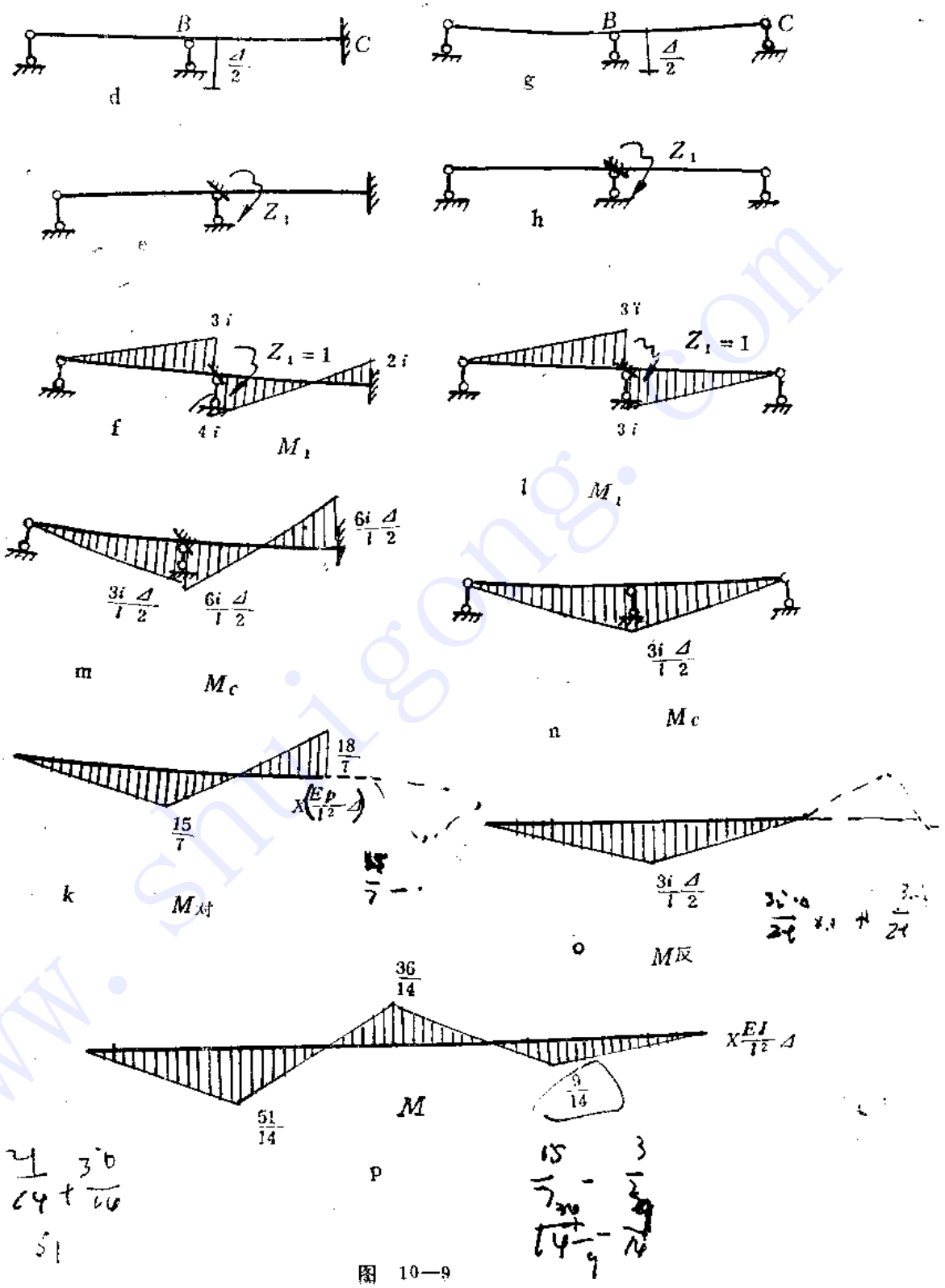



图 10—9

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

而 $$M_{反}=M_1Z_1+M_C=M_。$$

$M_{反}$图如图 10—9o 所示。

最后弯矩图

$$M=M_{对}+M_{反}$$

最终 $M$ 图由图 10—9$P$ 绘出。

此题用写平衡方程方法较为简便。

**题 10—10** 求图 10—10$a$ 所示结构由于温度变化引起的 $M$ 图（$EI$ = 常数）。

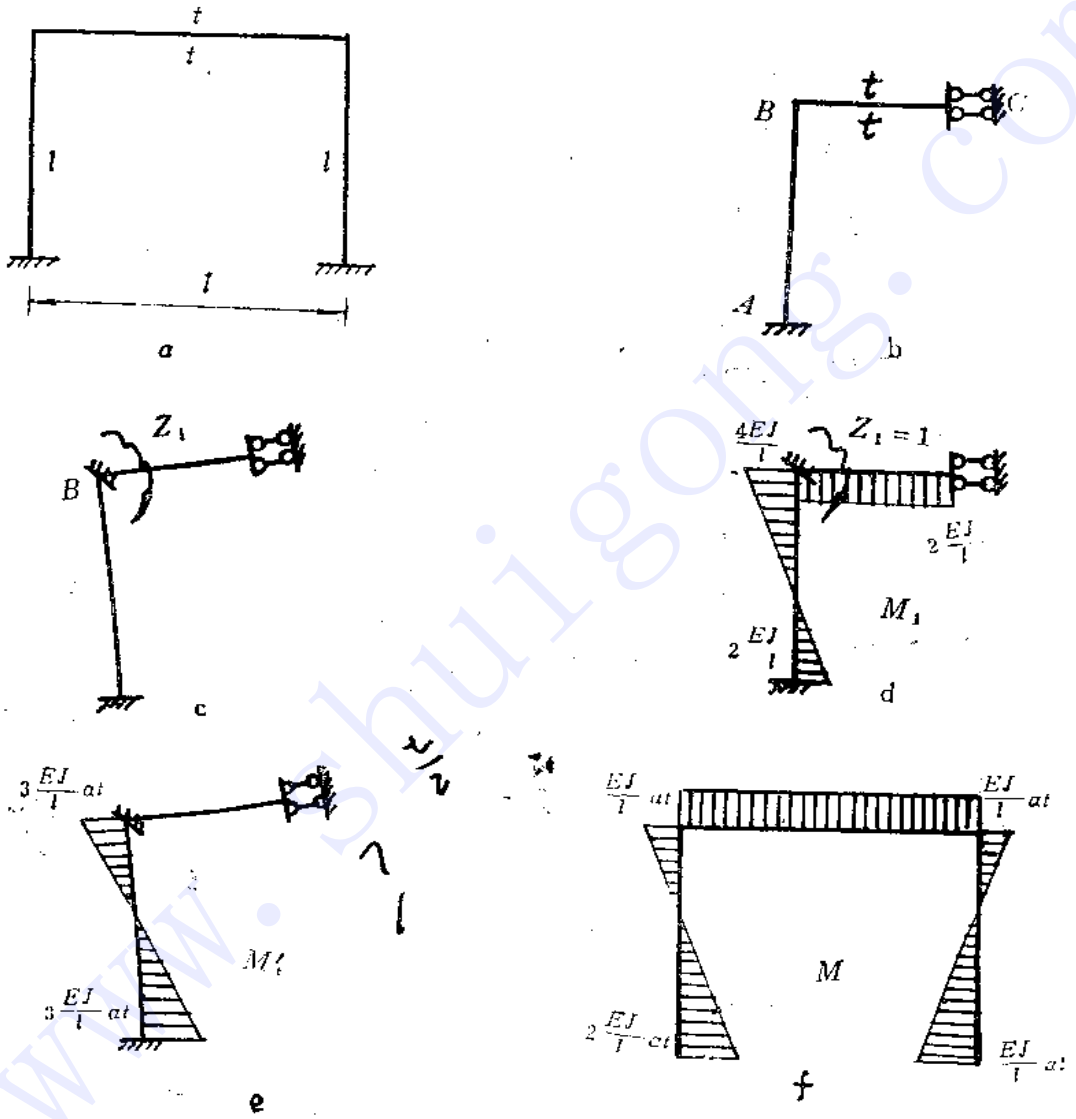



图 10—10

**解：** 由于结构对称，温度变化也是对称的，故取等代结构（如图 1—10$b$ 所示）进行计算，基本体系见图 10—10$c$，典型方程为

$$r_{11}Z_1+R_{1t}=0$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

基本体系的 $M_1$、$M_t$ 图示于图 10—10$d$、$e$

$$r_{11}=4i+2i=6i \quad \left(i=\frac{EI}{l}\right)$$

$$R_{1t}=6i/l\cdot\frac{atl}{2}=3ati$$

代入系数，则

$$6iZ_1+3iat=0$$

解之得

$$Z_1=-\frac{1}{2}at.$$

$$M=M_1Z_1+M_t$$

最终 $M$ 图由图 10—10$f$ 绘出。

**题 10—11** 求图 10—11$a$ 所示结构由于温度变化所引起的 $M$ 图($EI$=常数，截面高度为 $h$)。

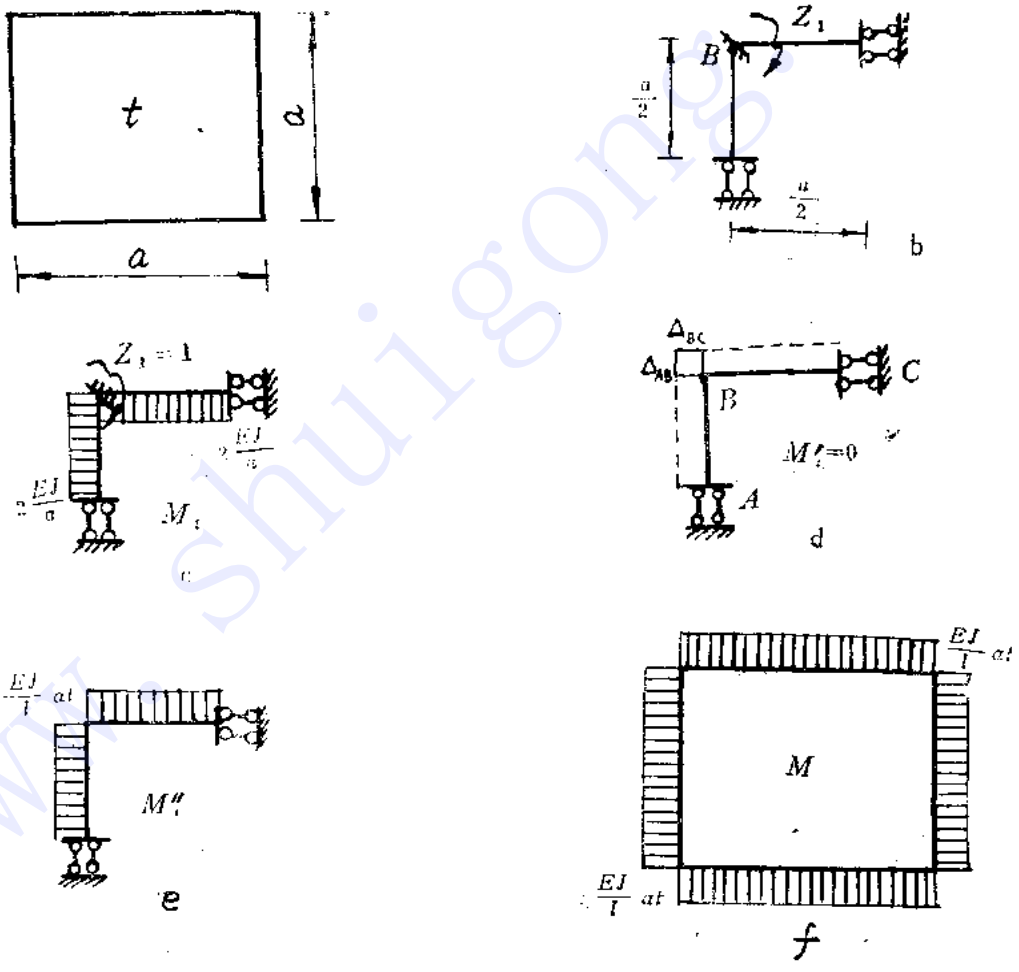



图 10—11

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

**解：** 由于结构对称，温度变化对称故取图 10—11b 所示的基本体系，位移法典型方程为

$$r_{11}Z_1 + R_{1t} = 0$$

其中

$$R_{1t} = R'_{1t} + R''_{1t}$$

$R'_{1t}$——由温度引起杆件轴向伸长所引起的沿 $Z_1$ 方向的反力；

$R''_{1t}$——由温差引起杆件弯曲变形所引起的沿 $Z_1$ 方向的反力。

温度变化所引起的两个弯矩图 $M'_t$、$M''_t$ 如图 10—11d、e 所示，$M_1$ 图见图 10—11c。

$$r_{11} = 2i + 2i = 4i$$

$$R'_{1t} = 0 \qquad R''_{1t} = 0 \text{（由图 } M'_t \text{ 和 } M''_t \text{ 求得）}$$

$$\therefore R_{1t} = R'_{1t} + R''_{1t} = 0$$

故

$$Z_1 = 0$$

而

$$M = M_1 Z_1 + M'_t + M''_t, \quad M'_t = 0$$

则

$$M = M''_t$$

最后 $M$ 图见图 10—11f。

题 10—12 利用混合法求图 10—12a 所示结构的 $M$ 图。

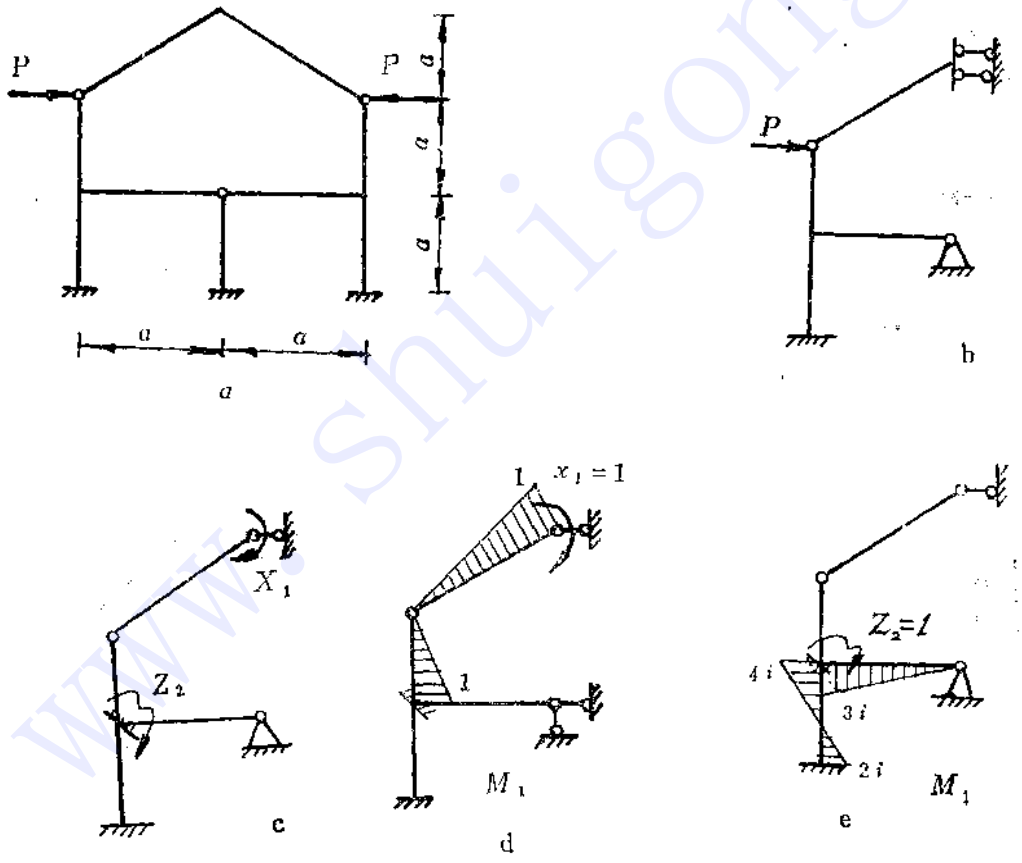
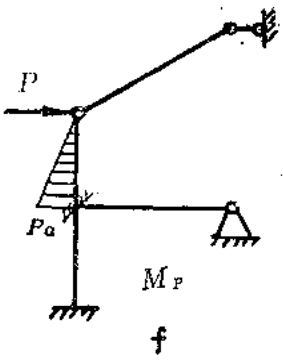
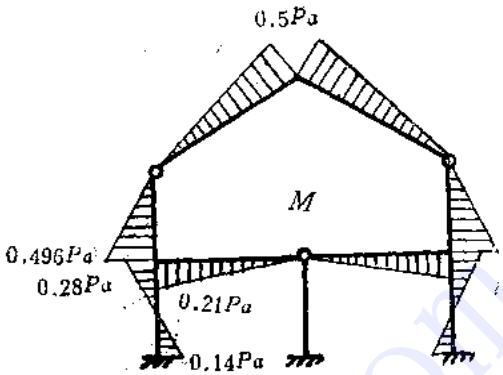



图 10—12

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！




f




g

图 10—12

**解：** 利用对称条件，取等代结构如图 10—12*b*，取图 10—12*c* 所示的基本体系，则混合法方程为

$$\Delta_1 = \delta_{11}x_1 + \delta_{12}'Z_2 + \Delta_{1P} = 0$$

$$R_2 = r_{21}'x_1 + r_{22}Z_2 + R_{2P} = 0$$

$M_1$、$M_2$、$M_P$ 图分别如图 10—12*d*、*e* 所示。

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\times\sqrt{2}a\times 1\times\frac{2}{3}\times 1 + \frac{1}{2}\times a\times 1\times\frac{2}{3}\times 1\right)$$

$$= \frac{a}{3EI}\ (1+\sqrt{2})$$

$$\delta_{12}' = -r_{21}' = \overline{-1}\ \text{（反力位移交互定理）}$$

$$r_{22} = 4i + 3i = 7i$$

$$\Delta_{1P} = -\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}a\cdot Pa\cdot\frac{2}{3}\times 1\right) = -\frac{Pa^2}{3EI}$$

$$R_{2P} = -Pa$$

将以上系数代入方程

$$\frac{(1+\sqrt{2})}{3}\frac{a}{EI}x_1 - Z_2 - \frac{Pa^2}{3EI} = 0$$

$$x_1 + 7iZ_2 - Pa = 0$$

解之得，

$$x_1 = 0.601Pa \qquad Z_2 = 0.0707\frac{Pa^2}{EI}$$

$$M = M_1x_1 + M_2Z_2 + M_P$$

最后 $M$ 图见图 10—12*g*。

**题 10—13** 用混合法求图 10—13*a* 所示结构的 $M$ 图（$EI$ = 常数）。

**解，** 取图 10—13*b* 所示的混合法基本体系，则混合法方程为

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

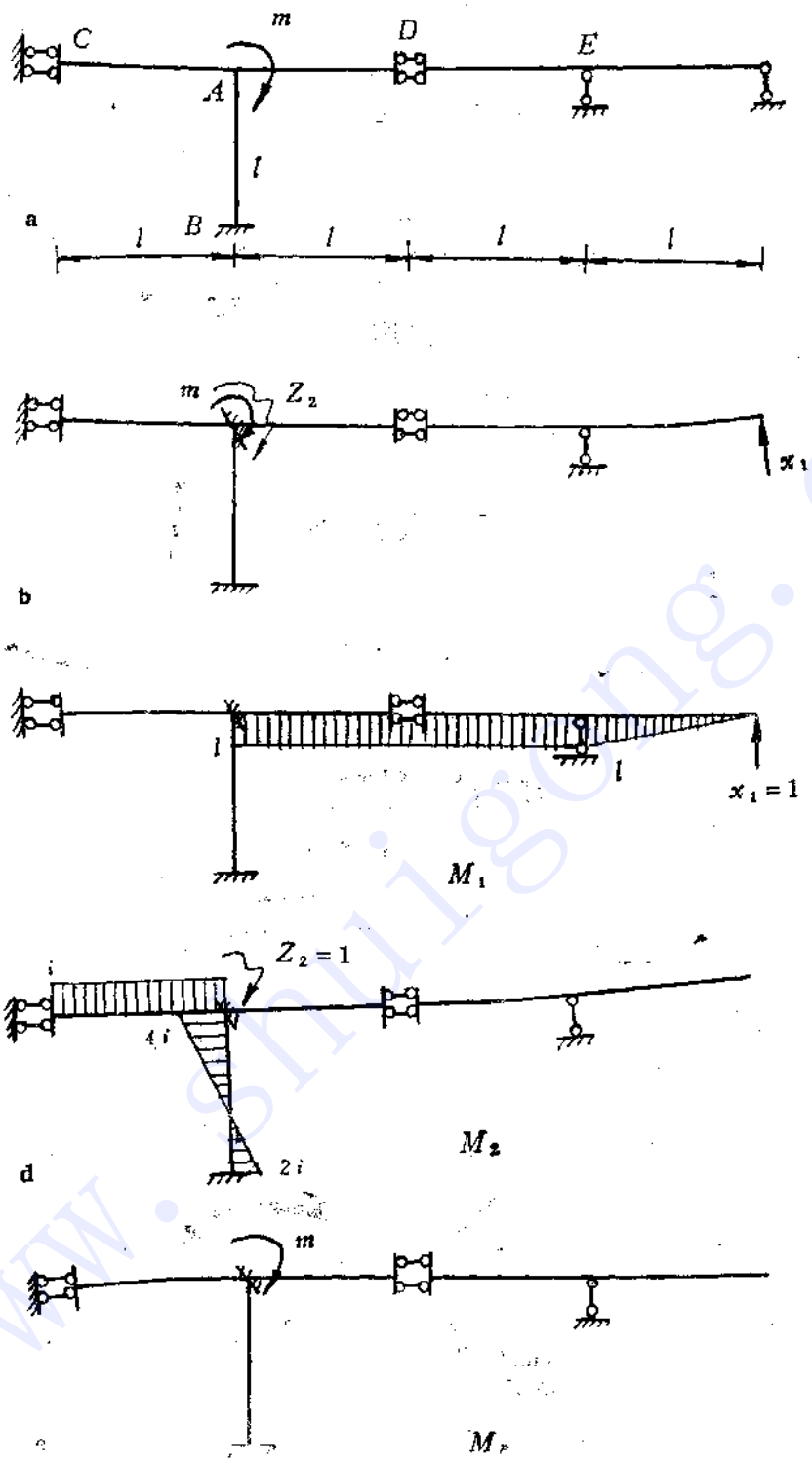



图 10—13

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

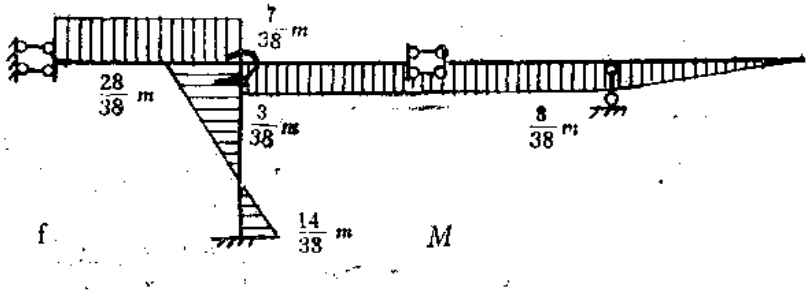



图 10—13

$$\Delta_1 = \delta_{11}x_1 + \delta_{12}Z_2 + \Delta_{1P} = 0$$

$$R_2 = r_{21}'x_1 + r_{22}Z_2 + R_{2P} = 0$$

作基本体系 $M_1$、$M_2$、$M_P$ 图（见图 10—13c、d、e），则

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\left(2l \cdot l \cdot l + \frac{1}{2}l \cdot l \cdot \frac{2}{3}l\right) = \frac{7l^3}{3EI}$$

$$\delta_{12}' = -r_{21}' = -l$$

$\delta_{12}'$ 由于 $Z_2 = 1$ 引起的沿 $x_1$ 方向的位移

$r_{21}'$ 由于 $x_1 = 1$ 引起的约束 2 处的反力

$$r_{22} = 4i + i = 5i = 5\frac{EI}{l}$$

$$\Delta_{1P} = 0$$

$$R_{2P} = -m$$

将以上各系数代入方程组

$$\frac{7l^3}{3EI}x_1 - lZ_2 = 0$$

$$lx_1 + 5\frac{EI}{l}Z_2 = m$$

解之得，

$$x_1 = \frac{3}{38}\frac{m}{l} \qquad Z_2 = \frac{7}{38}\frac{ml}{EI}$$

$$M = M_1x_1 + M_2Z_2 + M_P$$

最终 $M$ 图示于图 10—13$f$。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

# 第十一章　用力矩分配法计算超静定结构

**题 11—1**　用力矩分配法求图 11—1*a* 所示连续梁的 $M$ 图。

**解：**

结点 $B$：

$$\mu_{BA}=\frac{4i_{BA}}{4i_{BA}+4i_{BC}}=\frac{4\times 2}{4\times 2+4\times 3}=0.4$$

$$\mu_{BC}=\frac{4i_{BC}}{4i_{BA}+4i_{BC}}=\frac{4\times 3}{4\times 2+4\times 3}=0.6$$

结点 $C$：

$$\mu_{CB}=\frac{4i_{CB}}{4i_{CD}+3i_{CD}}=\frac{4\times 3}{4\times 3+3\times 4}=0.5$$

$$\mu_{CD}=\frac{3i_{CD}}{4i_{CB}+3i_{CD}}=\frac{3\times 4}{4\times 3+3\times 4}=0.5$$

固端弯矩

$$m_{AB}=0 \qquad m_{BA}=0$$

$$m_{BC}=-\frac{Pl}{8}=-\frac{400\times 6}{8}=-300KN-m$$

$$m_{CB}=\frac{Pl}{8}=\frac{400\times 6}{8}=300KN-m$$

$$m_{CD}=-\frac{ql^2}{8}=-\frac{40\times 6^2}{8}=-180KN-m$$

$$m_{DC}=0$$

具体计算过程见表 11—1。

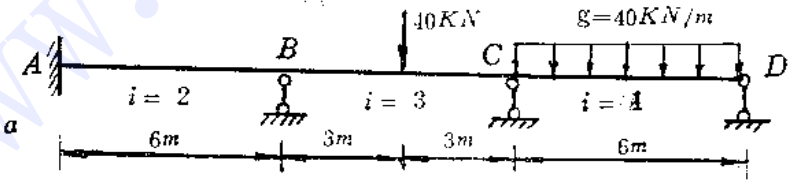



图　11—1

**题 11--2**　求图 11—2*a* 所示连续梁的 $M$ 图。

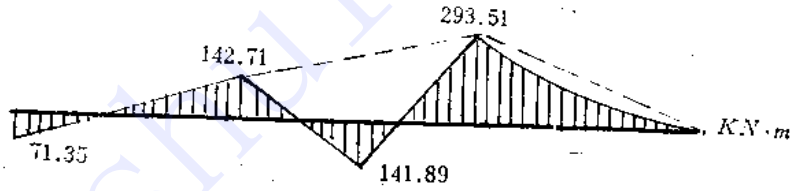
**解：**分配系数。

$$\mu_{BA}=\mu_{BC}=0.5$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

**表 11—1**

| 分配系数 | | | 0.4 | 0.6 | | 0.5 | 0.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 固端弯矩 | 0 | | 0 | −300 | | 300 | −180 |
| B点一次分配传递 | 60 | ← | 120 | 180 | → | 90 | |
| C点一次分配传递 | | | | −52.5 | ← | −105 | −105 |
| B点二次分配传递 | 10.5 | ← | 21 | 31.5 | → | 15.75 | |
| C点二次分配传递 | | | | −3.94 | ← | −7.875 | −7.875 |
| B点三次分配传递 | 0.79 | ← | 1.58 | 2.36 | → | 1.18 | |
| C点三次分配传递 | | | | −0.295 | ← | −0.59 | −0.59 |
| B点四次分配传递 | 0.059 | ← | 0.118 | 0.177 | → | 0.089 | |
| C点四次分配传递 | | | | −0.022 | ← | −0.044 | −0.044 |
| 〃 | | | | | | | |
| 最终杆端弯矩 | 71.35 | | 142.71 | −142.71 | | 293.51 | −293.51 |




*M*

图 11—1

固端弯矩

$$m_{BA}=\frac{3}{16}Pl=\frac{3}{16}\times 40\times 6=45KN-m$$

$$m_{BC}=0$$

*M* 图如图 11—2*b* 所示。

**题 11—3** 求图 11—3*a* 所示结构的 *M* 图（$EI$ = 常数）。

**解：** 将 *E* 点的集中力向 *D* 点简化，然后用力矩分配法计算。

分配系数（设 $EI=1$）

$$\mu_{BA}=0.5 \qquad \mu_{BC}=0.5$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

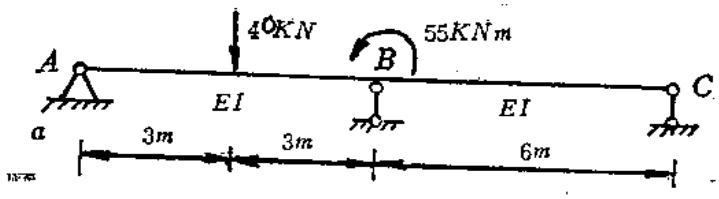



图 11—2

**表 11—2**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 分配系数 | | 0.5 | 0.5 | | |
| 固端弯矩 | 0 | 45 | 0 | | 0 |
| 不平衡弯矩 | 0 | (45+55=100) | | | |
| 放松 B | 0 | ← −50 | −50 | → | 0 |
| 最终弯矩 | 0 | −5 | −50 | | 0 |
| b<br>m图 | | | | | |

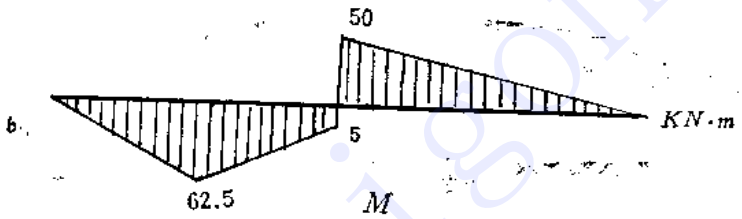



图 11—2

$$\mu_{CB}=\frac{4\times\frac{1}{4}}{4\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{5}}=\frac{5}{8}=0.625$$

$$\mu_{CD}=\frac{3\times\frac{1}{5}}{4\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{5}}=\frac{3}{8}=0.375$$

固端弯矩

$m_{AB}=250KN\cdot m$　　$m_{BA}=250KN\cdot m$

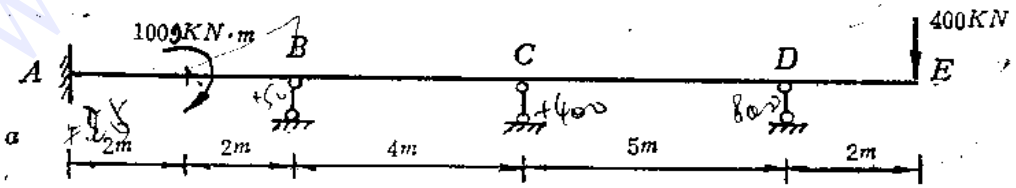



图 11—3

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

表 11—3

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 分配系数 | | 0.5 | 0.5 | 0.625 | 0.375 | 1 | 0 |
| 固端弯矩 | 250 | 250 | 0 | 0 | 0 | | −800 |
| | | | | | 400 ← | 800 | |
| 分 | | | −125 ← | −250 | −150 | | |
| 配 | −31.25 ← | −62.5 | −62.5 → | −31.25 | | | |
| 及 | | | 9.765 ← | 19.53 | 11.72 → | 0 | |
| 传 | −2.44 ← | −4.88 | −4.88 → | −2.44 | | | |
| 递 | | | 0.763 ← | 1.525 | 0.915 | | |
| | −0.19 ← | −0.38 | −0.38 → | −0.19 | | | |
| 最终弯矩 | 216 | 182 | −182 | −263 | 263 | +800 | −800 |

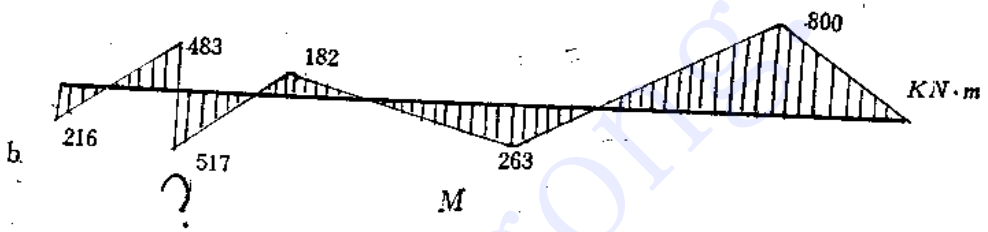



图 11—3

**题 11—4** 求图 11—4a 所示结构的 $M$ 图

**解：** 分配系数

$$\mu_{BA}=\frac{i_{BA}}{i_{BA}+4i_{BC}}=\frac{12/4}{12/4+4\times 8/8}=\frac{3}{7}=0.429$$

$$\mu_{BA}=\frac{4i_{BC}}{i_{BA}+4i_{BC}}=\frac{4\times 8/8}{12/4+4\times 8/8}=\frac{4}{7}=0.571$$

$$\mu_{CB}=\frac{4i_{CB}}{4i_{CB}+3i_{CD}}=\frac{4\times 8/8}{4\times 8/8+3\times 16/8}=\frac{4}{10}=0.4$$

$$\mu_{CD}=\frac{3i_{CD}}{4i_{CB}+3i_{CD}}=\frac{4\times 16/8}{4\times 8/8+3\times 16/8}=\frac{6}{10}=0.6$$

固端弯矩

$$m_{BA}=\frac{ql^2}{3}=\frac{15\times 4^2}{6}=80KN-m$$

$$m_{AB}=\frac{ql^2}{6}=\frac{15\times 4^2}{6}40KN-m$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

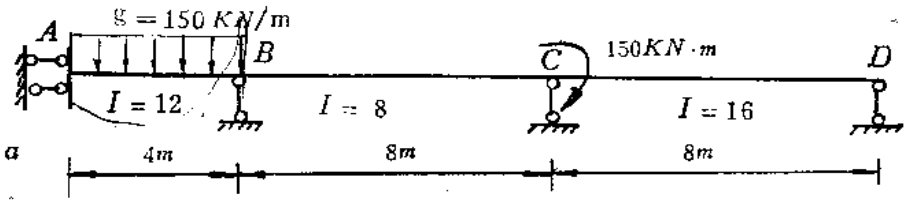



**表 11—4**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 分配系数 | | 0.429 | 0.571 | 0.40 | 0.60 | |
| 固端弯矩 | 40 | 80 | | -150 | | 0 |
| 由结点C开始分配 | | | 30 ← | 60 | 90 → | 0 |
| | 47.19 ← | -47.19 | -62.81 → | -31.4 | | |
| | | | 6.28 ← | 12.56 | 18.84 → | 0 |
| | 2.69 ← | -2.69 | -3.59 → | -1.79 | | |
| | | | 0.36 ← | 0.72 | 1.07 | |
| | 0.15 ← | -0.15 | -0.2 → | -0.1 | | |
| | | | 0.02 ← | 0.04 | 0.06 | |
| | 0.008 ← | -0.008 | 0.01 → | -0.005 | | |
| 最终弯矩 | 90.4 | 29.96 | -29.96 | 40.25 | 109.97 | 0 |

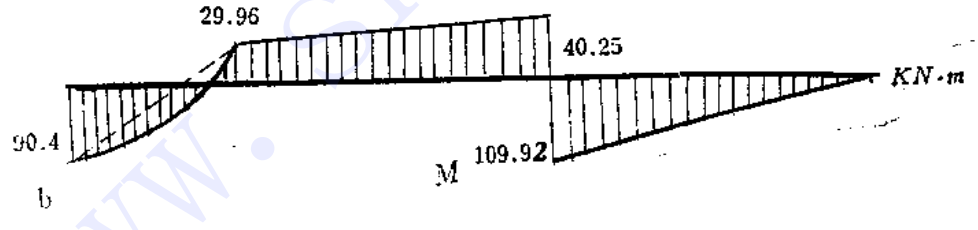



图 11—4

**题 11—5** 求图 11—5a 所示连续梁的弯矩图

**已知** $EI$ = **常数。**

**解：** 所给连续梁是对称结构且荷载也是对称的，故可取其等代结构（图 10—5b）计算之。

分配系数：

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$$\mu_{BA}=\frac{4i}{4i+4i}=0.5$$

$$\mu_{BC}=\frac{4i}{4i+4i}=0.5$$

**固端弯矩**

$$m_{AB}=-\frac{gl^2}{12}=-\frac{8\times6^2}{12}=-24T-m$$

$$m_{BA}=-\frac{q_1l^2}{12}=-\frac{8\times6^2}{12}=24T-m$$

$$m_{BC}=-\frac{ql^2}{12}=-\frac{4\times6^2}{12}=-12T-m$$

$$m_{CB}=-\frac{q_2l^2}{12}=\frac{4\times6^2}{12}=12T-m$$

**计算过程见表 11—5**

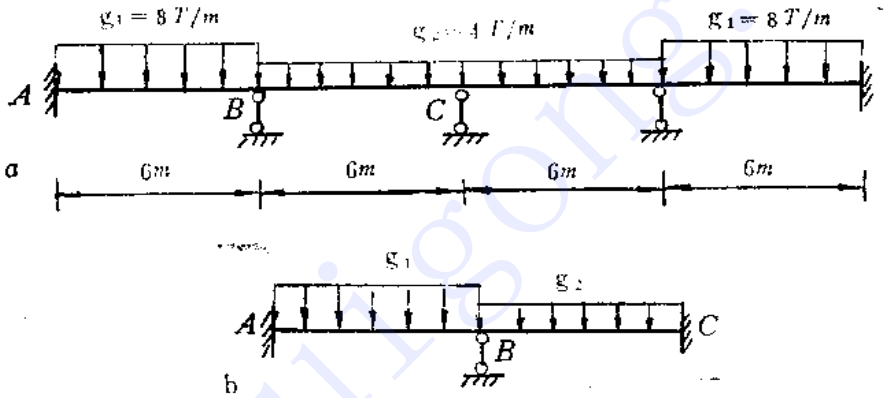



图 11—5

**表 11—5**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 分配系数 | | | 0.5 | 0.5 | |
| 固端弯矩 | −24 | | 24 | −12 | 12 |
| 分配传递 | −3 | ← | −6 | −6 | → −3 |
| 最终弯矩 | −27 | | +18 | −18 | +9 |
| M 图（左半边） | c 27 | | 18 | | 9 M c |

图 11—5

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

利用对称性可绘出右半边的 $M$ 图。

**题 11—6** 用弯矩分配法计算图 11—6a 所示结构，并绘出 $M$ 图。（$EI$ = 常数）。

**解：** 由于对称性可取其$\frac{1}{4}$作为等代结构（如图 11—6b 所示）。

分配系数

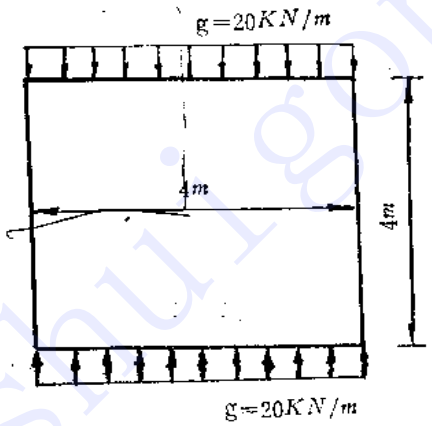
$$\mu_{BA}=\frac{i_{BA}}{i_{BA}+i_{BC}}=\frac{i}{i+i}=\frac{1}{2}=\mu_{BC}$$

固端弯矩

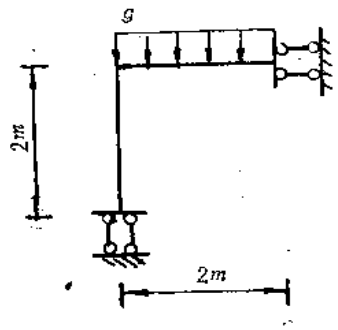
$$m_{BC}=-\frac{ql^2}{3}=-\frac{20\times 2^2}{3}=-\frac{80}{3}KN\cdot m$$

$$m_{CB}=-\frac{ql^2}{6}=-\frac{20\times 2^2}{3}=-\frac{40}{3}KN\cdot m$$

$$m_{AB}=m_{BA}=0$$




a




b

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

**解 11—6**

| 杆　件 | AB | | BC | |
|---|---|---|---|---|
| 杆　端 | A | B | B | C |
| 分配系数 | | 0.5 | 0.5 | |
| 固端弯矩 | 0 | 0 | −80/3 | −40/3 |
| 放松 B | −40/3 ← | 40/3 | 40/3 | → −40/3 |
| 最终弯矩 | −40/3 | 40/3 | −40/3 | −80/3 |

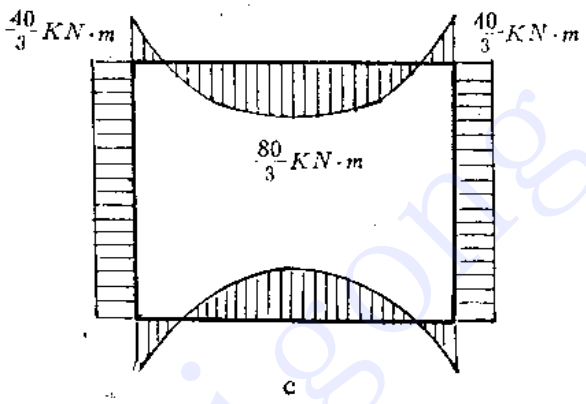



图 11—6

最后 $M$ 图如图 11—6c 所示。

**题 11—7**　求图 11—7a 所示结构各杆端弯矩

**题：**求分配系数，设 $EI=1$，则

$$i_{BA}=\frac{1}{3}\qquad i_{BE}=i_{CD}=\frac{1}{3}\qquad i_{BC}=\frac{1}{6}$$

$$\mu_{BA}=\frac{3i_{BA}}{3i_{BA}+4i_{BE}+4i_{BC}}=\frac{3\times 1/3}{3\times 1/3+4\times 1/6+4\times 1/3}=\frac{1}{3}=0.33$$

$$\mu_{BC}=\frac{3\times 1/3}{3\times 1/3+4\times 1/6+4\times 1/3}=\frac{2}{9}=0.22$$

$$\mu_{BE}=\frac{4\times 1/3}{3\times 1/3+4\times 1/6+4\times 1/3}=\frac{4}{9}=0.44$$

$$\mu_{CB}=\frac{4\times 1/6}{4\times 1/6+4\times 1/3}=0.33$$

$$\mu_{CD}=\frac{4\times 1/3}{4\times 1/6+4\times 1/3}=0.67$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$\Sigma\mu_B = 0.22 + 0.33 + 0.44 = 0.99 \doteq 1$

$\Sigma\mu_C = 0.33 + 0.67 = 1$

固端弯矩

$$m_{BA} = -\frac{ql^2}{8} = -\frac{2\times 3^2}{8} = 2.25T - M$$

$$m_{BC} = -\frac{ql^2}{12} = -\frac{2\times 6^2}{12} = -6T - M$$

$$m_{CB} = \frac{ql^2}{12} = \frac{2\times 6^2}{12} = 6T - M$$

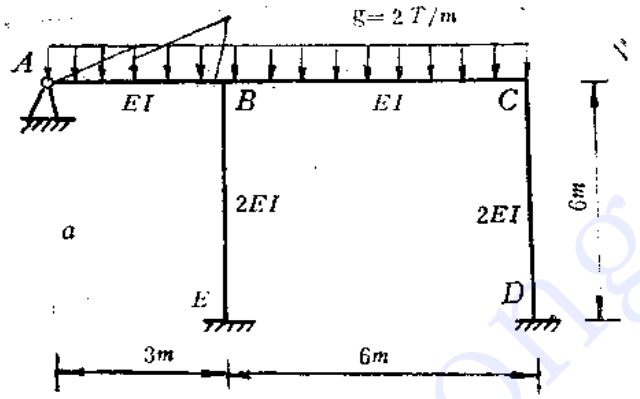



图 11—7

**表 11—7**

| 杆件 | AB | | BE | | BC | | CD | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 杆端 | A | B | B | E | B | C | C | D |
| 分配系数 | | 0.33 | 0.44 | | 0.22 | 0.33 | 0.67 | |
| 固端弯矩 | | 2250 | | | −6000 | 6000 | | |
| 结点不平衡力矩 | | | B −3750 | | | C 6000 | | |
| 放松 C | | | | | −990 ← | −1980 | −4020 → | −2010 |
| 放松 B | 0 ← | 1563 | 2086 | →1043 | 1042 → | 521 | | |
| 放松 C | | | | | −86 ← | −172 | −340 → | −175 |
| 放松 B | 0 ← | 28.4 | 37.8 | →18.9 | 18.9 → | 9.45 | | |
| 放松 C | | | | | −1.5 ← | −3 | −6 → | −3 |
| 放松 B | 0 ← | 0.459 | 0.66 | →0.33 | 0.33 → | 0.16 | | |
| 最终杆端弯矩 | 0 | 3.84 | 2.12 | 1.06 | −6.01 | 4.38 | −4.38 | 2.19 |

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

最终 $M$ 图略，读者可根据最终杆端弯矩自行作出 $M$ 图。

**题 11—8** 利用力矩分配法计算图 11—8$a$ 所示连续梁由于支座移动引起的内力。（$EI$ = 常数）。

**解：求分配系数。令** $\frac{EI}{l}=1$，则

$$\mu_{BA}=\frac{3\times1}{3\times1+4\times1}=\frac{3}{7}$$

$$\mu_{BC}=\frac{4\times1}{3\times1+4\times1}=\frac{4}{7}$$

$$\mu_{CB}=\mu_{CD}=0.5$$

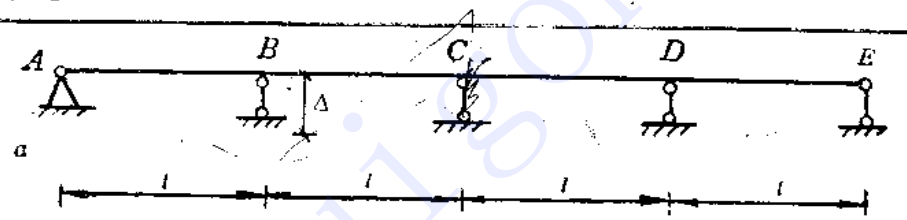
$$\mu_{DC}=\mu_{BC}=\frac{4}{7}$$

$$\mu_{DE}=\mu_{BA}=\frac{3}{7}$$

固端弯矩

$$m_{BA}=-3\frac{EI}{l^2}\Delta \qquad m_{BC}=6\frac{EI}{l^2}\Delta=m_{CB}$$

**表 11—8**




| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 分配系数 | | 3/7 | 4/7 | 1/2 | 1/2 | 4/7 | 3/7 |
| 固端弯矩 | | $-3\frac{EI}{l^2}\Delta$ | $6\frac{EI}{l^2}\Delta$ | $6\frac{EI}{l^2}\Delta$ | | | |
| 分配传递 | | $-\frac{9}{14}$ | $-\frac{3}{2}\leftarrow-3$<br>$-\frac{12}{14}\rightarrow-\frac{12}{28}$ | $-3\rightarrow-\frac{3}{2}$<br>$\frac{12}{28}\leftarrow\frac{12}{14}$ | $\frac{9}{14}$ | | $\times\frac{EI}{l^2}\Delta$ |
| 杆端弯矩 | | $-\frac{51}{14}$ | $\frac{51}{14}$ | $\frac{36}{14}$ | $-\frac{36}{14}$ | $-\frac{9}{14}$ | $\frac{9}{14}$ | $\times\frac{EI}{l^2}\Delta$ |

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

# 第十二章　迭代法计算超静定刚架

**题 12—1**　用迭代法计算图 12—1$a$ 所示无侧移刚架。

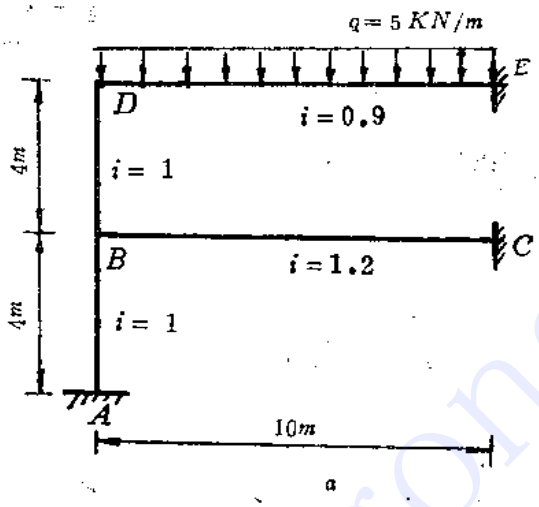



图　12—1

**解：**求转角分配系数、由公式

$$\mu'_{iK}=-\frac{1}{2}\frac{i_{iK}}{\sum_i i_{iK}}$$

得

$$\mu'_{DE}=-\frac{1}{2}\frac{0.9}{0.9+1}=-0.237$$

$$\mu'_{DB}=-\frac{1}{2}\frac{1}{0.9+1}=-0.263$$

$$\mu'_{BC}=-\frac{1}{2}\frac{1.2}{1+1+1.2}=-0.187$$

$$\mu'_{BA}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1+1+1.2}=-0.156$$

$$\mu'_{BD}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1+1+1.2}=-0.156$$

求固端弯矩及各结点的不平衡弯矩：

$$M^P_{DE}=-M^P_{ED}=-\frac{5\times10^2}{12}=-41.997KN-m$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$$M_D^P = -41.997KN-m$$

$$M_B^P = 0$$

用公式 $M'_{iK}=\mu'_{iK}(M_i^P+\sum_i M'_{Ki})$ 计算近端转角弯矩的迭代值 $M'_{iK}$，这个计算一般由不平衡弯值较大的结点开始，此公式内：

$M'_{iK}$——近端转角弯矩；

$\mu'_{iK}$——杆端转角分配系数；

$M_i^P$——结点不平衡弯矩；

$\sum M'_{Ki}$——汇交于结点 $i$ 的所有杆件的远端转角弯矩的代数和。

第一轮迭代值：由结点 $D$ 开始迭代，暂假定 $\sum_i M'_{Ki}=0$

则 $M'_{DE}=(-0.237)(-41.667+0)=9.875$

$$M'_{DB}=(-0.263)(-41.667+0)=10.958$$

$$M'_{BD}=(-0.156)(0+10.958)=-1.709$$

$$M'_{BC}=(-0.187)(0+10.958)=-2.054$$

$$M'_{BA}=-(0.159)(0+10.958)=-1.709$$

第二轮迭代值：

$$M'_{DE}=(-0.237)(-41.667-1.709)=10.28$$

$$M'_{DB}=(-0.263)(-41.667-1.709)=11.407$$

$$M'_{BD}=(-0.156)(0+11.407)=-1.779$$

$$M'_{BC}=(-0.187)(0+11.407)=-2.738$$

$$M'_{BA}=(-0.156)(0+11.407)=-1.779$$

第三轮代值：

$$M'_{DE}=(-0.237)(-41.667-1.779)=10.29$$

$$M'_{DB}=(-0.263)(-41.667-1.779)=11.42$$

$$M'_{BD}=(-0.156)(0+11.42)=-1.7815$$

$$M'_{BC}=(-0.186)(0+11.42)=-2.14$$

$$M'_{BA}=(-0.156)(0+11.42)=-1.782$$

由于转角弯矩的迭代值接近稳定、故不再继续进行迭代。

求最终杆端弯矩用公式 $M_{iK}=M_{iK}^P+2M'_{iK}+M'_{Ki}$

$$M_{DE}=-41.667+2\times10.29=-21.087$$

$$M_{ED}=41.667+10.29=51.957$$

$$M_{DB}=2\times11.42-1.78=21.058$$

$$M_{BD}=2\times(-1.779)+11.42=7.86$$

$$M_{BC}=2\times(-2.14)=-4.276$$

$$M_{BA}=2\times(-1.779)=-3.558$$

$$M_{AB}=0+0+(-1.78)=-1.78$$

$$M_{CB}=0+0+(-2.14)=-2.14$$

迭代过程及最终杆端弯矩值记入图 12—1b。图上每个结点绘有二个方框，小方框内为不平衡弯矩。汇交于每个结点上各杆的转角分配系数 $\mu'_{iK}$ 写在外方框内（与各杆

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

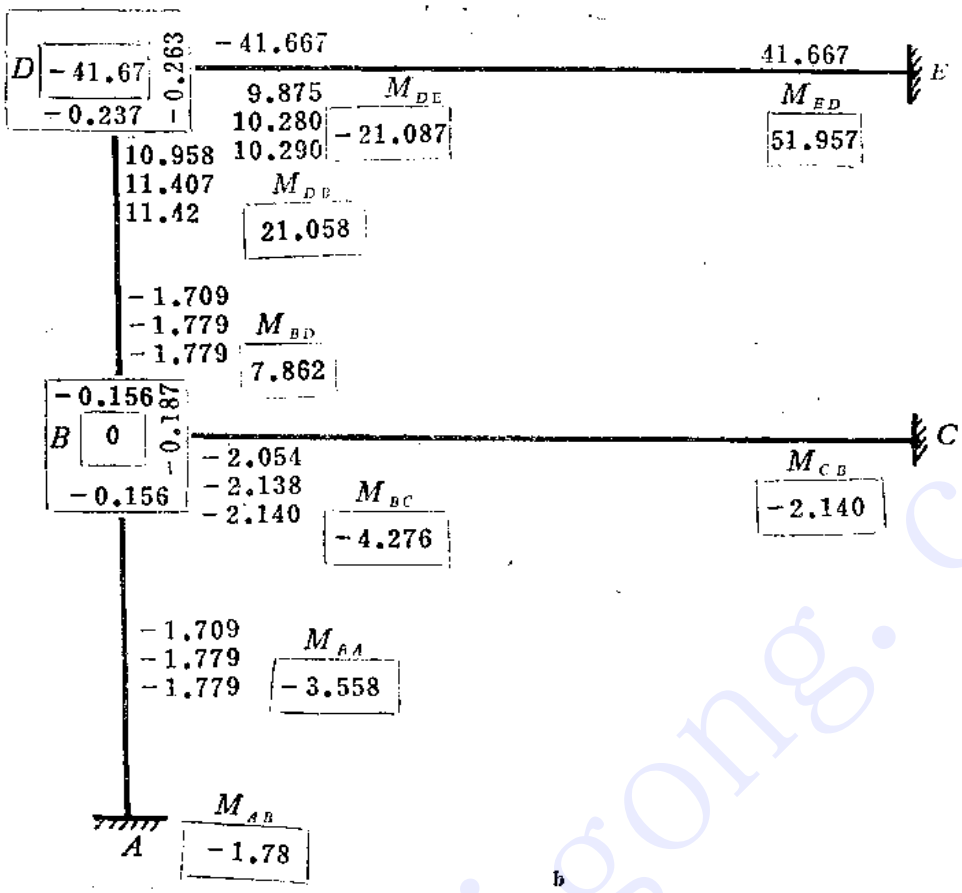



图 12—1

端相对应）．最终杆端弯矩写在长方格内．最终弯矩图从略。

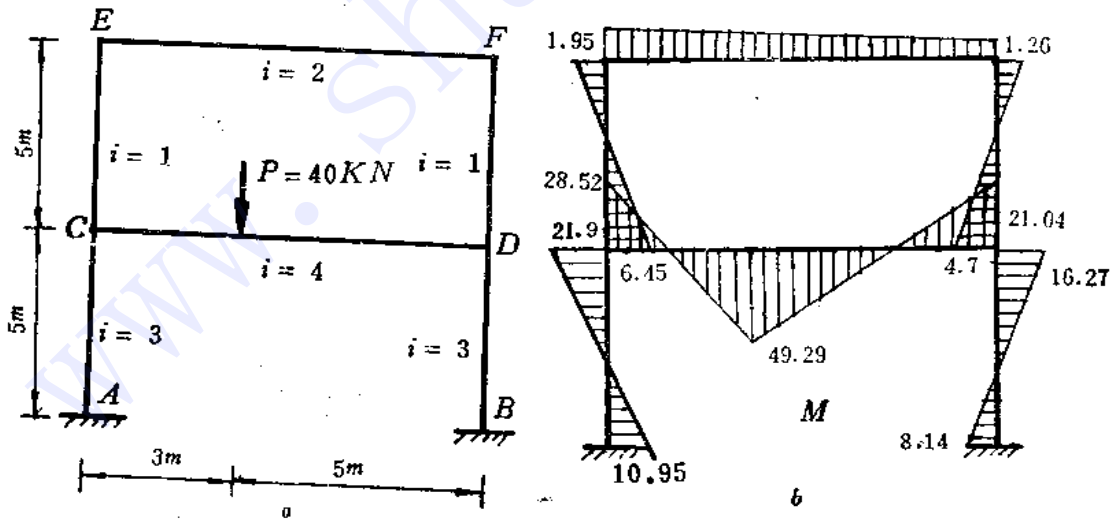



图 12—2

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

题 12—2 用迭代法计算图 12—2$a$ 以示刚架(不考虑侧移)

**解**：求转角分配系数$\left(\mu'_{ik}=-\frac{1}{2}\frac{i_{ik}}{\sum_i i_{ik}}\right)$：

$$\mu'_{EF}=\mu'_{FE}=-\frac{1}{2}\frac{2}{1+2}=-\frac{1}{3}$$

$$\mu'_{EC}=\mu'_{FD}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1+2}=-\frac{1}{6}$$

$$\mu'_{CE}=-\mu'_{DF}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1+4+3}=-\frac{1}{16}$$

$$\mu'_{CD}=\mu'_{DC}=-\frac{1}{2}\frac{4}{1+4+3}=-\frac{1}{4}$$

$$\mu'_{CA}=\mu'_{DB}=-\frac{1}{2}\frac{3}{1+4+3}=-\frac{3}{16}$$

校核所得结点转角分配系数$\left(\sum_i \mu_{iK}'=-\frac{1}{2}\right)$：

$$\Sigma\mu_E=-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=-\frac{1}{2}$$

$$\Sigma\mu_C=-\frac{1}{16}-\frac{1}{4}-\frac{3}{16}=-\frac{1}{2}$$

结果说明所求转角分配系数正确。

求固端弯矩及不平衡弯矩：

$$M_{CD}^F=-\frac{40\times3\times5^2}{8}=-46.875$$

$$M_{DC}^F=\frac{40\times5\times3^2}{8}=28.125$$

$\because M_{CA}^F=M_{CE}^F=0 \quad \therefore M_C^F=\Sigma M_C^F=0-46.875$

$\because M_{DF}^F=M_{DB}^F=0 \quad \therefore M_D^F=\Sigma M_D^F=0+28.125$

用公式$M'_{iK}=\mu'_{iK}(M_i^F+\Sigma M'_{Ki})$求各杆端转角弯矩之迭代值。

第一轮迭代值：

$$M'_{CE}=-\frac{1}{16}(-46.875+0)=2.989 \quad (\text{设}\ \Sigma M'_{Ki}=0)$$

$$M'_{CD}=-\frac{1}{4}(-46.875+0)=11.719$$

$$M'_{CA}=-\frac{1}{16}(-46.875+0)=8.789$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$$M'_{DF}=-\frac{1}{16}(28.125+11.719)=-2.49$$

$$M'_{DC}=-\frac{1}{4}(28.125+11.719)=-9.96$$

$$M'_{DB}=-\frac{3}{16}(28.125+11.719)=-7.49$$

$$M'_{FD}=-\frac{1}{6}(0-2.49)=0.415$$

$$M'_{FE}=-\frac{1}{3}(0-2.49)=0.83$$

$$M'_{EF}=-\frac{1}{3}(0+0.83+2.93)=-1.25$$

$$M'_{EF}=-\frac{1}{3}(0+0.83+2.93)=-1.25$$

$$M'_{EC}=-\frac{1}{6}(0+0.83+2.93)=-0.626$$

第二轮迭代值：

$$M'_{CE}=-\frac{1}{16}(-46.875-0.626-9.96)=3.59$$

$$M'_{CD}=-\frac{1}{4}(-46.875-0.626-9.96)=14.365$$

$$M'_{CA}=-\frac{3}{16}(-46.875-0.626-9.96)=10.77$$

$$M'_{DF}=-\frac{1}{16}(28.125-14.365+0.415)=-2.68$$

$$M'_{DC}=-\frac{1}{4}(28.129+14.365+0.415)=-10.726$$

$$M'_{DB}=-\frac{3}{16}(28.125+14.365+0.415)=-8.04$$

$$M'_{FD}=-\frac{1}{6}(-2.68-1.25)=0.655$$

$$M'_{EF}=-\frac{1}{3}(-2.68+1.25)=1.31$$

$$M'_{FE}=-\frac{1}{3}(1.31+8.59)=-1.633$$

$$M'_{EC}=-\frac{1}{6}(1.31+3.59)=-0.816$$

第三轮迭代值：

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$$M'_{CE}=-\frac{1}{16}(-46.875-10.726-0.876)=3.65$$

$$M'_{CD}=-\frac{1}{4}(-46.875-10.726-0.876)=14.604$$

$$M'_{CA}=-\frac{3}{16}(-46.875-10.726-0.876)=10.953$$

$$M'_{DF}=-\frac{1}{16}(28.125+14.604+0.655)=-2.712$$

$$M'_{DC}=-\frac{1}{4}(28.125+14.604+0.655)=-10.846$$

$$M'_{DB}=-\frac{3}{16}(28.125+14.604+0.655)=-8.135$$

$$M'_{FD}=-\frac{1}{6}(-2.712-1.633)=0.724$$

$$M'_{FE}=-\frac{1}{3}(-2.712-1.633)=1.448$$

$$M'_{EF}=-\frac{1}{3}(1'448+3.65)=-1.699$$

$$M'_{EC}=-\frac{1}{6}(1.448+3.65)=-0.849$$

最终杆端弯矩（$M_{iK}=M^{f}_{iK}+2M'_{iK}+M_{Ki}$）：

$M_{CD}=-46.875+2\times14.604-10.846=-28.52$

$M_{CE}=2\times3.65-0.849=6.452$

$M_{CA}=2\times10.953+0=21.906$

$M_{AC}=10.95$

$M_{DC}=28.125+2\times(-10.846)+14.604=21.037$

$M_{DF}=2\times(-2.712)+0.724=-4.705$

$M_{DB}=2\times(-8.135)+0=-16.27$

$M_{BD}=-8.135$

$M_{FD}=2\times(0.724)-2.712=-1.264$

$M_{FE}=2\times1.448-1.699=1.197$

$M_{EF}=2\times(-1.699)+1.448=-1.95$

$M_{EC}=2\times(-0.849)+3.65=1.952$

最终 $M$ 图如图 12—2*b* 所示。

**题 12—3** 用迭代法计算图 12—3*a* 所示框架。

**解**：由于结构对称，荷载对称，（两个对称轴）故取其 1/4 作为等代结构（见图 12—3*b*）。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

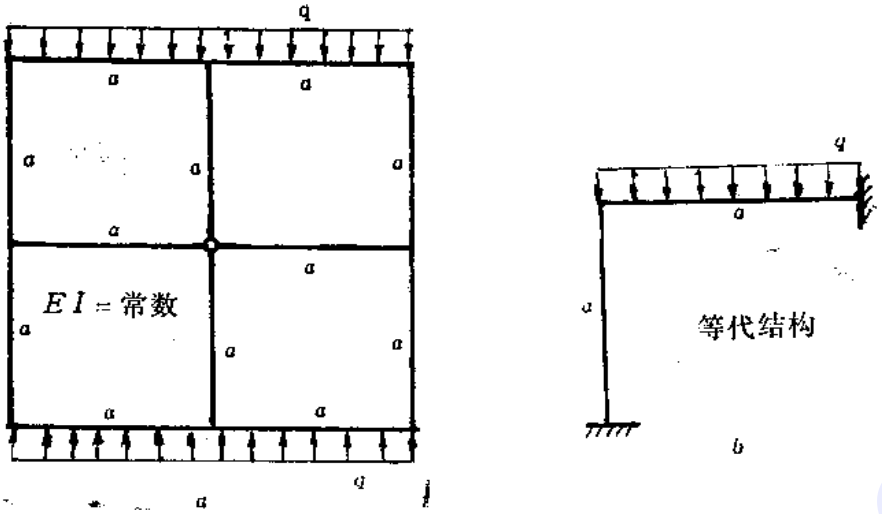



图 12—3

$$i_{AB}=i_{AC}=\frac{EI}{a}$$

求转角分配系数 $\mu'$：

$$\mu'_{AB}=\mu'_{AC}=-\frac{1}{2}\ \frac{\frac{EI}{a}}{2EI/a}=-\frac{1}{4}$$

求转角弯矩迭代值：

$$M'_{AB}=-\frac{1}{4}\left(-\frac{qa^2}{12}+0\right)=\frac{qa^2}{48}$$

$$M'_{AC}=-\frac{1}{4}\left(-\frac{qa^2}{12}+0\right)=\frac{qa^2}{48}$$

最终杆端弯矩（$M_{AB}=M^F_{AB}+2M'_{AB}+M'_{BA}$）：

$$M_{AB}=-\frac{qa^2}{12}+2\times\frac{qa^2}{48}=-\frac{qa^2}{24}$$

$$M_{AC}=2\times\frac{qa^2}{48}=\frac{qa^2}{24}$$

$$M_{BA}=M^F_{BA}+2M'_{BA}+M'_{AB}=\frac{qa^2}{12}+\frac{qa^2}{48}=\frac{5}{48}qa^2$$

$$M_{CA}=M^F_{CA}+2M'_{CA}+M'_{AC}=\frac{qa^2}{48}$$

最终弯矩图见图 12—3c。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

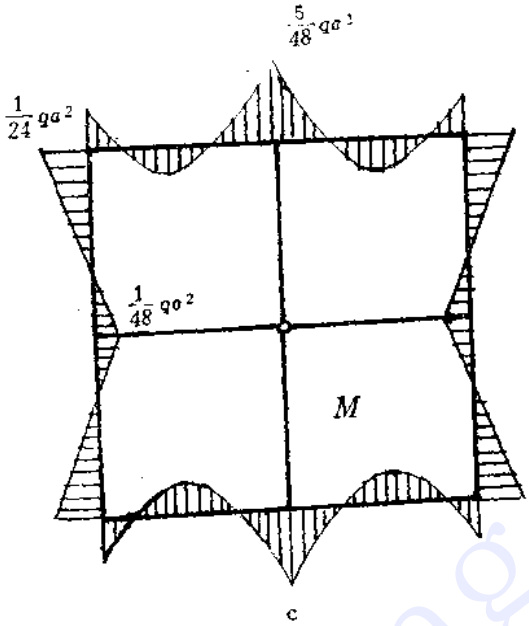



图 12—3

**题 12—4** 用迭代法计算 12—4 所示有侧移刚架。

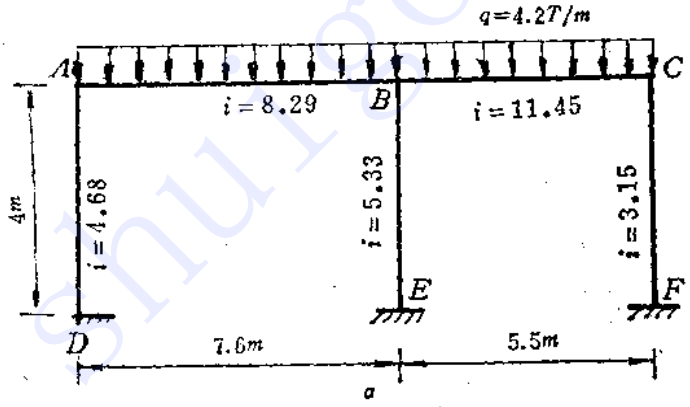



图 12—4

**解。** 求固端弯矩及不平衡弯矩

$$M_{AB}^F = -M_{DA}^F = -\frac{ql^2}{12} = -\frac{4.2\times 7.6^2}{12} = -20.2T-m.$$

$$M_A^F = \sum_A M^F = M_{AB}^F = -20.2T-m$$

$$M_{BC}^F = -M_{CB}^F = -\frac{ql^2}{12} = -\frac{4.2\times 5.5^2}{12} = -10.6T-m$$

$$M_B^F = \Sigma M_B^F = 20.2-10.6 = 9.6T-m$$

$$M_C^F = 10.6T-m$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

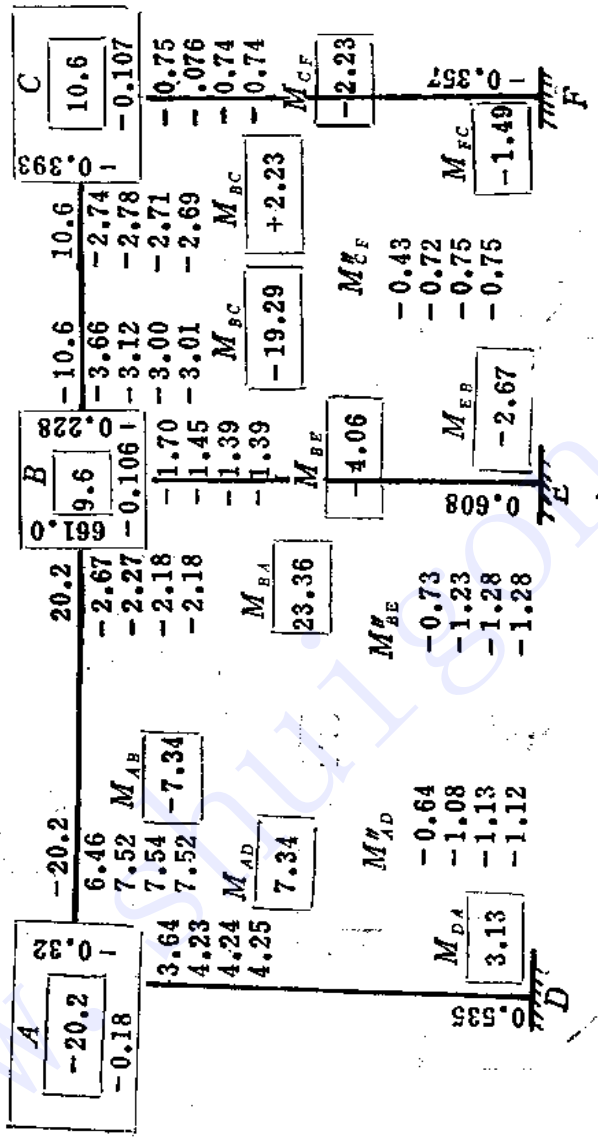
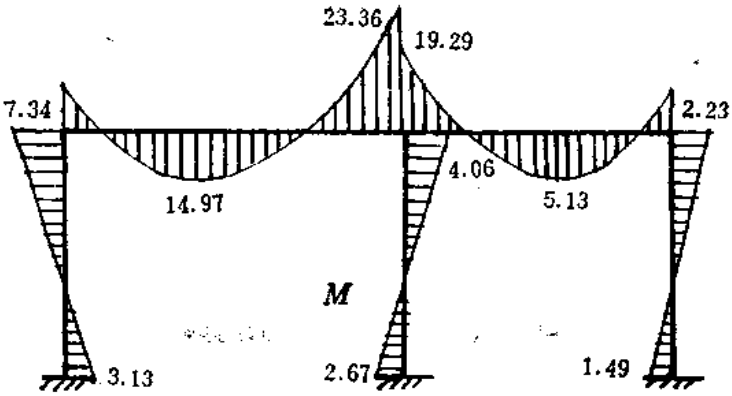



图 12-4

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途!




c

图 12—4

求转角分配系数$\left(\mu' = -\frac{1}{2}\frac{i}{\Sigma i}\right)$

结点 $A$，

$$\mu'_{AB} = -\frac{1}{2}\frac{8.29}{4.68+8.27} = -0.32$$

$$\mu'_{AD} = -\frac{1}{2} = -0.18$$

结点 $B$，

$$\mu'_{BA} = -\frac{1}{2}\frac{8.29}{3.29+11.45+5.33} = -0.166$$

$$\mu'_{BE} = -\frac{1}{2}\frac{5.33}{8.29+11.45+5.33} = -0.106$$

$$\mu'_{BC} = -\frac{1}{2}\frac{11.45}{8.29+11.45+5.33} = -0.228$$

结点 $C$

$$\mu'_{CB} = -\frac{1}{2}\frac{11.45}{11.45+3.15} = -0.395$$

$$\mu'_{CF} = -\frac{1}{2}\frac{3.15}{11.45+3.15} = -0.108$$

求侧移弯矩分配系数，用式$\gamma_{iK} = -\frac{3}{2}\frac{i_{iK}}{\sum_{\gamma} i_{iK}}$ $\gamma$—表示楼层

柱 $AD$，$BE$，$CF$

$$\gamma_{AD} = -\frac{3}{2}\frac{4.68}{4.68+5.33+3.15} = -0.535$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$$\gamma_{BE}=-\frac{3}{2}\cdot\frac{5.33}{4.68+5.33+3.15}=-0.608$$

$$\gamma_{CF}=-\frac{3}{2}\cdot\frac{3.15}{4.68+5.33+3.15}=-0.357$$

校核侧移分配系数，

$$\Sigma\gamma=-0.535-0.608-0.357=-\frac{3}{2}$$

按公式 $M'_{iK}=\mu'_{iK}[M_i^P+\sum_i(M'_{Ki}+M''_{iK})]$ 计算转角弯矩迭代值，

求第一轮转角弯矩迭代值：设 $M'_{Ki}=M''_{iK}=0$

$$M'_{AB}=-0.32(-20.2)=6.46$$
$$M'_{AD}=-0.18(-20.2)=3.64$$
$$M'_{BA}=-0.166[9.6+6.46]=-2.67$$
$$M'_{BC}=-0.228[9.6+6.46]=-3.66$$
$$M'_{BE}=-0.106[9.6+6.46]=-1.70$$
$$M'_{CB}=-0.393[10.6+(-3.66)]=-2.74$$
$$M'_{CF}=-0.107[10.6+(-3.66)]=-0.75$$

求第一轮侧移弯矩迭代值，用公式，

$$M''_{iK}=\gamma_{iK}\Sigma(M'_{iK}+M'_{Ki})\quad(\Sigma M'_{Ki}=0)$$
$$M''_{iK}=\gamma_{iK}(M'_{AD}+M'_{BE}+M'_{CF})$$
$$=\gamma_{iK}(3.64-1.70-0.75)$$
$$=1.2\gamma_{iK}$$

$M_{iK}$——楼层内任意柱的侧移弯矩

各柱侧移弯矩第一轮迭代值为，

$$M''_{AD}=-0.535\times1.2=-0.64$$
$$M''_{BE}=-0.608\times1.2=-0.83$$
$$M''_{CF}=-0.357\times1.2=-0.43$$

第二轮转角弯矩迭代值，

$$M'_{AB}=-0.32[-20.2+(-2.67-0.64)]=7.52$$
$$M'_{AD}=-0.18[-20.2+(-2.67-0.64)]=4.23$$
$$M'_{BA}=-0.166[9.6+(7.52-2.74-0.73)]=-2.27$$
$$M'_{BC}=-0.228[9.6+(7.52-2.74-0.73)]=-3.12$$
$$M'_{BE}=-0.106[9.6+(7.52-2.74-0.73)]=-1.45$$
$$M'_{CB}=-0.393[106+(-3.12-0.42)]=-2.78$$
$$M'_{CF}=0.107[60.6+(-3.12-0.43)]=-0.76$$

第二轮侧移弯矩迭代值，

$$M''_{AD}=-0.535(4.23-1.45-0.76)=-1.08$$
$$M''_{BE}=-0.608(4.23-1.45-0.76)=-1.23$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$$M''_{CK} = -0.357(4.23 - 1.45 - 0.76) = -0.72$$

将第二轮侧移弯矩迭代值代入第三轮转角弯矩迭代式内，得出第三轮迭代值。下边依此类推交替进行，直到第四轮得到较稳定的迭代值时，则停止迭代，求出最终杆端弯矩。各轮所得的迭代值见图 12—4*b*。

求最终杆端弯矩用式 $M_{iK} = M^{\varphi}_{iK} + 2M'_{iK} + M'_{Ki} + M''_{iK}$，则

$$M_{AB} = -20.2 + 2\times 7.52 - 2.18 = -7.34$$

$$M_{AD} = 0 + 2\times 4.25 - 1.12 = 7.34$$

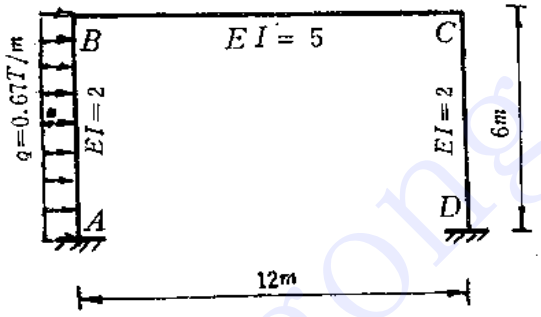
$$M_{BC} = -10.6 + 2\times(-3) - 2.69 = -19.29$$

$$M_{BE} = 0 + 2\times(-1.39) - 1.28 = -4.06$$

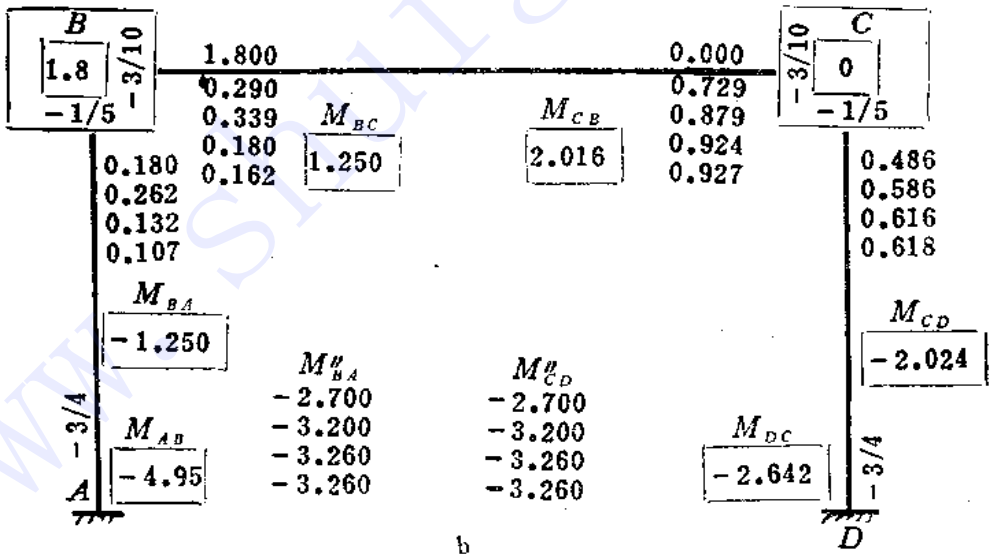
$$M_{BA} = 20.2 + 2\times(-2.18) + 7.52 = 23.36$$

绘出最终弯矩图（图 12—4*c*）。

**题 12—5　用迭代法计算图 12—5*a* 所示的有侧移刚架。**




a




b

**解**：求转角分配系数：

$$i_{AB} = i_{CD} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \qquad i_{BC} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

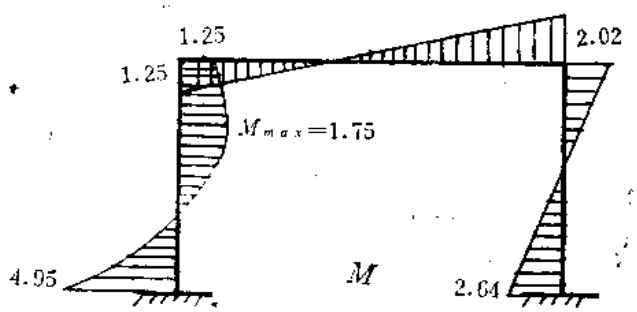



图 12—5

$$\mu'_{BC}=\mu'_{CB}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{1/2+1/3}=-\frac{3}{10}$$

$$\mu'_{BA}=\mu'_{CD}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1/3}{1/2+1/3}=-\frac{1}{5}$$

求侧移分配系数：

$$\gamma_{BA}=\gamma_{CD}=-\frac{3}{2}\cdot\frac{1/3}{1/3+1/3}=-\frac{3}{4}$$

求固端弯矩及不平衡弯矩，楼层剪力及楼层力矩，

$$M^P_{AB}=-M^P_{BA}=\frac{0.6\times6^2}{12}=1.8T-m$$

$$M^P_{BC}=M^P_{CB}=M^P_{CD}=M^P_{DC}=0$$

$M^P_B=1.8$（结点 $B$ 的不平衡力矩）

$M^P_C=0$（结点 $C$ 的不平衡力矩）

$$P_r=\frac{0.6\times6}{2}=1.8\text{（楼层剪力）}$$

$$M_r=\frac{P_r\cdot h_r}{3}=\frac{1.8\times6}{3}=3.6\text{（楼层力矩）}$$

由于刚架只承受水平荷载，则一般情况下侧移弯矩之影响大于角变弯矩的影响，故先计算侧移弯矩（按公式 $M''_{iK}=\gamma_{iK}[M_r+\Sigma(M'_{iK}+M'_{Ki})]$ 计算；

第一轮侧移弯矩迭代值：

$$M''_{BA}=M''_{CD}=-\frac{3}{4}(3.6+0)=-2.7$$

（设 $M'_{iK}=M'_{Ki}=0$）

第一轮角变弯矩迭代值：

按公式 $M'_{iK}=\mu'_{iK}[M^P_i+\Sigma(M'_{Ki}+M''_{iK})]$

有 $$M'_{BA}=-\frac{1}{5}[1.8+(0-2.7)]=0.18$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$$M'_{BC} = -\frac{3}{10}[1.8 + (0 - 2.7)] = 0.27$$

$$M'_{CB} = -\frac{1}{5}[0 + (0.27 - 2.7)] = 0.729$$

$$M'_{CD} = -\frac{1}{5}[0 + (0.27 - 2.7)] = 0.486$$

第二轮侧移弯矩迭代值：

$$M''_{BA} = M''_{CD} = -\frac{3}{4}[3.6 + (0.18 + 0.486)] = -3.20$$

第三轮角变弯矩迭代值：

$$M'_{BA} = -\frac{1}{5}[1.8 + (0.27 - 3.2)] = 0.262$$

$$M'_{BC} = -\frac{3}{10}[1.8 + (0.27 - 3.2)] = 0.339$$

$$M'_{CB} = -\frac{3}{10}[0 + (0.339 - 3.2)] = 0.586$$

$$M'_{CD} = -\frac{1}{5}[0 + (0.339 - 3.2)] = 0.586$$

第三轮侧移弯矩迭代值：

$$M''_{BA} = M''_{CD} = -\frac{3}{4}[3.6 + (0.262 + 0.586)] = -3.26$$

第三轮角变弯矩迭代值：

$$M'_{BA} = -\frac{1}{5}[1.8 + (0.876 - 4.26)] = 0.132$$

$$M'_{BC} = -\frac{3}{10}[1.8 + (0.879 - 3.26)]$$

$$M'_{CB} = -\frac{3}{10}[0 + (0.18 - 3.26)] = 0.924$$

$$M'_{CD} = -\frac{1}{5}[0 + (0.18 - 3.26)] = 0.616$$

第四轮照样进行，以此类推。全部迭代数值见图 12—5*b* 所示。

最终杆端弯矩公式 $M_{iK} = M^F_{iK} + 2M'_{iK} + M'_{Ki} + M''_{iK}$

各杆端弯矩值为：

$$M_{AB} = -1.8 + 0.107 - 3.26 = -4.95$$
$$M_{BA} = 1.8 + 2 \times 0.107 - 3.26 = -1.25$$
$$M_{BC} = 0 + 2 \times 0.162 + 0.927 = 1.25$$
$$M_{CB} = 0 + 2 \times 0.927 + 0.162 = 2.016$$
$$M_{CD} = 0 + 2 \times 0.618 - 3.26 = -2.024$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途!

$$M_{DC} = 0 + 0.618 - 3.26 = -2.642$$

最终 $M$ 图见图 12—5c。

校核：（封闭无铰刚架任意截面的变形是连续的）

相对转角 $\Delta_\varphi = \frac{1}{5}\left(\frac{2.02\times12}{2} - \frac{1.25\times12}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2.02\times6}{2} + \frac{4.95\times6}{2} - \frac{12.5\times6}{2} - \frac{0.6\times6^2}{8}\times6\times\frac{2}{3} - \frac{2.64\times6}{2}\right)$

$= 12.475 - 12.48$

$\doteq 0$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

# 第十三章　用矩阵位移法计算连续梁

**基本概念复习：**

1.单元分析

$$\{F\}^{(e)}=[K]^{(e)}\{\Delta\}^{(e)} \tag{1}$$

式中：$\{F\}^{(e)}$——杆端力列向量；

$[K]^{(e)}$——单元刚度矩阵；

$\{\Delta\}^{(e)}$——杆端位移列向量；

(1) 式由来：

杆端位移：

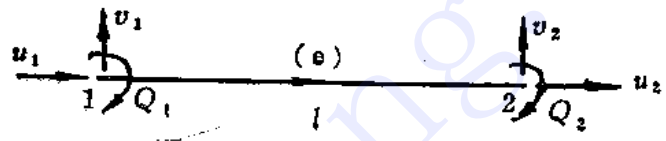



图 1

杆端力：

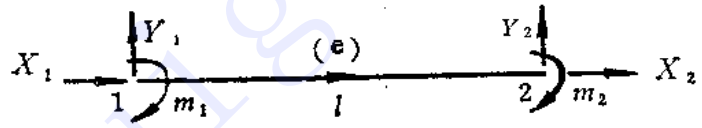



图 2

$$X_1^{(e)}=\frac{EA}{l}u_1^{(e)}+0\cdot v_1^{(e)}+0\cdot\theta_1^{(e)}+\left(-\frac{EA}{l}\right)u_2^{(e)}+0\cdot v_2^{(e)}+0\cdot\theta_2^{(e)}$$

$$Y_1^{(e)}=0\cdot u_1^{(e)}+\frac{12}{l^2}iv_1^{(e)}+\left(-\frac{6i}{l}\right)\theta_1^{(e)}+0\cdot u_2^{(e)}+\left(-\frac{12}{l^2}i\right)v_2^{(e)}+\left(-\frac{6i}{l}\right)\theta_2^{(e)}$$

$$M_1^{(e)}=0\cdot u_1^{(e)}-\frac{6i}{l}v_1^{(e)}+4i\theta_1^{(e)}+0\cdot u_2^{(e)}+\frac{6i}{l}v_2^{(e)}+2i\theta_2^{(e)}$$

$$X_2^{(e)}=-\frac{EA}{l}u_1^{(e)}+0\cdot v_1^{(e)}+0\cdot\theta_1^{(e)}+\frac{EA}{l}u_2^{(e)}+0\cdot v_2^{(e)}+0\cdot\theta_2^{(e)}$$

$$Y_2^{(e)}=0\cdot u_1^{(e)}-\frac{12i}{l^2}v_1^{(e)}+\frac{6i}{l}\theta_1^{(e)}+\frac{EA}{l}u_2^{(e)}+\frac{12}{l}iv_2^{(e)}+\frac{6i}{l}\theta_2^{(e)}$$

$$M_2^{(e)}=0\cdot u_1^{(e)}-\frac{6i}{l_2}v_1^{(e)}+2i\theta_1^{(e)}+0u_2^{(e)}+\frac{6i}{l}v_2^{(e)}+4i\theta_2^{(e)}$$

用矩阵表示：

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ M_1 \\ X_1 \\ Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2i}{l^2} & \frac{-6i}{l} & 0 & \frac{-12i}{l^2} & \frac{-6i}{l} \\ 0 & \frac{-6i}{l} & 4i & 0 & \frac{6i}{l} & 2i \\ \frac{-EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-2i}{l^2} & \frac{6i}{l} & 0 & \frac{12i}{l^2} & \frac{6i}{l} \\ 0 & \frac{-6i}{l} & 20 & 0 & \frac{-6i}{l} & 40 \end{bmatrix}^{(e)} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}^{(e)}$$

简写成：$\{F\}^{(e)}=[K]^{(e)}\{\Delta\}^{(e)}$

2. 整体分析

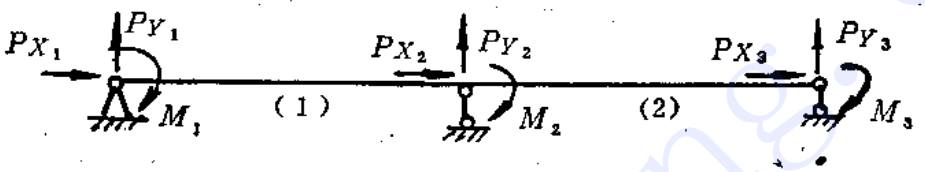



图 3

$$\begin{Bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ M_1 \\ P_{x2} \\ P_{y2} \\ M_2 \\ P_{x3} \\ P_{y3} \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ M_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ M_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} ① + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ X_1 \\ Y_1 \\ M_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} ②$$

即 $\{F\}=\{F\}①+\{F\}②$

换码扩大单刚后：

$$\{F\}①=[K]①\{\Delta\} \qquad \{F\}②=[K]②\{\Delta\}$$

这里总体坐标与局部坐标相同。其中$\{\Delta\}$——总体结点位移列向量。

$$\{F\}=\{F\}①+\{F\}②=([K]①\{\Delta\}+[K]②)\{\Delta\}=[K]\{\Delta\}.$$

即
$$\{F\}=[K]\{\Delta\} \tag{2}$$

式中：$\{F\}$——总体结点力列向量。

$[K]$——总体刚度矩阵$[K]=[K]①+[K]②$

**题 13—1** 用矩阵位移法计算图 13—1$a$ 所示连续梁的 $M$ 图（已知 $I_1:I_2:I_3=2:3:1$）。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

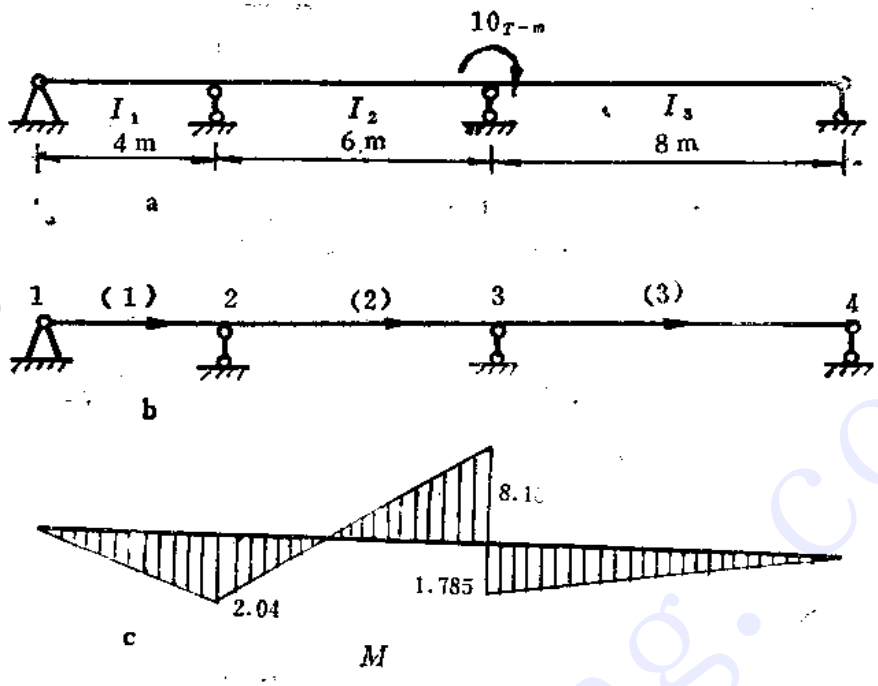



图 13—1

**解**：1）编结点号码与单元号码如图 13—1*b* 所示。

2）求单元刚度矩阵：

单元①

$$[K]^{①}=\begin{pmatrix}4i_1 & 2i_1\\ 2i_1 & 4i_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\times\frac{2}{4} & 2\times\frac{2}{4}\\ 2\times\frac{2}{4} & 4\times\frac{2}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

单元②

$$[K]^{②}=\begin{pmatrix}4i_2 & 2i_2\\ 2i_2 & 4i_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\times 3/6 & 2\times 3/6\\ 2\times 3/6 & 4\times 3/6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

单元③

$$[K]^{③}=\begin{pmatrix}4i_3 & 2i_3\\ 2i_3 & 4i_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\times\frac{1}{8} & 2\times\frac{1}{8}\\ 2\times\frac{1}{8} & 4\times\frac{1}{8}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & 1/4\\ \frac{1}{4} & 1/2\end{pmatrix}$$

3）求总刚：

这里总刚坐标与单元局部坐标相同，无需进行坐标变换。

由于整体结点位移有 4 个，所以扩大单刚为 4×4 阶。这里要特别注意单元杆端号码与整体号码的对应关系。

扩大后的单刚：

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$$[K]^{①'}=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&2&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad [K]^{②'}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&2&1&0\\0&1&2&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$[K]^{③'}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1/2&1/4\\0&0&1/4&1/2\end{pmatrix}$$

集成总刚：（对号入座）：

$$[K]=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&2+2&1&0\\0&1&2+\frac{1}{2}&1/4\\0&0&1/4&1/2\end{pmatrix}$$

4）求位移：

$$\{F\}=[K]\{\Delta\}$$

$$\{F\}=\begin{Bmatrix}0\\0\\10\\0\end{Bmatrix}\qquad \{\Delta\}=\begin{Bmatrix}\theta_1\\\theta_2\\\theta_3\\\theta_4\end{Bmatrix}$$

故有

$$\begin{Bmatrix}0\\0\\10\\0\end{Bmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&4&1&0\\0&1&\frac{5}{2}&1/4\\0&0&1/4&1/2\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\theta_1\\\theta_2\\\theta_3\\\theta_4\end{Bmatrix}$$

解矩阵方程得

$$\begin{Bmatrix}\theta_1\\\theta_2\\\theta_3\\\theta_4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0.68\\-1.36\\4.76\\-2.38\end{Bmatrix}$$

由于计算时只用了刚度的比值，所以这里的计算结果，即所求位移扩大 $EI$ 倍。

5）最终杆端力：

$\{F\}^{(e)}=[K]^{(e)}\{\Delta\}^{(e)}$（对连续梁$\{M\}^{(e)}=[K]^{(e)}\{\theta\}^{(e)}$

单元①

$$\begin{Bmatrix}M_1\\M_2\end{Bmatrix}^{①}=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.68\\-1.36\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\-2.04\end{Bmatrix}$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

单元②

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix}^{②} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1.36 \\ 4.76 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.04 \\ 8.16 \end{Bmatrix}$$

单元③

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix}^{③} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 4.67 \\ -2.38 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.785 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

最终 $M$ 图见图 13—1$c$所示。

**题 13—2** 求图 13—2$a$ 所示连续梁的 $M$ 图。

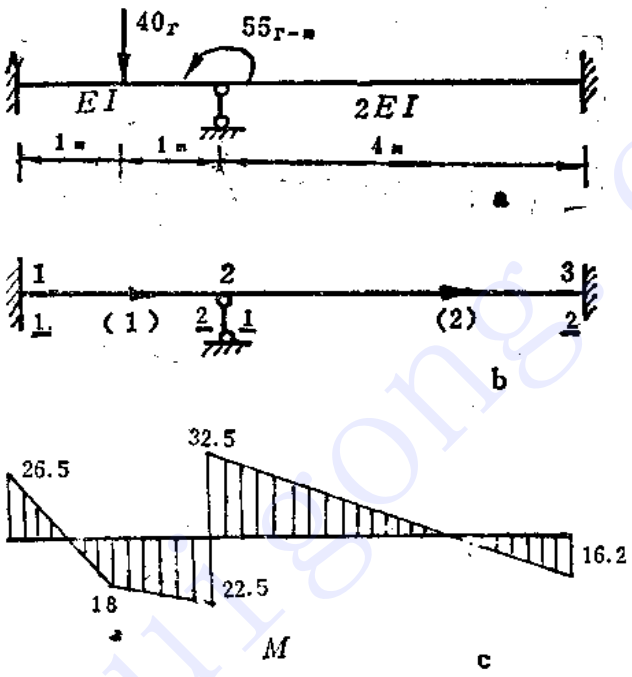



图 13—2

**解**：编总体结点号码与单元号码（见图 13—2$b$ 所示）。

1）单元固端弯矩：

单元①

$$\begin{Bmatrix} M_{01} \\ M_{02} \end{Bmatrix}^{①} = \begin{Bmatrix} -Pl/8 \\ Pl/8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10 \\ 10 \end{Bmatrix}$$

单元②

$$\begin{Bmatrix} M_{01} \\ M_{02} \end{Bmatrix}^{②} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

2）等效节点荷载：

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -(-10) \\ -10+55 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 65 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

其中－55是原结点荷载，不存在变号问题。

3）单元刚度矩阵：

$$[K]^{①}=\begin{pmatrix}4\times\frac{EI}{2} & 2\times\frac{EI}{2}\\ 2\times\frac{EI}{2} & 4\times\frac{EI}{2}\end{pmatrix}=EI\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$[K]^{②}=\begin{pmatrix}4\times\frac{2EI}{4} & 2\times\frac{2EI}{4}\\ 2\times\frac{2EI}{4} & 4\times\frac{2EI}{4}\end{pmatrix}=EI\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

4）总刚：（求法同题13—1）

$$[K]=[K]^{①}+[K]^{②}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}EI$$

5）列矩阵方程：

$$\{P\}=[K]\{\Delta\}$$

$$\begin{Bmatrix}10\\ -65\\ 0\end{Bmatrix}=EI\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3\end{Bmatrix}$$

6）引入支承条件（划0置1）：

$$\begin{Bmatrix}0\\ -65\\ 0\end{Bmatrix}=EI\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3\end{Bmatrix}$$

7）解矩阵方程得

$$\theta_1=0,\ \theta_3=0,\ \theta_2=-\frac{65}{4EI}$$

8）最终杆端弯矩：

$$\{M\}^{(e)}=[K]^{(e)}\{\theta\}^{(e)}+\{M_0\}^{(e)}$$

单元①

$$\begin{Bmatrix}M_1\\ M_2\end{Bmatrix}^{①}=EI\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}0\\ -\frac{65}{4EI}\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}-10\\ 10\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-\frac{105}{4}\\ -\frac{90}{4}\end{Bmatrix}$$

单元②

$$\begin{Bmatrix}M_1\\ M_2\end{Bmatrix}^{②}=EI\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}-\frac{65}{4EI}\\ 0\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-\frac{130}{4}\\ -\frac{65}{4}\end{Bmatrix}$$

最终弯矩图见图13—2c。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

**题 13—3** 计算图 13—3*a* 所示的连续梁（$EI$ = 常数）。

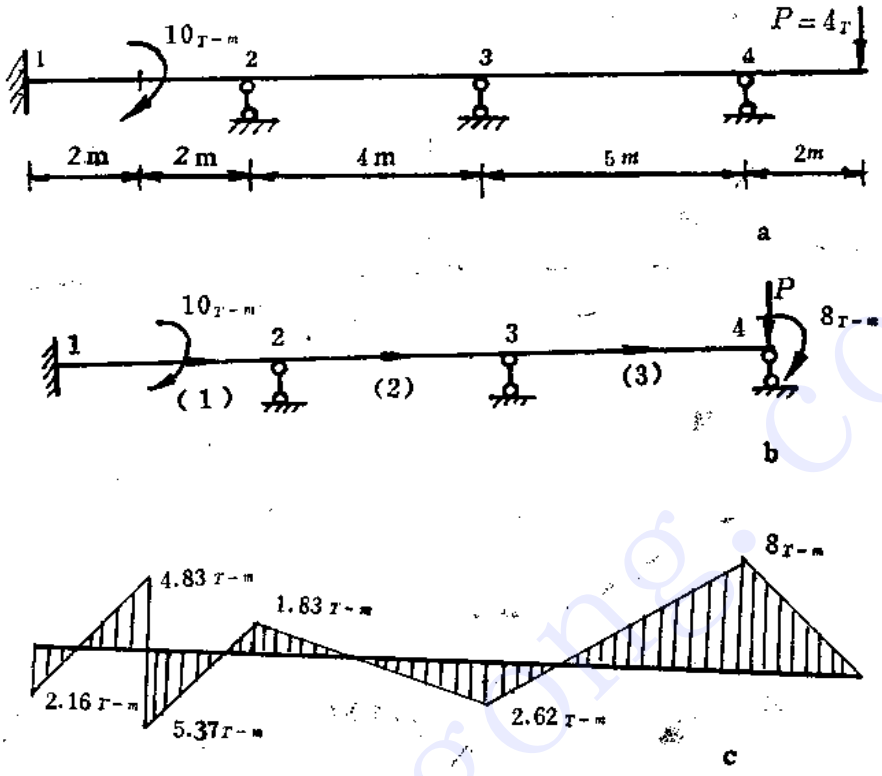



图 13—3

**解**：1）编写结点号码与单元号码，并将 $P$ 向结点 4 简化（如图 13—3*b* 所示）

2）单元固端力矩：

单元①
$$\begin{Bmatrix} M_{01} \\ M_{02} \end{Bmatrix}^{①} = \begin{Bmatrix} 2.5 \\ 2.5 \end{Bmatrix}$$

单元②
$$\begin{Bmatrix} M_{01} \\ M_{02} \end{Bmatrix}^{②} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

单元③
$$\begin{Bmatrix} M_{01} \\ M_{02} \end{Bmatrix}^{③} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

3）等效结点力：

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -M_{01}^{①} \\ -(M_{02}^{①} + M_{01}^{②}) \\ -(M_{02}^{②} + M_{01}^{③}) \\ M_{02}^{③} \leftarrow 8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2.5 \\ -2.5 \\ 0 \\ -8 \end{Bmatrix}$$

由于各结点只有转角位移，没有水平和竖向线位移，所以结点力只考虑结点弯矩。

4）求单元刚阵：

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$$[K]^{①}=[K]^{②}=\begin{pmatrix}4\times EI/4 & 2\times\dfrac{EI}{4}\\ 2\times EI/4 & 4\times\dfrac{EI}{4}\end{pmatrix}=EI\begin{pmatrix}1 & 1/2\\ 1/2 & 1\end{pmatrix}$$

$$[K]^{③}=\begin{pmatrix}4\times\dfrac{EI}{5} & 2\times\dfrac{EI}{5}\\ 2\times\dfrac{EI}{5} & 4\times\dfrac{EI}{5}\end{pmatrix}=EI\begin{pmatrix}4/5 & 2/5\\ 2/5 & 4/5\end{pmatrix}$$

5）集成总刚（将单刚换码扩大后，对号入座）：

$$[K]=\begin{pmatrix}1 & \dfrac{1}{2} & 0 & 0\\ \dfrac{1}{2} & 2 & \dfrac{1}{2} & 0\\ 0 & 1/2 & 9/5 & 2/5\\ 0 & 0 & 2/5 & 4/5\end{pmatrix}EI$$

6）形成矩阵方程：

$$\begin{Bmatrix}-2.5\\ -2.5\\ 0\\ 8\end{Bmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1/2 & 0 & 0\\ 1/2 & 2 & 1/2 & 0\\ 0 & 1/2 & 9/5 & 2/5\\ 0 & 0 & 2/5 & 4/5\end{pmatrix}EI\begin{Bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3\\ \theta_4\end{Bmatrix}$$

7）引入支承条件（划0置1）：

由已知条件知 $\theta_1=0$

$$\begin{Bmatrix}0\\ -2.5\\ 0\\ 8\end{Bmatrix}=EI\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1/2 & 0\\ 0 & 1/2 & 9/5 & 2/5\\ 0 & 0 & 2/5 & 4/5\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3\\ \theta_4\end{Bmatrix}$$

8）解方程，求位移得：

$$\begin{Bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3\\ \theta_4\end{Bmatrix}=\frac{1}{EI}\begin{Bmatrix}0\\ -0.678\\ -2.28\\ 11.14\end{Bmatrix}$$

6）最终杆端弯矩：

由公式 $\{M\}^{(e)}=[K]^{(e)}\{\theta\}^{(e)}+\{M_0\}^{(e)}$（$\{M_0\}^{(e)}$—固端弯矩）得

单元①：
$$\begin{Bmatrix}M_1\\ M^2\end{Bmatrix}^{①}=EI\begin{bmatrix}1 & 1/2\\ 1/2 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{EI}\begin{Bmatrix}0\\ -0.678\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}2.5\\ 2.5\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}2.16\\ 1.82\end{Bmatrix}$$

单元②：
$$\begin{Bmatrix}M_1\\ M_2\end{Bmatrix}^{②}=EI\begin{bmatrix}1 & 1/2\\ 1/2 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{EI}\begin{Bmatrix}-0.678\\ -2.28\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-1.82\\ -2.62\end{Bmatrix}$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

单元③

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M^2 \end{Bmatrix}^{③} = EI\begin{bmatrix} 4/5 & 2/5 \\ 2/5 & 4/5 \end{bmatrix}\frac{1}{EI}\begin{Bmatrix} -2.28 \\ 11.14 \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 2.63 \\ 8.00 \end{Bmatrix}$$

10）绘最终弯矩图：

最终弯矩图见图 13—3*c* 所示。

**题 13—4** 求图 13—4*a* 所示连续梁由于支座沉降所引起的内力（$EI$ = 常数）。

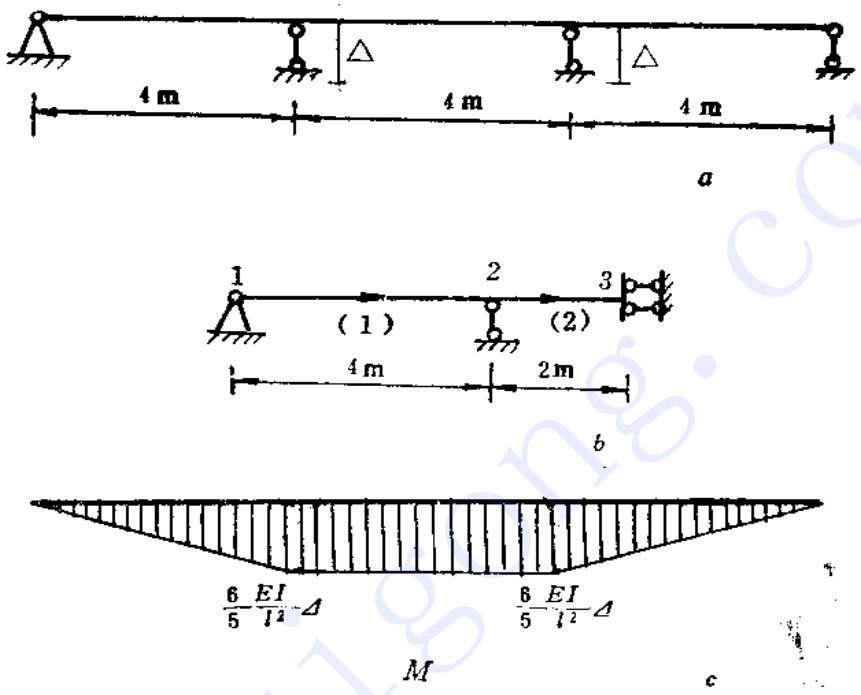



图 13—4

**解**：由于结构对称，支座沉降亦对称，故取其等代结构（见图 13—4*b*）计算。

1）对等代结构进行结点编号（见图 13—4*b*）。

2）求固端弯矩：

单元①

$$\begin{Bmatrix} M_{01} \\ M_{02} \end{Bmatrix}^{①} = \begin{Bmatrix} -6\dfrac{EI}{l^2}\Delta \\ -6\dfrac{EI}{l^2}\Delta \end{Bmatrix}$$

单元②

$$\begin{Bmatrix} M_{01} \\ M_{02} \end{Bmatrix}^{②} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

3）等效节点力：

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\begin{matrix} 6\dfrac{EI}{l^2}\Delta \\ \dfrac{6EI\Delta}{l^2} \\ 0 \end{matrix}$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

4）求单刚：

$$[K]① = \begin{bmatrix} 4\times\frac{EI}{4} & 2\times\frac{EI}{4} \\ 2\times\frac{EI}{4} & 4\times\frac{EI}{4} \end{bmatrix} = EI\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K]② = \begin{bmatrix} \frac{EI}{2} & -\frac{EI}{2} \\ -\frac{EI}{2} & \frac{EI}{2} \end{bmatrix} = EI\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

5）集成总刚：

$$[K] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1/2 & 3/2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} EI$$

6）写出矩阵方程：

$$\begin{Bmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{EI}{l^2}\Delta = EI\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

7）引入边界条件：

$$\begin{Bmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{\Delta}{l_2} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

8）解矩阵方程，求位移：

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 24/5 \\ 12/5 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{\Delta}{l^2}$$

9）最终杆端弯矩：

单元①

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix}^{①} = EI\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 24/5 \\ 12/5 \end{Bmatrix} \frac{\Delta}{l^2} + EI\begin{Bmatrix} -6 \\ -6 \end{Bmatrix} \frac{\Delta}{l^2} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -6/5 \end{Bmatrix} \frac{EI\Delta}{l^2}$$

单元②

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix}^{②} = EI \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 12/5 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{\Delta}{l_2} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = EI \begin{Bmatrix} 6/5 \\ -6/5 \end{Bmatrix} \frac{\Delta}{l^2}$$

10）绘最终 $M$ 图：最终 $M$ 图如图13—4$c$ 所示。

**题 13—5** 用矩阵位移法求图 13—5$a$ 所示连续梁由于支座位移引起的内力（$EI$ = 常数）。

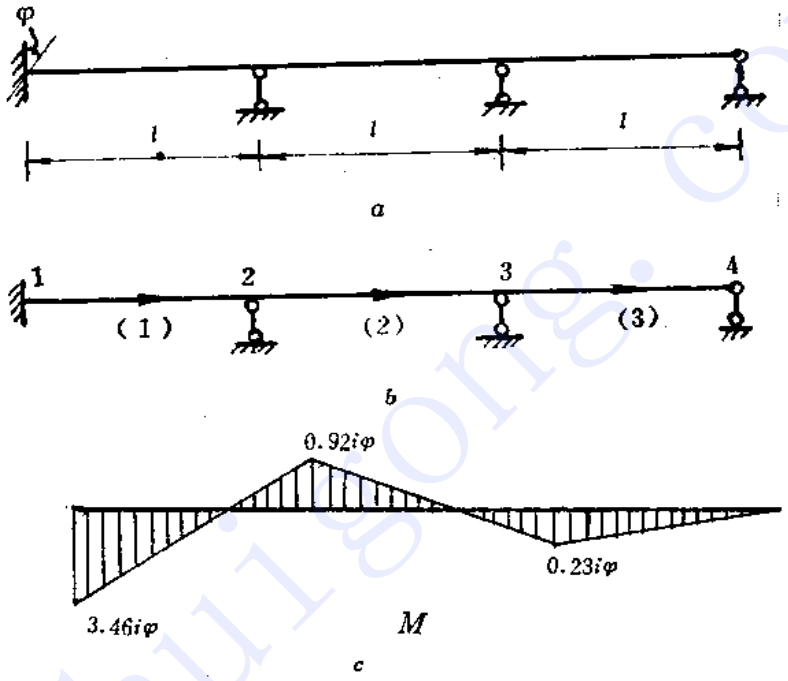



图 13—5

**解**：1）编写结点号码与单元号码如图 13—5$b$ 所示。

2）固端弯矩：

单元①

$$\begin{Bmatrix} M_{01} \\ M_{02} \end{Bmatrix}^{①} = \begin{Bmatrix} 4\frac{EI}{l}\varphi \\ 2\frac{EI}{l}\varphi \end{Bmatrix}$$

单元②、③

$$\begin{Bmatrix} M_{01} \\ M_{02} \end{Bmatrix}^{②} = \begin{Bmatrix} M_{01} \\ M_{02} \end{Bmatrix}^{③} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

3）等效结点荷载：

$$\{P\} = \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{matrix} \begin{matrix} = \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} -4i\varphi \\ -2i\varphi \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \begin{matrix} = \\ \\ \\ \end{matrix} i\varphi \begin{matrix} -4 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \quad \left(i = \frac{EI}{l}\right)$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

4）单元刚度矩阵：

$$[K]^{①}=[K]^{②}=[K]^{③}=\begin{pmatrix}4\frac{EI}{l} & 2\frac{EI}{l}\\ 2\frac{EI}{l} & 4\frac{EI}{l}\end{pmatrix}=i\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$$

5）扩大单刚集成总刚：

$$[K]=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 4+4 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 4+4 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 4\end{pmatrix}i=\begin{pmatrix}4 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 8 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 8 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 4\end{pmatrix}i$$

6）写出矩阵方程并引入支承条件：

$$i\varphi\begin{pmatrix}0\\ -2\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=i\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 8 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 8 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3\\ \theta_4\end{pmatrix}$$

2）解方程求位移得：

$$\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3\\ \theta_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -7/26\\ 1/13\\ -1/26\end{pmatrix}\varphi$$

8）求单元杆端弯矩：

$$\{M\}^{(e)}=[K]^{(e)}\{\theta\}^{(e)}+M_0\}^{(e)}$$

单元①

$$\begin{Bmatrix}M_1\\ M_2\end{Bmatrix}=i\begin{bmatrix}4 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}\varphi\begin{Bmatrix}0\\ -7/26\end{Bmatrix}+i\varphi\begin{Bmatrix}4\\ 2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}3.46\\ 0.92\end{Bmatrix}i\varphi$$

单元②

$$\begin{Bmatrix}M_1\\ M_2\end{Bmatrix}^{②}=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}i\varphi\begin{Bmatrix}-7/26\\ 1/13\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0.92\\ -0.23\end{Bmatrix}i\varphi$$

单元③

$$\begin{Bmatrix}M_1\\ M_2\end{Bmatrix}^{③}=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}i\varphi\begin{Bmatrix}1/13\\ -\frac{1}{26}\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0.23\\ 0\end{Bmatrix}i\varphi$$

9）绘最终弯矩图：最终弯矩图见图 13—5c所示。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

# 第十四章　结构的稳定计算

**符号说明：**

$P_{cr}$——临界荷载

$\Phi$——总势能

$u$——应变能

$V$——外力势能

$C$——弹性刚度

**题 14—1.** 用静力法和能量法分别求出图 14—1$a$ 所示结构的临界荷载。

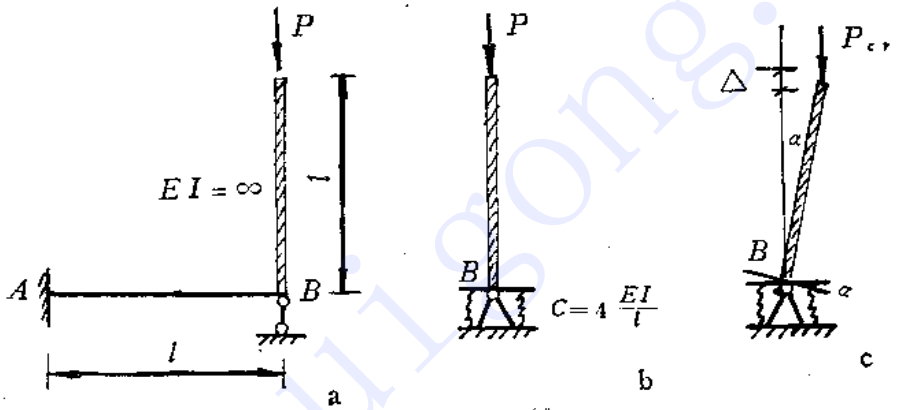



图　14—1

**解：**

1）静力法

当 $B$ 点发生单位转角时，在 $B$ 处产生的转动反力矩为 $\frac{4EI}{l}$。这相当于在 $B$ 处有一弹性支座如图 14—1$b$ 所示，而弹性支座的转动弹性刚度为 $C=4\frac{EI}{l}$。

$C$——单位位移时产生的反力。

失稳状态如图 14—1$c$ 所示。

$$\Sigma M_B=0 \qquad P\cdot\alpha l=C\cdot\alpha$$

$$P_{cr}=\frac{C}{l}=\frac{4EI}{l^2}$$

2）能量法

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$$\Phi = u + V$$

$$u = \frac{1}{2} C\alpha \cdot \alpha = \frac{1}{2} C\alpha^2$$

$$V = -\Delta P$$

而 $\Delta = l(1-\cos\alpha)$，$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \cdots\cdots$

$$\Delta = l\left(1 - 1 + \frac{\alpha^2}{2!}\right) = \frac{1}{2}\alpha^2 l \quad (\text{舍去高阶微量})$$

故 $$\phi = \frac{1}{2} C\alpha^2 - \frac{1}{2}\alpha^2 lP$$

由势能驻值原理

$$\frac{\partial \phi}{\partial \alpha} = 0 \qquad C\alpha - l\alpha P = 0$$

故 $$P_{cr} = \frac{C}{l} = \frac{4EI}{l^2}$$

与静力法所得结果相同。

**题 14—2** 分别用静力法和能量法求图 14—2a 所示结构的临界荷载。

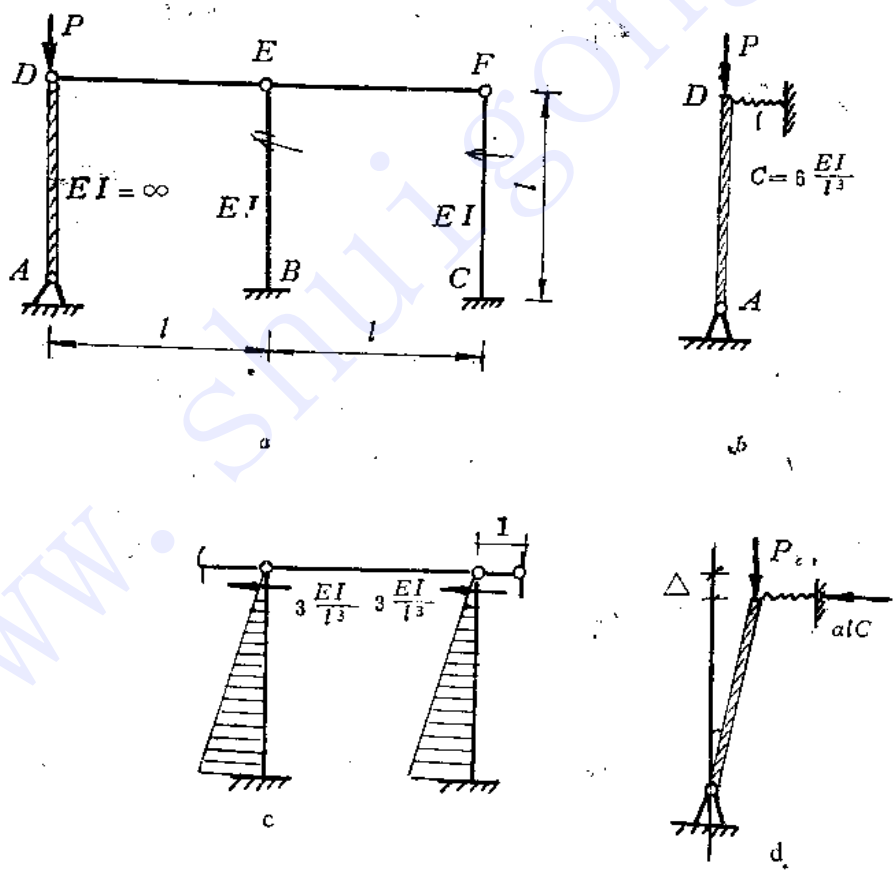



图 14—2

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

**解**：将 $EFBC$ 对 $AD$ 杆的作用代以弹性支承，这样图 14—2*a* 就可以简化为图 14—2*b* 所示的形式。弹性刚度可由图 14—2*c* 求出：

$$C=\frac{3EI}{l^3}+\frac{3EI}{l^3}=\frac{6EI}{l^3}$$

失稳状态如图 14—2*d* 所示。

1）静力法

$$\Sigma M_A=0 \qquad P\cdot al-alCl=0$$

$$C=\frac{6EI}{l^3} \qquad P_{cr}=Cl=\frac{6EI}{l^2}$$

2）能量法 $\phi=u+V$

$$u=\frac{1}{2}al\cdot C\cdot al=\frac{1}{2}a^2l^2C$$

$$V=-\Delta P=-(1-\cos\alpha)lP=-\frac{1}{2}a^2lP$$

所以 $$\phi=\frac{1}{2}a^2l^2C-\frac{1}{2}a^2lP$$

根据势能驻值原理

$$\frac{\partial\phi}{a\partial}=0 \qquad al^2C-alP=0$$

$$P_{cr}=l\cdot C=\frac{6EI}{l^2}$$

**题 14—3** 用静力法和能量法分别计算图 14—3*a* 所示体系的临界荷载。

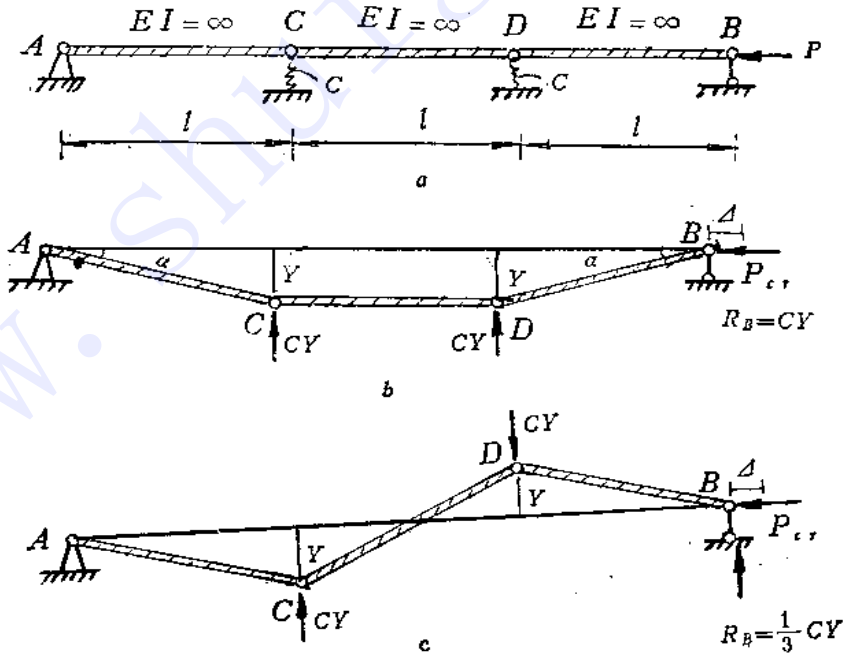



图 14—3

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

**解：因为结构是对称的，所以失稳形式有两种可能。**

1. 正对称（如图 14—3*b* 所示）

1）静力法

$$\Sigma M_A = 0 \qquad cyl + 2cyl - R_B 3l = 0$$

$$R_B = cy$$

$$\Sigma M_D = 0 \qquad Py - cyl = 0$$

$$P = cl$$

2）能量法

$$u = \frac{1}{2} cyy + \frac{1}{2} cy \cdot y = cy^2$$

$$v = -\Delta P = -\left[\frac{1}{2} la^2 + \frac{1}{2} la^2\right] P$$

$$= -\left[la^2\right] P$$

$$= -l \cdot \left(\frac{y}{l}\right)^2 P$$

故 $\phi = u + v = cy^2 - \frac{y^2}{l} P$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \qquad 2cy - \frac{2y}{l} P = 0$$

$$P = cl$$

2. 反对称（如图 14—3*c* 所示）

1）静力法

$$\Sigma M_A = 0 \qquad R_B 3l + cyl - cy \cdot 2l = 0$$

$$R_B = \frac{1}{3} cy$$

$$\Sigma M_D = 0 \qquad Py - \frac{1}{3} cyl = 0$$

$$P = \frac{1}{3} cl$$

2）能量法

$$u = 2 \times \frac{1}{2} cy \cdot y = cy^2$$

$$v = -\Delta P = -\left[\frac{1}{2} l\left(\frac{y}{l}\right)^2 + \frac{1}{2} l\left(\frac{y}{l}\right)^2 + \frac{1}{2} l\left(\frac{2y}{l}\right)^2\right] P = -\frac{3y^2}{l} P$$

$$\phi = u + v = cy^2 - \frac{3y^2}{l} P$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

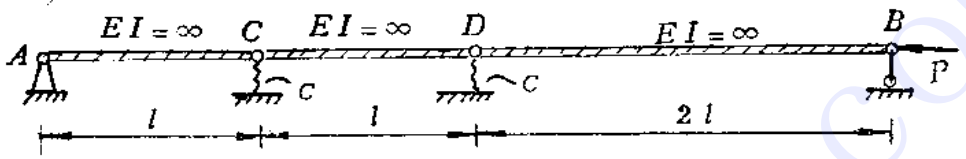
$$\frac{\partial \phi}{\partial y}=0 \qquad 2cy-6y\frac{P}{l}=0$$

$$P=\frac{1}{3}cl$$

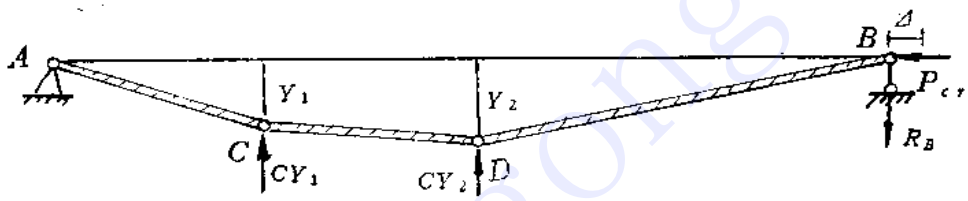
比较两种失稳状态得

$$P_{cr}=\frac{1}{3}cl$$

**题 14—4** 分别用静力法、能量法求图 14—4a 所示结构的临界荷载。




a




b

图 14—4

**解**：失稳状态如图 14—4b 所示。

1）静力法

$$\Sigma M_A=0 \qquad R_B 4l-cy_2 2l-cy_1 l=0$$

$$R_B=\frac{c(y_1+2y_2)}{4}$$

$$\Sigma M_D=0 \qquad Py_2-R_B 2l=0$$

$$P\cdot y_2-\frac{1}{2}cl(y_1+2y_2)=0 \qquad \cdots\cdots(1)$$

$$\Sigma M_C=0 \qquad Py_1+cy_2 l-\frac{1}{4}c(y_1+2y_2)3l=0$$

$$\left(P-\frac{3}{4}cl\right)y_1+\left(cl-\frac{3}{2}cl\right)y_2=0 \qquad \cdots\cdots(2)$$

联立（1）、（2）得

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$$\begin{cases} cly_1 - 2(P-cl)y_2 = 0 \\ \left(P - \frac{3}{4}cl\right)y_1 - \frac{1}{2}cly_2 = 0 \end{cases}$$

有非零解的充分必要条件

$$\begin{vmatrix} cl & -2(P-cl) \\ P-\frac{3}{4}cl & -\frac{1}{2}cl \end{vmatrix} = 0$$

即 $$-\frac{1}{2}c^2l^2 + 2(P-cl)\left(P-\frac{3}{4}cl\right) = 0$$

$$2P^2 - \frac{7}{2}clP + c^2l^2 = 0$$

解得 $$P_1 = \frac{7-\sqrt{17}}{8}cl \qquad P_2 = \frac{7+\sqrt{17}}{8}cl$$

2) 能量法

$$u = \frac{1}{2}cy_1^2 + \frac{1}{2}cy_2^2$$

$$v = -\Delta P = -\left[\frac{l}{2}\left(\frac{y_1}{l}\right)^2 + \frac{l}{2}\left(\frac{y_2-y_1}{l}\right)^2 + \frac{1}{2}2l\left(\frac{y_2}{2l}\right)^2\right]P$$

$$\phi = u + V = \frac{1}{2}cy_1^2 + \frac{1}{2}cy_2^2 - \left[\frac{l}{2}\left(\frac{y_1}{l}\right)^2 + \frac{l}{2}\left(\frac{y_2-y_1}{l}\right)^2 + \frac{1}{2}2l\left(\frac{y_2}{2l}\right)^2\right]P$$

由势能驻值原理

$$\frac{\partial\phi}{\partial y_1} = 0 \qquad y_2P + y_1(cl-2P) = 0$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y_2} = 0 \qquad y_2\left(cl-\frac{3}{2}P\right) + y_1P = 0$$

有非零解的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} P & cl-\frac{3}{2}P \\ cl-2P & P \end{vmatrix} = 0$$

即 $$P^2 - \left(cl-2P\right)\left(cl-\frac{3}{2}P\right) = 0$$

$$2P^2 - \frac{7}{2}clP + c^2l^2 = 0$$

解得 $$P_1 = \frac{7-\sqrt{17}}{8}cl \qquad P_2 = \frac{7+\sqrt{17}}{8}cl$$

故 $$P_{cr} = \frac{7-\sqrt{17}}{8}cl$$

**题 14—5** 分别用静力法和能量法求出图 14—5a 所示体系的临界荷载。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

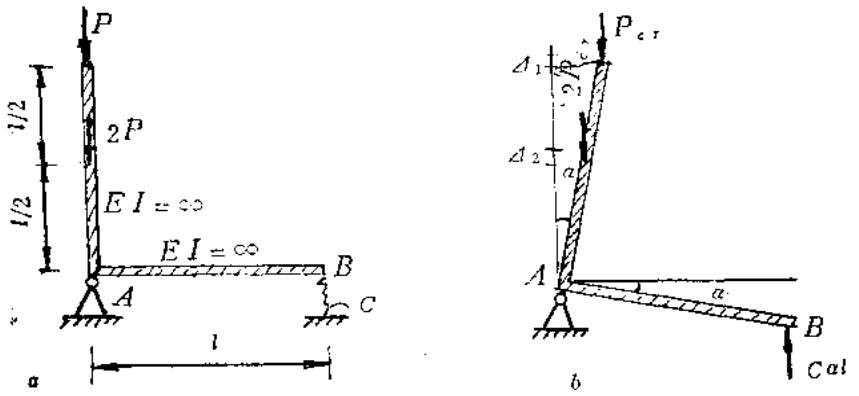



图 14—5

**解**：失稳状态如图 14—5*b* 所示。

1) 静力法

$$\Sigma M_A = 0 \qquad Pal + 2P\frac{l}{2}a - cla \cdot l = 0$$

$$2Pal - cal^2 = 0$$

$$P_{cr} = \frac{cl}{2}$$

2) 能量法

$$u = \frac{1}{2}cal \cdot al$$

$$V = -\Delta_1 P - \Delta_2 \cdot 2P$$

$$= -\frac{1}{2}la^2P - \frac{1}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot a^2 \cdot 2P$$

$$\phi = u + V$$

$$= \frac{1}{2}ca^2l^2 - \frac{1}{2}a^2lP - \frac{1}{2}a^2lP$$

$$\frac{\delta\phi}{\delta a} = 0 \qquad cal^2 - 2alP = 0$$

$$P_{cr} = \frac{cl}{2}$$

**题 14—6** 分别用静力法和初参数法求图 14—6*a* 所示体系的临界荷载。

**解**：将 *CD* 杆对 *AB* 杆的作用代以弹性支承，这样图 14—6*a* 的结构就化为图 14—6*b* 的形式。弹性转动刚度可以由图 14—6*c* 求得：

$$C = \frac{3EI}{1.5l} + \frac{3EI}{1.5l} = \frac{4EI}{l}$$

1) 静力法

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

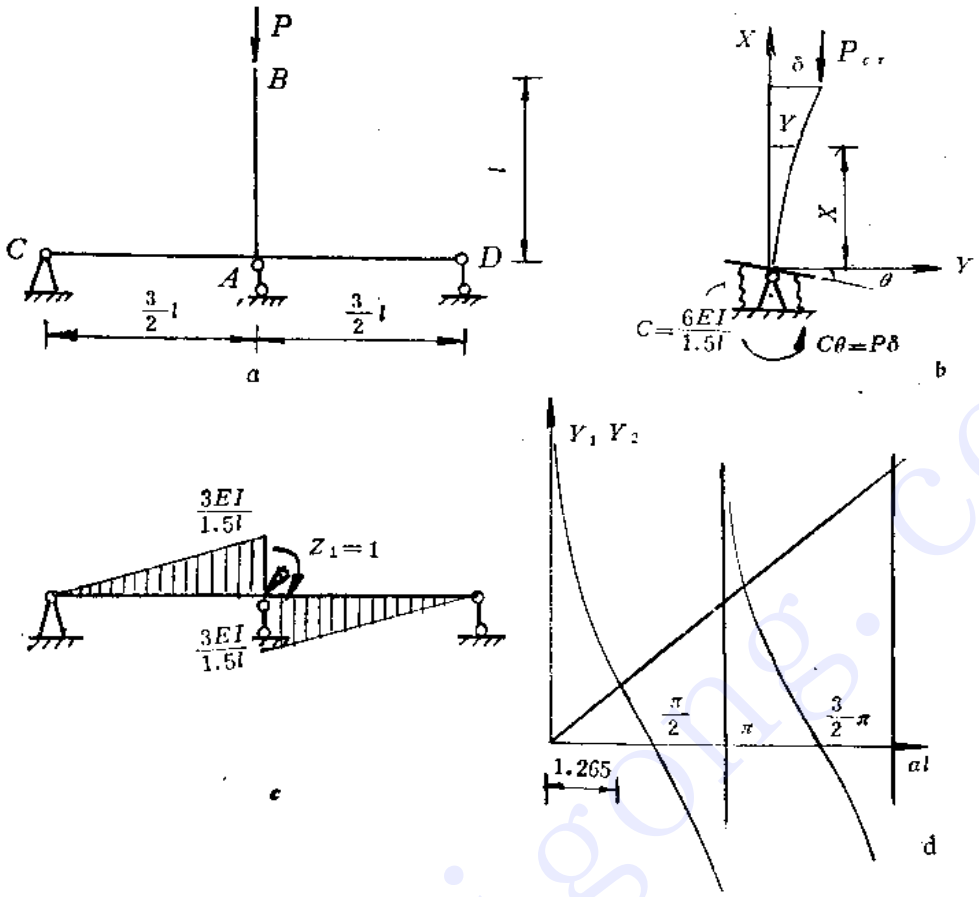



图 14—6

$$M=-[P(\delta-y)]$$

而 $$EIy''=-M$$

所以 $$EIy''=P(\delta-y)$$

$$EIy''+Py=P\delta$$

令 $$\alpha^2=\frac{P}{EI}$$

则 $$y''+\alpha^2y=\frac{P}{EI}\delta$$

通解为 $$y=A\cos\alpha x+B\sin\alpha x+\delta$$

$$y'=-A\alpha\sin\alpha x+B\alpha\cos\alpha x$$

其中：$A$、$B$ 为待定系数。

边界条件：

当 $x=0$ 时，$y=0$ $y'=\theta=\frac{P\delta}{c}$

$x=l$ 时，$y=\delta$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

引入边界条件（将边界条件代入（1）、（2）），得

$$A+\delta=0$$

$$A\cos\alpha l+B\sin\alpha l+\delta=\delta$$

$$B\alpha=\frac{P\delta}{c}$$

有非零解的充分必要条件为 $A$、$B$、$\delta$ 的系数行列式为零，即

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \cos\alpha l & \sin\alpha l & 0 \\ 0 & \alpha & -\frac{P}{C} \end{vmatrix}=0$$

$$-\frac{P}{C}\sin\alpha l+\alpha\cos\alpha l=0$$

$$\operatorname{tg}\alpha l=\frac{\alpha c}{P}$$

得超越方程

$$\operatorname{ctg}\alpha l=\frac{1}{4}\alpha l$$

用图解法（如图 14—6$d$ 所示）解此超越方程得：

$$\alpha l_{min}=1.265$$

$$P_{cr}=(\alpha l)^2\frac{EI}{l^2}$$

$$=1.6\frac{EI}{l^2}$$

2）初参数法

计算公式：

$$y=y_0+y_0'=\frac{\sin\alpha x}{\alpha}+\frac{M_0}{EI}\cdot\frac{1-\cos\alpha x}{\alpha^2}+\frac{Q_0}{EI}\cdot\frac{\alpha x-\sin\alpha x}{\alpha^3}$$

$$y'=y_0'\cos\alpha x+\frac{M_0\sin\alpha x}{EI\alpha}+\frac{Q_0}{EI}\cdot\frac{1-\cos\alpha x}{\alpha^2}$$

$$M=-y_0'EI\alpha\sin\alpha x+M_0\cos\alpha x+Q_0\frac{\sin\alpha x}{\alpha}$$

$$Q=Q_0=\text{常数}$$

其中：$y_0$、$M_0$、$Q_0$、$y_0'$ 分别为原点处的位移、弯矩、剪力和转角，$\alpha^2=\frac{P}{EI}$。

由题知当 $x=l$ 时

$$M_l=0$$

即

$$M_l=-y_0'EI\alpha\sin\alpha l+M_0\cos\alpha l+Q_0\frac{\sin\alpha l}{\alpha}=0$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

当 $x=0$ 时

$$y_0' = \frac{M_0}{C} \qquad Q_0 = 0$$

所以 $$M_l = -\frac{M_0}{C} EI\alpha \sin\alpha l + M_0 \cos\alpha l + 0$$

$$-\sin\alpha l \cdot \frac{EI\alpha}{C} + \cos\alpha l = 0$$

整理得 $$\operatorname{ctg}\alpha l = \frac{1}{4}\alpha l$$

计算得 $$\alpha l = 1.265$$

$$P = \alpha^2 EI$$

$$P = (\alpha l)^2 \frac{EI}{l^2}$$

$$P_{cr} = 1.6\frac{EI}{l^2}$$

**题 14—7** 用静力法求图 14—7*a* 所示体系的临界荷载。

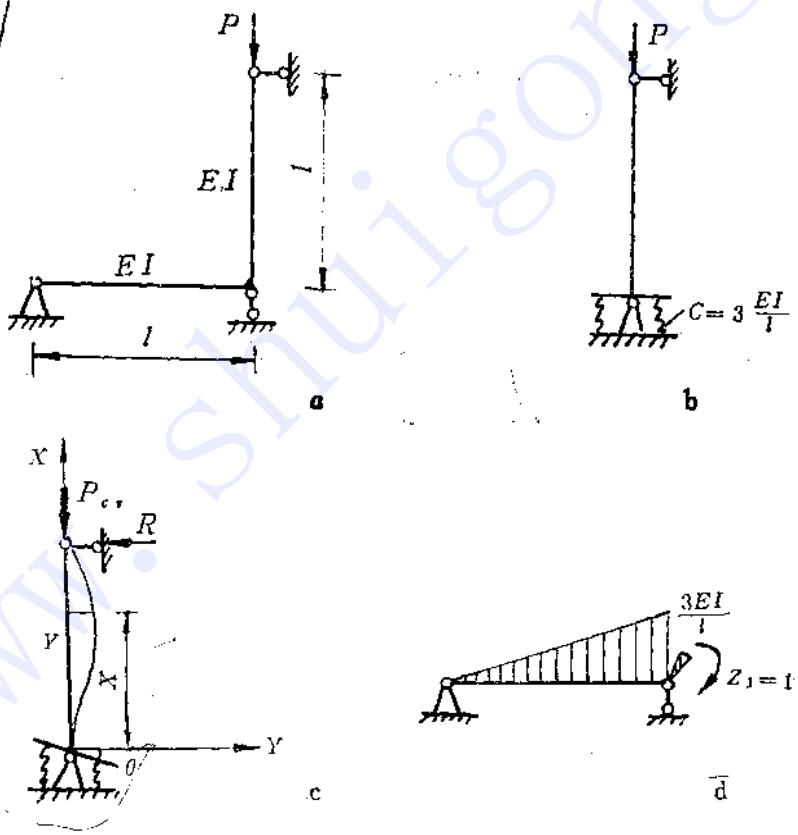



图 14—7

**解**：将图 14—7*a* 所示的结构简化为图 14—7*b* 所示的形式。由图 14—7*d* 得到转动

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

刚度为

$$C=\frac{3EI}{l}$$

失稳状态如图 14—7c 所示。

$$M=P\cdot y+R(l-x)$$

由

$$EIy''=-M$$

得

$$EIy''=-Py-R(l-x)$$

$$y''+\frac{P}{EI}y=-\frac{R}{EI}(l-x)$$

令

$$\alpha^2=\frac{R}{EI}$$

则

$$y''+\alpha^2y=-\frac{R}{EI}(l-x)$$

通解

$$y=A\cos\alpha x+B\sin\alpha x-\frac{R}{P}(l-x)$$

而

$$y'=-A\alpha\sin\alpha x+B\alpha\cos\alpha x+\frac{R}{P}$$

边界条件：

当 $x=0$ 时，　$y=0$　　$y'=-\frac{Rl}{C}$

当 $x=l$ 时，　$y=0$

引入边界条件

$$A-\frac{R}{P}l=0$$

$$B\alpha+\left(\frac{1}{P}+\frac{l}{C}\right)R=0$$

$$A\cos\alpha l+B\sin\alpha l=0$$

有非零解的充分必要条件

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -l/P \\ 0 & \alpha & \frac{1}{P}+\frac{l}{C} \\ \cos\alpha l & \sin\alpha l & 0 \end{vmatrix}$$

得超越方程：

$$\frac{\alpha l}{P}\cos\alpha l-\sin\alpha l\left(\frac{1}{P}+\frac{l}{C}\right)=0$$

整理得

$$\operatorname{tg}\alpha l=\frac{3\alpha l}{3+(\alpha l)^2}$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

试算　　$lc = 3.73$

故　　$P_{cr} = (\alpha l)^2 \frac{EI}{l^2}$

$$P_{cr} = 13.9 \frac{EI}{l^2}$$

**题 14—8**　分别用静力法和初参数法求图 14—8*a* 所示结构的临界荷载。

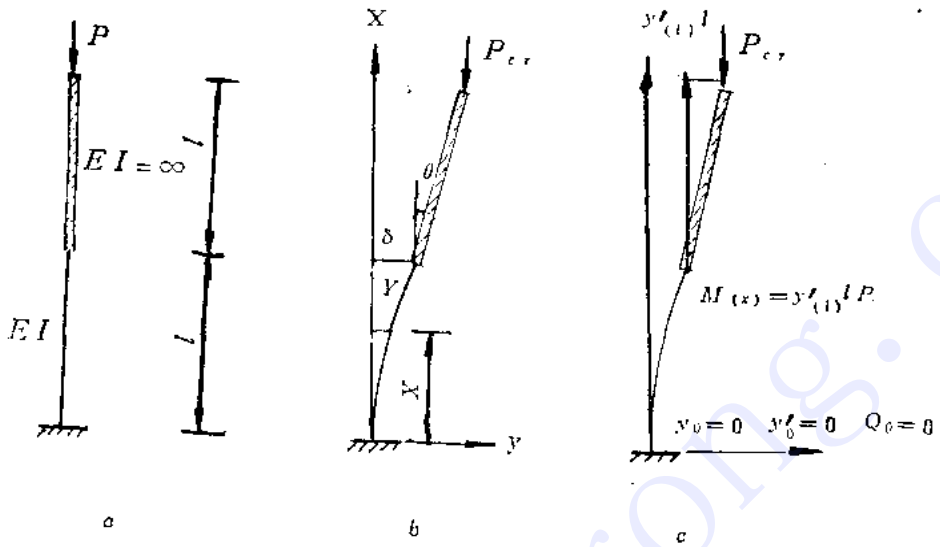



图　14—8

**解**：失稳状态如图 14—8*b* 所示。

1）静力法

$$M = -P(\theta l + \delta - y) \qquad (x \leqslant l)$$

$$EIy'' = M$$

$$EIy'' = P(\theta l + \delta - y)$$

令　$\alpha^2 = \frac{P}{EI}$

则　$y'' + \alpha^2 y = \frac{P}{EI}(\theta l + \delta)$

通解：$y = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x + (\theta l + \delta)$

而　$y' = -A\alpha\sin\alpha x + B\alpha\cos\alpha x$

边界条件：

当 $x = 0$ 时　　$y = 0$　　$y' = 0$

当 $x = l$ 时　　$y = \delta$　　$y' = \theta$

引入边界条件

$$A + \theta l + \delta = 0$$

$$B\alpha = 0$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$$A\cos\alpha l + B\sin\alpha l + \theta l + \delta = \delta$$

$$-A\alpha\sin\alpha l + B\alpha\cos\alpha l = \theta$$

$\because \alpha \neq 0 \qquad \therefore B = 0$

则有

$$A + \theta l + \delta = 0$$

$$A\cos\alpha l + \theta l = 0$$

$$-A\alpha\sin\alpha l - \theta = 0$$

有非零解的充分必要条件

$$\begin{vmatrix} 1 & l & 1 \\ \cos\alpha l & l & 0 \\ -\alpha\sin\alpha l & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

得超越方程

$$-\cos\alpha l + \alpha l\sin\alpha l = 0$$

即

$$\mathrm{tg}\alpha l = \frac{1}{\alpha l}$$

试算得

$$\alpha l = 0.86$$

$$P_{cr} = (\alpha l)^2 \frac{EI}{l^2} = 0.74\frac{EI}{l^2}$$

2）初参数法（如图 14—8c 所示）

由 $y' = y_0'\cos\alpha x + \frac{M_0}{EI}\cdot\frac{\sin\alpha x}{\alpha} + \frac{Q_0}{EI}\cdot\frac{1-\cos\alpha x}{\alpha}$

得 $y_{(\theta)}' = \frac{M_0}{EI}\cdot\frac{\sin\alpha l}{\alpha}$

由 $M = -y_0'EI\alpha\sin\alpha x + M_0\cos\alpha x + \frac{Q_0}{\alpha}\sin\alpha x$

得 $M_{(\theta)} = M_0\cos\alpha l$

又因 $M_{(\theta)} = y'_{(\theta)}lP$

所以 $M_0\cos\alpha l = \frac{M_0\sin\alpha l}{EI\alpha}lP$

即 $\mathrm{tg}\alpha l = \frac{1}{\alpha l}$

试算 $\alpha l = 0.86$

故 $P_{cr} = 0.74\frac{EI}{l^2}$

**题 14—9** 用静力法求图 14—9a 所示结械的临界荷载.

**解**：如图 14—9b 所示的失稳状态：

$$M = Py \qquad (x \leqslant l)$$

$$EIy'' = -M = -Py$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

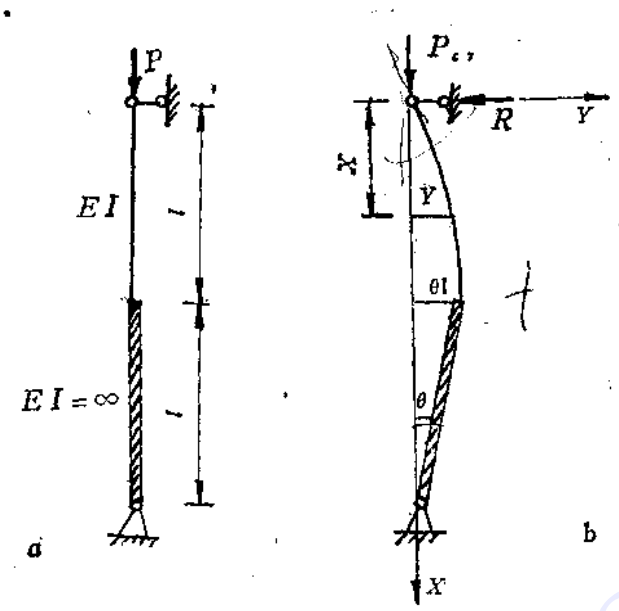



图 14—9

$$EIy'' + Py = 0$$

令 $$\alpha^2 = \frac{P}{EI}$$

$$y'' + \alpha^2 y = 0$$

通解 $$y = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x$$

而 $$y' = -A\alpha\sin\alpha x + B\alpha\cos\alpha x$$

边界条件：

当 $x = 0$ 时， $y = 0$

当 $x = l$ 时， $y' = -\theta$ $y_l = \theta l$

引入边界条件

$$A = 0$$

$$A\cos\alpha l + B\sin\alpha l = \theta l$$

$$-A\alpha\sin\alpha l + B\alpha\cos\alpha l = -\theta$$

有非零解的充分必要条件

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha l & -l \\ \alpha\cos\alpha l & 1 \end{vmatrix} = 0$$

得超越方程

试算

$$\operatorname{tg}\alpha l = -\alpha l$$

$$\alpha l = 2.03$$

$$P_{cr} = (\alpha l)^2 \frac{EI}{l^2}$$