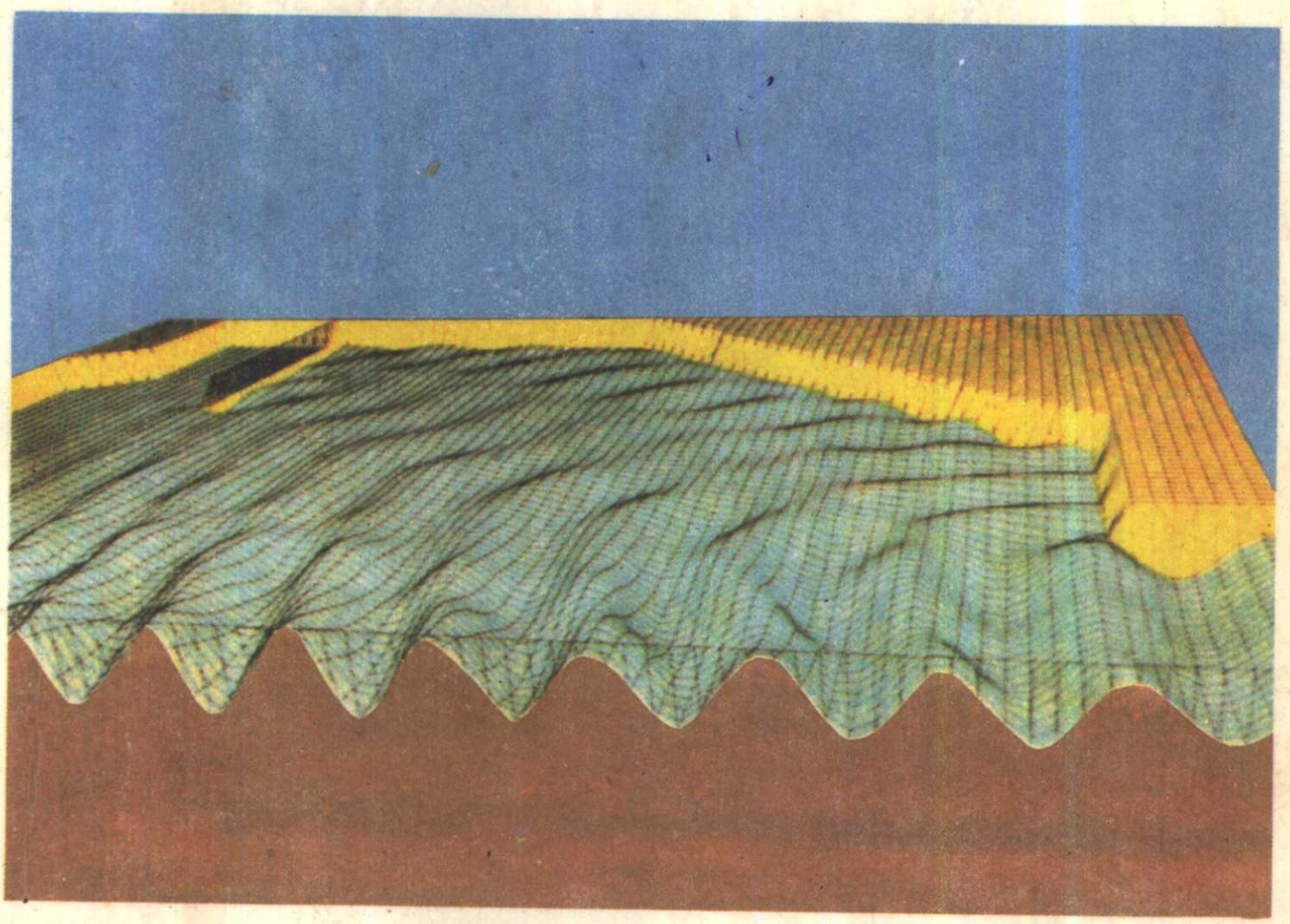
地信网论坛
BBS.3S001.COM

水动力泥沙数值模拟

曹祖德　王运洪　著



天津大学出版社

水动力泥沙数值模拟

曹祖德　王运洪　著

天津大学出版社

内 容 提 要

本书系统地阐述了水动力、泥沙数值模拟的基本原理和基本方法，并分别论述了一维、二维、三维水动力和各种泥沙运动的数值模拟格式，最后通过几个实例说明应用情况，并指出数值模拟的发展趋势。

本书共分十章，第一章至第三章为基本原理与基本方法，第四章至第七章为水动力、泥沙运动应用的有效格式，第八章是应用实例，第九章、第十章是复合模型及水动力、泥沙数值模拟的发展趋势。

本书可作为有关专业大学生和研究生的教学参考书，也可供科学研究和工程技术人员参考。

（津）新登字 012 号

水动力泥沙数值模拟

曹祖德　王运洪著

*

天津大学出版社出版

（天津大学内）

天津大学印刷厂印刷

新华书店天津发行所发行

*

开本：850×1168 毫米 1/32　印张：11.125　字数：286 千字

1994 年 11 月第一版　1994 年 11 月第一次印刷

印数：1—1000

ISBN 7-5618-0707-4

TV·25　定价：10 元

序

水动力、泥沙数值模拟是本世纪中叶崛起的一门新兴模拟技术。随着电子计算机技术的飞跃发展和近似计算方法的不断改进，数值模拟技术也获得巨大发展和广泛应用，成为水利、海洋和环境工程中重要模拟手段之一。

近年来，笔者结合一些实际工程，广泛地开展了水动力、泥沙数值模拟的研究及应用。本书是这些研究成果的汇集。为了系统起见，本书还摘录了一些有关论文和著作，汇集归纳，以供应用与参考。

本书共分十章。前三章是有关水动力、泥沙数值模拟的基本原理与方法；第四章至第六章分别论述了一维、二维、三维水动力数值模拟；第七章为泥沙运动数值模拟；第八章为应用实例；第九章、第十章分别介绍了复合模型及水动力、泥沙数值模拟的发展趋势。

本书对水动力、泥沙数值模拟应用技术方面作了较系统的论述，可作为有关专业大学生和研究生的教学参考书，也可供科学研究和工程技术人员参考。

作　者

1993 年 12 月

目　录

第一章　绪论 …… (1)
参考文献 …… (7)
第二章　水动力、泥沙运动数值模拟的理论基础 …… (8)
2.1　水动力基本方程 …… (8)
2.2　泥沙运动基本方程 …… (12)
2.2.1　悬移质输移扩散方程 …… (12)
2.2.2　浮泥运动基本方程 …… (13)
2.3　数值计算 …… (14)
2.3.1　有限差分法 …… (14)
2.3.2　线性代数方程组的数值解 …… (22)
参考文献 …… (34)
第三章　数值模拟分析 …… (35)
3.1　差分方程的守恒性 …… (35)
3.2　差分方程的相容性 …… (37)
3.3　定解条件 …… (39)
3.4　数值模拟中的判别依据 …… (41)
3.4.1　误差分析 …… (41)
3.4.2　稳定性分析 …… (43)
3.4.3　收敛性分析 …… (54)
3.4.4　效率分析和综合评价 …… (56)
参考文献 …… (58)
第四章　明渠缓变非恒定流一维数值模拟 …… (59)
4.1　引言 …… (59)
4.2　单支明渠一维非恒定流的数值模拟 …… (61)

4.2.1 蛙跳格式 …… (61)
4.2.2 Lax 格式 …… (62)
4.2.3 迎风格式 …… (63)
4.2.4 Dufort－Frenkel 蛙跳格式 …… (64)
4.2.5 Lax－Wendroff 格式 …… (64)
4.2.6 Preissmann (Sogreah) 格式 …… (69)
4.2.7 Zhu－Cao 格式 …… (78)
4.2.8 Cao 格式 …… (85)
4.3 河网非恒定流的数值模拟 …… (92)
4.3.1 枝叉河网的数值模拟 …… (92)
4.3.2 环形河网的数值模拟 …… (103)
参考文献 …… (109)
第五章 二维水动力数值模拟 …… (111)
5.1 引言 …… (111)
5.2 平面二维水动力数值模拟 …… (111)
5.2.1 Leendertse 法 …… (113)
5.2.2 移步双向交替显、隐式交错法 …… (119)
5.2.3 分步法 …… (122)
5.2.4 准分析法 …… (137)
5.2.5 三角元法 …… (140)
5.2.6 边界处理 …… (146)
5.2.7 变步长网格 …… (154)
5.2.8 拟合坐标 …… (159)
5.3 垂向二维水动力数值模拟 …… (165)
参考文献 …… (172)
第六章 三维水动力数值模拟 …… (174)
6.1 引言 …… (174)
6.2 垂向分层二维法 …… (175)
6.3 破开算子法 …… (188)

6.4 伸缩坐标变换法 …… (199)
6.5 动水压力校正法 …… (201)
6.6 二～三维数值模拟的连接 …… (210)
参考文献 …… (212)
第七章 水动力作用下泥沙运动数值模拟 …… (213)
7.1 泥沙起动 …… (216)
7.1.1 过去成果及简要讨论 …… (216)
7.1.2 波浪、水流共同作用下底砂的起动 …… (221)
7.1.3 实验研究 …… (228)
7.1.4 实验成果的数据处理及分析 …… (234)
7.2 悬沙运移 …… (236)
7.2.1 基本方程 …… (236)
7.2.2 平面二维波浪、潮流作用下的悬沙运移 …… (241)
7.2.3 三维波浪、潮流作用下的悬沙运移 …… (247)
7.3 底沙推移 …… (256)
7.3.1 波浪作用下的推移质输沙 …… (256)
7.3.2 潮流、波浪作用下的推移质输沙 …… (259)
7.4 浮泥流 …… (267)
7.4.1 浮泥流的特性 …… (267)
7.4.2 浮泥流的基本运动方程 …… (271)
7.5 海底地形变化及冲淤量计算 …… (276)
参考文献 …… (278)
第八章 数值模拟应用 …… (282)
8.1 波浪掀沙、潮流输沙的数值模拟 …… (282)
8.2 疏浚弃土运移的数值模拟 …… (290)
8.3 横越航槽三维水流的数值模拟 …… (293)
8.4 油膜飘移、扩散的数值模拟 …… (295)
8.5 湖泊、水库湖库流的数植模拟 …… (305)
参考文献 …… (325)
第九章 复合模型 …… (328)

9.1 概述 …… (328)
9.2 复合模拟的种类 …… (329)
9.2.1 耦合运转型 …… (329)
9.2.2 综合模拟型 …… (334)
9.2.3 混合计算型 …… (337)
9.3 评价与展望 …… (338)
9.4 运用复合模型的关键问题 …… (339)
参考文献 …… (341)
第十章 水动力、泥沙数值模拟的发展趋势 …… (343)
10.1 多功能全过程数值模拟系统 …… (343)
10.2 复合模型 …… (344)
10.3 数值模拟的仿真及大屏幕显示 …… (344)

第一章 绪 论

数值模拟是一门综合性的模拟技术，它是采用数学模型来模拟某种物理现象，并通过电子计算机用数值计算法进行近似求解，藉以复演自然演变过程的总称。水动力、泥沙数值模拟是70年代末才兴起的先进模拟技术，它是以水动力学和泥沙动力学为理论基础，并结合具体工程的一门新型实用科学。

进行水动力、泥沙数值模拟时，除了要对模拟对象的物理现象和运动机理有深刻的了解外，还应该有较全面的数学分析和数值计算的基础；另外，还要有较丰富的工程实践经验。一个水动力、泥沙数值模拟的成败与否，往往不完全由数学模型和数值近似本身所决定，有时，还常由边界条件、初始条件以及选用参数等因素的处理是否合适所控制，而在处理这些因素时，至今还无成熟的整套经验可循，绝大多数情况下，要凭研究者的经验来处理，因而增加了数值模拟的难度，这也正是数值模拟技术至今还不能为大多数人所掌握的原因之一。

描述自然现象演变过程时，深刻而全面的工具之一就是微分方程。水动力、泥沙数值模拟就是以微分方程为理论基础，并通过微分方程的离散，变成代数方程，最后采用电子计算机进行近似求解。离散微分方程常用两种方法，一种是有限元法，另一种是有限差分法(简称差分法)。这两种方法在精度上没有多大差别，但差分法的概念明显，算法简便，编程容易，因此，在工程界中广为应用。

在海洋工程、水利工程和环境工程中，为了复演和预测某一物理现象，目前常采用两种模拟手段，一种是水力比尺模型（物理模型），另一种是数值模拟（数学模型）。

物理模型是最早使用的一种模型，历史悠久，从 1885 年 Reynolds 创建 Mensey 河口模型算起，至今已有百年以上的历史。由于物理模型形象直观，流态逼真，因此在工程界中应用较广。

数值模拟只是在电子计算机得到广泛应用后才兴起的，因此只有近 30 多年的历史。随着大容量、高速度、多功能电子计算机的发展和现代近似计算方法的进步，数值模拟也获得了高速度发展与应用。

目前，在水利、海洋、环境工程中，数值模拟和物理模型已同时成为两种重要的模拟手段。

1. 数值模拟的特点

数值模拟实质上是采用数值近似计算方法来模拟研究对象的自然现象和动力地貌演变过程。

水动力、泥沙数值模拟的理论基础是水动力学、泥沙动力学和数值计算方法。而在水动力学和泥沙动力学中，实际自然现象又都是非线性的，描述这些现象的微分方程也是非线性的，因此，对这些微分方程很难求得解析解，一般只能求得近似解或进行数值模拟。在求解这些非线性微分方程时，许多问题（如稳定性、收敛性、误差估计等）至今尚无合适的理论分析，在数值模拟中，一般只能以线性理论为基础，参考一定的经验，结合一定的分析，边试验边修改；在试验和修改过程中，还要有丰富的经验和一定的技巧，并且以现场资料为依据，最后才能得出可靠的解答。因此，水动力、泥沙数值模拟技术与其说是一门综合性科学，不如说是一门艺术性的实用技巧更为合适。

通常人们认为数值模拟仅是一种模拟手段，只能复演一些已知现象，不能作为一种研究新手段。事实上，数值模拟不仅可以复演自然界中各种已知现象和过程，还能发现一些以前没有被发现的新现象及进行预测和预报。如 Campbell 和 Mueller（1968）通过数值模拟发现了亚音速斜坡引起的分离现象；后来，他们在风洞实验中，也证实了这种现象。又如，近年来我们在数值模拟中

发现了水流以小角度穿越航道时的水流偏转和流速加大的现象，这种情况与后来水池和物理模型试验所获得的结果相一致。根据上述一些数值模拟和物理模型模拟可知，不能把数值模拟单纯理解为只是一种近似计算，而应该作为一种实验或研究及预测方法来考虑。

数值模拟与物理模型相比较，各有其优缺点。

数值模拟的优点是：

（1）实验费用少。数值模拟的费用通常比物理模型的费用要少；而且，物理模型的费用还有逐渐提高的趋势，而数值模拟的费用却因计算机价格和运行费用的降低而有减少的趋势。

（2）实验速度快、实验周期短。研究人员可以在一天内进行几个方案的模拟计算，有时还可在几台高档微机上同时进行几组方案的试验；但同样的工作量在物理模型中却要费几倍、几十倍的时间。

（3）可以模拟多种因素相互作用的复杂物理过程。如可以模拟波浪、水（潮）流、风、柯氏力等多种因素共同作用下多种泥沙运动形态及地形演变的复杂过程。

（4）不占用大片模型实验场地。

（5）可以完全控制流体的物理性质（如密度、容重、粘度、含沙量等），也不存在试验探头对水流扰动的影响。

（6）不存在模型比尺的影响。

（7）模型建成后，长期存盘，随时调用，修改方案也很容易。

数值模拟的缺点是：

（1）无法模拟微分方程不能描绘的物理现象。

（2）不能模拟湍流（小尺度紊动）和局部现象（如拐角涡流、奇点等）。

（3）模拟结果不很直观，不能生动而形象地反映水动力现象（如流场、泥沙运动、地形演变过程等）。但目前已有了很大的改进。

物理模型则恰好和数值模拟相反，数值模拟所具有的优点，正是物理模型的缺点；而数值模拟存在的缺点，恰好是物理模型的优点。因此，物理模型和数值模拟作为两种不同的模拟手段，目前在水力、海洋、环境工程中同时得到了快速发展和应用，任何一方想完全取代另一方都是不可能的，两者只有互相补充，互相验证，取长补短，共同提高，才是正确的方法。最近发展的复合模拟就是吸收了这两种模拟技术的优点而使其有机结合的一种新兴模拟技术。

2. 数值模拟工作的基本步骤

与物理模型相类似，数值模拟按其工作过程也可分为四个步骤，内容如下：

（1）建立数学模型和编制源程序

该阶段的主要工作是从所要模拟的物理对象来建立或选择合适的微分方程，并根据模拟域边界条件选择合适的网格，进而按一定的格式离散微分方程，得出代数方程和采用合适的数值方法求解代数方程，并编制电子计算机能识别的源程序来求解此代数方程。

在求解离散后代数方程的近似解时，必须使时间步长 Δt 及空间步长 Δs 趋近于零时离散方程的解 $f_{离}$ 逼近于微分方程的解析解 $f_{解}$，即

$$\lim_{\substack{\Delta t\to 0\\ \Delta s\to 0}} f_{离}=f_{解}$$

此外还要分析近似解的收敛性、稳定性与误差程度。这些都与离散格式、近似计算方法密切相关，有时还与选用的微分方程的形式有关。

（2）调试源程序

将第一阶段所编出的源程序送入电子计算机，并对各种可能的边界条件进行运转，进一步修改程序错误，直到全部通过、运转正常为止，这是第二阶段的主要工作。

为了节省工作量，在调试源程序时，计算域不必太大，也不要太复杂。通常在二维时取矩形域，x向取10个节点，y向取10个节点，底部为等深即可。至于边界条件可选取有代表性的几种组合，如在y向可取两个边界为固定边界（无水流出入），在x向取两个边界为开边界（如在开边界处分别给以水位—流量、流量—水位、水位—水位、流量—流量四种边界条件），并按恒定流和不恒定流两种类型进行调试，直到结果全部达到理想为止。

（3）模型验证

本阶段的任务，是调整模型中有关参数（如糙率、紊动动量掺混系数、滤波系统等），使模型有良好的稳定性和收敛性，并与现场资料有良好的吻合。

通常可将原型观测现场资料分成两组，在具体工作中，第一步将已调好的源程序，赋以研究水域的第一组水深和边界条件，并调整有关参数和边界值，使模型输出结果与第一组现场实测资料一致，其误差在允许范围内；第二步，将已验证的程序，赋以第二组资料的边界条件，并检验与第二组实测资料是否相符，如相符，则可认为本模型已全部验证完毕。

在这阶段中，最大的困难是如何决定边界条件。因为在数值模拟中，计算域通常取得较大，而现场提供的边界实测值往往又很少，有时甚至没有，在这种情况下，如何确定边界条件，需根据实际情况和一定经验来处理。

（4）正式方案试验

正式方案是在模型验证通过的基础上进行的。在这个阶段中基本上不存在复杂的技巧问题，只要对各方案进行试验，并根据工程需要，提交大量的模型试验结果及分析对比资料，以确定各工程方案的优劣，为工程单位提供可靠的科学基础数据。这阶段要输出精确、优美、容易使人看懂的表格、曲线和图形。因此，需要编制良好的绘图程序和数据输出格式，并绘制出大量的图表。

以上简单地介绍了数值模拟的工作过程。尽管数值模拟的发

展历史较短，但由于它有许多优点，因此近年来，水动力、泥沙数值模拟发展极快，与物理模型同时成为工程中经常采用的重要模拟手段。

3. 数值模拟的发展方向

从近年国内外进行的数值模拟进展分析，数值模拟今后将向以下三个方面来发展。

（1）建立数值模拟与物理模型相结合的复合模拟

数值模拟与物理模型是目前工程中最常用的两种模拟手段，有其各自的模拟方法和特点，作为一种研究工具和方法，各有其独立的科学体系，均得到了巨大的发展。但由于这两种手段都有一定的优缺点，而这些优缺点又有互补性，即数值模拟的许多缺点恰好是物理模型的优点；而物理模型的大多缺点又正好是数值模拟的优点。因此，70 年代以来，出现了一种新的模拟技术——复合模拟，它是吸收了数值模拟和物理模型各自的优点，将两者结合在一起的一种新兴模拟技术。它的出现，标志着人类在水动力、泥沙模拟技术方面的重大进展。从目前已有的工程实例来看，复合模拟已显示出它特有的无比优越性和强大的生命力。

（2）发展多因素全过程的综合数值模拟系统

水动力、泥沙数值模拟是极其复杂的，牵涉到各种动力因素和复杂的泥沙运动状态，并要结合各种地貌演变过程。动力因素中有波浪、潮流、径流、风吹流等；泥沙运动有悬移质、推移质和浮泥流等；地貌演变则有冲刷和淤积过程等。因此，水动力、泥沙数值模拟的第二个发展方向是建立一个综合模拟系统，能模拟各种动力因素综合作用过程及泥沙运动和地貌演变过程。

（3）建立显明、精确的仿真图形动态显示系统

数值模拟的最大缺点是不直观，仿真图形动态显示及多媒体应用技术是为了克服这个缺点而开发的关键技术。目前，各科技先进国家在水动力、泥沙数值模拟领域中，正积极开展这方面的研究，并已取得了可喜的进展。

参 考 文 献

1. 罗奇 D J，钟锡昌等译．计算流体动力学．北京：科学出版社，1983
2. 汪德爟．计算水力学．理论与应用．南京：河海大学出版社，1989
3. 王尚毅，顾元棪，郭传镇．河口工程泥沙数学模型．北京：海洋出版社，1990

第二章　水动力、泥沙运动数值模拟的理论基础

水动力、泥沙运动数值模拟涉及水动力学、泥沙动力学、数值计算、程序设计和资料处理等多种学科，读者有兴趣，可参阅有关教科书和专著。本章只将以后各章中应用到的一些有关知识——水动力学、泥沙动力学和数值计算三方面的基础知识作一简明的概述，其余则将在以后有关章节中，针对具体问题作介绍。

2.1　水动力基本方程

在水动力、泥沙运动数值模拟中常用到的水动力基本方程是连续方程和动量方程，这些方程都可从相应的守恒定律求得。

在海岸、河口的水动力自然现象中，如果水质点的垂向速度时均变率（即垂向加速度）比重力加速度小得很多，如潮流的垂向加速度的数量级只是重力加速度的 10^{-6}，这时，垂向加速度可以略去，压强沿水深分布可采用静水压强分布的假定，在右手直角坐标系中，水动力学的三维运动基本方程如下。

连续方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{2-1-1}$$

动量方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u^2}{\partial x}+\frac{\partial uv}{\partial y}+\frac{\partial uw}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right] \tag{2-1-2a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial uv}{\partial x}+\frac{\partial v^2}{\partial y}+\frac{\partial vw}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right] \tag{2-1-2b}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z}=\rho g \tag{2-1-2c}$$

式中 u、v、w——水体在 x、y、z 方向的分速度；

P——压强；

τ_{xx}、τ_{yx}…τ_{xy}——剪切应力，足标第一个字母表示应力所在的面，第二个足标表示应力的方向；

ρ——水体密度；

g——加速度。

上述的动量方程（2-1-2a）和（2-1-2b）为守恒形式，如果在这些动量方程中考虑连续方程，则可进一步写成如下的非守恒形式。

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right] \quad (2\text{-}1\text{-}3a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right] \quad (2\text{-}1\text{-}3b)$$

在大面积水体中，还需考虑地球自转引起的柯氏力效应，这时，可在 x、y 向的动量方程中分别加上柯氏力分量。以守恒形式为例，则得

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u^2}{\partial x}+\frac{\partial uv}{\partial y}+\frac{\partial uw}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}-fv=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right]$$

(2-1-4a)

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial uv}{\partial x}+\frac{\partial v^2}{\partial y}+\frac{\partial vw}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}+fu=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right]$$

(2-1-4b)

式中 f——柯氏系数，$f=2\omega\sin\psi$；

ω——地球自转角速度；

ψ——地球纬度。

在广阔的水域中，如果水平尺度远大于垂直尺度，水力参数（如水深、流速）沿垂向变化远比沿水平向变化要小，则上述三维流动基本方程沿水深积分后的水深均化二维流动基本方程如下。

连续方程

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial hu}{\partial x}+\frac{\partial hv}{\partial y}=0 \quad (2\text{-}1\text{-}5)$$

动量方程

$$\frac{\partial hu}{\partial t}+\frac{\partial huu}{\partial x}+\frac{\partial huv}{\partial y}+gh\frac{\partial (h+z_0)}{\partial x}+\frac{1}{\rho}(\tau_{bx}-\tau_{ox})-fhv$$
$$=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial x}(h\mu\frac{\partial u}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(h\mu\frac{\partial u}{\partial y})\right] \qquad (2\text{-}1\text{-}6a)$$

$$\frac{\partial hv}{\partial t}+\frac{\partial huv}{\partial x}+\frac{\partial hvv}{\partial y}+gh\frac{\partial (h+z_0)}{\partial y}+\frac{1}{\rho}(\tau_{by}-\tau_{oy})+fhu$$
$$=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial x}(h\mu\frac{\partial v}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(h\mu\frac{\partial v}{\partial y})\right] \qquad (2\text{-}1\text{-}6b)$$

式中 u、v——沿水深积分后除以水深的平均值；

τ_{bx}、τ_{by}——水底剪应力在 x、y 向的分量；

τ_{ox}、τ_{oy}——水面剪应力在 x、y 向的分量；

z_0——水底的竖向坐标位置。

在潮流计算中，常将水平面基准面 XOY 布置在平均海平面上，以自由水面的垂直位移 ζ 作为变量，并设水深在 x、y 向变化平缓，则上述二维流动基本方程进一步简化成下式，

连续方程

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{\partial[(h_0+\zeta)u]}{\partial x}+\frac{\partial[(h_0+\zeta)v]}{\partial y}=0 \qquad (2\text{-}1\text{-}7)$$

动量方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+g\frac{\partial \zeta}{\partial x}+\frac{1}{\rho(h_0+\zeta)}[\tau_{bx}-\tau_{ox}]-fv$$
$$=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial x}\mu\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right] \qquad (2\text{-}1\text{-}8a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+g\frac{\partial \zeta}{\partial y}+\frac{1}{\rho(h_0+\zeta)}[\tau_{by}-\tau_{oy}]+fu$$
$$=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial x}\mu\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right] \qquad (2\text{-}1\text{-}8b)$$

式中 h_0——基准面至水底距离；

ζ——自由水面与基准面距离，它表示水面的起伏。

在二维运动的动量方程中，自由水表面剪切应力 τ_{ox}、τ_{oy}和海底剪切应力 τ_{bx}、τ_{by}通常可用下式表示

$$\tau_{ox}=f_w\rho_a w^2\sin\theta$$

$$\tau_{oy}=f_w\rho_a w^2\cos\theta$$

$$\tau_{bx}=f_b\rho u\sqrt{u^2+v^2}$$

$$\tau_{by}=f_b\rho v\sqrt{u^2+v^2}$$

式中 f_w——自由水表面处风的阻力系数；

f_b——海底阻力系数；

ρ_a——空气密度；

ρ——水密度；

w——风速。

在狭窄的水域中，常应用一维流动方程。为了推导一维流动方程，在上述二维方程中，进一步采用如下三个补充假定，即

①速度沿断面均匀分布，水面无横向比降；

②河床纵向比降小；

③水道纵向弯度很小，可忽略不计。

根据上述三个补充假定，并取 x 轴沿水流纵向方向，将式（2-1-7）和（2-1-8）分别沿河宽方向（y 方向）积分后，可得沿断面平均的一维流动基本方程如下，

连续方程

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}=0 \tag{2-1-9}$$

动量方程

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial uQ}{\partial x}+gA\frac{\partial (h+z_b)}{\partial x}+g(h+z_b)\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{B}{\rho}(\tau_{bx}-\tau_{ox})=0 \tag{2-1-10}$$

这就是著名的 Saint Venant 方程，式中 A 为过水断面；Q 为流量，$Q=Bhu$；B 为河宽；h 为水深；u 为断面平均流速。

在上述一维流动基本方程组中，两个变量为 Q、A。在实际计算中，有些作者习惯采用另外一些变量，如 u，h；Q，h 等，与这些变量相对应，基本方程有不同形式，这些将在以后有关章节中

介绍。

上述三维、二维和一维方程组中，方程数和未知数相等，因此结合定解条件，即可求出确定解。

定解条件包括初始条件和边界条件。

初始条件通常可取如下数值：

三维　$(u, v, w, \zeta)|_{t=0}=0$　在整个计算域内

二维　$(u, v, \zeta)|_{t=0}=0$　在整个计算域内

一维　$(u, \zeta)|_{t=0}=0$　在整个计算域内

边界条件，又可分为开边界和固边界两种。

开边界是指计算域水体与外部水体相接，该处边界由已知流速（或流量）或已知水位（水深）来控制，即

$(u, v)_\Gamma=(u_{(t)}, v_{(t)})$　在 Γ 边界处

或　$\zeta_\Gamma=\zeta_{(t)}$　在 Γ 边界处

固定边界是指计算域与陆地或建筑物接壤处，在该处有两种边界条件，即无滑移和有滑移边界。有滑移边界，可令垂直边界的分速为 0，

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=0$$

无滑移边界，可令 $u=v=0$

2.2　泥沙运动基本方程

泥沙运动十分复杂，本节仅介绍数值模拟中常用的一些基本方程。

2.2.1　悬移质输移扩散方程

根据扩散定律，从微小六面体的泥沙连续条件出发，假定含沙量不很大，泥沙颗粒也很细，其纵向运动和横向运动的速度与水流速度相等，而垂向运动与水流垂向运动相差一个 w_i，则可得悬移质运动的三维方程

$$\frac{\partial s}{\partial t}+u\frac{\partial s}{\partial x}+v\frac{\partial s}{\partial y}+w\frac{\partial s}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z}(\omega_i s)$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon_{sx}\frac{\partial s}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon_{sy}\frac{\partial s}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon_{sz}\frac{\partial s}{\partial z}\right) \tag{2-2-1}$$

式中 s——点悬移质含沙量；

ε_{sx}、ε_{sy}、ε_{sz}——分别为 x、y、z 三个方向的悬移质紊动扩散系数；

ω_i——泥沙沉降速度。

当水流为二维渐变流时，将上式沿垂线积分，并设悬移质的纵向和横向扩散系数远小于垂向扩散系数，则可得垂向平均的水平二维悬移质输移扩散方程为

$$\frac{\partial s}{\partial t}+u\frac{\partial s}{\partial x}+v\frac{\partial s}{\partial y}-(\omega_i s)_b-(\varepsilon_s\frac{\partial s}{\partial z})_b$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon_{sx}\frac{\partial s}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon_{sy}\frac{\partial s}{\partial y}) \tag{2-2-2}$$

对于一维缓变流，悬移质输移扩散方程为

$$\frac{\partial s}{\partial t}+u\frac{\partial s}{\partial x}-(\omega_i s)_b-(\varepsilon_s\frac{\partial s}{\partial z})_b=\frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon_{sx}\frac{\partial s}{\partial x}) \tag{2-2-3}$$

上式中，足标“b”表示临底值。

2.2.2 浮泥运动基本方程

浮泥是淤泥质海岸、河口粘性泥沙在海底运动的一种特殊方式。当浮泥的密度在1.05～1.30(kg/m³)时，浮泥流的流型为宾汉体，这时海底浮泥流动的基本方程为：

连续方程

$$\frac{\partial h_m}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(u_m h_m)+\frac{\partial}{\partial y}(v_m h_m)-\frac{1}{\gamma_m}\frac{\partial m}{\partial t}=0 \tag{2-2-4}$$

动量方程

$$\frac{\partial u_m}{\partial t}+u_m\frac{\partial u_m}{\partial x}+v_m\frac{\partial u_m}{\partial y}+g\frac{\rho}{\rho_m}\frac{\partial \zeta}{\partial x}+g\frac{\Delta\rho}{\rho_m}\frac{\partial \zeta_m}{\partial x}$$
$$+\frac{1}{\rho_m h_m}(\tau_{mx}+\tau_{Bx}-\tau_{bx})=0$$

$$\frac{\partial v_m}{\partial t}+u_m\frac{\partial v_m}{\partial x}+v_m\frac{\partial v_m}{\partial y}+g\frac{\rho}{\rho_m}\frac{\partial \zeta}{\partial x}+g\frac{\Delta\rho}{\rho_m}\frac{\partial \zeta_m}{\partial x}$$

$$+\frac{1}{\rho_m h_m}(\tau_{my}+\tau_{By}-\tau_{by})=0$$

式中 h_m——浮泥流的厚度；

$\frac{dm}{dt}$——浮泥中泥沙数量的变化率；

ρ、ρ_m——分别为水及浮泥的密度，$\Delta\rho=\rho_m-\rho$；

γ_m——浮泥的干容重；

ζ——上部水体自由表面的竖向位移；

ζ_m——浮泥与水体交界面的竖向位移；

τ_B——浮泥的宾汉临界剪切应力；

τ_b——海底处浮泥对海底的剪切应力；

τ_i——浮泥界面处水对浮泥的剪切应力。

足标“m”表示浮泥。

2.3 数值计算

在进行水动力、泥沙数值模拟时，大都将基本方程组离散成代数方程组，最后求解代数方程组，因此本节将介绍微分方程组的离散技术——有限差分法和线性代数方程组的数值解法。

2.3.1 有限差分法

有限差分法是工程中常用的一种离散技术，它将计算域分成有限个网格，通过差分法求网格结点的微分方程近似值，因此也叫网格法。

为简便起见，本书将网格结点上的函数值 $f_{(x,y,z)}$ 用下面的符号来表示，

$$f_{i,j,k}$$

上符号中右足标 i，j，k 分别表示 x，y，z 方向的坐标位置，右肩

标 n 表示时间。

1. **微分与差分的关系**

差分有一阶、二阶及高阶之分，每阶中又有前差、后差和中心差之分，现列举工程中常用的几种差分和微分的关系。为简便起见，只介绍一维的情况。

(1) 一阶向前差分

根据 Taylor 公式

$$f(x+\Delta x)=f(x)+\frac{\partial f(x)}{\partial x}\cdot\Delta x+\frac{(\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2 f(\tilde{x}_1)}{\partial x^2},$$

其中 $\tilde{x}_1=x+\theta_1(\Delta x)$，　$0<\theta_1<1$，

可得

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-\frac{\Delta x}{2}\frac{\partial^2 f(x_T)}{\partial x^2}$$

(2) 一阶向后差分

根据 Taylor 公式

$$f(x-\Delta x)=f(x)-\frac{\partial f(x)}{\partial x}\cdot\Delta x+\frac{(\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2 f(\tilde{x}_2)}{\partial x^2},$$

其中 $\tilde{x}_2=x-\theta_2(\Delta x)$，　$0<\theta_2<1$，

可得

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x}=\frac{f(x)-f(x-\Delta x)}{\Delta x}+\frac{\Delta x}{2}\frac{\partial^2 f(\tilde{x}_2)}{\partial x^2}$$

(3) 一阶中心差分

根据 Taylor 公式

$$f\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=f(x)+\frac{\partial f(x)}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{2}+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}\frac{\partial^3 f(\tilde{x}_3)}{\partial x^3}\cdot\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^3$$

$$f\left(x-\frac{\Delta x}{2}\right)=f(x)-\frac{\partial f(x)}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{2}+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2-\frac{1}{3!}\frac{\partial^3 f(\tilde{x}_4)}{\partial x^3}\cdot\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^3$$

其中 $\tilde{x}_3=x+\theta_3\left(\frac{\Delta x}{2}\right)$，　$0<\theta_3<1$，

$\tilde{x}_4=x-\theta_4\left(\frac{\Delta x}{2}\right)$，　$0<\theta_4<1$，

上二式相减，可得

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x}=\frac{f\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)-f\left(x-\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}+\frac{(\Delta x)^2}{24}\left[\frac{\partial^3 f(\tilde{x}_3)}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 f(\tilde{x}_4)}{\partial x^3}\right]$$

(4) 二阶中心差分

根据 Taylor 公式

$$f\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=f(x)+\frac{\partial f(x)}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{2}+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\cdot\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}\frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^3+\frac{1}{4!}\frac{\partial^4 f(\tilde{x}_5)}{\partial x^4}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^4$$

$$f\left(x-\frac{\Delta x}{2}\right)=f(x)-\frac{\partial f(x)}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{2}+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\cdot\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2-\frac{1}{3!}\frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^3+\frac{1}{4!}\frac{\partial^4 f(\tilde{x}_6)}{\partial x^4}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^4$$

其中 $\tilde{x}_5=x+\theta_5(\Delta x)$，$0<\theta_5<1$，

$\tilde{x}_6=x-\theta_6(\Delta x)$，$0<\theta_6<1$

上二式相加，可得

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}=\frac{f\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)-2f(x)+f\left(x-\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2}-\frac{(\Delta x)^2}{24}[f(\tilde{x}_5)+f(\tilde{x}_6)]$$

上述各式同样可用于 y，z 和 t 自变量。

当 $\Delta x\longrightarrow 0$ 时，上述各关系式最后一项即为截断误差，由此可将上述微分和差分关系式写成如下：

一阶向前差分

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+O(\Delta x)$$

一阶向后差分

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x}=\frac{f(x)-f(x-\Delta x)}{\Delta x}+O(\Delta x)$$

一阶中心差分

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x}=\frac{f\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)-f\left(x-\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}+O((\Delta x)^2)$$

二阶中心差分

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{f(x+\Delta x)-2f(x)+f(x-\Delta x)}{(\Delta x)^2}+O((\Delta x)^2)$$

上述关系对于 y，z，t 均适用。

2. **几种差分格式**

现研究最简单的一维热传导方程

$$\frac{\partial f}{\partial t}-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0 \tag{2-3-1}$$

此方程结合具体定解条件，即可求解。

以此方程为例，举出以下几种差方格式。

（1）古典显式格式（格式 1）

对 t 采用一阶向前差分，对 x 采用二阶中心差分，则点 i 和时间 n 的一维传导方程可用下式表示：

$$\frac{f_i^{n+1}-f_i^n}{\Delta t}-\frac{f_{i+1}^n-2f_i^n+f_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}+O(\Delta t+(\Delta x)^2)=0$$

在上式中略去截断误差，则可得一维热传导方程的差分方程

$$\frac{f_i^{n+1}-f_i^n}{\Delta t}-\frac{f_{i+1}^n-2f_i^n+f_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}=0$$

采用 $r=\Delta t/(\Delta x)^2$，则差分方程可改写为

$$f_i^{n+1}=(1-2r)f_i^n+r(f_{i+1}^n+f_{i-1}^n) \tag{2-3-2}$$

这是一组线性方程组，由此方程可知，$(n+1)$ 时层上的未知值 f_i^{n+1} 需由前一时层三个点的已知值来确定，这个差分格式可用图 2-3-1 来表示。

这种格式可由已知值直接求未知值，且只涉及二层，故称为双层显式差分格式。

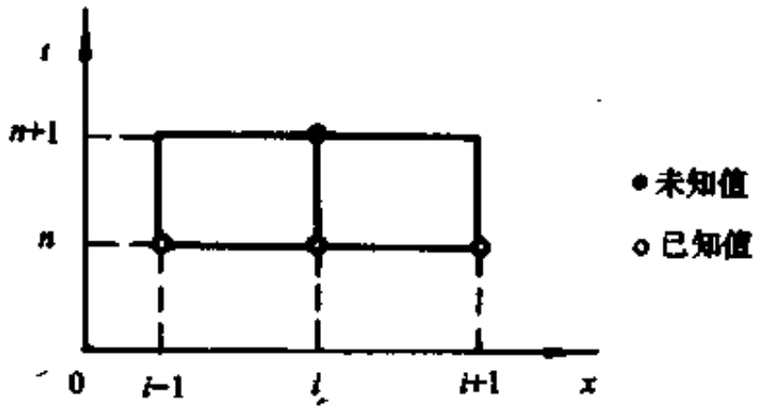


图 2-3-1　双层显示差分格式

（2）古典隐式格式（格式 2）

对 t 采用一阶向后差分，对 x 采用二阶中心差分，则在 x 点和 n 时层的一维热传导方程可用下式表示

$$\frac{f_i^n-f_i^{n-1}}{\Delta t}+\frac{f_{i+1}^n-2f_i^n+f_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}+O(\Delta t+(\Delta x)^2)=0$$

上式中略去 $O(\Delta t+(\Delta x)^2)$，则可得一维热传导方程的差分方程

$$\frac{f_i^n-f_i^{n-1}}{\Delta t}-\frac{f_{i+1}^n-2f_i^n+f_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}=0$$

上式可改写成

$$(1+2r)\,f_i^n-rf_{i-1}^n-rf_{i+1}^n=f_i^{n-1} \qquad (2\text{-}3\text{-}3)$$

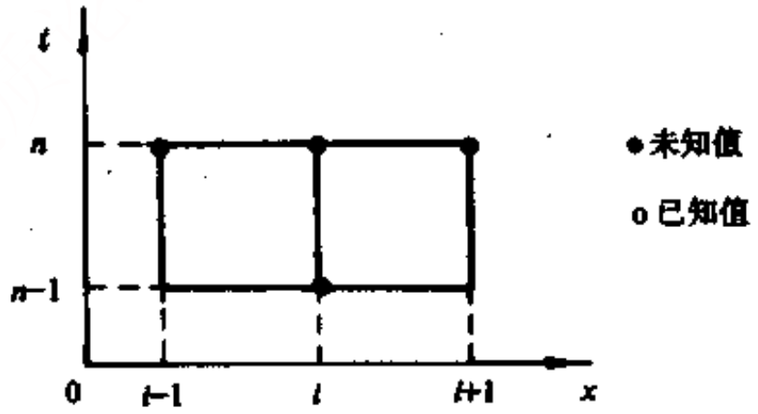


图 2-3-2　双层隐式差分格式

这也是一组线性方程组，但它和方程组（2-3-2）不同，当已知第（n-1）层的 f_i^{n-1} 以后，不能直接求 n 时层上的各未知量，必

须解一组线性代数方程组，这种格式称为隐式差分格式。此外，本格式只涉及前后两个时层，因此也叫二层隐式差分格式，其格式可用图 2-3-2 表示。

（3）六点格式（Crank—Nicolson）（格式 3）

在 x 点和 $\left(n+\frac{\Delta n}{2}\right)$ 时层，对 t 和 x 均采用中心差分，

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}}=\frac{f_i^{n+1}-f_i^n}{\Delta t}+O\left((\Delta t)^2\right)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i^{n+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i^{n+1}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i^{n}\right]+O\left((\Delta x)^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{f_{i+1}^{n+1}-2f_i^{n+1}+f_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}+\frac{f_{i+1}^{n}-2f_i^{n}+f_{i-1}^{n}}{(\Delta x)^2}\right]$$

$$+O\left((\Delta x)^2\right)$$

将上二式代入一维传导方程，并略去 $O\left((\Delta t)^2+(\Delta x)^2\right)$，则可得差分方程

$$\frac{f_i^{n+1}-f_i^n}{\Delta t}-\frac{1}{2}\left[\frac{f_{i+1}^{n+1}-2f_i^{n+1}+f_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}+\frac{f_{i+1}^{n}-2f_i^{n}+f_{i-1}^{n}}{(\Delta x)^2}\right]=0$$

将上式改写成

$$-\frac{r}{2}f_{i+1}^{n+1}+(1+r)\,f_i^{n+1}-\frac{r}{2}f_{i-1}^{n+1}$$

$$=(1-r)\,f_i^n+\frac{r}{2}f_{i+1}^n+\frac{r}{2}f_{i-1}^n \qquad (2\text{-}3\text{-}4)$$

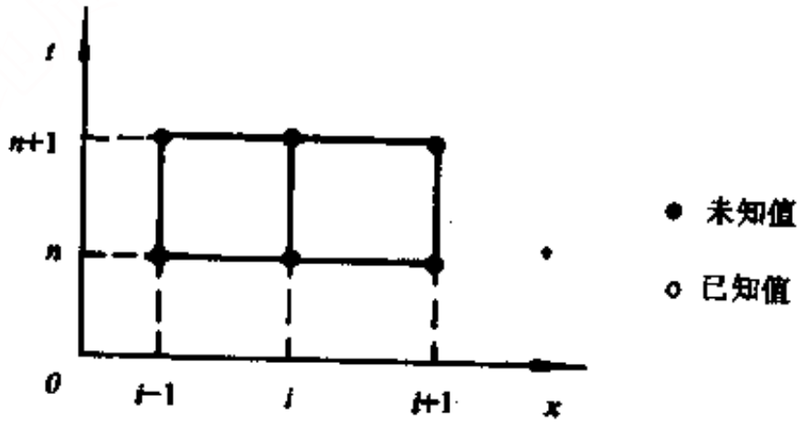


图 2-3-3　双层六点隐式格式

由（2-3-4）式可知，求解（$n+1$）时层上各未知值f^{n+1}，须解一组线性方程组，故也为隐式差分格式。本格式同时涉及n时层三个点和（$n+1$）时层三个点，故又可称为双层六点隐式差分格式，此格式可用图 2-3-3 表示。

此格式的截断误差为$O((\Delta x)^2+(\Delta t)^2)$，这比格式 2 更加逼近于微分方程。

此格式的主导思想是将微分方程中的$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$项用$n$时层和（$n+1$）时层二阶中心差分的算术平均值来逼近的，因而其计算结果有较高的精度，这一思想所成的方程已被广泛地应用于一般的微分方程。

（4）Richardson 格式（格式 4）

在x点和n时层，对t和x均采用中心差分，但与格式 3 有所不同。将本格式中

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_i^n=\frac{f_i^{n+1}-f_i^{n-1}}{2\Delta t}+O((\Delta t)^2)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i^n=\frac{f_{i+1}^n-2f_i^n+f_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}+O((\Delta x)^2)$$

代入一维热传导方程，略去$O((\Delta t)^2+(\Delta x)^2)$，则可得差分方程为

$$\frac{f_i^{n+1}-f_i^{n-1}}{2\Delta t}-\frac{f_{i+1}^n-2f_i^n+f_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}=0$$

上式改写成下式

$$f_i^{n+1}=f_i^{n-1}+2r(f_{i+1}^n-2f_i^n+f_{i-1}^n) \qquad (2\text{-}3\text{-}5)$$

由（2-3-5）式可知，本格式是个显式格式，但同时出现（$n-1$）、n和（$n+1$）三个时层的数值，故为三层格式，其图形如图 2-3-4 所示。

（5）加权六点格式（格式 5）

在建立 Crank－Nicolson 格式时，曾利用n和（$n+1$）两个时层的中心层（$n+\frac{1}{2}$）的中心差分，从而导出格式 3。现在进一步推

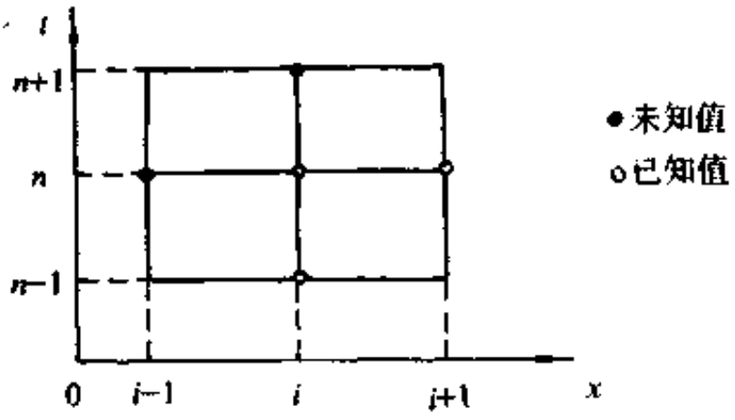


图 2-3-4　Richardson 三层差分格式

广这一方法，将差分格式建立在 n 和 $(n+1)$ 时层中间任意时层 $n+\theta\Delta n$ 上，其中 $0\leqslant\theta\leqslant1$，对 x 和 t 均采用中心差分，由此可导得一维热传导差分方程

$$\frac{f_i^{n+1}-f_i^n}{\Delta t}-\left[\theta\frac{f_{i+1}^{n+1}-2f_i^{n+1}+f_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}+(1-\theta)\frac{f_{i+1}^n-2f_i^n+f_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}\right]=0$$

将上式改写成

$$-\theta r f_{i+1}^{n+1}+(1+2\theta r)f_i^{n+1}-\theta r f_{i-1}^{n+1}=[1-2(1-\theta)r]f_i^n$$
$$+(1-\theta)rf_{i+1}^n+(1-\theta)rf_{i-1}^n \qquad (2\text{-}3\text{-}6)$$

这种格式也是一种隐格式。

在求解本格式所得的差分方程时，每个方程中均涉及前、后两个时层的六个值，故称之为加权六点格式，可用图 2-3-5 表示。

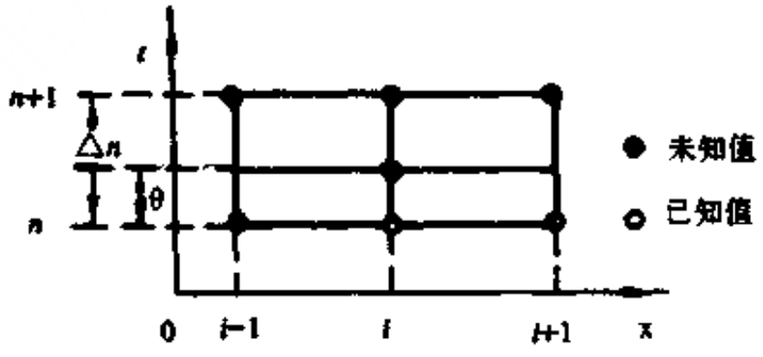


图 2-3-5　加权双层差分格式

本格式中 θ 为加权系数，当 $\theta=0$ 时，式（2-3-6）即变为式

(2-3-2)，成为显式格式1；当$\theta=1$时，式(2-3-6)变为式(2-3-3)，成为隐式格式2；当$\theta=\frac{1}{2}$时，式(2-3-6)变为式(2-3-4)，成为Crank－Nicolson六点隐格式3。因此，前述格式1、格式2及格式3均为本格式的特殊情况。调整θ值，可得其他各种情况，这在数值模拟中控制收敛性与稳定性时十分有益。

另由本格式推导过程得知，当$\theta=\frac{1}{2}$时的截断误差为$O((\Delta t)^2+(\Delta x)^2)$，当$\theta\neq\frac{1}{2}$时，截断误差为$O(\Delta t+(\Delta x)^2)$。

2.3.2 线性代数方程组的数值解

线性代数方程组的数值解法通常可分为两大类，一类为直接法，另一类为迭代法。

直接法也叫精确法，这类方法的所有运算都是精确解法，如常用的消元法、矩阵分解法就属于这类方法。但在实际计算中，需经多次运算，舍入误差又不可避免，因此，直接法求出的结果也是近似的。

迭代法是用某种极限过程逐步逼近线性代数方程组的精确解的方法，这是解大型稀疏矩阵方程组的重要方法。迭代法的优点是：程序设计简单，需要计算机的存贮单元较少，原始系数矩阵在计算过程中始终不变。但迭代法常存在收敛趋势（收敛性）和收敛速度问题。常用的迭代法有高斯—赛德尔法和SOR法等。

下面介绍常用的几种直接法和迭代法。

1. 消元法

消元法是直接求解线性代数方程组的最基本的方法，其基本思路是用逐次消去一个未知数的方法，将原方程组化为等价的可以求解的方程组。这种方法分两个过程，第一个是消元过程，目的是逐步消去未知数，把原方程组变为可简单求解的等价方程组（如三角方程组）；第二个是回代过程，由此可逐步求出各未知数。

消元法中常用的有高斯消元法、主元素消元法、高斯一约当消元法。现分别介绍于下。

(1) 高斯消元法

高斯消元法的基本思想是逐次消去未知数，把原方程组化为等价的三角方程组来求解。

高斯消元法分两个大过程，一个是消元过程，目的是逐次消去未知数，变成等价的三角方程组；另一个过程叫回代过程，目的是逐步求出未知数值。

(a) 消元过程

现有线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots a_{2n}x_n=b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{2-3-7}$$

该方程组用矩阵形式表示为

$AX=B$

式中

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

且$|A|\neq 0$

为讨论消元过程，把原方程组中未消元前的诸元素以“(1)”表示，记为

$$A^{(1)}X=B^{(1)} \tag{2-3-8}$$

式中

$$A^{(1)}=(a_{ij}^{(1)})=(a_{ij})=A$$

$$B^{(1)}=(b_1^{(1)},\ b_2^{(1)},\ \cdots b_i^{(1)}\cdots b_n^{(1)})=B$$

第一步，设$a_{11}^{(1)}\neq 0$，则在(2-3-7)方程中，从第二个方程起，任一i方程加上第1方程乘以$(-a_{i1}/a_{11})$的积，消去第二行起的第一列元素，得新的等价方程组，其形式为

$$A^{(2)}X=B^{(2)}$$

式中

$$A^{(2)}=\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1j}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2j}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{i2}^{(2)} & \cdots & a_{ij}^{(2)} & \cdots & a_{in}^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nj}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$B^{(2)}=\begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_i^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$a_{ij}^{(2)}=a_{ij}^{(1)}-a_{1j}^{(1)}\times a_{i1}^{(1)}/a_{11}^{(1)}$$

$$b_i^{(2)}=b_i^{(1)}-b_1^{(1)}\times a_{i1}^{(1)}/a_{11}^{(1)}$$

$i,\ j=2,\ 3,\ \cdots,\ n$

在这一步中，用作除数的$a_{11}^{(1)}$起着特殊作用，特称之为主元。

第二步，设$a_{22}^{(2)}\neq 0$，则在式(2-3-8)中从第三个方程起，任

—i 方程加上第 2 个方程乘以 $(-a_{i2}^{(2)}/a_{22}^{(2)})$ 的积，消去了第三行起的第三列系数元素，得出又一个新的等价方程，其形式如下

$$A^{(3)}X=B^{(3)}$$

式中

$$A^{(3)}=\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \cdots & a_{nn}^{(3)} \end{bmatrix}$$

$$B^{(3)}=\begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(3)} \\ \vdots \\ b_n^{(3)} \end{bmatrix}$$

$$a_{ij}^{(3)}=a_{ij}^{(2)}-a_{2j}^{(2)}\cdot a_{i2}^{(2)}/a_{22}^{(2)}$$

$$b_i^{(3)}=b_i^{(2)}-b_2^{(2)}\cdot a_{i2}^{(2)}/a_{22}^{(2)}$$

i，$j=3$，4，…，n

$a_{22}^{(2)}$ 也称主元。

上述步骤逐步进行，作为一般形式，设第 $k-1$ 步消元已完成，第 k 步（$1\leqslant k\leqslant n-1$）算出的等价方程组为

$$A^{(k)}X=B^{(k)}$$

式中

$$A^{(k)}=\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} & \cdots & a_{1k}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} & \cdots & a_{2k}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & a_{33}^{(3)} & a_{34}^{(3)} & \cdots & a_{3k}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ & & & a_{44}^{(4)} & \cdots & a_{4k}^{(4)} & \cdots & a_{4n}^{(4)} \\ & & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} \\ & 0 & & & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} \end{bmatrix}$$

$$B^{(k)}=\begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ \vdots \\ b_k^{(k)} \\ \vdots \\ b_n^{(k)} \end{bmatrix}$$

$$a_{ij}^{(k)}=a_{ij}^{(k-1)}-a_{(k-1)j}^{(k-1)}\times a_{i(k-1)}^{(k-1)}/a_{(k-1)(k-1)}^{(k-1)}$$

$$b_i^{(k)}=b_i^{(k-1)}-b_{(k-1)}^{(k-1)}\times a_{i(k-1)}^{(k-1)}/a_{(k-1)(k-1)}^{(k-1)}$$

$$i,\ j=k,\ k+1,\ \cdots,\ n$$

$a_{kk}^{(k)}$也称主元。

上述消元过程从第一步进行到第$(n-1)$步，最后得到与原方程组（2-3-7）等价的上三角矩阵系数方阵组。

$$A^{(n)}X=B^{(n)} \tag{2-3-9}$$

式中

$$A^{(n)}=\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{(2n)}^{(2)} \\ & & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ & 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}$$

$$B^{r}=\begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(3)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

消元过程完毕。

（b）回代过程

式（2-3-9）是三角方程组，很容易求解。方法是，先从最后一个方程（第n个方程）求出x^s，

$$x_n^{(n)}=b_n^{(n)}/a_{nn}^{(n)}$$

将求得的 x^n 代入（2-3-9）倒数的第二个方程（第（$n-1$）个方程）求得 $x^{(n-1)}$，

$$x_{n-1}^{(n-1)}=\left(b_{n-1}^{(n)}-a_{(n-1)n}^{(n)}x_{n-1}\right)/a_{(n-1)(n-1)}^{(n-1)}$$

将上法逐渐向前方程推进，直到求出全部未知数 x 为止，这个求解过程就叫回代过程。

（2）列主元、全主元消元法

高斯消元法是按方程组次序（自然顺序）取主元，因此又称顺序主元消去法，或称简单消元法。在消元过程中，若出现某个主元 $a_{kk}^{(k)}=0$，消元步骤将被迫中断。即使 $a_{kk}^{(k)}\neq 0$，但若其数值很小时，用它作除数，也会导致其它元素量级的严重增长和舍入误差的严重扩散，最后也将使计算结果不可靠。为了克服这个缺点，可采用列主元或全主元消去法，其主要思路如下。

在进行消元步骤以前，将主元所在列的各元素进行比较，选出其中最大的一个元素，用此最大元素所在的行与主元所在行进行交换，经此步骤后所得的主元 $a_{kk}^{(k)}$，将是该列诸元素中最大值，然后按高斯消元法进行。这种方法仅在列中选出最大元素后进行交换，使其主元是列中的最大值，故称为列主元法。如果每次交换前在选择主元值时，不仅在主元所在的列中，而且在主元余矩阵中所有各元素进行，将选出最大元素值所在的行和列，与主元所在的行和列进行交换，使其主元是该主元余矩阵中各元素的最大值，然后按高斯消元法进行，这种方法称全主元消去法。

全主元消去法不仅可保证各主元不为零，而且经消元结束后所得的上三角系数矩阵中，每行绝对值最大的元素均位于对角线上。所以，全主元消去法能同时压制消元过程和回代过程舍入误差的影响，进一步提高精度。

顺便指出，全主元消元法虽有较高精度，但在寻找主元时要耗费较多的机时，而在大多数情况下，列主元法的精度已能达到要求，因此，在很多工程应用的计算过程中，大都采用列主元法。

(3) 高斯—约当消元法

前面讲的消元法，最后都归结为解三角方程组，求解时要利用回代。高斯—约当消元法则是在消元过程中稍加改变，将方程组的系数矩阵化为对角形矩阵，使求解时不必回代。

高斯—约当消元法的主要思路如下。

设消元法按自然顺序进行，第一步消元后，方程组系数矩阵化为如下形式：

$$\begin{bmatrix} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & x \end{bmatrix}$$

第二步消元时，在第二列中除了保留第二行元素不为零外，其余各行元素均为零，这时的系数矩阵为

$$\begin{bmatrix} x & 0 & x & x \\ 0 & x & x & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & x & x \end{bmatrix}$$

一般地，经第 k 步消元后，在前 k 列元素中，除对角元素外，其余元素均为零，其系数矩阵形式如下

$$\begin{bmatrix} x & 0 & 0 & x & \cdots & x \\ & x & 0 & x & \cdots & x \\ & & x & x & \cdots & x \\ & & & x & \cdots & x \\ & 0 & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & x & \cdots & x \end{bmatrix}$$

按上步骤继续下去，经 n 步消元后，系数矩阵就化为对角矩阵

$$\begin{bmatrix} x & & & 0 \\ & x & & \\ & & x & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & x \end{bmatrix}$$

由此就可以直接求解代数方程组。

高斯一约当消去法的优点是不需回代；缺点是运算量比高斯消元法大，这种方法通常用于求逆矩阵。

（4）追赶法

追赶法是解三对角方程组时常用的一种方法。

在水动力、泥沙数值模拟中，很多问题常可归结为求解三对角系数方程组，其系数是一种特殊的稀疏矩阵，其非零元素集中分布在主对角线及其相邻两条次对角线上，对角元素的绝对值均大于同一行其余所有非对角元素的绝对值之和，这个特性称为对角占优。用追赶法求解三对角系数方程组是十分方便的，现介绍这种方法。

设有一方程组

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & 0 & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & a_i & b_i & c_i & \\ & 0 & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{i-1} \\ x_i \\ x_{i+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{i-1} \\ d_i \\ d_{i+1} \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

将上述方程组进行消元，可得

$$\begin{bmatrix} 1 & u_1 & & & & 0 \\ & 1 & u_2 & & & \\ & & \cdots & \cdots & & \\ & & & 1 & u_i & \\ & 0 & & & \cdots & \cdots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{i-1} \\ x_i \\ x_{i+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

式中

$u_1 = c_1/b_1$

$u_i = c_i/(b_i - u_{i-1}a_i)$，　$i=2, 3, \cdots, n-1$

$y_1 = d_1/b_1$

$y_i = (d_i - y_{i-1}a_i)/(b_i - u_{i-1}a_i)$，　$i=2, 3, \cdots, n-1$

上述消元过程的计算顺序是 $u_1 \to u_2 \to \cdots \to u_{n-1}$ 和 $y_1 \to y_2 \to \cdots \to y_n$，这个过程称为追的过程。显然，从回代过程可以很容易求出未知数

$x_n = y_n$

$x_i = y_i - u_i x_{i+1}$，$i=n-1, n-2, \cdots, 1$

因为回代过程的计算顺序恰与计算 u_i，y_i 的顺序相反，下标由大到小，$x_n \to x_{n-1} \to \cdots \to x_1$，这个过程就称为赶的过程。

上述方法总称为追赶法。

2. 迭代法

迭代法是解线性代数方程组的重要方法，先介绍常用的简单迭代法（雅可比迭代法），高斯—赛德尔迭代法和 SOR 法（超松弛法）。

（1）雅可比迭代法

这是简单迭代法，其基本思路与方法如下。

设有如下代数方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+a_{n3}x_3+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

从上述方程组中的各式分别解出 x_i $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，得下方程组

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{a_{11}}\ (b_1-a_{12}x_2-\cdots-a_{1n}x_n) \\ x_2=\dfrac{1}{a_{22}}\ (b_2-a_{21}x_1-a_{23}x_3-a_{24}x_4-\cdots-a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n=\dfrac{1}{a_{nn}}\ (b_n-a_{n1}x_1-a_{n2}x_2-\cdots-a_{n\,n-1}x_{n-1}) \end{cases}$$

上述方程组可简写成

$$x_i=\frac{1}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{r=1}^{i-1}a_{ir}x_r-\sum_{r=i+1}^{n}a_{ir}x_r\right)\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

上式的条件是 $a_{ii}\neq 0$，$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$。在上述方程组中，将一组 $x_i^{(0)}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 的初始值代入后可直接算出新的一组 $x_i^{(1)}$ 值，继续将算得的 $x_i^{(1)}$ 代入上式可算得另一组新的 $x_i^{(2)}$。依此类推，其一般表达式为

$$x_i^{(k+1)}=\frac{1}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{r=1}^{i-1}a_{ir}x_r^{(k)}-\sum_{r=i+1}^{n}a_{ir}x_r^{(k)}\right)\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

上式即为雅可比迭代式，右上角标“k”和“$k+1$”表示迭代次数。

任给初始值 $x_i^{(0)}$，即可利用上式，依次求出 $x_i^{(1)}$，$x_i^{(2)}$，$\cdots$，$x_i^{(k)}$，$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，亦即得到一个向量列$\{x^{(k)}\}$。若

$$\lim_{k\to\infty}x_i^{(k)}=x_i^*$$

即 $x_i^{(k)}$ 存在极限，并等于真值 x_i^*，则称此迭代收敛，否则，就视为发散。

如果上述格式是收敛的话，则初始值 $x_i^{(0)}$ 可任意取，例如取最简单的数 $x_i^{(0)}=0$，从而算出 $x_i^{(k)}$，k 越大，则算出的 $x_i^{(k)}$ 越接近真值

x_i^*，误差也越小，但运算量则越大。通常只要满足人们对解的精确度的要求就可以了。如何选择迭代次数 k 呢？因为事先并不知道精确解 x_i^*，无法根据精确解所要求的精度来确定 k，一般都用前后两次迭代所得的 $x_i^{(k+1)}$ 和 $x_i^{(k)}$，使其差小于事先指定的误差即可，即用下式

$$\| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \| < \varepsilon_1$$

或

$$\frac{\| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \|}{\| x^{(k)} \|} \leqslant \varepsilon_2$$

来确定 k，式中 ε_1（或 ε_2）是事先指定的某一适当小正数，它由对求解的精度要求来确定。

雅可比迭代法的计算公式比较简单，迭代一次只要计算一次矩阵与向量的乘法即可，但在电算时，需两组工作单元来存贮 $x^{(k-1)}$ 和 $x^{(k)}$。

（2）高斯—赛德尔迭代法

在采用雅可比迭代法时，用 $x^{(k)}$ 的全部分量来计算 $x^{(k+1)}$ 的所有分量，因此需两组工作单元 $x^{(k-1)}$ 和 $x^{(k)}$，但从雅可比迭代公式中可知，等式右边第二项 $\sum_{r=1}^{i-1} a_{ir} x_r^{(k)}$ 中，已求出了 $x_r^{(k+1)}$ 各元素，因此完全可用 $x_r^{(k+1)}$ 来代替。而且，如果迭代收敛的话，则以 $x_r^{(k+1)}$ 代替 $x_r^{(k)}$ 进行迭代，似乎更易接近精确解。由此可以写出另一种形式的迭代公式：

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{r=1}^{i-1} a_{ir} x_r^{(k+1)} - \sum_{r=i+1}^{n} a_{ir} x_r^{(k)} \right) \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

这就是高斯—赛德尔迭代公式。

高斯—赛德尔迭代公式与雅可比迭代公式相比较，有以下两个优点：

（1）只需用一组工作单元来存放 $x_i^{(k)}$ 或 $x_i^{(k+1)}$ 的近似值，程序简单；

（2）收敛速度快，即达到同样精度时所需迭代次数要少。

但需指出，高斯—赛德尔迭代公式比雅可比迭代公式收敛速

度快的结论是有条件的，甚至有时会遇到雅可比迭代法收敛，而高斯—赛德尔迭代法却是发散的方程组，因此，在采用高斯—赛德尔迭代法时要十分谨慎。

3. SOR 法（超松弛法）

使用迭代法的困难所在是收敛速度，有时迭代过程虽然收敛，但由于收敛速度十分缓慢，失去使用价值。因此，迭代过程的加速收敛具有重要意义。

SOR 法实质上是高斯—赛德尔迭代的加速方法。这种方法是将前一步的结果 $x_i^{(k)}$ 与高斯—赛德尔方法的迭代值 $\tilde{x}_i^{(k+1)}$ 适当加权平均，以获得更好的近似值 $x_i^{(k+1)}$。具体公式如下：

迭代 $\tilde{x}_i^{(k+1)}=\frac{1}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{r=1}^{i-1}a_{ir}x_r^{(k+1)}-\sum_{r=i+1}^{n}a_{ir}x_r^{(k)}\right)$

加速 $x_i^{(k+1)}=\omega\tilde{x}_i^{(k+1)}+(1-\omega)\,x_i^{(k)}$

或合并为

$$x_i^{(k+1)}=(1-\omega)\,x_i^{(k)}+\frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{r=1}^{i-1}a_{ir}x_r^{(k+1)}-\sum_{r=i+1}^{n}a_{ir}x_r^{(k)}\right)$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

式中系数 ω 称为松弛因子。当 $\omega=1$ 时，上式即转化为高斯—赛德尔迭代公式。可以证明，为了保证迭代过程的收敛，ω 必须满足 $0<\omega<2$。由于 $\tilde{x}_i^{(k+1)}$ 通常比 $x_i^{(k)}$ 要更精确些，为了在迭代过程中加大 $\tilde{x}_i^{(k+1)}$ 的比值，尽可能扩大它的效果，为此取松弛因子 $1<\omega<2$，即采取所谓超松弛法，简称 SOR 法。

SOR 法的优点是：

（1）在计算机上运算时，只需一组工作单元；

（2）选取合适的松弛因子 ω，其收敛速度比高斯—赛德尔方法要快。在实际计算中，可根据方程组系数矩阵的性质，或结合实践计算经验选取松弛因子 ω。

上面介绍的三种迭代法，都有一个共同问题，即收敛问题，包

括是否收敛和收敛速度两个子问题。要判断某方程组用某种方法是否收敛，这是比较困难的，通常的做法是先用迭代法求解，并在程序中事先选出一个最大迭代次数 N，当迭代 N 次后，仍不满足精度要求，则停止迭代，并输出迭代失败标志，然后再选用另一种迭代方法。

参 考 文 献

1. 王尚毅，顾元棣，郭传镇．河口工程泥沙数学模型．北京：海洋出版社，1990
2. 汪德爟．计算水力学．理论与应用．南京：河海大学出版社，1989
3. 南京大学数学系计算数学专业．偏微分方程数值解法．北京：科学出版社，1979
4. 泥沙手册．北京：中国环境科学出版社，1992
5. 曹祖德．浮泥流动特性及其数值模拟．两岸港口海岸交流论文集．南京：河海大学出版社，1993

第三章　数值模拟分析

在开展数值模拟时，必须对差分方程的守恒性、相容性、收敛性、稳定性以及初始条件和边界条件的处理技术等问题有所了解，这对于提高数值模拟的水平是大有裨益的。

3.1　差分方程的守恒性

如果一个差分方程能保持微分方程“积分守恒”的连续形式，就可以说这种差分格式具有守恒性。

现考察一维对流扩散方程

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial uf}{\partial x}=A\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

将上式在 R 域内积分，并采用 Gauss 定理后，得

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_R f\mathrm{d}R+\int_s fu\cdot n\mathrm{d}s=\int_s A\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathrm{d}s$$

式中，R 为计算域；s 为计算域的周边界。上式表明：f 值在 R 域内累积值的变率，等于单位时间内由对流扩散经过边界 s 而进入 R 域的通量。如果差分方程在一计算域内也能保持这样的守恒积分关系，就认为这种差分格式是守恒的，否则就认为是不守恒的。

为了简单起见，先考虑如下形式的一维对流方程

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial fu}{\partial x}=0 \tag{3-1-1}$$

式中 u 是流速。采用时间前差、空间中心差格式，则差分方程为

$$\frac{f_i^{n+1}-f_i^n}{\Delta t}+\frac{f_{i+1}^n u_{i+1}^n-f_{i-1}^n u_{i-1}^n}{2\Delta x}=0 \tag{3-1-2}$$

考虑一维计算，i 从 i_1 到 i_2，对上式累积

第 1 项

$$\sum_{i=i_1}^{i=i_2}\frac{f_i^{n+1}-f_i^n}{\Delta t}\cdot\Delta x=\frac{1}{\Delta t}\left(\sum_{i=i_1}^{i=i_2}f_i^{n+1}\Delta x-\sum_{i=i_1}^{i=i_2}f_i^n\Delta x\right)$$

第 2 项

$$\sum_{i=i_1}^{i=i_2}\left(\frac{f_{i+1}^n u_{i+1}^n-f_{i-1}^n u_{i-1}^n}{2\Delta x}\right)\Delta x=\frac{1}{2}\sum_{i=i_1}^{i=i_2}\left[(fu)_{i+1}^n-(fu)_{i-1}^n\right]$$

第二项可展开如下

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=i_1}^{i=i_2}\left[(fu)_{i+1}^n-(fu)_{i-1}^n\right]\\
&=(fu)_{i_2+1}^n-(fu)_{i_2-1}^n\\
&\quad+(fu)_{i_2}^n-(fu)_{i_2-2}^n\\
&\quad\quad+(fu)_{i_2-1}^n-(fu)_{i_2-3}^n\\
&\quad\quad\quad+\cdots\cdots\\
&\quad\quad\quad\cdots\cdots\\
&+(fu)_{i_1+3}^n-(fu)_{i_1+1}^n\\
&\quad+(fu)_{i_1+2}^n-(fu)_{i_1}^n\\
&\quad\quad+(fu)_{i_1+1}^n-(fu)_{i_1-1}^n\\
&=(fu)_{i_2+1}^n+(fu)_{i_2}^n-(fu)_{i_1}^n-(fu)_{i_1-1}^n\\
&=(fu)_{i_2+1}^n+(fu)_{i_2}^n-\left[(fu)_{i_1}^n+(fu)_{i_1-1}^n\right]\\
&=\frac{1}{2}(fu)_{i_2+\frac{1}{2}}^n-\frac{1}{2}(fu)_{i_1-\frac{1}{2}}^n
\end{aligned}$$

由此可得差分方程在计算域内（$i=i_1$ 到 $i=i_2$）的累积形式为

$$\frac{1}{\Delta t}\left[\sum_{i=i_1}^{i=i_2}f_i^{n+1}\Delta x-\sum_{i=i_1}^{i=i_2}f_i^n\Delta x\right]+\left[(fu)_{i_2+\frac{1}{2}}^n-(fu)_{i_1-\frac{1}{2}}^n\right]=0 \quad (3\text{-}1\text{-}3)$$

显然，这与微分方程的积分守恒性相一致，可见差分格式（3-1-2）是守恒的。

下面考虑另一种形式的一维对流方程

$$\frac{\partial f}{\partial t}+u\frac{\partial f}{\partial x}=0 \quad (3\text{-}1\text{-}4)$$

对此方程仍采用时间前差、空间中心差的差分格式，得差分方程

为

$$\frac{f_i^{n+1}-f_i^n}{\Delta t}+u_i^n\frac{f_{i+1}^n-f_{i-1}^n}{2\Delta x}=0 \tag{3-1-5}$$

对此方程采用上述同样方法累积求和，但不能得出式（3-1-3）形式的公式，这是因为在内部网格的相对应的通量，不能成对地消掉，除非域内的流速 u 为零。由此可知，式（3-1-5）的差分格式不能保持守恒性。

以上我们讨论了一维对流项差分方程的守恒性，对于同时存在对流项和扩散项的差分方程，在扩散系数 $A>0$ 及流速不为常数的情况下，保证方程守恒的唯一途径是对流项与扩散项相互独立地保持守恒。对于多维的对流一扩散方程，必须在每一个方向分别独立地保持守恒，才能保证多维对流扩散方程的守恒。

差分方程的守恒形式并不一定意味着高精度，但通常可得到较精确的结果。

3.2 差分方程的相容性

差分方程的相容性，是指用某种形式表示差分的差分方程与其所代表的微分方程之间的一致性。通常写出的差分方程都能代表我们想要逼近的微分方程，但有时候我们根据某一微分方程而写出的差分方程，在一定条件下却不能真正代表我们想逼近的那个微分方程。下面通过两个例子来说明。

1. **无条件相容**

为简单起见，以一维扩散方程为例，根据 Taylor 级数展开，可得出一维扩散方程的差分方程为

$$\left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_i^n-A\left(\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\right)_i^n=\left[\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_i^n-A\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i^n\right]+O\ (\Delta t+\ (\Delta x)^2)$$

上式中，左端第一项用前差形式，第二项用中心差形式，则得

$$\frac{f_i^{n+1}-f_i^n}{\Delta t}-A\frac{f_{i+1}^n-2f_i^n+f_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}=\left[\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_i^n-A\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i^n\right]$$

$$+O(\Delta t+(\Delta x)^2)$$

在上式中，无论 Δt 和 Δx 以任何方式趋近于零，右式最后一项截断误差 $O(\Delta t+(\Delta x)^2)$ 总趋向于零，即差分方程逼近微分方程，这是无条件相容。

2. **条件相容**

仍以上述一维扩散方程为例，如果在等号左端第一项采用时间中心差，第二项采用空间中心差，则得下式

$$\frac{f_i^{n+1}-f_i^{n-1}}{2\Delta t}-A\frac{f_{i+1}^n-2f_i^n+f_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}=\left[\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_i^n-A\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i^n\right]$$

$$+O((\Delta t)^2+(\Delta x)^2)$$

可以证明，上式是无条件相容的，但这个差分格式是无条件不稳定的，因而上式是不实用的，为此，有些人用 $(f_i^{n+1}+f_i^{n-1})$ 代替 $2f_i^n$，将上式的差分格式改写成

$$\frac{f_i^{n+1}-f_i^{n-1}}{2\Delta t}-A\frac{f_{i+1}^n-(f_i^{n+1}+f_i^{n-1})+f_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

经修改后的差分方程是无条件稳定的，但在相容性上却发生了问题，变成有条件相容的差分格式。只要将上式改写成下式

$$\frac{f_i^{n+1}-f_i^{n-1}}{2\Delta t}-A\frac{f_{i+1}^n-2f_i^n+f_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}-\left(\frac{A(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2}\right)\frac{f_i^{n+1}-2f_i^n+f_i^{n-1}}{(\Delta t)^2}$$

便可知，Δt、$\Delta x\to 0$ 时，有两种极限：

(1) 当 $\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ 为常数时，上式中第三项为零，上式逼近于原一维扩散方程。

(2) 当 $\frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2}$ 为常数时，上式逼近于

$$\frac{\partial f}{\partial t}-A\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

由此可知，当 Δt、$\Delta x\to 0$ 时，同一差分方程将根据不同条件（如 $\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ 为常数或 $\frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2}$ 为常数）而与不同的微分方程相容。这种格式称为有条件相容的差分格式。

3.3 定解条件

在介绍定解条件以前，我们常认为从自然现象中归结来的微分方程是适定的，即该方程定解问题的解是存在的、唯一的而且是稳定的。

在求解适定性问题的微分方程时，应有定解条件，所谓定解条件，就是指求解方程时所必需的初始条件和边界条件等。

在一般的水动力学中，所有的流动模式均采用相同的水流运动基本方程来表示（如动量方程和连续方程），只因有了不同的初始条件和边界条件，以及一些不同的流动参数（如雷诺数 Re、佛劳德数 Fr 等），才有不同的特殊解，其中以边界条件的影响最大，这在数学上来说，也是十分明显的。如一阶常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=0$$

其一般解是带有待定常数的某一函数，此函数与自变量 x 无关，这个待定常数只有通过边界条件来确定。又如一阶偏微分方程

$$\frac{\partial f\ (x,\ y)}{\partial x}=0$$

方程本身对解没有提供太多的信息，因为任何不含自变量 x 的函数都可成为此偏微分方程的解，只有通过边界条件才能确定其特殊解。至于如

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=A\ (x,\ y)$$

这类方程，方程本身对求解几乎没有提供任何信息，它的解基本上由边界条件来确定。由此可见，在水动力学问题中，初始条件和边界条件对求解起着重要作用。

初始条件的影响，与差分方程的性质、求解域的大小及边界条件等多种因素有关。如果在一个封闭计算域内，水流无摩阻作用，流体被一动力扰动后在此域内运动，在这种情况下，初始条

件的影响是重要的，必须给出精确的初始条件。如果扰动是由边界条件所引入，摩阻对水流的作用较大，在这种情况下，初始条件的影响就不十分重要，例如河口潮汐的模拟就属于这类情况，通常给出初始条件是流速为零和自由水面为静止状态，即 $U_{(x,y)_{t=0}}=0$ 和 $h_{(x,y)_{t=0}}=h_0\ (x,\ y)$，$h_0\ (x,\ y)$ 为静止水面时的水深，这时经过 2～5 个潮周期后，初始条件的影响几乎可完全消失。

边界条件的影响十分重要。在水动力数值模拟中，其模拟结果很大程度上取决于边界条件，因此必须给以充分的重视。

边界条件不仅是决定具体问题解答的关键，而且对数值解的稳定性和精度也有很大影响。关于后两个问题，过去并没有引起足够的重视，因为大多数研究者往往热衷于内点算法的研究，对边界条件的影响却没有太注意，况且边界条件在水动力数值模拟中，还与经验有关。往往有这种情况，对某些边界的处理方法，在想象中似乎很合理，但一遇到实际计算却失败了；有时还发现有这种情况，同样的边界处理方法，在某一种计算方法中成功了，但在另一种计算方法中却发生不稳定现象。此外，还曾遇到这种情况，由于边界处理好了，使二阶格式比高阶格式还精确。在边界处理上所以会发生上述诸种情况，究其原因，是因为许多问题在数学上没有严格的解析解可利用，我们只能凭直观的经验和试验来鉴别，而在模拟试验时，每一种边界处理方法，显然又与雷诺数、内点近似计算方法、其他边界条件有关，甚至原始条件也影响到模拟结果。由此可知，边界条件的处理技术，与其说是一门科学，不如说是一种艺术。

通常用的边界条件有两类：

一类是 Dirichlet 条件，即在边界 Γ 上指定函数值，如

$$f_{(x,y,t)_\Gamma}=f_{1(x,y,t)}$$

另一类是 Neumann 条件，即在边界 Γ 上指定法向导数值，如

$$\left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)_\Gamma=f_{2(x,y,t)}$$

在实际工程模拟中，计算域与外部水域相连接处称开边界，该处可采用Dirichlet边界条件，即令流速或水位变化为一已知函数。当计算域与建筑或岸壁相接，其接壤处称固边界，该处可采用Neumann边界条件，令法向流速为零。

3.4 数值模拟中的判别依据

判别数值模拟的优劣，有多种标准，常用的有以下几个指标，即精度、收敛性、稳定性、效率和便捷性。上述每一项，都涉及广泛的数学分析和物理概念，本文为简便起见，只能从实用出发，介绍一些结果。

3.4.1 误差分析

要估价数值模拟的精度，必须先进行误差分析。造成数值模拟结果与实际原型之间误差的原因很多，如：

（1）在推导基本微分方程时，采用了一些假设和近似；

（2）量测技术或仪器设备精度不高；

（3）测量数据不足；

（4）地形概化（包括水底地形和岸边线的概化）等。

上述几方面的原因，都可造成数值模拟与复杂的原型数据间的误差，这些误差不是数值模拟技术所能解决的。这里主要讨论由差分格式及近似求解而引起的误差，为建立优质的数值模拟作参考。

由微分方程建立差分方程时，必然会引入截断误差，而在差分方程求解过程中，特别在迭代求解过程中，系统舍入误差又不可避免。因此，在建立差分格式时，应使截断误差和舍入误差达到最小。在数值模拟时，步长Δx和Δt的大小对舍入误差和离散误差起着相反的影响，离散误差随步长的减小而减小，舍入误差则通常随步长的减小而增大。由此可见，减小步长不一定会提高计

算精度。一般希望步长不过小，使截断误差控制舍入误差，使总的计算误差和计算效果为最佳。

截断误差一般可用 Taylor 级数的余项估计，如前所述，几种常用的一阶差分和二阶差分与其相应的一阶导数二阶导数之间的误差如表 3-4-1 所示。差分方程的精度，由诸项中最小精度所决定。如一维扩散差分方程，时间项用前差，空间扩散项用中心差，方程如下：

$$\frac{f_i^{n+1}-f_i^n}{\Delta t}+A\frac{f_{i+1}^n-2f_i^n+f_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}=0$$

表 3-4-1　差分阶数与导数误差表

阶　数	导　数	差　分	误　差
一　阶	$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i,n}$	前　差　$\frac{f_{i+1}^n-f_i^n}{\Delta x}$	一阶精度　$O(\Delta x)$
		后　差　$\frac{f_i^n-f_{i-1}^n}{\Delta x}$	一阶精度　$O(\Delta x)$
		中心差　$\frac{f_{i+\frac{1}{2}}^n-f_{i-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x}$	二阶精度　$O(\Delta x^2)$
	$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{i,n}$	前　差　$\frac{f_i^{n+1}-f_i^n}{\Delta t}$	一阶精度　$O(\Delta t)$
		后　差　$\frac{f_i^n-f_i^{n-1}}{\Delta t}$	一阶精度　$O(\Delta t)$
		中心差　$\frac{f_i^{n+\frac{1}{2}}-f_i^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}$	二阶精度　$O(\Delta t^2)$
二　阶	$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{i,n}$	中心差　$\frac{f_{i+1}^n-2f_i^n+f_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}$	二阶精度：$O(\Delta x^2)$

则此差分方程的误差为 $O(\Delta t, \Delta x^2)$。

舍入误差是由计算机的计数长度所限制而引起的，为了减小舍入误差而作的一些努力又会引起计算机资源的浪费。

由上可知，为了提高计算精度，须在数值模拟中进行大量研究工作。但值得注意的是，在实际工程中，影响精度的因素很多，诸如测量误差、地形概化和近似简化计算引起的误差等。因此，提高计算精度必须与其他因素的精度相配合，单独为提高计算精度

而进行过多的相关工作是没有必要的。

3.4.2 稳定性分析

稳定性是衡量数值模拟能否实用的重要指标之一，它反应求解过程中的误差发展情况，如果在求解过程中出现了某一小扰动（例如舍入误差），此扰动（误差）随计算时间步数的增长而增长，并超过合理的范围，则称这种格式是不稳定的。有时候，误差增长开始不快、甚至还很慢，但经一段较长的时间后，却出现明显的增长，并超过允许范围，此格式显然也是不适用的，它也属于不稳定的格式。显然，不稳定的格式是不实用的，只有稳定的格式，才能被工程实际所采用。

差分格式的稳定性有时还与时间步长有关，当时间步长取得足够小时，格式稳定，而当时间步长超过某一限度时，格式就不稳定，这种格式就称为条件稳定格式。而与所取的时间步长大小无关的稳定格式，则称为无条件稳定格式。因此，一般讲来，有限差分的稳定格式可分为两种类型：

一是有条件稳定。这种格式的稳定性与所取的时间步长 Δt 的大小有关，一般可根据下述 Courant 条件来限制其步长，

$$\Delta t \leqslant \frac{\Delta x}{|u| \pm \sqrt{gh_{\max}}}$$

式中 u——水流速度；

$h_{\max}$——计算域中的最大水深。

二是无条件稳定。从理论上讲，这种格式的稳定性不受时间步长的限制。

下面分析差分格式的稳定性。在分析以前，先用直观的方法，即所谓 ε 图方法来了解误差 ε 的传播扩散情况，这对以后进一步分析稳定性是有用的。

以古典显式格式（格式 1）的差分方程（2-3-2）为例，在该

式中，令 $r=\frac{1}{2}$，此时的方程最简单，

$$f_i^{n+1}=\frac{1}{2}\ (f_{i+1}^n+f_{i-1}^n)$$

为讨论方便起见，设边界条件的计算是正确的，只是在某一时层（例如初始层）的某一点（例如在 i 点）产生了误差 ε，而在初始层的其他各点都没有误差，并假定在以后各层的计算中也都没有引入其他误差，现在我们来观察初始误差 ε 在计算过程中在各时层上的传播情况。

现设差分方程的精确解为 f_i^n，它应满足

$$f_i^{n+1}=\frac{1}{2}\ (f_{i+1}^n-f_{i-1}^n)$$

设有差分方程的近似解为 $\tilde{f}_i^n=f_i^n+\varepsilon$，此值应满足

$$\tilde{f}_i^{n+1}=\frac{1}{2}\ (\tilde{f}_{i+1}^n-\tilde{f}_{i-1}^n)$$

即 $\quad (f_i^{n+1}+\varepsilon_i^{n+1})=\frac{1}{2}\ (f_{i+1}^n+\varepsilon_{i+1}^n-f_{i-1}^n-\varepsilon_{i-1}^n)$

由此可得

$$\varepsilon_i^{n+1}=\frac{1}{2}\ (\varepsilon_{i+1}^n-\varepsilon_{i-1}^n)$$

按照这个误差方程，可得误差 ε 分布，如表 3-4-2 所示。

表 3-4-2　误差 ε 分布表

···	·····								
$n=5$	0	0.16525	0	0.3125	0	0.3125	0	0.15625	0
$n=4$	0.0625	0	0.25	0	0.375	0	0.25	0	0.0625
$n=3$		0.125	0	0.375	0	0.375	0	0.125	
$n=2$			0.25	0	0.5	0	0.25		
$n=1$				0.5	0	0.5			
$n=0$					1				
n / ε / i	$i-4$	$i-3$	$i-2$	$i-1$	i	$i+1$	$i+2$	$i+3$	$i+4$

由表 3-4-2 可见知，误差逐层减小，所以当 $r=\frac{1}{2}$ 时，即 $\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$

$=\frac{1}{2}$时，该差分格式（2-3-2）是稳定的。

现仍以此差分格式（2-3-2）为例，再考察$r=1$的情况，这时的差分方程变为

$$f_i^{n+1}=f_{i+1}^n+f_{i-1}^n-f_i^n$$

由此可导得误差方程为

$$\varepsilon_i^{n+1}=\varepsilon_{i+1}^n+\varepsilon_{i-1}^n-\varepsilon_i^n$$

此时的误差分布如表 3-4-3 所示。

表 3-4-3　误差 ε 分布表

…	……										
$n=5$	1	−5	15	−30	45	−51	45	−30	15	−5	1
$n=4$		1	−4	10	−16	19	−16	10	−4	1	
$n=3$			1	−3	6	−7	6	−3	1		
$n=2$				1	−2	3	−2	1			
$n=1$					1	−1	1				
$n=0$						1					
n / ε / i	$i-5$	$i-4$	$i-3$	$i-2$	$i-1$	i	$i+1$	$i+2$	$i+3$	$i+4$	$i+5$

由表 3-4-3 可知，误差 ε 逐层增大，因此，$r=1$ 即$\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}=1$时，差分格式（2-3-2）是不稳定的。由此可知，差分格式（2-3-2）的稳定是有条件的。至于 r 究竟在什么范围内变化才能使差分格式稳定，不是本方法及 ε 分布图所能解决的。

如果一个差分格式的误差 ε 迅速增长，最终掩盖了方程的正确解，这个差分格式就是不稳定的，不稳定的差分格式在工程上是不能采用的。

以上探讨了一点扰动而引起的误差扩散传播情况，下面再讨论多点引入误差的情况。为简便起见，仍以一维为例，对流扩散方程如下：

$$\frac{\partial f}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}(uf)+A\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

采用时间前差和空间中心差，则得差分方程为

$$\frac{f_i^{n+1}-f_i^n}{\Delta t}=-\frac{uf_{i+1}^n-uf_{i-1}^n}{2\Delta x}+A\frac{f_{i+1}^n-2f_i^n+f_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

将方程的解 f_i^n 分解成稳态的分量 $\hat{f}_i^n$ 和扰动分量 ε_i^n 两部分，即

$$f_i^n=\hat{f}_i^n+\varepsilon_i^n \qquad (i=1,\ 2,\ 3\cdots n_0)$$

将上解代入差分方程，并利用稳定解满足差分方程的特点，可得扰动 ε 的差分方程为

$$\frac{\varepsilon_i^{n+1}-\varepsilon_i^n}{\Delta t}=-u\frac{\varepsilon_{i-1}^n-\varepsilon_{i-1}^n}{2\Delta x}+A\frac{\varepsilon_{i+1}^n-2\varepsilon_i^n+\varepsilon_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

或 $$\varepsilon_i^{n+1}=\varepsilon_i^n+\left(-u\frac{\varepsilon_{i+1}^n-\varepsilon_{i-1}^n}{2\Delta x}+A\frac{\varepsilon_{i+1}^n-2\varepsilon_i^n+\varepsilon_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}\right)\Delta t$$

由上式可知，误差增量 $\Delta\varepsilon_i^{n+1}$ 由 $(\Delta\varepsilon_1)_i^{n+1}$ 和 $(\Delta\varepsilon_2)_i^{n+1}$ 两部分组成。

$$\varepsilon_i^{n+1}=\varepsilon_i^n+(\Delta\varepsilon_1)_i^{n+1}+(\Delta\varepsilon_2)_i^{n+1}$$

$$(\Delta\varepsilon_1)_i^{n+1}=-u\frac{\varepsilon_{i+1}^n-\varepsilon_{i-1}^n}{2\Delta x}\Delta t$$

$$(\Delta\varepsilon_2)_i^{n+1}=A\frac{\varepsilon_{i+1}^n-2\varepsilon_i^n+\varepsilon_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}\Delta t$$

现分别研究这两种误差增量。

先研究对流项产生的误差增量 $(\Delta\varepsilon_1)_i^{n+1}$。设扰动为振荡型，即相邻两点误差为异向，$\varepsilon_i\cdot\varepsilon_{i+1}<0$，分两种情况，一是误差的空间分布与流速同向增长，二是误差的空间分布与流速异向增长。

1．误差的空间分布与流速方向同向增长

其中分两种情况：

(1) $u>0$，$\varepsilon_i^n\varepsilon_{i+1}^n<0$，和 $|\varepsilon_{i-1}^n|<|\varepsilon_i^n|<|\varepsilon_{i+1}^n|$。在这种情况下，考察两种误差的发展情况。

(a) $\varepsilon_i^n>0$，由此可知 $\varepsilon_{i-1}^n<0$ 和 $\varepsilon_{i+1}^n<0$ 及 $\varepsilon_{i+1}^n-\varepsilon_{i-1}^n<0$，因此得：

$$(\Delta\varepsilon_1)_i^{n+1}=-u\frac{\varepsilon_{i+1}^n-\varepsilon_{i-1}^n}{2\Delta x}\Delta t>0$$

及 $$\varepsilon_i^{n+1}=\varepsilon_i^n+(\Delta\varepsilon_1)_i^{n+1}>\varepsilon_i^n>0$$

这时误差振幅增加。

(b) $\epsilon_i^n<0$，由此可知 $\epsilon_{i+1}^n>0$ 和 $\epsilon_{i-1}^n>0$，以及 $\epsilon_{i-1}^n-\epsilon_{i-1}^n>0$，因此得：

$$(\Delta\varepsilon_1)_i^{n+1}=-u\frac{\epsilon_{i+1}^n-\epsilon_{i-1}^n}{2\Delta x}\Delta t<0$$

及 $\epsilon_i^{n+1}=\epsilon_i^n+(\Delta\varepsilon_1)_i^{n+1}<\epsilon_i^n<0$

这时负值减小，即误差绝对值（振幅）增加。

(2) $u<0$，$\epsilon_i^n\epsilon_{i+1}^n<0$，和 $|\epsilon_{i-1}^n|>|\epsilon_i^n|>|\epsilon_{i+1}^n|$。在这种情况下，也考察两种误差的发展情况。

(a) $\epsilon_i^n>0$，由此可知 $\epsilon_{i-1}^n<0$，$\epsilon_{i-1}^n<0$ 和 $\epsilon_{i+1}^n-\epsilon_{i-1}^n>0$，由此可得：

$$(\Delta\varepsilon_1)_i^{n+1}=-u\frac{\epsilon_{i+1}^n-\epsilon_{i-1}^n}{2\Delta x}\Delta t>0$$

及 $\epsilon_i^{n+1}=\epsilon_i^n+(\Delta\varepsilon_1)_i^{n+1}>\epsilon_i^n>0$

这时误差振幅增加。

(b) $\epsilon_i^n<0$，由此可知 $\epsilon_{i+1}^n>0$，$\epsilon_{i-1}^n>0$，和 $\epsilon_{i+1}^n-\epsilon_{i-1}^n<0$，由此可得：

$$(\Delta\varepsilon_1)_i^{n+1}=-u\frac{\epsilon_{i+1}^n-\epsilon_{i-1}^n}{2\Delta x}\Delta t<0$$

及 $\epsilon_i^{n+1}=\epsilon_i^n+(\Delta\varepsilon_1)_i^{n+1}<\epsilon_i^n<0$

这时负值减小，即误差绝对值（振幅）增加。

总结以上各种情况，当误差振幅随流速方向而增加，其扰动随时间的增长而呈单调地增长，如图 3-4-1 所示，这种不稳定性称为静态不稳定性，它无法用减小时间步长 Δt 的办法来消除。

2. **误差的空间分布与流速方向异向增长**

与前面分析相似，也分四种情况讨论：

(1) $u>0$，分下面两种情况：

(a) $\epsilon_i^n>0$，经计算得

$$(\Delta\varepsilon_1)_i^{n+1}<0$$

$$\epsilon_i^{n+1}=\epsilon_i^n+(\Delta\varepsilon_1)_i^{n+1}<(\epsilon_i)^n$$

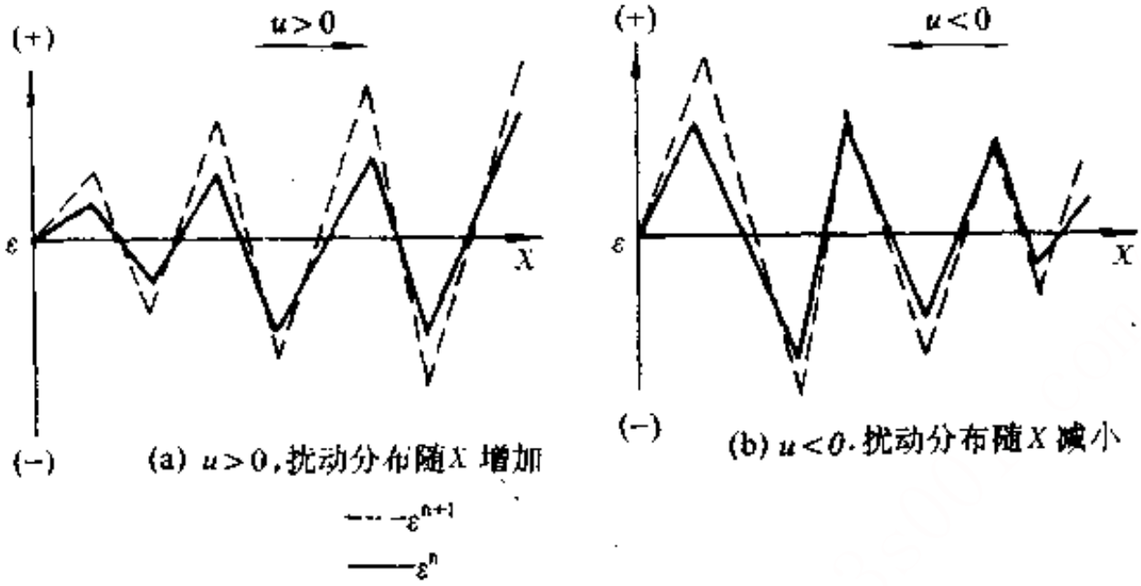


图 3-4-1　扰动变化情况

这时扰动振幅减小。

(*b*) $\varepsilon_i^n<0$，经计算得

$$(\Delta\varepsilon_1)_i^{n+1}>0$$

$$\varepsilon_i^{n+1}=\varepsilon_i^n+(\Delta\varepsilon_1)_i^{n+1}>\varepsilon_i^n$$

这时负值增大，即扰动绝对值（振幅）减小。

(2) $u<0$

(*a*) $\varepsilon_i^n>0$，经计算得

$$(\Delta\varepsilon_1)_i^{n+1}<0$$

$$\varepsilon_i^{n+1}=\varepsilon_i^n+(\Delta\varepsilon_1)_i^{n+1}<\varepsilon_i^n$$

这时扰动振幅减小。

(*b*) $\varepsilon_i^n<0$，经计算得

$$(\Delta\varepsilon_1)_i^{n+1}>0$$

$$\varepsilon_i^{n+1}=\varepsilon_i^n+(\Delta\varepsilon_1)_i^{n+1}>\varepsilon_i^n$$

这时负值增大，即扰动绝对值（振幅）减小。

总结上述情况可知，当误差振幅随流速方向减小时，扰动将随时间的增长而减小，如图 3-4-2 所示，这种稳定性称为静态稳定性。但须注意，如果 Δt 过大，使误差增量 $|\Delta\varepsilon_i^{n+1}|>|\varepsilon_i^n|$，这时候，

反而会产生振动型过冲，形成动态不稳定。

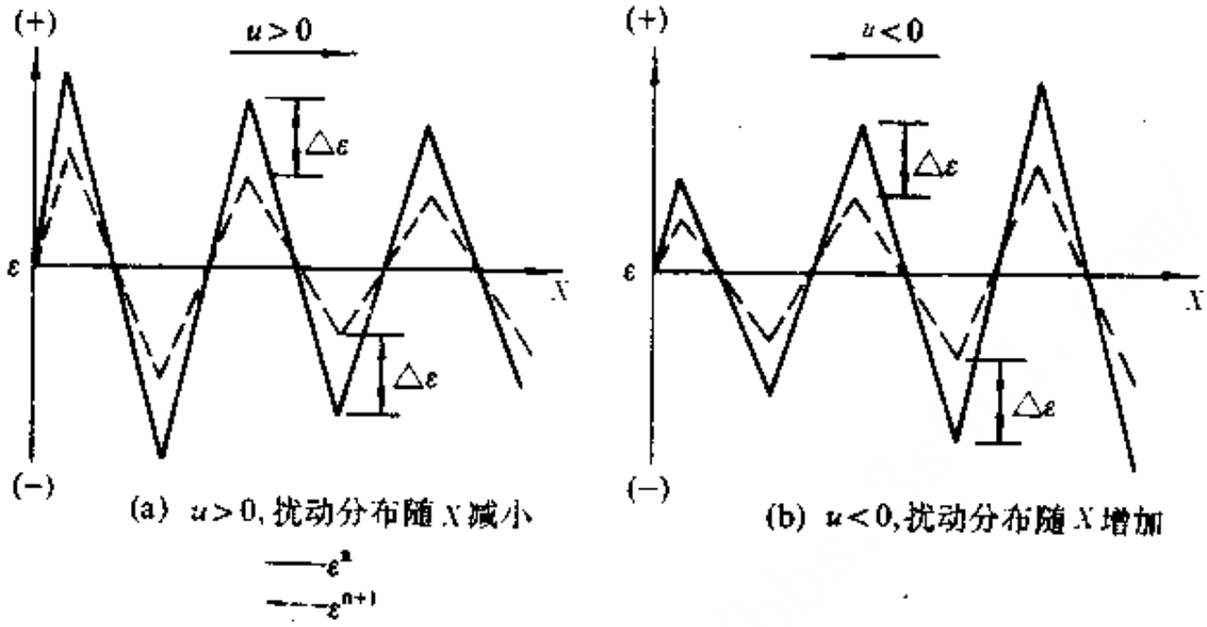


图 3-4-2　扰动变化情况

下面研究扩散项产生的误差增量 $(\Delta\varepsilon_2)_i^{n+1}$。仍设扰动为振荡型，分析内容、方法均与前述对流项相同。经分析得出如下结果：

1. 误差的空间分布增长趋势与流速同向

(1) $u>0$

(a) 当 $\varepsilon_i^n>0$ 时，由计算得

$$(\Delta\varepsilon_2)_i^{n+1}=A\frac{\varepsilon_{i+1}^n-2\varepsilon_i^n+\varepsilon_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}\Delta t<0$$

$$\varepsilon_i^{n+1}=\varepsilon_i^n+(\Delta\varepsilon_2)_i^{n+1}<\varepsilon_i^n \text{（误差减小）}$$

(b) $\varepsilon_i^n<0$ 时，由计算得

$$(\Delta\varepsilon_2)_i^{n+1}=A\frac{\varepsilon_{i+1}^n-2\varepsilon_i^n+\varepsilon_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}\Delta t>0$$

$$\varepsilon_i^{n+1}=\varepsilon_i^n+(\Delta\varepsilon_2)_i^{n+1}>\varepsilon_i^n \text{（误差减小）}$$

(2) $u<0$

(a) 当 $\varepsilon_i^n>0$ 时，由计算得

$$(\Delta\varepsilon_2)_i^{n+1}=A\frac{\varepsilon_{i+1}^n-2\varepsilon_i^n+\varepsilon_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}\Delta t<0$$

$$\varepsilon_i^{n+1}=\varepsilon_i^n+(\Delta\varepsilon_2)_i^{n+1}<\varepsilon_i^n\quad(\text{误差减小})$$

(b) $\varepsilon_i^n<0$ 时，由计算得

$$(\Delta\varepsilon_2)_i^{n+1}=A\frac{\varepsilon_{i+1}^n-2\varepsilon_i^n+\varepsilon_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}\Delta t>0$$

$$\varepsilon_i^{n+1}=\varepsilon_i^n+(\Delta\varepsilon_2)_i^{n+1}>\varepsilon_i^n\quad(\text{误差减小})$$

2. 误差空间分布的增长趋势与流速异向

(1) $u>0$

(a) 当 $\varepsilon_i^n>0$ 时，由计算得

$$(\Delta\varepsilon_2)_i^{n+1}=A\frac{\varepsilon_{i+1}^n-2\varepsilon_i^n+\varepsilon_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}\Delta t<0$$

$$\varepsilon_i^{n+1}=\varepsilon_i^n+(\Delta\varepsilon_2)_i^{n+1}<\varepsilon_i^n\quad(\text{误差减小})$$

(b) $\varepsilon_i^n<0$ 时，由计算得

$$(\Delta\varepsilon_2)_i^{n+1}=A\frac{\varepsilon_{i+1}^n-2\varepsilon_i^n-\varepsilon_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}\Delta t>0$$

$$\varepsilon_i^{n+1}=\varepsilon_i^n+(\Delta\varepsilon_2)_i^{n+1}>\varepsilon_i^n\quad(\text{误差减小})$$

(2) $u<0$

(a) 当 $\varepsilon_i^n>0$ 时，由计算得

$$(\Delta\varepsilon_2)_i^{n+1}=A\frac{\varepsilon_{i+1}^n-2\varepsilon_i^n+\varepsilon_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}\Delta t<0$$

$$\varepsilon_i^{n+1}=\varepsilon_i^n+(\Delta\varepsilon_2)_i^{n+1}<\varepsilon_i^n\quad(\text{误差减小})$$

(b) $\varepsilon_i^n<0$ 时，由计算得

$$(\Delta\varepsilon_2)_i^{n+1}=A\frac{\varepsilon_{i+1}^n-2\varepsilon_i^n+\varepsilon_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}\Delta t>0$$

$$\varepsilon_i^{n+1}=\varepsilon_i^n+(\Delta\varepsilon_2)_i^{n+1}>\varepsilon_i^n\quad(\text{误差减小})$$

上述各种情况均表明，扩散项的效应是使扰动减弱，误差减小。由于扰动增量 $(\Delta\varepsilon_2)^{n+1}$ 与 Δt 成正比，因此，增大 Δt，可使这种效应增加；但 Δt 过大，当 $|(\Delta\varepsilon_2)_i^{n+1}|>|\varepsilon_i^n|$ 时，会发生“过冲”，使振荡型扰动逐渐扩大，形成动态不稳定。

以上分析了对流项与扩散项对扰动的影响。总的说来，对流项的效应是增加扰动，减小 Δt，可削弱这种效应。扩散项的效应

是减小扰动，所以应增大 Δt，使这种效应增加。如果在方程中同时存在对流项和扩散项，这就取决于这两项的相对重要性，从而决定 Δt 的增减。对流项与扩散项的相对重要性，由水流的 Re 数的大小所决定。

以上从直观上介绍了有关稳定性和不稳定性的概念，下面将给稳定性下个定义。由于稳定性有不同的表达方式，因而稳定性的定义在数学上也有不同的解释。如点稳定的定义、按步稳定的定义、序列有界的定义、范数法定义等。

点稳定的定义：

如果累积误差有界，其最大绝对值为 δ，当且仅当 $\delta\to 0$ 时，累积误差 $|\varepsilon|\to 0$ 和当 $\Delta x\to 0$ 时，累积误差的增长速率不大于 Δx^{-1} 的某次幂，则称差分格式是稳定的。

范数法的定义：

当 ε_i 在一定范数下满足不等式

$$\|\varepsilon_i\|\leqslant C\|\varepsilon_0\|$$

则称差分格式是稳定的，其中 C 是与 Δt 及 Δx 无关的常数，ε_0 是初始误差。

下面对 2.3.1.2 节所提出的五种差分格式的稳定性作一论述。

(1) 古典显式格式（格式 1）

差分格式 1 稳定的必要条件是 $0<r\leqslant\frac{1}{2}$，即步长比 $\Delta t/\Delta x^2$ 必须限制在这一变化范围内，否则差分格式不稳定，因此，显式差分格式 1 是条件稳定的差分格式。

(2) 隐式差分格式（格式 2）

隐式差分格式是无条件稳定的，即不论步长如何选取，差分格式总是稳定的。

(3) 六点格式（Crank－Nicolson）（格式 3）

六点格式也是无条件稳定的。

432210

（4）Richardson 格式（格式 4）

Richardson 格式是完全不稳定的，即不论取什么样的步长，这种格式总是不稳定的。

（5）加权六点格式（格式 5）

在加权六点格式中，当加权系数 θ 为 $\frac{1}{2}\leqslant\theta\leqslant 1$ 时，为无条件稳定，而当加权系数 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{1}{2}$，只有 $r=\frac{\Delta t}{\Delta x}\leqslant\frac{1}{2\ (1-2\theta)}$ 时，本差分格式才稳定，因此格式 5 是条件稳定格式。

现在进一步介绍稳定分析的方法。由于方程的复杂性，目前在线性稳定方面较成熟，而在非线性稳定分析方面，虽已进行了不少工作，但离实际还有一定距离，大都仍利用线性稳定的结果，经适当修正，并通过实验来确定。

线性稳定分析的方法较多，常用的有离散扰动法；Von Neumann 稳定分析法和 Hirt 稳定分析法。下面分别介绍这些方法的一些结果。

（a）离散扰动法

在对流扩散方程中，采用时间前差一空间中心差的格式，考虑点扰动，经分析可得出稳定要求的条件为

$$\Delta t\leqslant\frac{2}{\frac{2A}{(\Delta x)^2}-\frac{u}{\Delta x}}$$

和

$$\frac{u\Delta x}{A}\leqslant 2$$

式中 A——扩散系数；

u——流速；

$\frac{u\Delta x}{A}$——网格雷诺数 Re。

将上二式组合，可得 Courant 数稳定条件为

$$C=\frac{u\Delta t}{\Delta x}\leqslant 1\ 或\ \Delta t\leqslant\frac{\Delta x}{u}$$

和

$$\Delta t\leqslant\frac{2A}{u^2}$$

(b) Von Neumann 稳定分析法

该法是分析解的各个富里叶分量的变化特性，这种分析所得的是按步稳定性。该法在分析时采用了一个幅度因子 G，其定义为

$$\epsilon^{n+1}=G\epsilon^{n}$$

根据稳定性要求，必须使各富里叶分量的幅度因子满足

$$|G|\leqslant 1$$

利用此条件，经分析计算，得出稳定性的条件与离散扰动法的结果一致，即

$$C=\frac{u\Delta t}{\Delta x}\leqslant 1$$

$$\Delta t\leqslant\frac{2A}{u^2}$$

(c) Hirt 稳定分析法

Hirt 是把有限差分方程的每一项展开成 Taylor 级数，建立一个偏微分方程，然后从方程解的连续性来确定稳定条件。该法只得出稳定条件为

$$\Delta t\leqslant\frac{2A}{u^2}$$

但没揭示网格雷诺数的限制，因此只是提供了一个必要但不充分的条件。

上述三种方法得出同样的结果，其中 Von Neumann 方法较严格，因而应用较广。利用此法分析水平二维对流一扩散方程得出稳定性条件为

$$A\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}+A\frac{\Delta t}{(\Delta y)^2}\leqslant\frac{1}{2}$$

和

$$u\frac{\Delta t}{\Delta x}+v\frac{\Delta t}{\Delta y}\leqslant 1$$

由上式可得

$$\Delta t\leqslant\frac{1}{2A}\left(\frac{(\Delta x)^2\cdot(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)$$

和

$$\Delta t\leqslant\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{u\Delta y+v\Delta x}$$

如在 $\Delta x=\Delta y=\Delta$ 的特殊情况，则得

$$\Delta t\leqslant\frac{\Delta^2}{4A}$$

和

$$\Delta t\leqslant\frac{\Delta}{u+v}$$

显然，这比一维的稳定条件要严格，但网格雷诺数的限制要松一些。

3.4.3 收敛性分析

在选择差分格式时，最关心的问题是，根据此格式建立的差分方程的精确解 f_i^n，是否逼近于微分方程的精确解 $f_{(x,t)}$。通常，即研究下式是否成立，

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta t\to 0}} f_i^n=f_{(x,t)}$$

$$x=i\Delta x \qquad y=n\Delta t$$

$$i=1,\ 2\cdots\cdots i_0$$

$$n=1,\ 2,\ \cdots\cdots$$

或

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta t\to 0}} \varepsilon_i^n=0$$

这就是收敛性问题。如上式成立，则称此差分方程是收敛的。

收敛的前提是解的稳定性，只有稳定性的解才有收敛的可能性，而不稳定性的解是绝对不收敛的。

现在我们来讨论当 $\Delta x\to 0$ 和 $\Delta t\to 0$ 时，2.3.1.2 节所提出的五种差分格式的收敛性问题。

（1）古典显式格式（格式 1）

设对流扩散方程的解在计算域内有连续偏导数，其解为 $f_{(x,t)}$，差分方程的精确解为 f_i^n，微分方程的解与差分方程的解之差为

$$\varepsilon_i^n=f_{(x,t)}-f_i^n$$

显然它应满足下式

$$\varepsilon_i^{n+1}=(1-2r)f_i^n+r(f_{i+1}^n-f_{i-1}^n)+\Delta t\cdot O(\Delta t+(\Delta x)^2)$$

如将上式写成向量形式

$$\varepsilon^{n+1}=A\varepsilon^n+\Delta t\cdot e^n \qquad (n=1,2,\cdots N_0-1)$$

由此得

$$\varepsilon^{n+1}=\Delta t(A^n e^0+A^{n-1}e^1+A^{n-2}e^2+\cdots+Ae^{n-1}+e^n)$$

令

$$\|\varepsilon^n\|_m=\max_i\|f_i^n\|$$

$$\|e^n\|_m=\max_i\|e_i^n\|=O(\Delta t+(\Delta x)^2)=O((\Delta x)^2)$$

则 $\|f^{n+1}\|_m\leqslant\Delta t(\|A\|_m^n\|e^0\|_m+\|A\|_m^{n-1}\|e^1\|_m+\cdots+\|A\|_m\|e^{n-1}\|+\|e^n\|$

当 $0<r\leqslant\frac{1}{2}$ 时

$$\|A\|_m\leqslant\max_n\sum_{n=1}^{N_0-1}|a_{ij}|=r+(1-2r)+r=1$$

故有

$$\|\varepsilon^n\|_m\leqslant n\Delta t\cdot O((\Delta x)^2)\leqslant T\cdot O((\Delta x)^2)$$

（对一切 n 成立）

式中 T 为整个时间长，因而得

$$|\varepsilon_i^n|\leqslant T\cdot O((\Delta x)^2) \qquad (\text{对一切 } i,\ n \text{ 成立})$$

由此可证得，古典显式格式（格式 1）在 $0<r\leqslant\frac{1}{2}$ 的范围内，即 $0<\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\leqslant\frac{1}{2}$ 的范围内是一致收敛的。

（2）隐式差分格式（格式 2）

采用上述同样的分析方法，不论 $\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ 如何取值，隐式差分格式（格式 2）是一致收敛的。

（3）六点格式（Crank－Nicolson）（格式 3）

经分析得，只要 $r>0$，即 $\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}>0$，不论其取值如何，本格式都是一致收敛的。

（4）Richardson 格式（格式 4）

经证明，不论 r 取何值，本格式总是不收敛的。

(5) 加权六点格式（格式 5）

经证明，当加权系数 θ 取 $\frac{1}{2}\leqslant\theta\leqslant 1$ 时，不论 r 取何值，本格式都是一致收敛的。

当加权系数 θ 在 $0\leqslant\theta<\frac{1}{2}$ 时，只有 r 满足

$$r\leqslant\frac{1}{2\ (1-2\theta)}$$

本格式才一致收敛。

以上讨论了五种格式的收敛性，还须提醒的是，应注意收敛速度，如果收敛速度很慢，即使是一阶收敛，在工程上也是不可取的。

3.4.4 效率分析和综合评价

以上我们介绍了误差、稳定性和收敛性，在评价数值模拟的计算程序时，通常都以误差小、稳定性好和收敛性快来衡量，如仅从这个标准来考虑，则隐式格式是最好的，因为它有无条件稳定性，时间步长可取得较大，因而计算机的机时可大大地减少。M·Amein 曾利用特征线法、显式法和隐式法计算了美国北卡罗来纳（North Corolina）州的纽斯河（Neuse River）1945 年洪水过程，结果如表 3-4-4 所示。

表 3-4-4 不同计算方法的结果

方 法	渠道断面	$\Delta t(h)$	$\Delta x(km)$	计算时间(s)
显 式	复 式	0.025	1.5	469
显 式	复 式	0.025	3.0	239
特征线	复 式	0.48	2.0	130
特征线	复 式	0.74	4.7	88
特征线	复 式	1.0	7.7	39
隐 式	复 式	1.0	3.0	89

方　法	渠道断面	$\Delta t(h)$	$\Delta x(km)$	计算时间(s)
隐　式	复　式	5.0	3.0	65
隐　式	复　式	10.0	3.0	29
隐　式	复　式	20.0	3.0	17
隐　式	离　散	1.0	3.0	111
隐　式	离　散	2.0	3.0	87
隐　式	离　散	5.0	3.0	58

由表 3-4-4 可知，仅从减少机时这一点来看，隐式格式有很大的优越性。但评价一个格式，不能完全从花费机时多少来确定，应全面来衡量。

根据笔者经验，完成一个大型工程的数值模拟系统所花费的时间大致如下：

收集资料与整理　　2～3 个月
程序验证与校核　　1～1．5 个月
工程方案的数值模拟　1～1．5 个月
试验成果整编　　0．5 个月
编写报告及印刷　　1 个月

在上述整个工作过程中，大部分时间用于资料整编、水文地形资料输入、计算网格生成、计算成果输出及图表绘制等，这时需用大量机时，而数值计算花费的机时所占的比重一般都较小，即使如表 3-4-4 所示，显式比隐式的机时要多 10 倍左右，但在整个机时利用中，数值计算花费的机时仍很小，因此，从机时利用来分析，隐式与显式之差不是决定因素。

在某些工程问题中，往往要求采用较小的时间步长 Δt，如波浪模型；而在另一问题中，如洪水传播等，则可采用较大的时间步长 Δt。因此，采用显式格式还是隐式格式，应根据工程特点来确定。

参 考 文 献

1. 罗奇 D J，钟锡昌等译．计算流体动力学．北京：科学出版社．1983
2. 汪德爟．计算水力学．理论与应用．南京：河海大学出版社，1989
3. 王尚毅，顾元棣，郭传镇．河口工程泥沙数学模型．北京：海洋出版社．1990

第四章　明渠缓变非恒定流一维数值模拟

4.1　引　言

在自然界中，河道（或网河）的水流或洪水激流运动、峡口或潮汐通道的潮波运动、三角洲网河口的潮波顶托、电站日调节的水流泄放、闸门启闭后的水波运动等，这些都属于水力学中缓变不恒定流运动，这是水力水电工程和海岸工程中经常遇到且必须研究解决的问题。

关于明渠非恒定流问题，1871 年法国圣维南（de Saint Venant）根据 Boussinesq 提出的缓变流定义而建立的非恒定方程（即圣维南水力方程组），至今仍被工程界所采用，成为一维非恒定流数值模拟的基础。

Boussinesq 在引入缓变流的定义时，曾对缓流作了以下几点解释：

（1）明渠中的水流具有小坡度和微弯曲的轴线；

（2）过水断面可以为任意形状，但渠底与自由水面和水平轴线间的倾角较小；

（3）水流参变数（如流速、水面坡等）变化缓慢，随时间而变化的速率很小；

（4）水流速度几乎和渠轴平行，流层的曲率也很小。

根据上述定义，1871 年，法国圣维南进一步作了以下几点假设：

（1）水流是一维的，即过水断面的流速呈均匀分布，渠道曲率所产生的离心力可忽略不计；

（2）水力压力分布与静水压力分布一致，即垂直方向的加速度可忽略不计；

（3）水流表面在横向是水平的；

（4）流体密度是均匀不变的；

（5）边界阻力及湍流效应均作为阻力处理。

根据以上假设，圣维南建立了缓变流的两个方程，其中

连续方程

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}=0 \tag{4-1-1}$$

动量方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(gz+\frac{1}{2}u^2\right)=-g\frac{u|u|}{C_f^2R} \tag{4-1-2}$$

上二式与式（2-1-9）和式（2-1-10）一致。前面已指出，不同作者习惯用不同形式，在以后介绍有关作者的成果时，将看到这一点。

圣维南方程组中有两个方程，未知数也只有两个，常用的两个未知数是流量 Q 和过水断面 A，或流速 u 和水深 h，方程数与未知数相等，结合定解条件即可求解。

如果某河流的计算断面为 N 个，每个断面上有 2 个未知数，N 个断面就有 $2N$ 个未知数。而 N 个断面形成（$N-1$）个河段，可建立 $2\times(N-1)$ 个方程，再加上两端上、下游边界条件两个方程，则未知数与方程数相等，因此可求得解答。

在计算中，上、下游两端边界均可用流量（或流速）和水位（或流速）控制，因而存在四种组合情况，但最常用的边界条件是：上游用流量（或流速），下游用水位（或流速）。

初始条件则常用水深（或水位）等于静止时的水深（或水位）和流速为零。

下节将分单支和河网两种情况介绍国内外常用的几种数值模拟方法。

4.2 单支明渠一维非恒定流的数值模拟

以下简单介绍几种常用的计算格式

4.2.1 蛙跳格式

基本控制方程

连续方程

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{1}{B}\frac{\partial Q}{\partial x}=0 \tag{4-2-1}$$

动量方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+g\frac{\partial \zeta}{\partial x}+g\frac{|u|u}{C^2R}=0 \tag{4-2-2}$$

现采用时间中心差一空间中心差格式、则上式的差分方程为

$$\frac{\zeta_i^{n+1}-\zeta_i^{n-1}}{2\Delta t}+\frac{1}{B_i^n}\frac{Q_{i+1}^n-Q_{i-1}^n}{2\Delta x}=0$$

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^{n-1}}{2\Delta t}+u_i^n\frac{u_{i+1}^n-u_{i-1}^n}{2\Delta x}+g\frac{\zeta_{i+2}^n-\zeta_{i-1}^n}{2\Delta x}+g\frac{|u_i^n|u_i^n}{(C_i^n)^2R_i^n}=0$$

上二式经整理后可得显式代数方程组

$$\zeta_i^{n+1}=\zeta_i^{n-1}-\frac{\Delta t}{\Delta x}\frac{1}{B_i^n}(Q_{i+1}^n-Q_{i-1}^n) \tag{4-2-3}$$

$$u_i^{n+1}=u_i^{n-1}-\frac{\Delta t}{\Delta x}u_i^n(u_{i+1}^n-u_{i-1}^n)-\frac{g\Delta t}{\Delta x}(\zeta_{i+1}^n-\zeta_{i-1}^n)$$

$$-2g\Delta t\frac{|u_i^n|u_i^n}{(C_{si}^n)^2R^n} \tag{4-2-4}$$

上式中的阻力项可采用不同的离散形式，如

$$2g\Delta t\frac{|u_i^n|u_i^n}{(C_{si}^n)^2R^n}=2g\Delta t\frac{|u_i^n|}{(C_{si}^n)^2R^n}(\phi u_i^{n+1}+(1-\phi)u_{i-1}^n)$$

φ 为权函数，$0\leqslant\varphi\leqslant1$，若取 $\varphi=1/2$，则

$$2g\Delta t\frac{|u_i^n|u_i^n}{(C_{si}^n)^2R^n}=g\Delta t\frac{|u_i^n|}{(C_{si}^n)^2R^n}(u_i^{n+1}-u_i^{n-1})$$

代入（4-2-4）可得

$$u_i^{n+1}=\frac{1}{1+\frac{g\Delta t|u_i^n|}{(C_{ri}^n)^2R}}\left\{\left[1+\frac{g\Delta t|u_i^n|}{(C_{ri}^n)^2R}\right]u_i^{n-1}-\frac{g\Delta t}{\Delta x}(\zeta_{i+1}^n-\zeta_{i-1}^n)\right.$$

$$\left.-\frac{\Delta t}{\Delta x}u_i^n(u_{i+1}^n-u_{i-1}^n)\right\} \qquad (4\text{-}2\text{-}5)$$

蛙跳式是较简单且使用较方便的显式法。从连续方程的差分格式来看，当河宽 B 为常值时，此式为二阶精度，但由于求出的函数值是在奇偶互相交替点上，因此会出现锯齿形波动，甚至是不合理的跳动。要想避免蛙跳式的这一缺点，可采取光滑结果曲线，但这又会影响精度。

通过稳定性与精度分析可知，当本格式满足下式 Courant 稳定性条件

$$\frac{\Delta t}{\Delta x}\leqslant\frac{1}{|u_0\pm C|}$$

时，本格式的扰动既不衰减、也不扩大，因而没有不稳定的危险，但不连续波的传播方式不变，这是一种不扩散的格式。如果上述 Courant 条件不满足，则本格式是不稳定的。

4.2.2 Lax 格式

现考虑如下的对流方程

$$\frac{\partial f}{\partial t}+u\frac{\partial f}{\partial x}=0 \qquad (4\text{-}2\text{-}6)$$

(4-2-6) 式的最简单的一种差分格式（即时间前差和空间中心差）如下：

$$\frac{f_i^{n+1}-f_i^n}{\Delta t}+u\frac{f_{i+1}^n-f_{i-1}^n}{2\Delta x}=0 \qquad (4\text{-}2\text{-}7)$$

经分析，式 (4-2-7) 是不稳定的。为了使其稳定，Lax (1954) 令

$$\frac{1}{2}(f_{i+1}^n+f_{i-1}^n)=f_i^n$$

将此式代入式 (4-2-7)，可得一个新的差分方程

$$\frac{f_i^{n+1}-\frac{1}{2}\ (f_{i+1}^n+f_{i-1}^n)}{\Delta t}+u\frac{f_{i+1}^n-f_{i-1}^n}{2\Delta x}=0$$

经分析，上式的稳定条件为

$$u\frac{\Delta t}{\Delta x}\leqslant 1$$

这种增加稳定性的方法是对原差分格式引进一个耗散界面所致。

Lax 格式中，f_i^n 还可用其他一些公式来代替，下面是常用的三种方法

中心差分　$f_i^n=\alpha f_{i+1}^n+\ (1-2\alpha)\ f_i^n+\alpha f_{i-1}^n$　　$(0<\alpha\leqslant 1)$

前　　差　$f_i^n=\alpha f_{i-1}^n+\ (1-\alpha)\ f_i$　　$(0<\alpha\leqslant 1)$

后　　差　$f_i^n=\ (1-\alpha)\ f_i^n+\alpha f_{i-1}^n$　　$(0<\alpha<1)$

将上述公式代入式(4-2-7)，可得不同的差分方程，其一般的稳定条件是 $\alpha\leqslant\frac{1}{2}$ 和 $u\frac{\Delta t}{\Delta x}<1$，这就是 Lax 格式，在显式格式中常用这种方法。

4.2.3　迎风格式

在显式格式中，为了增加稳定性，并赋以物质传输特性，可采用迎风格式。其方法是使传输方程中的空间偏导数项可按流速 u 的不同方向采用不同差分格式，如设流速 u 的方向与 x 轴一致时为正，与 x 轴方向相反时为负，空间差分格式将随 u 的不同方向分别采用前差或后差。如以传输方程为例，其差分格式为

$$\frac{f_i^{n+1}-f_i^n}{\Delta t}+u\frac{f_i^n-f_{i-1}^n}{\Delta x}=0\qquad u>0$$

和

$$\frac{f_i^{n+1}-f_i^n}{\Delta t}+u\frac{f_{i+1}^n-f_i^n}{\Delta x}=0\qquad u<0$$

上二式亦可合并写成一个公式的形式

$$\frac{f_i^{n+1}-f_i^n}{\Delta t}+\frac{u}{2\Delta x}\left[(1-Eu)\ (f_{i+1}^n-f_i^n)\ +\right.$$
$$\left.(1+Eu)\ (f_i^n-f_{i-1}^n)\right]=0$$

上式中，$Eu=\text{sign}\ (u)$。

迎风格式的稳定条件为 Courant 数$\leqslant 1$，即

$$u\frac{\Delta t}{\Delta x}\leqslant 1$$

4.2.4 Dufort—Frankel 蛙跳格式

在 4.2.1 节中，已简述了蛙跳法，它有二阶精度，但用于扩散方程时，就变成了无条件不稳定格式。为了克服这个缺点，采用了如下的综合格式

$$\frac{f_i^{n+1}-f_i^{n-1}}{\Delta t}+\frac{uf_{i+1}^n-uf_{i-1}^n}{2\Delta x}=A\frac{f_{i+1}^n-2f_i^n+f_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}=0$$

这种格式的综合截断误差为 $O\ (\Delta t, (\Delta x)^2)$，实际上，当 Δt 取得较小时，综合截断误差将达到 $O\ (\ (\Delta t)^2, (\Delta x)^2)$。但上式的稳定条件由 $u\frac{\Delta t}{\Delta x}\leqslant 1$ 和 $A\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\leqslant\frac{1}{2}$ 两个条件来保证，Δt 取这两个式中所确定的小值。为了消除扩散项对 Δt 的限制，Doufort—Frankel 将扩散项中心点的 f_i^n 用 f_i^{n-1} 和 f_i^{n+1} 两层的平均值来代替，即得

$$\frac{f_i^{n+1}-f_i^{n-1}}{2\Delta t}+u\frac{f_{i+1}^n-f_{i-1}^n}{2\Delta x}=A\frac{f_{i+1}^n+f_{i-1}^n-\ (f_i^{n+1}+f_i^{n-1})}{(\Delta x)^2}$$

上式经整理，可得显式解为

$$f_i^{n+1}=\left[f_i^{n-1}-\frac{\Delta t}{\Delta x}\ (uf_{i+1}^n-uf_{i-1}^n)\ +\frac{2A\Delta t}{(\Delta x)^2}\ (f_{i+1}^n+f_{i-1}^n-f_i^{n-1})\right]$$

$$/\left[1+\frac{2A\Delta t}{(\Delta x)^2}\right]$$

这就是有名的 Dufort—Frankel 格式，这种格式的稳定性条件只是 $u\frac{\Delta t}{\Delta x}\leqslant 1$，而不必考虑扩散项条件的限制。

4.2.5 Lax—Wendroff 格式

这种格式曾非常成功地用在一些流体力学的问题中，其基本优点是可将一些短波分量阻尼掉。下面用 Saint—Venant 方程的守恒形式来讨论该格式。

Saint－Venant 方程

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{P}{\rho}+\frac{Q^2}{A}\right)+gAS_0+g\frac{|Q|Q}{K^2}=0 \tag{4-2-8}$$

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}=0 \tag{4-2-9}$$

式中

$$\frac{P}{\rho}=g\int_0^h(h-\zeta)\,b\,(\zeta)\mathrm{d}\zeta=gI$$

对於梯形截面（见图 4-2-1）

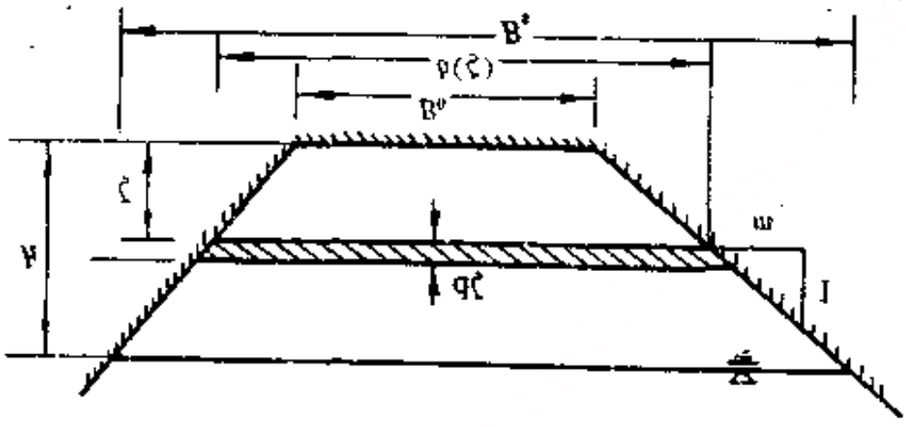


图 4-2-1　梯形断面图

$$I=\int_0^h(h-\zeta)\,(B_0+2m\zeta)\,\mathrm{d}\zeta=\frac{B_0h^2}{2}+\frac{mh^3}{3}$$

对于矩形截面

$$I=\frac{B_0h^2}{2}$$

为了将（4-2-8）式和（4-2-9）式写成矩阵形式，设

$$W=\begin{Bmatrix}Q\\A\end{Bmatrix} \tag{4-2-10}$$

$$F(\omega)=\begin{Bmatrix}gI+\dfrac{Q^2}{A}\\Q\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}F_1\\F_2\end{Bmatrix} \tag{4-2-11}$$

$$T=\begin{Bmatrix}gAS_0+g\dfrac{|Q|Q}{K^2}\\Q\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}T_1\\T_2\end{Bmatrix} \tag{4-2-12}$$

则（4-2-8）式和（4-2-9）式写成

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial F(w)}{\partial x}+T=0 \tag{4-2-13}$$

设（4-2-13）式中的函数 w 是可求导的，则

$$W(x,\ t+\Delta t)=w(x,\ t)+\Delta t\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\cdots \tag{4-2-14}$$

由（4-2-13）式得

$$\frac{\partial w}{\partial t}=-\left(\frac{\partial F(w)}{\partial x}+T\right) \tag{4-2-15}$$

和

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=-\frac{\partial^2 F(w)}{\partial t\partial x}-\frac{\partial T}{\partial t} \tag{4-2-16}$$

由（4-2-11）求得

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\begin{Bmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x}\\ \frac{\partial F_2}{\partial x}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\frac{2Q}{A}\frac{\partial Q}{\partial x}+\left[g\frac{\partial I}{\partial A}-\frac{Q^2}{A}\right]\frac{\partial A}{\partial x}\\ \frac{\partial Q}{\partial x}\end{Bmatrix} \tag{4-2-17}$$

或写成

$$\frac{\partial F}{\partial x}=k\frac{\partial w}{\partial x}$$

上式中

$$k=\begin{Bmatrix}\frac{2Q}{A} & g\frac{\partial I}{\partial A}-\frac{Q^2}{A}\\ 1 & 0\end{Bmatrix}$$

矩阵 R 的特征值 λ 是

$$\lambda_{1,2}=\frac{Q}{A}\pm\sqrt{g\frac{\partial I}{\partial A}}$$

由此可得，接近于矩形断面的天然宽浅河道的数值计算稳定条件为

$$\left|u\pm\sqrt{g\frac{A}{B}}\right|\frac{\Delta t}{\Delta x}<1$$

对于梯形断面

$$\frac{\partial I}{\partial A}=\frac{\partial I}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial A}$$

因为 $$h=\frac{B-B_0}{2m}=\frac{1}{2m}\left(-B+\sqrt{B_0^2+4mA}\right)$$

$$\frac{\partial I}{\partial h}=\frac{2B_0h}{2}+\frac{3mh^2}{3}=A$$

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}A}=\frac{1}{B_0}$$

由此得

$$\frac{\partial I}{\partial A}=\frac{A}{B}$$

设 $$E=g\frac{\partial I}{\partial A}-\frac{Q^2}{A^2}=g\frac{A}{B}-\frac{Q^2}{A^2}$$

由此进一步得

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\begin{Bmatrix}\frac{2Q}{A} & E\\ 1 & 0\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{\partial Q}{\partial x}\\ \frac{\partial A}{\partial x}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x}\\ \frac{\partial F_2}{\partial x}\end{Bmatrix}$$

和

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial t}=\begin{Bmatrix}\frac{\partial^2 F_1}{\partial x\partial t}\\ \frac{\partial^2 F_2}{\partial x\partial t}\end{Bmatrix}$$

对（4-2-17）式进行微分后，再用下列变换式

$$\frac{\partial Q}{\partial t}=-\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}+T_1\right)=-D_1;\quad \frac{\partial^2 Q}{\partial t\partial x}=-\frac{\partial D_1}{\partial x}$$

$$\frac{\partial A}{\partial t}=-\frac{\partial Q}{\partial x};\quad \frac{\partial^2 A}{\partial x\partial t}=-\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial A\partial t}=-\frac{\partial^2 I}{\partial A^2}\cdot\frac{\partial Q}{\partial x}$$

由此可得

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{R\begin{bmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x}+T_1\\ \frac{\partial F_2}{\partial x}+T_2\end{bmatrix}\right\}-\frac{\partial T}{\partial t}\qquad(4\text{-}2\text{-}18)$$

或

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\left\{\begin{bmatrix}\frac{2Q}{A} & E\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x}+T_1\\ \frac{\partial F_2}{\partial x}+T_2\end{bmatrix}\right\}-\frac{\partial T}{\partial t} \tag{4-2-19}$$

式中的 $T_2=0$。将（4-2-15）式，（4-2-16）式，（4-2-19）式代入（4-2-14）式，可得

$$W(x,\ t+\Delta t)=w(x,\ t)-\Delta t\left(\frac{\partial F}{\partial x}+T\right)+\frac{(\Delta t)^2}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}R\left(\frac{\partial F}{\partial x}+T\right)-\frac{\partial T}{\partial t}\right] \tag{4-2-20}$$

则微分方程的差分形式为

$$W_i^{n+1}=W_i^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\Delta^1 F_i^n+T_i^n\Delta x\right]+\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\cdot\left[R_{i+\frac{1}{2}}^n\left(\Delta F_{i+\frac{1}{2}}^n+T_{i+\frac{1}{2}}^n\Delta x\right)-R_{i-\frac{1}{2}}^n\left(\Delta F_{i-\frac{1}{2}}^n+T_{i-\frac{1}{2}}^n\Delta x\right)+P_i^n\Delta x^2\right] \tag{4-2-21}$$

上式中各符号意义如下

$$\Delta(\cdot)_{i+\frac{1}{2}}=(\cdot)_{i+1}-(\cdot)_i;$$

$$\Delta^1(\cdot)_i=\frac{1}{2}\left[(\cdot)_{i+1}-(\cdot)_{i-1}\right];$$

$$(\cdot)_{i+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left[(\cdot)_{i+1}+(\cdot)_i\right];$$

$$T_i^n=\begin{Bmatrix}gA_i^nS_0+g\dfrac{|Q_i^n|Q_i^n}{(K_i^n)^2}\\ 0\end{Bmatrix}$$

$$T_{i+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(T_i^n+T_{i+1}^n\right)$$

$$P_i^n=-\frac{\partial T}{\partial t}$$

从式（4-2-21），即可列出 A^{n+1} 和 Q^{n+1} 的显式计算式。此格式有二阶精度，并且是非耗散的。

4.2.6 Preissmann（Sogreah）格式

根据 Preissmann 提出的方法，参考图 4-2-2，函数和导数的离散形式为

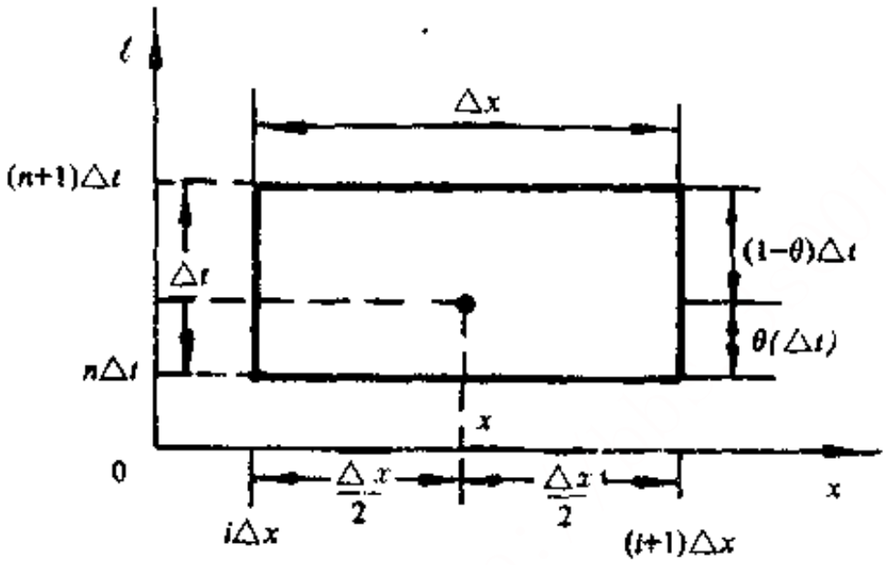


图 4-2-2 离散点示意图

$$f_{(x,y)}=\frac{\theta}{2}\left(f_{i+1}^{n+1}+f_{i}^{n+1}\right)+\frac{1-\theta}{2}\left(f_{i+1}^{n}+f_{i}^{n}\right) \tag{4-2-22}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\theta\frac{f_{i+1}^{n+1}-f_{i}^{n+1}}{\Delta x}+(1-\theta)\frac{f_{i+1}^{n}-f_{i}^{n}}{\Delta x} \tag{4-2-23}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{f_{i+1}^{n+1}+f_{i}^{n+1}-f_{i+1}^{n}-f_{i}^{n}}{2\Delta t} \tag{4-2-24}$$

式中 θ——权系数，$0\leqslant\theta\leqslant1$。

现采用如下水流运动方程组

$$\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{1}{B}\frac{\partial Q}{\partial x}=0 \tag{4-2-25}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\alpha u^2}{2}\right)+g\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{g|Q|Q}{K^2}=0 \tag{4-2-26}$$

式中，α——非均匀流的流速分布校正系数，如以 $u=Q/A$ 代入上式，则得动量方程的另一种形式

$$\frac{\partial Q}{\partial t}-\frac{QB}{A}\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\alpha Q}{A}\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\alpha Q^2}{A^2}\frac{\partial A}{\partial x}+gA\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{Q^2}{2A}\frac{\partial \alpha}{\partial x}$$

$$-Ag\frac{|Q|Q}{K^2}=0 \tag{4-2-27}$$

为了将上述微分方程变成差分方程，采用如下表示方法，$f^{n+1}=f^n+\Delta f$，则（4-2-22）～（4-2-24）式的函数和导数的表达式变成如下式：

$$f_{(x,t)}=\frac{\theta}{2}(\Delta f_{i+1}+\Delta f_i)+\frac{1}{2}(f^n_{i+1}+f^n_i) \tag{4-2-28}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\theta\frac{\Delta f_{i+1}-\Delta f_i}{\Delta x}+(1-\theta)\frac{f^n_{i+1}-f^n_i}{\Delta x} \tag{4-2-29}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\Delta f_{i+1}-\Delta f_i}{2\Delta t} \tag{4-2-30}$$

将（4-2-28）～（4-2-30）式代入连续方程（4-2-25）式和动量方程（4-2-27）式，并经线性化处理后，可得连续方程和动量方程的线性方程分别为

$$A_i\Delta z_{i+1}+B_i\Delta Q_{i+1}=C_i\Delta z_i+D_i\Delta Q_i+G_i \tag{4-2-31}$$

$$A'_i\Delta z_{i+1}+B'_i\Delta Q_{i+1}=C'_i\Delta z_i+D'_i\Delta Q_i+G'_i \tag{4-2-31}$$

上式中各系数表示式如下：

$$A_i=1-\frac{4\theta\Delta t}{\Delta x}\frac{Q_{i+1}-Q_i}{(B_{i+1}+B_i)^2}\cdot\frac{dB_{i+1}}{dz}$$

$$B_i=\frac{4\theta\Delta t}{\Delta x}\frac{1}{B_{i+1}+B_i}$$

$$C_i=-1+\frac{4\theta\Delta t}{\Delta x}\frac{Q_{i+1}-Q_i}{(B_{i+1}+B_i)^2}\frac{dB_i}{dz_i}$$

$$D_i=\frac{4\theta\Delta t}{\Delta x(B_{i-1}+B_i)}$$

$$G_i=\frac{-4\Delta t}{\Delta x(B_{i-1}+B_i)}(Q_{i-1}-Q_i)$$

$$A'_i=-\frac{1}{2}\left(\frac{Q_{i+1}B_{i+1}}{A_{i+1}}+\frac{B_iQ_i}{A_i}\right)+\theta\frac{\Delta t}{\Delta x}\{(Q_{i+1}-Q_i)\cdot\left(\frac{Q_{i-1}}{A_{i-1}}\frac{d\alpha_{i+1}}{dz_{i+1}}-\frac{Q_{i+1}B_{i+1}\alpha_{i+1}}{A^2_{i+1}}\right)-B_{i+1}\left(\frac{\alpha_{i+1}Q^2_{i+1}}{A^2_{i+1}}+\frac{\alpha_iQ^2_i}{A^2_i}\right)$$

$$-\frac{Q^2_{i+1}}{A^2_{i+1}}(A_{i+1}-A_i)\left(\frac{d\alpha_{i+1}}{dz_{i+1}}-\frac{2\alpha_{i+1}B_{i+1}}{A_{i+1}}\right)$$

$$+gB_{i+1}\ (z_{i+1}-z_i)\ -\frac{Q_{i+1}^2 B_{i+1}}{2A_{i+1}^2}\ (\alpha_{i+1}-\alpha_i)$$

$$+g\ (A_{i+1}+A)\ -\frac{1}{2}\left(\frac{Q_{i+1}^2}{A_{i+1}}+\frac{Q_i^2}{A_i}\right)\frac{\mathrm{d}\alpha_{i+1}}{\mathrm{d}z_{i+1}}\Bigg\}$$

$$-g\theta\Delta t\ \frac{|Q_{i+1}|Q_{i+1}}{K_{i+1}^2}\left(B_{i+1}-\frac{2A_{i+1}}{K_{i+1}}\frac{\mathrm{d}K_{i+1}}{\mathrm{d}z_{i+1}}\right)$$

$$B_i=1+\frac{\theta\Delta t}{\Delta x}\left\{\frac{\alpha_{i+1}Q_{i+1}}{A_{i+1}}-\frac{\alpha_i Q}{A}+\ (Q_{i+1}-Q)\ \frac{\alpha_{i+1}}{A_{i+1}}\right.$$

$$-\ (A_{i+1}-A)\ \frac{2\alpha_{i+1}Q_{i+1}}{A_{i+1}^2}+\ (\alpha_{i+1}-\alpha_i)\ \frac{Q_{i+1}}{A_{i+1}}\Bigg\}$$

$$-2g\theta\Delta t\ \frac{A_{i+1}|Q_{i+1}|}{K_{i+1}^2}$$

$$C_i=\frac{1}{2}\left(\frac{Q_{i+1}B_{i+1}}{A_{i+1}}+\frac{QB_i}{A}\right)-\frac{\theta\Delta t}{\Delta x}\{(Q_{i+1}-Q)$$

$$\left(\frac{Q}{A}\frac{\mathrm{d}\alpha_i}{\mathrm{d}z_i}-\frac{QB_i\alpha_i}{A^2}\right)-B_i\left(\frac{\alpha_{i+1}Q_{i+1}}{A_{i+1}^2}+\frac{\alpha_i Q^2}{A^2}\right)-\frac{Q^2}{A^2}\ (A_{i+1}-A)$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\alpha_i}{\mathrm{d}z_i}-\frac{2\alpha_i B_i}{A}\right)+gB_i\ (z_{i+1}-z_i)\ -\frac{Q^2B_i}{2A^2}\ (\alpha_{i+1}-\alpha_i)$$

$$-g\ (A_{i+1}+A)\ -\frac{1}{2}\left(\frac{Q_{i+1}^2}{A_{i+1}}-\frac{Q^2}{A}\right)\frac{\mathrm{d}\alpha_i}{\mathrm{d}z_i}\Bigg\}$$

$$+g\theta\Delta t\ \frac{|Q|Q}{K_i^2}\left(B_i-\frac{2A_i}{K_i}\frac{\mathrm{d}K_i}{\mathrm{d}z_i}\right)$$

$$D_i=-1-\frac{\theta\Delta t}{\Delta x}\left\{-\frac{\alpha_{i+1}Q_{i+1}}{A_{i+1}}-\frac{\alpha_i Q}{A}+\ (Q_{i+1}-Q)\ \frac{\alpha_i}{A_i}\right.$$

$$-\ (A_{i+1}-A)\ \frac{2\alpha_i Q}{A^2}+\ (\alpha_{i+1}-\alpha_i)\ \frac{Q}{A}\Bigg\}$$

$$+2g\theta\Delta t\ \frac{A_i|Q_i|}{K_i^2}$$

$$G_i=-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left\{(Q_{i+1}-Q)\ \left(\frac{\alpha_{i+1}Q_{i+1}}{A_{i+1}}+\frac{\alpha_i Q}{A}\right)-\ (A_{i+1}-A)\right.$$

$$\left(\frac{\alpha_{i+1}Q_{i+1}^2}{A_{i+1}^2}-\frac{\alpha_i Q^2}{A^2}\right)+g\ (z_{i+1}-z_i)\ (A_{i+1}-A)$$

$$+\left(\frac{Q_{i+1}^2}{2A_{i+1}}+\frac{Q^2}{2A}\right)\ (\alpha_{i+1}-\alpha_i)\Bigg\}$$

$$+g\Delta t\left(\frac{A_{i+1}Q_{i+1}|Q_{i+1}|}{K_{i+1}^2}+\frac{AQ|Q|}{K_i^2}\right)$$

由于 z_i^n，Q_i^n，z_{i+1}^n，Q_{i+1}^n为已知值，上述系数 A_i，B_i，C_i，D_i，G_i，A'_i，B'_i，C'_i，D_i和 G_i可由已知值求得，因此，(4-2-31) 式和 (4-2-32) 式是 Δz_i，ΔQ，Δz_{i+1}和 ΔQ_{i-1}的线性方程组。为了求解此方程组，设下式线性关系式成立，

$$\Delta Q=E_i\Delta z_i+F_i \tag{4-2-33}$$

将式 (4-2-33) 代入 (4-2-31) 式和 (4-2-32) 式，可得

$$A\Delta z_{i+1}+B_i\Delta Q_{i+1}=(C_i+DE_i)\Delta z_i+G_i+DF_i$$

和

$$A'_i\Delta z_{i+1}+B'_i\Delta Q_{i+1}=(C'_i+D_iE_i)\Delta z_i+G'_i+D_iF_i$$

上二式可整理成下面二式

$$\Delta z_i=\frac{A_i}{C_i+DE_i}\Delta z_{i+1}+\frac{B_i}{C_i+DE_i}\Delta Q_{i+1}+\frac{G_i+DF_i}{C_i+DE_i} \tag{4-2-34}$$

$$\Delta z_i=\frac{A'_i}{C'_i+D_iE_i}\Delta z_{i+1}+\frac{B'_i}{C'_i+D_iE_i}\Delta Q_{i+1}+\frac{G'_i+D_iF_i}{C'_i+D_iE_i} \tag{4-2-35}$$

上面二式中，第一式比第二式简单得多，将式 (4-2-34) 改写成

$$\Delta z_i=H_i\Delta z_{i+1}+K_i\Delta Q+M_i \tag{4-2-36}$$

式中

$$H_i=\frac{A_i}{C_i+DE_i};\quad K_i=\frac{B_i}{C_i+DE_i};\quad M=\frac{G_i+DF_i}{C_i+DE_i} \tag{4-2-37}$$

进一步从 (4-2-34) 式和 (4-2-35) 式中消去 Δz_i，则可得

$$\Delta Q_{i+1}=\frac{A_i(C'_i+D_iE_i)-A'_i(C_i+DE_i)}{B'_i(C_i+DE_i)-B_i(C'_i+D_iE_i)}\Delta z_{i+1}+\frac{(G_i+DF_i)(C'_i+D_iE_i)-(G'_i+D_iF)(C_i+DE_i)}{B'_i(C_i+DE_i)-B_i(C'_i+DE_i)}$$

参考 (4-2-33) 式的线性关系式，则上式可简写成

$$\Delta Q_{i+1}=E_{i+1}\Delta z_{i+1}+F_{i+1} \tag{4-2-38}$$

式中

$$E_{i+1}=\frac{A_i(C'_i+D_iE_i)-A'_i(C_i+DE_i)}{B'_i(C_i+DE_i)-B_i(C'_i+D_iE_i)} \tag{4-2-39}$$

$$F_{i+1}=\frac{(G_i+DF_i)\ (C_i'+D_iE_i)\ -\ (G_i'+D_iF_i)\ (C_i+DE_i)}{B_i'\ (C_i+DE_i)\ -B_i\ (C_i'+D_iE_i)}$$

(4-2-40)

通过以上推导，得出了（4-2-39）式和（4-2-40）式的循环系数递推公式，以及（4-2-33）式和（4-2-36）式的 Δz、ΔQ 的递推公式，只要有了起始断面和尾端断面的边界条件，即可利用上述各式，求出各断面的 Δz^{n+1} 和 ΔQ^{n+1}。通常起始边界给出 E_1 和 F_1、尾端边界给出水位具体数值。下面讨论各种情况的边界条件。

（1）已知水位过程，$z=z\ (t)$；

（2）已知流量过程，$Q=Q\ (t)$；

（3）已知水位—流量关系，$Q=Q\ (z)$。

现分别列出三种情况的起始条件和尾端边界条件如下：

1. **已知水位过程** $z=z\ (t)$

（1）起始边界

根据　　$\Delta Q_1=E_1\Delta z_1+F_1$

得

$$\Delta z_1=\frac{\Delta Q_1}{E_1}-\frac{F_1}{E_1}$$

为了保证 Δz_1 按 $z=z(t)$ 的条件变化而不受 ΔQ_1 的影响，因此可选择 E_1 为一个数量级很大的数，例如令 E_1 的数量级是 $10^4\sim10^6$，这时 $\frac{\Delta Q_1}{E_1}\approx0$，而 $F_1=-E_1\Delta z_1$，由此可得起始边界条件为

$$E_1=1.0\times10^5\sim1.0\times10^6$$

$$F_1=-E_1\times\Delta z_1$$

（2）尾端边界

可从 $z=z\ (t)$ 给出具体的 Δz_I 数值，下角标“I”为尾端断面数。

2. **已知流量过程** $Q=Q\ (t)$

（1）起始边界

根据　　$\Delta Q_1=E_1\Delta Z_1+F_1$

可令　　$E_1=0$ 及 $F_1=\Delta Q_1$

（2）尾端边界

可从流量过程得 ΔQ_2 的具体数值，

$$\Delta Q_2=Q_I^{n+1}-Q_I^n$$

由此得

$$\Delta z_I=\frac{\Delta Q_I}{E_I}=\frac{F_I}{E_I}$$

3. **已知水位--流量关系 $Q=Q(z)$**

（1）起始边界

已知

$$Q_1^n+\Delta Q_1=Q_{(z_1^n)}+\frac{dQ_{(z)}}{dz_1}\Delta z_1$$

得

$$\Delta Q_1=\frac{dQ_{(z)}}{dz_1}\Delta z_1+Q_{(z_1^n)}-Q_1^n$$

与

$$\Delta Q_1=E_1\Delta z_1+F_1$$ 比较，可得

$$E_1=\frac{dQ_{(z)}}{dz_1}$$

$$F_1=Q_{(z_1^n)}-Q_1^n\approx 0$$

（2）尾端边界

由 $Q_I^n=Q_{(z_I^n)}$ 和 $\Delta Q_I=E_I\Delta z_I+F_I$

得

$$Q_{(z_I^n)}+\frac{dQ}{dz_I}\Delta z_I=E_I\Delta z_I+F_I+Q_I^n$$

由此可得出

$$\Delta z_I=\frac{Q_{(z_I^n)}-F_I-Q_I^n}{E_I-\frac{dQ}{dz}}$$

将上述各边界条件结果汇总于表 4-2-1。

表 4-2-1　边界条件表

条　件	起始边界		尾端边界
	E_1	F_1	Δx_l
$z=z(t)$	$10^4\sim10^6$	$-E_1\Delta x_1$	Δx_l
$Q=Q(t)$	0	ΔQ_1	$\frac{\Delta Q_l}{E_l}-\frac{F_l}{E_l}$
$Q=Q_{(z)}$	$\frac{dQ_{(z)}}{dx_1}$	≈0	$\frac{Q_{(x_l)}-F_l-Q_l}{E_l-\frac{dQ}{dx}}$

以上简述了外边界条件的确定，下面进一步论述内边界条件的确定。所谓内边界是指河道几何形状不连续处或水力特性不连续点，如河流的汇合点、过水断面的突然改变处、堰闸过流处、集中水头损失处等。在这些地点，Saint－Venant 方程不适用，必须根据水力特性作特殊处理以建立内部边界条件。



图 4-2-3　渠道汇合的岔口处

内部边界条件通常包含两种相容条件，即流量的连续条件和动量守恒条件。举例来说，如图 4-2-3 所示的渠道汇合的岔口处，应该满足以下两个条件，即

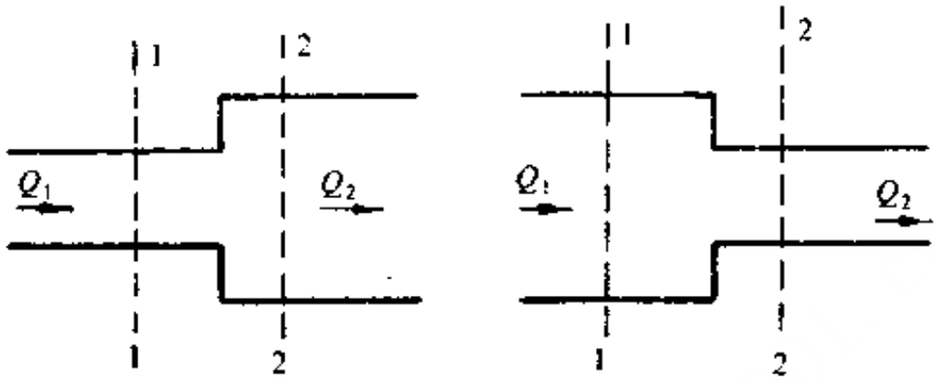
（1）流量之和等于零 $Q_3-Q_1-Q_2=0$；

（2）汇合点的水位相等 $z_1=z_2=z_3$

或，一般说，在汇合点的能头相等，如不计汇合点的阻力损失，则应满足

$$z_1+\frac{u_1^2}{2g}=z_2+\frac{u_2^2}{2g}=z_3+\frac{u_3^2}{2g}$$

对于渠道突然放宽或缩窄处，（如图 4-2-4），也应有上述两个相似的条件。



(a) 突然放大　　(b) 突然收缩

图 4-2-4　渠道突然放大或突然收缩

（1）流量相等（不计水面坡降的突然变化）

$$Q_1=Q_2$$

（2）能头相等

$$z_1+\frac{u_1^2}{2g}=z_2+\frac{u_2^2}{2g}+\alpha\frac{(u_1-u_2)^2}{2g}$$

式中　α——局部阻力系数。

以下通过一个例子，说明内边界的处理方法。

[例] 河道侧面有一贮水池（或小型湖泊、水库）如图 4-2-5 所示。

该例的目的是，已知 i 断面的关系 E_i、F_i、H_i，K_i 和 M_i，需进一步建立 $i+1$ 断面的系数 E_{i+1}，F_{i+1}，H_{i+1}，K_{i+1}和 M_{i+1}，以便计算能继续进行下去。

为简化计算，可设 i，$i+1$ 及贮水池的水位相等，即

$$z_i^{n+1}=z_{i+1}^{n+1}=z_b^{n+1}$$

在 i 和 $i+1$ 间连续方程为

$$Q_{i+1}^{n+1}=Q_i^{n+1}-Q_b^{n+1}$$

式中，Q_b 是河道进入贮水池的流量，下角标 b 代表水池。

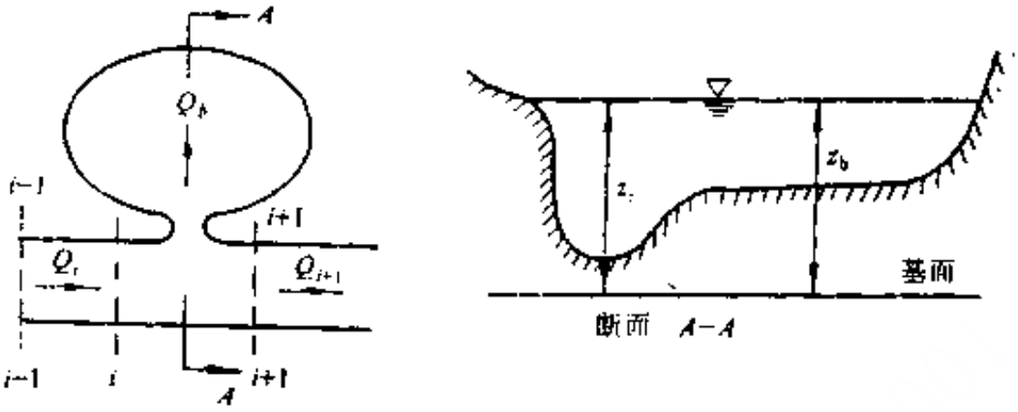


图 4-2-5 河道侧有一贮水池

根据池内贮藏容量的连续性，可得

$$Q_i^{t+1}=\frac{A_b}{\Delta t}(z^{t+1}-z^t)=\frac{A_b}{\Delta t}\Delta z$$

式中，A_b 是水池的水平表面的面积，$A_b=A_b(z_b)$。合并上述两个关系式，可得

$$Q_{i+1}^t+\Delta Q_{i+1}=Q_i^t+\Delta Q-\frac{A_b^{t+1}}{\Delta t}\Delta z_{i+1} \tag{4-2-41}$$

因为 $\Delta Q=E_i\Delta z_i+F_i$ 和 $z_i^t+\Delta z_i=z_{i+1}^t+\Delta z_{i+1}$，可得 $\Delta z_i=\Delta z_{i+1}+(z_{i+1}^t-z_i^t)$ 和 $\Delta Q=E_i(\Delta z_{i+1}+z_{i+1}^t-z_i^t)+F_i$。将此结果代入（4-2-41）式，得

$$\Delta Q_{i+1}=(F_i-\frac{A_b}{\Delta t})\Delta z_{i+1}+[Q_i^t-Q_{i+1}^t+F_i+E_i(z_{i+1}^t-z_i^t)]$$

由此可得

$$E_{i+1}=F_i-\frac{A_b}{\Delta t}$$

$$F_{i+1}=Q_i^t-Q_{i+1}^t+F_i+E_i(z_{i+1}^t-z_i^t)$$

另外，由于 $\Delta z_i=\Delta z_{i+1}+(z_{i+1}^t-z_i^t)$，将此式与（4-2-36）式对比，可得

$$H_{i+1}=1;\ K_{i+1}=0;\ M_{i+1}=z_{i+1}^t-z_i^t$$

有了 E_{i+1}，F_{i+1}，H_{i+1}，K_{i+1}和 M_{i+1}等循环系数后，计算即可顺利地继续下去。

Preissmann 格式的稳定条件为：

当$\frac{1}{2}\leqslant\theta\leqslant 1$时，该格式为无条件稳定；

当$\theta<\frac{1}{2}$时，该格式是有条件稳定。

Preissmann 格式的精度：

对于$\theta=\frac{1}{2}$时，精度为$O((\Delta x)^2)$；

对于$\theta\neq\frac{1}{2}$时的任意值时，精度为$O(\Delta x)$。

在实用上，运用$\theta>\frac{1}{2}$是合适的。

4.2.7 Zhu—Cao 格式

该格式以 Preissmann 模式为基础，有较强的稳定性和良好的收敛性，在采用“追赶法”求解时，没有采用流量与水位之间的线性假设，而是直接对水流运动方程的差分方程进行整理，因而有较好的理论基础。

基本方程仍采用 Saint Venant 方程：

连续方程

$$\frac{\partial Q}{\partial x}+B_s\frac{\partial h}{\partial t}=0 \tag{4-2-42}$$

动量方程

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{2\alpha Q}{A}\cdot\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\alpha Q^2}{A^2}\frac{\partial A}{\partial x}+gA\frac{\partial h}{\partial x}+gA\frac{\partial z_b}{\partial x}+\frac{g|Q|Q}{C^2RA}=0$$

将上式按梯形横断面简化，并设$\alpha=1$，动量方程可写成

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{2Q}{A}\frac{\partial Q}{\partial x}+\left(gA-\frac{Q^2}{A^2}B_s\right)\frac{\partial h}{\partial x}-h\frac{Q^2}{A^2}\frac{\partial B_b}{\partial x}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{Q^2}{A^2}h^2\frac{\partial(M_r+M_l)}{\partial x}+gA\frac{\partial z_b}{\partial x}+\frac{g|Q|Q}{C^2AR}=0 \tag{4-2-43}$$

式中 B_s——主槽水面宽；

B_b——梯形断面底宽；

M_r、M_l——梯形断面右边坡和左边坡。

根据 Preissmann 格式（图 4-2-6）可得

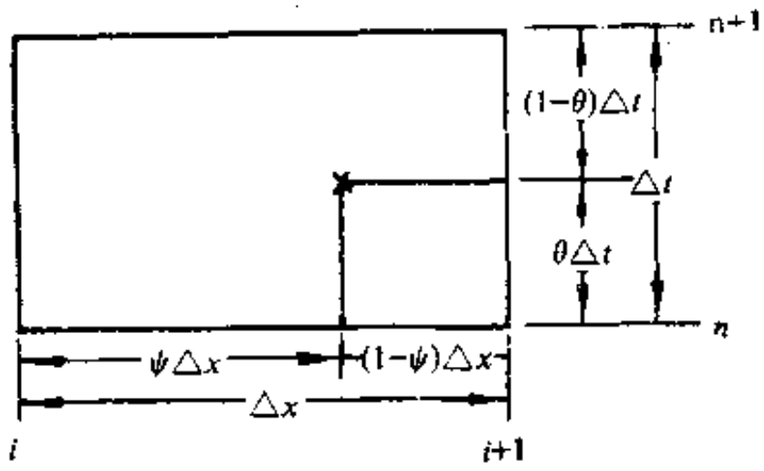


图 4-2-6　Preissmann 格式

$$\frac{\partial Q}{\partial t}=(1-\psi)\frac{Q_i^{n+1}-Q_i^n}{\Delta t}+\psi\frac{Q_{i+1}^{n+1}-Q_{i+1}^n}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}=(1-\psi)\frac{h_i^{n+1}-h_i^n}{\Delta t}+\psi\frac{h_{i+1}^{n+1}-h_{i+1}^n}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t}=(1-\theta)\frac{Q_{i+1}^n-Q_i^n}{\Delta x}+\theta\frac{Q_{i+1}^{n+1}-Q_i^{n+1}}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}=(1-\theta)\frac{h_{i+1}^n-h_i^n}{\Delta x}+\theta\frac{h_{i+1}^{n+1}-h_i^{n+1}}{\Delta x}$$

方程中非线性项的系数变量取空间及时间的平均值，并以角标“*”表示，如 $f^*=(f_{i+1}^n+f_i^n+f_{i+1}^{n+1}+f_i^{n+1})/4$，$f$ 不仅表示 Q 和 h，还表示宽度、边坡、糙率等各值。将上述各关系代入（4-2-42）式和（4-2-43）式，并经整理后，得式

$$A_1Q_i^{n+1}+h_i^{n+1}+B_1Q_{i+1}^{n+1}-h_{i+1}^{n+1}=C_1 \tag{4-2-44}$$

$$Q_i^{n+1}+A_2h_i^{n+1}-Q_{i+1}^{n+1}+B_2h_{i+1}^{n+1}=C_2 \tag{4-2-45}$$

式中

$$A_1=(G_5-G_1+B_1)/G_3$$

$$B_1=(G_6+G_1+B_3)/G_3$$

$$C_1=[(G_5+G_2)Q_i^n+(G_6-G_2)Q_{i+1}^n-G_4(h_{i+1}^n-h_i^n)-B_3+B_4]/G_3;$$

$$A_2=-G_5/G_8;$$

$$B_2=-G_6/G_8;$$

$$C_2=\left[G_7\ (Q_{i+1}^{n}-Q_i^{n})\ -G_5h_{i+1}^{n}-G_6h_i^{n}\right]/G_8。$$

其中

$$G_1=\frac{2\theta V_i^*}{\Delta x_i};\ G_2=\frac{2\ (1-\theta)\ V_i^*}{\Delta x_i};\ G_3=\frac{\theta W_i^*}{\Delta x_i};$$

$$G_4=\frac{(1-\theta)\ W_i^*}{\Delta x_i};\ G_5=\frac{1-\psi}{\Delta t};\ G_6=\frac{\psi}{\Delta t};$$

$$G_7=\frac{1}{B_T^*}\frac{1-\theta}{\Delta x_i};\ G_8=\frac{1}{B_T^*}\frac{\theta}{\Delta x_i};$$

$$B_{3i}=gA_i^*S_{0i}^*;\ B_{3h}=\frac{g|Q_i^n+Q_{i+1}^n|}{4C_i^{*2}R_i^*A_i^{*2}};$$

$$B_{3t}=\frac{h_i^*V_i^{*2}}{\Delta x_i}\left[B_{b(i+1)}-B_{b(i)}+0.5h_i^*\ (M_{r_{i+1}}+M_{e_{i+1}})\right.$$

$$\left.-0.5h_i^*\ (M_{r_i}+M_{e_i})\right]$$

方程（4-2-44）和（4-2-45）可用于各个断面，因而形成一个五条带系数矩阵的代数方程组。以往对于这种方程组，常假设各断面上的水深和流量间呈线性关系，由此化简为三对角系数矩阵，并采用追赶法求解。为了避免由线性假设而引起的理论上的不严密性，作者在推导此方法时，不作任何假定，只是将（4-2-44）和（4-2-45）两式作了一些代数方法的运算、写成不同的形式。根据上游起始边界条件的不同、分为两种情况：

（1）已知上游起始边界条件的流量时，即已知

$$Q_1=Q_1\ (t)$$

则将（4-2-44）式和（4-2-45）式进行代数方法的简单处理后，即可得下式

$$Q_i^{n+1}+\alpha_1h_i^{n+1}+\alpha_2Q_{i+1}^{n+1}=\alpha_3 \qquad (4\text{-}2\text{-}46)$$

$$h_i^{n+1}+\beta_1Q_{i+1}^{n+1}+\beta_2h_{i+1}^{n+1}=\beta_3 \qquad (4\text{-}2\text{-}47)$$

式中

$$\alpha_1=\frac{A_2+B_2}{1+A_1B_2};\ \alpha_2=\frac{B_1B_2-1}{1+A_1B_2};\ \alpha_3=\frac{C_2+B_2C_1}{1+A_1B_2};$$

$$\beta_1=\frac{A_1+B_1}{1-A_1A_2};\ \beta_2=\frac{1+A_1B_2}{A_1A_2-1};\ \beta_3=\frac{C_1-A_1C_2}{1-A_1A_2}$$

由（4-2-46）式和（4-2-47）式可得出

$$h_i^{j+1}=EQ_i^{j+1}+F_i \tag{4-2-48}$$

$$Q_{i+1}^{j+1}=Gh_{i+1}^{j+1}+R_{i+1} \tag{4-2-49}$$

式中

$$E=-\frac{\alpha_2}{\alpha_1+F_i};\quad F_i=\frac{\alpha_3-R_i}{\alpha_1+F_i};$$

$$G_{i+1}=-\frac{\beta_2}{E_i+\beta_1};\quad R_{i+1}=\frac{\beta_3-F_i}{E_i+\beta_1}$$

在上游起始边界，为了保证与已知流量$Q_1=Q_1(t)$一致，则必有

$$G_1=0 \text{ 和 } R_1=Q_1(t)$$

（2）已知上游起始边界的水位（水深）时，即已知

$$h_1=h_1(t),$$

则由（4-2-44）式和（4-2-45）式可变换得

$$h_i^{j+1}+\alpha_1Q_i^{j+1}+\alpha_2h_{i+1}^{j+1}=\alpha_3 \tag{4-2-50}$$

$$Q_i^{j+1}+\beta_1h_{i+1}^{j+1}+\beta_2Q_{i+1}^{j+1}=\beta_3 \tag{4-2-51}$$

式中

$$\alpha_1=\frac{A_1+B_2}{A_2B_1-1};\quad \alpha_2=\frac{1-B_1B_2}{1-A_2B_1};\quad \alpha_3=\frac{C_1-B_1C_2}{1-A_2B_1};$$

$$\beta_1=\frac{A_2+B_1}{1-A_1A_2};\quad \beta_2=-\frac{1+A_2B_1}{1-A_1A_2};\quad \beta_3=\frac{C_2-A_2C_1}{1-A_1A_2}$$

同样由（4-2-50）式和（4-2-51）式可得

$$Q_i^{j+1}=Gh_i^{j+1}+R \tag{4-2-52}$$

$$h_{i+1}^{j+1}=E_{i+1}Q_{i+1}^{j+1}+F_{i+1} \tag{4-2-53}$$

式中

$$G=-\frac{\alpha_2}{\alpha_1+E_i};\quad R=\frac{\alpha_3-F_i}{\alpha_1+E_i};$$

$$E_{i+1}=-\frac{\beta_2}{G_i+\beta_1};\quad F_{i+1}=\frac{\beta_3-R_i}{G_i+\beta_1}$$

在上游起始边界，为了保证水位与已知水位一致，则必有

$$E_1=0;\quad F_1=h_1(t)$$

在上述两种情况下，有了起始边界的系数，再加上末端边界的已知水位或流量，即可用追赶法求解。

该模式还可通过另一种变换，建立一种新的计算模式。基本方程组仍为 Saint Venant 方程，河道横断面简化为梯形，则得控制方程为

连续方程

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{1}{B}\frac{\partial Q}{\partial x}=0 \tag{4-2-54}$$

动量方程

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{2Q}{A}\frac{\partial Q}{\partial x}+gA\left(\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial z_0}{\partial x}\right)-\frac{Q^2}{A^2}\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{h}{2}\frac{Q^2}{A^2}\frac{\partial B}{\partial x}+g\frac{|Q|Q}{c^2Ah}=0 \tag{4-2-55}$$

采用 Preissmann 格式（见图 4-2-6）

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\psi\frac{f_{i+1}^{j+1}-f_{i+1}^{j}}{\Delta t}+(1-\psi)\frac{f_i^{j+1}-f_i^{j}}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\theta\frac{f_{i+1}^{j+1}-f_i^{j+1}}{\Delta x}+(1-\theta)\frac{f_{i+1}^{j}-f_i^{j}}{\Delta x}$$

式中，f 代表 h 和 Q。

为了便于计算，控制方程组中非线性项的变量系数及断面、河宽等参量均先按下式计算，并用上角标“*”表示，

$$F^*=(1-\theta)\left[\psi F_{i+1}^{j}+(1-\psi)F_i^{j}\right]+\theta\left[\psi F_{i+1}^{j+1}+(1-\psi)F_i^{j+1}\right]$$

将上述各表示式代入控制方程（4-2-54）和（4-2-55）式，并经整理后可得

$$Q_i^{j+1}+a_iQ_{i+1}^{j+1}+b_ih_{i+1}^{j+1}=c_i \tag{4-2-56}$$

$$h_i^{j+1}+d_iQ_{i+1}^{j+1}+e_ih_{i+1}^{j+1}=f_i \tag{4-2-57}$$

$$i=1、2、\cdots、n-1$$

上式中，各系数如下，

$$a_i=\left(C_2\frac{B_1}{B_2}-C_1\right)/\left(A_2\frac{B_1}{B_2}-A_1\right);$$

$$b_i=\left(D_2\frac{B_1}{B_2}-D_1\right)/\left(A_2\frac{B_1}{B_2}-A_1\right);$$

$$c_i=\left(E_2\frac{B_1}{B_2}-E_1\right)/\left(A_2\frac{B_1}{B_2}-A_1\right);$$

$$d_i = (C_i \frac{A_i}{A_{i-1}} - C_{i-1}) / (B_i \frac{A_i}{A_{i-1}} - B_{i-1});$$

$$e_i = (D_i \frac{A_i}{A_{i-1}} - D_{i-1}) / (B_i \frac{A_i}{A_{i-1}} - B_{i-1});$$

$$f_i = (E_i \frac{A_i}{A_{i-1}} - E_{i-1}) / (B_i \frac{A_i}{A_{i-1}} - B_{i-1}).$$

其中 $A_i = -\frac{1}{B_i} \frac{\theta}{\Delta x}$;

$$B_i = \frac{1-\psi}{\Delta t};$$

$$C_i = \frac{1}{B_i} \frac{\theta}{\Delta x};$$

$$D_i = \frac{\psi}{\Delta t};$$

$$E_i = -\frac{1}{B_i} (Q_{i+1} - Q_i) + \frac{\psi}{\Delta t} h_{i+1} + \frac{1-\psi}{\Delta t} h_i;$$

$$A_i = \frac{1-\psi}{\Delta t} - \frac{2u_i \theta}{\Delta x} + g \frac{|\psi Q_{i+1} + (1-\psi) Q_i|}{C_i^2 R_i A_i} (1-\psi);$$

$$B_i = -(gA_i - u_i^2 B_i) \frac{\theta}{\Delta x} = W_i \theta / \Delta x;$$

$$C_i = \frac{\psi}{\Delta t} + \frac{2u_i \theta}{\Delta x} + \frac{g |\psi Q_{i+1} + (1-\psi) Q_i|}{C_i^2 R_i A_i} \psi;$$

$$D_i = (gA_i - u_i^2 B_i) \frac{\theta}{\Delta x} = W_i \theta / \Delta x;$$

$$E_i = [\frac{1-\psi}{\Delta t} + \frac{2u_i (1-\theta)}{\Delta x}] Q_i + [\frac{\psi}{\Delta t} - \frac{2u_i (1-\theta)}{\Delta x}] Q_{i+1} - (gA_i - u_i^2 B_i) \frac{1-\theta}{\Delta x} (h_{i+1} - h_i) - gA_i \frac{z_{bi+1} - z_{bi}}{\Delta x} + \frac{h_i}{2} u_i \frac{B_{i+1} - B_i}{\Delta x}$$

如果上式从 $i=1$ 起始，保留 Q_1 和 h_1，用后一式的 Q_{i-1} 和 h_{i-1} 代入前式，则可得另一种形式的方程组

$$Q_{i+1} + \alpha_i Q_{i+1} + \beta_i h_{i+1} = G_i \qquad (4\text{-}2\text{-}58)$$

$$h_{i+1} + \gamma_i Q_{i+1} + \delta_i h_{i+1} = F_i \qquad (4\text{-}2\text{-}59)$$

$$i = 1, 2, \cdots, n-1$$

上式各循环系数如下式所示：

$$O_i=-(O_{i-1}a_i+P_{i-1}d_i)$$

$$P_i=-(O_{i-1}b_i+P_{i-1}e_i)$$

$$G_i=G_{i-1}-O_{i-1}C_i-P_{i-1}f_i$$

$$R_i=-(R_{i-1}a_i-S_{i-1}d_i)$$

$$S_i=-(R_{i-1}b_i+S_{i-1}e_i)$$

$$F_i=F_{i-1}-R_{i-1}C_i-S_{i-1}f_i$$

其中 $O_1=a_1$；$P_1=b_1$；$G_1=C_1$；

$R_1=d_1$；$S_1=e_1$；$F_1=f_1$；

由（4-2-58）式和（4-2-59）式可得起始断面和结尾断面间的关系式为

$$Q_1^{n+1}+O_{n-1}Q_n^{n+1}+P_{n-1}h_n^{n+1}=G_n^{n+1} \tag{4-2-60}$$

$$h_1^{n+1}+R_{n-1}Q_n^{n+1}+S_{n-1}h_n^{n+1}=F_{n-1} \tag{4-2-61}$$

上述两个方程中有四个未知数Q_1^{n+1}、h_1^{n+1}、Q_n^{n+1}、h_n^{n+1}，如在上、下边界补充两个条件，即可由此方程确定此四个未知量。根据边界情况，通常有六种可能：

（1）已知Q_1^{n+1}和h_n^{n+1}，则得

$$Q_n^{n+1}=(G_{n-1}-Q_1^{n+1}-P_{n-1}h_n^{n+1})/O_{n-1}$$

$$h_1^{n+1}=F_{n-1}-R_{n-1}Q_n^{n+1}-S_{n-1}h_n^{n+1}$$

（2）已知Q_1^{n+1}和Q_n^{n+1}，则得

$$h_n^{n+1}=(G_{n-1}-Q_1^{n+1}-O_{n-1}Q_n^{n+1})/P_{n-1}$$

$$h_1^{n+1}=F_{n-1}-R_{n-1}Q_n^{n+1}-S_{n-1}h_n^{n+1}$$

（3）已知h_1^{n+1}和h_n^{n+1}，则得

$$Q_n^{n+1}=(F_{n-1}-h_1^{n+1}-S_{n-1}h_n^{n+1})/R_{n-1}$$

$$Q_1^{n+1}=G_{n-1}-O_{n-1}Q_n^{n+1}-P_{n-1}h_n^{n+1}$$

（4）已知h_1^{n+1}和Q_1^{n+1}，则得

$$h_n^{n+1}=(F_{n-1}-h_1^{n+1}-R_{n-1}Q_1^{n+1})/S_{n-1}$$

$$Q_1^{n+1}=G_{n-1}-O_{n-1}Q_n^{n+1}-P_{n-1}h_n^{n+1}$$

(5) 已知 h_1^{j+1} 和 Q_1^{j+1}，则得

$$Q_n^{j+1}=\left[(G_{n-1}-Q_1^{j+1})S_{n-1}/R_{n-1}-(F_{n-1}-h_1^{j+1})\right]/\left(\frac{O_{n-1}S_{n-1}}{P_{n-1}}-R_{n-1}\right)$$

$$h_n^{j+1}=(F_{n-1}-h_1^{j+1}-R_{n-1}Q_n^{j+1})/S_{n-1}$$

(6) 已知 h_n^{j+1} 和 Q_n^{j+1}，则得

$$Q_1^{j+1}=G_{n-1}-O_{n-1}Q_n^{j+1}-P_{n-1}h_n^{j+1}$$

$$h_1^{j+1}=F_{n-1}-R_{n-1}Q_n^{j+1}-S_{n-1}h_n^{j+1}$$

根据上述六种可能情况，均能得出起始断面的 h_1^{j+1}、Q_1^{j+1} 和末尾断面的 h_n^{j+1}、Q_n^{j+1}，因而就有两种求解途径。

(1) 由末边界的 h_n^{j+1} 和 Q_n^{j+1}，可直接利用 (4-2-56) 式和 (4-2-57) 式，由下式从最后断面向上倒退逐步求得各断面的 h_i^{j+1} 和 Q_i^{j+1}

$$h_i^{j+1}=f_i-dQ_{i+1}^{j+1}-eh_{i+1}^{j+1} \tag{4-2-62}$$

$$Q_i^{j+1}=c_i-aQ_{i+1}^{j+1}-bh_{i+1}^{j+1} \tag{4-2-63}$$

$$i=n-1,\ n-2,\ \cdots,\ 3,\ 2,\ 1$$

(2) 由起始断面的 h_1^{j+1} 和 Q_1^{j+1}，则可利用 (4-2-56) 式和 (4-2-57) 式，经适当变换成下式，然后由起始断面向下递推，求出各断面的 h_{i+1}^{j+1} 和 Q_{i+1}^{j+1}。

$$Q_{i+1}^{j+1}=\left[(c_i-Q^{j+1})\frac{e_i}{h_i}-(f_i-h_i^{j+1})\right]/\left(a\frac{e_i}{h_i}-d_i\right)$$

$$h_{i+1}^{j+1}=(f_i-dQ_{i+1}^{j+1}-h_i^{j+1})/e_i$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$$

4.2.8 Cao 格式

前述各种格式中都是将 Q 和 h 布置在一个断面上，本格式与前述各格式不同，将 Q 与 h 分置在不同的断面（如图 4-2-7 所示）。

本格式采用下形式的基本控制方程：

连续方程

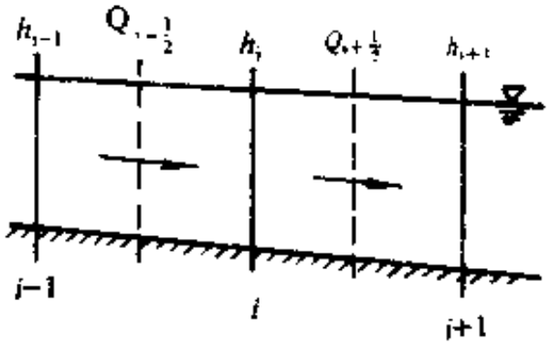


图 4-2-7 交错网格布置图

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{1}{B}\frac{\partial Q}{\partial x}=0 \tag{4-2-64}$$

动量方程

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{2Q}{A}\frac{\partial Q}{\partial x}+gA\frac{\partial A}{\partial x}-gA\frac{\partial z_b}{\partial x}-\frac{Q^2}{A^2}\frac{\partial A}{\partial x}+g\frac{|Q|Q}{C^2R}=0$$

将上式按梯形横断面简化，动量方程可简化成

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{2Q}{A}\frac{\partial Q}{\partial x}+\left(gA-\frac{Q^2}{A^2}B\right)\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{h}{2}\frac{Q^2}{A^2}\frac{\partial B_h}{\partial x}$$

$$+gA\frac{\partial z_b}{\partial x}+g\frac{|Q|Q}{C^2Ah}=0 \tag{4-2-65}$$

在上述基本控制方程（4-2-64）和（4-2-65）中，时间偏导项采用前差，空间偏导项采用加权中心差，即

$$\frac{h_i^{n+1}-h_i^n}{\Delta t}+\frac{1}{B_i}\left[\varphi\frac{Q_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}-Q_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}}{\Delta x}+(1-\varphi)\frac{Q_{i+\frac{1}{2}}^{n}-Q_{i-\frac{1}{2}}^{n}}{\Delta x}\right]=0$$

和

$$\frac{Q_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}-Q_{i-\frac{1}{2}}^{n}}{\Delta t}+\frac{2Q_{i-\frac{1}{2}}^{n}}{A}\frac{Q_{i-\frac{1}{2}}^{n}-Q_{i-\frac{1}{2}}^{n}}{\Delta x}+\left[gA-\frac{(Q_{i-\frac{1}{2}}^{n})^2}{\overline{A}^2}B\right]$$

$$\left[\varphi\frac{h_i^{n+1}-h_{i-1}^{n+1}}{\Delta x}+(1-\varphi)\frac{h_i^{n}-h_{i-1}^{n}}{\Delta x}\right]-\frac{\overline{h}(Q_{i-\frac{1}{2}}^{n})^2}{\overline{A}^2}$$

$$\cdot\frac{B_{i+1}-B_i}{\Delta x}+gA\frac{z_{i+1}-z_i}{\Delta x}+g\frac{|Q_{i-\frac{1}{2}}^{n}|Q_{i-\frac{1}{2}}^{n}}{C^2\overline{A}\overline{h}}=0$$

上二式经整理后得

$$a_i Q_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} + b_i h_i^{n+1} + c_i Q_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = d_i \tag{4-2-66}$$

$$a'_i h_{i-1}^{n+1} + b'_i Q_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} + c'_i h_i^{n+1} = d'_i \tag{4-2-67}$$

式中

$$a_i = -\frac{\varphi}{B_i}\frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$b_i = 1$$

$$c_i = \frac{\varphi}{B_i}\frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$d_i = h_i^n - \frac{\Delta t(1-\varphi)}{\Delta x}\frac{1}{B_i}(Q_{i+\frac{1}{2}}^n - Q_{i-\frac{1}{2}}^n)$$

$$a'_i = -\left[gA - \frac{(Q_{i-\frac{1}{2}}^n)^2}{\bar{A}^2}B_i\right]\frac{\Delta t\varphi}{\Delta x}$$

$$b'_i = 1 + \frac{g\Delta t|Q_{i-\frac{1}{2}}^n|}{\bar{C}^2\bar{A}\bar{h}}$$

$$c'_i = \left[gA - \frac{(Q_{i-\frac{1}{2}}^n)^2}{\bar{A}^2}B_i\right]\frac{\Delta t\varphi}{\Delta x}$$

$$d'_i = Q_{i-\frac{1}{2}}^n - \frac{2\Delta t Q_{i-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x\bar{A}^2}(Q_{i+\frac{1}{2}}^n - Q_{i-\frac{1}{2}}^n) - \left[gA - \frac{(Q_{i-\frac{1}{2}}^n)^2}{\bar{A}^2}B_i\right]\frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$(1-\varphi)(h_{i-1}^n - h_i^n) + \frac{\bar{h}}{2}\frac{(Q_{i-\frac{1}{2}}^n)^2}{\bar{A}^2}\frac{\Delta t}{\Delta x}[B_{m,i-1} - B_{m,i}]$$

$$-gA\frac{\Delta t}{\Delta x}[z_{m,i-1} - z_{m,i}]$$

$$\bar{A} = \frac{1}{2}(A_{i-1} + A_i)$$

$$\bar{B}_i = \frac{1}{2}[B_{m,i-1} + B_{m,i}]$$

$$\bar{C} = \frac{1}{2}[C_{i-1} + C_i]$$

$$\bar{h} = \frac{1}{2}(h_{i-1} + h_i)$$

φ ——加权系数，$0 < \varphi \leqslant 1.0$

沿河道各断面建立（4-2-66）式和（4-2-67）式，可得线性代

数方程组，系数为三对角矩阵，结合定解条件，采用追赶法求解，得出各断面的 h_i 和 $Q_{i-\frac{1}{2}}$（$i=1,2,\cdots,I,I$ 为末断面数）。

定解条件包括初始条件和边界条件。

初始条件采用下值：

$$Q(x)_{t=0}=0$$

$h(x)_{t=0}=h_0(x)$，$h_0(x)$ 为静水时水深。

边界条件在上下游有开边界和闭边界之分，闭边界通常在闸坝处，采用流量 $Q=0$ 控制。开边界则用水深（水位）或流量控制，根据上下游不同情况，有四种组合，即上游水位下游水位；上游水位下游流量；上游流量下游水位；上游流量下游流量。这四种情况的线性代数方程组分别如下所示。

（1）上、下游均由水深控制　已知 $h_{(1)}$ 和 $h_{(I)}$，这种情况的线性代数方程组为

$$\begin{bmatrix} b'_{(1)} & c'_{(1)} & & & \\ a_{(2)} & b_{(2)} & c_{(2)} & & \\ & d'_{(2)} & b'_{(2)} & c'_{(2)} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & a_{(I-1)} & b_{(I-1)} & c_{(I-2)} \\ & & & d'_{(I-1)} & b'_{(I-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q'_{1-\frac{1}{2}} \\ h''_2 \\ Q''_{2-\frac{1}{2}} \\ \vdots \\ h''_{I-1} \\ Q_{I-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d''_{(1)} \\ d_{(2)} \\ d_{(3)} \\ \vdots \\ d_{(I-1)} \\ d''_{(I-1)} \end{bmatrix}$$

式中

$$d''_{(1)}=d_{(2)}-d'_{(1)}h''_1$$

$$d''_{(I-1)}=d_{(I-1)}-c'_{(I-1)}h''_{I}$$

（2）上游水深下游流量控制　已知 h_1 和 $Q_{I-\frac{1}{2}}$，这时的线性代数方程组为

$$\begin{bmatrix} b'_{(1)} & c'_{(1)} & & & & \\ a_{(2)} & b_{(2)} & c_{(2)} & & 0 & \\ & d_{(2)} & b'_{(2)} & c'_{(2)} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & 0 & d_{(Ie-1)} & b'_{(Ie-1)} & c'_{(Ie-1)} & \\ & & & a_{(Ie)} & b_{(Ie)} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{1+\frac{1}{2}} \\ H_2 \\ Q_{2+\frac{1}{2}} \\ \vdots \\ Q_{Ie-\frac{1}{2}} \\ H_{Ie} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d'_{(1)} \\ d_{(2)} \\ d_{(2)} \\ \vdots \\ d_{(Ie-1)} \\ d'_{(Ie)} \end{bmatrix}$$

式中

$$d'_{(1)}=d_{(1)}-d_{(1)}h_1$$

$$d'_{(Ie)}=d_{Ie}-c_{Ie}Q_{(Ie+\frac{1}{2})}$$

(3) 上游流量下游水深控制　已知$Q_{1+\frac{1}{2}}$和h_{Ie}，这时的线性代数方程组为

$$\begin{bmatrix} b_{(2)} & c_{(2)} & & & 0 \\ d_{(2)} & b'_{(2)} & c'_{(2)} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & a_{(Ie-1)} & b_{(Ie-1)} & c_{(Ie-1)} \\ & & & d_{(Ie-1)} & b'_{(Ie-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_2 \\ Q_{2+\frac{1}{2}} \\ \vdots \\ H_{Ie-1} \\ Q_{Ie-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d'_{(2)} \\ d_{(2)} \\ \vdots \\ d_{(Ie-1)} \\ d'_{(Ie-1)} \end{bmatrix}$$

式中

$$d'_{(2)}=d_{(2)}-a_{(2)}Q_{1+\frac{1}{2}}$$

$$d'_{(Ie-1)}=d_{(Ie-1)}-c'_{(Ie-1)}H_{Ie}$$

(4) 上、下游均用流量控制　已知$Q_{1+\frac{1}{2}}$和$Q_{Ie+\frac{1}{2}}$，这时的线性代数方程组为

$$\begin{bmatrix} b_{(2)} & c_{(2)} & & & 0 \\ d_{(2)} & b'_{(2)} & c'_{(2)} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & d_{(Ie-1)} & b'_{(Ie-1)} & c'_{(Ie-1)} \\ & & & a_{(Ie)} & b_{(Ie)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_2 \\ Q_{2+\frac{1}{2}} \\ \vdots \\ Q_{Ie-\frac{1}{2}} \\ H_{Ie} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d'_{(2)} \\ d_{(2)} \\ \vdots \\ d_{(Ie-1)} \\ d'_{(Ie)} \end{bmatrix}$$

式中

$$d'_{(2)}=d_{(2)}-a_{(2)}Q_{1+\frac{1}{2}}$$

$$d'_{(Ie)}=d_{(Ie)}-c_{(Ie)}Q_{Ie+\frac{1}{2}}$$

上述四种情况的线性代数方程组大体相同，仅在上、下游进出口处边界条件不同，都为三条带对角系数矩阵方程组，可用同一程序计算。

此程序的三对角系数矩阵方程组如下

$$\begin{bmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & & & & & \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & & & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \alpha_i & \beta_i & \gamma_i & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & \alpha_{m-1} & \beta_{m-1} & \gamma_{m-1} \\ & & & & & \alpha_m & \beta_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_{m-1} \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_i \\ \vdots \\ \delta_{m-1} \\ \delta_m \end{bmatrix}$$

上矩阵用消元法变成如下的上三角二条带对角系数矩阵方程组

$$\begin{bmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & & & & & \\ & \beta'_2 & \gamma_2 & & & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \beta'_i & \gamma_i & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & & \beta'_{m-1} & \gamma_{m-1} \\ & & & & & & \beta'_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_{m-1} \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta'_2 \\ \vdots \\ \delta'_i \\ \vdots \\ \delta'_{m-1} \\ \delta'_m \end{bmatrix}$$

式中

$$\beta'_i=\beta_i-\gamma_{i-1}\times\alpha_i/\beta'_{i-1} \qquad (i=2,\ 3,\ \cdots,\ m)$$

$$\delta'_i=\delta_i-\delta'_{i-1}\times\alpha_i/\beta'_{i-1} \qquad (i=2,\ 3,\ \cdots,\ m)$$

$$\beta'_1=\beta_1$$

由此可得

$$x_m=\delta'_m/\beta'_m$$

$$x_i=(\delta'_i-\gamma_i\chi_{i+1})/\beta_i,\ i=m-2,\ m-3,\ \cdots,\ 2,\ 1$$

上面介绍了用消元法求解（4-2-66）和（4-2-67）基本方程的过程。下面介绍另一种方法——循环系数法，这是用得最普遍的一种方法。

现重复写出基本方程（4-2-66）和（4-2-67）于下。

$$a_iQ_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}+b_iH_i^{n+1}+c_iQ_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}=d_i \tag{4-2-66}$$

$$d'_iH_i^{n+1}+b'_iQ_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}+c'_iH_{i+1}^{n+1}=d_i \tag{4-2-67}$$

设 H_i^{n+1} 和 $Q_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}$ 可由下面关系式相关联。

$$Q_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}=G_{i-\frac{1}{2}}H_i^{n+1}+H_{i-\frac{1}{2}} \tag{4-2-68}$$

$$H_i^{n+1}=E_iQ_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}+F_i \tag{4-2-69}$$

将（4-2-68）式代入（4-2-66）式，得

$$a_i\left(G_{i-\frac{1}{2}}H_i^{n+1}+H_{i-\frac{1}{2}}\right)+b_iH_i^{n+1}+c_iQ_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}=d_i$$

将上式整理后得

$$H_i^{n+1}=\frac{-c_i}{a_iG_{i-\frac{1}{2}}+b_i}Q_{+\frac{1}{2}}+\frac{d_i-a_iH_{i-\frac{1}{2}}}{a_iG_{i-\frac{1}{2}}+b_i}$$

上式与（4-2-69）式相比较，得

$$E_i=\frac{-c_i}{a_iG_{i-\frac{1}{2}}+b_i};\quad F_i=\frac{d_i-a_iH_{i-\frac{1}{2}}}{a_iG_{i-\frac{1}{2}}+b_i} \tag{4-2-70}$$

将（4-2-69）式代入（4-2-67）式后，得

$$d'_i\left(E_iQ_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}+F_i\right)+b'_iQ_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}+c'_iH_{i+1}^{n+1}=d_i$$

将上式整理后得

$$Q_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}=\frac{-c'_i}{d'_iE_i+b'_i}H_{i+1}^{n+1}+\frac{d_i-d'_iF_i}{d'_iE_i+b'_i}$$

上式与（4-2-68）式相比较，得

$$G_{i+\frac{1}{2}}=\frac{-c'_i}{d'_iE_i+b'_i};\quad H_{i+\frac{1}{2}}=\frac{d_i-d'_iF_i}{d'_iE_i+b'_i} \tag{4-2-71}$$

E_i、F_i、$G_{i+\frac{1}{2}}$、$H_{i+\frac{1}{2}}$ 为循环系数，由（4-2-70）式和（4-2-71）式可知，只要起始点有一对系数已知，即可沿河道求出以后各点的循环系数。起始点的系数，可由边界条件来确定。

当起始点由已知水深 h_1 控制时，则由（4-2-69）式可得

$$E_1=0;\ F_1=h_1。$$

当起始点由已知流量 $Q_{1+\frac{1}{2}}$ 控制时，则由（4-2-68）式可得 $G_{\frac{1}{2}}=0$，$H_{\frac{1}{2}}=Q_{\frac{1}{2}}$

有了各循环系数后，则可由末端边界条件的已知 Q 或 h，利用（4-2-68）和（4-2-69）式求得河道各断面的 $Q_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}$ 和 h_i^{n+1}（$i=m-1$，$m-2$，…，2，1）。

以上简短地介绍了目前国内外常用的几种明渠一维非恒定流数值模拟格式，其他还有 Abbott 隐格式，Vasiliev 隐格式，Amein 四点隐格式等方法，应用也很广，这里不一一列举。

4.3 河网非恒定流的数值模拟

在河网水系中，河道纵横交错，十分复杂，为计算方便，可将河网分成枝叉形和环形两种基本形式。这两种基本形式的水流特点与计算方法不同，现分别进行介绍。

4.3.1 枝叉河网的数值模拟

一个河系不可能是一条单一河道，在上游由多个支流汇合于主流；在下游又可能分成若干个分支入海，如珠江三角洲河网及海河水系等，因此，计算枝叉状河网的水流现象，有十分重要的现实意义。

枝叉（树枝）状河网包括一系列分叉点，其中可能包括一级分叉和下一级分叉，分叉处还可能有一叉或多叉，但只要在此河系中不出现环形叉道，则上面介绍单支河道的方法及“追赶法”求解原理，经过改造后均可应用，但需注意计算次序及循环系数在分叉处的调整。

树枝状分叉河道的基本构成示意图如图 4-3-1 所示。



图 4-3-1　树枝状河系

分叉河道计算的关键在分叉口。为了使计算能顺利通过分叉口，通常利用水流连续条件和各支河流在分叉口处水位相等这两个条件，求出各分支在分叉口循环系数间的关系后，再按一定计算次序，通过分叉口。

下面列举几个计算格式。

一、Preissmann 格式

考虑两河道于叉口汇合后形成的主河道的情况，如图 4-3-2 所示。

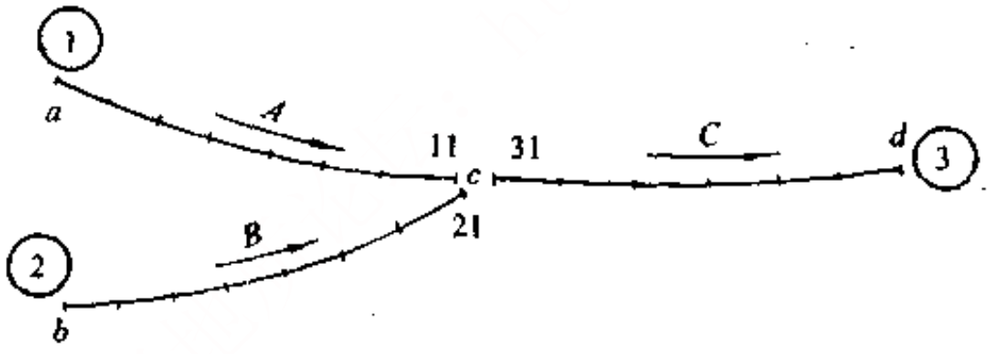


图 4-3-2　Preissmann 格式离散

前已介绍，Preissmann 格式可计算每一结点的流量和水位值，其计算的递推公式为

$$\Delta Q_i = E_i \Delta z_i + F_i \qquad \text{(见 4-2-33)}$$

$$\Delta z_i = H_i \Delta z_{i+1} + K_i \Delta Q_i + M_i \qquad \text{(见 4-2-36)}$$

上式中，循环系数 E_i、F_i、H_i、K_i 和 M_i 可递推求出，其一般关系如下

$$E_i = E\ (E_{i-1});\quad F_i = F\ (E_{i-1},\ F_{i-1});$$

$$H_i=H\ (E_i);\ K_i=K\ (E_i);\ M_i=M\ (E_i,\ F_i)$$

由上式可知，有了 E_{i-1} 和 F_{i-1}，即可求出 E_i 和 F_i，并可进一步求出 H_i、K_i 和 M_i。如果已知全河道 A、B、C 三叉道各点的 E_{i-1} 和 F_{i-1}，则沿叉道 A 由起始点 a 求出叉道 A 的 E_i 和 F_i，并推进至 c 点求出 11 断面的 E_{11} 和 F_{11}，又沿叉道 B 由起始点 b 求出叉道 B 的 E_i 和 F_i，并推进至 c 点求出 21 断面的 E_{21} 和 F_{21}。现在考虑如何从 E_{11}、F_{11}、E_{21} 和 F_{21} 求出 C 叉道 31 断面的 E_{31} 和 F_{31}。

在叉口 c 处，有两个条件可利用：

第一个条件是水流连续，如设汇合区很小，水位变化引起汇合区水体积的变化可不计，则得

$$Q_{31}^{n+1}=Q_{11}^{n+1}+Q_{21}^{n+1} \tag{4-3-1}$$

第二个条件是能量守恒，不计汇合区内水流的能量损失，则由伯努利定理可得

$$z_{11}^{n+1}+\frac{1}{2g}\left(\frac{Q_{11}^{n+1}}{A_{11}^{n+1}}\right)^2=z_{21}^{n+1}+\frac{1}{2g}\left(\frac{Q_{21}^{n+1}}{A_{21}^{n+1}}\right)^2$$
$$=z_{31}^{n+1}+\frac{1}{2g}\left(\frac{Q_{31}^{n+1}}{A_{31}^{n+1}}\right)^2 \tag{4-3-2}$$

已知下式关系

$$z^{n+1}=z^n+\Delta z;\ Q^{n+1}=Q^n+\Delta Q$$
$$f^{n+1}=f^n+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\Delta z+\left(\frac{\partial f}{\partial Q}\right)\Delta Q$$

将上述各关系式分别代入（4-3-1）和（4-3-2）式，可得下列各式：

$$\Delta Q_{31}-\Delta Q_{11}-\Delta Q_{21}=Q_{11}^n+Q_{21}^n-Q_{31}^n \tag{4-3-3}$$
$$\alpha_1\Delta z_{11}+\beta_1\Delta Q_{11}+\gamma_1\Delta z_{31}+\epsilon_1\Delta Q_{31}=\delta_1 \tag{4-3-4}$$
$$\alpha_2\Delta z_{21}+\beta_2\Delta Q_{21}+\gamma_2\Delta z_{31}+\epsilon_2\Delta Q_{31}=\delta_2 \tag{4-3-5}$$

式中，α_1、β_1、γ_1、ϵ_1、δ_1、α_2、β_2、γ_2、ϵ_2、δ_2 为已知量。

将下述两个关系式

$$\Delta Q_{11}=E_{11}\Delta z_{11}+F_{11} \tag{4-3-6}$$
$$\Delta Q_{21}=E_{21}\Delta z_{21}+F_{21} \tag{4-3-7}$$

代入（4-3-3）式～（4-3-5）式，即可得出下列三个关系式：

$$E_{31}=E\ (E_{11},\ E_{21}) \tag{4-3-8a}$$

$$F_{31}=F\ (E_{11},\ E_{21},\ F_{11},\ F_{21}) \tag{4-3-8b}$$

$$\Delta Q_{31}=E_{31}\Delta z_{31}+F_{31} \tag{4-3-9}$$

由（4-3-8a、b）求得E_{31}和F_{31}后，即可沿叉道C从起始点c直到末尾点d求出各断面的E_i和F_i，并进而求出H_i、K_i、和M_i。这样，就完成了整个三条河道的循环系数的计算。这是“追”过程，有了各循环系数后，即可利用（4-3-33）式和（4-2-36）式，结合末端边界条件，完成“赶”过程，求出各断面的Δz_i^{n+1}和ΔQ_i^{n+1}。

二、Cao 格式

本格式没有采用上述方法中提出的各叉道在汇流处水头相等的假设，其原因是本格式将水深（水位）和流量（流速）间隔布置，在汇流处，只有水位没有流速，如采用水头相等，会使计算大大复杂。为此，本格式在汇流处采用各叉道水位相等及流量连续两个条件。

本格式提出两种计算方法。

第一种方法，设汇流处各叉道水位相等，汇流区水位变化是由各叉道注入汇流区的流量不平衡所造成。汇流区局部简图如图4-3-3所示。

由图4-3-3可知，汇流区水位变化Δz可由下式确定：

$$\Delta z=\frac{Q_1+Q_2-Q'}{\Omega}\cdot\Delta t \tag{4-3-10}$$

式中，Ω为汇流区水面的面积。

由此可得汇流区的水深为

$$H_0^{n+1}=z_1^n+\Delta z-z_b \tag{4-3-11}$$

有了汇流区水深后，即可以此为控制边界，并结合各叉道支流另一端边界条件，进行计算。

如果汇流区由多条叉道汇合而成，则汇合区的水位变化Δz可由下述公式算得

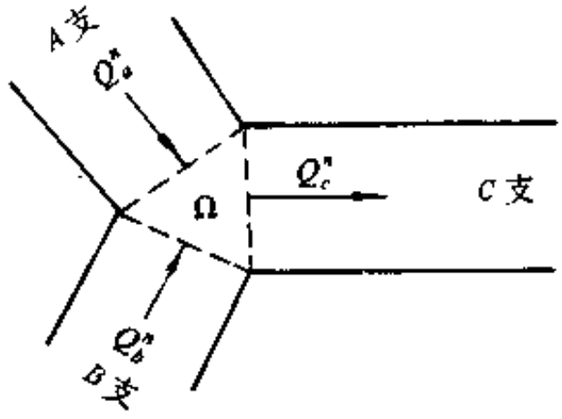


图 4-3-3　汇流区局部示意图

$$\Delta\omega=\frac{\Delta t}{\Omega_i}\sum_{i=1}^{i=m}Q_i \tag{4-3-12}$$

式中，m 为进入汇流区的叉道支流数；Q 为进入汇流区的流量，其中以进入汇流区为正，流出汇流区为负。

此方法计算简单，使用方便。

第二种方法

该方法中的水深、流量结点相间布置，如图 4-3-4 所示。

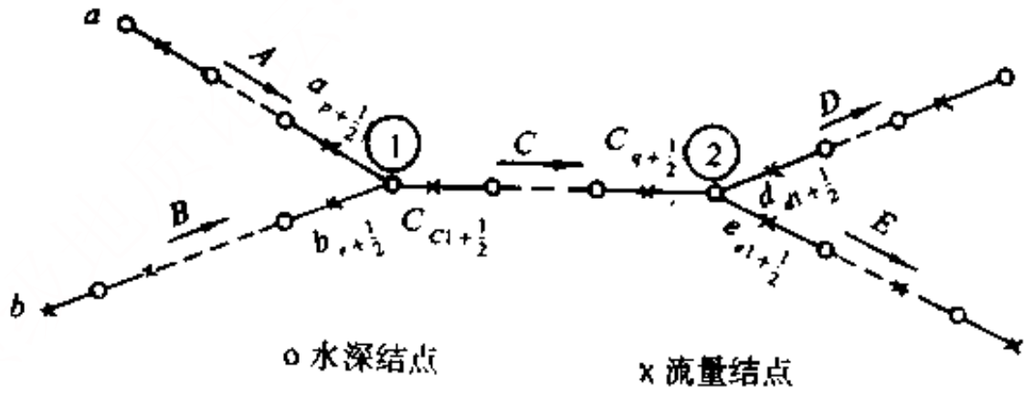


图 4-3-4　结点布置图

上图中①点为汇流点，由 A、B 两支汇成 C 支；②点为分流点，将 C 支分成 D、E 两支。两种结点的解法不相同。现采用追赶法分别介绍于下。

（1）汇流结点的解法

基本计算公式

$$Q_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}=G_{i-\frac{1}{2}}h_i^{n+1}+H_{i-\frac{1}{2}} \qquad (见\ 4\text{-}2\text{-}68)$$

$$h_i^{n+1}=E_iQ_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}+F_i \qquad (见\ 4\text{-}2\text{-}69)$$

上式中的循环系数计算公式为

$$E_i=\frac{-c_i}{a_iG_{i-\frac{1}{2}}+b_i};\quad F_i=\frac{d_i-a_iH_{i-\frac{1}{2}}}{a_iG_{i-\frac{1}{2}}+b_i} \qquad (见\ 4\text{-}2\text{-}70)$$

$$G_{i+\frac{1}{2}}=\frac{-c'_i}{d'_iE_i+b'_i};\quad H_{i+\frac{1}{2}}=\frac{d'_i-d'_iF_i}{d'_iE_i+b'_i} \qquad (见\ 4\text{-}2\text{-}71)$$

计算时，先从 A 支的 a 点开始，利用（4-2-70）和（4-2-71）式进行循环系数计算的追过程，直至 $a_{p+\frac{1}{2}}$ 点，求出 $G_{p+\frac{1}{2}}$ 和 $H_{p+\frac{1}{2}}$，由此可得①点前一点 $a_{p+\frac{1}{2}}$ 点的流量为

$$Q_{p+\frac{1}{2}}^{n+1}=G_{p+\frac{1}{2}}h_{01}^{n+1}+H_{p+\frac{1}{2}} \qquad (4\text{-}3\text{-}13)$$

由于 B 支的存在，使循环系数在汇合区无法继续进行下去，为此，从叉道 B 的 b 点开始，计算 B 支的循环系数，至 $b_{r+\frac{1}{2}}$，求出 $G_{r+\frac{1}{2}}$ 和 $H_{r+\frac{1}{2}}$。由此可得①点前一点 $b_{r+\frac{1}{2}}$ 的流量为

$$Q_{r+\frac{1}{2}}^{n+1}=G_{r+\frac{1}{2}}h_{01}^{n+1}+H_{r+\frac{1}{2}} \qquad (4\text{-}3\text{-}14)$$

则可写出汇合点②点的连续方程为

$$\Delta h_{01}^{n+1}=\frac{\Delta t}{\Omega_{01}}\left(Q_{p+\frac{1}{2}}^{n+1}+Q_{r+\frac{1}{2}}^{n+1}-Q_{1+\frac{1}{2}}^{n+1}\right)$$

整理成下式

$$-\frac{\Delta t}{\Omega_{01}}\left(Q_{p+\frac{1}{2}}^{n+1}+Q_{r+\frac{1}{2}}^{n+1}\right)+h_{01}^{n+1}+\frac{\Delta t}{\Omega_{01}}Q_{1+\frac{1}{2}}^{n+1}=h_{01}^{n} \qquad (4\text{-}3\text{-}15)$$

将（4-3-13）、（4-3-14）式代入（4-3-15）式后得

$$-\frac{\Delta t}{\Omega_{01}}\left(G_{p+\frac{1}{2}}h_{01}^{n+1}+H_{p+\frac{1}{2}}+G_{r+\frac{1}{2}}h_{01}^{n+1}+H_{r+\frac{1}{2}}\right)$$

$$+h_{01}^{n+1}+\frac{\Delta t}{\Omega_{01}}Q_{C1+\frac{1}{2}}=h_{01}$$

上式经整理后得

$$h_{01}^{n+1}=E_{01}Q_{C1+\frac{1}{2}}^{n+1}+F_{01} \qquad (4\text{-}3\text{-}16)$$

式中

$$E_{01}=\frac{-\frac{\Delta t}{\Omega_{01}}}{1-\frac{\Delta t}{\Omega_{01}}(G_{p+\frac{1}{2}}+G_{r+\frac{1}{2}})};$$

$$F_{01}=\frac{h_{01}+\frac{\Delta t}{\Omega_{01}}(H_{p+\frac{1}{2}}+H_{r+\frac{1}{2}})}{1-\frac{\Delta t}{\Omega_{01}}(G_{p+\frac{1}{2}}+G_{r+\frac{1}{2}})}$$

有了汇合点的 E_{01}、F_{01}，即可沿叉道 C 继续进行循环系数计算的追过程，直到 C 支末端为止。然后，根据 C 支末端的边界条件，向上游返回进行水深、流量计算的赶过程，求出全部所需的水深、流量。

（2）分流结点的解法

分流结点的关键是如何确定各支的分流量，下面分析分流点②点的计算过程。

首先写出 C 支的循环系数。从①点开始，因①点为水深点，可从 E_{01}，F_{01} 向下游进行追过程，求出 C 支各点的循环系数，至 $C_{s+\frac{1}{2}}$ 得 $G_{s+\frac{1}{2}}$ 和 $H_{s+\frac{1}{2}}$，并得

$$Q_{s+\frac{1}{2}}^{n+1}=G_{s+\frac{1}{2}}h_{02}^{n+1}+H_{s+\frac{1}{2}} \tag{4-3-17}$$

现在考虑分流的 D 支和 E 支。先研究 D 分支，可写出该支的基本控制方程如下（参见 4-2-66 式和 4-2-67 式）

$$a_iQ_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}+b_ih_i^{n+1}+c_iQ_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}=d_i \tag{4-3-18}$$

$$a'_ih_i^{n+1}+b'_iQ_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}+c'_ih_{i+1}^{n+1}=d'_i \tag{4-3-19}$$

设 h_i^{n+1} 和 $Q_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}$ 有如下关系：

$$Q_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}=G'_{i+\frac{1}{2}}h_i+H'_{i-\frac{1}{2}} \tag{4-3-20}$$

$$h_{i+1}^{n+1}=E'_{i+1}Q_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}+F'_{i+1} \tag{4-3-21}$$

在此必须注意，上二式与前面（4-2-68）和（4-2-69）式有不同的表示方法，其循环系数值也不同。为了表示区别，将上二式的系数称为逆循环系数，并在右肩加撇“′”来表示；而（4-2-68）和

(4-2-69) 式中的系数，称正循环系数，或简称循环系数。这两种循环系数之间有如下的关系：

$$E_i=\frac{1}{G_{i+\frac{1}{2}}};\quad F_i=-\frac{H_{i+\frac{1}{2}}}{G_{i+\frac{1}{2}}};\tag{4-3-22a}$$

$$G_{i-\frac{1}{2}}=\frac{1}{E_i};\quad H_{i-\frac{1}{2}}=-\frac{F_i}{E_i}\tag{4-3-22b}$$

将（4-3-20）式代入（4-3-18）式后得

$$a_iQ_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}+b_ih_i^{n+1}+c_i\ (G_{i+\frac{1}{2}}h_i+H_{i+\frac{1}{2}})\ =d_i$$

上式经整理后得

$$h_i=E_iQ_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}+F_i\tag{4-3-23}$$

式中

$$E_i=\frac{-a_i}{b_i+C_iG_{i+\frac{1}{2}}};\quad F_i=\frac{d_i-C_iH_{i+\frac{1}{2}}}{b_i+C_iG_{i+\frac{1}{2}}}\tag{4-3-24}$$

将（4-3-21）式代入（4-3-19）式后得

$$d'_ih_i^{n+1}+b'_iQ_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}+C_i\ (E_{i+1}Q_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}+F_{i+1})\ =d$$

上式经整理后得

$$Q_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}=G_{i+\frac{1}{2}}h_i^{n+1}+H_{i+\frac{1}{2}}\tag{4-3-25}$$

式中

$$G_{i+\frac{1}{2}}=\frac{-d_i}{b'_i+C'_iE_{i+1}};\quad H_{i+\frac{1}{2}}=\frac{d_i-C'_iF_{i+1}}{b'_i+C'_iE_{i+1}}\tag{4-3-26}$$

设 D 支末端的边界条件为已知水深 h_{nd}，由此可得该点的 $E=0$ 和 $F=h_{nd}$，并利用递推公式（4-3-24）和（4-3-26）式求出 D 支各点的逆循环系数，这时②点邻近 $d_{1+\frac{1}{2}}$ 点的逆循环系数 $G_{d1+\frac{1}{2}}$ 和 $H_{d1+\frac{1}{2}}$ 也可求得，由此可得

$$Q_{d1+\frac{1}{2}}^{n+1}=G_{d1+\frac{1}{2}}h_{02}^{n+1}+H_{d1+\frac{1}{2}}\tag{4-3-27}$$

现在转而研究 E 支，同理可得 O_2 邻近 $e_{1+\frac{1}{2}}$ 点的流量为

$$Q_{e1+\frac{1}{2}}^{n+1}=G_{e1+\frac{1}{2}}h_{02}^{n+1}+H_{e1+\frac{1}{2}}\tag{4-3-28}$$

建立②点的连续方程，根据径流量—水位变化关系可得

$$-\frac{\Delta t}{\Omega_2}Q_{g+\frac{1}{2}}^{n+1}+H_{02}^{n+1}+\frac{\Delta t}{\Omega_{02}}\left(Q_{d1+\frac{1}{2}}^{n+1}+Q_{e1+\frac{1}{2}}^{n+1}\right)=H_{02}^{n}$$

将（4-3-17）、（4-3-27）、（4-3-28）式的流量表达式代入上式，即可求出②点的

$$H_{02}^{n+1}=\frac{H_{02}^{n}+\frac{\Delta t}{\Omega_2}\left(H_{g+\frac{1}{2}}-H_{d1+\frac{1}{2}}-H_{e1+\frac{1}{2}}\right)}{1-\frac{\Delta t}{\Omega_2}\left(G_{g+\frac{1}{2}}-G_{d1+\frac{1}{2}}-G_{e1+\frac{1}{2}}\right)}$$

有了H_{02}^{n+1}值，即可用“赶”过程，求出C、D、E三支各点的水位和流量。

对树枝状河网，可按上法逐点向下进行，但在进行过程中，须注意分清汇合点和分流点，选用不同的计算步骤。

关于叉道河网的非恒定流计算，已有不少文章和书籍作了介绍和讨论，一般说来，前节所介绍的单支格式方法，只要在汇合点和分流点经一定处理后，大都可用于枝叉状河网计算，不再重复。

三、Lo 格式

该格式由罗肇森提出。该作者采用联解法，解决了分叉河道恒定流时分流口和汇流口的水位和叉河的分流量的计算。其主要原理是，根据恒定非均匀流公式，可求得任一河道首尾间断面的水位关系为

$$z_b=z_e+FQ^2 \qquad (4\text{-}3\text{-}29)$$

式中 z_b——起始断面的水位；

z_e——末尾断面的水位；

Q——河道的流量；

F——总阻抗模数。

利用基本关系式（4-3-29）式来计算河网各叉口的水位与分流量，各叉口的条件仍为水位相等和流量平衡。

以图 4-3-5 为例，阐述本方法如何应用。

上图有 2 个叉口、4 个河段，已知上游边界水位z_a和下游末端边界

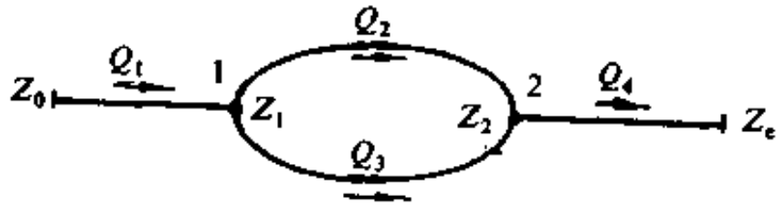


图 4-3-5　分叉河示意图

水位 z_e，求各叉口的水位。设两个叉口的水位分别为 z_1 和 z_2，4 个河段的迳流量分别为 Q_1、Q_2、Q_3 和 Q_4。

在各叉口分别建立流量平衡式。

在叉口 1

$$Q_1=Q_2+Q_3 \tag{4-3-30}$$

由河段 1　　$z_0=z_1+F_1Q_1Q_1$　　(4-3-31a)

由河段 2　　$z_1=z_2+F_2Q_2Q_2$　　(4-3-31b)

由河段 3　　$z_1=z_2+F_3Q_3Q_3$　　(4-3-31c)

将（4-3-31）各式中的阻力项线性化后，得

$$Q_1=(z_0-z_1)/F_1Q_1$$

$$Q_2=(z_1-z_2)/F_2Q_2$$

$$Q_3=(z_1-z_2)/F_3Q_3$$

将上三式代入（4-3-30）式，经整理后可得

$$\left(1+\frac{F_1Q_1}{F_2Q_2}+\frac{F_1Q_1}{F_3Q_3}\right)z_1-\left(\frac{F_1Q_1}{F_2Q_2}+\frac{F_1Q_1}{F_3Q_3}\right)z_2=z_0 \tag{4-3-32}$$

在叉口 2

$$Q_2+Q_3=Q_4 \tag{4-3-33}$$

由河段 2 得　　$Q_2=(z_1-z_2)/F_2Q_2$

由河段 3 得　　$Q_3=(z_1-z_2)/F_3Q_3$

由河段 4 得　　$Q_4=(z_2-z_e)/F_4Q_4$

将上三式代入（4-3-33）式，并经整理后得

$$\left(1+\frac{F_4Q_4}{F_2Q_2}+\frac{F_4Q_4}{F_3Q_3}\right)z_2-\left(\frac{F_4Q_4}{F_2Q_2}+\frac{F_4Q_4}{F_3Q_3}\right)z_1=z_e \tag{4-3-34}$$

（4-3-32）和（4-3-34）式可写成矩阵形式，

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 \\ z_c \end{bmatrix} \tag{4-3-35}$$

式中

$$a_{11} = 1 + \frac{F_1 Q_1}{F_2 Q_2} + \frac{F_1 Q_3}{F_3 Q_3}$$

$$a_{12} = -\left(\frac{F_1 Q_1}{F_2 Q_2} + \frac{F_1 Q_3}{F_3 Q_3} \right)$$

$$a_{21} = -\left(\frac{F_4 Q_4}{F_2 Q_2} + \frac{F_4 Q_4}{F_3 Q_3} \right)$$

$$a_{22} = 1 + \frac{F_4 Q_4}{F_2 Q_2} + \frac{F_4 Q_4}{F_3 Q_3}$$

(4-3-35) 式就是计算 4 河段 2 叉口的基本公式（如图 4-3-5 所示）。在已确定了边界水位 z_0 和 z_c 时，即可由上式求出各叉口的水位 z_1 和 z_2。

根据上述同样原理，可建立多河段多叉口的复杂河网计算模式，图 4-3-6 是 4 个叉口、7 个河段的河网示意图。

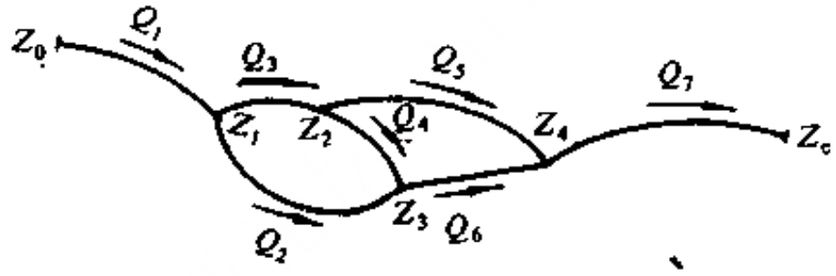


图 4-3-6　多叉河网示意图

在图 4-3-6 中，对各叉口建立流量平衡式，并利用各河段的首尾关系式 (4-3-29)，经整理后，可得计算公式，现以矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 \\ 0 \\ 0 \\ z_c \end{bmatrix}$$

式中

$$a_{11}=1+\frac{F_1Q_1}{F_2Q_2}+\frac{F_1Q_1}{F_3Q_3};\quad a_{12}=-\frac{F_1Q_1}{F_3Q_3};\quad a_{13}=-\frac{F_1Q_1}{F_2Q_2};$$

$$a_{21}=-1;\ a_{22}=1+\frac{F_3Q_3}{F_4Q_4}+\frac{F_3Q_3}{F_5Q_5};\ a_{23}=-\frac{F_3Q_3}{F_4Q_4};\ a_{24}=-\frac{F_3Q_3}{F_5Q_5};$$

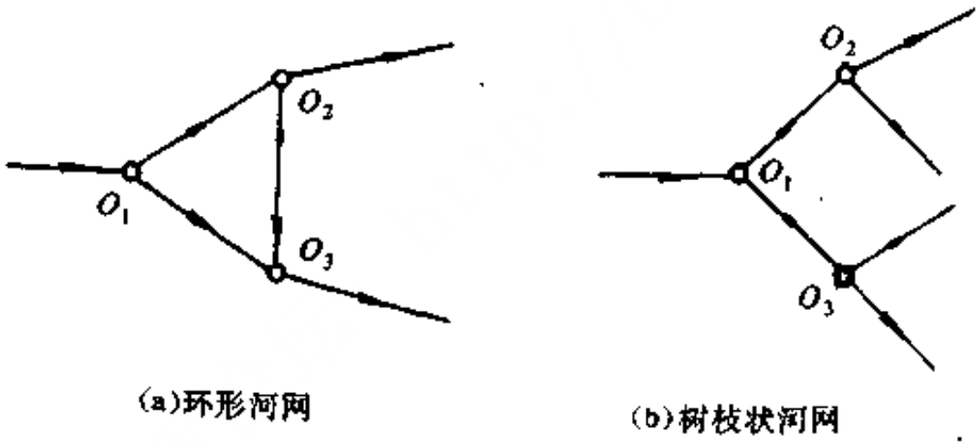
$$a_{31}=-1;\ a_{32}=-\frac{F_2Q_2}{F_4Q_4};\ a_{33}=1+\frac{F_2Q_2}{F_4Q_4}+\frac{F_2Q_2}{F_6Q_6};\ a_{34}=-\frac{F_2Q_2}{F_6Q_6};$$

$$a_{42}=-\frac{F_7Q_7}{F_5Q_5};\quad a_{43}=-\frac{F_7Q_7}{F_6Q_6};\quad a_{44}=1+\frac{F_7Q_7}{F_5Q_5}+\frac{F_7Q_7}{F_6Q_6}。$$

本格式采用超松驰迭代法求解，超松驰因子 ω 以选 0.5～0.7 为宜，当 $\omega=0.5$ 时，收敛最快。

4.3.2 环形河网的数值模拟

环形河网的最简单图形如图 4-3-7 所示。



(a)环形河网　　(b)树枝状河网

图 4-3-7　河网示意图

由图 4-3-7*a*、*b* 比较可知，在树枝状河网中，当上下边界确定后，河道水流向是可以预见的；但在环河网中，有些河道的流向却不易确定，如图 4-3-7a 中 O_2—O_3 间河道就是一例。由于环形河道中存在流向不定，使计算发生了一定的困难。

在环形河网计算中，如果采用显式法，上述困难就不存在了，但在工程计算中，一般都习惯采用隐式法，这时如何解决环形河网计算，就引起了人们的注意，下面介绍作者所采用的一种方法。

河网由河道与交汇点组成，每一个交汇点必有三个以上河道

与其相邻交汇点或上、下游边界相联通，只要每一个交汇点及与其相联通河道的水深、流量解决了，则整个河网也就解决了。

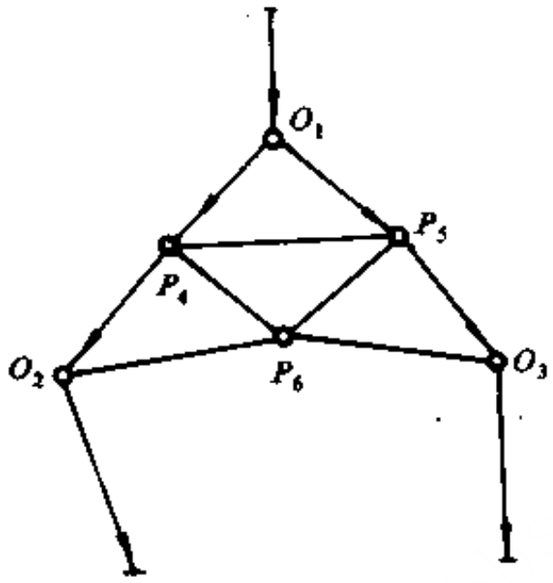


图 4-3-8　河网示意图

在河网中，交汇点分为两类，一类是与边界点相联，称为邻近边界的交汇点；另一类在河网内部，它所联结的都是交汇点，称为内部交汇点。在图 4-3-8 中，O_1，O_2 和 O_3 为邻近边界的交汇点，它有一个以上的河道与边界相联。另一类 P_4、P_5、P_6 为内部交汇点，它仅与邻近交汇点相联，不和控制边界相联。两类交汇点的计算公式不完全相同，下面分别叙述。

1. **邻近边界的交汇点**

取出任一个邻近边界的交汇点来考虑，如图 4-3-9 所示。

由图 4-3-9 可知，交汇点①的相邻交汇点是②和③，另一个是边界点 a。交汇点②和③都是水深点，而边界点 a 可能是水深点，也可能是流量。为不失其一般性，这里设 a 为水深点，设边界及相邻交汇点的水深为 h_a，h_{02}，h_{03}。

计算各河道的循环系数。如果河道所取的坐标结点编号自远至交汇点①逐渐增加（如河道 A），则该河道循环系数为正确循环系数；如果河道结点编号自远至交汇点①逐渐减少，换言之，其

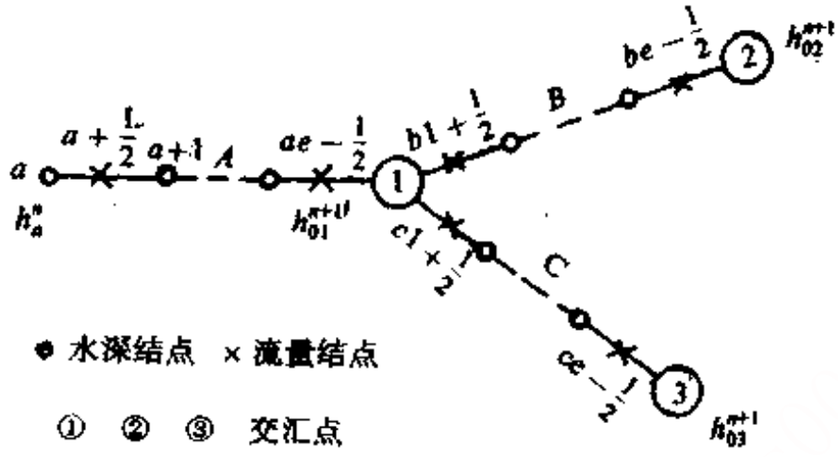


图 4-3-9 河网交汇点示意图

结点编号自交汇点①向外逐渐增加，则该河道的循环系数为逆循环系数（如河道 B 和 C）。

（1）河道 A 的循环系数的计算

已知 h_a，由此得边界的 $E_a=0$，$F_a=h_a$。根据（4-2-71）式依次得

$$G_{a+\frac{1}{2}}=\frac{-c'_i}{b'_i};\quad H_{1+\frac{1}{2}}=\frac{d_1-d_1 ha}{d_1}=\alpha_{a+\frac{1}{2}}+\beta_{a+\frac{1}{2}}h_a$$

$$\alpha'_1=\frac{d_1}{d_1},\quad \beta'_1=-1$$

$$E_2=-\frac{c_2}{a_2G_{a+\frac{1}{2}}+b_2};\quad F_2=\frac{d_2-a_2\ (\alpha'_1+h_a)}{a_2G_{a+\frac{1}{2}}+b_2}=\alpha_2+\beta_2h_a$$

……

$$G_{ae-\frac{1}{2}}=\frac{-c'_{ae-1}}{d_{ae-1}E_{ae-1}+b'_{ae-1}};$$

$$H_{ae-\frac{1}{2}}=\frac{d_{ae-1}-d_{ae-1}F_{ae-1}}{d_{ae-1}E_{ae-1}+b'_{ae-1}}=\alpha_{ae-\frac{1}{2}}+\beta_{ae-\frac{1}{2}}h_a^n$$

由此得

$$Q^{n+1}_{ae-\frac{1}{2}}=G_{ae-\frac{1}{2}}h^{n+1}_{01}+H_{ae-\frac{1}{2}}=G_{ae-\frac{1}{2}}h^{n+1}_{01}+\beta_{ae-\frac{1}{2}}h_a^n+\alpha_{ae-\frac{1}{2}}$$

（4-3-36）

（2）河道 B 的循环系数的计算

在交汇点②的水深为 h_{02}^{n+1}，由此得该处 $E_{02}=0$，$F_{02}=h_{02}^{n+1}$，根据（4-3-24）、（4-3-26）式，可依次计算得

$$G_{ke-\frac{1}{2}}=\frac{-d_{ke-1}}{B_{ke-1}};$$

$$H_{ke-\frac{1}{2}}=\frac{d_{ke-\frac{1}{2}}-c'_{ke-\frac{1}{2}}h_{02}^{n+1}}{B_{ke-1}}=\alpha'_{ke-\frac{1}{2}}+\beta'_{ke-\frac{1}{2}}h_{02}^{n+1}$$

……

$$G_{b1+\frac{1}{2}}=\frac{-C_{b1}}{a'_{b1}E_{b1}+B_{b1}};$$

$$H_{b1+\frac{1}{2}}=\alpha'_{b1+\frac{1}{2}}+\beta'_{b1+\frac{1}{2}}h_{02}^{n+1}$$

由此得

$$Q_{b1+\frac{1}{2}}^{n+1}=G_{b1+\frac{1}{2}}h_{01}^{n+1}+H_{b1+\frac{1}{2}}$$

$$=G_{b1+\frac{1}{2}}h_{01}^{n+1}+\beta'_{b1+\frac{1}{2}}h_{01}^{n+1}+\alpha'_{b1+\frac{1}{2}} \qquad (4\text{-}3\text{-}37)$$

（3）同理，从 C 河道可求得

$$Q_{c1+\frac{1}{2}}^{n+1}=G_{c1+\frac{1}{2}}h_{01}^{n+1}+\beta'_{c1+\frac{1}{2}}h_{03}^{n+1}+\alpha'_{c1+\frac{1}{2}} \qquad (4\text{-}3\text{-}38)$$

在交汇点①建立如下流量—水深关系式

$$h_{01}^{n+1}+\frac{\Delta t}{\Omega_{01}}\sum_{i=1}^{3}Q^{n+1}=h_a^n$$

将（4-3-36）、（4-3-37）和（4-3-38）式代入上式，并经整理后可得

$$-\frac{\Delta t}{\Omega_{01}}\beta_{a-\frac{1}{2}}h_a^n+\left[1-\frac{\Delta t}{\Omega_{01}}\left(G_{a-\frac{1}{2}}-G_{b1+\frac{1}{2}}-G_{c1+\frac{1}{2}}\right)\right]h_{01}^{n+1}$$

$$+\frac{\Delta t}{\Omega_{01}}\beta'_{b1+\frac{1}{2}}h_{02}^{n+1}+\frac{\Delta t}{\Omega_{01}}\beta'_{c1-\frac{1}{2}}h_{03}^{n+1}$$

$$=h_a^n+\frac{\Delta t}{\Omega_{01}}\left(\alpha_{a-\frac{1}{2}}-\alpha'_{b1+\frac{1}{2}}-\alpha'_{c1+\frac{1}{2}}\right) \qquad (4\text{-}3\text{-}39)$$

上式进一步整理，可得

$$a_{11}h_{01}^{n+1}+a_{12}h_{02}^{n+1}+a_{13}h_{03}^{n+1}=b_{11} \qquad (4\text{-}3\text{-}40)$$

式中

$$a_{11}=1-\frac{\Delta t}{\Omega_{01}}\left(G_{a-\frac{1}{2}}-G_{b1+\frac{1}{2}}-G_{c1+\frac{1}{2}}\right)$$

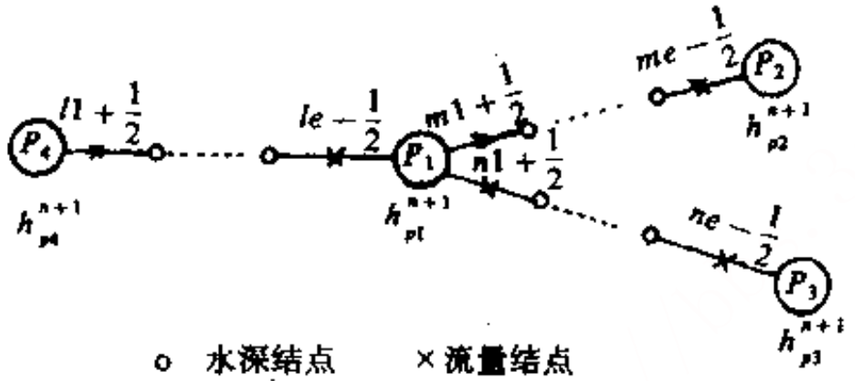
$$a_{12}=\frac{\Delta t}{\Omega_{01}}\beta'_{b1+\frac{1}{2}}$$

$$a_{13}=\frac{\Delta t}{\Omega_{01}}\beta'_{c1+\frac{1}{2}}$$

$$b_{11}=h_a^n+\frac{\Delta t}{\Omega_{01}}\left(B_{a\alpha-\frac{1}{2}}h_a^n+\alpha_{a\alpha-\frac{1}{2}}-\alpha'_{b1+\frac{1}{2}}-\alpha'_{c1+\frac{1}{2}}\right)$$

2. **内部交汇点**

取出任一内部交汇点来考虑（见图 4-3-10）。



o 水深结点　　× 流量结点

P_1　P_2　P_3　P_4　交汇点

图 4-3-10　河网内部结点示意图

此交汇点由 L、M、N 三条河道交汇而成，并分别与 P_2、P_3、P_4 三个交汇点相联通。

建立内部交汇点的计算公式时，与上述建立邻近边界交汇点的计算公式所采用的原理、方法、步骤完全一样，并可得出与（4-3-39）完全相似的公式：

$$-\frac{\Delta t}{\Omega_{p1}}\beta_{le-\frac{1}{2}}H_{p4}^{n+1}+\left[1-\frac{\Delta t}{\Omega_{p1}}\left(G_{le-\frac{1}{2}}-G_{m1+\frac{1}{2}}-G_{n1+\frac{1}{2}}\right)\right]H_{p1}^{n+1}$$

$$+\frac{\Delta t}{\Omega_{p1}}\beta'_{m1+\frac{1}{2}}h_{p2}^{n+1}+\frac{\Delta t}{\Omega_{p1}}\beta'_{n1+\frac{1}{2}}H_{p3}^{n+1}$$

$$=h_{p1}^n+\frac{\Delta t}{\Omega_{p1}}\left(\alpha_{le-\frac{1}{2}}-\alpha'_{m1+\frac{1}{2}}-\alpha'_{n1+\frac{1}{2}}\right)$$

上式进一步整理后可得

$$a_{14}h_{p4}^{n+1}+d'_{11}H_{p1}^{n+1}+d'_{12}h_{p2}^{n+1}+d'_{13}h_{p3}^{n+1}=B'_{11}\qquad(4\text{-}3\text{-}41)$$

式中 $$d'_{14}=-\frac{\Delta t}{\Omega_{p1}}\beta_{k-\frac{1}{2}}$$

$$d'_{11}=1-\frac{\Delta t}{\Omega_{p1}}\left(G_{k-\frac{1}{2}}-G'_{m1+\frac{1}{2}}-G'_{n1+\frac{1}{2}}\right)$$

$$d'_{12}=\frac{\Delta t}{\Omega_{p1}}\beta'_{m1+\frac{1}{2}}$$

$$d'_{13}=\frac{\Delta t}{\Omega_{p1}}\beta'_{n1+\frac{1}{2}}$$

$$b'_{11}=h''_{p1}+\frac{\Delta t}{\Omega_{p1}}\left(\alpha_{k-\frac{1}{2}}-\alpha'_{m1+\frac{1}{2}}-\alpha'_{n1+\frac{1}{2}}\right)$$

由以上推导可知，两类交汇点的基本公式是一样的，只包含交汇点的水深。下面将建立河网各交汇点公式组成代数方程组，并用矩阵形式表示如下：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{22} \\ b_{33} \\ \vdots \\ b_{mm} \end{bmatrix} \tag{4-3-42}$$

式中 m——交汇点的总数；

$h_1 \cdots h_m$——待求的交汇点的水深；

$b_1 \cdots b_{mm}$和 a_{ii}——已知系数。

由上推导公式可知，

$$a_{ii}=1-\frac{\Delta t}{\Omega_i}\left[\sum G_{(i-\frac{1}{2})}-\sum G'_{(i+\frac{1}{2})}\right]$$

$$a_{ij}=\begin{cases} -\dfrac{\Delta t}{\Omega_i}\sum\beta_{i-\frac{1}{2}}, & i>j \\ \dfrac{\Delta t}{\Omega_i}\sum\beta'_{i+\frac{1}{2}}, & i<j \end{cases}$$

$$b_{ii}=h''_i+\frac{\Delta t}{\Omega_i}\left(\sum\alpha_{i-\frac{1}{2}}-\sum\alpha'_{i+\frac{1}{2}}\right)$$

上式中，下角标“$i-\frac{1}{2}$”表示交汇点上游邻近点；下角标“$i+\frac{1}{2}$”表示交汇点下游邻近点。

(4-3-42)式的系数矩阵是一个稀疏矩阵，可采用消元法求解。从(4-3-42)式求得各交汇点的水深Z^{n+1}后，即可从下游边界已知值，利用“赶”的过程，向上游逐点求出各点的水位和流量。

参 考 文 献

1 王尚毅，顾元 ，郭传镇．河口工程泥沙数学模型．北京：海洋出版社，1990

2 江德耀．计算水力学（理论与应用）．南京：河海大学出版社，1989

3 Fox L. Numerical Solution of Ordinary and Partial Differential Equation. Pergamon Press, 1962

4 Lax P D & Wendroff B. System of Conservation Laws, CPAM., 1960, 15

5 Richtmyer R D. Difference Methods for Initial－Value Problems. Interscience Publishers, New York, Charpter 10, 1959

6 Dronkers JJ. Tidal Computation for Rivers, Coastal Areas and Seas. Jour. of the Hydr. Div, Proc. of ASCE, 1965, 95

7 Celfand I M & Lokutseievsk O V. 差分格式理论引导，冯果忱译，上海：上海科学出版社，1966

8 Vasiliev O F, Voyevodin A F & Atavin A A. Numerical Methods for the Calculation of Unsteady Flow in Systems of Open Channels and Canals. Proceedings of the International Symposium on Unsteady Flow in Open Channels, 1976, E2：15～22

9 Amein M & Ching S F. Implicit Flood Routing in Natural Channels. J. of the Hydr. div., ASCE 1970, 96：2481～2500

10 Price R K Comparison of Four Numerical Methods for Flood Routing. J. of the Hydr. Div. Proc. ASCE, 1974, 100 (Hy7)：479～899

11 Leenderlse J J & Liu S K. Three--Dimensional Flow Simulation in Estuaries, Proc. of the International Symposium on Unsteady Flow in Open Channels, 1967, B2, 11－24.

12 Preissmann A. Use of Mathematical Methods (Critical Remarks, the Fu-

ture outlook) Proc. of the International Sym. on Unsteady Flow in Open Channels, 1976, E3, 23—28.

13 Abbott M B. Computationaal Hydraulics Elements of the Theory of Free Surface Flows, London Pitman 1979.

14 罗肇森. 分汊河道水力计算的联解法. 水道港口, 1992 (3): 33～40

第五章　二维水动力数值模拟

5.1　引　言

在海岸、河口、湖泊、大型水库等广阔水域地区，水平尺度远大于垂向尺度，水力参数（如流速、水深等）在垂直方向变化要小于水平方向的变化，其流态可用沿水深的平均流动量来表示，因此可采用平面二维水动力数值模拟技术。而在另外一些水域，如窄深潮汐通道、窄深河口地区，有关参量（如流速、温度、含盐度、含沙量等）的垂向变化要比水平横向的变化为大，这时往往要采用垂向二维水动力数值模拟技术。本章将分别介绍水平二维和垂直二维的水动力模拟技术。

5.2　平面二维水动力数值模拟

水平面二维水动力数值模拟技术在海岸河口地区应用极广，自 80 年代以来，我国广大科技人员已成功地开发了多种水平二维模拟系统。在这些平面二维水动力数值模拟系统中，按差分网格的形状分，有三角形、正方形、矩形、四边形、多边形、曲线坐标网格以及各种形状网格的组合等；按计算方法分，有显式法、隐式法、显隐式混合法等；按模拟格式分，有三角元法、ADI 法、破开算子法、单元体积法、MADI 法、准分析法、贴体坐标法等。

在平面二维水动力数值模拟中，控制方程是将三维流动基本方程沿水深积分后平均而得，其一般形式如下。

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial (uh)}{\partial x}+\frac{\partial (vh)}{\partial y}=0\\&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+g\frac{\partial h}{\partial x}-i_{bx}+\frac{\tau_{bx}}{\rho h}-\frac{\tau_{sx}}{\rho h}=0\\&\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+g\frac{\partial h}{\partial y}-i_{by}+\frac{\tau_{bx}}{h}-\frac{\tau_{sx}}{h}=0\end{aligned}\right\}\qquad(5\text{-}2\text{-}1)$$

或

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{\partial (h_0+\zeta)\ u}{\partial x}+\frac{\partial (h_0+\zeta)\ v}{\partial y}=0\qquad(5\text{-}2\text{-}2a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+g\frac{\partial \zeta}{\partial x}-fv+\frac{\tau_{bx}}{\rho h}-\frac{\tau_{sx}}{\rho h}=0\qquad(5\text{-}2\text{-}2b)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+g\frac{\partial \zeta}{\partial y}+fu+\frac{\tau_{by}}{h}-\frac{\tau_{sy}}{h}=0\qquad(5\text{-}2\text{-}2c)$$

式中 u、v——流速在 x、y 方向的分量；

h——水深，$h=h_0+\zeta$；

h_0——静水时的水深；

ζ——自由水面在竖直方向的位移；

i_{bx}，i_{by}——床面在 x、y 方向的坡降；

f——柯氏力系数，$f=2\omega\sin\psi$；

ω——地球自转速度；

ψ——研究区的地球纬度；

τ_{bx}、τ_{by}——床面阻力在 x、y 方向的分量；

$\tau_{bx}=f_b\rho|U|u$

$\tau_{by}=f_b\rho|U|v$

f_b——底摩阻系数，如采用曼宁公式，

$f_b=\frac{1}{n}h^{\frac{1}{6}}$，$n$—曼宁糙率系数.

则可得

$$\tau_{bx}=\frac{n^2|U|u}{\rho h^{1/3}}=\frac{n^2\sqrt{u^2+v^2}u}{\rho h^{1/3}}$$

$$\tau_{by}=\frac{n^2|U|v}{\rho h^{1/3}}=\frac{n^2\sqrt{u^2+v^2}v}{\rho h^{1/3}}$$

τ_{sx}、τ_{sy}——风对自由水面的剪切应力在 x、y 方向的分量，

$$\tau_{sx}=f_s\rho_a|W|u_w=f_s\rho_a\sqrt{u_w^2+v_w^2}u_w$$

$$\tau_{sy}=f_s\rho_a|W|v_w=f_s\rho_a\sqrt{u_w^2+v_w^2}v_w$$

式中 f_s——风阻力系数；

ρ_a——空气密度；

ρ——水密度；

u_w、v_w——风速 w 在 x、y 方向的分量。

下面介绍几种常用的平面二维模拟方法。

5.2.1 Leendertse 法

Leendertse 是提出二维明渠水流有限差分计算模式的早期研究者，其在 1967 年提出的为显式与隐式的混合模式，采用 ADI 法求解，在我国应用较广。由于非线性项的影响，格式呈现某种不稳定，1970 年，该作者又对原格式进行改进，采用了分步全隐式。

一、交替方向显、隐式混合格式（ADI 法）

该格式的网格是正方形或矩形，变量 ζ、u、v 等分别交错布置于网格的中心和两侧，见图 5-2-1。

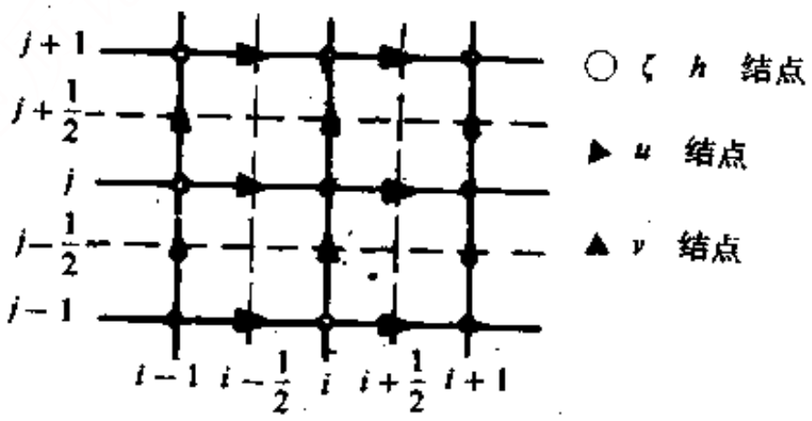


图 5-2-1 Leendertse 网格布置图

交替方向法（ADI 法）是 Peaceman，Rachford 和 Douglas 于 1955

年提出的。

该方法的特点是在对微分方程进行差分离散时，将任一时刻的时间步长 Δt 分为两个半步长，在前半个步长内，以 x 向动量方程与连续方程联立，对 u、ζ 进行隐式求解，将求得的 u、ζ 值代入 y 方向的动量方程中，对 v 进行显式求解。在后半步长中，则将 y 向动量方程与连续方程联立，对 v、ζ 进行隐式求解，求得 v、ζ 后，代入 x 向动量方程，对 u 进行显式求解。由于这种方法分步地采用了显、隐式求解，各自保留了显、隐式的部分优点，因此曾在工程中获得了较广泛的应用。

该方法所采用的基本控制方程是（5-2-2）式。

在前半个时间步长时，当 $n\Delta t \to \left(n+\frac{1}{2}\right)\Delta t$ 时，对微分方程中的时间偏导项采用向前差分，空间偏导项采用中心差，非线性项进行线性化处理，由此可得基本控制方程的差分方程为 x 向动量方程（5-2-2b）的差分方程（在 $i+\frac{1}{2}$，j 点离散）

$$d'_i\zeta^{n+\frac{1}{2}}_{i,j}+b'_i u^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j}+c'_i\zeta^{n+1}_{i+1,j}=d_i \tag{5-2-3}$$

式中

$$d'_i=-\frac{g\Delta t}{2\Delta x};$$

$$b'_i=1+\frac{\Delta t}{4\Delta x}\left(u^n_{i+\frac{3}{2},j}-u^n_{i-\frac{1}{2},j}\right)+g\frac{\Delta t}{2}\frac{\sqrt{\left(u^n_{i+\frac{1}{2},j}\right)^2+\left(\bar{v}^n_{i+\frac{1}{2},j}\right)^2}}{C^2\left(\bar{h}_0+\bar{\zeta}\right)^n_{i+\frac{1}{2},j}};$$

$$c'_i=\frac{g\Delta t}{2\Delta x};$$

$$d_i=u^n_{i+\frac{1}{2},j}-\frac{\Delta t}{2}\left[\left(\frac{u^n_{i+\frac{1}{2},j+1}-u^n_{i+\frac{1}{2},j-1}}{2\Delta y}-f\right)\bar{v}_{i+\frac{1}{2},j}\right]$$

$$\bar{v}^n_{i+\frac{1}{2},j}=\frac{1}{4}\left(v^n_{i,j-\frac{1}{2}}+v^n_{i,j+\frac{1}{2}}+v^n_{i+1,j-\frac{1}{2}}+v^n_{i+1,j+\frac{1}{2}}\right)$$

$$\overline{h}^{n}_{i+\frac{1}{2},j}=\frac{1}{2}\left(h^{n}_{i+1,j}+h^{n}_{i,j}\right)$$

$$\overline{\zeta}^{n}_{i+\frac{1}{2},j}=\frac{1}{2}\left(\zeta^{n}_{i+1,j}+\zeta^{n}_{i,j}\right)$$

连续方程（5-2-2a）的差分方程（在 i，j 点离散）

$$a_i u^{n+\frac{1}{2}}_{i-\frac{1}{2},j}+b_i\zeta^{n+\frac{1}{2}}_{i,j}+c_i u^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j}=d_i \tag{5-2-4}$$

式中 $a_i=-\dfrac{\Delta t}{2\Delta x}\ (h_0+\zeta)^{n}_{i-\frac{1}{2},j}$；

$b_i=1$；

$c_i=\dfrac{\Delta t}{2\Delta x}\ (h_0+\zeta)^{n}_{i+\frac{1}{2},j}$；

$$d_i=\zeta^{n}_{i,j}-\frac{\Delta t}{2\Delta y}\left[v^{n}_{i,j+\frac{1}{2}}\ (h_0+\zeta)^{n}_{i,j+\frac{1}{2}}-v^{n}_{i,j-\frac{1}{2}}\ (h_0+\zeta)^{n}_{i,j-\frac{1}{2}}\right]$$

y 向动量方程（5-2-2c）的差分方程（在 i，$j+\dfrac{1}{2}$ 点离散）

$$N_i v^{n+\frac{1}{2}}_{i,j+\frac{1}{2}}=M_i$$

或

$$v^{n+\frac{1}{2}}_{i,j+\frac{1}{2}}=\frac{M_i}{N_i} \tag{5-2-5}$$

式中

$$N_i=1+\frac{\Delta t}{4\Delta y}\left(v^{n}_{i,j+\frac{3}{2}}-v_{i,j-\frac{1}{2}}\right)^{n}+\frac{\Delta t}{2}\frac{g\sqrt{\left(\bar{u}^{n+\frac{1}{2}}_{i,j+\frac{1}{2}}\right)^2+\left(v^{n}_{i,j+\frac{1}{2}}\right)^2}}{C^2\ (\bar{h}_0+\bar{\zeta})^{n}_{i,j+\frac{1}{2}}};$$

$$M_i=v^{n}_{i,j+\frac{1}{2}}-\bar{u}^{n+\frac{1}{2}}_{i,j+\frac{1}{2}}\frac{\Delta t}{4\Delta x}\left(v^{n}_{i+1,j+\frac{1}{2}}-v^{n}_{i-1,j+\frac{1}{2}}\right)^{n}-\frac{g\Delta t}{2\Delta y}\left(\zeta_{i,j+1}-\zeta_{i,j}\right)^{n}-\frac{\Delta t}{2}f u^{n+\frac{1}{2}}_{i,j+\frac{1}{2}}$$

$$\bar{u}_{i,j+\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}\left(u_{i+\frac{1}{2},j}+u_{i-\frac{1}{2},j}+u_{i+\frac{1}{2},j+1}+u_{i-\frac{1}{2},j+1}\right)$$

联立（5-2-3）和（5-2-4）式，并略去右下标有关 j 的符号，则得以下形式的线性代数方程组

$$a'_i\zeta_i^{n+\frac{1}{2}}+b'_iu_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}+c'_i\zeta_{i+1}^{n+\frac{1}{2}}=d_i$$

$$a_iu_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}+b_i\zeta_{i+1}^{n+\frac{1}{2}}+c_iu_{i+\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}}=d_i$$

上述线性方程组的 u 与 ζ 存在如下关系：

$$u_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}=G_{i-\frac{1}{2}}\zeta_i^{n+\frac{1}{2}}+H_{i-\frac{1}{2}} \tag{5-2-6}$$

$$\zeta_i^{n+\frac{1}{2}}=E_iu_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}+F_i \tag{5-2-7}$$

上式中的 G、H、E、F 为循环系数，这些循环系数有如下递推关系：

$$E_i=\frac{-c_i}{a_iG_{i-\frac{1}{2}}+b_i};\quad F_i=\frac{d_i-a_iH_{i-\frac{1}{2}}}{a_iG_{i-\frac{1}{2}}+b_i} \tag{5-2-8}$$

$$G_{i+\frac{1}{2}}=\frac{-c'_i}{a'_iE_i+b'_i};\quad H_{i+\frac{1}{2}}=\frac{d_i-a'_iF_i}{a'_iE_i+b_i} \tag{5-2-9}$$

由（5-2-8）、（5-2-9）式可知，只要已知起始点任一对系数，即可沿 x 向求出以后各点的循环系数，而起始点的循环系数，则可由已知边界条件来确定。

当边界条件为已知水位 ζ_1 控制时，则由（5-2-7）式可得

$E_1=0$ 及 $F_1=\zeta_1$

当边界条件为已知流速 u_0 时，则由（5-2-6）式可得

$G_{1+\frac{1}{2}}=0$ 及 $H_{1+\frac{1}{2}}=u_0$

有了各循环系数，则可由末边界的已知 u 或 ζ，利用（5-2-6）式和（5-2-7）式，反向求得 $u_{i+\frac{1}{2}}$ 和 ζ_i（$i=m-1$，$m-2$，…，2，1）。

将已知求得的 $u_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ 和 $\zeta_i^{n+\frac{1}{2}}$ 代入（5-2-5）式，即可显式地求出 $v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1}$。

在后半个时间步长，当 $(n+\frac{1}{2})\Delta t \to (n+1)\Delta t$ 时，按上述同样原理，在 y 向扫描。因此只须将上述各计算公式中进行如下变换：$x \rightleftarrows y$，$i \leftrightarrows j$，$u \leftrightarrows v$，即可先隐式求出 $v^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2}}$ 和 $\zeta^{n+1}_{i,j}$，然后显式求出 $u^{n+1}_{i-\frac{1}{2},j}$。

二、分步全隐式格式

采用的网格如图 5-2-2 所示。基本运动方程为（5-2-2a）～(5-2-2c)，计算时将时间进行中分来考虑。

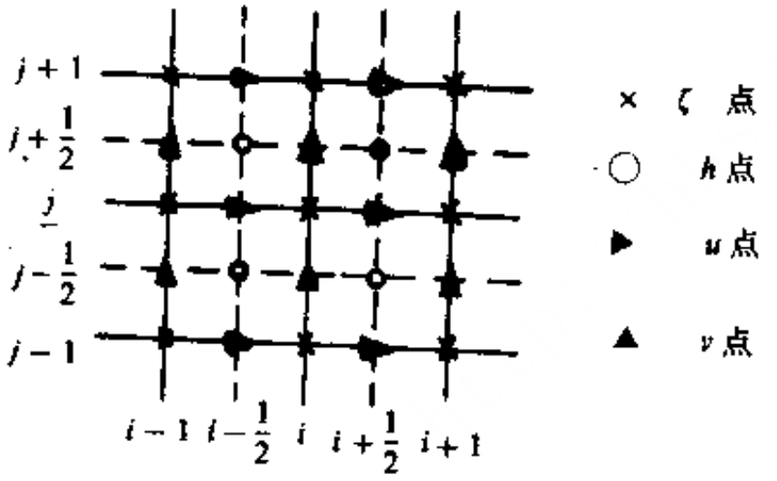


图 5-2-2 Leendertse 全隐格式网格布置图

下面对基本方程进行差分离散。

在 x 方向

动量方程在 $(i+\frac{1}{2},\ j)$ 点离散后为

$$\frac{u^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j}-\bar{u}^{n}_{i+\frac{1}{2},j}}{\Delta t}+u^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j}\left(\frac{\bar{u}^{n}_{i+1,j}-\bar{u}^{n}_{i,j}}{\Delta x}\right)$$

$$+\bar{v}^{n}_{i+\frac{1}{2},j}\left(\frac{\bar{u}^{n}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}-\bar{u}^{n}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta y}\right)+g\left(\frac{\zeta^{n+\frac{1}{2}}_{i+1,j}-\zeta^{n+\frac{1}{2}}_{i,j}}{\Delta x}\right)$$

$$+g\frac{\overline{u}^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j}\left[\left(u^n_{i+\frac{1}{2},j}\right)^2+\left(\bar{v}^n_{i+\frac{1}{2},j}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{\left(\overline{C}^n_{i+\frac{1}{2},j}\right)^2\cdot\left(\overline{h}^n_{i+\frac{1}{2},j}+\overline{\zeta}^n_{i+\frac{1}{2},j}\right)}-f\bar{v}^n_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$-\frac{(\tau^n_{sx})_{i+\frac{1}{2},j}}{\rho\left(\overline{h}^n_{i+\frac{1}{2},j}+\overline{\zeta}_{i-\frac{1}{2},j}\right)}=0$$

连续方程在 $(i,\ j)$ 点离散后为

$$\frac{\zeta^{n+\frac{1}{2}}_{i,j}-\zeta^n_{i,j}}{\Delta t}+\frac{\left(\overline{h}^n_{i+\frac{1}{2},j}+\overline{\zeta}^n_{i+\frac{1}{2},j}\right)u^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j}-\left(\overline{h}^n_{i-\frac{1}{2},j}+\overline{\zeta}^n_{i-\frac{1}{2},j}\right)u^{n+1}_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x}$$

$$+\frac{\left(\overline{h}^n_{i,j+\frac{1}{2}}+\overline{\zeta}^n_{i,j+\frac{1}{2}}\right)v^n_{i,j+\frac{1}{2}}-\left(\overline{h}^n_{i,j-\frac{1}{2}}+\overline{\zeta}^n_{i,j-\frac{1}{2}}\right)v^n_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta y}=0$$

式中

$$\bar{u}^n_{i+1,j}=\frac{1}{2}\left(u^n_{i+\frac{1}{2},j}+u^n_{i+\frac{3}{2},j}\right);\quad \bar{u}^n_{i,j}=\frac{1}{2}\left(u^n_{i+\frac{1}{2},j}+u^n_{i-\frac{1}{2},j}\right)$$

$$\bar{u}^n_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(u^n_{i+\frac{1}{2},j+1}+u^n_{i+\frac{1}{2},j}\right);$$

$$\bar{u}^n_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(u^n_{i+\frac{1}{2},j}+u^n_{i+\frac{1}{2},j-1}\right)$$

$$\bar{u}^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j}=\frac{1}{2}\left(u^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j}+u^n_{i+\frac{1}{2},j}\right)$$

$$\bar{v}^n_{i+\frac{1}{2},j}=\frac{1}{4}\left(v^n_{i,j+\frac{1}{2}}+v^n_{i,j-\frac{1}{2}}+v^n_{i+1,j}+v^n_{i-1,j}\right)$$

$$\overline{C}^n_{i+\frac{1}{2},j}=\frac{1}{n}\left(\overline{h}^n_{i+\frac{1}{2},j}+\overline{\zeta}^n_{i+\frac{1}{2},j}\right)^{\frac{1}{6}}$$

$$\overline{h}^n_{i+\frac{1}{2},j}=\frac{1}{2}\left(h^n_{i+\frac{1}{2},j+1}+h^n_{i+\frac{1}{2},j-1}\right)$$

$$\overline{\zeta}^n_{i+\frac{1}{2},j}=\frac{1}{2}\left(\zeta^n_{i,j}+\zeta^n_{i+1,j}\right)$$

$$\overline{h}^n_{i-\frac{1}{2},j}=\frac{1}{2}\left(h^n_{i-\frac{1}{2},j+1}+h^n_{i-\frac{1}{2},j-1}\right)$$

$$\overline{\zeta}^n_{i-\frac{1}{2},j}=\frac{1}{2}\left(\zeta^n_{i-1,j}+\zeta^n_{i,j}\right)$$

$$\overline{h}^n_{i,j+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(h^n_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}+h^n_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\right)$$

$$\bar{\zeta}^n_{i,j+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(\zeta^n_{i,j+1}+\zeta^n_{i,j}\right)$$

$$\bar{h}^n_{i,j-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(h^n_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}+h^n_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\bar{\zeta}^n_{i,j-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(\zeta^n_{i,j}+\zeta^n_{i,j-1}\right)$$

以上离散后的二式经整理后，可写成以下简单形式：

$$d_i\zeta^{n+\frac{1}{2}}_{i,j}+H_i u^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j}+c_i\zeta^{n+\frac{1}{2}}_{i+1,j}=d_i$$

$$a_i u^{n+\frac{1}{2}}_{i-\frac{1}{2},j}+b_i\zeta^{n+\frac{1}{2}}_{i,j}+c_i u^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j}=d_i$$

上二式可用追赶法求得 u^{n+1}，$\zeta^{n+\frac{1}{2}}$。

同理，在 y 方向，动量方程和连续方程可写成

$$d_i\zeta^{n+1}_{i,j}+b_i v^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2}}+c_i\zeta_{i,j+1}=d_i$$

$$a_i v^{n+1}_{i,j-\frac{1}{2}}+b_i\zeta^{n+1}_{i,j}+c_i v^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2}}=d_i$$

由上二式，又可进一步用追赶法求得 v^{n+1}，ζ^{n+1}。

5.2.2 移步双向交替显、隐式交错法

移步双向交替显、隐式交错法（Moving Alternating Diretional Implicit Method 简称 MADI 法）的特点是将水位、水深、流速等变量均布置在同一个网格节点上，由此将基本运动方程离散而形成了新的差分代数方程组，并建立一种新的解法，这种解法既吸收了原有传统的 ADI 法的优点，又有较高的稳定性、收敛性和精度。

本方法所用的基本控制方程仍是（5-2-2a）、(5-2-2b)、(5-2-2c)。

对上述控制方程进行差分离散，时间导数项采用前差表示，空间导数项采用中心差分表示，将时间步长 Δt 分成两等分。在前半个时间步长，当 $n\Delta t\to\left(n+\frac{1}{2}\right)\Delta t$，在 x 方向，由（5-2-2a）和(5-2-2b) 建立差分方程，并经整理后，可得下列方程组：

$$a_i u^{n+\frac{1}{2}}_{i-1}+b_i\zeta^{n+\frac{1}{2}}_i+c_i u^{n+\frac{1}{2}}_{i+1}=d_i$$

$$d_i\zeta_{i-1}^{n+\frac{1}{2}}+b'_iu_i^{n+\frac{1}{2}}+c'_i\zeta_{i+1}^{n+\frac{1}{2}}=d_i$$

上式中，a_i、b_i、c_i、d_i、d'_i、b'_i、c'_i、d_i等系数均为已知值，将上式用矩阵形式表示，得

$$\begin{bmatrix}
\ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\
 & d'_i & 0 & 0 & b'_i & c'_i & & & \\
 & & a_i & b_i & 0 & 0 & c_i & & \\
 & & & d'_{i+1} & 0 & 0 & b'_{i+1} & c'_{i+1} & \\
 & & & & a_{i+1} & b_{i+1} & 0 & 0 & c_{i+1} \\
 & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
\vdots \\ \zeta_{i-1} \\ u_{i-1} \\ \zeta_i \\ u_i \\ \zeta_{i+1} \\ u_{i+1} \\ \zeta_{i+2} \\ u_{i+2} \\ \vdots
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ d_i \\ d_i \\ d_{i+1} \\ d_{i+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots
\end{bmatrix}
\qquad (5\text{-}2\text{-}10)$$

这是系数为五条带对角矩阵的方程，对角主元素为零(0)，显然，上述矩阵可分解成下列两个较简单的矩阵，其系数均为三对角矩阵，形式相似。

$$\begin{bmatrix}
\ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\
 & d'_i & b'_i & c'_i & \\
 & & a_{i+1} & b_{i+1} & c_{i+1} \\
 0 & & & \ddots & \ddots & \ddots
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\vdots \\ \zeta_{i-1} \\ u_i \\ \zeta_{i+1} \\ u_{i+2} \\ \vdots
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\vdots \\ \vdots \\ d_i \\ d_{i+1} \\ \vdots \\ \vdots
\end{bmatrix}
\qquad (5\text{-}2\text{-}11)$$

和

$$\begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ & a_i & b_i & c_i & \\ & & d'_{i+1} & B'_{i-1} & c'_{i+1} \\ 0 & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ u_{i-1} \\ \zeta_i \\ u_{i+1} \\ \zeta_{i+2} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ d_i \\ d_{i-1} \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{5-2-12}$$

上式中的各系数如下：

$$d = -\frac{g\Delta t}{2\Delta x}$$

$$B'_i = 1 + \frac{\Delta t}{4\Delta x}\left(u^n_{i+1,j} - u^n_{i-1,j}\right) + \frac{g\Delta t}{2}\frac{\sqrt{\left(u^n_{i,j}\right)^2 + \left(v^n_{i,j}\right)^2}}{C^2_{i,j}\ (h_0+\zeta)^n_{i,j}}$$

$$c'_i = \frac{g\Delta t}{2\Delta x}$$

$$d_i = u^n_{i,j} - \frac{\Delta t}{2}\left[\left(\frac{u^n_{i,j+1} - u^n_{i,j-1}}{2\Delta y} - f\right)v^n_{i,j}\right]$$

$$a_i = -\frac{\Delta t}{2\Delta x}\ (h_0+\zeta)^n_{i-1,j}$$

$$b_i = 1$$

$$c_i = \frac{\Delta t}{2\Delta x}\ (h_0+\zeta)^n_{i+1,j}$$

$$d_i = \zeta^n_{i,j} - \frac{\Delta t}{2\Delta y}\left[v^n_{i,j+1}\ (h_0+\zeta)^n_{i,j+1} - v^n_{i,j-1}\ (h_0+\zeta)^n_{i,j-1}\right]$$

由于方程（5-2-11）和（5-2-12）为三对角系数矩阵，可采用“追赶法”求解。从（5-2-11）式求得 $u_i^{n+\frac{1}{4}}$ 和 $\zeta_{i+1}^{n+\frac{1}{4}}$，继而从（5-2-12）式进一步求得 $u_{i+1}^{n+\frac{1}{2}}$ 和 $\zeta_i^{n+\frac{1}{2}}$。

现再由(5-2-2c)式建立差分方程，为了提高稳定性和收敛性，采用迎风格式，经整理后，得如下代数方程

$$v^{n+\frac{1}{2}}_{i,j} = \frac{M_{i,j}}{N_{i,j}} \tag{5-2-13}$$

式中

$$M_{i,j} = v^n_{i,j} - \frac{\Delta t}{2\Delta x}u^{n+\frac{1}{2}}_{i,j}\left[(1-E_u)\ (v^n_{i+1,j} - v^n_{i,j})\right.$$

$$+(1+E_u)(v^n_{i,j}-v^n_{i-1,j})\Big]+fu^{n+\frac{1}{2}}_{i,j}+g\frac{\tau^n_{by(i,j+1)}-\tau^n_{by(i,j-1)}}{2\Delta y}$$

$$N_{i,j}=1+\frac{\Delta t}{\Delta y}\Big[(1-K_v)(v^n_{i,j+1}-v^n_{i,j})+(1+K_v)(v^n_{i,j}-v^n_{i,j-1})\Big]+g v^n_{i,j}+\frac{\sqrt{\left(u^{n+\frac{1}{2}}_{i,j}\right)^2+\left(v^n_{i,j}\right)^2}}{C^2_{i,j}(h_c+\zeta)^{n+\frac{1}{2}}_{i,j}}$$

$$E_u=\mathrm{sign}(u)$$

$$K_v=\mathrm{sign}(v)$$

将 $\zeta^{n+\frac{1}{2}}_i$、$u^{n+\frac{1}{2}}_{i+1,j}$ 代入上式，即可显式地直接求得 $v^{n+\frac{1}{2}}_{i,j}$。

在后半个时间步长，当 $(n+\frac{1}{2})\Delta t\to(n+1)\Delta t$ 时，可按上述同样原理，先联立（5-2-2a）式和（5-2-2c）式的差分方程组，在 y 向采用追赶法，求出 $\zeta^{n+1}_{i,j}$、$v^{n-1}_{i,j+1}$，然后由（5-2-2b）式建立差分方程，并显式地直接求出 $u^{n+1}_{i,j}$。由以上简述可知，后半步时间步长内的求解过程与前半步时间步长内求解过程完全相似，只要将前半步时间步长内的各方程中作如下代换即可，即 $x\leftrightarrows y$，$i\leftrightarrows j$，$u\leftrightarrows v$。

5.2.3 分步法

分步法是将原来比较复杂的或高维的数学、物理问题的求解分解成若干比较简单的问题的连续求解过程。分步法可分为下述三种类型。

（1）空间概念上的分步：即将多维问题分解成一系列的低维问题，通常是化成一系列的一维问题来求解。

（2）物理概念上的分步：即将原始的包含若干个物理性质不同的复合过程分解成若干性质单一的物理过程，并按一定时间系

列进行求解。

(3) 解析上的分步：将原始解析方程进行分解求解。例如，微分方程中的代数项，特别是曲线坐标系中微分方程所包含的代数项的分解处理。

上面提到的 ADI 法，实质上是时间上的分步法，也是解析上的分步求解过程。

下面介绍两类分步法的格式。

一、破开算子法

破开算子法是目前广为流行的一种数值计算方法，它是属于空间概念上的分步法。

早在 50 年代，Yanenko 就提出破开算子的方法，但当时未引起人们的重视，后来，随着该理论的逐步完善，特别是电子计算机计算技术的日益发展，破开算子法才获得了广泛应用。

破开算子法的基本原理为：

设有如下基本微分方程

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\phi_1\ (t,\ f)\ +\phi_2\ (t,\ f)\ +\cdots+\phi_m\ (t,\ f) \qquad (5\text{-}2\text{-}14)$$

上式中，ϕ_1、ϕ_2，…，ϕ_m 为连续函数，其原函数分别为 Φ_1，Φ_2，…，Φ_m。则 (5-2-14) 式的解为

$$f_{(t)}=f_{(0)}+\Phi_{1(t)}+\Phi_{2(t)}+\cdots+\Phi_{m(t)} - [\Phi_{1(0)}+\Phi_{2(0)}+\cdots+\Phi_{m(0)}] \qquad (5\text{-}2\text{-}15)$$

设 $f_{(t)}$ 可分解成

$$f_{(t)}=f_{1(t)}+f_{2(t)}+\cdots+f_{m(t)} \qquad (5\text{-}2\text{-}16)$$

令 $f_{i(t)}=\alpha_i f_{(t)} \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m \qquad (5\text{-}2\text{-}17)$

则系数

$$\alpha_i=\Phi_i\ (t_0)\ /\sum_{i=1}^{m}\Phi_i\ (t_0) \qquad (5\text{-}2\text{-}18)$$

显然 $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=1$

如果 $f_i\ (t)$ 满足下方程

$$\frac{\partial f_i(t)}{\partial t} = \Phi_i(t) \qquad i=1, 2, \cdots, m \tag{5-2-19}$$

由（5-2-17）式和（5-2-19）式可得

$$\alpha_i \frac{\partial f_{(t)}}{\partial t} = \varphi_i(t, f) \qquad i=1, 2, \cdots, m \tag{5-2-20}$$

则由（5-2-19）式可求得 $f_i(t)$ 的解为

$$f_i(t) = f_i(t_0) + \Phi_i(t) - \Phi_i(t_0) \qquad i=1, 2, \cdots, m \tag{5-2-21}$$

将上式累加后得

$$\sum_{i=1}^{m} f_i(t) = \sum_{i=1}^{m} f_i(t_0) + \sum_{i=1}^{m} \Phi_i(t) - \sum_{i=1}^{m} \Phi_i(t_0) \tag{5-2-22}$$

根据（5-2-16）式关系，则（5-2-22）式的左端为 $f(t)$，右端第一项为 $f(t_0)$，因此（5-2-22）式和（5-2-15）式全同，由此可知，利用方程（5-2-19）式求解，可得出与基本方程（5-2-14）完全相同的解答，这就是破开算子法的基本思想。在实际工作中，通常用（5-2-20）式更方便些，由（5-2-20）式可写成另一种微分方程的形式

$$\frac{\partial f(t)}{\partial t} = \frac{1}{\alpha_i}\phi_i(t, f) \qquad i=1, 2, \cdots, m \tag{5-2-23}$$

由上式可求得解为

$$f(t) = f(t_0) + \frac{1}{\alpha_i}[\Phi_i(t) - \Phi_i(t_0)] \tag{5-2-21}$$

由此得

$$f_i(t) = \alpha_i f(t) \qquad i=1, 2, \cdots, m$$

及

$$f(t) = \sum_{i=1}^{m} f_i(t)$$

现进一步考虑微分方程离散后的情况。为简单起见，只分析显式差分。

设微分方程为

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\sum_{i=1}^{m}D_i f \qquad j=1,\ 2,\ \cdots,\ m \tag{5-2-25}$$

上式中，D 为微分算子，写成差分形式

$$\frac{f^{n+1}-f^n}{\Delta t}=\sum_{i=1}^{m}\Lambda_i f^n \tag{5-2-26}$$

上式中，Λ_i 为差分算子，右上角标表示时间时瞬。由上式可知

$$f^{n+1}=f^n+\Delta t\sum_{i=1}^{m}\Lambda_i f^n \tag{5-2-27}$$

采用破开算子法所得的微分方程组(5-2-25)写成差分形式以作比较，根据（5-2-23）式可将（5-2-25）式写成

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{1}{\alpha_i}D_i f \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m \tag{5-2-28}$$

上式中，系数 α_i 可由下式确定

$$\alpha_i=\Lambda_i f^n/\sum_{i=1}^{m}\Lambda_i f^n$$

将（5-2-28）式写成差分形式

$$\frac{f_i^{n+1}-f_i^n}{\Delta t}=\frac{1}{\alpha_i}\Lambda_i f^n \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

由上式可得

$$f_i^{n+1}=f_i^n+\frac{\Delta t}{\alpha_i}\Lambda_i f^n \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

进而得

$$f_i^{n+1}=\alpha_i f_i^n+\Delta t\,\Lambda_i f^n \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

累加上式各值后得

$$\sum_{i=1}^{m}f_i^{n+1}=f^n\sum_{i=1}^{m}\alpha_i+\Delta t\sum_{i=1}^{m}\Lambda_i f^n$$

即

$$f^{n+1}=f^n+\Delta t\sum_{i=1}^{m}\Lambda_i f^n$$

上式为破开算子后的差分方程的解，它与原微分方程的差分方程解（5-2-27）完全一致。

以上是用显式差分求得的结果，如用隐式差分也能证得同样结果。由此可知，利用破开算子法来分裂微分方程，所得的微分

方程组将与原方程等价，其相应的差分方程也是等价的。

下面利用上述原理进行水动力的数值模拟。其基本控制方程为（5-2-2），即

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{\partial\ (h_0+\zeta)\ u}{\partial x}+\frac{\partial\ (h_0+\zeta)\ v}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+g\frac{\partial \zeta}{\partial x}+\frac{gu\sqrt{u^2+v^2}}{c^2\ (h_0+\zeta)}-fv=0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+g\frac{\partial \zeta}{\partial y}+\frac{gv\sqrt{u^2+v^2}}{c^2\ (h_0+\zeta)}+fu=0$$

将上式按 x、y 方向剖开成两组方程。

沿 x 向

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{\partial\ (h_0+\zeta)\ u}{\partial x}=0 \qquad (5\text{-}2\text{-}29a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+g\frac{\partial \zeta}{\partial x}+g\frac{u\sqrt{u^2+v^2}}{c^2\ (h_0+\zeta)}-fv=0 \qquad (5\text{-}2\text{-}29b)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}=0 \qquad (5\text{-}2\text{-}29c)$$

沿 y 向

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{\partial\ (h_0+\zeta)\ v}{\partial y}=0 \qquad (5\text{-}2\text{-}30a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial y}+g\frac{\partial \zeta}{\partial y}+g\frac{v\sqrt{u^2+v^2}}{c^2\ (h_0+\zeta)}+fu=0 \qquad (5\text{-}2\text{-}30b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+v\frac{\partial u}{\partial y}=0 \qquad (5\text{-}2\text{-}30c)$$

上述两组方程可采用各种有效方法求解。通常将时间步长 Δt 分为两半步，在前半步长内，利用（5-2-29）方程组，沿 x 方向扫描，求出 $u^{n+\frac{1}{2}}$、$v^{n+\frac{1}{2}}$ 和 $\zeta^{n+\frac{1}{2}}$，然后利用（5-2-30）方程组，沿 y 方向扫描，求得 $(u、v、\zeta)^{n+1}$。

下面介绍求解上述方程组的两种方法。

（1）显式法

将时间步长 Δt 分成两个半步长。

在前半个步长，沿 x 方向，时间微分项采用前差，空间微分项

采用中心差，则得下式

$$\zeta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}=\zeta_{i,j}^{n}-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\left(\bar{h}_{0_{i+\frac{1}{2},j}}+\bar{\zeta}^{n}_{i+\frac{1}{2},j}\right)u^{n}_{i+\frac{1}{2},j}-\left(\bar{h}_{0_{i-\frac{1}{2},j}}+\zeta^{n}_{i-\frac{1}{2},j}\right)u^{n}_{i-\frac{1}{2},j}\right]$$

$$u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}=\left[u^{n}_{i+\frac{1}{2},j}-\frac{g\Delta t}{\Delta x}\left(\zeta_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}-\zeta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}\right)+\Delta t f\bar{v}^{n}_{i+\frac{1}{2},j}\right]\Bigg/\left[1+\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\bar{u}^{n}_{i+1,j}-\bar{u}^{n}_{i,j}\right)+\frac{g\Delta t\sqrt{\left(u^{n}_{i+\frac{1}{2},j}\right)^{2}+\left(\bar{v}^{n}_{i+\frac{1}{2},j}\right)^{2}}}{c^{2}_{i+\frac{1}{2},j}\left(\bar{h}_{0_{i+\frac{1}{2},j}}+\bar{\zeta}^{n}_{i+\frac{1}{2},j}\right)}\right]$$

$$v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}=v^{n}_{i,j+\frac{1}{2}}-\frac{\Delta t}{2\Delta x}\bar{u}^{n+\frac{1}{2}}_{i,j+\frac{1}{2}}\left[(1-E_{u})\left(v^{n}_{i+1,j+\frac{1}{2}}-v^{n}_{i,j+\frac{1}{2}}\right)+(1+E_{u})\left(v^{n}_{i,j+\frac{1}{2}}-v^{n}_{i-1,j+\frac{1}{2}}\right)\right]$$

式中 $\bar{h}_{i-\frac{1}{2},j}=\frac{1}{2}\left(h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}+h_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}\right)$；$\bar{\zeta}^{n}_{i+\frac{1}{2},j}=\frac{1}{2}\left(\zeta^{n}_{i+1,j}+\zeta^{n}_{i,j}\right)$；

$\bar{h}_{i-\frac{1}{2},j}=\frac{1}{2}\left(h_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}+h_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}\right)$；$\bar{\zeta}^{n}_{i-\frac{1}{2},j}=\frac{1}{2}\left(\zeta^{n}_{i,j}+\zeta^{n}_{i-1,j}\right)$；

$\bar{u}^{n}_{i+1,j}=\frac{1}{2}\left(u^{n}_{i-\frac{3}{2},j}+u^{n}_{i+\frac{1}{2},j}\right)$；$\bar{u}^{n}_{i,j}=\frac{1}{2}\left(u^{n}_{i-\frac{1}{2},j}+u^{n}_{i-\frac{1}{2},j}\right)$；

$\bar{v}^{n}_{i+\frac{1}{2},j}=\frac{1}{4}\left(v^{n}_{i+1,j+\frac{1}{2}}+v^{n}_{i+1,j-\frac{1}{2}}+v^{n}_{i,j+\frac{1}{2}}+v^{n}_{i,j-\frac{1}{2}}\right)$；

$Eu=\mathrm{sign}\ (u)$

由上式沿 x 方向扫描，可求得 $(\zeta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}, u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}, v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}})$，将求得各值作为后半个步长的初值。

在后半个步长，沿 y 向，在 (5-2-30) 各式中，对时间微分项采用前差，对空间微分项采用中心差分，则可得下式。

$$\zeta_{i,j}^{n+1}=\zeta_{i,j}^{n}-\frac{\Delta t}{\Delta y}\left[\left(\bar{h}_{0_{i,j+\frac{1}{2}}}+\bar{\zeta}^{n+\frac{1}{2}}_{i,j+\frac{1}{2}}\right)v^{n+\frac{1}{2}}_{i,j+\frac{1}{2}}-\left(\bar{h}_{0_{i,j-\frac{1}{2}}}+\zeta^{n+\frac{1}{2}}_{i,j-\frac{1}{2}}\right)u^{n+\frac{1}{2}}_{i,j-\frac{1}{2}}\right]$$

$$v^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2}}=\left[v^{n+\frac{1}{2}}_{i,j+\frac{1}{2}}-\frac{g\Delta t}{\Delta y}\left(\zeta^{n+1}_{i,j+1}-\zeta^{n+1}_{i,j-1}\right)+\Delta t f\bar{u}^{n+\frac{1}{2}}_{i,j-\frac{1}{2}}\right]\Bigg/$$

$$\left[1+\frac{\Delta t}{\Delta y}\left(\bar{v}^{n+\frac{1}{2}}_{i,j+1}-\bar{v}^{n+\frac{1}{2}}_{i,j}\right)+\frac{g\Delta t\sqrt{\left(v^{n+\frac{1}{2}}_{i,j+\frac{1}{2}}\right)^2+\left(\bar{v}^{n+\frac{1}{2}}_{i,j+\frac{1}{2}}\right)^2}}{c^2_{i,j+\frac{1}{2}}\left(\bar{h}_{i,j+\frac{1}{2}}+\bar{\zeta}^{n+\frac{1}{2}}_{i,j+\frac{1}{2}}\right)}\right]$$

$$u^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j}=u^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j}-\frac{\Delta t}{2\Delta y}v^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2}}\Big[(1-K_v)\left(u^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j+1}-u^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j}\right)$$

$$+(1+K_v)\left(u^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j}-u^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j-1}\right)\Big]$$

式中 $\bar{h}_{o_{i,j+\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2}\left(h_{o_{i,j+\frac{1}{2}}}+h_{o_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}\right)$；$\bar{\zeta}^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j}=\frac{1}{2}\left(\zeta^n_{i,j+1}+\zeta^n_{i,j}\right)$；

$\bar{h}_{o_{i,j-\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2}\left(h_{o_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}+h_{o_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}\right)$；$\bar{\zeta}^{n+\frac{1}{2}}_{i,j-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(\zeta^{n+\frac{1}{2}}_{i,j}+\zeta^{n+\frac{1}{2}}_{i,j-1}\right)$；

$\bar{v}^{n+\frac{1}{2}}_{i,j+1}=\frac{1}{2}\left(v^{n+\frac{1}{2}}_{i,j+\frac{3}{2}}+v^{n+\frac{1}{2}}_{i,j+\frac{1}{2}}\right)$；$\bar{v}^{n+\frac{1}{2}}_{i,j}=\frac{1}{2}\left(v^{n+\frac{1}{2}}_{i,j+\frac{1}{2}}+v^{n+\frac{1}{2}}_{i,j-\frac{1}{2}}\right)$；

$\bar{u}^{n+\frac{1}{2}}_{i,j+\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}\left(u^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j+1}+u^{n+\frac{1}{2}}_{i-\frac{1}{2},j+1}+u^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j}+u^{n+\frac{1}{2}}_{i-\frac{1}{2},j}\right)$

$Kv=\text{sign}\ (v)$

由上各式沿 y 向扫描，即可求得 $(\zeta、u、v)^{n+1}$，完成一个时间步长的计算。

(2) 交替方向显、隐式交错解法

在 x 方向，先对 (5-2-29a) 式和 (5-2-29b) 式进行离散，得

$$\frac{\zeta^{n+\frac{1}{2}}_{i,j}-\zeta^n_{i,j}}{\Delta t}+\frac{\left(h_{o_{i+\frac{1}{2},j}}+\zeta^n_{i+\frac{1}{2},j}\right)u^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j}-\left(h_{o_{i-\frac{1}{2},j}}+\zeta^n_{i-\frac{1}{2},j}\right)u^{n+\frac{1}{2}}_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x}=0$$

$$\frac{u^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j}-u^n_{i+\frac{1}{2},j}}{\Delta t}+u^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j}\frac{\bar{u}^n_{i+1,j}-\bar{u}^n_{i,j}}{\Delta x}+g\frac{\zeta^{n+\frac{1}{2}}_{i+1,j}-\zeta^{n+\frac{1}{2}}_{i,j}}{\Delta x}$$

$$+g\frac{u^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j}\sqrt{\left(u^n_{i+\frac{1}{2},j}\right)^2+\left(\bar{v}^n_{i+\frac{1}{2},j}\right)^2}}{C^2_{i+\frac{1}{2},j}\left(h_{o_{i+\frac{1}{2},j}}+\zeta^n_{i+\frac{1}{2},j}\right)^2}-fv_{i-\frac{1}{2},j}=0$$

式中，h、ζ、$\bar{u}$、$\bar{v}$ 如上述。

将上二式经过整理后，可化成如下代数方程

$$a_i u^{n+\frac{1}{2}}_{i-\frac{1}{2},j}+b_i\zeta^{n+\frac{1}{2}}_{i,j}+c_i u^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j}=d_i$$

$$a'_i\zeta^{n+\frac{1}{2}}_{i,j}+H_i u^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j}+c'_i\zeta^{n+\frac{1}{2}}_{i+1,j}=d'_i$$

式中 $a_i=-\dfrac{\Delta t}{\Delta x}\left(\bar{h}_{o_{i-\frac{1}{2},j}}+\zeta^n_{i-\frac{1}{2},j}\right)$；

$b_i=1$；

$c_i=\dfrac{\Delta t}{\Delta x}\left(\bar{h}_{o_{i+\frac{1}{2},j}}+\zeta^n_{i+\frac{1}{2},j}\right)$；

$d_i=\zeta^n_{i,j}$；

$a'_i=-g\dfrac{\Delta t}{\Delta x}$；

$$H_i=1+\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\bar{u}^n_{i+1,j}-\bar{u}^n_{i,j}\right)+\frac{g\Delta t\sqrt{\left(u^n_{i+\frac{1}{2},j}\right)^2+\left(\bar{v}^n_{i+\frac{1}{2},j}\right)^2}}{C^2_{i+\frac{1}{2},j}\left(\bar{h}_{o_{i+\frac{1}{2},j}}+\zeta^n_{i+\frac{1}{2},j}\right)}$$

$c'_i=g\dfrac{\Delta t}{\Delta x}$；

$d'_i=u^n_{i+\frac{1}{2},j}+\Delta t f\bar{v}^n_{i+\frac{1}{2},j}$

利用追赶法可求出 $u^{n+\frac{1}{2}}_{i-\frac{1}{2},j}$，$\zeta^{n+\frac{1}{2}}_{i,j}$。将此值代入由（5-2-29c）式所离散而得出的下述代数方程，即可求得 $v^{n+\frac{1}{2}}_{i,j+\frac{1}{2}}$，下式已采用迎风格式编写。

$$v^{n+\frac{1}{2}}_{i,j+\frac{1}{2}}=v^n_{i,j+\frac{1}{2}}-\frac{\Delta t}{2\Delta x}u^{n+\frac{1}{2}}_{i-\frac{1}{2},j}\Big[(1-Eu)\left(v^n_{i+1,j+\frac{1}{2}}-v^n_{i,j+\frac{1}{2}}\right)+(1+Eu)\left(v^n_{i,j+\frac{1}{2}}-v^n_{i-1,j+\frac{1}{2}}\right)\Big]$$

在 y 方向上，可对（5-2-30）各式采用类似处理，只需对上述各式作 $x\rightleftarrows y$，$i\rightleftarrows j$，$u\rightleftarrows v$ 交换，即可求得 $(\zeta、u、v)^{n+1}$，从而完成整个时间步长的计算。

二、物理概念上的分步法

计算实践表明，虽然 Leendertse 法及以后演变的其他 ADI 全

隐格式，在理论上是无条件稳定的，但时间步长仍不能取得过大。当 Courant 数超过 5 时，误差很大，还可能发生不稳定。Benque 通过计算实验发现，当 $c\geqslant 16$ 时，计算结果与实际情况差异很大；当 $c\approx 95$ 时，计算结果已毫无物理意义。因此，他们提出了此格式。这是从物理概念上进行分步而得出不同的公式，采用不同的方法计算，从而提高了计算的精度与稳定性。

将基本流动方程（5-2-2）写成

$$\underbrace{\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial Uu}{\partial x}+\frac{\partial Vu}{\partial y}}_{\mathrm{I}}+\underbrace{\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial Vu}{\partial x}+\frac{\partial Vv}{\partial y}}_{\mathrm{II}}+\underbrace{gh\frac{\partial z}{\partial x}+fV-\frac{\tau_{sx}}{\rho}+\frac{\tau_{bx}}{\rho}=K\nabla^2 U}_{\mathrm{IV}\quad\mathrm{V}\quad\mathrm{VI}}$$

$$\underbrace{gh\frac{\partial z}{\partial y}+fU-\frac{\tau_{sy}}{\rho}+\frac{\tau_{by}}{\rho}=K\nabla^2 V}_{\mathrm{IV}\quad\mathrm{V}\quad\mathrm{VI}}$$

$$\underbrace{\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}}_{\mathrm{III}}=0$$

式中 U——x 方向的单宽流量，$U=(h_0+\zeta)u$；

V——y 方向的单宽流量，$V=(h_0+\zeta)v$；

K——水平紊动扩散系数；

∇^2——微分运算子，

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

其余符号的意义同前。上式中的罗马数字所标各项的物理意义如下。

Ⅰ——局部加速度项，即动量随时间的局部变化；

Ⅱ——位移加速度，即动量的对流传输；

Ⅲ——波动传播引起的质量与动量变化的守恒；

Ⅳ——柯氏力和水面风成切应力形成的动量源、汇；

Ⅴ——床面摩阻力引起的动量汇；

Ⅵ——动量沿水平方向的扩散。

综合上述各动量传播、变化过程，可归纳为三大类，即：

（1）对流过程，包含Ⅰ、Ⅱ项；

(2) 扩散过程，包含Ⅱ、Ⅳ、Ⅵ项；

(3) 波动过程，包含Ⅰ、Ⅲ、Ⅴ项。

物理概念上的分步法就是按上述三种不同性质的传播过程，选择不同的差分格式，分别计算，最后得出综合成果。

下面分别介绍各过程所采用的差分格式及计算方法。

1. **对流过程**

这是计算的第一步，其控制方程为

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(Uu)+\frac{\partial}{\partial y}(Vu)=0$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(Vu)+\frac{\partial}{\partial y}(Vv)=0$$

式中，$U=uh$，$V=vh$，$h=h_0+\zeta$。

上述两方程采用如下差分方程：

$$\frac{U^{n+\frac{1}{3}}-U^n}{\Delta t}+\frac{\partial}{\partial x}(U^n u^n)+\frac{\partial}{\partial y}(V^n v^n)=0 \qquad (5\text{-}2\text{-}31a)$$

$$\frac{V^{n+\frac{1}{3}}-V^n}{\Delta t}+\frac{\partial}{\partial x}(V^n u^n)+\frac{\partial}{\partial y}(V^n v^n)=0 \qquad (5\text{-}2\text{-}31b)$$

将 $U^n=h^n u^n$ 和 $V^n=v^n h^n$ 代入上式，整理得

$$\frac{u^{n+\frac{1}{3}}-u^n}{\Delta t}+u^n\frac{\partial u^n}{\partial x}+v^n\frac{\partial u^n}{\partial y}=0 \qquad (5\text{-}2\text{-}32a)$$

$$\frac{v^{n+\frac{1}{3}}-v^n}{\Delta t}+u^n\frac{\partial v^n}{\partial x}+v^n\frac{\partial v^n}{\partial y}=0 \qquad (5\text{-}2\text{-}32b)$$

注意，上述各式中右角标 $(n+\frac{1}{3})$ 仅作为一种标志，表示这是三分步中第一步算得此未知量在 $(n+1)\Delta t$ 的第一次数值，而不是表示该量在 $(n+\frac{1}{3})\Delta t$ 时的数值，因此以括号表之。

式 (5-2-31) 可采用特征线法求解。计算时，将 x、y 方向分开进行，并均作为一维问题来考虑。

以 x 方向为例。由于仅考虑 x 方向，则 (5-2-31) 中两式可简写为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u^n\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{5-2-33a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u^n\frac{\partial v}{\partial x}=0 \tag{5-2-33b}$$

这是在 tox 面上沿特征线 AB 的特征方程（见图 5-2-3）。

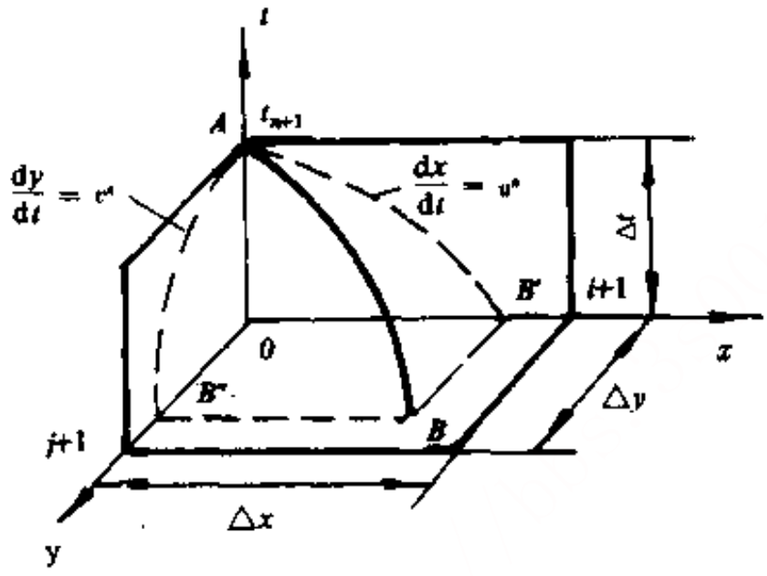


图 5-2-3　对流分步特征线法计算图式

相应的特征线方程为

$$\frac{dx}{dt}=u^n \tag{5-2-34}$$

在图 5-2-3 中，由结点 $(i,\ j,\ n+1)$ 出发，以 $\frac{1}{u^n}$ 为特征线的斜率，后向作特征线，与 x 向网格线交于 B 点，利用结点 $(i,\ j,\ n)$ 的 u^n 和 v^n，以及结点 $(i+1,\ j,\ n)$ 的 $u^n_{i+1,j}$ 和 $v^n_{i+1,j}$，内插求得 $u^n_{B,j}$ 和 $v^n_{B,j}$，利用 (5-2-34) 式和 (5-2-32) 式可知

$$\frac{du}{dt}=0$$

$$\frac{dv}{dt}=0$$

由此可得　$\tilde{u}^{n+\frac{1}{3}}_{i,j}=u^n_B$，$\tilde{v}^{n+\frac{1}{3}}_{i,j}=v^n_B$

以 $\tilde{u}^{n+\frac{1}{3}}_{i,j}$ 和 $\tilde{v}^{n+\frac{1}{3}}_{i,j}$ 为初始值，用上述同样方法，在 toy 面上沿特征

线 AB''建立特征线方程

$$\frac{dy}{dt}=\tilde{v}^n \tag{5-2-35}$$

由结点（i、j、$n+1$）出发、以$\frac{1}{\tilde{v}^n}$为特征线斜率，后向作特征线，与 y 向网格线交于 B''点，利用结点（i，j，n）的 $\tilde{u}^{n+\frac{1}{3}}$和 $\tilde{v}^{n+\frac{1}{3}}$以及结点（$i$，$j+1$，$n$）的 $\tilde{u}_{i,j+1}^{n+\frac{1}{3}}$和 $\tilde{v}_{i,j+1}^{n+\frac{1}{3}}$，内插求得 $\tilde{u}_{B''}^{n+\frac{1}{3}}$和 $\tilde{v}_{B''}^{n+\frac{1}{3}}$，利用（5-2-35）式和（5-2-32）式可得 $\overset{\approx}{u}_{i,j}^{n+\frac{1}{3}}=\tilde{u}_{B''}^{n+\frac{1}{3}}$，$\overset{\approx}{v}_{i,j}^{n+\frac{1}{3}}=\tilde{v}_{B''}^{n+\frac{1}{3}}$。最后可得

$$u_{i,j}^{n+\frac{1}{3}}=\overset{\approx}{u}_{i,j}^{n+\frac{1}{3}};\quad U_{i,j}^{n+\frac{1}{3}}=H_{i,j}^{n}u_{i,j}^{n+\frac{1}{3}}$$

$$v_{i,j}^{n+\frac{1}{3}}=\overset{\approx}{v}_{i,j}^{n+\frac{1}{3}};\quad V_{i,j}^{n+\frac{1}{3}}=H_{i,j}^{n}v_{i,j}^{n+\frac{1}{3}}$$

顺便指出，为了减少离散阻尼的影响，可用高阶内插公式求 u_B，v_B，$u_{B'}$和 $v_{B'}$。当速度的空间变化过大时，时间步长 Δt 仍需适当控制。此外，当 CB' 和 CB''的值大于 Δx 和 Δy 时，则不能把 x 方向和 y 方向分开计算，而必须沿特征线 AB 进行计算。

2. **扩散过程**

这是计算的第二步，其控制方程为

$$\frac{\partial U}{\partial t}-fV-\frac{\tau_{sx}}{\rho}=K\nabla^2U \tag{5-2-36a}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}+fU-\frac{\tau_{sy}}{\rho}=K\nabla^2V \tag{5-2-36b}$$

上述方程的差分方程为

$$\frac{U^{(n+\frac{2}{3})}-U^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta t}-fV^{n+\frac{1}{3}}-\frac{\tau_{sx}^{n+\frac{1}{3}}}{\rho}=K\nabla^2U^{n+\frac{2}{3}} \tag{5-2-37a}$$

$$\frac{V^{(n+\frac{2}{3})}-V^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta t}+fU^{n+\frac{1}{3}}-\frac{\tau_{sy}^{n+\frac{1}{3}}}{\rho}=K\nabla^2V^{n+\frac{2}{3}} \tag{5-2-37b}$$

这是典型的有源扩散方程，可用一般的全隐格式（ADI 法）求解 $U^{n+\frac{2}{3}}$和 $V^{n+\frac{2}{3}}$，这种方法在以前各节已有介绍，在此不重复。

3. **波动过程**

这是计算的第三步，控制方程为

$$\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}+gh\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\tau_{bx}}{\rho}=0$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}+gh\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\tau_{by}}{\rho}=0$$

上述控制方程的差分方程可写成

$$\frac{z^{n+1}-z^n}{\Delta t}+\alpha\left(\frac{\partial U^{n+1}}{\partial x}+\frac{\partial V^{n+1}}{\partial y}\right)+(1-\alpha)\left(\frac{\partial U^{n+2/3}}{\partial x}+\frac{\partial V^{n+2/3}}{\partial y}\right)=0 \tag{5-2-38a}$$

$$\frac{U^{n+1}-U^{n+2/3}}{\Delta t}+g\left[\alpha h^{n+1}\frac{\partial z^{n+1}}{\partial x}+(1-\alpha)\,h^n\frac{\partial z^n}{\partial x}\right]+g\left[\alpha\frac{\tau_{bx}^{n+1}}{\rho}+(1-\alpha)\frac{\tau_{bx}^{n+2/3}}{\rho}\right]=0 \tag{5-2-38b}$$

$$\frac{V^{n+1}+V^{n+2/3}}{\Delta t}+g\left[\alpha h^{n+1}\frac{\partial z^{n+1}}{\partial y}+(1-\alpha)\,h^n\frac{\partial z^n}{\partial y}\right]+g\left[\alpha\frac{\tau_{by}^{n+1}}{\rho}+(1-\alpha)\frac{\tau_{by}^{n+2/3}}{\rho}\right]=0 \tag{5-2-38c}$$

式中，α 为加权系数，$0<\alpha<1$。阻力可用下式表示

$$\tau_{bx}=\frac{|U|U}{C^2h^2}$$

$$\tau_{by}=\frac{|V|V}{C^2h^2}$$

阻力项为非线性质。为求解方便，经线性化处理后，动量方程（5-2-38b）和（5-2-38c）可写成

$$\frac{U^{n+1}-U^{n+2/3}}{\Delta t}+g\left[\alpha h^{n+1}\frac{\partial z^{n+1}}{\partial x}+(1-\alpha)\,h^n\frac{\partial z^n}{\partial x}\right]$$
$$-\alpha g\left[\left(\frac{|U|U}{C^2h^2}\right)^{n+2/3}+\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{|U|U}{C^2h^2}\right)^{n+2/3}(h^{n+1}-h^n)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial U}\left(\frac{|U|U}{C^2h^2}\right)^{n+2/3}(U^{n+1}-U^{n+2/3})\right]$$
$$+(1-\alpha)\,g\left[\left(\frac{|U|U}{C^2h^2}\right)^{n+1/3}+\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{|U|U}{C^2h^2}\right)^{n+1/3}(h^{n+1}-h^n)\right.$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{|U|U}{C^2h^2}\right)^{n+\frac{1}{3}}(U^{n+\frac{2}{3}}-U^{n+\frac{1}{3}})\Big]=0 \qquad (5\text{-}2\text{-}39b)$$

$$\frac{V^{n+1}-V^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta t}+g\Big[\alpha h^{n+1}\frac{\partial z^{n+1}}{\partial x}+(1-\alpha)\,h^n\frac{\partial z^n}{\partial x}\Big]$$
$$+\alpha g\Big[\left(\frac{|V|V}{C^2h^2}\right)^{n+\frac{2}{3}}+\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{|V|V}{C^2h}\right)^{n+\frac{2}{3}}(h^{n+1}-h^n)$$
$$+\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{|V|V}{C^2h^2}\right)^{n+\frac{2}{3}}(V^{n+1}-V^{n+\frac{2}{3}})\Big]$$
$$+(1-\alpha)\,g\Big[\left(\frac{|V|V}{C^2h^2}\right)^{n+\frac{1}{3}}+\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{|V|V}{C^2h^2}\right)^{n+\frac{1}{3}}(h^{n+1}-h^n)$$
$$+\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{|V|V}{C^2h^2}\right)^{n+\frac{1}{3}}(V^{n+\frac{2}{3}}-V^{n+\frac{1}{3}})\Big]=0 \qquad (5\text{-}2\text{-}39c)$$

由式（5-2-39b）和式（5-2-39c）中解得

$$U^{n+1}=U^{n+\frac{2}{3}}-\frac{g\Delta t}{\Delta x}\Big[\alpha h^{n+1}\Delta z_x^{n+1}+(1-\alpha)\,h^n\Delta z_x^n\Big]$$
$$-\alpha g\Delta t\Big[\left(\frac{|U|U}{C^2h^2}\right)^{n+\frac{2}{3}}\left(1+\frac{h^{n+1}-h^n}{\Delta h}+\frac{U^{n+1}-U^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta U}\right)\Big]$$
$$-(1-\alpha)\,g\Delta t\Big[\left(\frac{|U|U}{C^2h^2}\right)^{n+\frac{1}{3}}\left(1+\frac{h^{n+1}-h^n}{\Delta h}+\frac{U^{n+\frac{2}{3}}-U^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta U}\right)\Big] \qquad (5\text{-}2\text{-}40b)$$

$$V^{n+1}=V^{n+\frac{2}{3}}-\frac{g\Delta t}{\Delta y}\Big[\alpha h^{n+1}\Delta z_y^{n+1}+(1-\alpha)\,h^n\Delta z_y^n\Big]$$
$$-\alpha g\Delta t\Big[\left(\frac{|V|V}{C^2h^2}\right)^{n+\frac{2}{3}}\left(1+\frac{h^{n+1}-h^n}{\Delta h}+\frac{V^{n+1}-V^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta V}\right)\Big]$$
$$-(1-\alpha)\,g\Delta t\Big[\left(\frac{|V|V}{C^2h^2}\right)^{n+\frac{1}{3}}\left(1+\frac{h^{n+1}-h^n}{\Delta h}+\frac{V^{n+\frac{2}{3}}-V^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta V}\right)\Big] \qquad (5\text{-}2\text{-}40c)$$

上式中阻力项中的 c 为 $Cezy$ 系数；Δz_x 为 x 向的水位差；Δz_y 为 y 向的水位差。

将（5-2-40b）式和（5-2-40c）式代入（5-2-38a）式，经整理，并设 $h^{n+1}=z^n+\Delta z-z_b$ 和 $z^{n+1}=z^n+\Delta z$（z_b 为床面高程），则（5-2-38a）式可进一步线性化，得

$$-\frac{\Delta z}{g\Delta t^2}+\alpha^2\frac{\partial}{\partial x}\left(h^n\frac{\partial(\Delta z)}{\partial x}+\Delta z\frac{\partial z^n}{\partial x}\right)$$

$$+\alpha^2\frac{\partial}{\partial y}\left(H^n\frac{\partial\cdot(\Delta z)}{\partial y}+\Delta z\frac{\partial z^n}{\partial y}\right)=f_1+f_2 \tag{5-2-41}$$

式中

$$f_1=\frac{1}{g\Delta t}\left[\alpha\frac{\partial U^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x}+(1-\alpha)\frac{\partial U^n}{\partial x}\right] \tag{5-2-42}$$

$$f_2=\frac{1}{g\Delta t}\left[\alpha\frac{\partial V^{n+\frac{1}{2}}}{\partial y}+(1-\alpha)\frac{\partial V^n}{\partial y}\right] \tag{5-2-43}$$

虽然（5-2-40）是二维方程，但由于它的对称性，可以利用交替方向迭代求解。将（5-2-40）式写成下列形式

$$\frac{\Delta z_1}{2g\Delta t^2}-\alpha^2\frac{\partial}{\partial x}\left(H^n\frac{\partial\Delta z_1}{\partial x}+\Delta z_1\frac{\partial z^n}{\partial x}\right)=-f_1-q_{(x,y)} \tag{5-2-44a}$$

$$\frac{\Delta z_2}{2g\Delta t^2}-\alpha^2\frac{\partial}{\partial y}\left(H^n\frac{\partial\Delta z_2}{\partial y}+\Delta z_2\frac{\partial z^n}{\partial y}\right)=-f_2-q_{(x,y)} \tag{5-2-44b}$$

式中，$q_{(x,y)}$为拉格朗日乘子，是一个耦合梯度，利用迭代法求出q值，使（5-2-44a）式和（5-2-44b）式的解Δz_1和Δz_2相等，从而得出（5-2-41）式的解$\Delta z=\Delta z_1=\Delta z_2$。但实际计算时，不易求得$\Delta z_1=\Delta z_2$，因此，只须令$|\Delta z_1-\Delta z_2|$小于指定的误差即可，由此得$\Delta z=(\Delta z_1+\Delta z_2)/2$。在迭代计算中，Courant 数$c$越大，达到预定的精度所要求的迭代次数就越多，当$c<10$时，几次迭代即可。当$c>20$时，迭代次数就需15～50次。

需说明的是，在计算U、V时，z值保持不变，而在计算z时，U、V取其新值。

以（5-2-44a）式为例，以（i、j）为差分中心，则得

$$\frac{\Delta z_{i,j}}{2g\Delta t^2}-\frac{\alpha^2}{x_{i+\frac{1}{2},j}-x_{i-\frac{1}{2},j}}\left[\left(h^n_{i+\frac{1}{2},j}\frac{\Delta z_{i+1,j}-\Delta z_{i,j}}{x_{i+1,j}-x_{i,j}}+\Delta z_{i+\frac{1}{2},j}\frac{z^n_{i+1,j}-z^n_{i,j}}{x_{i+1,j}-x_{i,j}}\right)\right.$$

$$\left.-\left(h^n_{i-\frac{1}{2},j}\frac{\Delta z_{i,j}-\Delta z_{i-1,j}}{x_{i,j}-x_{i-1,j}}+\Delta z_{i-\frac{1}{2},j}\frac{z^n_{i,j}-z^n_{i-1,j}}{x_{i,j}-x_{i-1,j}}\right)\right]$$

$$=-f^n_{i,j}+q \tag{5-2-45}$$

式中

$$h_{i+\frac{1}{2},j}=\beta_{i+\frac{1}{2},j}h_{i+1,j}+(1-\beta_{i+\frac{1}{2},j})h_{i,j}$$

$$h_{i-\frac{1}{2},j}=\beta_{i-\frac{1}{2},j}h_{i-1,j}+(1-\beta_{i-\frac{1}{2},j})h_{i,j}$$

$$h_{i,j}=z_{i,j}-z_{a,j}$$

同样，$z_{i+\frac{1}{2},j}$和$z_{i-\frac{1}{2},j}$也作相似处理。

$\beta_{i+\frac{1}{2},j}$和$\beta_{i-\frac{1}{2},j}$为权系数，一般取$\beta=\frac{1}{2}$。利用一维追赶法可以求得(5-2-44a)式的解Δz_1。以同样原理与步骤，即可求得(5-2-44b)式的解Δz_2。由迭代求得最后的解为$\Delta z_{i,j}^{n+1}=(\Delta z_1+\Delta z_2)/2$，由此可求得$z_{i,j}^{n+1}=z_{i,j}^{n}+\Delta z_{i,j}^{n+1}$。再将$z_{i,j}^{n+1}$代入(5-2-40b)式和(5-2-40c)式，即可求得U^{n+1}和V^{n+1}，由此即可进一步求得

$$u^{n+1}=U^{n+1}/h^{n+1}$$

$$v^{n+1}=V^{n+1}/h^{n+1}$$

但须注意，在求u^{n+1}和v^{n+1}时，上式中的h^{n+1}是u、v所在点为中心的四个相邻z结点水深的平均值，这是因为该格式中的流速和水深结点交错布置所致。

5.2.4 准分析法

这是河海大学张二骏等人提出的一种方法，它以分步法概念为基础，以分步子方程的解析解为根据，经综合而得最终结果，其模式虽然还没有得到严格的数学证明，但从实际运算结果证明，该方法还是很适用的。

该方法有别于有限差分法和有限元法，而是直接引用各分步的子方程的积分求解。

众所周知，水动力基本运动方程之所以不能解析求精确解，是由于基本方程本身比较复杂，包含的项次较多；再加上实际的边界条件很复杂，因此难以求得适合边界条件的特解。

经前述论证已知，分步法的结果可以代替原方程的结果，从数值计算角度分析，分步法结果与原方程结果只存在高阶微量级的差值，从实用上可以忽略不计。如每一分步所对应的微分方程能积分求解析解，则综合各分步解的总值，即为原始方程的解。由于各子方程组都是通过解析途径求解的，因此可以减少大量的数值运算工作，并可避免一般数值计算中所存在的分散性和不稳定

性的困扰，同时，积分求解不会引入误差，只是在综合过程时才引入误差，因此，无论从精度上还是从求解的速度上分析，该法都有较大的优点。

此方法在分解成可解析求解的子方程组时有两种途径，一种是按原方程组中各项的物理特性进行分解，另一种可按坐标方向分解。以下例举按坐标方向分解。

原始基本方程为

连续方程

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+h\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial}{\partial x}(\zeta+h_0)+h\frac{\partial v}{\partial y}+v\frac{\partial}{\partial y}(\zeta+h_0)=0 \tag{5-2-46a}$$

动量方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+g\frac{\partial \zeta}{\partial y}+g\frac{V}{C^2h}u-fv=0 \tag{5-2-46b}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+g\frac{\partial \zeta}{\partial y}+g\frac{V}{C^2h}v+fu=0 \tag{5-2-46c}$$

式中 h——水深，$h=h_0+\zeta$；

h_0——初始水深；

V——平均流速，$V=\sqrt{u^2+v^2}$；

C——*chezy* 参数；

其余符号与前相同。

将基本方程按 x 和 y 方向分解成如下 8 个子方程组：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial \zeta}{\partial t}=0\\&\frac{\partial u}{\partial t}+g\frac{\partial \zeta}{\partial x}=0\\&\frac{\partial v}{\partial t}=0\end{aligned}\right\} \tag{5-2-47}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\zeta}{\partial t}+h\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial h}{\partial x}=0\\&\frac{\partial u}{\partial t}=0\\&\frac{\partial v}{\partial t}=0\end{aligned}\right\}\qquad(5\text{-}2\text{-}48)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\zeta}{\partial t}+u\frac{\partial\zeta}{\partial x}=0\\&\frac{\partial u}{\partial t}=0\\&\frac{\partial v}{\partial t}=0\end{aligned}\right\}\qquad(5\text{-}2\text{-}49)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\zeta}{\partial t}=0\\&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0\\&\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+g\frac{\sqrt{}}{C^2h}v-fu=0\end{aligned}\right\}\qquad(5\text{-}2\text{-}50)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\zeta}{\partial t}=0\\&\frac{\partial u}{\partial t}=0\\&\frac{\partial v}{\partial t}+g\frac{\partial\zeta}{\partial y}=0\end{aligned}\right\}\qquad(5\text{-}2\text{-}51)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\zeta}{\partial t}+h\frac{\partial v}{\partial y}+v\frac{\partial h}{\partial y}=0\\&\frac{\partial u}{\partial t}=0\\&\frac{\partial v}{\partial t}=0\end{aligned}\right\}\qquad(5\text{-}2\text{-}52)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial \zeta}{\partial t}+v\frac{\partial \zeta}{\partial y}=0\\&\frac{\partial u}{\partial t}=0\\&\frac{\partial v}{\partial t}=0\end{aligned}\right\}\tag{5-2-53}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial \zeta}{\partial t}=0\\&\frac{\partial u}{\partial t}+v\frac{\partial u}{\partial y}+g\frac{\overline{V}}{C^2h}u-fv=0\\&\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial y}=0\end{aligned}\right\}\tag{5-2-54}$$

显然，上述各子方程组都有解析解。如果将前一个子方程组的解析解作为后一个子方程组的初始值，用此法由第一个方程组依次逐组求到第 8 个方程组的 $(\zeta_8, u_8, v_8)_{i,j}$，即可得计算域某一时瞬的水位、流速。

5.2.5 三角元法

由于采用矩形网格而形成锯齿形岸线以及锯齿形堤、坝，必然给数值模拟结果带来不良影响，因此有限差分法的矩形网格，难以准确模拟不规则曲线形岸线，即使采用空间变步长网格，也不能完全模拟复杂的曲线形边界。为了解决这些问题，数值计算的工程师们采用了三角形网格。这种不规则三角形网格有以下优点：可以随意加密计算网点，形成不规则三角形，从而较准确地模拟出复杂的边界，如：岸线、建筑物轮廓及航道，同时还可根据模拟区域的重要性，安排好网格的疏密程度及渐变程度。重要地区，网格密些、不重要地区，网格疏些。

本格式使用的基本运动方程为

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{\partial (hu)}{\partial x}+\frac{\partial (hv)}{\partial y}=0\\
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+g\frac{\partial \zeta}{\partial x}+\frac{\tau_{bx}}{\rho h}-fv=0\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+g\frac{\partial \zeta}{\partial y}+\frac{\tau_{by}}{\rho h}+fu=0
\end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}2\text{-}55)$$

(5-2-55) 式经离散，可得代数方程组

$$\zeta_i^{n+1}=\zeta_i^n-\Delta t\left[\frac{\partial}{\partial x}hu+\frac{\partial}{\partial y}hv\right]$$

$$u_i^{n+1}=u_i^n-\Delta t\left[u_i^{n+1}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^n+v_i^n\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_i^n+g\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)_i^{n+1}+\left(\frac{\tau_{bx}}{\rho h}\right)_i^{n+1}-fv_i^n\right]$$

$$v_i^{n+1}=v_i^n-\Delta t\left[u_i^{n+1}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_i^n+v_i^{n+1}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_i^n+g\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)_i^{n+1}+\left(\frac{\tau_{by}}{\rho h}\right)_i^{n+1}+fu_i^{n+1}\right]$$

该方程组结合定解条件，即可显式地直接求出 $(\zeta、u、v)^{n+1}$。如何确定结点偏导数的差分表示是关键。

众所周知，在平面域上，任何一个函数 $F(x, y)$ 可以近似用一个二元多项式来表示。即

$$F(x, y)=a_0+a_1x+a_2y+a_3xy+a_4x^2+a_5y^2+\cdots+a_mx^n+a_{m+1}y^n \qquad (5\text{-}2\text{-}56)$$

为了简便，我们取它的一阶近似式

$$F(x, y)=a_0+a_1x+a_2y \qquad (5\text{-}2\text{-}57)$$

从我们所研究的问题来看，方程 (5-2-57) 已完全满足工程上的需要。

我们已定义计算域由有限个三角形单元组成，今取其中任何一个单元 e (图 5-2-4)，当结点已知时，那么该三角形域内的函数形式也就完全确定了，也就是说可以求出方程 (5-2-57) 的三个系数。因为方程 (5-2-57) 对整个三角形域内都成立，包括三个结点，这样，我们就可以写出三个结点值 F_i、F_j、F_k 的表达式，其中 i，j，

k 按逆时针排列。

$$\left.\begin{aligned} F_i &= a_0 + a_1 x_i + a_2 y_i \\ F_j &= a_0 + a_1 x_j + a_2 y_j \\ F_k &= a_0 + a_1 x_k + a_2 y_k \end{aligned}\right\} \tag{5-2-58}$$

式中 x、y 是结点坐标，F 为结点值，将上式写成矩阵形式：

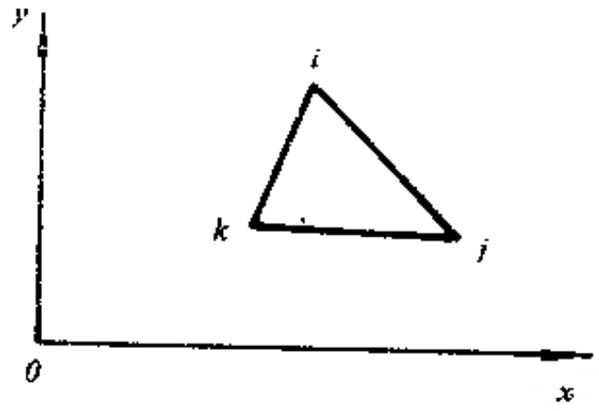


图 5-2-4　三角形单元示意图

$$\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_i \\ F_j \\ F_k \end{bmatrix} \tag{5-2-59}$$

对于方程（5-2-59）求解，则

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_i \\ F_j \\ F_k \end{bmatrix} \tag{5-2-60}$$

若记

$$\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} = A$$

对于 A 的行列式

$$|A| = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} = 2S_e$$

其中 S_e 为三角形单元的面积。

[A] 的伴随矩阵为

$$A^{*}=\begin{bmatrix} x_iy_k-x_ky_j & y_j-y_k & x_k-x_j \\ x_ky_i-x_iy_k & y_k-y_i & x_i-x_k \\ x_iy_j-x_jy_i & y_i-y_j & x_j-x_i \end{bmatrix} \tag{5-2-61}$$

为简化上式，可令

$$a_i=x_jy_k-x_ky_j;\qquad b_i=y_j-y_k;$$

$$c_i=x_k-x_j;\qquad a_j=x_ky_i-x_iy_k;$$

$$b_j=y_k-y_i;\qquad c_j=x_i-x_k;$$

$$a_k=x_iy_j-x_jy_i;\qquad b_k=y_i-y_j;$$

$$c_k=x_j-x_i$$

那么方程（5-2-61）可简写成

$$A^{*}=\begin{bmatrix} a_i & b_i & c_i \\ a_j & b_j & c_j \\ a_k & b_k & c_k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix}$$

而方程求逆公式

$$A^{-1}=\frac{A^{*}}{|A|}=\frac{1}{2S_e}\begin{bmatrix} a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix}$$

把上式代入方程（5-2-60）就可以求出系数

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}=\frac{1}{2S_e}\begin{bmatrix} a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_i \\ F_j \\ F_k \end{bmatrix}$$

即

$$a_0=(a_iF_i+a_jF_j+a_kF_k)/2S_e$$

$$a_1=(b_iF_i+b_jF_j+b_kF_k)/2S_e$$

$$a_2=(c_iF_i+c_jF_j+c_kF_k)/2S_e$$

把上式代入方程（5-2-57），经整理后得

$$F(x,y)=[(a_i+b_ix+c_iy)F_i+(a_j+b_jx+c_jy)F_j+(a_k+b_kx+c_ky)F_k]/2S_e$$

这样，三角形域内函数 $F(x,y)$ 的表达式也就完全确定了。

设

$$N_i = (a_i + b_i x + c_i y) / 2S_e$$
$$N_j = (a_j + b_j x + c_j y) / 2S_e$$
$$N_k = (a_k + b_k x + c_k y) / 2S_e$$

这就是有限单元法中所谓有形函数，它在数学中也称之为面积坐标，它和直角坐标系的关系是

$$x = x_i N_i + x_j N_j + x_k N_k$$
$$y = y_i N_i + y_j N_j + y_k N_k$$

从以上推导中可以看出，在三角形域内的任一函数可以用面积坐标函数 $F(N_i, N_j, N_k)$ 表示，同时面积坐标 N_i，N_j，N_k 又是 x、y 的函数，因此函数 F 对 x，y 求导时，可以按照复合函数求导法则进行．即

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial N_i}\frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial N_j}\frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial N_k}\frac{\partial N_k}{\partial x}$$
$$= (b_i F_i + b_j F_j + b_k F_k) / 2S_e \qquad (5\text{-}2\text{-}62)$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial N_i}\frac{\partial N_i}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial N_j}\frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial N_k}\frac{\partial N_k}{\partial y}$$
$$= (c_i F_i + c_j F_j + c_k F_k) / 2S_e \qquad (5\text{-}2\text{-}63)$$

在平面不规则三角形网格中（见图 5-2-5），结点 M 是邻近几个单元的顶点，而在数值计算中，若用其中某一单元的偏导数作为 M 点的导数，势必要造成一定的偏差，这是由于离散化和数值计算中一些误差所造成的，因而我们用加权平均来代替方程(5-2-62)、(5-2-63)。

$$F_x(M) = \sum_e (b_i F_i + b_j F_j + b_k F_k) / 2S_e \qquad (5\text{-}2\text{-}64)$$
$$F_y(M) = \sum_e (c_i F_i + c_j F_j + c_k F_k) / 2S_e \qquad (5\text{-}2\text{-}65)$$

式中，F_x、F_y 是对 x，y 的偏导数，$\sum_e$ 是对结点 M 为顶点的所有三角形求和。

$$S = \sum_e S_e$$

将方程（5-2-64）、(5-2-65) 代入前述二维基本方程组，在时

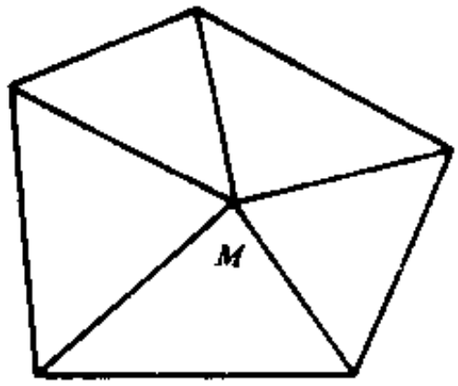


图 5-2-5　以 M 为顶点的网格示意图

间方向采用向前差分格式，那么各二维运动方程可写成如下差分格式：

$$\frac{\zeta_i^{n+1}-\zeta_i^n}{\Delta t}+\frac{\partial}{\partial x}(hu)_i^n+\frac{\partial}{\partial y}(hv)_i^n=0 \tag{5-2-66a}$$

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}+u_i^{n+1}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_i^n+\left(V\frac{\partial u}{\partial y}\right)_i^n+g\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)_i^{n+1}$$

$$+\left(\frac{\tau_{bx}}{\rho h}\right)_i^{n+1}-fv_i^n=0 \tag{5-2-66b}$$

$$\frac{V_i^{n+1}-V_i^n}{\Delta t}+\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right)_i^n+V_i^{n+1}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_i^n+g\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)_i^{n+1}$$

$$+\left(\frac{\tau_{by}}{\rho h}\right)_i^{n+1}+fu_i^n=0 \tag{5-2-66c}$$

由（5-2-66）三式，即可显式地直接求得各结点的 $(\zeta, u, v)_i^{n+1}$。

上述方程组的定解条件为：

（1）边界条件

（a）计算域与其它水域相通的开边界 r_1 上

其边界条件为

$$h(x, y, t)\,|_{r_1}=h_{r_1}(t)$$

$$\zeta(x, y, t)\,|_{r_1}=\zeta_{r_1}(t)$$

或

$$u(x, y, t)\,|_{r_1}=u_{r_1}(t)$$

$$v\ (x,\ y,\ t)\ |_{\Gamma_1}=v_{\Gamma_1}\ (t)$$

(*b*) 计算水域与陆地交界的闭边界 Γ_2 上

$$g\cdot n=0$$

即法向水通量为 0。

(2) 初始条件

$$\zeta\ (x,\ y,\ t)_{t=0}=0$$

$$h\ (x,\ y,\ t)_{t=0}=h_0\ (x,\ y)$$

$$u\ (x,\ y,\ t)_{t=0}=u_0\ (x,\ y)\ =0$$

$$v\ (x,\ y,\ t)_{t=0}=v_0\ (x,\ y)\ =0$$

由于该格式采用显式求解，同时受到复杂地形的影响，在计算过程中会产生一些扰动，当这些扰动扩大并传播，易使计算失败，为了消除这些扰动的影响，该模拟曾采用如下的滤波公式

$$F_i=\beta F_i^*+(1-\beta)\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{F_j^*}{L_j}\right)\times\sum_{j=1}^{m}L_j$$

式中 F_i——滤波处理后的数值；

F_i^*——处理前的数值；

β——权系数，$0.5<\beta<1.0$；

L_j——从结点 i 到相邻结点的距离；

F_j^*——与 i 结点相邻结点的处理前的数值；

m——与 i 结点相邻的结点总数。

5.2.6 边界处理

边界处理合适与否影响数值模拟的成败。实际工程中，计算域的边界常由不规则曲线组成，如何利用有限差分的矩形网格来模拟曲线边界，以及如何选取边界值，这是边界处理的重要内容。

如前述边界类型通常有两大类，一类是 Dirichlet 边界，另一类是 Neumann 边界。然而，在实际工程中，还常遇到浅滩上水边线的移动边界。不同类型边界有不同的处理方法，下面分别就 Dirichlet 边界、Neumann 边界和浅滩活动边界三种类型作一论述。

一、Dirichlet 边界

这类边界的边界条件是

$$f|_\Gamma = f_1$$

即在边界 Γ 处有已知的函数值 f_1。在实际情况下，水边界通常属于这类边界，该处有实测的水位、流速，可作为已知函数值。

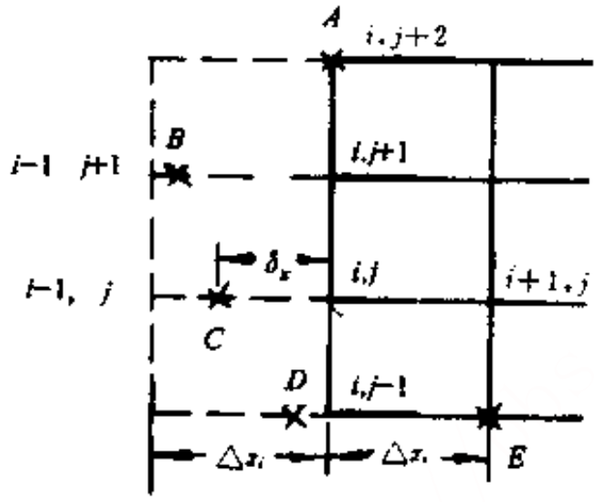


图 5-2-6　边界情况示意图

如果边界网格结点正好落在实测点上，则该结点的边界值可直接采用已知测值，如图 5-2-6 中的 A、E 点。如果边界网格结点不在实测点上，则可分以下不同情况分别处理。

1. 边界网格结点或虚拟外结点与实测点很靠近。

（1）如果边界结点与实测点很靠近（如图 5-2-6 中 $(i, j-1)$ 点和 D 点），设此二点之间距离 $\delta x \leqslant \frac{\Delta x}{5}$，则可令边界值直接等于实测值。

$$f_{(i,j-1)_p} = f_D$$

（2）如果实测点与边界结点较远，但与虚拟外结点较近（如图 5-2-6 中的 $(i-1, j+1)$ 和 B 点），设此二点之间距离 $\delta x \leqslant \frac{\Delta x}{5}$，则可令虚拟外结点值直接等于 B 点的实测值，即

$$f_{(i-1,j+1)_p} = f_B$$

然后引入边界条件求出 $f_{i,j+1}$。

2. 边界网格结点或虚拟外结点与实测点均不靠近（如图 5-2-6 中的 C 点），不能直接引用实测值，这时，可根据前一时间步长所得的结果，并根据线性插值关系可得

$$\frac{f_{i+1,j}-f_{i,j}}{f_{i+1,j}-f_{(i)}}=\frac{\Delta x_i}{\Delta x_i+\delta x}$$

由上式可近似求得

$$f_{i,j}=\frac{f_{i+1,j}\delta_i+f_{(i)}\Delta x_i}{\Delta x_i+\delta_i}$$

二、Neumann 边界

这类边界条件的一般形式是

$$\left(\frac{\partial f}{\partial n}+\alpha f\right)_S=f_2$$

上式中，当 $\alpha=0$ 时，就得到第二边界条件。当 $\alpha\neq 0$ 时，就得到第三边界条件。在实际情况下，固定边界就属于这类边界。

这类边界大致有以下几类情况：①边界正好通过网格结点（如图 5-2-7 中的 A、C、F）；②边界与网格结点很靠近（如图 5-2-7 中的 B、D、E）；③边界与网格结点距离较大（如图 5-2-7 中的 G）。现分别介绍这几类边界的计算方法。

1. 边界正好通过网格结点（如图 5-2-7 中的 A、C、F 点）

（1）边界的外法线方向 n 与坐标轴平行。图中 A 点边界的外法线方向与 y 轴平行，c 点边界的外法线方向与 x 轴平行。

以 A 点为例，可写出

$$\left[\left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)+\alpha f\right]_A=\frac{(f)_A-f_{i,j+2}}{\Delta y}+\alpha f_A=(f_0)_A$$

由此可得

$$(f)_A=[f_{i,j+2}+\Delta y\ (f_0)_A]/\ (1+\alpha\Delta y)$$

同理，对于 C 点，可得下式

$$(f)_C=[f_{i,j+1}+\Delta x\ (f_0)_C]/\ (1+\alpha\Delta x)$$

（2）边界的外法线方向与坐标轴不平行。如图中的 F 点。

由图可知，

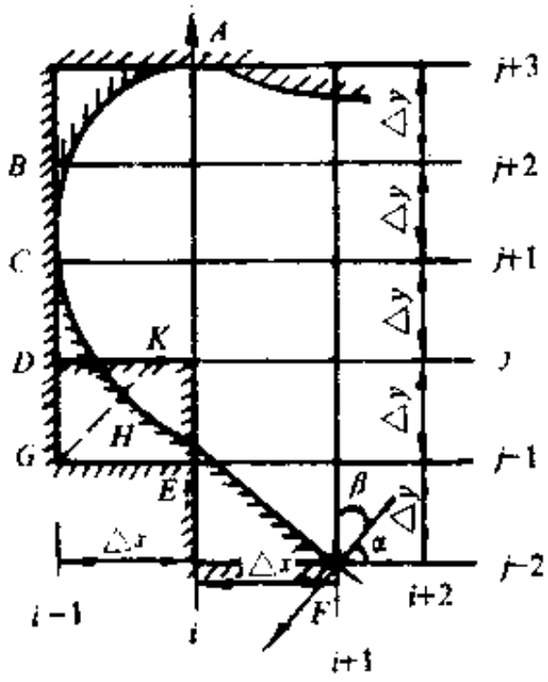


图 5-2-7　边界示意图

$$\left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)_F=\left[\frac{\partial f}{\partial x}\cos(n,x)+\frac{\partial f}{\partial y}\cos(n,y)\right]_F$$

$$=\frac{f_{i+2,j-2}-(f)_C}{\Delta x}\cos\alpha+\frac{f_{i+1,j-1}-(f)_C}{\Delta y}\cos\beta$$

由此可得边界条件表示式为

$$\frac{f_{i+2,j-2}-(f)_C}{\Delta x}\cos\alpha+\frac{f_{i+1,j-1}-(f)_C}{\Delta y}\cos\beta=\alpha\ (f)_C=(f_0)_C$$

经整理后可得

$$(f)_C=\frac{\Delta x\Delta y\ (f_0)_C-\Delta x\cos\beta f_{i+1,j-1}-\Delta y\cos\alpha f_{i+2,j-2}}{\Delta x\Delta y\alpha-\Delta x\cos\beta-\Delta y\cos\alpha}$$

2. 边界与网格结点很靠近（如图 5-2-7 中的 B、D、E）

对于这类情况，可直接引用邻近边界值作为结点的近似值，然后利用上述的方法作进一步处理。

3. 边界与网格结点距离较大（如图 5-2-7 中的 G 点）

对于这类边界，可作如下处理：从 G 引边界法线方向直线，交边界于 H，交网格坐标于 K，令 $GK=l$、$DK=\rho\Delta x$，显然，

$$l=\sqrt{(\Delta y)^2+(\rho\Delta x)^2}$$

由图可知

$$\frac{\partial f}{\partial n}=\frac{(f)_G-(f)_K}{l}$$

代入边界条件表达式，得

$$\frac{(f)_G-(f)_K}{l}+\alpha(f)_G=(f_0)_G$$

由此得

$$(f)_G=\frac{(f)_K+l(f_0)_G}{1+\alpha l}$$

上式中的 $(f)_K$ 值可由相邻节点值插值求得。由图可知：

$$(f)_K=\rho f_{i,j}+(1-\rho)f_{i-1,j}$$

得 $(f)_K$ 和 l 值代入上式，可得边界值为

$$(f)_G=\frac{\rho f_{i,j}+(1-\rho)f_{i-1,j}+\sqrt{(\Delta y)^2+(\rho\Delta x)^2}(f_0)_G}{1+\alpha\sqrt{(\Delta y)^2+(\rho\Delta x)^2}}$$

三、浅滩活动边界

在广阔平坦的浅滩上，水面变化可跨越好几个空间网格步长，在这种情况下，将其作为固定边界处理，显然是不合适的，必须随水边线移动情况处理成活动边界。对于这类活动边界，目前常用的方法有：①水边线步进法；②窄缝法；③井点法。

现分别介绍于下。

1. 水边线步进法

这是目前最常用的一种方法。其基本原理是：在水位变动过程中，以浅滩水边线最接近的网格结点作为边界点，因为水边线是运动的，因此，作为边界的网格结点也是变化的。根据图 5-2-8 可建立边界网格结点的判别式为

当 $z_s\leqslant\frac{z_a+z_b}{2}$ 时，边界网格结点应选在较低的 a 点；

当 $z_s>\frac{z_a+z_b}{2}$ 时，边界网格结点应选在较高的 b 点。

式中 z_s——水边线的竖向坐标值；

z_a——邻近水边线的较低网格结点的竖向坐标值；

z_b——邻近水边线的较高网格结点的竖向坐标值。

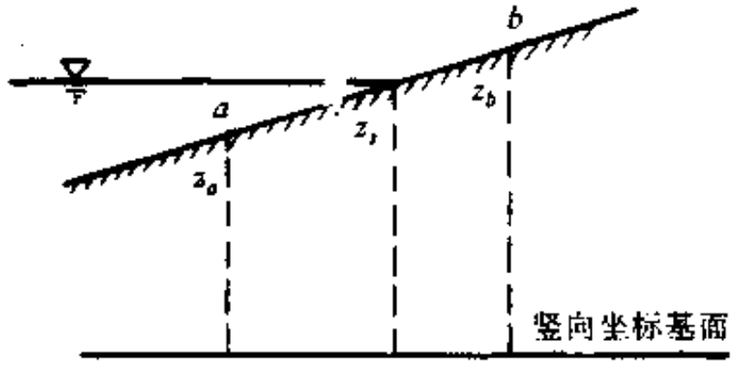
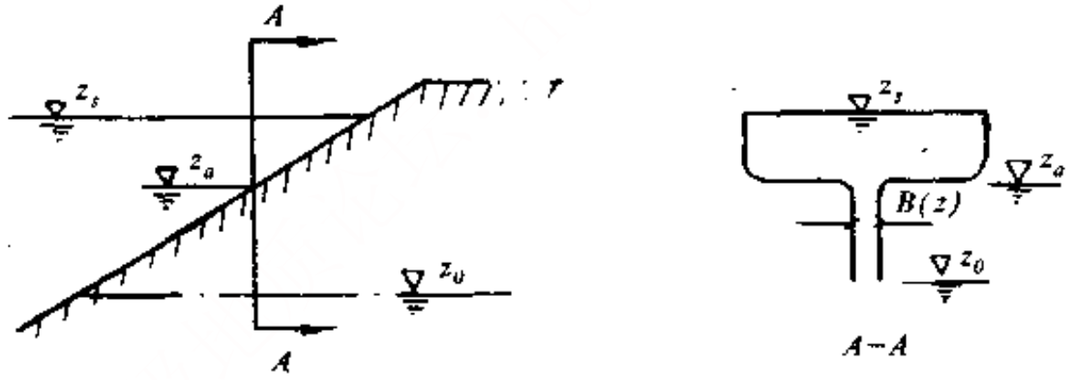


图 5-2-8　水边线与网格结点关系图

2. 窄缝法

"窄缝法"法是设想在岸滩上单位宽度内存在一条很窄的缝隙，缝内的水和岸滩前的水相连，这相当于把岸滩前的水域延伸到岸滩内，这样就可以把计算边界设在岸滩的窄缝内，成为具有一定水深的固定边界。窄缝简图如图 5-2-9 所示。



2-9　浅滩窄缝简图

图中 $B_{(z)}$ 定义为单　浅滩长度内的窄缝宽度，可由下式确定：

$$B_{(z)}=\begin{cases} B_S+(B_0-B_S)\,e^{\alpha(z-z_b)}, & \text{当 } z=z_b \\ B_0, & \text{当 } z>z_b \end{cases}$$

式中　z——计算点垂向坐标值；

z_b——床底高程；

B_b——床面以上的单位水域宽度，$B_b=1$；

α——窄缝缩窄系数，此值决定了窄缝宽度随深度向下而缩窄的快慢程度，曾采用$\alpha=2.3$；

B_s——在床底下无限深处的窄缝宽度，当床面以上的水域宽度取1时，B_s为一个很小的数，例如取为$B_s=0.02$。

根据连续原理和动量原理，可推导得含有窄缝的连续方程和动量方程

$$A\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial uh}{\partial x}+\frac{\partial vh}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial (uh)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(u^2h)+\frac{\partial}{\partial y}(v^2h)+gh\frac{\partial \zeta}{\partial x}=-g\frac{u\sqrt{u^2+v^2}}{C^2}+fvh$$

$$\frac{\partial (vh)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}(v^2h)+\frac{\partial}{\partial x}(u^2h)+gh\frac{\partial \zeta}{\partial y}=-g\frac{v\sqrt{u^2+v^2}}{C^2}-fuh$$

式中 $A=2B_s-(B_s)^2$；

h——计算水深。

窄缝法的优点是，在计算中，不必随时变化边界计算点，只需事先定出一个足够大的固定计算边界，就可以动态地模拟出计算域内的水位、流速变化。由于计算域事先已固定，求解时的系数矩阵大小不变，有利于计算的稳定性。又由于窄缝宽度很小、缝内流速也可人为加以衰减，故对精度无大影响。缺点是窄缝参数不易确定。

3. 井点法

上述水边线步进法根据水面涨落情况来决定固边界位置，其方法没有考虑边界处的流速，而且边界是活动的，需要经常判别固边界的位置。窄缝法虽然边界是固定的，而且也考虑了一定流速，但如何确定窄缝的宽度，需进一步推敲。

为了克服这一缺点，我们提出一种“井点法”来处理边滩边界，这种方法的要点是：

在水位变动范围的边滩上，每一个水深结点上，挖一口井，各

井的底部相通并直接通至海中，井的直径可以足够小，井的深度达到自由水表面的最低处。具体方式见图 5-2-10。

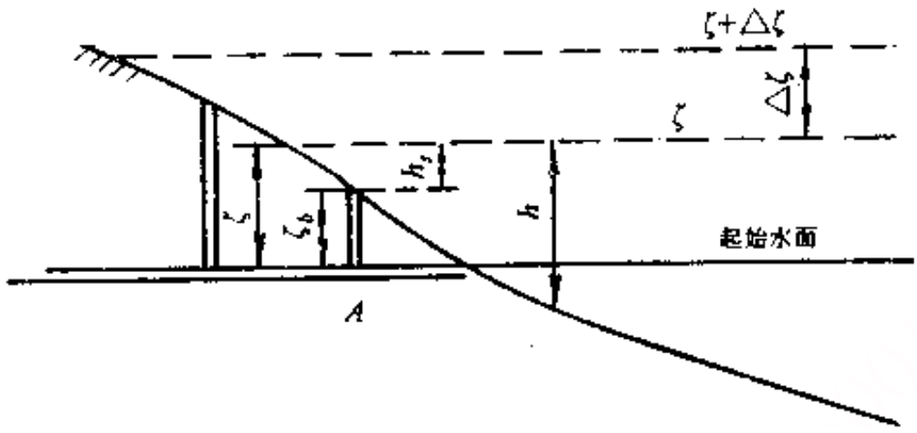


图 5-2-10　浅滩边界井点

水面漫滩时，滩面节点分成两种，一种在水面以上，这些点在滩上，该点水深等于井的水深，但流速为零；另一种在水面以下，这些点的水深应为滩面上实际水深，其计算方法和以往水中各点相同。现在只剩下一个最靠近水面线但又在水中的节点（图 5-2-10 中 A 点）需很好考虑，该点的水深为滩面上水深，即 $h_s=\zeta-\zeta_b$，该点的水流漫滩速度可由下式决定

$$u=\frac{(\Delta\zeta)^2}{(2h_s+\Delta\zeta)\ \Delta t\tan\theta_x}$$

$$v=\frac{(\Delta\zeta)^2}{(2h_s+\Delta\zeta)\ \Delta t\tan\theta_y}$$

上式中，θ_x，θ_y 分别为滩面在 x 向和 y 向的坡度。由图 5-2-10 可知

$$\tan\theta_{x(i,j)}=\frac{\zeta_{b(i+1,j)}-\zeta_{b(i-1,j)}}{\Delta x_{i-1}+\Delta x_{(i)}}$$

$$\tan\theta_{y(i,j)}=\frac{\zeta_{b(i,j+1)}-\zeta_{b(i,j-1)}}{\Delta y_{j-1}+\Delta x_{(j)}}$$

将此式代入上式得

$$u_{(i,j)}=\frac{[\Delta\zeta_{(i,j)}]^2\cdot[\Delta x_{i-1}+\Delta x_{(i)}]}{[2h_{s(i,j)}+\Delta\zeta_{(i,j)}]\cdot\Delta t\cdot[\zeta_{b(i+1,j)}-\zeta_{b(i-1,j)}]}$$

$$v_{(i,j)}=\frac{[\Delta\zeta_{(i,j)}]^2\cdot[\Delta y_{i-1}+\Delta y_{(i)}]}{[2h_{s(i,j)}+\Delta\zeta_{(i,j)}]\cdot[\zeta_{b(i,j+1)}-\zeta_{b(i,j-1)}]\cdot\Delta t}$$

上式中，$h_{i,j,k}=\zeta_{i,j,k}-\zeta_{bi,j,k}$

该方法物理概念清楚，计算方法简便，考虑了水位变化和漫滩流速

5.2.7 变步长网格

等步长网格计算简便，精度易控制，为数值计算所常用。但是在某些情况下，等步长网格就不适宜了。例如，计算沿固体边界的绕流问题、边界层的数值计算、某种物质的浓度沿垂线分布等，接近固体边界处的流速梯度或靠近床面边界处的浓度梯度很大，在这些区域使用与流区的其他部分同样步长的网格，数值计算的结果就偏离实际情况很多，即不能逼近真解。为此，就有必要减小步长，增加该区域内网格的结点数，以得出尽可能接近真解的近似解。

常用变步长网格有两种形式，分述如下。

1. 区域变步长网格

不同区域采用不同的步长，但各区域内步长相等。为了说明简单，以一维网格为例。设在结点 J 处，网格步长从 Δx_1 变到 Δx_2，如图 5-2-11 所示。

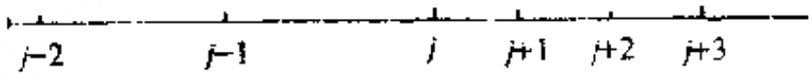


图 5-2-11 区域变步长网格

为了得出结点 j 处的导数的差分表达式，我们用 Taylor 级数展开法将函数 Γ 在结点处分别前向和后向展开成 Taylor 级数，

$$\Gamma_{j-1}=\Gamma_j+\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial x}\right)_j\Delta x_2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\Gamma}{\partial x^2}\right)_j\Delta x_2^2$$

$$+\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3\Gamma}{\partial x^3}\right)_j\Delta x_2^3+O(\Delta x_2^4) \qquad (5\text{-}2\text{-}67)$$

$$\Gamma_{j-1}=\Gamma_j-\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial x}\right)_j\Delta x_1+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\Gamma}{\partial x^2}\right)_j\Delta x_1^2$$

$$-\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3\Gamma}{\partial x^3}\right)_j\Delta x_1^3+O(\Delta x_1^4) \qquad (5\text{-}2\text{-}68)$$

式（5-2-67）减去式（5-2-68）得

$$\Gamma_{j+1}-\Gamma_{j-1}=\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial x}\right)_j(\Delta x_1+\Delta x_2)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\Gamma}{\partial x^2}\right)_j(\Delta x_2^2-\Delta x_1^2)$$

$$+O(\Delta x_1^3,\ \Delta x_2^3)$$

解出

$$\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial x}\right)_j=\frac{\Gamma_{j+1}-\Gamma_{j-1}}{(\Delta x_1+\Delta x_2)}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\Gamma}{\partial x^2}\right)_j\frac{\Delta x_2^2-\Delta x_1^2}{\Delta x_1+\Delta x_2}+O(\Delta x_1^2,\ \Delta x_2^2)$$

$\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial x}\right)_j$ 的差分表达式为：

$$\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial x}\right)_j\approx\left(\frac{\delta\Gamma}{\delta x}\right)_j=\frac{\Gamma_{j+1}-\Gamma_{j-1}}{\Delta x_1+\Delta x_2}$$

它的截断误差的阶为 $O\left(\frac{\Delta x_2^2-\Delta x_1^2}{\Delta x_1+\Delta x_2}\right)$，即 $O(\Delta x_2-\Delta x_1)$，当 Δx_2 很小时，差分表达式的精度为一阶，$O(\Delta x_1)$，而不是二阶。

将（5-2-67）乘以 Δx_1，式（5-2-68）乘 Δx_2，然后相加，

$$\Gamma_{j+1}\Delta x_1+\Gamma_{j-1}\Delta x_2-\Gamma_j(\Delta x_1+\Delta x_2)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\Gamma}{\partial x^2}\right)_j$$

$$(\Delta x_1^2\Delta x_2+\Delta x_2^2\Delta x_1)+\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3\Gamma}{\partial x^3}\right)_j(\Delta x_2^3\Delta x_1-\Delta x_1^3\Delta x_2)$$

$$+O(\Delta x_2^3\Delta x_1,\ \Delta x_1^3\Delta x_2)$$

得

$$\left(\frac{\partial^2\Gamma}{\partial x^2}\right)_j=\frac{2\left[\Gamma_{j+1}\Delta x_1+\Gamma_{j-1}\Delta x-\Gamma_j(\Delta x_1+\Delta x_2)\right]}{\Delta x\Delta x_2(\Delta x_1+\Delta x_2)}$$

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{\partial^3\Gamma}{\partial x^3}\right)_j\frac{\Delta x_2^2-\Delta x_1^2}{\Delta x_1+\Delta x_2}+O(x_2^2,\ \Delta x^2)$$

引入比值 $\delta=\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$，上式可以写成

$$\left(\frac{\partial^2\Gamma}{\partial x^2}\right)_j=\frac{2\left[\Gamma_{j+1}+\delta\Gamma_{j-1}-(1+\delta)\Gamma_j\right]}{\Delta x_1\Delta x_2(1+\delta)}$$

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{\partial^3\Gamma}{\partial x^3}\right)_j(\Delta x_2-\Delta x_1)+O(x_2^3,\ \Delta x_1^2)$$

从而

$$\left(\frac{\partial^2\Gamma}{\partial x^2}\right)_j=\frac{2\left[\Gamma_{j+1}+\delta\Gamma_{j-1}-(1+\delta)\Gamma_j\right]}{\Delta x_1\Delta x_2(1+\delta)} \qquad (5\text{-}2\text{-}69)$$

其截断误差的阶为

$$O(\Delta x_2-\Delta x_1,\ \Delta x_2,\ \Delta x_1^2)$$

如果 $\Delta x_1=\Delta x_2$，则式（5-2-69）的阶为二次、$O(\Delta x_1^2)$；如果 $\Delta x_1\neq\Delta x_2$，为了保证式（5-2-69）有二阶精度，Δx_1、Δx_2 间必须满足下面的关系：

$$\Delta x_2=\rho\Delta x_1 \qquad \rho=1+k\Delta x_1 \tag{5-2-70}$$

这里，k 是某个常数，阶数为 $O(1)$。

应用这种结构的变步长网格的不足之处有以下几方面：

（1）如果条件（5-2-70）不满足，则差分格式的精度将降低。特别当 δ 值很小时，截断误差将大大增加。

（2）由于步长变化可能引起计算不稳定。对于显式格式扩散方程的稳定性的条件是

$$d=\sigma\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\leqslant\frac{1}{2}$$

对流方程的稳定条件是

$$c=u\frac{\Delta t}{\Delta x}\leqslant 1$$

从而对时间步长的要求分别为

$$\Delta t\leqslant\frac{(\Delta x)^2}{2\sigma}$$

和

$$\Delta t\leqslant\frac{\Delta x}{u}$$

由上两式可见，为了保证稳定，时间步长也必须随 Δx 的减小而减小，这样就增加了计算工作量。如果时间步长不变，计算的不稳定性也随之发生。

（3）迭代求解时的收敛速度将降低。

（4）在步长突变的结点处，可能产生的反射及波的变形。如果在粗网格区，波动函数的差分解能相当精确地逼近真解，则计算从粗网格区向细网格区过渡时，突变产生波的反射和变形问题。如果在粗网格区，波动函数的差分解误差较大，则计算过渡到细

网格区时，就有可能引起波的变形。

为了避免上面的困难，可采用渐变步长的网格。

2. **渐变步长网格**

在计算区域内部分网格的步长是从大到小逐渐变化。这种网格的一个好处是，在改善计算结果的同时要求比较短的计算时间和比较少的计算机内存。这种网格构成方法如图 5-2-12 所示。

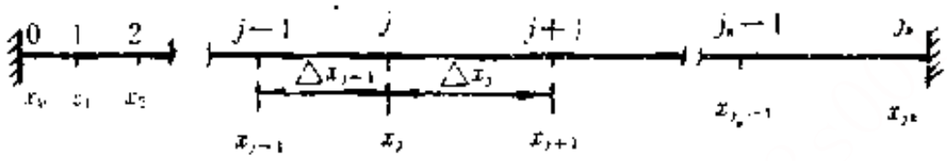


图 5-2-12　渐变步长网格

在结点 j 处的步长分别为 $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$，$\Delta x_{j-1} = x_j - x_{j-1}$，利用 Taylor 级数展开法，可分别得出一阶偏导数和二阶偏导数的表达式为

$$\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x}\right)_j = \frac{\Gamma_{j+1} - \Gamma_{j-1}}{\Delta x_j + \Delta x_{j-1}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2}\right)_j (\Delta x_j - \Delta x_{j-1}) + O(\Delta x_j^2,\ \Delta x_{j-1}^2)$$

和

$$\left(\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2}\right)_j = \frac{2(\Gamma_{j+1} + \delta_j \Gamma_{j-1} - (1+\delta_j)\Gamma_j)}{\Delta x_j \Delta x_{j-1}(1+\delta_j)} - \frac{(\Delta x_j - \Delta x_{j-1})}{3}\left(\frac{\partial^3 \Gamma}{\partial x^3}\right)_j + O(\Delta x_j^2,\ \Delta x_{j-1}^2)$$

这里 $\delta_j = \dfrac{\Delta x_j}{\Delta x_{j-1}}$。为了得到二阶精度的差分表达式，必须取 $\Delta x_j - \Delta x_{j-1} = O(\Delta x_j^2)$。

变步长网格在数据准备上比较复杂，可利用坐标变换将原来是变步长的网格化引成均匀网格，然后在均匀网格上进行计算，最后再将结果变换回原来的坐标系中得出近似解。下面用例子来说明这种方法。先举一维坐标的例子。为了降低计算误差，原坐标网格用了变步长的不均匀网格，如图 5-2-13 所示。

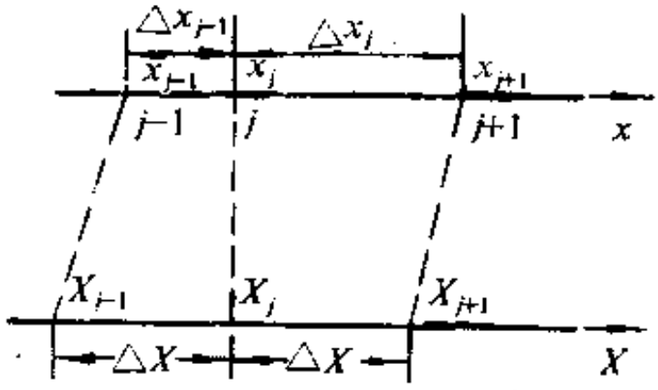


图 5-2-13　变步长网格与均匀网格的变换

利用坐标变换 $x=f(X)$ 将原非均匀网格变换成均匀网格，$\Delta X=\text{const}$。变换必须满足以下条件：

(1) $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}X}$必须在整个计算域为有限值，如果它在某些点为无限大，则在这些点的附近的解的误差将很大。

(2) $(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}X})_{x=0}=0$，$(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}X})_{x\neq 0}\neq 0$，以保证在点 $x=0$ 附近得到高精度的解。常用的变换形式为 $x=X^2$，$x=\sin^2(\frac{\pi}{2}X)$ 等。

对于二维流动，常用指数形式的坐标变换，例如，

$$x=X$$

$$y=b\ (\mathrm{e}^{\sigma Y}-1)$$

这里，σ、b 是任意常数。

为了在新的坐标系中求解，原始方程也必须进行相应地变换，以二维的对流—扩散方程为例

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t}+u\frac{\partial \Gamma}{\partial x}+v\frac{\partial \Gamma}{\partial y}=\sigma\nabla^2\Gamma \tag{5-2-71}$$

由于

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial X},\quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}=\frac{\partial^2}{\partial X^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial Y}\ (\frac{\partial y}{\partial Y})^{-1}=\frac{\mathrm{e}^{-\sigma Y}}{\sigma b}\frac{\partial}{\partial Y}$$

$$\frac{\partial^2\Gamma}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\Gamma}{\partial x}\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{e^{-\alpha Y}}{ab}\frac{\partial\Gamma}{\partial Y}\right]=\frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{e^{-\alpha Y}}{ab}\frac{\partial\Gamma}{\partial Y}\right)\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)$$

$$=\left[\frac{1}{ab}\frac{\partial}{\partial Y}e^{-\alpha Y}\frac{\partial}{\partial Y}+\frac{e^{-\alpha Y}}{ab}\frac{\partial^2}{\partial Y^2}\right]\frac{e^{-\alpha Y}}{ab}$$

$$=\left[\frac{-e^{-\alpha Y}}{b}\frac{\partial}{\partial Y}+\frac{e^{-\alpha Y}}{ab}\frac{\partial^2}{\partial Y^2}\right]\frac{e^{-\alpha Y}}{ab}$$

$$=\frac{-e^{-2\alpha Y}}{a^2b}\frac{\partial}{\partial Y}+\frac{e^{-2\alpha Y}}{a^2b^2}\frac{\partial^2}{\partial Y^2}$$

代入原方程（5-2-71）得

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial t}+u\frac{\partial\Gamma}{\partial X}+v\frac{e^{-\alpha Y}}{ab}\frac{\partial\Gamma}{\partial Y}=\sigma\nabla^2\Gamma$$

式中$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial X^2}+\frac{e^{-2\alpha Y}}{a^2b^2}\frac{\partial^2}{\partial Y^2}-\frac{e^{-2\alpha Y}}{a^2b}\frac{\partial}{\partial Y}$

由于变换后的网格是均匀网格，所以，差分格式的截断误差的阶数将由 ΔX，ΔY 来控制，这就避免了如前所述的阶数降低的问题。使用这种类型的网格，必须注意以下几点：

（1）为了保证稳定的收敛、稳定性条件必须由 ΔY、ΔY 来控制，即

$$\sigma\frac{\Delta t}{\Delta X^2}+\sigma\frac{\Delta t}{\Delta Y^2}\leqslant\frac{1}{2}$$

或

$$u\frac{\Delta t}{\Delta X}+v\frac{\Delta t}{\Delta Y}\leqslant 1$$

而不能用 Δx、Δy 来控制。

（2）边界条件必须同样变换到新坐标系（X、Y）中去。

（3）变换可能引入（或移去）奇异点。

（4）在新坐标系中由于阻尼误差、相位误差和混淆误差的特性不同于原坐标系，所以，由此算得的波动特性也会受到影响。

5.2.8 拟合坐标

根据物理区域的计算边界（特别是固体边界）的形状，可以选择适宜的坐标系以使坐标网格贴体地模拟物理边界的形状。例

如，计算沿圆柱体的绕流可以利用柱体坐标系 (r, v, z)；计算沿抛物形体的绕流，可以利用抛物线坐标系，等等。当然，控制方程及边界条件也必须进行相应的变换。例如与 $x-y$ 直角坐标系中二维扩散方程相对应，极坐标系 (r, v) 中的二维扩散方程应该是

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t}=\sigma\left\{\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \Gamma}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial v^2}\right\}$$

而计算网格则是 $r=const$，和 $v=const$ 的坐标线，且一般是步长 Δv 和 Δr 为常数的均匀网格。这样处理，简化了对边界的模拟，对近边界结点的处理的复杂性和计算工作量也减小了许多。

如上所述，选择与笛卡尔直角坐标系以外的坐标系，实际上是坐标变换的一种类型，在变换后的方程中会出现新的项，这从另一方面增加了计算的复杂性和工作量，有时引人新的奇点。这会造成数值解偏离真解，因为这些奇点是原来并不存在的。

但是，对于流场边界为任意形状的情况，上面介绍的方法就难以拟合边界形状，这里只介绍一种拟合坐标的方法。此法是通过边界贴体坐标，在物理计算域内生成正交曲线网格。该曲线网格具有准确贴合边界及域内网格布置灵活的特点，它克服了矩形网格拟合边界较差的缺点。通过坐标转换，将复杂域问题转变为规则长方形域内的问题求解。

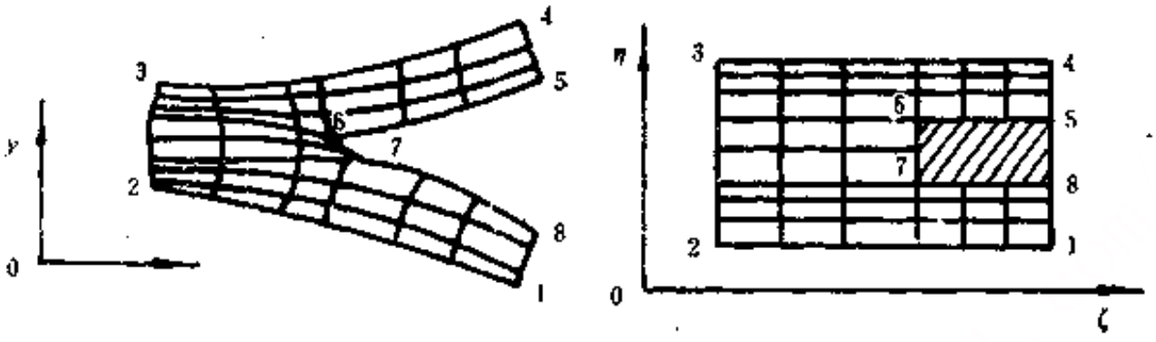
该方法计算域的物理平面用 $x-y$ 表示。该平面上复杂边界构成的计算域经坐标转换 $\zeta=\zeta(x, y)$，$\eta=\eta(x, y)$，变成 (ζ, η) 平面上的矩形域（图 5-2-14）。

在变换过程中，关键是如何确定坐标变换函数 ζ 和 η，即如何选择坐标方程。

二维情况下坐标方程

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}&=P(x, y)\\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}&=Q(x, y)\end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}2\text{-}72)$$

方程中，P、Q 的取值不同，ζ、η 的分布规律也不相同。现在先简



(a) 物理域　　(b) 变换后计算域

图 5-2-14　变换前后的计算域

单分析一下 P 的取值对 ζ、η 分布的影响。

对于 Poisson 方程 $\nabla^2\zeta=P$，在物理域内 P 点取一微小正方形邻域，邻域边长为 $2h$，则在微小域内积分有

$$\bar{\zeta}-\zeta_P=\frac{h^2}{6}P \tag{5-2-73}$$

式中，$\bar{\zeta}$ 为邻域内平均值；ζ_P 为 ζ 在 P 点的函数值。由 (5-2-73) 式可见，当 $P>0$ 时，$\bar{\zeta}-\zeta_P>0$，中心点函数值小于平均值，$|P|$ 值越大差值也越大，并在域内可能出现极小值。同理，$P<0$ 时，域内可能出现极大值。从这里可以得到两点认识：一是 P 值不同，可影响 ζ 的变化幅度，对曲线网格疏密的调节起着关键作用，所以将它称为“调节因子”，即适当选择调节因子，可对网格进行疏密调节，选用 Poisson 方程作为坐标转换方程的目的正在于此；二是 P 值取值不同，可影响 ζ 变化的单调性，因而需考虑 ζ 值的选取，以防二义的出现（多值对应）。

实现新旧坐标的变换，需导出上述方程的逆方程，从而建立两坐标间一一对应关系，这可通过 Jacobi 坐标转换关系来解决。通过坐标转换，方程组 (5-2-72) 的逆方程为

$$\begin{aligned} &ax_{\zeta\zeta}-2\beta x_{\zeta\eta}+\gamma x_{\eta\eta}+J^2(Px_\zeta+Qx_\eta)=0\\ &ay_{\zeta\zeta}-2\beta y_{\zeta\eta}+\gamma y_{\eta\eta}+J^2(Py_\zeta+Qy_\eta)=0 \end{aligned} \tag{5-2-74}$$

式中

$$J=\begin{bmatrix} x_\xi & y_\xi \\ x_\eta & y_\eta \end{bmatrix}=x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$$

$$\alpha=x_\eta^2+y_\eta^2,\quad \beta=x_\xi x_\eta+y_\xi y_\eta,\quad \gamma=x_\xi^2+y_\xi^2$$

通过（5-2-74）式就可求出在物理平面上对应于（ζ_i，η_i）点的（ζ_i、η_i）坐标。上面介绍的椭圆型曲线坐标方程，ξ、η 线疏密及方向可任意布设，但不一定能保持正交。

选用二维恒定均匀摩阻流作为网格生成的依托，其流函数和势函数必然正交，相应的水流运动方程为

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\rho}\frac{\partial \eta}{\partial x}+g\frac{\sqrt{u^2+v^2}}{C^2H}u=0 \\ &\frac{1}{\rho}\frac{\partial \eta}{\partial y}-g\frac{\sqrt{u^2+v^2}}{C^2H}v=0 \end{aligned}\right\} \tag{5-2-75}$$

式中，u、v 为流速在 x、y 方向沿水深平均值，g 为重力加速度，ρ 为流体密度，H 为全水深，η 为压力势函数。

$$\left.\begin{aligned} u&=\frac{1}{H}\frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ v&=-\frac{1}{H}\frac{\partial \zeta}{\partial x} \end{aligned}\right\} \tag{5-2-76}$$

方程（5-2-75）、（5-2-76）及水流连续方程经过简单推导可得

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}=-\frac{\partial \zeta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}(\ln k)-\frac{\partial \zeta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}(\ln k) \\ &\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}=-\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\ln(1/k)-\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\ln(1/k) \end{aligned}\right\} \tag{5-2-77}$$

方程中，$k=\sqrt{(x_\xi^2+y_\xi^2)/(x_\eta^2+y_\eta^2)}=\sqrt{\gamma/\alpha}$。比较方程（5-2-72）和（5-2-77）可知，利用网格的正交性及 Jacobi 逆变换关系式，可对 P、Q 表达式作某些数学处理，处理后的 P、Q 表达式分别为

$$P=-\frac{\partial}{\partial \zeta}\ln k/\gamma$$

$$Q=-\frac{\partial}{\partial \eta}\ln k/\alpha$$

因此最终生成正交曲线网格的实用方程为

$$\begin{aligned}&\alpha x_{\xi\xi}+\gamma x_{\eta\eta}+J^2(x_\xi P+x_\eta Q)=0\\&\alpha y_{\xi\xi}+\gamma y_{\eta\eta}+J^2(y_\xi P+y_\eta Q)=0\end{aligned}\tag{5-2-78}$$

依照方程组(5-2-78)及物理域边界上的网格点与变换后计算域边界上的网格点对应的 Dirichlet 边界条件，就可求解计算域网格点(ξ、η)所对应的物理域网格点(x、y)的坐标。

由于边界上网格点未参与正交调整运算，因而四周网格节点布置不好，正交曲线网格系统精度不高，特别是网格长宽比相差较大时，单靠调节因子 P、Q 很难使网格达到足够正交精度。因此，可以不把四个边界上的网格点固定死，而允许其中的一条或两条边界线上的网格点根据正交性的要求沿边界滑动，这样不仅提高了区域正交精度，且叠代过程收敛速度也明显加快。当然四个角点是不会参与正交调整运算的，因此在给定物理域时，应先将其修正为直角，这对一般的实际问题是可以做到的。

值得一提的是调节因子 P、Q 的量值受一定控制条件的约束，选择适当可以实现预期疏密调节目的，否则会造成计算混乱。一般来说 k 满足

$$\left|\ln\frac{k_{i-1}}{k_i}\right|<\varepsilon^{(1-m)}$$

即可。

其中，$m=\min\left[\frac{x_\xi^2}{x_\eta^2+y_\eta^2},\ \frac{x_\eta^2}{x_\xi^2+y_\xi^2}\right]$

本法采用的正交曲线坐标平面二维水流运动基本方程为

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{1}{C_\xi C_\eta}\frac{\partial}{\partial\xi}(Hhu)+\frac{1}{C_\xi C_\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}(Hhv)=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{u}{C_\xi}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{v}{C_\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta}+\frac{uv}{C_\xi C_\eta}\frac{\partial C_\xi}{\partial\eta}-\frac{v^2}{C_\xi C_\eta}\frac{\partial C_\eta}{\partial\xi}+g\frac{\sqrt{u^2+v^2}}{C^2H}u$$
$$-fv+\frac{g}{C_\xi}\frac{\partial h}{\partial\xi}=\frac{\mu}{C_\xi}\frac{\partial A}{\partial\xi}+\frac{\mu}{C_\eta}\frac{\partial B}{\partial\eta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{u}{C_\xi}\frac{\partial v}{\partial\xi}+\frac{v}{C_\eta}\frac{\partial v}{\partial\eta}+\frac{uv}{C_\xi C_\eta}\frac{\partial C_\eta}{\partial\xi}-\frac{u^2}{C_\xi C_\eta}\frac{\partial C_\xi}{\partial\eta}+g\frac{\sqrt{u^2+v^2}}{C^2H}v$$
$$+fu+\frac{g}{C_\eta}\frac{\partial h}{\partial\eta}=\frac{\mu}{C_\eta}\frac{\partial A}{\partial\eta}+\frac{\mu}{C_\xi}\frac{\partial B}{\partial\xi}$$

式中 $C_\zeta=\sqrt{x_\zeta^2+y_\zeta^2}$，$C_\eta=\sqrt{x_\eta^2+y_\eta^2}$

$$A=\frac{1}{C_\zeta C_\eta}\left[\frac{\partial\ (uC_\eta)}{\partial\zeta}+\frac{\partial\ (vC_\zeta)}{\partial\eta}\right]$$

$$B=\frac{1}{C_\zeta C_\eta}\left[\frac{\partial\ (uC_\eta)}{\partial\zeta}-\frac{\partial\ (vC_\zeta)}{\partial\eta}\right]$$

选用 ADI 法对新坐标系下基本方程进行数值离散。变量采用交错网格布置，方程在一个时间步长内作两个时间层离散。为了计算稳定把基本方程中非线性对流项的偏微分放在前一时间层上，使离散方程线性化；同时采用迎风格式处理非线性对流项，阻力项的差分中心放在与局部加速度项同一时间层上。另外，由于河道水流在洪水波传播过程中，水位变化剧烈，局部会形成涌波，而差分格式本身固有的阻尼还不足以保证计算稳定，为了保证计算的连续性，在 ζ、η 方向的动量方程中分别附加

$$A_\zeta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\text{ 及 }A_\eta\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

其形式与粘滞项相同（本书略去粘滞项），只不过 A_ζ 及 A_η 通过调试确定。

在时间层 $\left(n+\frac{1}{2}\right)\Delta t$ 上，连续方程为

$$\frac{\partial h^{n+\frac{1}{2}}}{\partial t}+\frac{1}{C_\zeta C_\eta}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(H^n u^{n+\frac{1}{2}}C_\eta\right)+\frac{1}{C_\zeta C_\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(H^n v^n C_\zeta\right)=0 \quad (5\text{-}2\text{-}79)$$

沿 ζ 方向动量方程为

$$\frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial t}+\frac{u^{n+\frac{1}{2}}}{C_\zeta}\frac{\partial u^n}{\partial\zeta}+\frac{v^n}{C_\eta}\frac{\partial u^n}{\partial\eta}+\frac{u^{n-\frac{1}{2}}v^n}{C_\zeta C_\eta}\frac{\partial C_\zeta}{\partial\eta}-\frac{(v^n)^2}{C_\zeta C_\eta}\frac{\partial C_\eta}{\partial\zeta}$$

$$+g\frac{\left[(u^n)^2+(v^n)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{C^2H^n}u^{n-\frac{1}{2}}-fv^n+\frac{g}{C_\zeta}\frac{\partial h^{n-\frac{1}{2}}}{\partial\zeta}=\frac{A_\zeta}{C_\zeta}\frac{\partial A^n}{\partial\zeta}-\frac{A_\zeta}{C_\zeta}\frac{\partial B^n}{\partial\eta} \quad (5\text{-}2\text{-}80)$$

在时间层 $(n+1)\Delta t$ 上连续方程为

$$\frac{\partial h^{n+1}}{\partial t}+\frac{1}{C_\zeta C_\eta}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(H^{n+\frac{1}{2}}u^{n+\frac{1}{2}}C_\eta\right)+\frac{1}{C_\zeta C_\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(H^{n+\frac{1}{2}}v^{n+1}C_\zeta\right)=0 \quad (5\text{-}2\text{-}81)$$

沿 η 方向动量方程为

$$\frac{\partial v^{n+\frac{1}{2}}}{\partial t}+\frac{u^{n+1}}{C_\xi}\frac{\partial v^n}{\partial \xi}+\frac{v^{n+1}}{C_\eta}\frac{\partial v^n}{\partial \eta}+\frac{u^{n+\frac{1}{2}}v^{n+1}}{C_\xi C_\eta}\frac{\partial C_\eta}{\partial \xi}-\frac{(u^{n+\frac{1}{2}})^2}{C_\xi C_\eta}\frac{\partial C_\xi}{\partial \xi}$$
$$+g\frac{\left[(u^{n+\frac{1}{2}})^2+(v^n)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{C^2H^{n+\frac{1}{2}}}v^{n+1}+fu^{n+\frac{1}{2}}+\frac{g}{C_\eta}\frac{\partial h^{n+1}}{\partial \eta}$$
$$=\frac{A_M}{C_\eta}\frac{\partial A^{n+\frac{1}{2}}}{\partial \eta}+\frac{A_M}{C_\xi}\frac{\partial B^{n+\frac{1}{2}}}{\partial \xi} \qquad (5\text{-}2\text{-}82)$$

将两个时间层内的连续方程和动量方程分别在水位点和相应的流速点进行离散，则在一时步内前后各半时步形成满秩方程组。

从时间层 $n\Delta t$ 到 $(n+\frac{1}{2})\Delta t$ 时刻，沿 ξ 方向（5-2-79）、（5-2-80）式的离散方程形式分别为

$$A_1u_{i-\frac{1}{2}j}^{n+\frac{1}{2}}+B_1h_{ij}^{n+\frac{1}{2}}+C_1u_{i-\frac{1}{2}j}^{n+\frac{1}{2}}=D_1$$
$$A_2h_{ij}^{n+\frac{1}{2}}+B_2u_{i+\frac{1}{2}j}^{n+\frac{1}{2}}+C_2h_{i-ij}^{n+\frac{1}{2}}=D_2$$

显然方程联立后矩阵呈三对角矩阵，可利用 TDMA 逐行扫描求解，同样，从时间层 $(n+\frac{1}{2})\Delta t$ 到 $(n+1)\Delta t$，沿 η 方向（5-2-81）、（5-2-82）式的离散形式分别为

$$A_3v_{ij-\frac{1}{2}}^{n+1}+B_3h_{ij}^{n+1}+C_3v_{ij+\frac{1}{2}}^{n+1}=D_3$$
$$A_4v_{ij}^{n+1}+B_4h_{ij+\frac{1}{2}}^{n+1}+C_4v_{ij+1}^{n+1}=D_4$$

亦可用 TDMA 逐行扫描求解。

5.3 垂向二维水动力数值模拟

在海岸河口地区，某些地域水较深，水面较窄，如潮汐通道、河口深渊段等，在这些地段，不能采用平面二维水动力数值模拟，应采用垂向二维水动力数值模拟。

垂向二维水动力数值模拟的基本方程是将 Navier－Stokes 方

程沿河宽积分，并取横向平均而得。

垂向二维水动力数值模拟常用于求解物理量的垂向分布，如流速、盐度、泥沙的垂向分布。在这些问题中，其计算原理和方法与平面二维数值模拟的计算原理和方法相同。目前最常用的是直接差分法。

在推导垂向二维水动力运动基本方程时，设有如下假定：

(1) 水质点横向流速对时间、空间的偏导数可忽略不计；

(2) 流动要素（如流速），在控制断面上沿横向分布足够均匀；

(3) 两岸侧向摩阻力相等；

(4) 两岸边壁采用无滑动条件 $u=w=w'=0$；

(5) 不计质量力。

对流体运动基本方程组沿 y 向积分后，可得垂向二维水动力运动基本方程组。

连续方程

$$\frac{\partial (Bu)}{\partial x}+\frac{\partial (Bw)}{\partial z}=0 \tag{5-3-1}$$

水位方程

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial x}\left(B\int_{-h}^{\zeta}u\mathrm{d}z\right)=0 \tag{5-3-2}$$

动量方程

$$\frac{\partial (Bu)}{\partial t}+\frac{\partial (Bu^2)}{\partial x}+\frac{\partial (Buw)}{\partial z}+\frac{B}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(B\mu_x\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(B\mu_z\frac{\partial u}{\partial z}\right) \tag{5-3-3}$$

式中 u、w ——分别为横向平均流速的 x、z 向分量；

B—— 河宽；

ζ—— 水位（水面至基准面的垂向距离）；

h—— 河底至基准面的距离；

ρ—— 水密度；

μ_x、μ_z ——分别为 x、z 向的紊动扩散系数。

将横断面概化成矩形，并认定河宽 B 不随时间变化，运用连

续方程，则上述方程组可进一步简化为

$$\frac{\partial (Bu)}{\partial x}+B\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{5-3-4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{u}{B}\frac{\partial (Bu)}{\partial x}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}$$

$$=\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial x}\left(B\mu_x\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu_z\frac{\partial u}{\partial z}\right) \tag{5-3-5}$$

方程(5-3-2)、(5-3-4)、(5-3-5)即为垂向二维水动力数值模拟的基本方程组，结合定解条件即可求解。

如前所述定解条件有两类，一类为边界条件，另一类为初始条件。

边界条件有自由表面条件、河底边界条件和上、下游边界条件。

1. 自由表面边界条件

当有风时，表面边界条件为

$$\mu_z\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\tau_{wx}}{\rho}$$

$$\tau_{wx}=\rho_a f_w|w|u_w$$

式中 τ_{wx}——风对水面剪切应力在x向的分量；

ρ_a——空气密度；

w——风速；

u_w——风速在x向分量。

无风时，$\tau_{wx}=0$

2. 河底边界条件

也可分为两类，一类为无滑移条件，另一类为可滑移条件。

无滑移条件为 $u=w=0$

可滑移边界条件为 $\mu_z\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\tau_{bx}}{\rho}$

式中 τ_{bx}——底部剪切应力。

3. 上下游开边界

上下游开边界有两类边界条件：一类是已知开边界上的水位

过程线，即

$$\zeta_\Gamma=\zeta\ (x,\ t)\ |_{x=\Gamma}$$

另一类是已知开边界上的流速过程

$$u_\Gamma=u_{(x,t)}|_{x=\Gamma}$$

初始条件虽对计算结果有一定影响，但经过一定的时段以后，这种影响可消除。因此，初始条件往往取常值，或根据初始时刻的实测资料给出一定的空间分布形式。通常，可取如下形式作为初始条件

$$\zeta_{(x,t)}|_{t=0}=0$$

$$(u,\ w)_{(x,t)}|_{t=0}=0$$

在实际情况中，由于水深随时间和空间而不断地变化，计算域也发生改变，为了便于计算，可通过垂向坐标转换，将不规则计算域变成规则计算域。

无量纲垂向坐标 z^* 定义为

$$z^*=\frac{z+h}{H}$$

通过这种坐标变换，不规则区域转变为规则矩形域，使计算网格能连续地跟踪自由表面运动，精确地拟合自由表面和海底边界。利用转变关系式，可将垂向二维水动力运动基本方程组变换成新坐标系 $(x,\ z^*,\ t)$ 的基本方程组

$$\frac{\partial\ (Bu)}{\partial x}+\frac{\partial\ (Bu)}{\partial z^*}\frac{\partial z^*}{\partial x}+B\frac{\partial w}{\partial z^*}\frac{\partial z^*}{\partial z}=0 \tag{5-3-6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{u}{B}\frac{\partial\ (Bu)}{\partial x}+w^*\frac{\partial u}{\partial z^*}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}$$

$$=\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial x}\ (B\mu_x\frac{\partial u}{\partial x})\ +\frac{1}{H^2}\frac{\partial}{\partial z^*}\ (\mu_v\frac{\partial u}{\partial z^*}) \tag{5-3-7}$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial x}\ (BH\int_0^1 u\mathrm{d}z^*)\ =0 \tag{5-3-8}$$

$$P=P_0+Hg\int_{z^*}^1\rho\mathrm{d}z^*$$

式中

$$w^* = \frac{\partial z^*}{\partial t} + u\frac{\partial z^*}{\partial x} + w\frac{\partial z^*}{\partial z}$$

$$\frac{\partial z^*}{\partial z} = \frac{1}{H}$$

$$\frac{\partial z^*}{\partial x} = \frac{\frac{\partial h}{\partial x} - z^*\cdot\frac{\partial H}{\partial x}}{H}$$

上述坐标变换后的基本方程组，其定解条件也相应变换成如下形式：

（1）自由表面边界条件 $\frac{\mu_t}{H}\frac{\partial u}{\partial z^*} = \frac{\tau_{wx}}{\rho}$

（2）河底边界条件 $\frac{\mu_t}{H}\frac{\partial u}{\partial z^*} = \frac{\tau_{bx}}{\rho}$

（3）上、下游开边界条件 $u = u\ (x,\ z^*,\ t)$

（4）初始条件 $(u,\ w)\ |_{t=0} = 0$

求解上述垂向二维水动力数值模拟时，采用交错的离散网格。

现对上述方程组采用剖开算子法分步求解。将时间步长 Δt 分成两半步。

第一步，在前半步，时间从 $n\Delta t \to (n+\frac{1}{2})\Delta t$，先对水流的对流扩散部分求解。在此分步时的离散方程为

$$\frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{\frac{\Delta t}{2}} + \frac{u}{B}\frac{\partial\ (Bu)}{\partial x} + w^*\frac{\partial u}{\partial z^*} + g\frac{\partial}{\partial x}\ (H\int_{z^*}\mathrm{d}z^*)$$

$$= \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial x}\ (B\mu_x\frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{1}{H^2}\frac{\partial}{\partial z^*}\ (\mu_z\frac{\partial u}{\partial z^*}) \qquad (5\text{-}3\text{-}9)$$

在（5-3-9）中，如果对流项的离散采用迎风差分格式，扩散项采用中心差分，垂向导数采用隐式差分，水平导数的差分中心采用未知的当量值，则（5-3-9）式离散后的差分方程经整理后可成为如下形式的三对角方程：

$$A_i u^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},k-1} + B_i u^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},k} + C_i u^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},k-1} = D_i \qquad (5\text{-}3\text{-}10)$$

式中

$$A_i=-\frac{\mu_{z_{i+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}}}{H^2_{i-\frac{1}{2}}\ (\Delta z^*)}-\left[\frac{W^*_{i+\frac{1}{2},k}}{\Delta z^*},\ 0\right];$$

$$B_i=\frac{2}{\Delta t}-A_i-C_i-E_i+F_i;$$

$$C_i=-\frac{\mu_{z_{i+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}}{H^2_{i+\frac{1}{2}}\ (\Delta z^*)^2}-\left[-\frac{W^*_{i+\frac{1}{2},k}}{\Delta z^*},\ 0\right];$$

$$D=E_iu_{i+\frac{1}{2},k}+F_iu_{i-\frac{1}{2},k}+\frac{2u_{i,k}}{\Delta t}-\frac{g\Delta z^*}{\rho\Delta x}$$

$$\left[H_{i-1}\sum_{k=1}^{m}\rho-H_i\sum_{k=1}^{m}\rho\right];$$

$$E_i=\frac{B_{i+1}\mu_x}{B_{i+\frac{1}{2}}\ (\Delta x)^2}+\left[-\frac{B_{i-1}u_{i+\frac{1}{2},k}}{B_{i+\frac{1}{2}}\Delta x},\ 0\right];$$

$$F_i=\frac{B_i\mu_x}{B_{i+\frac{1}{2}}\ (\Delta x)^2}+\left[-\frac{Bu_{i+\frac{1}{2}}}{B_{i+\frac{1}{2}}\Delta x},\ 0\right]$$

其中 $(x,\ y)$ ——取 x，y 中较大者；

m——垂向分层数；

Δx、Δz^*——x、z^* 向的空间步长。

(5-3-10) 式为三对角系数矩阵代数方程，通过此分步可求出 $u^{n+\frac{1}{2}}$。

第二步，在后半步，时间从 $(n+\frac{1}{2})\Delta t\to(n+1)\Delta t$，在这一分步对连续方程和动量方程中传播部分进行求解，其离散方程分别为

$$\frac{u^{n+1}-u^{n+\frac{1}{2}}}{\frac{\Delta t}{2}}=-g\frac{\partial\zeta}{\partial x}\tag{5-3-11}$$

$$\frac{\zeta^{n+1}-\zeta^n}{\frac{\Delta t}{2}}+\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial x}\left(BH\int_0^1 u\mathrm{d}z^*\right)=0\tag{5-3-12}$$

令 $U=\int_0^1 u\mathrm{d}z^*$，则式 (5-3-11)、(5-3-12) 化为

$$\frac{U^{n+1}-U^{n+\frac{1}{2}}}{\frac{\Delta t}{2}}=-g\frac{\partial\zeta}{\partial x}$$

$$\frac{\zeta^{n+1}-\zeta^{n}}{\frac{\Delta t}{2}}+\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial x}(BU^{n})=0$$

上式经整理可得如下的三对角系数矩阵的代数方程

$$AU_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}+B\zeta_i^{n+1}+CU_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}=D_1 \tag{5-3-13}$$

$$A\zeta_i^{n+1}+BU_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}+C\zeta_{i+1}^{n+1}=D_2 \tag{5-3-14}$$

式中

$$A=-\frac{H_{i-\frac{1}{2}}B_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta xB_i};$$

$$B=\frac{2}{\Delta t};$$

$$C_2=\frac{H_{i+\frac{1}{2}}B_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta xB_i};$$

$$D_2=\frac{2\zeta^n}{\Delta t};$$

$$A=-\frac{g}{\Delta x};$$

$$B=\frac{2}{\Delta t};$$

$$C_3=\frac{g}{\Delta x};$$

$$D_1=\frac{2U_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t}$$

(5-3-13)、(5-3-14) 式为三对角系数矩阵方程，采用追赶法，可求得ζ^{n+1}和U^{n+1}，而u_i^{n+1}则可由下式求得，

$$u_{i-\frac{1}{2},k}^{n+1}=u_{i-\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}-g\frac{\Delta t}{2}\frac{\zeta_{i+1}^{n+1}-\zeta_i^{n+1}}{\Delta x}$$

此外，由连续方程和边界条件$w^n(0)=0$、$w^n(1)=0$，可以求出$w_{i,k-\frac{1}{2}}$；然后由连续方程可求得

$$w^{n-1}_{i,k+\frac{1}{2}} = w_{i,k-\frac{1}{2}} - \frac{B_{i-\frac{1}{2}}u_{i-\frac{1}{2},k} - B_{i-\frac{1}{2}}u_{i-\frac{1}{2},k}}{\Delta x B_i}\Delta z^* H_i$$

参 考 文 献

1 曹祖德．数值模拟．港口工程．北京：海洋出版社，1993

2 Leendertse J J. A Water Quality Simulation Model for Well－Mixed Estuaries and Coastal Seas, Vol. 1, Principles of Computation, The Rand Corporation RM－6230, 1970

3 曹祖德，王桂芬．潮流及污染扩散的数学模型．水运工程电算应用文集．总-3-电-1，1994

4 曹祖德．潮流的数学模型．水道港口，1983，(2)

5 Peaceman D W and Rachford Jr H H. The Numerical Solution of Parabolic and Elliptic Differential Equations J. Soc. Ind. Appl. Math. 1955 (3)

6 汪德爟．计算水力学理论与应用．南京：河海大学出版社，1989

7 Yanenko N N. One the Difference Method of Calculation of Multidimensional Heat Conduction Equations (Russian). Dokl. Aked. Nauk. USSR 1959, 125 (6)

8 Yanenko N N, Suchkov V A and Pogodin Yu Ya. On the Difference Solution of Heat Conduction Equation in Curvilinear Coordinates (Russian) Dokl. Aked. Nauk. USSR. 1959, 128 (5)

9 Yanenko N N. On the Implicit Difference Compution Method for solving the multidimensional Heat Conduction Equations (Russian) Izv. Vyssh. Uchebu. Zaved. Mathematika. 1961, 23 (4)

10 何少 ，林炳南．破开算子法在二维潮流中的应用．海洋学报，1984，(2)

11 何少 ，龚振瀛．隐式破开算子法在二维潮流中的应用．海洋学报，1985，7 (2)

12 曹祖德，王桂芬．三维潮流破开算法的数学模型．水道港口，1987，(1)

13 Renque J P, Cunge J A et al. New Method for Tidal Current Computation. ASCE, 1982, 108 (WW3)

14 罗奇 D J，钟锡昌等译．计算流体力学．北京：科学出版社，1983

15 张二骏，张东生，高飞．一种新的数值方法——准分析法及其在二维非恒定流动问题中的应用．海洋学报，1986，8（3）

16 张二骏，高飞，邵桦．对流扩散问题的准分析模型．海洋与湖沼，1988，19（5）

17 王长海、李蓓．二维不规则三角形网格的潮流数学模型．水道港口，1988，（2）

18 何少 ，王连祥．窄缝法在边界变动水域的应用．水利学报，1986，（12）

19 张华庆，陆永军．拟合坐标下河道二维非恒定流计算．水道港口，1992，（3）：1～8

20 Yanenko N N. Numerical Methods in Fluid Dynamics Moscov; MIR Publisher, 1986

21 Yanenko N N. The Method of Fractional Step, Springer—Verlag. 1971

22 Peaceman D W and Rachford jr H H. The Numerical Solution of Parabolic and Elliptic Differential Equations J. Soc. Ind. Appl. Math. 1955 (3)

23 Douglas jr J Rachford jr. H H. On the Difference Method of Calculation of Multidimensional Heat Conduction Equations (Russian). Dokl. Akad. Nauk USSR, 1955, 125 (6)

24 匡翠萍．长江口栏门沙冲淤及悬沙沉降规律研究和水流盐度泥沙数学模型〔博士学位论文〕．南京：南京水利科学研究院，1993

第六章　三维水动力数值模拟

6.1　引　　言

在宽阔且较深的海岸河口地区，研究水流运动、海岸演变及泥沙运动时，通常的二维数值模拟就不能满足要求了。此外，像疏浚抛泥、油膜运动、水质污染扩散等一些专门课题，也不是二维数值模拟能解决的。对此，为了准确地模拟上述问题的运动过程，就必须采用三维水动力数值模拟技术。

三维水动力数值模拟显然要比一维或二维水动力数值模拟复杂得多，国外自 70 年代中期开始了三维水动力数值模拟的研究，在近 10 年来有了很大进展；国内虽起步较晚，从 80 年代中期才开展研究，但进展较快，已在一些重要工程中获得应用。

三维水动力数值模拟的基本运动方程也是以 Navier-Stokes 方程为基础建立的，主要有以下几种计算方法。

(1)垂向分层二维法。这种方法最早由 Leendertse 等人于 1973 年提出，以后被广为应用。其主要特点是将计算域沿垂向分为若干层，每层采用平面二维计算模式，层与层之间用摩擦力和流速耦合，但无水体质量交换。

(2)破开算子法。这是求解高维偏微分方程的有效方法。通常有按坐标方向分步和按物理分步两种，前者将偏微分方程组按 x、y、z 三个方向分成三个子步，分别逐步求解；后者根据物理意义将偏微分方程分步。这种方法的优点是可以根据算子的不同特性采用不同的数值计算方法，既可节省机时，又可保证稳定性。

(3)直接求解法。对三维水动力基本运动方程按三维空间直接

求解，有显式求解和显一隐式混合求解两种。

(4)边界拟合法。这是对计算域进行变换，使复杂边界变换成简单的矩形域，以简化计算方法。

下面分别介绍上述几种方法。

6.2 垂向分层二维法

一、基本方程的建立

采用右手直角坐标系，平面 xy 位于海底某一高层处，Z 轴竖直向上(图 6—2—1)，其余符号如图 6—2—1 所示。

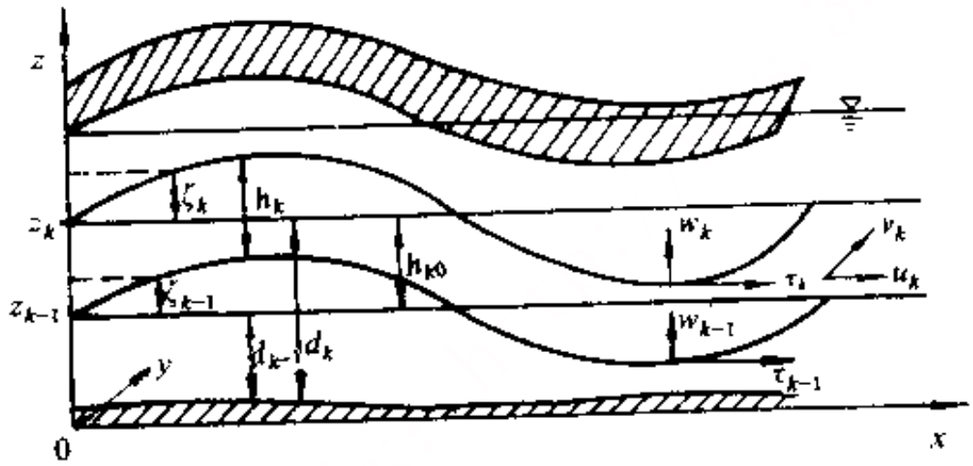


图 6—2—1 直角坐标系

不可压缩流体紊动流的基本方程为

连续方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{6—2—1}$$

动量方程

x 向

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}-fv+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}\right)=A_x\Delta u \tag{6—2—2a}$$

y 向

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}+fu$$

$$+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}\right)=A_x\Delta u \qquad (6-2-2b)$$

z 向　　$P=P_0+\rho g(H-z)$　　(6—2—2c)

式中 u、v、w——分别为 x、y、z 方向的分速；

P_0——水表面处大气压力；

P——水压力；

f——柯氏系数，$f=2\omega_f\sin\phi$；

ω_f——地球自转角速度；

ϕ——当地地理纬度；

τ——剪切应力张量

$$\tau=\begin{vmatrix}\tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz}\end{vmatrix};$$

H——水深；

g——重力加速度；

A_x、A_y、A_z——分别为 x、y、z 向的紊动扩散系数；

Δ——微分运算子；$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$。

沿水深将水体分为 k 层，并取出某一任意 h_k 层来考虑。将前述基本方程在 h_k 层内沿 z 向积分。

先将(6—2—1)式积分得

$$w_k-w_{k-1}+\frac{\partial}{\partial x}(u_kh_k)+\frac{\partial}{\partial y}(v_kh_k)=0 \qquad (6-2-3)$$

由于 $w\approx\frac{\partial\zeta}{\partial t}$，因此(6—2—3)式又可写成

$$\frac{\partial\zeta_k}{\partial t}-\frac{\partial\zeta_{k-1}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(u_kh_k)+\frac{\partial}{\partial y}(v_kh_k)=0 \qquad (6-2-4)$$

由图 6—2—1 可知

$$h_k=h_{k0}+\zeta_k-\zeta_{k-1}$$

由此可得

$$\frac{\partial\zeta_k}{\partial t}-\frac{\partial\zeta_{k-1}}{\partial t}=\frac{\partial h_k}{\partial t} \qquad (6-2-5)$$

将(6—2—5)式代入(6—2—4)式，即可得

$$\frac{\partial h_k}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(u_k h_k)+\frac{\partial}{\partial y}(v_k h_k)=0 \qquad (6—2—6)$$

式中

h_k——第 k 层水体的厚度，h_{k0} 为静止时厚度；

ζ_k——为 h_k 层的水面层与静止时该面层的竖向距离；

u_k、v_k——分别为 h_k 层内 x 向和 y 向的分速。

今将(6—2—2a)式和(6—2—2b)式在 h_k 层沿 z 向积分，由于剪切应力中正向应力比其余方向剪切应力大，在积分时，只保留了正向应力，积分后得

$$\frac{\partial u_k}{\partial t}+u_k\frac{\partial u_k}{\partial x}+v_k\frac{\partial u_k}{\partial y}+w_k\frac{\partial u_k}{\partial z}+g\frac{\partial}{\partial x}(\zeta_k-\zeta_{k-1})$$
$$-fv_k+\frac{1}{\rho h_k}(\tau_{xk-1}-\tau_{xk})=A_r\Delta u_k \qquad (6—2—7a)$$

$$\frac{\partial v_k}{\partial t}+u_k\frac{\partial v_k}{\partial x}+v_k\frac{\partial v_k}{\partial y}+w_k\frac{\partial v_k}{\partial z}+g\frac{\partial}{\partial y}(\zeta_k-\zeta_{k-1})$$
$$+fu_k+\frac{1}{\rho h_k}(\tau_{yk-1}-\tau_{yk})=A_r\Delta v_k \qquad (6—2—7b)$$

(6—2—3)～(6—2—7b)式为本三维潮流数学模型所采用的基本方程组，加上必要的初始条件和边界条件，即可求解。

二、初始条件和边界条件

1. 初始条件

根据基本方程的特点，可采用静水时之数值作为初始条件，即令

$$(\zeta_k, u_k, v_k, w_k)_{t=0}=0$$
$$(h_k)_{t=0}=h_{k0}$$

式中 h_{k0}——静水时的厚度。

2. 边界条件

(1)四周边界

指计算水域与四周相接壤的边界情况，根据联接情况不同，有开边界与固边界之分。

(a)开边界

相接壤的是水体，这种边界通常用流速或水位控制，可由现场实测资料提供。在三维潮流数学模型中，边界条件应包括边界处各层的流速或"水位"的变化过程。在实测中，通常可获得表面水位变化过程，水下各界面的变化过程则可用下式计算：

$$\zeta_i=\zeta_0\frac{\sinh\left(\frac{2\pi H_i}{T\sqrt{gH_i}}\right)}{\sinh\left(\frac{2\pi H_0}{T\sqrt{gH_0}}\right)}$$

式中 ζ_i——h_i层水体的上界面竖向位移；

ζ_0——自由表面的水位变化；

H_i——h_i层水体的上界面在静止时(初始时)与海底的距离；

H_0——静水时(初始时)整个水深；

T——潮位周期。

关于边界处水下各层流速过程可由实测提供

(b)固边界

当计算域与陆地、岛屿或水工建筑物(如堤、坝等)相接壤时，在这些边界处通常用法向流速为零来控制 对于边滩平缓处，需考虑水流漫滩时的边滩储水和滩上流速，常用活动边界或特殊处理。

(2)自由表面和海底边界

(a)自由表面

指与大气相接触的水表面。有风时，用风对水表面的剪切应力控制。

$$\tau_{ox}=\rho_a C_f(W_{10x}-u_0)\Delta W_0$$

$$\tau_{oy}=\rho_a C_f(W_{10y}-v_0)\Delta W_0$$

$$\Delta W_0=\sqrt{(W_{10x}-u_0)^2+(W_{10y}-v_0)^2}$$

式中 下角标"o"——自由水面；

ρ_a——空气密度；

W_{10x}、W_{10y}——分别为x、y向的分风速；

C_a ——空气相对水面流动的剪切系数，此值已有很多人作了研究（参见图 6—2—2），根据笔者研究成果，$C_a=2.55\times10^{-3}$

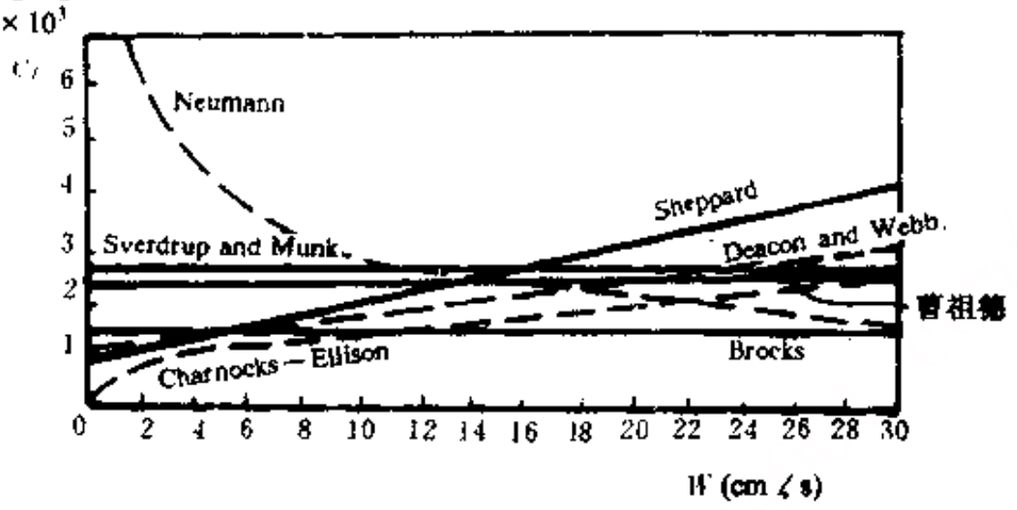


图 6—2—2 水表面剪切系数 C_a 图

(b)海底边界

海底床面边界用剪切应力 τ_b 及竖向流速 W_b 控制。

$$\tau_{bx}=\rho C_b u_b |U_b|$$

$$\tau_{by}=\rho C_b v_b |U_b|$$

$$U_b=\sqrt{u_b^2+v_b^2}$$

式中，足标"b"——海底床面，C_b ——海底摩擦系数，在潮流中，此值很难确定，目前大多仍借用定常流的结果，用下式计算：

$$C_b=\frac{g}{C^2}$$

式中 C——谢才系数；

$$C=\frac{1}{n}(h_b+\zeta_b)^{\frac{1}{6}}$$

n ——糙率。

至于海底床面竖向分速 W_b，应由海底床质确定。粗粒松散床质在水表面起伏时存在着竖向渗透速度，W_b 即等于渗透速度；透水性差的床质，可采用 $W_b=0$。

(3)水体内层间边界

各水体层间的界面边界，应采用压力和流速连续条件控制，层间界面的剪切应力可用下式确定：

$$\tau_{kx}=\rho C_k(u_{k+1}-u_k)\,|\Delta U|$$

$$\tau_{ky}=\rho C_k(v_{k+1}-v_k)\,|\Delta U|$$

$$\Delta U=\sqrt{(u_{k-1}-u_k)^2+(v_{k+1}-v_k)^2}$$

三、差分离散求解

对(6—2—3)式～(6—2—7b)式作差分离散，即可求解。由于这些方程已变为二维，因此前章所述的各种方法均可应用。本节仅介绍三种解法：一是显式法，二是显、隐式兼备的 MADI 法，三是导数加权法。各种解法都从海底开始、逐层向上，求出各层的流速及界面竖向位移速度。

各种解法所采用的差分网格如图 6—2—3 所示。

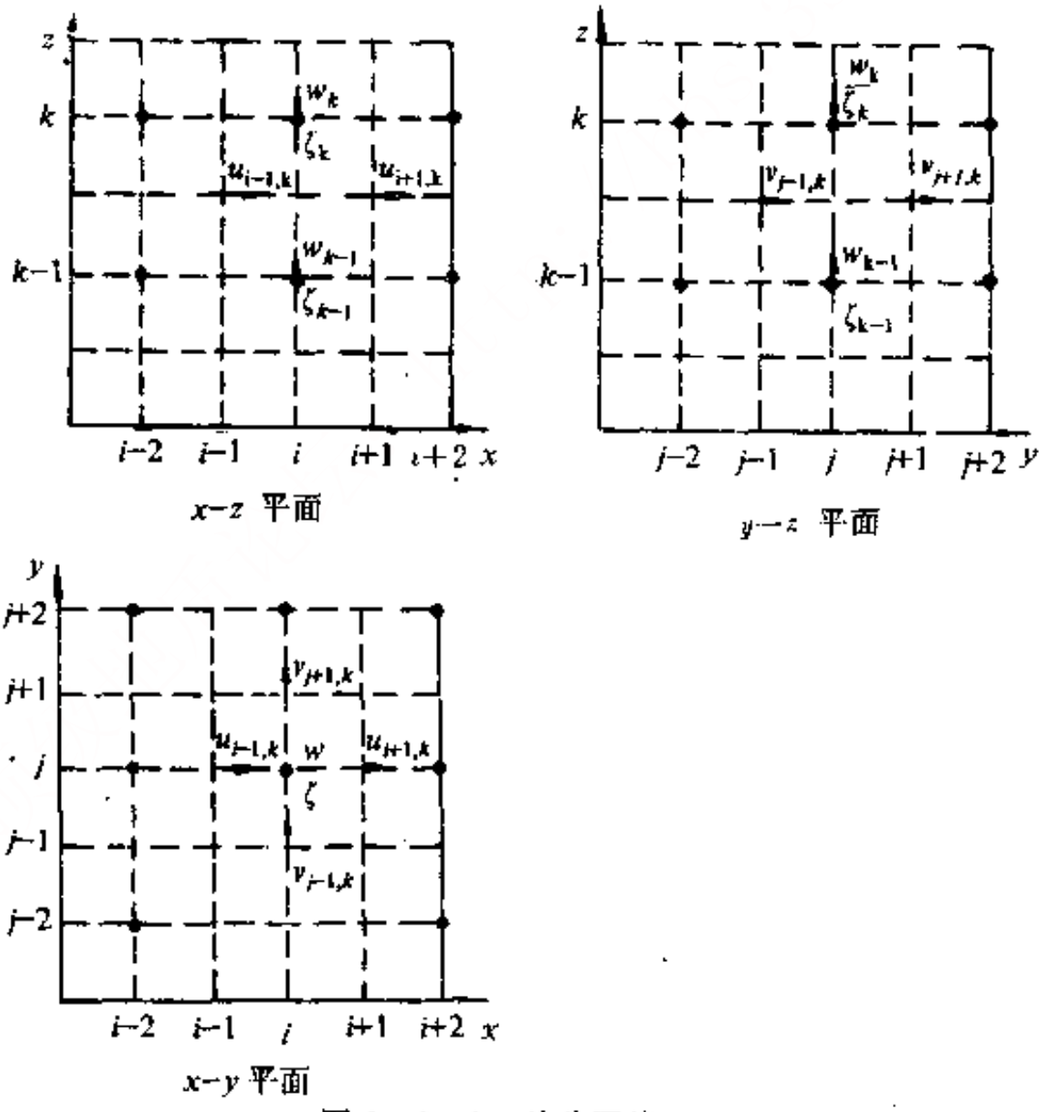


图 6—2—3　差分网格

1. 显式法

由前述基本方程建立差分方程时，时间偏导数采用前差，空间偏导数采用中心差，经整理后，可得下列计算公式：

$$h_{i,j,k}^{n+1}=h_{i,j,k}^{n}-\frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_{i+1,j,k}^{n}h_{i+1,j,k}^{n}-u_{i-1,j,k}^{n}h_{i-1,j,k}^{n})-\frac{\Delta t}{2\Delta y}(v_{i,j+1,k}^{n}h_{i,j+1,k}^{n}-v_{i,j-1,k}^{n}h_{i,j-1,k}^{n})$$

$$W_{i,j,k}^{n+1}=W_{i,j,k-1}^{n+1}-\frac{1}{2\Delta x}(u_{i-1,j,k}^{n}h_{i-1,j,k}^{n}-u_{i-1,j,k}^{n}h_{i-1,j,k}^{n})-\frac{1}{2\Delta y}(v_{i,j+1,k}^{n}h_{i,j+1,k}^{n}-v_{i,j-1,k}^{n}h_{i,j-1,k}^{n})$$

$$\zeta_{i,j,k}^{n+1}=\zeta_{i,j,k}^{n}+\zeta_{i,j,k-1}^{n+1}-\zeta_{i,j,k-1}^{n}-\frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_{i+1,j,k}^{n}h_{i+1,j,k}^{n}-u_{i-1,j,k}^{n}h_{i-1,j,k}^{n})-\frac{\Delta t}{2\Delta y}(v_{i,j+1,k}^{n}h_{i,j+1,k}^{n}-v_{i,j-1,k}^{n}h_{i,j-1,k}^{n})$$

$$u_{i,j,k}^{n+1}=u_{i,j,k}^{n}-\frac{\Delta t}{2\Delta x}[u_{i,j,k}^{n}(u_{i+1,j,k}^{n}-u_{i-1,j,k}^{n})]-\frac{\Delta t}{2\Delta y}[v_{i,j,k}^{n}(u_{i,j+1,k}^{n}-u_{i,j-1,k}^{n})]-\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left[\frac{W_{i,j,k}^{n+1}-W_{i,j,k-1}^{n+1}}{2}(u_{i,j,k+1}^{n}-u_{i,j,k-1}^{n})\right]-\frac{g\Delta t}{2\Delta x}[\zeta_{i+1,j,k}^{n+1}+\zeta_{i+1,j,k-1}^{n+1}-\zeta_{i-1,j,k}^{n+1}-\zeta_{i-1,j,k-1}^{n+1}]+\Delta t f v_{i,j,k}^{n}-\frac{\Delta t}{\rho h_{i,j,k}^{n+1}}(\tau_{x_{i,j,k-1}}-\tau_{x_{i,j,k}})+A_{x}\Delta t(\Delta u)_{i,j,k}$$

$$v_{i,j,k}^{n+1}=v_{i,j,k}^{n}-\frac{\Delta t}{2\Delta x}[u_{i,j,k}^{n+1}(v_{i+1,j,k}^{n}-v_{i-1,j,k}^{n})]$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\Delta t}{2\Delta y}\left[v_{i,j,k}^{n}\left(v_{i,j+1,k}^{n}-v_{i,j-1,k}^{n}\right)\right]\\
&-\frac{\Delta t}{2\Delta z}\left[\frac{W_{i,j,k}^{n}+W_{i,j,k-1}^{n}}{2}\left(v_{i,j,k+1}^{n}\right.\right.\\
&\left.\left.-v_{i,j,k-1}^{n}\right)-\frac{g\Delta t}{2\Delta y}\left(\zeta_{i,j+1,k}^{n+1}-\zeta_{i,j-1,k}^{n+1}\right.\right.\\
&\left.\left.\zeta_{i,j+1,k}^{n+1}-\zeta_{i,j-1,k}^{n+1}\right)\right]=\Delta t\cdot f\cdot u_{i,j,k}^{n}\\
&-\frac{\Delta t}{\rho H_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}}}\left(\tau_{xz_{i,j,k-1}}-\tau_{xz_{i,j,k}}\right)+\Delta t A_{h}(\Delta v)_{i,j,k}^{n}
\end{aligned}
$$

2. MADI 法

ADI 法兼备显示和隐式的优点，因而在工程界中广为采用。本研究在三维数模中也采用 ADI 法，但由于这种方法的水位及流速在计算网格结点上是间隔布置，因而不能充分利用计算机的内存单元。为此，我们将水位及流速值布置在同一网格结点上，并吸收 ADI 法的特点，建立了 MADI 法。（参见第五章 5.2.2 节）

在任一 h_k 层中，对基本方程进行差分离散，时间导数采用前差，空间导数采用中心差，当时间从 $n\Delta t\rightarrow\left(n+\frac{1}{2}\right)\Delta t$ 时，由(6—2—4)式和(6—2—7a)式建立差分方程，并经整理后，可得方程组（用矩阵表示）

$$
\begin{bmatrix}
\ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\
\ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & 0 & \\
\ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\
A & 0 & 0 & B & C & & & \\
 & A & B & 0 & 0 & C & & \\
 & & A_{-1} & 0 & 0 & B_{-1} & C_{-1} & \\
 & & & A_{-1} & B_{-1} & 0 & 0 & C_{-1} \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\
 & 0 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\
 & & & & & \ddots & \ddots & \ddots
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\vdots \\ \zeta_{i-1} \\ u_{i-1} \\ \zeta_{i} \\ u_{i} \\ \zeta_{i+1} \\ u_{i+1} \\ \zeta_{i+2} \\ u_{i+2} \\ \vdots
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ D_{i} \\ D_{i} \\ D_{i+1} \\ D_{i+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots
\end{bmatrix}
$$

这里系数为五条带对角矩阵的方程，主对角线元素为零。该矩阵可分解为下列两个较简单的三对角矩阵系数方程：

$$\begin{bmatrix} \ddots & \ddots & & & & \\ & \ddots & \ddots & & 0 & \\ & A & B & C & & \\ & & A_{i-1} & B_{i-1} & C_{i-1} & \\ & 0 & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \zeta_{i-1} \\ u_i \\ \zeta_{i-1} \\ u_{i-2} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ D \\ D_{i-1} \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

和

$$\begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & A & B & C & & 0 \\ & & A_{i+1} & B_{i+1} & C_{i+1} & \\ & 0 & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i-1} \\ \zeta_i \\ u_{i+1} \\ \zeta_{i+1} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ D \\ D_{i+1} \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

对于此三对角矩阵，可以很方便地用追赶法求解，从而得出 $(\zeta, u)^{n+\frac{1}{2}}_{i,j,k}$。

方程组中的各系数为

$$A = -\frac{g\Delta t}{4\Delta x}$$

$$B = 1 + \frac{\Delta t}{4\Delta x}(u_{i+1,j,k} - u_{i-1,j,k}) + \frac{\Delta t \cdot g}{2C^2_{i,j,k}h_{i,j,k}}\sqrt{u^2_{i,j,k} + v^2_{i,j,k}}$$

$$C = \frac{g\Delta t}{4\Delta x}$$

$$D = u_{i,j,k} - \frac{\Delta t v_{i,j,k}}{4\Delta y}(u_{i,j+1,k} - u_{i,j-1,k}) - \frac{\Delta t}{4\Delta h_k}(W_{i,j,k} + W_{i,j-1,k})(u_{i,j,k+1} - u_{i,j,k-1}) + \frac{\Delta t}{2} f v_{i,j,k} + \frac{\Delta t}{2\Delta x^2}(u_{i+1,j,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i-1,j,k})$$

$$A = -\frac{\Delta t h_{i-1,j,k}}{4\Delta x}$$

$$B_i = 1$$

$$C_i = \frac{\Delta t h_{i+1,j,k}}{4\Delta x}$$

$$D_i = \zeta_{i,j,k} - \frac{\Delta t}{4\Delta y}[v_{i,j+1,k}h_{i,j+1,k} - v_{i,j-1,k}h_{i,j-1,k}] + \zeta_{k-1}^{n+\frac{1}{2}} - \zeta_{k-1}^{n}$$

由方程求出$\{\zeta, u\}_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}}$后，代入(6—2—7b)式，便可求出$V_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}}$。为了增加稳定性，在显示求解$V_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}}$时采用如下迎风格式：

$$v_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} = \left\{ v_{i,j,k}^{n} - \Delta t \left\{ \frac{u_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta x}((1-E_u)(v_{i+1,j,k}^{n} - v_{i,j,k}^{n}) + (1+E_u)(v_{i,j,k}^{n} - v_{i-1,j,k}^{n})) + (W_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + W_{i,j,k-1}^{n+\frac{1}{2}})(v_{i,j,k}^{n} - v_{i,j,k-1}^{n})/\Delta h_k + f u_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + g\frac{\zeta_{i,j+1,k}^{n} - \zeta_{i,j-1,k}^{n}}{2\Delta y} \right\} \right/ \left\{ 1 + \frac{\Delta t}{\Delta y}[(1-kv)(v_{i,j+1,k}^{n} - v_{i,j,k}^{n}) + (1+kv)(v_{i,j,k}^{n} - v_{i,j-1,k}^{n}) + g \cdot v_{i,j,k}\frac{\sqrt{u_{i,j,k}^{2} + v_{i,j,k}^{2}}}{C_{i,j,k}^{2}h_{i,j,k}^{2}}] \right\}$$

式中

$$E_u = \mathrm{sign}(u)$$

$$K_v = \mathrm{sign}(v)$$

当时间由$\left(n+\frac{1}{2}\right)\Delta t \rightarrow (n+1)\Delta t$时，可按上述同样原理先联立(6—2—4)式和(6—2—7b)式后建立差分方程组，得出二个三对角矩阵，求出$(\zeta, v)_{i,j,k}^{n+1}$，然后由(6—2—7a)方程中建立差分方程并由显式求出$u_{i,j,k}^{n+1}$。

由上可知，当$\left(n+\frac{1}{2}\right) \longrightarrow (n+1)$时，求解差分方程，与$n \rightarrow n+\frac{1}{2}$几乎完全一样，只要在各方程中进行$x \leftrightarrows y$、$i \leftrightarrows j$、$u \leftrightarrows v$代换即可。

按照上述方法，随时间步长逐步进行，直到求出全部时间过程中的(ζ, u, v)为止。

3. 导数加权法

在二维潮流数值模拟计算中，矩形差分网格用得最为广泛，这种网格具有计算简单的优点，但在模拟复杂边界时，必须将曲线边界概化成梯级状，因而影响了计算精度。为了克服这个缺点，在此提出一种"导数加权法"。该法所采用的网格是在计算域中部仍为矩形网格，但在边界外，则按边界形状采用不同的多边形来逼近边界。图6—2—4为该模型的示意图。

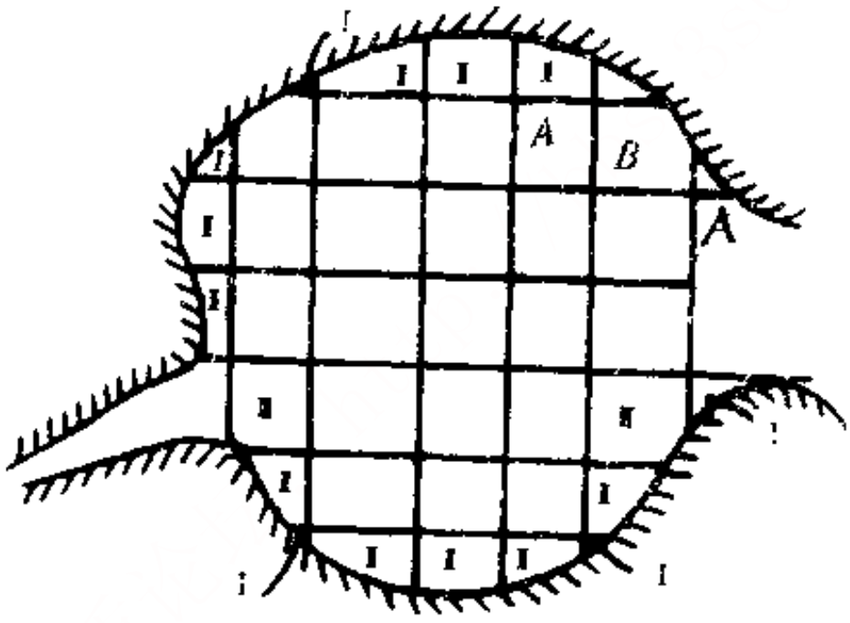


图6—2—4 网格图

从图(6—2—4)中可知，在计算域中部，差分网格全为矩形；在边界附近，多边形网格虽有各种形状，但归纳起来也只有三种，即三角形Ⅰ、四边形Ⅱ及五边形Ⅲ，因此，问题就归纳为如何求出以上几种形状的导数表达式。

考虑某一任意三角形网格，三顶点的坐标分别为(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3)，某一函数f在三顶点之值分别为$f_1(x_1, y_1)$，$f_2(x_2, y_2)$，$f_3(x_3, y_3)$，如图6—2—5所示。

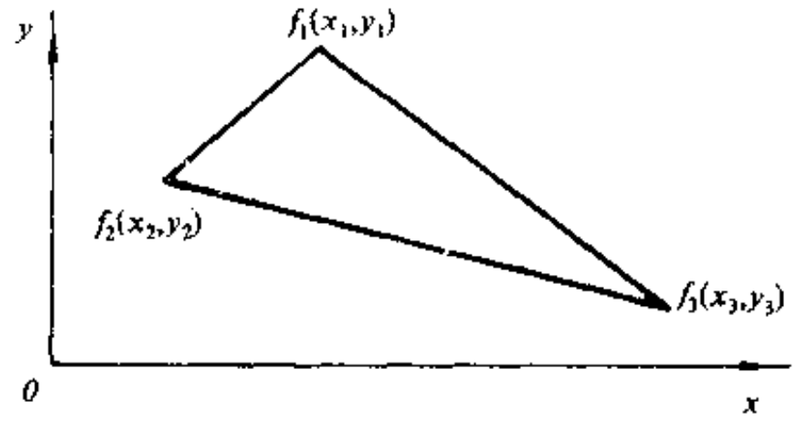


图 6－2－5　三角形单元图

设 f_i 之间为线性变化，则在三角形内 f_i 对 x 或 y 的偏导数分别有如下的表达式

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{f_1(y_2-y_3)+f_2(y_3-y_1)+f_3(y_1-y_2)}{\Delta/2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{f_1(x_2-x_3)+f_2(x_3-x_1)+f_3(x_1-x_2)}{\Delta/2}$$

上式中

$$\Delta/2=\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{vmatrix}$$

$$=x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)$$

对于多个三角形顶点重合而连接的多边形，其公共点的偏导数可由各分三角形偏导数加权而得（图 6－2－6）。

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_A=\sum_{n=1}^{m}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_n\cdot\alpha_n\right)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_A=\sum_{n=1}^{m}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_n\cdot\alpha_n\right)$$

式中　m ——三角形数；

α_n —— 加权系数。

加权系数

$$\alpha_n=\Delta_n/A$$

式中，Δ_n 为各小三角形面积；A 为各小三角形的总面积。

在图 6－2－6 中，共有 4 个三角形顶点重合在多边形中间的

A点处。

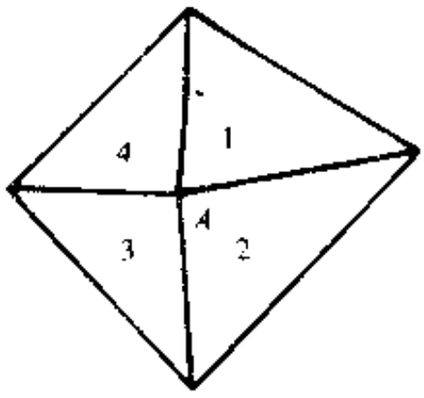


图6－2－6　三角形顶点重合的多边形

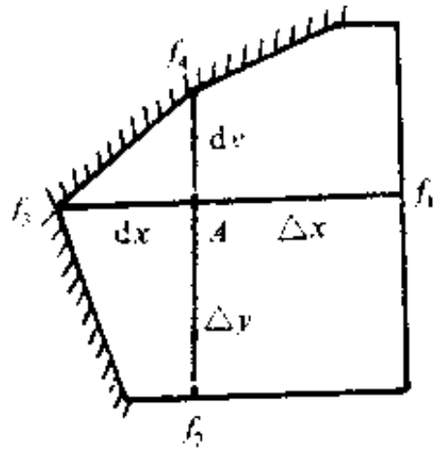


图6－2－7　边界附近角点A

根据上述原理，可导出下述各种形状角点的差分表达式。

(a)情况一　边界附近(图6－2－7)

$$\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)_A \approx \frac{f_4 - f_5}{\Delta x + \mathrm{d}x}$$

$$\left(\frac{\Delta f}{\Delta y}\right)_A = \frac{f_4 - f_2}{\Delta y + \mathrm{d}y}$$

(b)情况二　边界附近(图6－2－8)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_B = \frac{(f_8 + 2f_7 + f_6) - (f_1 + 2f_5 + f_4)}{4\Delta x + \mathrm{d}x_1 + 2\mathrm{d}x_2 + \mathrm{d}x_3}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_B = \frac{f_7 - f_5}{2\Delta y}$$

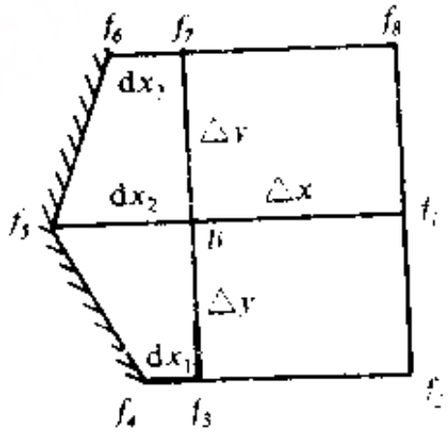


图6－2－8　边界附近角点B

(c)情况三　计算域内

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i,j}=\frac{(f_{i+1,j-1}+2f_{i+1,j}+f_{i+1,j+1})-(f_{i-1,j-1}+2f_{i-1,j}+f_{i-1,j+1})}{8\Delta x}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{i,j}=\frac{(f_{i-1,j+1}+2f_{i,j+1}+f_{i+1,j+1})-(f_{i-1,j-1}+2f_{i,j-1}+f_{i+1,j-1})}{8\Delta y}$$

有了上述偏导数的差分加权表达式后，即可代入潮流基本方程中建立方程，再整理成代数方程组进行求解。

6.3 破开算子法

一、基本原理

破开算子法是目前广为流行的一种数值计算方法。早在50年代末，Yanenko就提出了这种方法。后来，随着该理论的逐步完善，特别是电子计算机计算技术日益发展，破开算子法才获得了广泛应用。

有关破开算子法的基本原理已在5.2.3.1节作了叙述，在此仅作部分重复，以满足三维水动力数值模拟进行破开算法时之需。

设有如下基本微分方程：

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\varphi_1(t,f)+\varphi_2(t,f)\cdots\cdots+\varphi_n(t,f) \qquad (6-3-1)$$

式中 $\phi_1,\phi_2\cdots\cdots$——连续函数，其原函数分别为 $\Phi_1,\Phi_2\cdots\Phi_m$，则(6-3-1)式的解为

$$f(t)=f(t_0)+\Phi_1(t)+\Phi_2(t)+\cdots+\Phi_m(t)-[\Phi_1(t_0)+\Phi_2(t_0)+\Phi_m(t_0)]$$

设 $$f(t)=f_1(t)+f_2(t)+\cdots+f_m(t) \qquad (6-3-2)$$

令 $$f_i(t)=\alpha_i f(t) \quad (i=1,2,\cdots m) \qquad (6-3-3)$$

系数 $$\alpha_i=\Phi_i(t_0)/\sum_{i=1}^{m}\Phi_i(t_0) \qquad (6-3-4)$$

显然，由(6-3-4)式可知

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=1$$

如果 $f_i(t)$ 满足

$$\frac{\partial f_i(t)}{\partial t}=\varphi_i(t,f) \qquad (i=1,2,\cdots m) \qquad (6-3-5)$$

由(6-3-3)式及(6-3-5)式得

$$\alpha_i=\frac{\partial f(t)}{\partial t}=\phi_i(t,f) \qquad (i=1,2,\cdots m) \qquad (6-3-6)$$

则由(6-3-5)式可求得 $f_i(t)$ 的解为

$$f_i(t)=f_i(t_0)+\phi_i(t)-\phi(t_0) \qquad (i=1,2\cdots m) \qquad (6-3-7)$$

将(6-3-7)式累加后得

$$\sum_{i=1}^{m}f_i(t)=\sum_{i=1}^{m}f_i(t_0)+\sum_{i=1}^{m}\phi_i(t)-\sum_{i=1}^{m}\phi_i(t_0) \qquad (6-3-8)$$

根据(6-3-2)式关系，则(6-3-8)式之左端为 $f(t)$，右端第一项为 $f(t_0)$，故此，(6-3-8)式与(6-3-1)式全同。由此可知，利用(6-3-5)式方程组求解，可得出与(6-3-1)式完全相同的解答，这就是破开算子法的基本思想。在实际工作中，通常用(6-3-6)式比用(6-3-5)式更方便些。由(6-3-6)式可写成另一种微分方程组的形式

$$\frac{\partial f(t)}{\partial t}=\frac{1}{\alpha_i}\phi_i(t,f) \qquad (i=1,2\cdots m) \qquad (6-3-9)$$

由(6-3-9)式可求得解为

$$f(t)=f(t_0)+\frac{1}{\alpha_i}[\phi_i(t)-\phi_i(t_0)] \qquad (i=1,2\cdots m)$$

由此得

$$f(t)=\alpha_i f_i(t) \qquad (i=1,2\cdots m)$$

最后求得解为

$$f(t)=\sum_{i=1}^{m}f_i(t)$$

下面进一步考虑微分方程离散后的情况。为简单起见，只分析显式差分。

设微分方程为

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\sum_{i=1}^{m}D_i f \qquad (i=1,2\cdots m) \qquad (6-3-10)$$

式中，D_i 为微分算子，可写成差分形式

$$\frac{f_i^{n+1}-f_i^n}{\Delta t}=\sum_{j=1}^{m}\lambda_{ij}f_j^n \qquad (i=1,2\cdots m) \qquad (6-3-11)$$

式中 λ_{ij} 为差分算子；右上角标表示时瞬。由(6-3-11)可知，

$$f_i^{n+1}=f_i^n+\Delta t\sum_{j=1}^{m}\lambda_{ij}f_j^n \qquad (6-3-12)$$

采用破开算子法所得的微分方程组(6-3-1)式写成差分形式以作比较。由(6-3-9)式可将(6-3-10)式写成

$$\frac{\partial f_i}{\partial t}=\frac{1}{\alpha_i}\mathrm{D}_i f \qquad (i=1,2\cdots m) \qquad (6-3-13)$$

式中，系数 α_i 由下式确定

$$\alpha_i=\lambda_{ii}f_i^n+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}\lambda_{ij}f_j^n$$

将(6-3-13)式写成差分形式

$$\frac{f_i^{n+1}-f_i^n}{\Delta t}=\frac{1}{\alpha_i}\lambda_{ij}f_j^n \qquad (i=1,2\cdots m) \qquad (6-3-14)$$

由此可得

$$f_i^{n+1}=f_i^n-\frac{\Delta t}{\alpha_i}\lambda_{ij}f_j^n \qquad (i=1,2\cdots m) \qquad (6-3-15)$$

进而得

$$f_i^{n+1}=\alpha_i f_i^n+\Delta t\lambda_{ij}f_j^n \qquad (i=1,2\cdots m) \qquad (6-3-16)$$

累加(6-3-14)式～(6-3-16)式中各值后可得

$$\sum_{i=1}^{m}f_i^{n+1}=f_i^n\sum_{i=1}^{m}\alpha_i+\Delta t\sum_{i=1}^{m}\lambda_{ij}f_j^n$$

即得

$$f_i^{n+1}=f_i^n+\Delta t\sum_{j=1}^{m}\lambda_{ij}f_j^n \qquad (6-3-17)$$

(6-3-17)式为破开算子后的差分方程的解，它与原微分方程解(6-3-12)完全一致。

以上是用显式差分求得的结果，如用隐式差分也能证得同样的结果。由此可知，利用本节所介绍的破开算子法来分裂微分方程，所得的微分方程组将与原方程等价，其差分方程也是等价的。

二、微分方程的破开表示

将流体基本方程(6—2—7a)、(6—2—7b)及(6—2—4)破开并重新组合成三组，新的三组方程为

第一组

$$\frac{\partial u_k}{\partial t}=\alpha_1\left(-u_k\frac{\partial u_k}{\partial x}-\frac{1}{\rho h_k}(\tau_{x_{k-1}}-\tau_{x_k})+A_x\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}\right) \quad (6-3-18a)$$

$$\frac{\partial v_k}{\partial t}=\beta_1\left(-v_k\frac{\partial v_k}{\partial y}-\frac{1}{\rho h_k}(\tau_{y_{k-1}}-\tau_{y_k})+A_y\frac{\partial^2 v_k}{\partial y^2}\right) \quad (6-3-19a)$$

$$\frac{\partial \zeta_k}{\partial t}=\frac{\partial \zeta_{k-1}}{\partial t} \quad (6-3-20a)$$

第二组

$$\frac{\partial u_k}{\partial t}=\alpha_2\left(-g\frac{\partial \zeta_k}{\partial x}-g\frac{\partial \zeta_{k-1}}{\partial x}\right) \quad (6-3-18b)$$

$$\frac{\partial v_k}{\partial t}=\beta_2\left(-u_k\frac{\partial v_k}{\partial x}-w_k\frac{\partial v_k}{\partial z}-fu_k+A_x\frac{\partial^2 v_k}{\partial x^2}+A_z\frac{\partial^2 v_k}{\partial z^2}\right)$$

(6—3—19b)

$$\frac{\partial \zeta_k}{\partial t}=\gamma_2\left(-\frac{\partial}{\partial x}(u_k h_k)\right) \quad (6-3-20b)$$

第三组

$$\frac{\partial u_k}{\partial t}=\alpha_3\left(-v_k\frac{\partial u_k}{\partial y}-w_k\frac{\partial u_k}{\partial z}+fv_k+A_y\frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2}+A_z\frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2}\right)$$

(6—3—18c)

$$\frac{\partial v_k}{\partial t}=\beta_3\left(-g\frac{\partial \zeta_k}{\partial y}-g\frac{\partial \zeta_{k-1}}{\partial y}\right) \quad (6-3-19c)$$

$$\frac{\partial \zeta_k}{\partial t}=\gamma_3\left(-\frac{\partial}{\partial y}(v_k h_k)\right) \quad (6-3-20c)$$

式中

$$\alpha_1=\left(u_k\frac{\partial u_k}{\partial x}+\frac{1}{\rho h_k}(\tau_{x_k}-\tau_{x_{k-1}})-A_x\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}\right)/A;$$

$$\alpha_2=\left(g\left(\frac{\partial \zeta_k}{\partial x}+\frac{\partial \zeta_{k-1}}{\partial x}\right)\right)/A;$$

$$\alpha_3=\left(v_k\frac{\partial u_k}{\partial y}+w_k\frac{\partial u_k}{\partial z}-fv_k-A_y\frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2}-A_z\frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2}\right)/A;$$

$$A=\left(u_k\frac{\partial u_k}{\partial x}+v_k\frac{\partial u_k}{\partial y}+w_k\frac{\partial u_k}{\partial z}-fv_k+g\frac{\partial}{\partial x}(\zeta_k+\zeta_{k-1})\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\rho h_k}(\tau_{x_{k-1}}-\tau_{x_k})-A_x\Delta u_k\right.;$$

$$\beta_1=\left\{\frac{\partial u_k}{\partial x}+\frac{1}{\rho h_k}(\tau_{x_{k-1}}-\tau_{x_k})-A_h\frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2}\right\}/B_k$$

$$\beta_2=\left\{g\frac{\partial \zeta_k}{\partial y}+\frac{\partial \zeta_{k-1}}{\partial x}\right\}/B_k$$

$$\beta_3=\left\{u_k\frac{\partial v_k}{\partial x}+w_k\frac{\partial v_k}{\partial z}+fu_k-A_h\frac{\partial^2 v_k}{\partial x^2}-A_h\frac{\partial^2 v_k}{\partial z^2}\right\}/B_k$$

$$B=\left\{u_k\frac{\partial v_k}{\partial x}+v_k\frac{\partial v_k}{\partial y}+w_k\frac{\partial v_k}{\partial z}+fu_k+g\frac{\partial}{\partial y}(\zeta_k+\zeta_{k-1}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\rho h_k}(\tau_{y_{k-1}}-\tau_{y_k})+A_h\Delta v_k\right\}$$

$$\gamma=\left\{\frac{\partial \zeta_{k-1}}{\partial t}\right\}/C;$$

$$\gamma_1=\left\{\frac{\partial}{\partial x}(u_k h_k)\right\}/C;$$

$$\gamma_2=\left\{\frac{\partial}{\partial y}(v_k h_k)\right\}/C;$$

$$C=\frac{\partial \zeta_{k-1}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(u_k h_k)+\frac{\partial}{\partial y}(v_k h_k).$$

方程(6—3—18a)和(6—3—19a)为拟线性抛物线型方程，其隐式差分方程为非线性方程，一般选用迭代求解。为使计算简单，可采用预测—校正方法。现已证明，该法的差分方程当$\Delta x\to 0$和$\Delta t\to 0$时一致收敛于原微分方程，其逼近误差为$O(\Delta t^2+\Delta x^2)$。

对于(6—3—18a)式预测公式为

$$\frac{u_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}-u_{i-\frac{1}{2},j}^{n}}{\Delta t}=\alpha_1\left\{-u_{i-\frac{1}{2},j}^{n}\frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^{n}-u_{i-\frac{3}{2},j}^{n}}{2\Delta x}\right.$$

$$\left.-\frac{2(\tau_{x_{i-\frac{1}{2},k-1}}^{n}-\tau_{x_{i-\frac{1}{2},k}}^{n})}{\rho(h_{i-\frac{1}{2},j}+h_{i-\frac{1}{2},j-1})}+A_h\frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}-2u_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}+u_{i-\frac{3}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}}{(2\Delta x)^2}\right\}$$

上式经整理后为

$$A_1u_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}+B_1u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}+C_1u_{i-\frac{3}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}=D_1 \qquad (6-3-21)$$

式中

$$A_1=-\alpha_1A_h\Delta t/4/(\Delta x)^2;$$

$$B_1 = -1 + \alpha_1 A_x \Delta t/2/(\Delta x)^2;$$

$$C_1 = -\alpha_1 A_x \Delta t/4/(\Delta x)^2;$$

$$D_1 = u^n_{i+\frac{1}{2},j} - \frac{\alpha_1 \Delta t}{4\Delta x} u^n_{i+\frac{1}{2},j}\left(u^n_{i+\frac{3}{2},j} - u^n_{i-\frac{1}{2},j}\right) - \frac{2\alpha_1 \Delta t}{\rho(h^n_{i,j} + h^n_{i+1,j})}\left(\tau^n_{x_{i,j,k-1}} - \tau^n_{x_{i,j,k}}\right)$$

校正公式为

$$\frac{u^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j} - u^n_{i+\frac{1}{2},j}}{\Delta t} = \alpha_1\left[-u^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j} \cdot \frac{u^n_{i+\frac{3}{2},j} + u^{n+1}_{i+\frac{3}{2},j} - u^n_{i-\frac{1}{2},j} - u^{n+1}_{i-\frac{1}{2},j}}{4\Delta x} - \frac{2\left(\tau^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j,k-1} - \tau^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j,k}\right)}{\rho(h^n_{i+1,j} + h^n_{i,j})} + \frac{A_x}{4(\Delta x)^2}\left(u^{n+1}_{i+\frac{3}{2},j} - 2u^{n+1}_{i,j} + u^n_{i+\frac{3}{2},j} - 2^n_{i,j} + u^n_{i-\frac{1}{2},j}\right)\right.$$

上式整理后为

$$A_2 u^{n+1}_{i-\frac{1}{2},j} + B_2 u^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j} + C_2 u^{n+1}_{i+\frac{3}{2},j} = D_2 \qquad (6-3-22)$$

式中

$$A_2 = -\frac{\alpha_1 \Delta t}{4\Delta x}\left(u^{n+\frac{1}{2}}_{i-\frac{1}{2},k} + \frac{A_x}{\Delta x}\right);$$

$$B_2 = 1 + \frac{\alpha_1 A_x \Delta t}{4(\Delta x)^2};$$

$$C_2 = -\frac{\alpha_1 \Delta t}{4\Delta x}\left(u^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j} - \frac{A_x}{\Delta x}\right);$$

$$D_2 = u^n_{i+\frac{1}{2},j} - \alpha_1 \Delta t u^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j} \frac{u^n_{i+\frac{3}{2},j} - u^n_{i-\frac{1}{2},j}}{4\Delta x} - \frac{2\Delta t\left(\tau^{n+\frac{1}{2}}_{x_{i+\frac{1}{2},j,k-1}} - \tau^{n+\frac{1}{2}}_{x_{i+\frac{1}{2},j,k}}\right)\alpha_1}{\rho(h^n_{i+1,j} + h^n_{i,j})}$$

(6—3—21)和(6—3—22)两个方程在形式上是一样的，其方

程组为三对角矩阵，因此，求解(6—3—18a)即归结为求解三对角矩阵，可采用一般的追赶法求解。

同理，(6—3—19a)的预测和校正公式为：

预测公式

$$A_3 v_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + B_3 v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + C_3 v_{i,j+\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = D_3 \qquad (6-3-23)$$

式中

$$A_3 = -\beta_1 A_y \Delta t / 4 / (\Delta y)^2;$$

$$B_3 = 1 + \beta_1 A_y \Delta t / 2 / (\Delta y)^2;$$

$$C_3 = -\beta_1 A_y \Delta t / 4 / (\Delta y)^2;$$

$$D_3 = v_{i,j+\frac{1}{2}}^n - \frac{\beta_1 \Delta t}{4\Delta y} v_{i,j+\frac{1}{2}}^n \left(v_{i,j+\frac{3}{2}}^n - v_{i,j-\frac{1}{2}}^n \right) - \frac{2\beta_1 \Delta t}{\rho(h_{i,j}^n + h_{i,j+1}^n)} \cdot \left(\tau_{y_{i,j+1}}^n - \tau_{y_{i,j,k}}^n \right)$$

校正公式

$$A_4 v_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} + B_4 v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} + C_4 v_{i,j+\frac{3}{2}}^{n+1} = D_4 \qquad (6-3-24)$$

式中

$$A_4 = -\frac{\beta_1 \Delta t}{4\Delta y} \left(v_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{A_y}{\Delta y} \right)$$

$$B_4 = 1 + \frac{\beta_1 A_y \Delta t}{4(\Delta y)^2}$$

$$C_4 = \frac{\beta_1 \Delta y}{4\Delta y} \left(v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{A_y}{\Delta y} \right)$$

$$D_4 = v_{i,j+\frac{1}{2}}^n - \frac{\beta_1 \Delta t}{4\Delta y} v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \left(v_{i,j+\frac{3}{2}}^n - v_{i,j-\frac{1}{2}}^n \right) - \frac{2\beta_1 \Delta t}{\rho(h_{i,j}^n + h_{i,j+1}^n)} \left(\tau_{y_{i,j+\frac{1}{2},k-1}}^{n+\frac{1}{2}} - \tau_{y_{i,j+\frac{1}{2},k}}^{n+\frac{1}{2}} \right)$$

(6—3—23)和(6—3—24)式同样也是三对角矩阵方程，可用追赶法求解。

第二组

在该方程组中先联立(6—3—18b)和(6—3—20b)，写成差分方程的形式

$$\frac{u^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j}-u^{n}_{i+\frac{1}{2},j}}{\Delta t}=-\alpha_2 g\frac{\zeta^{n+1}_{i+1,j,k}-\zeta^{n+1}_{i,j,k}}{\Delta x}-$$

$$-\alpha_2 g\frac{\zeta^{n+1}_{i+1,j,k-1}-\zeta^{n+1}_{i,j,k-1}}{\Delta x}$$

$$\frac{\zeta^{n+1}_{i,j,k}-\zeta^{n}_{i,j,k}}{\Delta t}=\frac{\zeta^{n+1}_{i,j,k-1}-\zeta^{n}_{i,j,k-1}}{\Delta t}$$

$$=-\frac{\gamma_2}{2\Delta x}\left[u^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j}(h^{n}_{i+1,j}+h^{n}_{i,j})-u^{n+1}_{i-\frac{1}{2},j}(h^{n}_{i,j}+h^{n}_{i-1,j})\right]$$

上二式经整理后为

$$-E_1\zeta^{n+1}_{i,j}+u^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j}+E_2\zeta^{n+1}_{i+1,j}=E_3$$

$$-F_1u^{n+1}_{i-\frac{1}{2},j}+\zeta^{n+1}_{i,j}+F_2u^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j}=F_3$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} & \ddots & \ddots & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & & \\ -F_1 & 1 & F_2 & & \\ & -E_1 & 1 & E_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vdots \\ u_{i-\frac{1}{2},j} \\ \zeta_{i,j} \\ u_{i+\frac{1}{2},j} \\ \zeta_{i+1,j} \\ \vdots \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ F_3 \\ E_3 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{6—3—25}$$

式中

$$E_1=\frac{\alpha_2 g\Delta t}{\Delta x};$$

$$E_2=E_1;$$

$$E_3=u^{n}_{i+\frac{1}{2},j}-\frac{\alpha_2 g\Delta t}{\Delta x}(\zeta^{n+1}_{i+1,j,k-1}-\zeta^{n+1}_{i,j,k-1});$$

$$F_1=\frac{\gamma_2\Delta t}{2\Delta x}(h^{n}_{i,j}+h^{n}_{i-1,j});$$

$$F_2=\frac{\gamma_2\Delta t}{2\Delta x}(h^{n}_{i+1,j}+h^{n}_{i,j});$$

$$F_3=\zeta^{n}_{i,j,k}+\zeta^{n+1}_{i,j,k-1}-\zeta^{n}_{i,j,k-1}$$

上式也是三对角矩阵，求出 ζ^{n+1} 和 u^{n+1} 后代入第二组的(6—3—19c)式即可求得 v^{n+1}。

第三组与第二组相类似，只需 $X \leftrightarrows y$ 和 $u \leftrightarrows v$，先联立(6—3—19b)，(6—3—20c)，得出与(6—3—25)相类似的矩阵方程，求出 (ζ^{n+1}, v^{n+1}) 后，代入(6—3—18c)即可求得 u^{n+1}。

6.3.4 求解差分方程的流程

对于上述原理，在具体求解时，有两种流程。

1. 第一种流程

(1)自上而下，求出 W_k。

(2)求出 h_k。

(3)由(6—3—21)和(6—3—22)求出 u^{n+1} 和 u_1^{n+1}，

$$u_1^{n+1} = \alpha_1 u^{n+1}。$$

(4)由(6—3—23)式和(6—3—24)式求出 v^{n+1} 和 v_1^{n+1}，

$$v_1^{n+1} = \beta_1 v^{n+1}。$$

(5)由(6—3—25)求出 ζ^{n+1}、u^{n+1} 和 u_2^{n+2}、ζ_2^{n+1}，

$$u_2^{n+1} = \alpha_2 u^{n+1}, \zeta_2^{n+1} = \gamma_2 \zeta^{n+1}$$

(6)将上式结果代入(6—3—20c)式求得 v^{n+1}，由此得，

$$v_2^{n+1} = \beta_2 v^{n+1}$$

(7)由(6—3—19c)式和(6—3—20c)式联立，得出与(6—3—25)式相似的三对角矩阵，求出 ζ^{n+1} 和 v^{n+1}，并同此得出

$$\zeta_3^{n+1} = \gamma_3 \zeta^{n+1};$$

$$v_3^{n+1} = \beta_3 v^{n+1}$$

(8)将上述结果代入(6—3—18c)式，求出 u^{n+1}，由此得

$$u_3^{n+1} = \alpha_3 u^{n+1}$$

(9)最后合并求得 ζ^{n+1}、u^{n+1}、v^{n+1}，即：

$$\zeta^{n+1} = \zeta_1^{n+1} + \zeta_2^{n+1} + \zeta_3^{n+1};$$

$$u^{n+1} = u_1^{n+1} + u_2^{n+1} + u_3^{n+1};$$

$$v^{n+1} = v_1^{n+1} + v_2^{n+1} + v_3^{n+1}$$

其流程图如图 6—3—1 所示。

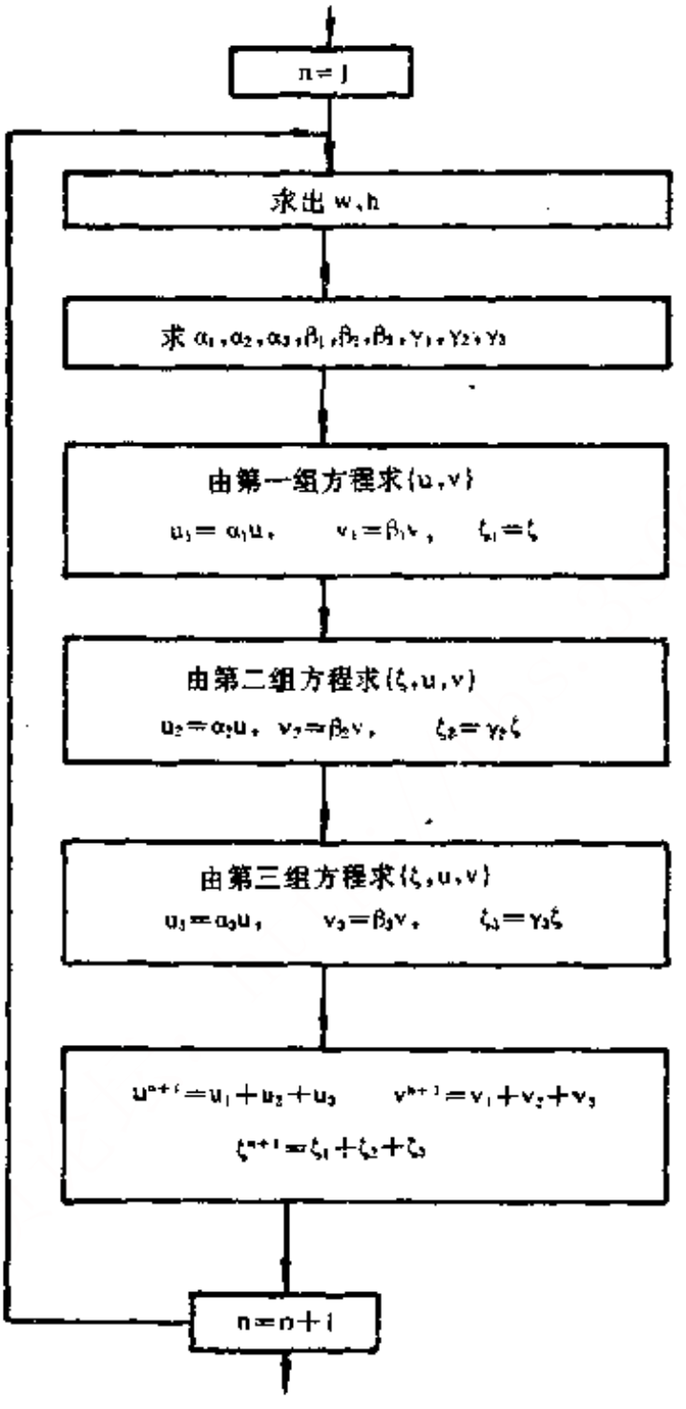


图 6—3—1　计算流程框图(1)

2. 第二种流程

分三大步，每一大步相当于$\frac{\Delta t}{3}$。

第一步，由 $n\Delta t\to\left(n+\frac{1}{3}\right)\Delta t$，在这一步内，先求出 W_k，再求出 h_k，由第一组方程求出$(\zeta,u,v)^{n+\frac{1}{3}}$。

第二步，由 $\left(n+\frac{1}{3}\right)\Delta \rightarrow \left(n+\frac{2}{3}\right)\Delta$，先求出 τ_k，再求出 h_k，由第二组方程组求出 $(\xi,u,v)^{n+\frac{2}{3}}$。

第三步，由 $\left(n+\frac{2}{3}\right)\Delta \rightarrow (n+1)\Delta$，先求出 W_k，再求出 h_k，由第三组方程组求出 $(\xi,u,v)^{n+1}$。

其流程计算如框图 6 -3 -2 所示。

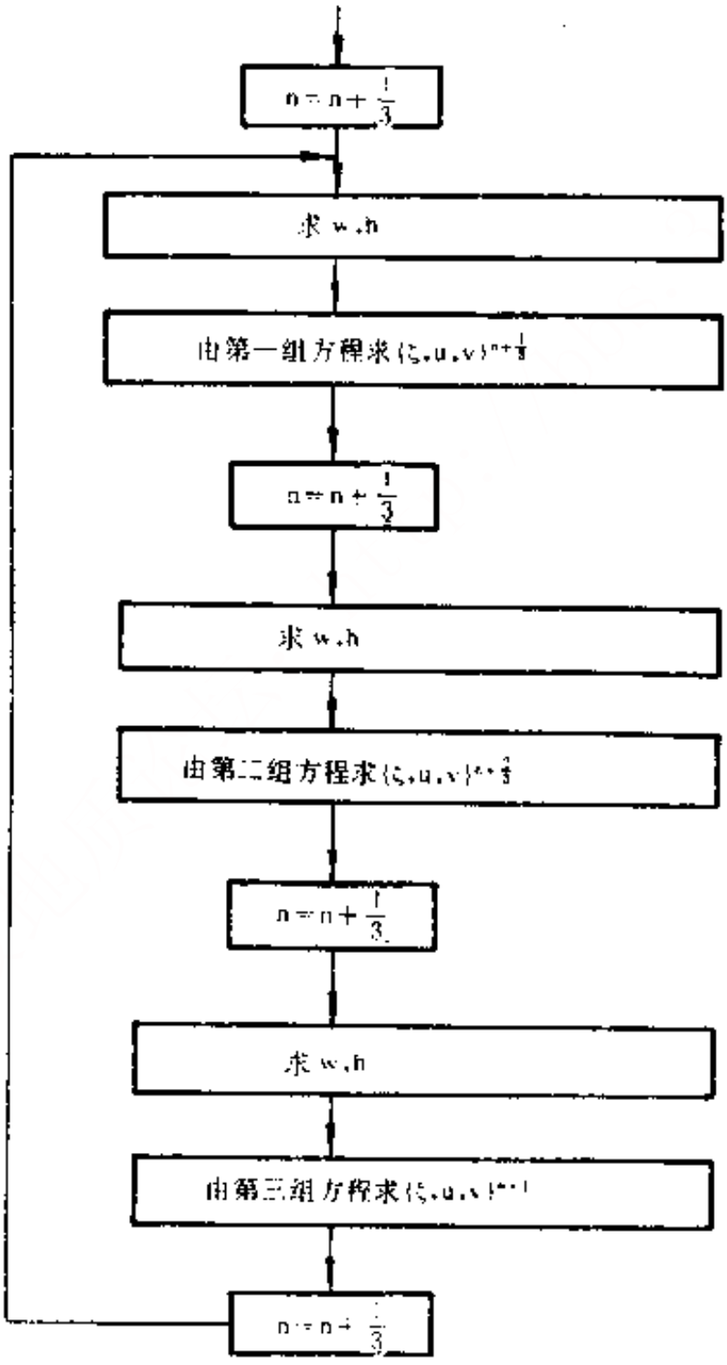


图 6 -3 -2 计算流程框图(2)

6.4 伸缩坐标变换法

本法的主要思想是通过伸缩坐标变换，将不规则边界的三维计算域转换为一个单位立方体，在单位立方体上进行网格剖分，并将原坐标系的方程转移到新坐标系中进行差分离散和计算。

设河口的平面如图 6—4—1 所示，$x=0$ 和 $x=L$ 分别为上、下游的开边界，$y=b(x)$ 和 $y=b(x)+B(x)$ 分别为侧边界，L 为河口的纵向长度，$z=\zeta(x,y,t)$ 为水表面竖向坐标值。

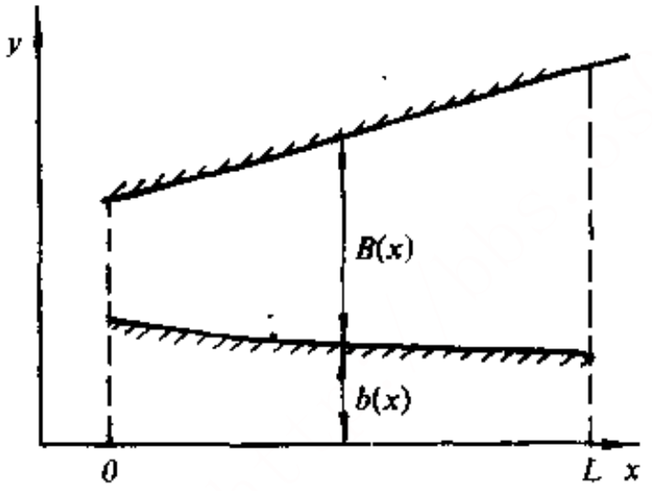


图 6—4—1 河口平面图

采用如下的坐标转换关系式：

$$\chi(x)=x/L;$$

$$\lambda(x,y)=[y-b(x)]/B(x);$$

$$\eta(x,y,z,t)=[\zeta(x,y,t)-z]/H(x,y,t);$$

$$T(t)=t。$$

通过上述变换关系和偏微分运算，可将原坐标系 (x,y,z,t) 的水动力运动基本方程转换成新坐标系 (χ,λ,η,T) 的基本方程

$$\frac{\partial\zeta}{\partial T}+\frac{1}{B}\frac{\partial(BHu)}{\partial\chi}+\frac{\partial(Hv)}{\partial\lambda}+\frac{\partial(H\omega)}{\partial\eta}=0 \qquad (6-4-1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial T}+u\frac{\partial u}{\partial\chi}+v\frac{\partial u}{\partial\lambda}+\omega\frac{\partial u}{\partial\eta}+\frac{g}{L^2}\frac{\partial\zeta}{\partial\chi}$$

$$-\frac{g}{L^2B}\frac{\partial\beta}{\partial\chi}\frac{\partial\zeta}{\partial\lambda}-\frac{fv}{L}$$

$$=\frac{\mu_x}{L^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\chi}+\frac{\mu_y}{B^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\lambda^2}+\frac{1}{H^2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\mu_z\frac{\partial u}{\partial\eta}\right) \tag{6-4-2a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial T}+u\frac{\partial v}{\partial\chi}+v\frac{\partial v}{\partial\lambda}+w\frac{\partial v}{\partial\eta}+\frac{g}{B}\frac{\partial\zeta}{\partial\lambda}+Lfu=\frac{\mu_x}{L^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\chi^2}+\frac{\mu_y}{B^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\lambda^2}+\frac{1}{H^2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\mu_z\frac{\partial v}{\partial\eta}\right) \tag{6-4-3a}$$

在数值模拟差分计算时，采用守恒形式的方程进行离散求解有较好的精确度，上述两个动量方程的守恒形式为

$$\frac{\partial(Hu)}{\partial T}+\frac{1}{B}\frac{\partial(BHu^2)}{\partial\chi}+\frac{\partial(Hu\omega)}{\partial\lambda}+\frac{\partial(Hu\omega)}{\partial\eta}-fvH+\frac{gH}{L^2}\frac{\partial\zeta}{\partial\chi}-\frac{gH}{L^2B}\frac{\partial\beta}{\partial\chi}\frac{\partial\zeta}{\partial\lambda}=\frac{\mu_x H}{L^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\chi^2}+\frac{\mu_y H}{B^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\lambda^2}+\frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\mu_z\frac{\partial u}{\partial\eta}\right) \tag{6-4-2b}$$

$$\frac{\partial(Hv)}{\partial T}+\frac{1}{B}\frac{\partial(BHuv)}{\partial\chi}+\frac{\partial(Hv^2)}{\partial\lambda}+\frac{\partial(Hv\omega)}{\partial\eta}+LHfu+\frac{gH}{B}\frac{\partial\zeta}{\partial\lambda}=\frac{\mu_x H}{L^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\chi^2}+\frac{H\mu_y}{B^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\lambda^2}+\frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\mu_z\frac{\partial v}{\partial\eta}\right) \tag{6-4-3b}$$

垂向动量方程为

$$\frac{\partial w}{\partial\eta}=\frac{1}{HB}\frac{\partial}{\partial\chi}[BH(\bar{u}-u)]+\frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial\lambda}[H(\bar{v}-v)] \tag{6-4-4a}$$

(6-4-4a)沿 η 向从 $\eta=0$ 积分到 η，可得到 η 处的垂向分速

$$w=\frac{1}{HB}\frac{\partial}{\partial\chi}\left[BH(\bar{u}\eta-\int_0^\eta u d\eta)\right]+\frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[H(\bar{v}\eta-\int_0^\eta v d\eta)\right] \tag{6-4-4b}$$

(6-4-1)～(6-4-4b)式是河口区三维水动力基本运动方程在新坐标系(χ,λ,η,T)下的基本形式。注意，在上述方程中，u、v、w是新坐标系中变换后的流速。

在新坐标系中的定解条件也将有不同的形式。在自由表面

$$-\frac{L\mu_z}{H}\frac{\partial u}{\partial\eta}=\frac{\tau_{sx}}{\rho};$$

$$-\frac{\mu_s}{H}\frac{\partial v}{\partial \eta}=\frac{\tau_{s\lambda}}{\rho}$$

当无风时，则

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}=0;\qquad \frac{\partial v}{\partial \eta}=0$$

在河底的边界条件

无滑移条件，$u=v=w=0$；

可滑移条件，

$$-\frac{L\mu_s}{H}\frac{\partial u}{\partial \eta}=\frac{\tau_{b\chi}}{\rho};$$

$$-\frac{\mu_s}{H}\frac{\partial v}{\partial \eta}=\frac{\tau_{b\lambda}}{\rho}$$

在上、下游开边界

$\zeta=\zeta(\chi,\lambda,T)$或$\bar{u}=\bar{u}(\chi,\lambda,\eta,T)$

在侧向边界条件

侧向开边界

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial v}{\partial n}=\frac{\partial w}{\partial n}=0$$

侧向固边界　　$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}=0$

上述基本方程(6—4—1)～(6—4—4b)结合上述边界条件和适当的初始条件，采用一定的差分离散格式，即可求解，从而得出u,v,w和ζ。再利用以下关系，求出原有坐标系下的u',v',w'和ζ。

$$u=u'/L;$$

$$v'=Bv-u\frac{\partial \beta}{\partial \chi};$$

$$w'=-Hw+(1-\eta)\frac{\partial \zeta}{\partial T}+u\frac{\partial y}{\partial \chi}+v\frac{\partial y}{\partial \lambda}$$

6.5　动水压力校正法

在三维水动力数值模拟中，求解压力梯度常存在一定的困难。

该法基本设想是将压力分解成动水压力与静水压力之和，由控制体积法导出三维偏微分方程的离散格式，采用 Patankar 和

Spalding 提出的压力校正法求解动水压力场，然后求解水位控制方程，用最新求出的水位替代压力校正法中的水位，如此循环迭代直至收敛。该模式无须采用"静水压力假定"和"刚盖假定"，即能够模拟不可压缩流体含自由表面流动问题。

模拟三维流动的基本方程(N—S 方程)中，包含有时间惯性项、对流项、扩散项和压力项，对前三项的求解似乎不存在很特别的困难，但是在求解不可压缩流动问题中，对压力梯度项的求解，往往涉及自由表面问题，而对此没有一个直接的方程求解，因此存在着一些困难。本法结合目前在欧美非常流行的 SIMPLE 计算模式和水位控制方程提出了一种三维流动的数学模型，在保持 SIMPLE 方法优点的前提下，成功地解决了含自由表面液体流动压力计算问题，并能获得未知的自由表面。而标准的 SIMPLE 计算模式只能求解"刚盖近似"下的压力，对于那些带有自由表面的不可压缩流体的流动问题就显得无能为力。

一、控制方程

取笛卡尔坐标的三个方向分别为 x(纵向)、y(横向)、z(水深方向)，相应的速度为 u、v、w，如图 6—5—1 所示。控制方程为粘性不可压缩流体的连续方程和动量方程。

连续方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{6—5—1}$$

x 方向动量方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left\{v_t\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right\}$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left\{v_t\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\}+\frac{\partial}{\partial z}\left\{v_t\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right\} \tag{6—5—2}$$

y 方向动量方程

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left\{v_t\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\}$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left\{v_t\left(2\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right\}+\frac{\partial}{\partial z}\left\{v_t\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right\} \tag{6—5—3a}$$

z 方向动量方程

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-g+\frac{\partial}{\partial x}\left[v_t\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[v_t\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[v_t\left(2\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right] \qquad (6-5-3b)$$

式中 v_t——紊动粘性系数(由于实际工程中的水流大都为紊流，故可忽略水体的粘性作用)，v_t 与流动特征有关；

ρ——水体的密度；

p——三维水体的压力场。

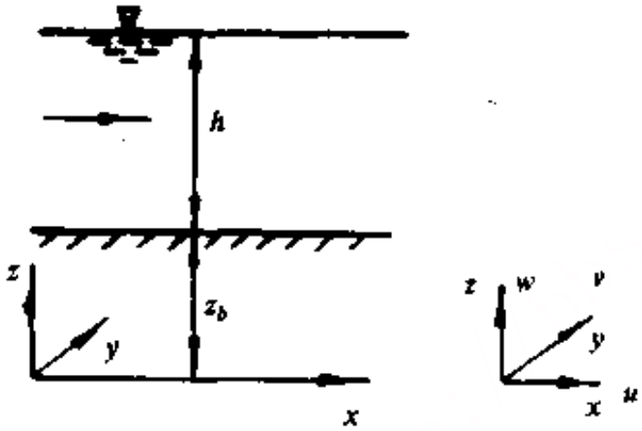


图 6—5—1 坐标系示意图

为了使表示自由位置的水位函数 $\zeta(x,y,t)$ 和动量方程密切联系起来，这里将三维压力分解成动水压力与静水压力之和，

$$p=p_d+p_s$$

式中，p_d 为动水压力，它是在水体流动时由于流线弯曲和流速不均匀所产生的附加压力；p_s 为静水压力，可表示成

$$p_s=\rho g(\zeta(x,y,t)-z)$$

将压力分解后，(6—5—2)～(6—5—3b)式中压力梯度项可分别改为

$$-\frac{\partial p}{\partial x}=-\frac{\partial p_d}{\partial x}-\rho g\frac{\partial\zeta(x,y,t)}{\partial x};$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y}=-\frac{\partial p_d}{\partial y}-\rho g\frac{\partial\zeta(x,y,t)}{\partial y};$$

$$-\rho g-\frac{\partial p}{\partial z}=-\frac{\partial p_d}{\partial z}$$

将以上三式分别代入(6—5—2)～(6—5—3b)式，就可得到含

有 u、v、w 三个流速分量及动水压力 p 及水位函数 $\zeta(x,y,t)$ 的动量方程。

对三维连续方程式(6—5—1)沿水深积分并引入水面运动边界条件 $w_s=\frac{\partial H}{\partial t}+u_s\frac{\partial H}{\partial x}+v_s\frac{\partial H}{\partial y}$，得到自由水面的控制方程

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}[U(\zeta-z_b)]+\frac{\partial}{\partial y}[V(\zeta-z_b)]=0 \qquad (6-5-4)$$

这里，U—x 方向水深平均流速；

V—y 方向水深平均流速；

u_s、v_s 分别表示 x 方向、y 方向表面流速。

为封闭方程(6—5—1)～(6—5—3b)，必须补充紊动粘性系数 ν_t 的表达式，我们采用 Prandtl 混合长紊流模型来确定紊动粘性系数的空间分布。

对于 ν_t 的垂直向分布

$$\nu_t=L_m^2\left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|$$

$$\frac{L_m}{R}=0.14-0.18\left(1-\frac{z}{R}\right)^2-0.06\left(1-\frac{z}{R}\right)^4$$

式中，z 为计算点到槽底的距离；R 为断面水力半径。

对于 ν_t 的横向分布

$$\nu_t=L_m^2\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|$$

$$\frac{L_m}{B}=0.14-0.08\left(1-\frac{y}{B}\right)^2-0.06\left(1-\frac{y}{B}\right)^4$$

式中，y 为计算点到左右边界的最短距离；B 为水槽宽度。

二、边界条件

1. 上游边界

给定第一类边界条件，u、v、w 有确定值，即 $u=u_0$、$v=0$、$w=0$。

2. 固体壁面

采用 Launder 和 Spalding 的壁面函数法，将计算边界布置在离固壁一定距离(y_w)处，使其位于完全紊流区($y_w\sqrt{\tau_w/\rho}/\nu$ 在 30～100 之间，τ_w 为边壁切力)。在计算边界上，规定法向速度 $v=w=$

0，而平行于壁面的流速 u 满足对数关系式：

$$\frac{u}{u_*}=\frac{1}{k}\ln\left(E\cdot\frac{u_*y_n}{\nu}\right)$$

式中，E 是与壁面粗糙度有关的十分复杂的函数，对于光滑壁面可取为常数；计算时取 $k=0.419$，$E=9.793$。

3. 下游边界

取已知水位或已知流速的过程作为边界控制条件。

4. 自由表面

自由表面需满足

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial v}{\partial z}=0$$

三、数值计算格式

比较方程(6--5—1)～(6--5—3b)式，可以发现它们的形式是相似的，可表达如下的通用格式：

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(u\varphi)+\frac{\partial}{\partial y}(v\varphi)+\frac{\partial}{\partial z}(w\varphi)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\Gamma\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)+S \qquad (6\text{--}5\text{—}5)$$

这样封闭方程式(6--5--1)～(6--5--3b)的各方程可按式(6--5--5)的形式归纳于表 6--5—1。在数值计算时，只需对方程式(6--5--5)编制一个通用程序，所有控制方程均可用此程序求解。

根据控制方程的特点，布置如图 6--5--2 所示的交替网格，即

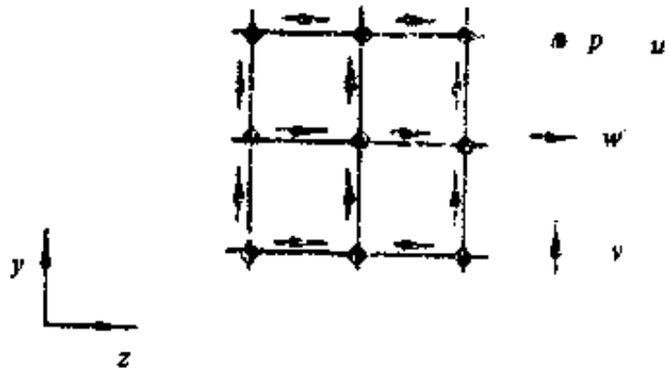


图 6--5—2　交错网格

纵向流速 u、横向流速 v、垂向流速及紊动粘性系数 ν_t、压力 p 等物理量并不布置在同一网格点上。网格的疏密程度视物理量的变化程度而定。

表 6—5—1　控制方程组

方程	φ	Γ	S
连续	1	0	0
x— 动量	u	ν_t	$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_d}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_t\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_t\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_t\frac{\partial w}{\partial x}\right)-g\frac{\partial H}{\partial x}$
y— 动量	v	ν_t	$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_d}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_t\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_t\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_t\frac{\partial w}{\partial y}\right)-g\frac{\partial H}{\partial y}$
z— 动量	w	ν_t	$-g\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_d}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_t\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_t\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_t\frac{\partial w}{\partial z}\right)$

利用控制体积法离散控制方程。将计算区域划分成一系列但互不重合的有限体积—— 控制体积，每个控制体积内包含一个计算节点，得出一组因变量 φ 的值。这里将控制面布置在相邻节点的中间（图 6—5—3），并且根据对流—扩散方程解的特点，设节点间物理量按幂函数规律变化。将控制方程在控制体积内积分，得到一组代数方程组，解此代数组，就可得到所求问题的解。

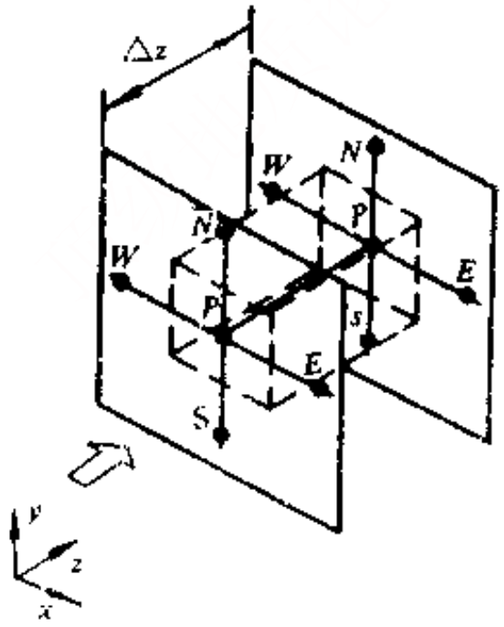
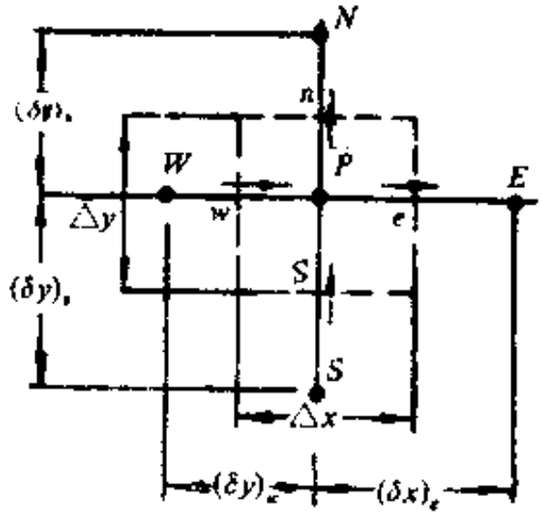


图 6—5—3　控制体积示意图（虚线部分）



y 平面控制体积

方程(6—5—5)的离散形式如下：

$$a_p = a_E\varphi_E + a_W\varphi_W + a_N\varphi_N + a_S\varphi_S + a_T\varphi_T + a_B\varphi_B + a_B \tag{6—5—6}$$

式中 $a_E = D_e \cdot \max[0,(1-0.1|P_e|)^5] + \max(-F_e,0)$；

$a_W = D_w \cdot \max[0,(1-0.1|P_w|)^5] + \max(F_w,0)$；

$a_N = D_n \cdot \max[0,(1-0.1|P_n|)^5] + \max(-F_n,0)$；

$a_S = D_s \cdot \max[0,(1-0.1|P_s|)^5] + \max(F_s,0)$；

$a_T = D_t \cdot \max[0,(1-0.1|P_t|)^5] + \max(-F_t,0)$；

$a_B = D_b \cdot \max[0,(1-0.1|P_b|)^5] + \max(F_b,0)$；

$a_0 = \Delta x\Delta y\Delta z/\Delta t$；

$b = S_c\Delta x\Delta y\Delta z + a_0^0\varphi_p^0$；

$a_p = a_E + a_W + a_S + a_T + a_B - S_p\Delta x\Delta y\Delta z$

方程(6—5—6)中的源项 $S = S_c + S_p\varphi_p$

式中 S_c——为常量；

S_p——一小于零的常数；

D_e、D_w、D_n、D_s、D_t、D_b、F_e、F_w、F_n、F_s、F_t、F_b、P_e、P_w、P_n、P_s、P_t、

P_b——各控制面上的扩散、对流强度及 Peleo 数，可分别表示成

$D_e = f_e \cdot \Delta y\Delta z/\delta X_e$，$F_e = u_e\Delta y\Delta z$，$P_e = F_e/D_e$，

$D_w = f_w \cdot \Delta y\Delta z/\delta x_w$，$F_w = u_w\Delta y\Delta z$，$P_w = F_w/D_w$，

$D_n = f_n \cdot \Delta x\Delta z/\delta y_n$，$F_n = v_n\Delta x\Delta z$，$P_n = F_n/D_n$，

$D_s = f_s \cdot \Delta x\Delta z/\delta y_s$，$F_s = v_s\Delta x\Delta z$，$P_s = F_s/D_s$，

$D_t = f_t \cdot \Delta x\Delta y/\delta z_t$，$F_t = w_t\Delta x\Delta y$，$P_t = F_t/D_t$，

$D_b = f_b \cdot \Delta x\Delta y/\delta z_b$，$F_b = w_b\Delta x\Delta y$，$P_b = F_b/D_b$

式中 u_e、u_w、v_n、v_s、w_t、w_b——垂直于控制面的速度；

f_e、f_w、f_n、f_s、f_t、f_b——控制面上的扩散系数；

Δx、Δy、Δz——控制面的长度；

δx_e、δx_w、δy_n、δy_s、δz_t、δz_b——相邻节点之间的距离。

从控制方程看，没有专门的方程确定动水压力 p_d，然而水流是

必然满足方程的，基于这个考虑，令

$$p_{tt}=p_{tt}^{*}+p_{tt}' \tag{6-5-7}$$

其中 p_{tt}' 称为动水压力修正值。同样，引入速度的修正值

$$u=u^{*}+u';v=v^{*}+v';w=w^{*}+w' \tag{6-5-8}$$

根据 Patankar 压力校正法(SIMPLE)原理，动水压力 p_{tt} 的校正方程为

$$a_P P_{dp}=A_E p_{dE}'+a_W p_{dW}'+a_N P_{dN}'+a_S p_{dS}'+a_T p_{dt}'+a_B p_{db}'+b_p' \tag{6-5-9}$$

式中 $a_E=(\Delta y\Delta z)^2/a_e$；

$a_W=(\Delta y\Delta z)^2/a_w$；

$a_N=(\Delta x\Delta z)^2/a_n$；

$a_S=(\Delta x\Delta z)^2/a_s$；

$a_T=(\Delta x\Delta y)^2/a_t$；

$a_B=(\Delta x\Delta y)^2/a_b$；

$a_p=a_E+a_W+a_S+a_T+a_B$；

$$b_p'=\Delta x\Delta y\Delta z(p_{tt}-p_{tt})/\Delta t+(u_w^{*}-u_e^{*})\Delta y\Delta z+(v_s^{*}-v_n^{*})\Delta y\Delta z+(w_t^{*}-w_B^{*})\Delta x\Delta y$$

这里，a_e、a_w 表示 u 方程相邻结点系数之和；a_n、a_s 表示 v 方程相邻结点系数之和；a_t、a_b 表示 W 方程相邻结点系数之和。

自由水面控制方程式(6—5—4)的离散格式，针对如图 6—5—3 所示控制体积，积分式(6—5—4)得

$$\frac{\zeta_P-\zeta_P^{0}}{\Delta t}\Delta x\Delta y+[(\zeta_e-Z_{be})\bar{U}_w-(\zeta_w-Z_{bw})\bar{U}_w]\Delta y+[(\zeta_n-Z_{bn})\bar{V}_n-(\zeta_s-Z_{bs})\bar{V}_s]\Delta x=0 \tag{6-5-10}$$

这里，水位在相邻节点上的变化规律，采用迎风格式，即

$\zeta_e=\zeta_P$　　$Z_{be}=Z_{bP}$

$\zeta_w=\zeta_W$　　$Z_{bw}=Z_{bP}$

$\zeta_n=\zeta_P$　　$Z_{bn}=Z_{bP}$

$\zeta_s=\zeta_S$　　$Z_{bs}=Z_{bs}$

将上述关系分别代入式(6—5—10)得

$$a_P\zeta_P=a_E\zeta_E+a_W\zeta_W+a_N\zeta_N+a_S\zeta_S+b_H \qquad (6-5-11)$$

式中

$$a_E=0;$$

$$a_W=U_w\Delta y;$$

$$a_N=0;$$

$$a_S=V_s\Delta x;$$

$$a_P=U_e\Delta y+V_n\Delta x+\Delta x\Delta y/\Delta t;$$

$$b_H=Z_{bP}U_e\Delta y-Z_{bW}U_W\Delta y-Z_{bP}V_n\Delta x-Z_{bS}V_s\Delta x+\Delta x\Delta yH_P/\Delta t$$

四、计算方法

(6—5—9)式通用方程的离散格式(6—5—6)式动水压力校正方程离散格式及水面控制方程离散格式(6—5—11)均为三对角方程，可采用解三对角方程的追赶法的线性迭代方法(TDMA)。

为了避免计算机的截断误差在计算过程中出现溢出值，该法计算引进了亚松弛因子 α_φ 以改善(6—5—6)中系数的对角占优程度。

式(6—5—6)可改写

$$a_P\varphi_P=\Sigma a_{nb}\varphi_{nb}+b_\varphi$$

Patankar 将此式改写成

$$\frac{a_P}{\alpha_\varphi}\varphi_P=\Sigma a_{nb}\varphi_{nb}+b_\varphi+\frac{1-\alpha_\varphi}{\alpha_\varphi}a_P\varphi_P^{\dot{}} \qquad (6-5-12)$$

式中 $\varphi_P^{\dot{}}$——前一次迭代值；

α_φ——亚松弛因子；

计算中取 $\alpha_u=\alpha_v=\alpha_w=1.0$，$\alpha_p=0.8$，$\alpha_H=0.8$。

一般情况下，只须给出动水压力校正值 p_H 的收敛标准 $\max|b_{P_H}|<\varepsilon$ 即可，ε 为给定精度。

这样，整个求解过程可归纳如下：

(1)给动水压力 p_H 赋以初始猜测值，并给 u、v、w、ζ 以计算初

值：

(2)计算动量方程系数，并求解速度场 u^*、v^*、w^*；

(3)计算动水压力校正方程系数，求出动水压力校正量 p_d；

(4)计算水位控制方程系数，当然应先算出水深平均流速 U、V，求出新的水位 ζ；

(5)检验结果是否满足精度式(6—5—13)，若满足则转静压计算，否则由式(6—5—7)计算校正后的动水压力，并由式(6—5—8)计算校正后的速度场转(6—5—2)；

(6)输出计算结果。

6.6 二～三维数值模拟的连接

由于三维格式需要大量的内存和机时，如果计算域全部采用三维，往往很不经济，且不能在内存不是很大的计算机上进行运算。实际上往往也没有必要全部计算域都采用三维，通常只要在研究区内建立局部三维，其余区域只需建立二维，甚至是一维模型即可。

三维如何与一维或二维连接，这是开展三维模型实际应用的关键，而且一维与三维相连时也需通过二维作为中间的连接，因此，二维～三维连接技术是三维模型实际应用的关键。

二～三维连接有串连和嵌套两种方式，可根据任务不同、需要不同、地形不同而采用不同方式，下面介绍嵌套方式。

在二维与三维嵌套连接中，如何处理好嵌套的边界条件，这是该办法成败的关键。

在嵌套处，三维数模希望二维数模提供沿水深而变的边界参数(如流速、分界面的起伏等)，但二维只有沿垂线的平均值，因此，如何将二维的垂线平均值转变成三维所需的沿垂线而变的控制函数值(如水位、流速等)，这是连接的核心。

今对界面变动 ζ_k 及流速 u_k、v_k 分别叙述。

1. 界面位移 ζ_k

根据二维数模在嵌套边界上所提供的自由水面变化值 ζ_0，可从下式算出三维所需的水下各界面的竖向位移 ζ_k。

$$\zeta_k=\zeta_0\frac{\sinh\left(\frac{2\pi H_z}{T\sqrt{gH_0}}\right)}{\sinh\left(\frac{2\pi H_0}{T\sqrt{gH_0}}\right)}$$

式中 ζ_k —— k_h 层上界面的竖向起伏值；

ζ_0 —— 自由水表面的竖向起伏值；

T —— 潮周期；

H_0 —— 静止时全水深；

H_z —— k_h 层上界面与海底距离。

2. 流速 u_k、v_k

根据二维数模在嵌套处算出的垂线平均流速 $\bar{u}^{n+1}$、$\bar{v}^{n+1}$，可由下式求出三维数模在嵌套处沿水深分布的流速值。

$$\begin{Bmatrix} u_k^{n+1} \\ v_k^{n+1} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \eta_u & 0 \\ 0 & \eta_v \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} \bar{u}^{n+1} \\ \bar{v}^{n+1} \end{Bmatrix}$$

式中 u_k^{n+1}、v_k^{n+1} —— 分别为 k_h 层内的 x、y 向的分流速；

$\bar{u}^{n+1}$、$\bar{v}^{n+1}$ —— 分别为二维求出的 x、y 向垂线平均流速；

η_u、η_v —— 分别为 u_k 及 v_k 的流速分配系数。

$$\eta_u=\frac{u_k h_k}{\int_0^{H_0}u_k\mathrm{d}z}\times\frac{H^{n+1}}{h_k^{n+1}}$$

$$\eta_v=\frac{v_k h_k}{\int_0^{H_0}v_k\mathrm{d}z}\times\frac{H^{n+1}}{h_k^{n+1}}$$

式中角标 n 及 $n+1$ 代表时瞬。

在进行二~三维连接时，需注意以下几点：

(1)二维和三维应采用同一种离散格式及计算网格，解法应统一协调，否则易引起波动。

(2)时间步长和空间步长应匹配，通常三维的网格要比二维的小，按稳定性要求，三维的时间步长也比二维的时间步长小，这就

要注意二～三维运转时的协调问题。

(3)由于二～三维空间步长不一致，因此在空间连接时也应注意三维在 xoy 平面上的网格划分应和二维的网格相协调，我们采用逐步过渡，相邻网格步长差不宜太大，应控制在四倍以内，即相邻两个空间网格的长度差不超过 4 倍。

参 考 文 献

1 Leendertse J J et al. A three-dimensional model for Estuaries and coastal seas Principles of Computation, 1973(1)

2 赵士清．长江口三维潮流的数值模拟．水利水运科学研究，1985，(1)：25～31

3 曹祖德，王桂芬．三维潮流泥沙数模拟．海峡两岸港口论文交流集，南京河海大学出版社，1993

4 曹祖德，张英平．三维潮流数学模型及油膜输移扩散的数值计算．交通环保，1988，(1)：1～9

5 Cao Zude. Effects of Wind on the Wave Advancing Towards Shore, ACTA Oceanologic Sinica, Dec. 1983, 2(2)

6 曹祖德，王桂芬．三维潮流破开算法的数学模型．水道港口，1987，(1)

7 匡翠萍．长江口拦门沙冲淤及悬沙沉降规律研究和水流盐度泥沙数学模型：[博士学位论文]．南京：南京水利科学研究院，1993

8 周思平．三维含自由表面流动的数值模拟：[博士学位论文]．南京：河海大学，1988

第七章　水动力作用下泥沙运动数值模拟

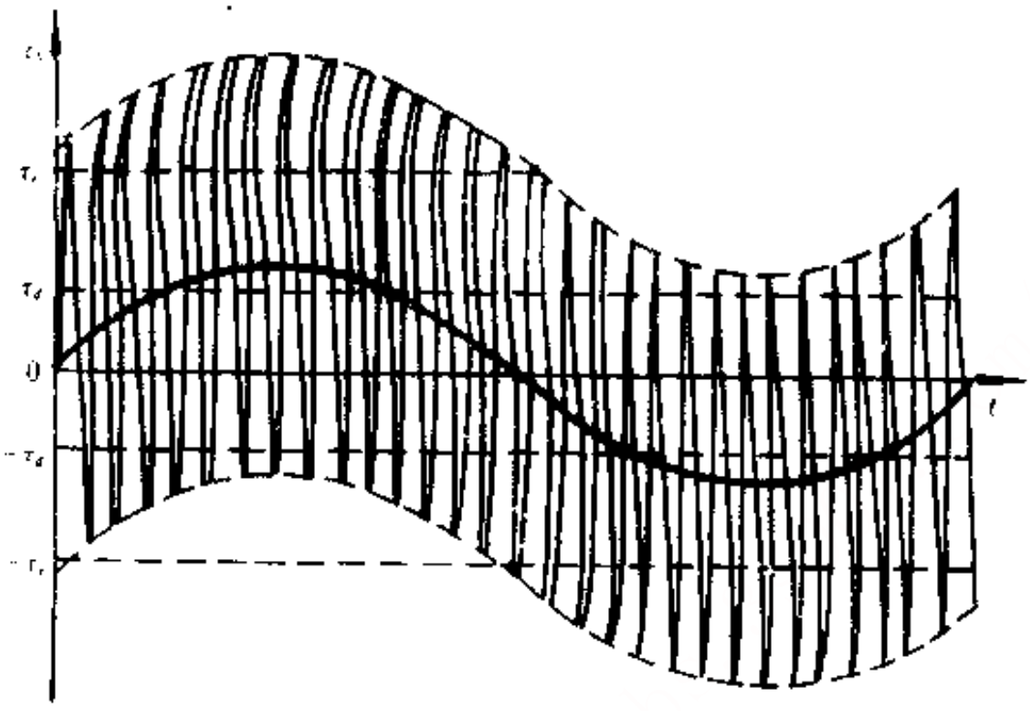
本章着重介绍波浪、水流等水动力作用下的泥沙运动形态，而不深究其运动机理。

波浪、水流作用下的泥沙运动十分复杂，有悬沙运移，底沙推移和浮泥流；其运动形态又有泥沙的起动、推移和悬扬等，不仅与波浪、水流等水动力要素有关，而且还和泥沙粒径、容重等物理特性及泥沙的水力特性有关。

一般说，泥沙在流体动力作用下运动时，存在两个临界值，一个是不淤临界值，常用不淤流速 u_d 或底部不淤剪切力 τ_d 表示；另一个是起动临界值，常用起动流速 u_c 或底部起动剪切应力 τ_c 表示。通常，当流体的流速或剪切应力小于不淤临界值时，流体中的悬沙将产生淤积；当流体中的流速或剪切应力大于起动临界值时，底沙将被掀起或扬起。当在这两个临界值之间时，情况就复杂多了，悬沙能否沉降，将视泥沙性质及流体运动状态而定。

由于海岸潮流成周期性变化，情况更为复杂，因此现着重分析海岸波浪、水流作用下的泥沙运动。在海岸带，潮流呈周期运动，与之相应的流速或剪切应力也呈周期性变化，波浪亦为周期性运动，但其运动周期要比潮流的周期小得很多，当两者共同作用时，其合成流速或合成剪切应力将由波浪、潮流综合作用而得。合成流速或合成剪切应力如图 7—1 所示。以剪切应力 τ 为例，图中粗实线为对应于潮流的剪切应力。图中还标出了不淤和起动两个临界剪切应力（τ_d 和 τ_c）值。

由图 7—1 可知，波浪、潮流共同作用下的两条外包络线，当波浪较大时，大部分时间内，总有一条包络线大于起动临界值，也就是说，当在单纯波浪作用下能起动泥沙时，则在波浪、潮流共



7－1　波浪、潮流剪切应力合成图

同作用下，大多数的波流在每一个波浪周期内，总有一定时间能掀起泥沙。由于海底泥沙随剪切应力掀动的反应敏感，因此掀扬较快。而当这个波浪周期的其余时间内虽小于起动值，泥沙可能沉积，但沉积反应也有个滞后过程。故此，当有较大波浪作用时，泥沙常被掀起，水体含沙浓度增加，并随潮流运移，这就是所谓“波浪掀沙”作用。而当波浪衰减后，潮流单独作用时，在大多数情况下，潮流的剪切应力小于起动值（只有强潮地区流急时，才可能超过起动值），此时水体中的悬沙随流输移并发生淤积，这就是通常所说的波浪掀沙、潮流输沙。

从海岸泥沙类型来分，大致有沙质和淤泥质两大类，这两类泥沙的运动情况是不同的。

1．淤泥质海岸

淤泥质海岸的泥沙起动大体可分为活动和扬动两种。根据我们对淤泥所做的水槽泥沙起动试验证明，淤泥的起动往往是直接扬动。当流体动力因素达到淤泥扬动值时，淤泥直接卷入水体而

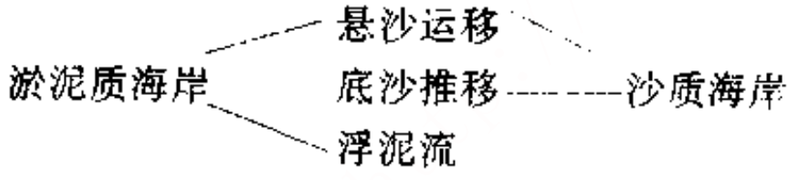
成悬移质，中间不存在底部推移运动；当悬移质水体的流体动力逐渐减小到临界淤积值时，悬移质絮凝沉降。在一定条件下，落淤的淤泥还有可能形成“浮泥”，在重力和流体动力作用下形成“浮泥流”。

由此说，淤泥质的海岸（包括粘性及粉沙性淤泥质海岸）或河口的泥沙，在波浪和水流的作用下，其运移状态是“波浪掀沙”和“潮流输沙”，有时，还可能有“浮泥流”运动。

2. 沙质海岸

在波浪和潮流作用下，沙质海岸的泥沙运动有悬沙运移，也有底部的推移质运动，但无“浮泥”。

综合以上情况可知，作为波浪、潮流共同作用下的泥沙运动，有悬沙运移、底沙推移以及浮泥运动这三种情况，要视海岸泥沙为粘性或非粘性而定，其间关系可用简图表示为



现根据上述波浪、潮流剪切应力的历时变化过程，结合泥沙特性和两个临界值，进一步分析泥沙的运动过程。

根据泥沙的两个临界值，可将泥沙运动过程分成三个阶段。

1. 第一阶段 $\tau_b \leqslant \tau_d$，淤积阶段

在这个阶段内，悬沙发生淤积，根据沙和泥的不同，而采取不同的公式计算淤积速率 D。

沙土：$D=\alpha\omega_S(S-S_*)=\alpha\omega_S S\left(1-\frac{S_*}{S}\right)$

粘土：$D=\alpha\omega_S S\left(1-\frac{\tau_b}{\tau_d}\right)$

式中 α——沉降概率；

ω_S——泥沙沉速；

S——含沙浓度；

S_*——挟沙力；

τ_b——底部剪切应力；

τ_f——不淤剪切应力。

2. 第二阶段 $\tau_d<\tau_b<\tau_c$，中间阶段

这个阶段情况比较复杂。

沙土时：$D=0$

粘土时：也分两种情况

（1）当$\frac{d\tau_b}{dt}<0$时，发生淤积，$D=\alpha'\omega_s S\left(1-\frac{\tau_b}{\tau_c}\right)$

（2）当$\frac{d\tau_b}{dt}>0$时，发生冲刷，$E=M\left(\frac{\tau_b}{\tau_c}-1\right)$

第三阶段 $\tau_b\geq\tau_c$，掀沙阶段

沙土：$E=S_b W_f$

粘土：$E=M\left(\frac{\tau_b}{\tau_c}-1\right)$

式中 τ_c——起动剪切应力；

M——系数（由试验决定）。

下面对泥沙起动、悬沙运移、底沙推移和浮泥流四部分分别论述。

7.1 泥沙起动

泥沙起动是泥沙动力学研究的基础课题，也是研究泥沙运动的关键。只有泥沙达到起动或超过起动临界值后，泥沙才能发生推移质运动或悬扬而成悬移质输移。因此，在研究各种泥沙运动形态以前，有必要重点介绍泥沙起动方面的研究。这里着重介绍作者的研究成果。

7.1.1 过去成果及简要讨论

一、水流作用下泥沙的起动

水流作用下泥沙的起动试验和理论分析，目前各国已有很多

的研究成果和公式，这些成果和公式各家虽不同，但都可归纳成三种基本类型，即：用流速表示、用功率或单宽流量表示和用作用在底部的剪应力表示。由于受试验设备和技术条件所限，在某些重要的细节上，尚存在许多不清楚的地方，比如，水流与泥沙的相互影响问题。由于泥沙的起动主要取决于底面附近的水流流速、泥沙颗粒粒径及其组成、颗粒容重等等，而水流特性塑造了一定的边界条件，但又由于底部糙率及颗粒排列的不同，泥沙反过来影响水流，改变近底水流流速，并且，由于河床紊流规律非常复杂，其内部结构具有明显的随机性，目前这方面的进一步研究虽仍在进行，但对粗糙底明渠紊流的时均流速及脉动强度分布等问题的研究尚且欠缺。因此，对底沙的存在改变水流的底部紊动强度、影响河床紊流结构的问题，实际上还未能得到解决。况且，在浑水情况下直接观察底沙起动的机理至今仍未突破，人们对起动机理的研究试验都仅限于清水，这与自然界和工程实际是有一定的差距。因此说，水流作用下底沙的起动尚有许多问题值得进一步研究解决。另外，水流叠加波浪后，其对底沙起动的综合作用力是否可以认为是二者单独作用时作用力的线性叠加，这个问题至今也还未能得到解决。

二、波浪作用下底沙的起动

自从 A. Penck 在 1894 年首先对波浪作用下底部泥沙的起动问题进行了研究，提出泥沙起动时最大波浪底速与泥沙粒径的平方根成正比之后，R. A. Bagnold 又对此问题进行了较系统的理论研究。从本世纪 40 年代至今，不少学者对波浪作用下泥沙的起动进行了进一步研究，虽得出不少公式，但与在水流作用下底沙起动问题的研究相比，还有相当的差距。我国的刘家驹曾对前人有代表性的研究成果进行过分析。总的来看，这些研究成果所得的起动公式，大致可分为两种类型：一类是由底部泥沙颗粒受力分析而推出，如 O. S. Madsen 和 W. D. Grant（该公式就是把明渠

水流作用下底沙起动的 Shields 公式推广到波浪作用下的情况)、刘家驹、王尚毅、佐藤清一和岸力等人的公式。佐藤清一和岸力得出平均粒径 d_m 与临界流速 u 的关系为：

$$d_m=\frac{\alpha}{(S-1)\ g}u^2$$

式中 d_m——底沙的平均粒径；

u——临界流速；

g——重力加速度；

α——无尺度常数；

s——沙的相对密度，$s=\rho_s/\rho$

虽然，该公式在推演中考虑了波浪在水底产生的剪应力，但没有涉及上举力，因此，考虑不够全面。另一类是由分析试验资料而得出的经验公式，其中公式形式比较明确，使用比较方便的，如 Komar 和 Miller 公式为：

$$\frac{\rho u_m^2}{(\rho_s-\rho)\ gD}=\begin{cases}0.21\ (d_0/D)^{3/2}, & D<0.05\text{cm}\\ 0.46\pi\ (d_0/D)^{3/2}, & 0.05\text{cm}<D<5.0\text{cm}\end{cases}$$

式中 u_m、d_0——波浪运动近底速度及轨道直径；

ρ——水的密度；

ρ_s、D——泥沙颗粒密度及直径。

该公式用特定波浪运动图表求出拖曳系数，与单向水流作用下的 Shields 及 Bagnold 图表吻合得较好。

大多数试验结果表明，波浪作用下的底沙，在波高与水深之比由很小至逐步增大，其颗粒由不动到个别颤动、晃动，直至发展为普遍晃动，且伴随晃动有与波浪底部传质速度相应的水平移动。波高继续增大，部分沙粒开始扬动。从研究成果来看，许多波浪作用下底沙起动的研究仍处在经验阶段，尚存在许多问题值得商榷。例如，细颗粒或粘性颗粒的起动状况与非粘性砂的区别；底沙受力分析中颗粒受力的着力点；颗粒起动的标准及渗透波压力对底沙的影响等等，都是有待进一步研究的问题。

三、波浪、水流共存及其对底沙的作用

迄今为止，各国报导的有关波浪、水流共同作用的研究成果和论文，虽已为数不少，但多因出发点不同和采用的研究方法不同，而得出了某些不同的成果及结论。例如，在对波浪与水流共同作用的研究中，刘家驹、浜田德一和加藤、岩恒雄一等人研究了水流对波浪要素的影响及波高等要素的变化；刘汉波、Jonsson等人研究了波浪与水流的相互影响和共同作用的内部结构及底部流速变化等等。下面简述几个有关的结论。

刘汉波（1965）从理论分析和试验得到水流在波浪作用下紊动结构改变了，但水流流量和沿水深的平均流速则保持不变的结论。田中仁和首藤伸夫（1980）对波浪、水流共同存在的底部摩擦实验研究认为，波浪、水流共存时的底流速可由水流底流速与波浪底流速之和表示。他们求出的波浪、水流共同作用的底部剪应力，其表达式与下面所述 Van Hoften 和 Karaki 的底部剪应力表达式形式基本一致。

这里应着重提出三篇较系统的理论分析及试验研究论文，前二篇是：佐藤道郎（1974）、Van Hoften 和 Karaki（1976）对波浪与水流的相互干涉及水粒子速度特性的研究。前者，进行了逆流的研究，后者，进行了顺流的研究。但二者均没有系统地探讨流的大小及波浪诸因素的变化。第三篇岩恒雄一和浅野敏之（1979）在佐藤、Van Hoften 和 Karaki 研究的基础上，又对顺流和逆流分别进行了试验研究，并采用热丝流速计对水粒子速度进行了测定，并得出流速沿水深大致为抛物线型分布的结论。然而，岩恒和浅野的试验虽然求出时均流速的垂直分布的实验值在顺流情况下与公式计算值有良好的一致性，但由于其试验组次较少，只只对顺流和逆流各进行了一次试验，因此，其置信度尚值得商榷。Van Hoften 和 Karaki 在对波浪和紊动水流的相互作用进行了理论分析和实验研究后得出，波浪、水流共同作用时，波浪中的一部

分动量向下面传播并由于底部剪应力的增加而损耗了，波动量的损耗引起波浪振幅的衰减；水流由于叠加了波浪，其水流阻力和动量输送特点亦发生变化，使近底处的速度梯度增加了，而沿水深的平均流速保持不变。Van Hoften 和 Karaki 还对动量方程进行推导，得出了波浪、水流共同作用下底部剪应力的表达式。

目前，各国对于波浪、水流共存对底沙作用方面的理论及实验研究还为数不多，且其研究成果也多限于对底沙输沙量方面，而对底沙起动的研究探讨尚缺乏。在波浪和水流对底沙的输沙量的研究中，中村充和白石英彦等人进行了波浪与逆向水流共同作用下底沙输移的试验探讨。其研究认为，波浪、水流共存时的水粒子波动的轨迹运动与粘性流的涡动有本质的区别，但对底沙的悬扬跳跃现象却有很大的作用；且得出波浪、水流共存时的流速虽沿水深分布与单纯水流时的抛物线型分布有所不同，但波浪水流共存时的流速仍可用断面平均流速表示。中村等人的研究还提出，底部摩擦应力 τ 与无波时底部摩擦速度 U_* 和有波时底部摩擦速度 U_b 的平方分别成正比的关系式。Inman 和 Bowen 对波浪和弱水流引起的泥沙输送进行了研究，其试验得出，水流与波浪同方向叠加时，在试验水槽的上、下游端的底沙收集器中各有多少不等的泥沙，其中，大多数试验组次结果表明，净输沙率随水流流速而增加；而个别试验组次的结果则显示了相反的趋势。因此，试验水槽上游端也有泥沙的输移量，被 Inman 和 Bowen 称之为很特殊的趋向。基于对沙纹底床泥沙输移过程的目测结果，Inman 和 Bowen 对该特殊现象和结果作了一些机理上的解释。

四、问题的确定

通过对过去成果的简单回顾和讨论可以看出，目前对单纯波浪或单纯水流作用下的底沙起动虽已有不少试验研究和理论探讨，但尚有不少问题值得进一步探讨。而在河口、海岸地区的自然界和许多工程实际中，底沙同时受到波浪和水流的共同作用，这

类底沙起动的研究目前尚欠缺。为此，笔者就波浪与水流（由于潮流的周期与波浪相比很长，故在分析和实验时可近似认为是单向水流）共同作用下的底部较细颗粒沙的起动问题进行理论和实验探讨，下面对此做一介绍。

7.1.2 波浪、水流共同作用下底沙的起动

一、颗粒受力分析

假定底部单颗粒沙为圆形时，起动前的受力情况分析如下。

1. 颗粒在水中的重力（有效重力）

$$W_s = (\gamma_s - \gamma)\frac{\pi}{6}d^3 \qquad (7-1-1)$$

式中 γ_s——颗粒容重；

γ——水的容重；

d——颗粒直径。

2. 水流对底沙颗粒的剪切力

$$T_0 = \lambda_0 \tau_0 d^2 \qquad (7-1-2)$$

式中 λ_0——无因次系数；

τ_0——水流对底部的平均剪应力；

3. 水流对底沙颗粒产生的正面推力

$$P_t = \lambda_t \frac{\pi d^2}{4}\frac{\rho u_0^2}{2} = p_t \frac{\pi d^2}{4} \qquad (7-1-3)$$

式中 λ_t——沿水流方向的阻力系数；

ρ——水的密度；

u_0——水流近底流速。

4. 由于水流的不对称所产生的绕流上举力

$$P_g = \lambda_g \frac{\pi d^2}{4}\frac{\rho u_0^2}{2} = p_g \frac{\pi d^2}{4} \qquad (7-1-4)$$

式中 λ_g——沿重力方向的阻力系数。

5. 水流叠加波浪后，由波浪引起的附加剪切力（波浪附加剪切力）

$$T_w = \lambda_w \tau_w a^2 \qquad (7-1-5)$$

式中 λ_w——无因次系数；

τ_w——波浪对底部的剪应力。

众所周知，对于二元恒定均匀明渠水流或特别宽浅的明渠，水流对底部的剪应力

$$\tau_0 = \gamma h J \qquad (7-1-6)$$

式中 h——水深；

J——水力坡度（总能头线坡度），在均匀流甚至渐变流时取为水面坡度，也可用 $\sin\theta$ 表示。

$$\because \quad J = \frac{\lambda}{4h}\frac{u^2}{2g}$$

代入（7—1—6）式，得

$$\tau_0 = \gamma h J = \frac{\lambda}{4}\frac{\gamma u^2}{2g} = \frac{\lambda}{8}\rho u^2 \qquad (7-1-7)$$

式中 λ——底部阻力系数；

u——沿水深的平均流速。

（7—1—7）式是由定床二元恒定均匀流得来，这是实际流体的一种较理想的情况，而对于动床，则因底沙起动时颗粒周围的局部应力场、流速场发生变化而与定床不同。诚然，这种局部变化对水流整体及 $\tau = \tau(h)$ 影响不大，即仍可认为剪应力 τ 沿水深的分布为直线分布，而对底部剪应力 τ_0 却有一定的影响，使得底部剪应力发生变化。但是我们认为，这个变化了的底部剪应力仍可由定床的底部剪应力 τ_0 与附加上的修正应力来表示。当然，在波浪与水流共同存在时，还须同时考虑波浪附加的底部剪应力。

二、底沙平衡条件

1. 底沙颗粒以滑动方式起动时，其沿水流方向的滑动极限平衡条件为（图 7—1—1）

$$T_0 + P_s + f_1 P_s - f_2 W_s + T_w = 0$$

或写成

$$f_2W_e' = T_0 + P_s + f_1P_g + T_w \qquad (7-1-8)$$

式中 f_1、f_2——为摩擦系数。

2. 底沙颗粒以滚动方式绕 A 点起动时，其滚动极限平衡条件为（图 7—1—2）

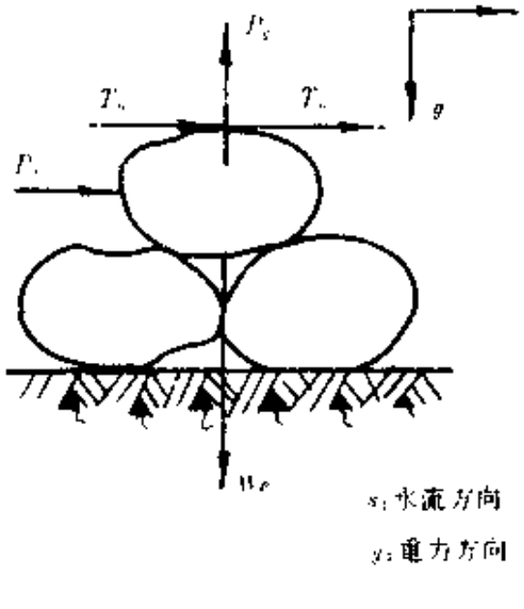


图 7—1—1 底沙颗粒受力图

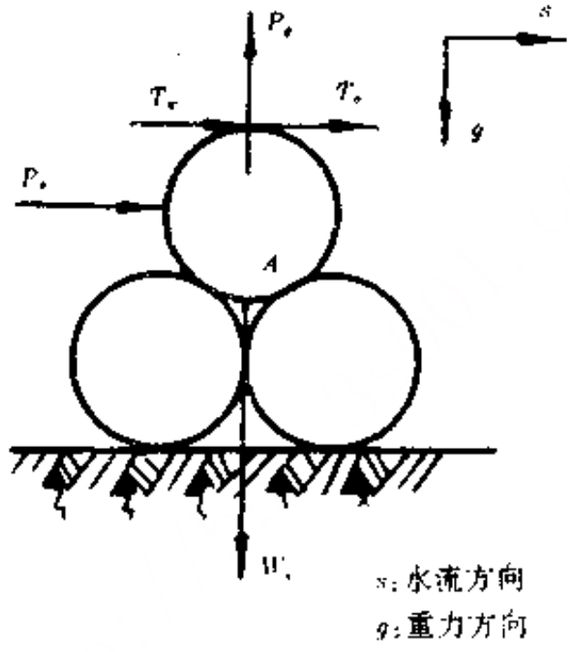


图 7—1—2 底沙颗粒受力图

$$T_0 \cdot \eta_1 d + P_s \cdot \eta_2 d + P_g \cdot \eta_3 d - W_e' \cdot \eta_4 d + T_w \cdot \eta_5 d = 0$$

或写成

$$W_e' \cdot \eta = T_0 \cdot \eta_1 + P_s \cdot \eta_2 + P_g \cdot \eta_3 + T_w \cdot \eta_5 \qquad (7-1-9)$$

式中，η、η_1、η_2、η_3、η_5 为无因次折减系数。

对各作用力方向的选定（图 7—1—1 和图 7—1—2），以最有利于滑动或滚动起动为准。例如，波浪附加剪应力 T_w，虽然随波浪在水流方向的底流速往复摆动而方向不同，但认为底沙颗粒起动时所受的波浪附加剪应力方向与水流方向一致。

从（7—1—8）式和（7—1—9）式可看出，等号左边都是阻抗颗粒起动的力，等号右边都是促使颗粒起动的力。一般来说，我们认为底沙颗粒开始起动的方式主要是滚动。虽然（7—1—8）式和（7—1—9）式是两个互相独立的力和力矩平衡方程，但它们的公式形式是一致的。因此，我们可只讨论颗粒以滚动方式起动的

情况。

应当指出的是，我们在讨论颗粒以滚动方式起动时，由于认为颗粒间的粘着力和水流对颗粒的附加下压力是因颗粒间的吸附水、薄膜水而产生，因此，假定它们存在于颗粒之间的支撑面上，其合力的作用点在支点 A（见图 7—1—2）。故在列绕 A 点起动的力矩平衡方程时，粘着力和附加下压力对 A 点取矩为零。

若仍假定底部单颗粒沙为圆形时，将（7—1—1）～（7—1—5）式分别代入（7—1—9）式，得

$$\eta\ (\gamma_s-\gamma)\ \frac{\pi}{6}d^3=\eta_1\lambda_0\tau_0 d^2+\eta_2 p_s\ \frac{\pi d^2}{4}$$

$$+\eta_3 p_z\frac{\pi d^2}{4}+\eta_4\lambda_u\tau_u d^2 \qquad (7-1-10)$$

考虑到实际上颗粒形状（底沙颗粒不是圆形）、排列状态、支撑情况和假定不完全一样，水流近底流速 u_0 与沿水深的平均流速 $\bar{u}$ 之比不一定为常数，各作用力的方向也不完全与受力图示完全相同，为此，采用 $\bar{u}$ 取代 u_0，并且（7—1—10）式中用无因次系数 K_1、K_2、K_3、K_4、K_5 对各项概括，则（7—1—10）式写为

$$K_1\ (\gamma_s-\gamma)\ d=K_2\tau_0+K_3 p_s+K_4 p_z+K_5\tau_w \qquad (7-1-11)$$

（7—1—11）式可写成

$$\frac{K_1}{K_2}\ (\gamma_s-\gamma)\ d=\tau_0+\frac{K_3}{K_2}p_s+\frac{K_4}{K_2}p_z+\frac{K_5}{K_2}\tau_w \qquad (7-1-12)$$

令 $$K_0=\frac{K_1}{K_2}$$

则（7—1—12）式为

$$K_0\ (\gamma_s-\gamma)\ d=\tau_0+\frac{K_3}{K_2}p_s+\frac{K_4}{K_2}p_z+\frac{K_5}{K_2}\tau_w \qquad (7-1-13)$$

（7—1—13）式即为波浪、水流共同作用时底沙颗粒的受力平衡方程式。式中，等号右边第一项为单纯水流作用时的底部剪应力；第二项是在水流方向由颗粒前后的压力差引起的单位面积上的正面推力（正应力）；第三项是由颗粒上下的水流速度差引起的单位面积上的绕流推力。在无波浪时，（7—1—13）式等号右边

第四项 $\tau_w=0$，底沙颗粒起动的剪应力要由等号右边第二项和第三项加以修正．这时（7—1—13）式可写成

$$\tau_0=K_0\ (\gamma_s-\gamma)\ d \qquad (7-1-14)$$

这即是 Shields 临界起动剪应力公式

$$\tau_c=K\ (\gamma_s-\gamma)\ d \qquad (7-1-15)$$

式中，K 是无因次系数。

O. S. Madsen 和 W. D. Grant 的研究，认为单纯水流作用下的 Shields 公式可以推广到单纯波浪作用时的情况。田中仁和首藤伸夫的研究认为，Shields 公式可以推广到波浪、水流共同作用的情况。而我们认为（7—1—13）式用于水流和波浪共同作用下的情况是适当的。

由于水流与波浪共存时对底部的剪应力，可认为是在水流作用的底部剪应力上附加了波浪对底部的剪应力，亦即波浪、水流共存时的底部剪应力可由波浪附加剪应力对水流底部剪应力加以修正而得到，因此，可将（7—1—13）式等号右边作为修正水流底部剪应力的后三项合并为一项，用 $K_\omega\tau'_{0\omega}$ 表示，即

$$K_0\ (\gamma_s-\gamma)\ d=\tau_0+K_\omega\tau'_{0\omega}=\tau_b \qquad (7-1-16)$$

将（7—1—7）式代入，（7—1—16）式可写成

$$K_0\ (\gamma_s-\gamma)\ d=\gamma\cdot hJ+\tau_0+K_\omega\tau'_{0\omega}=\tau_b \qquad (7-1-17)$$

底沙颗粒临界起动时 $\tau_b=\tau_c$（τ_c 为底沙颗粒起动时的临界起动剪应力），则（7—1—17）式写为

$$K_0\ (\gamma_s-\gamma)\ d=\tau_c \qquad (7-1-18)$$

三、波浪、水流共同作用下的底部剪应力的确定

水流与波浪共同作用时，其对底部产生的剪应力表达式亦有多种，代表性的有 Jonsson（1966）、Bijker（1968）、Van Hoften 和 Karaki（1976）等人的公式。其中，公式形式明确、使用较比方便的 Van Hofton 和 Karaki 公式，是在 Whitham（1962）导出的动量方程的基础上，应用了 Longuet—Higgns 和 Stewart（1960）幅射应

力的概念并进行了波浪与紊动水流相互作用的试验研究，而得出的波浪和水流共同作用的底部平均剪应力

$$\tau_b=\rho gh\sin\theta+\rho g\alpha a^2\left(\frac{2}{c}(\bar{u}-c_g)-\frac{1}{2}\right) \qquad (7-1-19)$$

$$\alpha=\frac{2k}{b}\sqrt{\frac{\nu}{2\sigma}}\left(\frac{kh+\sinh 2kh}{2kh+\sinh 2kh}\right)$$

式中 ρ——水的密度；

g——重力加速度；

h——水深；

$\sin\theta$——渠道坡度；

a——波振幅，

$$a=a_0e^{-\alpha x}$$

x——振幅为 a 的位置与振幅为 a_0 的位置之间的距离；

a_0——初始波振幅；

α——波浪衰减模数；

b——渠道宽；

k——波数，$k=2\pi/$波长；

ν——运动粘滞系数；

σ——圆频率 $\sigma=2\pi/$周期；

c——波速；

$\bar{u}$——沿水深的平均流速；

c_g——波群速。

(7—1—19) 式的物理意义为，波浪、水流共同作用下的底部剪应力 τ_b，可认为是在只有水流作用下的底部剪应力 $\rho gh\sin\theta$ 再加上波浪、水流共同作用下的附加剪应力

$$\rho g\alpha a^2\left(\frac{2}{C}(\bar{u}+c_g)-\frac{1}{2}\right)。$$

(7—1—19) 式可写成

$$\tau_b=\rho gh\sin\theta+\rho g\alpha a^2\frac{2\bar{u}}{c}+\rho g\alpha a^2\left(\frac{2c_g}{c}-\frac{1}{2}\right) \qquad (7-1-20)$$

式中等号右边第一项 $\rho gh\sin\theta$，与水流作用下的底部剪应力表达式

(7—1—6)相同，其中 $\sin\theta$ 就是水面比降 J；等号右边第二项 $\rho g\omega\alpha^2\frac{2\bar{u}}{c}$ 表明波浪、水流共同作用下水流传递的动量，用以克服底部剪应力；等号右边第三项 $\rho g\omega\alpha^2\left(\frac{2c_g}{c}-\frac{1}{2}\right)$ 表明波浪、水流共同作用下波浪传递的动量，用以克服底部剪应力。

由此可看出，(7—1—19) 式 τ_b 的公式结构形式与 (7—1—17) 式的 τ_b 相同。推广到颗粒起动时，认为仍可用 shields 临界起动剪应力 τ_c 的形式表示，即 (7—1—19) 式的 τ_b 增大到 τ_c 时颗粒开始起动，则 (7—1—19) 式可写成

$$\tau_c=C_f\rho ghJ+C_w\rho g\omega\alpha^2\left(\frac{2}{C}(\bar{u}+C_g)-\frac{1}{2}\right) \qquad (7—1—21)$$

将 (7—1—21) 式代入 (7—1—18) 式，得

$$K_c(\gamma_s-\gamma)d=C_f\rho ghJ+C_w\rho g\omega\alpha^2\left(\frac{2}{C}(\bar{u}+C_g)-\frac{1}{2}\right) \qquad (7—1—22)$$

或

$$(\gamma_s-\gamma)d=\frac{C_f}{K_c}\rho ghJ+\frac{C_w}{K_c}\rho g\omega\alpha^2\left(\frac{2}{C}(\bar{u}+C_g)-\frac{1}{2}\right)$$

$$=C_f\rho ghJ+C_w\rho g\omega\alpha^2\left(\frac{2}{C}(u+C_g)-\frac{1}{2}\right) \qquad (7—1—23)$$

由 Van Hofton 和 Karaki 及刘汉波的研究成果可知，波浪、水流共同作用时沿水深的平均流速不变。故，在 (7—1—23) 式中，等号右边第一项仍可用 (7—1—7) 式表示，即

$$(\gamma_s-\gamma)d=C_f\frac{\lambda}{8}\rho u^2+C_w\rho g\omega\alpha^2\left(\frac{2}{C}(u-C_g)-\frac{1}{2}\right) \qquad (7—1—24)$$

如令

$$D_b=\omega\alpha^2\left(\frac{2}{C}(u+C_g)-\frac{1}{2}\right) \qquad (7—1—25)$$

则

$$(\gamma_s-\gamma)d=C_f\frac{\lambda}{8}\rho u^2+C_w\rho_g D_b \qquad (7—1—26)$$

式中 C_f 水流传播动量的无因次系数，称水流作用系数，其数值由试验确定；

C_w——波浪、水流共同传播动量的无因次系数，称波浪、水流共同作用系数，其数值由试验确定。

(7—1—26) 式可进一步写成

$$(\gamma_s-\gamma)\,d=C_f\frac{\lambda}{8g}\gamma\tilde{u}^2+C_w\gamma D_w$$

$$\left(\frac{\gamma_s-\gamma}{\gamma}\right)d=C_f\frac{\lambda}{8g}\tilde{u}^2+C_wD_w$$

即

$$\left(\frac{\gamma_s-\gamma}{\gamma}\right)d=C_f\frac{\lambda}{4}\frac{\tilde{u}^2}{2g}+C_w\alpha\omega^2\left[\frac{2}{C}(\tilde{u}+C_p)-\frac{1}{2}\right] \tag{7—1—27}$$

上式即为波浪、水流共同作用下底沙起动的粒径与水流及波浪要素之关系式。公式中，等号右边各项的物理意义，与(7—1—20)式的解释相同。系数C_f不包含阻力系数λ，因此，公式(7—1—27)可应用于不同底部糙率的各种情况。

(7—1—27)式也可写成

$$d=\frac{\gamma}{(\gamma_s-\gamma)}\left\{C_f\frac{\lambda}{4}\frac{\tilde{u}^2}{2g}+C_wD_w\right\} \tag{7—1—28}$$

或

$$d=\frac{\rho}{(\rho_s-\rho)}\left\{C_f\frac{\lambda}{4}\frac{\tilde{u}^2}{2g}+C_wD_w\right\} \tag{7—1—29}$$

式中 γ_s——沙的比重，一般石英砂$\gamma_s=265$；

γ——水的比重，$\gamma=1.0$；

ρ_s、ρ——沙和水的密度。

因此，对于一般有砂质底床，(7—1—27)式可写为

$$d=\frac{1}{1.65}\left\{C_f\frac{\lambda}{4}\frac{\tilde{u}^2}{2g}+C_wD_w\right\} \tag{7—1—30}$$

7.1.3 实验研究

一、实验目的及内容

该实验研究了在二维恒定均匀明渠水流和二维浅水推进波共同作用下底部较细颗粒沙的起动，且流向只限于和波浪传播方向一致。试验变换8种较细颗粒沙的粒径、5种水深、8种波周期

（相应变换 8 种波高）及变换水流流速，观测以上各波浪、水流要素组合情况下较细颗粒沙的起动条件。试验需测定每组底沙显著起动（见起动标准）时的波浪要素（波高、波周期、波速）和水流要素（水深、三角堰堰顶标高）及水温，然后，根据实测数据算出水槽断面平均流速，从而按公式（7—1—25）算出颗粒起动时的各有关数据。

二、实验设备及量测

实验在长 1200cm，宽 38.1cm，高 54.5cm 的试验水槽中进行。水槽底部为 3cm 厚钢筋混凝土平板，板面经 500# 水泥抹光压面，槽侧壁为 5mm 厚玻璃板。水槽首部升波机前面设有 1∶3～1∶4 的多孔透水消能板，板上铺有 3～5cm 粒径的碎石，水槽尾部设有提拉式尾门。试验观测断面距升波机击块 740cm，距尾门下端 200cm，具体布置见图 7—1—3。

水槽内的波浪由击块式升波机产生，升波机击块设在距水槽首端 200cm 处。升波机由一个能改变转速的马达驱动，其工作性能较稳定，产生的波型光滑对称。其波周期变化在 $T=0.67\sim1.93$s 之间，波高 $a=2.5\sim9.0$cm。

水槽内的水流是由水泵把蓄水池中的清水（自来水）抽送到水槽侧上方的水箱内，再由水箱的直角三角堰自由流出进入水槽，然后由水槽另一端（尾端）流回到蓄水池内，形成循环水系统。该系统出流量稳定，且由于蓄水池足够大（长 295cm，宽 204cm，高 159cm），及整个系统均由纤维板覆盖，因此，水的清晰度良好，为实验和观测提供了良好的条件。

三、底沙起动的标准

在实验中，底沙起动标准往往采用目测判定，因此，随着研究者不同，虽然考虑问题的论点相同，其实验结果因起动标准不

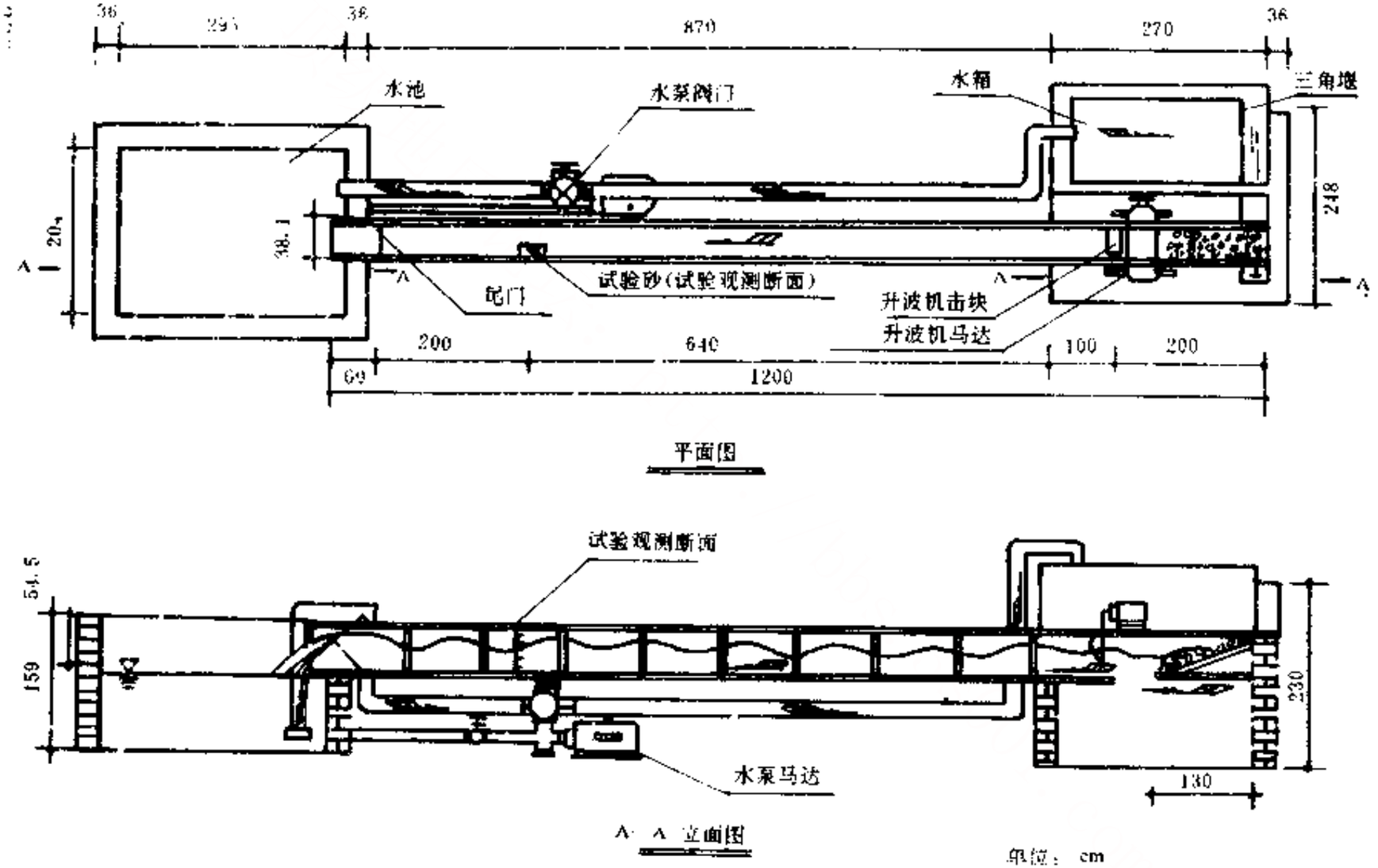


图 7---1--3　试验设备布置图

同而有相当大的出入，使得有些资料很难进行比较。为此，首先要确定起动标准。

经大多数试验证明，对于底沙的起动，其状态可由三个阶段的特征来描述：

个别起动特征：大多数颗粒在床面上静止（或颤动），而只有个别颗粒开始滚动（这些颗粒是指粒径在均匀砂中占主要部分的代表性沙粒，而不是沙中的轻质或特小沙粒）；且滚动是间断的，颗粒起动是交替的。

显著起动特征：床面上为数较多的颗粒开始滚动，尚未滚动的颗粒也在颤动，虽滚动还是间断的，颗粒起动仍是交替的，但无论是颗粒滚动速度，还是动静颗粒的交换都相当快，有此起彼伏感。

普遍起动特征：床面上的沙粒几乎一个接一个的间时滚动或跳动，有些随即悬扬。此时，颗粒的运动近于连续进行。

以上划分是为了对起动过程认识细致起见，实际沙粒的起动是宏观连续过程。显著起动相当于床面上单位面积内沙粒30%～50%左右颗粒起动，为此，显著起动的标准也可以认为是对应于每组沙样的中值粒径d_{50}或平均粒径d_m的起动（这样可避免认为沙样中少量轻质和细小颗粒的起动为沙样中代表粒径的起动）。采用显著起动作为观测标准是较适合的。故，该实验所确定显著起动为各组较细颗粒均匀沙（在波浪和水流共同作用下，大部分颗粒在床面上有相同的起动机率）的起动标准。

实验采用的较细颗粒沙来源于秦皇岛，经筛分法筛选而得。其比重$\gamma=2.65$，形状多棱角，长、宽、高三向尺度相近。筛选不同粒径的组次，按我国《海洋调查规范》（GB 12763—91）"等比制（Φ标准）粒级分类表"中细沙～粉沙各范围内选代表性粒径而分。为进行比较，也筛选了一组中沙，详见表7-1-1。

表 7—1—1　实验沙粒径表

组次	粒级名称		海洋调查规范分类的粒径范围（mm）	本实验采取的粒径范围（mm）	本实验的平均粒径（mm）
1	粉沙	粗粉沙	0.032～0.063	0.033～0.053	0.034
2	沙	极细沙	0.063～0.125	0.070～0.090	0.072
3				0.070～0.104	0.070
4				0.105～0.111	0.108
5		细沙	0.125～0.250	0.125～0.135	0.130
6				0.150～0.178	0.164
7				0.178～0.208	0.193
8		中沙	0.250～0.50	0.246～0.294	0.270

注：前三组粒径：0.33～0.053mm，0.070～0.090mm，0.070～0.104mm，筛分后又经颗粒分析，确定取 d_{50} 为平均粒径。

四、实验组合

实验假定在给定波高、波周期、水深（调整尾门、控制流量，以保证水深）情况下，每对应一组沙样，可调至一组水流条件使其流速达到该沙样颗粒起动的流速，此时为一组试验，则该实验共作 87 组。对应起动时波周期、波高、水深与试验组次的组合见表 7—1—2。

表 7—1—2　实验组次表

水深（cm）	周期（s）／波高（cm）／组次	0.67	0.72	0.75	0.80	0.85	0.90	0.93	1.09
25	组次	3		3+（1）	3	3	3+（1）		
	15+（2）	5.5～6.3		3.6～4.4	3.5～4.0	3.0～3.6	3.1		
30	组次	5		3	2+（1）	4—（2）	3	1	
	18+（3）	4.7～7.4		4.7～5.3	4.3～4.8	3.4～5.8*	3.6～3.9	3.7	
35	组次	6+（2）			3	4	6+（2）	3+（1）	
	22+（5）	6.0～7.8			5.2～5.3	4.2～4.8	4.2～4.7	3.4～3.5	
40	组次	3			3+（1）		3		
	9+（1）	8.0～9.0			6.2～6.4		3.9～3.7		
42	组次	2	1			2—（1）	2+（2）		2
	9+（3）	6.6～7.0	7.1			5.6～6.0	5.4～5.8		4.0～4.3

注：（1）* 只 0.033～0.053mm 一组粒径的波高为 4.7cm。

（2）试验组次（　）内的数字为重复试验组次。

五、实验现象的观察

开启升波机（此时水流流量最小）对粒径 $d=0.105\sim0.111$mm、$0.125\sim0.135$mm、$0.150\sim0.178$mm、$0.178\sim0.208$mm、$0.246\sim0.294$mm 五种沙样进行观察，可看到其表层颗粒仍处于静止状态；逐步加大流速后，沙粒在显著起动前都有个别或少量轻质、细粒沙受波浪影响开始晃动，继而滚动或滑动。而观察 $d=0.033\sim0.053$mm、$0.070\sim0.090$mm、0.070mm~0.104mm 三组沙，一经加波浪，则明显看到表层颗粒开始颤动（该现象与单纯波浪作用于底沙的观察现象一致），随之，沙粒表层出现一薄层黑色、形状不同的、粒径较小的颗粒，随波浪底部的往复流动而摆动，随着流速增加而逐渐消失，而后的个别、少量至显著颗粒起动情况与上述相同。这个现象的出现，首先可以认定波浪加水流对底沙的作用，比单纯水流作用多一项波浪对沙粒的分选作用，该分选作用对细颗粒沙尤其明显。沙粒表层被分选出的黑色轻质颗粒（煤或云母），由于其密度比石英沙小，所以经波浪分选而浮起于其它颗粒之上。其次，可认为对于细颗粒沙（粒径大约在 0.1mm 以下），颗粒的起动对波浪十分敏感。换句话说，就是波浪、水流共同作用时，对于细颗粒沙，波浪的作用比较明显；反之对较粗颗粒，则水流为主要因素。

另一现象就是，沙粒的起动并不是理想的连续现象。理想的连续起动是流速一经达到起动流速，即使流速不再加大，沙粒的起动也是宏观连续进行。然而，对实际现象的观察，沙粒的起动是时起、时伏，时动、时停。尽管随流速的继续增大，颗粒相继起动的交替频率加快，但从观测断面整体上看，仍是此起彼伏、间断起动。而随着观测时间的延长，则可明显看出该间断起动现象呈周期性变化。这个现象主要可从以下两个方面来解释。首先，由颗粒本身的形状及排列不同而造成。各颗粒的形状不同，其排列情况亦不同，形状及排列状态易于起动的颗粒，受到起动作用力

后首先起动，起动后沙粒再次排列之后的情况不同于起动前，可能为较稳定状态，颗粒本身的迎流面也可能较先前为小，因此，颗粒就停止运动。当其它颗粒的起动托带，破坏了该颗粒的较稳定状态后，该颗粒又再度起动。这种起伏间歇虽呈周期性变化，但其时间间隔和颗粒运动的时间仍随观测者的目视不同而有区别，因此，实验对各组沙样的上述变化，以同一起动标准，统一目测尺度进行掌握。其次，是由波浪、水流共存时的波浪周期性变化而导致。波浪与水流共存时，由于波浪的周期性变化，使向前流动的水流流速叠加了一个往复振荡的流速，该流速使得向前流动的水流流速受到周期性往复振荡的影响。当振荡流流速方向与水流流速同向，其共同作用的底流速达到底沙起动流速时，底沙开始起动，而振荡流流速方向与水流流速方向逆向时，底沙的起动则受到影响。因此，底沙起动间断的周期变化也可认为是与波浪运动周期成比例关系。诚然，对于这种关系该实验没有进一步进行研究。

7.1.4 实验成果的数据处理及分析

1. 实验成果的数据处理

将实测数据按（7—1—25）式计算，得

$$Lh=\alpha d^2\left(\frac{2}{C}\left(u-C_g\right)-\frac{1}{2}\right)$$

实验中测得粒径 d（m）、水深 h（m）、周期 T（s）、波速 C（m/s）、波高 a（m）、水温 t（℃）。

波群速 C_g 计算

$$C_g=\frac{C}{2}\left(1+\frac{kh}{\sinh 2kh}\right)$$

式中 k——波数，$k=2\pi/T$。

由水温与运动粘滞系数 ν 关系表，根据水温 t 可得到运动粘滞系数 ν，从而算出波浪衰减模数 α。

$$\alpha=\frac{2k}{b}\sqrt{\frac{\nu}{2\sigma}\left(\frac{kb+\sinh 2kh}{2kh\sinh 2kh}\right)}\quad(1/\mathrm{cm})$$

式中　σ——圆频率。

2. 实验成果分析

用公式计算的实验值与单向水流作用下修正的 Shields 曲线及单纯波浪作用下底沙起动的实验点的比较，如图 7--1--4 所示。在图 7--1--4 中，除底沙粒径 $d=0.033\sim0.053$mm 外，其余 7 种粒径沙的起动实验值①～⑦与 Shields 曲线的比较均已绘出。图中未编号的细纵线为波浪作用下不同学者的试验点。

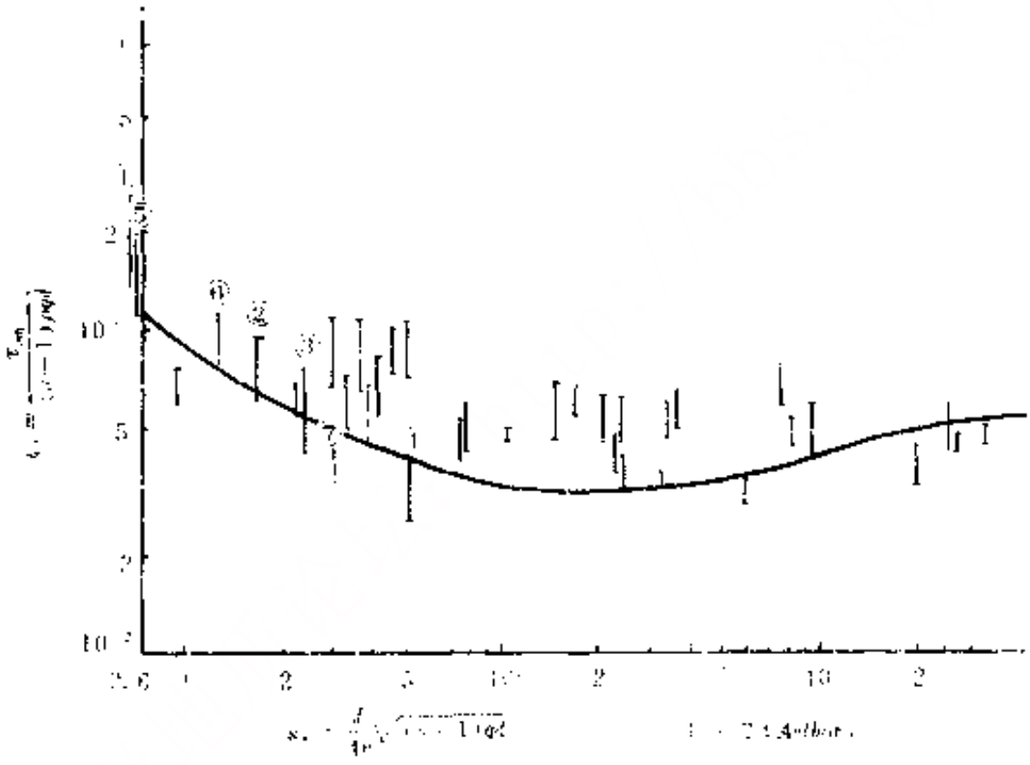


图 7--1--4　波浪、水流共同作用下底沙起动的试验点与修正的 Shields 曲线比较

通过对波浪、水流共同作用下底部较细颗粒沙起动条件的理论分析及试验研究，初步得到以下几点结论：

（1）从实验观测得知，波浪、水流共同对底沙的作用，由于存在波浪引起的底部摆动拖曳力，因此，比起单纯水流作用可明显看出有对底沙颗粒的分选作用，该分选作用对 0.1mm 以下的细

颗粒沙尤其显著。

（2）水流叠加波浪后，由于受波浪周期性往复振荡流速的影响，底沙颗粒的起动状态不同于单纯水流或单纯波浪作用下的情况，而是呈二者起动状态的综合现象，即颗粒的起动由颤动、晃动至滚动或滑动。

（3）波浪、水流共同作用时，水流断面平均流速 $\bar{u}=12.0\sim20.5\text{cm/s}$，波高 $a=3.0\sim9.0\text{cm}$（波高与水深比最大到 1/4）情况下，波浪对底沙起动的影响仍比水流影响为小。

（4）通过理论分析和试验研究，得出波浪、水流共同作用下，底部较细颗粒沙起动的粒径与水流及波浪要素的关系式，即（7—1—27）式

$$\left(\frac{\gamma_s-\gamma}{\gamma}\right)d=C_f\frac{\lambda}{4}\frac{\bar{u}^2}{2g}+C_w\alpha d^2\left[\frac{2}{C}(\bar{u}+C_\kappa)-\frac{1}{2}\right]$$

如
$$\frac{\gamma_s-\gamma}{\gamma}=\frac{\rho_s-\rho}{\rho}=1.65$$

则
$$1.65d=C_f\frac{\lambda}{4}\frac{\bar{u}^2}{2g}+C_w\alpha d^2\left[\frac{2}{C}(\bar{u}+C_\kappa)-\frac{1}{2}\right]$$

式中，水流传播动量系数 C_f 数值大致为 73～75；波浪、水流共同传播动量系数 C_w 数值大致为 43～48。

由该实验各组不同的底沙粒径、波浪及水流要素算出阻力系数（λ）与粒径（d）之间的关系式为

$$\lambda=0.201d^{0.88} \qquad (7-1-31)$$

式中，粒径 d 以 cm 计。

7.2 悬沙运移

7.2.1 基本方程

由质量守恒可建立泥沙质量守恒三维方程式为

$$\frac{\partial s}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(us)+\frac{\partial}{\partial y}(vs)+\frac{\partial}{\partial z}[(w-u_4)s]$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon_x\frac{\partial s}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon_y\frac{\partial s}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\varepsilon_z\frac{\partial s}{\partial z}\right)$$

式中 u、v、w——分别为流体在 x、y、z 向的分速；

ω_s——泥沙沉降速度；

s——含沙量；

ε_x、ε_y、ε_z——分别为泥沙在 x、y、z 向的紊动扩散系数。

将上式沿水深积分，可得二维悬沙输移扩散方程

$$\frac{\partial s}{\partial t}+u\frac{\partial s}{\partial x}+v\frac{\partial s}{\partial y}-(\omega_s s)_b-\left(\varepsilon_z\frac{\partial s}{\partial z}\right)_b$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon_x\frac{\partial s}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon_y\frac{\partial s}{\partial y}\right)$$

现进一步讨论悬沙在水体中不同深度的输移扩散情况，即研究三维悬沙输移扩散方程。

沿水深将水体分为若干层，每层厚为 h_k，现取出某一 h_k 层来分析。

设流体静止时刻的层厚为 h_{k0}，流动时界面发生变化，上界面位移为 ζ_k，下界面位移为 ζ_{k-1}，则流动时之层厚 $h_k=h_{k0}-\zeta_{k-1}+\zeta_k$。设层内的流速和含沙量分别有下述关系

$$s=\bar{s}+s'$$

$$u=\bar{u}+u'$$

$$v=\bar{v}+v'$$

式中，各符号上加一横杠表示平均值；右肩“′”表示脉动值。对基本方程在 h_k 层内沿 z 向从 ζ_{k-1} 积分到 ζ_k，在积分过程中利用了牛顿——莱布尼兹微分积分法则，

$$\int_{z_1}^{z_2}\frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}z=\frac{\partial}{\partial x_i}\int_{z_1}^{z_2}f\mathrm{d}z-\frac{\partial z_2}{\partial x_i}f_{z_2}+\frac{\partial z_1}{\partial x_i}f_{z_1},$$

并应用了下列关系：

$$\int_{\zeta_{k-1}}^{\zeta_k}(s'u')\,\mathrm{d}z=0\qquad\int_{\zeta_{k-1}}^{\zeta_k}s'\mathrm{d}z=0$$

$$\int_{\zeta_{k-1}}^{\zeta_k}(s'v')\,\mathrm{d}z=0\qquad\int_{\zeta_{k-1}}^{\zeta_k}u'\mathrm{d}z=0$$

$$\int_{\zeta_{k-1}}^{\zeta_k}(su')\,\mathrm{d}z=0\qquad\int_{\zeta_{k-1}}^{\zeta_k}sv'\mathrm{d}z=0$$

$$\int_{\zeta_{k-1}}^{\zeta_k} (s\tau') \, dz = 0$$

$$\int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} u's \, dz = (us') \, h = -hD_x \frac{\partial s}{\partial x}$$

$$\int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} (v's') \, dz = (v's') \, h = -hD_y \frac{\partial s}{\partial y}$$

由此可得各层的基本方程（注意，积分上下限及下角标ζ_k、ζ_{k+1}表示该处坐标，而不是ζ_k、ζ_{k-1}之值。）

$$\frac{\partial}{\partial t}(s_k h_k) + \frac{\partial}{\partial x}(u_k s_k h_k) + \frac{\partial}{\partial y}(v_k s_k h_k)$$

$$+ (w - w_l) S_{\zeta_k} - (w - w_l) S_{\zeta_{k-1}} - \varepsilon_z \frac{\partial s}{\partial z_{\zeta_k}} + \varepsilon_z \frac{\partial s}{\partial z_{\zeta_{k-1}}}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(k_x h_k \frac{\partial s}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_y h_k \frac{\partial s}{\partial y}\right) \qquad (7-2-1)$$

（7—2—1）式还可以写成第二种形式：

$$h_k \frac{\partial}{\partial t}(S_k) + S_k \frac{\partial h_k}{\partial t} + S_k \frac{\partial u_k h_k}{\partial x} + u_k h_k \frac{\partial s_k}{\partial x}$$

$$+ S_k \frac{\partial v_k h_k}{\partial y} + v_k h_k \frac{\partial S_k}{\partial y} + (w - w_l) S_{\zeta_k} - (w - w_l) S_{\zeta_{k-1}}$$

$$- \varepsilon_z \frac{\partial s}{\partial z_{\zeta_k}} + \varepsilon_z \frac{\partial s}{\partial z_{\zeta_{k-1}}} = h_k \frac{\partial}{\partial x}\left(K_x \frac{\partial s}{\partial x}\right) + K_x \frac{\partial s}{\partial x} \cdot \frac{\partial h_k}{\partial x}$$

$$+ h_k \frac{\partial}{\partial y}\left(K_y \frac{\partial s}{\partial y}\right) + K_y \frac{\partial s}{\partial y} \cdot \frac{\partial h_k}{\partial y} \qquad (7-2-2a)$$

由于已知水流连续条件为

$$\frac{\partial h_k}{\partial t} + \frac{\partial u_k h_k}{\partial x} + \frac{\partial v_k h_k}{\partial y} = 0$$

由上式可知（7—2—2a）式中下面带波折号的三项之和为零。对上式除以h_k，并经整理后可得

$$\frac{\partial s_k}{\partial t} + \left(u_k - \frac{K_x}{h_k}\frac{\partial h_k}{\partial x}\right)\frac{\partial s_k}{\partial x} + \left(v_k - \frac{K_y}{h_k}\frac{\partial h_k}{\partial y}\right)\frac{\partial s_k}{\partial y}$$

$$+ \left[\frac{(w - w_l)}{h_k} s_k - \frac{\varepsilon_z}{h_k}\frac{\partial s}{\partial z}\right]_{\zeta_k} - \left[\frac{(w - w_l)}{h_k} s_k\right]_{\zeta_{k-1}} - \frac{\varepsilon_z}{h_k}\frac{\partial s}{\partial z}\Big|_{\zeta_{k-1}} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K_x \frac{\partial s}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_y \frac{\partial s}{\partial y}\right) \qquad (7-2-2b)$$

在平衡时，下式成立

$$(w-w_j)\varnothing-\varepsilon_z\frac{\partial s}{\partial z}=0$$

式中，$\varnothing$为平衡时之含沙量，即为挟沙力。由此得

$$\varepsilon_z\frac{\partial s}{\partial z}=(w-w_j)\varnothing$$

将此式代入（7—2—2）式，即可得第三种形式的输沙方程式

$$\frac{\partial s_k}{\partial t}+\left(u_k-\frac{K_x}{h_k}\frac{\partial h_k}{\partial x}\right)\frac{\partial s_k}{\partial x}+\left(v_k-\frac{K_y}{h_k}\frac{\partial h_k}{\partial y}\right)\frac{\partial s_k}{\partial y}$$
$$+\left[\frac{w-w_j}{h_k}(S-\varnothing)\right]_{\zeta_k}-\left[\frac{w-w_j}{h_k}(S-\varnothing)\right]_{\zeta_{k-1}}$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x\frac{\partial s}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_y\frac{\partial s}{\partial y}\right)\qquad(7-2-3)$$

以上三种形式表达式各有优缺点，（7—2—1）式概念清晰，但复杂；后二式简单，但(7—2—2b)式中有两个系数ε和K难以确定，而（7—2—3）式中K和$\varnothing$也很难确定。因ε、K、$\varnothing$很难确定，有时只好采用一些假定。

关于泥沙垂向扩散系数，根据前人研究成果，其数量级大致为10^{-2}。在天津港回淤研究中，我们根据现场实测悬沙含沙量资料，整理得出ε_z沿垂线分布的经验公式为

$$\varepsilon_z=0.6\left(\frac{z}{H}\right)^{0.06}$$

关于挟沙力，过去已有的成果大都是属于二维的，如何在三维中应用，还有待进一步研究。

钱宁认为，从实用观点出发，按扩散理论的平衡挟沙力公式已有足够的精度，该式的形式为

$$S_z=S_b\left(\frac{H-z}{z}\cdot\frac{a}{H-a}\right)^E$$

式中 S_b——底部含沙量；

H——总深度；

a——近底层S_b处的高度；

E——指数，

$$E=\frac{w_j}{\beta Ku_*}\text{或}E=\frac{w_j}{\beta Ku_*}=\frac{w_j}{Ku_*\sqrt{g}}；$$

u_* ——摩阻流速，$u_*=\sqrt{RgJ}$

在上式中，困难是如何确定 S_b。

如取 $a=0.1H$，则上式可进一步简化为

$$S_z=S_b\left(\frac{1}{9}\frac{H-z}{z}\right)^{\varepsilon} \qquad (7-2-4)$$

如认为 $z=0.55H$ 处的 S_z 与平均含沙量相当，则

$$\bar{S}=S_b\left(\frac{1}{9}\cdot\frac{H-0.55H}{0.55H}\right)^{\varepsilon}$$

即 $$\bar{S}\approx S_b\left(\frac{1}{10.98}\right)^{\varepsilon}$$

由此得 $S_b=\bar{S}\times(10.98)^{\varepsilon}$

在稳定情况下，平均含沙量与挟沙力 S_* 相当，求平均挟沙力 $\bar{S}_*$ 有以下四种公式：

武汉水院公式

$$\bar{S}_*=K\left(\frac{U^3}{gHw}\right)^m$$

李昌华公式

$$\bar{S}_*=0.0075\left(\frac{U^3}{Hw}\right)^{1.25}=0.13\left(\frac{U^2}{gHw}\right)^{1.25}$$

经验公式（根据潮流河口海岸实测资料整理得出）

$$\bar{S}_*=K\left(\frac{U^2}{Hw}\right)$$

林秉南公式（根据钱塘江实测值得出）

大潮时 $$\bar{S}_*=0.008\left(\frac{U^2}{Hw}\right)$$

小潮洪水时 $$\bar{S}_*=0.0055\left(\frac{U^2}{Hw}\right)$$

如采用林秉南结果代入(7—2—4)式，系数用平均值 0.0068，则得

$$S_z=0.0068\left(\frac{U^2}{Hw}\right)\left(1.22\frac{H-z}{z}\right)^{\varepsilon}$$

原式 U 为潮段平均流速（我们设在瞬时垂线平均值时亦可采用上式）。

7.2.2 平面二维波浪、潮流作用下的悬沙运移

1. 控制方程的建立

采用右手直角坐标系，XOY 布置在静水面上，Z 轴竖直向上。

（1）平面二维流体运动基本方程组

设波浪、潮流运动的水体为不可压缩流体，其三维运动的基本方程组为

连续方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \qquad (7-2-5a)$$

动量方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_w}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}=A\Delta u \qquad (7-2-5b)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_w}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}=A\Delta v \qquad (7-2-5c)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_w}{\partial y}-g=A\Delta w \qquad (7-2-5d)$$

在自由水面 $z=\zeta$，运动边界条件为

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+u\frac{\partial \zeta}{\partial x}+v\frac{\partial \zeta}{\partial y}-w=0 \qquad z=\zeta$$

在海底 $z=-h$，无水流进出固体面，得

$$u\frac{\partial h}{\partial x}+v\frac{\partial h}{\partial y}+w=0 \qquad z=-h$$

式中 u、v、w —— 分别为流体在 x、y、z 向的分速；

P —— 正压应力；

τ —— 剪切应力；

ζ —— 自由水面与静止水面间的竖向距离；

A —— 紊动扩散系数；

h —— 总水深。

在（7—2—5d）中忽略惯性项、对流项和紊动项，经积分后得

$$P_w=\rho g z \qquad (7-2-5e)$$

设水平流速是垂向平均流速与余额流速之和，即

$$(u,\ v) = (\bar{u},\ \bar{v}) + (u^{\pm},\ v^{\pm})$$

式中 $\bar{u}$、$\bar{v}$——垂向平均流速，

$$(\bar{u},\ \bar{v}) = \frac{1}{h}\int_{-h}^{\zeta}(u,\ v)\ \mathrm{d}z$$

$(u^{\pm},\ v^{\pm})$ ——余额流速，

$$\int_{-h}^{\zeta}(u^{\pm},\ v^{\pm})\ \mathrm{d}z = 0$$

将上式代入基本方程（7—2—5），沿水深积分，利用边界条件并整理后得

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\bar{u}\ (h+\zeta)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\bar{v}\ (h+\zeta)\right] = 0 \qquad (7-2-6a)$$

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} + g\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{1}{\rho\ (h+\zeta)}\left[\tau_{bx} - \tau_{sx}\right] = A\Delta\bar{u} \qquad (7-2-6b)$$

$$\frac{\partial\bar{v}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial\bar{v}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial\bar{v}}{\partial y} + g\frac{\partial\zeta}{\partial y} + \frac{1}{\rho\ (h+\zeta)}\left[\tau_{by} - \tau_{sy}\right] = A\Delta\bar{v} \qquad (7-2-6c)$$

式中 A——综合扩散系数，已计及余额流速的影响。

（2）波浪作用下的潮流运动方程

在波浪、潮流的二维波流场中，令

$$(\bar{u},\ \bar{v},\ \zeta) = (\bar{\bar{u}},\ \bar{\bar{v}},\ \bar{\zeta}) + (\tilde{u},\ \tilde{v},\ \tilde{\zeta}) \qquad (7-2-7)$$

式中 $(\bar{\bar{u}},\ \bar{\bar{v}},\ \bar{\zeta})$ 为时均值，

$$(\bar{\bar{u}},\ \bar{\bar{v}},\ \bar{\zeta}) = \frac{1}{T}\int_{0}^{T}(\bar{u},\ \bar{v},\ \zeta)\ \mathrm{d}t$$

$(\tilde{u},\ \tilde{v},\ \tilde{\zeta})$ 为波浪引起的周期变化值

$$\int_{0}^{T}(\tilde{u},\ \tilde{v},\ \tilde{\zeta})\ \mathrm{d}t = 0$$

T 为波浪周期。

将（7—2—7）式代入（7—2—6a）式，并在波浪周期 T 内积分后得

$$\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\bar{\bar{u}}\ (h+\bar{\zeta}) + \frac{1}{T}\int_{0}^{T}(\tilde{\zeta}\tilde{u})\ \mathrm{d}t\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\bar{\bar{v}}\ (h+\bar{\zeta}) + \frac{1}{T}\int_{0}^{T}(\tilde{\zeta}\tilde{v})\ \mathrm{d}t\right] = 0 \qquad (7-2-8)$$

式中，等号左端两个方括号中的第二项均为波浪引起的欧拉质量输送速度，可用下式表示

$$\frac{1}{T}\int_0^T(\xi\tilde{u})\,\mathrm{d}t=(h+\bar{\xi})\,\tilde{\bar{u}}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T(\xi\tilde{v})\,\mathrm{d}t=(h+\bar{\xi})\,\tilde{\bar{v}}$$

将上式代入（7－2—8）式得

$$\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[(\bar{u}+\tilde{\bar{u}})(h+\bar{\xi})\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[(\bar{v}+\tilde{\bar{v}})(h+\bar{\xi})\right]=0$$

令 $u_{cw}=\bar{u}+\tilde{\bar{u}}$，$v_{cw}=\bar{v}+\tilde{\bar{v}}$，代入（7—2—8）式后得连续方程

$$\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[u_{cw}(h+\bar{\xi})\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[v_{cw}(h+\bar{\xi})\right]=0\quad(7-2-9)$$

将（7－2—7）式代入（7－2—6a）～（7－2—6c），并在波浪周期 T 内积分、整理后，得动量方程

$$\frac{\partial u_{cw}}{\partial t}+u_{cw}\frac{\partial u_{cw}}{\partial x}+v_{cw}\frac{\partial u_{cw}}{\partial y}+g\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial x}-\frac{1}{\rho(h+\bar{\xi})}(\tau_{bx}-\tau_{sx})+\frac{1}{\rho(h+\bar{\xi})}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\rho h}{T}\int_0^T(\tilde{u}^2+\tilde{v}^2+\frac{g\tilde{\xi}^2}{2})\,\mathrm{d}t\right\}=A\Delta u_{cw}$$

（7—2—10a）

$$\frac{\partial v_{cw}}{\partial t}+u_{cw}\frac{\partial v_{cw}}{\partial x}+v_{cw}\frac{\partial v_{cw}}{\partial y}+g\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial y}-\frac{1}{\rho(h+\bar{\xi})}(\tau_{by}-\tau_{sy})+\frac{1}{\rho(h+\bar{\xi})}\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\rho h}{T}\int_0^T(\tilde{v}^2+\tilde{u}\tilde{v}+\frac{g\tilde{\xi}^2}{2})\,\mathrm{d}t\right\}=A\Delta v_{cw}$$

（7—2—10b）

（7—2—10a）及（7—2—10b）式左端最后一项花括内通常称为幅射应力，它首先由 Longuet-Higgins and Stewart 提出。该力是个张量，常用 S_{ij} 表示，因此（7—2—10）式可进一步简写成

$$\frac{\partial u_{cw}}{\partial t}+u_{cw}\frac{\partial u_{cw}}{\partial x}+v_{cw}\frac{\partial u_{cw}}{\partial y}+g\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial x}-\frac{1}{\rho(h+\bar{\xi})}\left[\tau_{bx}-\tau_{sx}+\frac{\partial S_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial S_{xy}}{\partial y}\right]=A\Delta u_{cw}\quad(7-2-11a)$$

$$\frac{\partial v_{cw}}{\partial t}+u_{cw}\frac{\partial v_{cw}}{\partial x}+v_{cw}\frac{\partial v_{cw}}{\partial y}+g\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial y}$$

$$+\frac{1}{\rho\ (h+\zeta)}\left[\tau_{by}-\tau_{sy}+\frac{\partial S_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial S_{xy}}{\partial x}\right]=A\Delta v_{cw}\quad(7-2-11b)$$

(7－2－9)、(7－2－11a)、(7－2－11b) 就是波浪作用下的潮流运动控制方程组。它和一般的潮流运动方程很相似，但每个符号的含义却不同，主要有三点：*a.* 流速、水面增高中均已包含了波浪的影响；*b.* 本方程中还增多了波浪幅射应力项；*c.* 扩散系数 A 中加进了波浪周期变化所产生的扩散。

（3）悬沙输移扩散过程

根据质量守恒原理可得悬沙水体中悬沙输移扩散的基本方程为

$$\frac{\partial s}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\ (su)\ +\frac{\partial}{\partial y}\ (sv)\ +\frac{\partial}{\partial z}\left[s\ (w-w_f)\right]=\epsilon\Delta S$$

(7－2－12)

式中 s——含沙量；

w_f——泥沙沉降速度；

ϵ——悬沙扩散系数。

采用前述流体运动方程中同样处理方法，对（7－2－12）式先进行沿水深积分，后在波浪周期内积分，可得出波浪、潮流共同作用下的二维悬沙输移扩散方程

$$\frac{\partial s_{cw}}{\partial t}+\left[u_{cw}-\frac{\epsilon_x'}{h+\zeta}\frac{\partial\ (h+\zeta)}{\partial x}\right]\frac{\partial s_{cw}}{\partial x}+\left[v_{cw}-\frac{\epsilon_y'}{h+\zeta}\frac{\partial\ (h+\zeta)}{\partial y}\right]\frac{\partial s_{cw}}{\partial y}$$

$$+\frac{w_f s_{cw}}{h+\zeta}-\frac{\epsilon_z'}{h+\zeta}\frac{\partial s_{cw}}{\partial z}=\epsilon A\Delta s_{cw}$$

式中 $w_f s_{cw}$——悬沙沉降量；

$\epsilon_z'\dfrac{\partial s_{cw}}{\partial z}$——底沙悬扬时，如以一个冲淤函数 F_s 表示这二者之和，即

$$F_s=w_f s_{cw}-\epsilon_z'\frac{\partial s_{cw}}{\partial z}$$

则上式可简写成如下形式

$$\frac{\partial s_{cw}}{\partial t}+\left[u_{cw}-\frac{\epsilon_x'}{h+\zeta}\frac{\partial\ (h+\zeta)}{\partial x}\right]\frac{\partial s_{cw}}{\partial x}$$

$$+\left[v_{cw}-\frac{\varepsilon_y}{h+\zeta}\frac{\partial\ (h+\zeta)}{\partial y}\right]\frac{\partial s_{cw}}{\partial y}+\frac{F_s}{h+\zeta}=\varepsilon\Delta s_{cw}\quad(7\text{--}2\text{—}13)$$

（4）海底演变过程

$$\frac{\partial\zeta_b}{\partial t}-\frac{F_s}{\gamma_c}=0\quad(7\text{—}2\text{—}14)$$

式中 ζ_b——海底床面竖向位移；

γ_c——底部泥沙的干容重。

上述（7—2—9）～（7—2—14）式为控制方程组，未知量为 ζ、u_{cw}、v_{cw}、s_{cw}和 ζ_b，结合适当定解条件，即可求解。

2. **几个参量的确定**

（1）底部剪切应力 τ_b

波浪、潮流底部剪切应力瞬时值可用下式表示

$$\tau_{b(t)}=C_b\rho|\bar{u}+\tilde{u}|\ (\bar{u}+\tilde{u})$$

式中 C_b——摩阻系数；

$\bar{u}$——时间平均值；

$\tilde{u}$——周期变化值。

将上式展开得

$$\tau_{b(t)}=\rho c_b|\bar{u}|\bar{u}+\rho c_b|\tilde{u}|\tilde{u}+2\rho c_b|\bar{u}|\tilde{u}$$

波、流相互作用后，流速发生变化，已不再是原来的数值。设 $\bar{u}=\alpha_1 u_c$，$\tilde{u}=\alpha_2 u_w$（式中，u_c 为未作用时的潮流速，u_w 为未作用时的波浪质点流速，α_1、α_2 为改变系数），将这些值代入上式，得

$$\tau_{b(t)}=\rho c_b\alpha_1^2|u_c|u_c+\rho c_b\alpha_2^2|u_w|u_w+2\rho c_b\alpha_1\alpha_2|u_c|u_w$$

令 $f_c=c_b\alpha_1^2$，$f_w=c_b\alpha_2^2$，采用线性波理论，上式为

$$\tau_{b(t)}=\rho f_c|u_c|u_c+\rho f_w|u_w|u_w\sin^2\theta+2\rho\sqrt{f_c f_w}|u_c|u_c\sin\theta\quad(7\text{—}2\text{—}15a)$$

将（7—2—15a）式在波浪周期内积分后求平均值，得

$$\bar{\tau}_b=\rho f_c|u_c|u_c+\frac{\rho}{2}f_w|u_w|u_w+\frac{4\rho}{\pi}\sqrt{f_c f_w}|u_c|u_w\quad(7\text{—}2\text{—}15b)$$

由（7—2—15b）式可得 τ_{bx}和 τ_{by}的表达式为

$$\tau_{bx}=\rho f_c|U_c|u_c+\frac{\rho}{2}f_w|U_w|u_w+\frac{4\rho}{\pi}\sqrt{f_c f_w}|U_c|u_w\quad(7\text{—}2\text{—}16a)$$

$$\tau_{by}=\rho f_c|U_c|v_c+\frac{\rho}{2}f_w|U_w|v_w+\frac{4\rho}{\pi}\sqrt{f_c f_w}|U_c|u_w$$

(7-2-16b)

式中 f_c——潮流底摩阻系数；

f_w——波浪底摩阻系数；

u_c、v_c——分别为潮流在 x、y 向的分速；

u_w、v_w——为波浪底部质点流速在 x、y 向的分速。

（2）波浪幅射应力 S

根据 Longuet-Higgins 的研究，波浪辐射应力张量的表达式如下

$$\begin{bmatrix}S_{xx} & S_{xy}\\ S_{yx} & S_{yy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{2K(h+\xi)}{\sinh[2K(h+\xi)]}-\dfrac{1}{2} & 0\\ 0 & \dfrac{K(h+\xi)}{\sinh[2K(h+\xi)]}-\dfrac{1}{2}\end{bmatrix}E$$

式中 S_{xx}、S_{xy}、S_{yx}、S_{yy}——分别表示在波浪传播方向和垂直方向的应力张量分量；

K——波数，$K=\frac{2\pi}{\lambda}$；

E——波能量，$E=\frac{\rho g H_w^2}{8}$；

H_w——波高；

ρ——水密度；

由此得

$$S_{xx}=S_{xx}\cos^2\theta_w+S_{yy}\sin^2\theta_w$$

$$S_{yy}=S_{yy}\sin^2\theta_w+S_{xx}\cos^2\theta_w$$

$$S_{xy}=S_{yx}=S_{xx}\sin\theta_w\cos\theta_w-S_{yy}\cos\theta_w\sin\theta_w$$

（3）风对水表面剪切应力 τ_s

可用下式表示风对水面的剪切应力

$$\tau_{sx}=\rho_a c_w|W-U|(w_x-u_{cw})$$

$$\tau_{sx}=\rho_a c_w |W-U|\ (w_x-\tau_{xw})$$

$$|W-U|=\sqrt{(w_x-u_w)^2+(w_y-\tau_{yw})^2}$$

式中 w_x、w_y——分别为风速 W 在 x、y 向的分量；

c_w——风对波动水面的剪切系数，根据笔者研究，可取 $c_w=2.55\times10^{-3}$（见图 6—2—2）。

（4）海底泥沙冲淤函数 F_s

根据笔者研究，在淤泥质海岸上，F_s 与海底剪切应力 τ_b、泥沙冲刷临界剪切力 τ_c 和淤积临界剪切应力 τ_d 有关，可分下述三种情况。

（a）当 $\tau_b\leqslant\tau_d$ 时，悬沙落淤，海底淤积，这时

$$F_s=\alpha' w_s s\left(1-\frac{\tau_b}{\tau_d}\right)$$

式中，α' 为絮凝沉降机率，其值为 0.67～0.84；w_s 为絮凝沉降速度，此值与泥沙粒径、含沙浓度、海水盐度及水流速度有关。由于絮凝作用，絮凝团当量粒径最终近似为一常值，约为 0.307mm，其当量沉速为 0.05～0.06cm/s。由于絮凝沉速对 F_s 的影响很大，通常应通过实验来确定 w_s。

（b）当 $\tau_d<\tau_b<\tau_c$ 时，又可分两种情况：

当 $\frac{\partial\tau_b}{\partial t}>0$ 时，呈微冲刷状态；

当 $\frac{\partial\tau_b}{\partial t}<0$ 时，呈微淤积状态。

但在工程实用中，为简化起见，可令 $F_s=0$。

（c）当 $\tau_b\geqslant\tau_c$ 时，底部冲刷，泥沙重新悬浮，这时

$$F_s=-M\left(\frac{\tau_b}{\tau_c}-1\right)$$

式中，M 为冲刷系数，量纲为 $kg\ m^{-2}\ s^{-1}$，此值应通过实验求得，笔者曾求得 $M=6.4\times10^{-3}$。

7.2.3 三维波浪、潮流作用下的悬沙运移

下面介绍分层二维模式，用以模拟三维波浪、潮流作用下的

悬沙运移

1. 基本控制方程

采用右手直角坐标系统，XOY 平面置于平均海平面，Z 轴竖直向上，沿水深将水体分成若干层，相邻两层间水体厚度为 $h_{k-\frac{1}{2}}=(h_{\frac{1}{2}}|_0+\zeta_k-\zeta_{k-1})$，在该厚度内的水平二维水体流动基本方程如下。

连续方程

$$\frac{\partial\zeta_k}{\partial t}-\frac{\partial\zeta_{k-1}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(uh)_{k-\frac{1}{2}}+\frac{\partial}{\partial y}(vh)_{k-\frac{1}{2}}=0 \qquad (7-2-17a)$$

$$\frac{\partial h_{k-\frac{1}{2}}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(uh)_{k-\frac{1}{2}}+\frac{\partial}{\partial y}(vh)_{k-\frac{1}{2}}=0 \qquad (7-2-17b)$$

$$w_k=w_{k-\frac{1}{2}}-\frac{\partial}{\partial x}(uh)_{k-\frac{1}{2}}-\frac{\partial}{\partial y}(vh)_{k-\frac{1}{2}}$$

运动方程

$$\frac{\partial u_{k-\frac{1}{2}}}{\partial t}+u_{k-\frac{1}{2}}\frac{\partial u_{k-\frac{1}{2}}}{\partial x}+v_{k-\frac{1}{2}}\frac{\partial u_{k-\frac{1}{2}}}{\partial y}+\frac{w_k+w_{k-1}}{2}\frac{\partial u_{k-\frac{1}{2}}}{\partial z}$$
$$+g\frac{\partial}{\partial x}(\zeta_k-\zeta_{k-1})-fv_{k-\frac{1}{2}}+\frac{1}{\rho h_{k-\frac{1}{2}}}[(\tau_x)_{k-1}-(\tau_x)_k]$$
$$+\frac{1}{\rho h_{k-\frac{1}{2}}}\left[\frac{\partial}{\partial x}(S_{xx})_{k-\frac{1}{2}}+\frac{\partial}{\partial y}(S_{xy})_{k-\frac{1}{2}}\right]=A_{k-\frac{1}{2}}\Delta u_{k-\frac{1}{2}}$$

(7-2-18a)

$$\frac{\partial v_{k-\frac{1}{2}}}{\partial t}+u_{k-\frac{1}{2}}\frac{\partial v_{k-\frac{1}{2}}}{\partial x}+v_{k-\frac{1}{2}}\frac{\partial v_{k-\frac{1}{2}}}{\partial y}+\frac{w_k+w_{k-1}}{2}\frac{\partial v_{k-\frac{1}{2}}}{\partial z}$$
$$+g\frac{\partial}{\partial y}(\zeta_k-\zeta_{k-1})+fu_{k-\frac{1}{2}}-\frac{1}{\rho h_{k-\frac{1}{2}}}[(\tau_y)_{k-1}-(\tau_y)_k]$$
$$+\frac{1}{\rho h_{k-\frac{1}{2}}}\left[\frac{\partial}{\partial x}(S_{yx})_{k-\frac{1}{2}}+\frac{\partial}{\partial y}(S_{yy})_{k-\frac{1}{2}}\right]=A_{k-\frac{1}{2}}\Delta v_{k-\frac{1}{2}}$$

(7-2-18b)

悬沙输移扩散方程

根据前节介绍，在水体 h_k 层中的悬沙输移扩散方程有三种形

式。

第一种形式

$$\frac{\partial}{\partial t}(S_k h_k)+\frac{\partial}{\partial x}(u_k S_k h_k)+\frac{\partial}{\partial y}(v_k S_k h_k)+(w-w_j)S\Big|_{z_{k-1}}^{z_k}-\varepsilon_z\frac{\partial S}{\partial z}\Big|_{z_{k-1}}^{z_k}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x h_k\frac{\partial S_k}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y h_k\frac{\partial S_k}{\partial y}\right) \tag{7-2-19a}$$

第二种形式

$$\frac{\partial S_k}{\partial t}+\left(u_k-\frac{k_x}{h_k}-\frac{\partial h_k}{\partial x}\right)\frac{\partial S_k}{\partial x}+\left(v_k-\frac{k_y}{h_k}-\frac{\partial h_k}{\partial y}\right)\frac{\partial S_k}{\partial y}+\left[\frac{(w-w_j)S_k}{h_k}-\frac{\varepsilon_z}{h_k}\frac{\partial S_k}{\partial z}\right]\Big|_{z_{k-1}}^{z_k}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial S_k}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\frac{\partial S_k}{\partial y}\right) \tag{7-2-19b}$$

第三种形式

$$\frac{\partial S_k}{\partial t}+\left(u_k-\frac{k_x}{h_k}\frac{\partial h_k}{\partial x}\right)\frac{\partial S_k}{\partial x}+\left(v_k-\frac{k_y}{h_k}\frac{\partial h_k}{\partial y}\right)\frac{\partial S_k}{\partial y}+\left[\frac{w-w_j}{h}(S_k-\varnothing_k)\right]\Big|_{z_{k-1}}^{z_k}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial S_k}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\frac{\partial S_k}{\partial y}\right) \tag{7-2-19c}$$

海底演变方程

$$\frac{\partial \zeta_b}{\partial t}-\frac{(F_s)_{bt}}{\gamma_s}=0 \tag{7-2-20}$$

式中 u、v、w——分别为 x、y、z 向分速；

ζ——界面的竖向位移；

f——柯氏力系数；

h——水层厚度；

A——紊动扩散系数；

S——含沙量；

τ_x、τ_y——x、y 向的界面剪切应力；

s_{xx}、s_{xy}、s_{yx}、s_{yy}——波浪剩余动量流在 x、y 向的分量；

ε——泥沙紊动扩散系数；

ζ_b——海底变形；

F_i——泥沙中冲淤函数；

足标“k”——z向位置；

Δ——微分运算子，

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

(7—2—17)式～(7—2—20)式为三维潮流、波浪、泥沙数值模拟采用的基本方程组，结合定解条件即可求解。

由于悬沙运动方程有三种形式，在三维数模中，究竟采用何种形式，需根据当地具体情况来确定，其中关键是如何确定泥沙Z向扩散系数ϵ_z、挟沙力$\varnothing_k$、x向和y向的扩散系数k_x和k_y以及沉降速度w_i。

为了计算方便起见，可将上述后两种形式的泥沙输移方程统一写成下列形式

$$\frac{\partial S_k}{\partial t}+\left(u_k-\frac{k_x}{h_k}\frac{\partial h_k}{\partial x}\right)\frac{\partial S_k}{\partial x}+\left(v_k-\frac{k_y}{h_k}\frac{\partial h_k}{\partial y}\right)\frac{\partial S_k}{\partial y}$$
$$+F_k-F_{k-1}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial S_k}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\frac{\partial S_k}{\partial y}\right)$$

式中 F_k——沉降函数。

在第二种形式的方程中

$$F_k=\frac{(w-w_i)\ S_k}{h_k}-\frac{\epsilon_z}{h_k}\frac{\partial S_k}{\partial z}$$

在第三种形式的方程中

$$F_k=\frac{w-w_i}{h_k}\ (S_k-\varnothing_k)$$

2. **边界条件**

(1) 在自由水面，无泥沙进出，

$$F_0=0$$

(2) 在底部，根据底部不同的剪切应力及不同海底而有不同的情况，其一般情况如图7—2—1所示，图中τ_d为不淤剪切应力，τ_c为起动剪切应力。

如以 D 表示淤积率，以 E 表示冲刷率，则在海底有如下几个情况：

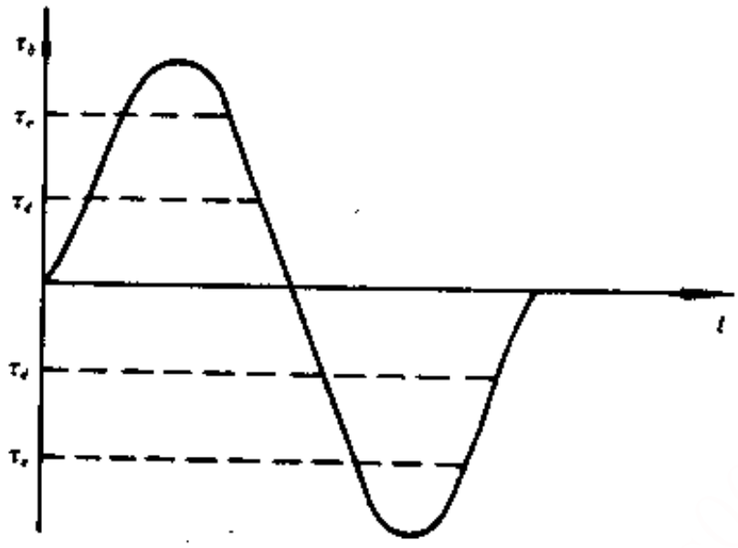


图7—2—1　底部剪切应力

(a) 当 $\tau_b \geqslant \tau_e$ 时，冲刷阶段

$$F_b = -E = -M\left(\frac{\tau}{\tau_e}-1\right)^m$$

根据英国 HR 实测资料，对于粘性泥土，$M=2\times10^{-4}\sim4\times10^{-3}$，$m=1.16$，$\tau_e=0.16$Pa

据笔者对日本熊本港的研究得：$M=6.4\times10^{-4}$，$\tau_e=0.15$Pa

根据法国 EDF 资料，$M=0.55\left(\frac{s}{1000}\right)^3$，$s$ 以 g/L 计。

(b) 当 $\tau_d<\tau_b<\tau_e$ 时，部分淤积或冲刷。

根据水槽试验得知，粘性泥沙淤积时，存在一个平衡挟沙量 Seq。根据天津港泥沙的水槽试验得知：

$$F_b = D = \alpha\omega_i S\ [1-F\ (U)]$$

$$F\ (U)\ = 0.5\log_{10}\frac{U}{U_{min}}$$

式中，U_{min} 为最小挟沙流速，小于此流速时的泥沙将全部沉积。U_{min} 与泥沙粒径有关，根据有关试验资料得知：

$d_{50}=0.0017$时　$U_{min}=1.145$cm/s（天津）

$d_{50}=0.007$时，$U_{min}=3.9$cm/s（日本）

一般公式为

$$F_b=\alpha\omega_s\left(1-k_s\frac{s_0}{s}\right)^{\cdot}\qquad k_s=s_{sf}/s_0$$

最近，笔者根据周期性剪切应力的水槽试验资料发现，在一周期内，泥沙状态可能发生淤积，也可能发生冲刷，需根据剪切应力变化状态来确定。

当$\frac{d\tau}{dt}>0$时，发生冲刷，

$$F_b=-E=M\left(\frac{\tau}{\tau_c}-1\right)$$

当$\frac{d\tau}{dt}<0$时，发生淤积，

$$F_d=D=\alpha\omega s\left(1-\frac{\tau}{\tau_d}\right)$$

（2）当$\tau\leqslant\tau_d$时，悬沙有全部淤积的趋势，

$$F_b=\alpha\omega_i S\left(1-\frac{\tau}{\tau_d}\right)$$

（3）在水体内层间界面时

$$F_k=\frac{(\omega_k-\omega_i)\ (s_k+s_{k+1})}{2h_k}-\frac{\varepsilon_k\ (s_{k+1}-s_k)}{h_k\times\ (h_{k+1}-h_k)}$$

或另一种写法

$$F_k=\frac{(\omega_k-\omega_i)\ (s_k+s_{k+1}-\varnothing_k-\varnothing_{k+1})}{2h_k}$$

3. 几个参数的确定

（1）沉降速度ω_i

关于沉降速度，过去已有很多人进行了大量研究，有丰富的成果供选用。但在三维数模选用沉速公式时应注意两点：①ω_i应与当地某一点的水流速有关，而不是与垂线平均流速有关。而有些沉速公式中的流速是垂线平均流速。②同样，影响沉速的含沙量应该是当地含沙量而不是平均含沙量。为此，我们曾在环形水槽中进行了专门试验，并得出沉速与就地流速u_i及当地含沙量之间存在如下关系

$$\omega_i=\omega_{i_0}\frac{1+c_2s^{m_2}}{1+c_1s^{m_1}}k_s$$

式中 ω_{s0}——相当于单颗粒时，按 stokes 公式算出的沉速；

s——就地含沙量；

u——就地流速；

c_1、m_1、c_2、m_2——试验系数，根据连云港泥沙试验得：$c_1=0.06$；$c_2=4.6$；$m_1=0.75$；$m_2=0.6$；

k_s——与含盐量有关有系数，根据试验，含盐量为30‰时，$k_s=3.8$。

(2) 竖向扩散系数 ϵ_s

泥沙的竖向扩散系数 ϵ_s 与流场及泥沙特性有关，应该是空间位置的函数，但目前由于实验水平所限，无法求得 ϵ_s 在空间的分布规律。今暂令泥沙扩散系数与动量扩散系数相当，设下式成立

$$\epsilon_s=\frac{ds}{dz}+\omega_s s=0$$

根据上式，可利用实测资料求得相应的泥沙扩散系数。

对此，曾于1988年7月在天津新港抛泥地海区进行了水文测验，利用这些实测资料，按上式求得泥沙竖向扩散系数 ϵ_s 沿垂线分布规律为

H_s	$\epsilon_s\times(10^{-}$	s (kg·m^{-3})
1.0	0.1078	0.0558
0.8	0.0408	0.0606
0.6	0.0348	(0.0671)
0.4	0.0286	0.0742
0.2	0.0202	0.1027
0.1	0.0193	0.1464

由上述数值可知，泥沙竖向扩散系数由底部向水面增大（图7—2—2）。根据上述数据可建立经验公式为

$$\varepsilon(z)=0.06\left(\frac{z}{H}\right)^{0.6}$$

式中，H 为水深；z 从海底算起。

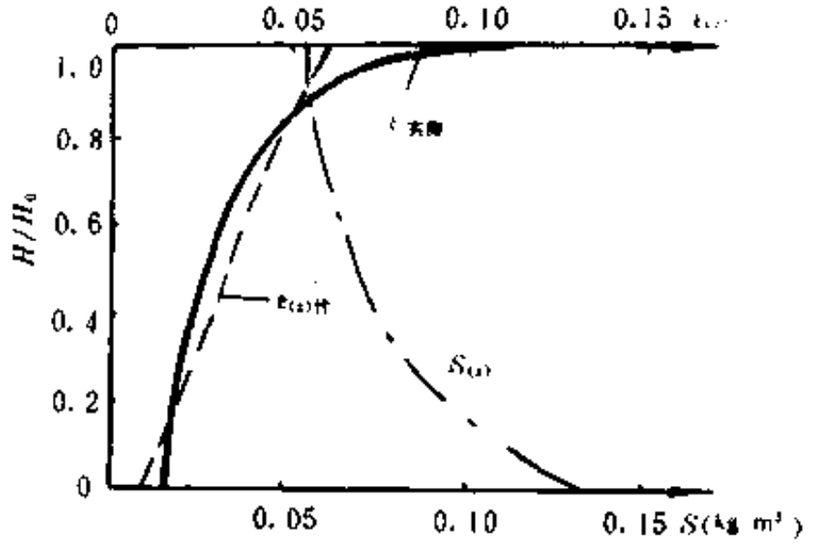


图7—2—2 $s(z)$ 与 $\varepsilon(z)$ 分布图

（3）挟沙力$\varnothing$。

关于挟沙力公式，前人已作过很多研究，在河道计算中较常用的有武汉水利学院公式

$$\varnothing = k\left(\frac{U^3}{gHw_i}\right)^m$$

此外，李昌华曾总结得出

$$\varnothing = 0.0075\left(\frac{U^3}{Hw_i}\right)^{1.25}$$

如将上式化成与武汉水利学院公式相同的形式，则得

$$\varnothing = 0.13\left(\frac{U^3}{gHw_i}\right)^{1.25}$$

上述公式系由河道中导出，流速U是断面平均流速。在三维数模中，需要水体内任一点的挟沙力，因此如何应用上式需进一步推敲。

钱宁分析了由扩散理论建立的平衡挟沙力公式后认为，如下形式的挟沙力分布公式有足够精度：

$$\varnothing = s_b\left(\frac{H-z}{z}\cdot\frac{a}{H-a}\right)^E \qquad (7—2—21)$$

式中 s_b——临底部含沙量；

a——s_b处的高程；

E——指数，$E=\frac{\omega}{\beta k u_*}$。

采用上式的最大困难是如何确定 s_b。尽管已有一些文章介绍了 s_b 的求法，但可信度值得商榷。为了克服上述困难，不妨对上式进行如下变换。

根据一些实测资料，通常认为在 $z=0.55$ 处的 $\varnothing_z=0.55$ 相当于平均挟沙力，即

$$\varnothing_{z=0.55}=\bar{\varnothing}=s_b\left(\frac{0.45}{0.55}\times\frac{a}{H-a}\right)^E$$

由此得

$$s_b=\bar{\varnothing}\left(\frac{0.55}{0.45}\times\frac{H-a}{a}\right)^E$$

将 s_b 代入（7—2—21）式得

$$\varnothing=\bar{\varnothing}\left(\frac{0.55}{0.45}\times\frac{H-Z}{Z}\right)^E \qquad (7-2-22)$$

在潮汐河口，根据实测资料，通常采用如下形式的平均挟沙力公式

$$\bar{\varnothing}=k\left(\frac{U^2}{H\omega}\right)$$

各地的 k 值不同。根据钱塘江实测资料，取 $k=0.0068$，代入上式得

$$\varnothing_z=0.0068\left(\frac{U^2}{H\omega}\right)\left(1.22\frac{H-z}{z}\right)^E \qquad (7-2-23)$$

但（7—2—23）中的 U 是潮段平均流速，如设在瞬时流速下也适用，则得

$$\varnothing_z=0.0068\left(\frac{\bar{u}^2}{H\omega}\right)\left(1.22\frac{H-z}{z}\right)^E$$

式中 $\bar{u}$——瞬时的垂线平均流速。

除了上述公式外，为了建立三维适用的挟沙力公式，笔者还利用1988年7月天津港实测资料求得局部点的挟沙力经验关系式为

$$\varnothing_k=2.47\left(\frac{u_k^2+v_k^2}{\omega H_z}\right)^{0.02},\qquad u=\sqrt{u_k^2+v_k^2}$$

式中 H_z——该点与自由水面的距离；

u_k、v_k——该点的 x 向和 y 向分速度。

（4）临界剪切应力 τ_d、τ_e

临界剪切应力与当地泥沙特性有关，应通过实验确定。下面仅介绍一些实测结果。

地点	τ_d (Pa)	τ_e (Pa)
HR（英国）	0.07	(0.16)
熊本（日本）	0.062	0.15

注：$\tau_e/\tau_d \approx 9/4$。表中括号内数据是按比例推得的。

（5）水平紊流扩散系数 k_x、k_y

k_x、k_y 与当地水流状态有关，应通过现场实测而得。

7.3 底沙推移

底沙推移运动十分复杂，不仅影响因素多，而且实测又极其困难，在滨海中尤其如此。因此，如何计算海底推移质运动，目前还存在不少问题，大多只能利用一些水槽试验，并作一些分析推算，初步建立试用的公式。

7.3.1 波浪作用下的推移质输沙

在推移质输沙理论中，大都将水流的输沙率与水流强度联系起来，但是用什么样的水流因子（如流量、流速、拖曳力或消耗能量等）来表示水流强度，至今仍意见不一。

推移质输沙问题是泥沙研究中解决得最差的课题之一，波浪作用下的推移质输沙更是如此。本节只介绍一些应用成果，供参考。

1963年，R. A. Bagnold 根据波能消耗理论研究了推移质运动，认为搬运推移质应消耗一定的波能，由此得出

$$q_b = \alpha E$$

式中，q_b 为波浪半周期内的平均重量输沙率；E 为波能；α 为系数。显然，确定系数 α 是个关键，但是很困难。

1972年，H. A. Einstein 在美国伯克莱加州大学对波浪作用下的泥沙运动进行了一系列试验研究，提出了两个参数，即半周期平均推移质输沙函数 $\varnothing'$ 与水流强度参数 ψ，并得出了这两个参数之间的关系式

$$\varnothing' = \frac{\bar{q}_b}{\gamma_s d\sqrt{(s-1)\ gd}}$$

$$\psi = \frac{u_a^2}{(s-1)\ gd}$$

式中 $\bar{q}_b$——半周期平均输沙率；

u_a——理论床面 $0.35d_{50}$ 处的流速。

1976年，O. S. Madsen 和 W. D. Grant 进一步分析了 Einstein 的实验资料后，得出下述简单经验公式

$$\varnothing = 12.5\psi_m^2 \qquad (7-3-1)$$

式中 $\varnothing$——半周期平均输沙函数，

$$\varnothing = \frac{q_b}{\gamma_s d_{50} w_f}$$；

ψ_m——对应于底部剪切应力为最大值的 Shields 参数值，

$$\psi = \frac{\tau_b}{(\gamma_s - \gamma)\ d_{50}}$$；

q_b——半周期平均输沙率；

γ_s——泥沙容重；

w_f——泥沙沉降速度；

τ_b——底部剪切应力。

1987年，天津大学水利系在水槽中对上式进行了验证，认为上式在波浪中是可用的。但从 Madsen 的实验结果发现，当 q_b 大于 0.08以后，计算值显著大于实验值。

1976年，F. Engelund 和 J. Fredsøe 基于 Bagnold 的物理概念，提出了一个简单的推移质输沙模型，从而得出

$$\varnothing=\frac{\alpha}{\beta}\ (\psi-\psi_c)\ (\sqrt{\psi}-0.7\sqrt{\psi_c})$$

式中 α——理论床面上某一高度（约为2.0～5.0d_{50}）处流速与床面摩阻系数之比，根据实验 $\alpha=10$；

β——推移质运动摩擦系数，据实验取 $\beta=1.0$；

ψ_c——相当于 d_{50}泥沙起动时之 Shields 参数。

Engelund 给出 $\alpha/\beta=11.6$。

1984年，天津大学水利系又将上式移植到波浪中。首先，发现推移质输沙率随输移力变化而迅速反映，如忽略惯性效应，即认为每一瞬间，下式均成立：

$$\varnothing_{(t)}=\frac{\alpha}{\beta}\ (\psi_{(t)}-\psi_c)\ (\sqrt{\psi}_{(t)}-0.7\sqrt{\psi_c})$$

式中 $\psi_{(t)}=\dfrac{\tau_{b(t)}}{(\gamma_s-\gamma)\ d_{50}}$

在波浪中，底部剪切应力

$$\tau_{b(t)}=\frac{1}{2}\rho f_w|u_{b(t)}|u_{b(t)}$$

式中 f_w——波浪摩阻系数；

$u_{b(t)}$——波浪底部瞬时流速，

$u_{b(t)}=u_{bmax}\cos\theta$。

即得 $\tau_{b(t)}=\dfrac{1}{2}\rho f_w u_{bmax}^2|\cos\theta|\cos\theta$

或 $\tau_{b(t)}=\tau_{bmax}|\cos\theta|\cos\theta$

由此得 $\psi_{(t)}=\dfrac{\tau_{bmax}}{(\gamma_s-\gamma)\ d_{50}}|\cos\theta|\cos\theta$

或 $\psi_{(t)}=\psi_m|\cos\theta|\cos\theta$

由此可得$\varnothing_{(t)}=\dfrac{\alpha}{\beta}\ [\psi_m\cos\theta\cos\theta-\psi_c]\ [\sqrt{\psi_m\cos\theta\cos\theta}-\sqrt{\psi_c}]$

考虑波浪半周期，则上式可写成

$$\psi_{(t)}=\frac{\alpha}{\beta}\ [\psi_m\cos^2\theta-\psi_c]\ [\sqrt{\psi_m}\cos\theta-\sqrt{\psi_c}]$$

半周期输沙将是在$-\theta_1\sim\theta_1$之间积分求得。因此可知

$$\varnothing=\frac{1}{\pi}\int_{-\theta_1}^{+\theta_1}\varnothing_{(t)}\mathrm{d}\theta=\frac{2}{\pi}\int_0^{\theta_1}\varnothing_{(t)}\mathrm{d}\theta=\frac{\alpha}{\beta}\int_0^{\theta_1}(\psi_m\cos^2\theta-\psi_c)$$

$$(\sqrt{\psi}_m\cos\theta-\sqrt{\psi_c})\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{2}{\pi}\frac{\alpha}{\beta}\psi_m^{3/2}\left[\sqrt{1-c}\left(\frac{2}{3}-1.0167c\right)+0.35\sqrt{c}\,(2c-1)\cos\sqrt{c}\right]$$

式中

$$c=\frac{\psi_c}{\psi_m}\qquad 0<c<1$$

或 $c=\tau_c/\tau_m$ 或 $c=u^2/u_{\max}^2$

上式经实验资料证明，在波浪中 $\alpha/\beta=2\pi$。对上式进一步整理，得

$$\varnothing=\psi_m^{3/2}4\left[\sqrt{1-c}\left(\frac{2}{3}-1.0167c\right)+0.35\sqrt{c}\,(2c-1)\arccos\sqrt{c}\right.$$

或 $$\varnothing=\psi_m^{3/2}\cdot D \qquad (7-3-2)$$

显然，D是C的函数。为使用方便，可制成图表（见下表）。为便于比较，下表同时给出 $D=D\times\frac{11.6}{2\pi}$。

C	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00
D	2.67	1.70	1.24	0.91	0.65	0.45	0.29	0.17	0.09	0.03	0.00
D	4.92	3.14	2.29	1.67	1.20	0.83	0.54	0.32	0.16	0.05	0.00

7.3.2 潮流、波浪作用下的推移质输沙

1. 概述

水流作用下的推移质输沙是泥沙研究中较薄弱的环节之一，波浪作用下的推移质输沙则研究得更不够，而波浪、潮流共同作用下的推移质输沙研究，则远远不能满足实际工程的需要。

为了工程需要而进行潮流、波浪作用下的推移质输沙计算时，纯粹从理论上进行解析求解，困难很大，为此，不得不借助于水流推移输沙和波浪输沙的已有成果。

在水流中推移输沙可用下面简洁的公式表示：

$$\varnothing_s = A_s \psi_s^{m_s} \qquad (7-3-3)$$

式中 $\varnothing_s$——单宽推移质输沙函数；

ψ_s——推移质输沙水力强度函数；

A_s——系数，$A_s=10\sim40$；

b_s——系数，$b_s=3/2\sim3$。

波浪作用下的推移质输沙也有同样简洁的形式：

$$\varnothing_w = A_w \psi_w^{m_w} \qquad (7-3-4)$$

式中 $\varnothing_w$——波浪半周期内平均输沙函数；

ψ_w——波浪的水力强度函数；

A_w、b_w——分别为系数。

因此，在波浪、潮流共同作用下，我们有理由假设可用同样简洁的形式表示：

$$\varnothing = A\psi \qquad (7-3-5)$$

式中 $\varnothing$——潮流、波浪共同作用下推移质输沙函数；

ψ——潮流、波浪共同作用下水力强度函数；

A、b——系数。

在上述公式中，如何得出系数 A、b 是研究的关键之一。

2. **推移输沙过程**

在潮流、波浪作用下，由于潮流的变化周期远比波浪大得多，因此，在波浪变化的一个周期内，可设潮流为常数。因此，在波浪一个周期内的流速变化过程可由图7—3—1表示。

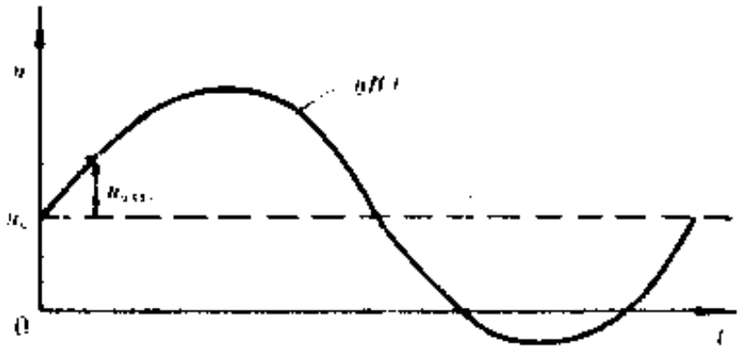


图7—3—1 波浪、潮流合成流速过程

由图可知，任一瞬时的流速系由波浪及水流的两部分流速合成。

$$u_{(t)}=u_w+u_w\ (t)$$

式中 $u_{(t)}$——合成流速；

u_w——水流速，u_w 为常数；

$u_w\ (t)$——波浪质点流速，随时间而变。

相应于上述流速过程的水力强度函数 $\psi_{(t)}$ 同样是时间的函数，其变化过程如图7—3—2所示。

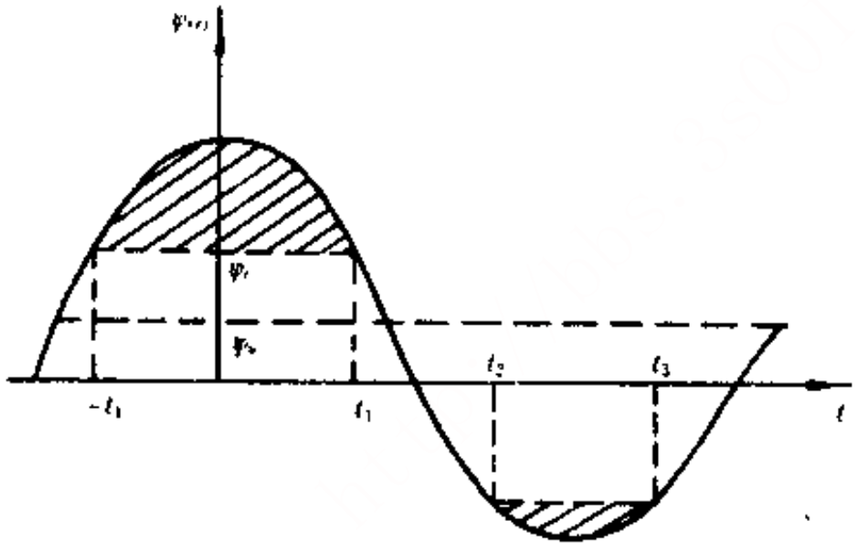


图7—3—2 $\psi_{(t)}$变化过程

图7—3—2中，ψ_w 为相应于水流速 u 的水力强度函数，ψ_c 为相应于底沙起动时之水力强度函数。

在波浪、水流共同作用下，只有当水力强度 $\psi_{(t)}$ 大于 ψ_c 时，才发生推移。在图7—3—2中，只有在$-t_1\sim t_1$及$t_2\sim t_3$范围（斜线阴影所示）内，才有底沙推移。

根据1976年 F. Engelund 和 J. Fredsøe 提出的推移输沙模型，假定推移输沙率随拖曳力变化而迅速反应，并忽略惯性影响，则同样可建立潮流、波浪作用下的如下输沙公式

$$\varnothing_{(t)}=\frac{\alpha}{\beta}\ (\psi_{(t)}-\psi_c)\ (\sqrt{\psi_{(t)}}-0.7\sqrt{\psi_c}) \qquad (7-3-6)$$

$$\psi_{(t)}=\frac{\tau_{b(t)}}{(\gamma_s-\gamma)\ d_{50}} \qquad (7-3-7)$$

式中 α——理论床面上某一高度（约为$d_{50}\sim 2d_{50}$）处流速与床面

摩阻系数之比；

β——推移质运动摩阻系数，根据 Engelund 的实验，$\frac{\alpha}{\beta}=11.6$；根据天津大学水利系在波浪推移质的水槽试验，$\frac{\alpha}{\beta}=2\pi$；

$\psi_{(t)}$——水力强度参数；

$\tau_{b(t)}$——潮流、波浪共同作用下的底部剪切应力。

今采用（7—2—15b）的表达式，即

$$\tau_{b(t)}=\rho f_c|U_{c(t)}|U_{c(t)}+\frac{\rho}{2}f_w|u_{w(t)}|u_{w(t)}$$

$$+\frac{4\rho}{\pi}\sqrt{f_c f_w}|U_{c(t)}|u_{w(t)}$$

上式可改写成以下形式：

$$\tau_{b(t)}=\tau_c+\tau_{cw}+\tau_w \qquad (7-3-8)$$

从上式可知，潮流、波浪共同作用下的底部剪切应力可分成三部分：

（1）τ_c，单纯水流作用下的剪切应力，

$$\tau_c=\rho f_c|U_c|u_c$$

（2）τ_{cw}，波、流相互影响的次生剪切应力，

$$\tau_{cw}=4\rho\sqrt{f_c f_w}|U_c|u_w/\pi$$

（3）τ_w，单纯波浪作用下的剪切应力，

$$\tau_w=\rho f_w|u_w|u_w/2$$

将（7—3—8）式代入（7—3—7）式可得

$$\psi_{(t)}=\psi_c+\psi_w|\cos\theta|\cos\theta+\psi_{cw}\cos\theta \qquad (7-3-9)$$

式中 ψ_w——波浪水力强度参数；

ψ_c——水流水力强度参数；

ψ_{cw}——波浪、水流相互影响后的次生水力强度参数。

将（7—3—9）式代入（7—3—6）式并经整理后可得

$$\varnothing_{(t)}=\frac{\alpha}{\beta}\left(\psi_c+\psi_w|\cos\theta|\cos\theta+\psi_{cw}\cos\theta-\psi_c\right)$$

$$\left(\sqrt{\psi_c+\psi_w|\cos\theta|\cos\theta+\psi_{cw}\cos\theta}-0.7\sqrt{\psi_c}\right)$$

式中 ψ_c——起动临界水力强度参数。

考虑波浪前半周期（后半周期相似）。在前半周期内积分取平均值，

$$\varnothing=\frac{1}{\pi}\int_{-\theta_1}^{\theta_1}\varnothing_{(t)}\mathrm{d}\theta\ (t)\ =\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\theta_1}\varnothing_{(t)}\mathrm{d}\theta\ (t)\quad(7-3-10)$$

由于 $\psi_{(t)}\geqslant\psi_c$ 才发生推移，相应于 ψ_c 时之 θ_1 为积分控制条件。θ_1 值可由下式求得：

$$\psi_c=\psi_c+\psi_w\cos^2\theta_1+\psi_{cw}\cos\theta_1$$

由此得

$$\cos\theta_1=\frac{-\psi_{cw}\pm\sqrt{\psi_{cw}^2-4\psi_w\ (\psi_c-\psi_c)}}{2\psi_w}\qquad(7-3-11)$$

从（7—3—11）式求得 θ_1 后，代入（7—3—10）式，经积分和整理，可得

$$\varnothing=\psi_m^{3/2}\ \frac{2}{\pi}\frac{\alpha}{\beta}f\ (I)\qquad(7-3-12)$$

式中 $I=\cos\theta_1$，而 $f\ (I)$ 为一复杂的表达式。

将（7—3—12）式写成更简单的表达式

$$\varnothing=A\psi_m^{3/2}$$

式中，A 为系数，应由实测资料来确定。

3. **输沙计算**

由上分析，我们得出波浪、潮流共同作用下的推移质输沙公式

$$\varnothing=A\psi_m^{3/2}\qquad(7-3-13)$$

式中 $\varnothing$——在波浪半周期内的波浪、潮流平均输沙率函数；

ψ_m——波浪、潮流作用力参数；

A——系数，利用大量实测资料整理得出

$$A=3.4\left(1-\sqrt{\frac{\psi_c}{\psi}}\right)\sqrt{\frac{s-1}{f_w}}\frac{\sqrt{gd_{50}}}{\omega_s}$$

将 A 代入（7—3—13）式并经整理后可得输沙率表达式为

$$q_b = 3.14\left(1-\sqrt{\frac{\tau_c'}{\tau}}\right)\sqrt{\frac{1}{f_w\rho_s}}\frac{\tau^{3/2}}{(s-1)} \qquad (7—3—14)$$

$$S=\frac{\gamma_s}{\gamma}$$

式中 γ_s——泥沙容重；

γ—— 水容重；

ρ_s——泥沙密度；

τ_c'——泥沙临界起动剪切应力；

q_b——输沙率；

τ——剪切力；

f_w——摩阻系数。

波浪流场有双向变化，而潮流在一个波浪周期内为单向。当波浪方向与潮流方向一致时，其输沙量常大于波浪与潮流方向相反时的输沙量，两者差即为一个波浪周期内的净输沙量，除以波浪周期则为平均净输沙率。

计算波浪、潮流共同作用下的推沙质输沙率时应区分以下三种情况。

（1）波浪与潮流方向一致；

（2）波浪与潮流方向呈一夹角；

（3）波浪与旋转潮流联合作用。

下面分别介绍这三种情况下的推移质输沙率计算。

（1）波浪与潮流方向一致（重合）

这时的平均净输沙率为

$$\bar{q}_b=\frac{q_{b1}T_1-q_{b2}T_2}{T_1+T_2}$$

式中 q_{b1}——波浪与潮流方向一致时的输沙率；

T_1——波浪与潮流方向一致时的时间段；

q_{b2}——波浪与潮流方向相反时的输沙率；

T_2——波浪与潮流方向相反时的时间段。

（2）波浪与潮流方向呈一夹角

为计算方便起见，可取参考直角坐标系统XOY，设潮流方向与X轴间夹角为θ_t，波浪与X轴间的夹角为θ_w，波浪与潮流间的夹角为φ（$\varphi=\theta_w-\theta_t$），各量间关系如图7—3—3所示。

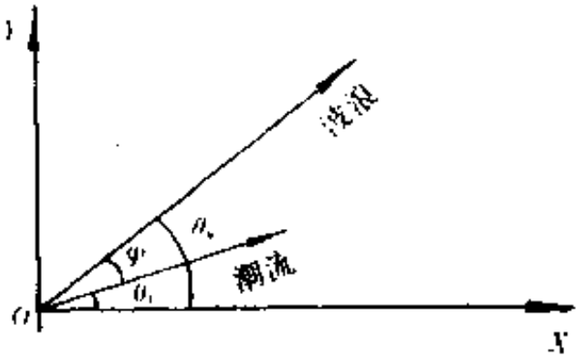


图7—3—3　波浪、潮流方向图

当波浪与潮流“同向”（即$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$）的前半周期内，波浪和潮流的合成剪切应力

$$\tau_{x1}=\rho f_w U_b^2\cos\theta_w+\rho f_c U^2\cos\theta_t+\rho B\left(\frac{f_w f_c}{2}\right)^{1/2}|UU_b|\cos\theta_w$$

$$\tau_{y1}=\rho f_w U_b^2\sin\theta_w+\rho f_c U^2\sin\theta_t+\rho B\left(\frac{f_w f_c}{2}\right)^{1/2}|UU_b|\sin\theta_w$$

$$\tau_{s1}=(\tau_{x1}^2+\tau_{y1}^2)^{1/2}$$

合成剪切应力τ_1与X轴的夹角

$$\theta_1=\mathrm{arctg}\left(\frac{\tau_{y1}}{\tau_{x1}}\right)$$

与此相对应的单宽输沙率

$$q_{s1}=3.4\left(1-\sqrt{\frac{\tau_0}{\tau_1}}\right)\sqrt{\frac{g}{f_w\gamma}}\frac{\tau_1^{3/2}}{\Delta\gamma}$$

在波浪与潮流“反向”的后半周期内，波浪与潮流的合成剪切应力

$$\tau_{x2}=\rho f_w U_b^2\cos(\pi+\theta_w)+\rho f_c U^2\cos\theta_t+\rho B\left(\frac{f_w f_c}{2}\right)^{1/2}|UU_b|\cos(\pi+\theta_w)$$

$$\tau_{y2}=\rho f_w U_b^2\sin(\pi+\theta_w)+\rho f_c U^2\sin\theta_t+\rho B\left(\frac{f_w f_c}{2}\right)^{1/2}|UU_b|\sin(\pi+\theta_w)$$

$$\tau_2 = (\tau_{x2}^2 + \tau_{y2}^2)^{1/2}$$

合成剪切应力 τ_2 与 X 轴的夹角

$$\theta_2 = \text{arctg}\left(\frac{\tau_{y2}}{\tau_{x2}}\right) \qquad (7-3-15)$$

与此相对应的单宽输沙率

$$g_{b2} = 3.4\left(1-\sqrt{\frac{\tau_c}{\tau_2}}\right)\sqrt{\frac{g}{f_w\gamma}}\frac{\tau_2^{3/2}}{\Delta\gamma}$$

q_{b1} 和 q_{b2} 是两个向量，波浪与潮流联合作用下单宽净输沙率和方向分别为

$$q_b = \frac{[(q_{b1}T_1\cos\theta_1 + q_{b2}T_2\cos\theta_2)^2 + (q_{b1}T_1\sin\theta_1 + q_{b2}T_2\sin\theta_2)^2]^{1/2}}{T_1+T_2}$$

$$\theta = \text{arctg}\left[\frac{(q_{b1}T_1\sin\theta_1 + q_{b2}T_2\sin\theta_2)}{(q_{b1}T_1\cos\theta_1 + q_{b2}T_2\cos\theta_2)}\right]$$

（3）波浪与旋转潮流联合作用

自然界的潮流不仅方向旋转，而且数值也不断变化。此外，波浪也会不断变化。在这种情况下，净输沙率的数值与方向也是变化的。因此，计算天然状态中波浪与潮流共同作用下的推移质输沙应分时段、分级计算。

几点说明：

在建立输沙公式时，曾假定：（1）推移输沙率随拖曳力变化而迅速反应；（2）忽略惯性影响。若此两个假定产生一定误差，则惯性影响随泥沙粒径增大而增大，随波浪增大而减小。根据已有试验资料分析得知：$d_{50}=0.35$mm 及波浪周期 $T=2$s 时，惯性影响使输沙率减小约3.5%。在实际细粉粒中，d_{50}常小于0.35mm，而天然波浪 T 常大于2s，所以，因不考虑惯性影响而造成的误差显然还不到3.5%。

另外，还存在波形不对称、传质速度及波浪二阶等的影响，但它们的影响程度均在本方法的精度范围内。由于波浪、潮流作用下底沙输移的基本方程还值得商榷。因此进一步讨论二阶精度所造成的误差，目前还提不到日程上来。

7.4 浮泥流

浮泥(fluid mud)是淤泥质海岸河口地区特有的一种泥沙运动状态，已在国内外很多地区发现。

浮泥虽与航道港口淤积、海岸河口演变、航行水深利用、疏浚弃土运移等许多实际问题有关，但因浮泥在现场测验和室内实验方面存在很多技术上的困难，因此至今对浮泥的运动机理和模拟技术仍未完全解决。本书在初步分析了浮泥运动的物理力学过程后，建立了浮泥流的数值模拟，以供工程应用。

7.4.1 浮泥流的特性

一、浮泥的定义和界限

浮泥是贴近海底的一层高浓度含沙水体，它与上层水体有明显的界面，流动性很大。由于浮泥的许多特性与容重有密切关系，因此大多数研究者采用容重（或含沙浓度）的界限来定义浮泥。关于浮泥特征的上、下限可用下述原理来确定。

含沙水体泥沙在絮凝沉降过程中，底部泥浆与上部水体出现清晰界面，泥浆流型从牛顿体变为宾汉体，这时为浮泥的下限。浮泥的流动性明显消失，流变参数随浮泥容重的增加而急剧上升，即为上限。

以下是一些研究者所采用的浮泥特征上、下限。

天津新港和连云港都采用容重来定义浮泥的界限，下限为1.03～1.05，上限为1.25～1.30。

英国Odd和Rodger采用含沙浓度来定义浮泥，下限为50，000ppm（合容重1.08），上限为120，000ppm（合容重1.2）。

洪柔嘉等根据试验结果，采用容重定义浮泥，下限为1.06，上限为1.20～1.25。

由于浮泥特性还与矿物组成、粒径级配、水质等多种因素有关，因此，各地浮泥的上、下限不会相同，但从上述资料可知，基本相接近。

二、浮泥的形成

粘性土悬沙在沉降过程中，由于絮凝作用，泥颗粒形成絮粒，至一定浓度后，絮粒聚集成蜂窝状高含水絮团结构，并与上层水体间出现清晰界面，即为浮泥。形成浮泥的必要条件是悬沙落淤率 F_s 大于浮泥沉积率 D，它们分别由下式表示

$$F_s=\alpha\omega_f S\left(1-\frac{\tau}{\tau_d}\right)$$

$$D=S_m\omega_m$$

式中 α——悬沙絮凝沉降率，$\alpha=0.3\sim0.45$；

S——水体含沙量；

ω_f——悬沙絮凝沉降速度；

τ——水底剪切应力；

τ_d——悬沙淤积临界剪切应力；

S_m——浮泥含沙量；

ω_m——浮泥沉积速度。

根据现场资料，海岸浮泥在平潮时出现，因此由上式可得

$$\alpha\omega_f S=S_m\omega_m$$

根据研究，$\omega_s=\alpha_1 S^{\beta_1}$，则上式可写成

$$S=\left(\frac{S_m\omega_m}{\alpha\alpha_1}\right)^{\frac{1}{\beta_1+1}}$$

根据现场资料得 $\alpha_1=0.513$，$\beta_1=1.29$。如取常见的浮泥容重 $\gamma_m=1.10$时，相应的含沙量为 $S_m=158\text{kg/m}^3$；浮泥沉速 $\omega_m=0.05\text{mm/s}$，取 $\alpha=0.3$，代入上式可得形成浮泥的最小含沙量为 5.58kg/m^3。Odd 和 Rodger 根据塞维尔河口现场资料算得形成浮泥的最小含沙浓度为2500ppm，相应的含沙量为6.75kg/m^3。

根据天津新港现场资料，通常在大风浪延续一定时间水体含

沙量达到一定数量后，才会发现浮泥。下表是出现浮泥的一些统计数。

天津出现浮泥的时间表

日/月	6/4	19－20/4	23－25/4	3/5	5/5	15～17/5	28/5	1/6	8/6	10/6	12/6	1/8
最大风速 m/s	16.3	13.3	15.7	9.7	10.7	12.0	11.7	13.7	13.7	10.0	14.0	19.3
风延时 (h)	46	22	23	6	5	37	9	9	7	5	16	17
浮泥延时 (h)	144	48	72	24	24	96	24	48	48	24	48	72

以上资料也间接表明，悬沙量达到一定数量后，浮泥才能形成。

三、浮泥的流变特性

在浮泥定义的界限内，浮泥的流型为宾汉体。在层流条件下，流变方程为

$$\tau=\tau_B+\eta\frac{du}{dy}$$

式中 τ_B——宾汉体临界剪切应力；

η——刚体系数；

关于流变特性 τ_B 和 η，国内外已进行了很多研究。据最近研究，浮泥的 τ_B 和 η 与容重关系密切，而盐度、温度影响不大。经多次试验，τ_B 和 η 的经验关系式为

$$\tau_B=\alpha_1\exp\ (\beta_1 S_v)$$

$$\eta=\alpha_2\exp\ (\beta_2 S_v)$$

式中 S_v——体积含沙浓度。

根据试验资料，α_1，α_2，β_1，β_2 系数如下：

地点	α_1	β_1	α_2	β_2
连云港	0.1884	2.1865	0.00054	2.069(
天津新港	0.1104	2.1969	0.00096	1.429(
长江口	0.1596	1.5204	0.0025	0.4610
黄河口	0.0335	2.0270	0.0013	0.5326

四、浮泥的起动

在水流作用下，当水流底部剪切应力 τ_b 大于浮泥的宾汉应力 τ_B 时，泥面出现波动，随着流速不断加大，至某一临界流速时，泥面波失稳，产生缕状悬沙烟雾进入水体，这时的流速即为悬扬起动流速。通常可采用量纲分析和试验资料相结合的方法，求出悬扬起动流速。下面是根据试验资料而整理的两个经验公式

$$u_0 = 9.90\left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\mu_s\right)^{5/9}\left(\frac{H}{v}\right)^{1/8}$$

$$u_0 = 5.62\left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\nu_m g\right)^{1/3} + 3.03\left(\frac{\tau_B}{\rho}\right)^{1.20}(\nu g)^{-0.467}$$

式中 μ_s——浮泥和水的相对粘度；

H——水深；

ν——水的运动粘性系数；

ν_m——浮泥的运动粘性系数。

五、水流作用下的浮泥运动

当水流流速超过浮泥的悬扬起动流速后，浮泥中大量泥沙卷入水体，在上层水体与下层浮泥之间形成含沙量渐变过渡段，过渡段的厚度与浮泥容重及流速大小有关。浮泥容重愈小，水流速愈大，则过渡段厚度愈大，其厚度一般为0.2～0.6m。过渡段的存在，对水流底部的紊动起到了抑制作用，因而影响浮泥向悬沙的转移。

随着水流流速的加大，过渡段以下的浮泥也会发生运移。发生运移的厚度 h_m 与浮泥面的运移速度 u_{m0} 有关，根据试验得知

$$\frac{h_m}{H} = 0.145\ln\left(\frac{u_{m0}}{u_0}\right)$$

式中 u_0——浮泥面开始运移的水流速度，$u_0 = 5.5\text{cm/s}$；

u_{m0}——浮泥面的运移速度。

根据试验，浮泥面的运移速度与水流底部质点运动速度之比为0.63。

根据另一试验，得出水流作用下浮泥单宽输沙率的经验公式为

$$q=0.0003u_{m0}^3$$

7.4.2 浮泥流的基本运动方程

取出海底浮泥体（厚h_m）来分析。浮泥之上是含沙水体，浮泥之下是泥底床（见图7—4—1）。

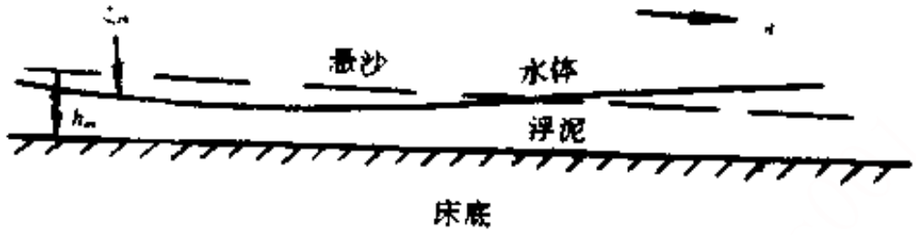


图7—4—1 浮泥示意图

由于浮泥运动较慢，扩散也较慢，因而对流项和扩散项可略去，由此可得基本运动方程。

一、动量方程

先考虑单元柱体各作用力在x方向上的投影（图7—4—2）。

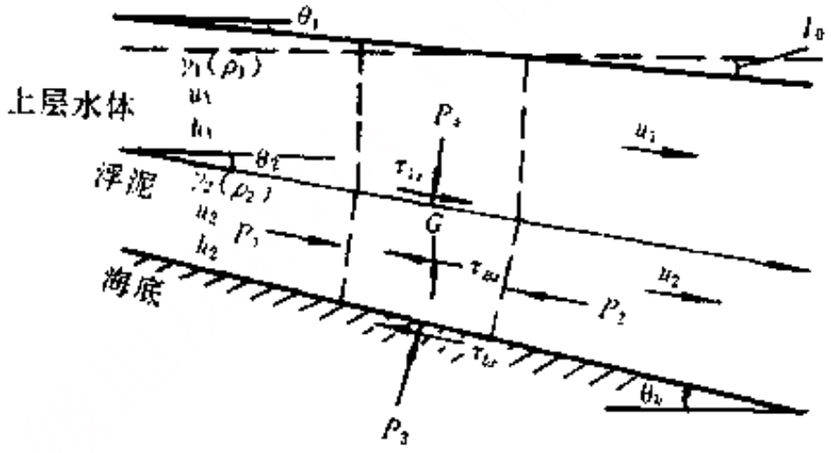


图7—4—2 浮泥在x向的受力图

1. 侧向压力差

作用在浮泥侧面的总压力为

$$P=\gamma_1 h_1 h_2+\frac{\gamma_2 h_2^2}{2}$$

因此侧向压力差

$$\frac{\partial P}{\partial x}=(\gamma_1 h_1+\gamma_2 h_2)\frac{\partial h_2}{\partial x}+\gamma_1 h_2\frac{\partial h_1}{\partial x}$$

2. 底部反力 P_3 在 x 向的投影

$$P_3\sin(\theta_b-\theta_2)=(\gamma_1 h_1+\gamma_2 h_2)\frac{\partial h_2}{\partial x}$$

3. 重力在 x 向的投影

$$G\sin\theta_2=\gamma_2 h_2\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}-\frac{\partial h_1}{\partial x}\right)$$

4. 上层流体对浮泥面的作用力

P_4 与浮泥面垂直，在 x 向投影为0。

剪切力 τ_{1x} 与 x 平行，其值如下

$$\tau_{1x}=\rho C_f|U_1-U_2|(u_1-u_2)$$

5. 底部阻力 τ_b 在 x 向投影

$$\tau_{bx}=\tau_b\cos(\theta_b-\theta_2)\approx\rho_2 C_f|U|u$$

6. 宾汉应力 τ_B 在 x 向投影

$$\tau_{Bx}=\tau_B\frac{u_2}{\sqrt{u_2^2+v_2^2}}$$

7. 惯性力在 x 向投影

$$I_x=\frac{\gamma_2}{g}h_2\left(\frac{\partial u_2}{\partial t}+u_2\frac{\partial u_2}{\partial x}+v_2\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)$$

将上述各力按作用方向代数相加，经整理后，即可得出 x 向的动量方程为

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}+u_2\frac{\partial u_2}{\partial x}+v_2\frac{\partial u_2}{\partial y}+g\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{\partial \zeta}{\partial x}+g\frac{\Delta\rho}{\rho_2}\frac{\partial h_2}{\partial x}$$
$$-g\frac{\Delta\rho}{\rho_2}J_{bx}-fv_2+\frac{1}{\rho_2 h_2}(\tau_{bx}+\tau_{Bx}-\tau_{1x})=0 \qquad (7-4-1)$$

同理可得 y 向的动量方程为

$$\frac{\partial v_2}{\partial t}+u_2\frac{\partial v_2}{\partial x}+v_2\frac{\partial v_2}{\partial y}+g\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{\partial \zeta}{\partial y}+g\frac{\Delta\rho}{\rho_2}\frac{\partial h_2}{\partial y}$$
$$-g\frac{\Delta\rho}{\rho_2}J_{by}+fu_2+\frac{1}{\rho_2 h_2}(\tau_{by}+\tau_{By}-\tau_{1y})=0 \qquad (7-4-2)$$

式中 u_2、v_2——分别为浮泥在 x、y 向流速；

$\Delta\rho=\rho_2-\rho_1$，ρ_2 为浮泥密度，ρ_1 为水密度；

ζ——自由水面和静止水面时的超高；

h_2——浮泥厚度；

τ_{1x}，τ_{1y}——上层水体对浮泥界面的剪切力 τ_1 在 x 和 y 向的分量；

τ_B——浮泥的宾汉应力；

τ_b——浮泥在底部的剪切应力；

f——地球自转时的柯氏系数。

二、连续方程

根据质量守恒定律可得连续方程

$$\frac{\partial h_2}{\partial t}+\frac{\partial u_2 h_2}{\partial x}+\frac{\partial v_2 h_2}{\partial y}-\frac{F_s}{S_m}+w_m=0 \qquad (7-4-3)$$

式中，F_s 为悬沙的冲淤函数，其值由 τ_1 与泥沙的两个临界剪切力 τ_d 和 τ_e 相比较而定。

当 τ_1 小于沉积临界剪切应力时（$\tau_1 \leqslant \tau_d$），

$$F_s=\alpha w_f S\left(1-\frac{\tau_1}{\tau_d}\right)$$

当 τ_1 在此两个临界应力之间时（$\tau_d<\tau_1<\tau_e$），

$$F_s=0$$

当 τ_1 大于冲刷临界剪切应力时（$\tau_1 \geqslant \tau_e$），

$$F_s=-M\left(\frac{\tau_e}{\tau}-1\right)$$

式中 α——泥沙沉降机率；

w_f——泥沙沉降速度；

S——上层水体中含沙量；

τ_d——泥沙沉积临界切应力；

τ_e——泥沙冲刷临界切应力；

M——冲刷系数，由实验确定；

w_m——浮泥面压缩沉降速度。

控制方程（7—3—14）～（7—3—16）结合定解条件，即可求解。

在上述连续方程中，等式左边最后两项表示浮泥层因上部悬

沙落淤和浮泥本身压缩而引起的浮泥厚度的变化，如以$\frac{dm}{dt}$表示这种变化率，则连续方程又可写成另一种形式

$$\frac{\partial h_2}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(h_2u_2)+\frac{\partial}{\partial y}(h_2v_2)-\frac{1}{\gamma_2}\frac{dm}{dt}=0$$

下面研究引起浮泥变化$\frac{dm}{dt}$（以重量计）的各种情况（图7—4—3所示）。

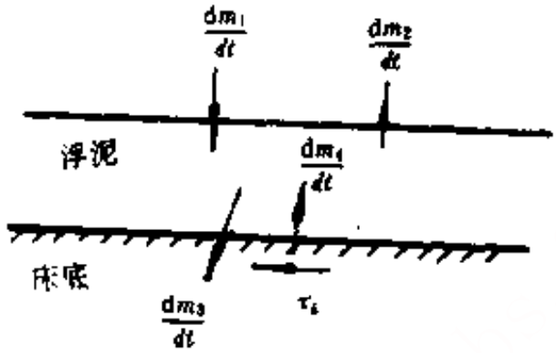


图7—4—3

(a) 悬沙沉积$\frac{dm_1}{dt}$

当悬沙水体对浮泥面的剪切应力τ_i小于悬沙的不淤临界剪切应力τ_d时，悬沙即落淤至下部而转化为浮泥，其落淤率

$$\frac{dm_1}{dt}=\alpha\omega_s S\left(1-\frac{\tau_i}{\tau_d}\right)$$

式中 α——悬沙沉降机率；

ω_s——悬沙沉降速度；

S——悬沙浓度；

τ_i——悬沙水体对浮泥下界面剪切应力；

τ_d——悬沙不淤临界剪切应力。

(b) 浮泥扬起$\frac{dm_2}{dt}$

当悬沙水体对浮泥上界面的剪切应力τ_i大于浮泥的扬起临界剪切应力τ_e时，浮泥即被扬起，这时浮泥的损失率为

$$\frac{dm_2}{dt}=-M_e\left(\frac{\tau_e}{\tau_i}-1\right)$$

式中 M_e——系数，由试验确定。

关于浮泥扬起问题，英国 HR 曾建议从另一角度来考虑。他们认为，如果 R_i 数（Richardson）小于10，则浮泥就会扬起。这种现象和盐水从盐水楔中扬起很相似。

R_i 的表示式为

$$R_i=\frac{\Delta\rho g h_m}{(\Delta U)^2}$$

式中 $\Delta\rho=0.62\gamma_m$；

ΔU——悬沙水流流速与浮泥流速度之差，

$$\Delta U=\left[(u-u_m)^2+(v-v_m)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

u，v——上层整个水体的垂线平均分速。当 $R_i<10$ 时，浮泥扬起率

$$\frac{dm_2}{dt}=-w_R S_m\ (R_i-10)\ H_{(x)}$$

式中 $H_{(x)}$ 为 Heavside 函数，

当 $x>0$ 时，$H_{(x)}=1$；

当 $x\leqslant 0$ 时，$H_{(x)}=0$；

w_R——浮泥扬起速度，

$$w_R=\Delta U\frac{0.1}{(1+63R_i^2)^{3/4}}$$

由于研究多采用剪切应力计算，考虑到系统的一致性，便于计算机编制程序，因此许多研究在计算 dm_2/dt 时，仍采用剪切应力法。

(c) 浮泥固结 $\frac{dm_3}{dt}$

如果浮泥停止流动，$U_m=0$，$V_m=0$，浮泥将发生固结，这时浮泥压缩量为

$$\frac{dm_3}{dt}=-w_d S_m$$

上式中，根据 HR 资料，取 $w_d=5\times10^{-5}$m/s，根据日本熊本港实测资料分析，$w_d=3.5\times10^{-5}$m/s。

(d) 床底扬起成浮泥 $\frac{dm_4}{dt}$

若浮泥运移速度很大，例如浮泥从海底斜坡下滑，或疏浚抛泥至底部成浮泥而向四外漫流等，这时，当浮泥对床底的剪切应力 τ_0 大于床底的起动临界剪切应力 τ_c 时，床底淤泥也有可能被掀起进入浮泥层，这时的浮泥增加率为

$$\frac{dm_b}{dt}=M_m\left(\frac{\tau_0}{\tau_c}-1\right)$$

式中 M_m——系数，应由试验决定。

上述四种情况绝不会同时发生，在计算中应根据不同条件，选择不同计算情况。

7.5 海底地形变化及冲淤量计算

在计算海底地形变化时，一般可用如下通用方程

$$\gamma_b\frac{\partial\zeta_b}{\partial t}+\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}=0$$

式中 γ_b——床底干容重；

ζ_b——床底标高与起始时床底标高之差；

Q_x，Q_y——分别为 x 向与 y 向的总输沙率（包括悬沙、底沙及浮泥），

$$Q_x=\overline{vsH}+\gamma_m q_{bx}+v_m s_m h_m$$

$$Q_y=\overline{vsH}+\gamma_m q_{by}+v_m s_m h_m$$

由于在前面已分别求出了悬沙在底部的冲淤率 F_*、底沙输沙率 q_b 及浮泥的变化率 $\frac{dm}{dt}$，因此在计算地形变化时不必用上述通用方程，可直接利用所求得的 F_*、q_b 和 $\frac{dm}{dt}$。

在计算地形变化时，需分清有无浮泥。当有浮泥时，应分别计算浮泥高程和床底面高程；当无浮泥时，只需计算床底面高程。

1. 存在浮泥时的地形变化计算

通常有浮泥时，就不会存在底沙推移质。

（1）浮泥面高程的变化

由上节介绍的浮泥连续方程即可求得浮泥面高程的变化，即

$$\frac{\partial h_m}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(u_m h_m)+\frac{\partial}{\partial y}(v_m h_m)\frac{1}{\gamma_m}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=0$$

式中 γ_m——浮泥的干容重。

（2）床底面高程的变化

只有在下述两种情况下床面才发生变化。

（a）当$u_m=0$、$v_m=0$时，浮泥下沉，脱水固结，床面抬高。其抬高值ζ_b由下式求出

$$\frac{\mathrm{d}\zeta_b}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\gamma_b}\frac{\mathrm{d}m_3}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\zeta_b}{\mathrm{d}t}=\frac{w_d s_m}{\gamma_b}$$

式中 w_d——固结时浮泥沉降速度；

S_m——浮泥含沙量（kg/m³）；

γ_b——底床干容重（kg/m³）。

（b）浮泥流动很大而引起床底冲刷，即$\tau_0\geqslant\tau_c$时

$$\frac{\mathrm{d}\zeta_b}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{\gamma_b}\frac{\mathrm{d}m_4}{\mathrm{d}t}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}\zeta_b}{\mathrm{d}t}=-\frac{M_m}{\gamma_b}\left(\frac{\tau_c}{\tau_0}-1\right)$$

式中 τ_0——浮泥对床面的剪切应力，

$$\tau_{0x}=\frac{\rho_m f}{8}|U_m|u_m$$

$$\tau_{0y}=\frac{\rho_m f}{8}|U_m|v_m$$

u_m，v_m——浮泥流速在x、y向的分速，

$$U_m=\sqrt{u_m^2+v_m^2}$$

f——摩擦因子，在浮泥与粘性土床底面间可采用$f=0.008$；

ρ_m——浮泥容重，HR采用75kg/m³，天津港为110kg/m³。

2. 无浮泥时的地形变化

可由下式求得

$$\frac{\partial \gamma_b}{\partial t}+\frac{1}{\gamma_b}\left(\frac{\partial q_{bx}}{\partial x}+\frac{\partial q_{by}}{\partial y}\right)-\frac{1}{\gamma_b}F_b=0$$

参 考 文 献

1 窦国仁. 河床紊流的随机理论. 水利水运科学研究，1979，(1)

2 刘家驹. 波浪作用下泥沙的起动问题. 水利水运专题述评，1964，(10)

3 O S Madsen and W D Grant. Quantitative description of Sediment Transport by Waves, Proceedings of the Fifteenth Coastal Engineering Conference. 1976，2，1093～1112

4 佐藤清一，岸力. 论波动引起的海底切力与底砂移动. 日本建设部土木研究所报告，1953，(85)

5 P D Komar and M C. Miller Sediment Threshold under Oscillatory Waves. Proceedings of Fourteenth Coastal Engineering Conference，1974，2，756～775

6 赵今声等编. 河口及海岸动力学. 北京：海洋出版社，1993

7 刘家驹. 水流对波浪要素的影响. 水利水运专题述评，1962，(1)

8 浜田德一，加藤始. 流れの中の有限振幅波の計算. 第10回海岸工学講演会論文集，1963

9 岩垣雄一. 流れによる波の屈折と波高変化. 第24回海岸工学講演会論文集，1977

10 I G Jonsson. Interaction between Waves and Currents. Coastal Engineering 1970. Proceedings. Vol1. 489～507

11 田中仁，首藤伸夫. 波・流れ共存时の底面摩擦に関する実験. 第27回海岸工学講演会論文集，1980

12 佐藤道郎. 波が遡上する流れの水粒子運動に関する実験的研究. 第21回海岸工学講演会論文集，1974

13 J D A. Van Hoften and S Karaki. Interaction of Waves and a Turbulent Current, Proceedings of the Fifteenth Coastal Engineering Conference. 1976，1，404～422

14 岩垣雄一，浅野敏之. 波と流れの共存場における水粒子速度に関

する研究，第26回海岸工学講演会論文集，1979
15 中村充等.波と流れによる砂の移動について.第15回海岸工学講演会論文集，1968
16 Per. Bruun Stability of Tidal Inlets.
17 O S. Madsen and W D. Grant. Sediment Transport in the Coastal Environment Ralph M. Parsons Laboratotry for Water Resources and Hydrodynamics. Department of Civil Engineering. Massachusetts Institute of Technology，1976
18 E W Bijker. Littoral Drift as Function of Waves and Current. Proc. 11th Conf. Coastal Engineering. 1968
19 G B Whitham. Momentum and Energy Flux in Water Waves Mass, J. Fluid Mechanics，1962，12：135
20 M S Longuet—Higgins and R W Stewart. Changes in the Form of Short Gravity Waves on Long Waves and Tidal Currents，J. Fluid Mechanics. 1960，(8)：565
21 国家海洋局.海洋调查规范.1975
22 复旦大学.概率论.第二册：数理统计（第一分册）.99～102
23 林少宫.基础概率与数理统计，1963
24 武汉水电学院河流动力学及河道整治教研组编.河流动力学.1961
25 Longuet—Higgins，M S and Stewart，R W. Changes in the form of short gravity waves on long waves and tidal currents. J. Fluid Mech. 1960，8：565～583
26 Jonsson I G. Wave boundary layers and friction factors. Proc. 10th Coastal Eng. conf.，1964，1：127～148
27 Cao Zude. Effects of wind on the wave advancing towards shore. ACTA Oceanologic sinica，1983，2 (2)
28 Cao Zude Cohesive sediment transport at the powdery sand—mud beach in Kumamoto port，Japan，Rep. of PHRI，1989，(1)
29 曹祖德.波浪、潮流共同作用下的推移质输沙计算.水道港口，1992，(1)
30 曹祖德.浮泥特性研究的进展.水道港口，1992，(2)
31 曹祖德.浮泥流动特性及数值模拟的研究.第一届全国泥沙基本理

论研究论文集，1992
32 王运洪. 泥沙起动规律的研究. 海洋学报，1984，6（6）
34 金i雯，龚志英，陈德昌. 关于淤泥质港口航道适航水深的研究. 南京：河海大学出版社，1990
35 陈学良. 连云港浮泥测试及“适航深度”的确定. 南京：河海大学出版社，1990
36 Odd N V M Rodger J G. An Analysis of the Behaviour of fluid Mud in Estuaries. HR Report SR 84，March 1989
37 洪柔嘉，应永良. 水流作用下的浮泥起动流速试验研究. 水利学报，1988，(8)
38 Hydraulic Research. Severn Tidal Power An Assessment of the Feasibility of Mathmatically Modelling Sediment Transport Processes in the Estuary. HR Report EX 969. July 1981
39 李浩麟. 新港淤泥运动特性试验研究. 新港回淤研究，1963，(1)
40 董凤午. 新港淤泥在水流作用下运移的试验研究. 新港回淤研究，1965，(2)
41 曹祖德. 波浪作用下柔软海底运动特性的研究，全国第一届水动力学术会议论文集，1984，(中)
42 曹祖德. 波浪作用下浮泥运动特性的研究. 水道港口，1987，(2)
43 赵今声，赵子丹，曹祖德. 波浪作用下新港浮泥运动规律的初步研究. 新港回淤研究，1963，(1)
44 刘家驹. 波浪作用下新港浮泥运动的试验研究. 新港回淤研究. 1963，(1)
45 Cao Zude. A Case Study on Cohesive Sediment Transport at the Powdery Sand—Muddy Beach in Kumamoto Port Japan.，Jan. 1989
46 曹祖德. 日本熊本港的淤积分析. 港口工程，1990，(3)
47 Odd N V M. Cooper A J. A Two—Dimensional Model of the Movement of fluid in a High Energy Turbid Estuar. HR Report SR 147，January 1988
48 王运洪. 波浪、水流共同作用下底部较细颗粒砂的起动（一）. 天津水利，1982 (1)
49 王运洪. 波浪、水流共同作用下底部较细颗粒砂的起动（二）. 天津

水利，1982，(2)
50 王运洪. 波浪与水流共同作用下的底砂起动. 海洋科学，1983，(3)
51 王运洪. 应用最小二乘电算方法进行数据处理的探讨. 海岸河口研究，北京：海洋出版社，1990
52 王运洪. 海河口及河道底部沉积物的分析. 水道港口，1984，(2)
53 王运洪. 渤海湾海河口地物光谱测试与应用. 海洋调查，1986，(2)
54 王运洪. 日本河流及降雨信息数据处理系统的管理. 天津水利，1987，(1)
55 王运洪，秘兆兰. 湖泊水库湖流模拟系统. 海洋与湖沼学报，1992，23(5)
56 王运洪，秘兆兰. 于桥水库风季流场的计算与分析. 湖泊科学，1994，6 (3)
57 王运洪，秘兆兰. 波浪、水流共同作用下的推移质输沙计算. 第七届全国海岸工程学术会议论文集，北京：海洋出版社，1993，2
58 秘兆兰，王运洪. 河口、海湾潮流数学模型的建立. 第七届全国海岸工程学术会议论文集，北京：海洋出版社，1993，1
59 王运洪，秘兆兰. 引滦入津黎河及黎沙河分岔河道水流数值模拟. 天津水利，1993，(2)
60 王运洪. 近岸浅水波的计算. 海洋与湖沼学报，1994，25 (4)
61 王运洪，秘兆兰. 引滦于桥水库风吹环流模拟. 天津水利，1994，(1)
62 王运洪，秘兆兰. 引滦入津工程于桥水库湖库流系统综合研究探讨. 天津水利，1994，(2)
63 王运洪，秘兆兰. 水动力环流流场研究. 水道港口，1994，(3)
64 Wang YunHong. Study on Wave Decay in Shallow Water Area. Australasian Conference on Coastal and Ocean Engineering. NCP 89/20. 1989
65 Wang YunHong. An Investigation on the Pattern of Sediment Initiation Motion. Austratasian Conference on Coastal and Ocean Engineering. NCP 89/20，1989

第八章　数值模拟应用

8.1　波浪掀沙、潮流输沙的数值模拟

对于淤泥质海岸，促使海滩演变的基本动力过程是波浪掀沙、潮流输沙。由于它与岸滩演变、港口回淤、航道及闸下淤积等许多问题有关，因此受到海岸环境工作者的高度重视，并开展了积极的研究，其中包括原体观测、理论分析和模拟试验。由于波浪掀沙、潮流输沙的机理和过程都很复杂，而原体观测和理论分析又都有一定的局限性，这样，人们就把眼光转向到模拟试验。

波浪掀沙、潮流输沙的模拟试验可分为水力试验和数值模拟。在水力试验中，近年来虽已有人开始进行了波浪、潮流、泥沙的动床模型试验，但由于遇到了选择比尺、考虑风和柯氏力作用等一系列问题，目前仍在探索阶段；而数值模拟则是目前研究海岸动力及动力地貌较理想的工具。

为了模拟波浪掀沙、潮流输沙、海床演变的复杂连续变化过程，笔者于1987年开始进行了CW系统的研制，这是在总结已有研究的基础上，进一步开发的一个多功能全过程多因素模拟系统。该系统可综合模拟海岸动力和动力地貌，其中，海岸动力有波浪、潮流、波流共同作用、风吹流等；动力地貌则包括上述动力作用下的悬沙运动、底沙运动、浮泥流动及海底演变。该系统自研制成功以来，先后应用于航道淤积、河口演变、水库湖流、疏浚弃土、油膜扩散等方面，均取得了令人满意的结果。

一、基本控制方程的建立

（一）波浪掀沙、潮流输沙的物理过程

前章所述，淤泥运动中存在两个临界剪切应力，一个是淤积临界剪切应力（以τ_d表示），另一个是冲刷临界剪切应力（以τ_e表示）。采用τ_b表示水体作用于海底的剪切应力，则当$\tau_b \leqslant \tau_d$时，海底发生淤积；当$\tau_b \geqslant \tau_e$时，海底发生冲刷。

相对稳定的海岸上，在正常情况下，海底淤泥处于冲淤相对平衡状态，但当大风浪时，风浪和潮流合成的海底剪切应力远大于冲刷临界值（$\tau_b >> \tau_e$），这种平衡立即被打破，海底淤泥被迅速掀起成悬沙，随水体流动。风停后，随着风浪减弱，海底剪切应力τ_b也随之减小，这时水体紊动强度逐渐减弱，水流挟沙能力减小，水体中的超饱和悬沙随之沉降，水体含沙量逐渐减小，直至恢复到最初的冲淤相对平衡状态为止，这个过程就是波浪掀沙、潮流输沙。与此过程相对应，海底地形将从初始相对平衡经过冲刷、淤积又回到相对平衡。

（二）基本控制方程

采用右手直角坐标系统，在这个系统中的水平二维控制方程分别如下：

1. 潮流方程

连续方程

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(uh)+\frac{\partial}{\partial y}(vh)=0 \qquad (8\text{-}1\text{-}1a)$$

x向动量方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+g\frac{\partial \zeta}{\partial x}+\frac{\tau_{bx}}{\rho h}-fv=A_x\Delta u \qquad (8\text{-}1\text{-}1b)$$

y向动量方程

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+g\frac{\partial \zeta}{\partial y}+\frac{\tau_{by}}{\rho h}+fu=A_x\Delta v \qquad (8\text{-}1\text{-}1c)$$

式中 ζ——水表面竖向位移；

u、v 分别为 x、y 向分速；

h——水深，$h=h_0+\zeta$；h_0—静止时的水深；

f——柯氏系数；

ρ——水体密度；

Δ——微分算子，

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

τ_{bx}、τ_{by}——水体的海底剪切应力在 x 向和 y 向的分量；

A_x 和 A_y——水体紊动扩散系数在 x 向和 y 向的分量。

2. 有波浪时的波浪—潮流方程

连续方程

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(uh)+\frac{\partial}{\partial y}(vh)=0 \qquad (8-1-2a)$$

x 向动量方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+g\frac{\partial\zeta}{\partial x}-\frac{\tau_{wx}}{\rho h}+\frac{\tau_{bx}}{\rho h}-fv+\frac{1}{\rho h}\left(\frac{\partial S_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial S_{xy}}{\partial y}\right)=A_x\Delta u \qquad (8-1-2b)$$

y 向动量方程

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+g\frac{\partial\zeta}{\partial y}-\frac{\tau_{wy}}{\rho h}+\frac{\tau_{by}}{\rho h}+fu+\frac{1}{\rho h}\left(\frac{\partial S_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial S_{yy}}{\partial y}\right)=A_y\Delta v \qquad (8-1-2c)$$

式中 τ_{wx}、τ_{wy}——分别为风对水面剪切应力在 x 向和 y 向的分量；

τ_{bx}、τ_{by}——波浪—潮流在水底合成剪切应力在 x 向和 y 向的分量；

S_{xx}，S_{xy}，S_{yx}和 S_{yy}——波浪剩余动量流的四个分张量；

其余符号意义同上，但均已包含波浪和潮流共同作用的成分。

3. 悬沙输移扩散方程

$$\frac{\partial}{\partial t}(sh)+\frac{\partial}{\partial x}(suh)+\frac{\partial}{\partial y}(svh)+F_s$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(D_x h\frac{\partial s}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D_y h\frac{\partial s}{\partial y}\right) \qquad (8-1-3)$$

式中 s——含沙量；

D_x 和 D_y——分别为 x 向和 y 向悬沙扩散系数；

F_s——海底泥沙冲淤函数。

4. 海底演变方程

$$\frac{\partial \zeta_b}{\partial t}-\frac{F_s}{\gamma_c}=0 \qquad (8-1-4)$$

式中 ζ_b——海底床面的竖向位移（即冲淤变化量）；

γ_c——底部泥沙的干容重。

二、几个参量的确定

（一）潮流底部剪切应力

它可用下述一般表达式表示

$$\tau_{bx}=C_f\rho|U|u$$

$$\tau_{by}=C_f\rho|U|v$$

$$|U|=\sqrt{u^2+v^2}$$

式中，c_f 为底摩阻系数。在潮流中，此系数很难确定，在数值模拟中，常借用定常均匀流的结果：

$$c_f=\frac{g}{C^2}$$

式中 C——为谢才系数，$C=(1/n)\ h^{1/6}$；

n——海底糙率。

（二）波浪潮流共同作用下的底部剪切应力

该问题十分复杂，按前章所述，综合剪切应力应该由三部分组成：一是潮流的，二是波浪的，三是波浪潮流相互作用后派生的，其表达式为

$$\tau_{bxmax}=c_f\rho|U|u+\frac{\rho}{2}f_w|U_w|u_w+B\rho\left(\frac{c_f f_w}{2}\right)^{\frac{1}{2}}|U|u_w$$

$$\tau_{bymax}=c_f\rho|U|v+\frac{\rho}{2}f_w|U_w|u_w+B\rho\left(\frac{c_f f_w}{2}\right)^{\frac{1}{2}}|U|u_w$$

上述摩阻力公式为最大瞬时值。在模拟波浪潮流共同作用时，时间步长常比波浪周期要大得多，因此应取平均值，即上式积分求均值可得

$$\tau_{bx}=c_f\rho|U|u+\frac{\pi}{8}\rho f_w|U_w|u_w+\frac{B\rho}{\pi}\sqrt{2}\ (c_f f_w)^{\frac{1}{2}}|U|u_w;$$

$$\tau_{by}=c_f\rho|U|v+\frac{\pi}{8}\rho f_w|U_w|v_w+\frac{B\rho}{\pi}\sqrt{2}\ (c_f f_w)^{\frac{1}{2}}|U|v_w$$

式中 U——潮流速；

u、v——潮流在 x 和 y 向的分速；

U_w——波浪底部质点速度；

u_w 和 v_w——波浪底部质点在 x 向和 y 向的分速；

c_f——潮流底摩阻系数，仍借用 $c_f=g/C^2$；

f_w——波浪底摩阻系数。

B 为波浪潮流相互影响系数，此值的关系很复杂，不易确定。根据 *Soulsby* 的研究，它与波浪潮流间的夹角有关，当波浪与水流同向时，$B=0.9170$；当波浪与水流垂直时，$B=-0.1983$；如果波浪与水流间的夹角不确定时，$B=0.359$。

（三）风对水面的剪切应力

可用下式表示

$$\tau_{wx}=C_w\rho_a|w-U|\ (w_x-u);$$

$$\tau_{wy}=C_w\rho_a|w-U|\ (w_y-v);$$

$$|w-U|=\sqrt{(w_x-u)^2+(w_y-v)^2}$$

式中 C_w——风对波动水面的剪切系数，根据笔者研究，采用 $c_w=2.55\times10^{-3}$；

w——水面上 10m 处的风速；

ρ_a——空气密度。

（四）波浪剩余动量流

波浪剩余动量流的物理概念最早由英国人 Longuet－Higgins 提出，当时取名为“辐射应力”，后经很多人研究与应用，证明该量确实存在，但其量纲和概念均不是应力而是动量流。波浪剩余

动量流是个张量，在水平二维中，此量可由下式表示：

$$\begin{pmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{yx} & S_{yy} \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} n(1+\cos^2\alpha)-\frac{1}{2} & \frac{n}{2}\sin 2\alpha \\ \frac{n}{2}\sin 2\alpha & n(1+\sin^2\alpha)-\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

式中 E——波能量，$E=\rho g H_w/2$；

n——波群速与波速之比；

α——波向与 x 轴之间的夹角。

（五）海底泥沙冲淤函数 F_s

在淤泥质海岸上，F_s 与水体底部剪切应力 τ_b、冲刷临界剪切应力 τ_e 及淤积临界剪切应力 τ_d 有关，可分下述三种情况。

1. 当 $\tau_b \leqslant \tau_d$ 时，海底呈淤积状态，此时

$$F_s = d\omega_s\left(1-\frac{\tau_b}{\tau_d}\right)$$

式中 d 为沉降机率，其值为 0.67～0.84；ω_s 为泥沙絮凝沉降速度。此值除与泥沙粒径有关外，还与含沙浓度和海水盐度有关，并受水流速度的影响。但由于絮凝作用，絮凝团当量粒径最终近似为一常值，约为 0.0307mm，可以用此当量粒径计算其沉速。一般的絮凝沉降速度为 0.015～0.06cm/s。由于絮凝沉降速度对 F_s 影响很大，如有可能，应通过实验定出给定含沙浓度时之 ω_s。

2. 当 $\tau_d < \tau_b < \tau_e$ 时，可分为两种情况。

当 $\partial\tau_b/\partial t > 0$ 时，呈微冲刷状态；当 $\partial\tau_b/\partial t < 0$ 时，呈微淤状态。但在工程实用时，为简化起见，可令 $F_s = 0$。

3. 当 $\tau_b \geqslant \tau_e$ 时，呈冲刷状态，

$$F_s = -M\left(\frac{\tau_b}{\tau_e}-1\right)$$

式中，M 为冲刷系数，其量纲为 $[\mathrm{kgm^{-2}s^{-1}}]$，此值应通过实验来确定。笔者曾求得 $M=6.4\times10^{-3}$。

上述模拟系统曾在天津港海区获得了良好的应用。模拟过程如图 8—1—1 所示。

天津港位于渤海湾西部的广大淤泥质浅滩上。波浪掀沙、潮

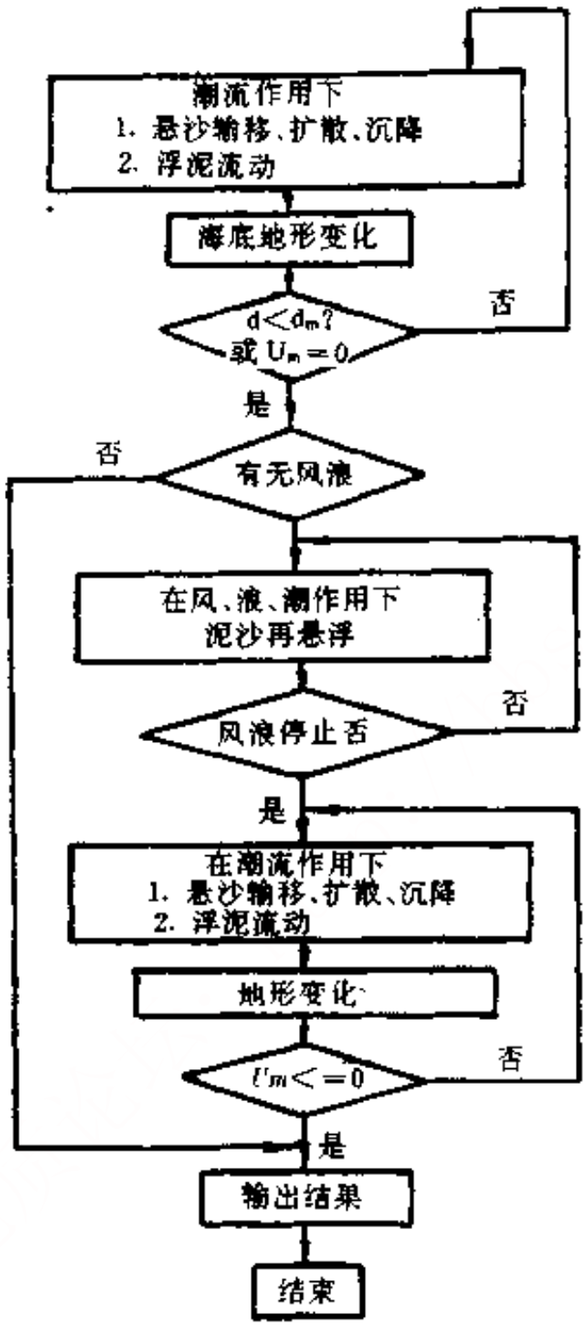


图 8—1—1　波浪掀沙、潮流输沙数学模型框图

流输沙是造成该海区海底演变和天津新港回淤的主要原因。为深入了解该海区的动力地貌过程和天津港回淤情况，对其开展了波浪掀沙、潮流输沙的数值模拟。此研究不仅对天津港回淤有重要的实用价值，而且对其他港口的淤积研究也有一定的现实意义。

建立天津港海区模拟系统后，我们模拟了不同风浪过程时的

波浪掀沙、潮流输沙情况，图 8—1—2 是一次东北大风过程中天津港海区的含沙量变化及地形演变过程图。东北大风的风速为 7 级、持续时间为 20h。由于现场缺乏这样大风浪时的实测资料，无法对比验证，但根据历史资料推测，本模拟所得出的一些数据，如大风浪时的最大含沙量、大风浪时的最大冲刷深度、风浪停息后的含沙量及地形，以及含沙量和海底地形演变过程等基本上是合理的。图 8—1—2 中绘出了这场大风浪过程中该海区三个特征点上的含沙量及地形变化的过程线。上半图是含沙量，下半图是海底高程。通过此图可以明显地看出“波浪掀沙、潮流输沙、海底演变”的全过程。

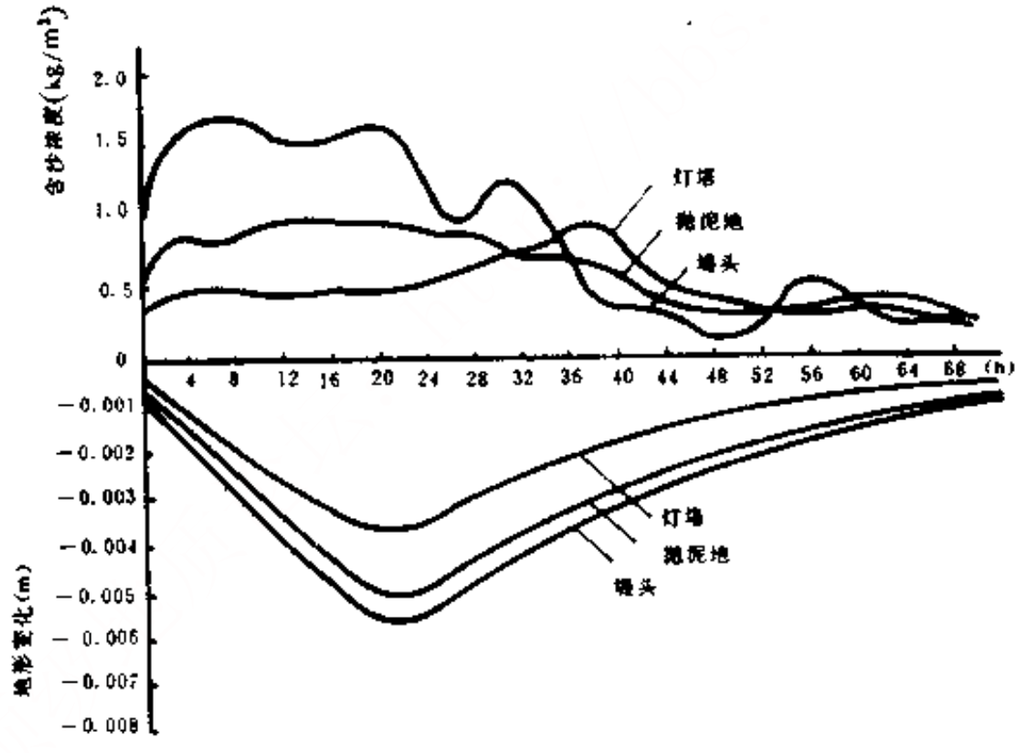


图 8—1—2　东北风作用下天津港海区特征点含沙浓度变化及地形冲淤变化过程线

8.2 疏浚弃土运移的数值模拟

在活动性床质（包括沙质和淤泥质）的海岸河口上修建港口和航道，必然会产生大量的疏浚物（包括基建土和维护土），如何处理这些疏浚物，是港口、航道建设中的一个重大问题。

据不完全统计，我国目前每年约有5000～7000万m^3疏浚弃土进行水抛，如果这些弃土的水抛区选划不当，有可能对倾倒区及附近水域造成污染，给海洋环境、港口、海洋生物、海洋水资源及渔业生产造成不良影响，这方面的例子已经不少。因此，研究水抛区选划，就具有重要的现实意义。

为了科学地确定抛泥区，常采用模型试验，目前通用两种方法，一种是抛泥区选划的水力模型，另一种是数值模拟。由于水力模型无法同时模拟波浪、潮流、风吹流及柯氏力等多种因素对疏浚弃土的共同作用，因此，在疏浚弃土水抛区的选划中，采用数值模拟是比较理想的。

为了研究疏浚弃土在水动力作用下的输移扩散，我们开发了一个多功能全过程CW数值模拟系统。本系统中有空间水平二维和空间三维模式，动力因素有波浪、潮流、风吹流、径流及柯氏力等，泥沙运动有悬移质、推移质和浮泥流。各因素可单独作用，也可联合作用，还能互相交叉作用。该模拟系统中采用了二维～三维嵌套功能，还采用了活动边界，可考虑边滩上水流的动量交换及活动边界的漫滩速度，可以模拟海岸动力地貌演变和疏浚弃土运移变化过程。

疏浚弃土投入海中后，一部分弃土漂浮水中形成悬移质，随流运移，另一部分弃土沉入水底，形成浮泥（粘土）或推移质（沙土），沿海底运动，遇到足够大的风浪后，浮泥或推移质可被浪搅起而再悬浮，风浪停止后，悬沙重新落淤形成浮泥（粘土）或

推移质(沙土)。这个过程十分复杂，CW 模拟系统可复演这个过程。其疏浚弃土运移变化的全过程流程如图 8—2—1 所示。

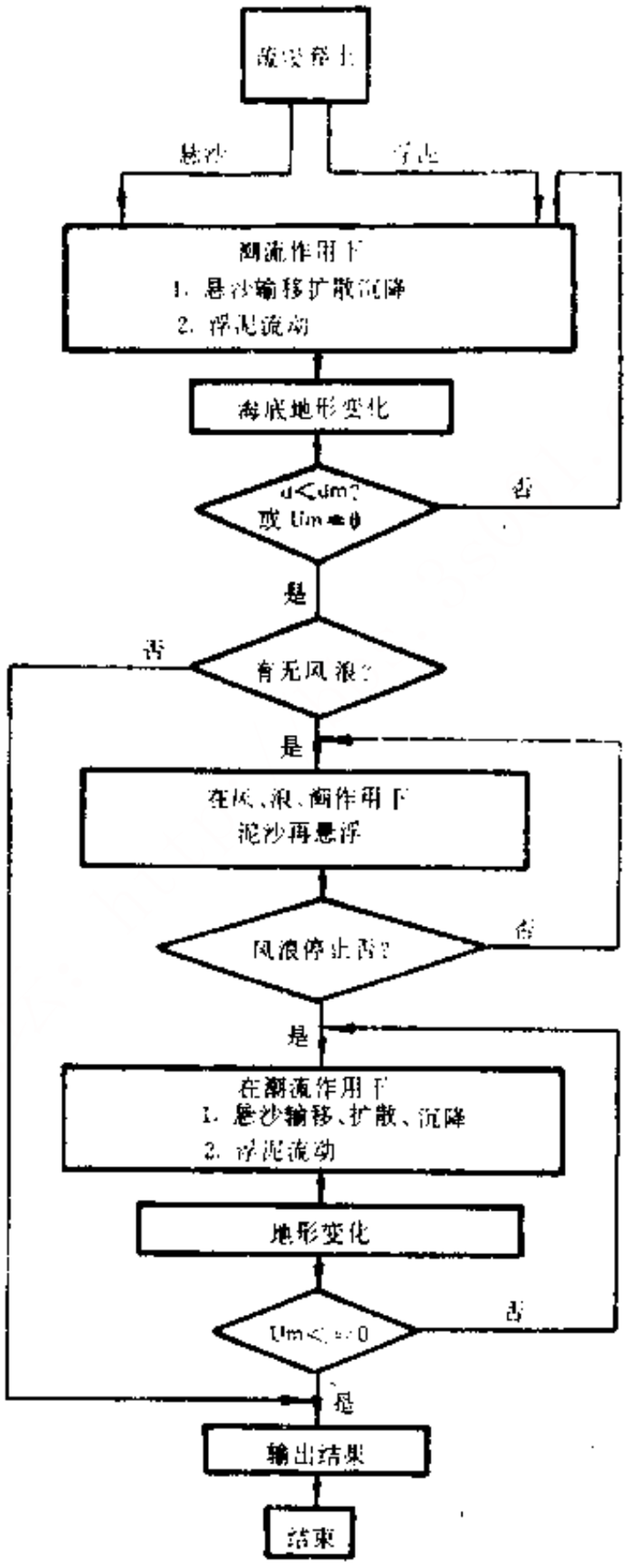


图 8—2—1 疏浚抛泥数学模型框图

该系统曾在天津港和秦皇岛港的疏浚弃土水抛区选划中应用、取得了良好的效果。下面简介天津港的应用情况。

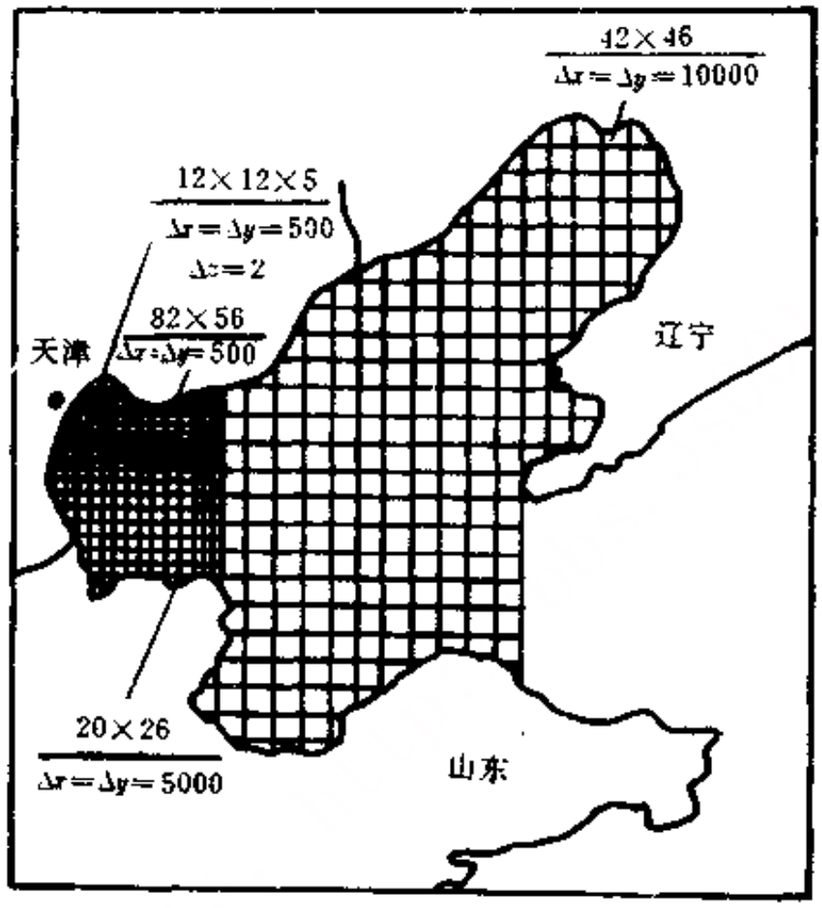


图 8—2—2　各计算网格示意图

由于选择合理的疏浚弃土水抛区是天津港回淤研究的重要课题之一，而该计算域又缺乏数值模拟时必需的边界条件，因此采用大模型内嵌套小模型的办法，先后设置了大小不同的四个计算域。第一个计算域是渤海（包括渤海内的三个海湾，即辽东湾、渤海湾和莱州湾），第二个计算域是渤海湾；第三个计算域是天津港海区（包括抛泥地在内的渤海湾北半部）；第四个计算域是抛泥区。这四个计算域前后嵌套，前一个计算域计算的结果，给后一个计算域提供边界条件；第一个计算域的开边界在渤海东部的峡口，其边界条件由峡口处大连（北）和崆峒岛（南）的 M、S、K、O 四个分潮的潮位调和常数来控制，这两点之间联线的计算网格结点

上的潮位值则由线性插值而得。

由于计算机内存容量的限制，前三个计算域采用水平二维模型，第四个计算域采用三维模型。

在二维模型中，潮流和波浪的计算采用“MADI 法”，泥沙运移则采用显式法。“MADI 法”既保留了“ADI 法”的计算特点，同时又将计算要素（如流速、水深、水位变化等）布置在同一差分网格节点上，充分利用计算机的内存。

在三维模型中，各方程均采用显式法求解。

上述四个计算域的划分见图 8—2—2，技术指标和功能见表 8—2—1。

表 8—2—1　各计算域的技术指标及特征

模拟域	第一域（渤海）	第二域（渤海湾）	第三域（天津港）
范围	整个渤海，东西长约 400km，南北长约 420km，总面积约 16.8 万 km^2	整个渤海湾，东边界在东经 118°30′，东西长约 90km，南北长约 120km，总面积为 1.08 万 km^2	渤海湾北半部包括天津港海区
模拟参数	潮流	潮流、波浪	潮流、波浪、泥沙
空间步长（m）	10 000	5 000	500
时间步长（s）	1 800	900	90
总结点数	2 021	567	4 731

利用这几个模型，模拟了天津港区疏浚弃土水抛时的各种情况，应用模拟结果，进一步选择了经济合理的抛泥区。

8.3　横越航槽三维水流的数值模拟

该例是应用第六章 6.5 节介绍的动水压力校正的三维水动力数值模拟，研究了水流横越航槽的水流三维结构。

模拟计算域的边界及域内情况如图 8—3—1 所示。

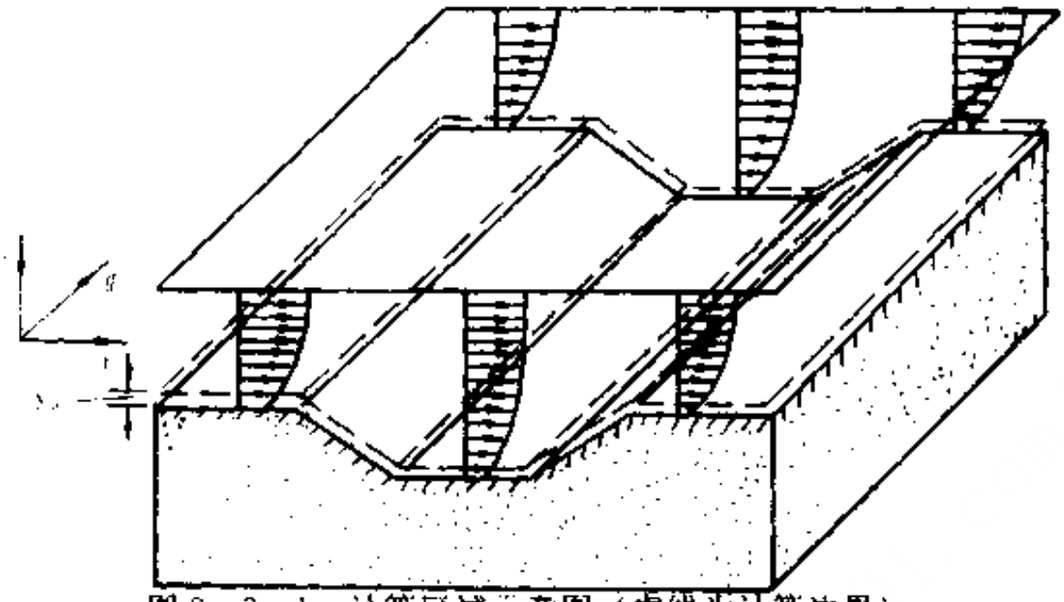


图 8-3-1 计算区域示意图（虚线为计算边界）

在该计算域中，沿水流方向为 x 轴，垂直水流方向（即沿航道轴向）为 y 轴，沿水深竖直方向为 z 轴，网格布置如图 8—3—2 所示。

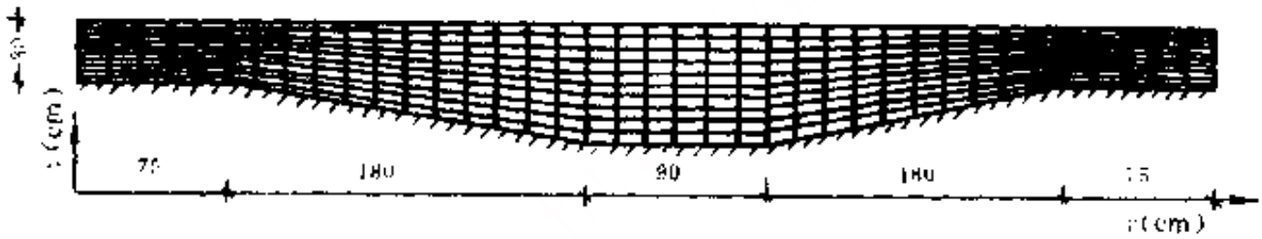


图 8—3—2 xz 平面计算域网格

在图 8—3—2 中，x 向有 40 个网格，y 向为 6 个，z 向为 10 层，全域共计 2400 个计算结点。利用该模型，计算了水流垂直横越航槽时的水流流速分布，图 8—3—3 是一个典型结果。

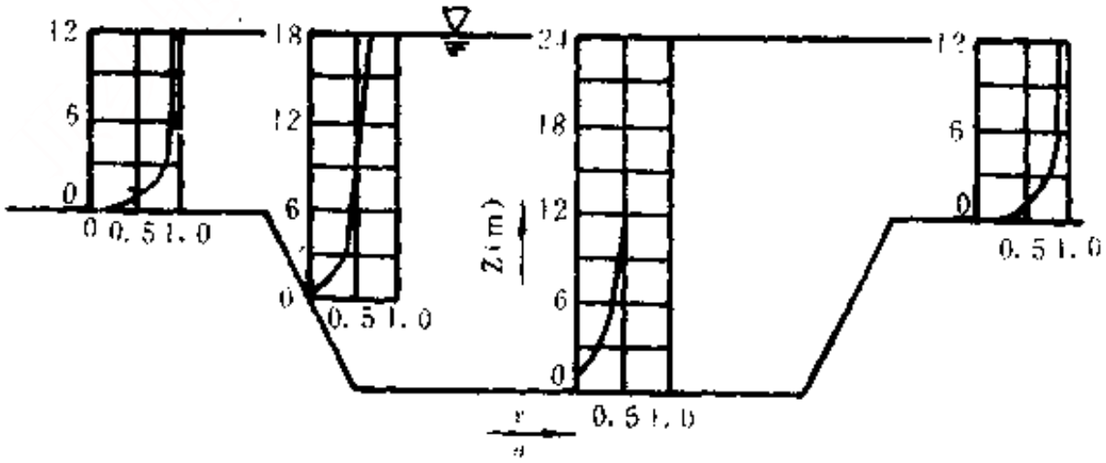


图 8-3—3 航槽流速沿水深分布图

8.4 油膜飘移、扩散的数值模拟

此例采用多层三维潮流数学模型计算了流速场的空间分布，并利用表面流速及风的效应，计算了风及潮流作用下的油膜扩散输移。例中考虑了油膜在扩散输移过程中的挥发损失及破碎波对油膜的击落损失。通过计算表明，此例所考虑的方法是合适的，计算结果比较理想。

由于漏油、溢油事故是造成海水污染的重要原因之一，因此，世界各国十分重视漏油、溢油扩散的预报和计算。

利用数学模型预报漏油、溢油污染扩散是当今最常用的方法。目前各国在预报潮流中溢油输移扩散时所采用的潮流数学模型大都是二维的，这种模型所求得的流速是垂线平均值，在柯氏力、风力和地形的影响下，此值与表面流速差别很大，利用这种垂线平均流速来预报浮于表面的油膜输移扩散，必然会有差别，为此，本研究计算采用三维潮流数学模型，用表面流速预报油膜输移扩散。在计算中，考虑了风和潮流的输移作用及破碎波的击落油滴的影响，并考虑了油量的挥发损失。为简化起见，此例不考虑石油喷射初期对周围海水流体动力作用，也不考虑生化和净化等化学作用，且认为挥发物质是单组分的，挥发系数是常数。

一、基本方程组

本例所采用的分层三维基本运动方程（在 h_k 层内）为

$$w_k - w_{k-1} + \frac{\partial u_k h_k}{\partial x} + \frac{\partial v_k h_k}{\partial y} = 0 \tag{8-4-1}$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_k}{\partial x} + v_k \frac{\partial u_k}{\partial y} + w_k \frac{\partial u_k}{\partial z} + g \frac{\partial (\zeta_k - \zeta_{k-1})}{\partial x}$$

$$- fv_k + \frac{1}{\rho h_k}(\tau_{x_{k-1}} - \tau_{x_k}) = A_h \Delta u_k \tag{8-4-2a}$$

$$\frac{\partial v_k}{\partial t} + u_k \frac{\partial v_k}{\partial x} + v_k \frac{\partial v_k}{\partial y} + w_k \frac{\partial v_k}{\partial z} + g \frac{\partial (\zeta_k - \zeta_{k-1})}{\partial y}$$

$$+fv_k+\frac{1}{\rho h_k}(\tau_{y_{k-1}}-\tau_{y_k})=A_y\Delta v_k \qquad (8-4-2b)$$

由于 $w=\frac{\partial\zeta}{\partial t}$，因此（8-4-1）式又可为

$$\frac{\partial\zeta_k}{\partial t}-\frac{\partial\zeta_{k-1}}{\partial t}+\frac{\partial u_k h_k}{\partial x}+\frac{\partial v_k h_k}{\partial y}=0 \qquad (8-4-3)$$

由平面二维模式可知，$\frac{\partial h_k}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(\zeta_k-\zeta_{k-1})$，代入（8—4—3）式后得

$$\frac{\partial h_k}{\partial t}=-\frac{\partial u_k h_k}{\partial x}-\frac{\partial v_k h_k}{\partial y} \qquad (8-4-4)$$

式中 h_k——第 k 层的水体厚度；

ζ_k——h_k 层上面层与静止时该面层的竖向位移；

u_k、v_k、w_k——分别为 x、y、z 向的分速；

f——柯氏系数，$f=2W\sin\varphi$，W 为地球自转加速度，φ 为地理纬度；

p——水压力；

A_x、A_y——x、y 向涡动粘性系数；

$\tau_{x_{k-1}}$、$\tau_{y_{k-1}}$——分别为 h_k 层下面层上 x、y 向剪切应力；

τ_{x_k}、τ_{y_k}——分别为 h_k 层上面层上 x、y 向的剪切应力；

Δ——为运算子

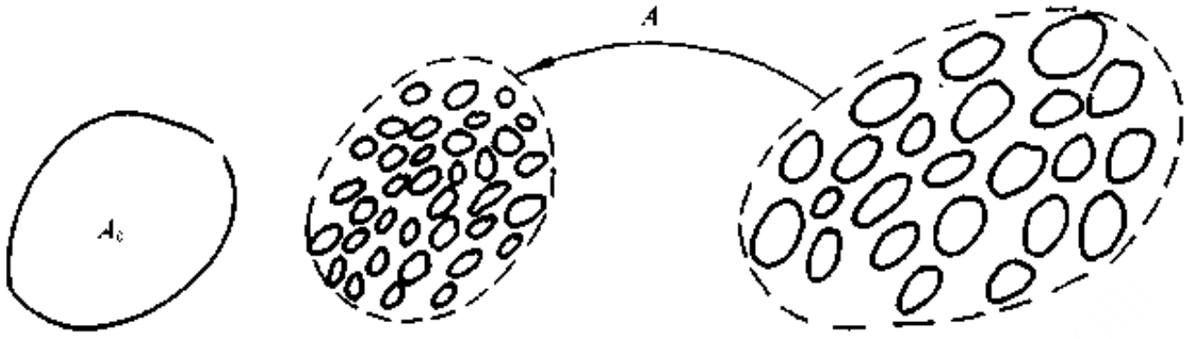
$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

（8—4—1）～（8—4—4）式即为求解潮流的基本方程组，加上相应的边界条件和初始条件，即可求解。

二、油膜扩散输移过程

油轻于水，不易溶于水，漏油、溢油入海后即飘浮于水面，迅速扩散成油膜，并随风逐流飘移。随着油膜的扩散变薄及易挥发物质的逸出，油膜厚度减至一定值后（平均为 0.5mm 左右），在破碎波及表面流作用下，连续的油膜将被撕裂成许多碎片，由于表层海水的大尺度紊流的作用，油膜小碎片又向四外飘散、形成更大的污染区。其扩散过程大致分成连续扩散、形成碎片和碎片飘

散三个阶段，图 8—4—1 为这些过程的示意图。



(a) 连续油膜　　(b) 形成碎片瞬间　　(c) 碎片扩散

图 8—4—1　表面油膜分布示意图

在连续扩散阶段，根据油膜扩散理论又可分为三个小阶段，即①惯性——重力阶段；②重力——粘性阶段；③粘性——张力阶段。各阶段的油膜半径计算公式为

（一）惯性——重力阶段

$$r_1=k_1\ (\Delta g Q)^{\frac{1}{4}}t^{\frac{3}{4}} \tag{8—4—5}$$

（二）重力——粘性阶段

$$r_2=k_2\left[(1-\Delta)\Delta g\right]^{1/6}\gamma^{-\frac{1}{12}}Q^{\frac{1}{3}}t^{\frac{7}{6}} \tag{8—4—6}$$

（三）粘性——张力阶段

$$r_3=k_3\sigma^{\frac{1}{2}}\rho^{-\frac{1}{2}}\nu^{-\frac{1}{4}}t^{\frac{3}{4}} \tag{8—4—7}$$

式中　k_1、k_2、k_3——扩散系数，根据我们对大港油田原油的扩散试验得出

$k_1=1.32$，$k_2=0.66$，$k_3=0.43$；

Δ——油水相对密度，$\Delta=1-\rho_0/\rho$；

ρ_0——石油密度；

ρ——海水密度；

Q——溢油量；

t——溢油经历时间；

ν——海水运动粘滞系数；

σ——海水表面张力。

当油膜连续扩散后，油膜厚度减至某一临界值时，在波浪和表面湍流作用下油膜被撕裂成碎片，随后进入碎片紊动扩散阶段。这时的碎片扩散受海水表面大尺度涡流所支配，扩散速度取决于紊流强度和相对的紊流尺度，而与油膜的物理特性关系不大，碎片成高斯分布。油膜碎片覆盖的污染区的相对半径由下式表示。

$$r_4 = 2\sqrt{5} \times 10^{-3} t^{1.15}$$

上述各阶段的分界线可由下面方法确定。

令 $r_1 = r_2$，得第一阶段和第二阶段的分界时间 t_{12}，

$$t_{12} = (k_2/k_1)^{\frac{1}{6}} (1-\Delta) (\Delta)^{-\frac{1}{2}} V^{-\frac{1}{2}} Q^{\frac{1}{2}}$$

令 $r_2 = r_3$，得第二阶段和第三阶段的分界时间 t_{23}，

$$t_{24} = (k_2/k_3)^6 [(1-\Delta)\Delta g] V\rho^{-3} Q^2 \sigma^{-3}$$

至于第三阶段和第四阶段的分界线，虽然也可由 $r_3 = r_4$ 求得，但由于油膜从连续状态进入碎片状态的瞬间，覆盖面突然增大，扩散半径发生突变，如由 $r_3 = r_4$ 求出 t_{34}，其值是不合理的。这里我们采用连续油膜最大扩散范围求出 t_{34}。

连续油膜最大扩散面积 A_{max} 可由下面经验关系式求得

$$A_{max} = V^{0.75} \times 10^5$$

式中 V——溢油体积，$V = Q/\rho$。

由此可知，连续油膜最大扩散半径为

$$r_{max} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{Q}{\rho_0}\right)^{\frac{3}{8}} \times 10^{2.5}$$

将上式代入（8—4—7）式，即可得第三阶段结束和第四阶段开始的时间 t_{34}，

$$t_{34} = -\frac{10^{10/3}}{\pi^{2/3}} - k_3^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{Q}{\rho_0}\right)^2 \sigma^{-\frac{2}{3}} \rho^{\frac{2}{3}} V^{\frac{1}{3}}$$

这样，我们即可根据溢油后的历时，利用上述各分界时间，判断溢油处于何种扩散阶段，进而选择采用何种扩散公式。

三、扩散输移时油量的逸散损失

溢油在扩散输移过程中，由于表面挥发及破碎波击落，油量

会逐渐减少。

油的挥发由其所含的挥发组分所决定。开始时，挥发快，随着挥发组分的挥发，挥发速度将逐渐减少。挥发量除与挥发组分有关外，还与油膜的裸露面积大小有关。此外，挥发速度还与风有关，风速愈大，挥发愈快。因挥发造成总油量变化可由下式表示：

$$\frac{dQ}{dt} = -K_0 W A\ (t) \qquad (8-4-8)$$

式中 K_0 ——挥发系数，与油种、温度等因素有关；

W ——风速；

$A(t)$ ——油膜与空气接触的表面积，其值为单位面积的油量挥发率；

如 $A(t)$ 以 πr^2 表示，上式又可写成另一种形式，

$$\frac{dQ}{dt} = -\pi K_0 W r^2\ (t) \qquad (8-4-9)$$

下面再研究波浪作用下的油量损失。

在不平静的海面上，每一瞬间存在着一定的波浪破碎机率（即在油膜的不同位置上发生破碎的机率）。波浪在油膜边缘破碎时，可将油膜边缘裂成小碎片而脱离主体。波浪在油膜范围内破碎时，破碎尾波击落油膜形成各种粒径的小油滴而沉落水中，其中大粒径油滴会上浮至水面而与油膜重新组合，小粒径油滴则因水体紊动而在水中保持悬浮分布状态。随着破碎波的不断击落，悬浮小油滴数量不断增加，直到稳定分布状态为止，这种稳定分布状态与油滴大小和波浪特性及油种有关，而且不易回收。因此，破碎波的作用可使油膜的总油量逐渐减小，其变化率可由下式表示

$$\frac{dQ}{dt} = -NQ \qquad (8-4-10)$$

式中，N 为单位时间油膜范围内破碎波作用的机率。对于充分发展成熟的破浪，按 Pierson——Moskovititz 谱理论，破碎机率为常数。如令破碎波波长等于平均波波长，则

$$N=\frac{1}{4T}\times 10^{-4}$$

由此可得

$$\frac{dQ}{dt}=-\frac{Q}{4T}\times 10^{-4} \qquad (8-4-11)$$

合并（8—4—9）～（8—4—11）式，即可得因挥发和波浪击落而造成的油量的变化为

$$\frac{dQ}{dt}=-\pi K_0 W r^2\ (t)\ -\frac{Q}{4T}\times 10^{-4} \qquad (8-4-12)$$

四、风和潮流作用下的油膜输移扩散

溢油入海后，除扩散外，还在风和潮流作用下发生飘移。至于波浪作用，由于波浪的周期性，它对输移的影响微弱，其与风和潮流的输移相比，可略去不计。波浪的作用只在加速油膜的扩散和击落油滴。因此油膜输移的任一点速度可由下式表示

$$U=U_0+U_W+U_t \qquad (8-4-13)$$

式中 U_0——油膜本身的扩散速度，由扩散公式求出 r 后由 $U_0=\frac{dr}{dt}$ 求得；

U_W——风引起的油膜飘移速度；

U_t——潮流引起的油膜运移速度。

下面进一步讨论 U_W 和 U_t。

（1）U_W 是指风引起的油膜飘移速度。当风作用在海面时，会产生风吹流。这时，油膜一方面随风吹流而流动，另一方面又要受风的拖曳影响，但是，从理论上同时考虑这两种影响面建立油膜运移公式往往很困难，通常根据原体试验资料按下面关系建立经验公式

$$U_W=K_m W_{10} \qquad (8-4-14)$$

式中 W_{10}——水面上 10m 高处的风速；

K_m——经验系数，一般文献报导，$K_m=0.02\sim0.05$。

（2）U_t 这是潮流引起的油膜飘移速度，其值应等于潮流的表面速度。在通常平面二维潮流数学模型中，所得的速度是垂线平

均流速，而不是表面流速，即使在本书前述三维潮流数学模型中，求得的表层流速也只是表层厚的中部流速而不是表面流速，为此，可利用本节所得各层流速再用抛物线插值法求出表面流速。

设近水表面的三层厚度分别为 h_1、h_2、h_3，各层相应速度为 U_1、U_2、U_3，则由抛物线插值法（8—4—15）式可求得表面流速。此速度即为潮流作用下的油膜飘移速度。

$$u_s=\frac{\begin{vmatrix}(h_1/2)^2 & h_1/2 & u_1\\ (h_1+h_2/2)^2 & h_1+h_2/2 & u_2\\ (h_1+h_2+h_3/2)^2 & h_1+h_2+h_3/2 & u_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(h_1/2)^2 & h_1/2 & 1\\ (h_1+h_2/2)^2 & h_1+h_2/2 & 1\\ (h_1+h_2+h_3/2)^2 & h_1+h_2+h_3/2 & 1\end{vmatrix}} \qquad (8—4—15)$$

五、油膜扩散输移范围的确定

首先应求出油膜中心点的速度及位置。设油膜中心位于差分网格某一位置 (x_0, y_0)，该点所在网格的四角节点的位置及速度已由前面求出，则 (x_0, y_0) 点的速度可由下式求得（图 8—4—2）：

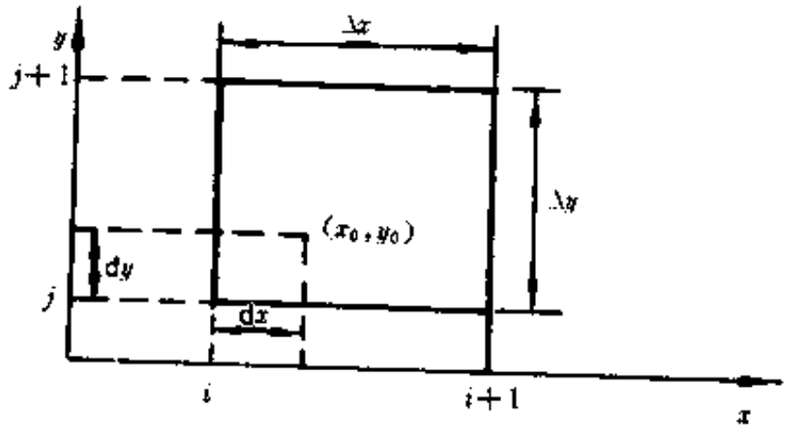


图 8—4—2　油膜中心位置图

$$U_{x_0y_0}=U_{i,j}+(U_{i+1,j}-U_{i,j})\frac{dx}{2\Delta x}+(U_{i,j+1}-U_{i,j})\frac{dy}{2\Delta x}$$

$$+(U_{i,j}+U_{i+1,j}+U_{i,j+1}+U_{i+1,j+1})\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{4\Delta x\Delta y}$$

式中 $\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$ —— 油膜中心 (x_c, y_c) 距左下角最近网格节点的水平距离和竖向距离；

U—— 待求值，$U=(u, v)$。

求出 $U_{i,j}$ 后，油膜中心即以该速度输移；与此同时，油膜半径还不断扩大。因此，油膜污染区显然就是此活动圆的外包络线所围成的区域。

下面考虑时间从 $t\to t+\sigma_t$ 时相邻两扩散圆的情况（图 8-- 4-- 3）。

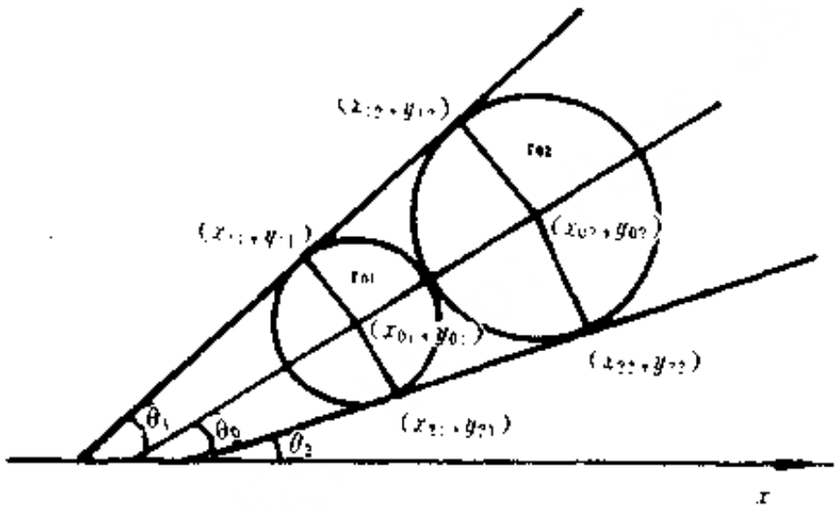


图 8-- 1-- 3　油膜圆扩散输移图

设瞬间 t 之圆心在 (x_{01}, y_{01})，速度为 u_{01}，半径为 r_{01}，经 σ_t 后，圆心移至 (x_{02}, y_{02})，半径扩大至 r_{02}，此圆心新位置为

$$x_{02}=x_{01}+\int_0^{\sigma_t}u_{01}\mathrm{d}t \qquad (8\text{-- }4\text{-- }17)$$

$$y_{02}=y_{01}+\int_0^{\sigma_t}v_{01}\mathrm{d}t \qquad (8\text{-- }4\text{-- }18)$$

新圆半径 r_{02} 可由油膜扩散公式求得。

有了两个圆的圆心位置及半径后，从图 8--4- 1 几何关系可得

$$\tan\theta_0=\frac{y_{02}-y_{01}}{x_{02}-x_{01}}$$

$$\theta_{1,2}=\theta_0 \pm \sin\left[\frac{r_{02}-r_{01}}{(x_{02}-x_{01})^2+(y_{02}-y_{01})^2}\right]$$

由此即可进一步求得包络线与扩散圆相切的切点坐标为

$$x_{11}=x_{01}-r_{01}\sin\theta_1 \qquad x_{12}=x_{02}-r_{02}\sin\theta_1$$

$$y_{11}=y_{01}-r_{01}\cos\theta_1 \qquad y_{12}=y_{02}+r_{02}\cos\theta_1$$

$$x_{21}=x_{01}+r_{01}\sin\theta_2 \qquad x_{22}=x_{02}-r_{02}\sin\theta_2$$

$$y_{21}=y_{01}-r_{01}\cos\theta_2 \qquad y_{22}=y_{02}+r_{02}\cos\theta_2$$

联结各瞬时圆的切点，即可得出油膜扩散污染区的范围。

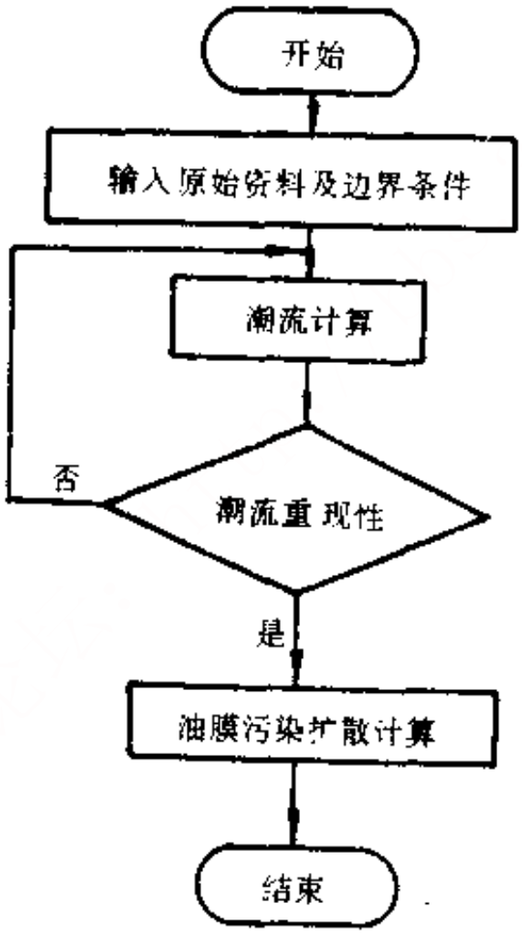


图 8－4－4　潮流及油膜污染计算框图

根据上述原理，利用 FORTRAN77 语言，编制了专门计算程序，程序流程如图 8—4—4 所示。运算时采用了不同油量、不同风向及风速、不同的波浪和不同的潮型。计算结果表明，该模拟能较好地预报溢油在风、浪、潮作用下的污染扩散范围。图 8—4—

5 及图 8—4—6 是其中的一个计算实例，在此例中，溢油量 $Q=60kg/s$，半日潮，潮差 1.5m，由图可知，油膜随潮流飘移，并受风力作用而转移。

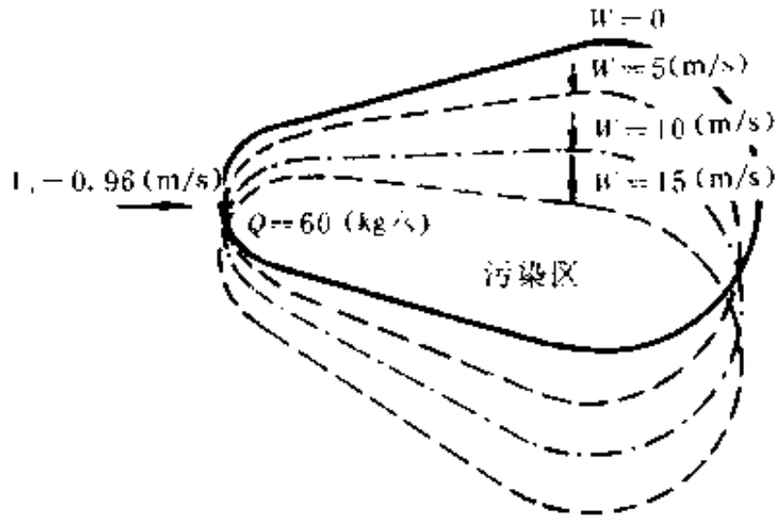


图 8—4—5

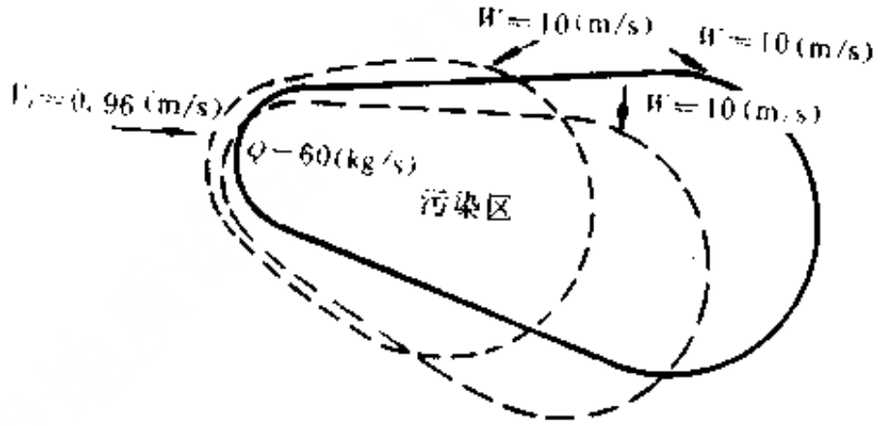


图 8—4—6

图 8—4—5 为离岸风时，W 分别为 0(无风)、5、10、15m/s 四种情况下潮流作用时之油膜扩散范围示意图。图 8—4—6 为 W＝10m/s 时不同风向角所造成污染扩散范围示意图。

由计算可知，扩散主要在第三阶段。由图可知，结果是令人满意的。

8.5 湖泊、水库湖库流的数值模拟

本例是通过对湖泊、水库湖流综合分析和建立多因素作用的湖泊、水库水模拟系统，对湖泊、水库的风吹流、水流、波浪、悬沙输移扩散等多类影响因素作用进行了全面模拟，并对天津引滦入津输水工程的重要调蓄水库——于桥水库及尔王庄湖流进行了系统地综合研究。该例模拟系统已扩展成标准、通用化多因素综合水模拟系统，适用于不同作用因素及边界条件的各类湖泊、水库模拟计算，计算结果可直接应用于工程实际。

一、影响湖泊、水库湖库流的主要因素

根据流体动力学观点，湖泊水库的水质环境特性受以下三方面的影响：其一，表面的影响，包括湖库区水表面上的光热辐射、显热输移和蒸发引起的热交换，以及风和波浪引起的机械能转换；其二，入湖库河流的影响，其径流的动能和势能的转换可引起湖库内水体的流动；其三，出湖库水流，可引起湖库内水体的不均匀流动。至于其它一些因素，诸如地下水（深、浅层）汇流、渗漏等的影响与上述三种影响相比小得多，故不再赘述。

（一）表面的影响

表面的影响主要泛指水面上气候的影响。由于自然气候变化很大，因而对水面作用很复杂。在没有气流运动时，有辐射、传导（显热传输）和蒸发引起温水层内热交换的作用。在有气流掠过潮库表面时，更须进一步考虑风对水面的作用以及风成波对温水层内热混合的剧烈影响。

辐射是指通过辐射作用直接入射到水表面的热通量。因为影响因素较多，而辐射的量测又比较简便可靠，因此，实际应用时一般采用直接在当地量测辐射通量。但需指出，因辐射而进入水体的热通量，除短波辐射能够穿透一定深度外，其他热能全部由

水面吸收，穿透很小。

传导引起的热通量称显热传输，它是由于空中温度高于水面温度而引起空中热量向水面传导的热通量。蒸发是指水面蒸发而伴随着热量向空中耗散的热通量。水气表面的长波辐射、显热传输（传导作用）和蒸发热损失的全部影响通常只在水表层下1m以内；短波辐射影响较深，有时可达10～15m。而这里所提到的影响深度，仅是指白天太阳照射时所能达到的深度。

风吹水面时，由于拖曳力的存在而对湖库水体作功。功率可用下式表式

$$W_w=C_f\rho_a W^2U$$

式中 W_w——风对水面的作功率；

ρ_a——空气密度；

W——风速；

U——水体表面的漂移速度；

C_f——风综合阻力系数，它包含了多种因素。

风传给水体的能量将形成波浪、漂移流和水体下的旋涡等三种运动，但每种运动的能量各占风能的多少，至今人们尚不完全清楚。不同领域的研究者，采用C_f差别很大（参见图6—2—2）。笔者分析了各家公式，并从风能与紊动能平衡出发，利用大量波浪实测资料，求得

$$C_f=2.55\times10^{-3}$$

在湖泊水库研究中，为了确定不同的气流和湖泊条件下的C_f值，也已进行了大量的研究工作。对于中等情况的大气边界层，Hicks发现湖泊尺度的影响可以忽略，小湖的系数类似于海洋试验所提的数值。另一方面，C_f是风速的一个弱函数。风速上升到5m/s时，$C_f=1.0\times10^{-3}$；风速增加到15m/s时，C_f值线性地上升到1.5×10^{-3}。当水深小于2.5m时，较长的波不能充分形成，同时水面将保持较平滑的状态。在这种状态下，Hicks的研究成果说明，在各种风速时，C_f都接近于1.0×10^{-3}。气压的稳定性对C_f值也

有很大的影响，在稳定条件下，C_f 值减少约 40%；而在不很稳定的气流下，C_f 将增加 40%。

从实用角度看，一般湖泊水库通常离它一定距离才有气象站，因此，习惯的作法取 C_f 为常值，在大多数情况下，取 $C_f=1.3\times10^{-3}$ 是合适的。

风吹过水面，形成波浪并发生波浪的破碎。波浪运动特别是波浪的破碎使水体上层内产生紊动。而在上层几米内紊动与剪切应力相互作用，进一步产生 Langmuir 环流和时均风吹飘移流，并通过紊动扩散和对流运动向深发展。通过表面气流的作用，在湖泊水库水体内，从上到下形成三个区域，上层是温水层，下层是恒温层，上下层之间存在一个斜温层。由于紊动及对流作用，温水层内水温均匀；经风作用后，温水层内水温将更加均匀，且层厚增加，斜温层下移，温水层内的时均流速更趋均匀。温水层的厚度通常由几米至十几米，有风时，厚度更大。斜温层是恒温层的保护层，使恒温层保持稳定的温度。斜温层内温度梯度很大，位置变化也很显著。通常在湖库很深时这三个分层才同时存在。如果湖库较浅（平均水深小于 10m）、季风作用且混合强烈时，一般讲就只有温水层而无斜温层和恒温层。

（二）入湖库河流的影响

由于入湖库河流的水温和含沙量与湖泊水库本身的水温及含沙量不一样，因此入湖库河流水的密度与湖泊水库中水的密度也不一样。当河流水体进入湖泊水库时，河道水流推动湖泊水库中的水体前进，直到湖库水位升高受回水影响或由于密度不同而引起浮力足以控制入流为止。如果河流水体较暖、含沙量很小，刚进湖库水流水体的容重小于湖泊水库水体的容重，水流将沿湖泊水库表面流动；反之如果河流水体较湖泊水库水体温度低，且含沙量较大，刚进湖库水流将潜入湖泊库底形成异重流沿湖泊水库中原河道作潜没流动。对于狭长形湖库，入湖库水流沿横断面较均匀分布；而宽阔形湖库，河流入湖库后除纵向流动外，还有横

向扩散。

（三）出湖库水流的影响

出湖库水流的动力特征不但与出水口在湖库平面的位置有关，而且与出水口所在的垂线位置也有很大关系。此外，出水口的位置和湖库内水温分布情况还决定着放水时湖库内水流特征和计算出水的方法。如当湖泊水库混合均匀而不分层时，湖库出流的流线呈辐射状从各个方面汇集到出水口，这时可用经典势流理论来建立相应的计算公式和描述出水情况。但在窄深型湖泊水库内的水体按温度分层时，这种分层性在斜温层尤为明显，即使在恒温层、通常也有弱的温度梯度。如果出水口位于有温度梯度的水层中，出湖库水流特性就有不同的特点。当泄出流量较小时，湖泊水库内垂向密度梯度产生的浮力可以阻止湖库内水流的垂向运动，因此从出水口流出的水体系来自同一薄水层；流量较大时，取水层可能横切斜温层；流量很大时，浮力的影响能完全被压倒，流线从各方汇向出水口，流动又可回到势能状态，这时又可用经典势流理论来计算出水口的出流情况。

二、湖库流综合数值模拟

一般讲，湖库流数值模拟只考虑单纯水流，个别模型中简单加入了风的作用。然而，自然界中影响湖库流运动的因素很多，诸如径流、风、波浪、悬沙等等。对此，笔者全面考虑了上述影响因素的作用，建立了复杂的综合性数学模型系统，即湖库流水模拟系统（Water Modelling System）—W. M. 系统。

（一）湖库流数学模型

1. 基本控制微分方程

连续方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

动量方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{\rho h}\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{1}{\rho h}\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}=K_H\Delta u$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{\rho h}\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{1}{\rho h}\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}=K_y\Delta v$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{1}{\rho h}\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}+\frac{1}{\rho h}\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}=K_z\Delta w$$

以上各式沿水深 Z 向积分，并经简化后，即可得出二维非恒定流基本微分方程。

连续方程

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{\partial uh}{\partial x}+\frac{\partial vh}{\partial y}=0 \qquad (8-5-1)$$

动量方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+g\frac{\partial \zeta}{\partial x}+\frac{\tau_{bx}}{\rho h}-\frac{\tau_{wx}}{\rho h}=K_x\Delta u \qquad (8-5-2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+g\frac{\partial \zeta}{\partial y}+\frac{\tau_{by}}{\rho h}-\frac{\tau_{wy}}{\rho h}=K_y\Delta v \qquad (8-5-3)$$

式中 ζ——自由水面与静止水面间的竖向位移；

u、v——分别为 x、y 向的水流分流速；

h——水深，$h=d+\zeta$

d——静水时的水深；

τ_{bx}、τ_{by}——分别为底摩阻应力在 x、y 向的分量；

$$\tau_{bx}=\rho\frac{g}{C^2}u\sqrt{u^2+v^2}-0.5\rho_a\frac{g}{C^2}u_w\sqrt{u_w^2+v_w^2}$$

$$\tau_{by}=\rho\frac{g}{C^2}v\sqrt{u^2+v^2}-0.5\rho_a\frac{g}{C^2}v_w\sqrt{u_w^2+v_w^2}$$

C_f——风对水表面的剪切系数；

τ_{wx}、τ_{wy}——分别为水面处风的切应力在 x、y 向量，

$$\tau_{wx}=C_f\rho_a u_w\sqrt{u_w^2+v_w^2}$$

$$\tau_{wy}=C_f\rho_a v_w\sqrt{u_w^2+v_w^2}$$

u_w、v_w——分别为 x、y 向风的分度；

K_x、K_y——分别为 x、y 向动量扩散系数；

C——谢才系数，$C=(1/n)\,h^{1/6}$

ρ——水密度；

ρ_a——空气密度；

n ——糙率；

Δ——微分运算子，$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$。

2. 差分方程

在差分方法中，笔者采用了MADI法。(8--5--1)式～(8--5--3)式的差分方程为

$$\frac{\zeta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}-\zeta_{i,j}^{n}}{\frac{\Delta t}{2}}+\frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}h_{i+\frac{1}{2},j}^{n}-u_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}h_{i-\frac{1}{2},j}^{n}}{\Delta x_{i-1}+\Delta x_i}$$

$$+\frac{v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n}h_{i,j+\frac{1}{2}}^{n}-v_{i,j-\frac{1}{2}}^{n}h_{i,j-\frac{1}{2}}^{n}}{\Delta y_{j-1}+\Delta y_j}=0$$

$$\frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}-u_{i,j}^{n}}{\frac{\Delta t}{2}}+u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}\frac{u_{i+1,j}^{n}-u_{i-1,j}^{n}}{\Delta x_{i-1}+\Delta x_i}$$

$$+v_{i,j}^{n}\frac{u_{i,j+1}^{n}-u_{i,j-1}^{n}}{\Delta y_{j-1}+\Delta y_j}+g\frac{\zeta_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}-\zeta_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x_{i-1}+\Delta x_i}$$

$$+g\frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{(u_{i,j}^{n})^2+(v_{i,j}^{n})^2}}{C_{i,j}^{2}\cdot h_{i,j}^{n}}$$

$$-\left(0.5\frac{g}{C_{i,j}^{2}}+C_f\right)\frac{\rho_a}{\rho h_{i,j}^{n}}w_w\sqrt{w_{ww}^{2}+w_{wv}^{2}}$$

$$=2K_x\frac{\Delta x_{i-1}(u_{i+1,j}^{n}-u_{i,j}^{n})-\Delta x_i(u_{i,j}^{n}-u_{i-1,j}^{n})}{\Delta x_{i-1}\Delta x_i(\Delta x_{i-1}+\Delta x_i)}$$

$$+2K_x\frac{\Delta y_{j-1}(u_{i,j+1}^{n}-u_{i,j}^{n})-\Delta y_j(u_{i,j}^{n}-u_{i,j-1}^{n})}{\Delta y_{j-1}\Delta y_j(\Delta y_{j-1}+\Delta y_j)}$$

$$\frac{v_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}-v_{i,j}^{n}}{\frac{\Delta t}{2}}+v_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}\frac{v_{i+1,j}^{n}-v_{i-1,j}^{n}}{\Delta x_{i-1}+\Delta x_i}+v_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}\frac{v_{i,j+1}^{n}-v_{i,j-1}^{n}}{\Delta y_{j-1}+\Delta y_j}$$

$$+g\frac{\zeta_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}-\zeta_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y_{j-1}+\Delta y_j}+g\frac{v_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{(u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}})^2+(v_{i,j}^{n})^2}}{C_{i,j}^{2}\cdot h_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}$$

$$-\left(0.5\frac{g}{C_{i,j}^{2}}+C_f\right)\frac{\rho_a}{\rho h_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}w_w\sqrt{w_{ww}^{2}+w_{wv}^{2}}$$

$$=2K_y\frac{\Delta x_{i-1}(v_{i+1,j}^{n}-v_{i,j}^{n})-\Delta x_i(v_{i,j}^{n}-v_{i-1,j}^{n})}{\Delta x_{i-1}\Delta x_i(\Delta x_{i-1}+\Delta x_i)}$$

$$+2K_y\frac{\Delta y_{j-1}(v^n_{i,j+1})-v^n_{i,j}-\Delta y_j(v^n_{i,j}-v^n_{i,j-1})}{\Delta y_{j-1}\Delta y_j(\Delta y_{j-1}+\Delta y_j)}$$

将各差分方程整理后，成为

$$Au_{i-1}+B_i\zeta_j+C_iu_{i+1}=D_i$$

$$E_i\zeta_{j-1}+F_iu_i+G_i\zeta_{j+1}=H_i$$

$$A_i=-\frac{\Delta t h^n_{i-1,j}}{2(\Delta x_{i-1}+\Delta x_i)}$$

$$B_i=1$$

$$C_i=\frac{\Delta t h^n_{i+1,j}}{2(\Delta x_{i-1}+\Delta x_i)}$$

$$D_i=\zeta^n_{i,j}-\frac{\Delta t}{2}\left(\frac{v^n_{i,j+1}h^n_{i,j+1}-v^n_{i,j-1}h^n_{i,j-1}}{\Delta y_{j-1}+\Delta y_j}\right)$$

$$E_i=-\frac{\Delta tg}{2(\Delta x_{i-1}+\Delta x_i)}$$

$$F_i=1+\frac{\Delta tg\sqrt{(u^n_{i,j})^2+(v^n_{i,j})^2}}{2c^2_{i,j}h^n_{i,j}}+\frac{\Delta t}{2}\cdot\frac{u^n_{i+1,j}-u^n_{i-1,j}}{\Delta x_{i-1}+\Delta x_i}$$

$$G_i=\frac{\Delta tg}{2(\Delta x_{i-1}+\Delta x_i)}$$

$$H_i=u^n_{i,j}-\frac{\Delta t}{2}\left[v^n_{i,j}\left(\frac{v^n_{i,j+1}-v^n_{j-1}}{\Delta y_{j-1}+\Delta y_j}\right)\right.$$

$$-(0.5\frac{g}{c^2_{i,j}}+C_f)\frac{\rho_a}{\rho h^n_{i,j}}u_w\sqrt{u^2_w+v^2_w}$$

$$+2K_x\frac{\Delta x_{i-1}(u^n_{i+1,j}-u^n_{i,j}-\Delta x_i(u^n_{i,j}-u^n_{i-1,j})}{\Delta x_{i-1}\Delta x_i(\Delta x_{i-1}+\Delta x_i)}$$

$$\left.+2K_x\frac{\Delta y_{j-1}(u^n_{i+1,j}-u^n_{i,j})-\Delta y_j(u^n_{i,j}-u^n_{i,j-1})}{\Delta y_{j-1}\Delta y_j(\Delta y_{j-1}+\Delta y_j)}\right]$$

$$R=v^n_{i,j}-\frac{\Delta t}{2}\left[u^{n-\frac{1}{2}}_{i,j}\left(\frac{v^n_{i+1,j}-v^n_{i-1,j}}{\Delta x_{i-1}+\Delta x_i}\right)+g\frac{\zeta^{n+\frac{1}{2}}_{i,j+1}-\zeta^{n+\frac{1}{2}}_{i,j-1}}{\Delta y_{j-1}+\Delta y_j}\right.$$

$$-\left(0.5\frac{g}{c^2_{i,j}}+C_f\right)\frac{\rho_a}{\rho h^{n+\frac{1}{2}}_{i,j}}v_w\sqrt{u^2_w+v^2_w}$$

$$+2K_y\frac{\Delta y_{j-1}(v^n_{i+1,j}-v^n_{i,j})-\Delta y_j(v^n_{i,j}-v^n_{i,j-1})}{\Delta y_{j-1}\Delta y_j(\Delta y_{j-1}+\Delta y_j)}$$

$$\left.+2K_y\frac{\Delta x_{i-1}(v^n_{i+1,j}+v^n_{i,j})-\Delta x_i(v^n_{i,j}-v^n_{i-1,j})}{\Delta x_{i-1}\Delta x_i(\Delta x_{i-1}+\Delta x_i)}\right]$$

$$S=1+\frac{\Delta t(v_{i,j+1}^{n}-v_{i,j-1}^{n})}{2(\Delta y_{j-1}+\Delta y_j)}+\frac{g\Delta t\sqrt{(u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}})^2+(v_{i,j}^{n})^2}}{2c_{i,j}^2h_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}$$

（二）风吹湖库流数值模拟

风是引起水体混合的重要因素。当风吹过水面时，剧烈的扰动将加速水体混合，并且，风的作用将引起风浪，产生风吹流，同时形成垂直环流和水平环流。由于风对水体运动和水质混合的影响很大，因此，在研究湖库流时必须考虑风对水体作用。

风刮过水面时，由于在水面上产生了拖曳力，造成了对水体的做功，作用情况如图 8—5—1 所示。

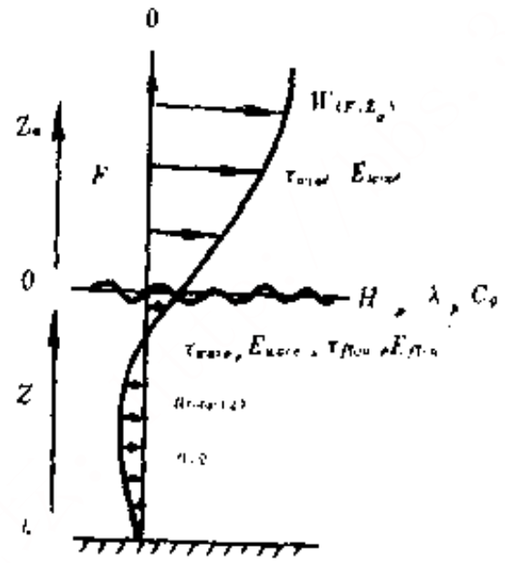


图 8—5—1　风对水体作用

由图 8—5—1 可知，风对水面剪切应力 $\tau_{风}$ 应分为两部分，即 $\tau_{波}$ 和 $\tau_{流}$，而能量也应分两部分，即 $E_{波}$，和 $E_{流}$。

风对水体表面的总剪切应力可由下式决定：

$$\tau_{风}=C_f\rho_a|W|W$$

式中　W——风速；

c_f——风摩阻系数。

在水面上，风速沿垂线剖面呈对数分布，根据水面的粗糙度不同，而采用下列不同的计算公式

光滑面

$$W_{(z)}=\frac{u_*}{\text{æ}}\ln\frac{u_*z}{\gamma_a}+c_1u_*$$

粗糙面

$$W_{(z)}=\frac{u_*}{\text{æ}}\ln\frac{z}{z_0}+c_2u_*$$

$$u_*=\sqrt{\tau_{风}/\rho_a}$$

式中 æ——卡门常数；

ρ_a——空气密度；

z_0——粗糙度；

z——高程；

γ_a——空气的运动粘性系数。

由于波能中包括了各种能量及能耗，取稳定传播时之风浪数值计算剪切应力：

$$\tau_{波}=\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=c_0\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}=c_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{E}{c_0}\right)=\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\qquad(c_0\text{为深水波速})$$

已知波能 $E=\frac{1}{8}\rho gH^2$（H为波高）；$\tau_{波}=\rho_a C_{f波}|W_{(z)}|W_{(z)}$

由此可得

$$C_{f波}=\frac{1}{\rho_a W_{(z)}^2}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}=\frac{\rho gH}{4\rho_a W_{(z)}^2}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x}\frac{1}{C_0}$$

（三）波浪、水流共同作用湖库流数值模拟

波浪和水流共同作用下的流速场变化表现在两个方面，一是流速在垂线上分布趋于均匀化，二是流速场中加入了波浪净质量流。由于波浪与水流共同作用时的内部结构非常复杂，相互作用不是简单地线性叠加。因此，从机理上分析，一是在底部应考虑浪与水流的综合摩阻作用，二是考虑波浪剩余动量流（即“幅射应力”）的影响。

1. 基本微分方程

连续方程

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(uh)+\frac{\partial}{\partial y}(vh)=0$$

动量方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+g\frac{\partial \zeta}{\partial x}=\frac{c_f\rho_a}{h\rho}|W-U|(w_x-u)$$
$$+\frac{1}{h}\frac{\tau_x}{\rho}+\frac{1}{\rho h}\left(\frac{\partial s_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial s_{xy}}{\partial y}\right)=K\Delta u$$
$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+g\frac{\partial \zeta}{\partial y}=\frac{c_f\rho_a}{h\rho}|W-U|(w_y-v)$$
$$+\frac{1}{h}\frac{\tau_y}{\rho}+\frac{1}{\rho h}\left(\frac{\partial s_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial s_{yy}}{\partial y}\right)=K\Delta v$$

上式中，u、v为x向及y向分速，也包含了波浪水流综合作用的成份；其余符号同前。

2. 波浪水流共同作用下的底部摩阻

关于波浪与水流共同作用下的底部摩阻问题，过去已有很多学者作了研究，但存在两个不足：其一，有的研究者将单纯水流和单纯波浪作用下的摩阻力线性叠加后就认为是波浪水流共同作用下的底摩阻，这种做法过于简化，没有计及水流和波浪的相互作用。其二，没有考虑波浪与水流成任意夹角的情况。

为了克服上述两个不足，在王运洪的研究中，进行了波浪与紊动水流相互作用的试验研究，得出波浪和水流共同作用的底部平均剪应力

$$\tau_b=\rho gh\sin\theta+\rho g\alpha a\left[\frac{2}{c}(\bar{u}+c_e)-\frac{1}{2}\right]$$

式中 ρ——水的密度；

g——重力加速度；

h——水深；

$\sin\theta$——湖底坡度；

a——波振幅；$a=a_0\exp(-\alpha x)$

x——振幅为a的位置与振幅为a_0的位置之间的距离；

a_0——初始波振幅；

α——波浪衰减模数（参见王运洪公式）；

c——波速；

$\bar{u}$——沿水深的平均流速；

c_g——波群速，$c_g=\frac{c}{2}\left(\frac{2kh}{\sinh 2kh}+1\right)$。

对于深窄水道

$$\alpha=\frac{2k}{b}\sqrt{\frac{\gamma}{2\sigma}}\left(\frac{kb+\sinh 2kh}{2kh+\sinh 2kh}\right)$$

对于宽浅水域

$$\alpha=2k^2\sqrt{\frac{\gamma}{2\sigma}}\left(\frac{1}{2kh+\sinh 2kh}\right)$$

式中 b——渠道宽；

k——波数，$k=2\pi/$波长；

ν——运动粘滞系数；

σ——圆频率，$\sigma=2\pi/$周期。

3. 波浪剩余动量流

波浪剩余动量流是个张量，在浅水地区可由下式表示

$$\begin{bmatrix}S_{xx} & S_{xy}\\ S_{yx} & S_{yy}\end{bmatrix}=E\begin{bmatrix}n(1+\cos^2\alpha)+\frac{1}{2} & \frac{n}{2}\sin 2\alpha\\ \frac{n}{2}\sin 2\alpha & n(1+\sin^2\alpha)-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

式中 $E=\frac{1}{2}\rho gH^2$；

n——波群速与波速之比；

α——波向与 x 轴之间夹角。

若浅水区波速 $c=\sqrt{gh}$，通过计算，在基本方程中剩余动量流的偏微分可写成

$$\frac{\partial S_{xx}}{\partial x}=\frac{3}{4}\rho\gamma^2 gh\tan\varphi\left[\sin\beta-\frac{\sqrt{g}}{6}h^{1/2}\frac{\sin\alpha_0}{c_0}\cos\beta\right]$$

$$\frac{\partial S_{xy}}{\partial y}=\frac{5}{16}\rho\gamma^2(\sqrt{gh})^3\frac{\sin\alpha_0}{c_0}\tan\varphi\cos\beta$$

$$\frac{\partial S_{yx}}{\partial x}=\frac{5}{16}\rho\gamma^2(\sqrt{gh})^3\frac{\sin\alpha_0}{c_0}\tan\varphi\sin\beta$$

$$\frac{\partial S_{yy}}{\partial y}=\frac{3}{4}\rho\gamma^2 gh\tan\varphi\left[\cos\beta-\frac{\sqrt{g}}{6}h^{1/2}\frac{\sin\alpha_0}{c_0}\sin\beta\right]$$

式中 γ——浅水系数；

φ ——岸边剖面斜坡与岸法向线的夹角；

β ——岸线与 x 轴的夹角。

（四）河流进入湖泊水库泥沙输移扩散湖库流数值模拟

洪汛期间，上游河流挟带大量泥沙随暴雨径流进入湖泊水库，造成河口及库区淤积，并且，由于泥沙表面的吸附作用，悬移质和推移质也会吸附一定的污染物，一并进入湖库。因此，计算入湖库河流的泥沙输移扩散，在湖泊水库湖库流及湖库水质污染研究中是不可忽视的。

1. 基本微分方程

悬沙输移扩散的基本方程为

$$\frac{\partial s}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(su)+\frac{\partial}{\partial y}(sv)+\frac{\partial}{\partial z}[(w-w_i)s]=\frac{\partial}{\partial x}\left(D_x\frac{\partial s}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D_y\frac{\partial s}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(D_z\frac{\partial s}{\partial z}\right)$$

将上式沿水深积分，并设水面处无泥沙交换，即可得二维的泥沙输移扩散方程

$$\frac{\partial}{\partial t}(sh)+\frac{\partial}{\partial x}(suh)+\frac{\partial}{\partial y}(svh)+F_s=\frac{\partial}{\partial x}\left(D_xh\frac{\partial s}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D_yh\frac{\partial s}{\partial y}\right)$$

式中 s——悬沙的含沙浓度；

W_i——泥沙的沉降速度；

D_x、D_y——悬沙在 x 向和 y 向的扩散系数；

F_s——泥沙的沉降或冲刷函数，视泥沙性质及状态不同而有不同的表示公式，取决于底部剪切应力 τ_b、临界起动应力 τ_c 和临界不淤剪切应力 τ_d。

2. 泥沙沉降或冲刷函数

根据泥沙种类、粒径等的不同，其沉降或冲刷函数 F_s 有不同的表示

（1）对于沙质泥沙

(a) 当 $\tau_b\leqslant\tau_d$ 时为沉降阶段

$$F_s = aW_s S\left(1-\frac{s_{*2}}{s_{*1}}\right)$$

式中 a——泥沙沉降机率；

s_{*1}、s_{*2}——变化前后的饱和挟沙力。

饱和挟沙力一般表示式为

$$S_* = a\left(\frac{U^2}{gRC^2}\right)^b$$

式中 a、b——经验系数，可由试验决定；

U——河道断面平均流速；

R——水力半径，在二维数值模拟中，不妨取U为当地流速，R为当地水深。

(b) 当$\tau_d<\tau_b<\tau_e$时为不冲不淤阶段

$$F_s=0$$

(c) 当$\tau_b\geqslant\tau_e$时为底部发生冲刷阶段

$$F_s=-d\tau_0 S\left(\frac{s_{*2}}{s_{*1}}-1\right)\left(\frac{\tau_b}{\tau_e}-1\right)$$

式中 d——系数，由试验决定。

(2) 对于粘性土

(a) 当$\tau_b\leqslant\tau_d$时发生淤积

$$F_s=aW_s S\left(1-\frac{\tau_b}{\tau_d}\right)$$

式中 W_s——粘性土的絮凝沉降速度；

a——沉降机率，可由试验决定。

(b) 当$\tau_d<\tau_b<\tau_e$时不冲不淤

$$F_s=0$$

(c) 当$\tau_b\geqslant\tau_e$时底部发生冲刷

$$F_s=-M\left(\frac{\tau_b}{\tau_e}-1\right)$$

上式中，系数M可由试验决定。

三、湖库流数学模型的建立与调试

(一) 原始资料的收集与整理

建立湖库流数学模型，要对该模型进行调试与验证。首先应

对湖泊水库原始实测资料（包括地形、水文、气象）进行收集和整理。

对地形资料（地形图）的整理，采取了奇点数据加权处理及平滑地形处理技术，计算公式：

$$h_{i,j}=\beta h_{i,j}+\frac{1-\beta}{4}(h_{i+1,j}+h_{i-1,j}+h_{i,j+1}+h_{i,j-1})$$

式中 β ——平滑系数，$\beta=0.5\sim0.58$。

（二）计算数值滤波处理

为了提高计算的稳定性，本模型采用了如下的滤波技术：

$$\begin{bmatrix}\zeta\\ h\\ u\\ v\end{bmatrix}_{i,j}=\alpha_1\begin{bmatrix}\zeta\\ h\\ u\\ v\end{bmatrix}_{i,j}+\frac{1-\alpha_1}{4}\begin{bmatrix}\zeta_{i+1,j}+\zeta_{i-1,j}+\zeta_{i,j+1}+\zeta_{i,j-1}\\ h_{i+1,j}+h_{i-1,j}+h_{i,j+1}+h_{i,j-1}\\ u_{i+1,j}+u_{i-1,j}+u_{i,j+1}+u_{i,j-1}\\ v_{i+1,j}+v_{i-1,j}+v_{i,j+1}+v_{i,j-1}\end{bmatrix}$$

式中 α_1 ——滤波系数。

（三）自动调整糙率处理

在模型调试中采用了自动调整糙率，自动调糙公式为

$$n_k=n_{k-1}\left(1-\frac{H_c-H_s}{H_c}\right)$$

式中 H_s ——实测水位；

H_c ——计算水位。

（四）水流漫滤技术处理

在湖泊水库边滩上，考虑到滩地蓄水和动量交换，笔者采用水流漫滩的新技术，在边界处，用漫滩流速来控制，其公式如下：

$$u=\frac{\mathrm{d}\zeta/\mathrm{d}t}{\tan\theta_x}$$

$$v=\frac{\mathrm{d}\zeta/\mathrm{d}t}{\tan\theta_y}$$

式中 θ_x、θ_y ——x、y 向之边坡角。

四、湖库流数值模拟应用实例

（一）于桥水库数值模拟应用及成果

于桥水库是引滦入津输水工程重要的调蓄水库，兼有行洪排

涝、农田灌溉、发电兴利、水产养殖、水量调节等多项功能，在工农业用水、城乡饮用、调节环境、旅游观光等诸方面对天津市具有突出的地位和显著的综合效益。然而，引滦初期，水库已呈现中营养型及局部富营养化特征。实测结果表明：水质存在问题。因而对其湖库流的研究，是改善水库营养状态、保护水质、防治水库淤积、调节水量、控制流态、调整水库环境，从而保证引滦入津工程发挥长远经济效益的重要基础。

于桥水库控制流域面积2060km²，蓄水位21.9m时水库面积约110km²，库容4.2亿m³。水库库区东西向直线长约23km，南北最大宽约8km，平均水深4m，属宽线型带状水库（适合采用二维模拟方法）。水库上游东北有淋河，东南有黎河与沙河，汇合后注入于桥水库。三条入库河流均为间歇性季节河流，洪汛期间暴雨产流较大，洪水径流主要集中在汛期7—9月。

于桥水库湖库流研究采用连续四年现场原型观测与建立多因素作用湖流数值模拟相结合的方法，对水库湖库流特性进行了系统的定量化研究。

该模拟系统的调试、验证，是采用1987—1990年连续四年汛期原型观测同步实测数据进行的，现选择1987年两组验证曲线作为证例，如图8—5—2及图8—5—3所示。图中横坐标是各测站至大坝的距离，纵坐标是湖流流速。由图可知，计算值与现场实测值十分接近，可见数值模拟方法是成功的。

针对于桥水库，库区数模采用1/10000地形图、矩形网格；取空间步长$\Delta x=250m$，$\Delta y=125m$；时间步长取$\Delta t=90s$。计算域周边为固边界，西南边水库放水洞出口为水边界，用水库泄流的流量控制（Q_3）；库东北及东南部的淋河及黎河、沙河（汇合后称之为果河）入库河口处，也为水边界，分别以两条河的入库径流Q_1和Q_2来控制。对各典型水文年逐月、特征水文日，无风及不同风向、风速；不同出、入库流量，引滦输水与否，悬沙输移扩散等多种方案的流场、泥沙扩散分布进行了计算、预报。

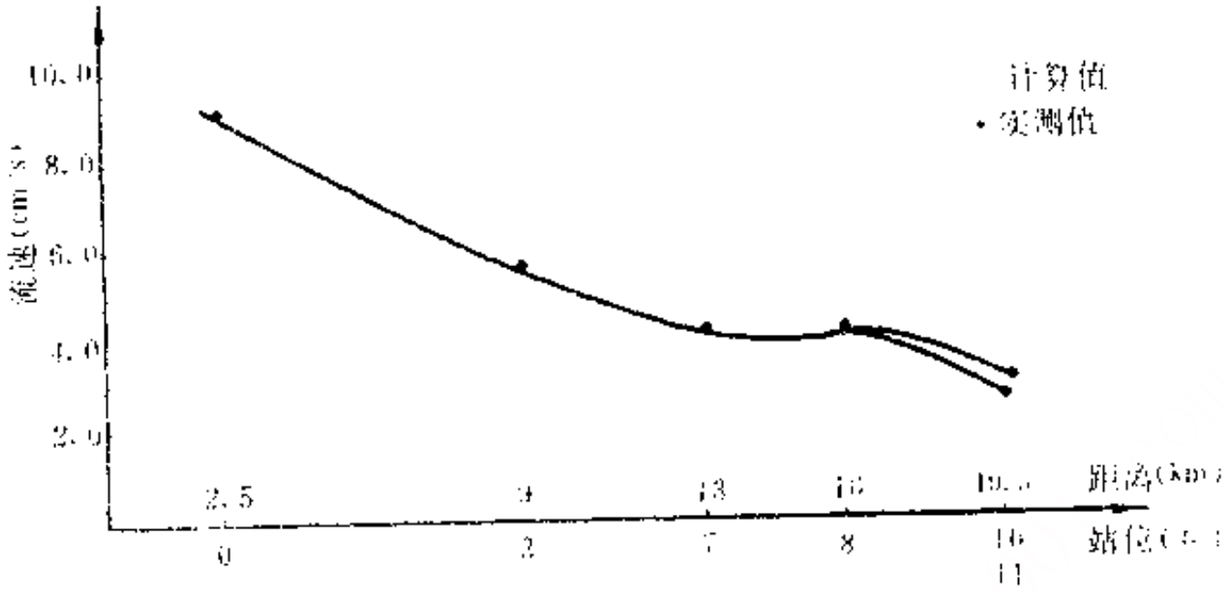


图 8—5—2 1987 年 6 月 15 日流速验证曲线

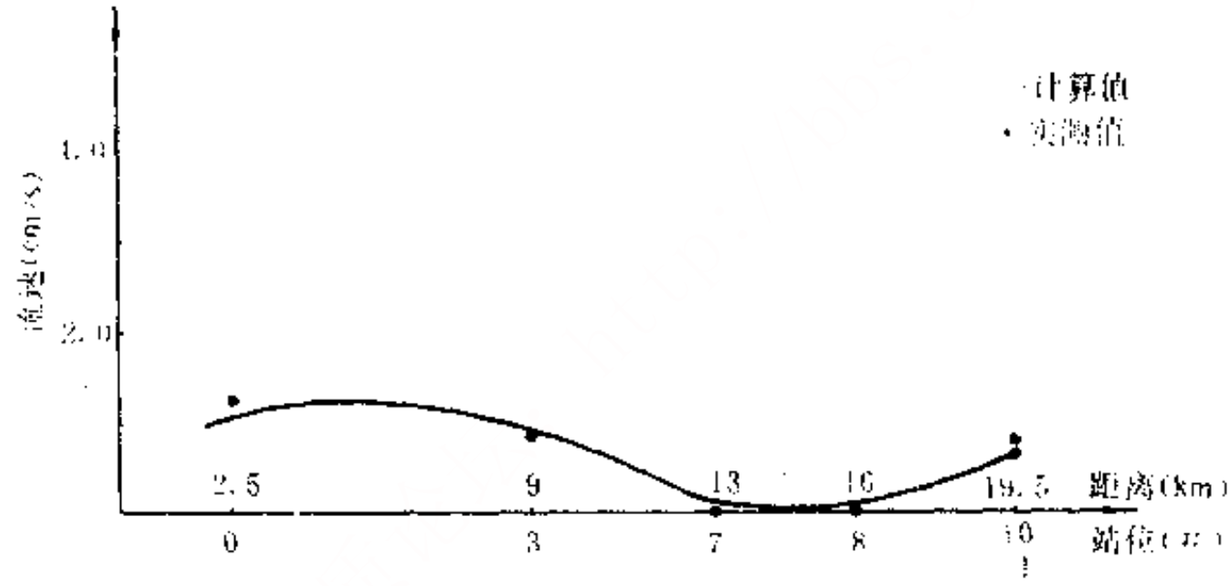


图 8—5—3 1987 年 7 月 29 日流速验证曲线

图 8—5—4、图 8—5—5 是其中典型枯水年（1982.9）、典型丰水年（1978.8）有风作用下的计算流场图图例．图 8—5—6 为典型丰水年（1978.7）泥沙输移扩散分布图图例。

由获得的湖流流场可知：

（1）于桥水库在正常年及枯水年份，入库径流引起的库内流速很小；但在丰水年入库径流量大时．库内流场变化显著，平均流速约为 0.5m/s，最大值可达 1.2m/s 以上。

（2）从流速的空间分布特征看．强流速带一般集中在库中部

及老河道区域，在库边滩及宽浅水区流速较小，其藻类和水生植物繁多，水体不易交换，容易发生富营养化，计算结果与场观测非常一致。

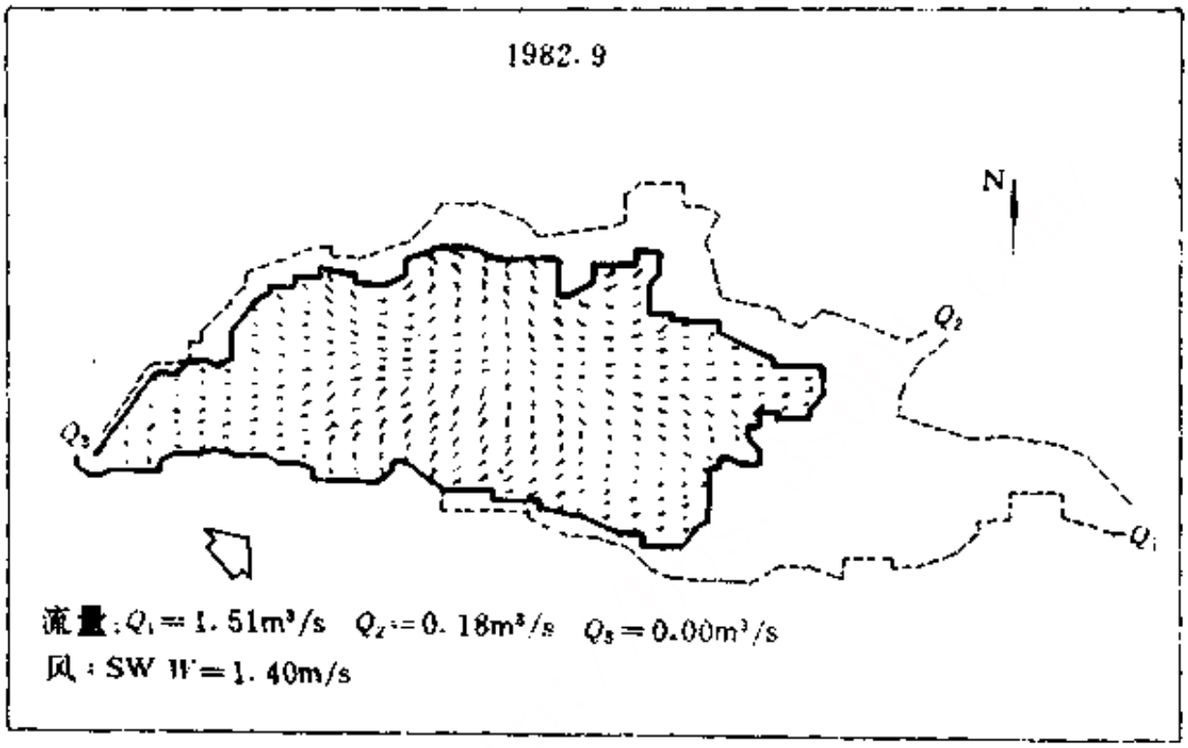


图 8—5—4 典型枯水年计算流场图

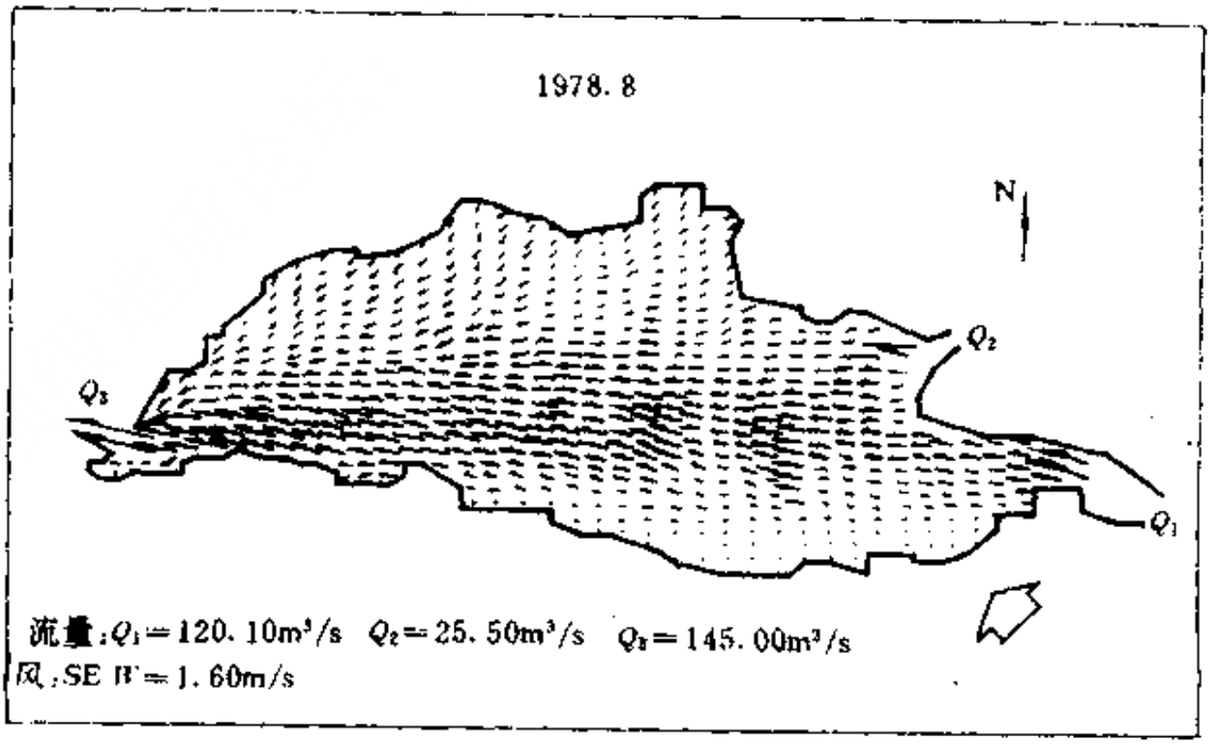


图 8—5—5 典型丰水年计算流场图

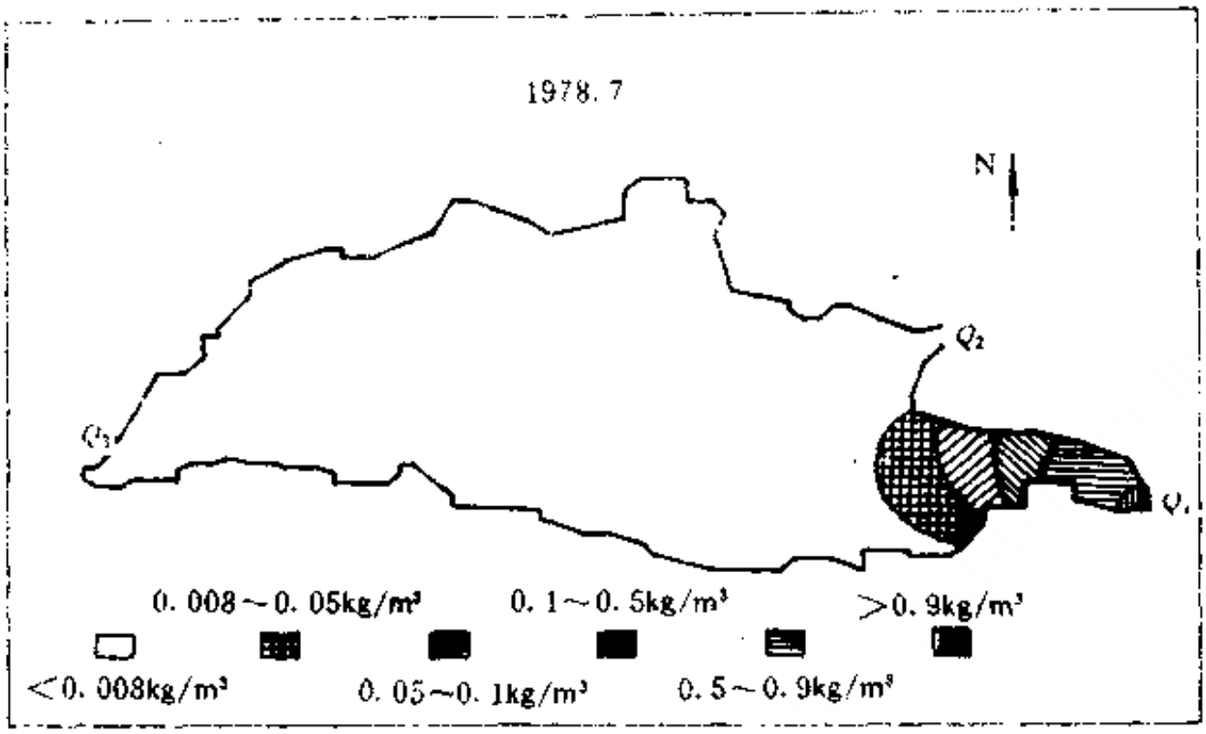


图 8—5—6　典型丰水年泥沙输移扩散分布图

模拟流场图、泥沙扩散分布图及综合研究结果，为于桥水库综合工程治理方案实施，提供了可靠的定量化依据。

（二）尔王庄水库数值模拟应用及成果

作为引滦入津输水工程中两大重要调蓄水库之一的尔王庄水库，位于天津市宝坻县境内，于 1983 年建成使用。水库长约 4km，最宽约 3km，沿库周长约 15km，库正常高水位 5.5m 时库面积 11.03km²，相应库容 4530 万 m³，共占地 13.03km²，该水库是为提高对天津供水保证率及保证引滦输水水质而修建的一座平原水库。尔王庄水库的主要功能为：

（1）当汛期，自潘家口水库来水被中途农用、行洪所中断时，该水库承担继续向天津市供水的任务，尽量避免或少使用被污染的海河水，以提高水资源利用率。

（2）水库具有自然沉淀作用，春汛期或当输水明渠来水混浊时，可随时调用水库存蓄水量，通过尔王庄泵站及暗渠向市内水厂供水，以改善水质。

（3）在丰水年可利用水库储水备用，提高城市供水保证率。

（4）当城市用水临时加大或减小时，水库可起调节作用。

近年来，随着工农业生产和人民生活水平向高标准的发展，对供水要求也不断提高，即不但要求有充足的水量，还要保证有良好的水质，因此，供水水质保护引起了各级政府及有关部门的高度重视。然而，经过多年的运营使用，由于尔王庄水库大部分时间运行都是同一闸孔入、出流，且流量很小，使库内水体置换很少，致使水库内水质分布不均匀，有些水域藻类丛生，杂草不断生长、死亡，造成局域水质恶化，有水库富营养化发生的隐患，如不及时治理，将会严重影响水质，无法实现其设计功能。为了根治隐患、清除杂草、藻类，改善水质，必须弄清库内水流运动基本特性及水流作用下的污染物质运动状况，掌握滞流区的位置与范围，在此基础上配合温度场及污染物扩散情况，提出切实可行的治理方案及工程措施，以改善水环境、提高水质量、发挥水库最佳的经济效益、社会效益和环境效益。

尔王庄水库数值模拟采用与于桥水库数模相同的湖泊水库水模拟系统，使用二维数模进行湖库流计算。模拟计算方法上仍采用双向双步扫描的MADI法，计算空间步长 $\Delta x=\Delta y=50m$，时间步长 $\Delta t=10s$。为了掌握我国北方季风对湖库流的影响，考虑到尔王庄水库的位置、形状，采用了四种特征的风向及不同出、入库流，以及几种水位情况，计算预报出各种方案的流场。图 8—5—8 和图 8—5—9 是典型的湖流流场图。

由获得的湖流流场可知：

（1）在无风情况下，仅1#闸门出入流量时，库内流速不大，范围很小，仅在闸门附近约 250m 的范围内有可测流速，其值一般为 2～3cm/s。

（2）仅在风作用下（无出、入库流），风吹流也较小，通常在 NE 和 SW 风向作用下，平均湖流流速约 2～3cm/s；在 NW 和 SW 风向作用下，平均湖流流速为 1～2cm/s。

（3）从库内流速的空间分布来看，仅在闸门附近流速较大，其

余大部分水域流速很小，尤其在水库的西南角和东北角，存在大片滞流区或死水区，该区杂草丛生，藻类繁殖极快，是该库治理富营养化的重点区域。

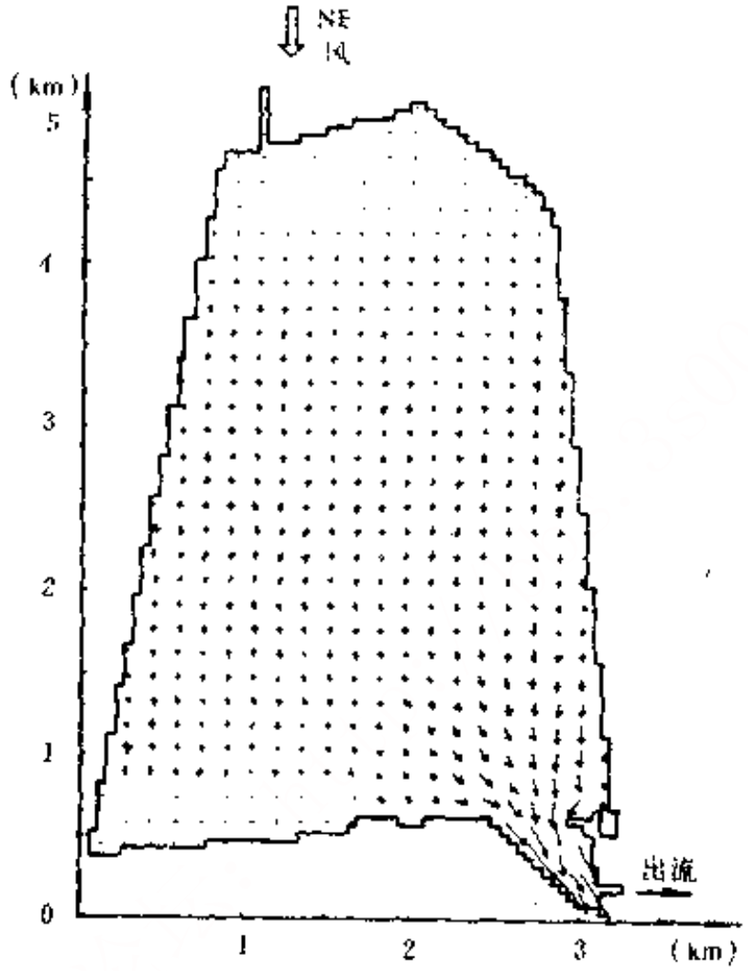


图 8—5—7　实测时全库湖流模拟计算图

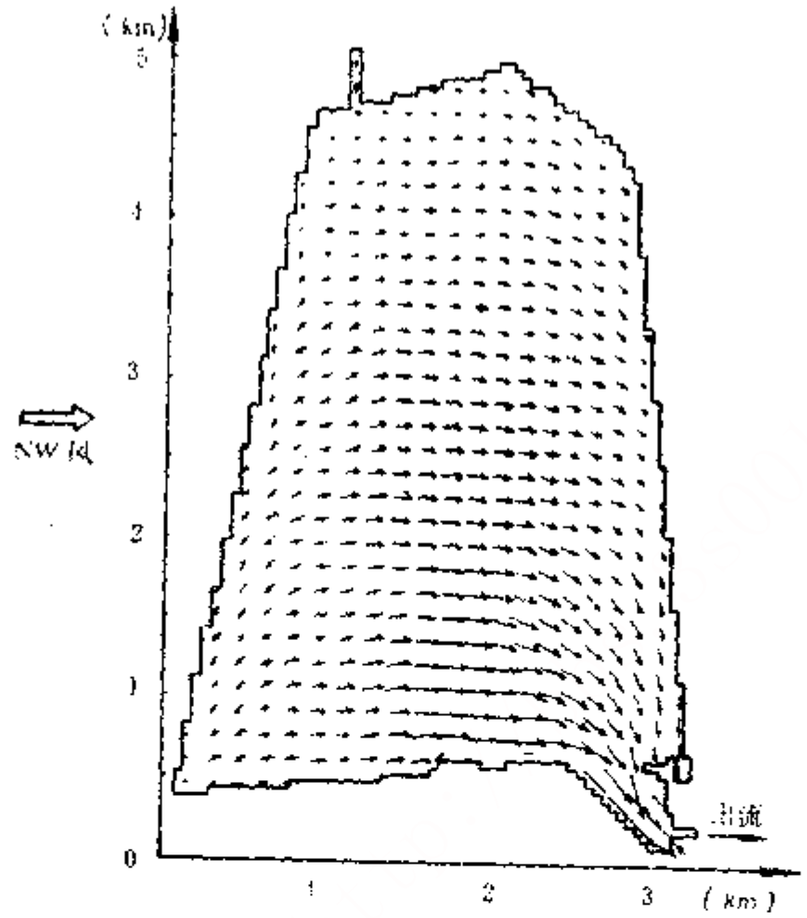


图 8—5—8　典型湖流流场图

参 考 文 献

1　Hydraulics Research, Wallingford; Tianjin siltation minimization study. Report Fx 1734, HR Wallingford Limited, Wallingford Oxfordshire, UK, 1988, 1～10

2　曹祖德. 充分发展的深水波预报. 水运工程, 1987, 6 (6): 11～14

3　Longuet－Higgins M S and R W Stewart, Radiation in water waves. a physical discussion with applications. Deep－Sea Research, 1964, (11): 529～563

4　Cao Zude. Cohesive sediment transport at powdery sand－mud beach in Kumamoto Port Japan. Rep. of PHRI, Japan, 1989, 1～56

5　曹祖德,王桂芬. 波浪掀沙、潮流输沙的数值模拟. 海洋学报. 1993, 15(1)

6 曹祖德，王桂芬．疏浚弃土水抛区选划的研究．两岸海岸港口论文交流文集．南京海河大学出版社，1993
7 曹祖德，王桂芬，朱杰．疏浚抛泥区选划的研究．交通环保，1992，(1) 1～6
8 曹祖德，张英平．三维潮流数学模型及油膜输移扩散的数值计算．交通环保，1988，(1)
9 黄礼贤，张观希，万肇忠．石油在海洋中的扩散．环境科学丛刊，1982．(1)
10 曹祖德，王桂芬．风及潮流作用下石油点源连续输移扩散的数学模型．水运工程电算应用，1984
11 K S Aravamudan 等．预报不平静海面溢油扩散的简化数学模型．交通环保，1984，(6)
12 王运洪，秘兆兰．湖泊水库湖流模拟系统．海洋与湖泊，1992 年，23 (5)
13 曹祖德．风对浅水地区传播的影响．CATA Oceanologica Sinica，1983，5 (2)
14 王运洪，秘兆兰．引滦于桥水库风吹环流模拟．天津水利．1994 (1)
15 王运洪，秘兆兰．于桥水库风季流场的计算与分析．湖泊科学．1994．6(3)
16 王运洪．海河口及河道底部沉积物的分析．水道港口，1984，(2)
17 王运洪．波浪与水流共同作用下的底砂起动．海洋科学，1983．(3)
18 王运洪．波浪、水流共同作用下底部较细颗粒砂的起动(一)．天津水利，1982，(1)
19 王运洪．波浪、水流共同作用下底部较细颗粒砂的起动(二)．天津水利，1982，(2)
20 王运洪．泥砂起动规律的研究．海洋学报，1984，6 (6)
21 J D A Van Hoften and S Karaki，Interaction of waves and a Turbulent Current，Proceedings of the Fifteenth Coastal Engineering Conference，1976，(1)：404～422
22 M S Longuet—Higgins and R W Stewatt，Changes in the Form of Short

Gravity Waves on Long Waves and Tidal Currents, J. Fluid Mechanics, 1960, (8): 565

23 Wang Yun Hong. Study on Wave Decay in Shallow Water Area. Australasian Conferece on coastal and Ocean Engineering. NCP89/[illegible] 1989

24 Wang Yun Hong. An Investigation on the Pattern of Sediment Initiation Motion, Australasian Conference on Coastal and Ocean Engineering NCP 89/20, 1989

25 王运洪，秘兆兰．波浪水流共同作用下的推移质输沙计算．第七届全国海岸工程学术会议论文集，北京海洋出版社，1995．

26 秘兆兰，王运洪．河口、海湾潮流数学模型的建立．第七届全国海岸工程学术会议论文集，北京海洋出版社，1993．1

27 王运洪，秘兆兰．引滦入津黎及黎河沙河分岔河道水流数值模拟．天津水利，1993．(2)

28 王运洪．近岸浅水波的计算．海洋与湖沼，1994，25 (4)

29 王运洪，秘兆兰．《引滦入津工程于桥水库湖库流系统综合研究探讨》．天津水利，1994，(2)

30 王运洪，秘兆兰．水动力环流流场研究．水道港口，1994．(3)

31 王运洪．应用最小二乘法电算方法进行数据处理的探讨．海岸河口研究，北京海洋出版社，1990

32 王运洪．渤海湾海河口地物光谱测试与应用．海洋调查，1986．(2)

第九章　复合模型

9.1　概　　述

从70年代以来，在海洋、海岸工程和水力、环境工程中出现了一门新兴的模拟技术——复合模型，这是将物理模型（水力模型）和数值模拟结合在一起的新型模型，它的出现，标志着在模拟技术方面有了重大进展。

在水力工程中，物理模型（水力模型）有悠久历史，从1885年Reynolds创建第一个河口模型（Mersey模型）算起，至今已有100多年历史，由于水力模型显明直观，因此，它一直是水力工程中的主要模拟手段，然而，水力模型又有很多缺点，如占地多、投资高、制模难、周转长，并受模型比尺的影响较大等。

随着电子计算机技术的发展，数值模拟获得了迅速发展，它有诸多优点，如不用场地、制模省事、通用性强、周转期短、没有比尺影响，且便于修改、可长期保存等，因此50年代以来，数值模拟获得了广泛应用。目前，它几乎同水力模型一样，也已成为海洋、海岸工程、水力和环境工程中主要模拟手段之一。但数值模拟也有很多缺点，如直观性差，难以模拟水流微结构等。

由于水力模型和数值模拟的优缺点可以互补，自70年代以来，人们就开始进行探索和研究，试图将水力模型和数值模拟结合起来，取长补短，使其成为更完善的一种模型。在这种思想指导下，科研工作者开展了大量的研究和试制，电子计算机容量、速度和兼容性的迅速发展及广泛使用，为这种思想成为现实创造了有利条件。

在所有先进实验室中，大型水力模型试验的自动控制和数据收集的实时处理都得用电子计算机实现，而数值模拟的运转也是在电子计算机中实现。如果把这两种模型用统一的电子计算机系统来控制，使任一方模型所需要的数据由对方模型供给和控制运转，并将运转所得数据反馈回来输给对方模型并控制其运转，这种过程不断进行直到实验全部自动完成为止。把这两种模型通过电子计算机联系起来成为统一运转的整体，这种复合体，就称为复合模型。由此可知，复合模型的前题是水力模型的自动控制和数据实时处理，以及数值模拟的快速运转。近年来，世界上已相继出现了一些水力模型和数值模拟相结合的复合体。

9.2 复合模型的种类

根据世界上已出现的几个实例，复合模型大体分为三种类型：①耦合运转型；②综合模拟型；③混合计算型。

9.2.1 耦合运转型

耦合运转型模型也称为同步复合模型。这种模型的特点是水力模型的边界与数值模拟的边界相互啮合，形成整体，同步运转。首先提出这类模型的是西德Hannover工科大学的Holz(1976)。他当时的做法是，将一长段河道分成两小段，上段采用数值模拟模拟，下段用水力模型模拟，两种模型的交界处通过电子计算机接口啮合成整体。这种模型的具体布置如图9—2—1所示。

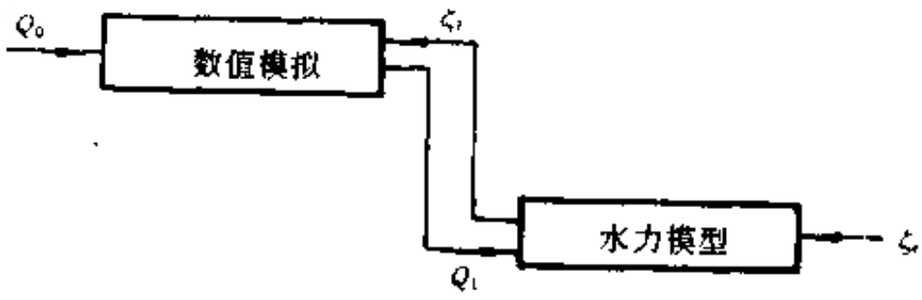


图9—2—1 啮合运转型复合模型

Holz 于 1976 年提出的复合模型结构很简单，作为水力模型的水槽只有 25m 长，作为数值模拟的一维模型也只有 6 个断面，但其基本原理与后来发展起来的啮合运转型复合模型的原理完全一致。

由图 9—2—1 可知，整个模型边界只有数值模拟的上边界流量 Q_0 和水力模型的下边界水位 ζ_n，其数值由原体实测资料提供。其运转过程为：在原始边界 Q_0 和 ζ_n 控制下，先运转数值模拟，求出 Q_1、输入给水力模型，得出 ζ_1，再反馈入数值模型。按此过程，再进行下一次运转、反复进行，直到试验全部结束。

这里需要着重指出的是，该模型的关键是接口。其接口应具有如下功能：即不仅能在规定的时间间隔 Δt 内将数值模拟下边界算出的流量值传输给水力模型上边界的流量控制系统，并能可靠地将物理模型上边测得的水位，准确地传输给数值模拟的下边界，更重要的是要快速运转和控制的功能，要在水力模型前后两次测取数值的时间间隔 Δt 内，有效地完成以下几个工序：

（1）测取水力模型上边界的水位，并经实时处理后输入给数值模拟作为下边界（Δt_1）；

（2）完成数值模拟的一次运转，并将下边界算得的流量输入给水力模型的上边界流量控制系统（Δt_2）；

（3）控制系统完成水力模型上边界的流量调节和控制（Δt_3）。

上述 3 个工序所需时间的总和必须小于水力模型前后两次测取数据的时间间隔，即

$$\Delta t > \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3$$

其简图如图 9—2—2 所示。

在 Holz 的试验模型中，数值模拟的时间步长为 0.1s，水力模型中测取水位、传递讯号、数据处理及流程控制等时间为 0.6s，因此采用数值模拟和水力模型联合的复合模型时间步长为 1s。

对这种复合模型，我们最关心的是精度和可靠度，为此，在一维河道模型中进行过广泛的验证和对比研究。曾制造了两个尺

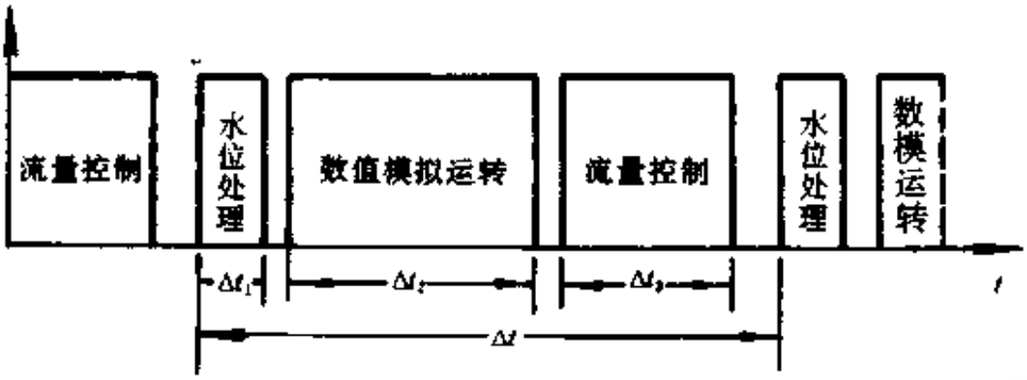


图 9—2—2　时段分配情况

寸相同的模型：水力模型和复合模型，布置情况见图 9—2—3 所示。

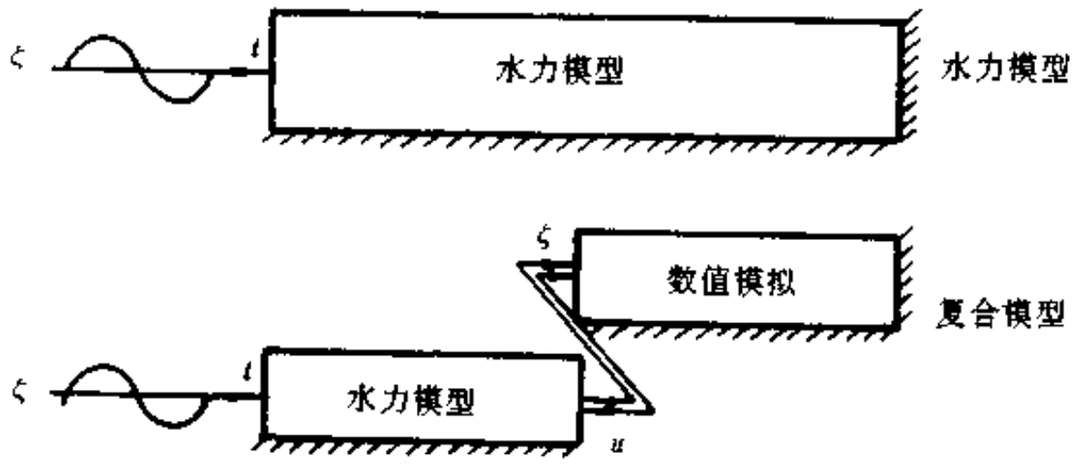


图 9—2—3　对比验证试验布置

两种模型所得水位间的相对误差如图 9—2—4 所示。流速值也有同样的良好结果。

试验表明：Holz 的这种耦合运转型的同步复合模型是成功的。

Holz 的研究成果，并没有很快在西德应用，首先应用的是加拿大科学工程力学部水工研究所。他们根据 Holz 的研究，先在水槽内做试验，取得经验后，很快应用到圣劳伦斯河口整体模型中。该河口模拟区天然总长为 550km，其中，上游 220km 做成数值模拟，下游 330km 做成水力模型，两模型通过接口啮合，其相互控制的基本过程和 Holz 试验完全一样。模型试验简图如 9—2—5 所

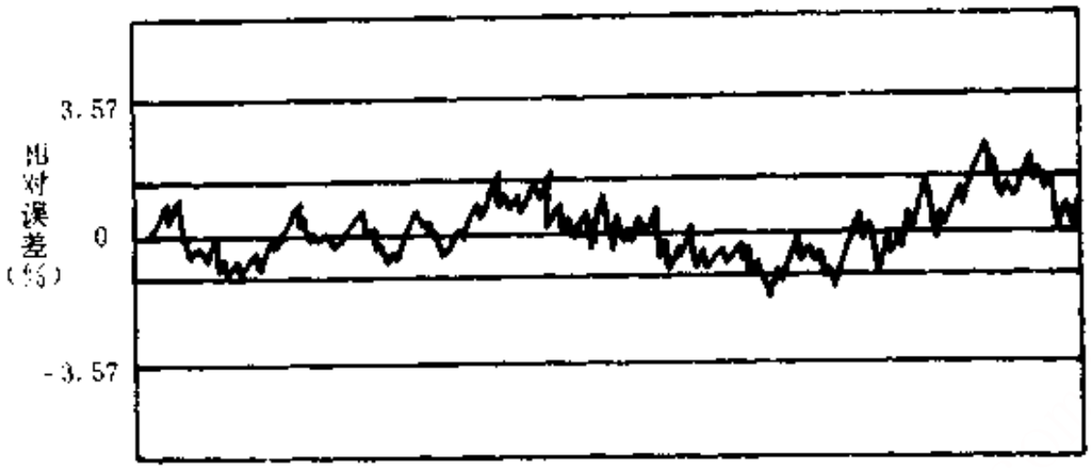


图 9—2—4　水位相对误差

示。

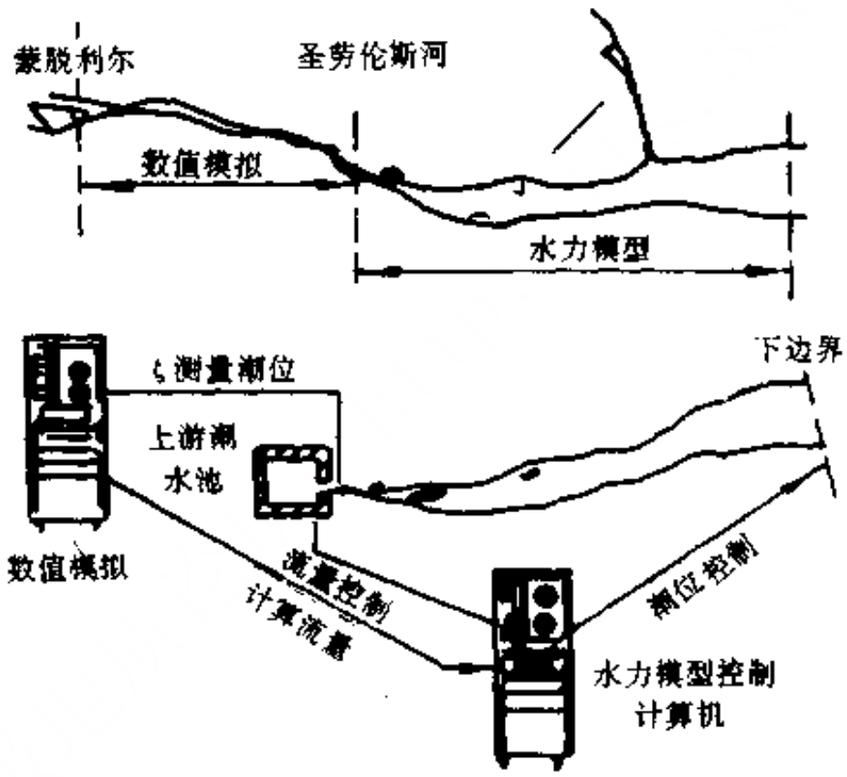


图 9—2—5　圣劳伦斯河口复合模型

上述河口复合模型中的数值模拟采用了显式差分格式。因为时间步长很小，采用显式法可以满足稳定要求，而且显式法的运转速度快，容易满足接口中运转时间小的要求。数值模拟用 1 台 16 位字长及 16k 内存的微机来完成，它的记忆存取时间为 1.65μs；另一台微机为 EAI640，用来控制水力模型的流量和水位，

内存也是 16k，存取时间为 3.3μs，后来，这两台机都扩充到 32K。

接着，加拿大又将缅因—芬地湾做成第二个复合模型。将整个海湾做成二维数值模拟，只有湾口的一角做成水力模型。数值模型采用简化的二维潮流模拟，忽略对流项，仍使用显式差分格式网格，由大到小，共分成 3845 个格子；水力模型的平面比尺为 1：2500，垂直比尺为 1：125，变率为 20。此复合模型的具体布置为图 9—2—6 所示。

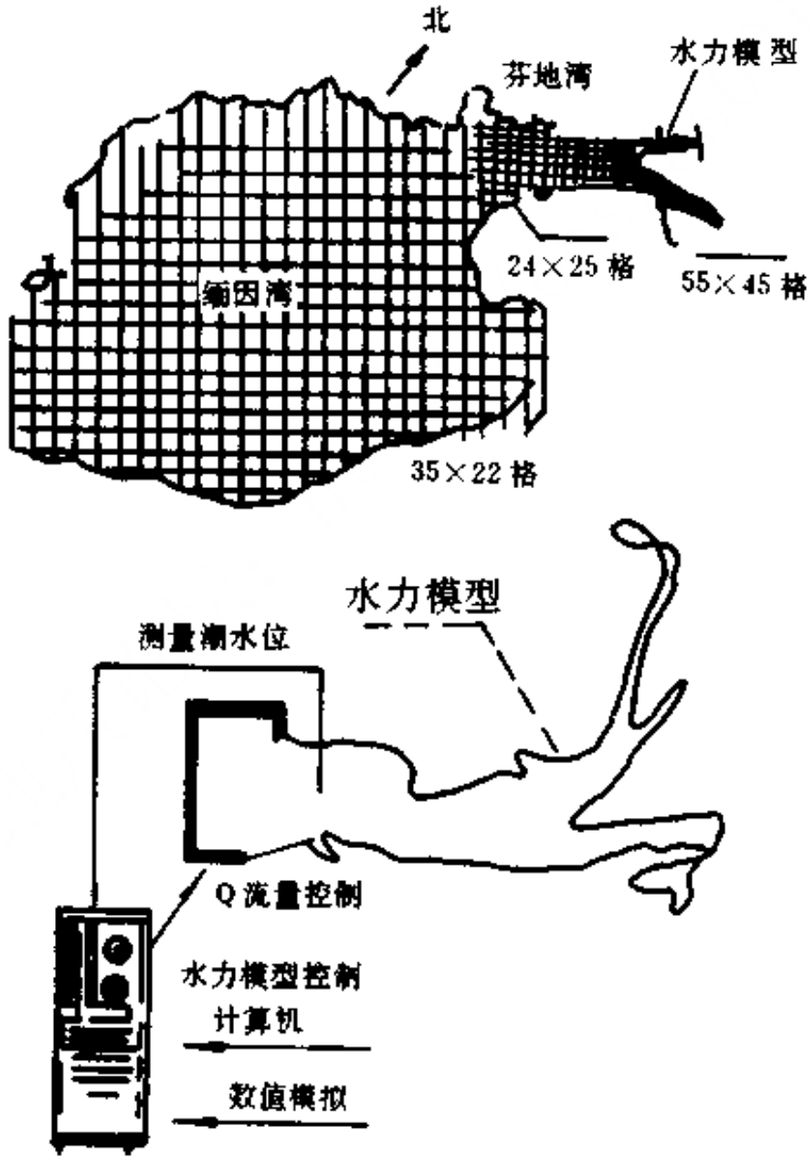


图 9—2—6　缅因—芬地湾河口复合模型

上述模型中水力模型的模型潮周期很短，只有 3.33min，在水力模型下边界处用流量控制，每 0.3s 控制一次，即相当于一个潮周期控制 666 次。

由于模型潮周期很短，在短短的 0.3s 内电子计算机要完成以下几部分的运转：

（1）水力模型下边界水位的实时处理；

（2）完成一个时间步长（Δt）内的 3845 个网格结点的二维潮流计算；

（3）数值模拟上边界的流量值输入水力模型下边界潮流控制系统中后，实现潮量的实时控制。

要求 0.3s 内完成上述运转，一般电子计算机是无法实现的，只有采用大型机或特殊电子计算机才有可能。在该模型中，采有了 AP—120B 阵列机（Array Processor）即向量计算机，也称数据处理机，是数据处理及计算的专用机。它的系统结构特别适用于高速处理各种数据。

加拿大的第三个耦合运转型复合模型是非洲塞内加尔的一个海岸河口湾的模型。此模型的上游河道及口外用数值模拟，只在河口部分用水力模型。上游河道为一维数值模拟，口外为二维潮流模型。河口的水力模型平面比尺为 1∶300，垂直比尺为 1∶75，变率为 4。

9.2.2 综合模拟型

综合模拟型模型也称为异步复合模型。这是综合利用水力模型和数值模拟的另一类复合模型。两种模型虽然综合在一起，但不必同步运转，而是相互利用对方的有用参数，可以在不同时间运转，因此称异步复合模型。其基本思路是用大范围的模拟（如数值模拟）所提供的数据来控制精度更高的局部模型（如水力模型）。

这类模型因为不必同步运转，因此，水力模型和数值模拟之

间的结合方式可以多样．综合已有实例，大体有以下几种类型：

（1）大范围内用数值模拟和小范围内用水力模型相结合。数值模拟的计算结果为水力模型提供边界条件，水力模型的试验结果又为数值模拟提供验证依据。目前，国内外许多海岸河口模型大都采用这种方法。

（2）多组数值模拟和少量组次的水力模型相结合，其目的主要是为了节省水力模型的试验时间和运转费用。

（3）由水力模型提供水力因子，在数值模拟中加入风、波浪、风吹流、柯氏力以及泥沙运动、污染物输移等复杂因素．进一步计算泥沙运动、河库演变及环境污染等问题。

还可举出其它一些组合形式．其总的目的是综合这两种模拟的特点，充分发挥各自优点以达到最佳效果。

这类模型在 Dorer（1973）和 Wills（1977）的报告中已有论述，后来，Outlaw 等人（1977）在研究洛杉机港和长滩港波浪问题，以及 Rahman 等人（1980）在研究 Fcundy 湾潮流时又有了发展，而美国陆军工程师团水道试验站在研究哥伦比亚河口时所采用的复合模型，则达到更为完善的程度。

哥伦比亚河口是一个混合型河口，日潮不等明显．平均潮差 2.8m，河口平均迳流量为 7400m^3/s，波浪最大可达 13m．波浪引起的沿岸输沙估计为 300～600 万 m^3/a。除潮流外，还有盐水异重流、沿岸流和风吹流入侵；沙源除沿岸输沙外，还有迳流输沙、滩地来沙和风吹沙。对于这样复杂的河口，不可能用单一的模型来模拟。为此，美国陆军工程师团水道试验站采用了一个综合模型。该模型由一个河口水力模型及一个综合数值模拟系统 TABS--2 组成。TABS--2 包括三个主要程序和约 40 个辅助程序。这三个主要程序为：二维潮流程序 RMA--2V，不规则波绕射折射程序 RFAC 和输沙及河床变形程序 STUDH。哥伦比亚河口模型的工作过程为：先由二维潮流程序 RMA--2V 和波浪程序 RFAC 求出物理模型边界处的潮流与波浪要素，然后运转水力模型得出该域三

维潮流特性；将上述结果及沿岸流和沿岸输沙计算值输入TABS—2系统，由STUDH数值模拟完成河口泥沙运动及河床演变的数值计算。据报导，此综合模型所得结果与实测资料吻合得很好。

哥伦比亚综合模型的工作框图如图9—2—7所示。

除了哥伦比亚采用综合模拟型的复合模型外，水道试验站还将这种方法用于Arkcmses河道模型中，目的是研究该处飞机场伸入河道后水流变化及对航行的影响，他们先用RMA—2V程序计算飞机场伸入河道后的水流变化，并用STUDH程序计算泥沙运动及河床演变，最后根据数模所提供的数据，在水道试验站的船池内进行船模航行条件试验。

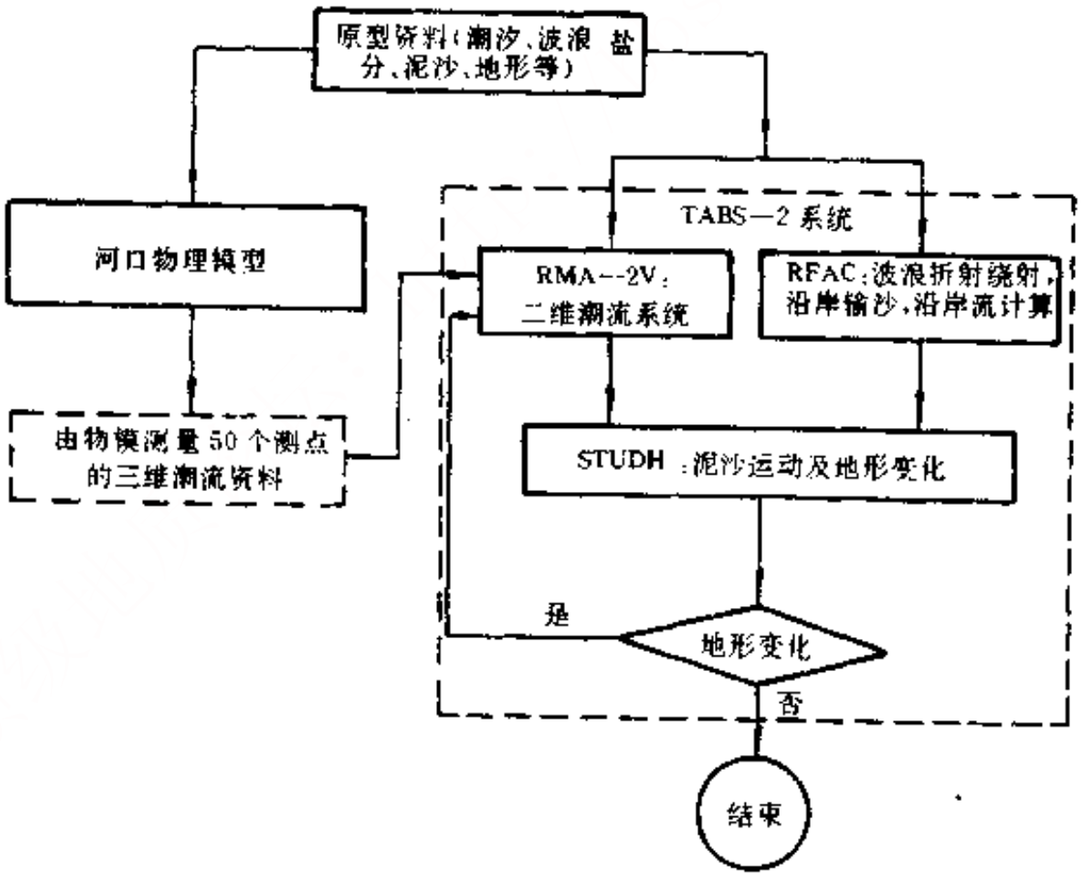


图9—2—7 哥伦比亚河口综合模型图

由于二维潮流模拟的局限性，他们又研制了三维潮流模型，组成了TABS—3系统。用与上述类似的做法，研究了纽约港中盐水

入侵问题和密西西比河下游40km的河床演变及河口西南分岔通道的航行条件问题。

我国也开展了这方面的研究。1984年，交通部天津水运工程科学研究所在研究甬江河口潮流模型时，先利用河口数值模拟确定外海虚拟边界，然后根据此虚拟边界修建水力模型，效果很好。此外，在进行甬江河道内梅墟弯道切槽固滩试验时，也是先进行全河道的一维数值模拟，得出裁弯段上下边界值，再建造该段局部水力模型进行试验。

这类综合型复合模型的优点是可以模拟多种因素综合作用下的复杂现象，且可避免像耦合运转型复合模型接口中所提出的苛刻要求，因此易于开展。

9.2.3 混合计算型

三维数值模拟的发展，使过去只有在水力模型中才能复演的三维现象，在数值模拟中也能重演，这就大大开拓了数模的应用范围。但三维数值模拟要求计算机有很大的内存并有很高的速度，为了经济起见，在模拟计算中，某些地区可辅以二维或一维数模。这种一维、二维、三维相结合的混合计算法，有些作者也称之为复合模型，虽然在这类模型中没有水力模型，似乎不能称复合模型，但在前述第二类复合模型中，有些物模也只起验证作用，主要结果由数值模拟来完成，因此，将混合计算作为复合模型的一种也是可以的。该类型的典型例子是美国水道试验站所提出的河口一维、二维、三维模型的综合结构，河口外及主航道用三维，航道两边用平面二维，河口内用垂线二维、河道内用一维（图9-2-8）。这类模型的关键在于各维模型衔接处的处理。

交通部天津水运工程科学研究所在天津新港的波浪和潮流的数值模拟中，也采用了这类混合计算法，在老港区和主航道内用二维，新航道和新港区用一维，效果很好。

1989年，交通部天津水运工程科学研究所在研究疏浚弃土对

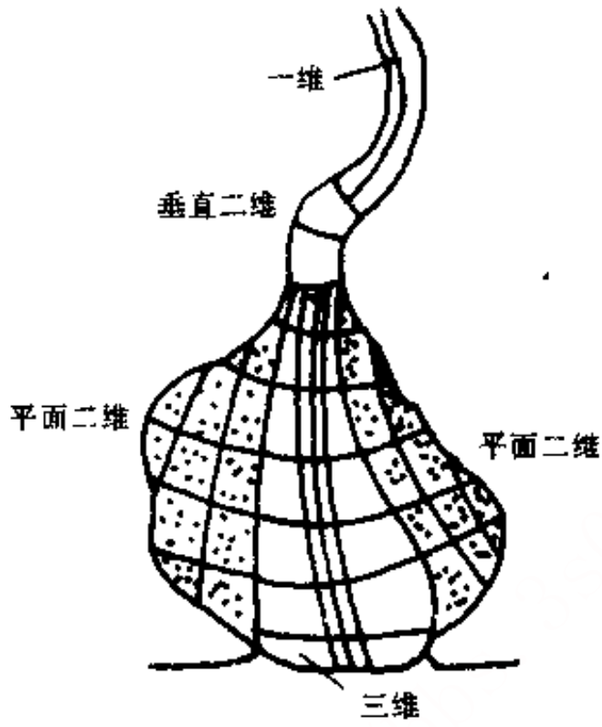


图 9-2-8 混合计算型复合模型

港口淤积环境影响时，进一步采用二维—三维模型，考虑了波浪、潮流、风吹流、柯氏力等综合作用下疏浚弃土形成的悬沙、浮泥相互转化及运移等复杂过程及影响，结果和实测极为吻合。1987～1990 年天津市水利局在引滦入津工程于桥水库及尔王庄水库湖流研究中，也成功地采用了河道一维数模、分岔河道数模、入库河流一维与水库二维相连接、水库平面二维数模进行了湖库流流场及入库悬沙扩散的计算预报。详细内容已在第八章介绍不在此赘述。

9.3 评价与展望

上述任一类复合模型都比以往任一种单一模型要优越得多。

耦合运转型是水力模型与数值模拟啮合在一起形成整体而同步运转的一种模拟技术，可以大大节省场地。在研究单一水流或

波浪作用下的定床问题，该模型有其独特的优点，但接口的处理很困难，更重要的是，该模型实质上是用数值模拟代替部分或大部分水力模型，关键现象仍在水力模型上显示，因此，水力模型中的比尺影响和变态限制，在这里仍难以消除。例如波浪、水流共同作用下泥沙运动和地形变化等复杂问题，在这里无法模拟。

综合模拟型基本上是将水力模型与数值模拟分开运转，没有苛刻的接口要求；但缺点是不能考虑水力模型与数值模拟衔接处的反馈影响。该模型可以研究多种因素作用下复杂的物理现象，如波浪与各种水流作用下的泥沙运动和河床演变等问题，这是该复合模型的优点。

混合计算法实际上就是数值模拟的灵活应用，虽然没有水力模型，但由于三维数模的存在，可以代替水力模型中的部分三维现象，因此，在不需考虑水流微结构以及控制方程比较明确的课题中，采用这类复合模型是比较合适的。它虽具有数值模拟的一切优点，但没有克服数值模拟的缺点。

从分析可知，以上三类复合模型虽有不少优点，但各自有一定缺点。幸运的是，这些优缺点之间存在着互为补偿的关系。如：耦合型的缺点，正是综合型的优点；而综合型的缺点，却又是耦合型的优点，这就为我们进一步改进方法、创造更先进的模拟技术提供有利条件。

9.4 运用复合模型的关键问题

开展复合模型的研究，需要抓住以下几个关键环节。

1. 积极开展数值模拟的研制。

复合模型是数值模拟与水力模型的结合体。我国水力模型的技术和方法上已有较多的经验，但在数值模拟方面还需进一步提高。为了使这两种模型能互相匹配，联合运转，就需积极开展数

值模拟的研制，特别在三维数模和复杂边界的处理方面，要给予更多的注意，同时还应改进计算方法，努力提高计算速度，使水力模型和数值模拟相互适应，以取得良好效果。

2. **解决接口与衔接问题**

复合模型是将数值模拟与水力模型啮合在一起后，或同步运转，或镶套进行，因此，接口是个关键。模型之间的控制与利用，都通过接口来完成。通过接口控制的基本参量有水位和流量（或流速）两种，下面分别简述采用这两种参量的情况。

从水力模型中测取信号来控制数值模拟时，可以用水位，也可用流速。水位信号是模拟量，可直接测读，经 A/D 转换后立即输入电子计算机供数值模拟应用，不需等候；而流速信号目前虽大都采用脉冲量，可直接输入电子计算机，但需经脉冲累计，才能求出流速，这就需要等待时间。在耦合运转型的复合模型中，水力模型和数值模拟需啮合同步运转，在微时段 Δt 内，要迅速完成参数测量、数据处理、数值模拟计算、信息传递和水力模型边界参数的控制等多种步骤，不允许有富裕时间来测读流速。从这个角度来看，自水力模型中测取水位来作为数值模拟的控制值比较合适。另外，这样测取水位也比较有把握，因此，目前的耦合运转型复合模型中，都是从水力模型中测取水位来控制数值模拟。至于数值模拟中用什么参数去控制水力模型，原则上说，用水位或用流量都一样，这要由水力模型用什么方法控制来决定，例如，在河口水力模型中，潮汐发生系统如由潮位控制（如气压式潮汐箱），就需要水位参量；如是流量式潮汐发生系统，就需要流速或流量为参量。

3. **研制优良的测量仪器和控制系统**

在复合模型中，必须实现水力要素测量和信息传递的自动化，以及数据处理和实时控制，这就要求测量仪器有良好的精度和稳定性，并要求数据处理系统迅速、及时、可靠。因此，研制高质量的测量仪器（一次仪表）以及稳定可靠的数据处理系统和实时

控制系统，已是迫不及待的首要任务。

4. **选用合适的电子计算机**

在复合模型中电子计算机是核心。它应有足够的内存和运转速度，保证在 Δt 微时段内完成数据处理、数值模拟运转、信息传递和实时控制等。如前述缅因—芬地湾复合模型中，数值模拟是二维潮流模型，采用有限差显式解，共有网格结点 3845 个，仅变量存储就需占用内存单元 100 多 kB，加上系统控制和程序运转等，要求电子计算机容量在 0.5MB 以上。如果采用三维数值模拟，并考虑泥沙运动和地形变化，则要求计算机内存容量至少在 10MB 以上。但更重要的是对电子计算机的速度要求，仍以上述缅因—芬地湾复合模型为例，在短短的 0.3s 时间内，计算机应完成以下几个工序：

（1）对水力模型中的水位进行收集和实时处理；

（2）完成一个时间步长 Δt 内的二维潮流计算；

（3）将计算结果对水力模型边界的潮量进行实时控制。

对于一般电子计算机来说，要在 0.3s 的 Δt 时段内完成上述内容是很不容易的，必须采用大型电子计算机。由此可见，在复合模型中，选用合适的电子计算机是很重要的。

复合模型是 70 年代以来国际上新兴的一门模拟技术，它集中了水力模型和数值模拟的优点，体现了模拟技术的发展方向。

由于复合模型还处在开始阶段，目前还不十分成熟，使用也不普遍，我们应该在现有基础上，总结已有经验，综合前述三类复合模型的优点，创造更完善的复合模型。

参 考 文 献

1 Holz K P Analysis of Time Conditioins for Hybrid Tidal models, proc. 15th Conf. Coastal Eng. 1976：(4)

2 Funke E R Grookshank N L. A Hybrid Model of the st. Lawrence River

Estuary, Proc. 16th Conf. Coastal Eng. 1978; (3)

3 Prandle D. The use of Array Processors for Numerical Modelling of Tidal Estuary Dynamics, Proc. 17th Coastal Eng. Conf. 1980; (3)

4 McAnally W H, Thomas W A and Letter J V. Physical and Numerical Modeling of Estuarine Sediment, First International Symposium on River Sedimentation, Beijin; Chinese Society of Hydrullic Engineering. 1980

5 McAnally W H, Letter J V and Thomas W A. Two and Three--Dimensional Modelling Systeem for Sedimen tation, Third International Symposium on River Sedimentations, The university of Mississippi, March 31 — April 4, 1986

第十章　水动力泥沙数值模拟的发展趋势

随着电子计算机技术的进步和数值计算方法的改进，根据水利、水运、环保事业发展的需要，数值模拟技术必将获得迅速发展。

数值模拟除了要进一步改进模拟技术以适应复杂工程的需要和进一步改进计算方法以提高其收敛性、稳定性和精度外，根据国内外研究情况看，今后数值模拟的发展方向大致有如下三个方面。

10.1　多功能全过程数值模拟系统

沿海地区的海洋动力和地貌形态比较复杂，过去的数值模拟，多为单动力因素和单项泥沙运动，如潮流作用下的悬沙运动等，这种模拟不能反映自然界中多动力因素综合作用下复杂的泥沙运动和海底演变过程。1989 年天津水运工程科研所研制成一个新的数值模拟系统——多功能全过程数值模拟系统，它能模拟多种动力作用下各种泥沙运动和海底演变过程。这个系统功能较强、使用简便，它的特点是：

（1）可模拟多种动力因素综合作用下各种泥沙运动及油膜和其他有关物质的输移扩散。动力因素有波浪、潮流、风及风吹流、柯氏力等，泥沙运动有悬沙输移扩散、底沙推移、浮泥流动。此系统能模拟上述各种因素组合作用下各种泥沙运动和地形演变过程。

(2) 可模拟动力过程下的地形演变过程。天然的动力因素是变化的，此系统可模拟天气过程中动力因素变化时的地形演变过程。

(3) 可进行二维—三维嵌套模拟。此模拟系统既能模拟二维，也能模拟三维，并解决了二维～三维嵌套技术。

(4) 可模拟边滩漫水。此模拟系统采用动水活动边界，解决了活动边界上的水流漫滩速度的模拟。

(5) 采用“MADI”法。MADI 法既保留了传统的“ADI”法的优点，又能节省计算机内存，并具有稳定性好、收敛性快、精度高的优点。

此模拟系统曾在海滨、海岸河口、河流、湖泊、水库、港口等地区应用，取得良好效果。在河口航道整治、港口淤积、水库湖流特性、油膜飘移扩散，疏浚弃土运移对周围影响等实际课题中应用，有良好的工程实效。

10.2 复合模型

复合模型是 70 年代兴起的一门新型模拟技术，在这种模型中，包含水力模型和数值模拟，通过电子计算机将这两部分有机地结合起来，形成一个整体，它的出现，标志着模拟技术的重大进展。

复合模型兼有水力模型和数值模拟两者的优点。通过水力模型可以了解水力现象的空间三维分布和局部水动力微结构，借助数值模拟可以减少场地，节约费用和便于长期保存等。

10.3 数值模拟的仿真及大屏幕显示

数值模拟与水力模型相比，最大的缺点是直观性差，为此国

内外均开展了图象显示的研究，这是数值模拟的又一新趋向。近年来，随着模拟显示系统的不断改进、完善及动态显示和多媒体技术的应用，数值模拟结果也逐步可以生动、形象、音形结合地反映在微机显示屏、高分辨率彩色显示器及大屏幕投影幕上，使模拟计算成果显明、直观、生动。如：天津水运工程科研所1989年在天津新港疏浚抛泥的数值模拟中，研制成多色调色程序，在计算机屏幕上显示出疏浚抛泥扩散流动过程，并用录像系统摄制成动态图象，能较形象地反映出疏浚弃土的扩散运动过程。1990年该所又进一步在天津新港的潮流计算中研制成潮流运动的动态显示，更逼真地反映了潮流场的运动变化过程。图10—3--1是该所正在开发的一个仿真动态模拟系统框图。

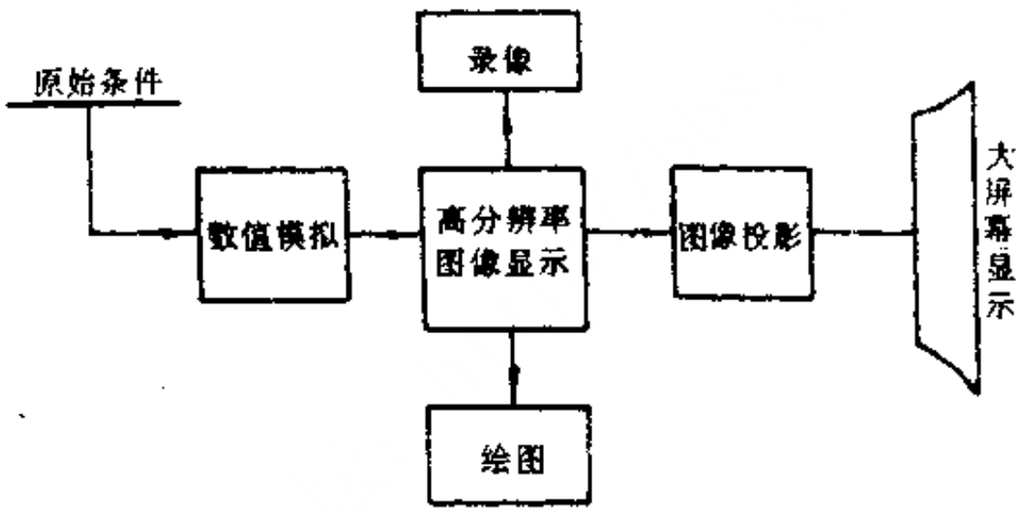


图10—3—1　仿真动态模拟系统构成简图

1993年，天津市水利局、交通部天津水运工程科学研究所和水利部水文水利调度中心分别研制成实时信息处理和大屏幕图形显示系统，进一步开拓了数值模拟和信息实时处理后的图形仿真显示功能。

大屏幕图形仿真系统是数值模拟与实时信息进行仿真演示的重要环节，它利用电子计算机和大屏幕投影系统，形象地将数值模拟结果和实时信息显示出来。

大屏幕显示系统可由以下几个基本部分构成：

（1）数据采集与实时处理子系统。该子系统能自动采集与实时处理水动力、泥沙数值模拟所需的原始数据（如水文、雨情、水情、泥沙等数据），快速模拟河道、水库的水情，这在防汛信息系统中有特殊重要意义，领导部门可及时掌握可靠的数据，迅速作出防洪、防汛决策。

（2）数值模拟结果的传输子系统。该子系统能将水动力、泥沙数值模拟所得的结果及时传输给图象处理子系统。

（3）图象处理与显示子系统。该子系统可将自动采集实时处理系统和水动力、泥沙数值模拟传输进来的数据，通过图形、图象、色调、曲线和表格等方式显示出来。

根据图形、图象展出的情景，该子系统又可分为动态显示和静态显示两种。

静态显示的图象是静止的，为了增加静态显示图象的效果，可在图象中添加彩色，经过不同色调的显示对比，衬托出重点部位，给人以显明的视觉。同时，还可采用闪烁技术以突出重点部位，或采用移动光标以增加图形、图象的活动性。

为了克服高分辨彩显屏幅的局限性，可对局部图形、图象进行放大，并采用滚屏处理，可翻卷观察感兴趣的局部地区的模拟结果。

动态显示是通过动态方式将水动力、泥沙数值模拟中所得的流态、泥沙输移扩散、地形演变过程等进行动态显示，通过鲜明的仿真运动图形、图象来掌握其活动规律和演变趋势。

（4）图形、图象录制子系统。该子系统是将图形、图象处理与显示子系统所得的信息录制下来，以备随时调用，并可长期保存。

（5）投影子系统。该子系统可将图形、图象投影在大屏幕上，以扩大观察者的视觉。

数值模拟仿真及大屏幕显示系统是复杂的系统工程，包括一系列软件和相应的硬件系统。

数值模拟仿真及大屏幕显示系统是水动力、泥沙数值模拟中很重要的一个环节，是克服数值模拟直观反映研究结果差的有力工具，目前，世界上一些工业先进的国家都在大力开展这项研究，我国有些高等院校和科研机构也在积极开展研究。随着这项研究的成功，将大大推动水动力、泥沙数值模拟的开发与应用。

[General Information]
书名=水动力泥沙数值模拟
作者=
页数=347
SS号=0
出版日期=

封面页
书名页
版权页
前言
目录
正文