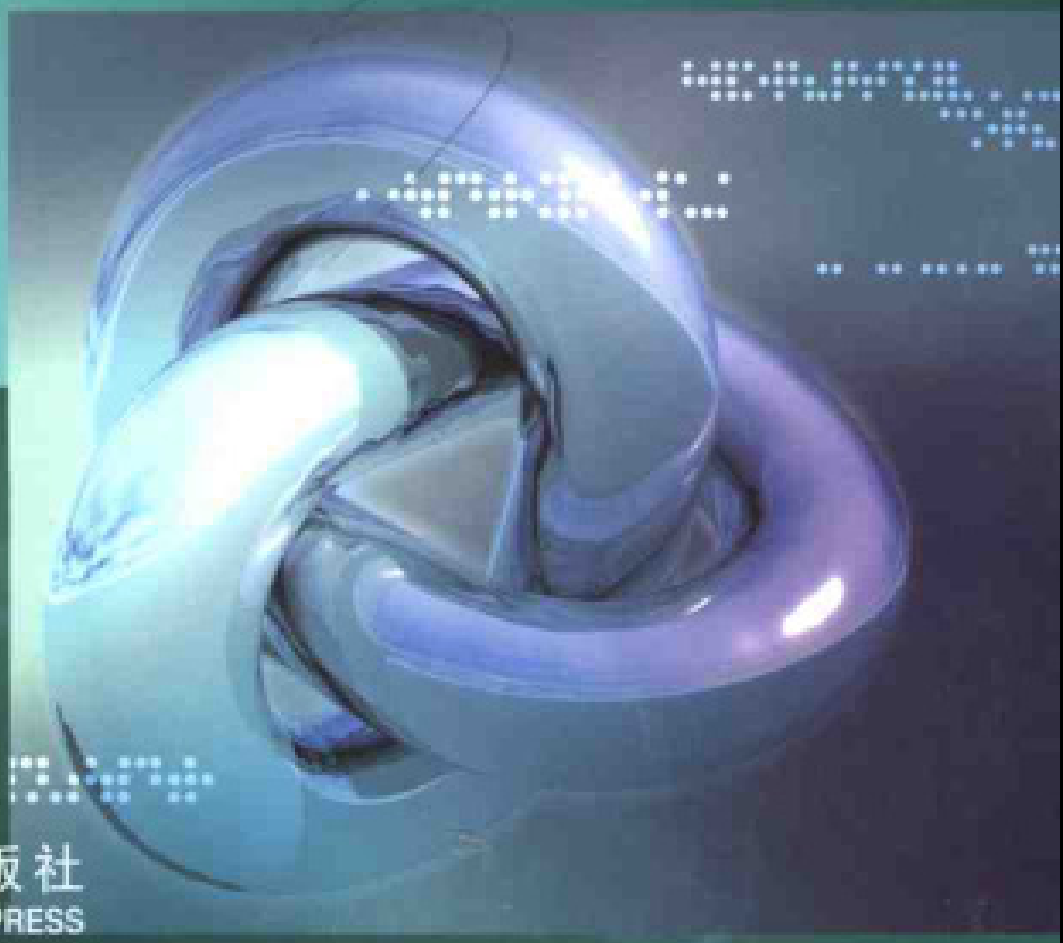
普通高等学校信息与计算科学专业系列丛书

教育科学“十五”国家规划课题研究成果

数学建模引论

主编　阮晓青　周义仓



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

中国国防科技网 http://www.81tech.com



已出版的信息与计算科学专业教材

☐	编码理论基础	陈鲁生、沈世镒
☐	分形	李水根
☐	基于偏微分方程的图像处理	张　宏、陈　刚
☐	计算智能(第一册)——模拟进化计算	徐宗本
☐	计算智能(第二册)——词语计算与 Fuzzy 集	王国俊
☐	控制理论基础	李训经、雍炯敏、周　渊
☐	神经网络计算	吴　微
☑	数学建模引论	阮晓青　周义仓
☐	数值计算引论	白峰杉
☐	信息论基础与应用	沈世镒、吴忠华
☐	最优化方法	孙文瑜、徐成贤、朱德通

ISBN 7-04-016630-5
9 787040 166309 >
定价 22.10 元

查询其他数学用书，敬请登陆
www.hep-st.com.cn

中国国防科技网 http://www.81tech.com

普通高等学校信息与计算科学专业系列丛书

教育科学“十五”国家规划课题研究成果

数学建模引论

主编 阮晓青 周义仓

编者 李 国 徐 希 戴永红 赵 冰

高等教育出版社

中国国防科技网 http://www.81tech.com

内容提要

本书的内容包括：初等模型，数据拟合模型，优化模型，微分方程模型，图论与网络规划模型，仿真模型，仿生学模型(遗传算法与神经网络模型)，统计分析模型，随机模型，综合评价模型，经济数学模型与悖论数学模型等。数学建模的技巧与方法和大量的数学建模实例融为一体，内容生动，通俗易懂。凡具有微积分、线性代数、概率统计基础的读者，即可掌握本书基本内容。

本书可作为信息与计算科学专业的本科生学习数学建模的教材，也可作为其他理工科学生或教师研究数学模型的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数学建模引论/阮晓青，周义仓主编. —北京：高等教育出版社，2005.7
ISBN 7-04-016630-5

Ⅰ.数… Ⅱ.①阮…②周… Ⅲ.数学模型-高等学校-教材 Ⅳ.O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 048504 号

策划编辑	王 瑜	责任编辑	崔梅萍	封面设计	王凌波
责任绘图	郝 林	版式设计	马静如	责任校对	杨雪莲
责任印制	孔 源				

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经 销	北京蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	北京铭成印刷有限公司		
开 本	787×960 1/16	版 次	2005 年 7 月第 1 版
印 张	17.5	印 次	2005 年 7 月第 1 次印刷
字 数	320 000	定 价	22.10 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。
版权所有 侵权必究
物料号 16630-00

中国国防科技网 http://www.81tech.com

总　序

根据教育部1998年颁布的普通高等院校专业目录，“信息与计算科学”专业被列为数学类下的一个新专业(它覆盖原有的计算数学及其应用软件、信息科学与运筹控制等专业)。这一新专业的设置很好地适应了新世纪以信息技术为核心的全球经济发展格局下的数学人才培养与专业发展的需要。然而，作为一个新专业，对其专业内涵、专业规范、教学内容与课程体系等有一个自然的认识与探索过程。教育部数学与统计学教学指导委员会数学类专业教学指导分委员会(下称教指委)经过过去两年艰苦细致的工作，对这些问题现在已有了比较明确的指导意见，发表了《关于信息与计算科学专业办学现状与专业建设相关问题的调查报告》及《信息与计算科学专业教学规范》(讨论稿)(见《大学数学》第19卷1期(2003))。为此，全国高等学校教学研究中心在承担全国教育科学“十五”国家级规划课题——“21世纪中国高等教育人才培养体系的创新与实践”研究工作的基础上，根据教指委所颁布的新的教学规范，组织国内各高校的专家教授，进行其子项目课题“21世纪中国高等学校信息与计算科学专业教学内容与课程体系的创新与实践”的研究与探索。为推动本专业的教材建设，该项目课题小组与高等教育出版社联合成立了“信息与计算科学专业系列教材编委会”，邀请有多年教学和科研经验的教师编写系列教材，由高等教育出版社独家出版，并冠以教育科学“十五”国家规划课题研究成果。

按照新的《信息与计算科学专业教学规范》(讨论稿)，信息与计算科学专业是以信息技术和计算技术的数学基础为研究对象的理科类专业。其目标是培养学生具有良好的数学基础和数学思维能力，掌握信息与计算科学基础理论、方法与技能，受到科学研究的训练，能解决信息技术和科学与工程计算中的实际问题的高级专门人才。毕业生能在科技、教育、信息产业、经济与金融等部门从事研究、教学、应用开发和管理工作，能继续攻读研究生学位。根据这一专业目标定位和落实“强基础、宽口径、重实际、有侧重、创特色”的办学指导思想，我们认为，本专业在数学基础、计算机基础、专业基础方面应该得到加强，而各学校在这三个基础方面可大体一致，但专业课(含选修课)允许各校自主选择、体现各自特点。考虑到已有大量比较成熟的数学基础与计算机基础课程教材，本次教材编写主要侧重于专业基础课与专业课(含选修课)

方面。

信息与计算科学，就其范畴与研究内容而言，是数学、计算机科学和信息工程等学科的交叉，已远远超出数学学科的范畴。但作为数学学科下的一个理科专业，信息与计算科学专业则主要研究信息技术的核心基础与运用现代计算工具高效求解科学与工程问题的数学理论与方法(或更简明地说,研究定向于信息技术与计算技术的数学基础)，这一专业定位明显地与计算机科学与信息工程专业构成区别。基于这一定位，信息与计算科学专业可包括信息科学与科学计算(计算数学)两个大的方向。科学计算方向在我国已有长期的办学经验，通常被划分为偏微分方程数值解、最优化理论与方法、数值逼近与数值代数、计算基础等学科子方向。然而，对于信息科学，它到底应该怎样划分学科子方向？应该怎样设置专业与专业基础课？所有这些都仍是正在探索的问题。

任何技术都可以认为是延伸与扩展人的某种功能的方式与方法，所以信息技术可以认为是扩展人的信息器官功能的技术。人的信息器官主要包括感觉器官、传导器官(传导神经网络)、思维器官和效应器官四大类型，其功能则主要是信息获取、信息传输、信息处理和信息应用(控制)，因而感测技术、通信技术、智能技术与控制技术通常被认为是最基本的信息技术(常称之为信息技术的四基元)，其他信息技术可认为是这四种基本技术的高阶逻辑综合或分解衍生。所以可以把信息科学理解为是“有关信息获取、信息传输、信息处理与信息控制基础的科学”。从这个意义上，我们认为：信息处理(包括图像处理、信号分析等)、信息编码与信息安全、计算智能(人工智能、模式识别等)、自动控制等可构成信息科学的主要学科子方向。这一认识也是教指委设置信息与计算科学专业信息科学方向课程的基本依据。

本系列教材正是基于以上认识，为落实新的《信息与计算科学专业教学规范》(讨论稿)而组织编写的。我们相信，该系列教材的出版对缓解本专业教材的紧缺局面，对推动信息与计算科学专业的快速与健康发展会大有裨益。

从长远的角度看，为适应不同类型院校和不同层次要求的课程需求，本系列教材编委会还将不断组织教材的修订和编写新的教材，从而使本专业的教学用书做到逐步充实、完善和多样化。我们诚恳希望采用本系列教材的教师、同学们及广大读者对书中存在的问题及时指正并提出修改意见和建议。

信息与计算科学专业系列教材编委会

2003 年 8 月 31 日

中国国防科技网 http://www.81tech.com

前　言

数学模型课程作为一门崭新的课程随着全国大学生数学建模竞赛活动的普遍开展逐渐进入大学课堂，开设本课程的院校不断增加，从形式多样的各种讲座到课时数稳定的正规课堂教学，规模不断扩大，内容不断充实；受到学生热烈欢迎。开展数学建模教学与竞赛活动，提高了学生对数学建模课程的兴趣和应用知识的能力；组织学生参加竞赛，培养了他们的竞争意识、创新意识、创新能力及团队精神。其主要表现在：通过数学建模使学生主动地、积极地去思考问题，较大地提高了学生获取知识的能力，改善了学生的知识结构，培养了学生独立地利用文献资料，统计分析，逻辑论证的能力，此外还培养了学生良好的计划组织、与人合作、协调关系、化解矛盾的能力，这些已是当今社会所需要的高素质人才必须具备的能力。

编写本书的目的，是为全国大学本科信息与计算科学专业的学生提供一本有本专业特色的、适合重点院校和一般院校不同基础信息与计算科学专业的学生学习数学建模的教材。本书也可作为其他理工科学生或教师研究数学模型的参考书。

本书由西安交通大学与深圳大学联合编撰，第一、五、十、十三、十四、十五章由阮晓青编写，第七、八章由周义仓教授编写，第二、三、四章由赵冰编写，第六章由徐希编写，第九章由戴永红编写，第十一、十二章由李国编写，全书由阮晓青统稿。

考虑到信息与计算科学本科专业的特点，本书的选材思路主要基于两点：一是配合本专业主要课程设置，专业课程中会涉及的内容，本书不再选入或少量的涉及，起到一个复习补充的作用。而一些专业课程中不会讲到的内容，选进本书较多，例如统计分析一章，没有选入假设检验与区间估计的模型，而在统计课程中，讲得不太多的回归分析模型，这里讲得较详细，更着重介绍了主成分分析与判别分析的内容；二是考虑到信息专业的同学在文科方面的知识接触较少，本书在第十章、第十五章讲了经济数学模型和数学的悖论模型，用以扩充同学们在这一方面的知识。

在本书的编著过程中，西安交通大学徐宗本教授、北京大学雷功炎教授、华南理工大学郝志峰教授等都为本书提出了好的建议，在此表示诚挚的谢意。

编　者

2004 年 8 月

目　　录

第1章　数学模型概论　1

§1.1　数学模型的概念　1

§1.2　数学建模的方法与步骤　3

§1.3　总结　5

参考文献　6

第2章　初等模型　7

§2.1　覆盖问题　7

§2.2　方桌问题　8

§2.3　万有引力定律　9

§2.4　货物交换的模型　15

§2.5　人、鸡、狗、米过河问题　17

§2.6　到海平线的距离　18

§2.7　思考题　19

习题　21

参考文献　21

第3章　数学模型中的数据处理方法　22

§3.1　回归分析法　22

§3.2　曲线拟合的最小二乘法　26

§3.3　多元回归与曲面拟合　33

习题　36

参考文献　36

第4章　优化与线性规划模型　38

§4.1　森林救火模型　38

§4.2 一个最优存储模型 40
§4.3 双层玻璃的功效 42
§4.4 森林管理 45
§4.5 分派问题 47
习题 49
参考文献 50

第5章 数学建模的统计分析方法 51
§5.1 主成分分析法 51
§5.2 判别分析法 56
§5.3 判别分析与回归分析 64
习题 66
参考文献 68

第6章 微分方程模型 69
§6.1 传染病模型 69
§6.2 种群的相互竞争 76
§6.3 种群的相互依存 79
§6.4 种群的弱肉强食 81
§6.5 交通问题模型 86
习题 88
参考文献 89

第7章 图论与网络优化模型 90
§7.1 图的概念和最小生成树 90
§7.2 最短路 96
§7.3 网络的最大流 101
§7.4 二分图与锁具装箱问题 106
习题 113
参考文献 114

第8章 计算机仿真 115

§8.1 计算机仿真的概念 115
§8.2 时间步长法 122
§8.3 事件步长法 133
习题 142
参考文献 143

第9章 随机模型 144
§9.1 电梯问题 144
§9.2 钓鱼问题 146
§9.3 经济轧钢模型 147
§9.4 报童的策略 149
§9.5 设备检查问题 151
习题 153
参考文献 153

第10章 经济数学模型 154
§10.1 效用函数 154
§10.2 博弈论 158
§10.3 非合作博弈与纳什均衡 163
§10.4 博弈的分类及对应的均衡概念 174
习题 174
参考文献 175

第11章 遗传算法 176
§11.1 引言 176
§11.2 模拟进化算法的基本框架 177
§11.3 遗传算法 178
§11.4 遗传算法的实现 181
§11.5 遗传算法的应用举例 186
§11.6 小结 188
习题 189
参考文献 190

第12章 人工神经网络 192

§12.1 引言 192

§12.2 人工神经网络的学习方法 196

§12.3 分层前向网及其主要算法 198

§12.4 反馈型 Hopfield 网络模型及其在 TSP 的应用 202

习题 206

参考文献 207

第13章 综合评价决策模型 208

§13.1 模糊综合评价模型 208

§13.2 层次分析法 211

习题 225

参考文献 226

第14章 反问题的数学模型 227

§14.1 函数恢复问题与常微分方程反问题 227

§14.2 二阶线性常微分方程 232

§14.3 分数阶常微分方程与 Abel 积分方程 236

§14.4 曲线拟合和常微分方程反问题 240

§14.5 有关偏微分方程反问题的例子 243

习题 245

参考文献 246

第15章 悖论数学模型 247

§15.1 悖论的定义 247

§15.2 罗素悖论与第三次数学"危机" 248

§15.3 悖论模型 249

§15.4 政治科学悖论模型 259

习题 264

参考文献 265

第 I 章
数学模型概论

§1.1 数学模型的概念

一、数学建模

数学建模就是建立数学模型来解决各种实际问题. 由于在现实世界中，我们会遇到大量的实际问题，这些问题往往不会直接地以现成的数学形式出现，这就需要我们把实际问题抽象出来，再将其尽可能地简化，通过假设变量和参数，运用一些数学方法建立变量和参数间的数学关系. 这样抽象出来的数学问题就是我们所说的**数学模型**. 通过数学方法对模型分析求解，最后再解释和验证所得的解，进而为解决现实问题提供数据支持和理论指导，我们把这样的过程称为**数学建模**. 数学建模过程用于解决实际问题往往是多次循环、不断深化的过程，万有引力定律的建立，前后历经数百年就是一个例子.

二、为什么需要数学建模

数学是研究现实世界中的数量关系和空间形式的科学，它的产生和许多重大发展都是和现实世界的生产活动和其他相关学科的需要紧密联系的. 同时，数学作为认识和改造世界的强有力的工具，又促进了科学技术和生产力的发展. 数学模型是在实际应用的需求中产生的，要解决实际问题通常需要建立数学模型，从这个意义上讲数学模型和数学有着同样古老的历史. 17 世纪伟大的科学家牛顿在研究力学的过程中归纳总结了近代数学最重要的成果之一——微积分，并以微积分为工具推导了著名的力学定律——万有引力定律，这一成就是科学发展史上最辉煌的数学模型之一.

数学的特点不仅在于它的概念的抽象性、逻辑的严密性和结论的确定性，而且在于它的应用的广泛性. 进入 20 世纪以来，数学的应用不仅在它的传统领域——物理领域(力学,电学等学科及机电,土木,冶金等工程技术)取得许多重要进展，而且迅速进入了一些新领域——非物理领域(经济,交通,人口,生态,医学,社会等领域)，产生了诸如数量经济学、数学生态学等边缘学科.

中国国防科技网 http://www.81tech.com

马克思认为：一门科学只有成功地运用数学时，才算达到了完善的地步. 世界发展到今日，随着计算机技术的迅速普及与发展，数学已经被用于生产过程及社会生活的各个方面，它已成为关系国民经济技术基础与国防，关系国家实力的重要学科. 今天的数学已经不仅仅是纯粹的理论，同时又是一种普遍可行的关键技术. 一般来说，当实际问题需要我们对所研究的现实对象提供分析、预报、决策、控制等方面的定量结果时，往往都离不开数学的应用. 而在数学向现代技术转化的链条上，数学建模和在模型基础上进行的计算与模拟，处于中心环节.

三、数学建模在教学中的意义

随着时代的变迁，数学思想，数学研究的内容和方法，都在悄然发生变化. 作为教学改革的一部分，国内高校应用数学系相继开设了“数学建模”课程. 这一课程以及国内外大学生数学建模竞赛，对我国高等数学教育产生了巨大的影响.

数学建模课程的直接目的是通过介绍若干有代表性的数学模型和成功地应用数学方法，培养学生用数学语言描述及解决实际问题的能力. 但这仅仅是问题的一方面，在数学建模的过程中，应把握数学与现实世界的关系，认识到数学是人类观察与认识世界的一种独特方法，它为创造性地研究自然和社会的各种问题提供了理论基础与方法论指导.

数学建模课程从实际问题中归纳出所要采用的假设以及解题的线索，试验各种可能的途径，预测可能的结果，尽量引用物理、化学、生物学以及社会学的有关结论. 从而展示了一种有别于传统数学课程单纯逻辑推理的思维方式，理解到外部启示对数学思维的重大作用. 建模课程还尽量引用实际资料检测数学结果，是主观和客观的结合，它不是先验的、唯一的，结论也是相对的. 作为一门数学课程，建模还利用一切可能的机会，加深学生对数学概念和定理本质的理解，看到数学与现实密切相关、极其生动的一面.

数学建模给予学生的是一种综合训练，为了成功地解决实际问题，参与者必须对问题本身有足够的知识，并有将其抽象成数学问题、以恰当形式表述的能力. 所谓用数学语言表述问题，在实践中学习，也可以培养大学生在今后的工作中所需要的数学素养，使他们学到更活的数学，这点正是我们要强调的；督促大学生熟练使用计算机，习惯于使用计算机解决实际问题. 每年的大学生数学建模竞赛都不是由一个人独立完成，因此需要具有组织协同的能力、团队合作的精神.

数学建模作为一项教学改革课程，更全面的体现数学科学与现实世界的关系，更均衡的对待理论和应用. 有利于学生开阔眼界、开阔思路，养成正确的思维方式，对数学本质有更全面完整的理解，有助于综合素质的提高.

http://www.81tech.com

§1.2 数学建模的方法与步骤

建立实际问题的数学模型，尤其是建立抽象程度较高的模型是一种创造性的劳动. 因此有人称数学建模是一种艺术，而不仅仅是一种技术. 现实世界中的实际问题是多种多样的，而且大都比较复杂，所以数学建模的方法也是多种多样的. 我们不能期望找到一种一成不变的方法来建立各种实际问题的数学模型. 但是，数学建模方法和过程也有一些共性的东西.

一、对数学模型的要求

对一个数学模型的基本要求，简单地说就是**准确，简练，正确**.

1. 准确

一个数学模型要有足够的精确度，能较准确的反映实际问题本质的性质和关系.

2. 简练

数学模型要尽可能的简单，便于处理. 模型必须作简化，不作简化，模型十分复杂难以求解甚至难以建立模型，即非实际问题本质的关系要省略，以免模型太复杂.

3. 正确

构造数学模型的理论要正确，依据要充分，推理要合法. 要充分利用科学规律来建立有关的模型.

二、数学建模的方法

数学建模的方法按大类来分，大体分为三类：

1. 机理分析法

根据人们对现实对象的了解和已有的知识，经验等，分析研究对象中各变量之间的因果关系，找出反映其内部机理的规律. 使用这种方法的前提是我们对研究对象的机理有一定的了解.

2. 测试分析法

当我们对研究对象的机理不清楚的时候，可以把研究对象视为一个“黑箱”系统. 对系统的输入输出进行观测，并以这些实测数据为基础进行统计分析来建立模型.

3. 综合分析法

对于某些实际问题，将上述两种建模方法结合起来使用. 例如用机理分析

中国国防科技网 http://www.81tech.com

法确定模型结构，再用测试分析法确定其中的参数.

三、数学建模的一般步骤

1. 形成问题

要建立现实问题的数学模型，第一步是对要解决的问题有一个十分清晰的提法. 我们遇到某个实际问题，在开始阶段问题是比较模糊的，又往往与一些相关的问题交织在一起，所以需要查阅有关文献，与熟悉具体情况的人们讨论，并深入现场调查研究. 只有掌握有关的数据资料，明确问题的背景，确切地了解建立数学模型究竟主要应达到什么目的，才能形成一个比较清晰的“问题”.

2. 假设与简化

现实世界的问题往往比较复杂，在从实际中抽象出数学问题的过程中，我们必须抓住主要因素，忽略一些次要因素，作出必要的简化，使抽象所得到的数学问题变得越来越清晰. 实际现象中哪一些因素是主要的和起支配作用的，哪一些因素是次要的，认识也就越来越清楚了. 由于问题的复杂性，抓住本质的因素，忽略次要的因素，即对现实问题做一些简化或者理想化. 应该说这是一个十分困难的问题，也是建模过程中十分关键的一步，往往不可能一次完成，需要经过多次反复才能完成.

3. 模型构成与求解

根据所作的假设，分析研究对象的因果关系，用数学语言加以刻画，就可得到所研究问题的数学描述，即构成所研究问题的数学模型. 很多情况下，我们很难获得数学模型的解析解，而只能得到它的数值解. 这就需要应用各种数值方法，包括各种数值优化方法，线性与非线性方程组的数值方法，微分方程的数值解法，各种预测、决策和概率统计方法等，以及各种应用软件系统. 当现有的数学方法还不能很好解决所归结的数学问题时，就需要针对数学模型的特点，对现有的方法进行改进或者提出新的方法以适应需要.

模型若能得到封闭形式的解的表达式固然很好，但多数场合模型必须依靠计算机数值求解. 在电子计算机相当普及的今天，数值求解是一种行之有效的方法. 因此有时对同一问题有两个模型可供选择，一个是比较简单的模型，但找不到解的解析表达式只能数值求解，另一个模型比较复杂，通过困难细致的数学处理有可能得到解的精确表达式，在这两个模型中，有时宁可选择前者；或者，即便有了精确表达式，也常常需要数值或图示结果来说明问题.

4. 模型的检验与评价

建立数学模型的主要目的在于解决现实问题，因此必须通过多种途径检验所建立的模型. 实际上，在整个数学建模乃至这个解决问题的过程中，模型都

在不断地受到检验，还要检验数学模型是否自相容并符合通常的数学逻辑规律，是否适合求解，是否会有多解或者无解等等.

最重要和困难的问题是检验模型是否反映了原来的现实问题. 模型必须反映现实，但又不等于现实. 模型必须作简化，不作简化，模型十分复杂甚至难以建立模型，而过分的简化则使模型远离现实，无法用来解决现实问题. 物理学家用“单摆”来理想化摆的运动，得到模型求解后的结论是摆将永远作规则的往复运动. 这个模型是否符合实际呢？实际的摆经过相当长一段时间最终必将静止下来. 从这一点来看似乎模型是不符合实际的. 但如果我们感兴趣的是摆在不太长时间内的运动情况，那么单摆简化的模型完全可以满足要求，考虑阻力等次要因素而把模型复杂化是大可不必的.

评价模型的根本标准是它能否准确地解决现实问题，但模型是否容易求解也是评价模型优劣的一个重要标准.

5. 模型的改进

模型在检验中不断修正逐步走向完善，除了十分简单的情形外，模型的修改几乎是不可避免的. 一旦在检验中发现问题，必须去考虑在建模时所作的假设和简化是否合理，这需要检查是否正确地描述了关于数学对象之间的相互关系和服从的客观规律. 针对发现的问题相应的修改模型，然后再次重复检验、修改，直到满意为止.

§1.3 总　　结

纵观数学发展史我们可以知道，数学模型与数学有千丝万缕的联系. 数学模型的建立固然离不开数学知识，而我们对数学的认识同样离不开数学模型，例如微积分中的两个主要概念——导数与积分就产生于运动学中对变速运动速度与路程的数学模型研究.

数学建模需要丰富的知识，经验和各方面的能力. 绝大多数数学课程如数学分析、线性代数、概率论、统计分析、计算方法等都可以用来建立和求解数学模型. 用数学语言表述问题是我们要强调的；在实践中学习，培养大学生在今后的工作中所需要的数学素养，使他们学到更活的数学，这点更是我们要强调的. 模型假设、模型构造等，除了要有广博的知识和足够的经验之外，还特别需要丰富的想像力和敏锐的洞察力.

数学建模过程是一种创造性思维过程，直觉和灵感往往也起着不可忽视的作用. 当然，直觉和灵感不是凭空产生的，它需要人们具有丰富的背景知识，对问题进行反复思考和艰苦探索，对各种思维方法运用娴熟，相互讨论和思想

交锋，特别是不同专业的成员之间的探讨，此时团队精神发挥很大作用.

数学建模可以看成一门艺术，如果将数学建模与国画经典绘画艺术一比，数学就好比工笔画，数学建模就好比水墨写意，工笔画之细腻工整固然令人叹为观止，大写意几笔传神的那种磅礴大气也的确给人们以无限的遐思，这也是一种美，睿智里带几分禅味的空灵之美. 艺术在某种意义下是无法归纳出几条准则或方法的，一名出色的艺术家需要大量的观摩和前辈的指教，更需要亲身的实践. 同样，要掌握数学建模这门“艺术”，就要培养想像力和洞察力，这就必须注意两点：一要大量阅读，二要亲自动手. 后者更为重要，虽然建模不能按照严格的逻辑结构去讨论问题，不能划定这些方法的适用范围，其得到的结果也并非无可置疑，但它却是我们学习数学并用数学去解决实际问题的一种生动、有效的方法.

参考文献

[1] 唐焕文，贺明峰. 数学模型引论. 北京：高等教育出版社，1991

[2] 姜启源. 数学模型. 北京：高等教育出版社，1993

[3] 雷功炎. 数学模型讲义. 北京：北京大学出版社，1999

第2章 初等模型

§2.1 覆盖问题

一人买了若干块长方形瓷砖，每块大小等于方形的两块．试着铺设如图2－1－1所示图形的地面，结果弄来弄去始终无法完整铺好．问题在于用长方形瓷砖在不被分割时铺成图2－1－1所示的地面的可能性是否存在？只有可能性存在才谈得上用什么方法铺的问题．

为此，在图2－1－1上白、黑相间地染色．染白色用0表示，然后仔细观察，发现共有32个白格和30个黑格．一块长方形瓷砖可盖住一白一黑两格，所以铺上30块长方形瓷砖后（无论用什么方式），总要剩下2个白格没有铺，而一块长方形瓷砖是无法盖住2个黑格的，唯一的办法是把一块长方形瓷砖一断为二．解决铺瓷砖问题中所用方法在数学上称为“奇偶校验”，即，如果两个数都是奇数或偶数，则称具有相同的奇偶性．如果一个数是奇数，另一个数是偶数，则称具有相反的奇偶性．组合几何中会经常遇到类似的问题．

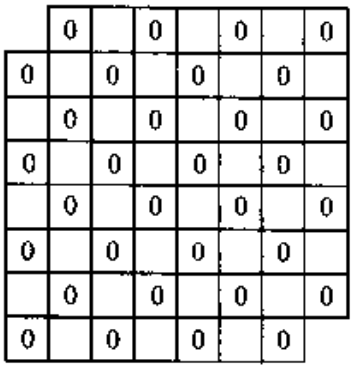


图2－1－1

在铺瓷砖问题中，同色的两个格子具有相同的奇偶性，而异色的两个格子具有相反的奇偶性；地面上铺好后，只有在剩下的两个方格具有相反的奇偶性时，才有可能把最后一块长方形瓷砖铺上．由于剩下的两个方格具有相同的奇偶性，因此无法铺上最后一块长方形瓷砖．这就从理论上证明了用30块长方形瓷砖铺好如图2－1－1所示地面是不可能的．

数学中许多著名的不可能性的证明都要用到奇偶校验．例如欧几里得证明著名的结论$\sqrt{2}$是无理数，就是用的奇偶性（读者不妨自己动手做一下）．奇偶校验在粒子物理学中也有很重要的作用，1957年美籍华人杨振宁和李政道推翻著名的“宇称守恒定律”，以其卓越的成就获得诺贝尔奖金，其中就用到了奇偶校验方法．

中国国防科技网 http://www.81tech.com

点评：解答的关键是考虑对瓷砖着二色图. 因为相邻的两个方格有着相反的颜色，以利用奇偶校验方法巧妙而简单地解决问题，极富创造力. 在估计事情不可能成立时，可考虑使用奇偶性这一方法来论证.

§2.2 方桌问题

在日常生活中，到处都会遇到数学问题，就看我们是否留心观察和善于联想. 就拿放平方桌来说吧，由于地面凹凸不平，方桌难于一次放稳(四脚同时着地)，因此有人提出如下问题：

四条腿长度相等的方桌放在不平的地面上，四条腿能否同时着地？初看这个问题与数学毫不相干，怎样才能把它抽象成一个数学问题呢？假设方桌中心不动，每条腿的着地点视为几何学上的点，用 A、B、C、D 表示，把 AC 和 BD 连线分别看作坐标系中的 x 轴和 y 轴，把转动方桌看作坐标轴的旋转，如图 2-2-1 所示. θ 表示对角线 AC 转动后与初始位置 x 轴的夹角，以 $g(\theta)$ 表示 A、C 两腿与地面距离之和，$f(\theta)$ 表示 B、D 两腿与地面距离之和，$f(\theta)$，$g(\theta)$ 皆为连续函数. 因三条腿总能同时着地，所以有

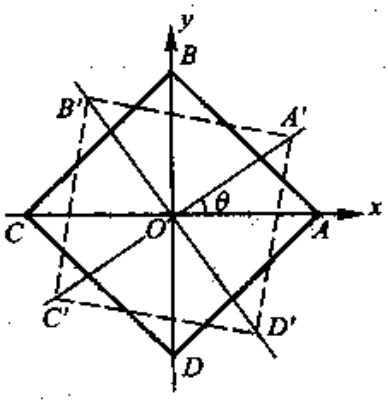


图 2-2-1

$$f(\theta)\cdot g(\theta)=0$$

不妨设在初始位置 $\theta=0$ 时，

$$f(0)>0,\ g(0)=0$$

根据对称性，将方桌转动 $\frac{\pi}{2}$ 角度后，AC 与 BD 位置交换，就有：

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\ g\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$$

这样方桌问题抽象成如下问题：

问题 已知 $f(\theta)$，$g(\theta)$ 为连续函数，$f(0)>0$，$g(0)=0$ 且对任意的 θ，有

$$f(\theta)\cdot g(\theta)=0$$

试证明存在 θ_0，使

$$f(\theta_0)=g(\theta_0)=0,\qquad 0<\theta_0<\frac{\pi}{2}$$

证 设 $F(\theta)=f(\theta)-g(\theta)$，则 $F(\theta)$ 是连续函数，且有 $F(0)=f(0)-g(0)>0$.

根据对称性，将方桌转动$\frac{\pi}{2}$角度后，AC 与 BD 位置交换，就有：

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)-g\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$$

由连续函数介值定理，必定存在 $\theta_0(0<\theta_0<\pi/2)$ 使 $F(\theta_0)=0$，即 $f(\theta_0)=g(\theta_0)$，由条件，对任意的 θ，均有 $f(\theta)\cdot g(\theta)=0$，所以有 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$. 即存在 θ_0 方向，方桌四条腿能同时着地. 所以方桌问题的答案是：如果地面为光滑曲面，则四条腿一定可以同时着地.

点评：方桌问题的解决抓住了问题的本质，在合理的假设下(方桌中心不动,对角线看成坐标轴)，将方桌转动与坐标轴旋转联系起来，将腿与地面的距离用 θ 的连续函数表示. 由三点确定一平面得 $f(\theta)\cdot g(\theta)=0$，又根据连续函数介值定理使这一问题解决得非常巧妙而简单. 介值定理的一个关键条件的满足是利用了对称性.

§2.3 万有引力定律

一、历史档案与问题背景

在地球上看行星的运动并对其运动规律作出系统的解释，主要是由人类的智慧完成的. 这个问题起源于远古，现在仍具吸引力. 对此的科学研究已不胜枚举. 我们对这个问题作一概述，主要重点放在众多理论的建模方面.

早期，人们视地球为一被球壳状的圆顶天空覆盖的平面，以此作为出发点去解释天文现象. 公元前 4 世纪，希腊人基于这种观点设计了一个能极好地解释当时所得数据的模型. 这个模型是根据多少理想化了点的目标和关系来建立的. 它假定地球是固定的，还有一个球包含一些固定的星球围绕地球转. 七个“游星”——太阳、月亮和五个行星在地球和圆形天空间运动. 希腊人试图构造以地球为中心的均匀圆周运动的组合，这个组合能表示固定的诸星球(即天空中许多“不动”的恒星)之间的“七个游星”的运动. 这种均匀圆周运动的假设基础是不科学的，顶多是准科学的. 每个天体被假定为由一组相互连接的旋转球壳所推动. 亚里士多德利用这个系统引入 55 个壳来说明他的数据. 这个模型在数学上是一个几何模型. 至少在时间的精度上，它的预测与观察是相吻合的. 然而它有两方面的不足. 首先，当观察得更仔细时，模型便需要不断地精细；其二，由于假定每一行星与地球保持不变的距离，行星运动时的亮度变化仍无法解释.

中国国防科技网 http://www.81tech.com

公元2世纪，托勒密(Ptolemy)改进了这个系统，使数据的吻合度更好. 在他早期的理论中，假定每个行星在一个小环形轨道(本轮)上以它实际的空中运动呈周期运动，而这个轨道的中心在一个大的环形轨道(均轮)上绕地球运动. 均轮和本轮并不足以说明观察到的行星运动的不规则性，于是托勒密引进了偏心圆(equant)，它在均轮内，是行星作均匀运动的偏心圆. 行星的角速度对于偏心圆的中心点才是均匀的，而均轮的圆心位于地球与偏心圆中心连线的正中. 除了水星外，这个系统对行星的运动提供了足够的相容性，稍作修改，系统也适合于水星的运动.

早在16世纪，哥白尼就对托勒密的偏心圆理论有异议，因为它似乎违背了均匀圆周运动的原理. 他对偏心圆理论作了涉及到本轮、偏心圆以及均轮等方面的修改，并作了后来的以太阳为中心的系统的改进. 有趣的是，早期的太阳中心系统纯粹是基于美学观点，尤其是基于说明的简洁性. 他提出地球和其他行星以圆周轨道均匀地绕太阳旋转. 由于他的模型保留了行星做圆周运动这一假设，也就必须保留本轮的概念，以说明从地球上观测行星时亮度和速度的变化. 同托勒密的模型一样，这个模型也是基于几何上的、并不是物理学模型. 的确，哥白尼著作的编辑写道："但这些假设不一定是真的甚至不一定是可能的"，"假如它们能提供与观察一致的计算，那也就足够了".

16世纪末期，丹麦天文学家第谷(Tycho Brahe,1546—1601)收集了大量的行星运动的详细的观察资料. 第谷将哥白尼当作了几何假说模型的建立者，并试图结合具有惰性的、巨大的地球的明显的物理属性建模. 他建立了另一个几何模型. 他在天文学上受人尊敬的地位并不是来自他的模型，而是来自他系统的观察. 这些观察结果为进一步的工作打下了基础. 开普勒继承了第谷的工作，从事哥白尼理论的修正，使之与观察相符. 他尤其对火星的轨道疑惑不解，因为它巨大的离心率使得它很难与均轮－本轮系统吻合. 他最终迈出了开创性的一步，打破了支配天文学的希腊人的均匀圆周运动的假设. 他为行星的运动建立了一个模型. 下面的三条假设，通常称为开普勒定律：

(1) 行星围绕太阳以椭圆轨道运动，太阳位于轨道的一个焦点(1609).

(2) 太阳到行星的半径向量在相等时间内扫过相等的面积(1609).

(3) 任意两行星运动周期的平方比等于它们到太阳的平均距离的立方比(1619). 这些经验规律只不过是对观察的事实的陈述. 然而，它们是可感知的，尤其对建立观察的规则有用. 按照这些定律的阐述，开普勒(1571—1630)假设了一套唯物机械论：有一种来自太阳的力，它维持行星的运动. 这个模型很好地解释了日积月累的观察事实，为下一步更精细的工作开创了新纪元.

到17世纪中叶为止，这个模型的发展还只是基于经验或几何，很少获得

http://www.81tech.com

物理学的支持. 牛顿的万有引力理论及时给这个模型提供了物理学的解释，给出了宇宙现象的简洁灵活的数学描述. 运动定律和万有引力定律的结合为推导行星的运动方程提供了数学力学体系. 推导过程中，首先考虑由行星和太阳组成的二体系统，由它决定行星的运动. 这个系统是容易确定的、其结果便是开普勒三定律. 由于太阳质量在太阳系中具有绝对优势，行星彼此相距很远，所以这些预测给出了很好的首次近似. 然而，根据引力定律，每个行星也受其他行星力的作用，这些力使得二体模型的椭圆轨道产生摄动. 仔细验明特定行星的轨道能够说明由其他已知行星引起的摄动. 如果这些摄动还不能说明观察与基于二体模型上的偏差，则可假定还存在一未知行星，通过它来说明剩余的偏差. 假设的行星的大小和位置能够估计，一场研究便从此开始. 事实上，天王星、海王星和冥王星的发现便是这种研究的结果. 牛顿所提出的这一套数学体系获得了巨大的成功，因为观察和理论上微小的差别导致了未知的、事实上无法预料的行星的发现.

如此著名的牛顿的模型也还没有解释所有的数据，本世纪还在作进一步的改进. 牛顿力学未能解释的水星轨道近日点的摄动促进和支持了相对论的发展. 改进、修正后的牛顿理论对解释现存的数据似乎足够了，新的数据或现存数据的进一步解释也许必须等到模型的进一步修正.

这里描述的关于行星运动的例子说明了建模的几个方面. 首先通过建模过程说明了典型的演变. 几次相继成功的提炼使得模型明显有别于前人的工作. 而另一些工作是作一些简单的较小的改进. 这些改进始于不同的起因. 哥白尼开始所做的只不过是简化托勒密的模型，而牛顿则是对于发现能够推演出开普勒定律的物理和数学原理有兴趣. 寻求以少数几个易于理解的原理作为基础而构成的简单模型是建模的特征. 其次还有，希望模型简化或精细化而进行修改，而精细化的模型又需要用新的数据来证实. 没有讨论的除了第谷的几何模型外，还有许多走进了死胡同因而没有用处的模型. 这些模型是在寻找有用模型的过程中研究过的，有些记录在案，许多已被遗失.

万有引力定律的发现是牛顿(1642—1727)在力学上的重大贡献之一，牛顿在研究力学的过程中建立了微积分理论，又成功地在开普勒行星运动三定律的基础上运用微积分理论推导了万有引力定律，这一创造性的成就可以看作历史上最著名的数学模型之一. 牛顿在建立数学模型中的一些创造性思维值得我们学习.

第谷·布拉赫观测行星运动，积累了 20 多年的观测数据和资料. 开普勒作为他的助手运用数学工具分析研究这些资料，发现哥白尼的理论与观测结果并不一致. 例如火星的实际位置与按哥白尼理论计算出的位置相差 8 弧分. 在深入分析的基础上，他于 1609 年归纳出所谓

中国国防科技网 http://www.81tech.com

开普勒第一定律：各颗行星分别在不同椭圆轨道上绕太阳运行，太阳位于这些椭圆的一个焦点；

开普勒第二定律：单位时间内太阳—行星向径扫过的面积是常数(对一颗行星而言).

为了寻求行星运动周期与轨道尺寸的关系，他将当时已发现的六大行星运行周期和其运行椭圆轨道的长半轴列成表格(如表 2－3－1)，可以看出：第三、四列周期 T 的平方与长半轴 A 的三次方值几乎相等，终于总结出

开普勒第三定律：行星运行周期的平方与其椭圆运行轨道长半轴的三次方成正比.

牛顿认为一切运动都有其力学原因，行星运动也不例外，行星运动一定也受到力的作用. 这力来自何方？开普勒三定律揭示了行星的运动规律，是一个什么样的力使行星的运动表现出这种运动规律？牛顿决心构造一个模型对此加以解释，于是牛顿建立一个数学模型：这就是万有引力定律的数学模型.

表 2－3－1 行星运行周期与椭圆轨道长半轴的关系

(以地球的周期和长半轴为度量单位)

行　星	周期 T	长半轴 a	T^2	a^3
水星	0.241	0.387	0.058 08	0.057 96
金星	0.615	0.723	0.378 2	0.377 9
地球	1.000	1.000	1.000	1.000
火星	1.881	1.524	3.538 2	3.539 6
木星	11.862	5.203	140.707	140.851 5
土星	29.457	9.539	867.715	867.978

二、问题分析

按照牛顿第二定律，物体所受外力的总和与物体运动的加速度成正比，因而求出行星运动的加速度也就求出了它所受到的力.

根据加速度定义，它是位置函数的二阶导数，也是速度函数的一阶导数. 为方便起见，采用极坐标系，取太阳(椭圆的一个焦点)为原点，则行星位置为 r，如图 2－3－1 所示.

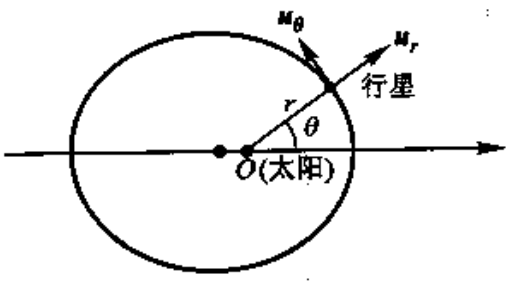


图 2－3－1 极坐标系中的行星轨道

根据开普勒第一定律，对某颗确定的行星，其运动轨道为一个焦点在太阳位置

的椭圆，极坐标方程为

$$r=\frac{p}{1+e\cos\theta} \tag{2.3.1}$$

式中 $p=\frac{b^2}{a}$ 为椭圆准线参数，

$$b^2=a^2(1-e^2) \tag{2.3.2}$$

式中 a 为椭圆长半轴，b 为短半轴，e 为离心率. 由于地球在椭圆轨道上，运动矢径方向及其长度不停地改变，因而 r，θ 都是时间 t 的函数，设 $r=r(t)$，$\theta=\theta(t)$.

根据开普勒第二定律，单位时间内太阳—行星向径扫过的面积是常数，我们设此面积常数为 A(对某颗行星而言)，用微分法建立方程，在 $\mathrm{d}t$ 时间内扫过的面积可认为是一个扇形，根据扇形面积公式 $\frac{1}{2}r^2\mathrm{d}\theta$，则 $\mathrm{d}t$ 时间之内扫过的面积为 $A\mathrm{d}t$，所以

$$\frac{1}{2}r^2\mathrm{d}\theta=A\mathrm{d}t \tag{2.3.3}$$

$\frac{1}{2}r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=A$，简记为 $\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}=A$.

根据开普勒第三定律，设某颗行星的运行周期为 T，则有

$$T^2=ka^3 \tag{2.3.4}$$

根据表 2-3-1，以地球绕太阳旋转的周期及地球绕太阳轨道的长半轴为 1 个单位，则 $k=1$.

三、模型的建立

加速度是位置函数 $r=r(t)$ 的二阶导数，因而加速度也是时间 t 的函数，为了求导时方便，取一个单位长度的向径 $\boldsymbol{u}_r$

$$\boldsymbol{u}_r=\cos\theta\cdot\boldsymbol{i}+\sin\theta\cdot\boldsymbol{j} \tag{2.3.5}$$

$$\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{u}_r \tag{2.3.6}$$

先对 $\boldsymbol{u}_r$ 关于 t 求一阶导数，有

$$\dot{\boldsymbol{u}}_r=-\sin\theta\cdot\dot{\theta}\cdot\boldsymbol{i}+\cos\theta\cdot\dot{\theta}\cdot\boldsymbol{j} \tag{2.3.7}$$

为表达上方便，定义与 $\boldsymbol{u}_r$ 正交的单位向径为 $\boldsymbol{u}_\theta$

$$\boldsymbol{u}_\theta=-\sin\theta\cdot\boldsymbol{i}+\cos\theta\cdot\boldsymbol{j} \tag{2.3.8}$$

则 $\dot{\boldsymbol{u}}_r=\dot{\theta}\cdot\boldsymbol{u}_\theta$，再对 $\boldsymbol{u}_\theta$ 关于 t 求导，得

$$\dot{\boldsymbol{u}}_\theta=-\cos\theta\cdot\dot{\theta}\cdot\boldsymbol{i}-\sin\theta\cdot\dot{\theta}\cdot\boldsymbol{j}=-\dot{\theta}\boldsymbol{u}_r \tag{2.3.9}$$

利用这些式子，得

中国国防科技网 http://www.81tech.com

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\boldsymbol{u}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta \tag{2.3.10}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\boldsymbol{r}} &= \ddot{r}\boldsymbol{u}_r + \dot{r}\dot{\boldsymbol{u}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta + r\ddot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\boldsymbol{u}}_\theta \\ &= \ddot{r}\boldsymbol{u}_r + \dot{r}\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta + r\ddot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta - r\dot{\theta}^2\boldsymbol{u}_r \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{u}_\theta\end{aligned} \tag{2.3.11}$$

$\boldsymbol{r}$ 的二阶导数有了，但物理意义并不明显，为此利用开普勒三定律进行代换，以找出(2.3.11)式中所隐藏的客观规律. 根据(2.3.3)式，有

$$\dot{\theta} = \frac{2A}{r^2} \tag{2.3.12}$$

由于 A 是常数，再求导，有

$$\ddot{\theta} = -\frac{4A\dot{r}}{r^3} \tag{2.3.13}$$

由(2.3.12)、(2.3.13)式，有 $r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$，代入(2.3.11)式得

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{u}_r \tag{2.3.14}$$

这是一个很大的进展，它表明行星所受到的力的方向是太阳与行星之间的连线，下面进一步代换，换掉 $\ddot{r}$ 及 $r\dot{\theta}^2$ 这些物理意义不明显的因子. 根据(2.3.1)式，因为 p 及 e 为常数，所以求导可得

$$\dot{r} = \frac{pe\sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2}\dot{\theta} = \frac{r^2}{p}e\sin\theta\cdot\dot{\theta}$$

将(2.3.12)式代入，得

$$\dot{r} = \frac{2A}{p}e\sin\theta \tag{2.3.15}$$

再求导有

$$\ddot{r} = \frac{2A}{p}e\cos\theta\cdot\dot{\theta}$$

根据(2.3.1)式，

$$r(1+e\cos\theta) = p,\quad e\cos\theta = \frac{p}{r} - 1$$

所以

$$\ddot{r} = \frac{2A}{p}\left(\frac{r}{p} - 1\right)\dot{\theta} = \frac{2A}{p}\left(\frac{p}{r} - 1\right)\frac{2A}{r^2} = \frac{4A^2}{r^3}\left(1 - \frac{r}{p}\right) \tag{2.3.16}$$

将(2.3.16)式和(2.3.12)式代入(2.3.14)式，得

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \left[\frac{4A^2}{r^3}\left(1 - \frac{r}{p}\right) - r\cdot\frac{4A^2}{r^4}\right]\boldsymbol{u}_r = -\frac{4A^2}{pr^2}\boldsymbol{u}_r \tag{2.3.17}$$

这表明行星受到的力与太阳指向行星的向径方向相反，且和太阳与行星间距离

的平方成反比. 这样还有一个问题，A 因行星而变化，p 因椭圆轨道而异，则太阳与行星之间的引力还可能与哪些因素有关？根据 A 的定义及(2.3.2)式中 a 和 b 的定义，任一行星的运行周期满足(每周期内扫过整个椭圆)

$$TA = \pi ab \tag{2.3.18}$$

所以根据(2.3.2)式、(2.3.3)式及上式不难得到

$$\frac{A^2}{p} = \frac{\pi^2 a^2 b^2}{T^2 p} = \frac{\pi^2 a^2 b^2}{ka^3} \cdot \frac{a}{b^2} = \frac{\pi^2}{k} \tag{2.3.19}$$

π 是众所周知的常数，前已说明若取地球周期及地球轨道的长半轴为 1 个单位，则 $k=1$，因而(2.3.17)式可记为

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{4\pi^2}{kr^2}\boldsymbol{u}_r$$

结合牛顿第二定律：$\boldsymbol{F} = m\ddot{\boldsymbol{r}} = -m\dfrac{4\pi^2}{kr^2}\boldsymbol{u}_r$，上述公式表明太阳与行星间作用力的方向是太阳与行星连线方向，指向太阳；太阳与行星之间作用力的大小和太阳与行星间距离平方成反比，大小也与行星的质量成正比. 这就是著名的万有引力定律，这一定律成功且定量地解释了许多自然现象，也为其后一系列的观测和实验数据所证实，成为基本的天体力学定律之一.

点评：从开普勒天体运动三定律到牛顿万有引力定律的数学建模过程，既显示了数学模型在自然科学发展中的巨大作用，也指出了运用数学建模方法去探索事物内在规律的步骤. 数学模型不是凭空建立的，它必须建立在坚实的基础上，大量可靠的数据是建立数学模型、探索事物内在规律的基础，是洞察事物内部奥秘的窗口，此其一. 其二是根据大量观测数据来寻找其中的规律，一定要反复验证，其中包含了许多创造性的劳动. 如开普勒的后两条定律的发现就不是一件容易的事. 其三是实验数据所反映的客观规律不一定一次全部被发现，还应在其他侧面寻找新的突破口(如牛顿考虑行星运动一定受未知外力作用)，再根据已经证明的结论找出事物之间更多的联系，有目的的数学推导在数学建模中起着关键的作用，因此在数学建模中决不应忽视理论研究.

§2.4 货物交换的模型

诺贝尔经济学奖获得者华西里·列昂惕夫(Wassily Leontief)曾考虑如下的一个经济学模型. 在一个部落内根据分工，人们分别从事三种劳动：农田耕作(记以 F)，农具及工具的制作(记以 M)，织物的编织(记以 C). 人们之间的

贸易是实物交易. 图 2-4-1 给出这三组人之间的交易系统:

图 2-4-1 表明农夫们将每年的收获的一半留给自己，并分别拿出四分之一给工匠们和织布者们；而工匠们却平均分配他们制作的用具给每个组；织布者们则留下四分之一的衣物给自己，并拿出四分之一给工匠们，二分之一给农夫们. 此交易系统也可以用如下的表给出:

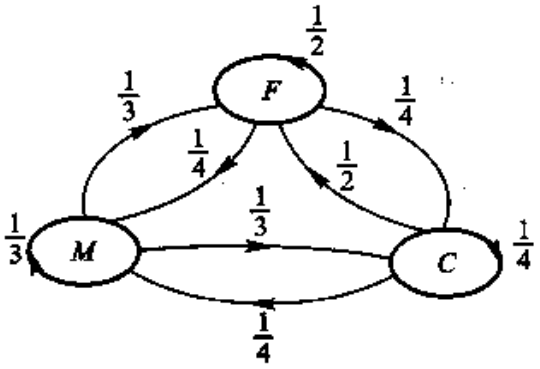


图 2-4-1

表 2-4-1 交易系统

	F	M	C
F	1/2	1/3	1/2
M	1/4	1/3	1/4
C	1/4	1/3	1/4

随着社会的发展，实物交易形式变得十分不方便，于是部落决定使用货币进行交易. 假设没有资本和负债，那么如何给每类产品定价使其公正地体现旧有的实物交易系统呢?

令 x_1 为农作物的价值，x_2 为农具及工具的价值，x_3 为织物的价值. 那么，从上表的第一行，农夫们生产的价值应等于他们交换到的产品(包括留给自己的)的价值，即有

$$x_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3$$

同理可得有关工匠们和纺织者们生产的价值的方程，从而得到有关 x_1，x_2，x_3 的齐次线性方程组:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ \frac{1}{4}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = 0 \\ \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{3}{4}x_3 = 0 \end{cases}$$

此方程组的系数矩阵可经初等变换为如下的阶梯形矩阵(自己完成)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

http://www.81tech.com

即 x_3 是自由未知量. 可令 $x_3=3$，得(5,3,3)为一个解，而方程组的全部解(非负)则为这一特解的任意正倍数，即 x_1，x_2，x_3 的赋值应满足比例式：

$$x_1:x_2:x_3=5:3:3$$

§2.5 人、鸡、狗、米过河问题

问题：某人带狗、鸡、米用小船过河，船需要人划，另外至多还能载一物，而当人不在时，狗要吃鸡，鸡要吃米. 问人、狗、鸡、米怎样过河?

解答：我们用一个四维向量来表示人、狗、鸡、米所处的状态，例如：(1,1,1,1)表示人、狗、鸡、米都在左岸，(0,0,0,0)表示人、狗、鸡、米都在右岸等等. 我们称这个四维向量为状态向量，由问题中的限制条件，有些状态是允许的，有些是不允许的. 凡系统可以允许存在的状态称为允许状态. 对本系统来说，允许状态向量可以用穷举法列出来.

(1,1,1,1)(0,0,0,0)(1,1,1,0)(0,0,0,1)(1,1,0,1)

(0,0,1,0)(0,1,0,0)(1,0,1,1)(1,0,1,0)(0,1,0,1)

将船的一次运载也用向量表示，当一物在船上时相应分量记为1，否则记为0. 如(1,1,0,0)表示人和狗在船上.

本系统的运算向量共有四个：

(1, 0, 1, 0)，(1,1,0,0)，(1,0,0,1)，(1,0,0,0)

一次过河就是一状态向量和一运算向量的加法，在加法运算中，对每一分量采用二进制(0+0=0,1+0=0+1=1,1+1=0).

由于问题的要求，允许状态经过加法运算后仍是允许状态，这样的运算称为允许运算.

根据以上假定，人、狗、鸡、米过河问题转化为：找出从状态(1,1,1,1)经过奇数次运算变为状态(0,0,0,0)的系统状态转移过程. 作法如下：

初始状态		船上状态		结果状态
(1,1,1,1)	———	(1,0,1,0)	⟶	(0,1,0,1)
(0,1,0,1)	———	(1,0,0,0)	⟶	(1,1,0,1)
(1,1,0,1)	———	(1,0,0,1)	⟶	(0,1,0,0)
(0,1,0,0)	———	(1,0,1,0)	⟶	(1,1,1,0)
(1,1,1,0)	———	(1,1,0,0)	⟶	(0,0,1,0)
(0,0,1,0)	———	(1,0,0,0)	⟶	(1,0,1,0)
(1,0,1,0)	———	(1,0,1,0)	⟶	(0,0,0,0)

从上述结果看，船载7次即可.

点评：本问题解答的关键是将人、狗、鸡、米所处的状态用一个四维向量

来表示，船的一次运载也用向量表示. 用这种方法的优点在于使用计算机能求出所有的转移过程并比较出最优者. 当所有的转移过程都出现循环时，我们可以看出，当状态向量维数增加，约束条件复杂时，用这种方法可方便求解.

§2.6 到海平线的距离

所谓到海平线的距离(如图 2-6-1)就是从观察者到地球海洋表面的切线长 d，即从观察者眼睛到视线与海面相切的切点之间的距离，其中观察点距海面的高度为 h. 知道了到海平线的距离，就会使观察者知道他第一眼看到的漂浮物的距离，并且给出用于估算自己船与其他船只之间距离的一个标准. 令人惊讶的是，在海军军官中，到海平线的距离常常是他们争论不休的话题，尽管这个距离用初等数学的方法很容易就能计算出来.

我们想找到一个计算到海平线距离 d 的近似公式，把它看成是观察者眼睛距海面高度 h 的一个函数，其中 d 的单位是海里，h 的单位是英尺. 1 海里≈6 076 英尺，1 英尺≈0.304 8 米. 符号含义：

R：3 480 海里，地球的半径；

h：眼睛向海平面的高度，单位是英尺；

H：眼睛离海平面的高度，单位是海里；

d：观察者到海平线的距离，单位是海里.

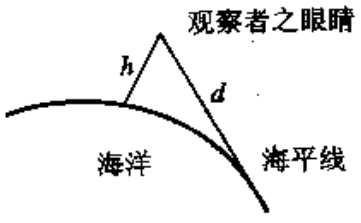


图 2-6-1

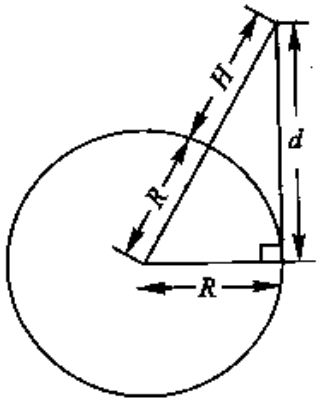


图 2-6-2

我们将地球看成一个圆球，考察经过观察者眼睛和地心并横截地球的典型截面. 如图 2-6-2，由勾股定理知

$$R^2 + d^2 = (R + H)^2 = R^2 + 2RH + H^2$$

所以

$$d^2 = 2RH + H^2$$

由于 $R \gg H$（符号 $\gg$ 表示“远远大于”），从而有 $2RH \gg H^2$（你能知道为什么吗？）相对于 $2RH$ 而言我们可舍去 H^2 项，就得到近似公式

$$d^2 = 2RH,\quad d = \sqrt{2RH}$$

1 海里约为 6 000 英尺，所以

$$H = h/6\ 000$$

从而

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{2RH} = \sqrt{2Rh/6\ 000} \\ &= \sqrt{3\ 480h/3\ 000} \\ &= 1.08\sqrt{h} \end{aligned}$$

这是一个很容易记住的公式，其中的 h 单位是英尺，d 的单位是海里.

作为一个数值计算的例子，取 $h = 20$ 英尺，则由近似公式 $d = \sqrt{h}$ 给出 $d \approx 4.472$ 海里，而精确公式（见练习 1）给出的 $d = 4.786$，误差为 0.314，如果用精确值除一下，就得出相对误差为 6.6%.

§2.7 思 考 题

自然界中的许多事物具有相似性，一个科学工作者，应充分发挥自己的联想能力，多方面掌握研究对象和用作比较对象的知识，抓住事物的相似性进行类比，下面是几个很好的实例.

1. 对称性：一杯咖啡与一杯牛奶

假设给你一杯咖啡和一杯牛奶，盛在杯子里的咖啡和牛奶数量相等，先从牛奶杯里舀出一满匙牛奶放入咖啡杯里搅匀，然后再从掺有牛奶的咖啡杯里舀出一满匙的咖啡放入牛奶杯里搅匀. 此时，两个杯子里的液体在数量上又相等了. 这样，咖啡杯里的牛奶和牛奶杯里的咖啡相比，哪个多呢？

大多数人会回答说咖啡杯里的牛奶要多些，少数人的回答恰好相反，而回答两者数量相等的人则是凤毛麟角了. 关于这个问题大多数人的想法是：第一匙牛奶加入咖啡杯里之后冲淡了咖啡，因而后一匙中，就没有那么多咖啡了. 所以，留在咖啡杯里的牛奶便要多于牛奶杯里的咖啡. 然而，后一匙没有带回那么多咖啡，就意味着又带回了一些牛奶. 但是大多数人未按此思考，没有注意到无论从牛奶杯里取出多少牛奶，都会掺进相同数量的咖啡（对称性，反之亦然），因为最终两个杯子里的液体需要保持开始时数量相等的状态.

结论：牛奶杯里的咖啡数量和咖啡杯里的牛奶数量相等. 我们可以用较为

复杂的代数方法来验证该结论.

假设经过搅拌后的牛奶在咖啡里分布是均匀的. 这虽然是一个人为的假设前提，但确实需要它才能得到这个代数条件：后一匙中咖啡与牛奶的比例和整个咖啡杯里咖啡与牛奶的比例相同.

为数学表示，不妨设牛奶杯中含 n 匙牛奶，咖啡杯中的咖啡也是 n 匙.

从牛奶杯中舀出一匙牛奶放入咖啡杯中，摇匀后，牛奶在咖啡中浓度为 $\frac{1}{n+1}$，然后再从咖啡杯中舀出一匙(牛奶咖啡混合液)，放入牛奶杯中，摇匀后，来计算牛奶中的咖啡. 此时，牛奶杯中纯牛奶量为 $\left(n-1+\frac{1}{n+1}\right)$ 匙，咖啡量为 $\frac{n}{n+1}$ 匙. 故，牛奶杯中咖啡的浓度仍为

$$\frac{\frac{n}{n+1}}{n}=\frac{1}{n+1}$$

2. 针锋相对：硬币游戏

如果你和你的对手准备轮流将硬币放置在一个长方桌上，使得这些硬币互不重叠(且全部平放在桌面上). 假设这场游戏的胜者是能依照规则放置最后一枚硬币的人，那么，你是愿意先放还是愿意后放?

从感觉上来看，人们都希望自己能处于这样一个位置：无论对手采用什么方法，自己都能应付，并且能够阻止对手在最后一步于自己之后放置硬币.

结论：根据对称性，桌子上的任何一个位置都有一个关于中心对称的点. 由于中心关于其自身是对称的，故最佳方案是首先将一枚硬币放在桌子中央，然后根据对手的放法，将你的硬币放在(关于中心)与之对称的位置上.

3. 对称性：登山问题

某人自上午 8 点始从营地出发沿一山间小径登山，到达山顶的时间是下午 5 点；第二天他从上午 8 点开始沿着同一条路线下山，并于下午 5 点返回营地. 试证在这条路线上存在一点，使得他在第二天到达这点的时间与第一天到达该点的时间相同.

这个问题的条件似乎少了一点，因为没有给出该人往返的速度，也没有给出休息停留的时间，唯一的条件是他被限制在一条路线上. 注意到这只是一个存在性的问题，我们并没有要求指出这点究竟在哪里. 事实上，分析清楚这个问题的一个简单方法就是让两个人在同一天同时出发，沿着同一条路线一人从营地出发另一人从山顶出发相向而行. 结论是这两个人必然要在某处相遇，相遇的时间对他们来说均为那一天的同一时刻. 这就是解决问题所需要的想像力——对称，尽管所述的问题中的条件是一个人，而时间为两天.



1. 如果用 7×6 的棋盘并切掉第一行两边的格子，情况如何呢？

2. 你能用 2×4×8 的积木填满一个 12×12×12 的正方体吗？

提示：给每块积木一半涂红色，另一半涂白色，再将正方体分成 27 个 4×4×4 的立方体相间地涂上红色和白色.

3. 在文中货物交换的模型中若用 x_1 表示农产品价值，x_2 表示农具与工具价值，x_3 表示纺织产品价值，交易系统由下表给出，试求 $x_1:x_2:x_3$.

	F	M	C
F	1/3	1/2	1/3
M	1/3	1/3	1/3
C	1/3	1/6	1/3

4. 试用图论的方法求解“人、狗、鸡，米”过河问题.

提示：将本系统的 10 个可取状态用 10 个点表示，当且仅当某个可取状态经过本系统的运算向量而仍为可取状态，就连一条线，从而构成一个图问题. 在图中找一条从顶点(1,1,1,1)到(0,0,0,0)的路径，每条路径就是一个解.

5. 当航空母舰上的雷达天线刚刚出现在海平线时就被守在驱逐舰甲板上的水手发现. 假设水手眼睛距海面的高度为 36 英尺，航空母舰的雷达天线距海面的高度为 144 英尺，问驱逐舰与航空母舰之间相距多远？

提示：重复图 2-6-1 画出两个观察者，两人均观测到海平线的同一点.（答案：由 $d=\sqrt{h}$ 得出的解为 18 海里，由 $d=1.08\sqrt{h}$ 得出的解为 19.44 海里.）

6. 一个飞行员从 10 000 英尺的高度所能见到的面积(平方海里)为多少？

提示：假设他所看见的是一块平坦的圆形区域.（答案：$\pi(1.08\sqrt{h})^2\approx 36\,400$ 平方海里.）

7. 试利用牛顿万有引力定律推导开普勒天体运动三定律.

参考文献

[1] 朱道元. 数学建模精品案例. 南京：东南大学出版社，1998

[2] 王晓峰. 线性代数及其应用. 济南：山东科学技术出版社，2001

[3] William F. Lucas. Modules in Applied Mathematics. 中译本(第三卷). 沙基昌，余滨等译. 长沙：国防科技大学出版社，1996

[4] 任善强，雷鸣. 数学建模. 重庆：重庆大学出版社，1998

第3章 数学模型中的数据处理方法

我们知道从实际问题中直接观测得到的数据含有与问题有关的大量信息. 如果我们面临的问题比较复杂，问题中的主要因素及其相互作用的机理不可能通过适当的假设而找出时，所讨论问题中有关变量间的关系往往能够通过对数据资料的恰当的分析与处理寻找出来，或给出很好的提示. 因此直接从数据资料出发有时也能组建出有关问题的数学模型或者模型中的某些部分. 这一类模型一般能够较理想地描述问题中变量之间的关系. 但是由于缺乏有关因素之间作用机理的细致的讨论，模型的使用和分析的深度将要受到一定的限制. 一般来说这类模型会告诉我们可能会发生什么情况，但无法告诉我们为什么会是这样的. 这类模型中变量之间的关系既然是通过对有关变量的观测数据的观察、分析和选择恰当的数学表达式得到的，那么由于观测数据误差因素，直接利用数据建模实质上是数据拟合的精度和数学表达简化程度的一个折中. 如果需要的话，我们可以使用足够复杂的数学表达式达到很好的拟合程度，这样的研究方式未必是明智的. 利用数据建模时折中方案的选择将取决于实际问题的需要. 如果问题主要是探讨变量间的内在规律，容许观测数据出现一定的误差，这时，模型将侧重于选择简单的数学表达，在简单的数学表达式中选择模型效果较好的. 一般我们称这类模型为经验模型. 如果问题要求较高的拟合精度，建模时将以拟合的精度为主，特别是在数据的观测点处基本上没有误差时，选择恰当的数学表达方式来描述有关变量间的关系则是更重要的.

实际问题中处理数据的方法很多，我们在这方面只介绍几种常用的典型方法.

§3.1 回归分析法

回归分析法是“黑箱”建模中常用的方法，用于对函数$f(x)$的一组观测值(x_i,f_i)，$f_i=f(x_i)$，$i=1,2,\cdots,m$，确定函数f的表达式. 当然$f(x)$可以是一元的，也可以是多元的.

一、一元线性回归

一元线性回归是处理两个变量之间关系的最简单的模型. 它虽然比较简单，却能反映回归分析方法的基本思想和应用.

给一组观测数据(x_i,f_i)，$f_i=f(x_i)$，$i=1,2,\cdots,m$. 在两变量 x 和 $y=f(x)$ 之间的关系一无所知的情况下，通常是先画出散点图，以便估计其中的关系.

例 为了估计山上积雪融化后对下游灌溉的影响，在山上建立了一个观察站，测量了最大积雪深度(x)与当年灌溉面积(y)，得到连续 10 年的数据如表 3-1-1 所示. 为了研究这些数据中所蕴含的规律性，把各年最大积雪深度作横坐标，相应的灌溉面积作纵坐标，将这些数据点标在平面直角坐标系上. 如图 3-1-1 所示.

表 3-1-1 最大积雪深度与灌溉面积观测数据

年序	最大积雪深度 x	灌溉面积 y	年序	最大积雪深度 x	灌溉面积 y
1	15.2	28.6	6	23.4	45.0
2	10.4	19.3	7	13.5	29.2
3	21.2	40.5	8	16.7	34.1
4	18.6	35.6	9	24.0	46.7
5	26.4	48.9	10	19.1	37.4

从图中可以看到，数据点大致落在一条直线附近，因此假设有如下结构式：

$$y=\alpha+\beta x+\varepsilon \tag{3.1.1}$$

其中，α 和 β 是未知常数，称为回归系数，ε 是随机误差，只要数学期望$E(\varepsilon)$和方差 $D(\varepsilon)$ 满足 $E(\varepsilon)=0$，$D(\varepsilon)=\sigma^2$，我们就能从观测数据中得到 α 和 β 的估计值 a 和 b，则回归方程为

$$\hat{y}=a+bx \tag{3.1.2}$$

它近似地反映了变量 x 和 y 之间的线性关系，其中 a 和 b 也称为回归系数.

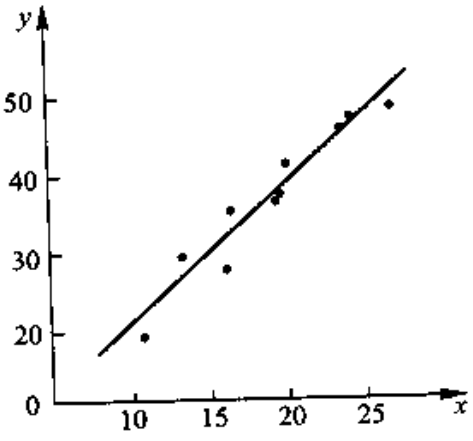


图 3-1-1

选择 a 和 b 的原则是使回归直线与所有数据点都比较“接近”，通常采用残差平方和来刻画所有观察值与回归直线的偏差程度，即选择 a 和 b，使得

中国国防科技网 http://www.81tech.com

$$\min Q = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2 \tag{3.1.3}$$

根据微积分中求极值的方法，在(3.1.3)式两边分别对 a 和 b 求导应有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i) = 0 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)x_i = 0 \end{cases} \tag{3.1.4}$$

得 $a = \bar{y} - b\bar{x}$，$b = \dfrac{L_{xy}}{L_{xx}}$，其中，

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$L_{xx} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \tag{3.1.5}$$

$$L_{xy} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$$

利用上述公式求得例题中，$b = 1.813$，$a = 2.355$. 回归方程为

$$\hat{y} = 2.355 + 1.813x$$

从图 3-1-1 上可以看出这个回归方程的图像与所有数据点都很接近.

一元线性回归模型应用极为广泛，但是这一方法有局限性，反映在其假设条件中：(1)$E(\varepsilon) = 0$，(2)$D(\varepsilon) = \sigma^2$，(3)$x$ 与 y 是线性关系. 因此当上述条件不满足时，处理方法应做适当修改.

若 $E(\varepsilon) = c \neq 0$，可作平移处理. 把该模型推广到多元情况，若协方差矩阵 $\mathrm{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \sigma_n^2 I$ 不满足，而是 $\mathrm{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \boldsymbol{\Omega}$，$\boldsymbol{\Omega}$ 为一非奇异对称矩阵，则采用广义最小二乘法(GLS). 对多元情况，若 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 相关，即对多重共线性问题，应采用岭回归及其变种方法处理. 而线性假设，来源于对散点图的观察和对模型精度的要求，两变量之间是否有线性关系，可采用 F 检验(见[3])，即如果 x 与 y 有线性关系，则

$$F = \frac{S_{回}/1}{S_{残}/(n-2)} \sim F(1, n-2) \tag{3.1.6}$$

其中，$S_{回} = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})^2$ 称为回归平方和，$S_{残} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$ 为残差平方和，$F(1, n-2)$ 表示第一自由度为 1，第二自由度为 $n-2$ 的 F-分布. 这时，在给定显著性水平 α 下，F 值应大于 F 表中的临界值 F_α. 对例题结果进行检验，

$$F = \frac{748.961}{16.074/(10-2)} = 372.76 > 11.26 = F_{0.01}(1, 8)$$

这表明 x 与 y 之间有十分显著的线性相关关系.

两变量是否具有线性关系的另一种检验方法是利用两变量的相关系数 r，其计算方法如下：

$$r=\frac{L_{xy}}{\sqrt{L_{xx}}\sqrt{L_{yy}}} \tag{3.1.7}$$

其中 L_{xx}，L_{xy}，L_{yy} 按(3.1.5)式计算.

查阅相关系数检验表. 通常当 $|r|$ 大于表上 $\alpha=5\%$ 相应值，小于表上 $\alpha=1\%$ 相应值时，称 x 与 y 有显著的线性关系；当 $|r|$ 大于表上 $\alpha=1\%$ 相应的值时，称 x 与 y 有十分显著的线性关系；当 $|r|$ 小于表上 $\alpha=5\%$ 的相应值时，称 x 与 y 没有明显的线性关系. 在上例中 $r=0.989\ 4$. 因为 $n=10$，查表中 $\alpha=5\%$ 相应值为 0.632，$\alpha=1\%$ 相应值为 0.765，$r=0.989\ 4>0.765$，故最大积雪深度与灌溉面积有十分显著的线性关系. 显然当散点图出现明显的非线性趋势，或经检验，x 和 y 之间没有明显的线性关系时，利用线性假设就不合理了.

二、线性回归中基函数的选取

在数学分析中，常常将一个函数展开成级数，如泰勒级数、三角级数等，取级数的前 n 项，近似地表示这个函数. 在回归分析中，也常常假定要估计的函数可以用某一类给定的函数展开成级数，取其前几项近似地表示成

$$y=c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\cdots+c_k\varphi_k(x),\quad a\leqslant x\leqslant b$$

其中，$\varphi_j(k)$，$j=1,2,\cdots,k$ 是一组线性无关函数，它们一般是 x 的非线性函数，$c_j(j=1,2,\cdots,k)$ 是回归系数. 这个模型也称为线性回归模型，因为问题对回归系数而言是线性的. 这个问题的更一般的提法是曲线拟合或函数逼近，当然逼近的方式并不局限于回归中的最小二乘法. 其中 $\sum_{j=1}^{k}c_j\varphi_j(x)$ 称为 $y=f(x)$ 的线性逼近函数，$c_j(j=1,2,\cdots,k)$ 称为线性逼近参数，在曲线拟合问题中，常常采用半线性逼近函数类，即

$$y=F(c,d,x)=\varphi_0(d,x)+\sum_{j=1}^{n}c_j\varphi_j(d,x)$$

其中，$c=(c_1,\cdots,c_n)$ 称为线性逼近参数，$d=(d_1,\cdots,d_q)$ 称为非线性逼近参数. 例如，当 $q=n$，$\varphi_0(d,x)\equiv 0$，$\varphi_j(d,x)=\exp(-d_jx)$，$j=1,2,\cdots,n$，则得到

$$y=\sum_{j=1}^{n}c_je^{-d_jx}$$

这一函数类有重要应用. 下面是几个常用的半线性逼近函数类：

中国国防科技网 http://www.81tech.com

$$y=a+be^{-cx},\quad y=ae^{-\frac{b}{x}},\quad y=a\cos(bx+c)\text{ 或 }y=\alpha\cos rx+\beta\sin rx.$$

$$y=a+bx+ce^{-dx},\quad y=(a+bx)e^{-cx}.$$

这里 a，b，c，d 均为待定参数.

§3.2 曲线拟合的最小二乘法

一、插值法和最小二乘法

在曲线逼近中，常用插值法和最小二乘法，两者有不同的概念，但又有联系. 给定函数 $f(x)$ 的一组观测数据 (x_i,f_i)，$i=1,2,\cdots,m$，选取 $\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i(x)$ 为逼近函数，假定 m 维欧氏空间的向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}\varphi_1(x_1)\\ \varphi_1(x_2)\\ \vdots\\ \varphi_1(x_m)\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}\varphi_2(x_1)\\ \varphi_2(x_2)\\ \vdots\\ \varphi_2(x_m)\end{pmatrix},\quad \cdots,\quad \alpha_n=\begin{pmatrix}\varphi_n(x_1)\\ \varphi_n(x_2)\\ \vdots\\ \varphi_n(x_m)\end{pmatrix}$$

是线性无关的. 记

$$(f,g)=\sum_{i=1}^{m}\omega_i f(x_i)g(x_i)$$

其中 $\omega_i>0$ 是权系数，则所谓最小二乘逼近，就是选取 c_i，使

$$\sum_{k=1}^{m}\omega_k\left[f(x_k)-\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i(x_k)\right]^2=\min$$

由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，可证明问题的解 c_i 是存在且唯一的.

现在，假定 $m=n$，选取 c_i 满足下列插值问题

$$\sum_{i=1}^{m}c_i\varphi_i(x_k)=f(x_k),\qquad k=1,2,\cdots,n$$

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是线性无关的，因而插值问题的解存在且唯一，即能找到一组 c_i^*，使

$$\sum_{k=1}^{m}\omega_k\left[f(x_k)-\sum_{i=1}^{n}c_i^*\varphi_i(x_k)\right]^2=0$$

此即最小二乘形式，由最小二乘逼近解的存在唯一性，c_i^* 即为最小二乘的解. 这说明在 α_1，α_2，$\cdots$，α_n 线性无关的假设下，最小二乘与插值法是一致的.

http://www.81tech.com

二、几何解释

最小二乘逼近就是要求逼近余项 $R(x)=f(x)-\varphi(x)$ 与 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$ 正交，也就是 $R(x)$ 与以 $\{\varphi_i\}$ 为基底作成的 n 维函数空间正交. 也就是说，以 $\varphi(x)=\sum c_j\varphi_j(x)$ 对 $f(x)$ 作最小二乘逼近问题等价于将 $f(x)$ 对 $\{\varphi_i\}(i=1,2,\cdots,n)$ 所支成 n 维函数空间作正交投影. $(\varphi_i,f-\varphi)=0$ 的解记为 $\varphi^*(x)=\sum c_j^*\varphi_j(x)$，则 $(\varphi_j,f-\varphi^*)=0$，再乘以 c_j^* 并求和，得 $(\varphi,f-\varphi^*)=0$. 由于 $f-\varphi^*=R$，于是

$$(f,f)=(R,R)+(\varphi^*,\varphi^*)$$

亦即

$$\|f\|^2=\|\varphi^*\|^2+\|R\|^2$$

这就是 n 维函数空间中的勾股定理.

三、最小二乘法曲线拟合的矩阵表示

给定函数 $y=f(x)$ 的一组观测数据 (x_i,y_i)，$i=1,2,\cdots,m$，通常，可设拟合曲线的形式为：

$$y=f(x,a_1,a_2,\cdots,a_n)=a_1f_1(x)+a_2f_2(x)+\cdots+a_nf_n(x) \tag{3.2.1}$$

其中 y 与常数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是线性关系. 式(3.2.1)中的 $f_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$ 可以是 x 的任意函数形式. 为一般计，设实验数据有 m 对，式(3.2.1)中的待定常数有 n 个$(n<m)$，这样，用最小二乘法拟合 m 对数据，可得到 m 个线性方程的联立方程组. 下面用矩阵的表示方法求解这 m 个方程，得到所求的拟合曲线.

将 m 对数据中的 x_i 代入式(3.2.1)，则有 $y_i^*=\sum_{k=1}^{n}a_kf_k(x_i)(i=1,2,\cdots,m)$ 值，将 y_i^* 与数据中的 y_i 值之差记作 R_i，即 $R_i=y_i^*-y_i(i=1,2,\cdots,m)$，亦即

$$\begin{cases} R_1=\sum_{k=1}^{n}a_kf_k(x_1)-y_1 \\ R_2=\sum_{k=1}^{n}a_kf_k(x_2)-y_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ R_m=\sum_{k=1}^{n}a_kf_k(x_m)-y_m \end{cases} \tag{3.2.2}$$

式(3.2.2)写成矩阵形式为

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{Y} \tag{3.2.3}$$

中国国防科技网 http://www.81tech.com

其中

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}R_1\\R_2\\\vdots\\R_m\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{n}a_k f_k(x_1)\\\sum_{k=1}^{n}a_k f_k(x_2)\\\vdots\\\sum_{k=1}^{n}a_k f_k(x_m)\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{pmatrix}$$

应用最小二乘法原理

$$\|\boldsymbol{R}\|_2=\|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{Y}\|_2=\min \tag{3.2.4}$$

式中表示误差 $R_i(i=1,2,\cdots,m)$ 的平方和的最小值.

得

$$\sum_{i=1}^{m}R_i^2=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k f_k(x_i)-y_i\right)^2=\min \tag{3.2.5}$$

由多元函数取极值的必要条件得到

$$\sum_{i=1}^{m}\partial_k(R_i^2)=\sum_{i=1}^{m}\partial_k\left(\sum_{j=1}^{n}a_j f_j(x_i)-y_i\right)^2=0,\quad k=1,2,\cdots,n \tag{3.2.6}$$

这里 ∂_k 表示对 a_k 求偏导数. 将式(3.2.6)化简得:

$$\sum_{j=1}^{n}a_j\sum_{i=1}^{m}f_k(x_i)f_j(x_i)=\sum_{i=1}^{m}f_k(x_i)y_i,\quad k=1,2,\cdots,n \tag{3.2.7}$$

若用内积符号记:

$$(f_k,f_j)=\sum_{i=1}^{m}f_k(x_i)f_j(x_i),(f_k,Y)=\sum_{i=1}^{m}f_k(x_i)y_i$$

则式(3.2.7)的矩阵形式为

$$\begin{pmatrix}(f_1,f_1)&(f_1,f_2)&\cdots&(f_1,f_n)\\(f_2,f_1)&(f_2,f_2)&\cdots&(f_2,f_n)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\(f_n,f_1)&(f_n,f_2)&\cdots&(f_n,f_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(f_1,Y)\\(f_2,Y)\\\vdots\\(f_n,Y)\end{pmatrix} \tag{3.2.8}$$

这就是正规方程组，其解就是曲线拟合系数.

另一方面，从(3.2.6)式可得:

$$\sum_{i=1}^{m}\partial_k(R_i^2)=\sum_{i=1}^{m}2R_i\frac{\partial R_i}{\partial a_k}=2\sum_{i=1}^{m}R_i f_k(x_i)=0,\quad k=1,2,\cdots,n \tag{3.2.9}$$

若令

$$\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_n(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(x_m) & f_2(x_m) & \cdots & f_n(x_m) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\alpha}'=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

则由(3.2.2)式可得 $$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{F\alpha}-\boldsymbol{Y}$$

又由(3.2.8)式可得

$$\boldsymbol{F'R}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{F'}(\boldsymbol{F\alpha}-\boldsymbol{Y})=0$$

即 $$\boldsymbol{F'F\alpha}=\boldsymbol{F'Y} \tag{3.2.10}$$

这就是正规方程组(3.2.8)的另一种表达方式. 当 $\boldsymbol{F}$ 是满秩矩阵时可以解出

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{F'F})^{-1}\boldsymbol{F'Y} \tag{3.2.11}$$

即得到最小二乘法用矩阵表示的拟合曲线系数.

例 1 求对下表数据的拟合曲线.

表 3-2-1

x_i	2	4	6	8
y_i	2	11	28	40

解 设所求拟合曲线为 $y=a+bx$, 则(3.2.1)中对应的 $n=2$, $f_1(x)=1$, $f_2(x)=x$. 则由式(3.2.9)得:

$$\boldsymbol{F'}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&4&6&8\end{pmatrix},\ \boldsymbol{Y'}=(2,\ 11,\ 28,\ 40),$$

$$\therefore\ \boldsymbol{F'F}=\begin{pmatrix}4&20\\20&120\end{pmatrix},\ \boldsymbol{F'Y}=\begin{pmatrix}81\\536\end{pmatrix}$$

所以求得

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\frac{1}{80}\begin{pmatrix}120&-20\\-20&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}81\\536\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12.5\\6.55\end{pmatrix}$$

即得 $y=-12.5+6.55x$ 为所求的拟合曲线.

四、加权最小二乘法曲线拟合

在实际问题中测到的全部实验数据并不都是等精度、等地位的. 所以, 对于精度较高或地位重要(这应根据具体情况来判定)的那些数据给予“加权”, 使它们在最终的观测结果中占的比重更大. 当然这种给某些实验点的加权也必然会使所假设的曲线更接近这些点.

用加权最小二乘法进行曲线拟合的要求与原则是: 对于给定的一组实验

中国国防科技网 http://www.81tech.com

$(x_i,y_i)i=1,2,\cdots,m$，要寻求一个函数

$$y=\varphi(x)=a_1\varphi_1(x)+a_2\varphi_2(x)+\cdots+a_n\varphi_n(x)$$

将数据中的 $x_i,i=1,2,\cdots,m$ 代入上式，则有

$$y_i^*=\sum_{k=1}^{n}a_k\varphi_k(x_i),\quad R_i=y_i^*-y_i,\qquad i=1,2,\cdots,m$$

使得

$$\sum_{i=1}^{m}\omega_iR_i^2=\sum_{i=1}^{m}\omega_i(y_i^*-y_i)^2=\min \tag{3.2.12}$$

其中 ω_i，$i=1,2,\cdots,m$ 是一列正数，称为加权因子，它的大小反映了数据 (x_i,y_i)，$i=1,2,\cdots,m$ 地位的强弱，(3.2.12)代表加权最小二乘法曲线拟合误差平方和最小. 当 ω_i，$i=1,2,\cdots,m$ 全部相等时就是上节述及的最小二乘法.

显然，求 $y=\varphi(x)$ 就归结为求以 a_i，$i=1,2,\cdots,n$ 为变元的多元函数的极小点的问题：

$$\sum_{i=1}^{m}\omega_iR_i^2=\sum_{i=1}^{m}\omega_i\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\varphi_k(x_i)-y_i\right)^2=\min$$

通常加权因子 ω_i，$i=1,2,\cdots,m$ 根据经验和判断定出，然后按前面给出的方法求出 a_i，$i=1,2,\cdots,n$，即可得到所选用拟合曲线 $y=\varphi(x)$.

但最简单的加权办法是重复使用一些数据点，好像这些数据点是从不同的重复试验中得到的，例如例 1 中的重复使用点(2,2)，则表(3-2-1)中的数据变成 5 对：(2,2)，(2,2)，(4,11)，(6,28)，(8,40)来进行拟合.

重复使用试验点的加权办法所对应的最小二乘原理也是(3.2.5)式.

下面讨论(3.2.12)对应的加权最小二乘原理，极值方程式为

$$\frac{\partial}{\partial a_k}\sum_{i=1}^{m}\omega_iR_i^2=2\sum_{i=1}^{m}\omega_iR_i\frac{\partial R_i}{\partial a_k}=0\quad(k=1,2,\cdots,n) \tag{3.2.13}$$

类似(3.2.10)写成矩阵形式即得

$$\boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{W}\boldsymbol{R}=\boldsymbol{O} \tag{3.2.14}$$

这里，

$$\boldsymbol{\Phi}=\begin{pmatrix}\varphi_1(x_1)&\varphi_2(x_1)&\cdots&\varphi_n(x_1)\\\varphi_1(x_2)&\varphi_2(x_2)&\cdots&\varphi_n(x_2)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\varphi_1(x_m)&\varphi_2(x_m)&\cdots&\varphi_n(x_m)\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{W}=\begin{pmatrix}\omega_1&&&\\&\omega_2&&\\&&\ddots&\\&&&\omega_m\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}R_1\\R_2\\\vdots\\R_m\end{pmatrix}=\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{Y}$$

http://www.81tech.com

其中 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{Y}$ 如前给出，称 $\boldsymbol{W}$ 为加权因子矩阵. 代入式(3.2.14)得

$$\boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{O}\Rightarrow\boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{W}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{W}\boldsymbol{Y} \tag{3.2.15}$$

这就是加权最小二乘法的正规方程组. 从上面的讨论明显看出，对数据进行加权的方法是给出加权因子矩阵 $\boldsymbol{W}$ 后，由式(3.2.15)解出系数 $\boldsymbol{\alpha}$，这样就求出选用的拟合曲线.

例 2 以例 1 中的数据为例，求出其加权最小二乘法的拟合曲线，对点(2,2)用加权.

解 将矩阵

$$\boldsymbol{\Phi}'=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&4&6&8\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{Y}'=(2,11,28,40),\quad \boldsymbol{W}=\begin{pmatrix}2&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$$

代入(3.2.15)式得

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{W}\boldsymbol{\Phi})^{-1}\boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{W}\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}-11.676\\6.426\end{pmatrix}$$

即 $y=-11.676+6.426x$ 为求出的拟合曲线.

五、最小二乘法中待寻函数类的选择

在曲线拟合中最重要的问题是选择基函数 $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$，不同的问题应有不同的选法，其重要依据是各学科的背景. 随着电子计算机的发展，根据数据 (x_i, f_i)，$i=1,2,\cdots,m$ 的特征(散点图)，利用专用数值软件和人工智能方法由计算机作出模型与方法的选择，是近年来国外较为重视的一个研究课题，属于建模支持系统的范围，这里仅讨论较简单的情况.

选择基函数 $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ 一般应根据原问题的物理背景来考虑，通常有以下几种简单选法.

1. 多项式

一般常用的方法是取 $\varphi_k(x)=x^k$，即用形如

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

的多项式. 但当已知数据反映的规律具有偶(奇)函数性质时，可只用偶(奇)次幂的项，取 $\varphi_k(x)=x^{2k}$ 用形如(奇函数类似)

$$P(x)=a_0+a_1x^2+\cdots+a_nx^{2n}$$

的多项式.

例 3 设有一组观测数据如下表

中国国防科技网 http://www.81tech.com

表 3-2-2

X	1.0	2.5	3.5	4.0
Y	3.8	15.0	26.0	33.0

试用最小二乘法求它的代数多项式拟合曲线.

解 (1) 作出原始数据分布图. 根据所给的数据在坐标纸上作草图. 由图 3-2-1 可见, 这些点的变化趋势近似于一条抛物线.

(2) 设拟合曲线方程, 由图 3-2-1 分析, 确定选用抛物线方程

$$y = a + bx^2$$

作为这组数据的拟合曲线方程, 式(3.2.1)中对应的

$$f_1(x) = 1,\ f_2(x) = x^2$$

(3.2.11)中对应的矩阵

$$\boldsymbol{F}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6.25 & 12.25 & 16 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{Y}' = \begin{pmatrix} 3.8, & 15, & 26, & 33 \end{pmatrix}$$

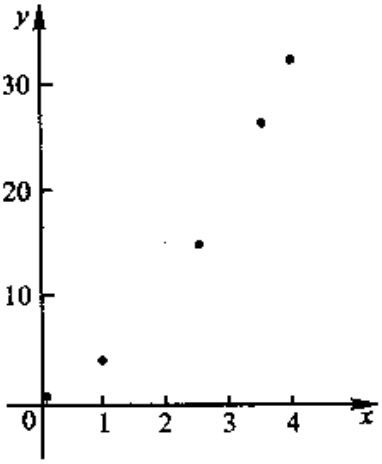


图 3-2-1

代入(3.2.11)中计算得: $a = 2.263$, $b = 1.937$.

$$y = 2.263 + 1.937x^2$$

就是所要求的拟合曲线方程. 读者不妨用式(3.2.15)求该拟合曲线.

2. 指数函数

有的数据具有指数的性质, 此时, 取指数函数较为合适, 一般可取

$$P(x) = \exp(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n)$$

但若将其取自然对数后就变成

$$\ln P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

于是, 对数据点

$$(x_i, \ln y_i), \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

求拟合曲线就与我们讨论的方法完全相同, 因而可用前面所述的方法. 但是这种形式的近似函数不宜将 n 值取得较大, 一般取 $n = 2$ 或 $n = 3$ 即可. 在工程和科学计算中常见的指数形式的近似函数还有

$$y = ae^{-bx} \tag{3.2.16}$$

$$y = axe^{-bx} \tag{3.2.17}$$

作适当的变换均可化成我们讨论过的形式. 用最小二乘法计算便近似得出系

http://www.81tech.com

数，求得原问题的解.

3. 样条函数

例如我们可以选择 $\varphi_k(x)$ 为三次样条函数. 作法如下：

将 (a,b) 进行等距分划，$a=x_0$，$x_i=x_0+ih$，$i=0,1,\cdots,n$，通常，这里取 n 比 m 要小得多，令 $\varphi_i(x)=\Omega_3\left(\frac{x-x_i}{h}\right)$（$\Omega_3$ 为三次样条基函数），

$$y=\varphi(x)=\sum_{i=-1}^{n+1}c_i\Omega_3\left(\frac{x-x_i}{h}\right)$$

这里出现了待定延拓值 c_{-1}，c_{n+1}，它们由边界条件确定，或者按 $(-\infty,+\infty)$ 区间通过正规方程组确定，或者将边界约束引入目标函数（见[4]）.

§3.3 多元回归与曲面拟合

设对 y 及 $x_1,x_2,\cdots,x_N$ 作 M 次观测后，得到一组观测值

$$(y_i,x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{iN}),\quad i=1,2,\cdots,M$$

希望能从中找到 y 与诸 x_i 的关系式，即

$$y=f(x_1,x_2,\cdots,x_N).$$

如果已找到适当的曲线模型

$$y=F(c,x)$$

则问题转化为利用观测数据对模型参数 $c=(c_1,c_2,\cdots,c_m)$ 进行估计，要求选取 c 使

$$\min\sum_{i=1}^{M}[y_i-F(c,x_i)]^2$$

对这一非线性规划问题，可采用逐次线性化和变尺度等方法求解.

特别地，当选取的曲线模型为线性函数时，即

$$y=\beta_0+\beta_1x_1+\cdots+\beta_Nx_N$$

若 b_j 分别为 $\beta_j(j=0,1,\cdots,N)$ 的估计值，用最小二乘法求 b_j，即

$$\min Q=\sum_{i=1}^{M}(y_i-b_0-b_1x_{i1}-\cdots-b_Nx_{iN})^2$$

由 $\frac{\partial Q}{\partial b_j}=0(j=0,1,\cdots,N)$，得

$$\begin{cases}s_{11}b_1+\cdots+s_{N1}b_N=s_{y1}\\ \cdots\cdots\cdots\\ s_{1N}b_1+\cdots+s_{NN}b_N=s_{yN}\end{cases}\tag{3.3.1}$$

中国防科技网 http://www.81tech.com

其中

$$s_{ij}=\sum_{k=1}^{M}(x_{ik}-\bar{x}_i)(x_{jk}-\bar{x}_j)\quad(i,j=1,2,\cdots,N)$$

$$s_{yj}=\sum_{k=1}^{M}(y_k-\bar{y})(x_{jk}-\bar{x}_j)\quad(j=1,2,\cdots,N)$$

$$\bar{x}_i=\frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M}x_{ik},\quad \bar{y}=\frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M}y_k$$

(3.3.1)式被称为正规方程组，由此解得 b_i，$i=1,2,\cdots,N$.

对多元问题，模型函数的选取具有决定性意义. 对于二元函数，在选取基函数时，有几条原则可供参考.

(1) 数据分布

对分布在矩形网格点上的数据，应用乘积型方法去逼近. 若数据分布式散乱，常用的方法有样条函数的最小二乘法.

(2) 数据的准确度

在大量实际问题中，实测数据仅有三至四位准确，一般来讲，在这种情况下，局部逼近优于全局逼近. 所谓局部逼近即“分片法”，也就是将大范围的拟合问题分割为许多互不相交的小片上的拟合，方法的优点是简单，容易保持几何特性，缺点是在连接处甚至可能不连续.

(3) 全局逼近、局部逼近和二步法逼近

全局逼近和局部逼近是分别在大范围和小范围内选择基函数. 而在二次法逼近中，首先将非规则数据规则化，即将矩形的格子点的函数值补齐，然后利用乘积型方法将曲面构造出来，二次逼近法常用于非规则数据.

基函数的选取是一个极重要问题，通常考虑的有乘积型基函数$\{\phi_i(x)\cdot\varphi_j(y)\}$. 例如可选取$\{1,x,y,xy,x^2,y^2\}$，这就是把通常采用的二元二次函数

$$z=a_0+a_1x+a_2y+a_3xy+a_4x^2+a_5y^2$$

作为模型函数. 乘积型基函数的另外选取方法是在两个方向上采用 B 样条函数($B_{i,k}(x)$,$B_{j,k}(y)$)，即在 x，y 方向上都采用局部逼近；或者在 y 方向上选 1，y，y^2 为基(全局二次函数逼近)，x 方向上用 B 样条为基(局部样条逼近)，即

$$z=F(x,y)=\sum_{m=0}^{2}\sum_{i=1}^{n}c_{im}B_{i,4}(x)y^m$$

以下结论对构造基函数和选取基函数具有启发意义.

如果 $f(x,y)$ 在$[0,1]\times[0,1]$上连续，那么存在着两组连续函数 $\varphi_i(x)$ 和 $\psi_i(y)$，$i=1,2,\cdots,s$，使 $f(x,y)$ 可表示成

http://www.81tech.com

$$f(x,y)=\sum_{i=1}^{s}\theta_i(\varphi_i(x)+\psi_i(y))$$

这里 $\theta_i(\cdot)$ 是依赖于 $f(x,y)$ 的单变量连续函数.

例 在土豆生长期间，施用不同量的氮(N)和钾(K)肥料，产量结果如表 3-3-1 所示，磷肥均固定在 $p=200\ \text{kg/hm}^2$ 水平上.

表 3-3-1 施肥量与产量观测数据

序 号	N/kg·hm^{-2}	K/kg·hm^{-2}	产量 y/t·hm^{-2}
1	200	270	48
2	200	370	37
3	200	470	49
4	260	270	44
5	260	370	42
6	260	470	52
7	320	270	49
8	320	370	43
9	320	470	59

一般可假定产量 η 是磷肥量 N，K 的二次函数(这点从对 N 和 K 单因素的散点图上可以看到). 不直接将 η 表成 N，K 的函数，而是作中心化处理，引进新的变量

$$u_1=\frac{N-260}{60},\quad u_2=\frac{K-370}{100}$$

其中 N，K 见表 3-3-1，N 的平均值是 260，离差为 60，K 的平均值为 370，离差为 100. 将 η 表为 u_1，u_2 的二次多项式，可以直接证明

$$\varphi_1(u)=1,\ \varphi_2(u)=u_1,\ \varphi_3(u)=u_1^2-\frac{2}{3},\ \varphi_4(u)=u_2,$$

$$\varphi_5(u)=u_2^2-\frac{2}{3},\ \varphi_6(u)=u_1u_2$$

在试验的 η 点上正交. 可将二次模型表为二次正交多项式

$$\eta(u)=\beta_1+\beta_2u_1+\beta_3\left(u_1^2-\frac{2}{3}\right)+\beta_4u_2+\beta_5\left(u_2^2-\frac{2}{3}\right)+\beta_6u_1u_2,$$

利用正交性，可得回归系数

$$\hat{\beta}_1=47,\ \hat{\beta}_2=2.8,\ \hat{\beta}_3=\frac{3}{2},\ \hat{\beta}_4=3.2,\ \hat{\beta}_5=9.5,\ \hat{\beta}_6=2.25.$$

中国国防科技网 http://www.81tech.com



1. 设有一组观测数据

x	1	2	3	4	5
y	0.6	1.6	2.0	3.5	5.0

试用最小二乘法求形如 $y=ae^{-bx}$ 的拟合曲线.

2. 研究小麦产量 y 与施肥水平 x 的关系，有如下一组观测数据

x	0	10	20	30	40
y	26.2	30.4	36.3	37.8	38.6

试确定小麦产量 y 与施肥水平 x 的函数关系.

3. 化学反应中 N_2O_5 的分解量 y 与时间 t 的关系，有如下观测数据

t	2	3	4	5	6	7
y	18.6	22.6	25.1	27.2	29.1	30.1

试确定 y 与 t 的函数关系.

4. 土豆产量 y 与化肥 P_2O_5 使用水平 x 的关系，有如下一组观测数据

x	4	1	2	3	4
y	232.65	369.08	455.6	491.45	511.50

试确定土豆产量 y 与施肥水平 x 的函数关系.

5. 已知下列数据

x	1.0	1.4	1.8	2.2	2.6
y	0.931	0.473	0.297	0.224	0.168

用最小二乘法比较用形如 $y=\dfrac{1}{a+bx}$ 及 $y=a+bx+cx^2$ 来拟合上面的数据时，哪一条曲线拟合更理想.

参考文献

[1] 姜启源. 数学模型. 北京：高等教育出版社，1993

[2] 唐焕文，贺明峰. 数学模型. 北京：高等教育出版社，1991

[3] 盛骤，谢式千，潘承毅. 概率论与数理统计. 第二版. 北京：高等教育出版社，1989

[4] 叶其孝. 大学生数学建模竞赛辅导教材(二). 长沙：湖南教育出版社，1997

[5] 齐欢. 数学模型方法. 武汉：华中理工大学出版社，1996

第4章 优化与线性规划模型

在工程实践、科学技术、经济管理等诸多领域中，很多实际问题都能归结为求一个函数在一定约束条件下的最大(小)值的问题，或者在某些可供选择的方案(决策)中选出最佳的方案. 这类问题就是优化问题或规划问题，本章介绍几个简单的优化与线性规划问题.

§4.1 森林救火模型

森林失火了，消防站接到报警之后，派多少消防队员前去救火呢？去的消防队员越多森林损失越小，救援的开支也越大. 需要综合考虑二者的费用，以总费用最少决定派出的队员数目.

一、模型假设

救援费用、队员数目、灭火时间及森林损失费均正比于烧毁面积. 为进一步建模，我们作如下假设：

设 C_1 表示单位面积森林损失费，C_2 表示单位时间一个队员的费用，C_3 表示每名队员的一次性开支，x 表示队员人数，$t=0$ 为失火时刻，t 时刻森林损失面积为 $B(t)$，t_1 为开始灭火时刻，t_2 为火被扑灭的时刻.

由以上假设可以得出：$C_1B(t_2)$ 为森林损失费，$C_2x(t_2-t_1)+C_3x$ 为救援开支. 目标函数为

$$C(x)=C_1B(t_2)+C_2x(t_2-t_1)+C_3x$$

为求解 $C(x)$ 极值问题，必须进一步明确 $B(t)$ 的形式及 t_1，t_2，x 之间的关系，特作进一步假设.

假设火势蔓延以某点为中心，以均匀速度环形向外蔓延，即

$$\text{半径 } r(t)\propto t\Rightarrow B(t)\propto r^2\Rightarrow\frac{dB}{dt}\propto t$$

$$\frac{dB}{dt}=\beta t,\quad 0\leqslant t\leqslant t_1$$

又设每个队员救火的速度是常数 λ，于是在 $t_1\leqslant t\leqslant t_2$，当有 x 名队员救火

http://www.81tech.com

时，火势蔓延速度为 $\beta-\lambda x$，从而有

$$\frac{dB}{dt}=\beta t-\lambda x(t-t_1),\quad t_1\leqslant t\leqslant t_2$$

如此，我们得到问题

$$\min C(x)=C_1B(t_2)+C_2x(t_2-t_1)+C_3x$$

$$\text{约束条件}\begin{cases}\dfrac{dB(t)}{dt}=\beta t, & 0\leqslant t\leqslant t_1\\ \dfrac{dB(t)}{dt}=\beta t-\lambda x(t-t_1), & t_1\leqslant t\leqslant t_2\end{cases}$$

这是以微分方程为约束条件的最优化问题.

二、模型分析求解

$0\leqslant t\leqslant t_1$ 时，火势增大，$\dfrac{dB}{dt}$单调上升，如果 $\beta-\lambda x\geqslant 0\Rightarrow$队员不足抵挡火势，所以必须 $\beta-\lambda x<0$.

当 $t_1\leqslant t\leqslant t_2$ 火势减弱，$\dfrac{dB}{dt}$下降，且 $\left.\dfrac{dB}{dt}\right|_{t=t_2}=0$.

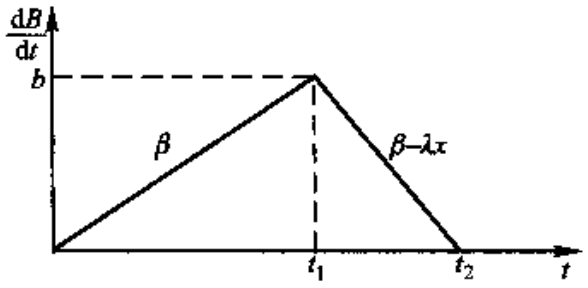


图 4-1-1

根据上边的分析作出$\dfrac{dB}{dt}$与 t 的关系如图 4-1-1.

$$\begin{aligned}B(t_2)-B(t_1)&=\int_0^{t_1}\beta t\,dt+\int_{t_1}^{t_2}(\beta-\lambda x)t\,dt\\&=\frac{\beta t_1^2}{2}+\frac{\beta-\lambda x}{2}(t_2^2-t_1^2)\\&=\frac{\beta-\lambda x}{2}t_2^2+\frac{\lambda x t_1^2}{2}\\&=bt_1-\frac{b}{2}\left(t_1+\frac{b}{\beta-\lambda x}\right)\\&=\frac{b}{2}t_1+\frac{b^2}{2(\beta-\lambda x)}\end{aligned}$$

中国国防科技网 http://www.81tech.com

$$\Rightarrow \quad C(x)=\frac{C_1bt_1}{2}+\frac{C_1b^2}{2(\lambda x-\beta)}+\frac{C_2bx}{\lambda x-\beta}+C_3x$$

$$\Rightarrow \quad x^*=\frac{\beta}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{C_1b^2\lambda+2C_2\beta b}{2C_3}}$$

即得最优选择，救火队员人数应为$[x^*]+1$.

备注：β 为火势自然蔓延速度，λ 为个人救火速度，二者应根据环境、气候、设备等因素确定.

§4.2 一个最优存储模型

为了保持存货在一个足够的水平上，鞋子零售商可以接受的最优订货策略是什么?

对于精确的数学来说，这个问题提得太含混了. 我们需要仔细地考察特定的情景以形成一个更准确的数学问题. 当然，这种分析的应用并不局限于鞋子零售商，在你关心存储策略时也可运用这类分析. 我们选择鞋子零售商品是为了帮助读者理解我们讨论问题的思想. 当读者理解了这个特定例子以后，就可以把它应用于其他合适的情景进行类似分析.

通常，货物从生产厂商运到批发商，然后到零售商，最后才到达消费者手中. 当然，鞋子零售商希望以最低的费用从批发商处得到他的存货以尽量减少他的开支. 零售商还希望保持适当的鞋子存储以供他销售.

零售商希望从批发商处购买足够的鞋子，以免过多的顾客在他的商店里找不到他们所需要的鞋子；同时，零售商也不希望买太多的鞋子以免造成积压，也就是说，零售商希望有足够的存储以满足需求，但是仅此而已，不需更多了. 显然，某些类型的鞋子会销售得快. 因此，零售商将会以较快的速度向批发商再次订购这种销售快的鞋子. 为了简单起见，我们将把分析限制于对一种特定类型的鞋子.

一、模型假设与符号说明

需要考虑三类费用(对一种特定类型的鞋子)：

(1) 每次订购时的组织费，记作 k. 这个费用包括如有关订货的文书工作、记录保持费用等；

(2) 购买费，记作 c 元/件(一双鞋子)；

(3) 贮存费，记作 h 元/件/单位时间，以支付货物在商店保存的花销.

零售商当然会收集并保存相当长一段时间的销售数据. 此外，为了保持数

http://www.81tech.com

学模型的简单性，我们还要作两个假设：

（1）零售商以一个已知的常速率 a 连续地销售其货物；

（2）当零售商从批发商处一次订购 Q 双鞋子时，所有的 Q 双鞋子将会在希望的时间同时到达零售店.

二、模型的建立与求解

在进一步处理前必须作出一个选择：我们选定的这种鞋子在他的商店里缺货，零售商是否能容忍？对此，我们有理由假定两种变通的情况——缺货是可容忍的，或者缺货是不可容忍的——都是可以的，至于究竟选择两者中哪一个只是由零售商自己决定的个人问题. 我们假定，缺货是不容许的.

开始的问题现在可以陈述得更精确了：对于一种特定的鞋子，零售商应该隔多长时间就向批发商去订一次货，每次订货多少才能使他在单位时间内的花费最小？我们将取一个月(30 天)作为时间单位.

（1）订货是一个周期事件　零售商将从批发商处一次订购 Q 件，而他期待着以每单位时间 a 件的速率向顾客销售这些商品. 因为短缺是不容许的，所以连续两次订货的间隔为 Q/a 时间单位；也就是说，订购这一特定类型的鞋是一个周期事件，其周期为 Q/a，以月计.

（2）每单位时间的花费　为了得到单位时间的花费，我们作如下分析. 如果 $Q=0$(即不订购鞋子)，那么每周期的购买费用是 0 元，如果 $Q>0$(订购 Q 双鞋子)，那么购买费用为 $k+cQ$ 元. 为了得到每周期的贮存费用，注意到一个周期内的平均存储水平为 $(Q+0)/2=Q/2$ 双，因此相应的贮存费用为每单位时间 $hQ/2$ 元. 因为周期长度为 Q/a 月，所以每个周期的贮存费用为 $(hQ/2)(Q/a)=hQ^2/2a$ 元. 于是，每个周期内的总费用为 $k+CQ+hQ^2/2a$ 元，而每双鞋子的总费用为

$$T=T(Q)=\frac{k+cQ+hQ^2/2a}{Q/a}=ak/Q+ac+hQ/2$$

（3）Q 的最小值　使 T 最小的 Q 值为 $Q^*=\sqrt{2ak/h}$(见习题 1)，为了达到所希望的目的，连续两次订货的间隔(即最优循环周期)为

$$t^*=Q^*/a=\sqrt{2k/ah}.$$

（4）结论　为了达到其目的，对于所考虑的特定类型的鞋子，零售商店每隔 $\sqrt{2k/ah}$ 月向批发商订购 $\sqrt{2ak/h}$ 双，其中 k 为每次订货的组织费，h 为每月每件商品的贮存费，而 a 是零售商售出商品的不变速率.

三、一个数值例子

我们用一个特定的数值例子来说明前述内容. 假定我们所考虑的特定类型

中国国防科技网 http://www.81tech.com

的鞋子是一种全年都销售的女鞋，并且预期将继续流行一段足够长的时间以保证如下分析中的考虑之合理性. 零售商估计每次订货的组织费为 20 元. 每双鞋子需花费零售商 4.60 元加上 0.10 元的运费. 零售商将这种鞋子的贮存费估计为每双每月 0.84 元. (零售商可以如下法得到其对贮存费用的估计:他以每双 9.99 元售出这种鞋子;所以他可以认为每个月内每双这样的鞋子对他的价值为 9.99/12 = 0.84 元.)最后，零售商期待以每月平均 90 双的速率销售这种鞋子.

(1) Q^* 的初步计算　此处我们必须特别关注所考虑业务中的一般顾客. 于是，利用 4.2.1 中的记号，我们有 $k = 20$ 元，$c = 4.70$ 元，$h = 0.84$ 元，而 $a = 90$. 所以使得每月总费用最小的这种鞋子的订购量为

$$Q^* = \sqrt{2ak/h} = \sqrt{2 \cdot 90 \cdot 20/0.84} = \sqrt{4\,285.71} = 65.47$$

现在必须提出两个问题. 首先，订购 65.47 双鞋子是荒唐的，Q 必须是整数. 其次，按鞋子销售业中的惯例，批发商向零售商出售女鞋总是 18 双一箱或 36 双一箱的. 为确定起见，我们假定零售商可以从批发商处订购的特定类型的鞋子是 18 双一箱的.

(2) Q^* 的最后计算　为了解决上面提到的两个问题，我们必须首先检查函数 $T(Q)$ 的特性：在可行集 $\{Q: 0 < Q < \infty\}$ 上，当 $Q \in (0, \sqrt{2ak/h})$ 时，$T(Q)$ 是减少的，而当 $Q \in (\sqrt{2ak/h}, \infty)$ 时，$T(Q)$ 是增加的(见练习 2). 我们已经看到，$\sqrt{2ak/h} = 65.47$，于是我们需要计算 $T(54)$ 和 $T(72)$，因为 54 和 72 是 18 的倍数中最接近于 65.47 的两个，一个小于它，另一个大于它. 计算结果为(见习题 4) $T(54) = 479.01$ 元/月，而 $T(72) = 478.24$ 元/月. 于是零售商应该订购 $72 = Q^*$ 双这样的鞋子.

(3) 结论　最后，为了达到所需要的目的，零售商应每隔 $t^* = Q^*/a = 72/90 = 0.80$ 月，即每隔 24 天(注意,我们所说的"月"为 30 天)，订购 72 双这样的鞋子.

还有一些其他存储模型我们没有提到. 例如，在各种各样的贸易中，销售者将视购买商品的量而给予减价优惠也是常见的. 此外，我们考虑的两种模型都是确定性的，也就是一个周期内的需求量是已知的. 如果不是这样的话，合适的模型将是随机的(或概率的)，也就是一个周期内的需求量是一个已知分布的随机变量.

§4.3　双层玻璃的功效

北方城镇的有些建筑物的窗户是双层的，即窗户上装两层厚度为 d 的玻璃

http://www.81tech.com

夹着一层厚度为 l 的空气，如下左图所示，据说这样做是为了保暖，即减少室内向室外的热量流失. 我们要建立一个模型来描述热量通过窗户的热传导(即流失)过程，并将双层玻璃窗与用同样多材料做成的单层玻璃窗(如图 4-3-1,玻璃厚度为 $2d$)的热量传导进行对比，对双层玻璃窗能够减少多少热量损失给出定量分析结果.

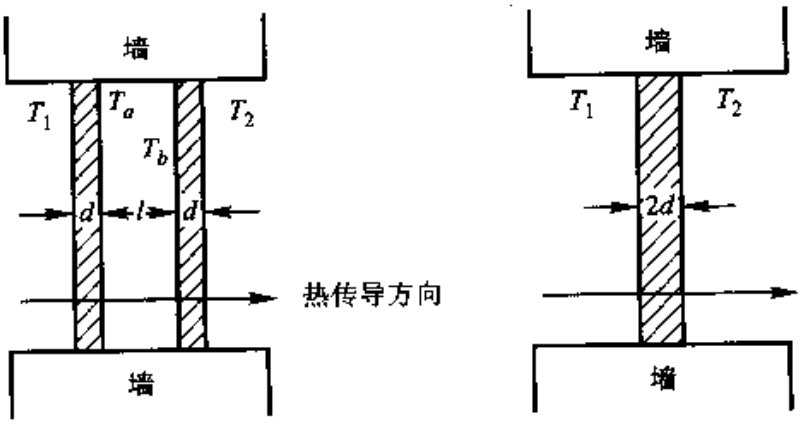


图 4-3-1

一、模型假设与符号说明

假设：

(1) 热量的传播过程只有传导，没有对流. 即假定窗户的密封性能很好，两层玻璃之间的空气是不流动的；

(2) 室内温度 T_1 和室外温度 T_2 保持不变，热传导过程已处于稳定状态，即沿热传导方向，单位时间通过单位面积的热量是常数；

(3) 玻璃材料均匀，热传导系数是常数.

符号说明：

T_1——室内温度

T_2——室外温度

d——单层玻璃厚度

l——两层玻璃之间的空气厚度

T_a——内层玻璃的外侧温度

T_b——外层玻璃的内侧温度

k——热传导系数

Q——热量损失

二、模型建立与求解

由物理学知道，在上述假设下，热传导过程遵从下面的物理规律：

中国国防科技网 http://www.81tech.com

厚度为 d 的均匀介质，两侧温度差为 ΔT，则单位时间由温度高的一侧向温度低的一侧通过单位面积的热量为 Q，与 ΔT 成正比，与 d 成反比，即

$$Q = k\frac{\Delta T}{d} \tag{4.3.1}$$

其中 k 为热传导系数.

1. 双层玻璃的热量流失

记双层窗内窗玻璃的外侧温度为 T_a，外层玻璃的内侧温度为 T_b，玻璃的热传导系数为 k_1，空气的热传导系数为 k_2，由(4.3.1)式单位时间单位面积的热量传导(热量流失)为：

$$Q = k_1\frac{T_1 - T_a}{d} = k_2\frac{T_a - T_b}{l} = k_1\frac{T_b - T_2}{d} \tag{4.3.2}$$

由 $Q = k_1\frac{T_1 - T_a}{d}$ 及 $Q = k_1\frac{T_b - T_2}{d}$ 可得

$$T_a - T_b = (T_1 - T_2) - 2\frac{Qd}{k_1}$$

再代入 $Q = k_2\frac{T_a - T_b}{l}$，将(4.3.2)中 T_a、T_b 消去，变形可得

$$Q = \frac{k_1(T_1 - T_2)}{d(s+2)},\quad s = h\frac{k_1}{k_2},\quad h = \frac{l}{d} \tag{4.3.3}$$

2. 单层玻璃的热量流失

对于厚度为 $2d$ 的单层玻璃窗户，容易写出热量流失为：

$$Q' = k_1\frac{T_1 - T_2}{2d} \tag{4.3.4}$$

3. 单层玻璃窗和双层玻璃窗热量流失比较

由式(4.3.3)、式(4.3.4)得

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{2}{s+2} \tag{4.3.5}$$

显然，$Q < Q'$.

为了获得更具体的结果，我们需要 k_1，k_2 的数据，从有关资料可知，不流通、干燥空气的热传导系数 $k_2 = 2.5\times10^{-4}$(J/cm·s·度)，常用玻璃的热传导系数 $k_1 = 4\times10^{-3}\sim8\times10^{-3}$(J/cm·s·度)，于是

$$\frac{k_1}{k_2} = 16\sim32$$

在分析双层玻璃窗比单层玻璃窗可减少多少热量损失时，我们作最保守的

估计，即取$\frac{k_1}{k_2}=16$，由式(4.3.3)、式(4.3.5)可得：

$$\frac{Q}{Q'}=\frac{1}{8h+1},\quad h=\frac{l}{d} \tag{4.3.6}$$

三、模型的讨论

比值Q/Q'反映了双层玻璃窗在减少热量损失上的功效，它只与$h=l/d$有关，图4-3-2给出了$Q/Q'\sim h$的曲线，当h由0增加时，Q/Q'迅速下降，而当h超过一定值(比如$h>4$)后Q/Q'下降缓慢，可见h不宜选得过大.

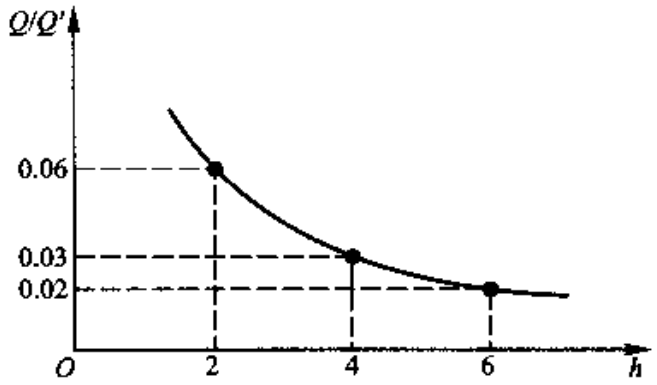


图4-3-2

四、模型的应用

这个模型具有一定的应用价值. 制作双层玻璃窗虽然工艺复杂会增加一些费用，但它减少的热量损失却是相当可观的. 通常，建筑规范要求$h=l/d\approx4$. 按照这个模型，$Q/Q'\approx3\%$，即双层玻璃窗比用同样多的玻璃材料制成的单层窗节约热量97%左右. 不难发现，之所以有如此高的功效主要是由于层间空气的极低的热传导系数k_2，而这要求空气是干燥、不流通的. 作为模型假设的这个条件在实际环境下当然不可能完全满足，所以实际上双层玻璃窗的功效会比上述结果差一些.

§4.4 森林管理

森林中的树木每年要有一批被砍伐出售，为使这片森林不被耗尽而且每年有所收获，每砍伐一棵树，应该就地补种一棵幼苗，使森林树木的总数保持不变. 我们希望找到一个方案，在收获保持稳定的前提下，获得最大的经济

中国国防科技网 http://www.81tech.com

价值.

一、模型假设

我们把森林中的树木按高度分成 n 级，第 k 级的高度在 h_{k-1} 到 h_k 之间（$h_0=0$），其价值为 P_k 元，$k=1,2,\cdots,n$，显然有 $P_1<P_2<\cdots<P_n$. 第一级是幼苗，价值为0，所以 $P_1=0$. 开始时森林中树木高度分布设为：第 k 级的树木数量为 x_k. 假设一年砍伐一次，要使每年维持收获，只能砍伐部分树木，留下的树木与补种的幼苗，其高度状态应与初始状态相同，设 y_k 是每次收获时第 k 级所砍伐的棵数. 设森林中树木总数为 S，则 S 是固定值，有

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=S$$

在一个生长期（即两次收获之间），假设树木至多只能生长一个高度级，那第 k 级中的树木可能进入更高的高度级，也可能因某种原因停留在原来那一级. 并假设每一棵幼苗都可以生长到被收获，不考虑死亡的可能性. 假设在每一个生长期内，第 k 级树木进入第 $k+1$ 级的比例为 g_k，于是留在原级的比例为 $1-g_k$.

二、模型的建立

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，

$$\boldsymbol{G}=\begin{pmatrix}1-g_1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ g_1 & 1-g_2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & g_2 & 1-g_3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & g_{n-1} & 1\end{pmatrix}$$

那么 $\boldsymbol{Gx}$ 表示经过一个生长期后树木高度的分布. 又因 y_k 是第 k 级砍伐的棵数，而每次收获砍伐总数为 $y_1+y_2+\cdots+y_n$；而补种的棵数等于砍伐总数. 这样，得到

$$y_1+y_2+\cdots+y_n=g_1x_1$$

$$y_{k+1}=g_kx_k-g_{k+1}x_{k+1}\quad(k=1,2,\cdots,n-1),\qquad g_n=0$$

因而有

$$g_1x_1\geqslant g_2x_2\geqslant\cdots\geqslant g_{n-1}x_{n-1}\geqslant 0$$

每次砍伐的总收益为

$$P=P_1y_1+P_2y_2+\cdots+P_ny_n=\sum_{k=1}^{n-1}(P_{k+1}-P_k)g_kx_k$$

于是我们得到下列规划问题：

$$\max P = \sum_{k=1}^{n-1} (P_{k+1} - P_k) g_k x_k$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = S \\ g_1 x_1 \geqslant g_2 x_2 \geqslant \cdots \geqslant g_{n-1} x_{n-1} \geqslant 0 \\ x_k \geqslant 0, \quad k = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

这是一个线性规划问题，我们可以用以下方法求解.

设 $x_0 = (x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{n0})^T$ 是满足约束条件的一个向量，即可行解，又设对某个 k，$2 \leqslant k \leqslant n-1$，有

$$g_{k-1} x_{k-1,0} > g_k x_{k,0}$$

考虑一个新的可行解

$$x'_0 = (x_{1,0}, \cdots, x_{k-1,0} - \delta, \cdots, x_{n,0})^T, \quad \delta > 0$$

于是 $g_{k-1}(x_{k-1,0} - \delta) \geqslant g_k(x_{k,0} + \delta)$，故

$$0 < \delta \leqslant (g_{k-1} x_{k-1,0} - g_k x_{k,0}) / (g_{k-1} + g_k)$$

若对应的目标函数值分别记为 P 和 P'，则

$$P' - P = (P_{k+1} - P_k) g_k \delta - (P_k - P_{k-1}) g_{k-1}$$

因而当

$$(P_{k+1} - P_k) g_k > (P_k - P_{k-1}) g_{k-1} \tag{4.4.1}$$

时，可行解 x'_0 优于 x_0. 不等式(4.4.1)表示砍伐第 $k+1$ 级树木的收益大于砍伐第 k 级树木，就是说，在条件(4.4.1)下，不应砍伐 k 级树木，即 $y_k = 0$. 用类似方法可以证明，最优解必定是让所有树木长到某一级然后全部砍伐. 设让所有树木长到第 k 级然后全部砍伐，这时 $y_k > 0$，而当 $i \neq k$，$y_i = 0$ 且当 $i \geqslant k$ 时，$x_i = 0$. 容易得到，这时总收益为

$$\frac{P_k S}{\left(\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} + \cdots + \frac{1}{g_{k-1}}\right)}$$

由此容易得到最优方案：$x_i = 0$，$i \neq k$，$x_k = S$.

§4.5 分派问题

设有 n 项任务要分给 n 个人去完成，每人完成一项. 由于每个人的专长不同，完成不同任务所需的成本也不同. 若第 i 个人完成第 j 项任务的成本为 c_{ij}，问题是：如何分配这些工作任务，使总成本为最小？

这类问题称为分派问题，矩阵 $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$ 称为成本矩阵. 引入变量 x_{ij}，其中

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当指派第 } i \text{ 人做第 } j \text{ 项工作} \\ 0, & \text{不指派第 } i \text{ 人做第 } j \text{ 项工作} \end{cases}$$

中国国防科技网 http://www.81tech.com

于是问题的数学模型是

$$\min Z = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1, & j=1,2,\cdots,n\\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1, & i=1,2,\cdots,n\\ x_{ij}=0 \text{ 或 } 1\end{cases}$$

求出 x_{ij}，问题即得解决.

可以看出，指派问题是一个整数线性规划问题. 匈牙利方法(见[2])可用于这种分派问题的求解，下面举一例来说明这种方法.

例　给出下列成本矩阵

$$C=\begin{pmatrix}12 & 7 & 9 & 7 & 9\\ 8 & 9 & 6 & 6 & 6\\ 7 & 17 & 12 & 14 & 9\\ 15 & 14 & 6 & 6 & 10\\ 4 & 10 & 7 & 10 & 9\end{pmatrix}$$

求指派问题的解.

解　首先每行减去其最小成本(即每行中的最小数)，得调整后的矩阵

$$\begin{pmatrix}5 & (0) & 2 & 0 & 2\\ 2 & 3 & (0) & 0 & 0\\ (0) & 10 & 5 & 7 & 2\\ 9 & 8 & 0 & (0) & 4\\ (0) & 6 & 3 & 6 & 5\end{pmatrix}$$

只有最后一行的 0 与第三行的 0 重合在第一列，因此把第 3、第 5 行减这两行的最小数 2，第 1 列加上这两行的最小数 2，并且进行调整，得到新矩阵

$$\begin{pmatrix}7 & (0) & 2 & 0 & 2\\ 4 & 3 & (0) & 0 & 0\\ 0 & 8 & 3 & 5 & (0)\\ 11 & 8 & 0 & (0) & 4\\ (0) & 4 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$$

这就得到问题的解，即

$$x_{12}=1,\ x_{23}=1,\ x_{35}=1,\ x_{44}=1,\ x_{51}=1$$

其余的 $x_{ij}=0$.

以上过程即为匈牙利方法.



1. 应用微分学证明对于正实数 a、k、c、h 和 Q，$Q^* = \sqrt{2ak/L}$ 是函数 $T(Q) = ak/Q + ac + hQ/2$ 的(局部)最小值.

2. 画出函数 $T = T(Q) = 1\,800/Q + 423 + 0.42Q$ 的图形，可以看到，在 $Q = 65.47$ 附近，它确实达到极小值. 考虑到此，你是否认为必须或值得通过练习 1 去找到极小的 $Q^* = 65.47$？试评述在确定如本练习中考虑的函数的极值时，图形方法相对于微分技术的优越性.

3. 描出存储量 Q 对时间的图形，注意到我们的假设，商品以每单位时间 a 件的固定速率连续销售，存货范围为从 0 到 Q 件，并且商品短缺是不容许的.

4. 设 Q 如练习 1 中所示，计算 $T(54)$ 和 $T(72)$.

5. 第 2 节中证明了最优周期长度为 $t^* = Q^*/a = \sqrt{2k/ah}$. 设 $Q^* = 72$，$a = 90$，$k = 20$ 以及 $h = 0.84$. 计算 $\sqrt{2k/ah}$，并注意到这个数值并不等于数值例子中所得到的 t^* 之值 0.80，对这两个数间的差别作出解释；在我们的计算和分析中有没有什么错误？

6. 四个人需完成 A，B，C，D 四项工作，由于个人的技术专长不同，他们完成四项工作任务所获得的收益如下表所示. 若规定每人只能做一项工作，每一项工作只能一个人做，试求所获得的总收益最大的分派方案.

工作 / 人员编号	A	B	C	D
1	19	10	16	20
2	14	12	9	16
3	12	15	11	13
4	18	10	14	17

7. 某公司要从以下 10 个可供选择的位置中确定 5 个零售点，使总利润最大，设 10 个可供选择的位置的代号为 $s_1, s_2, \cdots, s_{10}$，相应的利润依次为 $L_1, L_2, \cdots, L_{10}$，并且零售点选择的位置要求满足下列条件：

(1) 或选择 s_1 和 s_2 或选择 s_7；

(2) s_3、s_5 只能选择一个，或 s_4、s_5 只能选择一个；

(3) s_5，s_6，s_7，s_8 最多只能选择两个.

试建立该问题的整数规划模型.

8. 六个人需完成 A，B，C，D 四项工作，由于个人的技术专长不同，他们完成四项工作任务所获得的收益如下表所示. 若规定每人只能做一项工作，每一项工作只能一个人做，试求所获得的总收益最大的分派方案.

中国国防科技网 http://www.81tech.com

工作 / 人员编号	A	B	C	D
1	3	5	4	5
2	6	7	6	8
3	8	9	8	10
4	10	10	9	11
5	12	11	10	12
6	13	12	11	13

参考文献

[1] 洪毅，贺德化，昌志华. 经济数学模型. 广州：华南理工大学出版社，1999

[2] 钱颂迪，甘应爱等. 运筹学. 北京：清华大学出版社，1990

[3] 姜启源. 数学模型. 北京：高等教育出版社，1993

[4] William F. Lucas. Modules in Applied Mathematics. 中译本(第三卷). 沙基昌，余滨等译. 长沙：国防科技大学出版社，1996

第5章 数学建模的统计分析方法

§5.1 主成分分析法

主成分分析法或因子分析法是统计分析中一种重要的方法，它的主要特点在于能探究观测不了或难以观测的问题. 这里详细地介绍它的基本思路，我们通过一个例子来详细说明算法和结果的分析.

一、实例

例(企业的经济效益分析) 某市对下属10个企业作经济效益分析，根据经济统计原理，用取得的生产成果与各项成本的消耗作对比，来衡量每个企业的经济效益，也就是用下述五个指标来对每个企业进行分析.

Z_1——固定资产的产值率

Z_2——净产值劳动生产率

Z_3——万元产值的流动资金占用率

Z_4——万元产值利润率

Z_5——万元资金的利润率

现将各企业的这些指标数据列在表5-1-1中.

表5-1-1

企业名	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5
1	2 650.7	18 521	6.61	36.75	155.58
2	2 600.3	11 215	8.93	15.62	62.90
3	2 311.2	16 358	11.12	32.27	85.21
4	4 223.2	16 760	8.27	26.16	109.32
5	3 650.6	9 826	7.36	19.32	102.13
6	3 129.9	12 216	8.41	20.03	76.29

中国国防科技网 http://www.81tech.com

续表

企业名	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5
7	6 028.4	14 395	3.23	27.37	250.37
8	5 825.6	12 650	2.96	14.15	118.28
9	5 433.7	12 091	4.12	13.86	95.56
10	4 092.8	8 392	6.03	14.76	75.35

表 5－1－1 中共有 $10\times5=50$ 个数据，每个指标 Z_i 的平均值与方差按下述公式计算

$$\bar{x}_i=\frac{1}{10}\sum_{j=1}^{10}x_{ij},\qquad i=1,2,3,4,5$$

$$s_i^2=\frac{1}{10-1}\sum_{j=1}^{10}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2,\qquad i=1,2,3,4,5$$

本例中：$\bar{x}_1=3\ 994.64$，$\bar{x}_2=14\ 242.4$，$\bar{x}_3=6.704$，$\bar{x}_4=22.09$，$\bar{x}_5=113.1$

$s_1=1\ 377.27$，$s_2=4\ 788.45$，$s_3=2.655\ 7$，$s_4=8.173\ 6$，$s_5=54.97$

s_i 为标准差，如果把 Z_i 作为随机变量，则常用 $\bar{x}_i$，s_i^2 分别表示 Z_i 的数学期望与方差的近似值.

为了更全面地分析与评价某个企业的经济运营状况，人们提出了上述 5 个指标，但又发现这些指标之间也有一定的相关关系，它们反映企业经济效益的信息有一定的重复. 如果能从五个变量中找出几个更主要的变量，建立少数几个综合性指标而又不致损失有用的信息，那么，对企业的经济效益分析或评价将仍然是有成效的，而获取指标的工作量也减少了. 这就是需进行主成分分析的实际理由.

二、主成分分析的计算步骤

1. 数据标准化变换

为了讨论方便，我们将表 5－1－1 的数据用一个矩阵来表示

$$\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,X_3,X_4,X_5)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&\cdots&x_{1,10}\\x_{21}&x_{22}&\cdots&x_{2,10}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_{51}&x_{52}&\cdots&x_{5,10}\end{pmatrix}_{5\times10}$$

$x_{ij}(i=1,2,\cdots,5,j=1,\cdots,10)$ 的下标 i 代表指标编号，j 代表企业编号.

将 X 通过以下的标准化变换化为矩阵 Z 的过程，称为标准化变换.

$$Z_{ij}=\frac{x_{ij}-\bar{x}_i}{s_i},\quad i=1,2,\cdots,5,j=1,2,\cdots,10;$$

$$\boldsymbol{Z}=(Z_{ij})_{5\times 10}$$

2. 求相关矩阵

现引进相关矩阵

$$\boldsymbol{R}=(r_{ik})_{5\times 5},$$

$$r_{ik}=\frac{\frac{1}{10-1}\sum_{j=1}^{10}(x_{ij}-\bar{x}_i)(x_{kj}-\bar{x}_k)}{s_i s_k},\quad i=1,2,\cdots,5,\quad k=1,2,\cdots,10$$

可见，$\boldsymbol{R}=\frac{1}{9}\boldsymbol{ZZ}'$，$\boldsymbol{R}$ 显然是对称矩阵且主对角上的元素都是 1.

按照以上公式利用 Mathematica 软件计算出相关矩阵为

$$\boldsymbol{R}=\frac{1}{9}\boldsymbol{ZZ}'=\begin{bmatrix}1 & 0.216 & -0.895 & -0.4 & 0.52\\ 0.216 & 1 & -0.175 & 0.730 & 0.858\\ -0.895 & -0.175 & 1 & 0.347 & -0.56\\ -0.4 & 0.73 & 0.347 & 1 & 0.46\\ 0.52 & 0.858 & -0.56 & 0.46 & 1\end{bmatrix}$$

3. 求相关矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的特征值与特征向量

可使用软件，也可以使用迭代法求 $\boldsymbol{R}$ 的特征值和特征向量. 用迭代法的步骤如下：

（1）求 $\boldsymbol{R}$ 的各列元素之和，记为

$$\sigma_i=\sum_{j=1}^{5}r_{ij},\quad i=1,2,\cdots,5$$

（2）$\sigma=\max\{\sigma_i\}$，构造向量

$$\boldsymbol{U}_1'=\frac{1}{\sigma}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_5)$$

作为迭代法的初始向量.

（3）计算 $\boldsymbol{RU}_1$，其各分量（取转置）记为 $(b_1,b_2,\cdots,b_5)$，取 $b=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 5}\{b_i\}$，作向量 $\boldsymbol{U}_2'=\frac{1}{b}(b_1,b_2,\cdots,b_5)$.

（4）按（3）作法反复迭代，则 $\boldsymbol{U}_n\to\boldsymbol{U}$，$\boldsymbol{RU}$ 中各元素的最大值即趋向于第一特征值 λ_1，$\boldsymbol{U}$ 即是第一特征向量.

（5）求主成分. 对 $\boldsymbol{U}$ 作正则变换，即得 λ_1 对应的单位特征向量 $\boldsymbol{V}_1$，$\boldsymbol{V}_1=\frac{\boldsymbol{U}}{|\boldsymbol{U}|}$，则 V_1 的各分量分别代表 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_5$ 的第一主成分，λ_1 刻画了第一主成分的贡献率 τ_1，

中国国防科技网 http://www.81tech.com

$$\tau_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_5} = \frac{\lambda_1}{5},$$

这里，$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_5 = \mathrm{tr}\boldsymbol{R} = 5$. 实际上，$\lambda_1$ 是第一主成分的方差.

求第二主成分：用相关矩阵 $\boldsymbol{R}$ 与 λ_1，V_1 计算矩阵 $\boldsymbol{A}$：

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R} - \lambda_1 V_1 V_1' \tag{5.1.1}$$

则 $\boldsymbol{A}$ 仍是 5 阶对称矩阵，对 $\boldsymbol{A}$ 仍按照前面(1)～(5)的步骤，求得 λ_2，V_2，即得相应的第二主成分与贡献率$\frac{\lambda_2}{5} = \tau_2$.

$$F_1 = 0.445Z_1 + 0.48Z_2 - 0.45Z_3 + 0.17Z_4 + 0.58Z_5$$

$$F_2 = 0.45Z_1 - 0.40Z_2 - 0.436Z_3 - 0.65Z_4 - 0.16Z_5$$

$$F_1 = (Z_1, Z_2, \cdots, Z_5)V_1$$

称为第一主成分(或第一因子).

$$F_2 = (Z_1, Z_2, \cdots, Z_5)V_2$$

称为第二主成分(或第二因子).

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{5} = \tau_1 + \tau_2 \geqslant 85\%$$

即可认为 L_1，L_2 已是企业的经济效益问题的主成分，否则继续按(5.1.1)式，用 $\boldsymbol{A}$ 替代 $\boldsymbol{R}$，V_2，λ_2 替代 V_1，λ_1，求得 V_3，λ_3，即第三主成分与贡献率.

一般，绝大多数情况下，前三个主成分的累积方差贡献率可以超过 85%. 实际中，将 85% 作为方差累积贡献率的下限.

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{\sum \lambda_i} \geqslant 85\% \tag{5.1.2}$$

亦表示了用前三个主成分说明问题时，信息的可靠程度超过了 85%，在实际中是可以接受的.

本例的前两个特征值及特征向量各为 $\lambda_1 = 2.667$，$\lambda_2 = 2.074$，方差贡献率≈95%，

$$V_1 = (0.445, 0.48, -0.45, 0.17, 0.58)$$

$$V_2 = (0.45, -0.40, -0.436, -0.65, -0.16)$$

是综合性指标，它们综合了原有五个指标的信息，而不是简单丢掉某些指标的信息.

三、主成分的作用与意义分析

求出主成分后，对企业的经济效益作分析评定时，不必用原来五个指标单独地衡量，而是综合这五个指标来分析判别.

1. 第一主成分 F_1 的意义

由前面的结果可知，第 j 个企业的第一主成分值为

$$F_{1j}=0.445Z_{1j}+0.48Z_{2j}-0.45Z_{3j}+0.17Z_{4j}+0.58Z_{5j}$$

各企业的 F_1 主成分值如下表：

表 5-1-2

0.77	-1.8	-1.16	0.105	-0.84
-1.205	3.83	0.96	0.33	-0.993 1

F_1 有何意义呢？在 F_1 的表达式中，只有第三个指标 Z_3（万元产值流动资金占用率）的系数为负值（-0.45），而 Z_5 的系数最大，Z_5 与 Z_3 是刻画企业经营水平高低的. 当 Z_3 取值较小，Z_5 取值较大时，F_1 就较大. 于是 F_1 在此突出地反映了一个企业经营水平的高低. 由上面的计算结果可见，企业 7 的经营水平最高，企业 2 的经营水平最低. 而企业 2 的 F_1 值小并不单是由 Z_3 造成的，在 F_1 的 5 个系数中 Z_5 的系数最大. 而企业 2 的 $Z_{52}=-0.912\,7$，比其他企业小，企业 7 的 $Z_{72}=2.495$，这比其他企业大，这两项就决定了企业 7 的龙头与企业 2 的龙尾位置. 以上分析，可见 F_1 意义凸显了企业的经营水平.

2. 第二主成分 F_2 的意义

$$F_{2j}=0.45Z_{1j}-0.40Z_{2j}-0.436Z_{3j}-0.65Z_{4j}-0.16Z_{5j}$$

各企业的 F_2 值如下表：

表 5-1-3

-2.07	0.092 7	-2.180 3	-0.707 7	0.404 7
-0.122 3	-0.434 0	1.960 2	1.777	1.325 7

F_2 除了第一系数为正之外，其他均为负值，其中 Z_4 系数绝对值最大. Z_1 的意义是投资水平，Z_4 的意义是销售水平. 如果投资大，销售水平低，自然 F_2 的值会增大. 所以 F_2 的值较小时，反映企业的投资与收益比值较小. 由此看来，企业 8，9，10 的 F_2 值趋大，应属于不景气范围. 企业 7 的投资虽最大，但盈利水平居高，因此 F_2 值较小. 企业 1，3 的 F_2 值最小，反映这两个企业投资额与销售额之比最小，因此是经济效益好的企业. 由于 $\frac{(\lambda_1+\lambda_2)}{5}\approx 95\%$，上述分析应该有 90% 以上的可信度.

不仅如此，就是对分类的定性变量的统计分析，主成分分析的思想仍然是起作用的. 因此，了解并掌握主成分分析的技巧，对数学建模、科学研究的探索是必要的.

§5.2 判别分析法

在实际生活中，存在着大量需要我们准确分类的问题. 例如，一个医生要对病人病情进行分析，以便判断到底应该用何种手段治疗，例如非典型肺炎与典型肺炎治疗的方法就不同. 经济管理人员要对产品进行分类，判别它的销售情形是属于“畅销”还是滞销. 植物学家要对一类植物进行分析，昆虫学家对一种蠓虫的分类判别研究，地质学家要对某一地层出现的岩芯进行判别分类. 总之，这一类问题，往往需要较客观、准确、科学地进行分类分析，经常用到的统计学手段就是判别分析法. 下面我们给出判别分析的定义.

一、判别问题

判别问题用统计学的语言表述，即：设有一个总体 $Z=\{x \mid x \in \mathbf{R}^m\}$，其中包含了若干个子类，$P_1, P_2, \cdots, P_n$；每个子类在总体中占有的比例为 $p_1, p_2, \cdots, p_n$，$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

又假如，每个子类本身有概率分布(或密度) $\varphi_i(x)$，$i=1, \cdots, n$，x 为 m 维变量. 对总体 Z 中取出的一个样本 x，我们要判别它来自哪一个子类，这样的问题在统计分析学上称为判别问题.

要判断样本 x 到底来自哪个子类，当然不能凭空臆断. 我们需要一个客观的科学的规则，称之为判别法则. 定义如下：

定义 5.1 将 m 维欧氏空间 $\mathbf{R}^m$ 划分为 n 个互不相交的区域，$\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_n$，使当 $i \neq j$ 时，$\Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing$，$\cup \Omega_i = \mathbf{R}^m$. 对给定的 $x \in \mathbf{R}^m$，当 $x \in \Omega_i$ 时，就判定 x 属于子类 P_i，$i=1,2,\cdots,n$，我们称该划分为一个判别法则.

由上述定义知，要解决一个判别问题，就是要考虑如何确定一个“判别法则”. 确定判别法则的过程就叫判别分析. 我们将判别分析分为两组判别分析和多组判别分析，两组判别分析就是将要判别的对象分为两组，例如，判别一个地区的消费者对某种产品的反映是“喜欢”还是“不喜欢”，判别一种产品在某地区是处于“饱和”状态还是“有需求”. 多组判别分析则是将要判别的对象分为三组或更多组，例如某种产品的市场潜力可分为：“大”、“一般”、“没有”三种. 判别分析的方法很多，本节只涉及费歇尔(Fisher R A)判别方法，且重点放在两组判别问题上.

二、两组判别分析的基本思想

为了说明两组判别的基本思想，我们先举一个市场预测的例子，设某种产

http://www.81tech.com

品的市场情况有“畅销”和“滞销”两种，我们要预测一个时期该产品为“畅销”还是“滞销”. 根据过去的销售情况可知，该产品销路好坏与价格有关，也和市民的收入有关. 因此可以用产品的价格和市民的收入这两个量去预测该产品的销路好坏. 以 x_1 代表产品的价格，以 x_2 代表市民的收入. 现假定调查了 n 个时期，得到 n 组数据. 这 n 组数据反映出有畅销的也有滞销的，不妨设有 r 组畅销，l 组滞销($l=n-r$)，则可将 n 组数据分组如下：

$$\text{畅销组}\begin{cases}(x_{11}^0,\ x_{12}^0)\\(x_{21}^0,\ x_{22}^0)\\\vdots\\(x_{r1}^0,\ x_{r2}^0)\end{cases}\qquad \text{滞销组}\begin{cases}(x_{11}^1,\ x_{12}^1)\\(x_{21}^1,\ x_{22}^1)\\\vdots\\(x_{l1}^1,\ x_{l2}^1)\end{cases}$$

将这 n 组数据，标在 x_1-x_2 平面上，以“$*$”代表畅销组数据对应的点，“Δ”代表滞销组数据对应的点，若能得到如图 5-2-1 所示的点聚图，即产品畅销时期的数据和滞销时期的数据有较为明显的区别，如图中，畅销时期的数据都集中在上方，滞销时期的数据都集中在下方，我们就可以根据这种趋势，从直观上作出某些判别. 例如，若某个预测时期的数据对应的点为“$*$”（见图 5-2-1），则我们应判断这一时期为畅销期；若对应的点为“Δ”（见图 5-2-1），则应判断其为滞销期. 因此，在预测时，重要的问题是要找出分界线 l，其方程为

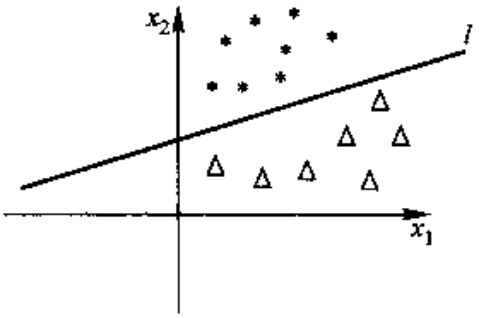


图 5-2-1

$$c_0+c_1x_1+c_2x_2=0$$

使得当某个时期的数据(x_1,x_2)已知时，代入上式左端，若有

$$c_0+c_1x_1+c_2x_2>0,\ \text{即}\ c_1x_1+c_2x_2>-c_0$$

也就是(x_1,x_2)在分界线 l 的上方，则预测这时期为畅销期，若有

$$c_0+c_1x_1+c_2x_2<0,\ \text{即}\ c_1x_1+c_2x_2<-c_0$$

也就是(x_1,x_2)在分界线 l 的下方，则预测这个时期为滞销期.

这种预测方法就是判别分析法. 在利用这种方法时，必须要求畅销期的数据和滞销期的数据之间有一条较明显的分界线，对这一点，我们后面将进一步阐述. 该种方法的理论依据要涉及较高深的数理统计知识，这里从略.

我们令

$$y=c_1x_1+c_2x_2$$

称此函数为线性判别函数，称

中国国防科技网 http://www.81tech.com

$$y_0 = -c_0$$

为临界值.

进行判别分析，就是要求在某种最优准则下，确定线性判别函数的系数 c_1，c_2 以及临界值 c_0，下面将介绍这些值的求法.

三、Fisher 判别准则和判别函数

假设预测因子有 p 个指标，即 $x_1, x_2, \cdots, x_p$，有 n 组观察或调查得到的数据. 判别分析就是要根据这些数据，在适当的判别准则下，确定判别函数：

$$y = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_p x_p$$

并找出临界值 y_0. 下面介绍 Fisher R A 等人在 1936 年提出的最优判别准则以及判别函数的求解法.

我们先将要判别的两组分别记为 A 和 B(如 A 代表畅销，B 代表滞销). 对于 p 个判别指标. 不妨设组 A 有 s 组数据，组 B 有 t 组数据，$n = s + t$，现将数据分组如下：

$$\text{组 } A \text{ 的数据}\begin{cases}(x_{11}^0, x_{12}^0, \cdots, x_{1p}^0)\\(x_{21}^0, x_{22}^0, \cdots, x_{2p}^0)\\\vdots\\(x_{s1}^0, x_{s2}^0, \cdots, x_{sp}^0)\end{cases};\qquad \text{组 } B \text{ 的数据}\begin{cases}(x_{11}^1, x_{12}^1, \cdots, x_{1p}^1)\\(x_{21}^1, x_{22}^1, \cdots, x_{2p}^1)\\\vdots\\(x_{t1}^1, x_{t2}^1, \cdots, x_{tp}^1)\end{cases}$$

下面再反过来思考整个问题，假定用

$$y = l_1 x_1 + l_2 x_2 + \cdots + l_p x_p$$

作为判别函数(其中 $l_1, l_2, \cdots, l_p$ 是实数)，则组 A 的数值对应的判别值为

$$\begin{cases}y_1^0 = l_1 x_{11}^0 + l_2 x_{12}^0 + \cdots + l_p x_{1p}^0\\y_2^0 = l_1 x_{21}^0 + l_2 x_{22}^0 + \cdots + l_p x_{2p}^0\\\cdots\cdots\cdots\\y_s^0 = l_1 x_{s1}^0 + l_2 x_{s2}^0 + \cdots + l_p x_{sp}^0\end{cases}$$

组 B 的数值对应的判别值为

$$\begin{cases}y_1^1 = l_1 x_{11}^1 + l_2 x_{12}^1 + \cdots + l_p x_{1p}^1\\y_2^1 = l_1 x_{21}^1 + l_2 x_{22}^1 + \cdots + l_p x_{2p}^1\\\cdots\cdots\cdots\\y_t^1 = l_1 x_{t1}^1 + l_2 x_{t2}^1 + \cdots + l_p x_{tp}^1\end{cases}$$

又作 $$\bar{y}^0 = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s} y_i^0,\quad \bar{y}^1 = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} y_i^1$$

即 $\bar{y}^0$ 为组 A 的判别值的代表，$\bar{y}^1$ 为组 B 的判别值的代表.

我们通过判别值 y 来进行判别，为使组 A 同组 B 之间有明显的区别，自然希望它们的代表值之间的差距越大越好，即

(1) $(\bar{y}^0-\bar{y}^1)^2$ 越大越好；

又 $y_1^0,y_2^0,\cdots,y_s^0$ 同属于组 A，$y_1^1,y_2^1,\cdots,y_t^1$ 同属于组 B. 我们希望它们与其代表之间的差距(即离差平方和)越小越好，即

(2) $\sum_{i=1}^{s}(y_i^0-\bar{y}^0)^2+\sum_{i=1}^{t}(y_i^1-\bar{y}^1)^2$ 越小越好.

上述(1)，(2)就是 Fisher R A 提出的最优判别准则.

综合(1)，(2)，Fisher 最优判别准则为函数

$$L(l_1,l_2,\cdots,l_p)=\frac{(y_i^0-\bar{y}^0)^2}{\sum_{i=1}^{s}(y_i^0-\bar{y}^0)^2+\sum_{i=1}^{t}(y_i^1-\bar{y}^1)^2}$$

越大越好. 从而最优判别函数的系数 $c_1,c_2,\cdots,c_p$ 为函数 $L(l_1,l_2,\cdots,l_p)$ 的极大值点，由微分学可知，$c_1,c_2,\cdots,c_p$ 为方程组

$$\frac{\partial L(l_1,l_2,\cdots,l_p)}{\partial l_j}=0,\quad j=1,2,\cdots,p$$

的解.

四、计算步骤

由于数学演算比较繁琐，我们不做详细推导，而直接介绍结果和计算步骤.

(1) 先将原始数据写成矩阵形式. 组 A 的数据矩阵：

$$\boldsymbol{W}^0=\begin{bmatrix}x_{11}^0 & x_{12}^0 & \cdots & x_{1p}^0\\ x_{21}^0 & x_{22}^0 & \cdots & x_{2p}^0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_{s1}^0 & x_{s2}^0 & \cdots & x_{sp}^0\end{bmatrix}$$

组 B 的数据矩阵：

$$\boldsymbol{W}^1=\begin{bmatrix}x_{11}^1 & x_{12}^1 & \cdots & x_{1p}^1\\ x_{21}^1 & x_{22}^1 & \cdots & x_{2p}^1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_{t1}^1 & x_{t2}^1 & \cdots & x_{tp}^1\end{bmatrix}$$

矩阵 $\boldsymbol{W}^0$ 与矩阵 $\boldsymbol{W}^1$ 的列平均数分别为 $(\bar{x}_1^0,\bar{x}_2^0,\cdots,\bar{x}_p^0)$，$(\bar{x}_1^1,\bar{x}_2^1,\cdots,\bar{x}_p^1)$

(2) 算出各组数据的代表，即平均值

中国国防科技网 http://www.81tech.com

$$\bar{x}_j^0 = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s} x_{ij}^0,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ p$$

$$\bar{x}_j^1 = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} x_{ij}^1,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ p$$

（3）作新的矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 及两组的离差矩阵 $\boldsymbol{S}_1$，$\boldsymbol{S}_2$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} x_{11}^0 - \bar{x}_1^0 & x_{12}^0 - \bar{x}_2^0 & \cdots & x_{1p}^0 - \bar{x}_p^0 \\ x_{21}^0 - \bar{x}_1^0 & x_{22}^0 - \bar{x}_2^0 & \cdots & x_{2p}^0 - \bar{x}_p^0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{s1}^0 - \bar{x}_1^0 & x_{s2}^0 - \bar{x}_2^0 & \cdots & x_{sp}^0 - \bar{x}_p^0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} x_{11}^1 - \bar{x}_1^1 & x_{12}^1 - \bar{x}_2^1 & \cdots & x_{1p}^1 - \bar{x}_p^1 \\ x_{21}^1 - \bar{x}_1^1 & x_{22}^1 - \bar{x}_2^1 & \cdots & x_{2p}^1 - \bar{x}_p^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{t1}^1 - \bar{x}_1^1 & x_{t2}^1 - \bar{x}_2^1 & \cdots & x_{tp}^1 - \bar{x}_p^1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{S}_1 = \boldsymbol{A}'\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{S}_2 = \boldsymbol{B}'\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$$

（4）可以证明，最优判别函数 c_1，c_2，$\cdots$，c_p 为下述方程组的解

$$S\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1^0 - \bar{x}_1^1 \\ \bar{x}_2^0 - \bar{x}_2^1 \\ \vdots \\ \bar{x}_p^0 - \bar{x}_p^1 \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix} = S^{-1}\begin{pmatrix} \bar{x}_1^0 - \bar{x}_1^1 \\ \bar{x}_2^0 - \bar{x}_2^1 \\ \vdots \\ \bar{x}_p^0 - \bar{x}_p^1 \end{pmatrix}$$

（5）写出判别函数

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_px_p$$

（6）算出组 A、组 B 的代表（平均值）的判别值：

$$\bar{y}_A = c_1\bar{x}_1^0 + c_2\bar{x}_2^0 + \cdots + c_p\bar{x}_p^0$$

$$\bar{y}_B = c_1\bar{x}_1^1 + c_2\bar{x}_2^1 + \cdots + c_p\bar{x}_p^1$$

则临界值即为

$$y_0 = \frac{s\bar{y}_A + t\bar{y}_B}{s+t}$$

(7) 作判别. 有一待判别的对象，若其数据为$(x_{01}, x_{02}, \cdots, x_{0p})$，则其判别值为

$$y = c_1 x_{01} + c_2 x_{02} + \cdots + c_p x_{0p}$$

分下面两种情况：

① $\bar{y}_A > y_0$ 时，若判别该对象属于组 A，若 $y < y_0$，则判别该对象属于组 B.

② $\bar{y}_B > y_0$ 时，若判别该对象属于组 B，若 $y < y_0$，则判别该对象属于组 A.

五、判别函数的检验

前已述及，在进行两组判别时，首先要求来自两组中的原始数据必须有明显的区别，或者说从统计意义上讲，两组应该有明显的不同，否则我们所作的判别就没有意义，为此需进行统计检验.

直接检验两组在统计意义上是否有明显区别是有一定困难的，通常转化为检验最优判别函数是否有效. 步骤如下：

(1) 计算统计量

$$F = \left[\frac{s \cdot t}{s+t} \cdot \frac{s+t-p-1}{p}\right] \cdot |\bar{y}_A - \bar{y}_B|$$

(2) 对给定的显著性水平 α，从 F 分布表中查出

$$F_\alpha(p, s+t-p-1)$$

(3) 检验结果：若 $F \geqslant F_\alpha(p, s+t-p-1)$，说明所作出的判别函数有效，从而可以用来作判别；若 $F < F_\alpha(p, s+t-p-1)$，说明所作的判别函数无效，不能用来作判别分析.

六、应用举例

本节用一个预测实例，进一步说明判别分析的全过程.

例 设某外贸公司生产一种新产品，在未正式上市前，将样品寄往 12 个国家的进口代理商，并附意见调查表，要求对该产品进行评估. 评估的内容有式样、包装、耐久性三个方面. 评估的结果采用 10 分制记分. 评估后并被要求说明是否愿意购买，调查结果列入表 5-2-1 中，表中的分数，高者表示代理商认为其特性良好，否则即较差.

今有第 13 个国家的进口代理商对该产品的评分分别是：式样 9 分，包装 5 分，耐久性 4 分，要预测该国是否愿意购买该批产品.

中国国防科技网 http://www.81tech.com

表 5-2-1

编号		式样 X_1	包装 X_2	耐久性 X_3	编号		式样 X_1	包装 X_2	耐久性 X_3
购买者	1	9	8	7	非购买者	8	8	4	4
	2	7	6	6		9	3	6	6
	3	10	7	8		10	6	3	3
	4	8	4	5		11	6	4	5
	5	9	9	3		12	8	2	2
	6	8	6	7					
	7	7	5	6					

我们用 Fisher 判别函数解答上述问题：

（1）计算两组的平均值

购买者平均得分为：(8.29,6.43,6.00)；

非购买者平均得分为：(6.20,3.80,4.00).

（2）计算两组资料的离差矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 0.71 & 1.57 & 1 \\ -1.29 & -0.43 & 0 \\ 1.71 & 0.57 & 2 \\ -0.29 & -2.43 & -1 \\ 0.71 & 2.57 & -3 \\ -0.29 & -0.43 & 1 \\ -1.29 & -1.43 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 1.8 & 0.2 & 0 \\ -3.2 & 2.2 & 2 \\ -0.2 & -0.8 & -1 \\ -0.2 & 0.2 & 1 \\ 1.8 & -1.8 & -2 \end{pmatrix}$$

两组的离差矩阵分别为

$$S_1=A'A=\begin{pmatrix} 7.43 & 7.14 & 2 \\ 7.14 & 17.71 & -3 \\ 2 & -3 & 16 \end{pmatrix}$$

$$S_2=B'B=\begin{pmatrix} 16.8 & -9.8 & -10 \\ -9.8 & 8.8 & 9 \\ -10 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$S = S_1 + S_2 = \begin{pmatrix} 24.23 & -2.66 & -8 \\ -2.66 & 26.51 & 6 \\ -8 & 6 & 26 \end{pmatrix}$$

（3）解线性方程组

$$S\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1^0 - \bar{x}_1^1 \\ \bar{x}_2^0 - \bar{x}_2^1 \\ \bar{x}_3^0 - \bar{x}_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.29 - 6.20 \\ 6.43 - 3.80 \\ 6.00 - 4.00 \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{cases} 24.03c_1 - 2.66c_2 - 8c_3 = 2.09 \\ -2.66c_1 + 26.51c_2 + 6c_3 = 2.63 \\ -8c_1 + 6c_2 + 26c_3 = 2 \end{cases}$$

得判别系数

$$c_1 = 0.128,\ c_2 = 0.090,\ c_3 = 0.095$$

（4）根据计算结果，得判别函数为

$$y = 0.128x_1 + 0.090x_2 + 0.095x_3$$

（5）求出判别临界值

购买组的平均值对应的判别值

$$\begin{aligned} y_A &= 0.128 \times 8.29 + 0.090 \times 6.43 + 0.095 \times 6.00 \\ &= 2.210 \end{aligned}$$

非购买组的平均值对应的判别值为

$$\begin{aligned} y_B &= 0.128 \times 6.20 + 0.090 \times 3.80 + 0.095 \times 4.00 \\ &= 1.516 \end{aligned}$$

从而临界值为

$$y_0 = \frac{2.210 \times 7 + 1.516 \times 5}{7 + 5} = 1.921$$

（6）作判别预测

按判别规则，由于 $\bar{y}_A > y_0$，故凡判别值大于 y_0（即 1.921）者，即判别其属于购买组. 今第 13 个国家的判别值为

$$y = 0.128 \times 9 + 0.090 \times 5 + 0.095 \times 4 = 1.982$$

因 $1.982 > 1.921$，故可预测该国属购买者范围.

（7）检验判别函数的有效性（或准确性）

计算统计量

$$F = \frac{7 \times 5}{7 + 5} \times \frac{7 + 5 - 3 - 1}{3} \times |2.210 - 1.516| = 5.398$$

因为 $p = 3$，$s + t - p - 1 = 8$，故对显著性水平 $\alpha = 0.05$，查表得 $F_{0.05}(3,8) =$

中国国防科技网 http://www.81tech.com

4.07，由于 $F>4.07$，说明判别函数有效，故我们所作的预测是合理的.

但要说明一点，即使我们所作的判别函数有效，我们作判别时也会出现错误. 利用判别函数对原先 12 个国家做判别，结果如下表所示：

表 5-2-2

编　号	实际组别	判别值	判别类型	正确性
1	购买组	2.537	购买组	正确
2		2.006	购买组	正确
3		2.67	购买组	正确
4		1.859	购买组	不正确
5		2.247	购买组	正确
6		2.229	购买组	正确
7		1.916	购买组	不正确
8	非购买组	1.764	非购买组	正确
9		1.494	非购买组	正确
10		1.323	非购买组	正确
11		1.603	非购买组	正确
12		1.394	非购买组	正确

有两个判别出现错误，判别正确率为 $\frac{10}{12}=83.3\%$，因此我们所作的判别基本上正确. 这个实例表明，在作预测时本方法提供了一个十分有用的工具，但还必须注意结合各方面的信息加以综合分析，方能作出正确的决策.

§5.3　判别分析与回归分析

如果从组 A 和组 B 中分别抽取 s 和 t 个样品，得数据如下：

$$\text{组 } A\begin{cases}(x_{11}^0,x_{12}^0,\cdots,x_{1p}^0) & y_1^0=1\\ (x_{21}^0,x_{22}^0,\cdots,x_{2p}^0) & y_2^0=1\\ \cdots\cdots & \\ (x_{s1}^0,x_{s2}^0,\cdots,x_{sp}^0) & y_s^0=1\end{cases}$$

$$\text{组 } B\begin{cases}(x_{11}^1, x_{12}^1, \cdots, x_{1p}^1) & y_1^1 = 0\\ (x_{21}^1, x_{22}^1, \cdots, x_{2p}^1) & y_2^1 = 0\\ \cdots\cdots\cdots & \\ (x_{t1}^1, x_{t2}^1, \cdots, x_{tp}^1) & y_t^1 = 0\end{cases}$$

现在定义一个变量 y，若数据来自组 A，则 y 为 1，若数据来自组 B，则 y 为 0，称 y 为虚拟变量.

用回归分析来建立 y 和 $(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ 之间的关系.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_p x_p + \varepsilon$$

可以证明（这里从略）

$$\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_p\end{bmatrix} = S^{-1}\begin{bmatrix}\bar{x}_1^0 - \bar{x}_1^1\\ \bar{x}_2^0 - \bar{x}_2^1\\ \vdots\\ \bar{x}_p^0 - \bar{x}_p^1\end{bmatrix}$$

可以看出，回归方程的系数与最优判别函数的系数是一致的（或相差一个常数倍数），从而最优判别函数与回归方程（除常数 β_0 外）在形式上是一样的. 根据这一事实，我们有下面两点结论：

（1）可以用回归分析的计算方法来求解最优判别函数的系数.

（2）反之，可以用判别分析的思想来分析回归方程.

上节的例子中，用 y^0 表示各国的购买状态，$y^0 = 1$ 表示该国购买，$y^0 = 0$ 表示该国不购买，我们用 x_1, x_2, x_3 对 y 作回归.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \varepsilon$$

可以列出 12 个国家的调查资料及 y 的值如下：

表 5-3-1

编　号	y^0	x_1	x_2	x_3	编　号	y^0	x_1	x_2	x_3
1	1	9	8	7	7	1	7	5	6
2	1	7	6	6	8	0	8	4	4
3	1	10	7	8	9	0	3	6	6
4	1	8	4	5	10	0	6	3	3
5	1	9	9	3	11	0	6	4	5
6	1	8	6	7	12	0	8	2	2

利用上面的数据，可求得回归方程

$$y^0 = -1.268 + 0.128x_1 + 0.072x_2 + 0.099x_3$$

从而得最优判别函数为

中国国防科技网 http://www.81tech.com

$$y = 0.128x_1 + 0.072x_2 + 0.099x_3$$

与上节中求得的最优判别函数一致.



以下是2000网易杯全国大学生数学建模竞赛原题，试用判别分析方法建立其数学模型.

2000网易杯全国大学生数学建模竞赛题目

A题 DNA序列分类

2000年6月，人类基因组计划中DNA全序列草图完成，预计2001年可以完成精确的全序列图，此后人类将拥有一本记录着自身生老病死及遗传进化的全部信息的“天书”. 这本大自然写成的“天书”是由4个字符A，T，C，G按一定顺序排成的长约30亿的序列，其中没有“断句”也没有标点符号，除了这4个字符表示4种碱基以外，人们对它包含的“内容”知之甚少，难以读懂. 破译这部世界上最巨量信息的“天书”是21世纪最重要的任务之一. 在这个目标中，研究DNA全序列具有什么结构，由这4个字符排成的看似随机的序列中隐藏着什么规律，又是解读这部天书的基础，是生物信息学(Bioinformatics)最重要的课题之一.

虽然人类对这部“天书”知之甚少，但也发现了DNA序列中的一些规律性和结构. 例如，在全序列中有一些是用于编码蛋白质的序列片段，即由这4个字符组成的64种不同的3字符串，其中大多数用于编码构成蛋白质的20种氨基酸. 又例如，在不用于编码蛋白质的序列片段中，A和T的含量特别多些，于是以某些碱基特别丰富作为特征去研究DNA序列的结构也取得了一些结果. 此外，利用统计的方法还发现序列的某些片段之间具有相关性，等等. 这些发现让人们相信，DNA序列中存在着局部的和全局性的结构，充分发掘序列的结构对理解DNA全序列是十分有意义的. 目前在这项研究中最普通的思想是省略序列的某些细节，突出特征，然后将其表示成适当的数学对象. 这种被称为粗粒化和模型化的方法往往有助于研究规律性和结构.

作为研究DNA序列的结构的尝试，提出以下对序列集合进行分类的问题：

1) 下面有20个已知类别的人工制造的序列(见反面)，其中序列标号1～10为A类，11～20为B类. 请从中提取特征，构造分类方法，并用这些已知类别的序列，衡量你的方法是否足够好. 然后用你认为满意的方法，对另外20个未标明类别的人工序列(标号21～40)进行分类，把结果用序号(按从小到大的顺序)标明它们的类别(无法分类的不写入)：

A类 ； B类

请详细描述你的方法，给出计算程序. 如果你部分地使用了现成的分类方法，也要将方法名称准确注明.

这40个序列也放在如下地址的网页上，用数据文件Art－model－data标识，供下载：

网易网址：www.163.com 教育频道 在线试题；

教育网： www.cbi.pku.edu.cn News mcm2000

教育网： www. csiam. edu. cn/mcm

2）在同样网址的数据文件 Nat－model－data 中给出了 182 个自然 DNA 序列，它们都较长．用你的分类方法对它们进行分类，像 1）一样地给出分类结果．

提示：衡量分类方法优劣的标准是分类的正确率，构造分类方法有许多途径，例如提取序列的某些特征，给出它们的数学表示：几何空间或向量空间的元素等，然后再选择或构造适合这种数学表示的分类方法；又例如构造概率统计模型，然后用统计方法分类等．

数据文件 Art－model－data

1. aggcacggaaaaacgggaataacggaggaggacttggcacggcattacacggaggacgaggtaaaggaggcttgtctacggccggaagtgaaggggatatgaccgcttgg
2. cggaggacaaacgggatggcggtattggaggtggcggactgttcgggaattattcggtttaaacgggacaaggaaggcggctggaacaaccggacggtggcagcaaagga
3. gggacggatacggattctggccacggacggaaaggaggacacggcggacataccggcggcaacggacggaacggaggaaggaggcggcaatcggtacggaggcggcgga
4. atggataacggaaacaaaccagacaaacttcggtagaaatacagaagcttagatgcatatgttttttaaataaaatttgtattattatggtatcataaaaaaaaggttgcga
5. cggctggcggacaacggactggcggattccaaaaacggaggaggcggacggaggctacaccacgtttcggcggaaaggcggaggggctggcaggaggctcattacgggggag
6. atggaaaatttcggaaaggcggcaggcaggaggcaaaggcggaaaggaaggaaacggcggatatttcggaagtggatattaggaggcggaataaaggaacggcggcaca
7. atggattattgaatggcggaggaagatccggaataaaatatggcggaaagaacttgtttcggaaatggaaaaaggactaggaatcggcggcaggaaggatatggaggcg
8. atggccgatcggcttaggctggaaggaacaaataggcggaattaaggaaggcgttctcgctttcgacaaggaggcggaccataggaggcggattaggaacggttatgagg
9. atggcggaaaaaggaaatgtttggcatcggcgggctccggcaactggaggttcggccatggaggcgaaaatcgtgggcggcggcagcgctggccggagttgaggagcgcg
10. tggccgcggaggggcccgtcgggcgcggatttctacaagggcttcctgttaaggaggtggcatccaggcgtcgcacgctcggcgcggcaggaggcacgcgggaaaaaacg

11. gttagatttaacgttttttatggaatttatggaattataaatttaaaaatttatatttttaggtaagtaatccaacgttttattacttttaaaattaaatatttatt
12. gtttaattacttttatcatttaatttaggttttaattttaaatttaatttaggtaagatgaatttggttttttttaaggtagttatttaattatcgttaaggaaaagttaaa
13. gtattacaggcagacctattaggttattattattattggatttttttttttttttttttttaagttaaccgaattatttttcttttaaagacgttacttaatgtcaatgc
14. gttagtcttttttagattaaattattagattatgcagttttttttacataagaaaatttttttttcggagttcatattctaatctgtctttattaaatcttagagatatta
15. gtattatattttttattttttattatttagaatataattgaggtatgtgtttaaaaaaaaattttttttttttttttttttttttttttttaaaattttataaatttaa
16. gttatttttaaattttaatttttaatttaaaatacaaaatttttacttttctaaaattggtctctggatcgataatgtaaacttattgaatctatagaattacattattgat
17. gtatgtctatttcacggaagaatgcaccactatatgatttgaaattatctatggctaaaaaccctcagtaaaatcaatccctaaaccctttaaaaaacggcggcctatccc
18. gttaattatttattccttacgggcaattaattatttattacggttttattacaatttttttttttgtcctatagagaaattacttacaaaacgttatttttacatactt
19. gttacattatttattattatccgttatcgataatttttaccttcttttttcgctgagttttattcttacttttttttcttcttttatataggatctcatttaatatcttaa
20. gtatttaactctctttacttttttttttcactctctacattttcatcttctaaaaactgtttgatttaaacttttgtttcttttaaggatttttttttacttatcctctgttat

21. tttagctcagtccagctagctagttttacaatttcgacaccagtttcgcaccatcttaaatttcgatccgtaccgtaatttagcttagattttggatttaaaggatttagattga
22. tttagtacagtagctcagtccaagaacgatgtttaccgtaacgtcacgtaccgtacgctaccgttaccggattccggaaagccgattaaggaccgatcgaaaggg
23. cgggcggatttaggccgacggggaccccgggattcgggaccccgaggaaattcccggattaaggtttagttcccgggatttagggccccggatggctgggaccc
24. tttagctagctacttttagctatttttagtagctagccagccttaaggctagctttagctagcattgttctttattgggaccccaagttcgacttttacgatttagttttgaccgt
25. gaccaaaggtgggcttttagggaccccgatgctttagtcgcagctggaccagttcccccagggtattaggcaaaagctgacgggcaattgcaatttaggctaggcca
26. gatttactttagcatttttagctgacgttagcaagcattagctttagccaatttcgcatttgccagtttcgcagctcagttttaacgcgggatctttagcttcaagcttttac
27. ggattcggatttaccccggggattggcggaacgggaccttttaggtcgggacccattaggagtaaatgccaaaggacgctggtttagccagtccgttaaggcttag
28. tccttagatttcagttactatatttgacttacagtctttgagatttcccttacgatttgacttaaaatttagacgttagggcttatcagttatggattaatttagcttatttttcga
29. ggccaattccggtaggaaggtgatggccccgggggttcccgggaggatttaggctgacgggccggccatttcggtttagggagggccgggacgcgttagggc

30. cgctaagcagctcaagctcagtcagtcacgtttgccaagtcagtaatttgccaaagttaaccgttagctgacgctgaacgctaaacagtattagctgatgactcgta
31. ttaaggacttaggctttagcagttacttttagtttagttccaagctacgttacgggaccagatgctagctagcaatttattatccgtattaggcttaccgtaggtttagcgt

中国国防科技网 http://www.81tech.com

32. gctaccgggcagtcttaacgtagctaccgtttagtttgggccccagcctgcggtgtttcggattaaattcgttgtcagtcgctctrtgggtttagtcattcccaaaaagg
33. cagttagctgaatcgtttagccatttgacgtaaacatgattttacgtacgtaaattttagccctgacgtttagctaggaatttatgctgacgtagcgatcgactttagcac
34. cggttagggcaaaggttggatttcgacccaggggggaaagcccgggacccgaacccagggctttagcgtaggctgacgctaggcttaggttggaacccggaaa
35. gcggaagggcgtaggtttgggatgcttagccgtaggctagctttcgacacgatcgattcgcaccacaggataaaagttaagggaccggtaagtcgcggtagcc
36. ctagctacgaacgctttaggcgcccccgggagtagtcgttaccgttagtatagcagtcgcagtcgcaattcgcaaaagtccccagctttagccccagagtcgacg
37. gggatgctgacgctggttagctttaggcttagcgtagctttagggccccagtctgcaggaaatgcccaaaggaggcccaccgggtagatgccasagtgcaccgt
38. aacttttagggcatttccagtttacgggttatttcccagttaaacttgcaccattttacgtgttacgatttacgtataatttgaccttatttggacacttttagtttgggttac
39. ttagggccaagtcccgaggcaaggaattctgatccaagtccaatcacgtacagtccaagtcaccgtttgcagctaccgtttaccgtacgttgcaagtcaaatccat
40. ccattagggtttatttaccigtttatttttcccgagaccttaggttaccgtacttttaacggtttaccttgaaatttttggactagcttaccctggatttaacggccagttt

参考文献

[1] 暴奉贤，陈宏立. 经济预测与决策方法. 广州：暨南大学出版社，1991
[2] 叶其孝. 大学生数学建模竞赛辅导教材(二). 长沙：湖南教育出版社，1997

第6章 微分方程模型

§6.1 传染病模型

各种传染病一直是严重危害人类健康的主要疾病. 近些年来，随着卫生设施的改善，医疗水平的不断提高等，人类在传染性疾病的控制与防治方面已取得了很大的进步. 但仍有某些传染病如艾滋病等，还未得到很好的控制. 2003年春在我国及其他国家出现的非典型肺炎(SARS)更说明了对传染性疾病的传染模型进行进一步研究的必要性.

人们不可能去做传染病传播的试验以获取数据，从医疗卫生部门得到的资料也是不完全和不充分的，所以通常是依据机理分析的方法建立传染病的数学模型，用来描述传染病的传播过程，分析得病人数的变化规律.

为简单起见，本节假定在疾病传播期内所考察地区的总人数 N 不变，既不考虑出生与死亡，也不考虑迁移，并且时间以天为计量单位.

一、模型Ⅰ(SI模型)

假设人群分为易感染者(susceptible)和已感染者(infective)两类，时刻 t 这两类人在总人数中所占的比例分别记作 $s(t)$ 和 $i(t)$.

假设每个病人每天可使 $\lambda s(t)$ 个健康者变为病人，因为病人数为 $Ni(t)$，所以每天共有 $\lambda Ns(t)i(t)$ 个健康者被感染，于是 λNsi 就是病人数 $Ni(t)$ 的增加率，即有

$$N\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\lambda Nsi \tag{6.1.1}$$

又因为

$$s(t)+i(t)=1 \tag{6.1.2}$$

再记初始时刻($t=0$)病人的比例为 i_0，则

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\lambda i(1-i)\\ i(0)=i_0\end{cases} \tag{6.1.3}$$

中国国防科技网 http://www.81tech.com

方程(6.1.3)是 Logistic 模型，它的解为

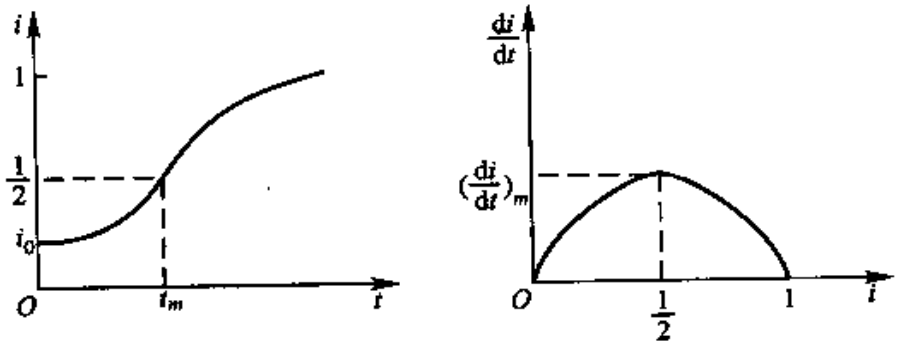
$$i(t)=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{i_0}-1\right)e^{-\lambda t}} \tag{6.1.4}$$

$i(t)\sim t$ 和 $\frac{di}{dt}\sim i$ 的图形如图 6-1-1 所示，其中曲线 $\frac{di}{dt}\sim i$ 称为传染病曲线，它表示传染病人增加率与时间的关系.

这个模型过于简单，因为人群中的健康者只能变成病人，病人不会再变成健康者，导致所有人终将被传染，全部变为病人，即当 $t\to\infty$ 时 $i\to 1$，这显然不符合实际情况. 但由此可知，当 $i=\frac{1}{2}$ 时 $\frac{di}{dt}$ 达到最大值 $\left(\frac{di}{dt}\right)_m$，即当

$$t_m=\lambda^{-1}\ln\left(\frac{1}{i_0}-1\right) \tag{6.1.5}$$

时病人增加得最快，即传染病的高峰期，是医疗卫生部门关注的时刻.



(a) $i-t$ 的曲线　　(b) $\frac{di}{dt}-i$ 的曲线

图 6-1-1

二、模型Ⅱ(SIS 模型)

有些传染病如伤风、痢疾等愈后免疫力很低，可以假定无免疫性，于是病人被治愈后变成健康者，健康者还可以被感染再变成病人，所以这个模型称为 SIS 模型.

SIS 模型在 SI 模型的基础上增加的条件为：病人每天被治愈的人数占病人总数的比例为 μ，病人治愈后成为仍可被感染的健康者. 于是，SI 模型的(6.1.1)式应修正为

$$N\frac{di}{dt}=\lambda Nsi-\mu Ni \tag{6.1.6}$$

(6.1.2)式不变，于是(6.1.3)式应改为

http://www.81tech.com

$$\begin{cases}\dfrac{di}{dt}=\lambda i(1-i)-\mu i\\ i(0)=i_0\end{cases}\tag{6.1.7}$$

方程(6.1.7)的解可表为

$$i(t)=\begin{cases}\left[\dfrac{\lambda}{\lambda-\mu}+\left(\dfrac{1}{i_0}-\dfrac{\lambda}{\lambda-\mu}\right)e^{-(\lambda-\mu)t}\right]^{-1}, & \lambda\neq\mu\\ \left(\lambda t+\dfrac{1}{i_0}\right)^{-1}, & \lambda=\mu\end{cases}\tag{6.1.8}$$

定义

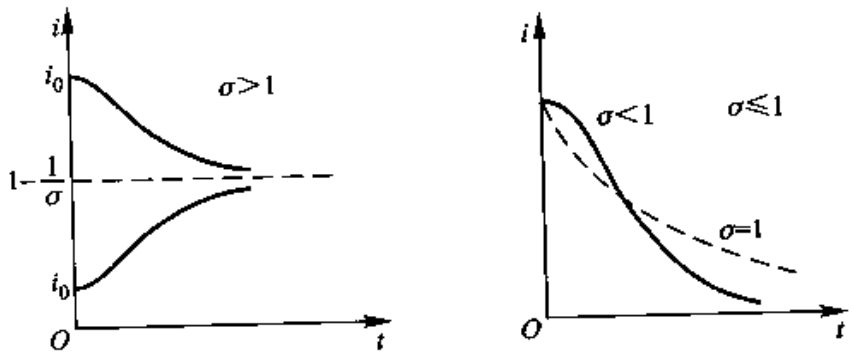
$$\sigma=\lambda/\mu\tag{6.1.9}$$

注意 λ 和 $\dfrac{1}{\mu}$ 的含义，可知 σ 是一个传染期内每个病人有效接触的平均人数，称为**接触数**.

由(6.1.8)、(6.1.9)式容易得到，当 $t\to\infty$ 时，

$$i(\infty)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{\sigma}, & \sigma>1\\ 0, & \sigma\leqslant 1\end{cases}\tag{6.1.10}$$

根据(6.1.8)～(6.1.10)可以画出 $i(t)\sim t$ 的图形，见图 6－1－2.



(a) $\sigma>1$ 时的 $i\sim t$ 曲线　　(b) $\sigma\leqslant 1$ 时 $i\sim t$ 曲线

图 6－1－2

接触数 $\sigma=1$ 是一个阈值. 当 $\sigma\leqslant 1$ 时病人比例 $i(t)$ 越来越小. 最终趋于零，这是由于传染期内经有效接触从而使健康者变成的病人数不超过原来病人数的缘故；当 $\sigma>1$ 时，其极限值为 $i(\infty)=1-\dfrac{1}{\sigma}$，且随 σ 的增加而增加(试从 σ 的含义给以解释).

为了预防传染病的流行，持续的宣传活动是很重要的，下面我们对此建立适当的模型以进行定量的研究.

中国国防科技网 http://www.81tech.com

我们假设，宣传的开展将使得感染上疾病的人数 $x(t)$ 减少，减少的速度与总人数 N 成正比，这个比例常数取决于宣传强度，我们也就把这个比例常数称为宣传强度. 若从 $t=t_0\geqslant 0$ 开始，开展一场持续的宣传活动，宣传强度为 a，则所得的数学模型应是

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=r(N-x)-aNH(t-t_0) & (t\geqslant 0)\\ x(0)=x_0\end{cases} \tag{6.1.11}$$

式中

$$H(t-t_0)=\begin{cases}1, & t\geqslant t_0\\ 0, & t<t_0\end{cases} \tag{6.1.12}$$

即 Heaviside 函数.

这是一阶线性非齐次方程，非齐次项含有间断点 $t=t_0$. 求式(6.1.11)的解即求 $x(t)$，满足：$x(t)\in C[0,+\infty)$，$x(t)\in C^1[0,t_0)$，$x(t)\in C^1(t_0,+\infty)$（在 $t=t_0$，$x(t)$ 的左右导数均存在但不相等），分别在 $[0,t_0)$ 与 $(t_0,+\infty)$ 上，$x(t)$ 满足式(6.1.11)的方程式. 下面对式(6.1.11)进行分段求解：

当 $0\leqslant t\leqslant t_0$ 时，解方程(6.1.11)可得

$$x(t)=N\left[1-\left(1-\frac{x_0}{N}\right)e^{-rt}\right] \tag{6.1.13}$$

当 $t\geqslant t_0$ 时，解一阶线性非齐次方程的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=r(N-x)-aN\\ x(t_0)=N\left[1-\left(1-\dfrac{x_0}{N}\right)e^{-rt_0}\right]\end{cases} \tag{6.1.14}$$

得

$$x(t)e^{rt}=e^{rt_0}x(t_0)+\frac{r-a}{r}N[e^{rt}-e^{rt_0}] \tag{6.1.15}$$

将初值 $x(t_0)$ 代入并整理得

$$x(t)=N\left[1-\left(1-\frac{x_0}{N}\right)e^{-rt}\right]-\frac{aN}{r}[1-e^{-r(t-t_0)}] \tag{6.1.16}$$

将两个表达式合并起来就得

$$x(t)=N\left[1-\left(1-\frac{x_0}{N}\right)e^{-rt}\right]-\frac{aN}{r}H(t-t_0)[1-e^{-r(t-t_0)}] \tag{6.1.17}$$

令 $t\to+\infty$，得

$$\lim_{t\to+\infty}x(t)=N\left(1-\frac{a}{r}\right)<N \tag{6.1.18}$$

这说明持续宣传是起作用的，可使发病人数减少.

注：该问题也可用 Laplace 变换求解.

http://www.81tech.com

三、模型Ⅲ(SIR 模型)

大多数传染病如天花、流感、肝炎、麻疹等治愈后均有很强的免疫力，所以病愈的人既非健康者(易感染者)，也非病人(已感染者)，他们已经退出传染系统. 这种情况下的模型假设条件为：

(1) 人群分为健康者、病人和病愈免疫的移出者(removed)三类，称为 SIR 模型. 三类人在总人数中占的比例分别记作 $s(t)$，$i(t)$ 和 $r(t)$.

(2) 病人的日接触率为 λ，日治愈率为 μ(与 SI 模型相同)，传染期接触数为 $\delta=\lambda/\mu$，由条件(1)显然有

$$s(t)+i(t)+r(t)=1 \tag{6.1.19}$$

根据条件(2)，方程(6.1.6)仍然成立，对于病愈免疫的移出者而言应该有

$$N\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\mu Ni \tag{6.1.20}$$

则由(6.1.6)、(6.1.19)、(6.1.20)式，SIR 模型的方程可以写作

$$\begin{cases} s(t)+i(t)+r(t)=1 \\ \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\lambda is-\mu i \\ \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=-\lambda si \\ i(0)=i_0, s(0)=s_0 \end{cases} \tag{6.1.21}$$

$s_0(s_0>0)$ 和 $i_0(i_0>0)$ 分别是初始时刻的健康者和病人的比例(不妨设移出者的初始值 $r_0=0$). 方程(6.1.21)无法求出 $s(t)$ 和 $i(t)$ 的解析解，我们转到相平面 $s\sim i$ 上来讨论解的性质，相轨线的定义域是 $(s,i)\in D$，

$$D=\{(s,i)\mid s\geqslant 0, i\geqslant 0, s+i\leqslant 1\} \tag{6.1.22}$$

在方程(6.1.21)中消去 $\mathrm{d}t$ 并注意到 σ 的定义(6.1.9)，可得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}s}=\dfrac{1}{\sigma s}-1 \\ i\Big|_{s=s_0}=i_0 \end{cases} \tag{6.1.23}$$

容易求出方程(6.1.23)的解为

$$i=(s_0+i_0)-s+\frac{1}{\sigma}\ln\frac{s}{s_0} \tag{6.1.24}$$

在定义域 D 内，(6.1.24)式表示的曲线即是相轨线，如图 6-1-3 所示，其中箭头表示了随着时间 t 的增加 $s(t)$ 和 $i(t)$ 的变化趋向.

下面根据(6.1.21)、(6.1.24)式和图 6-1-3 分析 $t\to\infty$ 时，$s(t)$，$i(t)$ 和 $r(t)$ 的变化情况(它们的极限值记做 s_∞，i_∞ 和 r_∞).

中国国防科技网 http://www.81tech.com

(1) 不难证明不论初始条件 s_0 和 i_0 如何，病人终将消失，即

$$i_\infty = 0 \tag{6.1.25}$$

从图形上看，不论相轨线从 P_1 或者 P_2 点出发，它终将与 s 轴相交.

(2) 最终未被感染的健康者的比例是 s_∞，在(6.1.24)式中令 $i=0$ 得到 s_∞ 是方程

$$s_0 + i_0 - s_\infty + \frac{1}{\sigma}\ln\frac{s_\infty}{s_0} = 0 \tag{6.1.26}$$

在$(0,1/\sigma)$内的单根. 在图形上，s_∞ 是相轨线与 s 轴在$(0,1/\sigma)$内交点的横坐标.

(3) 若 $s_0 > 1/\sigma$，则 $i(t)$ 先增加，当 $s=1/\sigma$ 时，$i(t)$ 达到最大值 $i_m = s_0 + i_0 - \frac{1}{\sigma}(1+\ln\sigma s_0)$，然后，$i(t)$ 减小而且趋向于零，$s(t)$ 则单调减小到 s_∞. 如图 6-1-3 中由 P_1 出发的轨线.

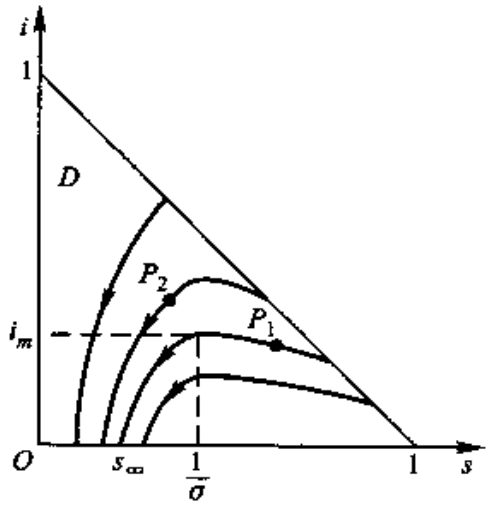


图 6-1-3 SIR 模型的相轨图

(4) 若 $s_0 \leqslant \frac{1}{\sigma}$，则 $i(t)$ 单调减小至零，$s(t)$ 单调减小至 s_∞. 如图中由 P_2 出发的轨线. ((3)、(4)的证明留作习题 1.)

可以看出，如果仅病人比例 $i(t)$ 有一段增长的时期才认为传染病在蔓延，那么 $\frac{1}{\sigma}$ 是一个阈值，当 $s_0 > \frac{1}{\sigma}$ 时传染病就会蔓延. 而减小传染期接触数 σ，即提高阈值 $\frac{1}{\sigma}$，使得 $s_0 \leqslant \frac{1}{\sigma}$，传染病就不会蔓延(健康者比例的初始值 s_0 是一定的，通常可认为 $s_0 \approx 1$). 我们注意到在 $\sigma = \lambda/\mu$ 中，人们的卫生水平越高，日接触率 λ 越小；医疗水平越高，日治愈率 μ 越大，σ 就越小，所以提高卫生水平和医疗水平有助于控制传染病的蔓延.

从另一方面看，$\sigma s = \lambda s \cdot \frac{1}{\mu}$ 是传染期内一个病人传染的健康者的平均数，称为交换数，其含义是一个病人被 σs 个健康者交换. 所以当 $s_0 \leqslant \frac{1}{\sigma}$，即 $\sigma s_0 \leqslant 1$ 时，必有 $\sigma s \leqslant 1$. 既然交换数不超过 1，病人比例 $i(t)$ 绝不会增加，传染病不会蔓延.

我们看到在 SIR 模型中接触数 σ 是一个重要参数. σ 可以由实际数据估计，因为病人比例的初始值 i_0 通常很小. 在(6.1.26)式中略去 i_0 可得

$$\sigma = \frac{\ln s_0 - \ln s_\infty}{s_0 - s_\infty} \tag{6.1.27}$$

于是当传染病结束而获得 s_0 和 s_∞ 以后，由(6.1.27)式能算出 σ，另外，对血样作免疫检验也可以根据对检验无反应和有反应，估计出 s_0 和 s_∞，然后计算 σ.

四、模型验证

20 世纪初在印度孟买发生的一次瘟疫中几乎所有病人都死亡了. 死亡相当于移出传染系统，有关部门记录了每天移出者的人数，即有了$\frac{dr}{dt}$的实际数据，Kermack 等人用这组数据对 SIR 模型作了验证.

首先，由方程(6.1.19)、(6.1.21)可以得到

$$s(t)=s_0e^{-\sigma r(t)} \tag{6.1.28}$$

$$\frac{dr}{dt}=\mu(1-r-s_0e^{-\sigma r}) \tag{6.1.29}$$

当 $r\leqslant 1/\sigma$ 时，取(6.1.29)式右端 $e^{-\sigma r}$Taylor 展开的前 3 项，在初值 $r_0=0$ 下的解为

$$r(t)=\frac{1}{s_0\sigma^2}\left[(s_0\sigma-1)+\alpha\mathrm{th}\left(\frac{\alpha\mu t}{2}-\varphi\right)\right] \tag{6.1.30}$$

其中 $\alpha^2=(s_0\sigma-1)^2+2s_0i_0\sigma^2$，$\mathrm{th}\,\varphi=\frac{s_0\sigma-1}{\alpha}$，从(6.1.30)式容易算出

$$\frac{dr}{dt}=\frac{\alpha^2\mu}{2s_0\sigma^2\mathrm{ch}^2\left(\frac{\alpha\mu t}{2}-\varphi\right)} \tag{6.1.31}$$

然后取定参数 s_0，σ 等，画出(6.1.31)式的图形，如图 6-1-4 中的曲线，实际数据在图中用圆点表示，可以看出，理论曲线与实际数据吻合得相当不错.

在本节的最后，介绍 SIR 模型的两个应用.

1. 被传染比例的估计

在一次传染病的传播过程中，被传染人数的比例是健康者人数比例的初始值 s_0 与 $t\to\infty$ 的极限值 s_∞ 之差，记作 x，即

$$x=s_0-s_\infty \tag{6.1.32}$$

假定 i_0 很小，s_0 接近于 1，由(6.1.26)式可得

$$x+\frac{1}{\sigma}\ln\left(1-\frac{x}{s_0}\right)\approx 0 \tag{6.1.33}$$

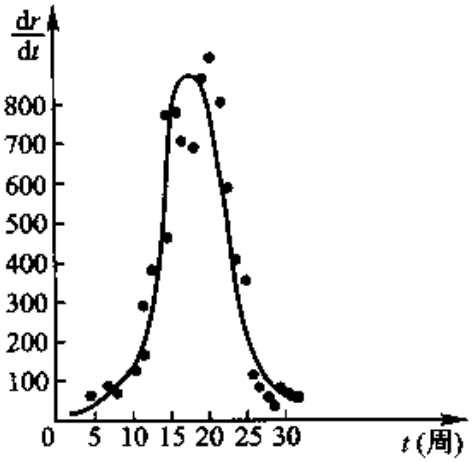


图 6-1-4 SIR 模型的理论曲线

中国国防科技网 http://www.81tech.com

取对数函数 Taylor 展开的前两项有

$$x\left(1-\frac{1}{s_0\sigma}-\frac{x}{2s_0^2\sigma}\right)\approx 0 \tag{6.1.34}$$

记 $s_0=\frac{1}{\sigma}+\delta$，$\delta$ 可以视为该地区人口比例超过阈值 $1/\sigma$ 的部分. 当 $\delta<<1/\sigma$ 时，(6.1.34)式给出

$$x\approx 2s_0\sigma\left(s_0-\frac{1}{\sigma}\right)\approx 2\delta \tag{6.1.35}$$

这个结果表明，被传染人数比例约为 δ 的 2 倍. 对一种传染病，当该地区的卫生和医疗水平不变，即 σ 不变时，这个比例就不会改变. 而当阈值 $1/\sigma$ 提高时，δ 减小，于是这个比例就会降低.

2. 群体免疫和预防

根据对 SIR 模型的分析，当 $s_0\leqslant 1/\sigma$ 时传染病不会蔓延. 所以为制止蔓延，除了提高卫生和医疗水平，使阈值 $1/\sigma$ 变大以外，另一个途径是降低 s_0，这可以通过譬如预防接种使群体免疫的办法做到.

忽略病人比例的初始值 i_0，有 $s_0=1-r_0$. 于是传染病不会蔓延的条件 $s_0\leqslant 1/\sigma$可以表为

$$r_0\geqslant 1-\frac{1}{\sigma} \tag{6.1.36}$$

这就是说，只要通过群体免疫使初始时刻的移出者比例(即免疫者比例)r_0 满足(6.1.36)式，就可以制止传染病的蔓延.

这种办法生效的前提条件是免疫者要均匀分布在全体人口中，实际上这是很难做到的. 据估计在印度等国天花传染病的接触数 $\sigma=5$，由(6.1.36)式至少要有 80% 的人接受免疫才行. 据世界卫生组织报告，即使花费大量资金提高 r_0，也因很难做到免疫者的均匀分布，使得天花直到 1977 年才在全世界根除. 而有些传染病的 σ 更高，根除就更加困难.

§6.2 种群的相互竞争

如果一个自然环境中有两个或两个以上种群存在，那么它们之间就可能有相互竞争、相互依存或是捕食与被捕食的关系. 下面将用微分方程稳定性分析的方法分别讨论这些关系.

一、模型建立

设有甲、乙两个种群，当它们独自在一个自然环境中生存的时候，数量的

http://www.81tech.com

演变都遵从 Logistic 规律. 当它们生活于同一个自然环境时就会进行生存竞争，其模型可表为：

$$\dot{x}_1(t)=r_1x_1\left(1-\frac{x_1}{N_1}-\delta_1\frac{x_2}{N_2}\right) \tag{6.2.1}$$

$$\dot{x}_2(t)=r_2x_2\left(1-\delta_2\frac{x_1}{N_1}-\frac{x_2}{N_2}\right) \tag{6.2.2}$$

其中 $x_1(t)$、$x_2(t)$是两个种群的数量，r_1、r_2 是它们的固有增长率，N_1、N_2 是它们各自的环境容纳量(或称密度制约)，δ_1，$\delta_1>0$. 第一个方程右边的第一、二项即表示甲自身的生长服从 Logistic 规律，而第三项则描述了种群乙对种群甲的生长有负作用，δ_1 为作用系数，第二个方程与此类似.

二、稳定性分析

为了研究两个种群相互竞争的结局，即要分析当 $t\to\infty$ 时，$x_1(t)$，$x_2(t)$ 的趋向，但该方程组无法直接求解，我们将对它的平衡点进行稳定性分析，以讨论当 $t\to\infty$ 时种群的变化趋势.

首先根据微分方程(6.2.1)、(6.2.2)解代数方程组

$$\begin{cases} f(x_1,x_2)\equiv r_1x_1\left(1-\dfrac{x_1}{N_1}-\delta_1\dfrac{x_2}{N_2}\right)=0 \\ g(x_1,x_2)\equiv r_2x_2\left(1-\delta_2\dfrac{x_1}{N_1}-\dfrac{x_2}{N_2}\right)=0 \end{cases} \tag{6.2.3}$$

得到 4 个平衡点：

$$P_1(N_1,0),P_2(0,N_2),P_3\left(\frac{N_1(1-\delta_1)}{1-\delta_1\delta_2},\frac{N_2(1-\delta_2)}{1-\delta_1\delta_2}\right),P_4(0,0),$$

因为仅当平衡点位于平面坐标系的第一象限时($x_1,x_2,\geqslant 0$)才有实际意义，所以对 P_3 而言要求 δ_1，δ_2 同时小于 1，或同时大于 1.

按照判断平衡点稳定性的方法计算

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} f_{x_1} & f_{x_2} \\ g_{x_1} & g_{x_2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r_1\left(1-\dfrac{2x_1}{N_1}-\dfrac{\delta_1x_2}{N_2}\right) & -\dfrac{r_1\delta_1x_1}{N_2} \\ -\dfrac{r_2\delta_2x_2}{N_1} & r_2\left(1-\dfrac{2x_2}{N_2}-\dfrac{\delta_2x_1}{N_1}\right) \end{pmatrix}$$

$$p=-f(f_{x_1}+g_{x_2})\Big|_{P_i},\quad i=1,2,3,4$$

$$q=\det A\Big|_{P_i},\quad i=1,2,3,4$$

将 4 个平衡点的 p，q 值的结果及稳定性条件列入表 6-2-1.

中国国防科技网 http://www.81tech.com

表 6-2-1 种群竞争模型的平衡点及稳定性

平 衡 点	p	q	稳定性条件
$P_1(N_1,0)$	$r_1-r_2(1-\delta_2)$	$-r_1r_2(1-\delta_2)$	$\delta_1<1,\delta_2>1$
$P_2(0,N_2)$	$r_2-r_1(1-\delta_1)$	$-r_1r_2(1-\delta_1)$	$\delta_1>1,\delta_2<1$
$P_3\left(\frac{N_1(1-\delta_1)}{1-\delta_1\delta_2},\frac{N_2(1-\delta_2)}{1-\delta_1\delta_2}\right)$	$\frac{r_1(1-\delta_1)+r_2(1-\delta_2)}{1-\delta_1\delta_2}$	$\frac{r_1r_2(1-\delta_1)(1-\delta_2)}{1-\delta_1\delta_2}$	$\delta_1<1,\delta_2<1$
$P_4(0,0)$	$-(r_1+r_2)$	r_1r_2	不稳定

为了便于对平衡点 P_1、P_2、P_3 的稳定性条件进行分析，在相平面上讨论它们. 在代数方程组(6.2.3)中记

$$\varphi(x_1,x_2)=1-\frac{x_1}{N_1}-\delta_1\frac{x_2}{N_2}$$

$$\psi(x_1,x_2)=1-\delta_2\frac{x_1}{N_1}-\frac{x_2}{N_2}$$

对于 δ_1、δ_2 的不同取值范围，直线 $\varphi=0$ 和 $\psi=0$ 在相平面上的位置不同，图 6-2-1 给出了它们的 4 种情况. 根据 $\dot{x}_1$，$\dot{x}_2$ 的符号容易得出各区域内轨线的

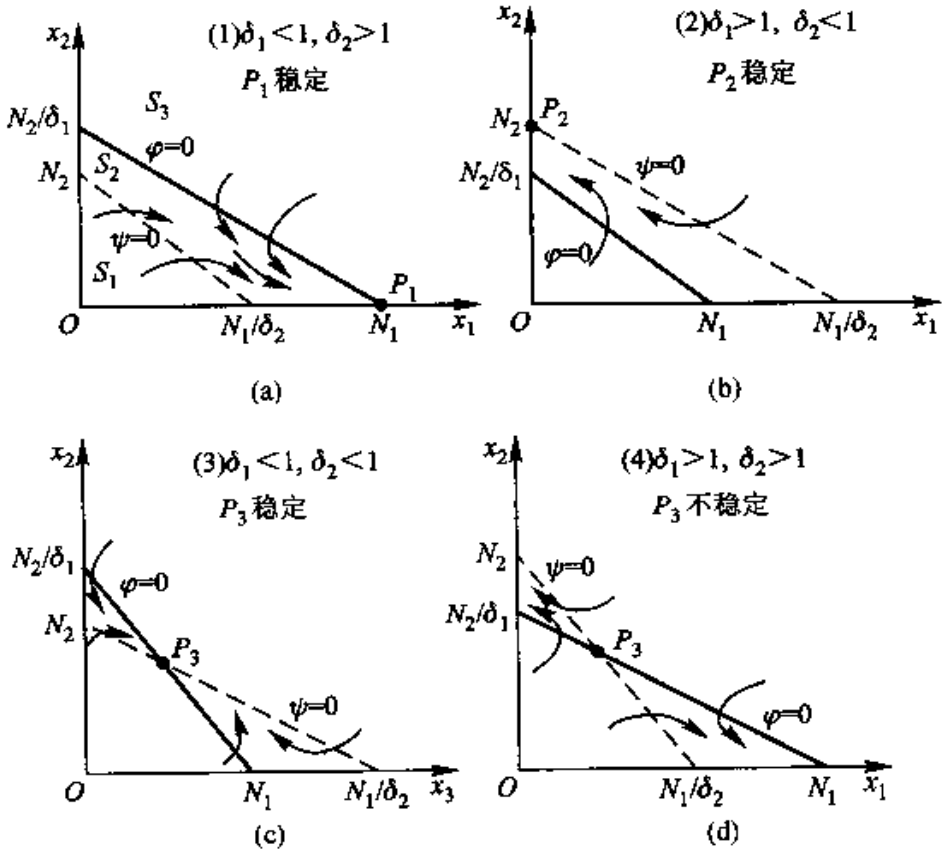


图 6-2-1 平衡点稳定性的相平面分析

http://www.81tech.com

走向，从而不难得出种群在不同条件下的变化趋势.

下面分别对这四种情况进行分析：

(1) $\delta_1<1$，$\delta_2>1$，由图不难说明所有轨线都趋于平衡点 $P_1(N_1,0)$，这说明种群甲的竞争力强于乙，于是种群乙终将灭绝，种群甲趋向最大容量.

(2) $\delta_1>1$，$\delta_2<1$，类似的分析可以知道 $P_2(0,N_2)$ 稳定，即说明种群甲的竞争力弱于乙，于是种群甲终将灭绝，种群乙趋向最大容量.

(3) $\delta_1<1$，$\delta_2<1$，由表 6-2-1 知道 P_3 稳定，说明两种群相互作用较小，可以达到一个双方共存的稳定的平衡状态 P_3.

(4) $\delta_1>1$，$\delta_2>1$，由表 6-2-1 知道 P_3 不稳定；轨线或者趋向于 P_1，或者趋向于 P_2，由轨线的初始位置决定，示意图见 6-2-1(d). 在这种情况下 P_1 和 P_2 都不能说是稳定的，正因为这样，P_1 稳定(与初始条件无关)的条件需要加上 $\delta_1<1$，P_2 稳定(与初始条件无关)的条件需要加上 $\delta_2<1$. 从生态意义上说就是两种群的发展要由初始条件来决定，谁在开始占优势，谁就会越来越强，而导致另一种群灭亡. 这正是生态学上的竞争排斥原理.

§6.3 种群的相互依存

自然界中处于同一环境下两个种群相互依存而共生的现象是很普遍的. 植物可以独立生存，昆虫的授粉作用又可以提高植物的增长率，而以花粉为食物的昆虫却不能离开植物单独存活，人类与人工饲养的牲畜之间也有类似的关系. 这种共生现象可以描述如下：

设种群甲(用表示)可以独立生存，按 Logistic 规律增长，种群乙(用表示)为甲提供食物，有助于甲的增长. 类似于前面的方程(6.2.1)、(6.2.2)，种群甲的数量演变规律可以写作(r_1,N_1,N_2 的意义同前)

$$\dot{x}_1(t)=r_1x_1\left(1-\frac{x_1}{N_1}+\delta_1\frac{x_2}{N_2}\right) \tag{6.3.1}$$

$$\dot{x}_2(t)=r_2x_2\left(-1+\delta_2\frac{x_1}{N_1}-\frac{x_2}{N_2}\right) \tag{6.3.2}$$

上节 δ_1，δ_2 前的减号这里变成加号，表示乙不是消耗甲的资源而是为甲提供食物；第二式的 1 变为 -1，表示种群乙没有甲的存在会灭亡，其死亡率为 r_2.

方程(6.3.1)、(6.3.2)构成相互依存现象的数学模型. 下面利用平衡点的稳定性分析时间足够长以后两个种群的变化趋向.

类似 §6.2 的做法，将方程(6.3.1)、(6.3.2)的平衡点及其稳定性分析的

中国国防科技网 http://www.81tech.com

结果列入表 6-3-1.

表 6-3-1 种群依存模型的平衡点及稳定性

平衡点	p	q	稳定条件
$P_1(N_1,0)$	$r_1-r_2(\delta_2-1)$	$-r_1r_2(\delta_2-1)$	$\delta_2<1,\delta_1\delta_2<1$
$P_2\left(\frac{N_1(\delta_1-1)}{1-\delta_1\delta_2},\frac{N_2(\delta_2-1)}{1-\delta_1\delta_2}\right)$	$\frac{r_1(\delta_1-1)+r_2(\delta_2-1)}{1-\delta_1\delta_2}$	$\frac{r_1r_2(\delta_1-1)(\delta_2-1)}{1-\delta_1\delta_2}$	$\delta_1<1,\delta_2>1,$ $\delta_1\delta_2<1$
$P_3(0,0)$	$-r_1+r_2$	$-r_1r_2$	不稳定

显然，P_2 点稳定才表明两个种群在同一环境里相互依存而共生，我们着重分析 P_2 稳定的条件.

由 P_2 点的表达式可以看出，要使平衡点 P_2 有实际意义，即位于相平面第一象限($x_1,x_2\geqslant 0$)，必须满足下面两个条件中的一个：

$$A_1:\ \delta_1<1,\ \delta_2>1,\ \delta_1\delta_2<1$$

$$A_2:\ \delta_1>1,\ \delta_2<1,\ \delta_1\delta_2>1$$

而由表 6-3-1 中的 P_2 点的 p，q 可知，仅在条件 A_1 下 P_2 才是稳定的(而在 A_2 下 P_2 是鞍点，不稳定). 图 6-3-1 画出了条件 A_1 下相轨迹的示意图，其中 $\varphi=1-\frac{x_1}{N_1}+\delta_1\frac{x_2}{N_2}$，$\psi=-1+\delta_2\frac{x_1}{N_1}-\frac{x_2}{N_2}$，直线 $\varphi=0$ 和 $\psi=0$ 将相平面(x_1，$x_2\geqslant 0$)分成 4 个区域，

$S_1:\dot{x}_1>0,\dot{x}_2<0$；$S_2:\dot{x}_1>0,\dot{x}_2>0$；$S_3:\dot{x}_1<0,\dot{x}_2>0$；$S_4:\dot{x}_1<0,\dot{x}_2<0$.

从 4 个区域中 $\dot{x}_1$，$\dot{x}_2$ 的正负不难看出其相轨迹的趋向如图 6-3-1 所示.

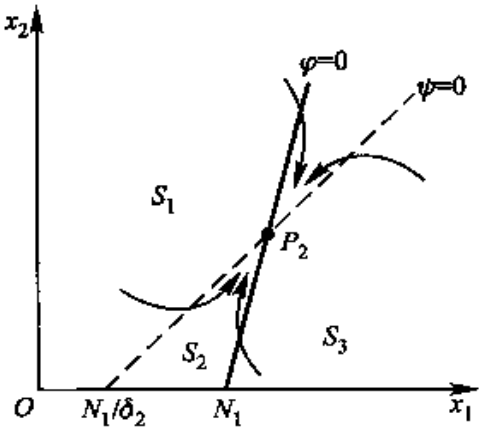


图 6-3-1 P_2 稳定的相轨线图

分析条件 A_1 的实际意义，其关键部分是 $\delta_2>1$. 考虑到 δ_2 的含义，这表示种群甲要为种群乙提供足够的食物以维持种群乙生长，而 $\delta_1\delta_2<1$ 则是在$\delta_2>1$条件下为了使 P_2 位于相平面第一象限所必需的，当然这要求 δ_1 很小($\delta_1<1$是必要条件). 注意到 δ_1 的含义，这实际上是对乙向甲提供食物加以限制，以防止甲过分的增长.

在种群依存模式(6.3.1)、(6.3.2)中，如果平衡点 $P_1(N_1,0)$稳定，那么种群乙灭绝，没有种群的共存，请读者分析导致 $P_1(N_1,0)$稳定的条件及生态学上的意义.

http://www.81tech.com

§6.4 种群的弱肉强食

处于同一个自然环境中两个种群之间的关系除了相互竞争和相互依存之外，还有一种更为有趣的生活方式：种群甲靠丰富的天然资源生长，而种群乙则靠捕食甲为生．地中海里的食用鱼和鲨鱼，加拿大森林中的美洲兔与山猫，阿尔卑斯山中的落叶松与芽虫等都是这种生存方式的典型．生态学上种群甲称为食饵(prey)，种群乙为捕食者(predator)，二者共处组成食饵－捕食者系统(简称P－P系统)．20世纪初以来一些生态学家、数学家对这个系统的数学模型和它的解的性质的研究，一直保持着浓厚的兴趣．本节只能介绍它的最初的、最简单的模型，这个模型的由来还有一段历史背景．

意大利生物学家D'Ancona曾致力于鱼类种群相互制约关系的研究，从第一次世界大战期间地中海各港口捕获的几种鱼类占捕获总量百分比的资料中，发现鲨鱼等(捕食者)的比例有明显的增加(见表6－4－1)．他知道，捕获的各种鱼的比例基本上代表了地中海渔场中各种鱼的比例．战争中捕获量大幅度下降，当然使渔场中食用鱼(食饵)增加，以此为生的鲨鱼也随之增加，但是捕获量的下降为什么会使鲨鱼的比例增加，即对捕食者而不是对食饵更有利呢？他无法解释这个现象，于是求助于著名的意大利数学家V. Volterra，希望建立一个食饵－捕食者系统数学模型，定量地回答这个问题．这就是著名的Volterra模型．

表6－4－1 一次大战期间地中海某海港捕获鲨鱼的比例

年 代	1914	1915	1916	1917	1918
百分比(%)	11.9	21.4	22.1	21.2	36.4
年 代	1919	1920	1921	1922	1923
百分比(%)	27.3	16.0	15.9	14.8	10.7

一、模型建立

食饵和捕食者在时刻t的数量分别记作$x_1(t)$和$x_2(t)$，因为大海中的资源丰富，可以假设如果食饵独立生存则以增长率r_1按指数规律增长，即有$\dot{x}_1 = r_1 x_1$．捕食者的存在使食饵的增长率降低，设降低的程度与捕食者的数量成正比，于是$x_1(t)$满足方程

$$\dot{x}_1(t) = x_1(r_1 - \lambda_1 x_2) \tag{6.4.1}$$

中国国防科技网 http://www.81tech.com

$$\dot{x}_2(t) = x_2(-r_2 + \lambda_2 x_1) \tag{6.4.2}$$

比例系数 λ_1 反映捕食者掠取食饵的能力，λ_2 反映食饵对捕食者的供养能力. 方程(6.4.1)、(6.4.2)是在没有人工捕获的情况下自然环境中食饵与捕食者之间的制约关系，是 Volterra 提出的最简单的模型，可以看出这个模型没有考虑自身的阻碍作用，即没有引入 Logistic 项.

二、模型分析

仍然通过平衡点的稳定性分析，研究 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的变化规律. 容易得到方程(6.4.1)、(6.4.2)的平衡点为

$$P_0\left(\frac{r_2}{\lambda_2}, \frac{r_1}{\lambda_1}\right), \quad P_0'(0,0) \tag{6.4.3}$$

计算它的 p，q 发现，对于 P_0'，$q<0$，P_0' 不稳定；对于 P_0，$p=0$，$q>0$，处于临界的状态. 下面用分析相轨线的方法解决这个问题.

为确定相轨线，从(6.4.1)、(6.4.2)中消去 dt 得

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{x_1(r_1 - \lambda_1 x_2)}{x_2(-r_2 + \lambda_2 x_1)}$$

将变量分离后作积分得到

$$-r_2 \ln x_1 + \lambda_2 x_1 = r_1 \ln x_2 - \lambda_1 x_2 - c_1$$

上式可以写成

$$(x_1^{r_2} e^{-\lambda_2 x_1})(x_2^{r_1} e^{-\lambda_1 x_2}) = c \tag{6.4.4}$$

c 是任意常数，为了研究(6.4.4)确定的相轨线的图形，记

$$\varphi(x_1) = x_1^{r_2} e^{-\lambda_2 x_1} \tag{6.4.5}$$

$$\psi(x_2) = x_2^{r_1} e^{-\lambda_1 x_2} \tag{6.4.6}$$

利用数学分析法可以作出 φ 和 ψ 的图形(图 6-4-1)，若它们的极大值分别记作 φ_m 和 ψ_m，则不难确定 x_1^0 和 x_2^0 满足

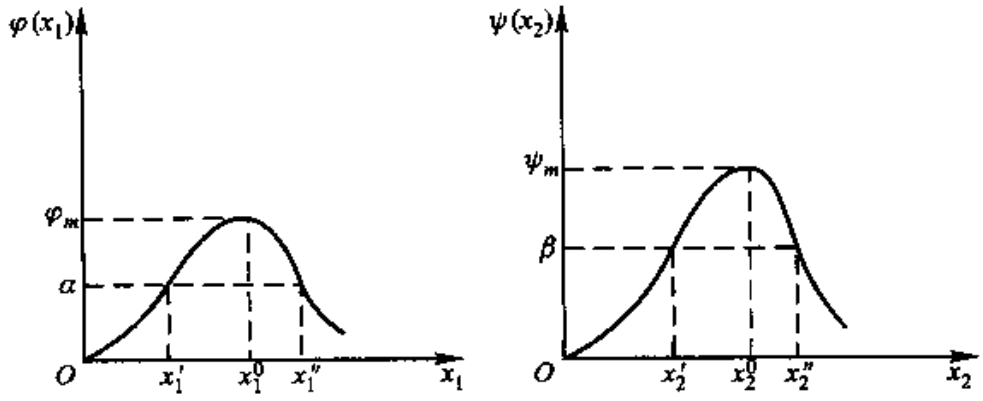


图 6-4-1 φ 和 ψ 的示意图

http://www.81tech.com

$$\varphi(x_1^0)=\varphi_m,\quad x_1^0=\frac{r_2}{\lambda_2} \tag{6.4.7}$$

$$\psi(x_2^0)=\psi_m,\quad x_2^0=\frac{r_1}{\lambda_1} \tag{6.4.8}$$

显然，仅当(6.4.4)式右端常数 $c\leqslant\varphi_m\psi_m$ 时相轨线才有定义.

当 $c=\varphi_m\psi_m$ 时，$x_1=x_1^0$，$x_2=x_2^0$，将(6.4.7)、(6.4.8)与(6.4.3)式比较可以知道(x_1^0,x_2^0)正是平衡点 P_0，所以 P_0 是相轨线的退化点.

为了考察 $c<\varphi_m\psi_m$ 时相轨线的形状，首先设 $c=\alpha\psi_m(0<\alpha<\psi_m)$. 若令 $x_2=x_2^0$，则由(6.4.4)～(6.4.8)可得 $\varphi(x_1)=\alpha$，而从图 6－4－1 知道，必存在 x_1' 和 x_1'' 使得 $\varphi(x_1')=\varphi(x_1'')=\alpha$，且 $x_1'<x_1^0<x_1''$，于是这条轨线通过 $Q_1(x_1',x_2^0)$和 $Q_2(x''_1,x_2^0)$点(图 6－4－2). 接着，分析区间(x'_1,x''_1)内的任意一点 x_1. 因为 $\varphi(x_1)>\alpha$，代入 $\varphi(x_1)\psi(x_2)=\alpha\psi_m$ 可知道 $\psi(x_2)<\psi_m$，记 $\psi(x_2)=\beta(<\psi_m)$，从图 6－4－1 可知道，存在 x_2'' 和 x_2' 使得 $\psi(x_2')=\psi(x_2'')=\beta$，且 $x_2'<x_2^0<x_2''$，于是这条轨线又通过 $Q_3(x_1,x'_1)$和 $Q_4(x_1,x''_2)$点(图 6－4－2). 注意到 x_1 点是(x'_1,x''_1)内的任意点，立即可以知道这条轨线必是如图所示的封闭曲线，同时它不会越出区间$[x_1',x_1'']$.

这样对于不同的 c 值$(0<c\leqslant\varphi_m\psi_m)$，方程(6.4.1)、(6.4.2)的解(6.4.4)式确定的轨线是一族以平衡点 P_0 为中心的封闭曲线，称闭轨线族，当 c 由 $\varphi_m\psi_m$ 变小时闭轨线向外扩展.

容易确定闭轨线的方向如箭头表示的方向.

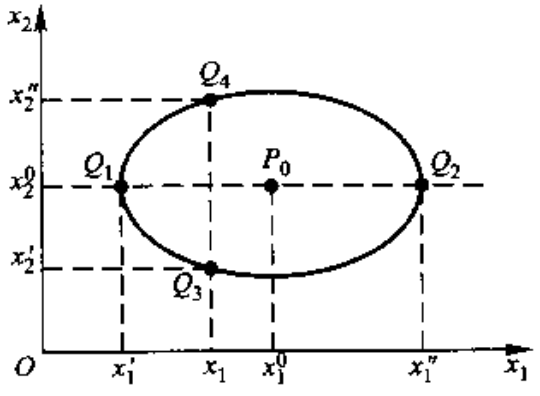


图 6－4－2　P_0 点和一条相轨线

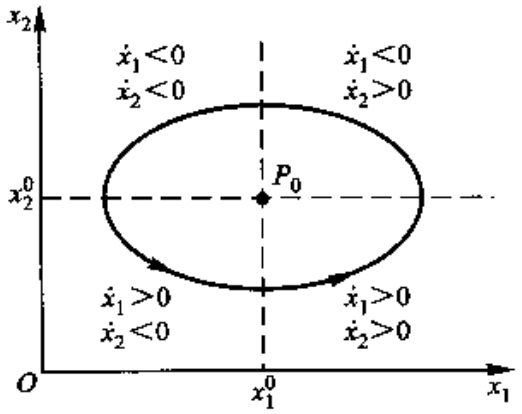


图 6－4－3　闭轨线族及其方向

闭轨线对应着方程的周期解 $x_1(t)$，$x_2(t)$，记周期为 T，图 6－4－4 画出了周期解的示意图，其增减性是由 6－4－3 闭轨线的方向决定的，可以看出，食饵 $x_1(t)$的变化比捕食者 $x_2(t)$提前了$\frac{T}{4}$.

中国国防科技网 http://www.81tech.com

闭轨线(周期解)的存在说明 $P_0(x_1^0,x_2^0)$ 点不是稳定的，$x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 分别在 x_1^0 和 x_2^0 上下振动，我们只能用 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 在一周期 T 内的平均值作为食饵和捕食者数量的近似度量，记这两个平均值分别为 $\bar{x}_1$，$\bar{x}_2$，因为方程(6.4.2)可以写作

$$x_1(t)=\frac{1}{\lambda_2}\left(\frac{\dot{x}_2}{x_2}+r_2\right)$$

所以容易由此算出 $x_1(t)$ 在 T 内的平均值

$$\bar{x}_1=\frac{1}{T}\int_0^T x_1(t)\,dt=\frac{r_2}{\lambda_2}$$

类似的可以得到 $\bar{x}_2=\frac{r_1}{\lambda_1}$，于是

$$\bar{x}_1=x_1^0=\frac{r_2}{\lambda_2},\quad \bar{x}_2=x_2^0=\frac{r_1}{\lambda_1} \qquad (6.4.9)$$

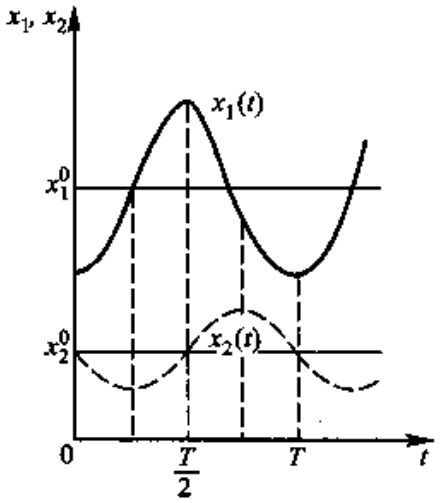


图 6-4-4 $x_1(t)$和$x_2(t)$的周期变化

这表明食饵和捕食者在平衡点 P_0 的值正好代表了他们的平均数量.

三、模型解释

(6.4.9)式表明，食饵的数量取决于方程(6.4.2)中的两个参数 r_2 和 λ_2，而捕食者的数量取决于食饵方程(6.4.1)中的两个参数 r_1 和 λ_1. 当食饵的自然增长率 r_1 下降时，捕食者的数量也将减少，这就是说，在弱肉强食的情况下，降低弱者的繁殖率可以使强者减少. 而当捕食者获取食饵的能力 λ_1 提高的时候也会使捕食者减少，另一个方面，捕食者死亡率 r_2 的下降或者食饵对捕食者供养的能力 λ_2 的提高，都会导致食饵的减少.

为了用 Volterra 模型解释本节开头提出的战争期间捕获量下降对鲨鱼(捕食者)比对食用鱼(食饵)更有利的问题. 需要在上述自然环境下所得的结果的基础上考虑人工捕获的影响(如图 6-4-5).

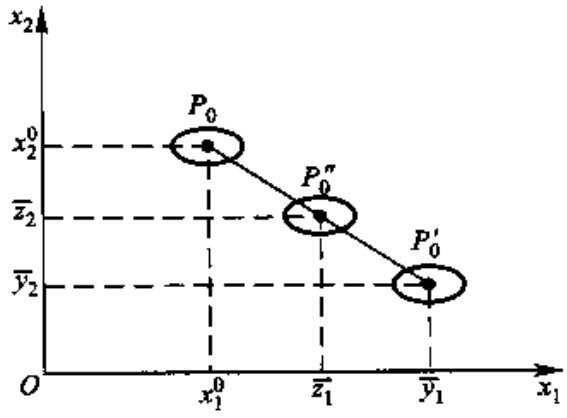


图 6-4-5 捕获系数的改变对食饵、捕食者的影响

设捕获能力系数为 e，相当于食饵的自然增长率由 r_1 降为 r_1-e，捕食者的死亡率由 r_2 增加为 r_2+e. 用 $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$ 表示这种情况下食饵和捕食者的数量，平衡点由 P_0 点变为 P_0'，可以利用(6.4.9)式的结果得到 $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$ 的平均值为

中国国防科技网 http://www.81tech.com

$$\bar{y}_1 = \frac{r_2 + e}{\lambda_2}, \quad \bar{y}_2 = \frac{r_1 - e}{\lambda_1} \tag{6.4.10}$$

战争期间捕获系数由 e 下降为 e_1，食饵 $z_1(t)$ 和捕食者 $z_2(t)$ 的平均值为

$$\bar{z}_1 = \frac{r_2 + e_1}{\lambda_2}, \quad \bar{z}_2 = \frac{r_1 - e_1}{\lambda_1} \tag{6.4.11}$$

因为 $e_1 < e$，所以显然有

$$\bar{z}_1 < \bar{y}_1, \quad \bar{z}_2 > \bar{y}_2$$

平衡点又变为 P_0''. 这就是说，战争期间捕获能力的下降使食用鱼(食饵)的数量减少，而鲨鱼(捕食者)的数量增加. Volterra 用其他的模型解释了 D'Ancona 提出的问题.

用 Volterra 模型还可以对使用杀虫剂的影响作出出人意料的解释. 自然界里有不少以农作物为主的害虫都有它的天敌——益虫. 益虫不吃农作物只吃害虫，是捕食者，害虫是它的食饵. 于是构成一个食饵－捕食者系统. 如果某种杀虫剂不仅杀死害虫，也能杀死益虫，那么使用这种杀虫剂就相当于前面讨论的人工捕获鱼类. 而比较(6.4.9)、(6.4.10)二式知从长期效果看(平均意义下)，使用这种杀虫剂将使害虫增多，益虫减少，与使用者的愿望正好相反.

尽管 Volterra 模型可以解释一些现象，但是它作为近似反映现实对象的一个数学模型，必然有许多局限性.

首先，一般认为自然界里长期存在的呈周期变化的生态平衡系统都应该是结构稳定的，即系统受到不可避免的干扰而偏离原来的周期轨道后，其内部制约作用会使系统自动恢复原状，如恢复原有的周期和振幅. 而 Volterra 模型的周期变化状态却不是结构稳定的，因为一旦离开某一条闭轨线，就进人另一条闭轨线(不同闭轨线的周期和振幅互不相同)，不可能恢复原状.

其次，许多生态学家指出，多数食饵－捕食者系统都观察不到 Volterra 模型显示的那种周期振荡，而是趋向于某个平衡状态，即系统存在稳定平衡点.

为了得到能反映周期变化的结构稳定的模型，需要利用极限环的概念. 而要使食饵－捕食者系统趋向稳定平衡点，只需在 Volterra 模型中加人考虑自身阻滞作用的 Logistic 项即可. 下面简单介绍这种模型.

四、另一个食饵－捕食者模型

为了便于与种群相互竞争模型(§6.2)和种群相互依存模型(§6.3)比较，仍引用那里的符号，于是 Volterra 方程(6.4.1)、(6.4.2)中加上 Logistic 项以后可以写成

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \delta_1 \frac{x_2}{N_2}\right) \tag{6.4.12}$$

中国国防科技网 http://www.81tech.com

$$x_2(t) = r_2 x_2\left(-1 + \delta_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}\right) \tag{6.4.13}$$

这组方程的平衡点为

$$P_1(N_1,0),\quad P_2\left(\frac{N_1(\delta_1+1)}{1+\delta_1\delta_2},\frac{N_2(\delta_2-1)}{1+\delta_1\delta_2}\right),\quad P_3(0,0)$$

显然 P_2 点应该是在现实中观察到的食饵－捕食者系统的稳定平衡点，可以验证 P_2 点的稳定条件是 $\delta_2 > 1$. 因为 δ_2 表示的是对捕食者的供养能力，所以只要它足够大，系统就会趋向二者共存的稳定状态. 不过有兴趣的读者只要分析这个模型的相轨线，就可以发现其趋向平衡点的方式与种群竞争和依存模型是完全不同的.

评注：用数学模型描述、分析食饵－捕食者系统的动态过程和稳定状态，不仅对生态学的研究有重要意义，而且因为它与微分方程定性理论有着密切联系，所以也引起了许多数学家的关注，对这个题目有兴趣的读者可参看相关的文献.

§6.5 交通问题模型

让我们来考虑这样一个问题：红绿灯在亮红灯之前黄灯应亮多长时间？在交通管理中，定期地亮一段时间黄灯是为了让那些正行驶在交叉路口上或距交叉路口太近以致无法停下的车辆通过路口. 这样，红绿灯之间应保持足够长时间的黄灯，使那些无法停车的驾驶员可以在黄灯亮着的时候通过路口. 对于一位驶近交叉路口的驾驶员来说，万万不可处于这样的进退两难的境地：要安全停车，离路口太近，而要在红灯亮之前通过路口又显得太远了.

关于这个时间的计算，有一个粗糙的“经验方法”：对法定迫近速度的每个 10 英里[①]/小时亮 1 秒黄灯. 我们来看理论计算是否证实这个经验方法.

驶近交叉路口的驾驶员，在看到黄色信号后要作出决定：是停车还是通过路口. 如果他以法定速度(或低于法定速度)行驶，当决定停车时，他必须有足够的停车距离. 当决定通过路口时，他必须有足够的时间完全通过路口，这包括作出停车决定的时间(反应时间)以及通过停车所需的最短距离的驾驶时间. 能够很快看到黄灯的驾驶员可以利用刹车距离将车停下.

于是，黄灯状态应持续的时间包括驾驶员的反应时间 T_1、通过交叉路口的时间 T_2 以及停车所需的时间 T_3，即黄灯亮的时间应为 $A = T_1 + T_2 + T_3$. 有

① 10 英里≈16 千米

中国国防科技网 http://www.81tech.com

了这些时间，驾驶员就能够在刹车距离内安全停车.

T_1 一般可根据统计数据或经验得到，通常假定为 1 s，下面计算 T_2 和 T_3.

如果法定速度为 v_0(m/s)，交叉路口的宽度为 I(m)，典型的车身长度为 L(m)，那么，通过路口的时间为 $T_2=\dfrac{I+L}{v_0}$(s).（注意车的尾部必须通过路口，这样，路口的实际长度就是 $I+L$.）

现在，我们来计算刹车距离. 注意到实际的刹车和停车过程是相当复杂的，驾驶员首先开加速器，然后不同程度地用劲踩住刹踏板(也许用了气动刹车)使车子减速，直到停止. 这些过程的大部分是很难用精确的模型来描述的，因而我们将回避它们.

通过在刹车过程引入一个摩擦力. 我们将假定刹车效果用模型来反映. 设 W 为汽车重量，f 为摩擦系数，则摩擦力对汽车的制动力为 fW，其方向与运动方向相反(见图 6-5-1). 汽车在停车过程中，行驶的距离可通过解下面的微分方程求得，这个方程反映的是在常力 fW 作用下的直线运动

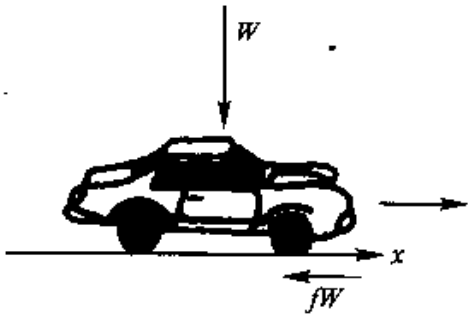


图 6-5-1

$$\frac{W}{g}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}=-fW \tag{6.5.1}$$

其中 g 是重力加速度.

赋予 x 的正确条件是 $t=0$ 时，$x=0$ 以及 $\dfrac{dx}{dt}=v_0$，于是，刹车距离就是直到 $\dfrac{dx}{dt}=0$ 时汽车驶过的距离.

在 $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0}=v_0$ 的条件下对(6.5.1)积分得

$$\frac{dx}{dt}=-fgt+v_0 \tag{6.5.2}$$

因此，当 $t=t_b=\dfrac{v_0}{fg}$ 时，速度为零，在 $x(0)$ 的条件下对(6.5.2)积分有

$$x=-\frac{1}{2}fgt^2+v_0t \tag{6.5.3}$$

$t=t_b$ 时，x 的值是

$$x(t_b)=D_b=\frac{v_0^2}{2fg} \tag{6.5.4}$$

中国国防科技网 http://www.81tech.com

$$A = T_1 + \frac{v_0}{fg} + \frac{l+L}{v_0}$$

A 关于 v_0 的图像如图 6-5-2 所示.

假设，$T=1$ s，$L=15$（英尺①），$l=30$（英尺）. 另外，我们将接受公路工程师提出的具有代表性的 $f=0.2$，当 $v_0=30$，40 以及 50 英里/小时时，黄灯时间如表 6-5-1 所示. 表中同时也给出了经验法的值.



图 6-5-2 黄灯周期和法定速度的关系

表 6-5-1

v_0（英里/小时）	A	经 验 法
30	5.46 秒	3 秒
40	6.35 秒	4 秒
50	7.34 秒	5 秒

我们注意到，经验法的结果比我们预测的黄灯状态短些. 这使人想起，许多交叉路口的设计很可能使车辆在红绿灯转为红灯时正处于交叉路口上.

即使给了充分的停车时间，仍有许多汽车司机企图加速想抢在红灯亮之前冲过十字路口. 这当中的大多数驾驶员不知道（有些人甚至不予注意）什么时候红绿灯转红. 有一种“倒数”型的红绿灯可以部分地解决这个问题，在黄灯亮的最后几秒钟内，黄灯上显示出一串倒计时的数字，它们准确地向驾驶员警告红绿灯何时将变色. 这种系统几年前就在使用了，它成功地降低了事故发生率.



1. 对于传染病的 SIR 模型证明：

a. 若 $s_0 > \frac{1}{\sigma}$，则 $i(t)$ 先增加，在 $s=\frac{1}{\sigma}$ 处达到最大，然后减少并趋于零；$s(t)$ 单调减少至 s_∞.

b. 若 $s_0 < \frac{1}{\sigma}$，则 $i(t)$ 单调减少并趋于零，$s(t)$ 单调减少至 s_∞.

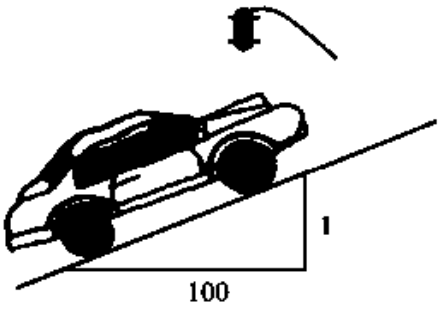
2. 假设普通人在感染病毒后有一段潜伏期，潜伏期过后部分病人直接死亡，另一部分

① 1 英尺≈0.304 8 米

病人发病成为传染者，试建立其数学模型.

3. 一辆正在干燥、水平的路面行驶的汽车开始刹车，刹车时的车速为 40 英里/小时. 汽车在停车前行驶了 270 英里. 计算摩擦系数.

4. 假设在一个交叉路口，所有车辆都是由东驶上一个 1/100 的斜坡(参看习题 4 图). 计算这种情况下的刹车距离.



习题 4 图

提示：垂直方向上力减小，由于重力出现了一个附加的阻力. 如果车辆由西驶来，刹车距离又是多少?

5. 如果轮胎和制动器比较好，f 的实际值可达 0.4，就 f 的这个值，作一张当 $v_0 = 30$，40 以及 50 英里/小时的黄灯周期表. 这些值比起表 6 - 5 - 1 中的值来是不很稳健的. 把较稳健的模型与不太稳健的模型作比较，评论停车信号灯的理想设计.

6. 实际中，并不是所有司机都以同样的速度 v_0 驶近交叉路口. 假设驾驶员驶近路口的速度介于 $v_0 - (\Delta v/2)$ 和 $v_0 + (\Delta v/2)$ 之间，概率同等. 在这基础上计算平均黄灯周期. 提示：

$$A = \frac{1}{\Delta v}\int_{v_0-\Delta v/2}^{v_0+\Delta v/2} A(v_0)\,\mathrm{d}v_0$$

为什么?

7. 对于 $v_0 = 40$ 英里/小时，欲使经验法的结果完全正确，摩擦系数 f 的值应是多少? 对 f 的这个值作一张类似于表 6 - 5 - 1 的黄灯周期表.

8. 你能想出其他的减少交叉路口上事故的方法吗?

参考文献

[1] 姜启源等. 数学模型. 第三版. 北京：高等教育出版社，2003

[2] 朱建青，张国梁. 数学建模方法. 郑州：郑州大学出版社，2003

[3] 郑家茂. 数学建模基础. 南京：东南大学出版社，1997

[4] 齐欢. 数学模型方法. 武汉：华中理工大学出版社，1996

[5] 张芷芬等. 微分方程定性理论. 北京：科学出版社，1984

第7章 图论与网络优化模型

从某种意义上说，我们生活在一个由计算机信息网络、电话通信网络、运输服务网络、能源和物质分派网络等各种网络组成的复杂的网络社会中. 图论与网络优化就是研究如何有效地将这些复杂的关系表示出来并对它们进行计划、管理和控制，使它们发挥最大的社会和经济效益.

图论与网络优化是数学建模的一个重要方面，经济管理、工业工程、交通运输、计算机科学与信息技术、通讯与网络技术等诸多领域中的问题都可以转化为图论与网络模型进行研究. 本章在介绍有关图的一些基本概念的基础上，主要介绍图与网络中的最短路、最小生成树、最大流等数学模型及其解法，最后，给出了几个应用实例.

§7.1 图的概念和最小生成树

图论与网络的应用是十分广泛的，在现实生活和生产实践中有许多管理、组织与计划中的优化问题. 如在企业管理中如何制定管理计划或设备购置计划，使收益最大或费用最小；在组织生产中如何衔接各工序，使生产任务完成得既快又好；在现有交通网络中如何使调动的物资数量多且费用最小等，这类问题均可借助图论知识得以解决. 图论与网络模型就是一个应用图论的知识解决具有网络性质的管理决策问题的数学模型，由于它具有图形直观、方法简便和容易掌握的特点，近几十年来得到迅速的发展，且广泛地应用在各个领域，尤其是经济活动中管理决策的优化问题.

一、图与网络优化的例子

我们首先通过一些例子来了解图论与网络优化的实际背景.

例1(公路连接问题) 某一地区有若干个主要城市，现准备修建高速公路把这些城市连接起来，使得从其中任何一个城市都可以经高速公路直接或间接到达另一个城市. 假定已经知道了任意两个城市之间修建高速公路的成本，那么应如何决定在哪些城市间修建高速公路总成本最小?

http://www.81tech.com

例 2(最短路问题) 一名货车司机奉命在最短的时间内将一车货物从甲地运往乙地. 从甲地到乙地的公路网纵横交错，因此有多种行车路线，这名司机应选择哪条线路呢？假设货车的运行速度是恒定的，那么这一问题相当于需要找到一条从甲地到乙地的最短路.

例 3(运输问题) 某种原材料有 M 个产地，现在需要将原材料从产地运往 N 个使用这些原材料的工厂. 假定 M 个产地的产量和 N 家工厂的需求量已知，单位产品从任一产地到任一工厂的运费已知，那么，如何安排运输方案可以使总运输成本最低？

例 4(指派问题) 一家公司经理准备安排 n 名员工去完成 n 项任务，每人一项. 由于各员工的特点不同，不同的员工去完成同一项任务时所获得的收益是不同的. 如何分配工作方案使总回报最大？

例 5(中国邮递员问题) 一名邮递员负责投递某个街区的邮件. 如何为他设计一条最短的投递路线？即从邮局出发，经过投递区内每条街道至少一次，最后返回邮局.

例 6(旅行商问题) 一名推销员准备前往若干城市推销产品. 如何为他设计一条最短的旅行路线？即从驻地出发，经过每个城市恰好一次，最后返回驻地.

上述问题有两个共同的特点：一是它们的目的都是从若干可能的安排或方案中寻求某种意义下的最优安排或方案，数学上把这种问题称为优化问题；二是它们都易于用图形的形式直观地描述和表达，数学上把这种与图相关的结构称为网络，与图和网络相关的优化问题称为网络优化.

二、图的概念

图的理论研究已经有了 200 多年的历史. 早期的研究与数学游戏有关，哥尼斯堡七桥问题就是其中之一.

18 世纪，东普鲁士哥尼斯堡镇上有一个小岛，岛旁流过一条河的两条支流，七座桥跨在河的两支流上(图 7-1-1(a)). 假设 A 表示岛，D 表示河的左岸，C 表示右岸，B 为两支流间地区，a，b，c，…分别表示七座桥. 问一个人能否经过每座桥一次且恰好经过每座桥一次并且最后回到原出发点？

图论中最早的问题之一就是“哥尼斯堡七桥问题”. 此问题在 1736 年被欧拉解决之前一直是这个普鲁士城镇中的居民很感兴趣的问题. 欧拉解决七桥问题采用了图的方法. 既然岛与陆地无非是桥梁连接的，那么就不妨把 A、B、C、D 4 处抽象成 4 个点. 并把 7 座桥抽象成 7 条边，便得到了七桥问题的模拟图(图 7-1-1(b))，这样当然并未改变问题的实质，于是人们试图一次无

中国国防科技网 http://www.81tech.com

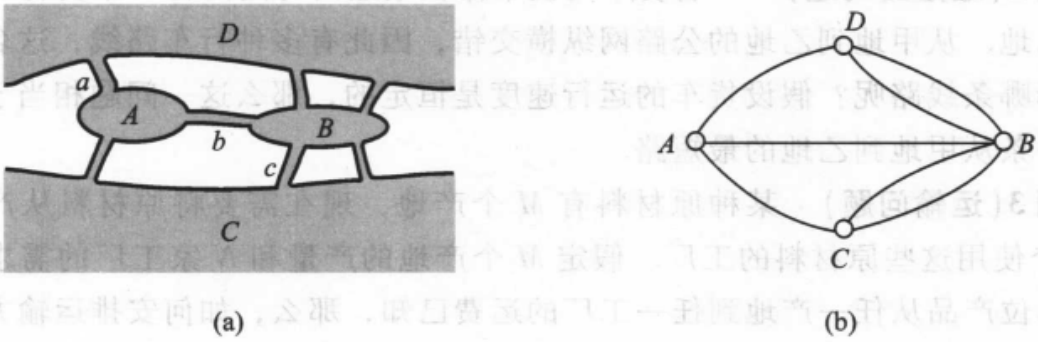


图 7-1-1 哥尼斯堡七桥示意图

重复地走过 7 座桥的问题就等价于一笔画出上述图形的问题. 每条边必须且只须经过一次.

欧拉解决七桥问题时先考虑一般化的情况：如果给定任意一个河道图与任意多座桥，可否判断每座桥能否恰好走过一次呢？一般化的问题就要有一个一般解法，才有实际的意义，考察一笔画的结构特征，有个起点和终点. 除起点与终点外，一笔画中出现在交点处的边总是一进一出的，故各交点的度数（连接此交点边的总数）之和为偶数，由此欧拉给出一般结论：

（1）连接奇数个桥的陆地仅有一个或超过两个以上时不能实现一笔画；

（2）连接奇数个桥的陆地仅有两个时，则从两者任一陆地出发，可以实现一笔画而停在另一陆地；

（3）每个陆地都连接有偶数个桥时，则从任一陆地出发都能实现一笔画，而回到出发点.

由图 7-1-1 可知，此一笔画问题无解，著名的七桥问题彻底解决了. 进一步可知，对于任意一个河道图和任意多座桥的问题都解决了.

图论中所研究的图是由实际问题抽象出来的逻辑关系，这种图与几何中所研究的图形是不相同的. 这种图的画法具有一定的随意性，在保持相对位置和相互关系不变的前提下，点的位置不一定要按实际要求画，线的长度也不一定表示实际的长度，而且画成直线或曲线都可以. 通俗地说，这种图是一种关系示意图.

图 是由顶点集和边集组成的集合对 $G=(V,E)$，其中 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 为节点集合，$E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$ 为边集合，$e_k=(v_i,v_j)=(v_j,v_i)$. 图的节点可以表示城市、车站、计算机、人等，图的边可以是铁路、公路、输电线路、网线、管道等，也可以是一种关系.

例 7 图 7-1-2(a) 表示 6 家企业之间业务往来关系，其中点 a，b，c，d，e，f 分别表示 6 家企业，两点的连线表示两家企业之间的业务联系. 因

http://www.81tech.com

此，从图中可以反映出 a 企业分别与 b，c，d 企业有业务往来，b 企业与 a、c、e 企业有业务往来，而 f 不与任何企业有业务联系. 同样，这 6 家企业之间的关系也可以用图 7－1－2(b)来反映. 图 7－1－2 中的图(a)和图(b)没有本质的差异. 可见表示企业间有无业务往来关系是两点间的连线，而与点的位置无关.

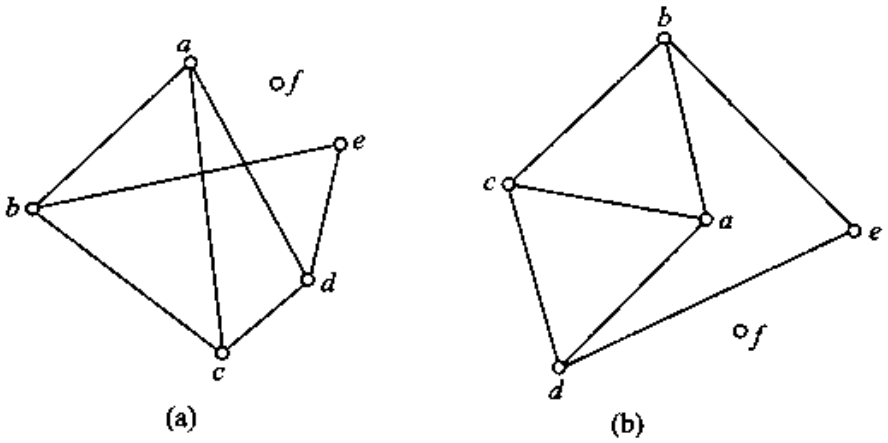


图 7－1－2　6 企业业务关系示意图

对于图 $G=(V,E)$，$G_1=(V_1,E_1)$，若有 $V_1\subseteq V$，$E_1\subseteq E$，则称 G_1 是 G 的**子图**，如果 $V_1=V$，$E_1\subseteq E$，则称 G_1 是 G 的**生成子图**. 对于图 $G=(V,A)$，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，$A=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$，其中，$e_k=(v_i,v_j)\neq(v_j,v_i)$，则称它是有向图. 若图 $G=(V,E)$ 中的每条边 (v_i,v_j) 都赋予一个数 ω_{ij}，则称它是赋权图，记为 $G=(V,E,W)$. 图 $G=(V,E)$ 中节点和边交替出现的序列称为链，记为 $(v_{i1},e_{i1},v_{i2},e_{i2},\cdots,v_{ij},e_{ij})$ 或 $(v_{i1},v_{i2},\cdots,v_{ij})$. 两个端点重合的链称为圈. 有向图 $G=(V,A)$ 中节点和边交替出现的序列称为路，$(v_{i1},v_{i2},\cdots,v_{ij})$ 称为从 v_{i1} 到 v_{ij} 的路，两个端点重合的路称为回路. 若图 $G=(V,A)$ 中任意两点 v_i 到 v_j 间至少有一条链，则称 $G=(V,A)$ 为连通图.

例 8　图 7－1－3 是一张表示石油流向的管网示意图，A 点表示石油开采地，H 点表示石油的汇集站，B，C，D，E，F 表示可供选择的石油流动加压

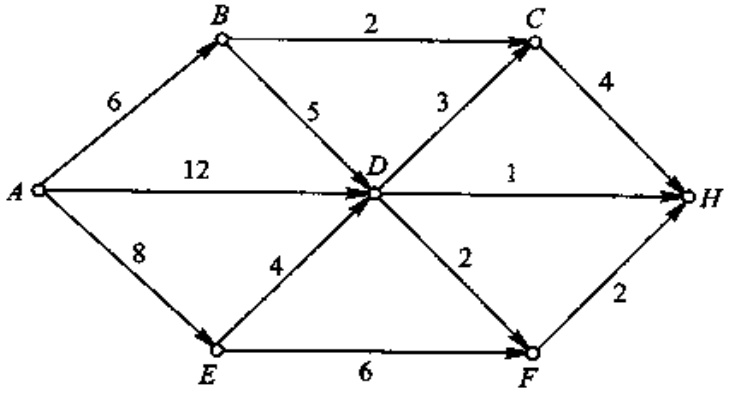


图 7－1－3　石油流向的管网示意图

中国国防科技网 http://www.81tech.com

站(中间站)，箭头表示石油的流向，箭线旁的数字表示管线的长度. 现在要从 A 地调运石油到 H 地，怎样选择管线可使路程最短?

若 $G=(V,A)$ 是一个无圈的连通图，则称 $G=(V,A)$ 为树. 树有以下显而易见的性质:

(1) 树是连通图，但无回路;

(2) 树中任意两个顶点间必有且仅有一条链;

(3) 在树的两个不相邻的顶点间添上一条边，就得到一个圈;

(4) 在树中去掉任何一条边，图就不连通;

(5) 含有 p 个顶点的树有 $p-1$ 条边.

任意一个连通图或者是树，或者去掉一些边后形成一棵树，这样的树称为连通图的生成树. 生成树一般不唯一. 图 G 有生成树的充要条件是 G 连通.

例 9 图 7-1-4(b)是图 7-1-4(a)的一个生成树.

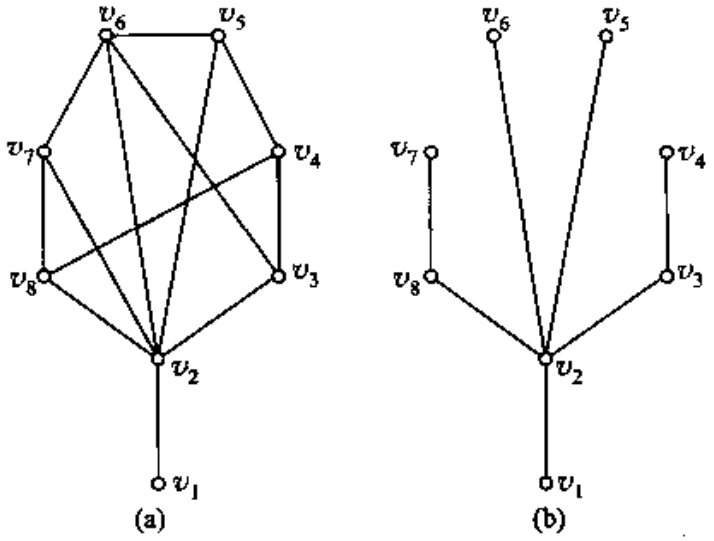


图 7-1-4 连通图的一个生成树

三、最小生成树

在赋权图 $G=(V,E,W)$ 的所有生成树中，权数最小的生成树称为最小生成树，最小生成树的背景是线路最短、费用最小等问题.

例 10 图 7-1-5(a)表示 5 个村庄的线路图，每边旁的数字表示村庄之间道路的长度，现要求沿道路架设有线广播线，不仅使各村都能听到有线广播，而且使广播线总长度最短.

显然，这个问题不光是要找出连接 5 个村庄的生成树，而且要找出一个广播线总长最短的生成树，即最小生成树. 其解答见图 7-1-5(b).

最小生成树用 Kruskal 算法(避圈法)计算，其步骤如下:

http://www.81tech.com

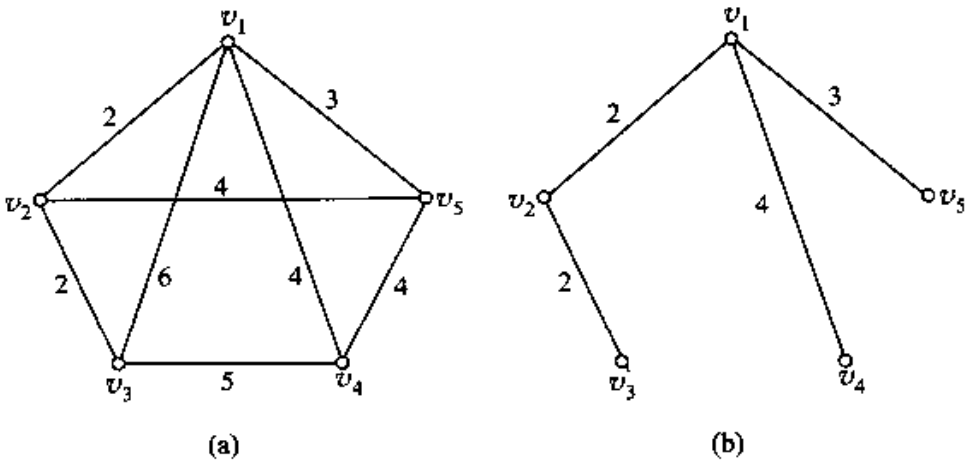


图 7－1－5　连通图的一个最小生成树

(1) 把图 $G=(V,E,W)$ 中的所有边按其权数大小排列，将权数最小的边取进生成树 T 中.

(2) 从剩下的边中按(1)中的方法取下一条边，若该边与前面所取的边形成回路，则舍去该边，否则，就将这条边放进树 T 中.

(3) 重复这一过程，直到边数比节点数目少 1.

例 11　求图 7－1－6 所示的赋权图的最小生成树.

解

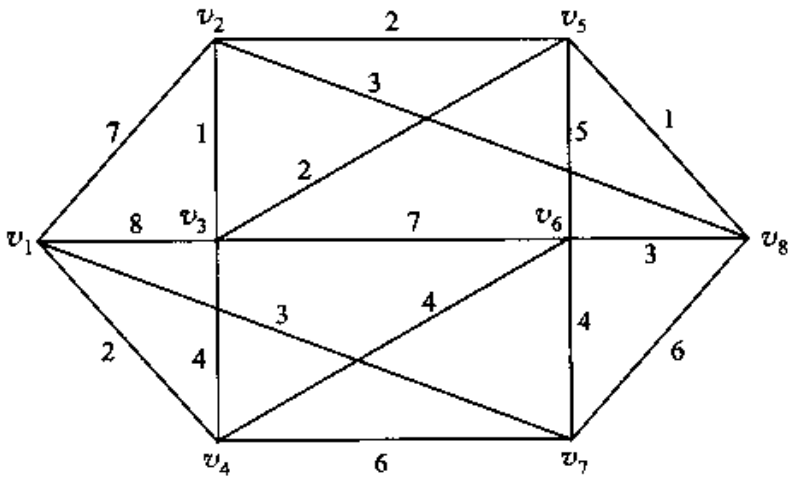


图 7－1－6　一个连通的赋权图

该赋权图各边的权数如下：

$$w(v_1,v_2)=7,\ w(v_1,v_3)=8,\ w(v_1,v_4)=2,\ w(v_1,v_7)=3,$$
$$w(v_2,v_5)=2,\ w(v_2,v_8)=3,\ w(v_2,v_3)=1,\ w(v_3,v_5)=2,$$
$$w(v_3,v_6)=7,\ w(v_3,v_4)=4,\ w(v_4,v_6)=4,\ w(v_4,v_7)=6,$$
$$w(v_5,v_6)=5,\ w(v_5,v_8)=1,\ w(v_6,v_7)=4,\ w(v_6,v_8)=3,$$

中国国防科技网 http://www.81tech.com

$w(v_7, v_8) = 6$.

用上面的方法求得最小生成树为

(v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_1), (v_1, v_7), (v_2, v_5), (v_5, v_8), (v_6, v_8)

其边权之和为 16. 最小生成树的示意图见图 7-1-7.

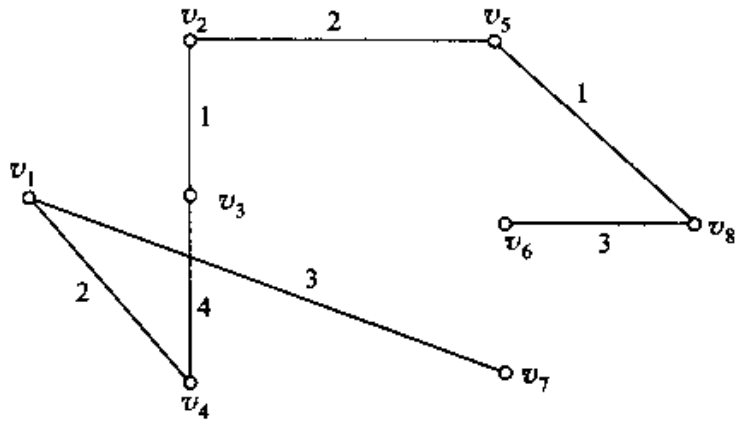


图 7-1-7 连通的赋权图 7-1-6 的一个最小生成树

注：最小生成树不唯一，但不同的最小生成树的边权之和是唯一的.

§7.2 最 短 路

在生产实践、运输管理和工程建设的很多活动中，诸如物资的运输线路、各种工艺路线的安排、厂区及货场的布局、管道线网的铺设及设备的更新等等问题，都与寻找一个图的最短路密切相关，最短路问题是网络分析中的一个基本问题，它不仅可以直接应用于解决生产实际中的许多问题，而且经常被作为一个基本工具用于解决其他的优化问题.

一、两点之间的最短路

设给定赋权图 $G = (V, E, W)$, $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$, $E = \{(v_i v_j)\}$, $\omega(v_i, v_j) = \omega_{ij}$, 求从一个节点 v_1 到另一个节点 v_k 之间的最短距离.

我们的目的就是在图 G 中找出一条节点 v_1 到另一个节点 v_k 的路径，并使得其长度之和最短. Dijkstra 在 1959 年提出了一种算法，是目前公认的求最短路径的较好的算法之一.

Dijkstra 算法的基本思路是动态规划的最优化原理：若 $v_1, v_2, \cdots, v_{k-1}, v_k$ 是 v_1 到 v_k 距离最短的路径，

$$d(v_1, v_k) = \omega(v_1, v_2) + \omega(v_2, v_3) + \cdots + \omega(v_{k-1}, v_k) = \min$$

则 v_1，v_2，…，v_{k-1}是 v_1 到 v_{k-1}之间距离最短的路径，

$$d(v_1,v_{k-1})=\omega(v_1,v_2)+\omega(v_2,v_3)+\cdots+\omega(v_{k-2},v_{k-1})=\min$$

事实上，如果这个结论不成立，便可以找到是从 v_1 到 v_{k-1}的更短的路径，将原来的路径换掉以后就可以得到更短的路径，从而产生矛盾.

Dijkstra 算法是一种标号法，适用所有权数大于零的情形. 它的基本思路是从起点 v_1 出发，逐步向外探寻最短路，每一步都寻找 v_1 到一个点的最小距离. 执行过程中，给每一个顶点 v_j 标号，使用临时标号和永久标号，反复修改临时标号，并且把某一个具有临时标号的点改变为具有永久标号的点，从而使 G 中具有永久标号的顶点数多一个. 这样至多经过 $k-1$ 步，就可以求出从 v_1 到 v_k 的最短路. 再根据每个点标号反向追踪，找出最短路径. Dijkstra 算法的具体步骤为：

（1）给始点 v_1 标上永久标号 $p(v_1)=0$，给其余各点标上临时标号 $t(v_j)$，$j=2,3,4,\cdots,n$，其中，若 v_j 与 v_1 直接相连，$t(v_j)=\omega(v_1,v_j)$，若 v_j 与 v_1 不直接相连，$t(v_j)=\infty$. 在这儿，$t(v_j)$表示从 v_j 一步到 v_1 的距离. 令

$$S=\{v_1\},\quad S^c=\{v_2,v_3,\cdots,v_n\}$$

（2）寻找 v_1 到 S^c 的距离最短的点 v_{j1}，赋予永久标号

$$p(v_{j1})=\min_{v_j\in S^c}\{t(v_j)\},$$

令

$$S=\{v_1,\ v_{j1}\},\quad S^c=V\setminus S$$

修改 S^c 中各点的临时标号，对 $v_j\in S^c$

$$t(v_j)=\min\{t(v_j),p(v_{j1})+\omega(v_{j1},v_j)\}$$

新的 $t(v_j)$是 $v_j\in S^c$ 一步直接到 v_1，或者经过 v_{j1}两步到达 v_1 的最短距离.

（3）重复(2)，直到 v_k 进入 S 时停止，找出最短路径和距离.

例 1 图 7－2－1 所示是某地区交通运输路线的示意图. 用 Dijkstra 算法分别求从 v_0 到 v_3，v_0 到 v_4，v_0 到 v_7 的最短路.

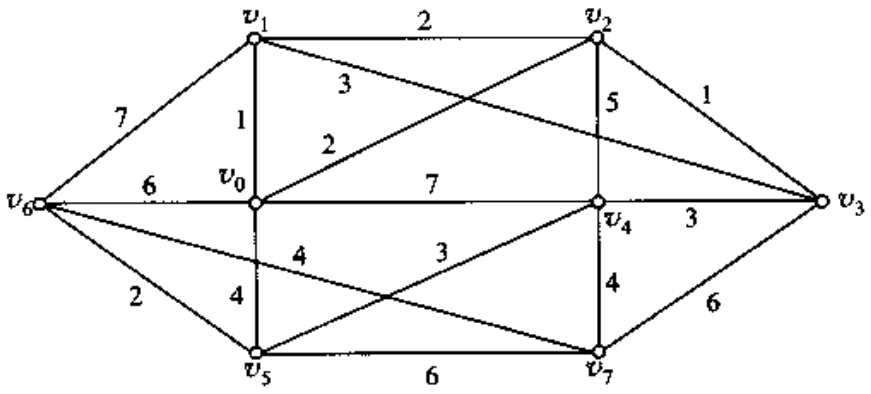


图 7－2－1 交通运输路线的示意图

中国国防科技网 http://www.81tech.com

解 利用 Dijkstra 算法进行计算. 第一次临时标号的值如表 7－2－1 的第一行所示.

$$S=\{v_0\},\ S^c=\{v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ v_5,\ v_6,\ v_7\}$$

在这些临时标号中，$t(v_1)=1$ 最小，给 v_1 赋予永久标号 $p(v_1)=1$. 令

$$S=\{v_0,\ v_1\},\ S^c=\{v_2,\ v_3,\ v_4,\ v_5,\ v_6,\ v_7\}$$

重新计算 S^c 中节点的临时标号

$$t(v_2)=\min\{t(v_2),p(v_1)+\omega(v_1,v_2)\}=\min\{2,1+2\}=2,$$

$$t(v_3)=\min\{t(v_3),p(v_1)+\omega(v_1,v_3)\}=\min\{\infty,1+3\}=4,$$

$$t(v_4)=\min\{t(v_4),p(v_1)+\omega(v_1,v_4)\}=\min\{7,1+\infty\}=7$$

$$t(v_5)=\min\{t(v_5),p(v_1)+\omega(v_1,v_5)\}=\min\{4,1+\infty\}=4$$

$$t(v_6)=\min\{t(v_6),p(v_1)+\omega(v_1,v_6)\}=\min\{6,1+7\}=6$$

$$t(v_7)=\min\{t(v_7),p(v_1)+\omega(v_1,v_7)\}=\min\{\infty,1+\infty\}=\infty$$

在这一轮的临时标号中，最小的是 $t(v_2)$，给它赋予永久标号 $p(v_2)=2$. 调整集合 S，S^c

$$S=\{v_0,\ v_1,\ v_2\},\ S^c=\{v_3,\ v_4,\ v_5,\ v_6,\ v_7\}$$

重新计算 S^c 中节点的临时标号

$$t(v_3)=\min\{t(v_3),p(v_2)+\omega(v_2,v_3)\}=\min\{4,2+1\}=3,$$

$$t(v_4)=\min\{t(v_4),p(v_2)+\omega(v_2,v_4)\}=\min\{7,2+5\}=7$$

$$t(v_5)=\min\{t(v_5),p(v_2)+\omega(v_2,v_5)\}=\min\{4,2+\infty\}=4$$

$$t(v_6)=\min\{t(v_6),p(v_2)+\omega(v_2,v_6)\}=\min\{6,2+\infty\}=6$$

$$t(v_7)=\min\{t(v_7),p(v_2)+\omega(v_2,v_7)\}=\min\{\infty,2+\infty\}=\infty$$

在这一轮的临时标号中，最小的是 $t(v_3)$，给它赋予永久标号 $p(v_3)=3$，调整集合 S，S^c

$$S=\{v_0,\ v_1,\ v_2,\ v_3\},\ S^c=\{v_4,\ v_5,\ v_6,\ v_7\}$$

重复这个过程，直到 v_4，v_5，v_6，v_7，进入集合 S 时结束计算. 具体计算可以用表格形式给出，所得结果列在表 7－2－1 中.

表 7－2－1

v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
$p(v_0)=0$	$t(v_1)=1$	$t(v_2)=2$	$t(v_3)=\infty$	$t(v_4)=7$	$t(v_5)=4$	$t(v_6)=6$	$t(v_7)=\infty$
	$p(v_1)=1$	$t(v_2)=2$	$t(v_3)=4$	$t(v_4)=7$	$t(v_5)=4$	$t(v_6)=6$	$t(v_7)=\infty$
		$p(v_2)=2$	$t(v_3)=3$	$t(v_4)=7$	$t(v_5)=4$	$t(v_6)=6$	$t(v_7)=\infty$
			$p(v_3)=3$	$t(v_4)=6$	$t(v_5)=4$	$t(v_6)=6$	$t(v_7)=9$

http://www.81tech.com

续表

v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
				$p(v_4)=6$	$t(v_5)=4$	$t(v_6)=6$	$t(v_7)=9$
					$p(v_5)=4$	$t(v_6)=6$	$t(v_7)=9$
						$p(v_6)=6$	$t(v_7)=9$
							$p(v_7)=9$

根据表 7－2－1 中 $p(v_j)$ 首次出现的位置，可以求出从 v_0 到 v_3 的最优路径为 $v_0v_2v_3$，最短路长度为 3；从 v_0 到 v_4 的最优路径为 $v_0v_2v_3v_4$，最短路长度为 6；从 v_0 到 v_7 的最优路径为 $v_0v_2v_3v_7$，最短路长度为 9. 事实上，表 7－2－1 已经给出了从 v_0 到所有点的最优路径和其长度，见图 7－2－2.

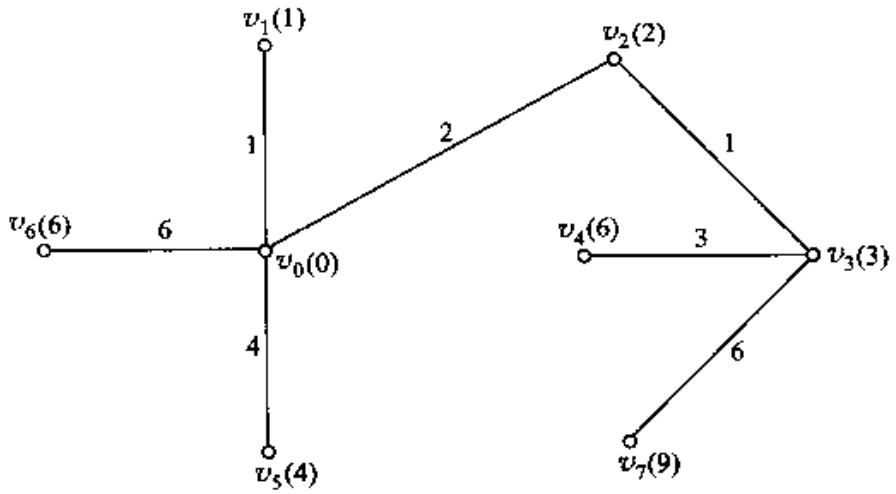


图 7－2－2　运输路线图 6－2－1 的最短路线

二、求赋权图中任意两点间的最短路

利用 Dijkstra 算法可以计算赋权图中一个节点到任意一节点的最短路，但计算赋权图中任意两点间的最短路时，下面的算法就比较简单.

（1）构造矩阵

$$\boldsymbol{D}^{(0)}=(d_{i,j}^{0})=(\omega_{i,j})$$

其中 $\omega_{i,j}$ 表示一步从 v_i 到 v_j 的距离.

（2）对 $k=1,2,\cdots,n$ 计算

$$\boldsymbol{D}^{(k)}=(d_{i,j}^{(k)}),\ (d_{i,j}^{(k)})=\min\{d_{i,j}^{(k-1)},d_{i,k}^{(k-1)}+d_{k,j}^{(k-1)}\},$$

$(d_{i,j}^{(k)})$ 表示从 v_i 到 v_j 且中间点仅为 v_1，v_2，$\cdots$，v_k 的 k 个点的所有路径中的最短路的距离. 于是，$\boldsymbol{D}^{(n)}=(d_{i,j}^{(n)})$ 中元素 $(d_{i,j}^{(n)})$ 就是从 v_i 到 v_j 的路径的最短长度.

中国国防科技网 http://www.81tech.com

例 2 求图 7－2－3 中任意两点之间的最短路径的长度.

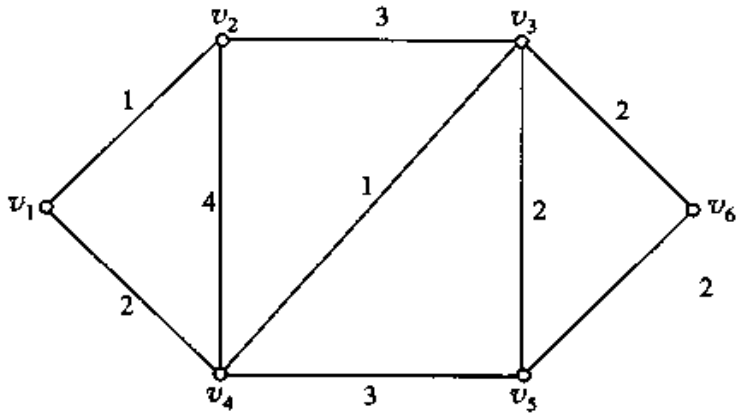


图 7－2－3 例 2 的赋权图

解 由图 7－2－3 得到

$$\boldsymbol{D}^{(0)}=\begin{pmatrix}0&1&\infty&2&\infty&\infty\\1&0&3&4&\infty&\infty\\\infty&3&0&1&2&2\\2&4&1&0&3&\infty\\\infty&\infty&2&3&0&2\\\infty&\infty&2&\infty&2&0\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{D}^{(0)}$ 中的元素 $(d_{i,j}^{0})=(\omega_{i,j})$ 表示一步从 v_i 到 v_j 的距离.

计算 $\boldsymbol{D}^{(1)}$ 中元素 $(d_{i,j}^{(1)})$,

$$(d_{1,1}^{(1)})=\min\{d_{1,1}^{(0)},\ d_{1,1}^{(0)}+d_{1,1}^{(0)}\}=\min\{0,0+0\}=0;$$
$$(d_{1,2}^{(1)})=\min\{d_{1,2}^{(0)},\ d_{1,1}^{(0)}+d_{1,2}^{(0)}\}=\min\{1,0+1\}=1;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(d_{2,3}^{(1)})=\min\{d_{2,3}^{(0)},\ d_{2,1}^{(0)}+d_{1,3}^{(0)}\}=\min\{3,1+\infty\}=3;$$
$$(d_{2,4}^{(1)})=\min\{d_{2,4}^{(0)},\ d_{2,1}^{(0)}+d_{1,4}^{(0)}\}=\min\{4,1+2\}=3;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\boldsymbol{D}^{(1)}=\begin{pmatrix}0&1&\infty&2&\infty&\infty\\1&0&3&3&\infty&\infty\\\infty&3&0&1&2&2\\2&3&1&0&3&\infty\\\infty&\infty&2&3&0&2\\\infty&\infty&2&\infty&2&0\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{D}^{(1)}$ 中的元素 $(d_{i,j}^{(1)})$ 表示一步从 v_i 到 v_j 的距离和从 v_i 经 v_1 两步到 v_j 的距离中的最小数.

http://www.81tech.com

计算 $\boldsymbol{D}^{(2)}$ 中的元素 $(d_{i,j}^{(2)})$，

$$(d_{1,3}^{(2)}) = \min\{d_{1,3}^{(1)},\ d_{1,2}^{(1)} + d_{2,3}^{(1)}\} = \min\{\infty, 1+3\} = 4;$$

$$(d_{5,6}^{(2)}) = \min\{d_{5,6}^{(1)},\ d_{5,2}^{(1)} + d_{2,6}^{(1)}\} = \min\{2, \infty + \infty\} = 2;$$

……

$$\boldsymbol{D}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 2 & \infty & \infty \\ 1 & 0 & 3 & 3 & \infty & \infty \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 3 & \infty \\ \infty & \infty & 2 & 3 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & 2 & \infty & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{D}^{(2)}$ 中的元素 $(d_{i,j}^{(1)})$ 表示一步从 v_i 到 v_j 的距离、从 v_i 经 v_1 两步到 v_j 的距离、和从 v_i 经 v_1、v_2 三步到 v_j 中的最小数.

同理计算 $\boldsymbol{D}^{(3)}$，$\boldsymbol{D}^{(4)}$，$\boldsymbol{D}^{(5)}$，$\boldsymbol{D}^{(6)}$ 中的元素得

$$\boldsymbol{D}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 2 & 6 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 3 & 5 & 5 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 6 & 5 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 6 & 5 & 2 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}^{(4)} = \boldsymbol{D}^{(5)} = \boldsymbol{D}^{(6)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 3 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 2 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵 $\boldsymbol{D}^{(6)}$ 中的元素 $d_{i,j}^{(6)}$ 就是从 v_i 到 v_j 的最小距离.

该算法的优点是容易用计算机实现，缺点是没有给出最短路径的信息，需要在计算过程中记录下标的信息，即记录在矩阵的计算过程中所取的最小值是 $d_{i,j}^{(k-1)}$，$d_{i,k}^{(k-1)} + d_{k,j}^{(k-1)}$ 中的哪一个.

§7.3 网络的最大流

网络的最大流是一个与有向赋权图有关的问题，这一节我们介绍网络流图和最大流的算法.

中国国防科技网 http://www.81tech.com

一、网络流图

网络流图是满足下列条件的有向赋权图 $G=(V,E,W)$.

(1) 有一个发点 s 和收点 s';

(2) 每条边都有一个容量(权)$\omega(v_i,v_j)$.

网络流图的实际含义是发点可以看作运输问题的起点，收点可以看作运输问题的终点，边可以看作运输线路，权数可以看作该线路的运输能力.

设 $f(v_i,v_j)$ 是定义在有向赋权图 $G=(V,E,W)$ 边集 E 上的一个整值函数，满足

(1) $f(v_i,v_j)\leqslant\omega(v_i,v_j)$;

(2) 除过发点和收点外，$\sum_x f(v_i,x)=\sum_y f(y,v_i)$，$(y,v_i)$ 和 (v_i,x) 分别是进入 v_i 和离开 v_i 的边;

(3) $\sum_x f(x,s')=\sum_y f(s,y)=Q\geqslant 0$.

则称 $f(v_i,v_j)$ 是 $G=(V,E,W)$ 的流.

该定义的实际意义分别为:

(1) 每条边的实际流量不超过它的容量;

(2) 流入和流出每个内部节点的流量相等(物质不灭,无损耗);

(3) 从发点流出的流量等于流入收点的流量.

称

$$Q(f)=\sum_x f(s,x)=\sum_y f(y,s')$$

为流 $f(v_i,v_j)$ 的流值.

例 1 对于有向赋权图 7-3-1，可以定义下列几个流:

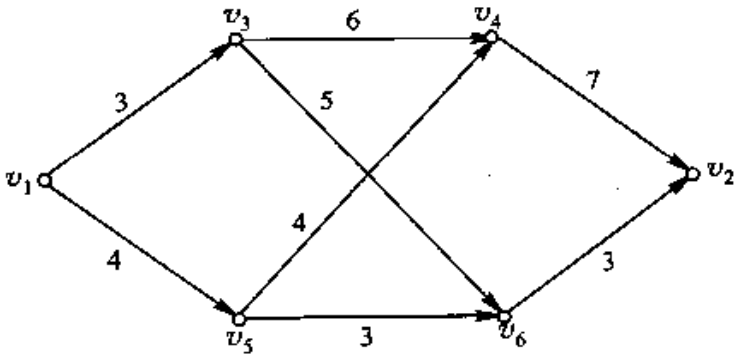


图 7-3-1

(1) f_0: 零流: $f(v_i,v_j)=0$;

(2) f_1: $f(v_1,v_3)=f(v_3,v_4)=f(v_4,v_2)=1$，其余 $f(v_i,v_j)=0$;

http://www.81ttech.com

(3) f_2: $f(v_1,v_5)=f(v_5,v_6)=f(v_6,v_2)=2$,其余$f(v_i,v_j)=0$;

(4) f_3: $f(v_1,v_5)=f(v_5,v_6)=f(v_6,v_2)=1$,$f(v_1,v_3)=f(v_3,v_4)=f(v_4,v_2)=2$,其余$f(v_i,v_j)=0$;

由例1看到，对同一网络流图，可以定义不同的流，流值不同. 如上面的几个流，$Q(f_0)=0$,$Q(f_1)=1$,$Q(f_2)=2$,$Q(f_3)=3$，于是，就需要讨论最大流问题：求一个网络流图的一个流，使得$Q(f)$最大. 为了求出网络的最大流，需要下面这些概念.

截集 设V_1是节点集V的一个子集，$V_2\cup V_1=V$，$s\in V_1$，$s'\notin V_1$，则称(V_1,V_2)为网络流G的一个截集(割集).

容量 从V_1到V_2的各边的权数之和称为截集(V_1,V_2)的容量，记为

$$\omega(V_1,V_2)=\sum_{x\in V_1,y\in V_2}\omega(x,y).$$

例如，在图7-3-1的一些截集和它们容量分别为

(1) $V_1=\{v_1\}$，$V_2=\{v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$，$\omega(V_1,V_2)=7$;

(2) $V_1=\{v_1,v_3,v_4,v_5,v_6\}$，$V_2=\{v_2\}$，$\omega(V_1,V_2)=10$;

(3) $V_1=\{v_1,v_3,v_5\}$，$V_2=\{v_4,v_6,v_2\}$，$\omega(V_1,V_2)=18$;

(4) $V_1=\{v_1,v_5\}$，$V_2=\{v_2,v_4,v_3,v_6\}$，$\omega(V_1,V_2)=10$.

不同的截集容量不同，容量最小的截集称为最小截集，其容量称为最小容量. 从截集V_1到V_2的流量与截集容量的关系为

$$f(V_1,V_2)=\sum_{x\in V_1,y\in V_2}f(x,y)\leqslant\sum_{x\in V_1,y\in V_2}\omega(x,y)=\omega(V_1,V_2)$$

即，截集(V_1,V_2)的任一流的流量不会超过截集的容量. 已经证明了下面的结果.

定理7.1 (1) 设f是网络流图的一个流，则对任意一个截集(V_1,V_2)，有$Q(f)=f(V_1,V_2)$;

(2) 设f_0是网络流图的最大流，(V_1,V_2)是截集，则(V_1,V_2)是最小截集的充要条件是

$$\omega(V_1,V_2)=Q(f_0).$$

定理7.1的(1)表明流入和流出任意一个截集的值相等(物质不灭)；(2)给出了判别最大流或最小截集的一个准则，由此可以设计出一种算法.

二、最大流的算法

我们的问题是求网络流图$G=(V,E,W)$的一个流$f(v_i,v_j)$，使得$Q(f)$最大. 所使用的方法是Ford-Fulkerson算法，其思路是由一个可行流出发，逐步扩充，使其成为最大流. Ford-Fulkerson算法的具体流程如下.

中国国防科技网 http://www.81tech.com

（1）初始化：任意给出网络流图的一个流（如零流）；

（2）标号过程：寻找一条可以扩充的道路. 标号分为两部分，第一个标号表示它的标号是从哪一点得到的，以便找到增广链，第二个标号是为了调整增广链的流量使用的.

步骤 1：给发点标号 $s(+s', +\infty)$；

步骤 2：设顶点 x 已经标号，对与 x 相连的顶点 y 按下列规则标号：

若 $(x,y)\in E$，$\omega(x,y)>f(x,y)$，令 $\delta_y=\min\{\omega(x,y)-f(x,y),\delta_x\}$，给 y 标号 $y(+x,\delta_y)$，其中 $+x$ 表示 y 的先行点，δ_y 表示 (x,y) 边可以增加的流量. 若 $(y,x)\in E$，$f(y,x)>0$，令 $\delta_y=\min\{f(y,x),\delta_x\}$，给 y 标号 $y(-x,\delta_y)$，其中 $-x$ 表示 y 的后继点，δ_y 表示通过 (y,x) 边可以增加经过 x 的流量. 重复步骤 1 和步骤 2，直到收点 s'. 若 s' 可以获得标号. 转向增广过程（3）；若 s' 无法获得标号，且不存在其他可以标记的顶点时结束，所得到的流就是最大流.

（3）增广过程：根据标号利用反向追踪法确定增广链，并调整扩充流量.

步骤 1：令 $u=s'$；

步骤 2：若 u 的标号为标号 $u(+v,\delta_{s'})$，则 $f(v,u)=f(v,u)+\delta_{s'}$；若 u 的标号为 $u(-v,\delta)$，则 $f(u,v)=f(u,v)-\delta_{s'}$；

步骤 3：若 $v=s$，则去掉全部标号，转向（2）；否则，转向增广过程的步骤 2.

例 2 求网络流图 7－3－2 的最大流.

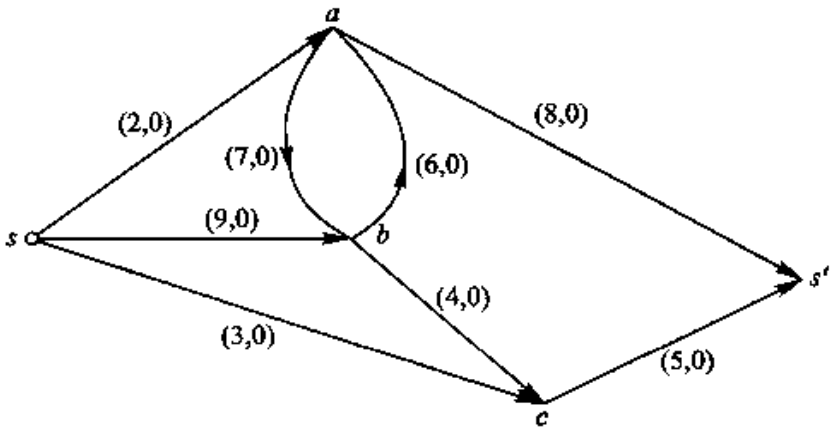


图 7－3－2 有零流的赋权图

解 初始化，取零流 $f(v_i,v_j)=0$，进行标号：

$$s(+s', +\infty),$$

$$(s,a)\in E,\omega(s,a)>f(s,a),\delta_a=\min\{2-0,+\infty\}=2,a(+s,2)$$

$$(a,s')\in E,\omega(a,s')>f(a,s'),\delta_{s'}=\min\{8-0,2\}=2,s'(+a,2)$$

http://www.81tech.com

增广：$u=s'$. s'的标号为$s'(a,2)$，$f(a,s')=f(a,s')+\delta_{s'}=0+2=2$；$a\neq s$，$a$的标号$a(+s,2)$，$f(s,a)=f(s,a)+\delta_a=0+2=2$. 其余边上的流量不变.

继续标号：

$$s(+s',+\infty)$$

$$(s,c)\in E,\omega(s,c)>f(s,c),\delta_c=\min\{3-0,+\infty\}=3,c(+s,3)$$

$$(c,s')\in E,\omega(c,s')>f(c,s'),\delta_{s'}=\min\{5-0,3\}=3,s'(+c,3)$$

增广：$u=s'$. s'的标号为$s'(c,3)$，$f(c,s')=f(c,s')+\delta_{s'}=0+3=3$；$c\neq s$，$c$的标号$c(+s,3)$，$f(s,c)=f(s,c)+\delta_c=0+3=3$. 其余边上的流量不变.

重复标号：

$$s(+s',+\infty)$$

$$(s,b)\in E,\omega(s,b)>f(s,b),\delta_b=\min\{9-0,+\infty\}=9,b(+s,9)$$

$$(b,a)\in E,\omega(b,a)>f(b,a),\delta_a=\min\{6-0,9\}=6,a(+b,6)$$

$$(a,s')\in E,\omega(a,s')>f(a,s'),\delta_{s'}=\min\{8-2,6\}=6,s'(+a,6)$$

增广：$u=s'$. s'的标号为$s'(a,6)$，$f(a,s')=f(a,s')+\delta_{s'}=2+6=8$；$a\neq s$，$a$的标号$a(+b,6)$，$f(b,a)=f(b,a)+\delta_{s'}=0+6=6$. $b\neq s$，b的标号为$b(+s,9)$，$f(s,b)=f(s,b)+\delta_{s'}=0+6=6$，其余边上的流量不变.

再一次标号：

$$s(+s',+\infty)$$

$$(s,b)\in E,\omega(s,b)>f(s,b),\delta_b=\min|9-6,+\infty|=3,b(+s,3)$$

$$(b,c)\in E,\omega(b,c)>f(b,c),\delta_c=\min|4-0,3|=3,c(+b,3)$$

$$(c,s')\in E,\omega(c,s')>f(c,s'),\delta_{s'}=\min|5-3,3|=2,s'(+c,2)$$

增广：$u=s'$. s'的标号为$s'(c,2)$，$f(c,s')=f(c,s')+\delta_{s'}=3+2=5$；$c\neq s$，$c$的标号$c(+b,3)$，$f(b,c)=f(b,c)+\delta_{s'}=0+2=2$. $b\neq s$，b的标号为$b(+s,3)$，$f(s,b)=f(s,b)+\delta_{s'}=6+2=8$，其余边上的流量不变.

再一次重复标号：

$$s(+s',+\infty)$$

$$(s,b)\in E,\omega(s,b)>f(s,b),\delta_b=\min|9-8,+\infty|=1,b(+s,1)$$

$$(b,c)\in E,\omega(b,c)>f(b,c),\delta_c=\min|4-2,3=1|=1,c(+b,1)$$

$$(c,s')\in E,\omega(c,s')\leqslant f(c,s')$$

s'从c无法获得标号

$$(a,b)\in E,f(a,b)=0,(b,a)\in E,\omega(b,a)\leqslant f(b,a)$$

a从b无法获得标号，s'从a无法获得标号. 故s'无法获得标号，算法结束.

事实上，$V_1=\{s,a,b,c\}$，$V_2=\{s'\}$是一个割集，且从V_1到V_2的流量与割集的容量相等，所求得的就是最大流. 最大流为

中国国防科技网 http://www.81tech.com

$$f(s,a)=2,\ f(a,s')=8,\ f(s,b)=8,\ f(b,c)=2$$
$$f(b,a)=6,\ f(c,s')=5,\ f(s,c)=3,\ f(a,b)=0$$

最大流图如下.

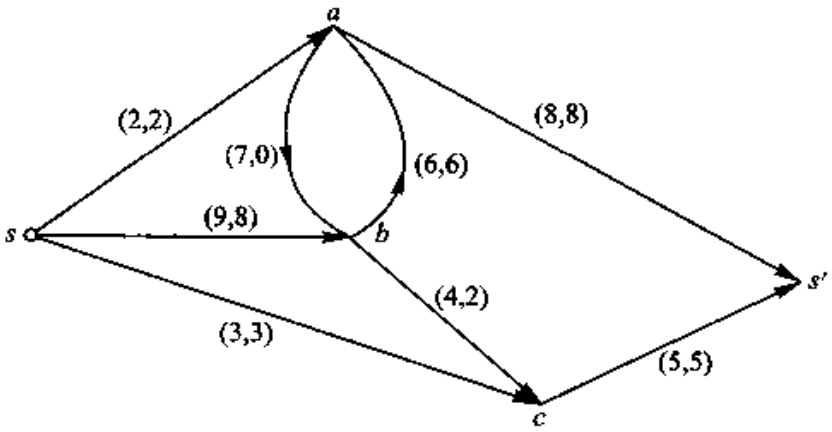


图 7-3-3 赋权图 7-3-2 的最大流

§7.4 二分图与锁具装箱问题

图论和网络优化的内容很丰富，我们无法全部介绍，仅在这里结合全国大学生数学建模竞赛的题目介绍一点二分图的知识和应用.

一、锁具装箱问题

锁具在人类文明社会里发挥着“拘系束缚”的功能，锁具在规范社会行为、捍卫人们的生命财产安全、维护社会的稳定中有重要的作用. 最早的锁是主人为防他人开启而设的简单的机关. 应用在门上最简单的锁就是门闩. 我国古代有石锁，并无钥匙，是以绳索或铁链束缚. 商周时期，生产资料私有制进一步发展，贫富差距进一步加剧，社会矛盾十分突出，与此同时，冶炼技术成熟并立即被应用于制锁行业. 于是，出现了用钥匙才能开启的铜锁和铁锁，以钥匙的不同而匹配不同的锁，随着科学技术的迅猛发展，机械锁也有了长足的发展，现代的机械锁具已有一百多年的历史，锁芯里加入了长短不一的弹子，要用相应齿形的钥匙来打开. 以后，又发展到了密码锁、磁性锁、电子锁、激光锁、声控锁等等，在传统钥匙的基础上，加了一组或多组密码，不同声音、不同磁场，不同声波、不同光束光波、不同图像(如指纹、眼底视网膜等)来控制锁的开启. 现在，锁具已形成一个十分庞大的家族，而且正在不断地改进和更新换代，不断地向世界展示着它的神奇.

弹子锁具是锁具家族中的一个重要组成部分，目前仍然在广泛使用. 弹子

http://www.81tech.com

锁具在设计、制造和销售中一个重要的问题就是减少互开率，提高安全性. 1988 年颁布的国家标准中对弹子锁具的互开率有明确的定义，例如，优等品和一等品的互开率不超过 0.204%；合格品的互开率不超过 0.286%. 对抽样、检验和互开率的计算都有严格的规定. 由于机械加工的限制，弹子锁具的互开是不可避免的，但可以通过适当的装箱和销售减少互开的情形. 1994 年全国大学生数学建模竞赛的一个题目就是关于弹子锁具的装箱问题.

某厂生产一种弹子锁具，每个锁具的钥匙有 5 个槽，每个槽的高度从{1，2,3,4,5,6} 6 个数(单位略)中任取一数. 由于工艺及其他原因，制造锁具时对 5 个槽的高度还有两个限制：至少有 3 个不同的数，相邻两槽的高度之差不能为 5，满足以上条件制造出来的所有互不相同的锁具称一批.

从顾客的利益出发，自然希望在每批锁具中“一把钥匙开一把锁”，但是在当前工艺条件下，对于同一批中两个锁具是否能够互开，有以下试验结果：若二者相对应的 5 个槽的高度中有 4 个相同，另一个槽的高度差为 1，则能互开；在其他情形下，不可能互开.

原来，销售部门在一批锁具中随意地取每 60 个装一箱出售，团体顾客往往购买几箱到几十箱，他们抱怨购得的锁具会出现互开的情形，现聘你为顾问，回答并解决以下的问题：

(1) 每一批锁具有多少个，装多少箱.

(2) 为销售部门提出一种方案，包括如何装箱(仍是 60 个锁具一箱)，如何给箱子以标志，出售时如何利用这些标志使团体顾客不再或减少抱怨.

(3) 采取你提出的方案，团体顾客的购买量不超过多少箱，就可以保证一定不会出现互开的情形.

二、一批锁具的数量和装箱方案

锁具装箱的第一问完全是一个数学问题，可以用计算机程序、排列组合法、递推法等不同的方法去解决，我们在这里介绍用图论的方法解决这一问题.

每把锁都有 5 个槽，每个槽有 6 个高度，至少有三个不同高度的槽. 且相邻槽高差不为 5. 我们先求出无相邻高差为 5 的锁具数量，再减去仅有一个、两个槽高的锁具数目. 先计算由 1，2，3，4，5，6 构成无 1，6 相邻的情况的数目. 为此，构造一个 6 节点的图：将 1，2，3，4，5，6 这 6 个数作为 6 个节点，当两个数字可以相邻时，这两个节点之间加一条边，每个节点有自己到自己的一条边. 我们得到了锁具各槽之间的关系示意图(图 7－4－1).

该图的邻接矩阵为

中国国防科技网 http://www.81tech.com

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&0\\1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1\\0&1&1&1&1&1\end{pmatrix}$$

邻接矩阵 A 的所有元素之和表示两个槽高无 1，6 相邻的锁具的个数. 每个无 1，6 相邻的 5 位数与图 7－4－1 中长度为 4 的一条链 1－1 对应，如 12345，11111，22335 等. A 的 k 次方 A^k 中各元素之和就是长度为 k 的链的个数. 事实上，从这个具体问题可以看出，A^2 中第 i 行第 j 列的元素指从 i 开始经过两条边到达 j 的链数，即从 i 开始经过一条边到 k，再从 k 经过一条边到达 j，i 和 j 就决定了中间顶点 k 的数目.

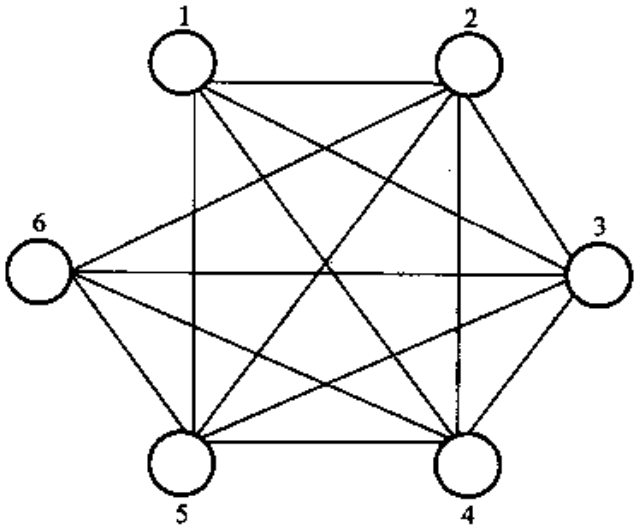


图 7－4－1　锁具备槽之间的关系示意图

于是，利用 Matlab 就很容易地得到

$$A^4=\begin{pmatrix}141&165&165&165&165&140\\165&194&194&194&194&165\\165&194&194&194&194&165\\165&194&194&194&194&165\\165&194&194&194&194&165\\140&165&165&165&165&141\end{pmatrix},$$

将 A^4 中元素求和可得相邻高差不为 5 的锁具数为 6 306 把. 但这 6 306 把锁具中包含了仅有一个、两个槽高的锁具，需要从其中减去. 需减去的锁具的个数为

http://www.81tech.com

$$6+(C_6^2-1)(C_5^1+C_5^2+C_5^3+C_5^4)=426$$

其中，第一个 6 为仅有 1 个槽高的锁具；C_6^2 为 1，2，3，4，5，6 这 6 个数中取两个的取法，但扣除 1，6 这一种取法；C_5^1，C_5^2，C_5^3，C_5^4 是 5 个槽中有 1，2，3，4 个槽用所取出的这两个数中的一个.

最后得到一批锁具的个数为 6 306 − 426 = 5 880，总共装 98 箱. 这样，就用图论的知识成功地解决了一批锁具的数量问题，这个方法比用别的方法简便，且容易推广.

为了给出好的装箱方案，我们先对锁具进行分类. 当两个锁相对应的 5 个槽的高度中有 4 个相同，另一个槽的高度差为 1 时，它们可以互开. 我们发现下面的规律：

定理 7.2 在一批锁具中，设能够互开的两锁具的槽高排列为 h_1，h_2，h_3，h_4，h_5 和 h_1'，h_2'，h_3'，h_4'，h_5'，则其各槽高度之和 $H=\sum_{i=1}^{5}h_i$ 和 $H'=\sum_{i=1}^{5}h_i'$ 必然具有不同的奇偶性.

因为互开的两个锁具有四个槽高度相同，仅有一个槽高度差 1，那么高度之和 $H=\sum_{i=1}^{5}h_i$ 和 $H'=\sum_{i=1}^{5}h_i'$ 必为两个相邻的自然数，而两个相邻的自然数中，必有一个为奇数，另一个为偶数. 根据定理 7.2，我们把锁具按钥匙槽高度之和 H 的奇偶分为两类，槽高之和为奇数的属于奇类，槽高之和为偶数的属于偶类. 这样，能够互开的锁具一定分属于奇类和偶类.

现在就需要求出奇类和偶类中锁具的个数，对一个锁具的钥匙槽高度的排列 h_1，h_2，h_3，h_4，h_5，我们用 7 分别减去每个高度，形成另一个与其对偶的排列：$7-h_1$，$7-h_2$，$7-h_3$，$7-h_4$，$7-h_5$. 记原排列的高度和为 $H_0=\sum_{i=1}^{5}h_i$，新排列的高度和为 $H_1=\sum_{i=1}^{5}7-h_i$，则有 $H_0+H_1=35$，H_0 和 H_1 中必有一个偶数和一个奇数，而每一个奇(偶)类中的排列必能从偶(奇)类中找出与其对应的对偶排列，这种对偶关系是一一对应的. 所以，奇类中锁具数和偶类中锁具数相等，即奇类和偶类中的锁具数都为 2 940 件.

基于以上讨论，我们可得到如下方案：

(1) 生产锁具过程中记录每个钥匙槽的高度，从而确定 H 的奇偶性，将生产出来的锁具分奇类和偶类.

(2) 将奇类和偶类分别装为 49 箱并做“奇”和“偶”的标志.

这样，销售部门可以根据所做标记只选同类的箱子售给团体顾客. 只要他们一次购买的箱数不超过 49 箱(即 2 940 个锁具)，我们就可以保证他们的锁

中国国防科技网 http://www.81tech.com

具不会有互开现象，他们也就不会抱怨了. 但按槽高之和的奇偶分类是不是最优方案，即能否找到更好的分类装箱方案，使不可互开的锁具个数大于2 940. 所给方案最优性的证明可以通过图论知识和计算机实现. 接下来我们先介绍一点图论中二分图的知识.

三、二分图及其匹配

图是节点集 V 和边集 E 组成的集合对，图是描述现实世界中事物及其联系的一种数学形式，它有着广泛的应用背景和重要的理论价值. 近年来随着计算机的普及获得了迅速的发展. 二分图 $G=(V,E)$ 是一种特殊图，它的节点集可以分为两个互不相交的点集 V_1 和 V_2，且它的任一条边必连接 V_1 和 V_2 中的两个节点.

二分图研究的一个重要方面是匹配问题，它在“婚姻”问题、指派问题、“相异代表系”问题等方面有着非常重要的意义.

二分图 $G=(V,E)$ 的边集 E 的一个子集 $M\in E$ 称为它的一个匹配是指 M 中的任意两条边都没有公共节点. M 中边的个数定义为 M 的基数，记为 $|M|$. M 中的边所连接的所有节点称为关于 M 的饱和节点，若 $v\in V$，且没有 M 中的边与 v 相连，则称 v 为关于 M 的非饱和节点. 设 M 是二分图 $G=(V,E)$ 的一个匹配，若不能增添 E 中边使 M 仍然为 G 的匹配，则称 M 为 G 的一个极大匹配. 所有 G 的极大匹配中基数最大的匹配称 G 的最大匹配. 在实际应用及图论研究中最感兴趣的问题是二分图的完全匹配和完美匹配.

若 M 是 G 的一个匹配，且 V_1（或 V_2）中的所有节点关于 M 饱和，则称 M 是 G 的一个完全匹配. 若 V 中所有的节点关于匹配 M 饱和，则称 M 是 G 的一个完美匹配. 完美匹配存在的一个必要条件是节点集 V_1 与 V_2 的基数相等，即 $V_1=V_2$.

为了研究完美匹配的存在性，先引入交错路的概念. 设 M 是二分图 $G=(V,E)$ 的一个匹配，P 是 G 中的一条路径，如果 P 的边交错在 M 和 $E\setminus M$ 中出现，则称 P 是 G 中的一条 M - 交错路. 起点和终点都是 G 关于 M 的非饱和点的交错路称为一条 M 可扩路. 匹配 M 是图 G 的最大匹配条件由下面的定理给出：

定理 7.3 M 是 G 的最大匹配的充分必要条件是 G 不含 M 可扩路.

设 $A\subset V_1$ 是二分图 $G=(V,E)$ 的一个子集，$N(A)$ 是 V_2 中与 A 相连的节点的集合，则存在从 V_1 到 V_2 的完全匹配的条件是：

定理 7.4 G 有从 V_1 到 V_2 完全匹配的充要条件是对 V_1 的任意一个子集 $A\subset V_1$ 均有 $|N(A)|\geqslant A$.

定理 7.4 的一个比较常用的推论是：若 V_1 中的每个节点至少有 m 条边，V_2 中的每个节点最多有 m 条边，则 G 有一个从 V_1 到 V_2 的完全匹配.

http://www.81tech.com

以上这些定理在图 G 的基数 $|V|$ 较小时，可以直接验证，当 $|V|$ 稍大时，除 k 正则图等一些特殊情况外，很难验证，要借助于计算机通过一定的算法来实现. 下面就介绍最大匹配和完全匹配的 Edmonds 算法，这是根据这两个定理的证明和推论给出的求完全匹配的算法.

Edmonds 算法的主要步骤为：

(1) 任意给出 G 的一个初始匹配 M.

(2) 如果 M 已经饱和了 V_1 中的所有节点，则 M 是 G 的一个完全匹配，计算结束. 否则转下一步.

(3) 找出 V_1 中的一个非饱和点 x，令 $A=\{x\}$，$B=\varnothing$.

(4) 考察 A 的邻接点，如果 $N(A)=B$，则图 G 不存在完全匹配，计算结束. 否则转下一步.

(5) 在 V_2 中找出一点 $y\in N(A)\setminus B$.

(6) 如果 y 是 M 的饱和点，则在 V_1 中找出 y 的配对点，令 $A=A\cup\{z\}$，$B=B\cup\{y\}$，转第 4 步，否则进行下一步.

(7) 存在一条从 x 到 y 的可扩路 P，由定理 7.3 知，M 不是 G 的最大匹配，将 M 与 P 中的边进行选择调整，使得新的 M 的基数比原来的基数多 1，转向第 2 步.

对任意基数有限的二分图 G，Edmonds 算法总会给出完全匹配的存在性或者不存在性，而存在性是通过给出一个完全匹配得到的.

现在就可以通过计算机编程计算证明上面给出的奇偶装箱方案最优. 证明的思路就是利用 Edmonds 算法找到槽高之和为奇偶锁具的一个完美匹配.

利用循环计算可以得到满足上述条件的一批锁总共有 5 880 把，为了考虑互开问题，记第 k 把为 $a^{(k)}=(a_1^{(k)},a_2^{(k)},a_3^{(k)},a_4^{(k)},a_5^{(k)})$，$k=1,2,\cdots,5\,880$，其中 $a_i^{(k)}$ $(i=1,2,3,4,5)$ 是第 k 把锁钥匙的第 i 个槽高. 引入第 k 把锁的特征数 $s_k=a_1^{(k)}+a_2^{(k)}+a_3^{(k)}+a_4^{(k)}+a_5^{(k)}$，$s_k$ 的取值范围是 8 到 27 之间的自然数. 通过数值计算容易得到与 s_k 对应的锁的把数，见表 7-4-1.

表 7-4-1

k	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
s_k	20	50	120	162	251	322	405	508	539	563
k	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
s_k	563	539	508	405	322	251	162	120	50	20

特征数为奇数和偶数的锁各有 2 940 把. 由互开的条件，显然特征数为奇数的锁不能互开. 特征数为偶数的锁也不能互开，即若按特征数的奇偶性分，不能互开的锁有 2 940 把. 现在的问题是有无其他更好的分法，使不可互开的

中国国防科技网 http://www.81tech.com

锁数再增加一些. 从直观上觉得 2 940 把已是不可互开锁的最大数目，且按特征数的奇偶分类是一个简单易行的方法. 但从理论上严格证明这一结果却不容易. 我们利用二分图匹配理论来解决上述问题. 将任何一把锁 $a^{(k)}$ 看作图 G 的一个节点，如果 $a^{(k)}$ 与 $a^{(j)}$ 可以互开，则就在 $a^{(k)}$ 与 $a^{(j)}$ 之间连一条边 $e=(a^{(k)}, a^{(j)})$，于是 $G=(|a^{(k)}|, E)$ 就是一个图，由于特征数为奇偶数的锁内部不能互开，所以利用特征数和奇偶性将锁分成两部分，X 和 Y：

$$X=\left\{(a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, a_3^{(k)}, a_4^{(k)}, a_5^{(k)}) \,\middle|\, \sum_{i=1}^{5} a_i^{(k)}=2n+1\right\}$$

$$Y=\left\{(a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, a_3^{(k)}, a_4^{(k)}, a_5^{(k)}) \,\middle|\, \sum_{i=1}^{5} a_i^{(k)}=2n\right\}$$

X 和 Y 内部节点没有边相连，故 G 是一个二分图，数值计算的结果表明，G 中每个节点至少有 4 条边与之相连，最多有 10 条边与之相连. 由于 X、Y 中各有节点 2 940 个，定理 7.4 的理论结果不好利用，我们用 Edmonds 算法利用计算机求出 X 与 Y 之间的一个完美匹配，从而说明不可互开锁的把数最多是 2 940.

由于图 G 有 5 880 个节点，存贮和计算时就需要设法找到一种好的途径：尽量的减少内存，找到尽可能大的初始匹配，找到可扩路的有效算法.

（1）存储问题的处理. 将 X 与 Y 两类锁中的 5 个槽高用一个 5 位整数来刻画，即将第 k 把锁 $a^{(k)}=(a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, a_3^{(k)}, a_4^{(k)}, a_5^{(k)})$ 用整数

$$a_k=10\,000a_1^{(k)}+1\,000a_2^{(k)}+100a_3^{(k)}+10a_4^{(k)}+a_5^{(k)}$$

来表示. 这个 $a^{(k)}$ 与 A_k 之间的转换保持了每个锁具的全部特征. 在具体计算和判断互开性时，可以由 a_k 转化成 $a^{(k)}$ 进行. 求 $a^{(k)}$ 的匹配顶点，就是找出与 $a^{(k)}$ 可互开的锁具，对 $a^{(k)}$ 的各个分量加、减 1 进行取舍即可，故不需要存储量. 在整个过程中仅需记录每把锁及其匹配信息，再加上一些中间变量，整个变量的个数不超过 24 000 个，一般微机都可进行.

（2）初始匹配的确定. 根据锁具的特征及编码规则，特征数为 8 的锁只能和特征数为 9 的锁匹配，特征数是 9 的锁只能与特征数为 8 的锁和特征数为 10 的锁匹配……所以我们从特征数为 8 的锁开始，在特征数为 9 的锁中寻求它的一个完全匹配；对特征数为 9 的锁的剩余部分，在特征数为 10 的锁中寻求它的匹配锁具，依次类推，由于每次取出一把锁后，只是在特征数差 1 的锁中寻找匹配，而不是在 2 940 把锁中寻找，这就节约了工作量，加快了运算速度. 根据这一思想上机计算得出的初始匹配 M 的基数是 2 928，即在奇偶锁具之中，各有 12 把锁还没有配对，这为下面利用 Edmonds 算法提供了非常好的基础.

（3）可扩路的寻找. 通过有效的算法寻找一条 M - 可扩路是 Edmonds 算法的关键. 可扩路的算法思路如图 7 - 4 - 2 所示，在 Y 中找出一个 M 不饱和

点 y_1，在 X 中求所有与 y_1 邻接的点 $x_1, x_2, \cdots, x_k$；若这些顶点中有一个 x_{k0} 关于 M 未饱和，则 (y_1, x_{k0}) 就可以加到 M 中去，M 的基数就可加 1，未匹配的锁具数目就会减 1；否则求出 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 关于 M 中的匹配顶点 $z_1, z_2, \cdots, z_k \in Y$，并找出它们的所有邻接点 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_j \in X$，若有 ω_{j0} 关于 M 未饱和，则将边 (z_{j0}, ω_{j0})，(y_1, x_{j-}) 加到 M 中，且减去 M 中的边 (x_{j0}, z_{j0})，这样，M 的基数又会加 1，循环下去，如果图 7－4－2 中的树不能再扩张，还没有找到从 y_1 出发的可扩路，则 y_1 是不能再匹配的点，由此结束算法，指出完美匹配的不存在性．在实际计算中，由于标记编码方面的困难，我们可以沿着一条链走下去，逐步加粗这个树的计算方法．

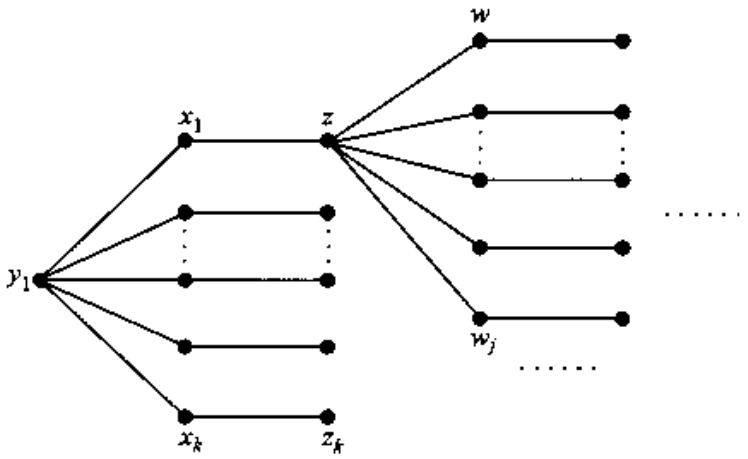
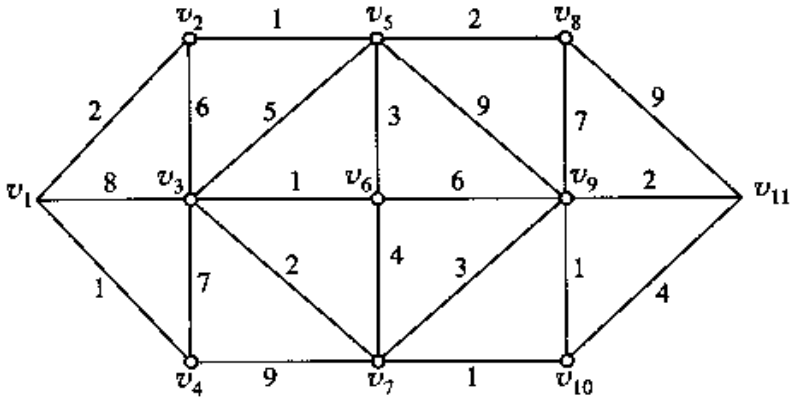


图 7－4－2　寻找 M－可扩路

根据以上的算法和思路编程上机后可以得到一个完美匹配，从而说明 2 940 是不可互开锁的最大数，按奇分类装箱是一个最优方案．



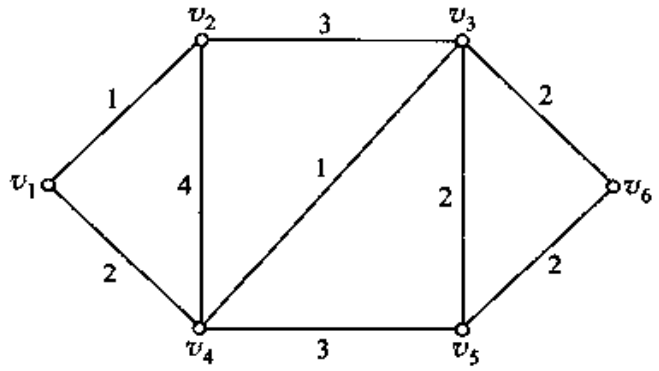
1. 求下图所示的赋权图中 v_1 到各点的最短路．



习题 1 中的赋权图

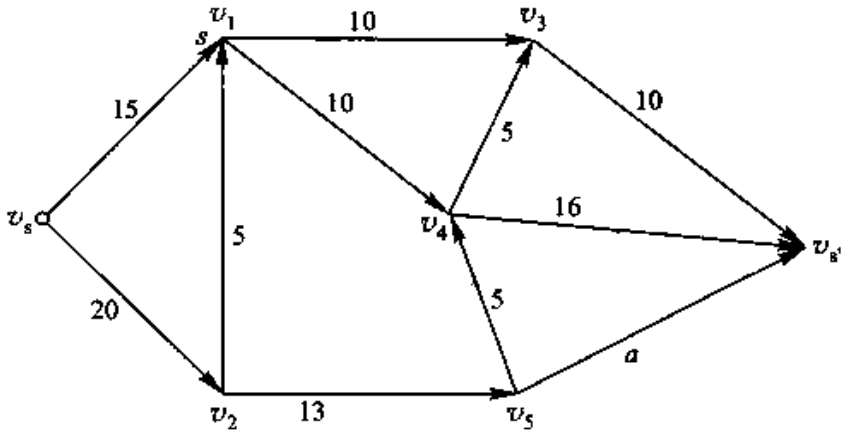
中国国防科技网 http://www.81tech.com

2. 求下图所示的赋权图中 v_1 到各点的最短路.



习题 2 中的赋权图

3. 求下图所给的网络流图的最大流.



习题 3 中的网络流图

4. 某学校有 m 个教师 $x_1, x_2, \cdots, x_m$，n 个班级 $y_1, y_2, \cdots, y_n$，x_i 教师为 y_j 班每天上课 a_{ij} 学时，试安排一个授课表，使学校每天的上课时间最少. 若只有指定的 k 个教室可用，全校每天至少安排几节课?

参考文献

[1] 费培之. 图和网络及其应用. 成都：四川大学出版社，1996

[2] 周义仓，赫孝良. 数学建模实验. 西安：西安交通大学出版社，1999

第8章 计算机仿真

仿真是对真实事物的模拟，也就是用一个模型来模仿真实的系统. 计算机仿真是用计算机对一个系统的结构和行为进行动态演示，以评价或预测一个系统的行为效果，为决策提供信息的一种方法. 它是解决较复杂的实际问题的一条有效途径. 我们简要介绍计算机仿真的一些知识和几种常用方法.

§8.1 计算机仿真的概念

计算机仿真就是用计算机程序直接建立真实系统的模型，并通过计算了解系统随时间变化的行为或特性. 计算机仿真在航空、机电、冶金等工业部门以及社会经济、交通运输、生态系统等方面有着广泛的应用，已成为分析、研究和设计各种系统的重要手段.

一、为什么要进行计算机仿真

仿真是真实过程或系统在整个时间内的模仿，是用实验来解决问题的一种技术，即通过对系统模型的实验去研究一个存在或设计中的系统. 例如模拟训练和战斗演习等都是模拟仿真.

计算机仿真(computer simulation)是科学研究和解决问题的一种有效方法，在各个领域有着广泛的应用. 计算机仿真反映出新的科学技术的时代特征，它的应用为各个领域带来新气象和新成果.

例1(混凝土搅拌中心的位置) 有 $K_1(x_1,y_1),K_2(x_2,y_2),\cdots,K_n(x_n,y_n)$ 共 n 个工地，各需混凝土 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_n$ t，混凝土每吨每千米的运费为 C 元，如何确定混凝土搅拌中心的位置 $K_0(x_0,y_0)$ 使得费用最少?

解1 分析 记第 K 个工地的位置为 (x_k,y_k)，中心的位置为 (x_0,y_0)，则目标函数为

$$\min C\sum_{i=1}^{n} Q_i\sqrt{(x_i-x_0)^2+(y_i-y_0)^2}=\min f(x_0,y_0)$$

中国国防科技网 http://www.81tech.com

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x_0} = -C\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i(x_i-x_0)}{\sqrt{(x_i-x_0)^2+(y_i-y_0)^2}} = 0$$

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y_0} = -C\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i(y_i-y_0)}{\sqrt{(x_i-x_0)^2+(y_i-y_0)^2}} = 0$$

我们可以通过求解这个方程组得到混凝土搅拌中心的最佳位置，但这种计算很复杂.

解 2　计算机模拟　我们可以将平面区域划分成许多小方格，利用计算机循环计算混凝土搅拌中心设立在每个交叉点时的费用，再经过比较就可以得到最佳位置(见图 8－1－1).

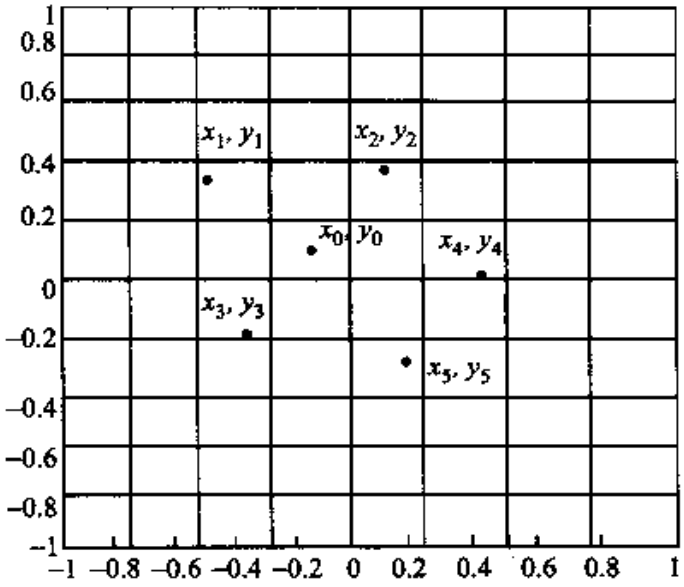


图 8－1－1　混凝土搅拌中心的位置：计算机模拟

不在一个真实系统上进行实验，而要进行计算机仿真的原因主要有以下几点：

(1) 在一个实际系统还没有建立起来之前，要对系统的行为或结果进行分析研究时，计算机仿真是一种行之有效的方法.

(2) 在有些真实系统上做实验会影响系统的正常运行，如在生产中任意改变工艺参数可能会导致废品，在经济活动中随意将一个决策付诸行动可能会引起经济混乱.

(3) 当人是系统的一部分时，他的行为往往会影响实验的效果，这时最好对系统进行模拟研究.

(4) 在实际系统上做多次实验时，很难保证每次的操作条件相同，因而对实验结果的好坏很难作出正确的判断.

(5) 有时实验时间太长，费用太大，或者有危险，使得实验不易进行.

(6) 有些系统一旦建立起来后就无法复原. 例如要投资建设一个大型企业，要分析它建成后的经济效益和社会效益，不能用建立起来试试看的办法，因为一个系统建立后就无法再回到原来的状态上去了.

鉴于以上这些原因，人们一般不直接对真实系统进行实验，而是根据系统的机理进行计算机仿真.

二、适应于用计算机仿真解决的问题

在下列情况中，计算机仿真能有效地解决问题.

(1) 难以用数学公式表示的系统，或者没有建立和求解数学模型的有效方法.

(2) 虽然可以用解析的方法解决问题，但数学的分析与计算过于复杂，这时计算机仿真可能提供简单可行的求解方法.

(3) 希望能在较短的时间内观察到系统发展的全过程，以估计某些参数对系统行为的影响.

(4) 难以在实际环境中进行实验和观察时，计算机仿真是唯一可行的方法，例如太空飞行的研究.

(5) 需要对系统或过程进行长期运行比较，从大量方案中寻找最优方案.

三、一些常用术语

系统 指一些具有特定功能，相互之间以一定的规律联系着的物体所组成的总体. 系统是客观世界中实体与实体间相互作用和相互依赖关系构成的具有某种特定功能的有机整体. 如果想定量地研究系统的行为，就需要将系统的特性及内部的相互关系抽象出来，构造出系统的数学模型. 系统的数学模型是动态特性的数学描述，它用来表示系统运行过程中各个量之间的关系. 利用计算机对系统进行仿真就是根据被研究系统的数学模型来研究系统性能.

系统边界 为了限制所研究问题涉及的范围，一般用系统边界把所研究的系统与影响系统的环境区分开来.

实体 系统的对象、系统的组成元素都可以称为实体.

属性 属性反映实体的某些性质，它可以是文字型、数字型或逻辑型.

状态 系统的状态是指在某一时刻实体及其属性值的集合.

活动 导致系统状态变化的一个过程为活动. 活动反映了系统变化的规律.

事件 活动是指一段过程，即在一段时间内发生的情况. 事件是指一个时间点的情况，系统发生变化的瞬间就发生了事件.

仿真时钟 研究系统一般是为认识其状态随时间变化的规律，所以需要一

中国电子科技网 http://www.81tech.com

个仿真时间变量. 由于计算机仿真是一种数值方法，它不提供解析解，所以对连续系统仿真时，常在均匀时间点上展现其状态值，这样，仿真时钟的步进是一个常数. 而对离散系统仿真，只有在事件发生时，系统的状态才会发生变化，才有必要展现出系统的状态，所以，取决于事件间隔的仿真时钟的步进往往是不等距的.

事件表 为了使仿真程序能如实地模拟实际系统的变化，在某些离散事件的仿真中，采用事件表的形式进行调度. 事件表一般是一个有序的记录列，每个记录包括事件发生时间、事件类型等一些内容.

四、仿真研究的步骤

仿真研究的步骤大致可以分为四个部分.

(1) **系统分析** 就是要明确问题和提出总体方案. 首先要把被仿真系统的内容表达清楚，弄清仿真的目的、系统的边界，确定问题的目标函数和可控变量，并加以数量化，找出系统的实体、属性和活动，描述子系统与总系统的关系.

(2) **模型构造** 包括建立模型、收集数据、编写程序、程序验证和模型确认等. 建立模型就是选择合适的仿真方法，如时间步长法、事件表法等，确定系统的初始状态，设计整个系统的仿真流程图. 然后根据需要收集、整理数据，用通用语言或仿真语言编写、调试程序.

(3) **模型的运行与改进** 首先确定一些具体的运行方案，如初始条件、参数、步长、重复次数等，然后输入数据，运行程序，将得出的仿真结果与实际系统比较，进一步分析和改进模型，直到符合实际系统的要求及精度为止.

(4) **设计格式输出仿真结果** 包括提供文件的清单，记录重要的中间结果，输出格式要有利于用户了解整个仿真过程，分析和使用仿真结果.

计算机仿真是一种用计算机对一个系统的结构和行为进行动态演示，以安全、经济的方法获得系统或过程的数量反应结果.

例 2(追击问题) 我缉私舰雷达发现 c km 处有一艘走私船正以速度 a 沿直线匀速行驶，缉私舰立即以最大的速度 b 追赶，若用雷达进行跟踪，保持船的瞬时速度方向始终指向走私船，试求缉私舰追逐路线和追上的时间.

解 该问题可以用理论分析法，也可以用计算机仿真. 取时间步长为 h，在第 i 步时 $t=ih$，走私船的坐标为 $R(iha,0)$，缉私舰的坐标为 $P(x_i,y_i)$(见图 8-1-2). 第 i 步到第 $i+1$ 步的计算公式为:

http://www.81tech.com

$$x_{i+1} = x_i + hb\cos\alpha = x_i + \frac{hb(iha - x_i)}{\sqrt{(iha - x_i)^2 + y_i^2}},$$

$$y_{i+1} = y_i + hb\sin\alpha = y_i - \frac{hby_i}{\sqrt{(iha - x_i)^2 + y_i^2}}$$

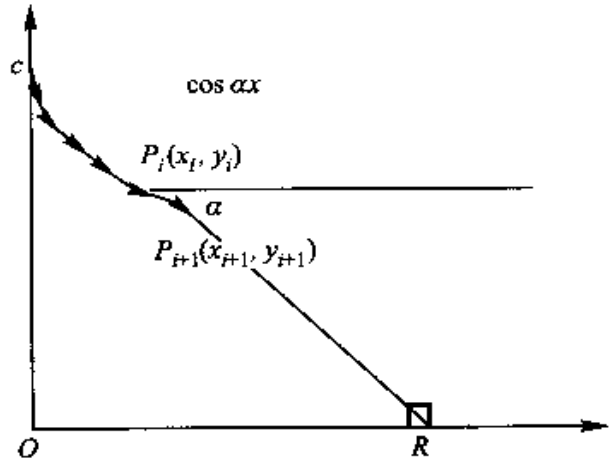


图 8-1-2 追击过程示意图

利用计算机进行循环计算，再画出其动态模拟图. Mathematica 语句如下：

```
For[k = 1, k < 13, k + +,
  (t = k; dt = 0.1; vbomb = 10; vboat = 2; n = t/dt;
   A = {{{0, 100}}, {{0, 0}}};
   For[j = 1, j < = n, j + +,
    xx1 = A[[1, j, 1]]; yy1 = A[[1, j, 2]];
    xx2 = A[[2, j, 1]]; yy2 = A[[2, j, 2]];
    dd = Sqrt[(xx2 - xx1)^2 + (yy2 - yy1)^2]//N;
    If[dd = = 0, dd = 1, dd = dd];
    xx1 = xx1 + vbomb * dt * (xx2 - xx1)/dd;
    yy1 = yy1 + vbomb * dt * (yy2 - yy1)/dd;
    If[yy1 < = 0, xx1 = xx2; yy1 = 0; xx2 = xx2; yy2 = 0,
      xx2 = xx2 + vboat * dt; yy2 = 0];
    A[[1]] = Append[A[[1]], {xx1, yy1}];
    A[[2]] = Append[A[[2]], {xx2, yy2}]];
   g1 = ListPlot[A[[1]], PlotJoined -> True, PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0],
     DisplayFunction -> Identity];
   g2 = ListPlot[A[[2]], PlotJoined -> True, DisplayFunction -> Identity,
     PlotStyle -> RGBColor[0, 0, 1]];
```

中国国防科技网 http://www.81tech.com

```
g3 = ParametricPlot[{22,u},{u,0,1},DisplayFunction -> Identity];
g4 = ListPlot[{{4,1},{20,0},{10,0},{15,0}},
    DisplayFunction -> Identity];
If[A[[1,n,1]] < =20,
  g5 = Graphics[{RGBColor[0,0,1],
      Rectangle[{A[[2,n,1]] - 0.5,0},{A[[2, n, 1]] + 0.5,
          5}]}];
  g6 = ListPlot[{0,0},DisplayFunction -> Identity],
  g6 = Graphics[{RGBColor[1,0,1],
      Line[{{20,0},{18,7},{19,5},{18.5,18},{19.5,10},{20,
          20},{21,10},{22,18},{20,0}}]}];
  g5 = ListPlot[{0,0},DisplayFunction -> Identity]];
  Show[{g1,g2,g3,g4,g5,g6},DisplayFunction -> $DisplayFunction])]
```

例 3（赶火车过程仿真） 一列火车从 A 站经过 B 站开往 C 站，某人每天赶往 B 站乘这趟火车. 已知火车从 A 站到 B 站运行时间是均值为 30 min、标准差为 2 min 的正态随机变量. 火车大约在下午 1 点离开 A 站. 火车离开时刻的频率分布和这个人到达 B 站时刻的频率分布如下表所示. 问他能赶上火车的概率有多大?

出发时刻(T)	1:00	1:05	1:10	到达时刻(T)	1:28	1:30	1:32	1:34
频率	0.7	0.2	0.1	频率	0.3	0.4	0.2	0.1

解 这个问题用概率论的方法求解十分困难，它涉及此人到达时刻、火车离开 A 站的时刻、火车运行时间几个随机变量.

此人赶上火车事件 A 可以分解为下列几个事件：A_1：此人 1:28 到达 B 站赶上火车；A_2：此人 1:30 到达 B 站赶上火车；A_3：此人 1:32 到达 B 站赶上火车；A_4：此人 1:34 到达 B 站赶上火车. 事件 A_1 又可以再分解为：火车1:00从 A 站开出且 1:28 之后到达 B 站；火车 1:05 从 A 站开出且1:28 之后到达 B 站；火车 1:10 从 A 站开出且 1:28 之后到达 B 站. 其余的也可以类似进行分解. 而且火车运行的时间又是随机的，利用概率论的方法计算比较复杂，我们可以用计算机仿真的方法来解决.

我们用计算机仿真的方法来解决这个问题就是通过多次计算机实验来分析此人能赶上火车的概率有多大，这需要我们建立一个仿真模型，利用计算机仿真这个实际过程.

引入以下变量：T_1：火车从 A 站开出的时刻；T_2：火车从 A 站运行到 B 站

http://www.81tech.com

所需要的时间；T_3：此人到达 B 站的时刻. 此人能赶上火车的条件是 $T_3 \leqslant T_1 + T_2$. T_1，T_2和 T_3 是随机变量，我们取午后 1:00 为时间 0 点，则 T_1 取值为 0，5，10，其概率分别为 0.7，0.2，0.1. T_2 服从 $N(30,4)$. T_3 取值为 28，30，32，34；其概率分别为 0.3，0.4，0.2，0.1.

为了解决这个问题，我们需要产生服从上面分布的随机数，基础是[0,1]区间均匀分布和正态分布.

若 X 是服从均匀分布 $U(0,1)$ 的随机变量，则

$P\{0 \leqslant X \leqslant 0.7\} = 0.7$，$P\{0.7 \leqslant X \leqslant 0.9\} = 0.2$，$P\{0.9 \leqslant X \leqslant 1\} = 0.1$

所以，若 X 是一个均匀分布的随机数，则当 $0 < X \leqslant 0.7$ 时取 $T_1 = 10$，当 $0.7 < X \leqslant 0.9$ 时取 $T_1 = 5$，当 $0.9 < X \leqslant 1$ 时取 $T_1 = 10$. 对 T_3 进行同样的处理. 若 γ 是一个均匀分布的随机数，则当 $0 < \gamma \leqslant 0.3$ 时取 $T_3 = 28$，当

中国国防科技网 http://www.81tech.com

```
            T3 = 32;
        else
            T3 = 34;
        end
    end
    if T3 < T1 + T2
        s = s + 1;
    end
end
[s/10000]
```

§8.2 时间步长法

根据实际问题的特点，需要计算机仿真的系统可以分为连续系统和离散系统. 若一个系统的状态随着时间连续变化，就称为连续系统. 这类系统的动态特征可以用一组方程来描述. 若一个系统的状态仅在一系列离散时刻发生变化，我们称这类系统为离散系统. 计算机仿真总是在一系列离散点上考察系统状态的变化，连续系统先进行离散化后进行计算机仿真. 计算机仿真的主要方法可以分为时间步长法和事件步长法两种.

一、时间步长法的基本思路

时间步长法就是按照时间流逝的顺序，一步一步地对系统的活动进行仿真. 在进行系统仿真时，可以把整个仿真过程分为许多相等的时间间隔，时间步长的长度可根据实际问题分别取作秒、分、小时等. 程序中按此步长前进的时钟就是仿真的时钟.

选取系统的一个初始状态作为仿真时钟的零点，仿真时钟每步进一次，就对系统的所有实体、属性和活动进行一次全面的扫描考察，按照预定的计划和目标进行分析、计算，记录系统状态的变化，这个过程一直进行到仿真时钟结束为止.

二、时间步长法应用举例

例1(池水含盐量问题) 某水池有2 000 m^3 水，其中含盐2 kg；以每分钟6 m^3 的速率向水池内注入含盐率为0.5 kg/m^3 的盐水，同时又以4 m^3/min 的速率从水池流出搅拌均匀的盐水. 试用计算机仿真该水池内盐水的变化过程，并每隔10 min计算水池中水的体积、含盐量和含盐率. 欲使池中盐水的含盐

http://www.81tech.com

量达到 0.2 kg/m^3，需经过多少时间？

解 1　理论分析法　池水含盐量随时间变化的示意图见图 8－2－1.

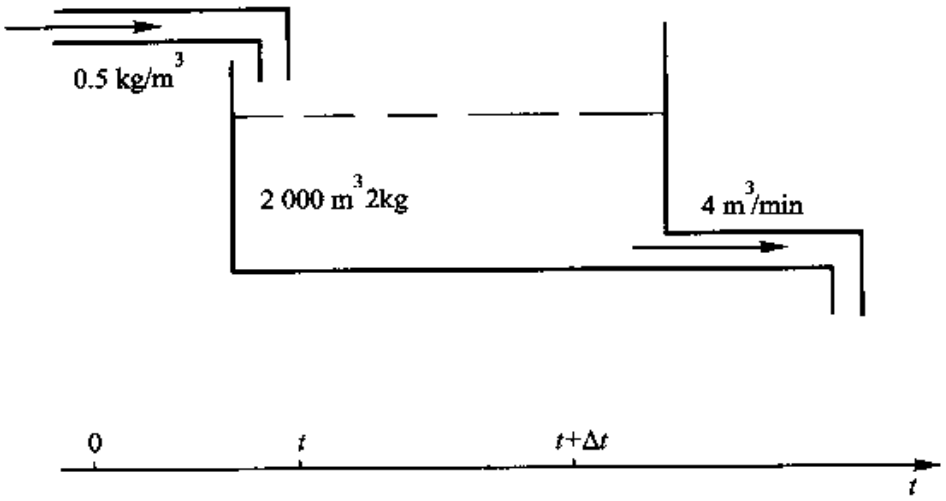


图 8－2－1　池水含盐量示意图

当系统开始运行后，池中的水和含盐量均随时间变化. 记 $x(t)$ 为 t 时刻池水中含盐量，考察 $[t,t+\Delta t]$ 时间内盐的变化，这些变化是由于流入的盐水和流出的盐水所引起的，于是有平衡方程

$$x(t+\Delta t)-x(t)=0.5\times 6\times \Delta t-4\times \Delta t\times \frac{x(t)}{2\,000+2t}$$

两边同时除以 Δt，再令 Δt 趋于 0 得下面微分方程的初值问题

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=3-\frac{4x(t)}{2\,000+2t},\quad x(0)=2$$

利用 Mathematica 求解此问题，指令为

```
DSolve[{x'[t] == 3 - 4 * x[t]/(2000 + 2 * t), x[0] == 2}, x[t], t]
```

运行后得到的结果为

$$\mathrm{x[t]}\to\frac{2000000+3000000\mathrm{t}+3000\mathrm{t}^2+\mathrm{t}^3}{(1000+\mathrm{t})^2}$$

解 2　计算机仿真法　在这个系统中，实体是水，属性是水的体积、含盐量和含盐率，活动是水的注入与流出，由于注入和流出活动的作用，池中水的体积与含盐量、含盐率均随时间变化，初始时刻含盐率为 0.001 kg/m^3；以后每分钟注入含盐率为 0.5 kg/m^3 的水 6 m^3，流出混合均匀的盐水 4 m^3；当池中水的含盐率达到 0.2 kg/m^3 时，结束仿真过程.

对于这样一个连续系统仿真，必须在一系列离散时间点上进行考察，这些离散时间点之间的间隔 h 就是时间步长. 若取步长为 $h=1$ min，就要每隔

中国国防科技网 http://www.81tech.com

1 min考察一次系统的状态特性，并作出相应的记录与分析. 在本题中每隔1 min，池水的动态变化过程是：每分钟水的体积增加2 m^3；每分钟向池内注入盐3 kg；每分钟向池外流出盐$4r(t)$ kg，$r(t)$为t时刻池内水的含盐率；取$t=0$作为系统仿真的初始时刻，取$t=0$时系统的属性为系统的初始状态，取池中盐水的含盐率达到0.2 kg/m^3的时刻作为仿真的终止时刻. 根据上述的分析，编程计算后可得到池水含盐量的仿真结果.

计算的 Matlab 程序为

```
h = 1;
s0 = 2;
w0 = 2000;
r0 = s0/w0;
s(1) = s0 + 0.5 * 6 * h - 4 * h * r0;
w(1) = w0 + 2 * h;
r(1) = s(1)/w(1);
t(1) = h;
y(1) = (2000000 + 3000000 * h + 3000 * h^2 + h^3)/(1000 + h)^2;
for i = 2:200
    t(i) = i * h;
    s(i) = s(i - 1) + 0.5 * 6 * h - 4 * h * r(i - 1);
    w(i) = w(i - 1) + 2 * h;
    r(i) = s(i)/w(i);
    y(i) = (2000000 + 3000000 * t(i) + 3000 * t(i)^2 + t(i)^3)/(1000 +
        t(i))^2;
    m = floor(i/10);
    if i/10 - m < 0.001
        tm(m) = m;
        sm(m) = s(i);
        rm(m) = r(i);
    end
    if r(i) > 0.2
        if r(i) < 0.2005
            t02 = i * h;
            r02 = r(i);
        end
    end
```

http://www.81tech.com

```
end
[t02,r02]
[10 * tm',sm',rm']
plot(t,s,'blue',t,y,'red')
```

运行后看出，计算机仿真的结果相当精确.

例 2（面积的计算） 求由曲线

$$x^2+y^2=16,\ \frac{x^2}{36}+y^2=1,\ (x-2)^2+(y+1)^2=9$$

所围成图形的面积.

解 本问题有几条曲线，图形比较复杂，用 Matlab 语句

```
t=0:0. 01:2 * pi;
x=sin(t);
y=cos(t);
plot(4 * x,4 * y,6 * x,y,2+3 * x,3 * y-1)
axis([-6,6,-6,6])
```

作出图形的区域如图 8-2-2 所示.

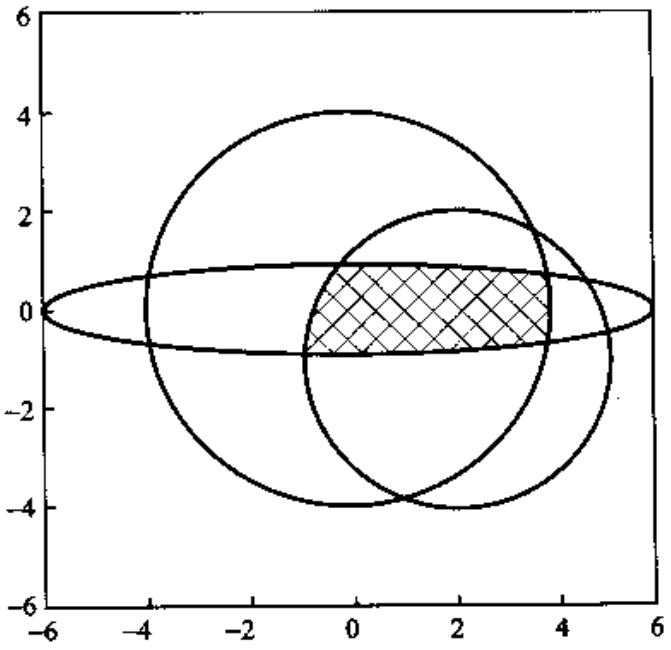


图 8-2-2 曲线围成的面积示意图

此区域形状复杂，理论分析困难，可以用计算机仿真实现. 将可能的区域等分，考察每个小区域是否在此区域中，将在此区域中的小面积相加即可（图 8-2-3）.

中国国防科技网 http://www.81tech.com

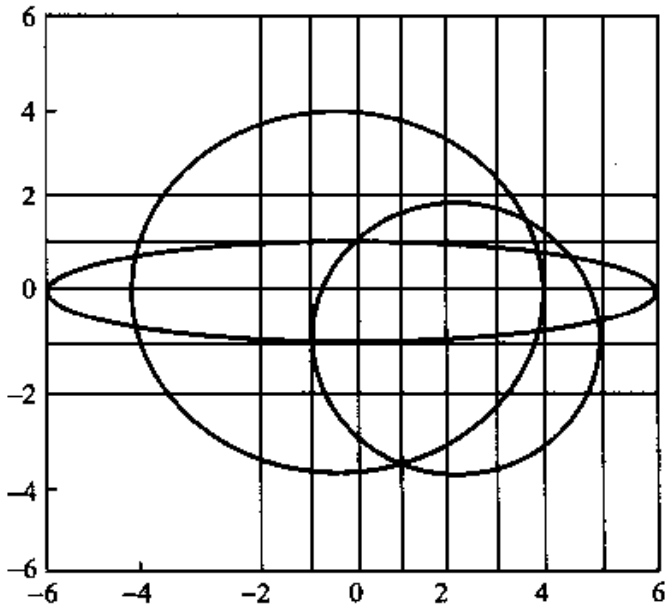


图 8-2-3 曲线围成的面积仿真示意图

Matlab 程序为

```
X = -2:0.01:6 ;
y = -2:0.01:2;
S = 0;
h = 0.01;
x = -2:0.01:6;
y = -2:0.01:2;
s = 0;
h = 0.01;
for i = 1:800
    for j = 1:400
        xx = -2 + i * h;
        yy = -2 + j * h;
        if xx^2 + yy^2 <= 16
            if xx^2/36 + yy^2 <= 1
                if (xx -2)^2 + (yy + 1)^2 <= 9
                    s = s + h^2;
                end
            end
        end
    end
```

http://www.81tech.com

```
end
s
```

运行后给出面积的值为 8.831 0.

例 3(库存问题) 在物资的供应过程中，由于到货与销售不可能做到同步、同量，故总要保持一定的库存储备. 如果库存过多，就会造成积压浪费以及保管费的上升；如果库存过少，会造成缺货. 如何选择库存和订货策略，就是一个需要研究的问题. 库存问题有多种类型，一般比较复杂，下面讨论一种简单的情况.

某自行车商店的仓库管理人员采取一种简单的订货策略，当库存量降低到 P 辆自行车时就向厂家订货，每次订货 Q 辆，如果某一天的需求量越过了库存量，商店就有销售损失和信誉损失，但如果库存量过多，会导致资金积压和保管费增加. 若现在已有如表 8－2－1 所示的五种库存策略，试比较选择一种策略以使总费用最少.

这个问题的已知条件是：

(1) 从发出订货到收到货物需隔 3 天.

(2) 每辆自行车保管费为 0.75 元/天，每辆自行车的缺货损失为 1.80 元/天，每次的订货费为 75 元.

(3) 每天自行车需求量是 0 到 99 之间均匀分布的随机数.

(4) 原始库存为 115 辆，并假设第一天没有发出订货.

表 8－2－1 订 货 方 案

方 案 编 号	重新订货点 P/辆	重新订货量 Q/辆
方案 1	125	150
方案 2	125	250
方案 3	150	250
方案 4	175	250
方案 5	175	300

这一问题用解析法讨论比较麻烦，但用计算机按天仿真仓库货物的变动情况却很方便. 我们以 150 天为例，依次对这五种方案进行仿真，最后比较各方案的总费用，从而就可以作出决策.

计算机仿真时的工作流程是早上到货、全天销售、晚上订货. 输入一些常数和初始数据后，以一天为时间步长进行仿真. 首先检查这一天是否为预定到货日期，如果是，则原有库存量加 Q，并把预定到货量清为零；如果不是，则库存量不变. 接着仿真随机需求量，这可用计算机语言中的随机函数得到. 若

中国国防科技网 http://www.81tech.com

库存量大于需求量，则新的库存量减去需求量；反之，则新库存量变为零，并且要在总费用上加一缺货损失．然后检查实际库存量加上预定到货量是否小于重新订货点 P，如果是，则需要重新订货，这时就加一次订货费．如此重复运行 150 天，即可得所需费用总值．利用下面的 Matlab 语言程序仿真计算，比较这五种方案的总费用，可以得到最好的方案．

```
days = 1500;
p = [125,125,150,175,175];
q = [150,250,250,250,300];
cost = [0,0,0,0,0];
arrivalinterval = 2;
storagefee = 0.75; lossfee = 1.8; bookfee = 75;
storage0 = 115; booknumber = 0; arrivedate = 0;
nr = rand(days,1);
for i = 1:5
    storage(1) = storage0;
    n = round(99 * nr(1));
    sale = n;
    remain = storage(1) - n;
    if remain <= p(i);
        booknumber = q(i);
        arrivedate = 4;
        orderfee = bookfee;
    else
        orderfee = 0;
    end
    storage(1) = remain;
    cost(i) = cost(i) + remain * storagefee + orderfee;
    for j = 2:days
        dh = j;
        if abs(dh - arrivedate) < 0.01
            storage(j) = storage(j-1) + booknumber;
            booknumber = 0;
            arrivedate = j;
        else
            storage(j) = storage(j-1);
```

http://www.81tech.com

```
            end
            n = round(99 * nr(j));
            if storage(j) > = n
                sale = n;
                remain = storage(j) - n;
                shortagenumber = 0;
            else
                sale = storage(j);
                remain = 0;
                shortagenumber = n - storage(j);
            end
            storage(j) = remain;
            if remain + booknumber < = p(i);
                booknumber = q(i);
                arrivedate = dh + arrivalinterval;
                orderfee = bookfee;
            else
                orderfee = 0;
            end
            cost(i) = cost(i) + remain * storagefee + shortagenumber * lossfee +
                      orderfee;
        end;
        mincost = min(cost);
    end
    cost/(days/150)
    mincost/(days/150)
```

例 4(报童的策略) 报童每天清晨从报社购进报纸零售，晚上将没有卖掉的报纸退回. 每份报纸的购进价为 1.3 元，零售价为 2 元，退回价为 0.2 元. 报童售出一份报纸赚 0.7 元，退回一份报纸赔 1.1 元. 报童每天如果购进的报纸太少，不够卖时会少赚钱，如果购得太多卖不完时要赔钱. 试为报童筹划每天应购进的报纸数以使收益最大.

报纸每捆 10 张，只能整捆购买，报纸可以分为 3 种类型的新闻日：好、一般、差，它们的概率分别为 0.35，0.45 和 0.2，在这些新闻日中每天对报纸的需求分布的统计结果如表 8-2-2 所示.

试确定每天报童应该订购的报纸数量.

中国国防科技网 http://www.81tech.com

表 8-2-2 新闻日中报纸的需求概率分布

需 求 量	好新闻的需求概率	一般新闻的需求概率	差新闻的需求概率
40	0.03	0.10	0.44
50	0.05	0.18	0.22
60	0.15	0.40	0.16
70	0.20	0.20	0.12
80	0.35	0.08	0.06
90	0.15	0.04	0.00
100	0.07	0.00	0.00

解 我们通过计算机仿真来解决此问题. 最优策略应该是每天的利润最大.

利润 = 销售收入 - 报纸成本 - 损失 + 残值

这是一个随机现象的计算机仿真问题，故先确定各种情况的随机数的对应关系. 新闻日和报纸需求量对应的随机数分别如表 8-2-3、表 8-2-4 所示.

表 8-2-3 3 种新闻日对应的随机数区间

新闻种类	出现概率	对应的随机数区间
好新闻	0.35	(0,0.35)
一般新闻	0.45	[0.35,0.80)
差新闻	0.20	[0.80, 1)

表 8-2-4 3 种新闻日中报纸需求量对应的随机数区间

需求量	好新闻的随机区间	一般新闻的随机区间	差新闻的随机区间
40	[0, 0.03)	[0, 0.10)	[0, 0.44)
50	[0.03,0.08)	[0.10,0.28)	[0.44,0.66)
60	[0.08,0.23)	[0.28,0.68)	[0.66,0.82)
70	[0.23,0.43)	[0.68,0.88)	[0.82,0.94)
80	[0.43,0.78)	[0.88,0.96)	[0.94,1)
90	[0.78,0.93)	[0.96,1]	[100,102)
100	[0.93,1]	[8,10]	[150,200]

http://www.81tech.com

计算机仿真的流程：

（1）令每天的报纸订购数变化，40～100；

（2）让时间从 1 开始变化（循环）到 360；

（3）产生新闻种类的随机数，确定当天的新闻类型；

（4）产生需求量随机数，确定当天的报纸需求量；

（5）计算当天的收入，计算累积利润；

（6）比较得出最优订货量.

具体的计算由 Matlab 编程计算实现.

```
x1 = rand(365,1);
x2 = rand(365,1);
for n = 4:10
    paper = n * 10;
    sb(n) = 0;
    for i = 1:365
        if x1 (i) < 0.35
            if x2 (i) < 0.03
                news = 40;
            elseif x2(i) < 0.08
                news = 50;
            elseif x2(i) < 0.23
                news = 60;
            elseif x2(i) < 0.43
                news = 70;
            elseif x2(i) < 0.78
                news = 80;
            elseif x2(i) < 0.93
                news = 90;
            else
                news = 100;
            end
        elseif x1(i) < 0.8
            if x2(i) < 0.10
                news = 40;
            elseif x2(i) < 0.28
                news = 50;
```

中国国防科技网 http://www.81tech.com

```
            elseif x2(i) <0.68
                news =60;
            elseif x2(i) <0.88
                news =70;
            elseif x2(i) <0.96
                news =80;
            else
                news =90;
            end
        else
            if x2(i) <0.44
                news =40;
            elseif x2(i) <0.66
                news =50;
            elseif x2(i) <0.82
                news =60;
            elseif x2(i) <0.94
                news =70;
            else
                news =80;
            end
        end
        if paper > =news
            sale =news;
            remand =paper -news;
        else
            sale =paper;
            remand =0;
        end
        sb(n) =sb(n) +2 * sale -1.3 * paper +0.2 * remand;
    end
end
optnews =40;
optmoney =sb(4);
[40,sb(4)/365]
```

```
for n =5:10
    if sb(n) >= optmoney
        optnews = n * 10;
        optmoney = sb(n);
    end
    [n,sb(n)/365]
end
[optnews,optmoney,optmoney/365]
```

经过计算机仿真后得到最优购货量是每天 60 份，平均每天利润 34.4 元.

§8.3 事件步长法

计算机仿真就是按照实际工作流程，在规定的时间顺序下考察系统的变化情况.

利用时间步长法仿真时进程比较清楚，但对一些随机现象进行仿真时，步长不易选取，步长大时精度不够，步长小时仿真速度慢，浪费大. 仿真精度与步长的选取有直接关系.

从另一个角度来看，一个事件发生时将带来实体属性的改变，将引起系统发生变化. 如排队系统，当没有顾客到达时，服务员总是空闲的，系统无变化，而当有顾客到来时，系统的状态就会发生变化，或服务员变忙，或队长增加. 对这类问题，用事件发生的间隔为步长进行仿真合理一些.

一、事件步长法的思路和事件表法

事件步长法以是事件发生的时间为增量，按照时间的进展，一步一步地对系统的行为进行仿真，直到预定的时间结束为止. 事件步长法与时间步长法的主要区别是：

(1) 事件步长法与时间步长法都是以时间为增量来考察系统状态的变化. 但在时间步长法中，仿真时钟以等步长前进，而在事件步长法中，仿真时钟的步长取决于事件之间的间隔.

(2) 时间步长法在一个步长内，认为系统所处的状态相同，因而所选步长的大小将影响仿真的精度. 而在事件步长法中，每个事件的发生均有确切的时刻，不需要人为地选取步长，步长的大小对仿真精度影响较小.

(3) 时间步长法每前进一个步长就要对整个系统进行一次全面考察，即使状态没有发生变化也要扫描，而事件步长法只是在某一事件点上判断和比较

事件是否出现. 因此，一般地讲，当判断比较的数目较大时，用时间步长法可以节省用机时间，而当相继两个事件出现的平均间隔较长时，更适合于用事件步长法.

事件步长法中常用的是事件表法. 事件表法的主要思路是将系统的仿真过程看成一个事件点序列，根据事件出现的时序，用一个称之为事件表的表格来调度事件执行的顺序. 对于那些当前需处理的事件，列入事件表中，从中取出最接近的事件进行处理，处理完毕后自动退出事件表. 在处理当前事件的过程中，往往又会产生一个后继事件，因此，必须预测出这一后继事件的出现时间，并将它列入事件表中. 这样，事件表好像一本记事簿，干完一件事后就把它从记事簿中勾销，而把新的要完成的工作再登记到记事簿中相应的地方去. 以此使得系统的仿真过程有条不紊地进行下去. 这种方法要求对系统的各种事件进行详细的描述，因此，当事件之间没有太多的相互作用和事件数目不是太多时，应用事件表法比较有效.

二、事件步长法举例

例 1(可靠性问题仿真) 一设备上三个相同的轴承，每个轴承正常工作寿命为随机变量，其概率分布如表 8－3－1 所示. 任何一个轴承损坏都可以使设备停止工作，从有轴承损坏，设备停止工作，到检修工更换部件为止，为一个延迟时间. 延迟时间也是随机变量，其概率分布如表 8－3－2 所示.

表 8－3－1 轴承工作寿命

寿命/h	1 000	1 100	1 200	1 300	1 400	1 500	1 600	1 700	1 800	1 900
概率	0.10	0.13	0.25	0.13	0.09	0.12	0.02	0.06	0.05	0.05

表 8－3－2 延 迟 时 间

延迟时间/min	5	10	15
概率	0.6	0.3	0.1

设备停工时每分钟损失 5 元，检修工每小时工时费 12 元，轴承每个成本 16 元. 更换一个轴承需要 20 分钟，同时更换两个轴承需要 30 分钟，同时更换三个轴承需要 40 分钟. 现在有两种方案，方案一是损坏一个更换一个；方案二是一旦有轴承损坏就全部更换. 试通过计算机仿真对这两种方案做出评价.

在这一问题中，轴承寿命在 1 000 到 1 900 小时之间，而延迟在 5 到 15 分钟之间，故若用时间步长法时，步长选取有些困难. 步长小浪费很大，步长大

http://www.81tech.com

又不精确，所以采用事件步长法. 在事件发生时再考虑系统状态的变化情况，这就比较合理.

为了进行仿真，首先将轴承寿命和延迟时间与随机数对应. 由于在这一问题中各个轴承的寿命完全决定了系统的运行状态，也即决定了两个方案的费用大小，故我们选择轴承发生故障作为事件.

利用下面的 Matlab 语句进行方案一的仿真.

```
clear;
cost = 0; shutdown = 5 * 60; workpay = 12;
bearing = 16;replace1 = 1/3;replace2 = 1/2;replace3 = 2/3;
simulationtime = 365;
endtime = 24 * simulationtime;
number = round(3 * endtime);
x = rand(number,1);
y = rand(number,1);
for i = 1:number
    if x(i) < 0.1
        life(i) = 1000;
    elseif x(i) < 0.23
        life(i) = 1100;
    elseif x(i) < 0.48
        life(i) = 1200;
    elseif x(i) < 0.61
        life(i) = 1300;
    elseif x(i) < 0.70
        life(i) = 1400;
    elseif x(i) < 0.82
        life(i) = 1500;
    elseif x(i) < 0.84
        life(i) = 1600;
    elseif x(i) < 0.90
        life(i) = 1700;
    elseif x(i) < 0.95
        life(i) = 1800;
    else
        life(i) = 1900;
```

中国国防科技网 http://www.81tech.com

```
    end
end
for i = 1:number
    if y(i) <0.6
        delay(i) = 1/12;
    elseif y(i) <0.9
        delay(i) = 1/6;
    else
        delay(i) = 1/4;
    end
end
t = 0;i = 0;enumber = 3; tnumber = 3;
table(1,1,1) = life(1);table(1,2,1) = 1;table(1,3,1) = delay(1);table(1,
        4,1) = 1;
table(2,1,1) = life(2);table(2,2,1) = 2;table(2,3,1) = delay(2);table(2,
        4,1) = 2;
table(3,1,1) = life(3);table(3,2,1) = 3;table(3,3,1) = delay(3);table(3,
        4,1) = 3;
disp(table(:,:,1))
while (t < = endtime)
    i = i + 1;
    mintime = endtime + 1;mintype = 0;mindelay = 0;minnumber = 0;
    for j = 1:enumber
        if table(j,1,i) < = mintime
            mintime = table(j,1,i);
            mintype = table(j,2,i);
            mindelay = table(j,3,i);
            minnumber = table(j,4,i);
        end
    end
    failure = 0;
    for j = 1:enumber
        if abs (mintime - table(j,1,i)) <0.001
            failure = failure + 1;
            if mindelay > table(j,3,i)
```

http://www.81tech.com

```
                    mindelay = table(j,3,i);
                end
            end
        end
        t = mintime;
        if failure < 1.5
            tta = mindelay + replace1;
            cost = cost + bearing + tta * shutdown + replace1 * workpay;
        elseif failure < 2.5
            tta = mindelay + replace2;
            cost = cost + 2 * bearing + tta * shutdown + replace2 * workpay;
        else
            tta = mindelay + replace3;
            cost = cost + 3 * bearing + tta * shutdown + replace3 * workpay;
        end
        for j = 1:enumber
            table(j,1,i+1) = table(j,1,i);
            table(j,2,i+1) = table(j,2,i);
            table(j,3,i+1) = table(j,3,i);
            table(j,4,i+1) = table(j,4,i);
            if abs(mintime - table(j,1,i)) < 0.01
                tnumber = tnumber + 1;
                table(j,1,i+1) = t + life(tnumber) + tta;
                table(j,2,i+1) = table(j,2,i);
                table(j,3,i+1) = delay(tnumber);
                table(j,4,i+1) = tnumber;
            end
        end
        show1 = [i,t,cost];
        disp('the step, the current time, the cost')
        disp(show1)
        disp('the new eventtable is')
        disp(table(:,:,i+1))
    end
```

同理可以进行方案二的仿真，最后比较得到最优方案.

中国国防科技网 http://www.81tech.com

例2(收款台前的排队过程仿真) 考虑一个收款台的排队系统．某杂货店只有一个收款台，顾客到达收款台的间隔服从均值为4.5的负指数分布，每个顾客的服务时间服从均值为3.2标准差为0.6的正态分布．这里时间的单位是分钟，且服务时间不取负值．对100个顾客去收款台缴款排队过程进行仿真．

我们假设开始时B服务台前无顾客，顾客在服务台前不离去，下面的程序对20个顾客去收款台缴款排队过程进行仿真．

```
clear;
s=0;lq=0;work=0; maxl=0; waitingtime=0;
customer=10; simulation=19;
u=rand(customer,1);
v=randn(customer,1);
for i=1:customer
    n(i)=i;
    x(i)=-4.5*log(u(i));
    y(i)=3.2+0.6*v(i);
    if y(i)<0.5
        y(i)=0.5;
    end
    line(i)=0;
    queuebegintime(i)=0;
    customertime(i)=0;
end
xt(1)=x(1);yt(1)=y(1);eventtable(1,1,1)=x(1);
eventtable(1,2,1)=1;eventtable(1,3,1)=y(1);
eventtable(1,4,1)=1;
for i=2:customer
    xt(i)=xt(i-1)+x(i); yt(i)=yt(i-1)+y(i);
    eventtable(i,1,1)=xt(i);
    eventtable(i,2,1)=1;
    eventtable(i,3,1)=y(i);
    eventtable(i,4,1)=i;
end
disp('the initial eventtable is')
disp(eventtable(:,:,1))
```

http://www.81tech.com

```
eventnumber = customer; number = customer;
for i = 1:simulation
    mint = eventtable(1,1,i);
    mine = eventtable(1,4,i);
    mintype = eventtable(1,2,i);
    mininterval = eventtable(1,3,i);
    for j = 1:eventnumber
        if eventtable(j,1,i) < mint
            mint = eventtable(j,1,i);
            mine = eventtable(j,4,i);
            mintype = eventtable(j,2,i);
            mininterval = eventtable(j,3,i);
        end
    end
    xi = [i,mint,mintype,mininterval,mine];
    disp('the earlest event is')
    disp(xi)
    t = mint;
    if abs(mintype - 1) < 0.1
        if lq < 0.5
            if s < 0.5
                s = 1;
                servebegintime = t;
                terminate = t + mininterval;
                eventnumber = eventnumber + 1;number = number + 1;
                eventtable(eventnumber,1,i) = terminate;
                eventtable(eventnumber,2,i) = 2;
                eventtable(eventnumber,3,i) = 0;
                eventtable(eventnumber,4,i) = number;
            else
                lq = lq + 1;
                line(lq) = mine;
                queuebegintime(lq) = t;
                customertime(lq) = mininterval;
            end
```

中国国防科技网 http://www.81tech.com

```
        else
            lq = lq + 1;
            line(lq) = mine;
            queuebegintime(lq) = t;
            customertime(lq) = mininterval;
        end
        ordernumber = 0;
        for k = 1:eventnumber
            if abs(eventtable(k,4,i) - mine) > 0.1;
                ordernumber = ordernumber + 1;
                eventtable(ordernumber,1,i) = eventtable(k,1,i);
                eventtable(ordernumber,2,i) = eventtable(k,2,i);
                eventtable(ordernumber,3,i) = eventtable(k,3,i);
                eventtable(ordernumber,4,i) = eventtable(k,4,i);
            end
        end
        eventnumber = eventnumber - 1;
    else
        ordernumber = 0;
        for k = 1:eventnumber
            if abs(eventtable(k,4,i) - mine) > 0.5
                ordernumber = ordernumber + 1;
                eventtable(ordernumber,1,i) = eventtable(k,1,i);
                eventtable(ordernumber,2,i) = eventtable(k,2,i);
                eventtable(ordernumber,3,i) = eventtable(k,3,i);
                eventtable(ordernumber,4,i) = eventtable(k,4,i);
            end
        end
        eventnumber = eventnumber - 1;
        if lq > 0.5
            first = line(1);
            lq = lq - 1;
            servetime = customertime(1);
            waitingtime = waitingtime + t - queuebegintime(1);
            if lq > 0.5
```

http://www.81tech.com

```
                for jline = 1:customer - 1
                    line(jline) = line(jline + 1);
                    queuebegintime(jline) = queuebegintime(jline + 1);
                    customertime(jline) = customertime(jline + 1);
                end
            else
                for jline = 1:customer
                    line(jline) = 0;
                    queuebegintime(jline) = 0;
                    customertime(jline) = 0;
                end
            end
            number = number + 1;
            terminate = servetime + t;
            eventnumber = eventnumber + 1;
            eventtable(eventnumber,1,i) = terminate;
            eventtable(eventnumber,2,i) = 2;
            eventtable(eventnumber,3,i) = 0;
            eventtable(eventnumber,4,i) = number;
        else
            s = 0;serveendtime = t;
            work = work + serveendtime - servebegintime;
        end
    end
    if lq > maxl
        maxl = lq;
    end
    for k = 1:eventnumber
        eventtable(k,1,i + 1) = eventtable(k,1,i);
        eventtable(k,2,i + 1) = eventtable(k,2,i);
        eventtable(k,3,i + 1) = eventtable(k,3,i);
        eventtable(k,4,i + 1) = eventtable(k,4,i);
    end
disp('line length is')
disp(lq)
```

中国国防科技网 http://www.81tech.com

```
disp('line position is')
disp(line)
disp('eventtable')
disp(eventtable(:,:,i+1))
end
if s>0.5
    work = work + t - servebegintime;
end
disp('maximal line length')
disp(maxl)
disp('average waiting time')
disp(waitingtime/customer)
disp('busy fraction')
disp(work/t)
```

通过计算机仿真计算后就可以得到定量的结果.



1. 血液中的酒精浓度的变化：正常人体重 K kg，体液 $0.68K$ L(男)，$0.65K$ L(女)；一个人每小时平均排除 12 g 酒精；司机酒精限制：浓度不超过 0.001 g/mL；酒精致人昏迷浓度：4 g/L，致死浓度：4.55 g/L；酒精含量：13.6 g/12 盎司①啤酒.

请回答以下问题(1)一人在晚会上瞬间喝下 6 杯啤酒，他多长时间后才能开车回家；(2)若酒是持续一段时间喝的，如何；(3)讨论各种喝酒方式(如分段的,脉冲式的)讨论开车、昏迷、致死的情况.

2. 理发店的服务过程仿真：一个理发店有 10 位服务员 A_1，A_2，…，A_{10}，顾客随机地到达该理发店，每分钟有一个顾客到达、两个顾客到达和没有顾客到达的概率分别是 1/2，1/8 和 3/8，其中每个顾客的理发时间是随机的，服从均值为 15、方差为 4 的正态分布，试对该理发店一个工作日的情况进行仿真，给出服务员的工作效率和顾客的平均等待时间.

3. 电梯运行的计算机仿真：设一个办公大楼高 30 层，每层有 50 人工作，有 4 部电梯为此办公楼服务. 已知每部电梯最多可以运送 19 人，电梯的运行速度为 5 m/s，加速度为 1.2 m/s^2，楼层高度 3.6 m，一个乘客进出电梯的时间分别为 1 s 和 0.8 s，电梯开门和关门的时间均为 6 s. 试用计算机仿真电梯系统的运行过程，给出运行的最优方案.

① 盎司为非法定计量单位，1 盎司 = 28.349 5 克.

参考文献

[1] 费培之. 图和网络及其应用. 成都：四川大学出版社，1996

[2] 郭绍禧，关亚骥，陆学华. 计算机模拟. 徐州：中国矿业大学出版社，1989

[3] 周义仓，赫孝良. 数学建模实验. 西安：西安交通大学出版社，1999

第9章 随机模型

在现实世界中，不确定现象是普遍存在的. 例如，漂浮在液面上的微小粒子不断地进行着杂乱无章的运动，粒子在任一时刻的位置是不确定的；又如公共汽车站等车的人数在任一时刻也是不确定的，因为随时都可能有乘客到来和离去. 这类不确定现象，表面看来无法把握，其实，在其不确定的背后，往往隐藏着某种确定的统计规律，因此，以概率和数理统计为基础的随机模型就成为解决此类问题最有效的工具之一.

依随机规律是否随时间的变化而变化，随机模型可分为静态和动态两类，前者只涉及到随机变量(向量)的概率分布及数字特征，后者则要处理随机过程和随机微分方程，本章主要讨论前者.

§9.1 电梯问题

有 r 个人在一楼进入电梯，楼上有 n 层，设每个乘客在任何一层出电梯的概率相同，试建立一个概率模型，求直到电梯中的乘客下完，电梯需停次数的数学期望.

分析：对于此问题，容易想到这是求离散型随机变量数学期望的问题，既然求电梯需停次数的数学期望，那么电梯需停次数便为要定义的随机变量，用 X 表示. 显然 X 的取值范围为 $\{1,2,\cdots,\min\{r,n\}\}$，然后计算 $P\{X=i\}$，所求的答案即为 $\sum_{i=1}^{\min\{r,n\}} i\cdot p\{X=i\}$.

理论上用上述思路求解电梯问题完全正确，然而我们却很难得到问题的一个简洁的表达式结果，原因是古典概率 $P\{X=i\}$ 的计算相当复杂，而且要依据 r，n 的不同情况来求. 下面我们看一些具体的例子.

例 1 取 $r=2$，$n=3$ 时，X 的取值范围为 $\{1,2\}$，

$$P\{X=1\}=\frac{C_3^1\cdot 1}{3^2}=\frac{1}{3}$$

$$P\{X=2\}=\frac{C_3^2\cdot 2}{3^2}=\frac{2}{3}$$

从而所求的解为

$$1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$$

例 2 取 $r=3$，$n=2$ 时，X 的取值范围为 $\{1,2\}$，

$$P\{X=1\}=\frac{C_2^1\cdot 1}{2^3}=\frac{1}{4}$$

$$P\{X=2\}=\frac{2^3-2}{2^3}=\frac{3}{4}$$

从而所求的解为

$$1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$$

例 3 取 $r=3$，$n=4$ 时，X 的取值范围为 $\{1,2,3\}$，

$$P\{X=1\}=\frac{C_4^1\cdot 1}{4^3}=\frac{1}{16}$$

$$P\{X=3\}=\frac{C_4^3\cdot 3!}{4^3}=\frac{6}{16}$$

$$P\{X=2\}=\frac{4^3-C_4^1\cdot 1-C_4^3\cdot 3!}{4^3}=\frac{9}{16}$$

从而所求的解为

$$1\cdot\frac{1}{16}+2\cdot\frac{9}{16}+3\cdot\frac{6}{16}=\frac{37}{16}$$

上述三例是在 r，n 给出具体数据的情况下的计算，可以看出，随着 r，n 数据的增大，计算变得愈加复杂，且没有明显的规律可言. 而当 r，n 未给出具体数据时，用上述思路求解问题，想要得到具体的表达式就更为困难.

下面我们换个角度考虑该问题，我们将电梯在第 i 层是否停下来这一事件作为随机变量 Y_i，$Y_i=1$ 表示停下来，$Y_i=0$ 表示电梯未停，其中 i 取值为 $\{1,2,\cdots,n\}$，这样问题便转化为求 Y_i 的期望之和，由题意容易得知电梯在任何楼层上是否停留这一概率完全相同，即

$$Y_i=\begin{cases}1, & 1-\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^r\\ 0, & \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^r\end{cases}$$

从而 Y_i 的期望为

$$E(Y_i)=1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^r$$

原问题的解为

中国国防科技网 http://www.81tech.com

$$\sum_{i=1}^{n} E(Y_i) = n \cdot \left[1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^r\right]$$

显然要比刚才的方法来得简单，而且得到了统一的表达式结果，避免了用第一种方法在计算古典概率时对 r，n 大小的具体讨论.

我们用前面的三个例子验证上面的结论：

例 1 中，取 $r=2$，$n=3$ 时，得到的结果为 $\frac{5}{3}$，而

$$3 \cdot \left[1 - \left(\frac{3-1}{3}\right)^2\right] = \frac{5}{3}$$

例 2 中，取 $r=3$，$n=2$ 时，得到的结果为 $\frac{7}{4}$，而

$$2 \cdot \left[1 - \left(\frac{2-1}{2}\right)^3\right] = \frac{7}{4}$$

例 3 中，取 $r=3$，$n=4$ 时，得到的结果为 $\frac{37}{16}$，而

$$4 \cdot \left[1 - \left(\frac{4-1}{4}\right)^3\right] = \frac{37}{16}$$

通过电梯问题求解的讨论，可以看出在解决带随机性现象的问题中，方法的选取是非常重要的，只有采取合适的方法才会事半功倍.

§9.2 钓鱼问题

为了估计湖中鱼的数量，先从湖中钓出 r 条鱼做上记号后又放回湖中，然后再从湖中钓出 S 条鱼，结果发现 S 条鱼中有 x 条鱼标有记号. 问应该如何估计湖中鱼的数量 N?

分析与求解

该问题就是要从第二次钓出的标有记号的鱼所占的比例估计出湖中鱼的数量. 首先我们假设放回湖中的鱼在湖中的分布是均匀的，则第二次钓出的标有记号的鱼数 X 是一个随机变量，X 服从超几何分布

$$P\{X=x\} = \frac{C_r^x \cdot C_{N-r}^{s-x}}{C_N^s} \tag{9.2.1}$$

其中 x 为整数，且 $\max[0, s-(N-r)] \leqslant x \leqslant \min[r, s]$. 用 $L(x,N)$ 表示(9.2.1)式的右端，则取使 $L(x,N)$ 达到极大值的 N 作为 N 的估计量. 直接对 N 求导考察极值比较困难，我们用比值法来研究 $L(x,N)$ 的变化.

http://www.81tech.com

$$A(x,N)=\frac{L(x,N)}{L(x,N-1)}=\frac{N-r}{N}\cdot\frac{N-s}{(N-r)-(s-x)}$$
$$=\frac{N^2-(r+s)N+rs}{N^2-(r+s)N+Nx} \tag{9.2.2}$$

从(9.2.2)式看出，当且仅当 $N<\frac{rs}{x}$ 时，$L(x,N)>L(x,N-1)$，而当且仅当 $N>\frac{rs}{x}$ 时，$L(x,N)<L(x,N-1)$. 因此 $L(x,N)$ 在 $\frac{rs}{x}$ 附近取得极大值，于是 N 的估计值 $\hat{N}$ 为 $\left[\frac{rs}{x}\right]$ 或 $\left[\frac{rs}{x}\right]+1$，取使得 $L(x,N)$ 的值更大的一个即可.

上面的求解方法实际上是运用了概率统计中的极大似然原理，即现在这个事件发生了，那么客观情况使得它最有可能发生.

下面我们换个角度考虑上述问题，既然假设放回湖中的鱼在湖中的分布是均匀的，我们可以认为湖中整个鱼群中含带有记号的鱼群比例与湖中任意一部分鱼群中含带有记号的鱼群比例完全相同，即

$$\frac{r}{N}=\frac{x}{s}$$

从而 $N=\frac{rx}{s}$，取整即与上述分析所得的结果完全相同.

从这一问题，我们可以学到估计类似问题的一种实际操作方法.

§9.3 经济轧钢模型

轧钢工艺由两道工序组成，第一道是粗轧，轧出的钢材参差不齐，可认为服从正态分布，其均值可由轧机调整，其方差则由设备的精度决定，不能随意改变；第二道是精轧，精轧时，首先测量粗轧出的钢材长度，若短于规定长度，则将其报废，若长于规定长度，则切掉多余部分即可. 问粗轧时，怎样调整轧机的均值最经济？

一、问题分析

设成品钢材的规定长度是 l，粗轧后的钢材长度为 x，x 是随机变量，它服从均值为 m、标准差为 σ 的正态分布(其中 σ 已知，m 待定). x 的密度函数为

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2\right)$$

轧制过程的浪费由两部分构成：一是当 $x\geqslant l$ 时，精轧要切掉长为 $x-l$

中国国防科技网 http://www.81tech.com

的钢材；二是当 $x<l$ 时，长为 x 的整根钢材报废. 显然这是一个优化模型，建模的关键是选择合适的目标函数. 考虑到轧钢的最终目的是获得成品钢，故经济的轧钢要求不应以每粗轧一根钢材的平均浪费量最少为标准，而应以每获得一根成品钢的平均浪费量最少为标准，或等价于每次轧制(包括粗轧、精轧)的平均浪费量与每次轧制获得成品钢的平均长度之比最小为标准.

二、模型建立

以 W 记每次轧制的平均浪费量，L 记每次轧制获得成品钢的平均长度，则

$$W=\int_l^{+\infty}(x-l)p(x)\mathrm{d}x+\int_0^l xp(x)\mathrm{d}x=m-lP$$

其中 $P=\int_l^{+\infty}p(x)\mathrm{d}x$ 表示 $x\geqslant l$ 的概率，

$$L=\int_l^{+\infty}lp(x)\mathrm{d}x=lP$$

所以目标函数为

$$J_1=\frac{W}{L}=\frac{m-lP}{lP}=\frac{1}{l}\left(\frac{m}{P}-l\right)$$

三、模型求解

由于 l 是常数，故等价的目标函数为

$$J=\frac{m}{P}=\frac{m}{\int_l^{+\infty}p(x)\mathrm{d}x}=\frac{m}{1-\Phi\left(\frac{l-m}{\sigma}\right)}$$

其中 $\Phi(\cdot)$ 是标准正态变量的分布函数. 记

$$\lambda=\frac{l}{\sigma},z=\lambda-\frac{m}{\sigma},\Phi_1(x)=1-\Phi(x)=\int_x^{+\infty}\varphi(y)\mathrm{d}y$$

其中 $\varphi(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right)$，则

$$J=J(z)=\frac{\sigma(\lambda-z)}{\Phi_1(z)}$$

用微分法求 $J(\cdot)$ 的极小值点，注意到 $\Phi_1'(z)=-\varphi(z)$，易知 z 的最优值 Z^* 应满足方程

$$F(z)=\lambda-z$$

其中

$$F(z)=\frac{\Phi_1(z)}{\varphi(z)}$$

$F(z)$ 可根据标准正态分布函数 $\Phi(\cdot)$ 和 $\varphi(\cdot)$ 制成表格或画出图形以便求解.

具体计算实例：

设要轧制长为 $l=5.0$ m 的成品钢材，由粗轧设备等因素组成的方差精度 $\sigma=0.2$ m，问需要将钢材长度的均值调整到多少才使浪费最少？

由上面的分析及最优值点满足的方程，知

$$\lambda=\frac{l}{\sigma}=25$$

首先作出 $F(z)$ 及 $\lambda-z$ 的图形如下，可用 Mathematica 软件包实现.

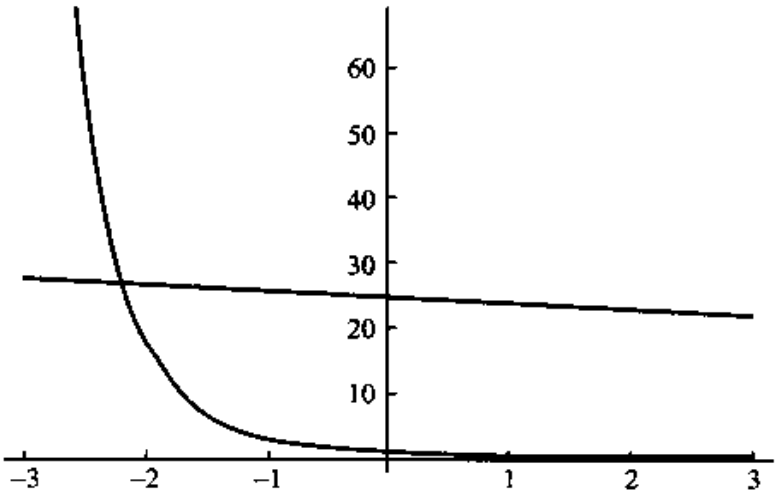


图 9-3-1

利用软件包进行数值计算，不难得到两条曲线的交点处的 x 值为 -2.19，即为目标函数的最优值点 z，从而

$$m=\sigma\cdot(\lambda-z)=0.2\times(25+2.19)=5.438$$

即将钢材的均值调整到 5.438 m 时浪费最少．此时 $P=0.9857$，每次轧制得到一根成品钢材的平均浪费量为 0.5167 m，为了减少该数值，只有提高粗轧设备的精度，即减小 σ.

§9.4 报童的策略

报童每天清晨从报社购进报纸零售，晚上将没有卖掉的报纸退回．每份报纸的购进价为 b 元，零售价为 a 元，退回价为 c 元，$a>b>c$．报童售出一份报纸赚 $a-b$ 元，退回一份报纸赔 $b-c$ 元．报童每天如果购进的报纸太少，不够卖时会少赚钱，如果购进的报纸太多，卖不完时会赔钱．试为报童筹划每天应如何确定购进的报纸数以使收益最大？

http://www.81tech.com

一、问题分析

报童应该根据需求量确定购进量，而需求量是随机的，所以这是一个风险决策问题. 假定报童已经通过自己每天的卖报经验或其他渠道掌握了需求量的分布规律，需求量 r 为一连续型随机变量，密度函数为 $f(r)$，假设每天的购进量为 Q，由于需求量 r 是随机的，可以小于 Q、等于 Q 或大于 Q，这就导致报童每天的收入也是随机的，所以作为优化模型的目标函数，不能是报童每天的收入函数，而应该是他长期卖报的日平均收入. 从概率论大数定律的观点看这相当于报童每天收入的期望值，以下简称它为平均利润.

二、模型建立

显然，若 $Q>r$，则以 a 价售出 r 份报纸，以 c 价售出 $Q-r$ 份报纸，若 $Q\leqslant r$，则全部 Q 以 a 价售出，故平均利润为

$$F(Q)=\int_0^Q[(a-b)r-(b-c)(Q-r)]f(r)\,\mathrm{d}r+\int_Q^{+\infty}(a-b)Qf(r)\,\mathrm{d}r$$

$$=(a-b)Q-(a-c)\int_0^Q(Q-r)f(r)\,\mathrm{d}r$$

$$\frac{\mathrm{d}F(Q)}{\mathrm{d}Q}=(a-b)-(a-c)\int_0^Q f(r)\,\mathrm{d}r$$

令 $\frac{\mathrm{d}F(Q)}{\mathrm{d}Q}=0$，得

$$\int_0^Q f(r)\,\mathrm{d}r=\frac{a-b}{a-c}$$

而 $\frac{\mathrm{d}^2F(Q)}{\mathrm{d}Q^2}=-(a-c)f(Q)<0$. 从而知满足上式的 Q 可以使平均利润达到最大. 易知上式等价于

$$\frac{\int_0^Q f(r)\,\mathrm{d}r}{\int_Q^{+\infty}f(r)\,\mathrm{d}r}=\frac{a-b}{b-c}$$

上式左边是报童订购 Q 份报纸时，能够将它卖完的概率与不能将它卖完的概率之比，右边则表示卖出一份报纸的盈利与退回一份报纸亏损之比，该式表明最优购进量是使这两个比相等的购进量.

实例：如 $a=1$，$b=0.6$，$c=0.3$，需求量 r 服从正态分布 $N(100,10^2)$，则当报童的订报量 Q 满足

$$\frac{\int_0^Q f(r)\,dr}{\int_Q^{+\infty} f(r)\,dr} = \frac{a-b}{b-c} = \frac{4}{3}$$

或等价于

$$\int_0^Q f(r)\,dr = \frac{a-b}{a-c} = \frac{4}{7}$$

不难计算得到 $Q=102$ 时长期平均收益最大.

若 $a=1.2$，$b=0.6$，$c=0.3$，此时

$$\int_0^Q f(r)\,dr = \frac{a-b}{a-c} = \frac{2}{3}$$

$Q=104$ 时长期平均收益最大.

若 $a=0.8$，$b=0.6$，$c=0.2$，此时

$$\int_0^Q f(r)\,dr = \frac{a-b}{a-c} = \frac{1}{3}$$

$Q=96$ 时长期平均收益最大.

该模型也可以理解为单周期随机库存问题，即假定在一个周期末库存的货物对下一个周期没有任何价值，即模型适用于仅有一次机会存贮以供需求的产品如时装、新鲜食品、月饼等.

§9.5 设备检查问题

为了保证生产过程的顺利进行，工厂通常要定期对各种设备的状况进行检查. 在两次检查之间设备出现故障的时刻是随机的，而一旦发现故障，设备往往要带故障运行到下一次检查才能被发现有问题，这会造成相当大的损失. 另一方面，每次检查都要支付一定的费用(包括停工损失费)，因此检查周期也不能太短. 问怎样确定合理的设备检查周期?

一、问题分析

显然应根据故障发生的概率分布来确定检查周期，通常，在故障发生概率大的时候，检查周期应该短些，在故障发生概率小的时候应该长些.

二、模型假设

(1) 假定设备的最大连续使用时间为 T，设备的每次故障经维修后首次使用时刻都重新记为 0，在 $[0,T]$ 时段内的 t 时刻，设备再次发生故障的概率分

中国国防科技网 http://www.81tech.com

布函数记为 $F(t)$，并假定它有密度函数 $f(t)$，显见 $F(T)=1$.

（2）设备带故障运行到下次检查时为止的损失与这段运行时间成正比，比例系数 C_1 即为单位时间的故障损失.

（3）把检查周期表示为时刻 t 的函数 $s(t)$，$n(t)=\dfrac{1}{s(t)}$即为单位时间的检查次数，与设备正常运行的时间相比，检查周期很短，因而 $n(t)$很大，可以视 $n(t)$为连续函数.

（4）由于 $s(t)$相对很小，所以在相邻两次检查之间出现故障的时刻可以认为服从均匀分布，因而带故障运行的时间可取为这个分布的均值.

（5）每次检查费为 C_2，到时刻 t 为止的检查次数可表示为 $\int_0^t n(\tau)\mathrm{d}\tau$.

三、模型建立与求解

目标：求 $s(t)$使设备在一次运行中总的平均费用最小(设备的一次运行，指设备从故障维修后首次投入运行到再次发生故障这段时间内的运行).

若设备在 t 时刻发生故障，则由假设(2)和(4)，故障发生时刻在周期 $s(t)$内呈均匀分布，故平均带故障运行的时间为$\dfrac{1}{2}s(t)=\dfrac{1}{2n(t)}$，故障损失是 $\dfrac{C_1}{2n(t)}$，由假设(5)，检查费为 $C_2\int_0^t n(\tau)\mathrm{d}\tau$，于是总费用为

$$\frac{C_1}{2n(t)}+C_2\int_0^t n(\tau)\mathrm{d}\tau$$

由假设(1)，设备在一次运行中总费用的期望值为

$$C(n(t))=\int_0^T\left[\frac{C_1}{2n(t)}+C_2\int_0^t n(\tau)\mathrm{d}\tau\right]f(t)\mathrm{d}t$$

$C(n(t))$是 $n(t)$的泛函. 记 $x(t)=\int_0^t n(\tau)\mathrm{d}\tau$，则上式转化为

$$C(x(t))=\int_0^T\left[\frac{C_1}{2\dot{x}(t)}+C_2x(t)\right]f(t)\mathrm{d}t$$

$x(t)$的端点是 $x(0)=0$，$x(T)$自由，利用欧拉方程可得 $x(t)$应满足

$$C_2f(t)+\frac{C_1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{f(t)}{\dot{x}(t)^2}\right)=0$$

对上式积分并注意到$\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=f(t)$，有

$$C_2F(t)+\frac{C_1}{2}\frac{f(t)}{\dot{x}(t)^2}=K$$

令积分常数 $K=C_2a$(a 是另一常数)，则

$$\frac{f(t)}{\dot{x}^2(t)}=\frac{2C_2}{C_1}[a-F(t)]$$

由自由端点的横截条件$\left.\frac{f(t)}{\dot{x}^2(t)}\right|_{t=T}=0$，并由 $F(T)=1$ 立刻得 $a=1$. 于是

$$\frac{1}{\dot{x}(t)^2}=\frac{2C_2}{C_1}\cdot\frac{1-F(t)}{f(t)}$$

由 $x(0)=0$，便可得

$$n(t)=\sqrt{\frac{C_1}{2C_2}\cdot\frac{f(t)}{1-F(t)}}$$

$$s(t)=\sqrt{\frac{2C_2}{C_1}\cdot\frac{1-F(t)}{f(t)}}$$



1. 已知人口中男女的比例为男:女=51:49，试确定有 5 个孩子的家庭中至少有一个男孩的概率，至少有一个男孩和一个女孩的概率，只有最小的孩子是男孩的概率.

2. 某水库所贮存的水用于电站发电，根据过去累积数据统计结果如下：每 10^3m^3 的成本费为 0.3 元，每 10^3m^3 水供电站可获利 3 元，每缺 10^3m^3 水影响电站发电的损失费为 1 元，电站对水库的需求量 x（10^3m^3）服从正态分布，均值 $\mu=3\times10^6km^3$，标准差 $\sigma=1\times10^6km^3$. 试问水库的贮水量 θ 为多少时，水库的期望收益为最大?

3. 某企业对于某种材料的月需求量为随机变量，具有如下表概率分布：

需求量/t	50	60	70	80	90	100	110	120
$p(\mu=j)$	0.05	0.01	0.15	0.25	0.20	0.10	0.10	0.05

每次订货费为 500 元，每月每吨保管费为 50 元，每月每吨货费为 1 500 元，每吨材料的购价为 1 000 元. 该企业欲采用(s,S)策略来控制库存量，求 s，S.

4. 在经济轧钢模型中，若钢材粗轧长度在 l_1 与 l 之间降级使用，长度小于 l_1 才整根报废，试选用合适的目标函数建立优化模型，使某种意义下的浪费量最小.

参考文献

[1] 洪毅，贺德化，昌志华. 经济数学模型. 广州：华南理工大学出版社，1999

[2] 周义仓，赫孝良. 数学建模实验. 西安：西安交通大学出版社，2002

第 10 章
经济数学模型

§10.1 效 用 函 数

一、效用函数

效用函数是一个模糊的概念，也可以说是个人在消费行为中的一种感觉，但它们像“重量”一样，是可以量化的，有兴趣的读者可以参考文献[1][3].

在消费者行为理论中，我们所指的消费者应是理性的，这意味着，消费者被假定在可选择的商品中进行挑选时，按照他从消费商品中获取尽可能大的满足的原则来选择商品，作为理性的个体，满足两条：

（1）他自主地选择商品；

（2）他能对他选择的商品作出估价.

我们假定，消费者从各种不同数量的商品中取得的与满足感有关的全部信息，都包含在他的效用函数中，设效用函数为

$$u=f(q_1,q_2)$$

这里，q 表示商品数量，u 即效用值，也就是满足感. 效用值的大小应随着商品数量的增加而增加，且这种增加的强度是递减的. 例如，一个饥饿的人，吃第一个面包所获取的效用大于第二个面包的效用. 依次类推，用数学的语言来描述即

（1）效用函数对各变量而言单调增加，$\frac{\partial u}{\partial q_1}>0$，$\frac{\partial u}{\partial q_2}>0$；

（2）这种单调增加的强度是下降的，即边际效用递减.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial q_1^2}<0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial q_2^2}<0$$

对任意的函数 u_0，方程

$$u_0=f(q_1,q_2) \tag{10.1.1}$$

是二元函数的等高线. 这里，我们称它为无差异曲线，这曲线上不同的点，表示不同数量的商品组合，这些商品组合使消费者获得了同样为 u_0 大小的效用值，故称之为“无差异”.

二、商品替代率

效用函数的全微分是

$$du = \frac{\partial u}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial u}{\partial q_2}dq_2 \tag{10.1.2}$$

当在(10.1.1)式两端取微分时，我们得出

$$\frac{\partial u}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial u}{\partial q_2}dq_2 = 0 \tag{10.1.3}$$

从而知道

$$-\frac{dq_2}{dq_1} = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial q_1}}{\dfrac{\partial u}{\partial q_2}} > 0 \tag{10.1.4}$$

由于(10.1.4)的右端分子分母都大于0，故可知$\frac{dq_2}{dq_1} < 0$，即无差异曲线上每一点切线之斜率小于0，可见无差异曲线是凸向原点的.

比率$\frac{dq_2}{dq_1}$表示了消费者为了保持一定的效用水平 u_0 而用商品 Q_1 代替商品 Q_2 时，每单位量的 Q_1 所能代替的 Q_2，一般称 $-\frac{dq_2}{dq_1} > 0$ 为商品 Q_1 对 Q_2 的替代率，它等于二者边际效用之比.

三、效用分析

理性的消费者希望在有限收入水平下，购买商品 Q_1 与 Q_2 的一种组合，使他达到最高的满足水平. 假设他的收入是 y_0，p_1，p_2 分别是 Q_1，Q_2 两种商品的单价. q_1，q_2 分别表示商品 Q_1，Q_2 的数量，则上述问题的数学模型如下：

$$\begin{cases} \max\ u = f(q_1, q_2) \\ p_1q_1 + p_2q_2 = y_0 \end{cases}$$

利用拉格朗日乘数法求解

$$L(q_1, q_2, \lambda) = f(q_1, q_2) + \lambda(y_0 - p_1q_1 - p_2q_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = f_1 - \lambda p_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = f_2 - \lambda p_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = y^0 - p_1q_1 - p_2q_2 = 0$$

得出$\frac{f_1}{f_2} = \frac{p_1}{p_2}$，又可得出$\frac{f_1}{p_1} = \frac{f_2}{p_2} = \lambda$.

中国国防科技网 http://www.81tech.com

这里的比率给出了在某一特定商品上增加一个单位的花费“满足”增加的比率. 拉格朗日乘数 λ 在这里的经济学意义为收入的边际效用.

四、社会福利

我们来考虑多个效用函数的协调问题. 设 u_i 表示第 i 个人的效用, $i=1,2,\cdots,n$, 社会的效用我们用 w 表示

$$w = w(u_1, u_2, \cdots, u_n)$$

u_i 均是消费商品数量 y_{ij}(第 i 人消费第 j 种商品的量)与工作时间 t_i 的函数:

$$u_i = u_i(y_{i1}, y_{i2}, \cdots, y_{im}, t_i)$$

而社会生产函数对时间、商品数量提供了一定的约束条件, 于是社会运作的目标可以用如下数学模型表示: 即在商品生产、时间等约束条件下, 求使社会福利取最大值的解.

$$\begin{cases} w = w(u_1, u_2, \cdots, u_n) \\ u_i = u_i(y_{i1}, y_{i2}, \cdots, y_{im}, t_i) \\ y_j = \sum_{i=1}^{n} y_{ij} & i=1,2,\cdots,n \\ & j=1,2,\cdots,m \\ F(y_1, y_2, \cdots, y_j, t) = 0 \\ t = t_1 + t_2 + \cdots + t_n \end{cases}$$

这里, y_j 表示第 j 种商品的社会总量, t 表示社会工作总时, F 表示社会生产函数. 为简单计, 设 $n=2$, $m=2$, 上述问题成为

$$\begin{cases} w = w(u_1, u_2) \\ u_i = u_i(y_{i1}, y_{i2}, t_i) \end{cases} \quad i=1,2$$

约束条件是

$$F(y_{11}+y_{21}, y_{12}+y_{22}, t_1+t_2) = 0$$

用拉格朗日乘数法求解, 引入 $L = w(u_1, u_2) + \lambda F$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial y_{11}} = w_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial y_{11}} + \lambda F_1 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y_{12}} = w_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial y_{12}} + \lambda F_2 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial t_1} = w_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial t_1} + \lambda F_3 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y_{21}} = w_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial y_{21}} + \lambda F_1 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y_{22}} = w_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial y_{22}} + \lambda F_2 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial t_2} = w_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial t_2} + \lambda F_3 = 0 \end{cases}$$

http://www.81tech.com

连同约束条件，总共7个方程，解出包括 λ 在内的7个变量的值，即可得最优解. 这里 $w_i=\dfrac{\partial w}{\partial u_i}$，$i=1,2$，$F_j$ 表示 F 对第 j 个变量的偏导数，$j=1,2,3$.

实际中，社会福利函数的可微条件并不总是能满足的，如

$$w(u_1,u_2,\cdots,u_n)=\min(u_1,u_2,\cdots,u_n)$$

就是不可微的，这一社会福利函数反映的是罗尔斯(Rawls)的社会公正原理，社会的状况不会比最差的成员好，当然，社会福利函数可以有多种选择，选择不同的函数就反映了不同的社会原则. 下面我们来看如何分配，可使社会效用达到最大.

设个体的效用与个体的收入 y 有关，y_i，$i=1,2,\cdots,n$ 表示个体 i 的收入情况，β_i 表示他对社会贡献的百分比，$(\beta_i y_i)^{\alpha_i}$ 表示个体 i 提供给社会的福利，社会福利函数选择为

$$w=\sum_{i=1}^{n}(\beta_i y_i)^{\alpha_i}$$

指数 α_i 反映了个体之间的差异，最简单的情形是 $\alpha_i=\alpha$，$i=1,2,\cdots,n$，$w=\sum_{i=1}^{n}(\beta_i y_i)^{\alpha}$. 记 y_0 为社会总收入，$y_0=\sum_{i=1}^{n}y_i$ 是固定的，问如何分配使社会福利达到最大，用一个约束极值模型表示为：

$$\max w=\sum_{i=1}^{n}(\beta_i y_i)^{\alpha_i}$$

约束条件

$$\sum_{i=1}^{n}y_i=y_0$$

用拉格朗日乘数法求解，引入拉格朗日函数

$$L=\sum_{i=1}^{n}(\beta_i y_i)^{\alpha_i}-\lambda\Big(\sum_{i=1}^{n}y_i-y_0\Big)$$

L 对各变量求偏导后得出

$$\begin{cases}\alpha_i\beta_i^{\alpha_i}y_i^{\alpha_i-1}-\lambda=0\\ \sum_{i=1}^{n}y_i-y_0=0\end{cases}\qquad i=1,2,\cdots,n$$

当取 $\alpha_i=\alpha$，$i=1,2,\cdots,n$ 时我们得到

$$\frac{(\beta_i y_i)^{\alpha-1}}{(\beta_k y_k)^{\alpha-1}}=\frac{\beta_k}{\beta_i}$$

解得

$$\frac{y_i}{y_k}=\left(\frac{\beta_k}{\beta_i}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$$

中国国防科技网 http://www.81tech.com

若取 $\alpha=0$，$\frac{\gamma_i}{\gamma_k}=1$，意味着社会的平均分配，福利函数变为

$$w=\sum_{i=1}^{n}(\beta_i\gamma_i)^0=n$$

即每人平均纳出 1 个单位的收入供给社会.

当 $\alpha>1$ 且 $\alpha\to1$ 时，若 $\gamma_i>\gamma_k$，则 $\beta_i<\beta_k$，收入多的人缴纳较少比例的社会福利金，这不公平，因此应有 $0<\alpha<1$. 此时，$\beta_i>\beta_k$，且当 $\alpha\to1$ 时，$\left(\frac{\beta_i}{\beta_k}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\to+\infty$. 这意味着收入多的人，在社会福利中占有较大的份额，且 α 接近 1 时，意味着贫富差距较大，社会福利会更好. α 接近 0 时，抹杀社会贡献的差别，社会福利接近于按人头平均计算，社会福利是不会好的.

§10.2 博 弈 论

一、不确定性与期望效用

例 1 如果某一项投资有两种可能的结果出现，分别记为 S_1，S_2，这两种可能的结果各以概率 p，$1-p$ 出现，此时，投资效用是一个随机变量，其分布为

表 10-2-1

u	$u(S_1)$	$u(S_2)$
p	p	$1-p$

随机变量 u 的数学期望是：

$$Eu=u(S_1)p+u(S_2)(1-p)$$

我们称 Eu 为投资的期望效用. 本例说明了效用函数的取值未必一定是数，有时也许是随机变量，其分布一旦确定，随机变量 u 的数学期望就完全确定了，这就是期望效用.

例 2 卖报童每天要到邮局订报. 出售一份报纸获利 0.3 元，但如卖不出去退回邮局每份报纸损失 0.1 元. 假设每天需求量为 1,2,…,100 份的概率都是 0.01，求报童每天应订购多少份报纸可使他获利的期望最大?

解 设报童每天订购 n 份报纸时他获利的期望效用函数为 $E(n)$. 若他多订一份报，这份报纸卖出的概率为 $P(X\geqslant n+1)$，X 表示需求量，而卖不出去的概率为 $P(X\leqslant n)$，所以

$$E(n+1)-E(n)=0.3P(X\geqslant n+1)-0.1P(X\leqslant n)$$
$$=0.3\times0.01(100-n)-0.1\times0.01\times n$$
$$=0.3-0.004n.$$

由此可知，当 $n<75$ 时 $E(n)$ 是 n 的增函数，$n>76$ 时是减函数，当 $n=75$ 或 76 时 $E(n)$ 取最大值，且

$$E(75)=0.26\times0.3\times75+0.01\sum_{k=1}^{74}[0.3k-0.1(75-k)]$$
$$=11.40(\text{元})$$

即他应预订 75 份或 76 份，可期望获利 11.40 元.

这种方法称为边际分析，它和利用导数求函数极值(也就是研究函数的增减情况)的想法是相同的.

由不确定性与期望效用可以引出风险投资、风险决策的理论，有兴趣的读者可参阅[1]，[2].

二、期望效用与博弈

在市场经济中，企业为了获取最大利润，要和其他企业竞争，就需要研究竞争的策略. 举一个简单例子. 设一个小镇上有 A、B 两家超级市场，每一家可采取两种策略：低价或高价. 其结果如下表：

表 10-2-2

利润		B 的策略	
		低价	高价
A 的策略	低价	A：5 万，B：3 万	A：9 万，B：2 万
	高价	A：3 万，B：6 万	A：7 万，B：5 万

假设 A 的老板如下考虑问题：如果 B 实行低价，那么我应实行低价才能获得较高利润(5 万)；如果 B 实行高价，我应实行低价才能获取较高利润(9 万)，因此，我应实行低价.

B 的想法与 A 相同. 结果两家都实行低价，A 获利 5 万，B 获利 3 万.

后来双方都发现，如果大家都卖高价，对双方都有利，因此他们签订协议，都保持高价. 然而这种协议随时都有被破坏的可能，因为若某一家实行低价而对方没有防备时，则降价者会获得更高利润而对方则遭到损失.

这个例子说明，实际上的竞争是很复杂的，竞争中有合作，合作中有竞争. A、B 两家超级市场的老板所表现的竞争行为就是博弈，也就是对策行为. 研究对策行为的理论叫作对策论或博弈论，它是数学的一个分支. 日常生活中

中国国防科技网 http://www.81tech.com

的下棋、打牌、体育竞赛等，社会生活中如战争、企业的竞争等，都具有竞争或对抗性质，这一类行为都称为对策行为. 在对策行为中，参加竞争的各方具有不同的目标和利益. 为了达到各自的目标，各方必须考虑对手的各种可能的行动方案，力图选取对自己最有利的策略，由此建立的数学模型称为对策模型.

有一类博弈称为二人零和博弈或二人零和有限对策，也叫矩阵对策，这种博弈是被研究得较多的博弈. 在这种博弈中，只有两个局中人，每个局中人各有有限个可供选择的策略. 在每个对局中，两个局中人独立地选择一个策略(互相都不知道对方的策略)而两个人的收益总和为零. 这种博弈中，两个局中人的利益是完全相反的，因此不存在合作的可能.

博弈的基本概念

博弈包括下列基本要素：

(1) 局中人. 在一个对策行为中，有权决定自己行动方案的对策参加者. 一般要求一个对策中至少有两个局中人. 局中人集合用 I 表示.

(2) 局势集合. 在对策过程中可能产生的各种局势集合，例如象棋中棋子各种可能的分布局势. 局势集合用 Ω 表示. 在某些局势下对局结束，这种局势称为最终局势.

(3) 着. 对每一个非最终局势，轮到某个局中人做决定(如象棋中移动棋子)，他可以按照规则把这个局势变为另一个局势，这称为着. 有些着是随机的，如掷骰子等，利用随机型的方法决定它的变化.

(4) 赢得函数. 在最终局势出现时，对局结束. 在最终局势 ω 出现时，局中人的收益记作 $H(k,\omega)$，H 称为赢得函数. 赢得函数亦即期望效用函数.

(5) 策略. 对每一个局中人，在每一个轮到他的着的局势时他应如何行动的一个方案，称为他的一种策略.

(6) 其他规则. 描述一种对策行为还需要其他一些规则. 其中最重要的是：一个局中人在某一轮到他的着的局势时，所能得到的关于局中已发生的各着的信息. 例如在桥牌中，一个局中人只知道其他人过去的叫牌和出牌，但不知道其他人手中剩余的牌.

我们用 A，B 表示两个参与者，局中人 A 有 m 个策略 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，$B$ 有 n 个策略 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$，当 A 选择 α_i，B 选择 β_j 时，A 所得为 a_{ij}，B 所得为 b_{ij}，效用就直接用所得的大小来衡量，因此 a_{ij}，b_{ij} 就分别体现了 A，B 的效用. 如果

$$a_{ij}+b_{ij}=0,\quad i=1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,n \tag{10.2.1}$$

表示一方所得就是另一方所失，这样的博弈称为二人零和博弈. 把 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 称为 A 的纯策略；$\beta_2,\cdots,\beta_n$ 称为 B 的纯策略. 先考虑比较简单的情形，

(10.2.1)式成立，因此矩阵

$$U_{m\times n}=(a_{ij}) \tag{10.2.2}$$

就体现了各种情况下 A 所得和 B 所失的情况.

从 A 来考虑，当他选定 α_i 时，他至少可以获得 $\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n} a_{ij}$，他应选择最好的策略，使他最小的收益达到最大，也即一个理性的人，他作为 A 可以得到的收益是

$$\max_i \min_j a_{ij}$$

从 B 来考虑，他选择 β_j 时，最大的损失是 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} a_{ij}$，他应选择损失最小的 j，也就是有

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m} a_{ij}=\min_{1\leqslant j\leqslant n}\ \max_{1\leqslant i\leqslant m} a_{ij},$$

因此当

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m}\ \min_{1\leqslant j\leqslant n} a_{ij}=\min_{1\leqslant j\leqslant n}\ \max_{1\leqslant i\leqslant m} a_{ij} \tag{10.2.3}$$

时，双方满意，各自找到了合理的选择.

定义 设对策 G 的收益矩阵为 $U_{m\times n}=(a_{ij})$，若

$$\max_i \min_j a_{ij}=\min_j \max_i a_{ij}$$

且等于矩阵元素 $a_{i^*j^*}$，那么(i^*,j^*)称为对策 G 的一个鞍点，也称为局中人 A 的最优纯策略，β_{i^*}称为局中人 B 的最优纯策略，$V_G=a_{i^*j^*}$称为对策 G 的值.

对给定的矩阵 U，(10.2.3)是否一定成立呢？可以举出例子说明(10.2.3)是不成立的，例如：

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} B & \\ \beta_1 & \beta_2 \end{matrix} \\ A\quad \begin{matrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\max_i \min_j u_{ij}=2,\quad \min_j \max_i u_{ij}=3$$

这两个值就不等. 对一般的矩阵对策(a_{ij})，有

$$\max_i \min_j a_{ij}\leqslant \min_j \max_i a_{ij}$$

若等号不成立，则鞍点不存在，双方都不存在最优纯策略. 下面我们讨论这类对策.

例 3 设矩阵对策

$$A=\begin{pmatrix} -6 & 1 & 8 \\ 3 & 2 & 4 \\ 9 & -1 & -10 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

试研究其策略.

中国国防科技网 http://www.81tech.com

解 此矩阵对策无鞍点存在. 如两个局中人仍按上述方法选择策略，则局中人 A 将选择策略 α_3，保证收益至少为 3；局中人 B 将选择策略 β_3，保证至多损失为 10. 实际对局结果，A 的收益为 6，较他预想的为大，他感到原来的想法过于保守. 进一步研究，感到如果对策进行多次，而对方发现他总采取策略 α_3，就有可能采取 β_2 来对付他. 为了预防对方这一招，他有必要适当采用策略 α_1，以“威慑”对方，使之不敢采取策略 β_2.

这样，当对策进行多次时，就产生了混合策略的概念. 就是说，某一局中人以一定概率随机地采用各个策略，这种策略称为混合策略，而原来的策略称为纯策略.

假设局中人 A 的策略为：以概率 x_i 采用纯策略 α_i；局中人 B 的策略为：以概率 y_j 采用纯策略 β_j. 这时局中人 A 的收益期望为

$$E(x,y)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x_iy_j$$

其中 $x_i\geqslant 0$，$y_j\geqslant 0$，$i,j=1,2,3$，$\sum_{i=1}^{3}x_i=1$，$\sum_{j=1}^{3}y_j=1$.

局中人 A 仍按 max min 准则选取策略，即：他选择混合策略 $x=(x_1,x_2,x_3)$，使 $\min_y E(x,y)$ 为最大. 容易知道

$$\min_y E(x,y)=\min_j\sum_{i=1}^{3}a_{ij}x_i \tag{10.2.4}$$

因而局中人 A 的问题可用以下线性规划描述：

$$\max u$$

$$\text{约束条件}\begin{cases}\sum_{i=1}^{3}a_{ij}x_i\geqslant u, & j=1,2,3\\ \sum_{i=1}^{3}x_i=1, & x_i\geqslant 0\end{cases}$$

由此得到，局中人 A 的最优策略是 $x=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$，他的收益期望最少为 7.

同样，局中人 B 的最优策略是 $y=(\frac{17}{98},\frac{12}{98},\frac{57}{98})$，他的损失期望不超过 7.

一般来说，若一个矩阵对策中，局中人 A 的收益矩阵为 $\boldsymbol{U}$，则他的最优混合策略 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是线性规划问题

$$\max u$$

$$\text{约束条件}\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}x_i\geqslant u, & 1\leqslant j\leqslant n\\ \sum_{i=1}^{n}x_i=1, & x_i\geqslant 0\end{cases} \tag{10.2.5}$$

中国国防科技网 http://www.81tech.com

的解，而局中人 B 的最优策略 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 是问题

$$\max\ u$$

$$\text{约束条件}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j \geqslant u, & 1\leqslant i\leqslant n\\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1, & y_j\geqslant 0\end{cases} \tag{10.2.6}$$

的解. 由线性规划理论知：(10.2.5)和(10.2.6)都有最优解，且(10.2.5)中目标函数最大值等于(10.2.6)中目标函数的最小值，即

$$\max_x \min_y E(x,y)=\min_y \max_x E(x,y) \tag{10.2.7}$$

记(10.2.7)两端的值为 u_0，而相应的 x，y 的值为 x^* 和 y^*，则局中人Ⅰ采用混合策略 x^* 时，他可保证收益期望至少为 u_0，而采用其他策略则收益期望可能低于 u_0. 局中人Ⅱ采用混合策略 y^* 时可保证损失期望值不超过 u_0，而采用其他策略时损失期望可能大于 u_0.

§10.3 非合作博弈与纳什均衡

1994 年的诺贝尔经济学奖授给了三位博弈论专家：纳什(Nash)、泽尔腾(Selten)和海萨尼(Harsanyi)，以下介绍他们的一些成果.

考虑有 n 个人参加的博弈，每一个人的混合策略(即纯策略的概率分布)是他可以选择的策略集，记为 S_i，$i=1,2,\cdots,n$，S_i 中的一个混合策略用小写的 s_i 表示，各自的效用用 u_i 表示，它实际上是期望效用，u_i 的值是 $(s_1,\cdots,s_n)$ 的函数. 这时并不要求这些 u_i 之和为 0，就是可以有共同的利益，现在的问题是什么相当于上面谈到的博弈的解？这就引出纳什均衡解的重要概念.

定义 混合策略 $(s_1^*,\cdots,s_i^*,\cdots,s_n^*)$，$s_i^*\in S_i$，$i=1,2,\cdots,n$ 称为 $\{u_i: i=1,2,\cdots,n\}$ 的纳什均衡解，如果

$$u_i(s_1^*,\cdots,s_i^*,\cdots,s_n^*)\geqslant u_i(s_1^*,\cdots,s_{i-1}^*,s_i,s_{i+1}^*,\cdots,s_n^*) \tag{10.3.1}$$

对所有 $s_i\in S_i$ 成立，且对 $i=1,2,\cdots,n$ 都成立.

具体讲，纳什均衡是什么意思呢？假设有 n 个人参与博弈，给定其他人战略的条件下，每个人选择自己的最优战略(个人最优战略可能依赖于也可能不依赖于其他人的战略)，所有参与人选择的战略一起构成一个战略组合. 纳什均衡指的是这样一种战略组合，这种战略组合由所有参与人的最优战略组成.

一、纳什均衡

假设博弈中的所有参与人事先达成一项协议，规定出每个人的行为规则.

中国国防科技网 http://www.81tech.com

那么，我们要问的一个问题是，在没有外在的强制力约束时，当事人是否会自觉的遵守这个协议？或者说，这个协议是否可以自动实施？说当事人会自觉遵守这个协议，等于说这个协议构成一个纳什均衡：给定别人遵守协议的情况下，没有人有积极性偏离协议规定的自己的行为规则. 换句话，如果一个协议不构成纳什均衡，它就不可能自动实施，因为至少有一个参与人会违背这个协议，不满足纳什均衡要求的协议是没有意义的. 这就是纳什均衡的哲学思想.

以下几个是纳什均衡的经典例子.

1. 囚徒困境

囚徒困境讲的是两个嫌疑犯作案后被警察抓住，分别被关在不同的屋子里审讯. 警察告诉他们：如果两个都坦白，各判刑 3 年；如果两个都抵赖，各判 1 年(或许因证据不足)；如果其中一人坦白另一人抵赖，坦白的放出去，不坦白的判刑 10 年. 这里每个囚徒都有两种战略：坦白或抵赖.

表 10-3-1 囚 徒 困 境

		囚徒 B	
		坦白	抵赖
囚徒 A	坦白	(-3,-3)	(0,-10)
	抵赖	(-10,0)	(-1,-1)

这里，对囚徒 A 来说当囚徒 B 选择坦白时，他选择坦白效用值为 -3，他选择抵赖效用值为 -10，$-3 > -10$；当囚徒 B 选择抵赖时，他选择坦白效用值为 0，他选择抵赖效用值为 -1，$0 > -1$. 所以无论囚徒 B 选择坦白或抵赖，他都应选择坦白. 同理，对囚徒 B 来说无论囚徒 A 选择坦白或抵赖，他都应选择坦白. 所以(坦白,坦白)是本案例的纳什均衡.

2. 智猪博弈

这个例子讲的是，猪圈里有两头猪，一头大猪，一头小猪. 猪圈的一头有一个猪槽，另一头安装一个按钮，控制着猪食的供应. 按一下按钮会有 10 个单位的猪食进槽，但谁按按钮谁就需要付 2 个单位的成本. 若大猪先到，大猪吃到 9 个单位，小猪只吃 1 个单位；若同时到，大猪吃 7 个单位，小猪吃 3 个单位；若小猪先到，大猪吃 6 个单位，小猪吃 4 个单位.

表 10-3-2 智 猪 博 弈

		小猪	
		按	不按
大猪	按	(5,1)	(4,4)
	不按	(9,-1)	(0,0)

http://www.81tech.com

这里，对小猪来说当大猪选择按时，它选择按效用值为1，它选择不按效用值为4，4>1；当大猪选择不按时，它选择按效用值为-1，它选择不按效用值为0，0>-1；所以对小猪来说无论大猪选择按或选择不按，它总是应该选择不按；对大猪来说当小猪选择按时，它选择按效用值为5，它选择不按效用值为9，9>5；当小猪选择不按时，它选择按效用值为4，它选择不按效用值为0，4>0；所以(按,不按)即大猪选择按、小猪选择不按是本案例的纳什均衡.

无论大猪小猪，当对方选择按时自己选择不按总是最佳，但当小猪选择不按时，大猪选择按比选择不按好!

3. 斗鸡博弈

设想两个人举着火棍从独木桥的两端走向中央进行火拼，每个人都有两种战略：继续前进，或退下阵来，若两人都继续前进，则两败俱伤；若一方前进另一方退下来，前进者取得胜利，退下来的丢了面子；若两个人都退下来，两个人都丢了面子.

表10-3-3 斗鸡博弈

		乙	
		前进	退
甲	前进	(-2,-2)	(2,0)
	退	(0,2)	(0,0)

这个博弈里有两个纳什均衡：如果一方进，另一方的优战略就是退. 两个人都进或都退不是纳什均衡.

4. 市场进入阻挠

设想有一个垄断企业已在市场上(称为"在位者")，另一个企业虎视眈眈想进入(称为"进入者"). 在位者想保持自己的垄断地位，所以就要阻挠进入者进入. 在这个博弈中，进入者有两种战略可以选择：进入还是不进入；在位者也有两种战略：默许还是斗争. 假定进入之前垄断利润为300，进入之后寡头利润合为100(各得50)，进入成本为10. 各种战略组合下的支付矩阵如下表：

表10-3-4 市场进入阻挠

		在位者	
		默许	斗争
进入者	进入	(40,50)	(-10,0)
	不进入	(0,300)	(0,300)

这个博弈里也有两个纳什均衡：如果进入者进入，另一方在位者的优战略

中国低碳科技网 http://www.81tech.com

就是默许，即(进入,默许)是纳什均衡；如果进入者不进入，则在位者的利润总是300，无论它采取默许还是斗争，因此把(不进入,斗争)也作为纳什均衡.以下是一个稍复杂的例子.

例 甲、乙两公司分属两个国家，在开发某种新产品方面有下面的支付矩阵表示的博弈关系(单位:百万美元). 该博弈的纳什均衡有哪些？如果乙公司所在国政府想保护本国公司利益，有什么好的方法？

表 10-3-5

		乙公司	
		开发	不开发
甲公司	开发	(-10, -10)	(100, 0)
	不开发	(0, 100)	(0, 0)

问题分析

不难找出本博弈的两个纯策略纳什均衡(开发,不开发)和(不开发,开发)，即甲乙两个公司中只有一家公司开发是纳什均衡，而两家公司都开发或都不开发不是纳什均衡. 此外该博弈还有一个混合策略纳什均衡. 根据混合策略纳什均衡的计算方法，不难算出本博弈的混合策略纳什均衡是两个公司都以(10/11,1/11)的概率分布随机选择开发或不开发. 本博弈的两个纯策略纳什均衡前一个对甲有利，后一个对乙有利. 混合策略纳什均衡也并不是好的选择，因为结果除了是对一方有利的纯策略纳什均衡以外，还可能出现大家不开发浪费了机会，或者大家开发撞车的可能.

问题解答

根据上述分析我们知道，如果没有其他因素的影响，该博弈的两个博弈方谁都无法保证博弈的结果有利于自己. 乙公司所在国政府可能保护本国公司的利益，促使博弈结果有利于本国乙公司，即设法改变上述博弈的利益结构，从而促使有利于本国乙公司的均衡出现.

政府改变博弈得益结果的有效方法是对本国公司的开发活动进行补贴. 例如若乙公司所在国政府对乙公司的开发活动提供20单位(百万美元)财政补贴，则该博弈的支付矩阵转变为

表 10-3-6

		乙公司	
		开发	不开发
甲公司	开发	(-10, 10)	(100, 0)
	不开发	(0, 120)	(0, 0)

http://www.81tech.com

不难发现乙公司所在国政府对乙公司开发活动的补贴，已经使得开发变成乙公司相对于不开发的严格上策，即使甲公司选择开发，乙公司选择开发也比选择不开发更有利，因此乙公司此时的唯一选择是开发.

根据上述支付矩阵，甲公司完全可以判断出乙公司的选择，甲公司只能选择不开发，因此现在该博弈唯一的纳什均衡是(不开发,开发). 结果是乙公司可以保证获得 120 单位的利润. 虽然乙公司所在国政府为此付出了 20 单位的代价，但这显然是值得的. 如果乙公司所在国政府能从乙公司额利润中获得 20 单位或以上的税收或其他利益，那么政府最终也没有损失甚至还能获利. 这正是现代世界各国政府对本国企业的竞争进行补贴的主要理论依据.

5. 田忌赛马

田忌赛马的成语故事是众所周知的，实际上这是一个博弈问题，在这里我们作为混合策略纳什均衡分析的一个应用，来分析当与田忌赛马的齐威王也开始在马的出场次序上使用策略时，双方怎样决定自己马的出场次序，最后的结果又会如何.

本博弈中两博弈方的利益也是完全对立的，因此这也是一个严格竞争的零和博弈，不会有纯策略纳什均衡，必然是一个混合策略博弈问题. 为了简便起见，我们将表 10－3－7 中齐威王的策略从上到下分别称为策略 a，b，c，d，e 和 f，将田忌的策略从左到右分别称为策略 g，h，i，j，k 和 l. 设齐威王分别以概率 P_a，P_b，P_c，P_d，P_e 和 P_f 随机选择相应策略，则田忌采用 g 的期望得益为

$$-3P_a - P_b - P_c + P_d - P_e - P_f,$$

采用 h 的期望得益为

$$-P_a - 3P_b + P_c - P_d - P_e - P_f,$$

采用 i 的期望得益为

$$-P_a - P_b - 3P_c - P_d - P_e + P_f,$$

采用 j 的期望得益为

$$-P_a - P_b - P_c - 3P_d + P_e - P_f,$$

采用 k 的期望得益为

$$P_a - P_b - P_c - P_d - 3P_e - P_f,$$

采用 l 的期望得益为

$$-P_a + P_b - P_c - P_d - P_e - 3P_f.$$

齐威王若是想让田忌没有任何可乘之机，所选概率分布必须使上述六个期望得益都相等，解之得

$$P_a = P_b = P_c = P_d = P_e = P_f.$$

又因为

中国国防科技网 http://www.81tech.com

$$P_a + P_b + P_c + P_d + P_e + P_f = 1$$

$$P_a = P_b = P_c = P_d = P_e = P_f = 1/6$$

同样，如果我们设田忌以概率 P_g，P_h，P_i，P_j，P_k 和 P_l 随机选择相应策略，则该六个概率也必须使齐威王选择各纯策略的期望得益都相等，因而得

$$P_g = P_h = P_i = P_j = P_k = P_l = 1/6.$$

齐威王和田忌都以 1/6 的相同概率随机选择各自的六个纯策略，构成本博弈唯一的混合策略纳什均衡.

表 10－3－7　齐威王和田忌赛马

		田忌					
		上 中 下	上 下 中	中 上 下	中 下 中	下 上 中	下 中 上
齐威王	上中下	3，－3	1，－1	1，－1	1，－1	－1，1	1，－1
	上下中	1，－1	3，－3	1，－1	1，－1	1，－1	－1，1
	中上下	1，－1	－1，1	3，－3	1，－1	1，－1	1，－1
	中下上	－1，1	1，－1	1，－1	3，－3	1，－1	1，－1
	下上中	1，－1	1，－1	1，－1	－1，1	3，－3	1，－1
	下中上	1，－1	1，－1	－1，1	1，－1	1，－1	3，－3

本博弈有这样的混合策略纳什均衡是理所当然的. 结果怎样主要取决于双方策略的组合情况，并且他们对任一纯策略的偏爱都只会给对方以可乘之机，因此以平均的概率随机选择各纯策略确实是他们的最佳策略.

在上述混合策略下，齐威王的期望得益为

$$\frac{1}{6}(3+1+1+1+1-1)=1$$

田忌的期望得益则为

$$\frac{1}{6}(1-3-1-1-1-1)=-1$$

即多次进行这样的赛马，齐威王平均每次能赢田忌一千两黄金，这是因为齐威王三匹马的总体实力略胜田忌三匹马的总体实力的缘故.

二、完全信息动态博弈：子博弈精练纳什均衡

这个概念的中心意义是将纳什均衡中包含的不可置信的威胁战略剔除出去，就是说，使均衡战略不再包含不可置信的威胁. 它要求参与人的决策在任

http://www.81tech.com

何时点上都是最优的，决策者要“随机应变”，“向前看”，而不是固守旧略. 由于剔除了不可置信的威胁战略，在许多情况下，精练纳什均衡也缩小了纳什均衡的个数. 这一点对预测是非常有意义的.

1. 博弈的另一种表述形式——扩展型

博弈的标准型表述有三个要素：参与人，每个参与人可选择的战略及效用(支付)函数. 两人有限战略博弈的标准可以用一个矩阵表表示. 对比之下，扩展型表述包含五个要素：

(1) 参与人；

(2) 每个参与人选择行动的时点；

(3) 每个参与人在每次行动时可供选择的行动集合；

(4) 每个参与人在每次行动时有关对手过去行动选择的信息；

(5) 支付函数.

博弈树是扩展型的一种形象化表述，图 10－3－1 是前面讲过的“市场进入阻挠”博弈的博弈树. 这里进入者先选择行动(进入或不进)，在位者然后选择默许还是斗争，最后的数字是支付水平. 如进入者选择“进入”，在位者选择默许，支付水平分别为 40 和 50.

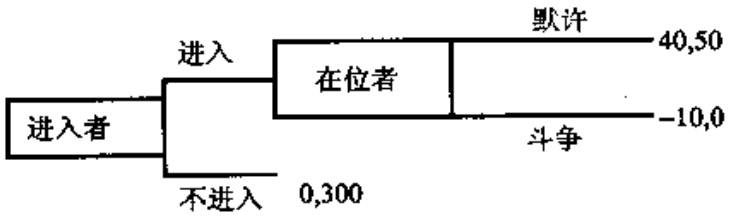


图 10－3－1 市场进入阻挠博弈树

2. 子博弈

博弈树用于表述动态博弈是非常方便的，它一目了然地显示出参与人行动的先后次序、每位参与人可选择的行动，及不同行动组合下的支付水平. 在动态博弈中，如果所有以前的行动是“共同知识”，就是说，每个人都知道过去发生了些什么(什么人在什么时候选择了什么行动)，那么给定历史，从每一个行动选择开始至博弈结束又构成一个博弈，称为“子博弈”. 在博弈论的著作中，一般把整个博弈也称为一个子博弈.

3. 子博弈精练纳什均衡

有了子博弈的概念，我们就可以更准确地定义泽尔腾的“子博弈精练纳什均衡”概念了. 一个纳什均衡称为精练纳什均衡，当只当参与人的战略在每一个子博弈中都构成纳什均衡，就是说，组成精练纳什均衡的战略必须在每一个子博弈中都是最优的. 在市场进入阻挠博弈中，在给定进入者已经进入的

中国国防科技网 http://www.81tech.com

情况下，在位者的“斗争”战略已不再是最优. 所以，(进入,斗争)不是一个精练纳什均衡. 剔除了这个均衡，(进入,默许)是唯一的子博弈精练纳什均衡. 应该强调的是，一个精练均衡首先必须是一个纳什均衡，但纳什均衡不一定是精练均衡. 只有那些不包含不可置信威胁的纳什均衡才是精练纳什均衡.

三、不完全信息静态博弈：贝叶斯纳什均衡

我们前面讲的博弈都包含一个基本假设，即所有参与人都知道博弈的结构、博弈的规则，知道博弈的支付函数. 回到前面“市场进入”博弈的例子，也就是进入者知道在位者的偏好、战略空间及各种战略组合下的利润水平，反之亦然. 满足这个假设的博弈称位完全信息博弈. 当然，这个假设在许多情况下是不成立的. 比如说，进入者实际上并不完全了解在位者的生产函数、成本函数及偏好. 这就是不完全信息博弈. 设想在位者成本函数有两种可能的情况，对应于这两种情况的支付矩阵分别如表 10－3－8 和表 10－3－9：

表 10－3－8　市场进入：高成本情况

		在位者	
		默许	斗争
进入者	进入	(40,50)	(－10,0)
	不进入	(0,300)	(0,300)

表 10－3－9　市场进入：低成本情况

		在位者	
		默许	斗争
进入者	进入	(30,100)	(－10,40)
	不进入	(0,400)	(0,400)

显然，从以上两个表看出：在给定进入者选择进入的情况下，高成本在位者的最优策略是默许，而低成本在位者的最优策略是斗争. 低成本情况下斗争之所以比默许优，可能是由于在位者的生产成本是如此之低，从而他在非常低的价格下获得的垄断利润(此时进入者已无利可图)也高于相对高的价格下分享到的寡头利润(另一种可能的解释是,在位者有一种好斗的天性,他更乐于与进入者斗争而不是合作).

贝叶斯均衡是纳什均衡在不完全信息博弈中的自然扩展：在不完全信息静态博弈中，参与人同时行动，没有机会观察到别人的选择. 给定别人的战

http://www.81tech.com

略选择，每个参与人的最优战略依赖于自己的类型. 由于每个参与人仅知道其他参与人的类型概率分布而不知道会选择什么战略，他不可能准确地知道其他参与人实际上会选择什么战略；但是，他能正确地预测到其他参与人的选择是如何依赖于各自的类型的. 这样，他决策的目标就是在给定自己的类型和别人的类型依从战略的情况下，最大化自己的期望效用. 贝叶斯纳什均衡是这样的一种类型的战略组合：给定自己和别人类型的概率分布的情况下，每个参与人的期望效用达到了最大化，也就是说，没有人愿意选择其他战略.

现在我们再回到“市场进入”这个例子(见表 10-3-8,10-3-9). 在这个例子中，进入者只有一种类型，在位者有两种类型(高成本或低成本). 也就是说，进入者具有不完全信息，而在位者具有完全信息. 给定进入者选择进入的情况下，在位者选择默许还是斗争依赖于他的类型；如果是高成本，就默许；低成本，选择斗争. 进入者不知道在位者的真实类型，但是，比如说，他知道高成本的可能性为 X，低成本的可能性为$(1-X)$. 那么，进入者选择进入得到的期望效用为 $40X+(-10)(1-X)$，选择不进入的期望利润为零. 一个简单的计算表明，当 $X>0.20$ 时，进入得到的期望利润才大于不进入时的期望利润，从而，进入才是最优的. 假定 X 大于 0.20，那么，贝叶斯(纳什)均衡是：进入者选择进入，高成本在位者选择默许，低成本在位者选择斗争.

再举个生活中的例子. 设想有人向你求爱，你的选择是接受还是拒绝，依赖于你对求爱者品德的判断. 假定如果你准确地知道求爱者品德良好，你会选择接受，反之，不接受. 问题是，你可能并不准确地知道求爱者的品德(你只具有不完全信息). 这时，你的决策显然取决于你在多大程度上相信他是一个品德优良(或品德恶劣)的人. 表 10-3-10 和表 10-3-11 分别列出两种情况下的支付矩阵. 这里，我们假定不论求爱者品德如何，只要他求爱你接受，他就得到 100；但是，你的支付依赖于求爱者的类型：接受一个品德优良者的求爱使你得到 100，而接受一个品德恶劣者的求爱使你得到 -100，求爱者(不论求爱者的类型如何)被拒绝则 -50.

表 10-3-10 求爱博弈：品德优良者求爱

		你	
		接受	不接受
求爱者	求爱	(100,100)	(-50,0)
	不求爱	(0,0)	(0,0)

中国国防科技网 http://www.81tech.com

表 10-3-11 求爱博弈：品德恶劣者求爱

		你	
		接受	不接受
求爱者	求爱	(100, -100)	(-50,0)
	不求爱	(0,0)	(0,0)

假设你认为求爱者品德优良的概率为 X. 求爱者也知道这个 X 为多少，那么他求爱，你接受时你的期望效用为 $w=100X-100(1-X)$，你不接受时你的期望效用为零. 当 $X>1/2$ 时，你接受才是最优选择. 如果 X 确实大于1/2，贝叶斯(纳什)均衡是：求爱者求爱，你接受；反之，如果 $X<1/2$，贝叶斯(纳什)均衡是：求爱者不求爱，你不接受. 为什么当 $X<1/2$ 时，求爱者选择不求爱呢？因为他知道他求爱会被你拒绝，这种损脸面的事是不值得干的.

四、不完全信息动态博弈：精练贝叶斯均衡

对应于不完全信息动态博弈的均衡概念是“精练贝叶斯均衡”. 这个概念是完全信息动态博弈的精练纳什均衡和不完全信息静态博弈的贝叶斯均衡的结合.

精练贝叶斯均衡的要点在于当事人要根据所观察到的他人的行为来修正自己有关后者类型的“信息”（主观概率），并由此选择自己的行动. 这里，修正过程使用的是贝叶斯规则. 这意味着，每个参与人都假定其他参与人选择的是均衡战略.

具体来讲，精练贝叶斯均衡是所有参与人战略和信念的一种结合，它满足如下条件：

(1) 给定每个人有关其他人类型的信念的情况下，他的战略选择是最优的；

(2) 每个人有关他人类型的信念都是使用贝叶斯法则从所观察到的行为中获得的.

用数学语言来说，精练贝叶斯均衡是个“不动点”. 应该强调的是，与其他均衡概念不同，精练贝叶斯均衡不能仅定义在战略组合上，它必须同时说参与人的信念，因为最优战略是相对于信念而言的.

举例说明精练贝叶斯均衡.

设想张三有恃强欺弱的天性，喜欢与弱者斗，但害怕和强者相遇. 张三在第一次遇到你后是否应该欺负你？答案依赖于他对你是强者还是弱者的判断. 假设他最初判断你是弱者的概率是 0.2，是强者的概率是 0.8，那么他

http://www.81tech.com

大概不会欺负你. 现在假设你在进行一种可以被张三观察到的行动，比如说，吃早餐. 早餐的内容也许包含着有关你强弱的某些信息，张三可以通过分析你的早餐内容修正他对你的判断. 假设强者喜欢吃辣椒，弱者不喜欢吃辣椒. 如果张三发现你不喜欢吃辣椒，自然会认为你是弱者，可欺. 你知道自己不吃辣椒的后果，即使本性懦弱，也许会强迫自己吃几根辣椒，以示自己并不是弱者. 张三当然不会被你的几种鬼把戏迷惑. 他会仔细的观察你究竟能吃多少辣椒. 除非你吃的辣椒的数量足够多，否则，张三不会认为你是一个强者.

因为强悍的你也不愿意与张三相斗，张三知道，如果你是一个强者，你或许会吃比普通情况下更多的辣椒以示自己确实是强者，这个数量是如此之多以至如果是个弱者的话，你会忍受不了的. 一个可能的精练贝叶斯均衡是，懦弱的你不吃辣椒(吃少无用吃多难受)，强悍的你吃辣椒(比通常情况多)，张三根据你是否吃辣椒来推断你是强者还是弱者，然后选择是否欺负你.

另一个可能的均衡是，懦弱的你和强悍的你都吃同样数量的辣椒，张三从吃辣椒这件事推不出任何新的信息，他仍然认为你是强者的概率为0.8，弱者的概率为0.2，所以仍然不敢欺负你. 以博弈论的术语讲，前面一个均衡叫“分离均衡”，后面一个均衡叫“混同均衡”.

黔驴之技

成语故事“黔驴之技”实际上也是一个动态不完全信息博弈.

毛驴刚到贵州时，老虎见它是个庞然大物，不知有多大本领，感到很神奇. 给定这个“信念”，老虎躲在树林偷偷地瞧毛驴就是一种最优选择. 过了一段时间，老虎走到树林，渐渐接近毛驴，就是想要获得有关这个庞然大物的知识本领的信息. 有一天，毛驴忽然大叫一声，老虎吓了一跳，急忙逃走. 这也是最优选择，因为毛驴的叫声是老虎预料之外的. 又过了几天，老虎又来观看，发现毛驴并没有什么特别的本领，对毛驴的叫声也习以为常了，但老虎仍不敢下手，因为他对毛驴的真本事还没完全了解. 再后来，老虎对毛驴挨得更近，往毛驴身上挤碰，故意冒犯它. 毛驴忍无可忍，就用蹄子去踢老虎. 这一踢向老虎传递了信息“毛驴不过这点本领而已”，所以老虎反而高兴了. 到这时，老虎对毛驴已有了完全的了解，所以就扑过去把它吃了.

这个故事里，老虎通过观察毛驴的行为逐渐修正对毛驴的看法，直到看清它的真面目，把它吃掉，这是一个精练贝叶斯均衡. 老虎的每一步行动在给定它的信念下都是最优的. 事实上，这个故事里，毛驴的行为也是理性的. 它知道自己技能有限，所以不到万不得已是不用那仅有的一技的，否则它早就被吃掉了.

中国图书科技网 http://www.81tech.com

§10.4 博弈的分类及对应的均衡概念

为方便读者，我们把非合作博弈论从两个角度总结如下：

角度1

参与人行动的先后顺序. 从这个角度，博弈可以划分为静态博弈和动态博弈.

静态博弈指的是博弈中，参与人同时选择行动或虽非同时但后行动者并不知道前行动者采取了什么具体行动；

动态博弈指的是参与人的行动有先后顺序，且后行动者能够观察到前行动者所选择的行动.

角度2

第二个角度是参与人对有关其他参与人(对手)的特征、战略空间及效用函数的知识. 从这个角度，博弈可以划分为完全信息博弈和不完全信息博弈.

完全信息指的是每一个参与人对所有其他参与人(对手)的特征、战略空间及效用函数有准确的知识；否则，就是不完全信息.

将上述两个角度的划分结合起来，我们可以得到四种不同类型的博弈：完全信息静态博弈，完全信息动态博弈，不完全信息静态博弈，不完全信息动态博弈.

表10-4-1 博弈的分类

信息 \ 行动顺序	静态	动态
完全信息	完全信息静态博弈；纳什均衡；	完全信息动态博弈；子博弈精练纳什均衡；
不完全信息	不完全信息静态博弈；贝叶斯纳什均衡；	不完全信息动态博弈；



1. 设一个大企业和一个小企业生产同一种商品，在质量标准相差不大的情况下，仿智猪博弈，给出他们各自开发市场的策略.

2. 一男一女谈恋爱，有些业余活动要安排，或者去看足球比赛，或者看芭蕾舞演出. 男的偏好足球，女的则更喜欢芭蕾，但他们都愿意在一起，不愿分开. 他们参加活动的效

用见下表：

		女孩	
		足球	芭蕾
男孩	足球	(2,1)	(0,0)
	芭蕾	(0,0)	(1,2)

试分析其纳什均衡解.

3. 设两个公司销售同一种商品，比如电视机，为避免价格战他们达成协议，维持商品的价格在某一价位，试用纳什均衡的观点分析该协议不可能自觉执行，竞相降价争取利润的价格战不可避免!

参考文献

[1] 张尧庭，陈慧玉. 效用函数及优化. 北京：科学出版社，2000

[2] 唐焕文，贺明峰. 数学模型. 第二版. 北京：高等教育出版社，2002

[3] 洪毅，贺德化，昌志华. 经济数学模型. 广州：华南理工大学出版社，1999

[4] 叶其孝. 大学生数学建模竞赛辅导教材(二). 长沙：湖南教育出版社，1997

[5] 张维迎. 博弈论与信息经济学. 上海：上海人民出版社，1996

[6] 谢识予. 经济博弈论. 上海：复旦大学出版社，2002

第Ⅱ章 遗传算法

§11.1 引 言

科学研究、工程技术与国民经济发展中的众多问题可归结为“极大化效益，极小化成本”这类典型模型. 数值求解这类模型导致寻求一个或多个目标函数(有解析表达式或无解析表达式)在某些特定区域上的最优解——这就是所谓的最优化问题. 一般地，最优化问题可描述为以下的数学模型：

$$\min\{F(x):x\in\Omega\} \tag{11.1.1}$$

其中 $F:\Omega\to\mathbf{R}^m$ 是目标函数，Ω 是由约束条件确定的解空间(或称可行域)，其中的每一点称为优化问题的一个可行解. 对这种形式的优化问题，如果 $m=1$，称之为单目标优化；如果 $m\geq 2$，则称为多目标优化. 若非特别指出，本章仅针对单目标优化问题进行讨论(为方便起见，简称优化问题).

一般而言，根据目标函数与可行域的不同构成形式，最优化问题大致可分为连续与离散优化两大类(例如，参见[1]). 针对它们发展起来的数值方法多种多样，例如，基于梯度计算的非线性规划类方法(牛顿法，拟牛顿法，信赖域法等)，线性规划类算法(单纯型法，椭球法等)以及解各类不同离散优化问题的启发式方法(求网络图最短路径的 Dijkstra 算法，解 TSP 问题的最近邻法，最近插入法，最小支撑树法)，还有最近几十年发展起来的各种随机算法(Tabu 算法，模拟退火算法，人工神经网络方法，模拟进化计算等). 这些算法各有其不同的适用范围，各有其优缺点，对此本章不再赘述，感兴趣者可参看[1]~[5].

本章将要介绍的遗传算法属于模拟进化计算的范畴. 这是 20 世纪 90 年代以来引起广泛研究兴趣的一类思想新颖的全局优化技术，它们通过向自然学习，通过借鉴、模拟生物进化机制求解问题. 这种全新的解决问题的方法有别于以往的优化算法，突出地表现为算法本质上的并行性、广泛的可应用性(对目标函数的性态 $F(\cdot)$ 无要求，甚至可以没有明确的解析表达式)、高度的稳健性、简明性以及全局优化性. 虽然从基本思想的产生至今不过短短几十年的时间，但目前模拟进化算法已广泛应用到工程、自然科学、管理以及社会科学

http://www.81tech.com

的众多领域，例如机械学习、模糊系统、人工神经网络的训练、程序自动生成、专家系统的知识库维护、数据挖掘、大分子计算、蛋白质预测以及各种组合优化问题、多目标优化等等.

本章目的在于从应用的角度介绍遗传算法，希望读者通过本章的学习，能够把自己感兴趣的问题转化为适合遗传算法求解的模型，并能够设计算法必需的各种参数，从而进行最后的求解. 为此，我们以一般的全局优化问题(11.1.1)为目标，首先在§11.2介绍模拟进化算法的基本思想与基本框架，§11.3从总体上介绍遗传算法，包括算法实现的两个基本前提，以及算法中参数选取的一般建议，§11.4详细论述算法中具体因素，包括编码格式、适应性度量、交叉算子、变异算子、选择算子的设计等，§11.5是应用举例，分别运用标准、非标准遗传算法求解连续和离散优化问题，最后§11.6对遗传算法的理论与应用给出一些评价.

§11.2 模拟进化算法的基本框架

模拟进化算法的基本思想源于这样的基本认识：体现“适者生存，不适者被淘汰”这一自然规律的生物进化过程本身是一个自然的、并行发生的、稳健的优化过程，在这一优化过程中生物种群是通过生物体的遗传、变异、繁殖等手段来达到优化(进化)的目的，优化的结果反映在对环境的适应性上——适应性强的个体不仅更容易存活下来，而且“适应性强”的特征能够通过繁殖的方式传递下去，而适应性弱的个体正好与之相反. 生物进化的这种优化观点早在20世纪60年代就出现在J. H. Holland, I. Recenberg及L. J. Fogel等计算智能学者的工作中，正是通过他们的努力，才有了如今分别称之为遗传算法(genetic algorithms,[6])、演化策略(evolution strategies,[7])、进化程序(evolutionary programming,[8])的模拟进化算法.

通过模拟生物进化过程来求解全局优化问题，是建立在以下各种“类比”的基础上的：

(1) 将优化变量类比为生物种群(population)中的个体(individual)，优化变量的集合类比作生物种群；

(2) 将优化变量目标函数值的大小类比作(或转换到)相应的生物个体对环境适应性(fitness)的强弱.

正是基于这样的类比，我们才能够通过模拟生物种群的进化过程来发展求解优化问题的算法. 以下，称多个可行解组成的集合为种群，种群中每一元素称为个体，一个种群中个体的数目称为种群规模. 由此，一个求解优化问题

中国国防科技网 http://www.81tech.com

(11.1.1)的种群规模保持不变(记为 N)的模拟进化算法可抽象描述为:

Step 1　随机确定初始种群 $X(0)=\{X_1(0),\cdots,X_N(0)\}$，置 $k=0$.

Step 2　对于当前种群 $X(k)=\{X_1(k),\cdots,X_N(k)\}$，计算其中每个个体 $X_i(k)(i=1,\cdots,N)$的适应性，依据这些适应性，利用模拟的生物进化机制产生新一代种群的候选种群$\overline{X(k+1)}$.

Step 3　从候选种群$\overline{X(k+1)}$中选择产生新一代种群 $X(k+1)$.

Step 4　检验新产生的种群 $X(k+1)$是否达到希望的进化要求(即得到原问题满意的可行解)，或已达到预设的进化时限，若已满足，停止模拟进化操作，输出当前的最优解作为原问题的解；否则，令 $k=k+1$，转 Step2.

显然，在上述算法的众多因素中，如何计算每个个体的适应性，采用怎样的“模拟进化机制”，以及怎样从候选种群中产生新一代种群是最重要的方面. 事实上，正是这些因素的差异，才导致了不同类型的模拟进化算法. 以下，我们将介绍最有代表性的遗传算法.

§11.3　遗 传 算 法

遗传算法是目前研究的最为广泛，也是应用面最广的一类模拟进化算法. 遗传算法的基本思想源于 20 世纪 60 年代的 J. H. Holland，他在研究机械学习的过程中，提出了一种借鉴生物进化机制的自适应学习方法，1975 年，J. H. Holland 出版了遗传算法研究的第一本专著 Adaptation in Natural and Artificial Systems([9])，但直到 1989 年 D. E. Goldberg 专著 Genetic Algorithms in Search, Optimization & Machine Learning 出版，遗传算法才以比较完整而系统的形式为人所知. 值得注意的是，遗传算法的最初提出及其应用目的均在非数值计算方面，只是在以后的逐步研究中，遗传算法才在更广泛的意义上被视为一种全局优化技术. 我们在以下的论述中，同样将以解全局优化问题为目标来介绍遗传算法.

首先，遗传算法的执行要求以下两个基本前提：(i)代替直接作用于 Ω 的优化变量 x 本身，而作用到 x 的称之为染色体(chromosome)的某种编码(encoding)，换言之，对 Ω 中所有的可行解进行某种编码，得到由所有编码组成的编码空间 Ω'. 这种作法的根本目的在于，其一，实现了问题的可行解与代表生物个体本质特征的染色体结构的直接类比(因此，本章以下，个体与染色体的意义相同，均指优化变量的某种编码)，其二，有利于模拟出一些生物进化机制(称之为遗传算子)，通过它们对染色体编码的操作，从而达到搜索编码空间而解全局优化问题的目的. (ii)衡量可行解(即，染色体编码)好坏不再以目

http://www.81tech.com

标函数 $F(\cdot)$为标准，而是以由 F 变化得到的所谓“适应性度量”为标准. 换言之，要把原目标函数 $F(\cdot)$转换成一个称之为“适应性度量”的新的目标函数 $J(\cdot)$，在这种新的度量下，每个可行解越接近目标函数的全局最小点，其适应性越大，反之，其适应性越小，从而原来的优化问题转化为新的优化问题：

$$\max\{J(y):y\in\Omega'\} \tag{11.3.1}$$

遗传算法通过解(11.3.1)达到求解(11.1.1)的求解目的. 显然，适应性度量 $J(\cdot)$基本要求是一非负函数，且与 $F(x)$对应着相反(或相同)的极值点，例如，$J(\cdot)=\exp(-F(\cdot))$. 进行这种转变的原因在于，适应性度量不仅可以直接用来衡量个体的优劣，而且它还直接决定种群中每个个体的存活概率，以及被选作父本而繁殖后代(从而本身的遗传信息可以保留下来)的概率. 基于这两个基本前提，具有不变规模的遗传算法可描述如下.

遗传算法：

Step 1　初始化

(1.1) 确定种群规模 N，交叉概率 p_c，变异概率 p_m 及终止进化准则.

(1.2) 以均匀概率从 Ω 中随机选取 N 个个体组成初始种群 $X(0)=\{X_1(0),\cdots,X_N(0)\}$，设 $X_i(0)(i=1,\cdots,N)$的染色体编码为 $Y_i(0)$，并记 $Y(0)=\{Y_1(0),\cdots,Y_N(0)\}$.

(1.3) 计算 $Y_i(0)$的适应性 $J(Y_i(0))$.

(1.4) 置 $k=0$.

Step 2　种群进化

(2.1) 执行 M 步(M 是具体实现时需要选定的参数，一般取 $N/2$)如下操作：

(1) 从 $Y(k)$中随机选取两个个体(不妨记为 $Y_{i1}(k)$和 $Y_{i2}(k)$)用作父本.

(2) 以概率 p_c 对 $Y_{i1}(k)$和 $Y_{i2}(k)$执行交叉，产生两中间个体 S_1' 和 S_2'.

(3) 以概率 p_m 对 S_1' 和 S_2' 执行变异，产生新个体 S_1 和 S_2.

(2.2) 计算步(2.1)所产生的 $2M$ 个新个体的适应性，对这 $2M$ 个新个体连同 $Y(k)$由某种选择规则确定 N 个个体组成新一代种群 $Y(k+1)=\{Y_1(k+1),\cdots,Y_N(k+1)\}$.

Step 3　终止检验

如果 $Y(k+1)$满足预设的终止准则，则停止演化，输出已产生的最优解；否则，令 $k=k+1$，转 Step 2.

注：如上，遗传算法涉及诸多参数，例如种群规模 N，交叉概率 p_c，变异概率 p_m，及终止进化准则等. 这些参数对算法的性能有重要的影响，但在实际计算中却并没有具体的选取方法，因此针对具体问题的求解，要反

中国国防科技网 http://www.81tech.com

复试验才能确定比较合适的参数. 以下罗列一些参数试验选取时的一般建议，但需要指出的是，这些建议很大程度是在试验中针对二进制及实数编码作出的.

(1) 种群规模 N. 种群规模 N 表示种群中个体的数目. 当 N 取值较小时，算法的计算量也相对较少，故此时算法通常具有较快的速度，但相应的缺陷是，算法会很快进化到一种其中个体完全一样的种群(称为"早熟")，而从这种种群出发利用算法提供的搜索手段不可能再搜索到其他任何新的个体(即找不出其他新的可行解). 当 N 取值较大时，虽然算法不易早熟，但由于计算量的加大，常常导致计算效率的低下. 一般建议 N 取值范围在 20 ~ 100 之间.

(2) 交叉概率 p_c. 在遗传算法中，交叉用来模拟生物进化中的有性繁殖方式，它是对编码空间进行搜索的主要手段. 因而交叉概率一般取值较大. 因为较小的 p_c 使得算法对编码空间的搜索速度变慢. 但同样应注意的是，太大的 p_c 往往容易破坏已搜索到的适应性强的个体的结构，使得这种结构所体现的优良的遗传信息不能遗传下去. 一般建议 p_c 的取值范围是 0.6 ~ 0.95. 比较理想的方式是采用自适应的取值模式.

(3) 变异概率 p_m. 变异是遗传算法中辅助的搜索手段，其主要作用是防止算法陷入局部搜索. p_m 一般取值较小. 因为较大的 p_m 取值，会使得适应性强的个体的优良结构容易遭到破坏，从而此机构所代表的遗传信息不能传递到下一代，即，不能通过已搜索到的信息去得到更好的结果，这样使算法实质上沦为随机搜索. 但太小的 p_m 取值同样存在问题，因为特别在算法需要跳出某个局部陷阱时，太小的 p_m 常常导致过慢的搜索速度. 一般建议 p_m 的取值范围是 0.001 ~ 0.01，同样建议采用自适应的取值模式.

(4) 终止进化准则. 这是解全局优化问题普遍遭遇的一个难题：一般而言，人们并不知道全局最优点或其函数值的有关信息，因此算法不可能据此确定何时停止. 在遗传算法中，常常根据对计算代价和计算结果的权衡，采取如下的终止规则：算法是否达到预先设定的进化时限，或在若干个连续的进化步中算法没有搜索到适应性更强的新个体？当然，这里涉及到的两个参数往往根据实际情况确定，但一般建议进化时限、已搜索到的最优值的停滞间隔分别为 100 ~ 1 000、20 ~ 50.

关于上述这些参数的选取问题，可参见文献[10]、[11].

注：上述算法中所涉及到的其他因素，例如，个体编码方式、适应性度量的选取、交叉、变异、繁殖概率以及新种群选取等，显然都是算法的核心，我们将在下一节一一详细论述.

§11.4 遗传算法的实现

一、编码

对于优化问题(11.1.1)，所谓编码是指，把解空间 Ω 中的每个可行解都唯一地转换为取值于某个“符号集合” Γ 的符号串的形式，这些符号串的集合称为“编码空间” Ω'. 在模拟进化算法中，这些符号串称为生物个体(简称个体)，由于这种转换(编码)目的在于模拟代表生物个体本质特征的染色体结构，因此，又称之为染色体. 可能出现在这种染色体符号串同一个位置上的、取值于“符号集合”中的那些符号称为等位基因. 为表明可行解与其编码的关系，又称可行解为个体的表现型，编码为个体的基因型.

注：通过编码，我们转而在编码空间进行搜索，以期求得原问题的解. 进行编码的一个重要的理由在于，我们可以方便地设计出模拟生物进化机制的搜索方法，利用这些搜索方法对编码空间进行有效搜索，以达到求解原优化问题的目的. 以下，我们以数值优化问题为例，介绍两种最常见的编码格式.

设优化问题(11.1.1)的解空间 Ω 为矩形区域：$[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]\subseteq\mathbf{R}^n$.

(1) 二进制编码　指取值于符号集合 $\Gamma=\{0,1\}$，以其中的二进制字符 0 和 1 为等位基因的定长字符串编码，例如，串长为 24 的两个二进制串，

Chromosome *A*	101100101100101011100101
Chromosome *B*	111111100000110000011111

对于任意的 $X=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\Omega$，把每个 $x_i\in[a_i,b_i]\ (i=1,\cdots,n)$ 编码为定长为 L_i 的子串形式，然后把每个子串按顺序连接起来，就得到 X 的定长为 L $\left(L=\sum_{i=1}^{n}L_i\right)$ 的二进制编码. 具体地讲，每个 $x_i\ (i=1,\cdots,n)$ 的编码方式为：对于预先给定的编码精度 ε_i，计算其相应的子串的长度 L_i：

$$L_i=\min\left\{k\,\middle|\,k\in\mathbf{N},\ \Delta_i=\frac{b_i-a_i}{2^k-1}\leqslant\varepsilon_i\right\},\tag{11.4.1}$$

再取实数$\dfrac{x_i-a_i}{\varepsilon_i}$的二进制形式的前 L_i 位，所得二进制串即为 x_i 的子码格式.

注：L_i 的取法可以使得$\dfrac{x_i-a_i}{\varepsilon_i}$的二进制形式的整数部分的长度正好为 L_i.

中国国防科技网 http://www.81tech.com

同时经过这种编码，$[a_i,b_i](i=1,\cdots,n)$中每个实数都恰好唯一对应一个长度为L_i的二进制串．具体地讲，区间$[a_i+(k-1)\Delta_i,a_i+k\Delta_i)(k=1,\cdots,L_i-1)$中所有的实数均对应着同一个位数为$L_i$的二进制数串，$b_i$唯一地对应着$L_i$个由0、1组成的二进制串——这就是编码精度的意义．容易看出，这种编码所得到的编码空间为$\{0,1\}^L$，其中含有2^L个元素．

（2）实数编码　对于高维、连续优化问题，使用二进制编码常常是不便利的，这种不便利表现在：第一，存在连续量到二值量的离散化误差（上述ε_i所反映），这种误差使得通过算法很难求得高精度的解，否则为求高精度的解，必须编码长度L很长，从而须在一个很大的编码空间上进行搜索．由于此时算法是通过解组合优化问题来达到求解原式问题目的的，在一个可行解集合很大的空间进行搜索无疑十分困难．第二，二进制编码不便于反映所求问题的特定知识，从而不便于开发专门针对问题的模拟进化搜索方法，人们在一些经典优化算法研究中所得到的一些宝贵知识也不便于加以利用．为此，常常采取实数编码格式，即，对任意的$X=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\Omega$，直接取其染色体编码为$x_1x_2\cdots x_n$．

显然实数编码适合于高精度的计算，且便于推广和融和经典连续优化算法，但其缺陷是只能适用于连续变量问题．

注：遗传算法中并没有统一的染色体编码技巧，针对实际问题的需要，可以设计出各种各样的编码格式．另外，上述介绍的两种编码格式并不仅限于解数值优化问题，事实上，不同的问题可以具有形式上完全一样的编码格式，例如，在[12]中，定长的二进制编码表示一个多源多目的的通讯问题的可行解（见下节）．关于染色体编码的详细的知识，可参见[11]．

二、适应性度量J

适应性本来是生物学家在研究生物界中生物的遗传和进化现象时用以度量某个物种对其生存环境适应程度的术语．遗传算法借助这个术语来衡量个体作为问题(11.1.1)全局最优解的可接受程度，或者说，它是遗传算法评价和选择个体进行操作的度量依据．

一个函数$J:\Omega'\to\mathbf{R}^+$称为问题(11.1.1)的适应性度量函数（简称适应性函数），如果J与原目标函数F对应着完全相反的极值点：设y_1，y_2是任意两个个体，其相应的表现型分别为x_1，x_2，则有

$$J(y_1)\geqslant J(y_2)>0\Leftrightarrow F(x_1)\leqslant F(x_2)$$

显然，问题(11.1.1)的适应性度量函数无穷多，一般有以下三种类型．

（1）线性型　对于编码空间Ω'中任一个体y，记其相应的表现型为x，则

$$J(y)=-\alpha F(x)+\beta$$

其中 $\alpha>0$ 称为缩放因子，β 为平移参数.

(2) 乘幂型　对于编码空间 Ω' 中任一个体 y，记其相应的表现型为 x，则

$$J(y)=(F(x))^{-k}$$

其中幂指数 k 为参数.

(3) 指数型　对于编码空间 Ω' 中任一个体 y，记其相应的表现型为 x，则

$$J(y)=\exp[-\alpha F(x)]$$

其中参数 $\alpha>0$.

上述三种基本适应性函数中涉及一些参数，这些参数在实际计算过程中是可以变化的. 实际上，在实际计算过程中，常常通过自适应改变这些参数的方法来扩大或缩小种群中个体间的差异. 例如，在进化的初始阶段，如果种群中个体的差异明显(按适应性来度量)，则占据特别优势的个体将在后代种群中占据越来越多的份额，从而导致种群多样性丧失而出现假收敛(premature convergence)(算法稳定到一个非全局最优的状态)，所以此时需要对适应度较高的个体进行“压制”，降低其与其他个体适应度的差异，这可以通过相关参数的改变来达到缩小差距的目的. 相反，在进化的后期，如果种群中个体的差异很小，缺乏足够的区别性，而影响算法的进化搜索效果，则同样可以通过参数的改变来扩大个体适应度的差异.

三、选择算子

从上一节遗传算法的描述可以看到，遗传算法实际上是通过模拟生物进化机制，从一代种群产生下一代种群的过程. 其中的模拟进化机制在于，从当前的种群中选择用作父本的个体，对父本个体进行交叉、变异操作，从这些操作产生的候补种群中选取下一代种群. 以下，我们抽象地描述这些操作为选择算子(selection operator)、交叉算子(crossover operator)、变异算子(mutation operator).

选择算子模拟的是“适者生存，优胜劣汰”的自然进化原理，在遗传算法中，它是体现步 2.1(1)，以及步 2.2 的操作. 步 2.1(1)中选择的作用效果是从当前种群中选取个体用作父本去繁殖后代，而步 2.2 中的选择则是从当代种群以及由其产生的候选种群中选取组成下一代种群的个体.

(1) 比例选择(propotional selection)　这是步 2.1(1)的一种操作方式. 对当前种群 $Y(k)$ 的每一个个体 $Y_i(k)$ $(i=1,\cdots,n)$ 赋予一个繁殖概率 $p_i(k)$，则以这些概率从 $Y(k)$ 中选取用作父本的个体，换言之，以概率 $p_i(k)$ 选择每个个体 $Y_i(k)$ 为父本个体. 最常见的概率确定方式定义为，个体的适应度占整个种群适应度的比例，即，

中国国防科技网 http://www.81tech.com

$$p_i(k) = p_i(Y_i(k)\text{被选为父本}) = \frac{J(Y_i(k))}{\sum_{j=1}^{n} J_j(k)}$$

(2) 排序选择(rank selection) 比例选择的一个问题是，如果某个个体的适应度占整个种群适应度之和很大的比例(例如90%)，则其他个体被选作父本的机会就很小. 排序选择对这种情况提出的解决方法是，把当前种群$Y(k)$中的个体按适应度从大到小的顺序排列，然后对每个个体赋予一个新的适应度，第一个个体的适应度为n，第二个为$n-1$，这样直到最后一个为1，然后再按照比例选择相同的方式计算每个个体的繁殖概率，并通过此繁殖概率随机选取父本.

(3) 杰出者选择(elitist selection) 这是步2.2的一种操作方式. 记当前种群$Y(k)$通过交叉、变异产生的中间候选种群为$\overline{Y(k+1)}$，杰出者选择策略是指，以概率1选取$Y(k)$中适应度最高者作为下一代种群$Y(k+1)$中的新个体，而其他的$n-1$个新个体从$\overline{Y(k+1)}$中选取.

(4) 稳定状态选择(steady-state selection)：这是主要体现步2.2的一种操作方式. 当前种群$Y(k)$中适应度强的一些个体被选择产生新的个体，然后这些新的个体取代$Y(k)$中适应度差的一些个体，即，新产生的个体与$Y(k)$中一些适应度强的个体共同组成新一代种群$Y(k+1)$.

四、交叉算子

交叉算子模拟的是生物进化中的有性繁殖方式，它是算法对编码空间进行搜索的主要手段. 交叉算子的设计依赖于染色体的编码方式，根据特定的编码方式可以设计不同的交叉算子. 设计的原则是视其能否对编码空间进行有效搜索. 事实上，交叉算子与以下将要介绍的变异算子作为遗传算法采用的搜索手段，本质上决定了遗传算法的可应用性、有效性.

一般而言，交叉算子作用于两个父本个体而产生两个新个体. 以下我们主要针对二进制编码和实数编码，介绍最常见的单点交叉算子，两点交叉算子，均匀交叉算子，以及算术交叉算子.

(1) 单点交叉(one-point crossover)：假设我们采用串长为L的二进制编码格式. 由于编码的每两个相邻的基因位之间有一个交叉位置，因此整个编码共有$L-1$个交叉位，单点交叉是指以等概率从这$L-1$个交叉位中随机选取一个，然后以交叉概率p_c交换两父本个体交叉位置以后的部分，从而得到两个新个体. 例如，串长$L=18$的两个父本个体分别为：

$$A = 1100100110 \,|\, 10001111$$
$$B = 1000100111 \,|\, 01100101$$

http://www.81tech.com

总共有 17 个交叉位，假设需定的交叉位在第十个交叉位，则交互 A 和 B 的交叉位以后的部分，得到两个新个体：

$$A' = 1100100110011001 01$$

$$B' = 1000100111100011 11$$

（2）两点交叉（two-point crossover）：同样假定采用串长为 L 的二进制编码格式，在 $L-1$ 个交叉位中以等概率随机选取两个交叉位，以概率 p_c 交换两个父本个体两个交叉位之间的部分. 同样采用上例，假设交叉位置选定在第 6 与第 15 位，则经过两点交叉后得到的两个新个体分别是：

$$A'' = 1100100111011001 11$$

$$B'' = 1000100110100011 01$$

显然，以此类推，很容易设计三点以至多点交叉算子.

（3）均匀交叉（uniform crossover）：同样假定采用串长为 L 的二进制编码格式. 对编码的每个基因位以概率 p_c 交换两个父本个体相对应的基因. 例如，父本个体同上，假设以概率 p_c 需要交换的基因位分别是第 2、5、9、12、13、16 位，即

$$A = 1\ \underline{1}00\ \underline{1}001\ \underline{1}01\ 0\ \underline{0}01\ \underline{1}11$$

$$B = 1\ \underline{0}00\ \underline{1}001\ 110\ \underline{1}\ \underline{1}00\ \underline{1}01$$

则两个新个体分别是

$$\bar{A} = 1000100111111 01101$$

$$\bar{B} = 1100100110000001 11$$

（4）算术交叉（arithmetic crossover）：假定采用实数编码格式. 算术交叉是指对两个父本个体进行线性组合以产生一个新个体的交叉方式. 假设两个父本个体为：

$$A = x_1 x_2 \cdots x_n$$

$$B = y_1 y_2 \cdots y_n$$

则经过算术交叉产生的新个体为：

$$C = z_1 z_2 \cdots z_n$$

其中 $z_i = \mu_i x_i + (1-\mu_i) y_i, \mu_i \in [0,1] (i = 1, \cdots, n)$.

五、变异算子

变异算子模拟的是生物进化过程中的基因突变的现象，在遗传算法中，变异是辅助的搜索手段，其作用主要是防止算法陷入问题局部极值点的陷阱. 由于交叉是主要的搜索算子，随着进化进程的发展，算法会进入一种种群状态，此时交叉算子的搜索会限制在一个很小的范围之内，变异算子的作用可以保证算法不被此范围限制，即跳出这个范围，从而保证遗传算法全局的优化性能.

中国国防科技网 http://www.81tech.com

需要指出，变异算子同样受编码格式的制约，对同样的编码格式，可以设计各种各样的变异算子. 以下，介绍常见的点变异、均匀变异以及正态变异.

(1) 点变异(point mutation)：假设采用串长为 L 的二进制编码格式，点变异是指对个体的每一个基因位以概率 p_m 改变其码值，如果某一位基因码值为1，改变后码值变为0；若码值为0，则改变后的码值为1. 例如，设一个串长为18的个体如下，且假设以概率 p_m 需要改变的基因位为第3及17位，

$$A = 11\ \underline{0}11000100111\underline{1}0\ 10$$

则经过点变异后得到的新个体为：

$$A' = 11\ \underline{1}11000100111\underline{0}\ 00$$

(2) 均匀变异(uniform mutation)：假设编码的符号集合为 $\Gamma = \{1,2,\cdots,n\}$，需要变异的父本个体为 $A = a_1a_2\cdots a_L$，则经过均匀变异后得到的新个体为：

$$A' = b_1b_2\cdots b_n$$

其中 $p(b_i = a_i) = p_m, p(b_i = a_j \neq a_i) = \dfrac{1-p_m}{n-1}$.

如果采用的是实数编码，需要变异的个体为 $X = x_1x_2\cdots x_n$，其中 $x_i \in [a_i,b_i]$，则经过均匀变异之后得到的新个体为 $X' = y_1y_2\cdots y_n$，其中

$$p(y_i = x_i) = p_m,\ p(y_i = \xi_i \neq x_i) = (1-p_m)/(b_i - a_i)$$

其中 ξ_i 是 $[a_i,b_i] \setminus \{x_i\}$ 中服从均匀分布的随机变量.

(3) 正态变异：设算法采用实数编码，需要变异的个体为 $X = x_1x_2\cdots x_n$，其中 $x_i \in [a_i,b_i]$，则经过正态变异之后得到的新个体为 $X' = y_1y_2\cdots y_n$，其中

$$y_i = x_i + \xi$$

其中 ξ 是服从均值为0、方差为 σ^2 的正态分布 $N(0,\sigma^2)$ 的随机变量.

注：以上介绍了遗传算法实现中各种因素的基本设计，这些因素直接确定了遗传算法的适用性及有效性. 对它们的设计以及遗传算法的执行策略，已有丰富的变形与推广，感兴趣的读者可参考[6]，[11]，[13]等.

§11.5 遗传算法的应用举例

在以上两节中，我们介绍了遗传算法的基本结构，以及编码格式、适应性度量、各种遗传算子(选择、交叉、变异算子)和算法诸参数的相关知识. 我们看到，遗传算法提供的只是一种求解优化问题的一般框架，算法中的诸多因素在针对具体问题时可以针对实际情况灵活设计. 本节，我们以标准遗传算法为例，介绍求解优化问题的全过程. 为简单起见，这里的标准遗传算法是指采取二进制编码、单点交叉、点变异、比例选择的遗传算法，其他的均称为非标准

遗传算法.

例 利用标准遗传算法解连续函数优化问题:

$$\min\{F(x_1,x_2)=100(x_1-x_2^2)^2+(x_1-1)^2,\ -5\leqslant x_1,x_2\leqslant 5\}$$

假设编码精度为 ε_1, $\varepsilon_2\leqslant 0.01$, 则由公式(11.4.1)计算得二进制串的编码长度为 $L=L_1+L_2=10+10=20$, 则编码空间为 $\Omega'=[0,1]^{20}$. 如果选取适应性度量函数为

$$J(x_1,x_2)=\exp[-0.1\times F(x_1,x_2)] \tag{11.5.1}$$

且种群规模 $N=40$, 交叉概率 $p_c=0.85$, 变异概率 $p_m=0.005$, 则解该问题的标准遗传算法可描述为:

Step 1 初始化

(1.1) 以均匀概率从 $[0,1]^{20}$ 中随机选取 N 个个体组成初始种群

$$Y(0)=\{Y_1(0),\cdots,Y_N(0)\}$$

(1.2) 对 $Y(0)$ 中每个个体 $Y_i(0)$ $(i=1,\cdots,N)$ 解码, 得相应的实数解 $X_i(0)$, 并记

$$X(0)=\{X_1(0),\cdots,X_N(0)\}$$

(1.3) 利用公式(11.4.1)计算每个个体 $Y_i(0)$ $(i=1,\cdots,N)$ 的适应度 $J(Y_i(0))$, 记适应最大的个体为 $X^*(0)$, 并记最大的适应度为 $J^*(0)$.

(1.4) 令 $X^*=X^*(0)$, $J^*=J^*(0)$, 置 $k=0$.

Step 2 种群进化

(2.1) 执行 $M=N/2$ 步如下操作:

(1) 对 $Y(k)$ 中每个个体赋予繁殖概率

$$p_i(k)=\frac{J(Y_i(k))}{\sum_{j=1}^{N}J(Y_j(k))}.$$

(2) 以概率 $p_i(k)$ $(i=1,\cdots,N)$ 从 $Y(k)$ 中随机选取两个个体(不妨记为 $Y_{i1}(k)$ 和 $Y_{i2}(k)$)用作父本.

(3) 以概率 p_c 对 $Y_{i1}(k)$ 和 $Y_{i2}(k)$ 执行单点交叉, 得到两中间个体 S_1' 和 S_2'.

(4) 以概率 p_m 对 S_1' 和 S_2' 执行点变异, 产生新个体 S_1 和 S_2.

(2.2) 令 Step(2.1)产生的 N 个新个体组成新一代种群, 记之为

$$Y(k+1)=\{Y_1(k+1),\cdots,Y_N(k+1)\}$$

(2.3) 对每个新个体 $Y_i(k+1)$ $(i=1,\cdots,N)$ 解码得相应的实数解 $X_i(k+1)$,

中国国防科技网 http://www.81tech.com

如果 $k+1=1\,000$ 或 J^* 在连续 50 次的进化中未发生改变，则停止演化，输出 X^* 作为问题的解，否则，令 $k=k+1$，转 Step 2.

注：只要能够对个体的适应性进行度量，换言之，能够计算目标函数值，原则上，上述标准遗传算法能够用于任何种类和形式的优化问题的求解. 区别仅仅在于对二进制编码怎样解释，即采取怎样的解码方式. [12]中解多源多目的地通讯问题的遗传算法就是这样的一个例子. 给定由 n 个节点组成的通讯网络 $G=(V,E,C)$，其中 V 是节点集(不妨设为 $V=\{1,2,\cdots,n\}$)，E 是连接 V 中节点的边集，$C: E\to\mathbf{R}^+$，$C(e)(\forall e\in E)$表示附加到边 e 上的权，假设指定 V 中前 3 个节点为源节点，后 2 个为目标节点，现寻求连接源点与目标点的子网络，要求其代价最小. 为求解这个问题，对问题的可行解 A 进行二进制编码 $a_1a_2\cdots a_{n-5}$，其中

$$a_i=\begin{cases}1, & \text{如果子网络经过节点 } i+1\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

这是一个串长为 $n-5$ 的二进制编码，第 i 位的码值用 1 表示，节点 $i+2$ 是子网络中连接源节点与目标节点的中间节点，否则，若第 i 位的码值为 0，则表示 $i+2$ 不是中间节点. 因此，对 $A=a_1a_2\cdots a_{n-5}$的解码是，由该编码中码值为 1 的中间节点、源节点及目标节点组成子网络的代价.

§11.6 小　　结

本章的基本目的是使读者通过本章的学习，能够比较清楚的了解遗传算法的基本结构，能够把具体问题归结为遗传算法的求解模式，从而能够利用遗传算法完整地求解. 这涉及很多内容，例如，能够进行合理的编码设计，能够确定合适的适应性度量函数，能够设计有效的遗传算子，以及能够经过试验确定比较合适的参数等. 对此，以上介绍的仅是最基本的内容. 其实，经过几十年的发展，关于这些设计的内容已相当广泛，读者可参考文献[6]，[11].

通过本章的介绍，我们可以看到，遗传算法事实上提供的是一个相当一般的优化问题求解框架. 虽然其思想新颖，且已有广泛的应用，对一些问题也有较好的应用效果，但应该特别注意到两个问题. 其一，虽然遗传算法是一个全局最优求解策略，但至今没有任何理论保证它一定能够求得问题的最优解，算法的应用往往也只是希望通过合理的计算代价，能够求得问题的满意解. 其二，应用实践表明，遗传算法通常需要较多的计算时间(一般总是慢于其他算法)，甚至有研究者提出观点，遗传算法并不比其他算法有效(参见[14]). 虽然我们不必因此对遗传算法产生悲观的看法(毕竟它还处于发展的初期)，但

在面对实际问题时，还是应该考虑究竟是否有必要采用这种方法. 实际上，针对遗传算法的优点，我们可以在以下几个方面考虑算法的应用：(i)由于遗传算法是利用种群对解空间进行搜索的，这种搜索方式具有天然的并行结构，因此需要并行处理的问题可考虑采用之；(ii)由于遗传算法对优化问题的目标函数相当一般(仅需知道目标函数值)，因此原则上遗传算法对所有优化问题可行，故对于没有解法或没有有效解法的“困难”用户问题可考虑采用之，例如，一些没有有效解法的 NP-hard 问题，不连续、不可微或者高度非线性的数值优化问题等；(iii)遗传算法具有全局最优性能，因此，对一些需要进行全局求解，但只拥有“局部求解方法”的优化问题，可以考虑构造遗传算法与这些“局部优化算法”的混合算法，以充分利用遗传算法的全局搜索性能，以及“局部算法”的局部搜索效率.

关于遗传算法的理论研究，最早是 Holland 为了阐明遗传算法的搜索机理而提出的模式理论、积木块假设以及隐含并行性理论，这些理论针对采用二进制编码、单点交叉、点变异以及比例选择算子的标准遗传算法，试图解释遗传算法是如何对解空间进行搜索的，以及为何能够有效搜索. 应该说，在当前阶段，这些理论不仅缺少必要的数学分析与推导，而且对于是否能够达到解释算法搜索机理的目的，不少研究工作者已经提出质疑.

最近十来年，遗传算法的理论研究取得相当丰富的成果，例如，遗传算法的公理化模型，针对不同算法模型的收敛性、收敛速度的研究，算法的复杂性分析等等. 但应该看到，这些理论研究也正处在起步阶段. 事实上，很多理论结果的得出仅仅针对的是采用某种特殊编码格式、特殊的遗传算子、特殊结构的算法模型，缺乏对一般模型(本身也是缺乏的)的一般性结论，特别是，针对算法有效性及能解性的研究，好的结果还很鲜见. 这些无疑是限制遗传算法发展的瓶颈所在. 对遗传算法理论研究的介绍，在此不赘述，有兴趣的读者可参见文献[11].



1. 利用遗传算法解具有两个变元的函数

$$f(x_1,x_2)=100(x_1-x_2^2)^2+(x_2-1)^2$$

的全局优化问题，设问题的可行解空间为 $\Omega=[0,5.12]\times[0,5.12]$，

(1) 假设采用标准二进制编码，编码精度 $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0.25$，试求以下四个可行解

$$\left(0,\frac{1}{3}\right),\ \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right),\ \left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),\ \left(\frac{2}{3},1\right)$$

的二进制编码；

(2) 求上述四个可行解与标准二进制等长度的灰度码编码.

中国国防科技网 http://www.81tech.com

2. 设个体的二进制编码长度为10，如果采用均匀交叉算子，试计算模式1＊＊＊＊＊＊＊＊1经过此算子作用后的存活概率.

3. 如果变异概率为$p_m=0.1$，对于长度为10的二进制串，试计算模式＊＊＊1＊＊0＊＊＊，＊＊00＊＊＊＊＊＊，＊＊＊111＊＊＊＊经过点变异算子的作用后的存活概率.

4. 对于种群规模为6的遗传算法，如果某一代中个体的适应性分别为5，10，15，25，50，100，如果采用比例选择算子，试计算每个个体被选择作为父本个体的期望数目.

5. 试采取单点交叉、点变异、比例选择的标准遗传算法求解优化问题：

$$\max\{x^2+y^2+z^2 \mid (x,y,z)\in D\}$$

其中$D=[-512,512]\times[-512,512]\times[-512,512]$.

参考文献

[1] 袁亚湘，孙文瑜. 最优化理论与方法. 北京：科学出版社，1997

[2] Flover F. Tabu Search for Nonlinear and Parametric Optimization. Discrete Applied Mathematics, 1994(49): 231～255

[3] Aarts E H L. Simulated Annealing and Boltzman Machines: a Stochastic Approach to Combinatorial Optimization and Neural Computing. John Wiley & Sons Ltd., 1990

[4] Hecht－Nielsen R. Neurocomputing. Addison-Wesley Publishing Company, 1987

[5] Fogel D B. an Introduction to Simulated Evolutionary Optimization. IEEE Trans. On Neural Networks, 1994, 5(1), 3～13

[6] Goldberg D E. Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning. Reading, MA: Addition Weley, 1989

[7] Schwefel H P. Evolution and Optimum Seeking. New York: Wiley, 1995

[8] Fogel D B. Evolutionary Computation－Toward a New Philosophy of Machine Intelligence. Piscataway NJ: IEEE Press, 1995

[9] Holland J H. Adaptation in Natural and Artificial Systems. Ann Arbor MI: University of Michigan Press, 1975

[10] Eiben A E, Hinterding R, Michalewicz Z. Parameter Control in Evolutionary Algorithms. IEEE Trans. On Evolutionary Computation, 1999, 3(2): 124～141

[11] 徐宗本，张讲社，郑亚林. 计算智能中的仿生学：理论与算法. 北京：科学出版社，2003

[12] Leung Y, Li G, Xu Z B. a Genetic Algorithm for the Multiple Destination Routing Problems. IEEE Trans. On Evolutionary Computation, 1998, 2(4): 150～161,

[13] Back T. Evolutionary Algorithms in Theory and Practice. Oxford University Press, 1996

[14] Salomn R. Raising Theoretical Questions about the Utility of Genetic Algorithms. in Evolutionary Programming 4, Lecture Notes in Computer Science 1213, 275 ~ 284, 1997

第12章 人工神经网络

§12.1 引 言

人类对思维和智能的兴趣最早可追溯到亚里士多德，但真正试图通过模拟人脑思维进行人工神经计算的研究却始于1943年，当时McCulloch和Pitts定义了一种虽然简单但功能却很强大的人工神经元模型．此后的15年，是人工神经网络的第一个繁荣期，Hebb学习规则、Rosenblatt的感知器模型是这个时期代表性成果．1969年，Minsky和Papert指出感知器模型功能的局限性，从此人工神经网络的研究进入相对沉寂的时期．这个时期一致持续到1982年，直到Hopfield提出了一种可以硬件实现的人工神经网络结构，这种结构可以较好地求解TSP问题，特别是1986年，Rumelhart等针对多层感知器利用BP算法成功地解决了逻辑计算中的“异或”问题．从此，人工神经网络的研究进入第二个繁荣期，研究热潮至今不衰．

本节在介绍生物、人工神经元模型之后，回答什么是人工神经网络，人工神经网络的基本结构，人工神经网络的功用何在．

一、生物神经元模型

脑是由神经元构成的一种网络组织，脑通过神经元之间的信号传递发挥功能．脑作为一个器官具有极其复杂机能的原因在于，它拥有数量众多且又并不完全相同的神经元．每个神经元的结构基本相似，它们都包含对各种细胞成分进行生物合成的神经元本身(胞体)、接受从其他神经元发来信息的树突和向其他神经元发出信息的轴突(如图12－1－1)．由于单个神经元所接受和发送的信息通常多种多样而不只是一种，因此，神经元具有多个分枝状的树突和轴突．树突和胞体上还有一种被称为突触的结构，神经元通过这些突触接受并处理来自其他神经细胞的信息，即突触是神经元之间进行联系的桥梁．

神经元是利用电信号完成信息的快速传递的．但由于相邻神经元之间没有细胞膜的实质性连接，即电绝缘，所以，电信号不能直接从一个神经元传递到另一个神经元．实际上，一个神经元释放出的特殊化学物质——神经递质，能

http://www.81tech.com

被另一个神经元的受体所接受并转换成电信号，突触再把这些传至神经元终末的电信号转换为化学信号，然后再传给突触后的细胞，如果神经元接收的化学信号超过一定的限度(阈值)，它会释放出新的神经递质，如此重复下去. 有一点需要特别指出，突触的效用可能因为通过它的信号而发生改变.

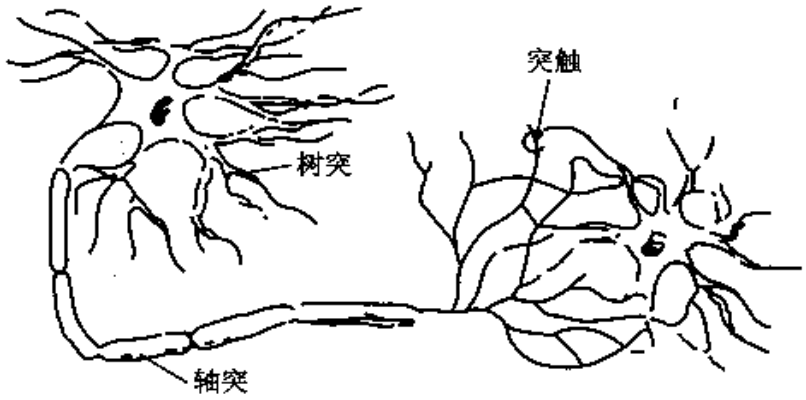


图 12－1－1　生物神经元示意图

二、人工神经元模型

1943 年，McCulloch 和 Pitts 提出了第一个模拟生物神经元的人工神经元模型(称为 M－P 模型，如图 12－1－2)：$y=\operatorname{sgn}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i x_i-\theta\right)$，其中，

(1) $X=[x_1,x_2,\cdots,x_n]$是一组输入；

(2) $W=[w_1,w_2,\cdots,w_n]$是一组模拟突触的权值；

(3) θ 是阈值；

(4) $\operatorname{sgn}(\cdot)$(也称激活函数)是符号函数：$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ -1, & x\leqslant 0;\end{cases}$

(5) y 是输出(也称相应于输入 X 的激活或响应).

为简单起见，把阈值 θ 对应为带有权 $w_0=-\theta$ 的常输入 $x_0=1$，这样，M－P 模型可改写为

$$y=\operatorname{sgn}\left(\sum_{i=0}^{n} w_i x_i\right).$$

M－P 模型是一种简化的模拟神经元，它当然和生物神经元有很多不同之处，然而，无论怎样，M－P 模型的提出开辟了计算神经模型的新纪元. M－P 神经元模型有很多推广，最常见的推广是用其他函数代替阶跃函数为

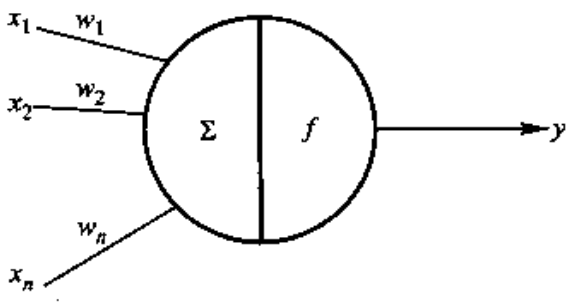


图 12－1－2　人工神经元模型

中国国防科技网 http://www.81tech.com

激活函数：

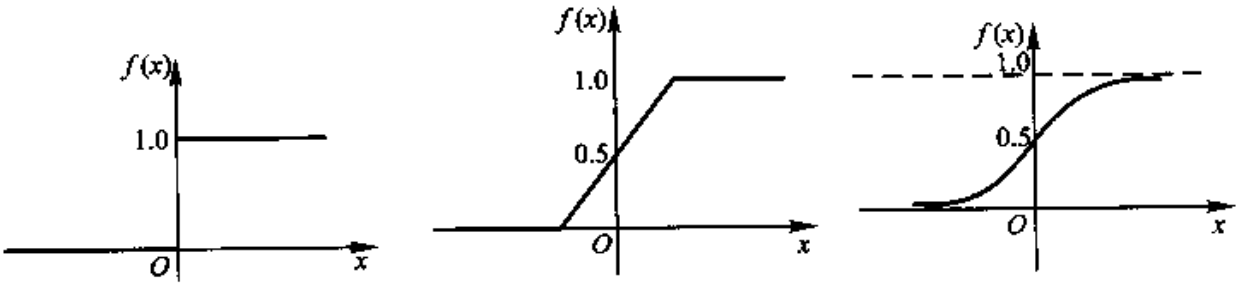
$$y = f\left(\sum_{i=0}^{n} w_i x_i\right)$$

常用的激活函数有

（1）单位阶跃函数 $f(x) = \begin{cases} 1, x \geqslant 0, \\ 0, x < 0; \end{cases}$

（2）分段线性函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant u, \\ x, & v < x < u, \\ 0, & x \leqslant v; \end{cases}$

（3）Sigmoid 函数 $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-\beta x}}$ 等，函数图形如图 12－1－3 所示.

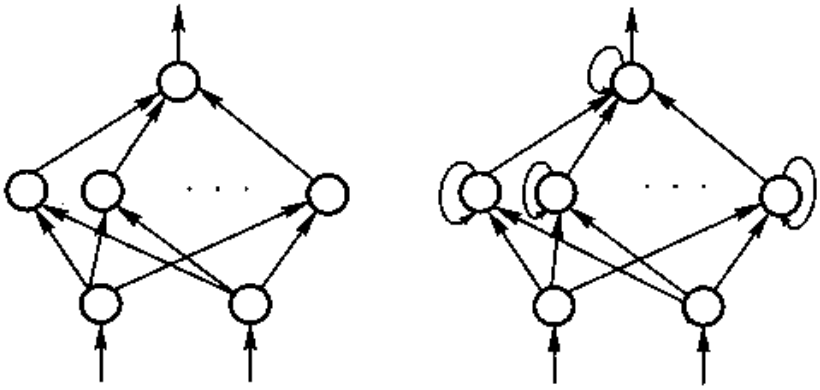


(a) 单位阶跃函数　(b) 分段线性函数　(c) Sigmoid函数

图 12－1－3

三、人工神经网络模型

人工神经网络（又称神经计算，网络计算，并行分布式系统等）是一个由大量简单的人工神经元（以下在不至于混淆的情况下，简称神经元）广泛互联而成的并行、分布式的信息处理系统. 抽象地，人工神经网络可被视为一个带权的有向图，每个节点代表一个神经元，它从其他神经元接收输入，并经过激活函数计算出本单元的输出；有向边代表从输出信号的神经元指向接收信号的神经元，权表示相连的两个神经元之间的连接强度. 根据神经元的连接方式（即网络的拓扑结构），人工神经网络可分为两大类（参见图 12－1－4）. 其一是前向（feed-forward）网，即不存在神经元输出与输入之间的反馈连接，表现在图中是没有回路. 分层前向网是一类典型的前向网，在此网中，神经元被分成若干层排列，同一层次的神经元之间没有信息交流，每一层仅从前一层接收信息，同时仅向后一层传递信息. 其二是反馈（feed-back）网，表现在图中是有回路. 全互联网络是这种网络类型的代表，网中每个神经元都与其他神经元（包括自身）相连接.



(a) 前向网示意图　　(b) 反馈网示意图

图 12－1－4

神经元不同的连接方式以及权值决定了网络不同的性能特点. 一般而言，前向网是静态的，即一个输入仅对应一个输出，而不是一个输出序列. 与之相反，反馈网是动态的，对于一个输入，产生一个输出，但由于反馈的存在，原来的输入马上发生改变，这导致网络进入一个新的状态，这一过程不断重复，直到收敛.

四、人工神经网络的应用

在计算机科学以及其他工程领域存在大量的问题，这类问题的一个共同的特点是，不适宜用传统的 Von-Neumann 结构的串行计算机求解，相反，人脑处理问题的方式非常适宜于这类问题的求解. 人们进行人工神经网络研究的根本目的也正在于，模拟人脑处理问题的方式去解决这类问题. 以下，我们对其中比较典型的问题作一介绍. 需要首先指出的是，这些问题并非没有解决方法，相反，在一些特定场合，往往存在非常有效的方法，只不过这些方法一般并不具有普遍性. 人工神经网络给这些问题的解决提供了另外的可选择的途径.

(1) 模式分类(pattern classification)：模式分类的任务是把输入模式分配到预先确定的特定模式类中. 模式分类的关键是模式的特征表示/特征提取以及模式类之间边界的确定. 这里的边界是通过对一些已经知道属于哪一类的样本模式的学习得到的. 字符识别、语音识别、血液中细胞的分类、印刷电路板的检测都是模式分类的应用范畴.

(2) 聚类/分类(clustering/categorization)：聚类又可称为无导师型的模式分类，此时，没有已知分类情况的训练样本，它的任务是探索模式之间的相似性，然后把相似的模式分为一类，并且，预先并不知道需要分成多少类. 数据挖掘、数据压缩以及数据探测分析都是聚类的应用对象.

中国国防科技网 http://www.81tech.com

(3) 函数逼近(function approximation)：给定 n 个输入－输出数据对 $\{(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)\}$，它们由带噪声的未知函数 $\mu(x)$ 确定. 函数逼近的任务是根据这些数据对寻找 $\mu(x)$ 的某一近似函数 $f(x)$(统计学上称为回归). 函数 $f(x)$ 可以任意精度满足训练数据，但过分强调训练数据的满足反而容易造成"over-fitting"的不正常现象(参见[2])，此时网络很符合训练数据，但对其他数据模式的误差反而更大. 模式分类可看成一类函数逼近问题.

(4) 预报/预测(prediction/forecasting)：给定按时间顺序排列的 n 个样本序列 $\{y(t_1), \cdots, y(t_n) \mid t_1 < t_2 < \cdots < t_n\}$，预测的任务是得知将来时间 t_{n+1} 时的样本 $y(t_{n+1})$. 预报/预测在商业、科学、工程以及日常生活中都有重要应用，其中股票市场预测、天气预报就是典型的例子.

(5) 优化(optimization)：优化涉及三个因素：(i)一组无关的变元(参数)或称一个状态；(ii)一个目标函数(或称代价、误差函数)；(iii)约束集. 优化问题的目标是寻找一个满足约束条件，且极大(或极小)化目标函数的状态. 组合优化问题是一类特殊的优化问题，其状态的每一分量取值于一个有限的集合. 例如，旅行商问题(TSP).

(6) 联想记忆(associative memory)：在 Von-Neumann 体系的计算模型中，一段内容的存储地址与内容本身毫无关系，因此，一旦地址的计算发生错误，就找不到相关的内容. 联想记忆或内容寻址记忆(content-addressable memory)则不然，记忆的内容可以通过缺省或毁坏的输入得到回忆. 人脑具有联想记忆能力的一个浅显例子是，可以通过一张残缺的照片回忆起完整的图形.

(7) 控制(control)：考虑动态系统 $\{u(t), y(t)\}$，其中 $u(t)$ 是控制输入，$y(t)$ 是导出的输出. 控制的目标是通过控制输入 $u(t)$ 使系统按照期望的轨迹运行.

§12.2 人工神经网络的学习方法

科学研究表明，神经元之间的信息传递速度不过毫秒级，远远低于当今先进计算机中电子电路的转换速度. 但一些对于最先进的计算机也是复杂的认知行为(例如,人脸识别)却能在数百毫秒间被人脑完成，其中说明的一个重要事实是，在这个过程中，神经元之间传递的信息量其实并不大，换言之，大量的主要信息没有经过传递，而是并行分布在神经元之间的互联结构上，对信息的操作也主要通过改变互联结构来实现. 相对应的，在人工神经网络中，对网络结构进行调整，对神经元之间的连接权进行调整的行为称为人工神经网络的

http://www.81tech.com

学习.

人工神经网络的学习更多地体现在对权值的调整上，它包括两种情况，其一是对权进行合适的赋值，然后保持不变，此权值使得网络具有期望的功能.其二是通过给定的训练样本，网络能逐步修正权值，从而获得性能的改善——这种学习在神经网络中最为常见.

一、学习方式

对于人工神经网络的学习，首先需要确定采取什么学习方式. 总的来说，有三种基本的学习方式：有监督型、无监督型、混合型. 在有监督学习中，已知一些学习样本，对于每一个学习样本的输入，知道正确的输出. 网络根据这些已知样本修正权值，使得对学习样本的响应越来越接近正确的输出. 与之相反，无监督学习不需要这样的已知正确输出的学习，它从根本上寻找数据模式间的关系，并因此把数据分成不同的类型. 混合型学习综合利用了有监督和无监督学习，即部分权值的学习利用有监督学习方式，剩余部分采用无监督方式进行学习.

其次是学习规则. 学习规则规定了在学习过程中权值是怎样被修正的. 利用学习规则对权值进行调整的过程，称为学习算法. 学习算法总需要有限的训练样本，通过对这些样本的学习，权值发生变化，从而求得网络性能的改变.对一个学习算法，需要研究的内容包括：网络能够从训练样本中学到多少内容(容量问题)，需要多少学习样本(样本复杂性问题)，以及算法的时间复杂性问题等.

二、学习规则

学习规则总的说，可以分为以下四种类型.

1. 纠偏型(error – correction)规则

纠偏型规则属于有监督学习：已知一些具有正确输出的样本模式，在学习过程中，由网络产生的实际输出 y，一般并不等于期望的正确输出 d，因此根据误差信号$(d-y)$，不断调整连接权以使误差逐渐缩小. 著名的感知器的学习规则、BP 学习算法均属此例.

2. Boltzmann 型规则

Boltzmann 机是一种随机的、对称的反馈型神经网络. 在 Boltzmann 机中，每个神经元只有两种状态：0 和 1. 所谓随机是指，每个神经元按 Boltzmann 分布随机产生输出状态. 所谓对称是指，对于任意两个神经元 i 和 j，从 i 到 j 的连接权 w_{ij}等于从 j 到 i 的连接权 w_{ji}($w_{ij}=w_{ji}$). Boltzmann 机具有两种运行模式，其一，钳制模式，其二，自由模式. 在钳制模式中，所有的可视神经元(与外

中国国防科技网 http://www.81tech.com

界接触的神经元，即输出、输入神经元）被钳制于特定的模式，而在自由模式中，所有神经元不受约束.

Boltzmann 学习规则是一种随机学习规则，其目标是调整网络权使可视神经元的状态满足期望的概率分布. 按照 Boltzmann 学习规则，连接权 w_{ij} 在学习前后的改变值为：$\Delta w_{ij} = \eta(\bar{\rho}_{ij} - \rho_{ij})$，其中 $\bar{\rho}_{ij}$ 和 ρ_{ij} 分别是网络以钳制和自由两种模式运行时神经元 i 和 j 之间的连接权，它们通常是利用 Monte Carlo 实验估计得出的.

3. Hebb 型规则

Hebb 规则是 D. O. Hebb 于 1949 年发表的关于神经元学习的一个规则，其大意是，如果一个连接权两边的神经元同时兴奋或抑止，则此连接权强度将被加强，否则，如果一个兴奋一个抑止，则连接权强度将减弱. 设从神经元 i 到神经元 j 的连接权是 w_{ij}，则在学习前后，此连接权的改变值为：$\Delta w_{ij} = \eta y_j x_i$，其中 η 是学习率，x_i 和 y_j 分别是神经元 i 和 j 的输出值.

Hebb 学习规则的一个问题是，权值可以无限制地增长，为此，人们提出许多改进办法，Oja 规则就是其中之一：$\Delta w_{ij} = \eta y_j(x_i - y_j x_{ij})$.

4. 竞争学习规则

在竞争学习规则中，如果有一个神经元对输入产生的响应最大，则该神经元称为胜者，只对该胜者的权进行调整，使其更接近于对样本输入模式的估值.

由于学习算法的提出总是针对某种结构网络的训练，因此，对学习算法的讨论，总牵涉到特定结构的网络. 一般而言，纠偏型学习规则更多地应用于前向网，而 Hebb 型规则可以应用于任何类型的网络结构. 另外，无论有监督还是无监督学习都可以利用上述的纠偏型、Hebb 型、竞争型学习规则. 总的来说，学习是人工神经网络中一个相当活跃的重要研究领域，它的内容非常广泛，有兴趣的读者可参阅近年发表的大量文献和专著.

§12.3 分层前向网及其主要算法

我们在以上曾经指出，分层前向网是一种典型的前向网（如图 12－1－4(a)），神经元分层排列，同层之间没有信息交流，每一层仅从其前一层接收信息，同时也仅向后一层传递信息. 对于一个具有 $n+1$ 个层次的前向网（称为 n 层前向网），从左到右依次称为第 0 层，第 1 层，直到第 n 层. 其中第 0 层中单元的数目等于输入向量（或样本）的维数，这一层仅负责把输入向量提供给下一层神经元，因此称为输入层；最后一层中神经元的数目等于输出向量

http://www.81tech.com

的维数，这一层的计算结果就是整个网络对应于输入向量的响应(或输出向量)，因此称为输出层；从第1层到第 $n-1$ 层称为中间隐层，隐层的层数以及每个中间隐层中神经元的数目如何，是前向网研究的核心问题之一. 这里需要强调指出，不同于其他各层次的神经元，输入层中的单元不进行任何形式的神经计算，它们仅负责向网络系统提供输入向量.

一、感知器网络模型及算法

感知器是 F. Rosenblatt 于 1958 年提出的没有隐层的单层前向网. 不失一般性，我们仅限于输出层只有一个神经元的情况介绍(如图 12-3-1). 设输入 $X=[x_1,\cdots,x_n]^T$，输入层与输出层之间连接权为 $W=[w_1,\cdots,w_n]^T\in\mathbf{R}^n$，则当阈值为 θ 时，输出 $y\in\{0,1\}$ 可表示为：

$$y=\operatorname{sgn}\left(\sum_{i=0}^{n}w_ix_i\right)$$

其中 $w_0=-\theta$，$x_0=1$，$\operatorname{sgn}(\cdot)$ 为符号函数 $\operatorname{sgn}(u)=\begin{cases}1, & u\geqslant 0,\\ -1, & u<0.\end{cases}$

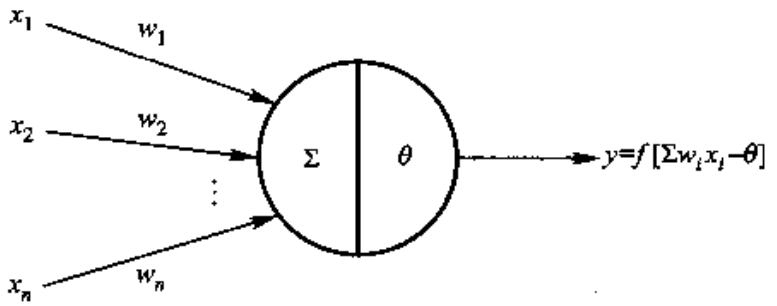


图 12-3-1 感知器模型

感知器的一个重要特点是线性可分性，这个特性可以用于对具有线性可分性的数据进行分类：设 A 和 B 是两个线性可分的数据集合，则存在一个感知器网络，对 A 中任何元素的响应均为1，而对 B 中任何元素的响应均为 -1. 显然，为达此目的，需寻求感知器中合适的权值. 这种合适的权值可以通过以下的学习算法找到.

假设用于学习的输入样本为 $X^k(k=1,2,\cdots,p)$，由于对每个样本都有一个正确的输出响应 $y^k(y^k=1$ 或 $-1)$，故感知器的学习属于有监督学习. 记 $w=[w_0,w_1,\cdots,w_n]^T$ 为权值向量，则有以下的学习算法：

感知器学习算法：

Step 1 首先对权随机设置初值(如设为0).

Step 2 对每一对模式 $(X^k,y^k)(k=1,\cdots,p)$，将 X^k 送到输入层单元，计算网络的输出

$$y_k = \mathrm{sgn}\left(\sum_{i=0}^{n} w_i x_i\right).$$

Step 3　计算期望输出与实际输出的偏差 $d_k = y_k - y^k$.

Step 4　调整连接权值 $\Delta w_i = \alpha x_i d_k (i = 0, \cdots, n)$，其中 $0 < \alpha < 1$ 为正常数.

Step 5　返回 Step 2 循环执行，直到对所有的 $k = 1, \cdots, p$，偏差 d_k 均为 0 为止.

已有定理证明如果数据集合是线性可分的，则上述算法有限步终止. 如果数据不是线性可分的，则学习算法将永不停止. 现在已经有许多工作把上述算法推广到线性不可分的数据.

二、反向传播(backpropagation network; BP)网络与误差反向传播算法

感知器实际上是只有一层可调节权重的前向网，就所能表示的函数而言这种网络有很严格的限制(只能表示线性函数). 为了表示更一般的函数，本节介绍具有多层可调节权重的前向网(如图 12－3－2). 已有理论证明，激活函数连续(例如 Sigmoid 函数)的两层前向网可以以任何精度逼近一个连续函数，从而可实现任何复杂的分类问题.

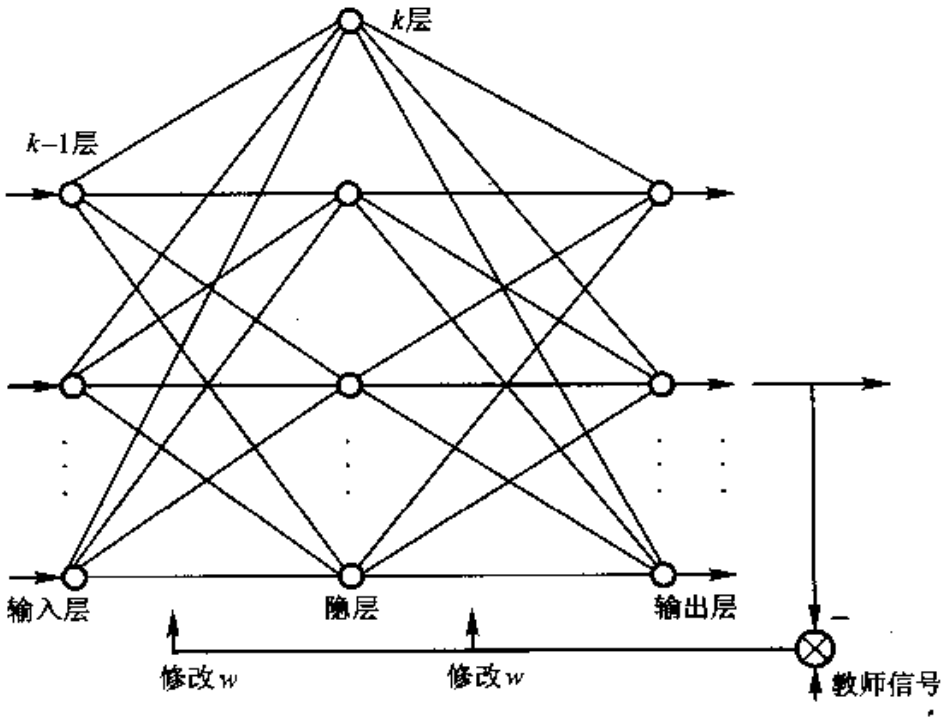


图 12－3－2　BP 网示意图

严格地说，本节将要介绍的反向传播只是一种学习算法而不是一种网络模型，但由于这种算法已和网络模型紧密地联系在一起了，因而常常就把这种网

http://www.81tech.com

络称为 BP 网络. BP 网是一种多层前向网：除了输入层、输出层外，它还有若干的中间隐层. 与感知器中神经元不同的是，在 BP 网中，神经元的输出与输入是在[0,1]或[-1,1]区间上连续取值，例如，激活函数采用 Sigmoid 函数.

假设$(X^k,Y^k)(k=1,\cdots,p)$是训练样本，其中$Y^k=(y_1^k,\cdots,y_m^k)$是相应于输入样本$X^k=(x_1^k,\cdots,x_n^k)$是期望输出，$w_{ij}^l(l=0,\cdots,n-1)$是从第l层的第i个神经元到第$k+1$层第j个神经元的连接权. 如果对于权$w_{ij}^l(l=0,\cdots,n-1)$，相应于$X^k=(x_1^k,\cdots,x_n^k)(k=1,\cdots,p)$的实际输出是$\bar{Y}^k=(\bar{y}_1^k,\cdots,\bar{y}_m^k)$，则总的输出误差为：

$$E=\sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{m}(y_i^k-\bar{y}_i^k)^2$$

此均方误差显然是权的函数，但我们并不能从中直接知道调整哪一个连接权可以缩小误差，这就是所谓的“信用分配问题”. BP 算法为解决这个问题提供了一种新思路.

BP 算法的基本思想是这样的，对于每一个输入向量，涉及到两个过程，一个是前向传播过程，从第一层开始逐层计算每个神经元的输出，直到输出层，另一个是反向传播过程，计算整体的均方误差，并从输出层开始逐层计算此误差关于每一个权重的偏导数，利用它对权重进行修正，直到第一层. 轮流对每个输入向量执行这种操作，并循环执行，直到误差低于预先设定的限度.

采用 Sigmoid 函数作为激活函数的两层前向网的 BP 算法描述如下.

BP 算法：

Step 1　初始化权重向量：对每个权重赋予小的随机值.

Step 2　对每个输入向量$X^k(k=1,\cdots,p)$执行以下步骤：

(2.1) 沿网络前向传播计算隐层及输出层的神经元的输出值.

(2.2) 计算输出层各神经元的δ值

$$\delta_k=y_k-t_k,\quad k=1,\cdots,m$$

其中y_k为第k个输出神经元的实际输出，t_k为期望输出.

(2.3) 计算隐层各神经元的$\bar{\delta}$值

$$\bar{\delta}_j=z_j(1-z_j)\sum_{k=1}^{m}w_{jk}\delta_k$$

其中z_j为第j个隐层神经元的实际输出.

(2.4) 修正权重

$$\Delta w_{ij}=-\eta\bar{\delta}_j x_i\quad\text{（第一层权重）}$$

$$\Delta w_{jk}=-\eta\delta_k z_j\quad\text{（第二层权重）}$$

Step 3　检验各权重以及均方误差的变化是否足够小，若是，则停止，否

中国国防科技网 http://www.81tech.com

则，转 Step 2.

§12.4 反馈型 Hopfield 网络模型及其在 TSP 的应用

Hopfield 网络是 J. J. Hopfield 于 1982 年提出的一种典型的全互联反馈型神经网络，网中每两个神经元都有信息交流，每个神经元不仅从其他神经元接收信息，而且也向其他神经元发送信息．对于网络的一个输入，它产生一个输出，但由于反馈的存在，原来的输入马上发生改变，这导致网络又会产生一个新的输出，这一过程不断重复，或者永远进行下去，或者逐渐收敛到一个稳定的平衡状态．因此，Hopfield 网络是一种动态网络．

利用这种动态性质，在 Hopfield 网络中可以定义一种所谓的计算能量函数，网络的能量将随着网络的变化而不断降低，最后收敛于某个极小值．这种能量的演进过程可以用于一些优化问题的求解．本节以下在介绍两个类型的 Hopfield 网络(离散型与连续型)之后，将介绍如何应用 Hopfield 神经网络求解著名的旅行商问题(travelling salesman problem，TSP)．

一、离散型 Hopfield 网络

离散型 Hopfield 网络是一种对称全互联的反馈网络(如图 12－4－1)，每个神经元只有两个状态：－1 或 1，每两个神经元之间都有信息交流，即每个神经元不仅向其他所有的神经元发送信息，而且也从其他所有的神经元接收信息．详细地说，在有 n 个神经元的网络中，若从第 i 个神经元到第 j 个神经元

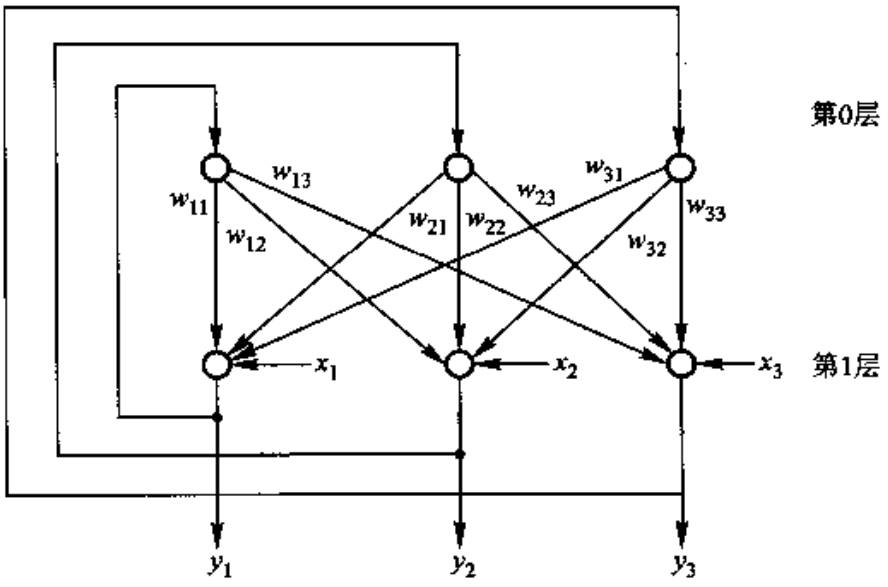


图 12－4－1　三个神经元的 Hopfield 网络模型

中国国防科技网 http://www.81tech.com

的连接权为 w_{ij}，从第 i 个神经元到第 j 个神经元的连接权为 w_{ji}，则 $w_{ij}=w_{ji}$. 对于第 i 个神经元，假设 $v_1(t),\cdots,v_{i-1}(t),v_i(t),\cdots,v_n(t)$ 是 t 时刻其他 $n-1$ 个神经元对它的输入，θ_i 为其阈值，则 $t+1$ 时刻，它的输出 $v_i(t+1)$ 可表示为：

$$v_i(t+1)=\operatorname{sgn}\Big(\sum_{j=1,j\neq i}^{n}w_{ji}v_j(t)-\theta_i\Big).$$

其中 $\operatorname{sgn}(\cdot)$ 是符号函数，即 $\operatorname{sgn}(u)=\begin{cases}1, & u\geqslant 0,\\ -1, & u<0.\end{cases}$

离散型 Hopfield 网络有两种运行模式.

1. 异步方式

在任何时刻 t，只有一个神经元的输出发生改变，其他神经元的状态不变，即

$$\begin{cases}v_i(t+1)=\operatorname{sgn}\Big(\sum_{j=1,j\neq i}^{n}w_{ji}v_j(t)-\theta_i\Big)\\ v_j(t+1)=v_j(t),\ j\neq i\end{cases}$$

2. 同步方式

在任何时刻 t，所有的神经元同时发生状态的改变，即

$$v_i(t+1)=\operatorname{sgn}\Big(\sum_{j=1,j\neq i}^{n}w_{ji}v_j(t)-\theta_i\Big),\quad i=1,\cdots,n$$

在满足一定的参数条件下，某种能量函数在这种网络迭代运行过程中将不断地降低能量，最后趋于稳定的平衡状态. 这种策略可用于某些问题的求解：使问题的解对应于网络的稳定平衡状态，随着能量的降低，最后求得问题的解. 因而这里的能量函数常称为计算能量函数. 对于离散型网络方程，一般地，可以将能量函数定义为：

$$E=-\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}w_{ij}v_iv_j+\sum_i\theta_iv_i$$

在迭代过程中，能量的变化量为：

$$\Delta E_j\approx\frac{\partial E}{\partial v_j}\Delta v_j=\Delta v_j\Big(-\sum_{i\neq j}w_{ij}v_i+\theta_j\Big)$$

显然，只要阈值满足：$\theta_j<\sum_{i=1,i\neq j}^{n}w_{ij}v_i$，则 ΔE_j 总是负值，也就是说能量总是不断随着神经元 j 的状态变化而下降.

二、连续型 Hopfield 网络

连续型 Hopfield 网络在时间上是连续的，因而可用微分方程来描述其状态的变化过程.

中国国防科技网 http://www.81tech.com

设 u_i 表示神经元 i 的内部膜电位状态，v_i 表示其输出，C_i 表示细胞膜输入电容，R_i 表示细胞膜的传递电阻，则 u_i 的变化可描述为：

$$C_i\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}+\frac{u_i}{R_i}=\sum_{j=1,j\neq i}^{n}w_{ji}v_j+I_i$$

式中 I_i 表示系统外部的输入，它相当于系统的偏置. 如令 $\tau=R_iC_i$，仍然用符号 w_{ji} 与 I_i，可将上式改写为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{u_i}{\tau}+\displaystyle\sum_{j=1,j\neq i}^{n}w_{ji}v_j+I_i\\ v_i=g(u_i)\end{cases}\tag{12.4.1}$$

如果上式中 $g(\cdot)$ 采用 Sigmoid 类单调连续递增函数，在引入调节参数 u_0 后，可以写出

$$v_i=g\left(\frac{u_i}{u_0}\right)=\frac{1}{2}\left[1+\tanh\left(\frac{u_i}{u_0}\right)\right]=\frac{1}{1+\exp(-2u_i/u_0)}.$$

当 u_0 值不断减小时，函数 $v_i=g(u_i/u_0)$ 的曲线逐渐和离散的阶跃函数靠近. 图 12-4-2 是用运算放大器构造的连续型 Hopfield 网络的电路图，采用对称的全互联方式.

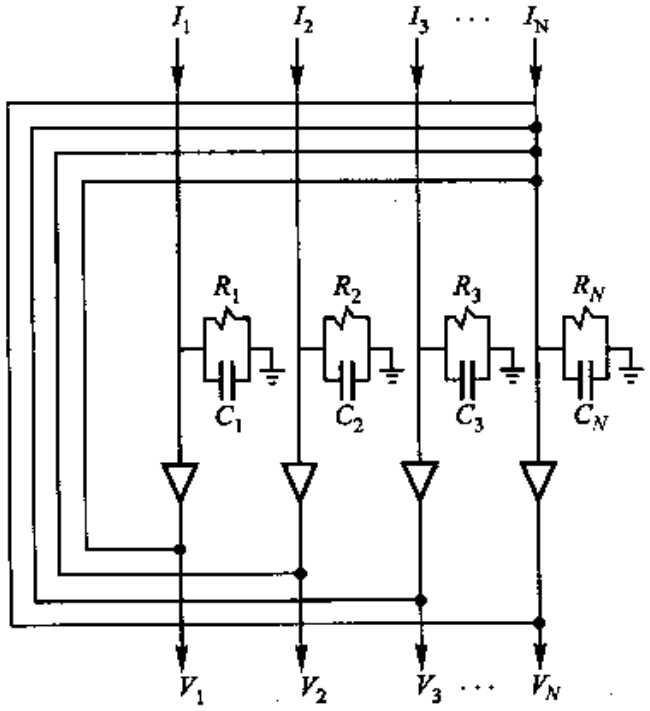


图 12-4-2 用运算放大器构造的模拟型连续 Hopfield 网络

类似于离散型 Hopfield 网络，也可以为连续型 Hopfield 网络建立一个李雅普诺夫函数形式的计算能量函数

中国国防科技网 http://www.81tech.com

$$E = -\frac{1}{2}\sum_i\sum_j w_{ji}v_iv_j - \sum_{i=1}^{n} v_iI_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\tau}\int_0^{v_i} g^{-1}(\tau)\,d\tau$$

不难看出

$$\frac{dE}{dv_i} = -\left(\sum_j w_{ji}v_j + I_i - \frac{u_i}{\tau}\right) = -\frac{du_i}{dt}$$

从而

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\frac{dE}{dv_i}\cdot\frac{dv_i}{dt} = -\sum_{i=1}^{n}\frac{dv_i}{dt}\cdot\frac{du_i}{dt} = -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dv_i}{dt}\right)^2\frac{du_i}{dv_i}$$

当 $v_i = g(u_i)$ 为 Sigmoid 函数时，其逆函数 $u_i = g^{-1}(v_i)$ 为非减函数，即

$$\frac{du_i}{dv_i} = \frac{d}{dv_i}(g^{-1}(v_i)) > 0$$

从而 $\frac{dE}{dt} < 0$. 由此可见，式(12.4.1)所表示的动态方程，显示计算能量函数不断减少，并在最后稳定于极小值(或全局最小值)的变化过程.

三、用神经网络方法求解旅行商问题

旅行商问题是图论中一个有代表性的组合优化问题，它可描述为：设有 N 个城市 $C = \{C_1, \cdots, C_N\}$，用 $d_{ij} > 0 (i, j = 1, \cdots, N)$ 表示城市 C_i 与 C_j 间的距离. 有一旅行商从某一城市出发，访问各城市一次且仅一次后再返回原出发城市，要求找到一条最短的巡回路线.

容易计算，从一个城市出发最后回到该城市的可能方案共有 $\frac{1}{2}(N-1)!$ 条(路径完全相反的视为相同). 当城市数目 N 不大时，我们可以把所有可能路径的长度都计算出来，从中选择一条最短的即可. 但当城市数目增加时，这种穷举法的计算工作量将会爆炸性地增长. 设有一台每秒能搜索一亿条路径的巨型计算机，当 $N = 10$ 时，搜索完所有的路径大约需要 1.81×10^{-3} 秒，而当 $N = 20$，所需时间大约为 19.3 年，$N = 30$ 时，约需 1.4×10^{13} 世纪. 以下，我们介绍 TSP 的神经网络解法.

利用神经网络方法求解 TSP，关键在于构造计算能量函数，以使得 TSP 的最优解正好对应计算能量函数的极小值. Hopfield 为了方便于神经网络的状态向能量平衡极小值收敛，根据 TSP 的要求，人为地构造一个计算能量函数. 例如需要解决有 A、B、C、D、E 五个城市的 TSP，我们用路径矩阵的行表示城市，列表示访问的次序. 假设有一个方案 $A \to E \to D \to C \to B \to A$，它相应的路径矩阵可表示为：

中国国防科技网 http://www.81tech.com

	次序 1	次序 2	次序 3	次序 4	次序 5
城市 A	1				
城市 B					1
城市 C				1	
城市 D			1		
城市 E		1			

此时的路径长度就可以由 $S = d_{AE} + d_{ED} + d_{DC} + d_{CB} + d_{BA}$ 来确定.

一般来说，对于 N 个城市的 TSP，路径矩阵有 $N \times N$ 个元素，需要 N^2 个神经元的状态来表示.

进一步，根据下面四方面的要求来构造与 TSP 相对应的计算能量函数，即

(1) 路径矩阵每行只能有一个“1”，即每个城市只能访问一次；

(2) 路径矩阵每列只能有一个“1”，即在任何时刻只能访问一个城市；

(3) 路径矩阵中元素“1”之和应等于城市数 N；

(4) 所构造能量函数的极小值应对应于最短巡回路径.

于是，计算能量函数可表达为：

$$E = \frac{A}{2}\sum_{x=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1,j\neq i}^{N} v_{xi}v_{xj} + \frac{B}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{x=1}^{N}\sum_{y=1,y\neq x}^{N} v_{xi}v_{xj} + \frac{C}{2}\left(\sum_{x=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} v_{xi} - N\right)^2 + \frac{D}{2}\sum_{x=1}^{N}\sum_{y=1,y\neq x}^{N}\sum_{i=1}^{N} d_{xy}v_{xi}\left(v_{y,i+1} + v_{y,i-1}\right)$$

式中 v_{xi} 表示路径矩阵第 x 行第 i 列的元素，d_{xy} 表示两个不同城市之间的距离，参数 A、B、C、D 表示所在项的权值.

上式中前三项分别与条件(1)、(2)、(3)的要求相对应，当且仅当三个条件都满足时，这三项之和取最小值 0. 而上式中第四项为目标项，如果 $v_{xi} = 0$，则这个元素对目标项没有贡献，如果 $v_{xi} = 1$，那么就寻找与 i 相邻的前后两次访问的城市，并将这两个城市与第 i 次访问城市间的距离计入.



1. 试画出单个人工神经元的结构示意图，并写出输出与输入间的关系表达式，并要求至少列出三种形式的激活函数.

2. 试构造一前向神经网络，要求对下列输入实现相应的输出：

$(+1, +1) \rightarrow -1$，$(+1, -1) \rightarrow +1$，$(-1, +1) \rightarrow +1$，$(-1, -1) \rightarrow -1$

3. 构造离散型 Hopfield 模型，使其以向量 $a^{(1)}=[01101000]^T$，$a^{(2)}=[10010101]^T$，$a^{(3)}=[11110100]^T$为稳定状态，并证明

（1）$t_1=[01010100]^T$ 收敛于 $a^{(2)}$；

（2）向量 $t_2=[00001011]^T$ 是伪稳定状态.

参考文献

[1] Hertz J, Krogh A, Palmer R G. Introduction to the Theory of Neural Computation. Addison – Aesley Publishing Company, 1991

[2] Davalo E, Naim P. Neural Networks. Macmillan Education Ltd, 1991

[3] Kung S Y. Digital Neural Networks. PTR Prentice – Hall, Inc, 1993

[4] Hecht – Nielsen R. Neurocomputing. Addison – Wesley Publishing Company, 1990

[5] 徐宗本，张讲社，郑亚林. 计算智能中的仿生学：理论与算法. 北京：科学出版社，2003

[6] 靳蕃. 神经计算智能基础：原理，方法. 成都：西南交通大学出版社，2000

[7] 沈清，胡德文，时春. 神经网络应用技术. 长沙：国防科技大学出版社，1993

[8] 郑君里，杨行峻. 人工神经网络. 北京：高等教育出版社，1992

第13章 综合评价决策模型

各种职业的人都会经常面对一些需要决策的事：某官员要对教育、交通、经济、环境、治安等领域的发展规划作出决策；一个企业家要决定设备、原料、生产哪些产品；科技人员要选择研究课题；医生要为患者确定治疗方案；经理要从若干应试者中挑选员工.

人们在日常生活中也常常碰到许多需要比较、判断的问题：你买一件衣服，要在布料、色彩、花纹及样式之中作出选择；你旅游，是去山水甲天下的桂林，还是去迷人的黄山，或者去风光旖旎的九寨沟. 如果以为这些日常小事不必太认真的话，那么当面临毕业择业时，你需要在几个招聘单位中选择，你要考虑单位所在的城市、工资待遇和自己的专业特长是否对口等因素. 又如，某大学的学生会有个空缺，要在几个候选人中选出一名同学，主要标准是他们的学习成绩、思想品德、同学关系，组织能力等. 人们在处理这些问题的时候，要考虑的因素会涉及到经济、社会、人文等各方面，但一个共同的特点是它们都需要作比较、判断、评价或决策，人的主观选择会起相当主要的作用，若需要更准确的决策，就需要数学，而影响判断的这些因素的重要性、影响力或优先程度往往难以量化，这就给用一般的数学方法解决问题带来本质上的困难.

本章介绍两种处理这类问题的实用方法，模糊综合评价方法([3],[4])与T. L. Saaty等人在20世纪70年代提出的层次分析法(Analytic Hierarchy Process,简称AHP).

§13.1 模糊综合评价模型

对方案、人才、成果的评价，人们的考虑往往是从多种因素出发的，而且这些考虑一般只能用模糊语言来描述，评价具有模糊概念的系统(评价对象)时很难给出确切的表达，这时可以采用模糊评价的方法. 模糊综合评价可以对人、事、物进行比较全面而又定量化的评价，因此它是提高领导决策能力和管理水平的一种有效方法. 本节给出的模糊综合评价模型对具有模糊概念的系统可以得到较为全面合理的结果.

http://www.81tech.com

模糊综合评价的基本步骤如下：

（1）首先要求出模糊评价矩阵 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})_{m\times n}$，其中 $p_{ij}=p_{ij}(x)$ 表示方案 x 在第 i 个目标处于第 j 级评语的隶属度，当对多个（m 个）目标进行综合模糊评价时，还要对各个目标分别加权，设第 i 个目标权系数为 W_i，则可得权系数向量 $\boldsymbol{A}=(W_1,W_2,\cdots,W_m)$，满足：

$$\sum_{i=1}^{m} W_i = 1, \quad W_i \geqslant 0$$

（2）利用矩阵的模糊乘法得到综合模糊评价向量 $\boldsymbol{B}$，即

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AP}=(W_1,W_2,\cdots,W_m)\otimes\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} \end{pmatrix}$$

综合模糊评价矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 表示方案 x 处于各档评语的隶属情况. 矩阵的模糊乘法“$\otimes$”只需将矩阵乘法中普通相乘改为取最小“$\wedge$”运算，普通加法换成取最大“$\vee$”运算. 例如：

$$\boldsymbol{a}=(0.8,0.5,0.3,0.7),\ \boldsymbol{b}=(0.4,0.7,0.5,0.2)$$

则

$$\boldsymbol{ab}'=(0.8,0.5,0.3,0.7)\otimes\begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.7 \\ 0.5 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

$$=(0.8\wedge 0.4)\vee(0.5\wedge 0.7)\vee(0.3\wedge 0.5)\vee(0.7\wedge 0.2)$$

$$=0.4\vee 0.5\vee 0.3\vee 0.2=0.5$$

下面就一个综合评价某品牌彩色电视机的实例说明此方法[4].

例 1 设评价指标（目标）集合 $U=\{$图像，声音，价格$\}$；

评语集合 $V=\{$很好，较好，一般，不好$\}$；

首先对图像进行评价，假如有 30% 的人认为“很好”，有 50% 的人认为“较好”，20% 的人认为“一般”，没有人认为“不好”，这样得到的图像的评判结果为(0.3,0.5,0.2,0). 又假设对声音来说，对彩电的评价结果为(0.4,0.3,0.2,0.1)，而对价格的评价为(0.1,0.1,0.3,0.5)，这样得到模糊评价矩阵：

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 & 0 \\ 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$$

一般情况下，顾客买彩电的主要要求是图像清晰和音响效果良好，价格现

中国国防科技网 http://www.81tech.com

在已经降得很低了，价格稍贵不要紧，所以可设三个指标的权系数向量为 $A=$（图像评价,音响评价,价格评价）$=(0.5,0.3,0.2)$. 于是顾客对彩电的综合评价结果为：

$$B=AP=(0.5,0.3,0.2)\otimes\begin{pmatrix}0.3 & 0.5 & 0.2 & 0\\ 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1\\ 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.5\end{pmatrix}$$

$$=(0.3,0.5,0.2,0.2)$$

上述结果是根据最大、最小运算得到的，还需作归一化处理. 所谓归一化是指对非负非零向量 α 作如下计算：

$$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n),$$

$$\alpha'=\frac{\alpha}{a_1+\cdots+a_n}$$

称 α' 为 α 的归一化向量.

前述彩电的综合评价指标向量 B 的归一化向量 $B'=(0.33,0.27,0.20,0.20)$，这就是顾客对某品牌彩电的最终综合评判结果，对该品牌彩电而言，把图像、声音、价格同时考虑时，仍是“很好”占的比重最大.

下面讨论一个模糊综合评价用于科技成果评定的实例.

例 2 有甲、乙、丙三项科研成果，为了简化问题，只介绍有关资料，如表 13－1－1 所示，现要从中选出优秀项目来.

表 13－1－1 三项科研成果的有关情况

指标 / 项目	科技水平	实现可能性	经济效益
甲	接近国际先进	70%	>100 万元
乙	国内先进	100%	>200 万元
丙	一般	100%	>20 万元

设评价指标(目标)集合 $U=\{$科技水平,实现可能性,经济效益$\}$；为了简化运算，设评语集合为 $V=\{$高,中,低$\}$ 或 $V=\{$大,中,小$\}$. 在专家讨论、统一认识后，得出评价指标的权系数向量为 $A=(0.2,0.3,0.5)$，专家评价的结果如表 13－1－2 所示.

表 13－1－2 专家评价结果

指标 / 项目	科技水平			实现可能性			经济效益		
	高	中	低	大	中	小	高	中	低
甲	0.7	0.2	0.1	0.1	0.2	0.7	0.3	0.6	0.1
乙	0.3	0.6	0.1	1	0	0	0.7	0.3	0
丙	0.1	0.4	0.5	1	0	0	0.1	0.3	0.6

表中的数字是指赞成此种评价的专家与专家总人数的比值. 这样得到甲、乙、丙三个项目各自的模糊评价矩阵 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$:

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0.7 & 0.2 & 0.1\\ 0.1 & 0.2 & 0.7\\ 0.3 & 0.6 & 0.1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}0.3 & 0.6 & 0.1\\ 1 & 0 & 0\\ 0.7 & 0.3 & 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}0.1 & 0.4 & 0.5\\ 1 & 0 & 0\\ 0.1 & 0.3 & 0.6\end{pmatrix}$$

于是三个项目各自的综合评价指标向量为

$$\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{AP}=(0.2,0.3,0.5)\otimes\begin{pmatrix}0.7 & 0.2 & 0.1\\ 0.1 & 0.2 & 0.7\\ 0.3 & 0.6 & 0.1\end{pmatrix}=(0.3,0.5,0.3)$$

$$\boldsymbol{B}_2=\boldsymbol{AQ}=(0.2,0.3,0.5)\otimes\begin{pmatrix}0.3 & 0.6 & 0.1\\ 1 & 0 & 0\\ 0.7 & 0.3 & 0\end{pmatrix}=(0.5,0.3,0.1)$$

$$\boldsymbol{B}_3=\boldsymbol{AR}=(0.2,0.3,0.5)\otimes\begin{pmatrix}0.1 & 0.4 & 0.5\\ 1 & 0 & 0\\ 0.1 & 0.3 & 0.6\end{pmatrix}=(0.3,0.3,0.5)$$

归一化之后得出:

$$\boldsymbol{B}_1'=\frac{(0.3,0.5,0.3)}{0.3+0.5+0.3}=(0.27,0.46,0.27)$$

$$\boldsymbol{B}_2'=\frac{(0.5,0.3,0.1)}{0.5+0.3+0.1}=(0.56,0.33,0.11)$$

$$\boldsymbol{B}_3'=\frac{(0.3,0.3,0.5)}{0.3+0.5+0.3}=(0.27,0.27,0.46)$$

由此看来项目乙的第一个指标最大, 为 0.56, 可推荐项目乙为优秀成果.

§13.2 层次分析法

层次分析法的基本步骤如下:

1. 建立层次结构模型

在深入分析实际问题的基础上, 将有关的各个因素按照不同属性自上而下地分解成若干层次. 同一层的因素从属于上一层的因素或对上层因素有影响, 同时又支配下一层的因素或受到下层因素的影响. 最上层为目标层, 通常只有 1 个因素, 最下层通常为方案或对象层, 中间可以有 1 个或几个层次, 通常为准则层或指标层. 当准则过多时(譬如多于 9 个)应进一步分解出子准则层.

中国国防科技网 http://www.81tech.com

2. 构造成对比较阵

从层次结构模型的第2层开始，对于从属于(或影响及)上一层每个因素的同一层的因素，用成对比较法和1－9比较尺度构造成对比较阵，直到最下层.

3. 计算权向量并做一致性检验

对于每一个成对比较阵计算最大特征根及对应的特征向量，利用一致性指标、随机一致性指标和一致性比率做一致性检验. 若检验通过，特征向量(归一化后)即为权向量；若不通过，则需重新构造成对比较阵.

4. 计算组合权向量并做组合一致性检验

若检验通过，则可按照组合权向量表示的结果进行决策，否则需重新考虑模型或重新构造一致性比率较大的成对比较阵.

从上面介绍的层次分析法的基本步骤看，建立层次结构模型是关键的一步，下面给出应用实例时即以这一步为主. 构造成对比较阵是整个工作的数量依据，当然是重要的，应当由经验和知识丰富、判断力强的专家给出，还不妨采用群体判断的方式.

一、建立层次结构模型

首先将问题涉及的因素分为三类(三层)：第一层为目标层，表示解决问题的目的；第二层为准则层，表示衡量实现目标的标准，如可以是实现目标的各种措施、方案、政策等. 第三层为方案层，是指解决问题的方案、措施.

例1(购物模型) 某一顾客在购买空调时，看好了A、B、C、D四种空调，举棋不定. 他的目的是从中选出一个最称心的商品来，他主要考虑五种因素：价格、耗电量、售后服务、噪音、款式. 把上面的因素分三层(类)，可得到如下的层次结构模型(图13－2－1).

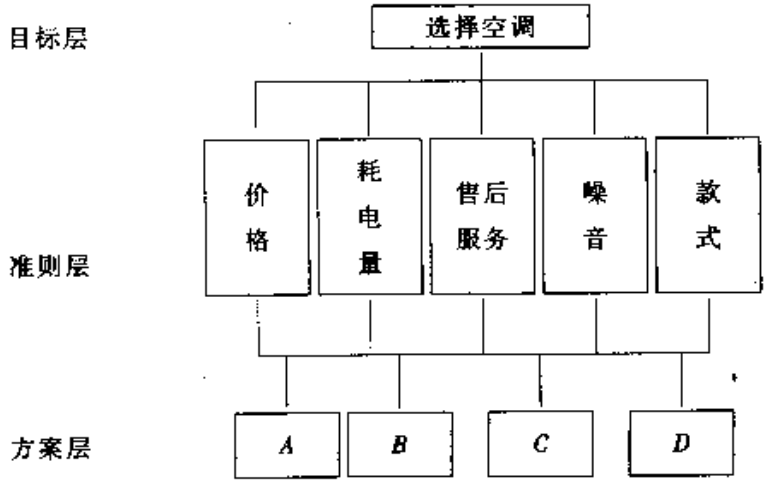


图13－2－1

http://www.81tech.com

例 2(旅游模型) 某人假期要外出旅游，想在 A、B、C 三个旅游胜地选一处. 考虑标准主要有：景色、费用、居住条件、饮食、交通条件.

把上述因素分为三层，得到此问题的层次结构模型(图 13-2-2).

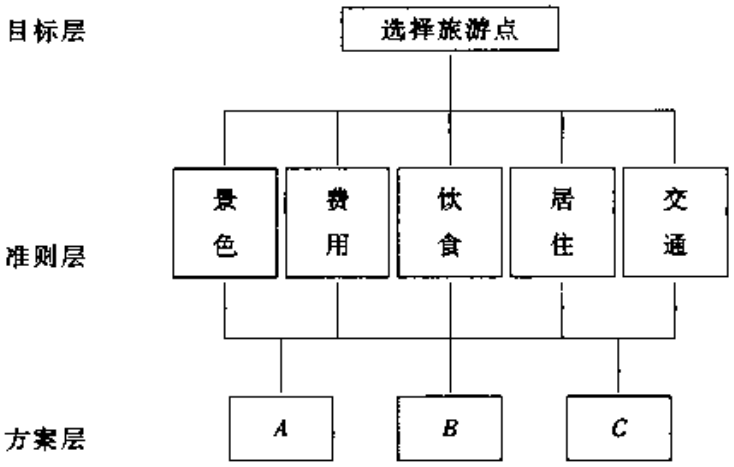


图 13-2-2

二、构造成对比较矩阵

这一步是要比较同一层因素对上一层因素的影响，从而确定它们在上层因素中占的权重. 设有 n 个因素 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 对上一层目标有影响，直接确定它们对目标的影响程度(比例)不太容易，所以每次取两个因素 x_i 与 x_j 比较，用 a_{ij} 表示 x_i 和 x_j 对上层目标的影响比. 用矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 表示全部比较结果，$\boldsymbol{A}$ 称为成对比较矩阵. a_{ij} 应有的特点为：$a_{ij}>0$，$a_{ji}=\dfrac{1}{a_{ij}}$，易知 $a_{ii}=1$. 我们把具有上述特点的 n 阶矩阵称为正互反矩阵.

例如在旅游模型中，设景色、费用、居住条件、饮食、交通条件五个因素分别为 $x_1, x_2, \cdots, x_5$，某人根据自己的情况，对五个因素成对进行比较 $\left(\text{共做了 } C_5^2=\dfrac{5\times 4}{2}\text{次对比}\right)$，比较它们对选择旅游地的重要程度，得到成对比较矩阵(正互反矩阵)

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 5 & 5 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{7} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & 2 & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{13.2.1}$$

中国国防科技网 http://www.81tech.com

其中 $a_{21}=2$ 表示费用 x_2 与景色 x_1 对选择旅游地的目标的重要性之比是 2∶1，$a_{14}=3$ 表示景色与饮食对选择旅游地的重要性之比是 3∶1.

在例 2 中，方案层各因素对准则层中五个因素分别比较能得出五个成对比较矩阵，由于方案层只有三个方案，所以我们得到的这五个成对比较矩阵都是三阶矩阵.

按照 T. L. Saaty 方法，在构造成对比较矩阵 a_{ij} 的取值时，引用数字 1，2，…，9 及其倒数 $1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{9}$ 去作尺度，它们代表的意义如表 13－2－1 所示.

表 13－2－1

尺度 a_{ij}	含　义
1	x_i 与 x_j 的影响之比相同
3	x_i 与 x_j 的影响之比稍强
5	x_i 比 x_j 的影响强
7	x_i 比 x_j 的影响明显的强
9	x_i 比 x_j 的影响绝对的强
2，4，6，8	x_i 与 x_j 的影响之比在上述两个相邻等级之间
$\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{9}$	x_i 与 x_j 的影响之比为上面 a_{ij} 的互反数

三、计算权向量和一致性检验

定义 1　如果一个正互反阵 A 满足 $a_{ij}a_{jk}=a_{ik}(i,j,k=1,2,\cdots,n)$，则称 A 为一致矩阵，简称一致阵.

若 A 为 n 阶一致阵，则它有下列性质：

(1) 秩一定为 1，它的唯一非零特征根为 n.

(2) 任一列(行)向量都是对应于特征根 n 的特征向量.

由于成对比较矩阵是我们对复杂事物采取两两比较得到的矩阵，不可能做到判断具有完全的一致性，难免有误差. 所以成对比较阵通常不是一致阵，我们需要对成对比较矩阵进行一致性检验. 设 A 为 n 阶成对比较矩阵，前面已经给出 n 阶一致阵有最大特征根 n，在后面将证明的一个重要定理表明，n 阶正互反阵 A 的最大特征根 $\lambda_{max}\geqslant n$，而当 $\lambda_{max}=n$ 时 A 是一致阵.

根据上述定理和 λ 连续地依赖于 a_{ij} 的事实可知，λ_{max} 比 n 大得越多，A 的不一致程度越严重，用特征向量作为权向量引起的判断误差越大. 因而可以用 $\lambda_{max}-n$ 数值的大小来衡量 A 的不一致程度. Saaty 将

$$CI=\frac{\lambda_{\max}-n}{n-1} \tag{13.2.2}$$

定义为一致性指标. 注意到 A 的 n 个特征根之和等于 A 的对角元素之和，而 A 的对角元素均为 1，所以特征根

$$\lambda_{\max}+\sum_{\lambda\neq\lambda_{\max}}\lambda=n$$

即

$$\lambda_{\max}-n=-\sum_{\lambda\neq\lambda_{\max}}\lambda$$

$$CI=\frac{\lambda_{\max}-n}{n-1}=-\frac{\sum\limits_{\lambda\neq\lambda_{\max}}\lambda}{n-1}=\frac{\left|\sum\limits_{\lambda\neq\lambda_{\max}}\lambda\right|}{n-1}$$

由此可知，一致性指标 CI 相当于除 $\lambda_{\max}$ 外其余 $n-1$ 个特征根的平均值(取绝对值). 当 $\lambda_{\max}=n$ 时，$CI=0$，A 为完全一致；CI 越大成对比较矩阵的一致性越差，A 的不一致程度越严重.

为了确定 A 的不一致程度的容许范围，需要找出衡量 A 的一致性指标 CI 的标准. Saaty 又引入所谓随机一致性指标 RI，计算 RI 的过程是：对于固定的 n，随机地构造正互反阵 A'(它的元素 $a'_{ij}(i<j)$ 从 $1\sim9,1\sim1/9$ 中随机取值，a_{ij} 是 a_{ji} 的互反数，$a_{ij}\cdot a_{ji}=1$)，然后计算 A' 的一致性指标 CI. 可以想到，A' 是非常不一致的，它的 CI 相当大. 如此构造相当多的 A'，用它们的 CI 的平均值作为随机一致性指标. Saaty 对于不同的 n，用 100～500 个样本 A' 算出的随机一致性指标 RI 的数值如下.

表 13－2－2 随机一致性指标 RI 的数值

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
RI	0	0	0.58	0.9	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.51

表中 $n=1$，2 时 $RI=0$，是因为 1，2 阶的正互反阵总是一致阵.

对于 $n\geqslant3$ 的成对比较阵 A，将它的一致性指标 CI 与同阶(指 n 相同)的随机一致性指标 RI 之比称为一致性比率 CR，当

$$CR=\frac{CI}{RI}<0.1 \tag{13.2.3}$$

时认为 A 的不一致程度在容许范围之内，可用其特征向量作为权向量. 否则要重新进行成对比较，对 A 加以调整. 顺便指出，(13.2.2)式中 0.1 的选取是带有一定主观信度的.

对于 A 利用(13.2.2)，(13.2.3)式和表 13－2－2 进行检验称为一致性检验.

例 3 检验成对比较矩阵(13.2.1)的一致性，并算出其权向量.

中国国防科技网 http://www.81tech.com

解
$$A=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & 4 & 3 & 3\\ 2 & 1 & 7 & 5 & 5\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{7} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & 2 & 1 & 1\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

首先算出 A 的最大特征根 $\lambda_{max}=5.073$，一致性指标

$$CI=\frac{5.073-5}{5-1}=0.018$$

由 $n=5$ 在随机一致性指标 RI 的数值表中查得 $RI=1.12$. 一致性比率

$$CR=\frac{CI}{RI}=\frac{0.018}{1.12}=0.016<0.1$$

即通过了一致性检验. 计算出 $\lambda=5.073$ 的特征向量，并标准化

$$\alpha=(0.263,0.475,0.055,0.099,0.110)^T$$

α 可作为权向量.

四、计算组合权向量并做组合一致性检验

下面以例 2 旅游模型为例，说明如何计算组合权向量及一致性检验.

由例 3 得到第二层对第一层的权向量，$\alpha=(0.263,0.475,0.055,0.099,0.110)^T$. 用同样方法分别构造第三层对第二层的每个准则的成对比较矩阵，不妨设它们为

$$B_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ \frac{1}{2} & 1 & 2\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix},\quad B_2=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{8}\\ 3 & 1 & \frac{1}{3}\\ 8 & 3 & 1\end{pmatrix},\quad B_3=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 3\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1\end{pmatrix}$$

$$B_4=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ \frac{1}{3} & 1 & 1\\ \frac{1}{4} & 1 & 1\end{pmatrix},\quad B_5=\begin{pmatrix}1 & 1 & \frac{1}{4}\\ 1 & 1 & \frac{1}{4}\\ 4 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

其中 $B_1,B_2,\cdots,B_5$ 表示三种旅游方案 A，B，C 分别对标准层五个因素：景色、费用、居住条件、饮食、交通条件的成对比较矩阵. 例如，B_1 表示三种对景

http://www.81tech.com

色的优越程度的比较，B_3 中 $b_{23}=3$ 表示方案 B 比 C 的居住条件好的程度.

分别算出 $B_1,B_2,\cdots,B_5$ 的权向量(标准化的特征向量)α_k、最大特征根 λ_k、一致性指标 CI_k 和一致性比率 CR_k，结果列在表 13-2-3 中(其中 $k=1,2,\cdots,5$).

表 13-2-3 旅游问题第三层的计算结果

k	1	2	3	4	5
$\alpha_k^{(3)}$	0.595 0.277 0.129	0.082 0.236 0.682	0.429 0.429 0.142	0.633 0.193 0.175	0.166 0.166 0.668
λ_k	3.005	3.002	3	3.009	3
CI_k	0.003	0.001	0	0.005	0
CR_k	0.052	0.002	0	0.009	0

CR_k 均小于 0.1，均通过一致性检验.

我们把各方案对目标的权向量，称为组合权向量，记作 $\alpha^{(3)}$. 我们在例 3 中已求出第二层对第一层(即五个标准对目标选择旅游地)的权向量，记为 $\alpha^{(2)}$.

$$\alpha^{(2)}=(0.263,0.475,0.055,0.099,0.110)^{\mathrm{T}}$$

所以方案 A,B,C 在目标中的组合权重应该为 α 与 $\alpha^{(2)}$ 对应向量的两两乘积之和，如 A 在目标中的组合权重应该为

$$0.595\times0.263+0.082\times0.475+0.429\times0.055+$$
$$0.633\times0.099+0.166\times0.110=0.300$$

同样可算出 B，C 在目标中的组合权重为 0.246 和 0.456，于是得组合权向量

$$\alpha^{(3)}=(0.300,0.246,0.456)^{\mathrm{T}}$$

这个结果可解释为方案 C 在旅游地选择中占的权重为 45.6%，远远大于 A，B，所以应选择方案 C.

一般地，对于三层决策问题，设第一层只有一个目标，第二、三层分别有 n，m 个因素，且第二层对第一层的权向量为

$$\alpha^{(2)}=(\alpha_1^{(2)},\alpha_2^{(2)},\cdots,\alpha_n^{(2)})^{\mathrm{T}}$$

第三层对第二层的权向量分别为

$$\alpha_k^{(3)}=(\alpha_{k1}^{(3)},\alpha_{k2}^{(3)},\cdots,\alpha_{km}^{(3)})^{\mathrm{T}},\quad k=1,2,\cdots,n$$

令 $\Omega=|\alpha_1^{(3)},\cdots,\alpha_n^{(3)}|$，则第三层(方案层)对第一层(目标层)的组合权向量为

中国国防科技网 http://www.81tech.com

$$\boldsymbol{\alpha}^{(3)} = \Omega\boldsymbol{\alpha}^{(2)}$$

组合权向量也要进行一致性检验，组合一致性检验是逐层进行的. 若决策是三层的，且第二、三层分别有 n、m 个因素，则可设第二层一致性指标为 $CI_1^{(2)}$，…，$CI_n^{(2)}$，随机一致性指标为 $RI_1^{(2)}$，…，$RI_n^{(2)}$，定义

$$CI^{(2)} = [CI_1^{(2)}, \cdots, CI_n^{(2)}]\,\boldsymbol{\alpha}^{(2)}$$

$$RI^{(2)} = [RI_1^{(2)}, \cdots, RI_n^{(2)}]\,\boldsymbol{\alpha}^{(2)}$$

则第二层对第一层的组合一致性比率为

$$CR^{(2)} = CR + \frac{CI^{(2)}}{RI^{(2)}}$$

同样可定义第三层对第一层的组合一致性比率

$$CR^{(3)} = CR^{(2)} + \frac{CI^{(3)}}{RI^{(3)}}$$

当 $CR^{(3)} < 0.1$ 时，认为组合权向量通过一致性检验.

再看旅游问题，可以算出 $CI^{(3)} = 0.001\ 76$，$RI^{(3)} = 0.58$，$CR^{(2)} = 0.016$，于是得到

$$CR^{(3)} = 0.016 + \frac{0.001\ 76}{0.58} = 0.019 < 0.1$$

组合向量通过一致性检验，说明上面求的组合向量 $\boldsymbol{\alpha}^{(3)} = (0.300, 0.146, 0.456)$ 可作为最终的决策依据.

例 4 学生综合素质评定

先给出若干准则. 再构造层次结构模型.

用 V 表示综合素质.

用 $C1, \cdots, C5$ 分别表示学习成绩、人际关系、艺术素养、身体素质、心理素质.

用 $P1, P2, P3$ 分别表示三位同学.

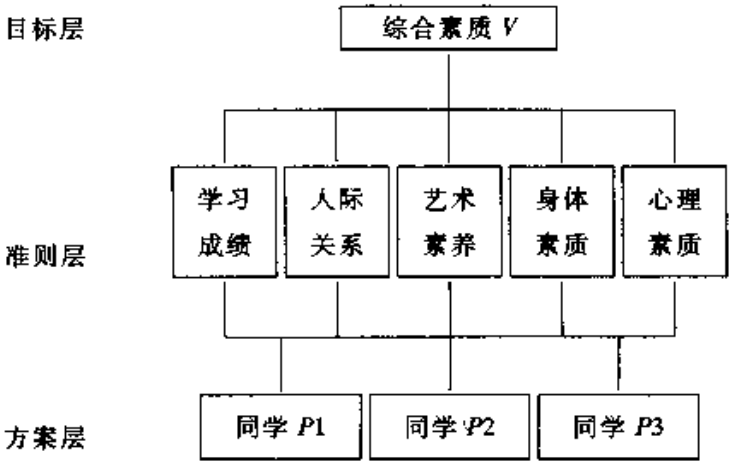


图 13－2－3

现在给出三位同学的各项素质的得分，见表 13－2－4.

表 13－2－4

学生	学习成绩	人际关系	艺术素养	身体素质	心理素质
$P1$	10	1	3	12	1
$P2$	5	3	3	4	1
$P3$	2	8	1	3	4

先用成对比较法比较准则层 5 个因素对目标层的影响，得到成对比较矩阵.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

再用成对比较法比较方案层 3 个因素对准则层的影响，得到成对比较矩阵. 不妨设

$$\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{8} \\ 3 & 1 & \frac{1}{3} \\ 8 & 3 & 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_3=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_4=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ \frac{1}{3} & 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_5=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & \frac{1}{4} \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

这里矩阵 $\boldsymbol{B}_k(k=1,2,\cdots,5)$ 中的元素 $b_{ij}^{(k)}$ 是方案(学生)P_i 与 P_j 对于准则 C_k 的优越性的比较尺度. 对于 $\boldsymbol{A}$ 可以算出 $\lambda_{max}=5$，归一化的特征向量

$$\boldsymbol{w}=(0.352\ 94,0.176\ 47,0.117\ 65,0.176\ 47,0.176\ 47)^{\mathrm{T}}$$

$$CI=0,\quad CR=0$$

由第 3 层的成对比较矩阵 $\boldsymbol{B}_k$ 计算出权向量 $\boldsymbol{w}_k^{(3)}$，最大特征根 λ_{max} 和一致性指标 CI_k，结果列入下表.

中国国防科技网 http://www.81tech.com

表 13－2－5

k	1	2	3	4	5
$W_k^{(3)}$	0.595	0.082	0.429	0.633	0.166
	0.277	0.236	0.429	0.193	0.166
	0.129	0.682	0.142	0.175	0.668
λ_{max}	3.005	3.002	3	3.009	3
CI_k	0.003	0.001	0	0.005	0

不难看出，由于 $CI=0$，所以上面的 CI_k 均可通过一致性检验.

以综合素质 V 为目标的计算结果见下表：

表 13－2－6

权向量（C 对 V）	0.352 94	0.176 47	0.117 65	0.176 47	0.176 47	$\lambda=0$ $CI=0$ $CR=0$
准则 C	$C1$	$C2$	$C3$	$C4$	$C5$	组合权向量（P 对 V）
$P1$	0.595	0.082	0.429	0.633	0.166	0.415 941 22
$P2$	0.277	0.236	0.429	0.193	0.166	0.253 235 88
$P3$	0.129	0.682	0.142	0.175	0.668	0.331 352 31
λ	3.005	3.002	3	3.009	3	
CI	0.003	0.001	0	0.005	0	
CR	0.005 1	0.001 7	0	0.008 62	0	0.030 93

由上表可以看出同学 $P1$ 的综合成绩在综合素质所占的权重最大，所以 $P1$ 的综合素质最高.

五、层次分析法的若干问题

层次分析法问世以来不仅得到广泛的应用，而且在理论体系、计算方法以及建立更复杂的层次结构等方面都有很快的发展. 现在将着重从应用的角度讨论几个问题.

1. 正互反阵最大特征根和对应特征向量的性质

成对比较阵是正互反阵. 层次分析中用对应它的最大特征根的特征向量作为权向量，用最大特征根定义一致性指标进行一致性检验. 这里人们首先碰到的问题是：正互反阵是否存在正的最大特征根和正的特征向量；一致性指标的

http://www.81tech.com

大小是否反映它接近一致阵的程度，特别，当一致性指标为零时，它是否就变为一致阵. 下面两个定理可以回答这些问题.

定理 1 对于正矩阵 A(A 的所有元素为正数)，

(1) A 的最大特征根是正单根 λ；

(2) λ 对应正特征向量 w(w 的所有分量为正数)；

(3) $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{A^k e}{e^{\mathrm{T}}A^k e}=w$,

其中 $e=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$，$w$ 是对应 λ 的归一化特征向量.

定理的(1)，(2)是著名的 Perron(1907)定理的一部分，(3)可通过将 A 化为标准形证明.

定理 2 n 阶正互反阵 A 的最大特征根 $\lambda\geqslant n$；当 $\lambda=n$ 时 A 是一致阵.

证明 设 A 的对应于 λ 的特征向量为 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$，由定理 1，$\lambda>0$，$w>0$. 不妨将 A 的元素 a_{ij} 记作

$$a_{ij}=\frac{w_i}{w_j}\varepsilon_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots,n \tag{13.2.4}$$

由 A 的互反性，

$$\varepsilon_{ij}>0,\ \varepsilon_{ji}=\frac{1}{\varepsilon_{ij}} \tag{13.2.5}$$

根据特征根和特征向量的定义，

$$\lambda w_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}w_j,\quad i=1,2,\cdots,n \tag{13.2.6}$$

将(13.2.4)代入(13.2.6)并对 i 求和得

$$\lambda=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_{ij} \tag{13.2.7}$$

利用(13.2.5)式并注意到 $\varepsilon_{ii}=1$，(13.2.7)式可化为

$$\lambda=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\left(\varepsilon_{ij}+\frac{1}{\varepsilon_{ij}}\right)+1 \tag{13.2.8}$$

因为恒有

$$\varepsilon_{ij}+\frac{1}{\varepsilon_{ij}}\geqslant 2 \tag{13.2.9}$$

而(13.2.8)式中 $\sum$ 号内共有 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 项，所以(13.2.8)，(13.2.9)式给出

$$\lambda\geqslant n \tag{13.2.10}$$

此即定理的第一部分. 当 $\lambda=n$ 时由(13.2.8)，(13.2.9)式可知必有

$$\varepsilon_{ij}+\frac{1}{\varepsilon_{ij}}=2$$

中国国防科技网 http://www.81tech.com

于是 $\varepsilon_{ii}=1$，由(13.2.4)知

$$a_{ij}=\frac{w_i}{w_j}$$

满足一致阵条件，A 是一致阵. 证毕.

定理2所述的一致阵的性质表明，n 阶正互反阵 A 是一致阵的充要条件为，A 的最大特征根 $\lambda=n$.

上述结论为特征根法用于层次分析提供了一定的理论依据.

2. 正互反阵最大特征根和特征向量的实用算法

众所周知，用定义计算矩阵的特征根和特征向量是相当困难的，特别是矩阵阶数较高的时候. 另一方面，因为成对比较阵基本上是定性比较的量化结果，对它作精确计算是不必要的，所以完全可以用简便的近似方法计算其特征根和特征向量，下面介绍几种.

(1) **幂法** 步骤如下：

a. 任取 n 维归一化初始向量 $w^{(0)}$.

b. 计算 $\tilde{w}^{(k+1)}=Aw^{(k)}$，$k=0,1,2,\cdots$.

c. $\tilde{w}^{(k+1)}$ 归一化，即令 $w^{(k+1)}=\dfrac{\tilde{w}^{(k+1)}}{\sum_{i=1}^{n}\tilde{w}_i^{(k+1)}}$.

d. 对于预先给定的精度 ε，当 $\left|w_i^{(k+1)}-w_i^{(k)}\right|<\varepsilon(i=1,2,\cdots,n)$ 时，$w^{(k+1)}$ 即为所求的特征向量；否则返回 b.

e. 计算最大特征根 $\lambda=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\tilde{w}_i^{(k+1)}}{w_i^{(k)}}$.

这是求最大特征根对应特征向量的迭代方法，其收敛性由定理1的(3)保证. $w^{(0)}$ 可任选或取为下面方法得到的结果.

(2) **和法** 步骤如下：

a. 将 A 的每一列向量归一化得 $\tilde{w}_{ij}=\dfrac{a_{ij}}{\sum_{i=1}^{n}a_{ij}}$.

b. 对 $\tilde{w}_{ij}$ 按行求和得 $\tilde{w}_i=\sum_{j=1}^{n}\tilde{w}_{ij}$.

c. 将 $\tilde{w}_i$ 归一化 $w_i=\dfrac{\tilde{w}_i}{\sum_{i=1}^{n}\tilde{w}_i^*}$，$w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^T$ 即为近似特征向量.

d. 计算 $\lambda=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\dfrac{(Aw)_i}{w_i}$，作为最大特征根的近似值.

这个方法实际上是将 A 的列向量归一化后取平均值，作为 A 的特征向量.

http://www.81tech.com

因为当 A 为一致阵时它的每一列向量都是特征向量，所以若 A 的不一致性不严重，则取 A 的列向量(归一化后)的平均值作为近似特征向量是合理的.

(3) **根法** 步骤与和法基本相同，只是将步骤 b 改为对 $\tilde{w}_i$ 按行求积并开 n 次方：

$$\tilde{w}_i = \left(\prod_{j=1}^{n} \tilde{w}_{ij}\right)^{1/n}.$$

根法是将和法中求列向量的算术平均值改为求几何平均值.

以上 3 个方法中以和法最为简便，试用它计算一个例子.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列向量归一化}} \begin{pmatrix} 0.6 & 0.615 & 0.545 \\ 0.3 & 0.308 & 0.364 \\ 0.1 & 0.077 & 0.091 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{按行求和}}$$

$$\begin{pmatrix} 1.760 \\ 0.972 \\ 0.268 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{归一化}} \begin{pmatrix} 0.587 \\ 0.324 \\ 0.089 \end{pmatrix} = w, \quad Aw = \begin{pmatrix} 1.769 \\ 0.974 \\ 0.268 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \frac{1}{3}\left(\frac{1.769}{0.587} + \frac{0.974}{0.324} + \frac{0.268}{0.089}\right) = 3.009$$

精确计算给出 $w = (0.588, 0.322, 0.090)^T$，$\lambda = 3.010$. 二者相比，相差甚微.

3. 为什么用成对比较阵的特征向量作为权向量

我们知道，当成对比较阵 A 是一致阵时，a_{ij} 与权向量 $w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^T$ 的关系满足 $a_{ij} = \frac{w_i}{w_j}$，那么当 A 不是一致阵时，权向量 w 的选择应使得 a_{ij} 与 $\frac{w_i}{w_j}$ 相差(对所有的 i,j)尽量地小. 这样，如果从拟合的角度看，确定 w 可以化为如下的最小二乘问题：

$$\min_{w_i(i=1,\cdots,n)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij} - \frac{w_i}{w_j}\right)^2 \tag{13.2.11}$$

由(13.2.11)式得到的最小二乘权向量一般与特征根法得到的不同. 但是因为(13.2.11)式将导致求解关于 w_i 的非线性方程组，计算复杂，没有实用价值.

如果改为对数最小二乘法：

$$\min_{w_i(i=1,\cdots,n)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\ln a_{ij} - \ln \frac{w_i}{w_j}\right)^2 \tag{13.2.12}$$

则化为求解关于 $\ln w_i$ 的线性方程组. 可以验证，如此解得的 w_i 恰是前面根法计算的结果.

中国国防科技网 http://www.81tech.com

特征根法解决这个问题的途径可由定理2的证明过程看出，若由(13.2.4)式给出的$\frac{n(n-1)}{2}$个方程由a_{ij}确定w_i，ε_{ij}共有$\frac{n(n+1)}{2}$个未知数($i=1,\cdots,n,i>j$)，需增加n个限制条件．若这n个条件为

$$\lambda = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{ij}, i = 1,2,\cdots,n \tag{13.2.13}$$

则经(13.2.7)式推出(13.2.6)式，w恰为特征向量．

由上可知，用不同标准确定的权向量是不同的(当然，若A为一致阵，则用所有标准确定的权向量应相同)．那么，相对其他方法而言特征根法有什么优越性呢?

当比较$C_1,C_2,\cdots,C_n$n个因素对上层某因素的影响时，a_{ij}是C_i对C_j(直接比较)的强度，不妨称为1步强度．若记$A^2=(a_{ij}^{(2)})$，则不难得到$a_{ij}^{(2)}=\sum_{s=1}^{n} a_{is}\cdot a_{sj}$，即$a_{ij}^{(2)}$是$C_i$通过$C_s(s=1,2,\cdots,n)$对$C_j$比较的强度之和，称2步强度，它已包含了1步强度$a_{ij}$(因为和式中包括$s=i,j$)．显然$a_{ij}^{(2)}$比$a_{ij}$更能反映$C_i$对$C_j$的强度．类似地，记$A^k=(a_{ij}^{(k)})$，$a_{ij}^{(k)}$是$k$步强度，它包含了1步至$k-1$步强度．$k$越大，$a_{ij}^{(k)}$越能全面地反映$C_i$对$C_j$的强度．可以认为$a_{ij}^{(k)}$体现了相互比较的多步累积效应．

更进一步可以证明，对于正互反阵A和每一对(i,j)，存在k_0，当$k>k_0$时$a_{iu}^{(k)}\geqslant a_{ju}^{(k)}$或$a_{iu}^{(k)}\leqslant a_{ju}^{(k)}$对所有$s(1\leqslant s\leqslant n)$成立．这表明对于足够大的$k$，$A^k$的第$i$行元素给出了$C_i$在全部因素中排序权重的信息．可以用这行元素之和作为C_i的权重的度量，即以$\frac{A^k e}{e^{\mathrm{T}}A^k e}$($e=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$)为诸因素的权向量，其中分母是归一化的需要，回顾本节定理1的3)，当$k\to\infty$时这个权向量正是A的特征向量w，即

$$w=\lim_{k\to\infty}\frac{A^k e}{e^{\mathrm{T}}A^k e} \tag{13.2.14}$$

由(13.2.14)式用级数理论还不难证明

$$w=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{A^k e}{e^{\mathrm{T}}A^k e} \tag{13.2.15}$$

以上分析表明，无论从全面反映因素间强度对比的多步累积效应的意义上((13.2.14)式)，还是从各个多步累积效应的平均的意义上((13.2.15)式)，用特征向量作权向量，优于用其他方法得到的权向量．

4. 层次分析法的优点和局限性

从层次分析法的原理、步骤、应用等方面的讨论不难看出它有以下优点．

（1）**系统性** 层次分析把研究对象作为一个系统，按照分解、比较判断、综合的思维方式进行决策，成为继机理分析、统计分析之后发展起来的系统分析的又一重要工具.

（2）**实用性** 层次分析把定性和定量方法结合起来，能处理许多用传统的最优化技术无法着手的实际问题，应用范围很广. 同时，这种方法将决策者与决策分析者相互沟通，决策者甚至可以直接应用它，这就增加了决策的有效性.

（3）**简洁性** 具有中等文化程度的人即可了解层次分析的基本原理和掌握它的基本步骤，计算也非常简便，并且所得结果简单明确，容易被决策者了解和掌握.

层次分析法的局限性可以用粗略、主观等词来概括. 就是说，第一，它只能从原有方案中选优，不能生成新方案；第二，它的比较、判断直到结果都是粗糙的，不适于精度要求很高的问题；第三，从建立层次结构模型到给出成对比较矩阵，人的主观因素的作用很大，这就使得决策结果可能难以为众人所接受. 当然，采取专家群体判断的办法是克服这个缺点的一种途径.



1. 证明 n 阶一致阵 A 有下列性质：

（1）A 的秩为 1，A 的唯一非零特征根为 n；

（2）A 的任一列（行）向量都是对应于特征根 n 的特征向量.

2. 设有 A 、B 、C 三项科研成果，有关资料如下表：

指标 / 项目	科技水平	实现可能性	社会效益	经济价值
A	国际先进	60%	好	>1 000 万元
B	国内先进	85%	很好	>2 000 万元
C	本省先进	100%	较好	>100 万元

试用模糊综合评价法找出最佳项目.

3. 某工厂在扩大企业自主权后，有一笔企业留成利润要由厂领导和职代会决定如何使用. 可供选择的方案有：作为奖金发给职工；扩建职工宿舍、食堂、托儿所等福利设施；办职工业余技术学校；建图书馆、俱乐部和文体工队；引进新技术设备进行企业技术改造等. 从调动职工劳动积极性、提高企业技术水平和改善职工物质文化生活状况来看，这些方案各有合理的因素. 如何使工厂这笔企业留成利润更合理地使用并进一步促进企业发展，这是厂领导和职代会面临的需要评价和决策的问题. 试对这个问题用层次分析法进行分析.

中国国防科技网 http://www.81tech.com

参考文献

[1] 姜启源. 数学模型(第二版). 北京：高等教育出版社，1993

[2] 么焕民，孙秀梅，孟凡友. 数学建模. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2003

[3] 任善强. 数学模型. 重庆：重庆大学出版社，1987

[4] 唐焕文，贺明峰. 数学模型. 第二版. 北京：高等教育出版社，2001

第14章 反问题的数学模型

反问题(inverse problem)是数学问题的一大类，它是相对于正问题而言的. 例如，已知函数$f(x)$去求已知点的函数值视为正问题，那么已知函数值反求函数本身即称为反问题. 数值分析中的插值问题，工程中的数据拟合问题，这些都是实际中的反问题. 已知一个方程边界值条件解方程即是正问题，而已知解或者其他的一些信息，要去求方程或解的存在区域即是反问题. 最简单的例子：

$$y''+py'+qy=0$$

若已知p，q可求出方程的通解，这是正问题；若已知此方程的两个线性无关的解

$$y_1=e^{r_1x},\ y_2=e^{r_2x}\quad (r_1\neq r_2)$$

亦可以求出方程本身，即系数p，q，这是数理方程的反问题.

线性代数中有名的反问题是特征值反问题. 已知n阶矩阵A，可以求A的特征值和相对应的特征向量，这是正问题. 如已知A的几个特征值和对应的特征向量，反求矩阵A，就是反问题，这是代数反问题.

§14.1 函数恢复问题与常微分方程反问题

一、函数恢复问题

正问题：已知函数$f(x)$，求$f(x_j)$，$j=1,\cdots,n$. 这个问题比较简单，有各种方法，例如直接计算，各种近似计算包括泰勒级数展开等等.

反问题：若已知$f(x_j)=y_j$，$j=1,\cdots,n$，要反求$f(x)$.

$f(x)$存在是显然的，但唯一性保证不了. 一般$f(x)$是不唯一的，要使这个问题在数学上成为一个可解的问题，亦即适定的问题，必须对$f(x)$加以限制. 也就是说给$f(x)$加一些附加条件，使$f(x)$在这些条件之下成为唯一存在的. 怎样加呢？下面是一些常见的处理方法.

(i) $p(x)\in\pi_{n-1}\{p(x)\,|\,p(x)$是$n-1$次实多项式$|$，求$p(x)$满足：

$$p(x_j)=y_j=f(x_j),\ j=1,\cdots,n$$

中国国防科技网 http://www.81tech.com

这就是所谓代数插值问题，在这样的限制条件下，众所周知，$f(x)=p(x)$是唯一存在的. 这个条件也可以稍微变一下.

(ii) 求$p(x)$使$p^{(n)}(x)\equiv 0$，且$p(x_i)=f(x_i)$，$i=1,\cdots,n$.

显然(i)⇔(ii).

(iii) 求$p(x)$，使当$x\neq x_j$，$j=1,\cdots,n$时$p^{(n)}(x)=0$，且$p(x)\in C(\Omega)$，即$p(x)$连续，满足$p(x_i)=f(x_i)$，$i=1,\cdots,n$.

这就是熟知的多段线性插值，它的另一种等价的提法是(iv).

(iv) 求$p(x)$使

$$p''(x)=\sum_{j=1}^{n}\beta_j\delta(x-x_j) \tag{14.1.1}$$

这里β_j待定，$\delta(x)$是广义函数，它可以作为 Heaviside 函数H的导数引进，

$$H(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

则

$$H'(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0\\ \infty, & x=0\end{cases}$$

$\delta(x)=H'(x)$.

从(iv)的条件(14.1.1)式可得：$p'(x)$是分片常数，并容易求得β_j

$$\beta_j=[p'(x)]_{ij}=p'(x_j+0)-p'(x_j-0)$$

$$=\frac{y_{j+1}-y_j}{x_{j+1}-x_j}-\frac{y_j-y_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}$$

其中，$y_j=f(x_j)$，还有一种提法是

(v) 求$p(x)$，满足$p(x_i)=f(x_i)$且

$$\int_a^b p'(x)^2\mathrm{d}x=\min \tag{14.1.2}$$

$$a<x_1<x_2\cdots<x_n<b$$

这是泛函极小问题，容易求得 Eular 方程为

$$p''(x)=0$$

因此(iii)，(iv)，(v)三个提法等价.

对$f(x)$的限制可以有多种多样的加法，例如上面的微分方程的限制若稍加改动有

(vi) 求$p(x)$使

$$p''(x)=a^2p(x),\qquad x\neq x_j \tag{14.1.3}$$

并且满足

$$p(x_j)=f(x_j),\qquad j=1,\cdots,n$$

http://www.81tech.com

容易看出，在条件(14.1.3)的限制下，$p(x)$是分段指数函数插值.

(vii) 求 $p(x)$，使 $p(x_j)=f(x_j)$，$j=1,\cdots,n$，且满足

$$p'''(x)=\sum_{j=1}^{n}\beta_j\delta(x-x_j) \tag{14.1.4}$$

这里 β_j 待定，就得到了分段抛物插值.

从这个例子我们看到了反问题的特点：解的不唯一性. 或者更广泛一点的说法：反问题是不适定的. 在函数恢复问题中，这种不适定性的表现是解的不唯一性. 此外，我们看到，在适当对 $f(x)$ 作一些限制之后，可以求得唯一的解，这是求解反问题的另一个特点：即求解问题时要加附一些“附加条件”，才能消除其不适定性.

二、常微分方程的反问题

1. 一阶线性常微分方程

设
$$L(D)y=\frac{dy}{dx}-p(x)y \tag{14.1.5}$$

我们考虑

$$L(D)y=f(x)$$

正问题：求 $y(x)\in C[a,b]$，使

$$\begin{cases}L(D)y=f(x)\\ y(x_0)=y_0,\quad a\leqslant x_0\leqslant b\end{cases} \tag{14.1.6}$$

熟知的结论是

$$y(x)=y_0e^{\int_{x_0}^{x}p(t)dt}+\left[\int_{x_0}^{x}f(t)e^{-\int_{x_0}^{t}p(\tau)d\tau}dt\right]e^{\int_{x_0}^{x}p(t)dt}$$

或者改写成

$$y(x)=y_0e^{\int_{x_0}^{x}p(t)dt}+\int_{x_0}^{x}e^{\int_{t}^{x}p(\tau)d\tau}f(t)dt \tag{14.1.7}$$

为方便起见，我们将(14.1.7)式记为

$$y=y_0e^{\int_{x_0}^{x}p(t)dt}+\int_{x_0}^{x}G(x,t)f(t)dt,\ a\leqslant x\leqslant b \tag{14.1.8}$$

其中，$G(x,t)=e^{\int_{t}^{x}p(\tau)d\tau}(x-t)_+^0$

$$u_+^0=\begin{cases}1, & u\geqslant 0\\ 0, & u<0\end{cases} \tag{14.1.9}$$

下面，我们来看 $G(x,t)$ 有什么性质.

性质：(1) $L(D)G(x,t)=0$，$x\neq t$

(2) $G(t_+,t)-G(t_-,t)=1$

证 因为当 $a\leqslant t<x\leqslant b$ 时，

中国国防科技网 http://www.81tech.com

$$G(x,t) = e^{\int_t^x p(\tau)d\tau}$$

$$\frac{dG}{dx} = p(x)e^{\int_t^x p(\tau)d\tau} = p(x)G(x,t)$$

所以性质(1)成立. 再看(2): $G(t_-,t)=0$, 因为 $x<t$ 时 $(x-t)_+^0=0$, 所以

$$G(t_+,t) = 1 - G(t_-,t)$$

因此性质(2)也成立. 顺便提一下, 性质(1), (2)等价于

$$L(D)G(x,t) = \delta(x-t)$$

定义 1 我们称满足性质(1), (2)的 $G(x,t)$ 为算子方程(14.1.6)的基本解.

特别有, 如果 $p(t)$ 为常数 p, 则有

$$G(x,t) = e^{p(x-t)}(x-t)_+^0 = G(x-t) \tag{14.1.10}$$

此时, 方程(14.1.6)的一个特解可表示为

$$\int_{x_0}^{x} G(x-t)f(t)dt = G*f$$

以上的结果虽然是从一阶一维方程的情形得出的, 但可以毫无困难地推广到一阶方程组多维的情形.

只要在性质(1)与(2)中, 将 $G(x,t)$ 理解为矩阵, $G(t,t)$ 理解为单位矩阵, 则(14.1.8)式仍可作为方程(14.1.6)的一般解, 此时

$$G(x,t) \overset{d}{=} X(x)X^{-1}(t)(x-t)_+^0 \tag{14.1.11}$$

$X(x)$ 是(14.1.6)的基本解矩阵, 从 $G(x,t)$ 的定义式(14.1.10)中, 显然可得当 $(x-t)_+^0=1$, 即 $x \geqslant t$ 时, 有 $G(x,t) \overset{d}{=} X(x)X^{-1}(t)$ (广义序关系). 因为 $X(x)$ 是基本解矩阵

$$\frac{dG(x,t)}{dx} - p(x)G(x,t)$$

$$= \frac{dZ(x)}{dx} - p(x)X(x)X^{-1}(t) = 0$$

在广义序 $x<t$ 时, $(x-t)_+^0=0$ 导出 $G(t_-,t)=0$ 而

$$G(t,t) = X(x)X^{-1}(t) = 1$$

所以, 对于按(14.1.11)定义的 $G(x,t)$, 仍有性质(1), (2)成立, 因此, $G(x,t)$ 可以作为(14.1.6)在多维情形下的基本解, (14.1.8)式成立, 特别在 p 是常矩阵情形下, $G(x,t)$ 仍可以写成(14.1.10)式的单变量的情形, 所以(14.1.10)式仍然成立.

下面我们来看 $G(x,t)$ 作为基本解, 它与格林函数有何联系. 我们知道, 格林函数是指当 $f(t)=\delta(x-t)$ 时, 下述问题

http://www.81tech.com

$$\begin{cases} L(D)y = f(x) \\ y(x_0) = y_0 = 0 \end{cases} \tag{14.1.12}$$

的基本解. 因此，只要对 $G(x,t)$ 再加上条件

(3) $$G(x_0,t) = 0$$

则 $G(x,t)$ 就成为格林函数，为区别于基本解，我们以 $K(x,t)$ 记格林函数.

定义 2 如果 $K(x,t)$ 满足

(1) $L(D)K(x,t) = 0$

(2) $K(t_+,t) - K(t_-,t) = 1$ (14.1.13)

(3) $K(x_0,t) = 0$

则称 $K(x,t)$ 是问题(14.1.6)的格林函数.

下面来看怎样确定格林函数. 利用常数变易法，当 p 为常数时，可设

$$K(x,t) = e^{p(x_0-t)}(x_0-t)_+^0 + Ce^{px_0} = 0 \tag{14.1.14}$$

所以

$$C(t) = -e^{-pt}(x_0-t)_+^0$$

将其代回(14.1.14)式中得出

$$K(x,t) = e^{p(x_0-t)}((x-t)_+^0 + (x_0-t)_+^0) \tag{14.1.15}$$

所以，其边值条件的正问题(14.1.6)的一般解可以表示成

$$y(x) = \int_a^b K(x,t)f(t)\,dt \tag{14.1.16}$$

这里所用的确定格林函数的方法具有一般性，可以推广到高阶方程与方程组.

下面我们来看一阶方程的反问题.

2. 一阶线性微分方程的反问题

(1) 右端(源)反问题，设

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y + f(x) \tag{14.1.17}$$

$$y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1 \tag{14.1.18}$$

在方程(14.1.17)(包括边值条件)中 $f(x)$ 是未知函数，但边值条件(14.1.18)比平常的正问题多了一个，要求出未知函数 $f(x)$，利用格林函数可写出解的表达式

$$y(x) = \int_a^b K(x,t)f(t)\,dt \tag{14.1.19}$$

$y(x)$ 的信息知道得多一些，有附加条件

$$y(x_1) = y_1$$

要求未知的源项 $f(x)$，这个问题的解是不唯一的，必须对 $f(x)$ 作一些限制才能得出唯一解.

中国国防科技网 http://www.81tech.com

(2) 系数反问题

设(14.1.17)式中$f(x)$已知，$p(x)$未知，同样有附加条件(14.1.18)式中的$y(x_1)=y_1$，这时，解仍然可以用(14.1.19)式表示出来，其中$f(t)$已知，但积分核$K(x,t)$中包含有未知函数$p(t)$，这也是十分困难的不适定问题，不再展开讨论了.

§14.2 二阶线性常微分方程

一、正问题

$$\begin{cases} L(D)y \overset{\mathrm{d}}{=} y''+p_1y'+p_2y=f(x) \\ y(x_0)=y_0,\ y(x_1)=y_1,\ x_0<x_1 \end{cases} \tag{14.2.1}$$

其中，$p_1(x)$，$p_2(x)$，$f(x)$均属于$C[a,b]$.

要想边值问题(14.2.1)的解存在唯一，必须下述条件成立.

$$\begin{cases} L(D)y=0 \\ y(x_0)=y(x_1)=0 \end{cases} \Rightarrow y\equiv 0 \tag{14.2.2}$$

即边值条件为0的齐次方程只有零解$y\equiv 0$.

对于问题(14.2.1)，其格林函数要作相应的改变.

定义3 如果$K(x,t)$满足

$$\begin{aligned} &(1)\ L(D)K(x,t)=0 \\ &(2)\ K_x(t_+,t)-K_x(t_-,t)=1 \\ &(3)\ K(x_0,t)=K(x_1,t) \end{aligned} \tag{14.2.3}$$

则称$K(x,t)$是问题(14.2.1)的格林函数.

即(14.1.12)式中(2)，(3)要用(14.2.3)式中的(2)，(3)来代替. 对于P_1，P_2均是常数的情形，仍可以立即定出格林函数$K(x,t)$，类似于(14.1.13)式. 设

$$L(\lambda)=\lambda^2+p_1\lambda+p_2=(\lambda-\lambda_1)\cdot(\lambda-\lambda_2)$$

当$\lambda_1\neq\lambda_2$时，有

$$\varphi_1(x)=\mathrm{e}^{\lambda_1 x},\ \varphi_2(x)=\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$$

是(14.2.1)式对应的齐次方程的两个线性无关的解，现在令

$$K(x,t)=G(x,t)-C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x}+C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x} \tag{14.2.4}$$

其中

$$G(x,t)=[\lambda_1,\lambda_2]\mathrm{e}^{\lambda(x-t)}(x-t)_+^0 \tag{14.2.5}$$

$[\lambda_1,\lambda_2]$表示差商算子，定义如下，

http://www.81tech.com

$$[\lambda_1,\lambda_2]f(\lambda)=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}f(\lambda_1)+\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}f(\lambda_2) \tag{14.2.6}$$

取 $f(\lambda)=e^{\lambda(x-t)}(x-t)_+^0$，代入(14.2.6)式就得出了(14.2.4)式中的 $G(x,t)$，下面我们验证如(14.2.5)式定义的 $G(x,t)$ 是边值问题(14.2.1)的基本解，即定义 1[①] 满足. 这里 $L(D)=D^2+p_1D+p_2$，

$$G'_x(x,t)=[\lambda_1,\lambda_2]\lambda e^{\lambda(x-t)}(x-t)_+^0$$

$$G''_{xx}(x,t)=[\lambda_1,\lambda_2]\lambda^2 e^{\lambda(x-t)}(x-t)_+^0$$

所以

$$L(D)G(x,t)=[\lambda_1,\lambda_2](\lambda^2+p_1\lambda+p_2)e^{\lambda(x-t)}(x-t)_+^0=0 \tag{14.2.7}$$

事实上，λ_1 和 λ_2 是

$$\lambda^2+p_1\lambda+p_2=0$$

的根，因此，将(14.2.6)式中的 $f(\lambda)$ 用

$$f(\lambda)=(\lambda^2+p_1\lambda+p_2)e^{\lambda(x-t)}(x-t)_+^0$$

代替立即得知(14.2.7)式成立.

下证定义 1 中的(2). 以定义 3 中的(2)代替后在此成立，因 $(t_--t)_+^0=0$，所以

$$G'_x(t_-,t)=0$$

又因 $[\lambda_1,\lambda_2]\lambda=1$ 以及

$$(t_+-t)_+^0e^{\lambda(t_+-t)}=1$$

所以(2)满足，这样，我们证明了由(14.2.5)式定义的 $G(x,t)$ 是(14.2.1)的基本解，为了求出格林函数，再用(14.2.3)式的条件(3)代入(14.2.4)式，得

$$\begin{cases}G(x_0,t)-C_1e^{\lambda_1x_0}-C_2e^{\lambda_2x_0}=0\\ G(x_1,t)-C_1e^{\lambda_1x_1}-C_2e^{\lambda_2x_1}=0\end{cases} \tag{14.2.8}$$

从上式中可以唯一地定出 $C_1=C_1(t)$，$C_2=C_2(t)$ 代入(14.2.4)式中就得出了问题(14.2.1)的格林函数. 上述推导虽然是针对 $\lambda_1\neq\lambda_2$，但对 $\lambda_1=\lambda_2$，利用(14.2.6)式取极限，并将(14.2.4)式中的 e^{λ_2x} 用 xe^{λ_2x} 代替，仍可以确定出 C_1，C_2. (14.2.4)式还可以推广到一般的常系数方程的情形.

设

$$L(D)=D^m+p_1D^{m-1}+\cdots+p_{m-1}D+P_m=(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)\cdots(D-\lambda_m)$$

则基本解 $G(x,t)=[\lambda_1,\cdots,\lambda_m]e^{\lambda(x-t)}(x-t)_+^0$ 满足

---

① 定义 1 中的(2)式要按(14.2.3)式中的(2)式作相应修改；$(x-t)_+^0$ 定义见(14.1.9).

中国国防科技网 http://www.81tech.com

$$(1)\ L(D)G(x,t)=0 \tag{14.2.9}$$

$$(2)\ [G^{(m-1)}(t_+,t)-G^{(m-1)}(t_-,t)]=1$$

其中，$[\lambda_1,\cdots,\lambda_m]$表示$(m-1)$阶差商算子，定义为

$$[\lambda_1,\cdots,\lambda_m]f(\lambda)=\frac{[\lambda_1,\cdots,\lambda_{m-1}]f(\lambda)-[\lambda_2,\cdots,\lambda_m]f(\lambda)}{\lambda_1-\lambda_m} \tag{14.2.10}$$

下面验证(14.2.9)中(1)，(2)成立.

证 (1) $L(D)G(x,t)=L(D)\{[\lambda_1,\cdots,\lambda_m]e^{\lambda(x-t)}(x-t)_+^0\}$

$$=[\lambda_1,\cdots,\lambda_m]L(\lambda)e^{\lambda(x-t)}(x-t)_+^0=0$$

因对任何 λ_i，$i=1$，$\cdots$，m，$L(\lambda_i)=0$，所以，令

$$f(\lambda)=L(\lambda)e^{\lambda(x-t)}(x-t)_+^0$$

从(14.2.10)式立即得出(1)成立.

(2) 因$(t_--t)_+^0=0\Rightarrow G^{(m-1)}(t_-,t)=0$

$$[e^{\lambda(x-t)}(x-t)_+^0]_{x=t_+}^{m-1}=\lambda^{m-1}e^{\lambda(x-t)}(x-t)_+^0\Big|_{x=t+}=\lambda^{m-1}$$

$$[\lambda_1,\cdots,\lambda_m]\lambda^{m-1}=1$$

从另一个角度看格林函数：设

$$\begin{cases}P(x)=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}\\ P(x_j)=f(x_j),\ j=1,\ 2\end{cases}$$

则可记 $$P(x)=(\mathrm{Int})f(x)$$

即 $P(x)$是$f(x)$的指数插值多项式，如此，可将 $K(x,t)$表示成

$$K(x,t)=G(x,t)-[\mathrm{Int}(G(\cdot,t))](x)$$

$$=(\mathrm{I}-\mathrm{Int})G(x,t)=RG(\cdot,t)$$

Int 表示指数插值算子，R 表示余项，(14.2.5)式表明，任意基本解的指数插值余项也就是格林函数，$K(x_0,t)=K(x_1,t)=0$，刚好给出了 $G(x,t)$的插值条件.

注 1：$G(x,t)$的表达式的表达式$(x-t)_+^0$起一个单位跳跃的作用，所以取其他具有单位跳跃性质的函数代替$(x-t)_+^0$也是可以的，例如

$$\frac{\mathrm{sign}(x-t)}{2}$$

也可以使定义 1 中的(1)，(2)或(14.2.9)式中的(1)，(2)满足，此时 $G_1(x,t)$是基础解的分段线性组合.

注 2：(14.2.2)是必须强调的一个条件，否则上述推导不正确.

二、反问题

1. 右端反问题(源反问题)

设

http://www.81tech.com

$$Lg = f \tag{14.2.11}$$

上式已综合了边值条件及其他附加条件，此时

$$y(x) = \int_a^b K(x,t)f(t)\,dt$$

上式中 $y(x)$ 表示场，$f(t)$ 表示源，上述反问题即成为已知场的部分信息，要确定源 f 的问题. 即，$[a_1,b_1]\subset(a,b)$，已知 $y(x)$ 在 $[a_1,b_1]$ 外的全部值，求 $f(x)$.

命题 1 源 $f(x)$ 不能由 $[a_1,b_1]$ 外的部分场唯一确定.

证 构造 $\varphi(x)$，使 $\varphi\in C^2(\mathbf{R})$ 且 $\operatorname{supp}\varphi=[a_1,b_1]$ 满足

$$\begin{cases} L\varphi = f(x), \\ \varphi(x_0)=\varphi(x_1)=0,\ x_0,\ x_1\notin[a_1,b_1] \end{cases}$$

所以有

$$\varphi(x) = \int_a^b K(x,t)f(t)\,dt \tag{14.2.12}$$

满足(14.2.12)式的 $f(t)$ 有无穷多，事实上，设 $f(t)=\text{const}$，可解出

$$f(t)=f_0=\left[\int_a^b K(x,t)\,dt\right]^{-1}\varphi(x)$$

则任何函数 $g(t)$ 使得

$$\int_a^b K(x,t)g(t)\,dt = 0 \tag{14.2.13}$$

成立的，都可以取 $f(t)=f_0+g(t)$ 使(14.2.12)式成立，而满足(14.2.13)式的 $g(t)$ 有无穷多.

2. 系数反问题

对(14.2.1)式的方程

$$L(D)y = y''+p_1y'+p_2y = f(x) \tag{14.2.14}$$

$f(x)$ 已知，但 P_1 或 P_2 未知，解也不唯一.

事实上，设 φ_1 与 φ_2 是(14.2.14)的基础解，则

$$\frac{\begin{vmatrix} y'' & \varphi_1'' & \varphi_2'' \\ y' & \varphi_1' & \varphi_2' \\ y & \varphi_1 & \varphi_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_1' & \varphi_2' \\ \varphi_1 & \varphi_2 \end{vmatrix}} = L(D)y \tag{14.2.15}$$

展开即可得出一组 P_1，P_2，再另造一个二阶线性方程，其解为 φ，代替(14.2.15)式中 φ_1，φ_2 以及 $\varphi_1+\varphi$ 和 $\varphi_2+\varphi$，得

$$L_1(D)y = y''+\tilde{p}_1y'+\tilde{p}_2y$$

这样得出的 $\tilde{p}_1$，$\tilde{p}_2$ 显然与前一组不同，所以系数也不能由外场唯一定出.

注：上一段论述中 $\varphi(x)$ 的构造可以不影响外场，只影响内场，即，

中国航空科技网 http://www.81tech.com

$\varphi(x)\in[a,b]$, supp $\varphi\subseteq[a_1,b_1]$

§14.3 分数阶常微分方程与 Abel 积分方程

一、正问题

$$\begin{cases} D^{\alpha}y(x)=f(x),\ a\leqslant x\leqslant b,\ 0<\alpha<1 \\ y(a)=0 \end{cases} \tag{14.3.1}$$

这里 $D=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$，已知 $f(x)$，求 $y(x)$ 即是正问题，上式所表述的问题是有其现实背景的. 例如地球物理中地震波走时问题；计算机技术与医学相结合产生的新成果——计算机断层扫描的诊断方法，俗称“CT”，都涉及到(14.3.1)式所提到的分数阶微分算子的反问题.

二、反问题

在(14.3.1)式中，若已知 $y(x)$ 及 $y(a)=0$，求 $f(x)$，即得到(14.3.1)的反问题，这两个问题是紧密相关的.

下面我们来看正反问题的解法. 先回忆熟知的结果

$$\begin{cases} D^{n}y(x)=f(x) \\ y(a)=y'(a)=\cdots=y^{(n-1)}(a)=0 \end{cases} \tag{14.3.2}$$

(14.3.2)式的解可由下式表出

$$y(x)=\int_a^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f(t)\,\mathrm{d}t \tag{14.3.3}$$

此即 Abel 积分方程，将上式改写成

$$y(x)=\int_a^b G(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t \tag{14.3.4}$$

$$G(x-t)=\frac{1}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}(x-t)_+^0$$

$G(x,t)=G(x-t)$ 是(14.3.2)的格林函数，因为它满足条件. 在(14.3.2)式中 n 是整数，但在 Abel 积分方程(14.3.3)中，n 是非整数也是有意义的. 利用 $\Gamma(n)=(n-1)!$，从(14.3.1)我们可得

$$y(x)=(D^{-\alpha}f)(x)\overset{\mathrm{d}}{=}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x(x-t)^{\alpha-1}f(t)\,\mathrm{d}t \tag{14.3.5}$$

这里仍有 $y(a)=0$，因此时积分上下限相同. 对 $0<\alpha<1$，正问题获得解决. 下面我们来看反问题怎样求解？

http://www.81tech.com

解反问题实际上就是求解 Abel 积分方程(14.3.5)式中的 $f(x)$，先看下面的等价表示式：

$$\begin{cases}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\,\mathrm{d}t = g(x), a \leqslant x, t \leqslant b, 0 < \alpha < 1 \\ g(a) = 0,\end{cases} \tag{14.3.6}$$

这里 $g(x) = \Gamma(\alpha) y(x)$，已知 $g(x)$，求 $f(x)$. 从(14.3.3)式得

$$f(x) = D^{\alpha} y(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (D^{\alpha} g(x)) \tag{14.3.7}$$

(14.3.6)式与(14.3.7)式等价，反问题化为怎样求一个已知函数的分数阶微分. 为此，引进

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = (D^{-1} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (D^{-(1-\alpha)} g)(x) \tag{14.3.8}$$

令

$$(1-\alpha) = \beta, \quad 0 < \beta < 1$$

从而得出

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (D^{-\beta} g)(x) \tag{14.3.9}$$

从(14.3.5)式看，(14.3.9)式是有定义的，且

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi} \sin \alpha\pi \int_a^x (x-t)^{-\alpha} g(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{14.3.10}$$

$-\alpha = \beta - 1$，这样我们实际上已经求出反问题(14.3.3)式的解.

定理 1 (1) 若(14.3.3)式有解，则必取如下形式：

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \sin \alpha\pi \int_a^x (x-t)^{-\alpha} g(t)\,\mathrm{d}t \tag{14.3.11}$$

若 $f(x)$ 连续，则

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \sin \alpha\pi \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} g(t)\,\mathrm{d}t \tag{14.3.12}$$

又若 α，$g(a)$ 均有限，则

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \sin \alpha\pi \left[g(a)(x-a)^{-\alpha} + \int_a^x (x-t)^{-\alpha} g'(t)\,\mathrm{d}t \right] \tag{14.3.13}$$

(2) (14.3.6)式的解是唯一的.

(3) 若 g 是有界变差函数，则 $f(x) \in L'(a,b]$.

证 (1) (14.3.11)与(14.3.12)两式直接从(14.3.10)式得出，对(14.3.13)式，考虑分部积分法

中国国防科技网 http://www.81tech.com

$$\int_a^x (x-t)^{-\alpha} g(t)\,dt = \frac{(x-t)^{1-\alpha}}{-1+\alpha} g(t)\Big|_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{1-\alpha}}{1-\alpha} g'(t)\,dt$$

$$= -g(a)\frac{(x-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \int_a^x \frac{(x-t)^{1-\alpha}}{1-\alpha} g'(t)\,dt$$

将上式对 x 求导就得出了(14.3.13)式.

(2) 若 g 对应 f_1 与 f_2 都是(14.3.6)式的解，则函数 $g_1(t)=0$ 对应着解

$$f_1(x) - f_2(x) = f(x)$$

由(14.3.12)式知 $f(x)\equiv 0$，所以解唯一.

(3) 证明略.

定理2(Abel积分方程的不稳定性) 存在函数列 $\{g_k(x)\}$，$g_k(x)\to g(x)$，$g(x)$ 是(14.3.6)式的右端，使得

$$\int_a^x (x-t)^{-\alpha} g_k'(t)\,dt \to \infty, \quad x \in (a,b) \tag{14.3.14}$$

证明从略.

注1：$\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(1-\alpha) = \dfrac{\pi}{\sin \alpha\pi}$，见 Γ 函数的性质.

注2：$F(x)$ 的引进是求解反问题的技巧.

注3：(14.3.13)式的证明用到分部积分法，这种积分技巧是常见的，但分部积分法的另一个重要性质在于它能转移函数的性质，即将一个好函数的性质转移给一个差函数，利用分部积分定义的广义导数就是其典型例子.

注4：将(14.3.14)式与(14.3.11)式结合，可以看出当 $\alpha\to 1$ 时

$$\int_a^x f(t)\,dt \to g(x) + C$$

从而得 $f(x)=g'(x)$，这实际上是(14.3.14)式当 $\alpha=1$ 时的情形，此一极限结果说明了分数阶导数确实是一般整数阶导数的推广.

下面，我们从几个例子来看一看上述类型的反问题怎样从现实世界中引出来.

例1(力学反问题——Abel 1823年) 设单位质量的质点，从山脚下 $(x,y)=(0,0)$ 处，以初始能量 E 沿山脉曲线上移，不计摩擦，经过 $T(E)$ 时间，又回到原处. 若 E 改变，$T(E)$ 也随之而变，问能否由 $T(E)$ 决定山的形状.

如图14-3-1，s 表示从(0,0)点到(x,y)点的弧长. 曲线(即山的形状)可用弧长变量表示为 $y=h(s)$. 上面的问题亦即：能从函数 $T(E)$ 定出函数$h(s)$.

分析：s 表弧长，也就是运动的路程，所以 $\dfrac{ds}{dt}=v$ 速度，$dt=\dfrac{ds}{v}$，又因为

http://www.81tech.com

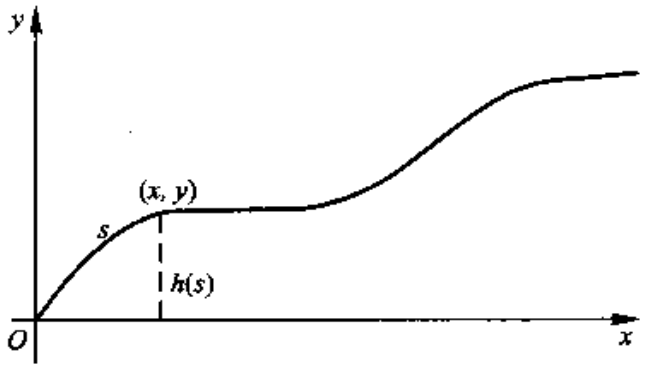


图 14－3－1

无摩擦，所以

$$\frac{1}{2}[v^2(s)+g_0h(s)]=E$$

这是能量守恒定律. 从而导出

$$v=\sqrt{2(E-\eta)},\quad \eta=g_0h$$

所以，我们有

$$\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}s}{v}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{(E-\eta)^{\frac{1}{2}}}$$

从而

$$t=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\mathrm{d}s}{(E-\eta)^{\frac{1}{2}}}$$

记 $s_1(E)$ 为动能全部转化为势能的点，由 $\eta(s_1)=E$ 推得

$$T(E)=2t_E=\sqrt{2}\int_0^{s_1(E)}\frac{\mathrm{d}s}{(E-\eta)^{\frac{1}{2}}}\tag{14.3.15}$$

(14.3.15)式实际上是非线性积分方程，η 是未知函数，非线性方程. $\eta=g_0h(s)$ 表示单位质点的位能，求出该位能也就求出了 $h(s)$——山的形状. 为此我们作变量代换.

假设 $h=h(s)$ 是 s 的单调增函数，$\mathrm{d}s=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\eta}\mathrm{d}\eta$. 于是从(14.3.15)式我们得出 $\eta(s_1)=E$，

$$T(E)=\sqrt{2}\int_0^E(E-\eta)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\eta}\right)\mathrm{d}\eta$$

令 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\eta}=f(\eta)$，上式变为

$$T(E)=\sqrt{2}\int_0^E(E-\eta)^{-\frac{1}{2}}f(\eta)\mathrm{d}\eta$$

中国国防科技网 http://www.81tech.com

这是形如(14.3.6)式的积分方程，按定理1得

$$f(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int_0^{\eta}(-E+\eta)^{-\frac{1}{2}}T(E)\,\mathrm{d}E$$

例2 医学上的CT(computer tomography) 如图14-3-2，$\mathrm{d}s$ 为被探测的体内组织的微元(切片)，I_0 是 X-光射光线输入强度值，I 是输出强度. 假定 I 关于 s 的变化率与 I 的强度成正比，即

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}s} = vI$$

其中 v 是吸收系数，未知，设 $v=-f(p)$，$f(p)>0$，所以有

$$\mathrm{d}I = -f(p)I\mathrm{d}s$$

所以

$$I = I_0 e^{-\int_0^s f(p)\,\mathrm{d}s}$$

化为

$$\mathrm{In}\left(\frac{I}{I_0}\right) = -\int_0^s f(p)\,\mathrm{d}s$$

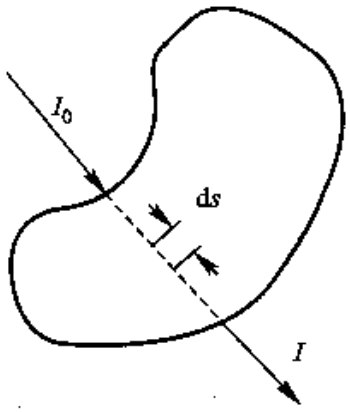


图 14-3-2

据实际情况，I_0 与 I 都可以从仪表上读出，未知函数是 $f(p)$. 就是说，要从 $f(x)$ 的线积分值反求 f，地球物理中应用很多的 Rodon 变换也就是这样做的.

§14.4 曲线拟合和常微分方程反问题

曲线拟合的一种方法是将基函数看成是某一个待定参数的常微分方程的基解组，那么，问题便成为求解常微分方程的反问题. 一般来说，物理、力学所描述的规律由微分方程(或微分方程组)所表示，通过观测数据将微分方程的参数确定下来，进而将基解组作为曲线拟合的基函数. 最后，运用线性逼近方法将拟合曲线确定下来. 这个方法的一个重要优点是有一定的自适应性，从数学上讲，它是解决半线性逼近的重要方法.

我们从一个实际问题分析起，在实验数据拟合中，常常选择半线性逼近模型，例如对具有指数特征的数据，选取

$$y = ae^{kx} + be^{-kx},$$

对于具有周期特征的数据，选取

$$y = a\cos kx + b\sin kx$$

上述模型的半线性逼近参数 k 通常采用非线性最小二乘法确定下来，但运算量

http://www.81tech.com

很大. 现在，将 e^{kx}，e^{-kx}以及 $\cos kx$，$\sin kx$ 理解为二阶常系数微分方程的基解组，即

$$y'' + ay = 0$$

其中 a 是待定常数，它由观测数据(x_i, f_i)，$i = 0, 1, \cdots, m+1$ 所确定. 这里 $y = f(x)$是 $y'' + ay = 0$ 的解，记 $y_i = f(x_i) = f_i$，x_i 是等距分布的，步长为 h，即 $x_i = a + ih$. 也就是说，求解下列常微分方程的反问题：

$$\begin{cases} y'' + ay = 0, a \leqslant x \leqslant b \\ y(x_i) = f(x_i) \quad i = 0, 1, \cdots, m+1 \end{cases}$$

将微分方程离散化后，a 便由下列超定方程组所确定

$$ah^2 y_i = -\Delta^2 y_{i-1}, i = 1, 2, \cdots, m$$

这里 $\Delta^2 y_{i-1} = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}$，用最小二乘法求解，即要求 a，使

$$\min I(a) = \sum_{i=1}^{m} (ah^2 y_i + \Delta^2 y_{i-1})^2$$

令 $I'(a) = 0$，求得

$$a = \frac{-\sum_{i=1}^{m} y_i \Delta^2 y_{i-1}}{h^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

显然，当 $y = f(x)$是线性函数时，有 $\Delta^2 y_{i-1} \equiv 0$，故 $a = 0$，从而微分方程变成 $y'' = 0$，得出 $y = ax + b$. 如果

$$y = f(x) = a\cos kx + b\sin kx$$

那么，由于 a 的分母恒正，而当 h 充分小时，

$$\frac{-\sum_{i=1}^{m} y_i \Delta^2 y_{i-1}}{h} \approx -\int_a^b yy''\mathrm{d}x = k^2 \int_a^b y^2 \mathrm{d}x > 0$$

故 $a > 0$，从而 $y'' + ay = 0$ 的特征根是复共轭的. 而当曲线

$$y = f(x) = ae^{kx} + be^{-kx}$$

时，由于

$$\frac{-\sum_{i=1}^{m} y_i \Delta^2 y_{i-1}}{h} \approx -\int_a^b yy''\mathrm{d}x = -k^2 \int_a^b y^2 \mathrm{d}x > 0$$

故 $a < 0$. 实际上，当 h 充分小时，

$$a = \frac{-\sum_{i=1}^{m} y_i \Delta^2 y_{i-1}}{h^2 \sum_{i=1}^{m} y_i^2} \approx \frac{-\int_a^b yy''\mathrm{d}x}{\int_a^b y^2 \mathrm{d}x} \approx \pm k^2$$

中国国防科技网 http://www.81tech.com

式中，若 $f(x)=ae^{kx}+be^{-kx}$，则取负号，若 $f(x)=a\cos kx+b\sin kx$，则取正号. 注意到求积公式的准确度，容易看到 a 逼近 $\pm k^2$ 的误差为 $o(\lambda)$.

例　给定函数表 14－4－1，试找出拟合曲线的基函数.

表 14－4－1　函数数值表

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
$f(x)$	0.000 0	0.100 17	0.201 34	0.304 52	0.410 75	0.521 10	0.636 65	0.758 58

为确定反问题的系数 a，作下列二次差分表 14－4－2

表 14－4－2　二次差分表

x	y_i	y_i^2	Δy_{i-1}	$\Delta^2 y_{i-1}$	$y_i\Delta^2 y_{i-1}$
0	0.000 0				
0.1	0.100 17	0.0100 34	0.100 17	0.001 00	$0.010\,017\times10^{-2}$
0.2	0.201 34	0.040 537 7	0.101 17	0.002 01	$0.040\,469\,3\times10^{-2}$
0.3	0.304 52	0.092 732 4	0.103 18	0.003 05	$0.092\,878\,6\times10^{-2}$
0.4	0.410 75	0.168 715 5	0.106 23	0.004 12	$0.169\,229\times10^{-2}$
0.5	0.521 10	0.271 545 2	0.110 35	0.005 20	$0.270\,972\times10^{-2}$
0.6	0.636 65	0.405 323 2	0.115 55	0.006 38	$0.406\,182\,7\times10^{-2}$
0.7	0.758 58		0.121 93		
$\sum$		0.988 888			$0.989\,748\,6\times10^{-2}$

这里 $h=0.1$，所以有

$$a=\frac{-\sum_{i=1}^{6}y_i\Delta^2y_{i-1}}{h^2\sum_{i=1}^{6}y_i^2}=-\frac{0.989\,748\,6}{0.988\,888}=-1.000\,870\,2$$

于是可取 $e^{\sqrt{|a|}x}$，$e^{-\sqrt{|a|}x}$ 为拟合曲线的基，而 $\sqrt{|a|}=1.000\,4$，即拟合模型为

$$f(x)=c_1e^{1.000\,4x}+c_2e^{-1.000\,4x}$$

实际上，函数表是由双曲正弦函数 $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ 产生的.

利用反问题求曲线拟合的基函数，其局限在于要求 x_i 为等距分布，即 $x_i=a+ih$，h 为步长，这一点需要在试验设计时要考虑到.

http://www.81tech.com

§14.5 有关偏微分方程反问题的例子

一、声速成像问题

考虑地震勘探的最简单模型，即用声波方程代替地震波方程和脉冲型点震源的情况，此时描述声波在地下半空间 Ω 内传播的微分方程(在用 Fourier 变换到频域解方程时,右端源项加乘)$\delta(t)$

$$\nabla^2 u - \frac{1}{C^2(r)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\delta(r - r_s), \quad r \subseteq \Omega \subset R^3 \tag{14.5.1}$$

式中 r 为三维空间中的某一点，r_s 为单极震源的位置，u 为标量声场，C 为声速. (14.5.1)式属于双曲型二阶线性偏微分方程. 初值条件为

$$u = \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad t \leqslant 0 \tag{14.5.2}$$

而边界条件为

$$u = f(r,t) \quad r \in \partial\Omega \tag{14.5.3}$$

声速成像问题指的是给出地面观测的声场 f，求微分方程(14.5.1)左端微分算子中的系数 $\frac{1}{C^2(r)}$. 这是典型的双曲偏微分方程待定系数项的反问题.

二、粘弹性参数的成像问题

波在完全弹性介质中传播时不存在能量的耗散. 然而实际地球介质并非理想的完全弹性体，因此用考虑波传播过程中有能量部分耗散的粘弹性介质模型描述地震波或电磁波的传播更准确些. 这时，可应用 Stokes 波动方程，它最早是由 Stokes 在声波方程中引入耗散项而得到的，写为

$$\nabla^2\left(u + \gamma(r)\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{1}{C^2(r)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{14.5.4}$$

相应的定解条件同(14.5.2)及(14.5.3). 这里的 $\gamma(r)$ 是与介质的粘滞系数、弹性参数及密度有关的综合系数. 如果把反问题提为由边界条件(14.5.3)同时求(14.5.4)中的波速 $C(r)$ 及粘弹性参数 $\gamma(r)$，不加上很强的附加条件反问题的解将不会存在和唯一. 由于 $\gamma(r)$ 本身与 $C(r)$ 有关，把问题提为已知条件(14.5.2)(14.5.3)以及 $C(r)$ 求粘弹性参数比较合适，这时，反问题属于待定微分算子中的部分系数项的反问题.

中国航空科技网 http://www.81tech.com

三、求直流电导率的反问题

假定在地面的点 r_{s_k} 放置几个电极，它们分别向地下注入 $\frac{\partial q_k}{\partial t}$ 的电流，q 为电荷密度，k 为电极号，$k=1$，…，n. 又设 J 为电流密度，ϕ 为电势，σ 为介质电导率，则由微分形式的欧姆定律有

$$J=-\sigma\nabla\phi$$

再由连续性方程知，在无电源处，$\nabla\cdot J=0$，而在电极 k 处

$$\nabla\cdot J=-\frac{\partial q_k}{\partial t}$$

代入上式得直流电法勘探的微分方程式

$$\nabla\cdot[\sigma(r)\nabla\phi(r)]=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial q_k}{\partial t}\delta(r-r_{s_k}),r\in\Omega,\ r_k\in\partial\Omega \quad (14.5.5)$$

其中 Ω 为地下半空间. (14.5.5)是二阶椭圆型偏微分方程的一种，称为广义泊松方程. 在电法勘探中，方程(14.5.5)的右端项可以由电流测量确定. 所谓反问题是指求电导率 σ，即由地面上观测的电势差 $\Delta\phi$ 及电流反推地下电导率 $\sigma(r)$，属于待定椭圆型方程系数项的反问题.

虽然交变电磁法勘探中的基本方程是 Maxwell 方程，但由于此时应用的电磁波的频率一般小于 3×10^4 Hz，相应真空中的波长 ≥10 km，而探测目标 ≤1 km，因此描述电磁波的场方程一般可简化为以下的 Helmholtz 方程

$$-\nabla[\alpha(r,\omega)\nabla u(r,\omega)]+\beta(r,\omega)u(r,\omega)=f \quad (14.5.6)$$

式中 f 为源项，α 和 β 为与介质电导率 σ 和频率 ω 有关的参数，u 为电场或磁场. 求介质参数 α 或 β 的反问题也属于待定椭圆型偏微分方程系数项的反问题.

四、地热勘探中的反问题

探寻地下热水和某些地质目标的地热勘探法，在地面或井孔内测量地球内部与日照无关的温度变化. 这时地下热扩散过程用热传导方程描述

$$\nabla[(k,r)\nabla T(r,t)]-e\rho\frac{\partial T(r,t)}{\partial t}=P(r,t) \quad (14.5.7)$$

式中 $T(r,t)$ 为地温函数，$P(r,t)$ 为热源项，e 为常压下地下岩石的比热，ρ 为密度，k 为热导率，同时热流正比于温度梯度 ΔT. 在地热勘探中的反问题可分为两类. 一类是假定已知地下介质参数 k，ρ 和 e，求热源 P，这是求抛物型偏微分方程源项的反问题. 另一类是假定研究区域内不存在热源，求地下介质的热导率 $k(r)$，这是待定抛物型方程系数项的反问题，又是我们感兴趣的热

扩散率 $\alpha(r)=\frac{k}{e\rho}$. 如果假定 k 为常数而 e 和 ρ 变化，则(14.5.7)式变为

$$\alpha(r)\ \nabla^2 T(r,t)-\frac{\partial r}{\partial t}=0 \tag{14.5.8}$$

由 $T(r,t)$ 的部分观测结果反推热扩散率，$\alpha(r)$ 的反问题也属于待定抛物型方程系数项的反问题. 地热反问题在油田开发和油藏工程中有重要的应用，可惜目前研究得很不充分.

五、势场反问题

势场问题的基本方程是 Poisson 方程

$$\nabla^2 f(r)=-4\pi G m(r),\ r\in\Omega \tag{14.5.9}$$

式中 f 为势，对于重力法，G 为万有引力常数，m 为密度；对于磁法，$G=-1$，$m=\nabla J$，J 为磁化强度，它是感应磁化强度 J_i 与剩余磁化强度 J_r 的矢量和 $J=J_i+J_r$. 反问题是已知边界 $\partial\Omega$ 上的势场分量 $\frac{\partial f}{\partial z}$，求密度或磁场强度 $m(r)$，属于待定椭圆方程源项的反问题.

在势论中，Poisson 方程边值问题的解可利用调和函数的积分表达式给出，例如，对重力场的垂直分量，正问题的解可表示为

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial z}G\iiint_{\Omega'}\rho(r')\frac{(r-r')}{|r-r'|^3}\mathrm{d}r',\quad r\in\partial\Omega \tag{14.5.10}$$

其中 $r'\in\Omega'\subset\Omega$，$\Omega'$ 是地下场源存在的局部区域，n 为区域 Ω' 的单位外法矢，在反演时已知 $\frac{\partial f}{\partial z}$ 的观测值求 $\rho(r)$，显然应该去求解积分方程(14.5.10)，由于 $\rho(r)$ 自由度为 3，而在观测面 $\partial\Omega$ 上的数据的自由度为 2，这种反问题的解是不唯一的. 实际上，为了克服解的非唯一性所造成的困难，地球物理中势场反问题的提法常常化为已知地面上的势场数据 $\frac{\partial f}{\partial z}$ 和源区 Ω' 内为常数的密度 $\rho(r')$，求方程(14.5.10)的积分区域 Ω' 的边界 $\partial\Omega'$. 这在数学上属于待定边界形状的反问题.



1. 下面的矩阵方程中，g_{1n} 和 r_{1n} 是常数($n=1,2,3$)，试求出角度 A，B 和 C 来. 可能有多组解，只要求给出一组即可. 如果可能，请编写出一个通用的计算程序来.

$$[g_{11}\quad g_{12}\quad g_{13}]\cdot$$

中国国防科技网 http://www.81tech.com

$$\begin{bmatrix} \cos B\cos C & -\cos B\cos C & -\sin B \\ \sin A\sin B\cos C-\cos A\sin C & \cos A\cos C-\sin A\sin B\sin C & \sin A\cos B \\ \cos A\sin B\cos C+\sin A\sin C & -\cos A\sin B\sin C-\sin A\cos C & \cos A\cos B \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \end{bmatrix}$$

2. 已知4阶矩阵 A 的特征值 $\lambda_1=1$(三重)，$\lambda_2=-3$；对应于 λ_1 的特征向量有

$$x_1=(1,-1,0,0)^T,\ x_2=(-1,1,-1,0)^T,\ x_3=(0,-1,1,-1)^T$$

对应于 λ_2 的特征值为 $x_4=(0,0,-1,1)^T$. 问：A 可否对角化？如能对角化，求出 A 及 A^n (n 为正整数).

参考文献

[1] 姜启源. 数学模型. 北京：高等教育出版社，1993

[2] 唐焕文，贺明峰. 数学模型. 北京：高等教育出版社，1991

[3] 扬文采. 地球物理反演与地震层析成像. 北京：地质出版社，1989

[4] 李岳生. 样条与插值. 上海：上海科学技术出版社，1983

[5] 齐欢. 数学模型方法. 武汉：华中理工大学出版社，1996

第15章 悖论数学模型

什么叫悖论？就“悖论”这个词的本意而言，包含有“悖理”的意义，即认为是与信念相违背的. 笼统地说，悖论是指这样的推理过程：它看上去是合理的，但结果却得出了矛盾. 日本《数学百科辞典》说，一个论证能够导出与一般判断相反的结果，而要推翻它又很难给出正当的根据时，这种论证称为悖论. 这里，关于“很难给出正当的根据”这句话过于含糊. 在一定条件下“很难给出”与“能否给出”的含义是不一样的. 奥地利学者班格特·汉生认为，一些常见的悖论，除了非直谓的原因，其性质就和数学上的方程没有解一样. 在算术中，这类问题是靠引进新数、扩大数系来解决的. 例如，$2x+1=0$,在正整数系里无解，扩大到有理数系便有解了；$x^2+1=0$，在实数系里无解，而扩大到复数系时就有解了.

§15.1 悖论的定义

定义 一种理论事实或状况，在某些公认正确的背景知识之下，可以合乎逻辑地建立两个矛盾语句相互推出的矛盾等价式，我们称这样的理论事实或状况为逻辑悖论.

在这个定义中明确了如下三点：(1)悖论总是相对于某一理论而言的(某些公认正确的背景知识)；(2)一个悖论可以表现为某一理论中两个互相矛盾的命题的形式；(3)悖论也可集中地表现为肯定等价于否定的复合命题.

悖论作为一种理论事实或理论状况，是由三要素共同决定的. “理论事实或状况”的涵义有两个方面：其一，悖论并不存在于纯客观对象世界，而存在或内含于人类已有知识系统之中；其二，悖论是一种系统性存在物，再简单的悖论也是从具有主体的背景知识的框架中经逻辑推导构造而来的，任何孤立的文字本身都不可能构成悖论.

悖论的发生常常是与人们在相应的历史条件下的认识水平密切关联的. 例如，伽利略关于“自然数并不比平方数多”① 的悖论，在有了集合论之后，在

① 序列1,2,3,…,n,…与序列1,4,9,…,n^2,…一一对应，在没有无穷基数概念时，伽利略因此提出“自然数并不比平方数多”.

中国国防科技网 http://www.81tech.com

有了无穷基数概念之后，这个悖论产生的原因和解决的办法就都有了. 我们甚至不难设想，对于今天还不知道无穷基数概念的人来说，伽利略悖论对他们而言可能仍然是一个悖论，但事实上它是已经被消除了的，只是他们不知道而已.

所谓悖论与一定的历史条件相联系，其实质在于悖论是相对于某个理论体系而言的. 面对悖论，人们也就努力去探寻或建立新的理论，使之既不损害原有理论的精华，又能消除悖论. 因此，客观上，悖论推动了理论的研究与发展. 另一方面，在悖论未消除之前，就是存在着某种理论的危机. 数学史有所谓3次危机，都是与悖论有关的. 其实，悖论何止3个，危机何止3次. 然而，造成重大的全局性影响的可算是这样3个或3次. 数学中的悖论推动了数学的发展.

有人认为悖论是3种主要形式：一个论断看起来好像肯定错了，但实际上却是对的(佯谬)；一个论断看起来好像肯定是对的，但实际上却错了(似是而非的理论)；一系列推理看起来好像无懈可击，可是却导致了逻辑上的自相矛盾. 这些关于悖论的说法未免失之过宽，它是以“人的直觉和日常经验”为标准的. 而且，这很可能造成悖论与正确理论之间的混淆，前者对其错误之所在是没有明确判断的，而且对于由直觉得出的结论和日常经验作出的判断，其正确与否还难以判定.

§15.2 罗素悖论与第三次数学“危机”

1919年，哲学家罗素提出如下的理发师悖论：

村子里仅一名男性理发师，且村子里的男人都需要刮胡子，理发师约定：给且只给自己不给自己刮胡子的人刮胡子. 有好事者问理发师：“理发师先生，你自己的胡子谁来刮?”理发师无言以对. 因为如果理发师说“我自己的胡子自己刮”，那么根据他与大家的约定，理发师不能给自己刮胡子的人刮胡子，即这时他不该给自己刮胡子；如果理发师说“我的胡子不自己刮”，那么根据他与大家的约定，理发师应给自己刮胡子. 可见理发师怎么回答也不行!

上述理发师悖论可以数学化地表述如下，设集合

$$B=\{\text{自己刮胡子的人}\}$$

若理发师$\in B$，即理发师是自己刮胡子的人，但由“约定”，他不该给自己刮胡子，即理发师$\notin B$，矛盾! 若理发师$\notin B$，即理发师不自己刮胡子，由“约定”，他应给自己刮胡子，即理发师$\in B$，矛盾!

罗素进一步把上述理发师悖论变成下面的一个数学悖论，称为罗素悖论.

这个悖论是罗素(Russell)在1902年发现的. 策梅洛(Zermelo)也曾独立发现了这个悖论，所以也称 Russell－Zermelo 悖论.

依照逻辑分法，所有的集合可分为两类. 一类是“本身分子集”，这种集

http://www.81tech.com

合自身也是该集合的一个元素. 例如，“一切概念的集合”，由于它本身也是一个概念，所以也是该集合的一个元素；“一切集合所组成的集合”，当然也是自身的元素，因为它也是一个集合. 另一类集合叫“非本身分子集”，其本身不是它的一个元；例如，“自然数集”，它本身是非自然数，所以自然数集合不是它本身数集的一个元素. 按照排中律，任取一个集合，它不是本身分子集就一定是非本身分子集，不会出现第三种情况.

现在要问：所有非本身分子集组成的集合 S 属于哪一类？

设 S 是本身分子集，则 S 为自身的一个元素，而根据 S 定义，S 的每一个元素都是非本身分子集，所以 S 又是非本身分子集；又设 S 是非本身分子集，而一切非本身分子集已包括在 S 中了，所以 S 也一定在 S 之中，按定义，S 又是本身分子集. 这是一个矛盾！我们用集合论的语言可简单叙述如下：

“设 $B=\{$集合 $A \mid A \notin A\}$，问 $B \in B$ 还是 $B \notin B$？”显然 $B \neq \varnothing$；$B \in B$，由 B 的定义，B 是 B 中一元素时，B 应有性质 $B \notin B$，矛盾！若 $B \notin B$，由 B 的定义，$B \in B$，矛盾！于是这里发生了无论如何摆脱不了矛盾的荒唐局面！

在罗素表述悖论时，字字句句都未违反康托尔朴素集合论的观点，为什么出现了自相矛盾的事实呢？要害是允许写 $B \in B$，即谈某些集合自己是自己的元素. 为了排除罗素悖论，保卫已建成的数学大厦，数学家策梅洛(Zermelo)、弗兰克尔(Freenkel)等建立了公理集合论的公理系统，按他们的公理规定，禁谈 $B \in B$，从而解除了第三次数学“危机”.

第三次数学“危机”出现的前夕，数学界一派升平乐观气氛. 1900 年，庞加莱在第一次国际数学家大会上自信而兴奋地宣称：“我们可以说，现在的数学已经达到了绝对的严格.”不料才过了两年，罗素悖论犹如晴天霹雳，使数学界一片哗然，希尔伯特惊呼：在数学这个号称可靠性与真理性的模范里，每个人所学、所教、所用的概念、结构和推理方法，竟导出不合理结果；如果数学思考也失灵的话，那么我们到哪里去找可靠性和真理性呢？

第一次($\sqrt{2}$危机)、第二次(无穷小危机)和第三次数学“危机”的出现和排除使数学家们对数学的认识更为清晰了，人们有了思想准备，也许还有第四次、第五次数学危机乃至更多次；但可以相信，人类有能力排除任何数学“危机”，而且，数学“危机”爆发之日，就是新的数学概念、新的数学理论孕育之时，随着危机的排除，数学将会得到划时代的进展与突破.

§15.3 悖 论 模 型

前面我们见识了罗素的理发师悖论、集合论中的罗素悖论. 我们看到，悖

中国国防科技网 http://www.81tech.com

论不是谬论，它虽然也令人感到别扭和不妥，但从它所在的理论体系之内，并不能指出其错误的成因，却能从悖论推导出自相矛盾的结论．为消除悖论，必须增补改造产生这一悖论的原来的理论体系，建立新的理论体系．

生活中和数学上还有不少精彩的悖论，下面列举一批，供读者欣赏与分析．

一、说谎者悖论

一个克里特人说："我说这句话时正在说谎．"然后这个克里特人问听众他上面说的是真话还是假话？

这个悖论出自公元前 6 世纪希腊的克里特人伊壁孟德，使得希腊人对上述问题大伤脑筋，连西方的圣经《新约》也引用过这一悖论．

事实上，若回答这个克里特人说，他这句话是真话，那么与他"正在说谎"矛盾；如果回答这个克里特人说，他这句话是假话，即他所称"正在说谎"是假的，那么他正在说真话，又矛盾！可见对这位克里特人的"我说这句话时正在说谎"不可判其真亦不可判其伪．

二、柏拉图与苏格拉底悖论

柏拉图是苏格拉底的学生，他们都是公元前 400 年左右的科学家和哲学家，两位都热心于数学，柏拉图(公元前 427—前 347)被誉为那个时代最有学问的人，欧几里得就是柏拉图的门生．柏拉图于公元前 387 年创建希腊雅典学院，大学门口有一横匾，上书："不懂几何者不得入内"．这所大学一直开办了 900 年，于公元 529 年被罗马王以"异端邪说"的罪名查封，实为人类史上反动统治者仇恨科学、破坏科学的先河．柏拉图的名著《理想国》(共和国)深刻阐述了他的政治与科学主张．书中有言：我们竭力奉劝我国未来的主人翁学习算术，为了灵魂本身去学．柏拉图的门生对数学作出了重大贡献，例如欧几里得的《几何原本》．

下面是苏格拉底与柏拉图师生间的一段对白：

柏拉图调侃他的老师，曰："苏格拉底老师下面的话是假话．"

苏格拉底对曰："柏拉图上面的话是对的．"

若问柏拉图、苏格拉底二人的话是真话还是假话，你该怎样判断呢？

如果柏拉图的那句话是真话，即苏格拉底下面的话当真是假话，于是"柏拉图上面的话是对的"为假话，柏拉图上面的那句话是假话，与假设"柏拉图的那句话是真话"矛盾；如果柏拉图的那句话是假话，即苏格拉底下面的话是真话，于是"柏拉图上面的话是对的"为真话，即柏拉图上面那句话是真话，与假设"柏拉图那句话是假话"矛盾．于是不管说柏拉图说的那句话是真是假都说不通．

同理可以推导出，不论假设苏格拉底的话是真是假，都会引起矛盾．

三、鸡蛋悖论

先有鸡还是先有蛋?

四、布拉里－福蒂(Burali－Forti)悖论

这是第一个被发现的集合论悖论，它与集合论中良序集合的问题有关. 尽管布拉里－福蒂第一个于1897年公布了这个悖论，但第一个发现这个悖论的数学家却是集合论的创立者康托本人，他于1895年就发现了这个悖论，但没有公开.

依照序数理论有如下结论：

① 每一良序集合必有一序数；

② 所有小于某一序数 a，并包含这一序数在内的一切序数所组成的集合也是良序集合，其序数为 $a+1$.

现考虑由所有序数组成的集合 W. 可以证明：W 是一个良序集合，因此，有序数 a. 这样，W 也应包括在已包括了所有序数的良序集合 W 中. 但依据②可得，包括了 a 的所有序数集合的序数应为 $a+1$，它比 a 大，所以，a 又不是所有序数集合的一个序数了. 这是一个矛盾.

五、梵学者预言悖论

梵学者的预言是指：早上梵学者的女儿舒椰对父亲说："我将在卡片上写下一个预言，如果您认为这个预言将在下午三点以前发生，您就在卡片上写出一个'是'，如果您认为这个预言在下午三点以前不会发生，您就在卡片上写出一个'不'." 父亲同意后，舒椰在卡片上写道："今日下午三时之前，您将写一个'不'字在此卡片上."

问：父亲写"是"还是写"不"?

六、格里林(Greling)悖论

这个悖论是1908年被发现的. 它在逻辑的表述形式上与罗素悖论十分相似，但并不是就性质本身，而是就形容词而言，因此，它应属语义学悖论.

在语言中，形容词可按其所描写的性质分为两类：设一类所描写的性质符合该形容词本身，称为自状的. 例如"抽象的"、"中文的"是自状的. 因为"中文的"形容词本身也是中文的，"抽象的"性质也是抽象的. 另一类所描写的性质不符合该形容词本身，称为非自状的. 例如"俄文的"、"圆的"是非自状的，因为"俄文的"三个字明明是中文字，并不是俄文字；"圆的"这形容词本身并不是圆的，而是"方块的".

中国防科技网 http://www.81tech.com

现在要问："非自状的"这一形容词属于哪一类?

如果说形容词"非自状的"是非自状的，则正好与它自身涵义相符合，那么，按定义它应该是自状的；如果说形容词"非自状的"是自状的，则正好与它自身涵义不符合，则它又应该是非自状的. 这表明不论哪种说法都要导出矛盾.

前面的鸡蛋悖论、布拉里－福蒂(Burali－Forti)悖论与梵学者预言悖论请读者自行分析.

七、白马非马

"白马非马"(《公孙龙子·白马论》)是公孙龙的名论.

"白马非马"这个判断中的"非"字，按公孙龙所说，实有两重含义. 第一层含义是"不是". 公孙龙说："马者，所以命形也；白者，所以命色也. 命色者非命形也. 故曰：白马非马"(《公孙龙子·白马论》. 这是说，马这个名词，是用来称呼"形体"的；"白"这个名词，是用来称呼颜色的. 用来称呼"色"的"名"不是用来称呼"形"的"名"，所以，"白马非马". 又说："白马者，马与白也，白与马也. 故曰：白马非马也."(《公孙龙子·白马论》) 白马，就是马和白，或者说，白和马，所以说："白马非马"；这里的"非"，都是"不是"的意思.

按照公孙龙的观点，每一个"实"都有一个专用的"名"，马这个名是用来称呼某一特定的形体的，白这个名是用来称呼某一特定的颜色的，二者不能合而指一实. 白马就是马和白两个名，或者白和马两个名，马和白各有其实，所以白马不是马.

按公孙龙在这个意义上讲"白马非马"，显然是错误的. 公孙龙在进行推论时，明显地使用了违反逻辑的诡辩手法.

"白马非马"说的第二层含义是"白马"异于马. 公孙龙说："以有马为异有黄马，是异黄马于马也；异黄马于马，是以黄马为非马，以黄马为非马，而以白马为有马，此飞者入池，……，此天下之掉言乱辞也."(《公孙龙子·白马论》)

这是说，承认有"马"是异于有"黄马"，这就是承认"黄马"异于"马"；既然承认"黄马"异于"马"，这就是以黄马为非马；以黄马为非马，而以白马为有马，这就如同说飞翔的动物活动于水中，或者说他吃饱穿暖你不饿不冷一样，纯属天下的胡言乱语.

在这里，公孙龙将"黄马"异于"马"与"黄马"非"马"当成等价的判断，说明"非"有"异于"的含义.

肯定"白马"与"马"有区别，这是正确的. 但公孙龙并没有到此止步，

http://www.81tech.com

他肯定“白马”与“马”的区别，目的是要证明“白马”不属于“马”. 因为他认为“以黄马为非马”与“以白马为有马”这两个判断是不能同时成立的，异于马也就是无马、不是马.

注：白马非马的结论虽属诡辩，但并不是没有意义的. 从哲学上看，它所讨论的实质上是一般与特殊的关系问题. “马”是一般，“白马”是特殊. 从集合论上看，它所讨论的实质上是一集合与其子集合的关系问题，“马”应指全体马，“白马”应指全体马中那些白色的马，因此，“白马”集合是“马”集合的子集合. 唯物辩证法认为，一般寓于特殊之中，一般与特殊既是统一的，又是有差别的、公孙龙的《白马论》揭示了一般与特殊差别的一面，这是他的贡献，但他夸大了这一差别，借口一般与特殊有差别而否认一般与特殊的统一，因而导致了错误的结论. 公孙龙发现了讲“不属于”中含有“不同于”的意思，却没有把“不同于”与“不属于”区别开来，这就使他的整个议论成为能服人之口而不能服人之心的诡辩. 尽管如此，公孙龙的悖论却直接刺激了墨家关于这类逻辑问题的研讨. 《墨经》将“名”区别为“达、类、私”三类. “达名”即最普遍的“名”，如“物”，它是对多种物体通用的名；“类名”即特殊的“名”，如“马”，是对凡具有马形的一类物的名称；私名即专用名称，是对某个具体物的专用名称. 在此基础上，它把“同”区别为“重、体、合、类”四类，其中“重同”即二名一实，如“狗”与“犬”，“类同”即属于一类. 这样，“白马非马”的“悖论”就获得了解决. 而这一“悖论”的提出和解决，意味着逻辑学的长足进步. 在这个意义上，公孙龙对逻辑学的发展作出了重要的贡献.

八、理查德悖论之一

理查德悖论是在罗素悖论公布于世之后不久，法国的一个中学教师理查德(J. Richard)于1905年发现并公布的一个关于“可定义性”概念的悖论：

由于每一个自然数都能用一个英语词汇或短语去描述，而每个英语词汇或短语总是由有限多个英文字母组成的，其中重复出现几次的字母就算几个字母，例如，3是由t，h，r，e，e这些字母描述的，e出现两次，仍算两个字母，因此共5个字母描述. 又如，9由n，i，n，e这4个字母来描述了. 对一个正整数描述的方式不同，所用的字母个数就不同，例如，100可用“hundred”描述，这里用的是7个字母，也可用“小于101的最大正整数”、“大于99的最小正整数”等不同方式来描述，此时，用的字母也更多一些了. 但在各种各样的描述中总有一种所用的字母最少，特称此种描述为最简描述(任一正整数集的非空子集不一定有最大数，却必有最小数，因此最简描述存在).

现在考虑“一切至多用100个英文字母就可描述的正整数的集合S”.

显然，S是正整数集的一个子集. 容易证明，S还是一个有限集. 事实上，设有100个位置，那么S中任一个数，都可由这100个位置中填上一个字母来表示，从第一位填起，后面未填满的位置就空着. 在100个位置的任何一个位置上，可随意选择m字母不超过26个字母. 还加上“空位”这种选择，

中国国防科技网 http://www.81tech.com

总共也不过 27 种. 因此，就算其中的每一种描述都是最简描述，最多也不过 27^{100} 种可能的最简描述. 尽管 27^{100} 这个数很大，却也还是有限数. 所以，可断言 S 是一有限集.

记 $\mathbf{N}_+$ 为全体正整数的集合，那么 $\mathbf{N}_+ - S$ 必为非空集，记之为 M. 又可认定 M 中必有最小元素，记其为 m. 那么，m 便是“用少于或等于 100 个英文字母所不能描述的最小正整数”.

另一方面，正整数 m 可用这样一个句子来描述了：“用不多于 100 个字母所不能描述的正整数中最小的那个正整数”. 现在我们把这句话用英语写出：“the least positive integer which cannot be described in at most hundred letters”. 这里，只用了 67 个英文字母，这却表明，m 是“用少于 100 个英文字母可以描述的正整数”. 亦即 $m \in S$，这与 $m \in M = \mathbf{N}_+ - S$(因而 $m \notin S$)矛盾. 这个矛盾，详细说来，就是用少于 100 个英文字母描述了一个用少于或等于 100 个英文字母所不能描述的正整数.

九、理查德悖论之二

有一部分正整数可以被 2 整除，叫做具有偶数性质；另一些具有奇数性质；还有具有素数性质的，以及具有平方数性质的(如 1,4,9,…). 现在将正整数的性质编号，成为性质 1，性质 2，…并将它们表示为

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

如果某个正整数 n 恰好具有性质 a_n，就称 n 为非理查德数，否则便称为理查德数. 例如，若偶数性质编排在 a_4，因为 4 恰好是偶数，所以 4 是非理查德数；若素数性质编排在 a_{13}，而 13 又正是素数，所以 13 是非理查德数；若奇数性质编排在 a_8，而 8 并非奇数，那么，8 就是理查德数. 这样，所有的正整数分为了两类：一类是理查德数，一类是非理查德数.

“理查德数是与对应的编号所代表的性质不相符的正整数”——这也是描述正整数的一种性质. 这个性质也应有一个编号，记为 a_m，即 a_m 代表这一性质. 现在要问：m 这个正整数是理查德数还是非理查德数?

如果 m 是理查德数，那么，由理查德数的定义，m 与 a_m 所代表的性质不相符，而“m 与 a_m 所代表的性质不相符”这正与性质 a_m 一致，故 m 是非理查德数.

如果 m 是非理查德数，那么，由非理查德数的定义，m 与 a_m 所代表的性质相符，而“m 与 a_m 所代表的性质不相符”这正好与性质 a_m 不相符，故 m 又是理查德数.

十、秃头悖论

一位已经谢顶的老教授与他的学生争论他是否为秃头的问题.

教授："我是秃头吗?"

学生："您的头顶上已经没有多少头发，对不起，确实应该说是."

教授："你头发稠密，绝对不算秃头，问你，如果你头上脱落了一根头发之后，能说变成秃头了吗?"

学生："我减少一根头发之后，当然不会变成秃头."

教授："好了，总结我们的讨论，得出下面的命题：'如果一个人不是秃头，那么他减少一根头发仍不是秃头'，你说对吗?"

学生："对!"

教授："我年轻时代也和你一样一头秀发，当时没有人说我秃头，后来随年事的增高，头发一根根减少到今天这个样子. 但是每掉一根头发，根据我们刚才得到的命题，我都不应称为秃头，这样经有限次头发的减少，用这一命题有限次，结论是：我今日仍不是秃头."

学生笑而无语，教授把他故意的诡辩称之为"秃头悖论"，并向学生讲授起模糊数学的理论和应用. 至今模糊数学已经发展成一门不但充满哲理，趣味盎然，而且应用极广的数学分支. 事实上，宇宙间的事物并不总是非此即彼，世界上的人并不总是"不是我们的朋友，就是我们的敌人"，我们的立场也并非"凡是敌人拥护的我们就要反对，凡是敌人反对的我们就要拥护". 日常生活当中，有众多模糊的说法，诸如"大个子"，"小青年"，"水不深"，"天气不冷"等等，更有甚者，例如病毒，它有些生命现象，例如分裂繁殖，但它既没有细胞核又无细胞壁，你说它是生物还是非生物? 又例如牡蛎，泥里筑窝，水中游戏，大量繁衍后代，有性生殖，但牡蛎的性别却随年龄与季节变化，使得雌雄有别的"天理"变得十分模糊! 19 世纪以前，数学界对种种模糊现象故意视而不见，按经典的确定性数学的理论和方法，对这些"讨厌的模糊对象，既无法推理，也不好计算，不采取视而不见的态度又能怎么办呢?"例如从集合论的观点，一个元素或属于给定的集合 A 或不属于集合 A，二者只能发生其一. 如果用所谓集合 A 的特征函数来表示，则有用这种方式来解决秃头问题，怎么回答"教授是否属于秃头集合"呢!

1965 年，加利福尼亚大学控制论专家 L. A. 查德(L · A · Zadeh)首次提出模糊集合的概念，开辟了对模糊事物的数学研究，诞生了一个新的数学分支——模糊数学.

以"老年集合"和"年轻集合"为例，分别记之为 O 和 Y，只能谈某人属于 O 或 Y 的隶属程度是多少，而不是说 55 岁的人到底是属于 O 还是 Y. 与确定性集合的特征函数相对应地，对于模糊集合，则定义隶属函数；特征函数只有 0 与 1 两个值，0 表示否，1 表示是，而隶属函数则可以取遍[0,1]区间的一切值.

中国国防科技网 http://www.81tech.com

例如60岁的人，$P(60)=0.02$，他只有2%的可能隶属于年轻人集合，这是合情合理的一种定量. 事实上，60岁的人绝大多数已是衰老多病，不能称得起年轻了，但也有极少数60岁的人，或因遗传因素，或因自身的健康情况与心理因素，仍然活力十足，其身体的实际水平远高于同龄人.

运用模糊集合的思想，可以处理各种模糊现象，建立模糊数学模型，进行定量或定性的数学分析.

在不确定性的模糊现象的背景下，孕育了生气勃勃的模糊数学. 而完全没有实际背景由数学家凭空制造的一些数学概念往往是没有生命力的. 在应用研究当中，模糊数学的思想与方法已经广泛渗透到物理、化学、生物、医学、气象、管理、经济、控制等众多领域，并取得了丰硕成果.

当实际模型不能用已有的数学方法来对付时，应当考虑建立新的数学概念乃至新的数学分支，模糊数学的创立就是这方面的模范.

十一、芝诺悖论

芝诺(Zero of Elea，约公元前490年—公元前436年)出生于意大利南部的埃利亚城，是古希腊埃利亚学派的主要代表人物之一. 他是古希腊著名哲学家巴门尼德(Parmenided)的学生. 芝诺极端信奉巴门尼德关于世界上真实的东西只能是“唯一不动的存在”这个信条，否定现实世界的运动，认为运动或变动是不可能的，并断言承认运动就会导致矛盾. 芝诺以诡辩的方式阐述他这一学派的观点，关于运动的四个悖论，其中芝诺悖论最为闻名. 这四个关于运动的悖论引起了当时学术界极大的骚动，其余波至今尚未完全平息. 芝诺关于运动的四个悖论是这样的：

1. 二分法

“运动不存在. 理由是：位移事物在达到目的地之前必须先抵达一半处.”意思是：要通过AB，必先要从A出划到达C；要到达C，必先要到达D；要到达D，必先要到达E，要到达E必先要到达F……如此进行下去，永无止境，如下图，所以得出结论：运动不可能.

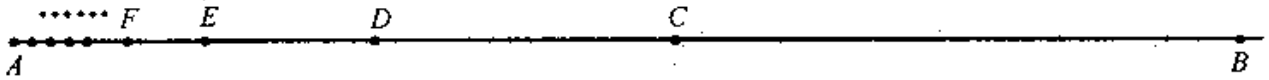


图 15－3－1

2. 阿克琉斯论证

这个论证的意思是说：一个跑得最快的人永远追不上一个跑得最慢的人. 因为追赶的人必须首先跑到被追赶的人跑的出发点，因此走得慢的人必然永远领先. 意思是说甲的速度远大于乙，乙先行于甲；甲要超乙，必先要赶上乙出

发的 B 点，当甲到达 B 点时，乙已前进到 C 点，当甲到达 C 点时，乙又到了 D 点……如此下去，结论是甲永远赶不上乙.

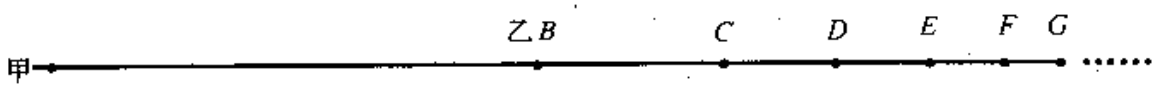


图 15－3－2

3. 飞矢不动

“飞着的箭静止着”. 飞箭在任一瞬间必静止在一确定的位置上. 所以，运动就是许多静止的总和.

4. 运动场问题

跑道上有两排物体，大小相同，数目相同，一排从终点排到中间点，另一排从中间点排到起点，它们以相同的速度作相反的运动，芝诺认为这里可以说明：一半时间和整个时间相等. 如图，原来的排列是：

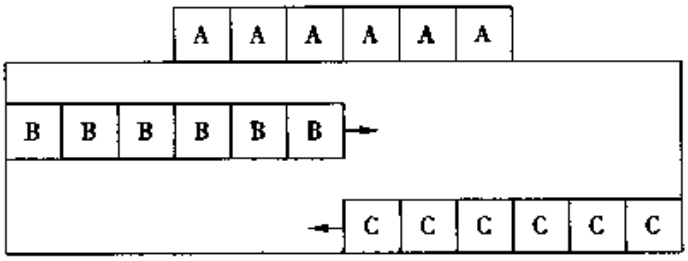


图 15－3－3

作相反方向的运动后，变成这样的排列：

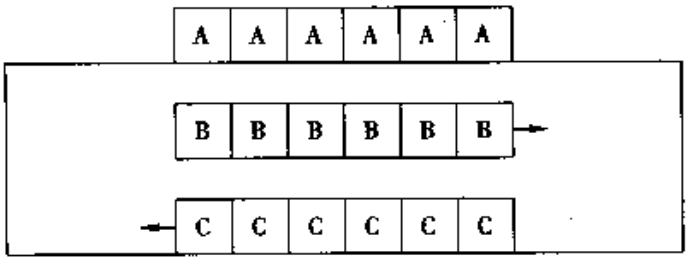


图 15－3－4

第一个 B 到达最末一个 C 的同时第一个 C 也到达了最末一个 B 处. 这时第一个 C 已经经过了所有的 B，而第一个 B 只经过了一半的 A. 因此，一半时间和全部时间相等.（我们无法查到芝诺本人的原话，这里的引述是根据亚里士多德《物理学》中的介绍.）

芝诺悖论的提出具有这样的背景：当时人们对空间和时间的看法持有两种截然不同的观点. 一种观点认为，空间和时间无限可分，运动是连续而又平顺的；另一种观点认为，空间和时间由不可分的一小段一小段所组成，运动是间

中国国防科技网 http://www.81tech.com

断而又跳跃的. 芝诺悖论正是针对上述这两种观点提出的. 针对那种连续的时空观，芝诺提出了“二分法”和“阿克琉斯”悖论. 因为如果时间和空间是连续的，是无限可分的，那么，有限的长度包含有无穷多个点，于是就不可能在有限的时间内通过有限的长度，从而证明运动是不可能的. 针对那种间断的时空观，芝诺提出了“飞矢不动”和“运动场问题”悖论. 因为如果时间和空间是间断的，是由单个的小单位(由不可分的小时刻)组成的，那么，飞箭在运动的任一小时刻必有一个确定的位置，因此是静止的，从而证明运动是不可能的. 连续与间断的关系问题，自从不可公度线段发现之后，人们就一直想解决它. 芝诺的用意并非想解决这个难题，而是为了否定运动，把这个问题的难点惹人注目地突出出来，使矛盾更加尖锐化. 芝诺悖论一提出，立即引起学术界、思想界一阵骚乱，当时因无理数的发现而卷入窘境的古希腊学者们在芝诺悖论面前也无能为力，没有办法排除悖论，于是出现了所谓的数学“第一次危机”.

芝诺是揭示静止与运动、时间与空间相互矛盾的第一批人之一. 芝诺发现并注意到了运动的矛盾性，这给以后的逻辑学、数学和哲学的发展带来了极大的影响. 从数学上看，芝诺悖论的根本解决，必须用到极限的理论. 有了极限理论，解决芝诺悖论就十分容易了. 因为小于 1 的正数无限次乘幂，它的极限为 0，所以，芝诺提出的关于运动的这四个难题也就迎刃而解了.

十二、蠕虫悖论

一只蠕虫从 1 m 长的橡皮绳的一端以 1 cm/s 的速度爬向另一端，橡皮绳同时均匀地以每秒 1 m 的速度向同方向延伸，蠕虫会爬到另一端吗？蠕虫每前进 1 cm，同时另一端却拉远了 1 m，怕是永远爬不到头了！

算算看：

第 1 秒，虫子爬了绳子的$\frac{1}{100}$，

第 2 秒，虫子爬了绳子的$\frac{1}{200}$，

……

第 n 秒，虫子爬了绳子的$\frac{1}{n\times 100}$，

前 2^k 秒虫子爬的总路程占绳子全长的比例为

$$\frac{1}{100}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)$$

而

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k}=\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)$$

$$>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}=1+\frac{k}{2}$$

所以不超过 2^{k+1} 秒，小虫可爬到另一端.

这一悖论与下面的龟兔悖论均为芝诺悖论的变形.

十三、龟兔悖论

乌龟对兔子说："你不用想追上我，我现在在你前方 1 米，虽然你的速度是我的百倍，但等你追到我现在的地点，我又向前爬了 1 厘米到了 C_1 点，等你追到 C_1，我已爬到距你$\frac{1}{100}$厘米的 C_2 点，如此下去，你在 C_n 点时，我却在你前方 C_{n+1} 点. 我永远在你前方."兔子不服气，可又说不过乌龟. 实际上，如果真比赛起来，用不了 1 秒，兔子已跑在乌龟前面了.

§15.4 政治科学悖论模型

"政治科学，作为一门经验学科，它研究权势的形成和权势的度量."(《权势与社会》，Lasswel 和 KaPlan 著，1950 年) 势力的研究是政治问题研究的中心. 如果我们能确切地定义并度量它，我们可以说抓住了政治问题中最重要的东西. 准确定义势力的内涵是困难的，但对某些特殊情况——决策体与投票势力可运用数量化的势力指标来刻画. 本节给出的势力度量模型诠释了**"独立自主"**与**"团结就是力量"**的悖论.

一、问题的提出

1. 投票对策和势力指标

设想有一群人，他们必须在一起决定是否接受或拒绝一系列的建议，例如立法委员会的成员们必须决定是否通过或拒绝一系列议案，或者某公司的股东们必须接受或拒绝一系列的经营方案等. 如果这样的决策体制是不正规的或临时的，那么它也许没有为作出决议而设立明确的规则. 如果它有明确的规则，那么规则的意义就在于它确切地说明了哪些成员的联盟有能力确保某项建议能

中国国防科技网 http://www.81tech.com

被接受. 例如通常的多数规则说明在 n 个成员决策体制中，一个联盟能确保某项建议被接受的充要条件是它的成员多于 $\frac{n}{2}$，而一致性规则如在贵格会教徒(Quaker)的祈祷会和多数美国陪审团中使用的规则，这种规则要求只有全体成员都同意才能接受某项建议.

一个股份公司由若干个股东组成，如果某一个股东想占据该股份公司的领导地位，那么通常的想法是该股东控制超过 50% 的股权. 但事实却是许多股份公司的领导者并没有控制那么多. 例如在 1994 年深圳宝安公司收购上海延中实业时，所收购的股本数只占总股本数的 18%，却实现了成功收购. 另一个例子是美国通用汽车公司的第一大股本福特家族也只占有该公司 15% 的股本，但也控制了整个公司. 这样，一个自然而然的问题是：如何估计某种势力在股东大会中所占的“权重”?

2. 问题分析

在原来我们所认为需 50% 的想法中，隐含着这样一个前提，即其他的股东都是您的反对者，这是一个极端的情形，也是我们一种自我孤立的意识. 我们转换思维，考虑联盟的情形，这也符合实际，一部分股东因某种共同利益而实行联合.

首先我们介绍加权多数对策及几个相关概念：

设 $[g;w_1,w_2,\cdots,w_n]$，这里有 n 个股东，用 w_i 是表示股东 i 所持有的股本，假定是非负的. g 表示赢得一次表决所需要的最低股本；设 $N=\{1,2,\cdots,n\}$ 是所有股东集合，N 的一个子集 S 称为股东联盟. 一个联盟赢得一次表决，是指

$$w_{i1}+w_{i2}+\cdots+w_{ik}\geqslant g$$

这里 $S=\{i1,i2,\cdots,ik\}$.

例 1 考虑对策

$$M_6=[4;1,1,1,1,1,1]$$

$N=\{1,2,\cdots,6\}$，S 为任何四个或多于四个股东的联盟.

哑元 在对策 $[50;51,14,13,12,10]$ 中第一个股东无需他人合作即可取胜，因而股东 2，3，4，5 尽管持有股本，但势力为 0，这时称股东 2，3，4，5 为“哑元”. 观察对策 $[51;26,26,26,22]$，最后一个股东也是毫无势力的，因为任何一个取胜联盟若含有他，那么去掉他时联盟依旧能取胜. 因此最后一个股东也是“哑元”.

同等势力 在对策 $[2;1,1,1]$，$[51;49,48,3]$ 中各势力是相同的，因为他们给出相同的取胜联盟. 其中第二个对策说明了位居第三的小股东也具有与前两个股东相当的价值，虽然他只占有极小的股本.

http://www.81tech.com

如果将这一想法应用于政治，也可以解释为什么大富翁佩罗会两次参加美国总统的选举. 尤其是他第一次参加布什、克林顿、佩罗的三人选举中(假设对策为[50;49,48,3])，通过此选举获取的势力，他赢得了数倍投资于竞选的资本.

二、建模分析与 Shapley – Shubik 指标

在对策$[g;w_1,w_2,\cdots,w_n]$中定义g_i为第i个股东的势力指标，它需满足以下五点：

(1) $g_i \geqslant 0$;

(2) $g_i = 0$ 当且仅当 i 是哑元;

(3) 若 i 与 j 在取胜联盟中地位相同，则 $g_i = g_j$;

(4) 若 $w_i > w_j$，则 $g_i \geqslant g_j$;

(5) $g_1 + g_2 + \cdots + g_n = 1$.

Shapley – Shubik 指标 设想有一群人在为某项议案进行投票表决，并且他们按某种顺序投票. 当有足够的成员投赞成票后被宣布通过，对于最后一个投赞成票使议案通过的成员应授予某种奖励. 若假定诸投票人投票顺序是随机的，那么可以算出给定局中人处于关键位置的次数，这个数可作为我们的指标，即 Shapley – Shubik 指标[5].

我们考虑有 n 个局中人的所有可能的排序，我们知道 n 个局中人有 $n!$ 个全排列，对于每个全排列存在唯一局中人，当他加入联盟时，使原先的非获胜联盟成为获胜联盟，这个局中人就称为关键人，亦即在局中人

$$x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, x_i, \cdots, x_n$$

的序列中，$\{x_1, \cdots, x_{i-1}\}$是非获胜联盟(总票数不过半)，而$\{x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i\}$是获胜联盟(总票数超过半数)，$x_i$是关键人，$i$是关键人位置，此时，局中人$x_i$的 Shapley – Shubik 势力指标就是局中人 i 处于关键位置的相对次数，

$$g_i = \frac{i \text{ 是关键的次数}}{\text{排列的总数}} = \frac{i \text{ 是关键的次数}}{n!}.$$

现在我们来计算这一指标.

我们记 n 个投票人构成的全集为 N，S 是 N 的一个子集，$S \subseteq N$.

$$G = (g_1, g_2, \cdots, g_n)$$

是 n 个局中人的 Shapley – Shubik 势力指标组成的向量，假设 $n!$ 种结盟是等可能的，对每一种结盟，我们规定用全排列

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, \cdots, n \\ k_1, k_2, \cdots, k_n \end{pmatrix}$$

表示，其中，$1 \leqslant k_i \leqslant n$，$k_i \neq k_j$. 不管投票环境的形成过程，我们只注重投票

中国国防科技网 http://www.81tech.com

结果，每一个排列表示一个先后投票的序列.

假如排列$\{k_1,\cdots,k_{i-1},k_i\}$可获胜，那么，$k_i$是关键人，有$s-1$个局中人在$i$之前加入$S$，他们共有$(s-1)!$种不同的序，而余下的$n-s$个局中人可记有$(n-s)!$个不同的序，故有$s$人组合的取胜联盟，其中有$\{k_i\}$成为关键人的共有$(s-1)!\ (n-s)!\ (1\leqslant s\leqslant n)$个不同的序. k_i的势力指标可由下式得出

$$g_i=\sum_{S\subseteq N}\frac{(s-1)!\ (n-s)!}{n!} \tag{15.4.1}$$

其中$s=|S|$，S表示取胜联盟，$S-\{i\}$是失败联盟，$\sum$表示对所有取胜联盟求和.

例2 对策[51;40,30,20,10]的四个股东1，2，3，4共有下面24种排列，“$i*$”表示该股东在取胜联盟中是关键人.

12*34	21*34	31*24	412*3
12*43	21*43	31*42	413*2
13*24	231*4	321*4	421*3
13*42	234*1	324*1	423*1
142*3	241*3	341*2	431*2
143*2	243*1	342*1	432*1

由公式(15.4.1)可得出：

$$g_1=3\times\frac{(3-1)!\ (4-3)!}{4!}+2\times\frac{(2-1)!\ (4-2)!}{4!}=\frac{10}{24}$$

$$g_2=2\times\frac{(3-1)!\ (4-3)!}{4!}+1\times\frac{(2-1)!\ (4-2)!}{4!}=\frac{6}{24}$$

$$g_3=2\times\frac{(3-1)!\ (4-3)!}{4!}+1\times\frac{(2-1)!\ (4-2)!}{4!}=\frac{6}{24}$$

$$g_4=1\times\frac{(3-1)!\ (4-3)!}{4!}=\frac{2}{24}$$

三、结果分析(团结就是力量与独立自主)

股份公司中的大股东 设一公司有一大股东A，他控制着40%的股票，假设其余的股票平均分配在另外60个股东手中，每人占1%. 通过一项决议需50%的赞成票. 计算这个对策中的Shapley－Shubik势力指标，该大股东的势力为40/61. 现仍假设A控制着40%的股票，但其余的股票平均分配在另外600个股东手中，每人占0.1%，此时A的势力为400/601. 而且随着小股东人数的不断增大，A的势力份额将趋于2/3.

这个例子解释了为什么收购一个股份公司，并不一定持有50%的股票.

http://www.81tech.com

以宝安收购延中实业为例，宝安只控制了18.56%的股票，而其余股东，最大的不过持有0.67%的股票. 这就是一个有趣的例子.

团结并不永远意味着力量 在实际生活中，人们经常以搓草绳为例来告诫人们，一根稻草微不足道，一拉就断. 但搓成草绳后却力量大增，从而得出结论：团结就是力量. 这也是在二次大战后，在欧洲大陆，形成了北大西洋公约组织和华约组织这两个集团势力. 针对此一状况，1955年，周总理在万隆会议上提出了著名的“和平共处五项原则”，其中有一条“独立自主”的原则，这从表面上看似乎与“联盟”存在着差异. 但在这里我们通过一个实例，试图给出“独立自主”的诠释.

例3 假设一个对策为[5;3,3,1,1,1]，另一个对策将3个1形成联盟成为对策[5;3,3,3]. 下面来计算它们的势力指标：

对于对策[5;3,3,1,1,1]，由以上公式(15.4.1)得出：

$$g_1=g_2=1\times\frac{(2-1)!\ (5-2)!}{5!}+6\times\frac{(3-1)!\ (5-3)!}{5!}+1\times\frac{(4-1)!\ (5-4)!}{5!}=\frac{36}{120}$$

$$g_3=g_4=g_5=0\times\frac{(2-1)!\ (5-2)!}{5!}+4\times\frac{(3-1)!\ (5-3)!}{5!}+0\times\frac{(4-1)!\ (5-4)!}{5!}=\frac{16}{120}$$

对于对策[5;3,3,3]，由公式(15.4.1)得出：

$$g_1=g_2=g_3=2\times\frac{(2-1)!\ (3-2)!}{3!}=\frac{2}{6}$$

第三投票者是一个联盟，由3人持相同股组成，落实到每人的势力指标为$\frac{1}{9}$. 我们看到对策一的势力指标为{3/10,3/10,2/15,2/15,2/15}；而后一个对策的Shapley－Shubik势力指标为{1/3,1/3,1/9,1/9,1/9}

显然，2/15 > 1/9，团结在这里不是更有力量，相反，使各自的Shapley－Shubik势力指标变小了. “独立自主”使你的势力增大. 可见，“独立自主”也是一种很好的外交手段，尤其是没有占据主导地位的时候.

例4 联合国安理会的例子

现在的联合国安理会由五个常任理事国(中国、美国、英国、法国、俄罗斯)和十个非常任理事国组成. 每个理事国成员都具有否决权，而十个非常任理事国每两年轮流变动一次. 在安理会中通过一项决议需有九票以上，其中五个常任理事国需投赞成票，再加上至少四个非常任理事国投赞成票.

这一对策系统可记为：

中国国防科技网 http://www.81tech.com

$$[g;a,a,a,a,a,b,b,b,b,b,b,b,b,b,b]$$

根据已知条件，

$$5a+4b=g,\ 4a+10b<5a+4b.$$

由第二个不等式可得 $a>6b$. 令

$$b=1,\ a=7,$$

得

$$g=39$$

对于[39;7,7,7,7,7,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1]这一对策可求得对每个常任理事国的势力指标为0.196 3，而每个非常任理事国的势力指标为0.001 863，请读者自行验算.

你看悖论是多么生动、恢谐和令人机智、聪明地进行思考.

真是不可思议的悖论！也许更不可思议的是我们把悖论作为数学模型. 现实世界千变万化，我们所面对的问题也是千奇百怪的，有些问题有确定的解，有些问题没有确定的解，只有随机性的解答，还有些问题的答案介于确定的与随机性解答之间——混沌解. 悖论作为数学模型，可以是没有解答的，比如“先有鸡还是先有蛋”，社会科学中有一些争论，就是鸡蛋悖论. 而某些重要悖论的出现，恰为科学进步、新概念诞生的催生素. 悖论不但有趣，而且有用. 正如科学家普里斯特所说：“悖论中充满着令人惊奇的内容.”这位年轻的数理逻辑专家1979年号召：应当接受悖论，学会与悖论好好相处.



1. 对于九人对策[7;5,1,1,1,1,1,1,1,1]，试计算每个人的 Shapley – Shubik 势力指标.

2. 现在有一个设想，即将来的安理会组成中，增加德国、日本这两个国家作为常任理事国，具有否决权，这两个国家现在对联合国的经济资助已超过法国和英国. 请您设计将来的安理会所组成的这一对策. 并求得常任理事国和非常任理事国的势力指标.

3. 现在的联合国安理会的组成模式形成于1963年. 在1963年之前，安理会是由五个常任理事国和六个非常任理事国组成，通过一项决议需七票以上，其中五个常任理事国全部投赞成票，再加上至少两个非常任理事国投赞成票.

（提示：对于这一对策，用上面类似的方法可以求得是[27;5,5,5,5,5,1,1,1,1,1,1]，同样可求得1963年之前每个常任理事国的势力指标为0.197 4. 每个非常任理事国的势力指标为0.002 165. 这表明1963年的改革使得安理会理事国成员的势力指标下降了.）

中国国防科技网 http://www.81tech.com

参考文献

[1] 张岱年，方立天. 中华的智慧. 上海：上海人民出版社，1989
[2] 王树禾. 数学聊斋. 北京：科学出版社，2003
[3] 亚里士多德. 物理学. 北京：商务印书馆，1982
[4] 日本数学会.《数学百科辞典》(中译本)，北京：科学出版社，1984
[5] William F. Lucas. 政治及有关模型. 长沙：国防科大出版社，1996