



地信网论坛

BBS.3S001.COM

松散介质力学

赵彭年 编著

地震出版社

1995

目 录

第一章 绪论	(1)
§ 1.1 松散介质力学的任务	(1)
§ 1.2 松散介质力学的研究方法	(2)
第二章 松散介质力学的基本概念	(6)
§ 2.1 一点的应力状态	(6)
§ 2.2 主应力及应力莫尔圆	(10)
§ 2.3 平衡微分方程	(13)
§ 2.4 几何方程及体积应变	(15)
§ 2.5 应变增量与应变率	(19)
§ 2.6 广义虎克定律	(20)
§ 2.7 下标记号与求和约定	(21)
第三章 岩土材料的塑性状态方程	(25)
§ 3.1 材料的基本试验结果	(25)
§ 3.2 岩土材料塑性变形的基本特点与假设	(27)
§ 3.3 莫尔-库仑屈服条件	(29)
§ 3.4 最大塑性功原理及塑性流动法则	(32)
§ 3.5 最大塑性功原理对岩土材料的有效性	(34)
第四章 松散介质极限平衡的滑移线解法	(36)
§ 4.1 引言	(36)
§ 4.2 平面变形问题的应力方程组	(37)
§ 4.3 应力方程组的特征线解法	(39)
§ 4.4 应力方程组的数值积分	(43)
§ 4.5 特殊情况下应力方程组的解法	(48)
§ 4.6 简单滑移线场	(51)
§ 4.7 挡土墙上的土压力	(53)

§ 4.8	边坡的极限荷重及临界坡面形状	(57)
§ 4.9	速度场	(60)
§ 4.10	条形基础极限承载能力	(66)
§ 4.11	纯粘性土体曲线边坡的形状	(68)
§ 4.12	松散介质中井壁的压力	(75)
第五章	松散介质塑性极限分析方法	(85)
§ 5.1	引言	(85)
§ 5.2	虚功率原理	(87)
§ 5.3	塑性极限载荷的上、下限定理	(88)
§ 5.4	边坡的刚体滑动形式	(94)
§ 5.5	垂直边坡的临界高度	(101)
§ 5.6	垂直边坡临界高度上限解的改进	(108)
§ 5.7	边坡临界高度的上限解	(115)
§ 5.8	条形基础承载能力的极限分析	(122)
§ 5.9	纯粘性土垂直边坡临界高度的下限解	(143)
§ 5.10	对极限平衡方法与滑移线方法的评论	(155)
§ 5.11	关于极限分析定理的几个问题	(160)
第六章	地下工程围岩的极限平衡状态	(166)
§ 6.1	巷道围岩弹性应力及位移	(166)
§ 6.2	巷道围岩弹塑性应力及位移	(170)
§ 6.3	二次抛物线型极限曲线的巷道围岩应力及 位移	(175)
§ 6.4	以主应力和为参数的双曲线型极限曲线的 围岩应力及位移	(182)
§ 6.5	三种型式极限曲线极限平衡条件的统一表 达式	(191)
附录	特征线方法	(194)
参考文献	(200)

第一章 绪 论

§ 1.1 松散介质力学的任务

大量的几何尺寸基本属于同一量级的颗粒所构成的介质（砂土、砾石土、碎煤、水泥及其他颗粒状和粉状材料），其物理性质介于固体和液体的中间状态，被称为松散介质或散粒体。

松散介质与固体不同：松散介质的颗粒具有部分流动性，仅在一定范围内能保持其形状。例如，砂堆只有在其自由斜面与水平面之间的角度不超过某一极限值时，才能保持本身的形状，处于平衡状态。这个极限角度称为自然安息角或自然坡角。当斜坡超过自然坡角而有必要防止松散介质坍落时，宜采用挡土墙，此时，砂堆将对挡土墙产生压力。松散介质基本没有抵抗拉伸的能力，或者抗拉强度很低，一般只能在承受压应力的条件下工作。松散介质的抗剪强度随剪切面上的正压力而改变，正压力增加，抗剪强度也增加。松散介质与液体不同：液体具有更大的流动性，没有固定的形状，抵抗剪切力的能力更小。

松散介质分类：一类是颗粒之间不存在粘结力，称为理想松散介质，例如干燥的砂、谷物、碎石等。理想松散介质不具有抗拉强度。另一类是颗粒间有胶结物充填，有粘结力，能保持一定的几何形状，并能承受不大的拉应力，称为粘性松散介质，例如粘土之类的物质。大多数岩石都是依靠其造岩矿物颗粒的粘结力以及能起作用的内摩擦力来抵抗破坏的，因此，也可将岩体介质视为粘性松散介质。

在房屋建筑、桥梁、道路、水工建设、国防及采矿等工程中，经常遇到松散介质力学问题。这主要反映在以下几个方面：

(1) 散粒体极限载荷问题：确定地基的承载能力；研究在自重和外力作用下的边坡的稳定性等。

(2) 散粒体和相邻物体间的作用问题：散粒体对料仓壁的作用；土壤对挡土墙的作用等。

(3) 地下工程围岩稳定分析：散粒体压力理论及围岩的弹塑性应力分析等。

(4) 散粒体动力学：碎矿石的运动规律以及贮料塔放出物料时的受力状态等。

松散介质力学的任务是研究松散介质受力时的极限平衡和运动规律，它的中心问题是确定松散介质的极限破坏载荷。

§ 1.2 松散介质力学的研究方法

松散介质力学是固体力学的一个分支。目前，松散介质力学采用的计算简图主要是整体的连续介质的模型，即认为：松散介质毫无空隙地充满了其所占有的空间。实际上，松散介质的颗粒间有空隙存在，但是，这些空隙的几何尺寸一般不会超过颗粒本身的空间量级，与被研究范围的尺寸相比，极其微小，可以忽略不计。这样就可以认为，松散介质在其整个几何空间内是连续的。

如果要对松散介质进行全面的静力学分析，那么在加载过程中它应当满足以下条件：

(1) 松散介质内每一点处，应该处于平衡状态；

(2) 松散介质内的应力状态，必须与作用在其上的外力保持平衡；

(3) 在一点发生的变形必须与其周围所有点的变形相容，即不发生断裂或重叠；

(4) 每一点处的应力、应变分量必须满足该松散介质的应力-应变关系；

(5) 在松散介质的每一点处，不违反该松散介质的破坏准则（见 § 3.3）。

应用象有限元方法一类的数值技术，能够求得整个散粒体内的应力和应变状态，但计算是很复杂的。

松散介质力学只考虑松散介质最终将达到的破坏状态。设散粒体上作用着某一载荷，当载荷较小时，散粒体将不会发生变形流动，而处于静平衡状态。当载荷增加到一定限度时，散粒体将开始变形流动。松散介质的这种由静平衡到动平衡的过渡状态，称之为极限平衡状态，导致这种极限平衡状态的载荷，称为极限载荷。极限平衡理论只研究散粒体最后达到破坏状态时所能承受外力的能力，而不考虑达到这种状态以前的变形过程。由此可见，极限平衡理论的分析方法比上面所列的全面分析方法简单。

1773年，极限平衡理论的奠基人库仑（C.A.Coulomb）陈述了极限平衡的基本原理，并将其应用于被水平面限制的填土对光滑竖直挡土墙的土压力问题。1857年，朗肯（W.J.M.Rankine）研究了倾斜平面下半无限松散介质的极限平衡问题。这是松散介质极限平衡理论发展的初始阶段。

极限平衡理论的进一步发展按两个方向进行。第一个方向属于简化的极限平衡理论，它假定存在某种简单形状的滑移面，散粒体沿着滑移面滑动而发生破坏。这些滑移面的形状，可以是平面、棱柱面或圆柱面等。从而，可以用初等方法求解许多重要的实际问题。在这个简化理论中，每个问题的研究，被归结为寻找所选形状滑移面的最不利位置。尽管简化理论缺乏充分的根据，但是它仍然能给出可接受的结果。所以，辅助于可利用的图表的简化理论，至今仍被工程界所广泛使用。

遵循朗肯思想的第二个方向，试图建立严格的极限平衡理论。1903年，德国学者克特尔（F.Kötter）建立了散粒体的塑性平衡方程式，为极限平衡理论朝严密的数学理论发展开辟了道路。此后，不少学者继续在这方面进行研究，解决了一些个别的问题，如普朗特尔（L.Prandtl）、诺沃托尔采夫（В.И.Новоторцев）、卡考（A.Caquot）等。

前苏联学者索科洛夫斯基 (В.В.Соколовский) 首先应用了滑移线 (特征线) 法来解塑性平衡方程式, 成功地解决了一系列重要的散粒体塑性平衡问题, 并于 1942 年出版了著名的《松散介质静力学》一书 (1960 年该书出版了第三版), 从而建立了完整的松散介质塑性平衡理论。此后, 戈卢什克维奇 (С.С.Голушквич) 提出了积分极限平衡方程的图解法, 别列赞采夫 (В.Г.Березанцев) 研究了轴对称的完全极限平衡问题, 继续发展了这方面的理论。

但是, 索科洛夫斯基松散介质静力学理论的应用有一定局限性。这是因为, 它忽略了松散介质在这种静力许可应力场下能否真正变形滑动的问题。关于确定极限载荷时必须同时考虑静平衡和动平衡的概念, 首先出现在金属材料的塑性理论中。英国学者希尔 (R.Hill) 对极限平衡下了定义。此后, 普拉格尔 (W.Prager) 和德鲁克尔 (D.C.Drucker) 把这一概念用于土体稳定分析, 并建立了应力场和应变速度场之间的关系式, 希尔德 (R.T.Shield) 推导了塑性流动方程式。

值得注意的, 正如斯潘塞尔 (A.J.M.Spencer) 所指出的: 基于库仑假设的理论, 在土力学中已广泛被接受, 并且在许多情况下, 似乎以满意的方式决定了在散粒状介质中的应力场。但是, 决定散粒状介质流动与变形的方程陈述, 是更困难的和有争论的问题。甚至在平面变形的情况下, 许多理论已被建议, 但没有一个被认为是一般情况下都是可应用的 (即不同的理论适用于不同情况)。

用滑移线解法可以求得松散介质极限平衡状态的应力场、变形速度场及相应的极限载荷。但是这种精确解法, 除了很简单的情況外, 很少能获得精确解答。一般情况下, 需用复杂的数值积分得到近似解。极限平衡理论的另一严格解法, 是塑性极限分析方法。这种方法不考虑极限状态下松散介质中的真实应力场及变形速度场, 而是直接求得塑性极限载荷。一般来讲, 可找到塑

性极限载荷的下限值及上限值。1975年陈惠发(W.F.Chen)出版了有影响的专著《极限分析与土的塑性》，书中详细论述了应用于土力学的塑性极限分析原理，并研究了广泛的重要课题。

松散介质的另一种计算模型为粒状介质，即由相互接触的、形状规则的固体颗粒组成的介质。这种介质可以是无侧压和有侧压的。颗粒的相互作用服从概率法则。近年来，有人着手用概率法分析散粒体力学问题，并取得了一些成果。

实验方法是研究松散介质力学的重要手段，它不仅能给出松散介质平衡破坏形式的一般概念，也能给出确定的且相当可靠的定量结果。实验法即能直接为工程服务，又能检验理论分析，并为理论计算提出必要的基本参数数据。在1977年克列因(Г.К.Клейн)所发表的《散粒体结构力学》书中，介绍了前苏联学者所进行的很多试验方法与试验结果。

第二章 松散介质力学的基本概念

第一章已简要阐述了松散介质力学的任务及其研究方法，现以边坡稳定问题为例，从工程问题中引出极限平衡概念。

边坡体在自重力、地下水压力、地震力及外部载荷作用下，其内部将产生一定的应力状态。按照边坡体材料的物理性质，这个应力状态对应着确定的应变状态。无论是评定自然边坡或现存的人工边坡，或是在一定的工程地质和工作条件下，设计新的边坡，稳定性分析解决的是边坡体的最终破坏条件。依赖于边坡体的材料性质，边坡体内的整体应力分布控制了边坡的变形、运动和破坏区的发展。要对边坡进行完整的力学分析，必须先要求得其内的应力、应变分布规律。但是，由于地质构造、材料性质和工作条件的复杂性，很难对边坡进行严格全面的力学分析。从工程应用的观点，人们最感兴趣的，是边坡濒临破坏的极限平衡状态。例如，在给定的工作环境条件下，当坡高一定时，最大的坡角是多少？

对松散介质极限平衡状态进行力学分析的方法有：简化的极限平衡方法、滑移线解法、塑性极限分析方法。工程技术人员对简化的极限平衡方法比较熟悉。松散介质力学主要研究后两种方法。

为了理解、运用和发展松散介质力学分析的方法，在力学基础知识方面，我们需要做一些准备。在材料力学中，虽然大家已经了解了变形体力学的一些基本概念，如应力、应变和弹性虎克定律等，但要对二维或三维散粒体的极限平衡状态进行力学分析，还需要一些较系统的变形体力学知识。本章首先介绍松散介质力学的一些基本概念（也适用于一般连续介质），为以后的学习与应用打好基础。

§ 2.1 一点的应力状态

材料力学中已经建立了通过受力物体一点的某个微面上的应

力矢量概念。这里应指出，材料力学中处理的是连续、均匀的材料模型；而边坡稳定分析，应区分两种情况：

(1) 对均质边坡的力学分析，一般采用连续介质力学模型，即认为边坡体材料为均匀连续的。但对于岩土材料，即使采用连续介质力学模型，材料也绝非是连续均匀的。例如，土体是颗粒状的多相材料，而岩体中充满了节理、裂隙等。因此在建立应力概念时，微面的含意应理解为：相对于工程地质力学问题来讲，微面很小，以致可以用数学分析的方法来研究；但为要保持材料的统计宏观性质不变，微面又不能取为无限小。对于土坡及结构面不够发育的或松散的岩体边坡，可用连续介质力学方法处理。

(2) 对于由象断层、节理和层面等结构面控制的岩体边坡，应当用不连续介质的分析方法来研究其稳定问题。

为了分析物体内一点 P 的应力状态，即通过 P 点的各个微面上应力矢量的大小和方向，我们在 P 点从物体内部取出一个微小的平行六面体，它的棱边平行于坐标轴（图 2.1）。将每一个面上的应力矢量，向坐标轴投影，得一个正应力分量和两个剪应力分量。正应力用 σ 表示，为表明这个正应力的作用面和作用方向，加上一个坐标角码，例如正应力 σ_x 作用在垂直于 x 轴的面上，同时也是沿着 x 轴的方向。剪应力用 τ 表示，加上两个坐标角码，前一个角码表明作用面垂直于哪一个坐标轴，后一个角码表明作用方向沿着哪一个坐标轴，例如剪应力 τ_{xy} 表示作用在垂直于 x 轴的面上而沿着 y 轴方向。如果某一个微面上的外法线是沿着坐标轴的正方向，那么这个微面上的应力分量就以沿坐标轴反方向为正；相反，如果某一个微面上的外法线是沿着坐标轴的反方向，那么这个微面上的应力分量就以沿坐标轴正方向为正。图 2.1 中所示的应力分量全部是正的。对于正应力来说，压应力为正，拉应力为负（注意，材料力学中以拉应力为正，压应力为负；而岩土力学中通常存在压应力状态，所以一般以压应力为正，拉应力为负）。

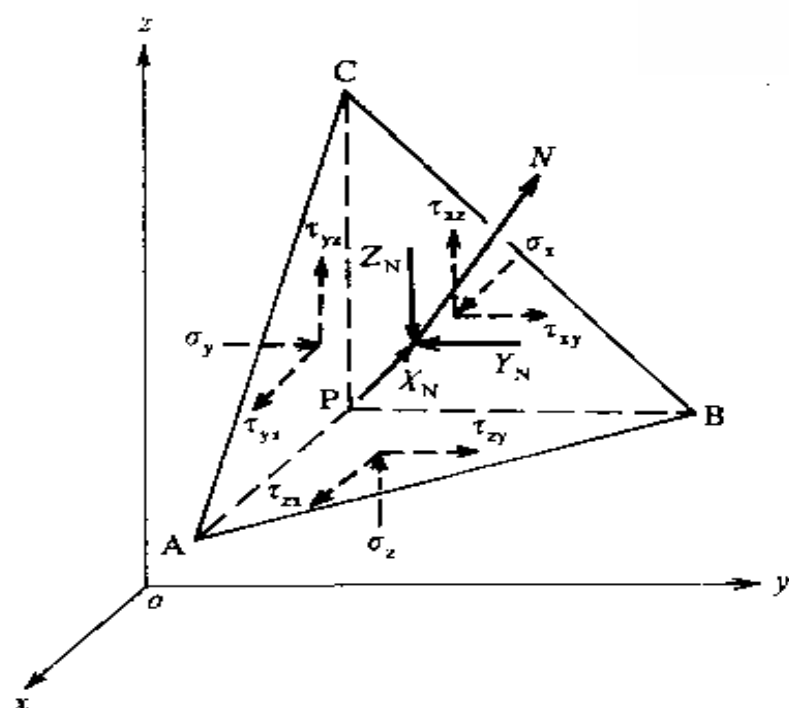


图 2.2 斜微面上的应力

Y_N 、 Z_N 代表。根据四面体的平衡条件 $\sum F_x = 0$ ，得

$$-X_N \Delta S + \sigma_x l \Delta S + \tau_{yx} m \Delta S + \tau_{zx} n \Delta S - X \Delta V = 0$$

其中 X 代表单位体积材料所受的体力矢量在 x 轴反方向上的投影。由上式得

$$X_N + X \frac{\Delta V}{\Delta S} = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n$$

当斜面 ABC 趋近于 P 点时，由于 ΔV 是比 ΔS 更高一阶的微量，所以 $\Delta V / \Delta S$ 趋于零。于是即得出式(2.1.2)中的第一式。其余二式可分别由平衡条件 $\sum F_y = 0$ 及 $\sum F_z = 0$ 同样地求出：

$$\left. \begin{aligned} X_N &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \\ Y_N &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \\ Z_N &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{aligned} \right\} \quad (2.1.2)$$

特殊的情况下，如果斜面 ABC 是物体的边界面，则 X_N 、 Y_N 、 Z_N 成为物体表面每单位面积上所受的面力矢量，在坐标轴反方向上的投影 \bar{X} 、 \bar{Y} 、 \bar{Z} 。因此有

$$\left. \begin{aligned} \bar{X} &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \\ \bar{Y} &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \\ \bar{Z} &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{aligned} \right\} \quad (2.1.3)$$

这就是物体的应力边界条件，它表明应力分量的边界值与面力分量 \bar{X} 、 \bar{Y} 、 \bar{Z} 之间的关系。

假设微面 ABC 上的压应力为 σ_N ，则由投影关系可得

$$\sigma_N = X_N l + Y_N m + Z_N n$$

将式(2.1.2)代入，即得

$$\begin{aligned} \sigma_N &= \sigma_x l^2 + \tau_{xy} lm + \tau_{xz} ln + \tau_{yx} ml + \sigma_y m^2 \\ &\quad + \tau_{yz} mn + \tau_{zx} nl + \tau_{zy} nm + \sigma_z n^2 \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

假设两个方向 S 、 T ，使 NST 形成右手直角坐标系。在坐标系 NST 中，也有 6 个应力分量 σ_N 、 σ_S 、 σ_T 、 τ_{ST} 、 τ_{TN} 、 τ_{NS} 。对于应力分量 σ_S 、 σ_T 、 \dots 、 τ_{NS} 也有类似于式(2.1.4)的公式。于是，式(2.1.4)等表示，当坐标系旋转时，两个坐标系下应力分量的变换公式。如果一个量（一点的应力状态），在任一坐标系下用 9 个分量（应力分量）决定，当坐标系旋转时，它的分量按照类似于式(2.1.4)的关系变换，那么，这个量就叫做二阶笛卡尔张量。因此，我们有应力张量，它可表示为

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

§ 2.2 主应力及应力莫尔圆

假设经过物体任一点 P 的某个微面上的剪应力等于零，则该微面上的正应力称为在 P 点的一个主应力，该微面称为在 P 点的一个应力主平面，而该微面的法线方向，称为在 P 点的一个应力主方

向。假定在图 2.2 中的斜微面 ABC 的法线方向是一个应力主方向，此时可用主应力 σ （以压为正）表示该微面上的应力矢量。于是，该微面上的应力矢量在坐标轴反方向上的投影为

$$X_N = \sigma l, \quad Y_N = \sigma m, \quad Z_N = \sigma n$$

将式(2.1.2)代入，整理后得

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma)l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n &= 0 \\ \tau_{xy}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{zy}n &= 0 \\ \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (\sigma_z - \sigma)n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

此外还有关系式

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (b)$$

式(a)可看成 l 、 m 、 n 的齐次线性方程组。由式(b)可见， l 、 m 、 n 不能全等于零，因此式(a)的系数行列式应当等于零，即

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

将此行列式展开，并利用式(2.1.1)，可得出 σ 的三次方程

$$\begin{aligned} & \sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\sigma^2 + \left(\sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x \right. \\ & \left. + \sigma_x\sigma_y - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 - \tau_{xy}^2 \right)\sigma - \left(\sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma_x\tau_{yz}^2 \right. \\ & \left. - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 + 2\tau_{yz}\tau_{zx}\tau_{xy} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

从代数学可知，实系数的三次代数方程式(2.2.1)至少有一个实根，因而至少存在一个主应力，把它称为 σ_2 。利用式(a)中的任意两式及式(b)，即可求得与主应力 σ_2 相应的应力主方向的方向余弦 l_2 、 m_2 、 n_2 。求出这个主方向以后，将 z 坐标轴放在这个主方向上，则 $\sigma_z = \sigma_2$ ，而 $\tau_{zx} = \tau_{xz} = 0$ ， $\tau_{zy} = \tau_{yz} = 0$ 。

下面，我们考虑通过 P 点的且与 z 轴（ σ_2 方向）平行的微

面上的应力。对于与 z 轴平行的平面，其法线的方向余弦 $n=0$ 。这时由式(2.1.2)，有

$$\left. \begin{aligned} X_N &= \sigma_x l + \tau_{yx} m \\ Y_N &= \tau_{xy} l + \sigma_y m \\ Z_N &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.2.2)$$

由式(2.2.2)可见，与 z 轴平行的微面上的应力，只与 σ_x 、 τ_{xy} 、 σ_y 有关，而与 σ_z 无关。这里，与材料力学中的平面应力状态 ($\sigma_z=0$) 的情况完全类似。因此，现在可直接引用平面应力状态应力莫尔圆的图示法。

我们考察图 2.1 中平行六面体的俯视图，如图 2.3a 所示。

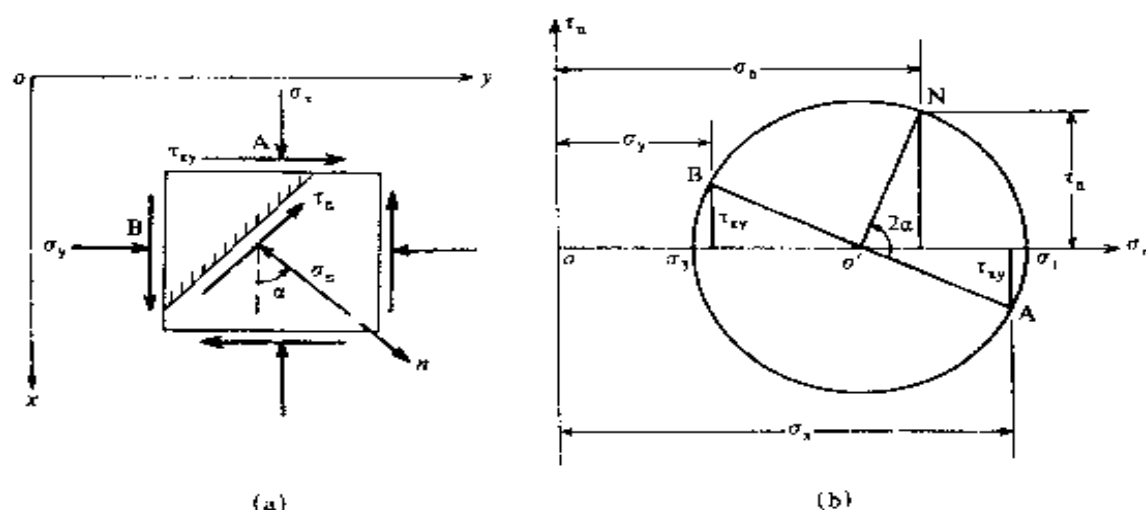


图 2.3 (a) 用于莫尔圆的应力符号规定；(b) 应力莫尔圆

现在，取平行于 z 轴的微面，其外法线方向为 n 。它上面的正应力 σ_n 以压为正，剪应力 τ_n 以企图使微元体逆时针转动时为正（注意，这里的 σ_n 、 τ_n 正方向规定，均与材料力学中平面应力状态斜面上的正应力及剪应力的正方向规定相反）。斜微面上应力的莫尔表示法的意义为：外法线 n 与 x 轴成 α 角的微面上的应力，可由在莫尔应力圆上代表外法线为 x 轴方向的微面上的应力点 A ，沿圆周转过 2α 圆心角达到的 N 点的坐标表示。且

由 A 到 N 的转向与由 x 到 n 的转向相同。

由图 2.3b 可断定有两个主应力 σ_1 、 σ_3 ，作用在互相垂直而且垂直于图示平面的两个主平面上。这就证明：在物体内的任意一点，一定存在三个互相垂直的应力主平面以及对应的三个主应力。

在一定的应力状态下，物体任一点的主应力不会随坐标系的改变而改变（尽管应力分量随着坐标系而变化），所以，方程式(2.2.1)的系数不会随坐标系而改变。于是，不论坐标系如何改变，下列表达式的值保持不变：

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ J_2 &= \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2 - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x - \sigma_x \sigma_y \\ J_3 &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 + 2\tau_{yz} \tau_{zx} \tau_{xy} \end{aligned} \right\} (2.2.3)$$

J_1 、 J_2 、 J_3 称为应力张量的不变量。

§ 2.3 平衡微分方程

在物体内的任意一点 P，取一微小平行六面体，它的棱边平行于坐标轴，棱边长度 $\overline{PA} = dx$ ， $\overline{PB} = dy$ ， $\overline{PC} = dz$ （图 2.4）。一般来说，应力分量是位置坐标的函数。如果作用在平行六面体后面上的正应力是 σ_x ，由于坐标 x 的微小改变，作用在前面上的正应力应为 $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$ ，其余类推。 X 、 Y 、 Z 表示单位体积材料所受体力矢量在坐标轴反方向上的投影，称为体力分量。

以 x 轴为投影轴，列出平衡方程 $\sum F_x = 0$ ，得

$$\begin{aligned} & - \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dydz + \sigma_x dydz - \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dzdx \\ & + \tau_{yx} dzdx - \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dxdy + \tau_{zx} dxdy \\ & - X dxdydz = 0 \end{aligned}$$

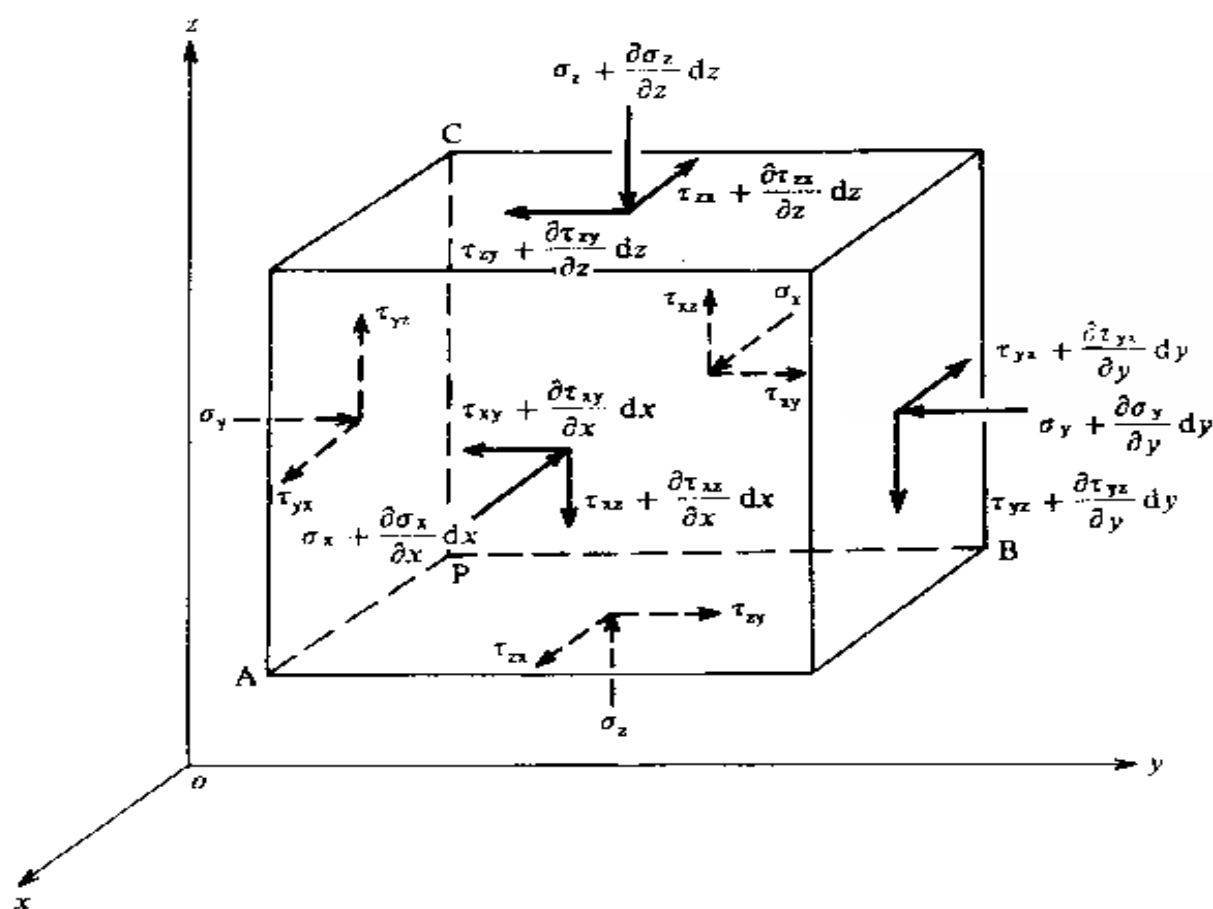


图 2.4 平衡微分方程的推导

由其余两个平衡方程 $\sum F_y = 0$ 和 $\sum F_z = 0$ ，可以得出与此相似的两个方程。将这三个方程约简，得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.3.1)$$

这就是平衡微分方程，它表明应力分量与体力分量之间的关系式。由式(2.1.1)及式(2.3.1)可见，三个平衡微分方程中包含了 6 个未知函数。因此，决定应力分量的问题是超静定的，还必须考虑形变和位移，才能解决问题。

§ 2.4 几何方程及体积应变

在外力作用下，物体内各点的位置要发生变化。设物体中任意一点 P ，变形前坐标为 x, y, z (图 2.5)。变形后它移到点 P_1 ，坐标为 x_1, y_1, z_1 。矢量 $\overrightarrow{PP_1}$ 是物体变形时点 P 的位移，其在 x, y, z 轴反方向上的投影，用 u, v, w 表示，称为位移分量。因此，有关系式

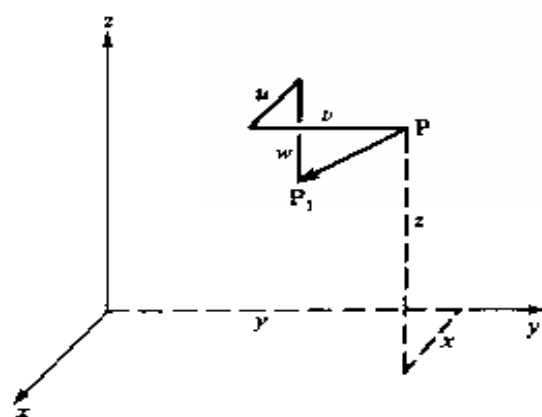


图 2.5 位移分量

$$x = x_1 + u, \quad y = y_1 + v, \quad z = z_1 + w$$

由于物体中各点的位移是不同的，因此位移分量是坐标的函数，

$$u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z), \quad w = w(x, y, z)$$

如果物体各点发生位移后，仍保持各点间初始状态的相对位置，则物体只发生了刚体位移（移动和转动）；如果物体各点发生位移后，改变了各点间初始状态的相对位置，则物体同时也发生了形状变化。

经过物体内任意一点 P ，沿 x 轴、 y 轴的方向取两个微小长度的线段， $\overline{PA} = dx$ ， $\overline{PB} = dy$ (图 2.6)。我们现在研究，当物体变形时，线段 PA 的相对伸缩及线段 PA 与 PB 之间直角的改变。

假定物体受力后， P, A, B 三点分别移动到 P_1, A_1, B_1 三点。在图 2.6 中，只画出了 P_1, A_1, B_1 三点在 xy 面上的投影。也就是说，由于我们考虑的位移是微小的，位移分量 w 对线段 PA 的相对伸缩及直角 $\angle APB$ 的改变的影响可以忽略。

首先求线段 PA 的相对伸缩，把它用位移分量表示出来。假设点 P 在 x 轴反方向的位移分量为 u ，则点 A 在 x 轴反方向的

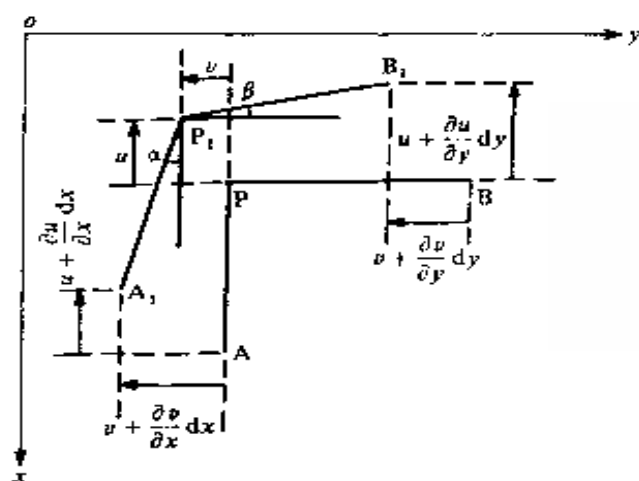


图 2.6 几何方程的推导

位移分量，由于 x 坐标的变化，将是 $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ 。我们将 x 方向线段 PA 的相对伸缩表示为 ϵ_x ，它的定义为

$$\epsilon_x = \frac{\overline{P_1A_1} - \overline{PA}}{\overline{PA}} \quad (a)$$

ϵ_x 称为 x 方向的正应变。由上式可知，正应变以缩短时为正，伸长时为负。同样，由于位移是微小的，可忽略位移分量 v 对线段 PA 伸缩的影响，则有

$$\epsilon_x = \frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) - u}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

现在来求线段 PA 与 PB 之间直角的改变，将它用位移分量表示出来。假设点 P 在 y 轴反方向的位移分量为 v ，则点 A 在 y 轴反方向的位移分量将是 $v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$ ，因此线段 PA 的转角

$$\alpha = \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx\right) - v}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

同样可得线段 PB 的转角

$$\beta = \frac{\partial u}{\partial y}$$

于是，线段 PA 与 PB 之间的直角的改变

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

γ_{xy} 称为 x 、 y 方向的剪应变，由上式可知，剪应变以直角增大时为正，减小时为负（注意：这里正应变及剪应变的正负号规定，与材料力学中的线应变及剪应变的正负号规定相反）。

这样，可得出应变分量与位移分量应当满足的下列 6 个几何方程：

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (2.4.1)$$

上面已导出式(2.4.1)的第一式及第六式，其余四式可用同样的方法导出。

下面利用坐标变换方法，讨论斜方向上的正应变。将原直角坐标系 xyz 绕坐标原点 O 转动，得新直角坐标系 $x'y'z'$ ，令 x' 轴方向为指定的斜方向。以 u' 、 v' 、 w' 表示位移矢量在新坐标轴反方向上的投影。 x' 轴对原坐标系的方向余弦以 $l = \cos(x', x)$ ， $m = \cos(x', y)$ ， $n = \cos(x', z)$ 表示。这时，从一点在两个坐标系里的坐标的变换关系式

$$x = x' \cos(x', x) + y' \cos(y', x) + z' \cos(z', x)$$

$$y = x' \cos(x', y) + y' \cos(y', y) + z' \cos(z', y)$$

$$z = x' \cos(x', z) + y' \cos(y', z) + z' \cos(z', z)$$

有

$$l = \frac{\partial x}{\partial x'}, \quad m = \frac{\partial y}{\partial x'}, \quad n = \frac{\partial z}{\partial x'}$$

另外，对于坐标变换，有

$$u' = ul + vm + wn \quad (b)$$

因为只考虑微小的应变，所以两个或三个应变分量的乘积，跟应变分量自身相比，可以略去不计，从而得到

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (2.4.3)$$

将几何方程式(2.4.1)的前三式代入，得

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.4.4)$$

体积应变 e 以体积压缩为正，体积膨胀为负。

§ 2.5 应变增量与应变率

在变形过程中，物体各点都处于运动状态。在观察时刻 t ，占据空间点 (x, y, z) 的质点的速度矢量，在 x, y, z 轴反方向上的投影以 $v_x(x, y, z, t)$ 、 $v_y(x, y, z, t)$ 、 $v_z(x, y, z, t)$ 表示。经过无限小的时间间隔 dt ，各质点相对于其在瞬时 t 的位置产生了位移分量

$$du = v_x dt, \quad dv = v_y dt, \quad dw = v_z dt$$

由于 dt 是微量，这些位移也是微量，它们所引起的应变称为应变增量，即

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_x &= \frac{\partial v_x}{\partial x} dt, \quad d\varepsilon_y = \frac{\partial v_y}{\partial y} dt, \quad \dots \\ d\gamma_{xy} &= \frac{\partial v_y}{\partial x} dt + \frac{\partial v_x}{\partial y} dt, \quad \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.5.1)$$

这些应变增量除以 dt ，得到应变率分量：

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_x &= \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \dot{\varepsilon}_y = \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad \dots \\ \dot{\gamma}_{xy} &= \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}, \quad \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.5.2)$$

下面，我们考虑应力分量与应变率分量乘积

$$D = \sigma_x \dot{\varepsilon}_x + \sigma_y \dot{\varepsilon}_y + \sigma_z \dot{\varepsilon}_z + \tau_{yz} \dot{\gamma}_{yz} + \tau_{zx} \dot{\gamma}_{zx} + \tau_{xy} \dot{\gamma}_{xy} \quad (2.5.3)$$

的物理意义。假设在微小六面体（单元体）的左、右两面上作用有应力 σ_y （图 2.7a），那么，单元体左、右两面上的内力为 $\sigma_y dx dz$ 。假定单元体在 y 方向的缩短应变率为 $\dot{\epsilon}_y$ ，于是，在单位时间内，左、右两面相互接近的距离为 $\dot{\epsilon}_y dy$ 。这样，单元体左、右两面上的内力所做的功率为 $\sigma_y dx dz \dot{\epsilon}_y dy$ 。那么，在单位体积材料中，应力 σ_y 在应变率 $\dot{\epsilon}_y$ 上的功率为 $\sigma_y \dot{\epsilon}_y$ 。同理，可得出 $\sigma_x \dot{\epsilon}_x$ 、 $\sigma_z \dot{\epsilon}_z$ 两项的物理意义。另外，假定单元体的左、右、上、下四面上作用有剪应力 $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ 。若单元体的左面不动，在单位时间内，右面相对于左面向下的位移为 $\dot{\gamma}_{yz} dy$ 。右面上的剪切内力为 $\tau_{yz} dx dz$ 。因此，剪切内力做的功率为 $\tau_{yz} dx dz \dot{\gamma}_{yz} dy$ 。在单位体积材料中，剪应力 τ_{yz} 在剪应变率 $\dot{\gamma}_{yz}$ 上的功率为 $\tau_{yz} \dot{\gamma}_{yz}$ 。同理，可得 $\tau_{zx} \dot{\gamma}_{zx}$ 及 $\tau_{xy} \dot{\gamma}_{xy}$ 两项的物理意义。

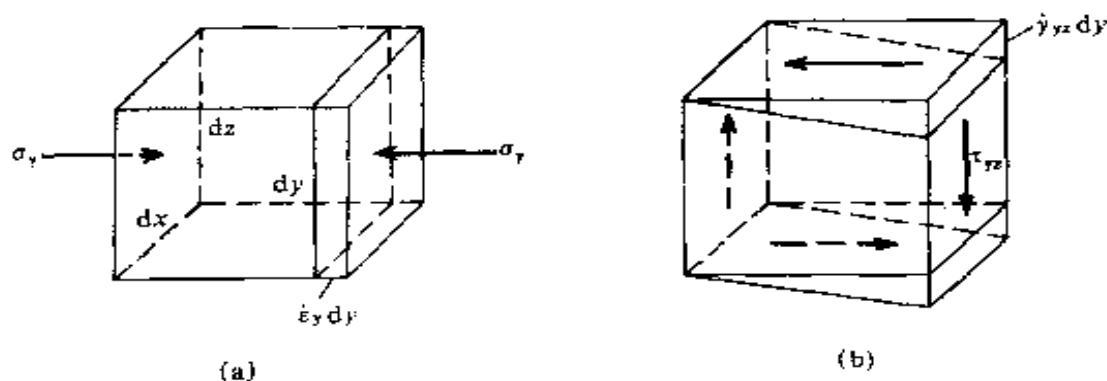


图 2.7 应力功率

因此，式(2.5.3)中 D 的物理意义是：单位体积材料中，应力在应变率上的功率。

§ 2.6 广义虎克定律

当应力足够小时，材料处于弹性状态，由材料力学知，各向同性材料应力、应变之间的广义虎克定律为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)], & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \end{aligned} \right\} \quad (2.6.1)$$

其中 E 、 G 、 μ 分别为材料的杨氏弹性模量、剪切弹性模量及泊松比，且有

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad (2.6.2)$$

当物体处于弹性状态时，共有 15 个未知函数：6 个应力分量， σ_x 、 σ_y 、 σ_z 、 τ_{yz} 、 τ_{zx} 、 τ_{xy} ；6 个应变分量， ε_x 、 ε_y 、 ε_z 、 γ_{yz} 、 γ_{zx} 、 γ_{xy} ；3 个位移分量， u 、 v 、 w 。这 15 个未知函数应当满足 15 个基本方程：3 个平衡微分方程式(2.3.1)；6 个几何方程式(2.4.1)；6 个物理方程式(2.6.1)。

假定物体的边界面由两部分组成：在一部分上，给定位移分量；在另一部分上，给定面载荷分量。在位移边界上，位移分量满足位移边界条件

$$u = u_s, \quad v = v_s, \quad w = w_s \quad (2.6.3)$$

其中 u_s 、 v_s 、 w_s 为在位移边界上的已知函数。在应力边界上，应力分量应满足应力边界条件式(2.1.3)。

解决上述的边界值问题，构成了线弹性力学的主要研究内容。

§ 2.7 下标记号与求和约定

为了简化书写方程和基本方程的推导过程，引入下述的下标记号与求和约定。

用 $x_i (i=1, 2, 3)$ ，即 x_1 、 x_2 、 x_3 表示 x 、 y 、 z 坐标；
 $u_i (i=1, 2, 3)$ ，即 u_1 、 u_2 、 u_3 表示 u 、 v 、 w 位移分量；
 $X_i (i=1, 2, 3)$ ，即 X_1 、 X_2 、 X_3 表示 X 、 Y 、 Z 体力分量；

$\bar{X}_i (i=1, 2, 3)$, 即 $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3$ 表示 $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ 面力分量;

$n_i (i=1, 2, 3)$, 即 n_1, n_2, n_3 表示 l, m, n 方向余弦,

用 $\sigma_{ij} (i, j=1, 2, 3)$ 表示矩阵

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

即应力张量。当 i 及 j 取确定值时, σ_{ij} 也表示某一个应力分量。用 $\varepsilon_{ij} (i, j=1, 2, 3)$ 表示矩阵

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

即应变张量。

对于偏导数, 用逗号“,”表示求偏导数运算, 例如:

$$u_{i,j} \equiv \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad u_{2,3} \equiv \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \equiv \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\sigma_{ij,k} \equiv \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k}, \quad \sigma_{12,3} \equiv \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_3} \equiv \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z}$$

求和约定的意义: 当在一项中同一个下标出现两次时, 则对此下标从 1 到 3 求和; 并限定在同一项中, 同一个下标不能出现三次或三次以上。例如,

$$X_i u_i \equiv \sum_{i=1}^3 X_i u_i = X_1 u_1 + X_2 u_2 + X_3 u_3 = Xu + Yv + Zw$$

$$\varepsilon_{ii} \equiv \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$\sigma_{j i, j} \equiv \sum_{j=1}^3 \sigma_{j i, j} = \sigma_{1i, 1} + \sigma_{2i, 2} + \sigma_{3i, 3}$$

求和下标，可任意变换字母而不影响求和，因此又叫做哑指标。例如

$$a_i b_i c_j = a_n b_n c_j$$

有了下标记法及求和约定后，可以把很多式子的书写加以简化。例如，平衡方程式(2.3.1)，可写成一个式子：

$$\sigma_{j i, j} + X_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.7.1)$$

应力边界条件式(2.1.3)可记为

$$\bar{X}_i = \sigma_{j i} n_j \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.7.2)$$

几何方程式(2.4.1)可记为

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i, j} + u_{j, i}) \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.7.3)$$

例如，

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_x = \frac{1}{2} (u_{1, 1} + u_{1, 1}) = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{1}{2} (u_{1, 2} + u_{2, 1}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial x} \right)$$

下面，推导广义虎克定律的下标记号表达式。由式(2.6.1)及式(2.6.2)，有

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [(1 + \mu)\sigma_x - \mu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)] = \frac{\sigma_x}{2G} - \frac{3\mu}{E} \sigma$$

其中，

$$\sigma = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

表示平均正应力。另外， $\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{2G}$ 。引入一个特殊的符号 δ_{ij} ，它的定义为

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{当 } i = j \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } i \neq j \text{ 时} \end{cases}$$

于是，广义虎克定律可表示为

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{2G} - \frac{3\mu}{E} \sigma \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.7.4)$$

例如，

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_x = \frac{\sigma_{11}}{2G} - \frac{3\mu}{E} \sigma \delta_{11} = \frac{\sigma_x}{2G} - \frac{3\mu}{E} \sigma$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{\sigma_{12}}{2G} - \frac{3\mu}{E} \sigma \delta_{12} = \frac{\tau_{xy}}{2G}$$

第三章 岩土材料的塑性状态方程

第二章已经讨论了松散介质力学中的一些基本概念，并建立了线弹性力学的基本方程和边界条件，这为对物体进行弹性分析做好了一切准备。但对于散粒体，人们最感兴趣的是极限平衡问题。当岩土材料即将发生破坏时，它们早已不服从弹性虎克定律的约束，弹性力学的分析方法已无能为力。为此，需要对超出弹性状态范围的岩土材料的力学特性进行分析。此时材料所处的状态称为塑性状态。本章的主要内容，即是研究适用于岩土材料力学分析的最基本的塑性状态下所必须满足的条件——塑性状态方程。

§ 3.1 材料的基本试验结果

为考察材料在塑性状态的力学特性，首先回顾材料力学中所介绍的金属材料的简单拉伸试验结果。图 3.1 为在室温、缓慢加载条件下，低碳钢标准试件拉伸的应力-应变关系曲线示意图。图 3.1 中，应力与应变成正比的直线段最高点所对应的应力，称为比例极限。超过比例极限后，应力与应变之间的关系不再是直线，但变形仍然是弹性的，即解除应力后变形将完全消失。材料只出现弹性变形的应力的最高值，称为弹性极限。当应力超过弹性极限，继续增加到某一数值 σ_s 时，应变有非常明显的增加，而应力基本保持不变。我们把这种应力基本保持不变，而应变显

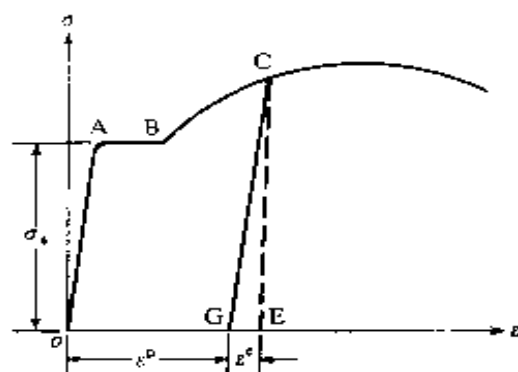


图 3.1 低碳钢的应力-应变曲线

而应力基本保持不变。我们把这种应力基本保持不变，而应变显

着增加的现象，称为屈服，而将 σ_s 值称为材料的屈服极限。通常材料的比例极限、弹性极限、屈服极限相差不大，工程上不加区分，均以 σ_s 表示。以 ε_s 值表示对应于弹性极限的应变，则低碳钢材料屈服阶段的应变值可达到 $10\varepsilon_s$ — $15\varepsilon_s$ 。

在图 3.1 中，当加载超过弹性极限以后达到任一点 C 时，此时若卸载，应力应变点将沿着接近平行于 OA 线的 CG 线变化。完全卸载后，原来 C 点处的应变有一部分已经恢复(消失)，另一部分是不能恢复的残余应变。已经恢复的应变称为弹性应变，以 ε^e 表示；不能恢复的残余应变称为塑性应变，以 ε^p 表示。用 ε 表示 C 点的总应变，有

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (3.1.1)$$

这时，材料处于弹塑性变形阶段。

如果材料从 G 点重新受拉伸，应力应变点将沿 GC 线变化，直至应力超过 C 点的应力后，才会发生新的塑性变形。材料经过以前的塑性变形，而使现时的弹性极限提高了，这种现象称为应变强化。

下面分析岩土类材料的基本试验结果。图 3.2 示出了岩土材料典型的应力-应变曲线，它可以代表：①土的简单剪切试验，此时横坐标为剪应变 γ ，纵坐标为剪应力 τ ；②土的三轴压缩试验，此时横坐标为轴向应变 ε_1 ，纵坐标为主应力差 $\sigma_1 - \sigma_3$ ；③岩体不连续面的抗剪试验，此时横坐标为剪切位移 u ，纵坐标为剪应力。在进行剪切试验时，受剪面上的法向正应力保持不变。

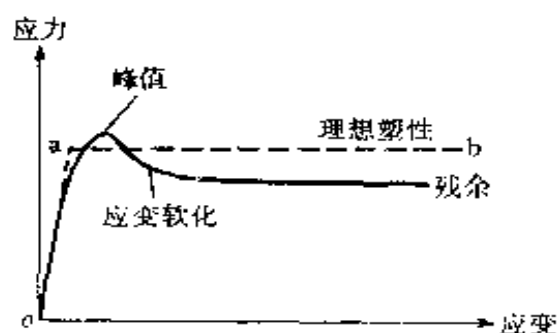


图 3.2 岩土材料的应力-应变曲线

当应变非常小时，试件的行为是弹性的，应力随应变直线地

增加，以后，应力-应变关系呈曲线变化，在曲线的顶点，应力达到它的峰值。在此之后，继续产生应变所需要的应力急速下降，发生应变软化现象，然后平缓下来，停留在称为残余应力的常值上。

以后的理论分析，将忽略应力-应变关系的软化特性，而以虚线所示的两段直线代替应力-应变的真实曲线，显示这种在常应力之下，可发生塑性流动特性的假定材料，称为理想弹塑性材料。在图 3.2 中，斜线 oa 段，代表理想弹性性质，而水平线 ab 段表示理想塑性性质，即材料在常应力下发生屈服。人们可注意到，在理想塑性假设中所用的屈服应力，可用在应变的适当范围内的平均应力来获得。

对于边坡稳定问题，边坡沿着滑面的滑动，本身是一个渐近的剪切破坏过程。当滑面上最终一点发生剪切破坏而达到峰值抗剪强度时，滑面上最初达到剪切破坏点上的应力已接近残余抗剪强度。在破坏的瞬时，整个滑面上可接受的抗剪强度，应处在峰值和残余值之间。因此，对于边坡稳定问题，采取具有平均性质的理想塑性假定，似乎更显得合理。

§ 3.2 岩土材料塑性变形的基本特点与假设

1. 岩土材料的基本力学特性

通过工程实践和实验室试验发现，工程岩土材料在发生塑性变形时，有以下最基本的力学特性：

(1) 岩土材料的抗剪强度，随受剪面上压应力的增大而增大。这是因为岩土材料是由颗粒材料堆积或胶结而成，属于摩擦型材料，因而它的抗剪强度将与摩擦系数及正压力有关，而金属材料不具有这种性质。

(2) 岩土为多相材料，岩土材料中含有孔隙，因而在各向等压作用下，岩土材料能产生塑性体积应变；而一般金属材料在不

尺度内就呈现不均匀性，然而，在岩土工程中仍可把这些材料看作均匀连续介质。因为这里是在更大的尺度内来考虑各种力学量的统计平均值。

(3) 塑性变形规律是根据均匀应力、应变状态的实验结果建立的，与应力梯度无关。屈服极限是材料的一个固有的物理常数，应力分布的不均匀性几乎对它没有影响。

§ 3.3 莫尔-库仑屈服条件

在实际问题中，材料经常是处在复杂应力状态下的，因此，了解在复杂应力状态下，岩土材料的性质是非常重要的，首先是如何表征材料从弹性状态到塑性状态的过渡？材料在复杂应力状态下，初始弹性状态的界限，称为初始屈服状态，材料在初始屈服状态所满足的条件，称为初始屈服条件，简称屈服条件。

对于岩土材料，目前一般采用莫尔-库仑(Mohr-Coulomb)屈服条件。它认为：如果在通过介质一点的某个微面上的剪应力的数值 $|\tau_n|$ 达到一个线性依赖于粘结应力 c 和该微面上压应力 σ_n 的量时，该微面即发生塑性流动。屈服条件的表达式为^[1, 2]

$$|\tau_n| = c + \sigma_n \operatorname{tg} \varphi \quad (3.3.1)$$

式中， φ 为材料的内摩擦角。 c 、 φ 为表征材料总的抗剪能力的参数， $c=0$ 的材料为无粘性介质； $\varphi=0$ 的材料为纯粘性介质。

当岩体被细密的裂隙切割或有连续的弱面时，可以使用式(3.3.1)。但对于弱面， c 、 φ 是弱面上抗剪能力的参数。

对于饱和土，式(3.3.1)应修改为：

$$|\tau_n| = c' + \sigma_n' \operatorname{tg} \varphi' \quad (3.3.2)$$

式中， σ_n' 为剪切面上土颗粒之间的有效应力， $\sigma_n' = \sigma_n - u$ ； u 为孔隙水压力； c' 、 φ' 为抗剪能力的有效应力参数。

下面研究，如何用一点的主应力及应力分量来表达莫尔-库仑屈服条件。在应力状态的二维莫尔表示中（图 3.3），通过介

质一点的平行于 σ_2 方向的任意微面上的应力点 (σ_n, τ_n) ，位于通过点 $(\sigma_1, 0)$ 、 $(\sigma_3, 0)$ 的应力圆上。类似地，通过点 $(\sigma_1, 0)$ 、 $(\sigma_2, 0)$ 和通过点 $(\sigma_2, 0)$ 、 $(\sigma_3, 0)$ 的应力圆，相应地代表作用在平行于 σ_3 方向和 σ_1 方向的微面上的应力分量。在图 3.3 中，为确定性起见，我们假定 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ 。由材料力学知：通过该点的任意微面上的应力点 (σ_n, τ_n) ，位于图 3.3 上的应力圆之间的阴影区域里。

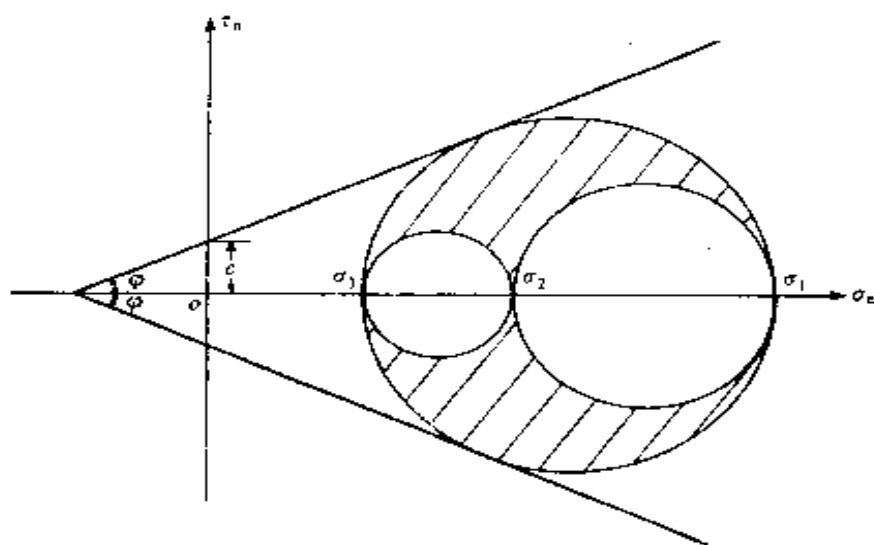


图 3.3 莫尔-库仑屈服条件

在图 3.3 中，莫尔-库仑屈服条件式 (3.3.1) 的图形是两条射线，它们通过点 $(-c \cot \varphi, 0)$ ，并且对 σ_n 轴的倾角为 φ 。

如果一个应力状态 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ，使应力莫尔圆位于两条射线所组成的楔形区域之内，此时有

$$|\tau_n| < c + \sigma_n \tan \varphi \quad (3.3.3)$$

材料保持弹性状态。如果一个应力状态，使其最大莫尔应力圆与两条射线相切，此时式 (3.3.1) 成立，因此材料将发生塑性流动。另外，不可能发生最大莫尔应力圆越出楔形区域的应力状态，因为在这种情况下，在某些微面上会发生 $|\tau_n| > c + \sigma_n \tan \varphi$ ，而这与理想塑性材料的假定是不相符的（图 3.2，当压应力 σ_n 一定

时, 最大抗剪应力是一常数)。

于是, 一个应力状态的最大莫尔应力圆与两射线相切的情况, 与对理想弹塑性材料的式 (3.3.1) 的成立是等价的。因此, 可用最大莫尔应力圆与两条射线相切的条件

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + c \operatorname{ctg} \varphi \right) \sin \varphi \quad (3.3.4)$$

表示莫尔-库仑屈服条件。式 (3.3.4) 又可写为下两式中的任意形式之一

$$\frac{\sigma_1 + c \operatorname{ctg} \varphi}{\sigma_3 + c \operatorname{ctg} \varphi} = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} = \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \quad (3.3.5)$$

$$\sigma_1 = \sigma_3 \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) + 2c \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \quad (3.3.6)$$

由图 2.3b 应力莫尔圆, 又可将式 (3.3.4) 写为应力分量的形式

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = (\sigma_x + \sigma_y + 2c \operatorname{ctg} \varphi)^2 \sin^2 \varphi \quad (3.3.7)$$

此时, 假定 z 轴方向与应力状态的第二主应力 σ_2 方向一致。

对于纯粘性材料, $\varphi = 0$, 式 (3.3.4) 及式 (3.3.7) 分别为

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = c \quad (3.3.8)$$

$$\frac{1}{4} (\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2 = c^2 \quad (3.3.9)$$

式(3.3.8)或式(3.3.9), 也是用于金属材料的屈雷斯加(Tresca)屈服条件。

莫尔-库仑屈服条件式 (3.3.4), 用于已知主应力的大小次序 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ 的情况。当不知道主应力 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 的大小次序时, 莫尔-库仑屈服条件应为^[3]

$$\max \left\{ \left| \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_3) \right| - \left[\frac{1}{2} (\sigma_2 + \sigma_3) + c \operatorname{ctg} \varphi \right] \sin \varphi, \right. \\ \left. \left| \frac{1}{2} (\sigma_3 - \sigma_1) \right| - \left[\frac{1}{2} (\sigma_3 + \sigma_1) + c \operatorname{ctg} \varphi \right] \sin \varphi, \right.$$

$$\left| \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \right| - \left[\frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) + c \operatorname{ctg} \varphi \right] \sin \varphi \} = 0 \quad (3.3.10)$$

§ 3.4 最大塑性功原理及塑性流动法则

当材料所受的应力状态满足屈服条件时，材料发生屈服，即产生塑性变形。但对于理想塑性材料，塑性变形的总量是不确定的（图 3.2）。因此，只能寻找塑性应变率与屈服状态的关系。

作为建立塑性理论的基本原理，人们通常认为，材料在塑性变形阶段服从希尔的最大塑性功原理。原理可陈述如下^[4, 5]：

在任意给定的塑性应变率分量值 $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ 的情况下，如果 σ_{ij} 为相应于所给值 $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ 的实际的应力分量的值， σ_{ij}^- 为任意的不超过屈服极限的允许的应力状态，即 $f(\sigma_{ij}^-) < 0$ ，则下述不等式成立：

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^-) \dot{\epsilon}_{ij}^p \geq 0 \quad (3.4.1)$$

这里， $f(\sigma_{ij}) = 0$ ，表示一般材料的屈服条件。注意，在式 (3.4.1) 中采用了求和约定。例如，

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p &= \sigma_{11} \dot{\epsilon}_{11}^p + \sigma_{12} \dot{\epsilon}_{12}^p + \sigma_{13} \dot{\epsilon}_{13}^p \\ &\quad + \sigma_{21} \dot{\epsilon}_{21}^p + \sigma_{22} \dot{\epsilon}_{22}^p + \sigma_{23} \dot{\epsilon}_{23}^p \\ &\quad + \sigma_{31} \dot{\epsilon}_{31}^p + \sigma_{32} \dot{\epsilon}_{32}^p + \sigma_{33} \dot{\epsilon}_{33}^p \\ &= \sigma_x \dot{\epsilon}_x^p + \sigma_y \dot{\epsilon}_y^p + \sigma_z \dot{\epsilon}_z^p \\ &\quad + \tau_{yz} \dot{\gamma}_{yz}^p + \tau_{zx} \dot{\gamma}_{zx}^p + \tau_{xy} \dot{\gamma}_{xy}^p \end{aligned}$$

$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p$ 的物理意义为：在塑性变形中，单位体积材料所耗散的塑性功率。这个耗散的机械能已转变为热能。

根据上面的解释，最大塑性功原理又可叙述为：在塑性变形时的所有为屈服条件所允许的应力状态中，对于实际的应力状态，单位体积材料机械能的耗散速率，取得最大值。

下面根据最大塑性功原理导出塑性应变率与屈服状态的关系

系。令 $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ 为一组给定的塑性应变率值，按照最大塑性功原理，

$$\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \geq \sigma_{ij}^- \dot{\varepsilon}_{ij}^p$$

可以推知：在所有满足屈服条件 $f(\sigma_{ij}) = 0$ 的应力状态中，与给定的塑性应变率相应的真实的应力状态 σ_{ij} ，应使 $\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p$ 取极大值。这是个条件极值问题。用拉格朗日乘子法组成表达式

$$\bar{D} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \lambda f(\sigma_{ij})$$

式中， λ 为拉格朗日乘子。因此，从 $\frac{\partial \bar{D}}{\partial \sigma_{ij}} = 0$ 推出

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.4.2)$$

当考虑主方向为坐标轴方向时，对于莫尔-库仑屈服条件，由式 (3.3.4) 有

$$f = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)\sin\varphi - c\cos\varphi = 0 \quad (3.4.3)$$

所以从式 (3.4.2) 得出

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1^p &= \frac{\lambda}{2}(1 - \sin\varphi) \\ \dot{\varepsilon}_2^p &= 0 \\ \dot{\varepsilon}_3^p &= -\frac{\lambda}{2}(1 + \sin\varphi) \end{aligned} \right\} \quad (3.4.4)$$

因此，机械能的耗散速率

$$\begin{aligned} D &= \sigma_1 \dot{\varepsilon}_1^p + \sigma_2 \dot{\varepsilon}_2^p + \sigma_3 \dot{\varepsilon}_3^p \\ &= \sigma_1 \frac{\lambda}{2}(1 - \sin\varphi) - \sigma_3 \frac{\lambda}{2}(1 + \sin\varphi) = \lambda c \cos\varphi \end{aligned}$$

在塑性变形中，因为机械能的耗散速率 $D > 0$ ，所以由上式得出 $\lambda > 0$ 。对于理想塑性材料，式(3.4.2)中的 λ ，是一个非负的、随变形在变化的比例系数。按照式(3.4.2)，由屈服函数 $f(\sigma_{ij})$ ，即可导出塑性应变率。式 (3.4.2)，称为塑性应变率的相关联的

流动法则。

现在来考察式 (3.4.2) 的几何意义。对于各向同性材料，屈服状态不受主应力方向的影响。因此，屈服条件可写为

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \quad (3.4.5)$$

以 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 作为空间直角坐标系的坐标，构成主应力空间。屈服条件式 (3.4.5) 在主应力空间的图形，表示为一个曲面，称它为屈服面。屈服面内的点表示的应力状态，使得

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) < 0$$

它们是弹性应力状态；屈服曲面上的点表示的应力状态，为屈服状态。对于理想塑性材料，屈服曲面外的点所表示的应力状态是不允许的。

由数学分析可知，向量 $\frac{\partial f}{\partial \sigma_1} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_3} \vec{k}$ 代表了曲面式 (3.4.5) 上一点的外法线方向，其中 \vec{i} 、 \vec{j} 、 \vec{k} 为 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 轴的单位向量。以 $\dot{\epsilon}_1^p$ 、 $\dot{\epsilon}_2^p$ 、 $\dot{\epsilon}_3^p$ 作为空间直角坐标系的坐标，构成塑性主应变率空间，并且令 $\dot{\epsilon}_1^p$ 、 $\dot{\epsilon}_2^p$ 、 $\dot{\epsilon}_3^p$ 坐标轴与主应力空间坐标轴重合。此时，相关联的流动法则

$$\dot{\epsilon}_1^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_1}, \quad \dot{\epsilon}_2^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_2}, \quad \dot{\epsilon}_3^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_3}, \quad \lambda \geq 0$$

说明：材料在某一屈服状态的塑性应变率向量，与表示该屈服状态的应力点处的屈服面的外法线方向一致。对于式 (3.4.2)，我们想象以 σ_{ij} ($i, j=1, 2, 3$) 作出九维应力空间。相关联流动法则的几何意义为：塑性应变率向量与屈服面垂直。因此，相关联的流动法则，也称为正交流动法则。

§ 3.5 最大塑性功原理对岩土材料的有效性

实验结果指出，对于延性金属材料 and 饱和粘土，最大塑性功原理是正确的。现考察最大塑性功原理对于岩土材料的有效性问题的。

§ 3.2 已提到, 金属材料在塑性变形过程中不发生塑性体积变化; 而岩土类材料可以发生塑性体积应变。对于服从莫尔-库仑屈服条件的岩土材料, 由最大塑性功原理可导出式 (3.4.4) 的相关联流动法则。于是, 塑性体积应变率为

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\epsilon}_1^p + \dot{\epsilon}_2^p + \dot{\epsilon}_3^p = -\lambda \sin \varphi = \left[1 - \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right] \dot{\epsilon}_1^p$$

从而

$$\dot{\epsilon}^p / \dot{\epsilon}_1^p = 1 - N_\varphi \quad (3.5.1)$$

式中, $N_\varphi = \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$ 。式 (3.5.1) 说明, 材料发生塑性体积膨胀。实验指出, 被关联流动法则预示的塑性体积膨胀式(3.5.1), 远超过实验中发现的塑性体积膨胀。也就是说, 关联流动法则的理论与实验结果不能很好地相符。因此, 文献[6]中采用

$$\dot{\epsilon}^p / \dot{\epsilon}_1^p = 1 - N_\psi \quad (3.5.2)$$

式中, N_ψ 是一个必须由实验确定的常数, $N_\psi = \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2} \right)$ 。如果 $\psi = 0$, 材料在常体积下发生塑性变形; 而如果 $0 < \psi < \varphi$, 材料将产生塑性体积膨胀。 ψ 称为材料的剪胀角。

因此, 人们可以认为^[5]: 岩土材料有莫尔-库仑屈服函数,

$$f = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \sin \varphi - c \cos \varphi$$

和区别于屈服函数的塑性势函数, 即采用

$$\dot{\epsilon}_i^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_i} \quad (3.5.3)$$

其中, g 为塑性势函数,

$$g = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \sin \psi - c \cos \psi \quad (3.5.4)$$

式 (3.5.3) 称为非关联的流动法则 ($g \neq f$)。

第四章 松散介质极限平衡的 滑移线解法

50年代以来，基于严格的应用力学塑性理论对松散介质力学的应用，已引起人们日益增加的兴趣。与此相应，极限平衡的传统工程分析方法，也日趋复杂化。但是，后者是近似的，不可避免地要包含一些对具体问题所作的假设(例如，滑面形状等)。

本章将系统地研究处于塑性极限状态的松散介质的塑性理论滑移线解法。在建立了问题的基本方程后，阐述了数值解法的一般步骤。为了说明解法的具体应用，我们研究了竖直挡土墙的压力、边坡的极限荷重、条形基础的承载能力、极限稳定边坡曲线的近似方程，导出了纯粘性土体曲线边坡形状的解析封闭表达式，最后分析了竖直井壁的压力问题。

§ 4.1 引言

首先考虑常见的松散介质的平面变形问题。如果等截面柱体(边坡体可视为其特殊情形)，沿其轴向(取为 z 轴方向)没有变形，而在垂直于轴线的截面均有相同的变形，即位移不随坐标 z 而变化，

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w = 0 \quad (4.1.1)$$

这种特殊的空间问题，我们称之为平面变形问题(图4.1)。

当等截面柱体的两端被光滑的夹板卡住，载荷(包括体积力)垂直于 z 轴，并沿 z 轴不变，这种情况即属于平面变形问题。如果等截面柱体很长，载荷垂直于 z 轴，并沿 z 轴均匀分布，且两端具体的约束条件不影响中间段的变形，则柱体中间段可近似地看成平面变形问题。边坡、挡土墙、基础地基，即可看作这种情况。

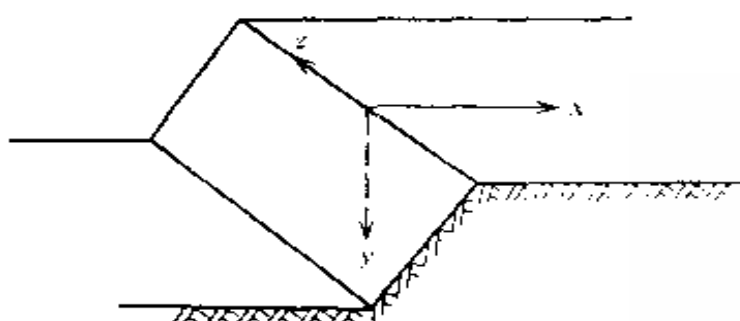


图 4.1 平面变形问题

§ 3.1 已经指出，可以把岩土介质简化为理想弹塑性材料。若理想弹塑性体在不变的载荷作用下（地基承载力，挡土墙土压力，边坡体积力），变形可继续增长，则理想弹塑性体的这个状态称为极限状态。极限状态下的载荷，称为塑性极限载荷。

一般来说，理想弹塑性体在到达极限状态之前，将经历弹性变形和受限制的弹塑性变形两个阶段。在小变形条件下，这两个阶段所产生的变形对物体几何尺寸的影响可以略去不计，如同物体没有变形一样。如果只要确定塑性极限载荷和极限状态下的应力分布及速度分布，不需要研究极限状态到达之前的全部变形过程，则可忽略弹性变形，而直接计算塑性极限载荷和与之相应的应力分布和速度分布。在图 3.2 中，忽略弹性变形即是认为 oa 直线段与应力轴重合，这样得到的简化的应力-应变关系称为材料的理想刚塑性模型。利用理想刚塑性模型计算所得的极限载荷及极限状态，与按理想弹塑性模型计算所得结果完全相同，这是因为它们的最终状态是相同的。

由于忽略弹性变形，下面所讲的刚性区，实际上将包括弹性区和与弹性变形同量级的受限制的弹塑性变形区。

§ 4.2 平面变形问题的应力方程组

1. 平衡方程

在沿轴向方向非常长的等截面柱体的平面变形中，由于平面

在塑性变形区，应力场需满足平衡方程式 (4.2.2) 及屈服条件式 (4.2.5)，这里三个未知函数 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 及三个方程。如果塑性区的边界条件都是应力边界条件，则可根据式 (4.2.2)、式 (4.2.5)、式 (4.2.6) 求出应力分量，在这种情况下，求解塑性区的应力问题，是“静定”的。

§ 4.3 应力方程组的特征线解法

假定岩土材料的容重为 γ ，重力方向与 x 轴的夹角为 ε (图 4.2)，此时，平衡方程式 (4.2.2) 成为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= \gamma \cos \varepsilon \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= -\gamma \sin \varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (4.3.1)$$

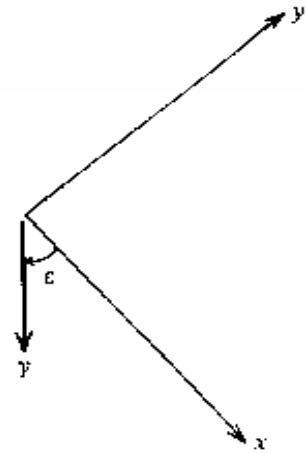


图 4.2 坐标系

用 R 与 p 分别表示应力莫尔圆的半径与圆心的横坐标 (图 4.3a)：

$$p = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \quad R = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (4.3.2)$$

p 也叫做平均应力。利用参数 p 和 R ，莫尔-库仑屈服条件又可表示为

$$R = p \sin \varphi + c \cos \varphi \quad (4.3.3)$$

从图 4.3a 可以看出，屈服状态时的应力分量可写为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= p + R \cos 2\theta \\ \sigma_y &= p - R \cos 2\theta \\ \tau_{xy} &= R \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (4.3.4)$$

其中，通过式 (4.3.3) R 与 p 相关， θ 是最大主应力方向 σ_1 与 x 轴的夹角，从 x 轴方向经过逆时针旋转达到 σ_1 方向的转角为正。将式 (4.3.4) 代入到式 (4.2.5)，可以发现，屈服条件已被

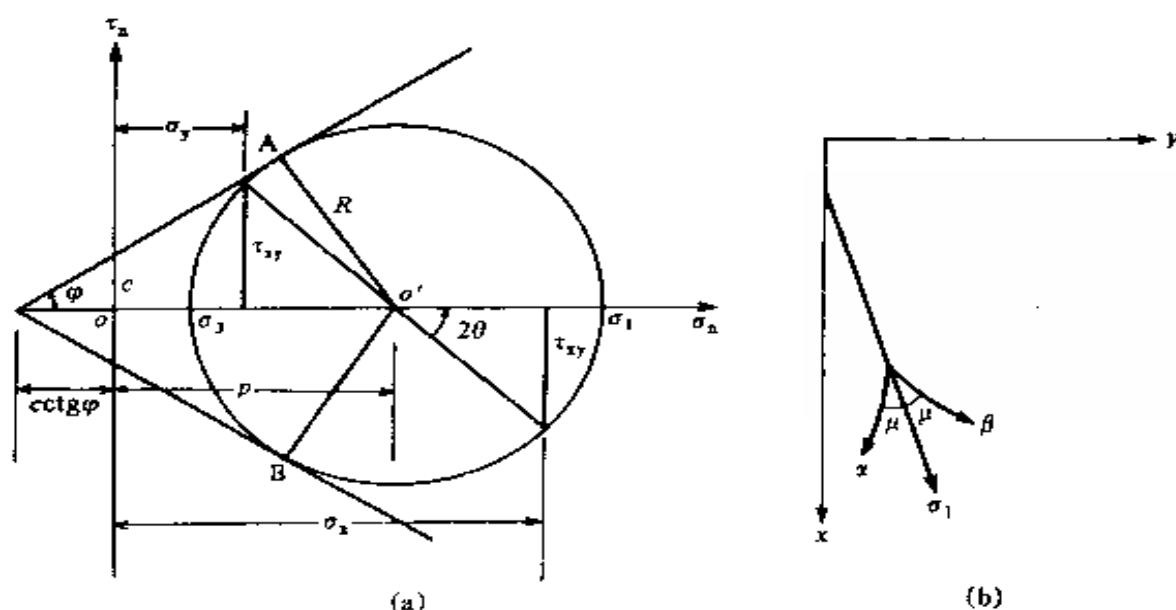


图 4.3 (a) 屈服状态的应力分量; (b) α 、 β 线方向

恒等地满足。将式 (4.3.4) 代入平衡方程式 (4.3.1), 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} (1 + \sin \varphi \cos 2\theta) + \frac{\partial p}{\partial y} \sin \varphi \sin 2\theta \\ + 2R \left(-\frac{\partial \theta}{\partial x} \sin 2\theta + \frac{\partial \theta}{\partial y} \cos 2\theta \right) = \gamma \cos \varepsilon \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} \sin \varphi \sin 2\theta + \frac{\partial p}{\partial y} (1 - \sin \varphi \cos 2\theta) \\ + 2R \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \cos 2\theta + \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin 2\theta \right) = -\gamma \sin \varepsilon \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

在塑性区内, 求解满足平衡方程和屈服条件的应力分量 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 的问题, 现已转换为: 求解满足式 (4.3.5) 和式 (4.3.6) 的两个未知函数 p 和 θ 的问题。

下面把方程式 (4.3.5)、式 (4.3.6) 化为便于求解的形式。

令常数 $\mu = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$ 。将式 (4.3.5) 乘以 $\sin(\theta \pm \mu)$, 式 (4.3.6) 式乘以 $-\cos(\theta \pm \mu)$, 然后相加:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial p}{\partial x} [(1 + \sin\varphi \cos 2\theta) \sin(\theta \pm \mu) - \sin\varphi \sin 2\theta \cos(\theta \pm \mu)] \\
& + \frac{\partial p}{\partial y} [\sin\varphi \sin 2\theta \sin(\theta \pm \mu) - (1 - \sin\varphi \cos 2\theta) \cos(\theta \pm \mu)] \\
& + 2R \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial x} [-\sin 2\theta \sin(\theta \pm \mu) - \cos 2\theta \cos(\theta \pm \mu)] \right. \\
& \left. + \frac{\partial \theta}{\partial y} [\cos 2\theta \sin(\theta \pm \mu) - \sin 2\theta \cos(\theta \pm \mu)] \right\} \\
& = \gamma [\cos \varepsilon \sin(\theta \pm \mu) + \sin \varepsilon \cos(\theta \pm \mu)]
\end{aligned}$$

即,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial p}{\partial x} [\sin(\theta \pm \mu) + \sin\varphi \sin(-\theta \pm \mu)] \\
& + \frac{\partial p}{\partial y} [-\cos(\theta \pm \mu) + \sin\varphi \cos(-\theta \pm \mu)] \\
& + 2R \left[-\frac{\partial \theta}{\partial x} \cos(-\theta \pm \mu) + \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin(-\theta \pm \mu) \right] \\
& = \gamma \sin(\theta + \varepsilon \pm \mu) \tag{4.3.7}
\end{aligned}$$

由三角公式变换, 有

$$\begin{aligned}
\sin(\theta \pm \mu) &= \pm \cos\left(\theta \pm \mu \mp \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \pm \cos\left(\theta \mp \mu \pm 2\mu \mp \frac{\pi}{2}\right) = \pm \cos(\theta \mp \mu \mp \varphi) \\
&= \pm \cos(\theta \mp \mu) \cos\varphi + \sin\varphi \sin(\theta \mp \mu)
\end{aligned}$$

上式中, 同时取上面的运算符号, 或者同时取下面的运算符号。于是, 有

$$\sin(\theta \pm \mu) + \sin\varphi \sin(-\theta \pm \mu) = \pm \cos(\theta \mp \mu) \cos\varphi$$

又,

$$\begin{aligned}
\cos(\theta \pm \mu) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \mu \mp \theta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\mu \mp \theta + \mu\right) \\
&= \sin(\varphi \mp \theta + \mu) = \sin[\varphi \mp (\theta \mp \mu)] \\
&= \sin\varphi \cos(\theta \mp \mu) \mp \cos\varphi \sin(\theta \mp \mu)
\end{aligned}$$

所以,

$$\sin\varphi\cos(-\theta \pm \mu) - \cos(\theta \pm \mu) = \pm \sin(\theta \mp \mu)\cos\varphi$$

又

$$\begin{aligned}\sin(\theta + \varepsilon \pm \mu) &= \sin(\theta \mp \mu + \varepsilon \pm 2\mu) \\ &= \sin(\theta \mp \mu)\cos(\varepsilon \pm 2\mu) + \cos(\theta \mp \mu)\sin(\varepsilon \pm 2\mu)\end{aligned}$$

所以, 式 (4.3.7) 可写为

$$\begin{aligned}&\pm \cos(\theta \mp \mu)\cos\varphi \frac{\partial p}{\partial x} \pm \sin(\theta \mp \mu)\cos\varphi \frac{\partial p}{\partial y} \\ &- 2R \left[\cos(\theta \mp \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \sin(\theta \mp \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} \right] \\ &= \gamma [\sin(\theta \mp \mu)\cos(\varepsilon \pm 2\mu) + \cos(\theta \mp \mu)\sin(\varepsilon \pm 2\mu)]\end{aligned}\quad (4.3.8)$$

现用下式确定两个方向

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\theta - \mu), \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\theta + \mu) \quad (4.3.9)$$

在塑性区各点, 这些方向所确定的线, 分别称为 α 、 β 线 (图 4.3b)。根据方向导数的公式

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s_\alpha} &= \cos(\theta - \mu) \frac{\partial}{\partial x} + \sin(\theta - \mu) \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial x}{\partial s_\alpha} &= \cos(\theta - \mu), \quad \frac{\partial y}{\partial s_\alpha} = \sin(\theta - \mu) \\ \frac{\partial}{\partial s_\beta} &= \cos(\theta + \mu) \frac{\partial}{\partial x} + \sin(\theta + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial x}{\partial s_\beta} &= \cos(\theta + \mu), \quad \frac{\partial y}{\partial s_\beta} = \sin(\theta + \mu)\end{aligned}$$

式中, s_α 、 s_β 分别为 α 、 β 线的弧长。注意 $\cos\varphi = \sin 2\mu$, 因此由式 (4.3.8) 可得下面两个方程:

$$\begin{aligned}&-\sin 2\mu \frac{\partial p}{\partial s_\alpha} + 2R \frac{\partial \theta}{\partial s_\alpha} \\ &+ \gamma \left[\sin(\varepsilon + 2\mu) \frac{\partial x}{\partial s_\alpha} + \cos(\varepsilon + 2\mu) \frac{\partial y}{\partial s_\alpha} \right] = 0\end{aligned}\quad (4.3.10)$$

$$\sin 2\mu \frac{\partial p}{\partial s_\beta} + 2R \frac{\partial \theta}{\partial s_\beta} + \gamma \left[\sin(\varepsilon - 2\mu) \frac{\partial x}{\partial s_\beta} + \cos(\varepsilon - 2\mu) \frac{\partial y}{\partial s_\beta} \right] = 0 \quad (4.3.11)$$

因此，方程组式 (4.3.5)、式 (4.3.6) 的求解问题，转化为式 (4.3.9)、式 (4.3.10) 及式 (4.3.11) 的求解问题。数学上，式 (4.3.9) 叫做拟线性（对未知量的偏导数为线性，对未知函数为非线性）偏微分方程组式 (4.3.5)、式 (4.3.6) 的特征线方向；式 (4.3.10)、式 (4.3.11) 叫做特征线方向上的特征关系。

现考察特征线的力学意义。在图 4.3a 中，A、B 两点表示满足屈服条件的两个微面上的应力分量，而角 $\angle AO'\sigma_1 = \angle BO'\sigma_1 = \frac{\pi}{2} + \varphi$ ，表示发生塑性剪切破坏的两个微面（它们平行于 z 轴方向）的法线方向与最大主应力 σ_1 方向夹角的两倍。所以，剪切破坏面的法线方向与 σ_1 方向的夹角为 $\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$ ，因此，剪切破坏面与 xoy 面交线的方向，与 σ_1 方向的夹角为 $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} = \mu$ 。剪切破坏面称为滑移面，它与 xoy 面的交线称之为滑移线。于是，在塑性区的每一点有两个滑移线方向，它们与 σ_1 方向的夹角为 $\pm \mu$ 。由图 4.3b 可见，滑移线方向即为特征线方向。关于特征线的其他数学意义，可见文献[1]。

方程组式 (4.3.10)、式 (4.3.11) 的数值积分方法，称为应力方程组的特征线解法。

§ 4.4 应力方程组的数值积分

这里首先介绍两种基本计算方法，然后再研究基本边值问题的计算过程。

1. 两种基本计算方法^[6]

(1) 第一种基本算法: 已知相邻两点 A 和 B 处的平均应力 p 和 θ 值, 求过 A 点的 α 线与过 B 点的 β 线的交点 P 的位置和 P 点的 p 值和 θ 值 (图 4.4), 具有足够的精度, 方程式 (4.3.9)、式 (4.3.10)、式 (4.3.11) 可以写为

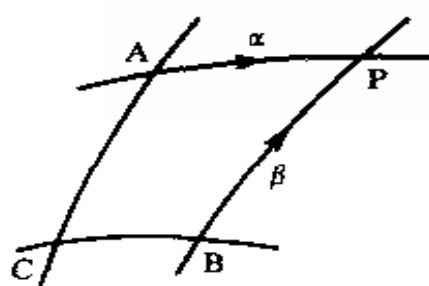


图 4.4 第一基本问题中的特征

$$y_P - y_A = \operatorname{tg}\left(\frac{\theta_P + \theta_A}{2} - \mu\right)(x_P - x_A) \quad (4.4.1)$$

$$y_P - y_B = \operatorname{tg}\left(\frac{\theta_P + \theta_B}{2} + \mu\right)(x_P - x_B) \quad (4.4.2)$$

$$\begin{aligned} & -\sin 2\mu(p_P - p_A) + (R_P + R_A)(\theta_P - \theta_A) \\ & = -\gamma \sin(\varepsilon + 2\mu)(x_P - x_A) - \gamma \cos(\varepsilon + 2\mu)(y_P - y_A) \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

$$\begin{aligned} & \sin 2\mu(p_P - p_B) + (R_P + R_B)(\theta_P - \theta_B) \\ & = -\gamma \sin(\varepsilon - 2\mu)(x_P - x_B) - \gamma \cos(\varepsilon - 2\mu)(y_P - y_B) \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

式中, 下标 P、A 等表示某量在点 P、A 等处的值。

方程式 (4.4.3) 和式 (4.4.4) 是非线性方程组, 可用迭代法求解。迭代步骤如下:

① 确定 x_P 、 y_P 、 p_P 和 θ_P 的第一次近似值。如果图 4.4 中所示的 C 点处的值已知, 可用下式估算:

$$\begin{aligned} x_P & \approx x_A + x_B - x_C, \quad y_P \approx y_A + y_B - y_C \\ \theta_P & \approx \theta_A + \theta_B - \theta_C, \quad p_P \approx p_A + p_B - p_C \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

若 C 点处的值未知, 可用 $x_P \approx \frac{1}{2}(x_A + x_B)$ 估算。

② 把 x_P 、 y_P 和 $R_P = (p_P \sin \varphi + c \cos \varphi)$ 的第一次近似值代入式 (4.4.3) 和式 (4.4.4), 求出 p_P 和 θ_P 的第二次近似值。

③ 由 θ_P 的第二次近似值代入式 (4.4.1) 和式 (4.4.2) 求出

x_P 和 y_P 的第二次近似值。

④ 检查前后两次计算得到的 x_P 、 y_P 、 θ_P 和 p_P 值的差值是否满足要求。如不满足要求，返回到步骤②重新计算，迭代至收敛为止。

(2) 第二种基本算法：已知 α 线上 B、C 两点的 x 、 y 、 p 、 θ 值，且知过 C 点直线 OD 上的 θ 值，求过 B 点的 β 线与 OD 线交点 P 处的 x_P 、 y_P 和 p_P 值（图 4.5）。由 β 线的方程和直线 OD 的方程可得

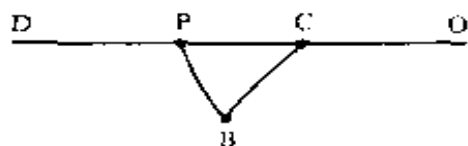


图 4.5 典型的混合问题

$$y_P - y_B = \operatorname{tg}\left(\frac{\theta_B + \theta_P}{2} + \mu\right)(x_P - x_B) \quad (4.4.6)$$

$$\frac{y_P - y_C}{y_D - y_C} = \frac{x_P - x_C}{x_D - x_C} \quad (4.4.7)$$

根据式 (4.4.6) 及式 (4.4.7) 可以求出 x_P 和 y_P 。已知 P 点的 x 、 y 和 θ 值后，利用式 (4.4.4) 及式 (4.3.3)，可得到 p_P 的值：

$$\begin{aligned} p_P = \frac{1}{\sin 2\mu + (\theta_P - \theta_B)\sin\varphi} \{ & [\sin 2\mu - (\theta_P - \theta_B)\sin\varphi]p_B \\ & - 2c(\theta_P - \theta_B)\cos\varphi - \gamma\sin(\varepsilon - 2\mu)(x_P - x_B) \\ & - \gamma\cos(\varepsilon - 2\mu)(y_P - y_B) \} \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

2. 基本边值问题的数值解法

(1) 柯西 (Cauchy) 问题：在图 4.6 中，AB 为一非特征线弧，其位置和函数值 x 、 y 、 p 和 θ 为已知，求其影响区域的解，叫柯西问题。用 1、2、3、…来标记 α 、 β 线；第 i 根 α 线与第 j 根 β 线的交点记为 P_{ij} 。由 AB 线上 P_{11} 点和 P_{22} 点的 x 、 y 、 p 和 θ 值，运用前面介绍的第一基本算法，可求得 P_{12} 点处的 x 、 y 、 p 和 θ 值。用同样方法，由 P_{22} 点和 P_{33} 点可求得 P_{23} 点

的解, ... 这样, 可以得到影响区域内各点处解的近似值。

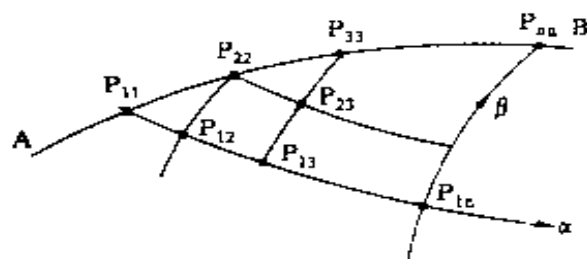


图 4.6 柯西问题的特征

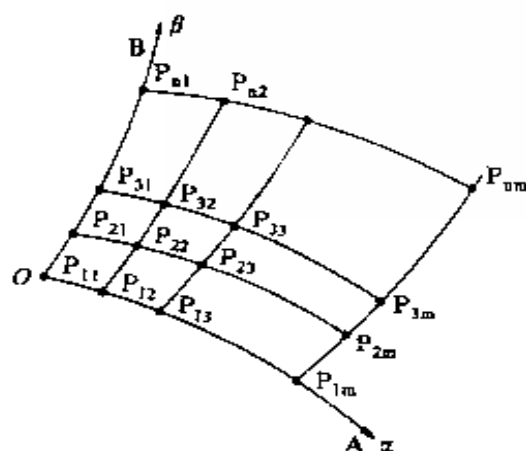


图 4.7 黎曼问题的特征

(2) 黎曼(Riemann)问题: 在图 4.7 上, OA 是 α 线, OB 是 β 线. 沿 OA 线、 OB 线, 已知 x 、 y 、 p 和 θ 值, 求其影响区域上的解, 叫黎曼问题. 利用前面介绍的第一基本算法, 由 P_{12} 点和 P_{21} 点的 x 、 y 、 p 和 θ 值得到 P_{22} 点的 x 、 y 、 p 和 θ 值, 然后由 P_{22} 点和 P_{31} 点得到 P_{32} 点的解. 用同样方法, 可以求得其影响区域内各点处解的近似值。

(3) 混合边值问题: 在图 4.8 上, OA 是一条 α 线, 其位置和函数值 x 、 y 、 p 和 θ 已知, OD 是非特征线弧, OD 的位置和各点的 θ 值已知, 求其影响区域上的解。

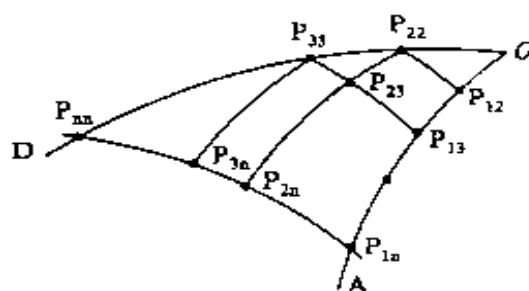


图 4.8 混合问题的特征

首先利用前面介绍的第二基本算法, 由 P_{12} 点的 x 、 y 、 p 和 θ 值及 O 点、 P_{22} 点的 x 、 y 值的关系, 计算 P_{22} 点的 x 、 y 、 p 和 θ 值. 然后, 利用第一基本算法, 由 P_{13} 点和 P_{22} 点的 x 、 y 、 p 和 θ 值计算 P_{23} 点的 x 、 y 、 p 和 θ 值. 继而由 P_{23} 点的 x 、 y 、 p 和 θ 值, 利用第二基本算法计算 P_{33} 点的 x 、 y 、 p 和 θ 值. 于是, 即可计算其影响区域内各点

处解的近似值。

关于柯西问题，还需说明如下。通常应力边值问题的边界条件是：沿某个非特征弧，给定面载荷，即正应力 σ_n 和剪应力 τ_{nt} 。但是，由此并不能完全确定此弧上的 p 和 θ 值，从图 4.9 可看出，通过应力点 (σ_n, τ_{nt}) 存在有两个极限应力圆。

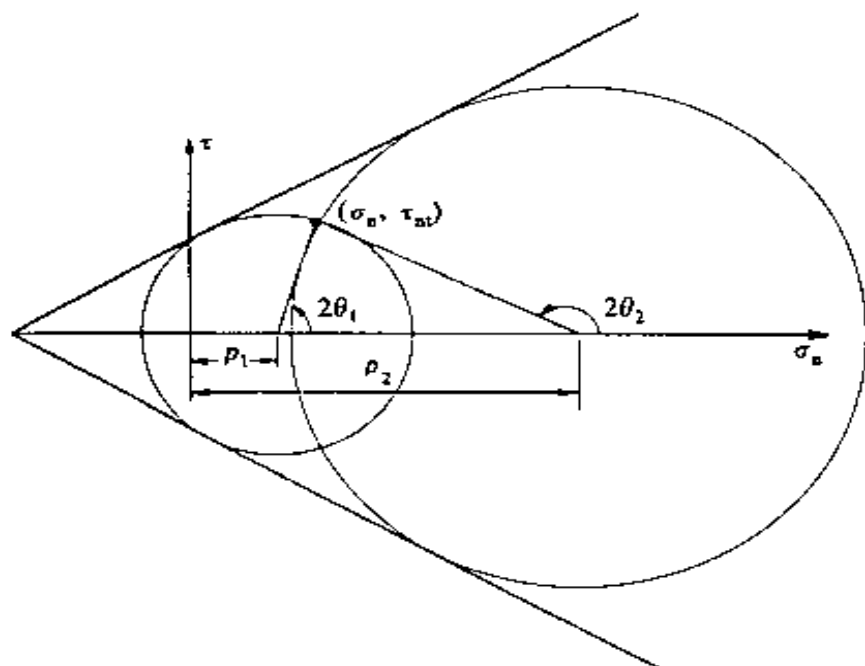


图 4.9 非特征边界的两个可能状态

令 $\bar{\sigma}_n = \sigma_n + c \cot \varphi$ ，由图 4.9 的极限状态条件，可建立

$$[\bar{\sigma}_n - (p + c \cot \varphi)]^2 + \tau_{nt}^2 = (p + c \cot \varphi)^2 \sin^2 \varphi$$

关于 $(p + c \cot \varphi)$ ，解此二次方程，得

$$\left. \begin{aligned} p_1 + c \cot \varphi &= \frac{\bar{\sigma}_n - \sqrt{\bar{\sigma}_n^2 \sin^2 \varphi - \tau_{nt}^2 \cos^2 \varphi}}{\cos^2 \varphi} \\ p_2 + c \cot \varphi &= \frac{\bar{\sigma}_n + \sqrt{\bar{\sigma}_n^2 \sin^2 \varphi - \tau_{nt}^2 \cos^2 \varphi}}{\cos^2 \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (4.4.9)$$

由图 4.9 也可看出，边界法线 n 方向与最大主应力 σ_1 的方向夹角的值为

所以, θ_P 和 σ_P 可直接求得, 而不必利用数值积分。由于已求出 θ_P , 方程式 (4.4.1) 和式 (4.4.2) 只是线性方程, 可由此容易求出 x_P 和 y_P , 而无需用迭代算法。

如果在图 4.4 中, 已知 C 点处的 x 、 y 、 σ 和 θ 值, 与上同理, 则有

$$\left. \begin{aligned} \theta_C &= \frac{1}{2}(\theta_A + \theta_B) + \frac{1}{4} \operatorname{tg} 2\mu \ln \frac{\sigma_A}{\sigma_B} \\ \sigma_C &= (\sigma_A \sigma_B)^{1/2} \exp[(\theta_A - \theta_B) \operatorname{ctg} 2\mu] \end{aligned} \right\} \quad (4.5.5)$$

由式 (4.5.4) 及式 (4.5.5), 得

$$\theta_P = \theta_A + \theta_B - \theta_C, \quad \sigma_P = \frac{\sigma_A \sigma_B}{\sigma_C} \quad (4.5.6)$$

如把上式的第一式写成

$$\theta_P - \theta_B = \theta_A - \theta_C$$

则有如下的几何解释: 同族两条滑移线 (α_1 、 α_2) 在与另一族中任一滑移线 (β_1 或 β_2) 的交点处的切线间的夹角保持不变 (图 4.10)。这个解释叫做汉基 (Hencky) 定理。

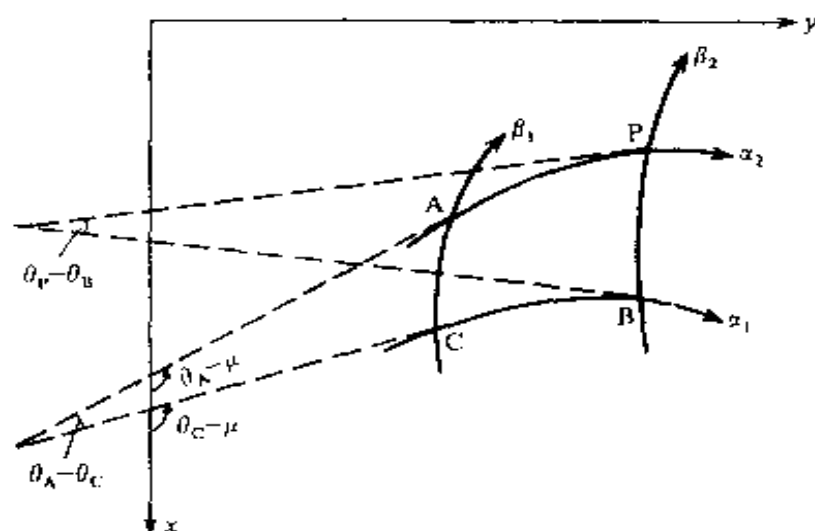


图 4.10 汉基定理

汉基定理的一个重要推论是: 若一族滑移线中有一直线段,

则同族的每一滑移线都有相应的直线段。这相当于 $\theta_P - \theta_B = \theta_A - \theta_C = 0$ 的情况。

2. 纯粘性材料 ($\varphi = 0$)

对不排水条件下的正常固结粘土, $\varphi = 0$, $R = c$, 当考虑土体自重影响时, 式 (4.3.10) 及式 (4.3.11) 改写为

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial s_\alpha} + 2c\frac{\partial \theta}{\partial s_\alpha} + \gamma \cos \varepsilon \frac{\partial x}{\partial s_\alpha} - \gamma \sin \varepsilon \frac{\partial y}{\partial s_\alpha} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial s_\beta} + 2c\frac{\partial \theta}{\partial s_\beta} - \gamma \cos \varepsilon \frac{\partial x}{\partial s_\beta} + \gamma \sin \varepsilon \frac{\partial y}{\partial s_\beta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.5.7)$$

而方程式 (4.3.9) 变为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial s_\alpha} &= \operatorname{tg}\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \frac{\partial x}{\partial s_\alpha} \\ \frac{\partial y}{\partial s_\beta} &= \operatorname{tg}\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \frac{\partial x}{\partial s_\beta} \end{aligned} \right\} \quad (4.5.8)$$

因此, α 和 β 特征是正交的。

积分方程式 (4.5.7) 后, 有

$$\left. \begin{aligned} \text{在 } \alpha \text{ 线上, } \quad \bar{p} - 2c\theta &= \text{常数} \\ \text{在 } \beta \text{ 线上, } \quad \bar{p} + 2c\theta &= \text{常数} \end{aligned} \right\} \quad (4.5.9)$$

式中, $\bar{p} = p - \gamma x \cos \varepsilon + \gamma y \sin \varepsilon$ 。

将式 (4.5.9) 应用于 § 4.4 中的第一基本算法, 有

$$\bar{p}_P - 2c\theta_P = \bar{p}_A - 2c\theta_A$$

$$\bar{p}_P + 2c\theta_P = \bar{p}_B + 2c\theta_B$$

于是,

$$\left. \begin{aligned} \bar{p}_P &= \frac{\bar{p}_B + \bar{p}_A}{2} + c(\theta_B - \theta_A) \\ \theta_P &= \frac{\bar{p}_B - \bar{p}_A}{4c} + \frac{\theta_B + \theta_A}{2} \end{aligned} \right\} \quad (4.5.10)$$

如果在图 4.4 中的 C 点处, 已知 x 、 y 、 p 和 θ 值, 与上同理, 有

$$\bar{p}_C = \frac{\bar{p}_A + \bar{p}_B}{2} + c(\theta_A - \theta_B)$$

$$\theta_C = \frac{\bar{p}_A - \bar{p}_B}{4c} + \frac{\theta_A + \theta_B}{2}$$

这样可得到

$$\theta_P = \theta_A + \theta_B - \theta_C, \quad \bar{p}_P = \bar{p}_A + \bar{p}_B - \bar{p}_C$$

从这些方程可见，汉基定理和它的推论仍保持有效。

§ 4.6 简单滑移线场

本节讨论无重材料的情况。

1. 均匀应力场

在一直线边界上，已知法向应力 $\sigma_n = \text{常数}$ ，剪应力 $\tau_{nt} = 0$ 。现考察此时相应的滑移线场具有什么特点。

这时，由式 (4.4.9) 及式 (4.4.10) 知，存在如下两种情形：

$$(1) \quad p_1 + c \operatorname{ctg} \varphi = \frac{\sigma_n + c \operatorname{ctg} \varphi}{1 + \sin \varphi} = \text{常数}, \quad \sigma_n = \sigma_1 \quad (4.6.1)$$

$$(2) \quad p_2 + c \operatorname{ctg} \varphi = \frac{\sigma_n + c \operatorname{ctg} \varphi}{1 - \sin \varphi} = \text{常数}, \quad \sigma_n = \sigma_3 \quad (4.6.2)$$

对于这两种情况，沿边界 $\sigma = p + c \operatorname{ctg} \varphi = \text{常数}$ ，对直的边界（为应力主平面之一）， $\theta = \text{常数}$ 。所以，按第一基本算法，由式 (4.5.4) 得

$$\left. \begin{aligned} \theta_P &= \frac{1}{2} (\theta_A + \theta_B) = \theta_A = \theta_B \\ \sigma_P &= (\sigma_B \sigma_A)^{1/2} = \sigma_A = \sigma_B \end{aligned} \right\} \quad (4.6.3)$$

根据式 (4.3.4)，此情形相应于均匀应力场。这时的滑移线场由两族直线所组成。图 4.11a 相应于情况(1)；图 4.11b 相应于情况(2)。

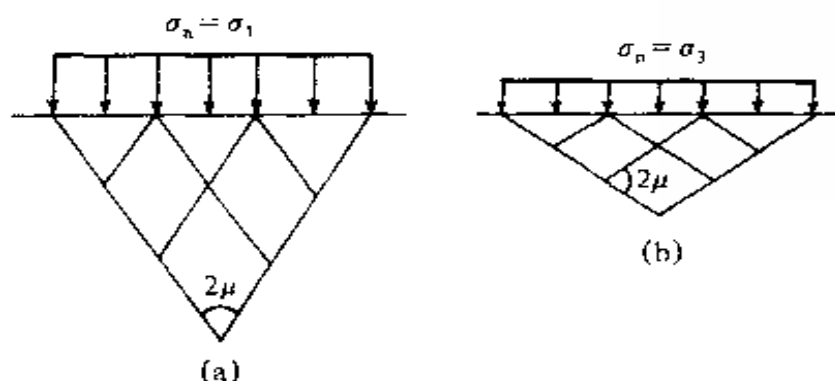


图 4.11 均匀应力场

2. 简单应力场

紧接着均匀应力场的塑性区，根据汉基定理，有一族滑移线一定是直线段，比如，这族直滑移线是 α 族。在 α 族直线上， $\theta = \text{常数}$ 。根据式 (4.5.2)，在 α 直线上， $\sigma = \text{常数}$ 。于是由式 (4.3.4) 得出：在直的滑移线上，应力分量是不变的；而在另一族曲线滑移线上，应力分量是变化的。有一族直滑移线的滑移线场所相应的应力分布场，称为简单应力场。

下面研究当一族滑移线（比如 α 族）为交于一点的简单应力场（图 4.12）。此时，采用极坐标 (r, ξ) 。现在推导曲线 β 滑移线族的方程式。因为 α 、 β 线的交角为 $2\mu = \frac{\pi}{2} - \varphi$ 。由图 4.12 可得， β 族滑移线极坐标表达式 $r = r(\xi)$ 所满足的微分方程式为

$$\frac{dr}{r d\xi} = \operatorname{ctg} 2\mu = \operatorname{tg} \varphi$$

积分后得，

$$r = C_1 \exp(\xi \operatorname{tg} \varphi)$$

式中， C 为积分常数。假定，当 $\xi = \xi_0$ 时， $r = r_0$ ，于是定出常数 C_1 后，可得 β 线的方程为

$$r = r_0 \exp[(\xi - \xi_0) \operatorname{tg} \varphi] \quad (4.6.4)$$

此为对数螺旋线的方程。

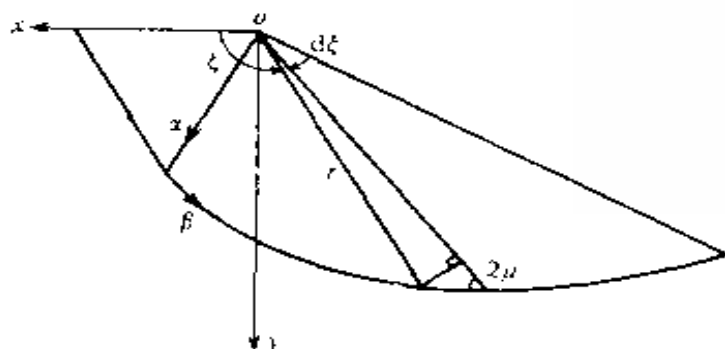


图 4.12 简单应力场

§ 4.7 挡土墙上的土压力

1. 主动土压力

现研究当土体受竖直光滑的挡土墙限制，在表面压力 q 和土体自重作用下的极限平衡问题（图 4.13）。此时，土与墙之间的作用力，称为土压力。

这个问题在塑性区（极限状态区），应力状态要满足的基本方程是：

- (1) 平衡方程式 (4.2.2)，此时体力分量 $X=0$ ， $Y=-\gamma$ ， γ 为土体的容重；
- (2) 屈服条件，下面考察式 (3.3.6)

的形式。问题的边界条件是： $y=0$ 时， $\sigma_y=q$ ， $\tau_{xy}=0$ ； $x=0$ 时， $\tau_{xy}=0$ ， σ_x 为待求的量。

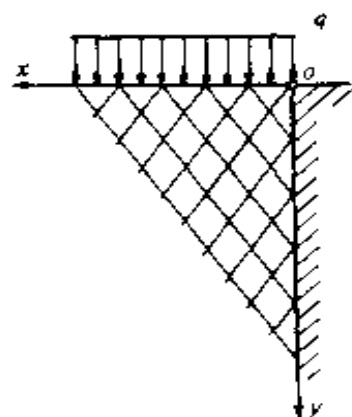


图 4.13 主动土压力

材料力学处理的问题是：已知杆件所受的外力及杆件的支承情况，需要寻找杆件内弹性状态（材料性质服从虎克定律）的应力及变形。这里考虑的问题与材料力学中的问题有所不同，已知在问题的塑性区材料处于极限平衡状态，并且知道边界上的外力形式，需要确定一部分边界上的外载荷的大小。也就是说，在这部分边界上，外载荷的值不是任意给定的；只有当它们为确定的

值时，材料才能处于极限状态。在这个意义上可以说，塑性力学问题是反序的：在内部已知材料所处的状态，需要确定外部的载荷。

通过直接判断可知道：下述的应力场（应力分量的函数关系），已满足上面的基本方程和边界条件：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= (q + \gamma y) \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) - 2c \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \\ \sigma_y &= q + \gamma y \\ \tau_{xy} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.7.1)$$

显然，应力分量式（4.7.1）是满足平衡方程式（4.2.2）及应力边界条件的。由式（4.7.1）， $\sigma_1 = \sigma_y$ ， $\sigma_3 = \sigma_x$ ，且式（4.7.1）的第一式可写为

$$\sigma_3 = \sigma_1 \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) - 2c \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \quad (4.7.2)$$

可见，式（4.7.2）与式（3.3.6）一致，因此，应力场式（4.7.1），给出了所述问题极限状态区的应力场的正确解答。由于 $\sigma_1 = \sigma_y$ ，在塑性区内 $\theta = \pi/2$ ，因此，无论是对无重介质，还是对有重介质，本问题的滑移线场均由两族平行直线组成。

由于挡土墙是事后安装的，因此在挡土墙与土体之间，不可能产生拉应力。这样，必须满足条件： $y=0$ 时， $\sigma_x > 0$ ，于是得出

$$q \geq 2c \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \quad (4.7.3)$$

然而，在实际问题中，土体表面压力 q 不一定满足式（4.7.3），例如 $q=0$ 的情况，可以这样解释：只有当满足式（4.7.3）时，图4.13中 x 轴以下的区域才可能全部进入极限状态；若式（4.7.3）不被满足，那么邻近 x 轴的一层土还未达到极限状态。建立坐标系 xoy ，使得在挡土墙后边 O 点处的土压力等于零（图4.14）。此时，按照式（4.7.3），沿正半 x 轴应施加压应力

$$\sigma_y = 2c \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$$

把这个压应力想象为是由原来的土表面压力 q 及一层高为 h 的土重量引起的，即

$$q + \gamma h = 2c \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$$

由上式得

$$h = \frac{1}{\gamma} \left[2c \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - q \right] \quad (4.7.4)$$

这个量是对挡土墙不显现任何压力的最大土层高，称为临界高度。

因而，这里必须考虑两个区域：正半 x 轴以上的非极限区及正半 x 轴以下的极限区。在非极限区中的应力分量为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 0 \\ \sigma_y &= q + \gamma(h + y) = \gamma y + 2c \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \\ \tau_{xy} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.7.5)$$

在极限区中的应力分量为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \left[2c \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + \gamma y \right] \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \\ &\quad - 2c \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) = \gamma y \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \\ \sigma_y &= 2c \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + \gamma y \\ \tau_{xy} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.7.6)$$

式 (4.7.1) 的第一式或式 (4.7.6) 的第一式的 σ_x 值，即为土体对挡土墙的主动推力，称为主动土压力。对于无粘性的理想松散介质 $c=0$ ，这时有

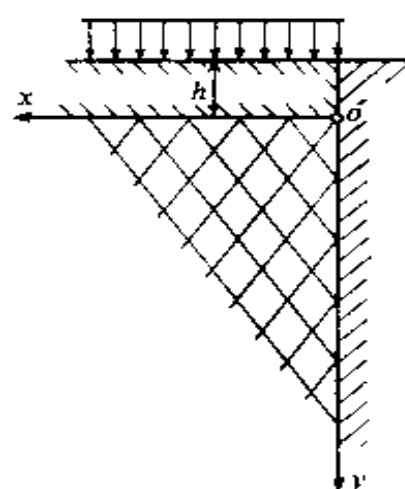


图 4.14 具有非极限区的主动土压力

$$\lambda \equiv \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \quad (4.7.7)$$

λ 称为主动侧压系数。

2. 被动土压力

前面研究的主动土压力 ($\sigma_y = \sigma_1$, $\sigma_x = \sigma_3$), 是土体对挡土墙的主动推力, 使墙有向土体外运动的趋势。现考虑, 土体在表面压力 q 及自重作用之下, 当挡土墙有向土体内移动的趋势时 (如推土机推土), 竖直光滑挡土墙上所受的土压力 (图 4.15)。这种土压力, 叫做被动土压力。

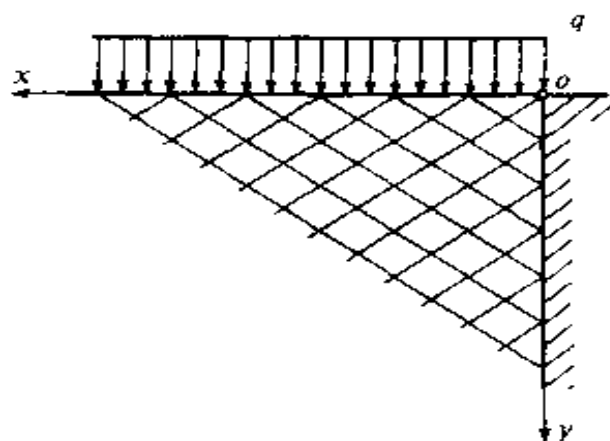


图 4.15 被动土压力

此时, 在塑性区内的应力分量为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= (q + \gamma y) \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) + 2c \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \\ \sigma_y &= q + \gamma y \\ \tau_{xy} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.7.8)$$

显然, 应力分量式 (4.7.8) 满足平衡方程式 (4.2.2) 及问题的边界条件。这时, $\sigma_x = \sigma_1$, $\sigma_y = \sigma_3$ 。并且可看出, 式 (4.7.8) 满足屈服条件式 (3.3.6)。此时, 式 (4.7.8) 中的第一式 σ_x 值, 即为被动土压力。

对于无粘性的理想松散介质, 被动侧压系数为

$$\lambda_1 \equiv \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \quad (4.7.9)$$

关于考虑自重的土体对有摩擦的挡土墙的土压力问题, 一般必须用数值解法, 有关研究成果可参阅文献[1]。

§ 4.8 边坡的极限荷重及临界坡面形状

1. 无重边坡的极限荷重

首先研究由正半 x 轴及倾斜 x 轴在 ξ 角之下的射线所限制的边坡体，其坡顶受有均布压力 q (图 4.16)。当边坡高度较小、所受外载比介质自重影响大得多时，暂且不考虑介质自重。同时，对无重边坡的分析，也是研究有重边坡的基础，下面考察所述问题的滑移线场，并确定边坡的极限荷重。

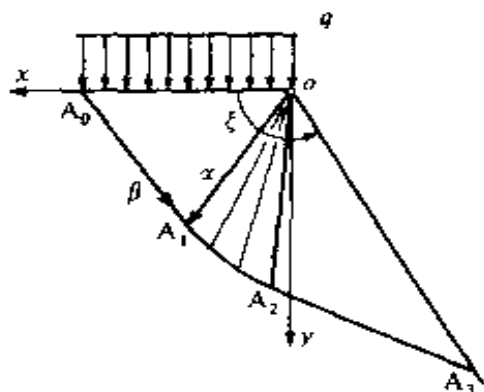


图 4.16 无重边坡

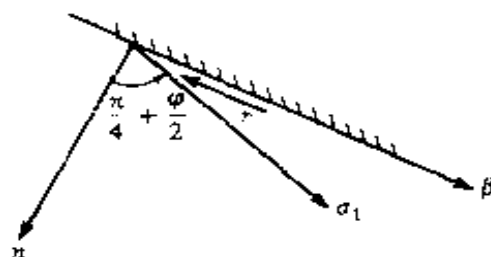


图 4.17 β 滑移线上的剪应力方向

当边坡体处于极限状态时，它将有沿一条滑移线滑动的趋势。分析滑移面上的剪应力作用方向，从而确定某一滑移线是属于 α 族或是 β 族。从图 4.3b 知道， β 滑移面上的法线与 σ_1 方向的夹角为 $\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}$ 。这夹角的转向如图 4.17 所示。对照图 4.17 与图 4.3a，可知 β 滑移线（面）上的剪应力为负值，其方向如图 4.17 所示。当边坡体沿某一滑移曲线 $A_0A_1A_2A_3$ 滑动时（图 4.16），其上所受的抗滑剪应力方向与图 4.17 的 β 线上所受剪应力方向一致。因此，可知 $A_0A_1A_2A_3$ 为一条 β 滑移线。另外，由于在坡顶及坡面上无剪应力，所以在坡顶上， x 、 y 方向为主应力方向；而在坡面上，坡线方向及其法线方向为主应力方向。因为最大主应力 σ_1 方向在 α 正方向与 β 正方向之间，因此可判断，在坡顶上 y 方向是 σ_1 方向；在坡

$$q \geq c \operatorname{ctg} \varphi \left(\frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} - 1 \right) = \frac{2c \cos \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad (4.8.4)$$

其次，从式 (4.8.1) 也可见，对于无重介质，当 $c=0$ 时， $q=0$ ，因此解答也无效。

2. 极限稳定有重边坡

当考虑介质的自重时，坡面形状及滑移线都是曲线形状，必须采用数值积分求解的方法。但是对于这种情况，在坡肩附近（O点附近），仍可将介质看成是无重的。此时，式 (4.8.2) 给出了曲线临界坡面在坡顶处的倾角 ξ_0 与该点处压力 q_0 之间的关系^[1]

$$\xi_0 = \frac{\pi}{2} + \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{2} \ln \left(\frac{q_0 + c \operatorname{ctg} \varphi}{c \operatorname{ctg} \varphi} \cdot \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \right) \quad (4.8.5)$$

文献[1]用数值积分法研究了重要的特殊情况：当 $\xi_0 = \pi/2$ ，即坡面在坡顶处有竖直切线的情况，如果坡顶受有均布压力，那么由式 (4.8.5) 知道

$$q = \frac{2c \cos \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad (4.8.6)$$

如果在坡顶处没有载荷，文献[1]将这个压力看成是，在正半 x 轴之上的高为 h 的土层自重的作用结果，

$$h = \frac{2c \cos \varphi}{\gamma(1 - \sin \varphi)} = \frac{2c}{\gamma} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \quad (4.8.7)$$

见图 4.18，并指出，正半 x 轴之上的这个土层处于非极限状态。文献[1]认为：式 (4.8.7) 确定的值，给出了垂直边坡的最大高度，并强调指出：绝不能认为整个土体处于极限状态；由于这个错误的假定相当广泛地流行，因而导致两倍于式 (4.8.7) 的临界高度。文献[7]对此作了如下评论：上面的解释（存在非极限状态区），并没有协调了不同的表达式（垂直边坡最大高度的不同表达式）。因为文献[1]涉及的是在高度 h 之下的土层的破坏，两个不同的表达式能否进行比较，是完全值得怀疑的。看来，文献[7]的评论是正确的。

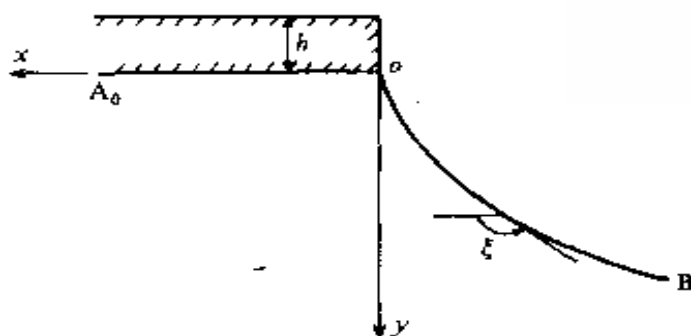


图 4.18 极限稳定边坡曲线

文献[8]介绍了森柯夫 (Сенков) 根据索柯洛夫斯基的理论进行了极限稳定边坡的试验, 得出了均质土体只考虑自重时的极限稳定边坡曲线方程。对于图 4.18 所示的坐标系, 这个边坡曲线的近似方程为

$$y = a \left(\frac{\pi}{2} - e^m \right) - x \operatorname{tg} \varphi \quad (4.8.8)$$

式中,

$$m = x / a$$

$$a = \frac{2c}{\gamma} \cdot \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}$$

利用文献[9]按照文献[1]的方法所制定的表格, 可简单、迅速地构造出等稳定边坡的坡面外形。

另外, 当边坡的深度较大时, 岩土材料处于高压状态, 此时材料极限应力状态应力圆的包络线已不再是式 (3.3.1) 所表示的直线, 而是某种曲线。文献[10]研究了当材料的极限应力状态应力圆的包络线为二次抛物线时, 等稳定边坡的坡面外形。

§ 4.9 速度场

在处于极限状态的理想弹塑性物体中, 塑性区的应力场将产生塑性应变率场 (或应变增量场), 其对应的速度场应是运动可能的, 否则所得到的应力场不会给出正确的解答^[11]。

1. 速度方程组

采用材料的理想刚塑性模型, 由式 (3.5.3) 和式 (3.5.4),

可得应变率 $\dot{\varepsilon}_i$ 和塑性势函数 g 之间的关系

$$\varepsilon_i = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_i} \quad (4.9.1)$$

式中, $\lambda \geq 0$

$$g = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \sin \psi - c \cos \psi \quad (4.9.2)$$

其中, ψ 为材料的剪胀角.

在平面变形的条件下, 速度场满足

$$v_x = v_x(x, y), \quad v_y = v_y(x, y), \quad v_z = 0 \quad (4.9.3)$$

由式 (2.5.2) 得应变率分量与速度分量之间的几何方程为

$$\dot{\varepsilon}_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \dot{\varepsilon}_y = \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad \dot{\gamma}_{xy} = \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (4.9.4)$$

用应力分量表示的塑性势函数 g 为

$$g = \left[\frac{1}{4} (\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \sin \psi - c \cos \psi \quad (4.9.5)$$

所以, 平面变形条件下的流动法则为

$$\dot{\varepsilon}_x = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_x}, \quad \dot{\varepsilon}_y = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_y}, \quad \dot{\gamma}_{xy} = \lambda \frac{\partial g}{\partial \tau_{xy}} \quad (4.9.6)$$

将式 (4.9.5) 代入式 (4.9.6) 中, 可得到

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_x = \frac{\partial v_x}{\partial x} &= \frac{\lambda}{2} \left\{ \frac{\frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y)}{\left[\frac{1}{4} (\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2}} - \sin \psi \right\} \\ \dot{\varepsilon}_y = \frac{\partial v_y}{\partial y} &= \frac{\lambda}{2} \left\{ \frac{\frac{1}{2} (\sigma_y - \sigma_x)}{\left[\frac{1}{4} (\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2}} - \sin \psi \right\} \\ \dot{\gamma}_{xy} = \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} &= \lambda \frac{\tau_{xy}}{\left[\frac{1}{4} (\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2}} \end{aligned} \right\} \quad (4.9.7)$$

将式 (4.3.4) 代入式 (4.9.7), 并引入常数

$$v = \frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}$$

得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x} &= \frac{\lambda}{2} (\cos 2\theta - \cos 2v) \\ \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -\frac{\lambda}{2} (\cos 2\theta + \cos 2v) \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} &= \lambda \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (4.9.8)$$

在式 (4.9.8) 中消去 λ , 可得速度方程组如下

$$(\cos 2\theta + \cos 2v) \frac{\partial v_x}{\partial x} + (\cos 2\theta - \cos 2v) \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (4.9.9)$$

$$\sin 2\theta \frac{\partial v_x}{\partial x} + \cos 2v \frac{\partial v_x}{\partial y} + \cos 2v \frac{\partial v_y}{\partial x} + \sin 2\theta \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (4.9.10)$$

2. 速度方程组的特征线解法

进一步简化方程组式 (4.9.9) 及式 (4.9.10)。将式 (4.9.9) 乘以 $\cos 2(\theta - v)$, 式 (4.9.10) 乘以 $\sin 2(\theta - v)$, 然后相加, 经过简单三角计算得:

$$\begin{aligned} & 2\cos 2v \cos(\theta - v) \left[\cos(\theta - v) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \sin(\theta - v) \frac{\partial v_x}{\partial y} \right] + \cos 2v \\ & \cdot \sin(\theta - v) \left[\cos(\theta - v) \frac{\partial v_y}{\partial x} + \sin(\theta - v) \frac{\partial v_y}{\partial y} \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.9.11)$$

将式 (4.9.9) 乘以 $\cos 2(\theta + v)$, 式 (4.9.10) 乘以 $\sin 2(\theta + v)$, 然后相加, 经过简单三角计算得:

$$\begin{aligned} & 2\cos 2v \cos(\theta + v) \left[\cos(\theta + v) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \sin(\theta + v) \frac{\partial v_x}{\partial y} \right] + \cos 2v \\ & \cdot \sin(\theta + v) \left[\cos(\theta + v) \frac{\partial v_y}{\partial x} + \sin(\theta + v) \frac{\partial v_y}{\partial y} \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.9.12)$$

我们用下式确定两个方向

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\theta - v), \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\theta + v) \quad (4.9.13)$$

方程式 (4.9.13) 所确定的曲线, 分别称为 α^* 、 β^* 线。这样, 式 (4.9.11) 及式 (4.9.12) 可写为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial s_{\alpha^*}} + \operatorname{tg}(\theta - v) \frac{\partial v_y}{\partial s_{\alpha^*}} &= 0 \\ \frac{\partial v_x}{\partial s_{\beta^*}} + \operatorname{tg}(\theta + v) \frac{\partial v_y}{\partial s_{\beta^*}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.9.14)$$

式中, s_{α^*} 、 s_{β^*} 分别为 α^* 、 β^* 线的弧长。这时, 式 (4.9.13) 称为方程组式 (4.9.9) 及式 (4.9.10) 的特征线方向, 而式 (4.9.14) 称为特征方向上的特征关系, (图 4.19)。如果材料服从关联流动法则, 那么 $\psi = \varphi$, $v = \mu$, 此时速度特征方向与应力特征方向重合。

当让 α^* (或 β^*) 速度特征线方向与 x 轴重合时, 即 $\theta = v$ (或 $-v$), 此时由式 (4.9.8) 的第一式, 有

$$\left. \frac{\partial v_x}{\partial x} \right|_{\theta = v(\text{或} -v)} = 0 \quad (4.9.15)$$

式 (4.9.15) 表明, 沿速度特征方向的正应变率率为零, 也就是说, 速度特征线没有伸缩。如果材料服从关联流动法则, 速度特征线、应力特征线、滑移线三者重合, 因此滑移线没有伸缩变形。用 v_{α^*} 、 v_{β^*} 表示速度矢量在 α^* 反方向、 β^* 反方向上的正交投影 (图 4.20)。从图 4.20 可看出速度分量的变换关系

$$\left. \begin{aligned} v_{\alpha^*} &= v_x \cos(\theta - v) + v_y \sin(\theta - v) \\ v_{\beta^*} &= v_x \cos(\theta + v) + v_y \sin(\theta + v) \end{aligned} \right\} \quad (4.9.16)$$

由式 (4.9.16) 可解出 v_x 、 v_y

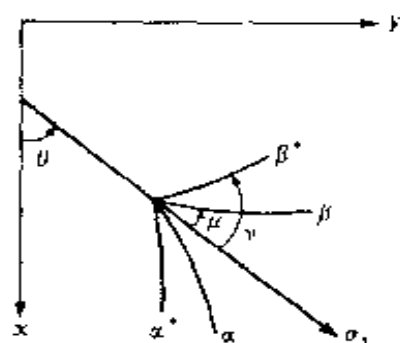


图 4.19 速度特征方向

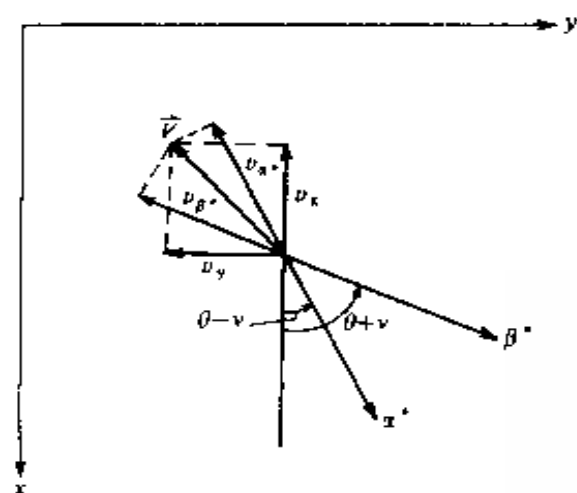


图 4.20 v_{α^*} 、 v_{β^*} 分量

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{v_{\alpha^*} \sin(\theta + v) - v_{\beta^*} \sin(\theta - v)}{\sin 2v} \\ v_y &= \frac{v_{\beta^*} \cos(\theta - v) - v_{\alpha^*} \cos(\theta + v)}{\sin 2v} \end{aligned} \right\} \quad (4.9.17)$$

将式 (4.9.17) 代入式 (4.9.14)，经过简单三角函数计算，可得：

$$\left. \begin{aligned} \text{沿 } \alpha^* \text{ 线: } dv_{\alpha^*} + (v_{\alpha^*} \operatorname{ctg} 2v - v_{\beta^*} \operatorname{csc} 2v) d\theta &= 0 \\ \text{沿 } \beta^* \text{ 线: } dv_{\beta^*} + (v_{\alpha^*} \operatorname{csc} 2v - v_{\beta^*} \operatorname{ctg} 2v) d\theta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.9.18)$$

$$\text{即 } \left. \begin{aligned} \text{沿 } \alpha^* \text{ 线: } dv_{\alpha^*} + (v_{\alpha^*} \operatorname{tg} \psi - v_{\beta^*} \operatorname{sec} \psi) d\theta &= 0 \\ \text{沿 } \beta^* \text{ 线: } dv_{\beta^*} + (v_{\alpha^*} \operatorname{sec} \psi - v_{\beta^*} \operatorname{tg} \psi) d\theta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.9.19)$$

式 (4.9.19) 是用 v_{α^*} 、 v_{β^*} 分量表示的速度特征关系。当材料服从关联流动法则时，速度特征关系为

$$\left. \begin{aligned} \text{沿 } \alpha \text{ 线: } dv_{\alpha} + (v_{\alpha} \operatorname{tg} \varphi - v_{\beta} \operatorname{sec} \varphi) d\theta &= 0 \\ \text{沿 } \beta \text{ 线: } dv_{\beta} + (v_{\alpha} \operatorname{sec} \varphi - v_{\beta} \operatorname{tg} \varphi) d\theta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.9.20)$$

对于纯粘性材料， $\varphi = 0$ ，式 (4.9.20) 变为

$$\left. \begin{aligned} \text{沿 } \alpha \text{ 线: } dv_{\alpha} - v_{\beta} d\theta &= 0 \\ \text{沿 } \beta \text{ 线: } dv_{\beta} + v_{\alpha} d\theta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.9.21)$$

3. 速度场的间断线

在图 4.16 中，当边坡体沿 $A_0A_1A_2A_3$ 面发生剪切破坏时，剪切面上侧区域为塑性区，有位移速度；而在剪切面下侧的区域为刚性区。因此，滑移线 $A_0A_1A_2A_3$ 将是速度场的间断线。

速度间断线应看作速度场中，从一个速度区连续过渡到另一个速度不同的区域的薄层的极限情况。在过渡层中心线上的某点 P ，作中心线的切向与法向，分别表示为 x 方向和 y 方向（图 4.21）。在过渡层中，沿 y

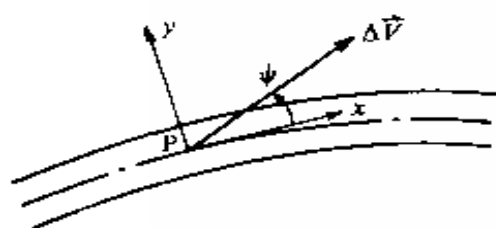


图 4.21 速度间断线

方向，速度变化很大；而沿 x 方向，速度变化很小。当过渡层的厚度趋于零时，即得到速度间断线。因此，在 P 点 $\frac{\partial v_x}{\partial x}$ 、

$\frac{\partial v_y}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial v_x}{\partial y}$ 、 $\frac{\partial v_y}{\partial y}$ 相比起来很小，可以被忽略。从式 (4.9.8) 可见，这只能发生在 $\theta = \pm v$ 的情况下。于是得出结论，速度间断线只能是速度特征线 α^* 或 β^* 。此时，由式 (4.9.8)，有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -\lambda \cos 2v = -\lambda \sin \psi \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} &= \pm \lambda \sin 2v = \pm \lambda \cos \psi \end{aligned} \right\} \quad (4.9.22)$$

由此得出，速度的法向分量间断量与其切向分量间断量的比值

$$\frac{\Delta v_y}{\Delta v_x} = \mp \operatorname{tg} \psi \quad (4.9.23)$$

其中，“-”号相应于 α^* 间断线，“+”号相应于 β^* 间断线。注意，在岩土材料塑性变形时，产生塑性体积膨胀 (§ 3.5)。这是速度法向分量发生间断的原因。式 (4.9.23) 表明，穿过速度间断线时，速度的变化矢量倾斜间断线于 ψ 角。对于服从关联流动法

则的材料，速度间断线是滑移线；穿过速度间断线时，速度的变化矢量倾斜间断线于 φ 角。

§ 4.10 条形基础极限承载能力

考虑压在无重介质半空间的光滑条形基础的极限承载能力问题（图 4.22），可想象，在基础下及其附近的介质中，将存在塑性区。考虑到本问题的对称性，这里只需研究右半部即可。在边界 BA、AF 上，因为无剪应力，所以 BAF 面为主平面。根据在 § 4.8 所作的分析，可知

$$\left. \begin{array}{l} \text{在BA上,} \\ \text{在AF上,} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \theta = \frac{\pi}{2} \\ \theta = \pi \end{array} \quad (4.10.1)$$

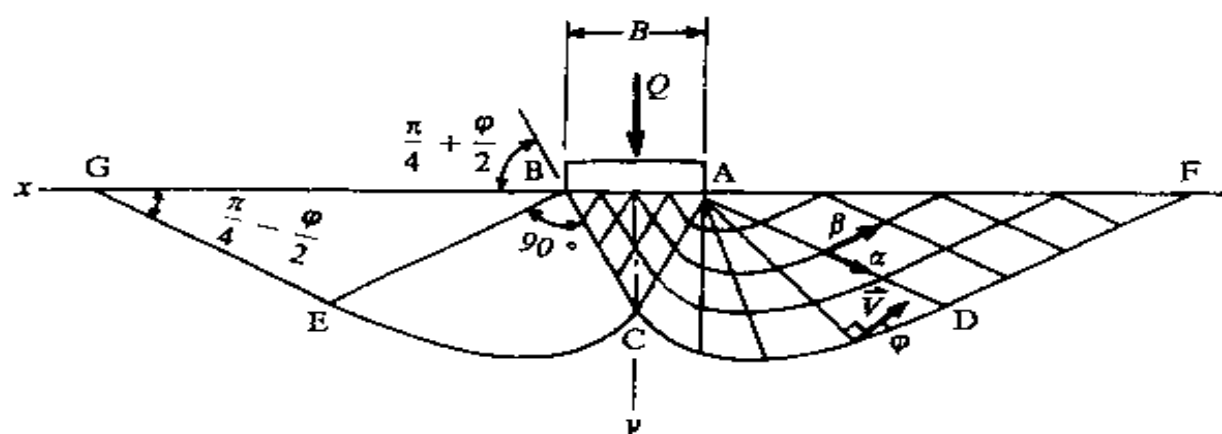


图 4.22 光滑条形基础的承载能力

这样，在边界 AF 的下面可作出均匀应力场的滑移线场 ADF。邻接于 ADF 区域的是一个简单应力场的滑移线场，其中 α 族滑移线交于 A 点。根据汉基定理的推论，可知 BAC 区域中的 α 族滑移线也为直线。在一条直的 α 线上， θ 为常数，另外 BA 线不是滑移线，其上 $\theta = \pi/2$ 为常数，又因为 BAC 区域中的每条 α 线均与 BA 线相交，所以在整个 BAC 区域中， θ 均等于 $\pi/2$ 。这样，根据式 (4.5.4)，知在 BAC 区域中 $\sigma = \text{常}$

数，于是 BAC 区域为均匀应力场区域。因此在 BA 边界线上，基础对地基的压应力 q 是均匀分布的。至此，决定条形基础的承载压力 q 的问题，跟 § 4.8 中求边坡的极限荷重问题是完全一样的；只要把式 (4.8.1) 中的 ξ 改为 π ，即可求得条形基础的极限承载压力

$$q = \left[\frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi} \exp(\pi \operatorname{tg}\varphi) - 1 \right] c \operatorname{ctg}\varphi \quad (4.10.2)$$

式(4.10.2)是普朗德尔于 1920 年首先得到的，因此这个解答常称为普朗德尔解。沿 z 方向每单位长度条形基础的极限承载力为

$$Q = Bq = B \left[\frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi} \exp(\pi \operatorname{tg}\varphi) - 1 \right] c \operatorname{ctg}\varphi \quad (4.10.3)$$

下面对服从关联流动法则的材料来研究速度场。假定基础竖直向下的速度为 1 (速度单位)。此时，三角形 ABC 区域与基础一起刚性向下的运动速度为 1，AC 线、CDF 线为速度间断线。在 CDF 线上的塑性区一侧的速度矢量将倾斜间断线于 φ 角。因为 α 线方向与 β 线方向的夹角为 $2\mu = \frac{\pi}{2} - \varphi$ ，所以，在 CDF 线上，速度矢量垂直于 α 线方向。因此，它们到 α 线上的正交投影 $v_\alpha = 0$ 。利用式 (4.9.20) 的第一式，对于直的 α 线， $d\theta = 0$ ，所以有 $dv_\alpha = 0$ 。又因为在 CDF 线上 $v_\alpha = 0$ ，所以在整个区域 ACDF 中

$$v_\alpha = 0 \quad (4.10.4)$$

现在来考察速度间断线 AC。在 AC 线左边的材料，有向下的单位速度。在 AC 线右边材料的速度以 \vec{V}' 表示，它的方向垂直于 AC。穿过速度间断线 AC，速度的变化矢量 $\Delta\vec{V}$ 倾斜 AC 线于 φ 角 (图 4.23)。于是，可得

$$V' = \frac{1}{2} \sec\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$$

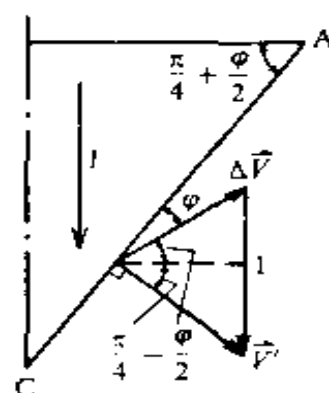


图 4.23 速度间断线 AC

线周界的切线方向为 σ_1 方向，即 $\theta = \xi$ 。

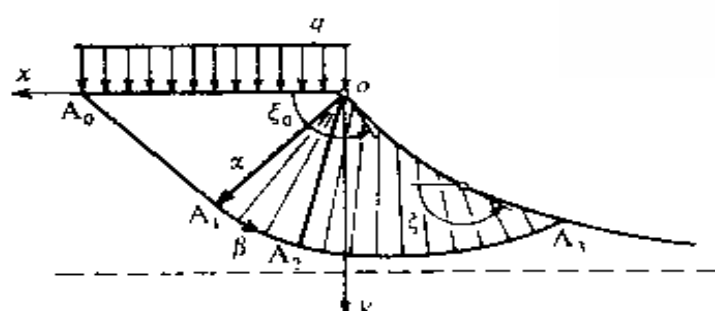


图 4.24 曲线边坡形状

对于纯粘性材料，屈服条件为式 (3.3.8)。在 A_0O 边界上， $\sigma_1 = q$ ， $\sigma_3 = \sigma_1 - 2c = q - 2c$ ，平均应力 $p = q - c$ ；在曲线周界处， $\sigma_3 = 0$ ， $\sigma_1 = \sigma_3 + 2c = 2c$ ， $p = c$ 。

在导出应力方程组的特征线解法时，采用的坐标系 xoy 如图 4.2 所示。对比现在所采用的坐标系 xoy (图 4.24)，可见图 4.2 中的 $\varepsilon = -\pi/2$ 。于是，式 (4.5.9) 中的 $\bar{p} = p - \gamma y$ 。这样，问题的边界条件可写为

$$\text{在 } A_0O \text{ 线上: } \bar{p} = p = q - c, \quad \theta = \pi/2 \quad (4.11.1)$$

$$\text{在周界上: } p = c, \quad \theta = \xi \quad (4.11.2)$$

在 A_0O 线上，由式 (4.11.1) 可确定 A_0O 线影响区域 A_0OA_1 中的 \bar{p} 及 θ 值。按照式 (4.5.10)，在 A_0OA_1 区域，

$$\left. \begin{aligned} \bar{p} &= q - c, \quad p = q + \gamma y - c \\ \theta &= \pi/2 \end{aligned} \right\} \quad (4.11.3)$$

并且 α 、 β 滑移线为互相垂直的 ($\varphi = 0$) 两族直线。

在区域 A_0OA_1 中 α 族滑移线为直线，根据汉基定理的推论可知，在整个滑移线场中， α 族滑移线都为直线，在 A_1OA_2 区域， α 族滑移线交于 O 点；在 A_2OA_3 区域中， α 族滑移线为不平行且不相交的直线族。

在 α 线上 θ 为常数，由式 (4.5.9) 知， \bar{p} 也为常数。因此，在直的 α 线上， \bar{p} 、 θ 均为常数。所以，可用任一条 β 线上的 \bar{p} 、

θ 值代表整个滑梯线场上的 \bar{p} 、 θ 的值。

在 β 线上，可应用式 (4.5.9) 的第二式的特征关系，即用 A_0OA_1 区域中的 \bar{p} 、 θ 值来表示 A_1OA_2 区域或 A_2OA_3 区域中的 \bar{p} 、 θ 值：

$$\bar{p} + 2c\theta = q - c + 2c\pi / 2$$

从上式即可得

$$p = q + \gamma y - c(2\theta - \pi + 1) \quad (4.11.4)$$

另外，在 A_1OA_2 区域中， α 线的方程为

$$\operatorname{tg}\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{y}{x}$$

如果把边坡曲线周界表示成暂时还未确定的参数方程形式： $x = x(\xi)$ ； $y = y(\xi)$ ，那么在区域 A_2OA_3 中的 α 线方程为

$$\operatorname{tg}\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{y - y(\theta)}{x - x(\theta)}$$

这样，

$$\left. \begin{array}{l} \text{在 } A_1OA_2 \text{ 区域: } p = q + \gamma y - c(2\theta - \pi + 1) \\ \operatorname{tg}\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{y}{x} \end{array} \right\} \quad (4.11.5)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{在 } A_2OA_3 \text{ 区域: } p = q + \gamma y - c(2\theta - \pi + 1) \\ \operatorname{tg}\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{y - y(\theta)}{x - x(\theta)} \end{array} \right\} \quad (4.11.6)$$

下面推导边坡曲线周界的方程式。根据式 (4.11.2) 及式 (4.11.6) 的第一式，沿边坡周界，有

$$y = \frac{2c}{\gamma} \left(\xi - \frac{\pi}{2} + 1 \right) - \frac{q}{\gamma} \quad (4.11.7)$$

由此得边坡在周界顶点处的倾角

$$\xi_0 = \frac{q}{2c} + \frac{\pi}{2} - 1 \quad (4.11.8)$$

另外，沿边坡周界，存在微分关系 $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\xi$ 。因此，根据式

(4.11.7), 有

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{dy}{d\xi} \operatorname{ctg} \xi = \frac{2c}{\gamma} \operatorname{ctg} \xi \quad (4.11.9)$$

考虑到条件: 当 $x=0$, $y=0$ 时, $\xi=\xi_0$, 积分式 (4.11.9), 给出

$$x = \frac{2c}{\gamma} \ln \frac{\sin \xi}{\sin \xi_0}$$

其次, 从式 (4.11.7) 及式 (4.11.8), 有

$$y = \frac{2c}{\gamma} (\xi - \xi_0)$$

于是, 边坡曲线周界的参数方程为

$$x = \frac{2c}{\gamma} \ln \frac{\sin \xi}{\sin \xi_0}, \quad y = \frac{2c}{\gamma} (\xi - \xi_0) \quad (4.11.10)$$

这里, 应考虑到条件 $\xi_0 > \pi/2$. 由式 (4.11.8), 得出

$$q \geq 2c$$

在式 (4.11.10) 中, 消去参数 ξ , 可得曲线边坡周界的方程为

$$y = \frac{2c}{\gamma} \left\{ \pi - \xi_0 - \arcsin \left[\exp \left(\frac{\gamma x}{2c} \right) \sin \xi_0 \right] \right\} \quad (4.11.11)$$

或

$$x = \frac{2c}{\gamma} \ln \frac{\sin \left(\xi_0 + \frac{\gamma y}{2c} \right)}{\sin \xi_0} \quad (4.11.12)$$

当 $x \rightarrow -\infty$ 时, 曲线周界有水平渐近线,

$$y = \frac{2c}{\gamma} (\pi - \xi_0) \quad (4.11.13)$$

图 4.25 为按照式 (4.11.11), 当 $\xi_0 = 90^\circ$ 和 $\xi_0 = 135^\circ$ 时所构造的边坡曲线周界外形, 水平虚线是它们的渐近线。图 4.25 的坐标, 是以特征长度 c/γ 为单位的。

下面考虑 $\xi_0 = \pi/2$ 时的特殊情况。这时边坡周界在顶点具有竖直切线。由式 (4.11.8) 可知, 此时沿正半 x 轴, 应作用有

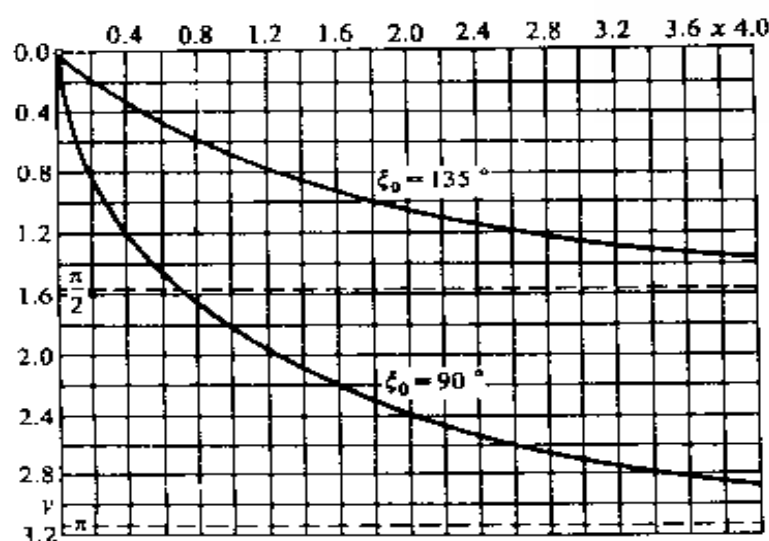


图 4.25 边坡曲线周界外形

应力

$$\sigma_y = 2c$$

把这个压力看成是在正半 x 轴之上的高为 h 的土层自重的作用结果。这层中的应力场为

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = \gamma(h + y), \quad \tau_{xy} = 0$$

由在正半 x 轴上应力分量 σ_y 的连续条件, 得

$$h = 2c / \gamma$$

这时, 在极限状态区域 A_0OA_1 中, 由式 (4.11.3)

$$\left. \begin{aligned} p &= c + \gamma y \\ \theta &= \pi / 2 \end{aligned} \right\} \quad (4.11.14)$$

于是, 根据式 (4.3.4), 即可得应力分量为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= p + c \cos 2\theta = \gamma y \\ \sigma_y &= p - c \cos 2\theta = 2c + \gamma y \\ \tau_{xy} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.11.15)$$

当 $\xi_0 = \pi / 2$ 时, 边坡曲线周界的方程为

$$y = \frac{2c}{\gamma} \arccos \left[\exp \left(-\frac{\gamma x}{2c} \right) \right] \quad (4.11.16)$$

或

$$x = \frac{2c}{\gamma} \ln \cos \left(\frac{\gamma y}{2c} \right) \quad (4.11.17)$$

边坡曲线周界的水平渐近线为

$$y = \pi c / \gamma \quad (4.11.18)$$

最后导出在 A_2OA_3 区域中 β 滑移曲线的方程。由式 (4.11.6)，有

$$y = [x - x(\theta)] \operatorname{tg} \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) + y(\theta) \quad (4.11.19)$$

β 滑移线所满足的微分方程为

$$dy = dx \operatorname{tg} \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \quad (4.11.20)$$

将式 (4.11.19) 代入式 (4.11.20)，并考虑到式 (4.11.7) 及式 (4.11.9)，可进行下面的推导：

$$\begin{aligned} dy &= d[x - x(\theta)] \operatorname{tg} \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{x - x(\theta)}{\cos^2 \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right)} d\theta + y'(\theta) d\theta \\ &= d[x - x(\theta)] \operatorname{tg} \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{x - x(\theta)}{\cos^2 \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right)} d\theta + \frac{2c}{\gamma} d\theta \\ &= dx \operatorname{tg} \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \\ &= d[(x - x(\theta))] \operatorname{tg} \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) + x'(\theta) \operatorname{tg} \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) d\theta \\ &= d[(x - x(\theta))] \operatorname{tg} \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{2c}{\gamma} \operatorname{ctg} \theta \operatorname{tg} \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) d\theta \end{aligned}$$

由上式可得

$$\begin{aligned} & d[x - x(\theta)] \left[\operatorname{tg} \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) - \operatorname{tg} \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \right] \\ & + \frac{x - x(\theta)}{\cos^2 \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right)} d\theta = - \frac{2c}{\gamma} \left[1 - \operatorname{ctg} \theta \operatorname{tg} \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \right] d\theta \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} & d[x - x(\theta)] \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)} \\ & + \frac{x - x(\theta)}{\cos^2\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)} d\theta = -\frac{2c}{\gamma} \left[1 - \operatorname{ctg}\theta \operatorname{tg}\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \right] d\theta \end{aligned}$$

将上式两边同乘以 $-\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$, 可得

$$\begin{aligned} & d[x - x(\theta)] - \frac{\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)} [x - x(\theta)] d\theta \\ & = \frac{2c}{\gamma} \frac{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\theta} \left[\sin\theta \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\theta \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \right] d\theta \\ & = \frac{2c}{\gamma} \frac{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\theta} \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) d\theta \end{aligned}$$

于是, 可得 $[x - x(\theta)]$ 所满足的微分方程如下:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\theta} [x - x(\theta)] - \frac{\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)} [x - x(\theta)] \\ & = -\frac{\sqrt{2}c}{\gamma} \frac{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\theta} \end{aligned}$$

解此微分方程得

$$x = x(\theta) - \frac{\sqrt{2}c}{\gamma} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \left(\ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \operatorname{const} \right) \quad (4.11.21)$$

将式 (4.11.21) 代入到式 (4.11.19), 得

$$y = -\frac{\sqrt{2}c}{\gamma} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \left(\ln \frac{\theta}{2} + \text{const}\right) + \lg\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) + y(\theta) \quad (4.11.22)$$

式 (4.11.21) 及式 (4.11.22), 即为 β 滑移曲线的参数方程, 其中的 $x(\theta)$ 及 $y(\theta)$ 为边坡曲线周界的参数方程, 它们由式 (4.11.10) 所确定。

§ 4.12 松散介质中井壁的压力

本节研究圆形竖井围岩对井壁的压力问题。假定围岩是满足式 (3.3.10) 屈服条件的松散介质。用滑移线解法, 得到了井壁压力的近似的解析表达式。

1. 轴对称问题的平衡微分方程

在空间问题中, 如果物体的几何形状, 约束情况以及所受的外来因素, 都对称于某一轴, 则所有的应力、应变和位移也对称于这一轴。这种问题称为空间轴对称问题。显然, 理想情况下的竖井围岩的分析属于空间轴对称问题。

在研究竖井围岩问题时, 用圆柱坐标 r 、 θ 、 z 比用直角坐标 x 、 y 、 z 方便得多。这是因为, 如果以竖井轴线为 z 轴 (图 4.26), 则所有的应力分量、应变分量和位移分量都将只是 r 和 z 的函数, 而不随 θ 变化。

取 z 轴铅直向下, 用相距 dr 的两个圆柱面, 通过 z 轴的互成 $d\theta$ 角的两个铅直面及相距 dz 的两个水平面, 从围

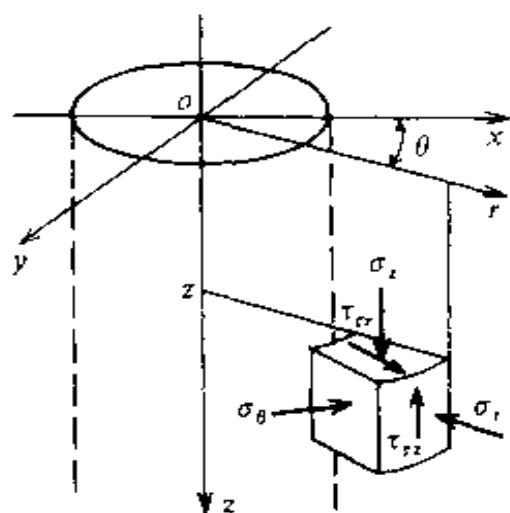


图 4.26 竖井围岩微元体的受力状态

岩中割取一个微小六面体 (图 4.26)。沿 r 方向的正应力, 称为径向正应力, 用 σ_r 代表; 沿 θ 方向的正应力, 称为环向正应力, 用 σ_θ 代表; 沿 z 方向的正应力, 称为轴向正应力, 用 σ_z 代表; 作用在圆柱面上而沿 z 方向作用的剪应力用 τ_{rz} 代表, 作用在水平面上而沿 r 方向作用的剪应力用 τ_{zr} 代表。根据剪应力的互等关系, 有 $\tau_{zr} = \tau_{rz}$ 。由于对称性, $\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r}$ 及 $\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta}$ 都不存在。这样, 总共只有 4 个应力分量: σ_r 、 σ_θ 、 σ_z 、 τ_{rz} , 它们只是 r 和 z 的函数。应力分量的正方向示于图 4.26 上。

现在研究图 4.26 中微小六面体的平衡条件。在六面体的内圆柱面上的法向内力为 $\sigma_r r d\theta dz$, 切向内力为 $\tau_{rz} r d\theta dz$ 。外圆柱面相对于内圆柱面, 坐标 r 产生了增量。因此, 外圆柱面上的法向内力为 $\left[\sigma_r r + \frac{\partial(\sigma_r r)}{\partial r} dr \right] d\theta dz$, 切向内力为 $\left[\tau_{rz} r + \frac{\partial(\tau_{rz} r)}{\partial r} dr \right] d\theta dz$ 。同理, 六面体上微面上的法向内力为 $\sigma_z r d\theta dr$, 切向内力为 $\tau_{rz} r d\theta dr$; 下微面上的法向内力为 $\left(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz \right) r d\theta dr$, 切向内力为 $\left(\tau_{rz} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} dz \right) r d\theta dr$ 。六面体的两个铅直微面上的法向内力为 $\sigma_\theta r dr dz$ 。六面体所受的重力为 $\gamma r d\theta dr dz$, γ 为围岩的容重。

将六面体所受的各力投影到六面体中心的径向轴上, 得平衡方程

$$\begin{aligned} & \sigma_r r d\theta dz - \left[\sigma_r r + \frac{\partial(\sigma_r r)}{\partial r} dr \right] d\theta dz + \tau_{rz} r d\theta dr \\ & - \left(\tau_{rz} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} dz \right) r d\theta dr + 2\sigma_\theta r dr dz \sin \frac{d\theta}{2} = 0 \end{aligned}$$

其中, 第五项 $2\sigma_\theta r dr dz \sin \frac{d\theta}{2} \approx \sigma_\theta r dr dz d\theta$ 是两个铅直微面上的法向内力到中心径向轴上的投影。将六面体上的各力投影到 z 轴上, 得平衡方程

$$\sigma_z r d\theta dr - \left(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz \right) r d\theta dr + \tau_{rz} r d\theta dz - \left[\tau_{rz} r + \frac{\partial (\tau_{rz} r)}{\partial r} dr \right] d\theta dz + \gamma r d\theta dr dz = 0$$

将以上两方程化简，得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= \gamma \end{aligned} \right\} \quad (4.12.1)$$

式 (4.12.1) 即为竖井围岩问题的平衡微分方程。

2. 屈服条件

前已述及，对空间轴对称问题， σ_θ 是一个主应力。当考虑主应力的次序为 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ 时，松散介质的极限状态必须满足屈服条件式 (3.3.4)

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + c \cot \varphi \right) \sin \varphi \quad (4.12.2)$$

此时，即使假定 $\sigma_\theta = \sigma_2$ ，从而 σ_1 、 σ_3 代表在 $r-z$ 平面内的主应力，于是可用 σ_r 、 σ_z 和 τ_{rz} 表示 σ_1 、 σ_3 。但是，可利用的三个基本方程式 (4.12.1) 及式 (4.12.2) 中却包含了 4 个未知函数 σ_r 、 σ_θ 、 σ_z 和 τ_{rz} ，因而，问题不是静力可定的。所以，对于空间轴对称问题，只满足一个极限条件式 (4.12.2) 是不充分的。对于大多数实际重要的问题来说，假定环向正应力 σ_θ 等于其余两个主应力之一，多半是正确的，这个假设，就是所谓哈尔-卡门 (Haar-Von Karman) 完全塑性准则^[15, 16]。即假定： $\sigma_1 = \sigma_2(\sigma_\theta) > \sigma_3$ 或 $\sigma_1 > \sigma_2(\sigma_\theta) = \sigma_3$ 。

对于所研究的井壁压力问题，因为围岩有向井筒轴线方向移动的趋势，围岩在环向有被压缩和楔紧的作用，所以 σ_θ 应为较大的主应力。于是，对于井壁压力问题，哈尔-卡门假设为

$$\sigma_\theta = \sigma_2 = \sigma_1 \quad (4.12.3)$$

又因为 $\theta_1 = \delta - \mu = \delta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$ (图 4.27), 进一步利用式 (4.3.4), 其中用 σ_r 代替 σ_x , σ_z 代替 σ_y , τ_{rz} 代替 τ_{xy} , θ_1 代替 θ , 这些表达式可改写为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma[1 + \sin\varphi \sin(2\delta + \varphi)] - c \cot\varphi \\ \sigma_z &= \sigma[1 - \sin\varphi \sin(2\delta + \varphi)] - c \cot\varphi \\ \tau_{rz} &= -\sigma \sin\varphi \cos(2\delta + \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (4.12.7)$$

根据式 (4.12.3)

$$\sigma_\theta = \sigma_1 = p + R = \sigma(1 + \sin\varphi) - c \cot\varphi \quad (4.12.8)$$

这样就得到了考虑极限状态条件式 (4.12.2) 及式 (4.12.3) 的松散介质的应力分量的表达式。

3. 应力方程组

为了建立极限状态微分方程, 将式 (4.12.7) 及式 (4.12.8) 代入平衡方程式 (4.12.1), 结果得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sin\varphi} \frac{\partial\sigma}{\partial r} + \left[\frac{\partial\sigma}{\partial r} \sin(2\delta + \varphi) - \frac{\partial\sigma}{\partial z} \cos(2\delta + \varphi) \right] \\ & + 2\sigma \left[\frac{\partial\delta}{\partial r} \cos(2\delta + \varphi) + \frac{\partial\delta}{\partial z} \sin(2\delta + \varphi) \right] \\ & + \frac{\sigma}{r} [\sin(2\delta + \varphi) - 1] = 0 \\ & \frac{1}{\sin\varphi} \frac{\partial\sigma}{\partial z} - \left[\frac{\partial\sigma}{\partial z} \sin(2\delta + \varphi) + \frac{\partial\sigma}{\partial r} \cos(2\delta + \varphi) \right] \\ & + 2\sigma \left[-\frac{\partial\delta}{\partial z} \cos(2\delta + \varphi) + \frac{\partial\delta}{\partial r} \sin(2\delta + \varphi) \right] \\ & - \frac{\sigma}{r} \cos(2\delta + \varphi) = \frac{\gamma}{\sin\varphi} \end{aligned}$$

整理这些方程式, 首先将第一式乘以 $\cos\delta$, 第二式乘以 $\sin\delta$, 并将它们相加; 然后从乘以 $\sin(\delta + \varphi)$ 的第一式, 减去乘以 $\cos(\delta + \varphi)$ 的第二式, 结果得

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sin\varphi} \left(\frac{\partial\sigma}{\partial r} \cos\delta + \frac{\partial\sigma}{\partial z} \sin\delta \right) + \left[\frac{\partial\sigma}{\partial r} \sin(\delta + \varphi) \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial\sigma}{\partial z} \cos(\delta + \varphi) \right] + 2\sigma \left[\frac{\partial\delta}{\partial r} \cos(\delta + \varphi) + \frac{\partial\delta}{\partial z} \sin(\delta + \varphi) \right] \\
& \quad + \frac{\sigma}{r} [\sin(\delta + \varphi) - \cos\delta] = \gamma \frac{\sin\delta}{\sin\varphi} \\
& \frac{1}{\sin\varphi} \left[\frac{\partial\sigma}{\partial r} \sin(\delta + \varphi) - \frac{\partial\sigma}{\partial z} \cos(\delta + \varphi) \right] \\
& \quad + \left(\frac{\partial\sigma}{\partial r} \cos\delta + \frac{\partial\sigma}{\partial z} \sin\delta \right) + 2\sigma \left(-\frac{\partial\delta}{\partial r} \sin\delta + \frac{\partial\delta}{\partial z} \cos\delta \right) \\
& \quad - \frac{\sigma}{r} [\sin(\delta + \varphi) - \cos\delta] = -\gamma \frac{\cos(\delta + \varphi)}{\sin\varphi}
\end{aligned}$$

进而将所得方程中的第一式乘以 $\sin\varphi$ ，并且从该式中减去乘以 $\sin^2\varphi$ 的第二式，然后则反之，从乘以 $\sin\varphi$ 的第二式，减去乘以 $\sin^2\varphi$ 的第一式。这样把得到的方程左部分和右部分都除以 $\cos^2\varphi$ ，最后得

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial\sigma}{\partial r} \cos\delta + \frac{\partial\sigma}{\partial z} \sin\delta \right) + 2\sigma \left(\frac{\partial\delta}{\partial r} \cos\delta + \frac{\partial\delta}{\partial z} \sin\delta \right) \operatorname{tg}\varphi \\
& \quad + \frac{\sigma}{r} [\sin(\delta + \varphi) - \cos\delta] \frac{1 + \sin\varphi}{\cos\varphi} \operatorname{tg}\varphi = \gamma \frac{\sin(\delta + \varphi)}{\cos\varphi} \\
& \left[\frac{\partial\sigma}{\partial r} \sin(\delta + \varphi) - \frac{\partial\sigma}{\partial z} \cos(\delta + \varphi) \right] \\
& \quad - 2\sigma \left[\frac{\partial\delta}{\partial r} \sin(\delta + \varphi) - \frac{\partial\delta}{\partial z} \cos(\delta + \varphi) \right] \operatorname{tg}\varphi \\
& \quad - \frac{\sigma}{r} [\sin(\delta + \varphi) - \cos\delta] \frac{1 + \sin\varphi}{\cos\varphi} \operatorname{tg}\varphi = -\gamma \frac{\cos\delta}{\cos\varphi}
\end{aligned}$$

在得到的方程中，第一、二式的两项括号内不外是 σ 和 δ 对第一族（第一方程式）和第二族（第二方程式）滑移线的求导。用 s_1 和 s_2 相应地表示第一和第二族滑移线的弧长。这样，微分方程将有如下形式：

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial \sigma}{\partial s_1} + 2\sigma \frac{\partial \delta}{\partial s_1} \operatorname{tg} \varphi + \frac{\sigma}{r} [\sin(\delta + \varphi) - \cos \delta] \\ & \cdot \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} \operatorname{tg} \varphi = \gamma \frac{\sin(\delta + \varphi)}{\cos \varphi} \\ & \frac{\partial \sigma}{\partial s_2} - 2\sigma \frac{\partial \delta}{\partial s_2} \operatorname{tg} \varphi - \frac{\sigma}{r} [\sin(\delta + \varphi) - \cos \delta] \\ & \cdot \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} \operatorname{tg} \varphi = -\gamma \frac{\cos \delta}{\cos \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (4.12.9)$$

文献[15]提出的松散介质作用于竖井地压的近似计算简图如图 4.28 所示, 其中做了如下假设: 极限状态区被锥形表面圈定, 其母线与水平面的夹角为 $\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$ (类似挡土墙后的

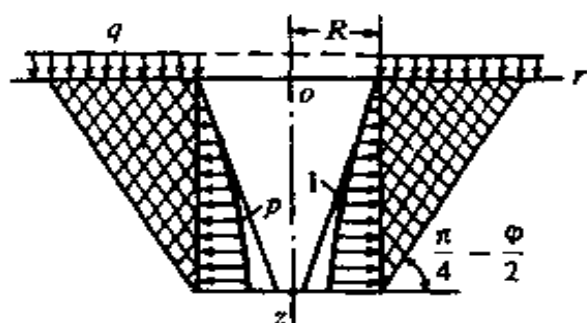


图 4.28 松散介质极限平衡理论轴对称问题计算简图

的滑动体)。在这种情况下, 极限状态区的主应力为

$\sigma_1 = \sigma_z$, $\sigma_3 = \sigma_r$, $\tau_{rz} = 0$, 即已忽略围岩与井壁的摩擦。应该指出, 上面的假设仅在浅部开挖时才是正确的。

根据上述假定, 认为 r - z 面内的滑移线为两组平行直线。第一族滑移线的倾角是 (图 4.28)

$$\delta = -\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = \text{const} \quad (4.12.10)$$

将式 (4.12.10) 代入式 (4.12.9) 的第一式, 并注意

$$\frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$$

可得到

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sigma}{\partial s_1} - 2\frac{\sigma}{r} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \operatorname{tg} \varphi \\ & = -\gamma \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos \varphi} \end{aligned} \quad (4.12.11)$$

考虑到

$$ds_1 = \frac{dr}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}$$

并引入符号

$$\eta = 2\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \quad (4.12.12)$$

从式 (4.12.11) 可得到, 沿第一族滑移线, 有

$$\frac{d\sigma}{dr} - \eta \frac{\sigma}{r} = -\frac{\gamma}{\cos\varphi} \quad (4.12.13)$$

微分方程式 (4.12.13) 的解为

$$\sigma = C_1 r^\eta + \frac{\gamma r}{(\eta - 1)\cos\varphi}$$

其中, C_1 为积分常数。

于是, 由式 (4.12.7) 及式 (4.12.8), 可得应力分量的表达式如下

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= C_1 (1 - \sin\varphi) r^\eta + \gamma r \frac{1 - \sin\varphi}{(\eta - 1)\cos\varphi} - c \operatorname{ctg}\varphi \\ \sigma_\theta &= \sigma_z = C_1 (1 + \sin\varphi) r^\eta + \gamma r \frac{1 + \sin\varphi}{(\eta - 1)\cos\varphi} - c \operatorname{ctg}\varphi \end{aligned} \right\} \quad (4.12.14)$$

用 z_a 表示第一族滑移线与井壁交点的纵坐标, 以 r_b 表示同一滑移线与水平地表面交点的横坐标, 此时有

$$r_b = R + z_a \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \quad (4.12.15)$$

式中, R 为井筒半径。

利用条件 $\sigma_z|_{r=r_b} = q$ (q 为表面载荷), 可确定积分常数

$$C_1 = \frac{q + c \operatorname{ctg}\varphi}{r_b^\eta (1 + \sin\varphi)} - \frac{\gamma}{r_b^{\eta-1}} \cdot \frac{1}{(\eta - 1)\cos\varphi} \quad (4.12.16)$$

将式 (4.12.16) 代入式 (4.12.14), 并注意到

$$\frac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi} = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right), \quad \frac{1 - \sin\varphi}{\cos\varphi} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$$

可得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \gamma r \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}{\eta - 1} \left[1 - \left(\frac{r}{r_b}\right)^{\eta-1} \right] \\ &\quad + q \left(\frac{r}{r_b}\right)^{\eta} \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \\ &\quad + c \left[\left(\frac{r}{r_b}\right)^{\eta} \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) - 1 \right] \operatorname{ctg} \varphi \\ \sigma_{\theta} = \sigma_z &= \gamma r \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{\eta - 1} \left[1 - \left(\frac{r}{r_b}\right)^{\eta-1} \right] \\ &\quad + q \left(\frac{r}{r_b}\right)^{\eta} + c \left[\left(\frac{r}{r_b}\right)^{\eta} - 1 \right] \operatorname{ctg} \varphi \end{aligned} \right\} \quad (4.12.17)$$

由式 (4.12.17) 的第一式, 令 $r=R$, 即得井壁上的压力

$$\begin{aligned} p_a &= \gamma R \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}{\eta - 1} \left[1 - \left(\frac{R}{r_b}\right)^{\eta-1} \right] \\ &\quad + q \left(\frac{R}{r_b}\right)^{\eta} \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \\ &\quad + c \left[\left(\frac{R}{r_b}\right)^{\eta} \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) - 1 \right] \operatorname{ctg} \varphi \end{aligned} \quad (4.12.18)$$

将式 (4.12.15) 代入式 (4.12.18), 即可得到井壁压力 p_a 随 z_a 的变化规律。

当没有地面载荷 ($q=0$) 和粘结力 ($c=0$), $z_a \rightarrow \infty$ 时, 井壁压力趋于常数

$$p_a = \gamma R \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}{\eta - 1} \quad (4.12.19)$$

式中, η 用式 (4.12.12) 确定。

在图 4.28 中, 对 $q=c=0$ 的情况, 画出了 p_a 的变化曲线。

为了进行比较，在图 4.28 中的直线 1，表示按式 (4.7.6) 第一式确定的平面变形问题的主动土压力分布规律。

以上，我们求得了井壁压力的近似解析表达式。用类似的方法，可以研究空间轴对称的边坡稳定问题。文献[17]对一般形式的轴对称边坡的极限平衡状态，用数值积分应力方程组的方法，求得了极限稳定边坡的坡面外形曲线。

第五章 松散介质塑性极限分析方法

第四章求解了竖直挡土墙的土压力、边坡的极限载荷及条形基础的承载能力等问题。在这个解法中，塑性区中的应力分布需要满足平衡方程、屈服条件和应力边界条件；速度分布需要满足几何方程、按流动法则确定的速度基本方程及必要的速度边界条件等，这是一个典型的理想刚塑性边值问题。这种精确的解法是塑性力学的研究内容之一。但是，这种严格的分析方法，除了简单情况外，很少能获得精确解答。一般来讲，需要做复杂的数值计算，才能得到近似解答。这对工程应用来讲，会受到一些限制。

本章将对极限平衡的另一种有效的严格分析方法——塑性极限分析方法，作系统的介绍。作为对这种方法的具体应用，本章研究了垂直边坡的临界高度（包括具有抗拉能力材料、无抗拉能力材料及纯粘性土的垂直边坡）、地基承载能力（无限宽和有限宽地基）、边坡临界高度等问题。最后，根据塑性极限分析方法的理论，对滑移线解法和极限平衡方法进行了评论。这些内容，清晰地阐述了将塑性理论应用于松散介质力学问题中所遇到的一些基本概念，会使读者对这些问题力学分析的实质有更透彻的理解。

§ 5.1 引言

在理想刚塑性体边值问题的滑移线解法中，必须构造出塑性区的滑移线场，利用特征关系，求解出基本应力未知量，从而得到应力分布。为了证实解答的有效性，还需同时求解出合理的速度分布。对于边坡问题，在这个求解的过程中，即得到了边坡的极限载荷或曲线边坡周界的方程。但是，如果对边坡体内极限状

态的应力分布和速度分布不太感兴趣，而只关心边坡的极限荷重、临界坡高或稳定安全系数等量，那么，能否不求解边坡体内的真实应力分布和速度分布，而通过其他方法直接求得边坡的一些临界的量值呢？塑性极限分析原理，即提供了一个直接求解极限荷重或临界高度等量的方法。

在塑性极限分析方法中，采用材料的理想刚塑性模型，即不考虑材料的弹性变形及应变强化或软化效应；考虑初始塑性流动（刚刚进入极限状态），变形还很小，可以不计变形对平衡关系的影响，变形前后都使用同一个平衡方程；并根据材料相关联流动法则（正交流动法则）建立极限分析定理。也就是说，在塑性极限分析理论中，以理想化的方式考虑应力—应变关系。当然，在塑性极限分析理论中，还需要使用平衡方程、屈服条件和几何方程。

利用极限分析方法，只有对个别的、简单的问题，才能求得极限载荷或其他临界量的精确值；一般来说，它只能提供极限载荷等临界量的上限值或下限值。

极限分析方法相对于滑移线解法或极限平衡方法来说，有许多优点。首先，它为人们提供了物体一个破坏模式的清晰的物理图示；同时，极限分析定理在概念上是简单的，易于为工程师们所接受；并且，极限分析方法中的计算，相对来说是简便易行的：可以不必经过对很多滑移面的计算，就可直接求出极限载荷、临界坡高或安全系数的公式，且可制成图表以备查用，手续简便。即使对于较复杂的问题，通常也允许得到封闭形式的解答。

另外，极限分析方法，除了可作为确定极限载荷等临界量的一种简便、实用的计算手段外，它还具有很大的理论价值：借助于极限分析定理，可完全阐明滑移线解法和极限平衡解法的意义和有效性。

§ 5.2 虚功率原理

在塑性极限分析中, 极限分析定理是利用虚功率原理来证明的。同时, 虚功率原理也是连续体力学的一个基本原理, 很多解决连续体力学的近似方法, 也是建立在它的基础之上的。下面用 § 2.7 中介绍过的下标记号与求和约定, 来叙述并证明虚功率原理。

这里考虑占据表面 $S = S_t + S_v$ 的区域上的物体的两个状态。

平衡应力场 σ_{ij}' (第一状态) 是指这样的应力场, 它在域 V 内满足平衡方程, 在应力边界 S_t 上满足应力边界条件:

$$\text{在 } V \text{ 内: } \sigma_{ji}',_{,j} + X_i = 0 \quad (5.2.1)$$

$$\text{在 } S_t \text{ 上: } \sigma_{ji}' n_j = \bar{X}_i \quad (5.2.2)$$

应注意, 满足平衡要求的应力场未必是真实应力场, 因为它未必能产生满足几何方程的应变率场和速度场。

相容速度场 v_i'' (第二状态) 在域 V 内产生应变率场, 在速度边界 S_v 上满足零边界条件:

$$\text{在 } V \text{ 内: } \dot{\epsilon}_{ij}'' = \frac{1}{2} (v_{i'',j} + v_{j'',i}) \quad (5.2.3)$$

$$\text{在 } S_v \text{ 上: } v_i'' = 0 \quad (5.2.4)$$

式(5.2.3)是类似于式(2.7.3)的几何方程。应注意, 相容的速度场未必是真实的速度场, 因为它未必能产生满足平衡条件的应力场。

虚功率原理将上述的平衡应力场 σ_{ij}' 和相容速度场 v_i'' 在数学上用下面等式联系起来:

$$\int_V \sigma_{ij}' \dot{\epsilon}_{ij}'' dV = \int_V X_i v_i'' dV + \int_{S_t} \bar{X}_i v_i'' dS \quad (5.2.5)$$

虚功率原理式(5.2.5)的物理意义为: 外力在相容速度上所作的功率, 等于平衡应力在相应的相容应变率上所作的功率。

现在来证明虚功率原理, 由式(5.2.5)的左边推导出式(5.2.5)

子，称为极限载荷乘子，用 m^* 来表示。用 σ_{ij} 、 v_i 和 $\dot{\epsilon}_{ij}$ 表示处于极限状态时物体内的应力场、速度场和应变率场。那么，对于物体的极限状态，可写出虚功率原理：

$$\int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV = m^* \left(\int_V X_i^0 v_i dV + \int_{S_t} \bar{X}_i^0 v_i dS \right) \quad (5.3.2)$$

这是因为，极限状态下的真实应力场及速度场当然是平衡应力场和相容速度场。

1. 静力场和机动场

为了叙述塑性极限载荷的上、下限定理，先定义几个名词：

静力许可应力场（简称静力场） σ_{ij}^- ，满足以下三个条件：

- (1) 在 V 内： $\sigma_{ij,j}^- + m^- X_i^0 = 0$
- (2) 在 S_t 上： $\sigma_{ij}^- n_j = m^- \bar{X}_i^0$
- (3) 在 V 内不违反屈服条件： $f(\sigma_{ij}^-) \leq 0$

其中，参数 m^- 称为静力许可载荷乘子。满足上述 (1)、(2) 两条件的应力场为平衡应力场。可见，当平衡应力场处处不违背屈服条件时，即为静力许可应力场。

运动许可速度场（简称机动场） v_i^+ ，满足以下三个条件：

- (1) 在 V 内可确定应变率： $\dot{\epsilon}_{ij}^+ = \frac{1}{2} (v_{i,j}^+ + v_{j,i}^+)$
- (2) 在 S_v 上： $v_i^+ = 0$
- (3) 外力功率大于零： $\int_V X_i^0 v_i^+ dV + \int_{S_t} \bar{X}_i^0 v_i^+ dS > 0$

其中条件 (3) 的物理意义为：外界输入能量，以产生塑性变形。满足上述 (1)、(2) 两条件的速度场，即为相容速度场。可见，使外力功率大于零的相容速度场，即为运动许可速度场。

运动许可载荷乘子 m^+ ，它是由运动许可速度场 v_i^+ ，根据下式定义的

$$\int_V \sigma_{ij}^+ \dot{\epsilon}_{ij}^+ dV = m^+ \left(\int_V X_i^0 v_i^+ dV + \int_{S_t} \bar{X}_i^0 v_i^+ dS \right) \quad (5.3.3)$$

这里 σ_{ij}^+ 是根据屈服条件 $f(\sigma_{ij}^+) = 0$ 及正交流动法则 $\dot{\epsilon}_{ij}^+ = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}^+}$

求出的应力（后面再讲，用于边坡稳定问题的 $\sigma_{ij}^+ \dot{\epsilon}_{ij}^+$ 的计算问题）。因此， σ_{ij}^+ 不一定满足平衡方程，故式 (5.3.3) 只可看成是求 m^+ 的等式，而不要看成是从虚功率原理得到的等式。

2. 极限分析定理

下面分别陈述并证明极限载荷的下限定理及上限定理。

下限定理（静力定理）：极限载荷乘子是最大的静力许可载荷乘子。

$$m^- \leq m^* \quad (5.3.4)$$

证明：分别取静力许可应力场 σ_{ij}^- 及极限状态下的速度场 v_i 作为虚功率原理中的平衡应力场及相容速度场，写出虚功率原理

$$\int_V \sigma_{ij}^- \dot{\epsilon}_{ij} dV = m^- \left(\int_V X_i^0 v_i dV + \int_{S_t} \bar{X}_i^0 v_i dS \right) \quad (5.3.5)$$

式(5.3.2)减去式(5.3.5)，得到

$$\begin{aligned} & \int_V (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^-) \dot{\epsilon}_{ij} dV \\ &= (m^* - m^-) \left(\int_V X_i^0 v_i dV + \int_{S_t} \bar{X}_i^0 v_i dS \right) \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

因为 σ_{ij} 及 $\dot{\epsilon}_{ij}$ 是极限状态时的应力及其所产生的塑性应变率，而 σ_{ij}^- 不违背屈服条件，按照 § 3.4 中的最大塑性功原理式(3.4.1)，有

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^-) \dot{\epsilon}_{ij} \geq 0$$

由于极限状态下的速度场也是运动许可速度场，故有

$$\int_V X_i^0 v_i dV + \int_{S_t} \bar{X}_i^0 v_i dS > 0$$

所以，从式(5.3.6)得

$$m^* - m^- \geq 0$$

下限定理得证。

由下限定理求得的 m^- 值不可能超过 m^* ，所以 m^* 值是唯一的，即不论用什么求解方法也不可能求得两个不同的 m^* 值。假设可得到两个 m^* 值： m_1^* 及 m_2^* 。把 m_1^* 对应的应力状态 σ_{ij} 作为静力许可应力场，而把 m_2^* 对应于极限状态，应用下限定理得出： $m_1^* < m_2^*$ 。同理可得出 $m_2^* < m_1^*$ ，即 $m_1^* = m_2^*$ ， m^* 是唯一的。

应用下限定理时，可以考虑几个不同的静力许可应力场，它们分别对应着不同的静力许可载荷乘子 m^- ，这时应选其中最大者，因为它比其他的 m^- 更接近于 m^* 。

由下限定理，还可推出如下的结论。如果一个静力场 σ_{ij}^- 满足：

$$\text{在 } V \text{ 内: } \sigma_{ij,j}^- + X_i^- = 0$$

$$\text{在 } S_1 \text{ 上: } \sigma_{ij}^- n_j = \bar{X}_i^-$$

$$\text{在 } V \text{ 内: } f(\sigma_{ij}^-) \leq 0$$

其中， X_i^- 及 \bar{X}_i^- 是已知的体力及面力分布函数，则物体在体力 $X_i = \eta X_i^-$ 及在 S_1 上的面力 $\bar{X}_i = \eta \bar{X}_i^-$ 作用下（ η 为满足 $0 < \eta < 1$ 的任意正数），将不破坏。证明如下：把 X_i^- 、 \bar{X}_i^- 看成为 X_i^0 、 \bar{X}_i^0 ，那么静力场 σ_{ij}^- 相应于 $m^- = 1$ ，由下限定理知， $1 < m^*$ ，从而得出 $\eta < 1 < m^*$ ，即可得出上面的结论。

文献[18]指出，下限定理肯定了人们的想法：如果可能，结构将调整它自身以承担作用载荷。

上限定理（机动定理）：极限载荷乘子是最小的运动许可载荷乘子。

$$m^* \leq m^+ \quad (5.3.7)$$

证明：分别取极限状态下的应力场 σ_{ij} 及运动许可的速度场 v_{ij}^+ 作为虚功率原理中的平衡应力场及相容速度场，写出虚功率原理：

$$\int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^+ dV = m^* \left(\int_V X_i^0 v_i^+ dV + \int_{S_1} \bar{X}_i^0 v_i^+ dS \right) \quad (5.3.8)$$

式(5.3.3)减去式(5.3.8), 得到

$$\begin{aligned} & \int_V (\sigma_{ij}^+ - \sigma_{ij}) \dot{\varepsilon}_{ij}^+ dV \\ &= (m^+ - m^*) \left(\int_V X_i^0 v_i^+ dV + \int_{S_t} \bar{X}_i^0 v_i^+ dS \right) \quad (5.3.9) \end{aligned}$$

式中的 σ_{ij}^+ 虽然不一定是极限状态的应力, 但是它对应 $\dot{\varepsilon}_{ij}^+$, 即它使材料进入屈服状态并产生 $\dot{\varepsilon}_{ij}^+$, σ_{ij} 是极限状态下的应力, 它是否使材料屈服要看所考虑的地方是处于塑性区还是刚性区, 但它不会违反屈服条件。由于

$$(\sigma_{ij}^+ - \sigma_{ij}) \dot{\varepsilon}_{ij}^+ \geq 0$$

及
$$\left(\int_V X_i^0 v_i^+ dV + \int_{S_t} \bar{X}_i^0 v_i^+ dS \right) > 0$$

得出 $m^+ - m^* > 0$, 从而上限定理得证。

由上限定理求得的 m^+ 值不可能小于 m^* , 所以也可以证明 m^* 值是唯一的。

在应用上限定理时, 可以考虑几个不同的运动许可的速度场, 分别由它们求得几个不同的 m^+ , 这时应选其中的最小者, 因为它比其他的 m^+ 更接近于 m^* 。

如果, 一个机动场 v_i^+ 满足

$$\int_V \sigma_{ij}^+ \dot{\varepsilon}_{ij}^+ dV = \int_V X_i v_i^+ dV + \int_{S_t} \bar{X}_i v_i^+ dS \quad (5.3.10)$$

则物体在体力 X_i 及 S_t 上的面力 \bar{X}_i 作用下, 已发生塑性破坏或即将破坏。对于比例加载情况, 这是容易证明的。

文献[18]指出, 上限定理是下述事实的形式上的陈述: 如果结构存在塑性破坏机构, 那么它将不能耐用。

3. 极限分析定理的推论

根据上、下限定理, 可以作出一些对极限分析很有用的推论, 它们在解决实际问题时得到了广泛的应用。几个主要的推论

如下:

(1) 在物体的任何部分提高材料的屈服极限, 不会降低物体的极限载荷。这是因为原物体的极限应力场是新物体的静力场。

反之, 在物体的任何部分降低材料的屈服极限, 不会提高物体的极限载荷。

(2) 在物体的自由边界上增加无重的材料, 不会降低物体的极限载荷。反之, 在自由边界上减少无重的材料, 不会提高其极限载荷。

这是因为原物体的极限应力场和在附加材料里的零应力, 对新物体来说, 构成一个静力许可的应力场。

根据推论 (2), 图 5.1 所示开切口的受拉板条的极限载荷必在宽为 $2h$ 的均匀受拉板条的极限载荷和宽为 $2b$ 的均匀受拉板条的极限载荷之间, 即

$$2ht\sigma_s \leq P_s \leq 2bt\sigma_s \quad (5.3.11)$$

其中 t 为板条的厚度。

(3) 由真实屈服面的外接屈服面计算得到的极限载荷, 将是真实极限载荷的上限解; 由真实屈服面的内接屈服面计算得到的极限载荷, 将是真实极限载荷的下限解。

这一推论提供了极限分析中寻找极限载荷上、下限的又一途径。如果用实际的屈服条件求解问题有困难, 则可以利用外接(或内接)于实际屈服面的表达式较为简单的近似屈服面来求解, 相应得到的极限载荷是真实极限载荷的一个上限(或下限)。

例如, 对于具有一般非线性屈服准则 (图 5.2) 的边坡稳定

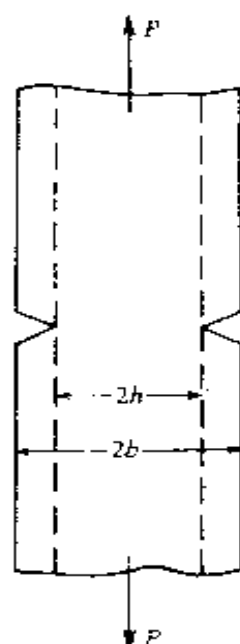


图 5.1 开切口的受拉板条

分析，可利用切于非线性屈服条件的莫尔-库仑线性屈服条件来研究^[19]。如果非线性屈服曲线（极限应力圆的包络线）切线的斜率，是 σ_n 坐标的单调递减函数，那么，过非线性屈服曲线上的一点 M，作其切线所表示的莫尔-库仑屈服准则（抗剪参数为 c' 和 φ' ，见图 5.2），将完全放在非线性屈服曲线的外部。于是，根据推论（3），按照莫尔-库仑线性屈服条件所确定的边坡极限载荷，将是真实极限载荷的上限。关于切点 M 的位置，最小化极限载荷，即可找到最小的上限解。关于具有莫尔-库仑线性屈服条件的边坡稳定的极限分析问题，将在后面来研究。

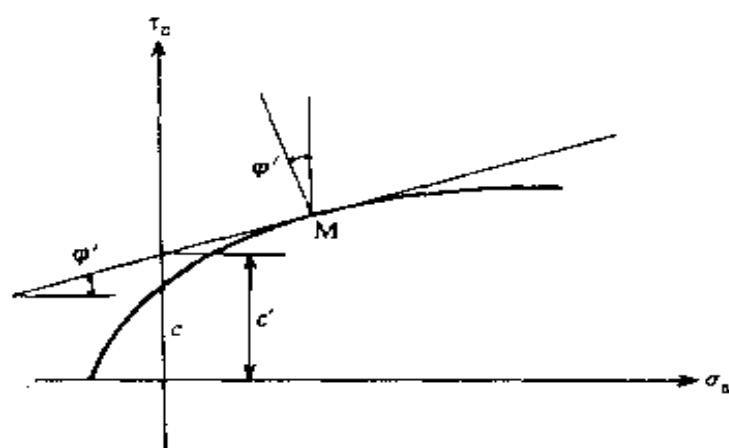


图 5.2 非线性屈服条件

§ 5.4 边坡的刚体滑动形式

1. 速度间断线的形状

在将塑性极限分析方法用于均质边坡稳定问题的研究时，考虑边坡体沿滑面的滑动破坏。滑面上的滑体视为刚体，变形只发生在基体与滑动体之间的薄的过渡层里。如果岩土体的一部分相对于另一部分发生了刚性移动（图 5.3），两个互相平行的平面限制了两个岩土体部分之间的过渡区。在这个过渡区中，速度分量发生了连续的迅速的变化。当过渡区的厚度 $t \rightarrow 0$ 时，过渡区

即成了速度间断面。在极限分析中，用间断面来代替薄的过渡层，只是为了实际使用时方便而引入的一种数学抽象。在 § 4.9 中已指出，穿过间断线速度的变化倾斜间断线于 φ 角，用 δw 表示速度的改变量；用 δu 、 δv 表示切向速度的改变量和法向分离速度，因此 $\delta v = \delta u \tan \varphi$ 。

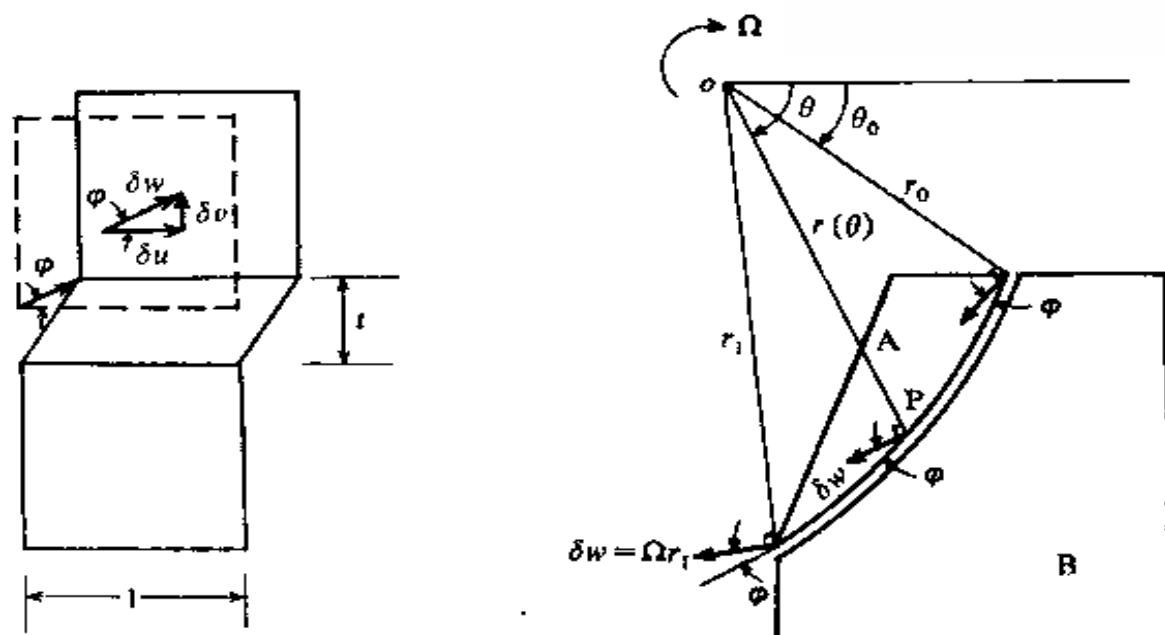


图 5.3 伴随分离的简单滑动 图 5.4 A 部分相对于 B 部分的刚性转动

下面研究：如果岩土体的一部分相对于另一部分发生了刚性转动，那么，薄的过渡区，在垂直于转轴的平面里将由什么样的曲线限制？在图 5.4 中，A 部分相对于 B 部分发生了刚性转动，转心在 O 点。当薄的过渡区的厚度趋于零时，在垂直于转轴的平面里，过渡区变成了速度间断线，在间断线上 A 侧任一点 P 的速度方向垂直于向径 OP，并与间断线成 φ 角。向径 OP 与间断线的交角为 $\frac{\pi}{2} + \varphi$ 。对比图 5.4 与图 4.12：图 4.12 中的 α 线相当于图 5.4 中的向径，图 4.12 中的 α 线与 β 线反方向的交角为 $\frac{\pi}{2} + \varphi$ 。因此图 5.4 中的间断线，相当于图 4.12 中的一条 β 线。

因此，可得出结论：发生刚性转动的速度间断线，为一条对数螺旋线。如果用 r 、 θ 表示间断线上一点的极坐标，由式(4.6.4)可写出间断线的方程为

$$r = r_0 \exp[(\theta - \theta_0) \operatorname{tg} \varphi] \quad (5.4.1)$$

因此，直线和对数螺旋线 (φ 角) 是唯一的间断线，它们允许被分离的区域发生移动和转动^[20, 12]。

2. 速度间断面上的能量耗散

前一节证明极限分析定理时，使用的关键性的工具是虚功率原理式(5.2.5)，它是针对连续的应力场和速度场提出的。但是研究边坡稳定问题时，又必须利用速度间断面的概念。那么，虚功率原理的公式(5.2.5)还能否应用呢？是否必须修改呢？注意到上面已提到的事实：速度间断面是一个薄的连续过渡层的数学抽象。因此，当考虑问题的物理原型时，所研究的一些量，均看成是连续的。这样，就不必研究修改形式的虚功率原理了。也就是说，式(5.2.5)的虚功率原理，对实际问题仍然有效。

在利用上限定理来研究边坡稳定问题时，需要计算下面形式的积分，

$$\int_V \sigma_{ij}^+ \dot{\varepsilon}_{ij}^+ dV \quad (5.4.2)$$

对于平面变形问题，上面积分的被积函数成为

$$D \equiv \sigma_{ij}^+ \dot{\varepsilon}_{ij}^+ = \sigma_x^+ \dot{\varepsilon}_x^+ + \sigma_y^+ \dot{\varepsilon}_y^+ + \tau_{xy}^+ \dot{\gamma}_{xy}^+ \quad (5.4.3)$$

§ 2.5 提到的 D 现在的物理意义是：在塑性变形中，单位体积材料所耗散的塑性功率。对于在图 5.4 中所考虑的边坡体的刚性滑动情况，A、B 两部分均为刚体，其中应变率为零。因此，在计算式(5.4.2)的积分时，只需考虑 A、B 两部分之间的过渡层的变形。

现在来计算耗散功率 D 。为了书写简单，把应力分量与应变分量的上标“+”号省略，而直接写为 $D = \sigma_x \dot{\varepsilon}_x + \sigma_y \dot{\varepsilon}_y + \tau_{xy} \dot{\gamma}_{xy}$ 。

屈服条件式(3.3.7)可写为

$$f \equiv \left[\frac{1}{4} (\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \sin \varphi - c \cos \varphi = 0 \quad (5.4.4)$$

按照相关联流动法则, $\dot{\varepsilon}_x$ 、 $\dot{\varepsilon}_y$ 、 $\dot{\gamma}_{xy}$ 如式(4.9.7)所示, 只需将其中的 ψ 改为 φ 即可, 利用式(4.9.7) (其中 ψ 改为 φ) 及式(5.4.4), 即可算出,

$$D = \lambda c \cos \varphi \quad (5.4.5)$$

由式(4.9.7) (ψ 改为 φ), 可导出

$$\dot{\varepsilon}_x^2 + \dot{\varepsilon}_y^2 + \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{xy}^2 = \frac{1}{2} \lambda^2 (1 + \sin^2 \varphi) \quad (5.4.6)$$

及

$$\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y = -\lambda \sin \varphi \quad (5.4.7)$$

将式(5.4.7)代入式(5.4.6), 有

$$2\dot{\varepsilon}_x^2 + 2\dot{\varepsilon}_y^2 + \dot{\gamma}_{xy}^2 = \lambda^2 + (\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y)^2 \quad (5.4.8)$$

于是, 即可得

$$\lambda = \left[(\dot{\varepsilon}_x - \dot{\varepsilon}_y)^2 + \dot{\gamma}_{xy}^2 \right]^{1/2} \quad (5.4.9)$$

将式(5.4.9)代入式(5.4.5), 得耗散功率

$$D = c \cos \varphi \left[(\dot{\varepsilon}_x - \dot{\varepsilon}_y)^2 + \dot{\gamma}_{xy}^2 \right]^{1/2} \quad (5.4.10)$$

由材料力学知, 平面应变状态的应变莫尔圆的半径为

$$\left[\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2} \right)^2 \right]^{1/2}$$

于是, 上式中

$$\left[(\dot{\varepsilon}_x - \dot{\varepsilon}_y)^2 + \dot{\gamma}_{xy}^2 \right]^{1/2}$$

为应变率莫尔圆的直径, 它是坐标系的不变量。

在计算图 5.3 中过渡层内的耗散功率时, 取过渡层的切向与

的裂纹。两端每单位厚度上的拉力为 P 。利用上、下限定理，证明极限拉力 $P^* = \sigma_s(b-a)$ （机动场可用图示的速度间断场）。

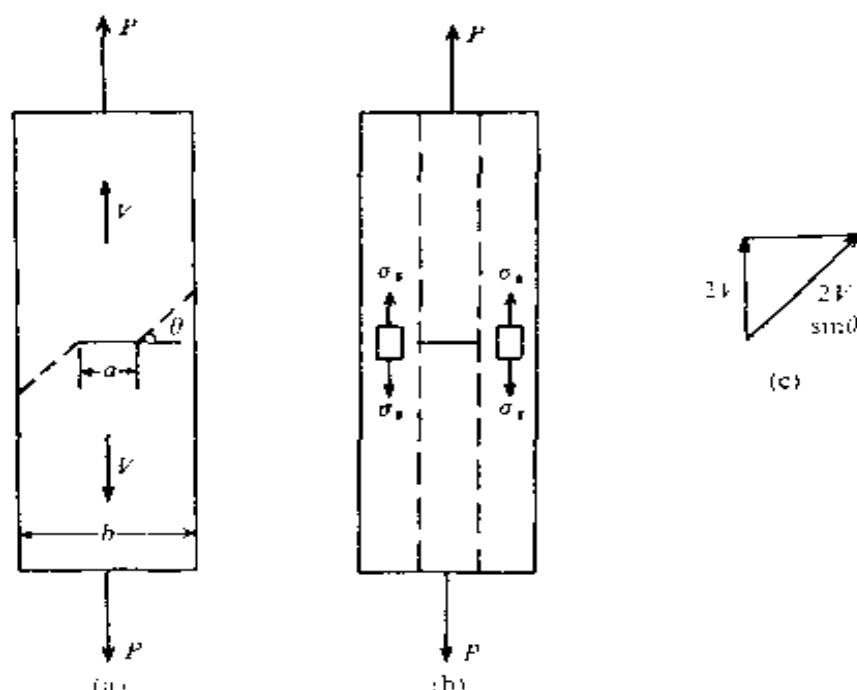


图 5.5 (a) 具有裂纹的板条拉伸；(b) 静力场；(c) 速度间断量

假定所研究的板条是由金属材料制成的，它所服从的屈服条件为屈雷斯加条件式(3.3.8)。此时，将单向拉伸屈服的应力状态： $\sigma_1 = \sigma_s$ （以拉为正）， $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ 代入式(3.3.8)：

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_s - 0}{2} = c \quad (5.4.12)$$

知， $c = \sigma_s / 2$ 。

现在考虑静力场。设在中心裂纹两侧的材料中， $\sigma_1 = \sigma_s$ ， $\sigma_3 = 0$ （图 5.5b）；而在中心裂纹宽度内的材料不受应力。由板条端部的平衡条件可得出

$$P = \sigma_s \cdot 2 \cdot \frac{b-a}{2} = \sigma_s(b-a) \quad (5.4.13)$$

这样，所考虑的应力场满足平衡要求。另外，将裂纹两侧材料的应力状态 $\sigma_1 = \sigma_s$ ， $\sigma_3 = 0$ 代入屈服条件式(5.4.12)，显然它被满

足。因此，所建立的应力场是静力场。所以，式(5.4.13)给出了极限载荷的下限。

下面考虑机动场。因为这里研究的是金属材料，它不发生塑性体积变形，所以在形成速度间断面的过渡层中，只是切向速度发生了有限的变化，而法向速度是连续的。也就是说，对金属材料，在速度间断面上，只有切向速度发生间断，而法向速度不发生间断。

在板条中，引入两个垂直于图 5.5a 的板面，且倾斜于水平方向 θ 角的平行平面，每一个面都从裂纹根部开始。板条发生塑性破坏的机构，是被两个平行平面及裂纹所分割的板条的上、下两部分，沿两个平行平面发生了刚性滑动。假定，此时板条上、下两部分向上、向下的速度都是 V 。那么，这时沿两个平行平面，板条上、下两部分的切向速度间断量为 $2V/\sin\theta$ (图 5.5c)。根据式(5.4.11)，可得每单位厚度板条沿速度间断面所耗散的塑性功率为

$$\frac{\sigma_s}{2} \times \frac{2V}{\sin\theta} \times \frac{b-a}{\cos\theta}$$

而外力的功率为 $2PV$ 。于是，由式(5.3.10)，当外力功率等于能量耗散率时

$$2PV = \frac{\sigma_s 2V(b-a)}{\sin 2\theta}$$

即可求得极限载荷的上限

$$P^+ = \frac{\sigma_s(b-a)}{\sin 2\theta}$$

当 $\theta = 45^\circ$ 时，得最小上限

$$P_{\min}^+ = \sigma_s(b-a) \quad (5.4.14)$$

对比式(5.4.13)知 $P^- = P^+$ ，因此本问题的极限载荷

$$P^* = P^- = P^+ = \sigma_s(b-a)$$

§ 5.5 垂直边坡的临界高度

1. 临界高度的上限解

现研究图 5.6 所示的垂直边坡的稳定性问题。在自重力作用之下，无支撑的垂直边坡将要发生破坏的高度，称为它的临界高度。在这里，垂直边坡所受的唯一外载荷是它的自重。假定边坡材料的容重为 γ 。现在要研究的问题是：给定了边坡体材料的性质，即给定了材料的 c 、 φ 和 γ 值，需要求出垂直边坡的临界高度 H_{cr} 值。

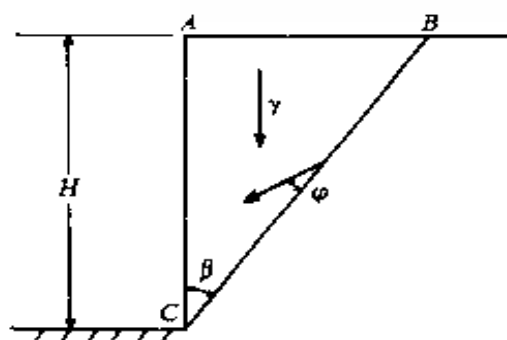


图 5.6 垂直边坡的临界高度

§ 5.3 研究了塑性极限载荷的上、下限定理，利用它可以确定理想弹塑性体的极限载荷或它的近似上、下限值。为了将极限分析定理用于本问题的研究，我们首先认为，已给定了垂直边坡的高度 H 及材料的 c 、 φ 值，然后，人们想像材料的体积力 γ 慢慢从零开始增加，当容重 γ 达到一定值时，给定边坡即破坏。所以，用塑性极限分析方法研究边坡稳定问题，实质上是求解极限体积力的值^[21, 22]。求出这个极限体积力问题后，再把它变换为对于指定边坡材料性质 (c 、 φ 、 γ) 的极限高度问题，详见下面的分析。

首先用上限定理（机动法）求图 5.6 所示垂直边坡的极限体积力。在机动法中，预先假定一个可能的破坏机构（相容的速度场 v_i^+ ， $\dot{\epsilon}_{ij}^+$ ），然后利用式(5.3.10)，将外载荷在这个机构运动中所作的功率，与物体在这个塑性机构中所耗散的塑性功率相等，以求得要形成这个机构所需的外载荷，也就是说，物体在等式(5.3.10)所确定的外载 X_i 、 \bar{X}_i 作用下，已经发生破坏或即将发生

破坏。现在考虑垂直于图 5.6 纸面方向的单位厚度的边坡体。

假定破坏机构如下：边坡的三角形 ABC 部分沿 BC 面发生刚性滑动，BC 线与竖直线 AC 的夹角为 β ， β 为待定量。此时，BC 面为速度间断面。根据 § 4.9 所述：穿过间断线，速度的变化倾斜间断线于 φ 角。因此，刚体部分 ABC 的速度 V 的方向与 BC 线的夹角为 φ 。当重力所作的功率等于沿间断面的耗散功率时，即建立了求解体积力的极限条件。重力所作的功率等于速度 V 的竖直分量 $V\cos(\varphi+\beta)$ 乘以滑动体 ABC 的重量 $\frac{1}{2}\gamma H^2 \operatorname{tg}\beta$ ：

$$\frac{1}{2}\gamma H^2 \operatorname{tg}\beta \cdot V\cos(\varphi + \beta) \quad (5.5.1)$$

沿间断面 BC 所耗散的功率等于，沿间断面的切向速度大小 $V\cos\varphi$ 乘以材料的粘结力 c ，再乘以 BC 线的长度 $H/\cos\beta$ ：

$$c \frac{H}{\cos\beta} V\cos\varphi \quad (5.5.2)$$

令外功率等于内部能量耗散率，得

$$\frac{1}{2}\gamma H^2 \operatorname{tg}\beta \cdot V\cos(\varphi + \beta) = c \frac{H}{\cos\beta} V\cos\varphi \quad (5.5.3)$$

边坡体在由式 (5.5.3) 所确定的体积力 γ 作用下，已发生破坏或即将破坏。这样，即可得到极限体积力的上限值为

$$\gamma^+ = \frac{2c}{H} \times \frac{\cos\varphi}{\sin\beta\cos(\varphi + \beta)} \quad (5.5.4)$$

但是，边坡体的材料是事先给定的，所以它的体积力 γ 也是已经知道的常数。为要使已知边坡不破坏，容重 γ 应满足

$$\gamma \leq \gamma^+ = \frac{2c\cos\varphi}{H\sin\beta\cos(\varphi + \beta)} \quad (5.5.5)$$

由式(5.5.5)，有

$$H \leq \frac{2c\cos\varphi}{\gamma\sin\beta\cos(\varphi + \beta)} \quad (5.5.6)$$

因此，式(5.5.6)右边的值，是指定材料性质 (c 、 φ 、 γ) 的垂直边坡临界高度的上限值，即

$$H^+ = \frac{2c \cos \varphi}{\gamma \sin \beta \cos(\varphi + \beta)} \quad (5.5.7)$$

从上面的分析可认识到：为了要确定给定材料的边坡的极限高度值，需首先假定边坡的高度 H 及材料的 c 、 φ 值为给定，利用极限分析定理寻找材料的极限体积力 γ^+ 和 γ^- ；然后，使已知材料的容重 γ 满足： $\gamma^- < \gamma < \gamma^+$ 。利用此不等式，即可找到边坡极限高度的上、下限值。

为求得极限高度上限式(5.5.7)的最小值，可改变 β 角，使得

$$\frac{d}{d\beta} [\sin \beta \cos(\varphi + \beta)] = 0$$

得

$$\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \quad (5.5.8)$$

将式(5.5.8)代入式(5.5.7)，得垂直边坡临界高度的上限值为^[20]

$$H_{cr}^+ = \frac{4c}{\gamma} \times \frac{\cos \varphi}{1 - \sin \varphi} = \frac{4c}{\gamma} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \quad (5.5.9)$$

2. 临界高度的下限解

在用下限定理（静力法）

来研究边坡稳定问题时，必须先构造一个静力许可的应力场，它所相应的体积力（边坡稳定问题的载荷参数即为 γ ）即为极限体积力的下限 γ^- ，从而可导出边坡临界高度的下限值。

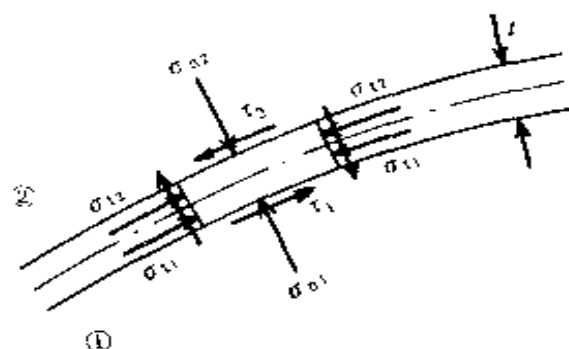


图 5.7 应力间断面

在极限分析中，当构造静力许可的应力场时，经常利用具有应力间断面的应力场。所谓应力间断面实际上是一个薄层过渡区，在这个过渡层中，应力发生连续的迅速的变化（图 5.7）。

假定这个薄的过渡层将物体分为两个区域①、②。取出过渡层的一部分来研究，其受力状态如图 5.7 所示。当过渡层的厚度 t 趋于零时，由所研究部分的平衡条件，可得出结论：两个区域的法向正应力及剪应力相等，

$$\sigma_{n_1} = \sigma_{n_2}, \quad \tau_1 = \tau_2 \quad (5.5.10)$$

但切向正应力可发生间断 $\sigma_{t_1} \neq \sigma_{t_2}$ 。实际上，§ 5.4 研究的板条拉伸中所构造的静力场，即为具有应力间断面的应力场（图 5.5b）。显然，在那里满足应力间断面的条件式(5.5.10)。在图 5.7 中，当①、②两个区域都是塑性区时，应力间断面上的法向正应力 σ_n 及其上的剪应力 τ_{nt} 给定后，可存在两个切向正应力 σ_t 值，这相应于图 4.9 所示的情况。

下面研究垂直边坡临界高度的下限解。这时构造的应力场如图 5.8a 所示。把边坡体分成三个区域：I、II、III。假定在区域 I、II、III 中的 xy 面内的应力状态，分别是单轴压缩、双轴压缩和静水压缩。在 I、II 区域之间应力场是连续变化的；在 II、III 区域之间存在有竖直应力间断面。显然，在这个间断面上满足间断面上的平衡条件式(5.5.10)。

另外，所构造的应力场满足平衡微分方程式(4.2.2)（此时 $Y = -\gamma$ ），且满足本问题的应力边界条件：在整个边界面上，法向正应力和剪应力等于零。因此，所构造的应力场为平衡应力场。

在图 5.8b 中，画出了各区域相应的莫尔应力圆。当在坡底水平（ $y = H$ ）的 I 区域的应力圆切于屈服线 M_0M_1 和 M_0M_2 时，各区域的应力状态都未违反屈服条件。从而，这个平衡的应力场成为静力许可的应力场。对于 I 区域的最大应力莫尔圆， $\sigma_1 = \gamma H$ ， $\sigma_3 = 0$ ，由式(3.3.4)得屈服条件

$$\frac{1}{2} \gamma H = \frac{1}{2} \gamma H \sin \varphi + c \cos \varphi \quad (5.5.11)$$

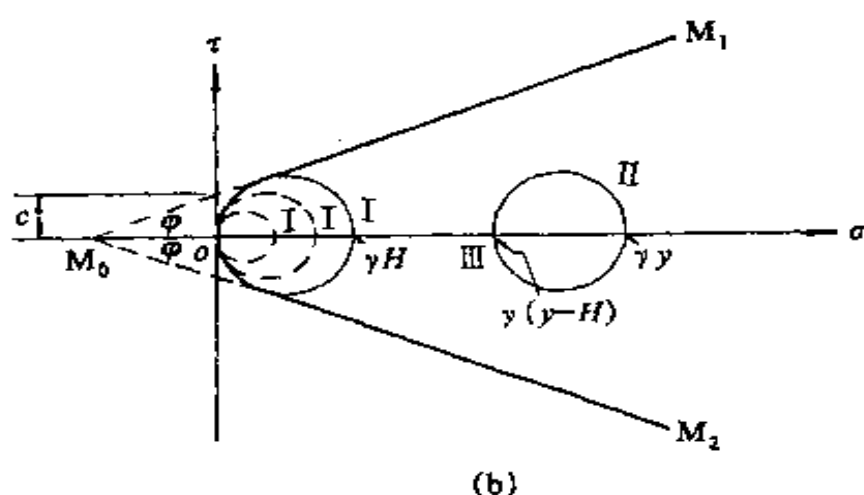
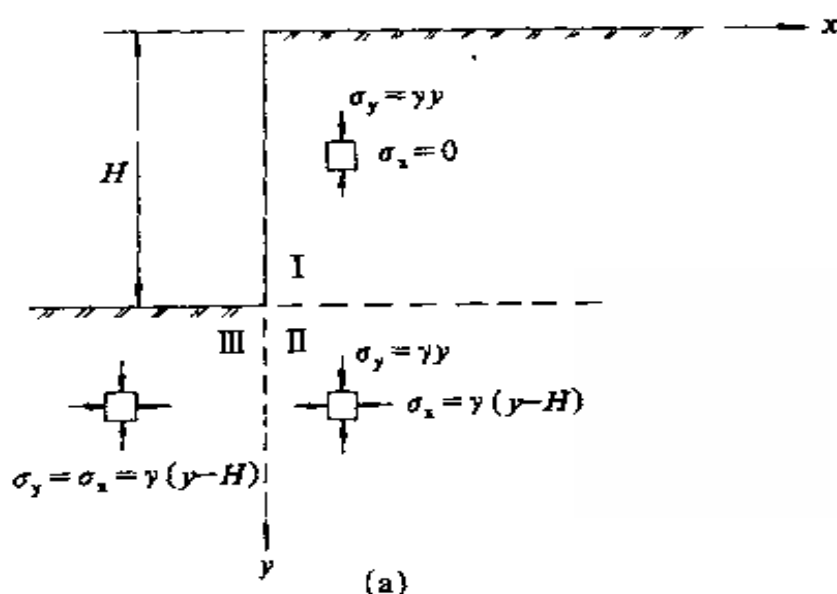


图 5.8 垂直边坡的静力场
(a) 平衡应力场; (b) 各区的莫尔圆

由式(5.5.11)即得垂直边坡极限体积力的下限值

$$\gamma^- = \frac{2c \cos \varphi}{H(1 - \sin \varphi)} = \frac{2c}{H} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \quad (5.5.12)$$

但是, 边坡体材料的容重是已给定的常数, 它应满足

$$\gamma \geq \gamma^- = \frac{2c}{H} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \quad (5.5.13)$$

由式(5.5.13), 有

$$H \geq \frac{2c}{\gamma} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \quad (5.5.14)$$

因此，式(5.5.14)右边的值，是指定材料性质 (c 、 φ 、 γ) 的垂直边坡临界高度的下限值^[20]，即

$$H_{cr}^- = \frac{2c}{\gamma} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \quad (5.5.15)$$

当土的抗拉强度可以忽略时，莫尔-库仑屈服条件被修正成如图 5.8b 中的曲线 M_1OM_2 。这时上面所构造的平衡应力场不存在拉应力，并且仍未违背屈服条件，从而还是静力许可的应力场。因此，式(5.5.15)所确定的值，也是不能抗拉土的垂直边坡临界高度的下限解。

在极限分析中，所假定的应力场或速度场越接近于实际的状态，所得的结果会越接近于实际情况。但是，在理论上并不要求所假定的应力场或速度场要类似于实际的状态。当用上限法求极限载荷（边坡的临界高度）时，完全不考虑静力方面（平衡方程、力的边界条件，屈服条件）的要求，只根据所假定的破坏机构，用外力功率与内耗散功率相等的原理求出极限载荷。用这种方法求出的极限载荷是实际的极限载荷的上限。由于在分析中忽略了静力方面的要求，因而计算过程是比较简单的。当用下限法求极限载荷（边坡临界高度）时，完全不考虑变形的情况，而由静力方面的条件去分析。由于忽略了机动方面的要求，所以使分析大为简化。这样求得的极限载荷是实际极限载荷的上限。一般应用下限解法，比应用上限解法要困难一些。

3. 不能抗拉土的垂直边坡的临界高度

由于在自重力作用下的边坡有向下滑动的趋势，因此在坡顶的一定区域内，会出现拉应力状态。当土的抗拉强度很弱时，在坡顶区会出现拉裂缝。下面构造有拉裂缝存在情况下的机动场^[23]（图 5.9）。假定竖直的拉裂缝的深度为 nH ($0 < n < 1$)，滑面与竖直线的夹角为 β 。滑体的速度矢量与滑面的夹角为 φ 。现

时, r_0 及 L 即确定, 因而转心 O 点的位置即确定, 因此, 用三个变量 θ_0 、 θ_b 、 H 即完全确定了所假定的破坏机构。

在上限法中, 需要旋转体重量所作的外功率表达式及沿对数螺旋面能量耗散率的表达式。若直接计算在区域 ABC 中旋转体重量所作的外功率, 那将是很复杂的。这里使用叠加法, 首先计算在区域 OBC 、 OAB 和 OAC 中土重的相应功率 \dot{W}_1 、 \dot{W}_2 和 \dot{W}_3 。于是, 对于所要求区域 ABC 中土重的外功率将等于 $\dot{W}_1 - \dot{W}_2 - \dot{W}_3$, 下面分别导出三个区域中的相应外功率表达式。

假定旋转体的转动角速度为 Ω , 土体容重为 γ , 建立直角坐标系 xoy (图 5.11)。首先考虑对数螺旋线形成的区域 OBC , 图 5.11a 示出了这个区域的微分单元。这个单元的面积为 $\frac{1}{2}r^2d\theta$, 单元的重量为 $\gamma\frac{1}{2}r^2d\theta$ (考虑单位厚度的边坡体)。假定该单元的形

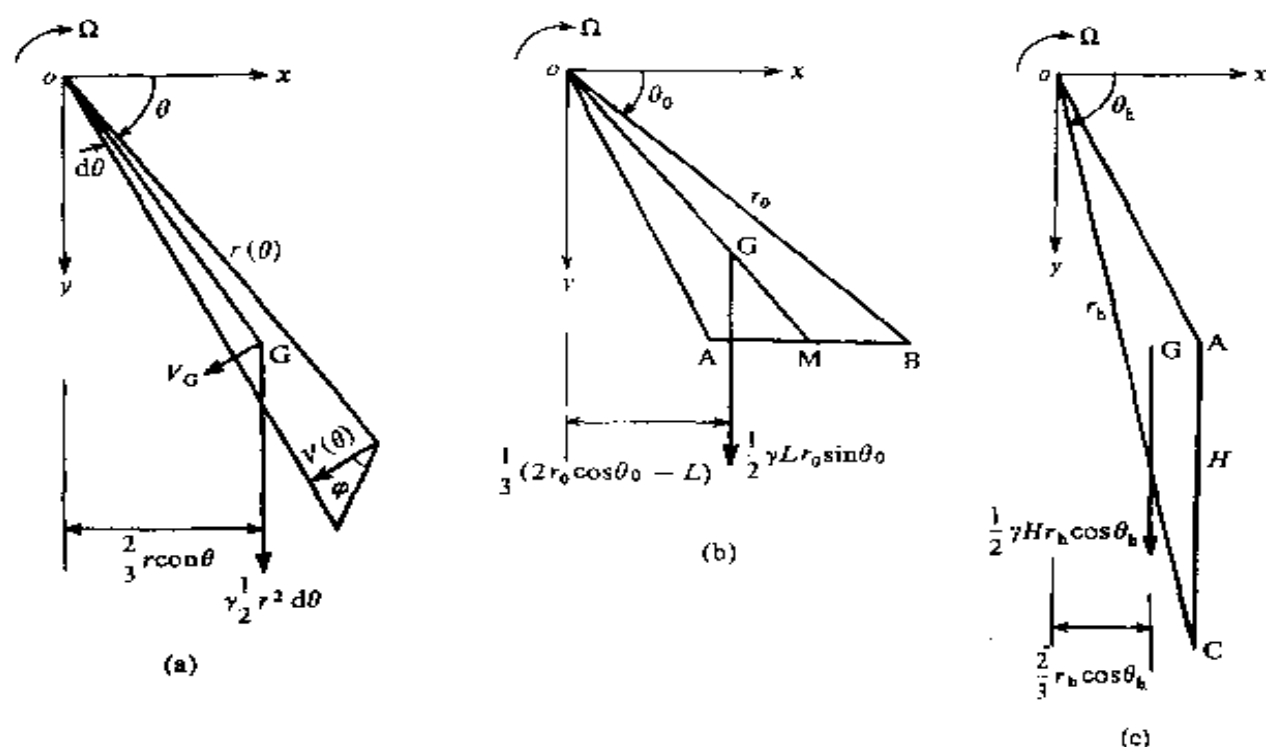


图 5.11 垂直边坡的外功率计算

心在 G 点。G 点的速度 $V_G = OG \cdot \Omega$ ，其方向垂直于 OG 线。 V_G 在竖直方向的分量为 $V_G \cos \theta = OG \cdot \cos \theta \cdot \Omega$ 。从图 5.11a 可见， $OG \cdot \cos \theta$ 即为 G 点的横坐标 x_G ，且知 $x_G = \frac{2}{3} r \cos \theta$ 。因此，该微元体重力的功率，等于微元体重力乘以微元体形心的横坐标，再乘以旋转角速度，即

$$d\dot{W}_1 = \left(\frac{1}{2} r^2 d\theta \right) \left(\frac{2}{3} r \cos \theta \right) \Omega \quad (5.6.5)$$

在 BC 线上积分上式，得到

$$\begin{aligned} \dot{W}_1 &= \frac{1}{3} \gamma \Omega \int_{\theta_0}^{\theta_h} r^3 \cos \theta d\theta \\ &= \gamma r_0^3 \Omega \int_{\theta_0}^{\theta_h} \frac{1}{3} \exp[3(\theta - \theta_0) \operatorname{tg} \varphi] \cos \theta d\theta \end{aligned}$$

利用积分表，可进行上面的积分运算，最后得出：

$$\dot{W}_1 = \gamma r_0^3 \Omega f_1(\theta_h, \theta_0) \quad (5.6.6)$$

其中，

$$\begin{aligned} f_1(\theta_h, \theta_0) &= \{ (3 \operatorname{tg} \varphi \cos \theta_h + \sin \theta_h) \exp[3(\theta_h - \theta_0) \operatorname{tg} \varphi] \\ &\quad - 3 \operatorname{tg} \varphi \cos \theta_0 - \sin \theta_0 \} / 3(1 + 9 \operatorname{tg}^2 \varphi) \end{aligned} \quad (5.6.7)$$

现考虑三角形区域 OAB (图 5.11b)。这个区域的重量为 $\frac{1}{2} \gamma L r_0 \sin \theta_0$ 。三角形 OAB 形心 G 的横坐标 x_G 与 AB 线段中点 M 的横坐标 x_M 之间的关系为

$$x_G = \frac{2}{3} x_M$$

而 x_M 与 A、B 两点的横坐标 x_A 、 x_B 之间，有

$$x_M = \frac{1}{2} (x_A + x_B) = \frac{1}{2} [(r_0 \cos \theta_0 - L) + r_0 \cos \theta_0]$$

所以，

$$x_G = \frac{1}{3} (2r_0 \cos \theta_0 - L)$$

因此, 三角形 OAB 区域重量的功率是

$$\dot{W}_2 = \left(\frac{1}{2} \gamma L r_0 \sin \theta_0 \right) \left[\frac{1}{3} (2r_0 \cos \theta_0 - L) \right] \Omega$$

将它重新排列写成

$$\dot{W}_2 = \gamma r_0^3 \Omega f_2(\theta_h, \theta_0) \quad (5.6.8)$$

其中,
$$f_2(\theta_h, \theta_0) = \frac{1}{6} \frac{L}{r_0} \left(2 \cos \theta_0 - \frac{L}{r_0} \right) \sin \theta_0 \quad (5.6.9)$$

式中, L/r_0 是 θ_h 、 θ_0 的函数, 见式(5.6.4)。

对于三角形 OAC 区域 (图 5.11c), 其重量为 $\frac{1}{2} \gamma H r_h \cos \theta_h$,

其形心的横坐标为 $\frac{2}{3} r_h \cos \theta_h$ 。因此, 三角形 OAC 区域重力的功率为

$$\dot{W}_3 = \left(\frac{1}{2} \gamma H r_h \cos \theta_h \right) \left(\frac{2}{3} r_h \cos \theta_h \right) \Omega \quad (5.6.10)$$

利用式(5.6.2), 上式可写为

$$\dot{W}_3 = \gamma r_0^3 \Omega f_3(\theta_h, \theta_0) \quad (5.6.11)$$

其中,
$$f_3(\theta_h, \theta_0) = \frac{1}{3} \frac{H}{r_0} \cos^2 \theta_h \exp[2(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi] \quad (5.6.12)$$

式中, H/r_0 是 θ_h 、 θ_0 的函数, 见式(5.6.3)。

这样, 在三角形形状 ABC 区域中土体重量所作的外功率为

$$\dot{W}_1 - \dot{W}_2 - \dot{W}_3 = \gamma r_0^3 \Omega (f_1 - f_2 - f_3) \quad (5.6.13)$$

下面, 计算耗散的塑性功率。沿速度间断面 BC 将发生内部能量耗散。沿间断面能量耗散的微分速率等于间断面微分面积 $r d\theta / \cos \varphi$ 、切向速度间断值 $V \cos \varphi$ 及粘结力 c 三者的乘积。在整个间断面上积分, 即得到总的内部能量耗散率:

$$\int_{\theta_0}^{\theta_h} c(V \cos \varphi) \frac{r d\theta}{\cos \varphi} = c \Omega \int_{\theta_0}^{\theta_h} r^2 d\theta$$

$$= \frac{cr_0^2 \Omega}{2 \operatorname{tg} \varphi} \{ \exp[2(\theta_h - \theta_0) \operatorname{tg} \varphi] - 1 \} \quad (5.6.14)$$

令外力功率式(5.6.13)等于内部能量耗散率, 给出

$$\gamma r_0^3 \Omega (f_1 - f_2 - f_3) = \frac{cr_0^2 \Omega}{2 \operatorname{tg} \varphi} \{ \exp[2(\theta_h - \theta_0) \operatorname{tg} \varphi] - 1 \}$$

由上式得出

$$r_0 = \frac{c \{ \exp[2(\theta_h - \theta_0) \operatorname{tg} \varphi] - 1 \}}{\gamma (f_1 - f_2 - f_3) 2 \operatorname{tg} \varphi} \quad (5.6.15)$$

由式(5.6.3)及式(5.6.15), 可得

$$H = \frac{c}{\gamma} f(\theta_h, \theta_0) \quad (5.6.16)$$

式中, $f(\theta_h, \theta_0) = \{ \exp[2(\theta_h - \theta_0) \operatorname{tg} \varphi] - 1 \}$

$$\begin{aligned} & \cdot \{ \sin \theta_h \exp[(\theta_h - \theta_0) \operatorname{tg} \varphi] - \sin \theta_0 \} \\ & \div 2 \operatorname{tg} \varphi (f_1 - f_2 - f_3) \end{aligned} \quad (5.6.17)$$

其中, f_1 、 f_2 、 f_3 分别由式(5.6.7)、式(5.6.9)及式(5.6.12)所确定。

按极限分析的上限定理, 式(5.6.16)给出了垂直边坡临界高度的一个上限值。为了找到最小上限, 必须让 $f(\theta_h, \theta_0)$ 最小, 从而必须

$$\frac{\partial f}{\partial \theta_h} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \theta_0} = 0 \quad (5.6.18)$$

解上面的联立方程, 将所得 θ_h 、 θ_0 值代入式(5.6.16), 即得垂直边坡临界高度的最小上限值 H_{cr}^* 。

从式(5.6.17)、式(5.6.7)、式(5.6.9)及式(5.6.12)可以看出, f 、 f_1 、 f_2 和 f_3 的形式是复杂的, 因此, 要完成式(5.6.18)中的微分运算, 也是很繁杂的; 并且式(5.6.18)将是超越方程组; 也必须用数值解法。为了避免冗长的推导计算, 可用半图解方法完成对联立方程组式(5.6.18)的求解。式(5.6.17)所给定的函数有两个变量 θ_0 和 θ_h 及一个材料常数 φ 。为了用半图解方法决定这函

数的最小值，首先取 $\varphi = 20^\circ$ 。然后，指定一组值 $\theta_h = 40^\circ, 45^\circ, 50^\circ, \dots$ 。对于每一个 θ_h 值，代入几个 θ_0 值到式 (5.6.17)，并计算相应的函数 f 的值，画出 f 对 θ_0 的曲线，见图 5.12 的左半部分。这样，可得到相应于每一个这样曲线的最小值的点。通过这些最小值的点画水平线，即得到 f 对 θ_h 的曲线，它示于图 5.12 的右半部分。 f 对 θ_h 曲线的最小值，代表了函数式 (5.6.17) 的绝对最小值。相应于这个 f 或边坡高度的临界值的边坡几何图形，示于图 5.12 的右上插图中。由图 5.10 可以看出，对 θ_0, θ_h 的唯一限制为 $\theta_0 < \theta_h$ 。这个条件，当 $\theta_h = 40^\circ, 45^\circ$ 和 50° 时，给出了 f 的最小值，它们不是微分学意义下的驻值。所以，在这些情况下，如果使用微分学的办法，也不能找到 f 的合理的最小值。

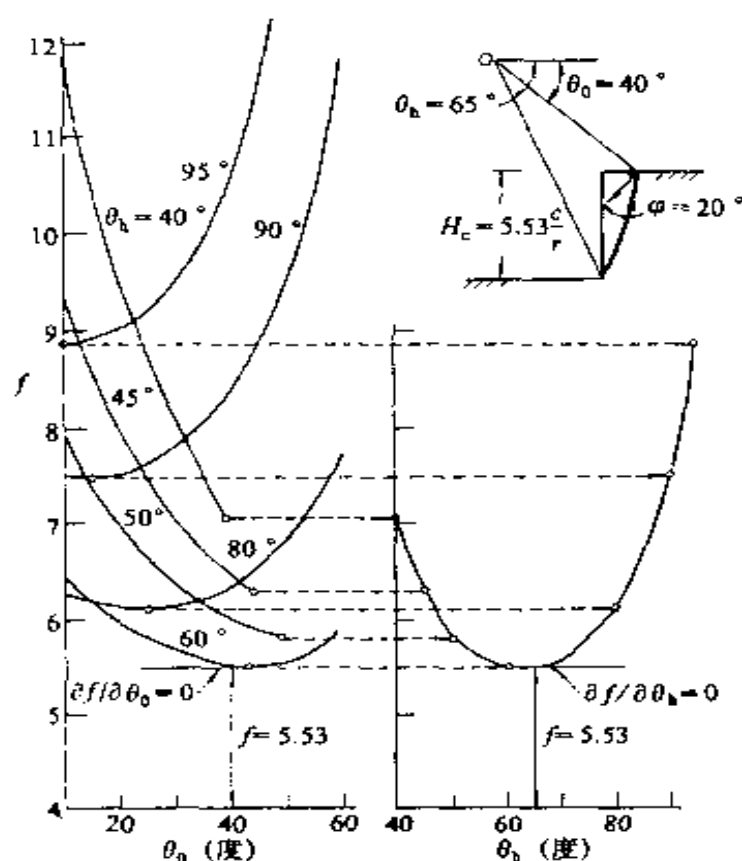


图 5.12 半图解法

在图 5.12 中, 当接近于 $\theta_0 = 40^\circ$, $\theta_b = 65^\circ$ 时, 对于 $\varphi = 20^\circ$, 函数 $f(\theta_b, \theta_0)$ 有最小值。并找到, 对于所有的 φ 值, 在 $\theta_0 = 40^\circ$, $\theta_b = 65^\circ$ 时, $f = 3.83 \lg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$ 。因此,

$$H_{cr}^+ = \frac{3.83c}{\gamma} \lg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \quad (5.6.19)$$

是垂直边坡临界高度的一个上限。在式(5.6.19)中的值 3.83, 是式(5.5.9)中的 4.0 值的一个改进。

§ 5.7 边坡临界高度的上限解^[2]

现在研究图 5.13 所示的均质边坡, 其坡角为 β , 坡顶面倾角为 α , 要求确定边坡的临界高度 H 。考虑转动破坏机构并假定滑动面通过坡脚 C 点。曲边三角形形状区域 ABC, 作为刚体关于旋转中心 O 点转动, O 点的位置待定。对数螺旋线 BC 是速度间断线, BC 线下的材料处于静止。

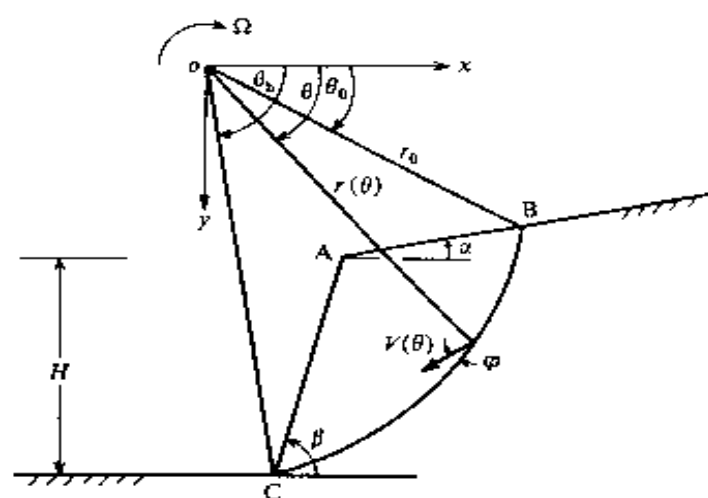


图 5.13 边坡的转动破坏机构

用极点在旋转中心 O 点的极坐标 r 、 θ 表示滑动面 BC 的位置。弦 OB、OC 的长度及倾角分别为 r_0 、 r_b 、 θ_0 及 θ_b 。由图

5.13 所示的几何关系可以看出

$$AC \cdot \sin(\beta - \alpha) = r_h \sin(\theta_h + \alpha) - r_0 \sin(\theta_0 + \alpha)$$

又因为, $AC = H / \sin\beta$, $r_h = r_0 \exp[(\theta_h - \theta_0) \operatorname{tg}\varphi]$, 所以可得到,

$$\begin{aligned} \frac{H}{r_0} &= \frac{\sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)} \{ \sin(\theta_h + \alpha) \exp[(\theta_h - \theta_0) \operatorname{tg}\varphi] \\ &\quad - \sin(\theta_0 + \alpha) \} \end{aligned} \quad (5.7.1)$$

由图5.13也可看出

$$\begin{aligned} &L \sin(\theta_h + \alpha) \\ &= r_0 \sin(\theta_h - \theta_0) - AC \sin(180^\circ - \theta_h - \beta) \\ &= r_0 \sin(\theta_h - \theta_0) - \frac{H}{\sin\beta} \sin(\theta_h + \beta) \end{aligned} \quad (5.7.2)$$

其中, $L = AB$. 将由式(5.7.1)确定的 $H / \sin\beta$ 值代入式(5.7.2)后, 可得到

$$\begin{aligned} \frac{L}{r_0} &= \frac{\sin(\theta_h - \theta_0)}{\sin(\theta_h + \alpha)} - \frac{\sin(\theta_h + \beta)}{\sin(\theta_h + \alpha) \sin(\beta - \alpha)} \\ &\quad \cdot \{ \sin(\theta_h + \alpha) \exp[(\theta_h - \theta_0) \operatorname{tg}\varphi] - \sin(\theta_0 + \alpha) \} \end{aligned} \quad (5.7.3)$$

从式(5.7.1)及式(5.7.3)可以看出, 当 θ_0 、 θ_h 及边坡高度 H 给定时, r_0 及 L 值即被确定, 因而转心 O 点的位置即可确定. 因此, 用三个变量 θ_0 、 θ_h 、 H , 就完全确定了所假定的边坡的破坏机构.

下面推导外功率的表达式. 若直接积分在区域 ABC 中岩土体重量的外功率, 将是很复杂的. 使用叠加法, 首先计算在区域 OBC 、 OAB 、 OAC 中岩土体重量的相应功率 \dot{W}_1 、 \dot{W}_2 和 \dot{W}_3 . 于是, 所要求区域 ABC 中岩土体重量的外功率将等于 $\dot{W}_1 - \dot{W}_2 - \dot{W}_3$. 现分别导出三个区域中的相应功率表达式.

假定旋转体 ABC 的转动角速度为 Ω . 岩土体的材料容重为 γ . 建立直角坐标系 xoy (如图 5.13). 在区域 OBC 中岩土体重力外功率的计算, 与 § 5.6 中垂直边坡中相应区域岩土体重力外

功率的计算方法相同, 所得最后表达式在形式上也完全相同:

$$\dot{W}_1 = \gamma r_0^3 \Omega f_1(\theta_h, \theta_0) \quad (5.7.4)$$

其中, $f_1(\theta_h, \theta_0)$ 如式(5.6.7)所示。

现考虑三角形区域 OAB. 三角形 OAB 的面积为 $\frac{1}{2}r_0L\sin(\theta_0+\alpha)$. 用 § 5.6 中推导三角形区域形心横坐标的方法, 可得现在考虑的三角形 OAB 形心的横坐标为

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} [(r_0 \cos \theta_0 - L \cos \alpha) + r_0 \cos \theta_0] \\ &= \left(\frac{2}{3} r_0 \cos \theta_0 - \frac{1}{3} L \cos \alpha \right) \end{aligned}$$

由 § 5.6 的相应推导可知, 三角形区域岩土重力的外功率等于, 三角形区域岩土重力、三角形区域形心的横坐标及旋转体的角速度三者的乘积。所以,

$$\begin{aligned} \dot{W}_2 &= \frac{1}{2} r_0 L \sin(\theta_0 + \alpha) \gamma \left(\frac{2}{3} r_0 \cos \theta_0 - \frac{1}{3} L \cos \alpha \right) \Omega \\ &= \gamma r_0^3 \Omega f_2(\theta_h, \theta_0) \end{aligned} \quad (5.7.5)$$

式中,

$$f_2(\theta_h, \theta_0) = \frac{1}{6} \frac{L}{r_0} \left(2 \cos \theta_0 - \frac{L}{r_0} \cos \alpha \right) \sin(\theta_0 + \alpha) \quad (5.7.6)$$

其中, L/r_0 是 θ_h 、 θ_0 的函数, 见式(5.7.3)。

对于三角形 OAC 区域, 考虑到式(5.7.2)及式(5.6.2), 可得三角形 OAC 的面积为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot r_h \cdot AC \cdot \sin(180^\circ - \theta_h - \beta) \\ &= \frac{1}{2} r_h r_0 \left[\sin(\theta_h - \theta_0) - \frac{L}{r_0} \sin(\theta_h + \alpha) \right] \\ &= \frac{1}{2} r_0^2 \exp[(\theta_h - \theta_0) \operatorname{tg} \varphi] \left[\sin(\theta_h - \theta_0) - \frac{L}{r_0} \sin(\theta_h + \alpha) \right] \end{aligned}$$

$$\gamma r_0^3 \Omega (f_1 - f_2 - f_3) = \frac{c r_0^2 \Omega}{2 \tan \varphi} \{ \exp[2(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi] - 1 \}$$

从而, 得

$$r_0 = \frac{c \{ \exp[2(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi] - 1 \}}{\gamma (f_1 - f_2 - f_3) 2 \tan \varphi} \quad (5.7.11)$$

由式(5.7.11)及式(5.7.1)得

$$H = \frac{c}{\gamma} f(\theta_h, \theta_0) \quad (5.7.12)$$

式中,

$$f(\theta_h, \theta_0) = \frac{\sin \beta \{ \exp[2(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi] - 1 \}}{2 \sin(\beta - \alpha) \tan \varphi (f_1 - f_2 - f_3)} \\ \cdot \{ \sin(\theta_h + \alpha) \exp[(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi] - \sin(\theta_0 + \alpha) \} \quad (5.7.13)$$

按照上限定理, 式(5.7.12)给出了边坡临界高度的一个上限值。当 θ_h 和 θ_0 满足

$$\frac{\partial f}{\partial \theta_h} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \theta_0} = 0 \quad (5.7.14)$$

时, 函数 $f(\theta_h, \theta_0)$ 有最小值。

利用半图解法, 解方程组式(5.7.14), 并将所得到的 θ_h 、 θ_0 值代入式(5.7.12), 即得边坡临界高度的最小上限。令 $N_s = \min f(\theta_h, \theta_0)$, 可得

$$H_{cr} \leq \frac{c}{\gamma} N_s \quad (5.7.15)$$

无量纲数 N_s 称为边坡的稳定因子。 N_s 值依赖于坡角 α 、 β 及内摩擦角 φ (表 5.1) [2]。

表 5.1 均质边坡塑性分析所得 N_s 值 (上限解)

内摩擦角 $\varphi(^{\circ})$	坡 角 $\alpha(^{\circ})$	坡 角 $\beta(^{\circ})$					
		90	75	60	45	30	15
0	0	3.83	4.57	5.25	5.86	6.51	7.35
5	0	4.19	5.14	6.17	7.33	9.17	14.80
	5	4.14	5.05	6.03	7.18	8.93	14.62
10	0	4.59	5.80	7.26	9.32	13.53	45.53
	5	4.53	5.72	7.14	9.14	13.26	45.15
	10	4.47	5.61	6.98	8.93	12.97	44.56

续表

内摩擦角 $\varphi(^{\circ})$	坡 角 $\alpha(^{\circ})$	坡 角 $\beta(^{\circ})$					
		90	75	60	45	30	15
15	0	5.02	6.57	8.64	12.05	21.71	
	5	4.97	6.49	8.52	11.91	21.50	
	10	4.90	6.39	8.38	11.73	21.14	
	15	4.83	6.28	8.18	11.42	20.59	
20	0	5.51	7.48	10.39	16.18	41.27	
	5	5.46	7.40	10.30	16.04	41.06	
	10	5.40	7.31	10.15	15.87	40.73	
	15	5.33	7.20	9.98	15.59	40.16	
	20	5.24	7.04	9.78	15.17	39.19	
25	0	6.06	8.59	12.75	22.92	120.0	
	5	6.01	8.52	12.65	22.78	119.8	
	10	5.96	8.41	12.54	22.60	119.5	
	15	5.89	8.30	12.40	22.37	118.7	
	20	5.81	8.16	12.17	21.98	117.4	
	25	5.71	7.97	11.80	21.35	115.5	
30	0	6.69	9.96	16.11	35.63		
	5	6.63	9.87	16.00	35.44		
	10	6.58	9.79	15.87	35.25		
	15	6.53	9.67	15.69	34.99		
	20	6.44	9.54	15.48	34.64		
	25	6.34	9.37	15.21	34.12		
	30	6.22	9.15	14.81	33.08		
35	0	7.43	11.68	20.94	65.53		
	5	7.38	11.60	20.84	65.39		
	10	7.32	11.51	20.71	65.22		
	15	7.26	11.41	20.55	65.03		
	20	7.18	11.28	20.36	64.74		
	25	7.11	11.12	20.07	64.18		
	30	6.99	10.93	19.73	63.00		
	35	6.84	10.66	19.21	60.80		
40	0	8.30	14.00	28.99	185.6		
	5	8.26	13.94	28.84	185.5		
	10	8.21	13.85	28.69	185.3		
	15	8.15	13.72	28.54	185.0		
	20	8.06	13.57	28.39	184.6		
	25	7.98	13.42	28.16	184.0		
	30	7.87	13.21	27.88	183.2		
	35	7.76	12.95	27.49	182.3		
	40	7.61	12.63	26.91	181.1		

[例] 均质土坡, 坡顶为水平面, 即 $\alpha = 0$, 坡高 $H = 20\text{m}$, 坡角 $\beta = 30^\circ$, 土容重 $\gamma = 19600\text{N/m}^3$, 粘结力 $c = 29400\text{Pa}$, 内摩擦角 $\varphi = 15^\circ$, 试求土坡的安全系数。

解: 按照边坡稳定安全系数的定义, 它为潜在滑面上抗剪强度与实际剪应力之比,

$$k = \frac{c + \sigma \operatorname{tg} \varphi}{\tau}$$

其中, σ 、 τ 为潜在滑面上的法向正应力及剪应力。由上式, 有

$$\tau = \frac{c}{k} + \sigma \frac{\operatorname{tg} \varphi}{k}$$

此式的意义为: 若令 $c_k = c/k$, $\varphi_k = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{k}$, 则对于粘结力为 c_k 、内摩擦角为 φ_k 的材料, 该潜在滑面处于极限平衡状态。

按照上限解法, 由式(5.7.15)

$$H = \frac{c_k}{\gamma} N_{s(k)} = \frac{c/k}{\gamma} N_{s(k)}$$

式中, $N_{s(k)}$ 为用 φ_k 代替 φ 求得的 N_s 值。由上式得安全系数,

$$k = \frac{c}{\gamma H} N_{s(k)} \quad (5.7.16)$$

查表 5.1, 当 $\beta = 30^\circ$ 时: $\varphi = 5^\circ$, $N_s = 9.17$; $\varphi = 15^\circ$, $N_s = 21.71$ 。所以按直线内插, φ 角每增加 1° 时, N_s 值增加 $(21.71 - 9.17) / 10 = 1.254$ 。

用试凑法解式(5.7.16)。设 $k = 1.30$, 则 $\varphi_k = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} 15^\circ}{1.30} = 11.6464^\circ$, 故有

$$N_{s(k)} = 9.17 + 1.254(11.6464 - 5) = 17.5046$$

将所得 $N_{s(k)}$ 值代入式(5.7.16), 得

$$k = \frac{29400}{19600 \times 20} \times 17.5046 = 1.3128$$

设 $k = 1.31$, 算得 $\varphi_k = 11.5599^\circ$, $N_{s(k)} = 17.3961$, $k =$

1.3047; 设 $k=1.307$, 算得 $\varphi_k=11.5857^\circ$, $N_{s(k)}=17.4285$, $k=1.3071$, 因此, 所给边坡稳定安全系数的上限 $k^+=1.307$.

文献[2]中, 用极限分析方法还考虑了, 当材料内摩擦角 φ 及坡角 β 较小时, 滑面通过坡脚以下的情形; 也研究了各向异性及随深度发生非均匀性的土坡的稳定性问题。

关于具有一般非线性破坏准则的边坡稳定分析的上限解法, 参见文献[19, 24, 25].

§ 5.8 条形基础承载能力的极限分析

§ 4.10 用滑移线解法研究了条形基础的极限承载能力。然而, § 5.10 将指出, 只用滑移线解法研究本问题还是不够全面的。本节用极限分析方法重新研究条形基础的极限承载能力。

为了简单起见, 考虑服从屈雷斯卡屈服条件式(3.3.8)的地基材料, 并用剪切屈服极限 k 表示式(3.3.8)中的 c , 即屈服条件为

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2k \quad (5.8.1)$$

1. 极限载荷的上限

在计算上限时, 首先考虑刚性块体之间的相对滑动, 构造间断速度场。图 5.14a 示出了最简单的速度场。基础关于 B 点旋转, 沿着圆弧面发生滑动。用 h 表示基础的宽度。这个圆弧面的

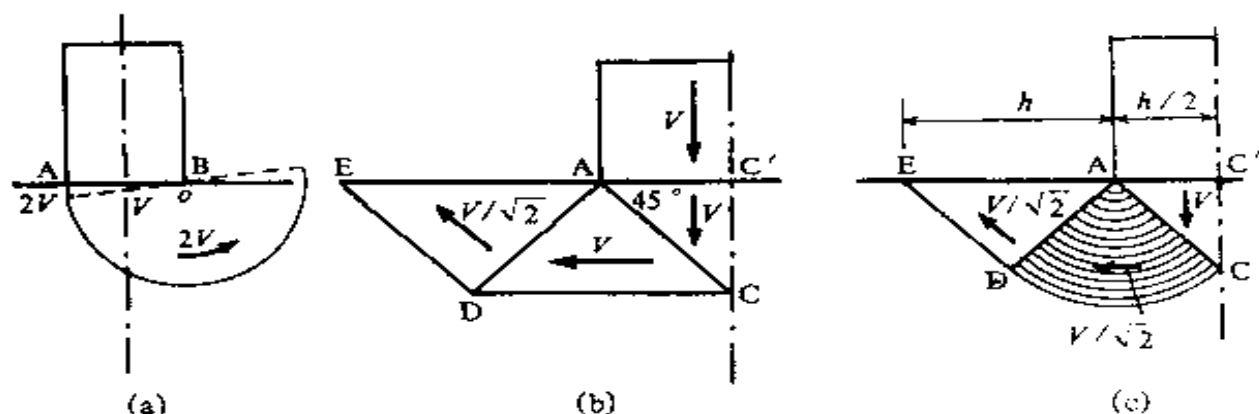


图 5.14 地基中的速度场

半径即为 h 。如果基础的平均速度是 V ，那么沿圆弧面，切向速度的间断量是 $2V$ 。注意，对于服从屈雷斯卡屈服条件的材料 ($\varphi = 0$)，穿过间断线，速度矢量的变化应平行于间断线，即只发生切向速度的间断，而法向速度是连续的。利用上限定理，使内功率与外功率相等（根据式(5.4.11)计算内功率）

$$QV = k(2V)(\pi h)$$

得极限载荷的上限

$$Q^+ = 2\pi kh \quad (5.8.2)$$

可以想象，在发生塑性流动时，速度场关于通过基础中心的竖直平面，将是对称的；并且在基础的两侧，流动将使材料被挤出。图 5.14b 指出了满足这种要求的速度场，其中刚性块体之间发生了相互滑动。假定基础向下的速度是 V ，根据问题的对称性，只需研究对称面 $C'C$ 的左半部即可。假定各块的速度方向如图 5.14b 所示。我们认为，直接在基础之下的 $AC'C$ 块的速度，与基础速度一样，也是 V 。根据穿过块间分界面（速度间断面）法向速度分量应连续的原则，即可确定： ACD 块的速度大小是 V ， ADE 块速度的大小为 $V/\sqrt{2}$ 。此时，穿过间断线 AC 、 AD 、 CD 和 DE 的切向速度分量的间断值分别为 $\sqrt{2}V$ 、 $V/\sqrt{2}$ 、 V 和 $V/\sqrt{2}$ 。根据上限定理，令内功率与外功率相等，

$$\begin{aligned} \frac{Q}{2} V &= k \left(\frac{h}{\sqrt{2}} \right) (\sqrt{2} V) + k \left(\frac{V}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{h}{\sqrt{2}} \right) \\ &\quad + khV + k \left(\frac{h}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{V}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

于是

$$Q^+ = 6kh \quad (5.8.3)$$

式(5.8.3)的极限载荷的上限值，已比式(5.8.2)的上限值有所改进。

用消除穿过 AD 线的速度间断和减小沿 CD 线或 AC 线的耗散速率的办法，可得到改善的上限。图 5.14c 所示的速度场可达到这个要求。用四分之一圆扇形代替了三角形 ACD ，并假定，此扇形中任意点处的切向速度是 $V/\sqrt{2}$ ，而径向速度是

0. 注意, 扇形块 ACD 并不是刚性块, 而发生了应变率。用极坐标来研究这个问题。在图 5.15 中, 过平面内任一点 $P(r, \theta)$, 作一径向线段 PA 及一环向线段 PB。假定某区域内各点, 在环向有相同的速度分量 $V/\sqrt{2}$, 而在径向没有速度分量。此时, 在单位时间内, 线段 PA

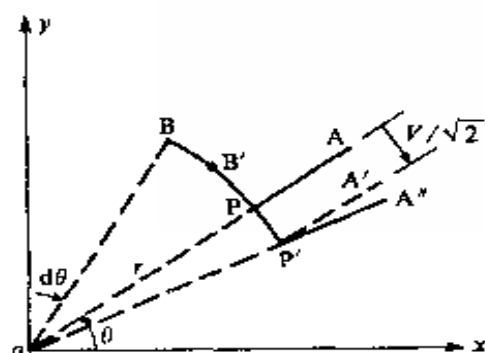


图 5.15 剪应变率

移到 $P'A'$ 位置, 环向线段 PB 移到 $P'B'$ 位置。显然, 在运动的过程中, 径向线段 PA 及环向线段 PB 的长度都没有改变。因此, 径向应变率 $\dot{\epsilon}_r$ 及环向应变率 $\dot{\epsilon}_\theta$ 均为零。现在, 考虑剪应变率 $\dot{\gamma}_{r\theta}$, 过 P' 点引径向线 $P'A''$ 。位移前, $\angle APB = \pi/2$; 位移后, $\angle A''P'B' = \pi/2$ 。剪应变率

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}_{r\theta} &= \angle A'P'B' - \angle APB = \angle A'P'B' - \angle A''P'B' \\ &= -\angle A''P'A' = -\frac{V/\sqrt{2}}{r}\end{aligned}$$

所以, 在图 5.14c 中的扇形区域 ACD 内的应变率为

$$\left. \begin{aligned}\dot{\epsilon}_r &= \dot{\epsilon}_\theta = 0 \\ \dot{\gamma}_{r\theta} &= -\frac{V}{r\sqrt{2}}\end{aligned} \right\} \quad (5.8.4)$$

根据式(5.4.10), 在区域 ACD 中每单位体积材料的能量耗散率为

$$D = \frac{kV}{r\sqrt{2}} \quad (5.8.5)$$

在区域 ACD 中的能量耗散率为

$$\int_0^{h/\sqrt{2}} \frac{kV}{r\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2} r dr$$

沿圆弧 CD 及线 AC, 切向速度间断为 $V/\sqrt{2}$, 且沿 AD

线不存在速度间断。沿 DE 线的速度间断，仍为 $v/\sqrt{2}$ 。

利用上限定理，令内、外功率相等，有

$$\begin{aligned} \frac{QV}{2} &= k\left(\frac{h}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{V}{\sqrt{2}}\right) + k\left(\frac{\pi h}{2\sqrt{2}}\right)\left(\frac{V}{\sqrt{2}}\right) \\ &+ \int_0^{h/\sqrt{2}} \frac{kV}{r\sqrt{2}} \frac{\pi}{2} r dr + k\left(\frac{h}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{V}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

于是

$$Q^+ = (2 + \pi)kh \quad (5.8.6)$$

式(5.8.6)极限载荷的上限值，又比式(5.8.3)的上限值有所改进。

2. 极限载荷的下限

利用下限定理求极限载荷的下限时，需要构造静力许可的应力场，它需满足：①平衡方程；②应力边界条件；③应力间断面上的平衡条件[即式(5.5.10)]；④不违背屈服条件。一般来说，用解析方法或图解方法构造间断的静力许可应力场，还存在一定困难。但使用与分析计算相结合的图解方法，将会克服某些困难。

下面考虑一个简单的静力场(图 5.16)。整个地基通过两条应力间断线分成三个区域，各区中的应力状态如图 5.16 所示。通过应力间断线，法向正应力连续，而切向正应力发生间断，这是允许的。显然，在各区域中满足屈服条件。因此，基础下的压应力

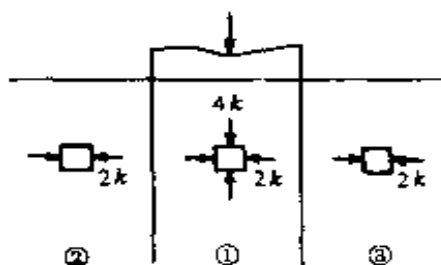


图 5.16 简单静力场

$$q^- = 4k \quad (5.8.7)$$

为极限承载压应力的下限，而极限载荷的下限为

$$Q^- = q^- h = 4kh \quad (5.8.8)$$

(1) 利用应力柱的概念来构造静力场。

图 5.17 表示一个应力柱。在应力柱内，应力状态为 $\sigma_1 = 2k$, $\sigma_3 = 0$ ，因此满足屈服条件。在应力柱的界面上，满足

应力间断条件。基础下极限压应力的下限为

$$q^- = 2k \quad (5.8.9)$$

所构造的应力场在实际中是不可能发生的，但是它满足静力场的要求，因此不影响求极限载荷的下限。

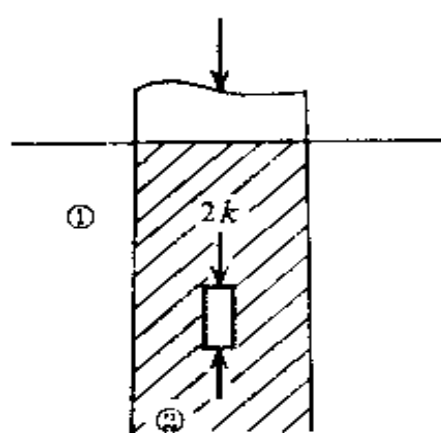


图 5.17 应力柱

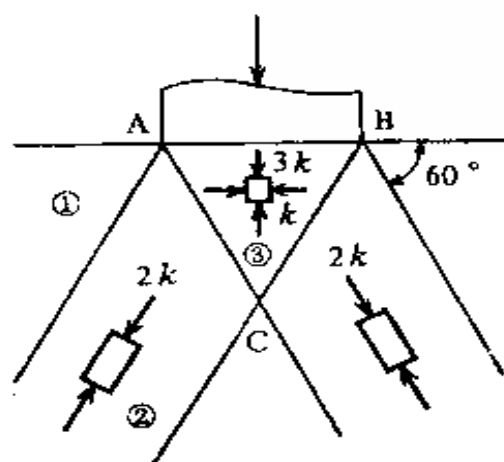


图 5.18 两个应力柱

用两个应力柱构造静力场如图 5.18。此时，两个应力柱承担基础压力的情况，从受力上看，类似于桁架铰接杆承受节点载荷一样。所以，用应力柱构造静力场，从受力上分析是合理的。另外，在每一个应力柱内满足屈服条件。

两个应力柱，把地基分成三个区域：①区域内不受应力；②区域为一个应力柱区域；③区域是两个应力柱的叠加区域，其内的应力场为两个应力柱内应力状态的叠加。各区的分界线，都是某一应力柱的边界线。因为应力柱内受应力的方向（ σ_1 方向），平行于应力柱的边界线，所以在穿过边界线时，柱内应力场满足应力间断条件。例如，在图 5.18 内②、③区的分界线 AC 的两侧的应力场，穿过 AC 发生间断。但是，这个间断只发生在平行于 AC 的切向正应力分量上，因此满足间断线上的平衡要求。因此，在使用应力柱构造静力场时，应力间断条件自然满足。另外，各区域内的应力状态为常量，所以平衡方程也自然满足（不考虑体积力）。用应力柱构造静力场，应力边界条件是容易被满足的。所以，剩下的问题，就

是如何判断构造的应力场不违反屈服条件。

(2) 叠加应力场的应力状态。

当用两个应力柱构造静力场时 (图 5.18), 三角形 ABC 区域即两个应力柱应力场的叠加区域。必须首先确定出叠加应力场的应力状态, 才能判断其是否违反屈服条件。要进行这个判断, 只需知道应力状态的主应力 σ_1 、 σ_3 即可, 或者说, 只需知道平均应力 $p = (\sigma_1 + \sigma_3) / 2$ 和应力莫尔圆的半径 $R = (\sigma_1 - \sigma_3) / 2$ 即可。实际上, 对于满足屈雷斯加屈服条件的材料, 判断是否违反屈服条件, 只要求出应力状态的莫尔圆半径 R , 如果 $R < k$, 就没有违反屈服条件。为求得主应力 σ_1 、 σ_3 的值, 就需要同时求得 p 和 R 。至于应力状态的主方向, 有时根据问题的对称性, 是可预先知道的。例如, 图 5.18 中的三角形 ABC 区域里的主方向为竖直和水平方向, 就是可以预先确定的。

下面考虑 n 个应力状态的叠加所形成的叠加应力状态的确定问题。假定每个应力状态 (均匀应力场) 的平均应力 p_i 、应力圆半径 R_i 和最大主应力与 x 轴的夹角 θ_i 为已知, 其中 $i = 1, 2, \dots, n$ 。根据莫尔应力圆 (图 4.3a), 可写出每个应力状态的应力分量表达式[见式(4.3.4)]

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xi} &= p_i + R_i \cos 2\theta_i \\ \sigma_{yi} &= p_i - R_i \cos 2\theta_i \\ \tau_{xyi} &= R_i \sin 2\theta_i \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.8.10)$$

将这些应力分量代数相加, 即得叠加应力状态的应力分量

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sum_{i=1}^n (p_i + R_i \cos 2\theta_i) \\ \sigma_y &= \sum_{i=1}^n (p_i - R_i \cos 2\theta_i) \\ \tau_{xy} &= \sum_{i=1}^n R_i \sin 2\theta_i \end{aligned} \right\} \quad (5.8.11)$$

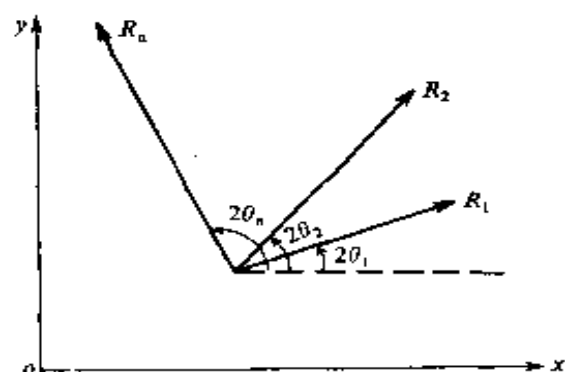


图 5.19 应力圆半径矢量

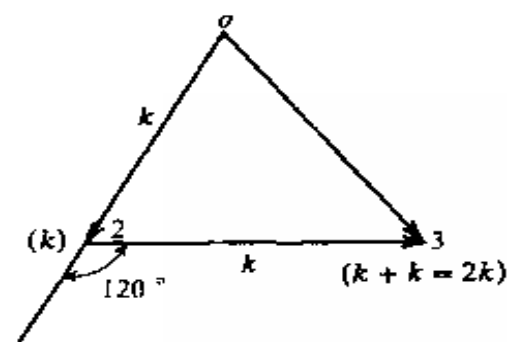


图 5.20 图 5.18 中区域
③的应力状态

$(2k-0)/2=k$, 向量 2-3 与向量 0-2 之间的夹角为 $2 \times 60^\circ = 120^\circ$, 则向量 0-3 的大小即为区域③中的应力圆半径值。从图 5.20 可看出 0-3 的大小 $R=k$ 。在图 5.20 中点 2 旁边圆括弧内的 k 值, 表示区域②中的平均应力为 k ; 点 3 旁边圆括号内的 $2k$ 值, 指示出区域③中的平均应力为 $2k$ [按式(5.8.12)计算]。因此, 区域③中的主应力 $\sigma_1 = 2k + k = 3k$, $\sigma_3 = 2k - k = k$ 。于是, 按图 5.18 的静力场, 基础的极限压应力的下限为

$$q^- = 3k \quad (5.8.14)$$

(3) 三个应力柱 (图 5.21)。

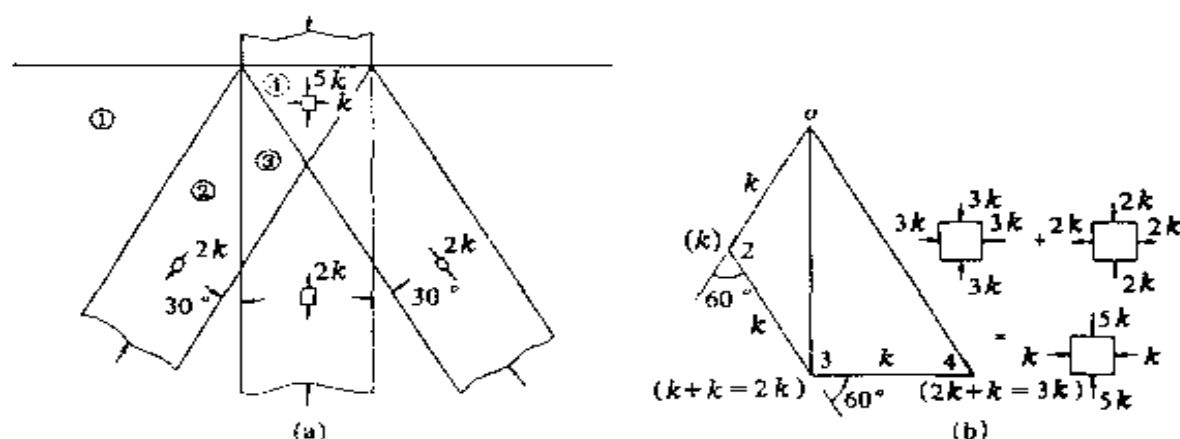


图 5.21 三个应力柱

用三个对称的应力柱来构造基础承载力问题的应力场。每

一个应力柱内有单向压应力 $2k$ ， k 为材料屈服剪应力值（图 5.21a）。由于考虑的是光滑基础承载能力问题，所以区域④中的主应力方向是竖直和水平的。由于应力柱布置的对称性，在区域④中的叠加应力状态，将满足这个应力边界条件。明显地，这个叠加的应力状态是三个应力柱叠加的结果。上面已经指出：几个应力状态叠加时，它们的平均应力代数相加，而应力圆半径矢量按矢量相加，这些应力圆半径矢量之间的夹角，等于它们最大主应力方向夹角的两倍。每个应力柱内的单向压应力 $2k$ ，被分为平均应力 k 和应力圆半径 k 。

图 5.21b 给了图 5.21a 中区域②、③、④中应力状态的一个图解表示。对于图(a)中区域②，应力圆半径的大小用图(b)中的矢量 0-2 表示，在圆括号中给出了平均应力值 k 。为了得到图(a)中叠加区域③中的应力状态，必须叠加竖直应力柱的贡献。注意，在图(b)中的应力圆半径矢量 2-3 与矢量 0-2 之间的夹角，为物理角（两个最大主应力方向夹角） 30° 的二倍。于是，图(a)中区域③中的应力圆半径矢量是图(b)中的矢量 0-3，而平均应力为 $k+k=2k$ 。为了得到图(a)中叠加区域④中的应力状态，还必须叠加右边应力柱的贡献。在图(b)中的应力圆半径矢量 3-4 与矢量 2-3 之间的夹角，为物理角 30° 的二倍。于是，矢量 0-4 的大小($2k$)表示了基础下区域④中的应力圆半径值，而平均应力为 $2k+k=3k$ 。

但是，在这个解中，在图(a)中区域③和区域④中的应力圆半径[分别用图(b)中矢量 0-3、0-4 的大小表示]值，超过了材料所允许的屈服剪应力 k 值。因此，这个应力场违背了屈服条件，它不是静力许可的应力场。

在图 5.21b 中，给出了图(a)中区域④的应力状态的叠加表示， $\sigma_1=5k$ 、 $\sigma_3=k$ 。明显地，这违反了屈服条件。为了平衡竖向的应力 $2k$ ，还需加入一水平的应力柱。合成的应力图示于图 5.22。此时，图 5.22a 中区域③和④不再违背屈服条件。应该注

意，图 5.22a 的静力场能由下述方法而简单地得到。将由两个对称应力柱构造的静力场（图 5.18），与被竖直和水平应力柱引起的直接在基础之下的静水压力场相叠加，就得到图 5.22a 所示的静力场，这个静水压力场的加入，不改变区域③和④的主方向；它也不违背图 5.18 中各区域的屈服条件。

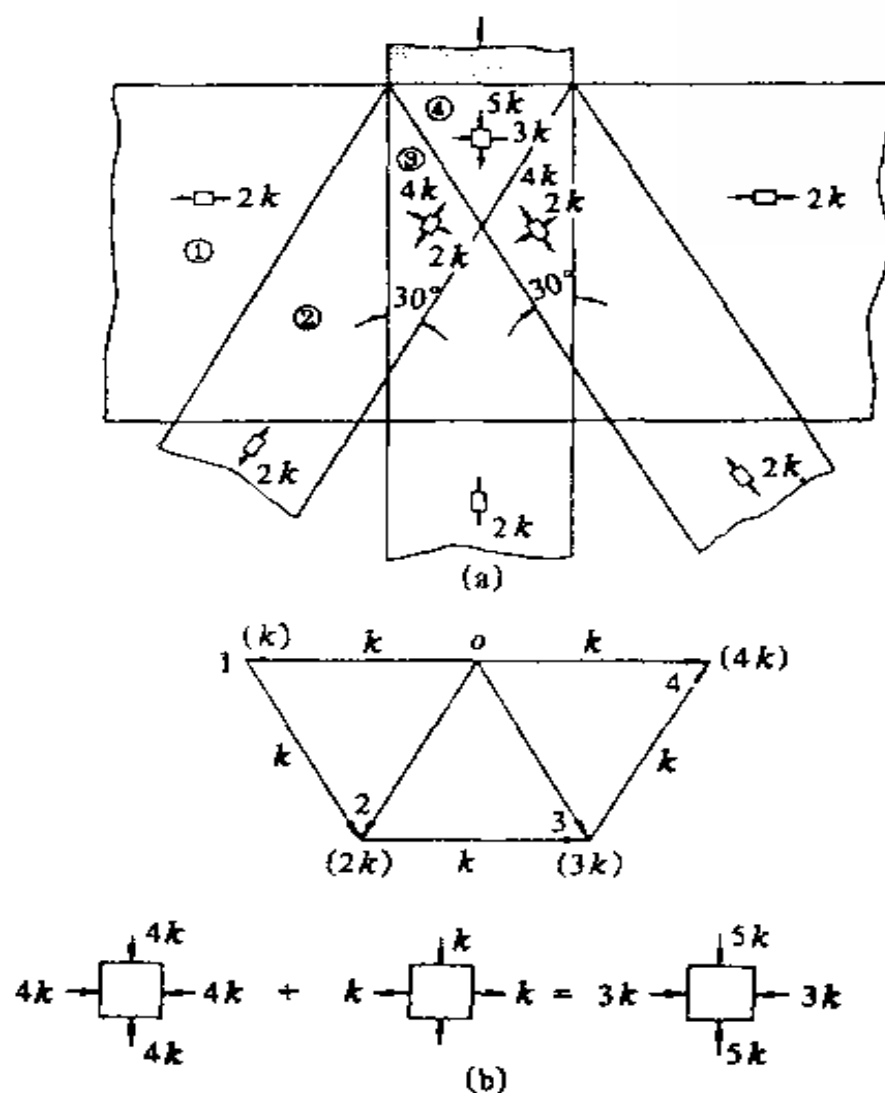


图 5.22 附加水平应力柱

从图 5.22a 可以看出，此静力场所对应的基础下的极限压应力的下限为

$$q^- = 5k \quad (5.8.15)$$

式(5.8.15)所确定的下限值，已比式(5.8.7)或式(5.8.14)的下限值

有了改进。为了进一步提高极限压应力的下限值，需要再增加应力柱的个数。

(4) 九个应力柱 (图 5.23) [2]。

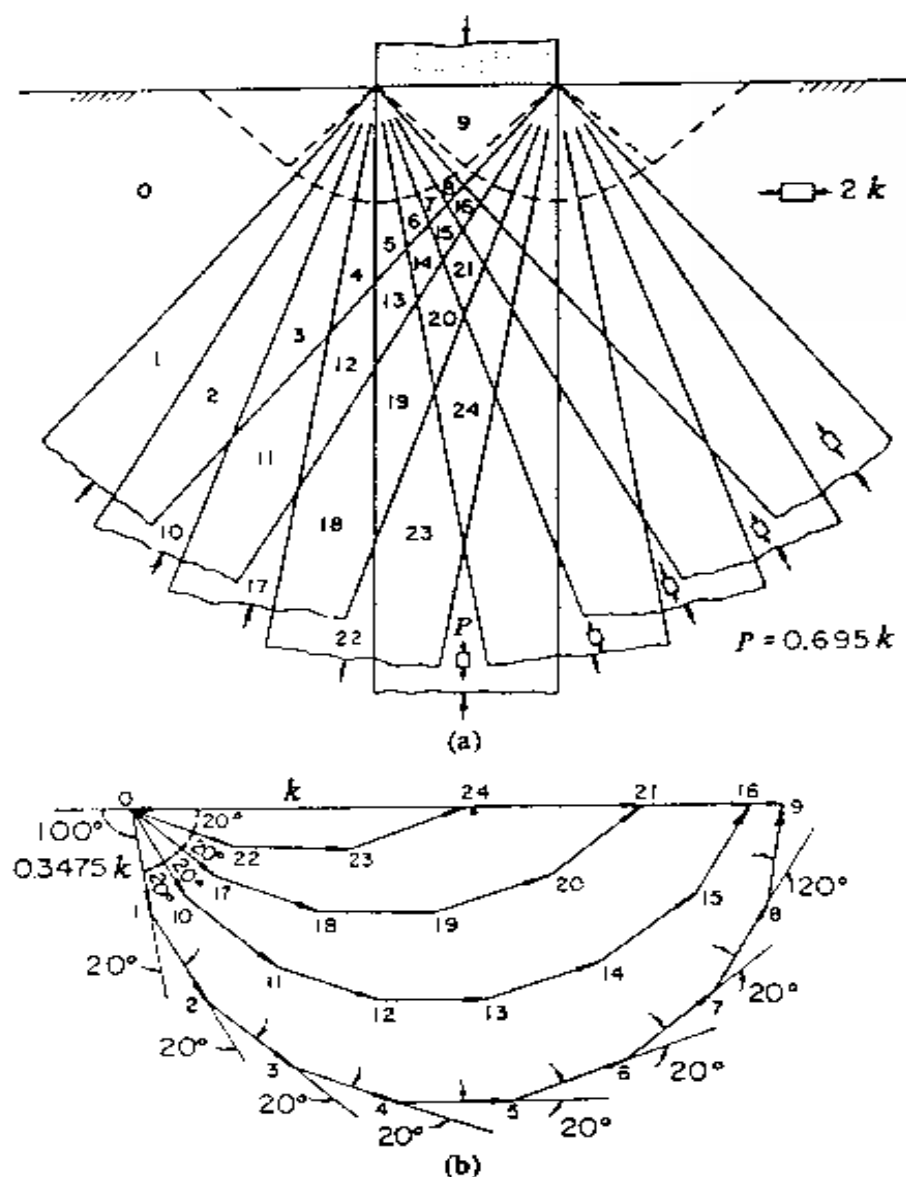


图 5.23 九个应力柱

图 5.23a 示出了九个应力柱构造的基础极限承载能力问题的解法，这是前边三个应力柱解法的推广。这九个应力柱是对称分布的，相邻应力柱之间的夹角为 10° ，每个应力柱受单向压应力 P ， P 值待定。附加的水平应力柱，受单向压应力 $2k$ 。

首先决定每个应力柱中的单向压应力 P ，以使得在图(a)的区域⑨中，不违背屈服条件。图 5.24 画出了一个典型的对称叠加区域中的应力状态。利用式(4.3.4)，令 $\theta = \pm \beta$ ，即可知图 5.24 中叠加区域中的竖直方向主应力 σ_v 、水平方向主应力 σ_H 分别为

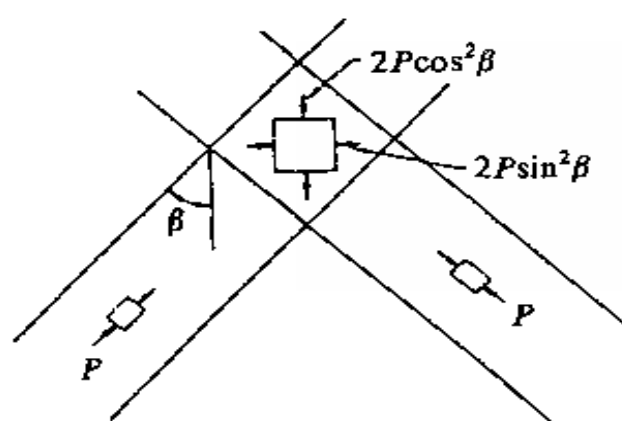


图 5.24 典型的叠加区域

$$\sigma_v = \frac{P}{2} + \frac{P}{2} \cos 2\beta + \frac{P}{2} + \frac{P}{2} \cos 2(-\beta) = 2P \cos^2 \beta$$

$$\sigma_H = \frac{P}{2} - \frac{P}{2} \cos 2\beta + \frac{P}{2} - \frac{P}{2} \cos 2(-\beta) = 2P \sin^2 \beta$$

考虑到对称性，在图 5.23a 中有四组对称的应力柱，这些应力柱与竖直线形成的角度 $\beta = 10^\circ$ 、 20° 、 30° 、 40° 。于是，在图 5.23a 里的区域⑨中的竖直方向和水平方向的主应力可表示为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_v &= 2P[\cos^2 40^\circ + \cos^2 30^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 10^\circ] + P \\ \sigma_H &= 2P[\sin^2 40^\circ + \sin^2 30^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 10^\circ] + 2k \end{aligned} \right\} \quad (5.8.16)$$

上式第一式右端的最后项 P ，表示竖直应力柱中的压应力；上式第二式右端的最后项 $2k$ ，表示水平应力柱中的压应力。使用屈雷斯卡屈服条件， $\sigma_v - \sigma_H = 2k$ ，可以得到压应力 P 的表达式：

$$\begin{aligned} P &= \frac{2k}{\left(\cos 80^\circ + \cos 60^\circ + \cos 40^\circ + \cos 20^\circ + \frac{1}{2} \right)} \\ &= 0.695k \end{aligned} \quad (5.8.17)$$

图 5.23b 指出了图 5.23a 中各区域中的应力圆半径矢量。在图 5.23b 中，各矢量的起始点与图中的点 24 重合。例如，矢量 24-0，表示水平应力柱中的应力圆半径；矢量 24-1，表示区域①中的应力圆半径；矢量 24-9，表示区域⑨中的应力圆半径；矢量 24-10，表示区域⑩中的应力圆半径，等等。

从图 5.23b 可明显看出，在图 5.23a 中的区域①—⑨满足屈服条件（应力圆半径等于 k ），而在其他区域不违背屈服条件（应力圆半径小于 k ）。事实上，如果把半径为 k 的半圆周分成九等分，每等分所对的中心角为 $2 \times 10^\circ = 20^\circ$ ，相邻等分弦长的夹角也为 $2 \times 10^\circ = 20^\circ$ 。这个结果，与确定图 5.23a 中区域①—⑨的应力圆半径矢量的作图法完全一致。

因此，这样所构造的应力场是静力许可的应力场。对于图 5.23a 中的区域⑩，它是九个应力柱及水平应力柱的叠加结果，因此，这区域中应力状态的平均应力及应力圆半径为

$$\left. \begin{aligned} p &= 9\left(\frac{1}{2}P\right) + k = 4.126k \\ R &= k \end{aligned} \right\} \quad (5.8.18)$$

于是，基础下的极限压应力的下限值为

$$q^- = p + R = 5.126k \quad (5.8.19)$$

使用图 5.23b，可以求直接在基础下的竖直和水平应力分布（图 5.23a 中区域⑨、⑩、⑪、⑫中的应力）。例如，在图 5.23a 中的区域⑩，平均应力和应力圆半径为（图 5.23b 中的点 21）

$$p = 5(0.3475k) + k = 2.735k$$

$$\begin{aligned} R &= 2 \times 0.3475k \left(\cos 40^\circ + \cos 20^\circ + \frac{1}{2} \right) - k \\ &= 0.533k \end{aligned}$$

于是，竖直及水平应力为

$$\sigma_v = 2.735k + 0.533k = 3.27k$$

$$\sigma_H = 2.735k - 0.533k = 2.20k$$

比较式(5.8.19)与式(5.8.15), 可见采用九个应力柱构造的静力场, 又提高了极限压应力下限解的值。

(5) 无穷多个应力柱。

上面对九个应力柱的陈述, 可被推广至 $2N+1$ 个应力柱的情况。此时, 有 N 组对称的应力柱, 一个竖直的应力柱及水平方向的应力柱。水平方向的应力柱, 仍承受单向的水平应力 $2k$ 。在九个应力柱的分析中, 相邻应力柱之间的夹角为 $90^\circ / 9 = 10^\circ$; 对于 $2N+1$ 个应力柱的情形, 相邻应力柱之间的夹角

$$\delta\beta = \frac{\pi/2}{2N+1}$$

其中, $\delta\beta$ 以弧度表示。因此, 可得关系式

$$N = \frac{\pi/4}{\delta\beta} - \frac{1}{2} \quad (5.8.20)$$

与九个应力柱的情形类似, 在直接邻近基础的区域中, 可求得竖直方向和水平方向的主应力为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_V &= 2P[\cos^2 \delta\beta + \cos^2 2\delta\beta + \cdots + \cos^2 N\delta\beta] + p \\ \sigma_H &= 2P[\sin^2 \delta\beta + \sin^2 2\delta\beta + \cdots + \sin^2 N\delta\beta] + 2k \end{aligned} \right\} \quad (5.8.21)$$

利用屈雷斯加屈服条件, $\sigma_V - \sigma_H = 2k$, 可以求得每个应力柱中单向压应力 P 的表达式为

$$P = 2k / \left[\sum_{i=1}^N \cos(2i\delta\beta) + \frac{1}{2} \right] \quad (5.8.22)$$

将式(5.8.22)代入式(5.8.21)的第一式, 即可得到用 $2N+1$ 个应力柱构造应力场的极限压应力的表达式

$$q = \sigma_V = 4k \cdot \frac{\sum_{i=1}^N \cos^2(i\delta\beta) + \frac{1}{2}}{\sum_{i=1}^N \cos(2i\delta\beta) + \frac{1}{2}} \quad (5.8.23)$$

现进一步化简表达式(5.8.23)。

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N \cos^2(i\delta\beta) + \frac{1}{2} &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} [1 + \cos(2i\delta\beta)] + \frac{1}{2} \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \cos(2i\delta\beta) + \frac{1}{4} + \frac{2N+1}{4}\end{aligned}$$

将上式代入式(5.8.23), 得

$$q = 4k \left\{ \frac{1}{2} + \frac{2N+1}{4} \left[\frac{1}{\sum_{i=1}^N \cos(2i\delta\beta) + \frac{1}{2}} \right] \right\} \quad (5.8.24)$$

下面, 计算 $\sum_{i=1}^N \cos(2i\delta\beta)$ 。由于

$$\begin{aligned}2\sin\frac{t}{2}\cos it &= \sin\left(\frac{t}{2} + it\right) + \sin\left(\frac{t}{2} - it\right) \\ &= \sin\left(i + \frac{1}{2}\right)t - \sin\left[(i-1) + \frac{1}{2}\right]t\end{aligned}$$

将上式两边对 i 从 1 到 N 求和

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N 2\sin\frac{t}{2}\cos it &= \sum_{i=1}^N \left\{ \sin\left(i + \frac{1}{2}\right)t - \sin\left[(i-1) + \frac{1}{2}\right]t \right\} \\ &= \sin\left(N + \frac{1}{2}\right)t - \sin\frac{t}{2}\end{aligned}$$

由此, 得

$$\sum_{i=1}^N \cos it = \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}$$

令 $t = 2\delta\beta$, 有

$$\sum_{i=1}^N \cos(2i\delta\beta) = \frac{\sin(2N+1)\delta\beta}{2\sin\delta\beta} - \frac{1}{2}$$

由式(5.8.20)可知, $(2N+1)\delta\beta = \pi/2$, 所以有

$$\sum_{i=1}^N \cos(2i\delta\beta) = \frac{1}{2\sin\delta\beta} - \frac{1}{2}$$

将上式代入式(5.8.24), 得

$$q = 4k \left(\frac{1}{2} + \frac{2N+1}{2} \sin \delta \beta \right) = 2k \left(1 + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin \delta \beta}{\delta \beta} \right) \quad (5.8.25)$$

对照文献[2](p.166)的推导可发现，这里给出的推导既简单又严格。如果应力柱的数目趋于无穷多，那么 $\delta \beta \rightarrow 0$ ，式(5.8.25)的极限值为

$$q^- = \lim_{\delta \beta \rightarrow 0} 2k \left(1 + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin \delta \beta}{\delta \beta} \right) = k(2 + \pi) \quad (5.8.26)$$

这个值，是基础下极限压应力的下限值。从式(5.8.6)，知道它的上限值为

$$q^+ = Q^+ / h = k(2 + \pi)$$

上、下限值相等。因此得到，光滑基础下满足屈雷斯卡屈服条件的地基的真实的极限承载压应力值为

$$q^* = q^+ = q^- = k(2 + \pi) \quad (5.8.27)$$

极限承载压力为

$$Q^* = h q^* = k h (2 + \pi) \quad (5.8.28)$$

(6) 有限宽地基。

上面考虑了压在无重介质半空间的光滑条形基础的极限承载问题。下面来研究对称地压在有限宽地基上的条形基础的承载能力问题。这里，仍假定介质服从屈雷斯卡屈服条件，且基础与地基之间是光滑作用的（图 5.25）。

① 上限解：考虑的破坏机构是，包括基础的地基部分 BDE，沿过基础端点 B 的斜面 BD 刚性滑下。假定 BD 线与竖直线的夹角为 θ ；基础向下的速度为 V 。于是，沿速度间断线的切向速度间断量为 $V / \cos \theta$ 。线段 BD 的长度为 $\left(\frac{b-h}{2} + h \right) / \sin \theta$ ，其中 b 为地基宽度， h 为基础宽度。按照上限定理，使外力功率等于塑性耗散功率，

$$QV = k \frac{V}{\cos \theta} \cdot \frac{\left(\frac{b-h}{2} + h \right)}{\sin \theta}$$

现在来求沿速度间断线 AC (或 BC) 的切向速度间断值。将块 ABC 的速度矢量向 AC 线上投影, 得 $V\cos\theta$; 将块 ACD 的速度矢量向 AC 线上投影, 得 $-u\sin\theta$ 。这两个投影量的符号相反, 因此, 沿 AC 线的切向速度间断量为 $V\cos\theta+u\sin\theta$ 。间断线 AC (或 BC) 的长度为 $x/\cos\theta$ 。于是, 上限定理的功率方程为

$$\begin{aligned} QV &= k(V\cos\theta + u\sin\theta)\frac{2x}{\cos\theta} + kbu \\ &= 2kx(V + utg\theta) + kbu \end{aligned}$$

令 $x/h = \xi$, 并利用式(5.8.30)和式(5.8.31), 从上式即得

$$\frac{Q}{kh} = \left(2\xi + \frac{1}{2\xi} \right) + \frac{1}{2\xi} \cdot \frac{b}{h} \quad (5.8.32)$$

对于 ξ 和 b/h 的任意选择, 这个 Q 值是一个上限。对于任意的 b/h 值, 优化 ξ 值以获得最小的 Q 值。由 $\frac{dQ}{d\xi} = 0$, 得 ξ 的优化值为

$$\xi = \frac{\sqrt{1+b/h}}{2} \quad (5.8.33)$$

将式(5.8.33)代入式(5.8.32), 得 Q 的上限

$$\frac{Q^+}{kh} = 2\sqrt{1+b/h} \quad (5.8.34)$$

另外注意, 由图 5.14c 所示的速度场所确定极限载荷的上限值

$$\frac{Q^+}{kh} = 2 + n \quad (5.8.35)$$

对于 $b > 3h$ 仍是有效的。

② 下限解: 由图 5.17 单应力柱静力场所确定的极限载荷的下限值

$$\frac{Q^-}{kh} = 2 \quad (5.8.36)$$

对有限宽地基仍是正确的。现在来找对于 $b = 3h$ 情况的下限解。为此, 修改图 5.18 的应力场, 限制非零应力区的宽度为 $3h$ (图

5.27). 用 DE 线切割应力场, 并引入附加的应力间断线 CD 和 CE. 在三角形区域 ABC、ACD 和 BCE 中的均匀应力状态相应于图 5.18 中的类似区域. 另外, 在区域 DEFG 中, 假定应力状态是简单压缩的, 其应力值待定. 由于对称性, 在区域 CDE 中的主应力方向将是竖直的和水平的方向, 其主应力值待定.

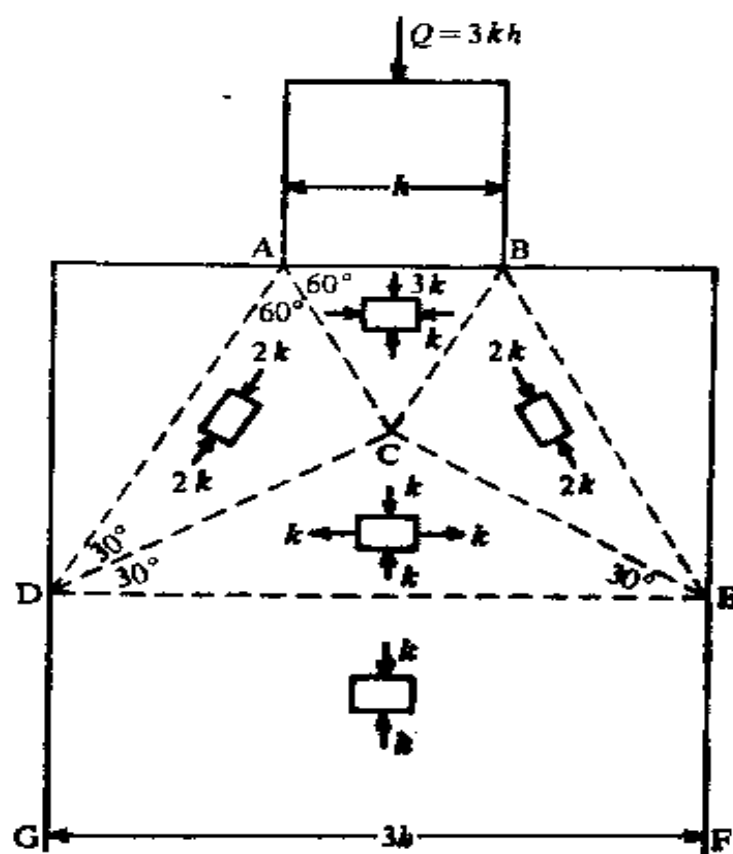


图 5.27 有限宽地基的静力场

根据穿过应力间断线 CD 的平衡要求, 确定在三角形区域 CDE 中的应力状态. 为此, 在间断线 CD 的两侧取两个三角形单元体. 在图 5.28a 中, 单元体 abc 的 ab 边在 CD 线上, 并假定其长度为 1(单位长), bc 边的长度为 $\sin 30^\circ$. 考虑单元体 abc 的平衡, 将作用在单元体上的所有的力, 向 σ_a 方向投影, 得

$$\sigma_a - 2k \sin 30^\circ \cos 30^\circ = 0$$

将作用在单元体上的所有的力, 向 τ_a 方向投影

$$\tau_a - 2k \sin 30^\circ \cos 30^\circ = 0$$

从以上两方程，即求出

$$\left. \begin{aligned} \sigma_a &= k/2 \\ \tau_a &= \frac{\sqrt{3}}{2} k \end{aligned} \right\} \quad (5.8.37)$$

考虑在图 5.28b 中的单元体 abd 的平衡，将作用在单元体上的所有的力，向 σ_x 方向投影

$$\sigma_x \sin 30^\circ + \tau_a \cos 30^\circ - \sigma_a \sin 30^\circ = 0$$

将作用在单元体上所有的力向 σ_y 方向投影

$$\sigma_y \cos 30^\circ - \tau_a \sin 30^\circ - \sigma_a \cos 30^\circ = 0$$

将式(5.8.37)代入以上两方程，即得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -k \\ \sigma_y &= k \end{aligned} \right\} \quad (5.8.38)$$

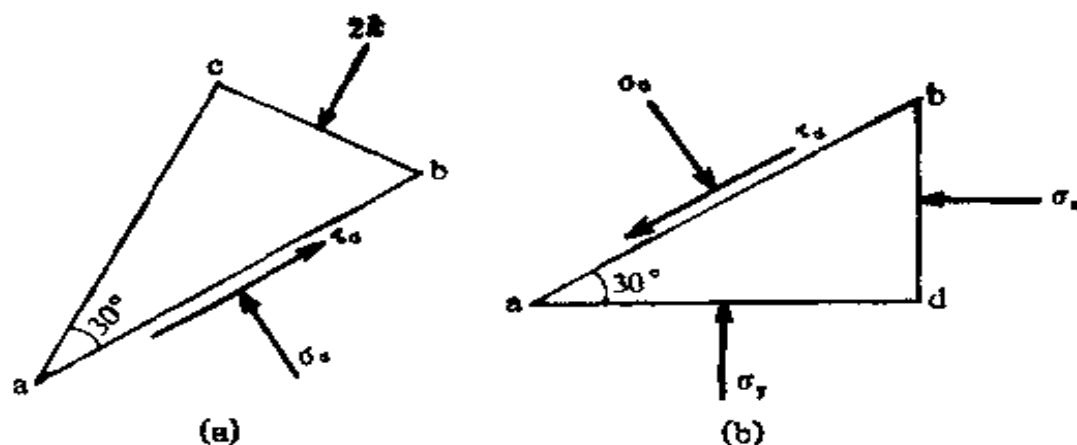


图 5.28 应力状态

因此，在图 5.27 中的三角形区域 CDE 内，水平方向的主应力为拉应力，其大小为 k ；竖直方向的主应力为压应力，其大小为 k 。由穿过应力间断线 DE 的平衡要求，可知在区域 DEFG 中的竖直方向主应力为压应力 k 。

由图 5.27 所确定的应力场满足平衡方程、不违背屈服条

件、满足穿过应力间断线的平衡条件及自由边界（不受力）的边界条件，因此它是静力许可的应力场，由 AB 线处的力的边界条件，得到

$$\frac{Q^-}{kh} = 3 \quad (5.8.39)$$

按照下限定理，由式(5.8.39)确定的 Q^- ，为有限宽 ($b=3h$) 地基上基础的极限载荷。当有限宽的地基， $b>3h$ 时，仍可构造图 5.27 的静力场，在宽度大于 $3h$ 的地方，只要令应力状态为不受力的状态，就能与图 5.27 一起组成静力场。因此对于 $b/h>3$ 的有限宽地基，式(5.8.39)均给出了极限载荷的一个下限。

对于有限宽地基上的基础的极限载荷，已经取得的结果示于图 5.29 上。正确的解必须放在影线的区域内。从图 5.29 可以看出，对于大的 b/h 值，要获得更好的下限值，还需要作进一步的努力。但是，经验指出，在这类问题中得到好的上限比得到好的下限要容易。并且，文献[26]指出：对于 $b>8.7h$ 的有限宽地基上光滑条形基础的极限载荷的真实值为

$$Q^* = (2 + \pi)kh \quad (5.8.40)$$

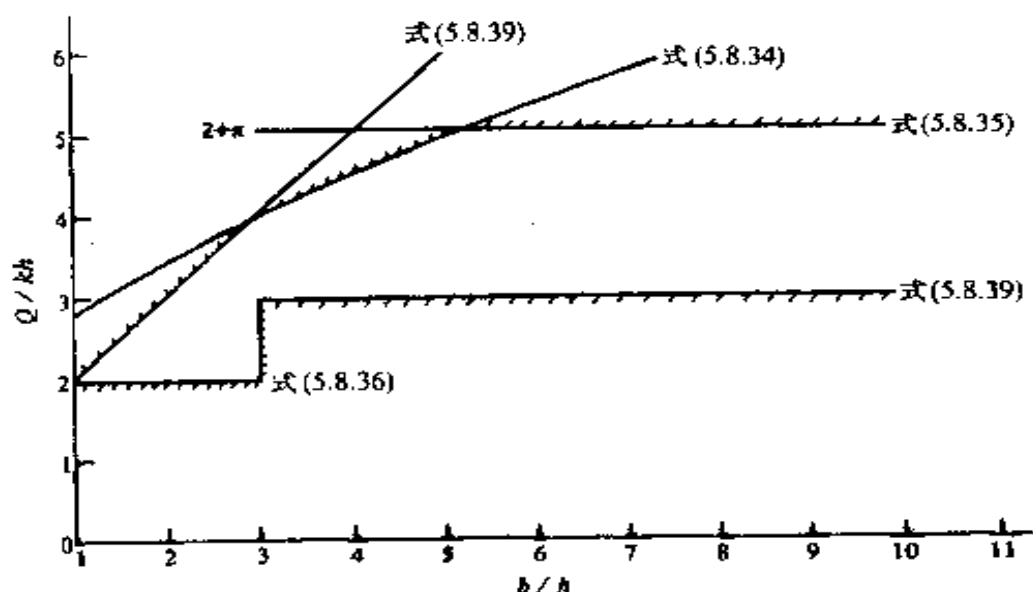


图 5.29 有限宽地基上条形基础的承载力

§ 5.9 纯粘性土垂直边坡临界高度的下限解^[21]

从 § 5.8 已经看到, 一般来说, 构造静力场要比构造机动场困难得多。这是因为, 机动场是所研究问题的一个可能的破坏机构, 进而总可以根据一些直观的感性知识, 来建立破坏机构。但是, 不易找到建立静力场的直观判断, 特别是要确定应力场是否违背屈服条件, 那是更困难的。

§ 5.8 利用应力柱的概念建立了静力场, 实际上, 这是利用了桁架的受力特点的直观判断, 因此取得了很大的成功。在那里, 没有考虑体积力; 而建立的静力场, 在各分区域内又是常应力状态, 因此平衡方程自然满足。

本节将研究纯粘性土垂直边坡临界高度的下限解。对于坡顶不承受载荷的边坡来说, 它所受的唯一外载荷, 就是自身的体积力。因此, 在构造边坡问题的静力场时, 在各分区中的应力场是变化的, 不可能是常应力状态, 因而必须考虑平衡方程。所以, 构造边坡问题的静力场, 比构造无重地基问题的静力场要困难些。并且, 不能应用应力柱的概念来构造边坡的静力场。

对于纯粘性土, 其内摩擦角 $\varphi = 0$ 。此时, 土被视为具有屈服剪应力 c 和容重 γ 的理想塑性材料, 同时, 这里认为土具有一定的抗拉能力。在式(5.5.15)中, 令 $\varphi = 0$, 即得到纯粘性土垂直边坡临界高度的一个下限

$$H_{cr}^- = 2c / \gamma \quad (5.9.1)$$

在式(5.6.19)中, 令 $\varphi = 0$, 得到临界高度的一个上限解为

$$H_{cr}^+ = 3.83c / \gamma \quad (5.9.2)$$

对于纯粘性土的垂直边坡, 可以构造一个满足平衡方程、力的边界条件及应力间断条件, 并且到处不破坏屈服条件的静力许可应力场, 从而可得一个改进的临界高度的下限解。

1. 基本方程

因为这里所构造的静力许可应力场较复杂，于是需要同时使用直角坐标系和极坐标系，利用两种坐标系下的平衡方程。对于图 5.30 中的直角坐标系 xoy ， x 轴对水平方向的倾角为 β 。对于平面变形问题的两个平衡方程可写为

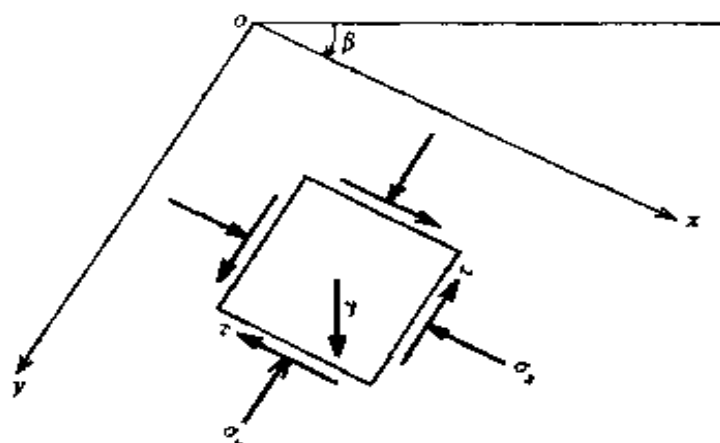


图 5.30 倾斜直角坐标系

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} &= \gamma \sin \beta \\ \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= \gamma \cos \beta \end{aligned} \right\} \quad (5.9.3)$$

在上式中，对剪应力分量 τ 已不加下标（由剪应力互等定理知， $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau$ ）。

下面导出在极坐标系下平面变形问题的平衡微分方程。考虑图 5.31a 所示的极坐标系。用两个相间为 $d\theta$ 角的径向平面和两个相距为 dr 的圆柱面，及两个平行于 xoy 面、且相距为单位长度的平面，从物体截出一个微分单元体 $PACB$ （具有单位厚度）。在单元体表面上作用有应力，单元体体积内作用有体力，假定重力方向平行于 y 轴。沿 r 方向的正应力称为径向正应力，用 σ_r 表示；沿 θ 方向的正应力称为环向正应力，用 σ_θ 表示；剪应力用 $\tau_{r\theta}$ 及 $\tau_{\theta r}$ 表示。根据剪应力的互等关系，我们用

$\tau = \tau_{r\theta} = \tau_{\theta r}$ 表示剪应力，各应力分量的正负号规定和直角坐标中一样，只是 r 方向代替了 x 方向， θ 方向代替了 y 方向。图 5.31a 中所示的应力分量都是正的。

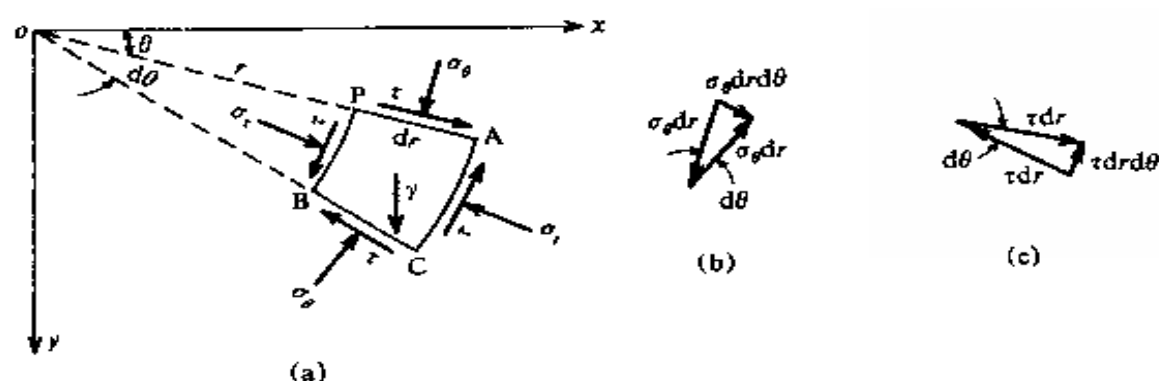


图 5.31 (a) 极坐标应力分量；(b) $\sigma_\theta dr$ 的合力；(c) τdr 的合力

现研究图 5.31a 中微元体 PACB 的平衡条件。PB 面上的法向内力为 $\sigma_r r d\theta$ ，切向内力为 $\tau r d\theta$ ；AC 面相对 PB 面，坐标 r 产生了增量 dr ，因此，AC 面上的法向内力为

$$\left[\sigma_r r + \frac{\partial(\sigma_r r)}{\partial r} dr \right] d\theta$$

切向内力为

$$\left[\tau r + \frac{\partial(\tau r)}{\partial r} dr \right] d\theta$$

同理，PA 面上的法向内力为 $\sigma_\theta dr$ ，切向内力为 τdr ；BC 面上的法向内力为

$$\left(\sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) dr$$

切向内力为

$$\left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial \theta} d\theta \right) dr$$

将微元体所受各力投影到微元体中心的径向轴上，列出径向的平衡方程，得

$$\sigma_r r d\theta - \left[\sigma_r r + \frac{\partial(\sigma_r r)}{\partial r} dr \right] d\theta + \tau dr$$

$$- \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial \theta} d\theta \right) dr + \sigma_\theta dr d\theta + \gamma r d\theta dr \sin \theta = 0$$

其中第五项 $\sigma_\theta dr d\theta$ ，是由于 PA 面的法向力 $\sigma_\theta dr$ 与 BC 面上的法向力 $\sigma_\theta dr$ 之间的夹角为 $d\theta$ 而产生的 r 方向的合力（图 5.31b）。在求合力 $\sigma_\theta dr d\theta$ 时，我们没考虑 BC 面上的法向内力相对于 PA 面上法向内力的微小变化，因为这个微小变化所引起的 r 方向的力分量，将是更高一阶的小量。

将微元体所受各力投影到微元体中心的切向轴上，列出切向的平衡方程，得

$$\sigma_\theta dr - \left(\sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) dr + \tau dr d\theta$$

$$- \left[\tau r + \frac{\partial(\tau r)}{\partial r} dr \right] d\theta - \tau dr d\theta + \gamma r d\theta dr \cos \theta = 0$$

其中第五项 $-\tau dr d\theta$ ，是由于 PA 面上的切向内力 τdr 与 BC 面上的切向内力 τdr 之间的夹角为 $d\theta$ ，而产生的 θ 方向的合力（图 5.31c）。

将上面得到的微元体在 r 方向和 θ 方向的平衡方程化简，得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_r) + \frac{\partial \tau}{\partial \theta} - \sigma_\theta &= \gamma r \sin \theta \\ \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial r} (r \tau) + \tau &= \gamma r \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (5.9.4)$$

式(5.9.4)即为极坐标系下的平衡微分方程。

另外，在材料力学二向应力状态的分析里，考虑图 5.32 的三角形微元体的平衡，对于 α 斜面上的正应力 σ_α 及剪应力 τ_α ，已经建立了下面的公式：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - 2\tau \cos \alpha \sin \alpha \\ \tau_\alpha &= (\sigma_x - \sigma_y) \cos \alpha \sin \alpha + \tau (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (5.9.5)$$

(注意：材料力学里在推导式(5.9.5)时所使用的三角形单元体的受力图中，应力分量 σ_x 、 σ_y 、 τ 及 α 斜面上的正应力 σ_α 及剪应力 τ_α 的正方向，与图 5.32 中所画的相反。因此，最后公式形式相同。) 对于平面变形问题，式(5.9.5)同样适用。

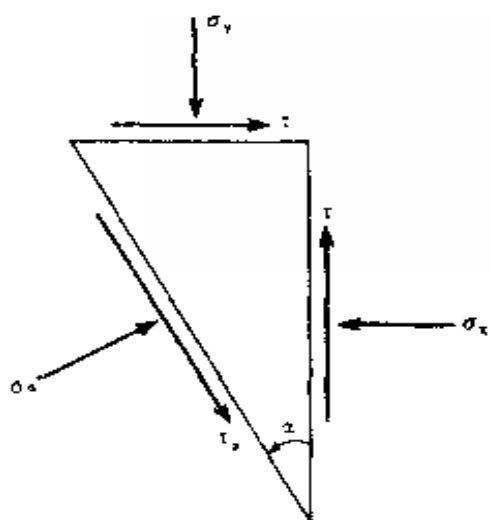


图 5.32 三角形微元体

其次，对于纯粘性材料，屈服条件为式(3.3.9)。那么，不破坏屈服条件的应力场应满足

$$F^2 \equiv \frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau^2 \leq c^2 \quad (5.9.6)$$

下面对纯粘性上的垂直边坡，构造满足平衡方程式(5.9.3)或式(5.9.4)、应力边界条件、应力间断条件和不破坏屈服条件式(5.9.6)的静力许可应力场。

2. 静力许可应力场

将边坡体（垂直于边坡走向的平截面）分成七个区域，分别标记为①、②、③、④、⑤、⑥、⑦（图 5.33）。相邻区域分界线之间的夹角或是 45° ，或是 90° 。该问题的边界条件为：在边界线

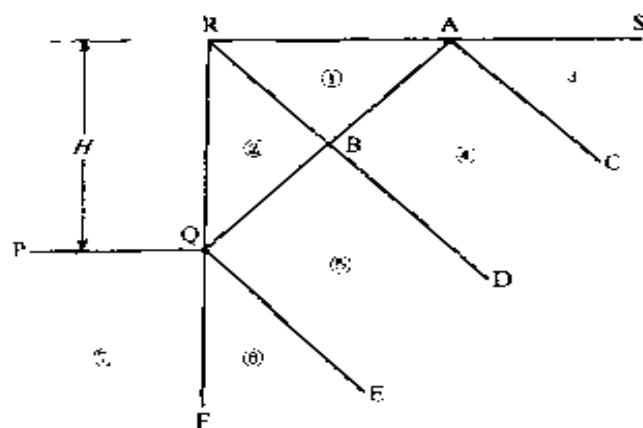


图 5.33 垂直边坡静力场的分区

值，因此，穿过分界线 RB，应力场是连续的。

沿着 ABQ 线，有 $x+y=H$ 。对照图 5.34 和图 5.32，ABQ 线相应于图 5.32 中的 $\alpha=3\pi/4$ ，于是由式(5.9.5)，得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\alpha} &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \tau \\ \tau_{\alpha} &= \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) \end{aligned} \right\} \quad (5.9.9)$$

将式(5.9.7)和式(5.9.8)代入式(5.9.9)，可知，在区域①和②里，沿 ABQ 线有

$$\left. \begin{aligned} \text{在 AB 线上,} \quad \sigma_{\alpha} &= \frac{1}{4}\gamma(5H - 6x) \\ \text{在 BQ 线上,} \quad \sigma_{\alpha} &= \frac{1}{4}\gamma(H + 2x) \\ \text{在 ABQ 线上,} \quad \tau_{\alpha} &= \frac{1}{4}\gamma H \end{aligned} \right\} \quad (5.9.10)$$

在图 5.34 中的 ABQ 线上，已标明了这些应力值。如果把 ABQ 线作为区域①和②与区域④和⑤的应力间断线，那么按照式(5.5.10)，在区域④和⑤内的 ABQ 线上，法向应力和剪应力应与式(5.9.10)相适应[如果在 ABQ 线上应力场连续，那么也应满足平衡条件式(5.5.10)]。

在区域①，对于式(5.9.6)函数 F^2 的表达式为

$$F^2 = \frac{1}{16}\gamma^2[(x+y)^2 + 4y^2] \quad (5.9.11)$$

可以看出 $x+y$ 的最大值发生在 AB 线上， y 的最大值取在 B 点，因此 F^2 的最大值发生在 $x=y=H/2$ ，且 $F_{\max}^2 = \gamma^2 H^2 / 8$ 。类似地，对于区域②

$$F^2 = \frac{1}{16}\gamma^2[(x+y)^2 + 4x^2] \quad (5.9.12)$$

在 B 点， F^2 的最大值仍为 $\gamma^2 H^2 / 8$ 。

于是，不等式(5.9.6)给出

$$H \leq 2\sqrt{2} \frac{c}{\gamma} \quad (5.9.13)$$

如果边坡高度 H 不超过值 $2.83c/\gamma$, 那么方程式(5.9.7)和式(5.9.8)所确定的应力场是满意的。下面的分析指出, 在式(5.9.13)的 H 值条件下, 能够将区域①和②中的应力场, 满意地推广到图 5.33 中的其他区域中。

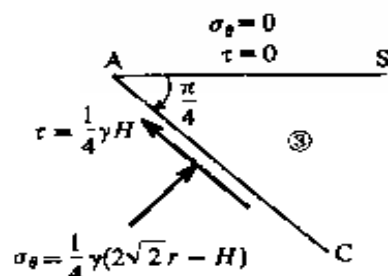


图 5.35 在图 5.33 中的区域③

区域③中的应力场如图 5.35。在用 A 点作为原点的极坐标系下, 构造的应力场

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \gamma r \sin \theta - \frac{1}{4} \gamma H \cos 2\theta - \frac{1}{4} \gamma H \\ \sigma_\theta &= \gamma r \sin \theta + \frac{1}{4} \gamma H \cos 2\theta - \frac{1}{4} \gamma H \\ \tau &= \frac{1}{4} \gamma H \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (5.9.14)$$

满足平衡方程式(5.9.4)。沿 AS 线 ($\theta=0$), 按照式(5.9.14)应力 $\sigma_\theta=\tau=0$, 满足应力边界条件。沿着区域③与④之间的分界线 AC ($\theta=\pi/4$), 剪应力及正应力为

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \frac{1}{4} \gamma H \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{4} \gamma (2\sqrt{2}r - H) \end{aligned} \right\} \quad (5.9.15)$$

在区域③

$$F = \left[\frac{1}{4} (\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + \tau^2 \right]^{1/2} = \frac{1}{4} \gamma H$$

为常数。对于 $H < 4c/\gamma$ [明显地, 比式(5.9.13)的要求弱], 应力场式(5.9.14)是满意的。

区域④和⑤中的应力场如图 5.36。对于区域④, 下述的应

力场满足平衡方程式(5.9.3) ($\beta = \pi/4$),

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{4} \gamma (2\sqrt{2}x + 3\sqrt{2}y - H) \\ \sigma_y &= \frac{1}{4} \gamma (2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y - H) \\ \tau &= \frac{1}{4} \gamma H \end{aligned} \right\} \quad (5.9.16)$$

沿着 AC 线 ($y=0$),

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \frac{1}{4} \gamma (2\sqrt{2}x - H) \\ \tau &= \frac{1}{4} \gamma H \end{aligned}$$

与区域③里的 AC 线上应力值相适应。沿 AB 线 ($x=0$),

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{4} \gamma (3\sqrt{2}y - H) \\ \tau &= \frac{1}{4} \gamma H \end{aligned}$$

对比图 5.34 与图 5.36 可见, 沿 AB 线有

$$y_{\text{④}} = \sqrt{2}(H - x_{\text{①}})$$

上式中 $y_{\text{④}}$ 表示图 5.36 中 AB 线上点的 y 坐标; $x_{\text{①}}$ 表示图 5.34 中 AB 线上点的 x 坐标。因此, 在区域④中, 沿 AB 线,

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{4} \gamma (3\sqrt{2}y_{\text{④}} - H) = \frac{\gamma}{4} [3\sqrt{2}\sqrt{2}(H - x_{\text{①}}) - H] \\ &= \frac{\gamma}{4} (5H - 6x_{\text{①}}) \end{aligned}$$

这与区域①中 AB 线上应力值相适应。函数 F^2 的值为

$$F^2 = \frac{1}{32} (\gamma y)^2 + \frac{1}{16} (\gamma H)^2 \quad (5.9.17)$$

沿 BD 线 ($y = H/\sqrt{2}$), 它有最大值 $F^2 = 5\gamma^2 H^2 / 64$, 此时不等式(5.9.6)给出

$$H \leq \frac{8}{\sqrt{5}} \frac{c}{\gamma} = 3.58 \frac{c}{\gamma} \quad (5.9.18)$$

又可看出，不等式(5.9.13)是更严格的。

在区域⑤，下述应力场满足平衡方程式(5.9.3)，

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{4} \gamma (2\sqrt{2}x - \sqrt{2}y - 3H) \\ \sigma_y &= \frac{1}{4} \gamma (2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y - H) \\ \tau &= \frac{1}{4} \gamma H \end{aligned} \right\} \quad (5.9.19)$$

在 BD 线上，式(5.9.16)的值与式(5.9.19)的值相等，因此应力场是连续的。在 BQ 线上，

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{4} \gamma (3H - \sqrt{2}y_{\text{⑤}}) = \frac{1}{4} \gamma [3H - \sqrt{2}\sqrt{2}(H - x_{\text{②}})] \\ &= \frac{1}{4} \gamma (H + 2x_{\text{②}}) \\ \tau &= \frac{1}{4} \gamma H \end{aligned}$$

式中， $y_{\text{⑤}}$ 为图 5.36 中 BQ 线上点的 y 坐标； $x_{\text{②}}$ 为图 5.34 中 BQ 线上点的 x 坐标，且

$$y_{\text{⑤}} = \sqrt{2}(H - x_{\text{②}})$$

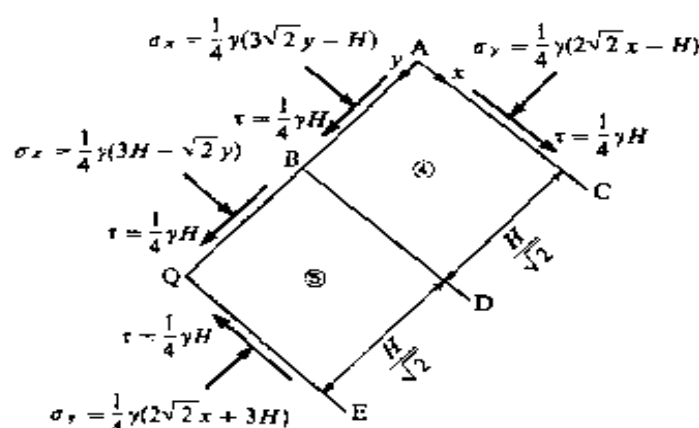


图 5.36 图 5.33 中的区域④和⑤

可见，在 BQ 线上，区域⑤与区域②的应力分量值相适应。

在 QE 线上 ($y = \sqrt{2}H$)，

$$\sigma_y = \gamma(2\sqrt{2}x + 3H) / 4$$

$$\tau = \gamma H / 4$$

在区域⑤中的函数 F^2 为

$$F^2 = \left[\frac{1}{8} \gamma (3\sqrt{2}y - 4H) \right]^2 + \left(\frac{1}{4} \gamma H \right)^2 \quad (5.9.20)$$

沿 QE 线它最大， $F^2 = \gamma^2 H^2 / 8$ ，不等式(5.9.6)导得

$$H \leq 2\sqrt{2}c / \gamma \quad (5.9.21)$$

此式与式(5.9.13)相同。

区域⑥中的应力场如图 5.37。在取 Q 点作为原点的极坐标系中，设定如下的应力场，

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_\theta + \frac{1}{2} \gamma H \sin 2\theta \\ \sigma_\theta &= \gamma r \sin \theta + \frac{1}{4} \gamma H \left(4 + \frac{\pi}{2} - 2\theta - \sin 2\theta \right) \\ \tau &= \frac{1}{4} \gamma H (1 + \cos 2\theta) \end{aligned} \right\} \quad (5.9.22)$$

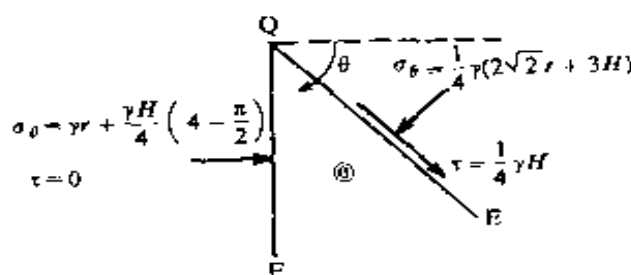


图 5.37 在图 5.33 中的区域⑥

通过验证，知式(5.9.22)满足了平衡方程式(5.9.4)。沿 QE 线 ($\theta = \pi / 4$)，

$$\sigma_\theta = \gamma(2\sqrt{2}r + 3H) / 4$$

$$\tau = \gamma H / 4$$

这与区域⑤内在 QE 线上的应力分量相适应。在 QF 线上 ($\theta = \pi/2$),

$$\sigma_{\theta} = \gamma r + \frac{1}{4} \gamma H \left(4 - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\tau = 0$$

函数 F 有简单形式 $\gamma H \cos \theta / 2$, 当 $\theta = \pi/4$ 时, F 值最大, 并再一次得出条件式(5.9.13)。

区域⑦中的应力场如图 5.38。最后, 考虑应力场

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \gamma \left(y + H - \frac{1}{8} \pi H \right) \\ \sigma_y &= \gamma y \\ \tau &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.9.23)$$

通过验证, 可知这个应力场满足平衡方程式(5.9.3) ($\beta = 0$)。在 PQ 线上 ($y = 0$), 由式(5.9.23), 有 $\sigma_y = \tau = 0$, 因此满足边界条件。沿 QF 线 ($x = 0$),

$$\sigma_x = \gamma \left(y + H - \frac{1}{8} \pi H \right)$$

$$\tau = 0$$

这与区域⑥内在 QF 线上的应力分量相适应。函数 F 取常值 $\frac{\gamma}{2} H \left(1 - \frac{\pi}{8} \right)$, 不等式(5.9.6)

导致 $H < 3.29c / \gamma$, 显然, 这个条件比式(5.9.13)所要求的弱。

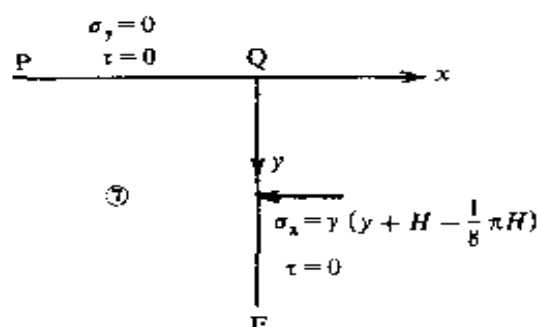


图 5.38 在图 5.33 中的区域⑦

于是, 如果 不等式 (5.9.13) 被满足, 即 $H < 2\sqrt{2}c / \gamma$, 则对于图 5.33 的整个区域, 已构造了一个静力许可的应力场。因此, 找到了纯粘性土垂直边坡临界高度的一个下限值为

$$H_{cr}^- = 2\sqrt{2}\frac{c}{\gamma} = 2.83\frac{c}{\gamma} \quad (5.9.24)$$

相对于式(5.9.1)来说, 式(5.9.24)是一个改进的下限解。所以, 纯粘性土垂直边坡的临界高度 H_{cr} 应满足下面的不等式,

$$2.83\frac{c}{\gamma} \leq H_{cr} \leq 3.83\frac{c}{\gamma} \quad (5.9.25)$$

由于已找到纯粘性土垂直边坡临界高度的一个下限值式(5.9.24), 从而可得出结论: 文献[1]认为式(4.8.7)所确定的值 (纯粘性土, 取 $\varphi=0$) 给出了垂直边坡的最大高度的断言, 是不正确的。

最后, 我们指出, 关于通过 P 点的竖直线, 反射图 5.33 的应力场后所得到的总应力场, 可用来构造任意宽度沟状区域的静力许可应力场。因而, 式(5.9.24)也给出了沟道临界深度的一个下限解。

§ 5.10 对极限平衡方法与滑移线方法的评论

在塑性理论发展的早期阶段, 它对解决象地基承载能力及挡土墙土压力的土体稳定问题, 是很有用的。那时, 还不存在基于塑性理论的边坡稳定问题的解答。随着塑性理论的进一步发展和完善, 它对稳定性问题的应用不断扩大, 得到许多具有理论价值的问题的解答。塑性理论将稳定性问题的分析放在了坚实的、合乎逻辑的力学基础之上。这种分析问题的方法, 在理论与概念上有很强的吸引力。诚然, 用经典的塑性理论方法研究土工问题, 常对问题的几何条件、加载条件及材料的性质等提出一定的限制条件。由于这些因素, 目前在边坡稳定问题的工程实践中, 用传统的极限平衡方法获得的解答的范围, 还远远超过基于塑性理论方法得到的解答的范围。但是, 塑性理论方法对岩土体稳定问题研究具有重大的实际意义: 利用这个方法, 可以校核用传统方法得到的各种解答的有效性和精确性。只有掌握了塑性理论分析方

法，才能进一步理解、运用、评论和发展传统的分析方法。

下面利用塑性极限分析理论，对极限平衡方法与滑移线方法进行一些评论。在前面几节中，用塑性极限分析的上、下限定理（对于比例加载情况），研究了基础承载能力及边坡稳定问题。现在，我们再把用于求塑性极限载荷的上、下限定理简述如下：

下限定理：满足物体内的平衡方程、应力边界条件、并且在任何地方均不违反屈服准则，而只由应力分布决定的载荷，不大于实际的破坏载荷。

上限定理：在满足物体内应变率和速度相容条件、零速度边界条件的假定的变形模式中，用相等外力功率与内耗散功率所决定的载荷，不小于实际的破坏载荷。

在 § 5.1 中已经指出，对于解决塑性分析的实际问题，极限分析方法有很多的优越性，并且塑性极限分析的上、下限定理还有重要的理论意义。利用它，可完全阐明极限平衡方法和滑移线方法的意义和有效性。现在就来研究这个问题。

1. 关于极限平衡方法

极限平衡方法，在边坡稳定的工程分析中得到广泛的应用。在这个方法中，假定边坡体沿某一滑面发生滑动而破坏。滑面的形状，通常假定为平面、圆弧面、对数螺旋面或其他曲面。在滑面上，岩土材料服从莫尔-库仑屈服条件。考虑滑面上滑体（或其各条分部分）的静力平衡，得出已知坡角的边坡临界高度的表达式或边坡的安全系数表达式。通过寻找滑面的最危险位置，从而最后确定边坡的临界高度。关于边坡稳定分析的各种极限平衡方法的分类研究及条分技术的实现，可参阅边坡稳定分析的文献，如文献[7, 8]。下面只通过一个简单问题，来对极限平衡方法进行评论。

现利用极限平衡方法确定垂直边坡的临界高度（图 5.39）。为了简单，假定滑面为平面，它对水平面的倾角为 θ 。滑面上材

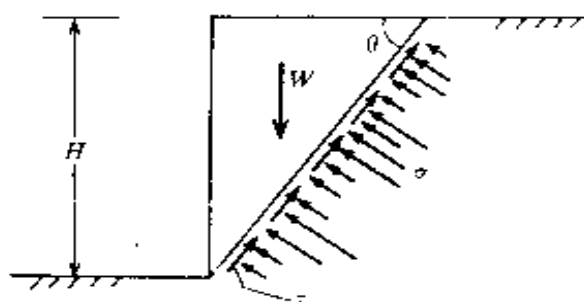


图 5.39 垂直边坡稳定性的极限平衡解

料所遵循的莫尔-库仑屈服准则为

$$\tau = c + \sigma \operatorname{tg} \varphi \quad (5.10.1)$$

式中， τ 、 σ 分别为滑面上的剪应力及法向正应力； c 、 φ 分别为材料的粘结力及内摩擦角。虽然，不知道滑面上的正应力及剪应力分布规律，但是如果以 l 表示滑面的长度（考虑单位厚度的边坡体），将式(5.10.1)在整个滑面上积分，可以写出

$$\int \tau dl = \int c dl + \int \sigma \operatorname{tg} \varphi dl = cl + \operatorname{tg} \varphi \int \sigma dl \quad (5.10.2)$$

考虑滑体在垂直滑面方向及沿滑面方向的平衡，得到

$$\int \sigma dl = W \cos \theta, \quad \int \tau dl = W \sin \theta \quad (5.10.3)$$

式中， W 为滑体重量。将式(5.10.3)代入式(5.10.2)，得到

$$W \sin \theta = c \frac{H}{\sin \theta} + W \cos \theta \operatorname{tg} \varphi \quad (5.10.4)$$

滑体的重量为

$$W = \frac{\gamma H^2}{2 \operatorname{tg} \theta} \quad (5.10.5)$$

将式(5.10.5)代入式(5.10.4)，可求得边坡高度为

$$H = \frac{4c}{\gamma} \cdot \frac{1}{\sin 2\theta - (1 + \cos 2\theta) \operatorname{tg} \varphi} \quad (5.10.6)$$

改变滑面倾角 θ ，以求得边坡的最小高度。由 $\frac{dH}{d\theta} = 0$,

得到临界滑面的倾角为

(1) 在塑性区找到一个满足屈服条件和应力边界条件的平衡应力场;

(2) 在塑性区找到一个满足材料流动法则、运动边界条件, 且和刚性区的运动相容的速度场。在这个速度场上的比耗散功率 $D = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} > 0$;

(3) 在刚性区找到一个不违反屈服条件的平衡应力场。

对于具有关联流动法则的材料, 上述条件 (1)、(2) 的满足, 保证了所求得的解是真实极限载荷的一个上限。对此说明如下: 假定在问题的塑性区, 已求得平衡应力场 σ_{ij} 它满足平衡条件、屈服条件及塑性区内的应力边界条件; 也求得了相容的速度场 v_i 及应变率场 $\dot{\epsilon}_{ij}$ 。这个应变率场与应力场满足相关联流动法则。当求出塑性区的速度场后, 根据连续性可确定出刚性区的运动情况, 即得到整个物体的速度场。在 § 4.10 条形基础承载能力问题中, 刚性区的速度分量为零。刚性区内的应力场是超静定的, 但是, 我们可以想象已存在一个在刚塑性交界线处与塑性区应力场满足应力连续条件的刚性区内的平衡应力场 (这个刚性区内的应力场, 在下面的分析中并不出现)。这样, 在整个物体内存存在一个平衡的应力场。此时, 可写出虚功率方程

$$\int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV = \int_V X_i v_i dv + \int_{S_t} \bar{X}_i v_i dS \quad (5.10.9)$$

因为在刚性区内应变率 $\dot{\epsilon}_{ij} = 0$, 所以上式左边的积分只需在塑性区进行。在塑性区内, σ_{ij} 与 $\dot{\epsilon}_{ij}$ 相关联。对比式 (5.10.9) 与式 (5.3.10), 可见此两式意义相同。因此, 物体在体力 X_i 及 S_t 上的面力 \bar{X}_i 作用下已经发生塑性破坏或即将破坏。于是可以说, 滑移线理论方法是对塑性区内的速度场和应力场作了细致的研究的机动法^[27]。

另外, 对于具有关联流动法则的材料, 上述条件 (1)、(3) 的满足, 保证了所求得的解是真实极限载荷的一个下限。直接由极限分析的下限定理, 即可得出这一结论。对于条形基础极限承

载能力问题，文献[28]指出了在刚性区构造不违反屈服条件的平衡应力场的一个方法。因此，§ 4.10 所给的承载压应力公式(4.10.2)，是真实极限载荷的一个上限，又是真实极限载荷的一个下限，所以即为真实极限载荷。对于 $c-\phi$ 土（具有粘结力和内摩擦的土）上的条形基础，文献[2]用应力柱的叠加方法，也构造了一个静力许可的间断应力场，当应力柱的数目趋于无穷多时，即得到与式(4.10.2)一致的极限载荷的下限值。这样，如果在刚性区存在不破坏屈服条件的平衡应力场，则将塑性极限载荷及在它作用之下的应力和速度分布，称为问题的完全解。因为一般来说，在刚性区内的具体应力分布是求不出来的，所以完全解有别于通常意义下的真实解^[29]。但是，对于一般问题很难判断，在刚性区内是否能找到不违反屈服条件的平衡应力场。因此一般来说，滑移线解法所确定的极限载荷，只是真实极限载荷的一个上限。顺便指出，文献[23]在分析滑移线解法的适用性时，说“通常可以认为，解答是下界”。这个观点是值得商榷的。

关于具有非关联流动法则材料所构成物体的破坏载荷问题，这里只介绍文献[6]对此所作的如下的说明。对于具有非关联流动法则的材料，不存在上述对具有关联流动法则材料所得出的关于极限载荷下限或上限的结论。实际上，这些问题的解可以是非唯一的，也就是说，破坏载荷可以依赖于加载路径。在这样的情况下，采用弹塑性加载路径，可能是必须的。不过，有证据说明，这种唯一性的缺乏，没有什么实际意义。

§ 5.11 关于极限分析定理的几个问题

对于理想弹塑性物体，如果只需求它的极限载荷，那就可以不必考虑加载历史而直接应用极限分析定理，求出极限载荷的上、下限。这是因为对于理想塑性材料，屈服曲面是固定的，与加载历史无关。

对于 § 5.3 中按比例加载的情况，已经陈述并证明了塑性极限载荷的上、下限定理。对于一般金属材料组成的物体，当表面载荷比较大时，通常不考虑体积力。如果表面载荷按比例增加，即可应用已经建立的极限分析定理确定极限载荷的上、下限。对于只受体积力作用的边坡稳定问题，这时只有一个载荷参数，当然可以应用按比例加载的极限分析定理。下面，对非比例加载情况的极限分析定理及对于具有非关联流动法则材料的极限分析定理作一些说明。

1. 对于非比例加载情况的极限分析定理

文献[30]建立了一般加载情况的极限分析定理。

下限定理：如果在整个物体内已找到一个平衡的应力分布 σ_{ij}^- ，它平衡了应力边界 S_t 上的作用载荷 \bar{X}_i ，且到处在屈服极限以下 $f(\sigma_{ij}^-) < 0$ ，那么在载荷 \bar{X}_i 、 X_i 作用下的物体将不破坏。

上限定理：如果假定一个相容的塑性变形机构 $\dot{\epsilon}_{ij}^+$ 、 v_i^+ ，它满足在位移边界 S_v 上的条件 $v_i^+ = 0$ ，那么，由外力功率等于内耗散功率

$$\int_V \sigma_{ij}^+ \dot{\epsilon}_{ij}^+ dV = \int_V X_i v_i^+ dV + \int_{S_t} \bar{X}_i v_i^+ dS \quad (5.11.1)$$

所决定的载荷 \bar{X}_i 、 X_i ，已使物体发生破坏或即将破坏。

当确定挡土墙的极限土压力等问题时，需要使用一般加载情况的极限分析定理。

2. 摩擦材料的极限分析定理

前面所给的极限分析的上、下限定理的证明过程中，一个本质性的根据是希尔的最大塑性功原理，即式 (3.4.1)。由最大塑性功原理可导出塑性应变率的相关联流动法则，即式(3.4.2)。它的几何意义是，塑性应变率向量与屈服面垂直。如果这个正交性条件不成立，即说明式(3.4.1)不成立，因此，就不能证明以前的极限分析定理。

现在考虑一个不能应用正交性条件的摩擦系统（图 5.40）。图 5.40a 示出一个放在粗糙水平面上的块体，它承受两个力，水平力 Q 和竖向力 P 。块体和水平面之间的摩擦系数是 μ 。于是，对于这个系统，在 P 、 Q 载荷空间的“屈服面”是 $Q = \mu P$ ，它是一条直线。如果作用在块体上的力，用直线下的一点表示，即 $Q < \mu P$ ，那么块体将不运动；如果这些力，用直线上一点表示，那么，指向直线外的无穷小的力的增量，将使块体滑动。这直线类似于理想塑性材料的屈服面。块体沿水平面的任意滑动，给出了相应的不可逆位移增量。由于块体的位移是在水平力 Q 的方向，在相应于竖向力 P 的方向上没有位移（图 5.40b）。在 P 、 Q 空间，位移增量向量有着平行于 Q 轴的方向，于是不垂直于“屈服面”，除了特殊情况 $\mu = 0$ ，即无摩擦滑动的情况以外。

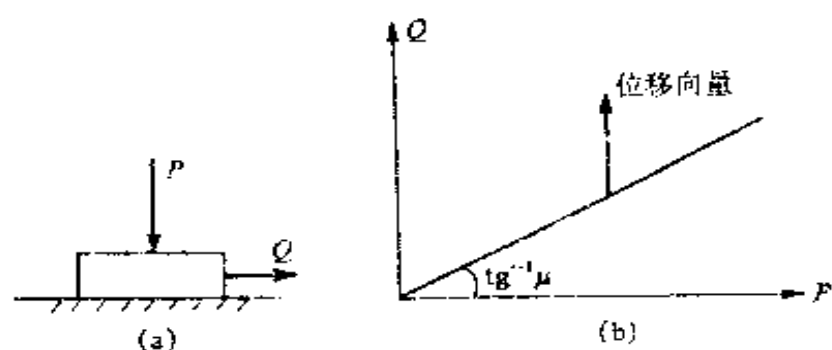


图 5.40 摩擦模型

下面考虑土体的一个简单物理模型（图 5.41）。这个模型说明，在剪应力作用下，土体体积也会发生变化。土颗粒被理想化为一个球体。它们处于密实而均匀的排列中。土体上作用有两个力，一个是与 $I-I$ 面垂直的法向压力 P_n ，假设它是常数；另一个是水平方向的力 P_t ，其数值从零逐渐增加，直到土体发生滑动。土体发生滑动时，水平力 P_t 不仅要克服粘结力，而且还要克服两种类型的摩擦力，一种是存在于土颗粒之间相互接触部分的表面摩擦力，另一种是土颗粒改变它们相互之间位置需要克服的啮合摩擦力。这个啮合的运动，产生了向上的位移以及通常的

滑动位移。因此，位移向量必须与滑移面形成 ψ 角。这样，在水平力 P_t 作用下，也就是在剪应力作用下，土体体积发生了变化。

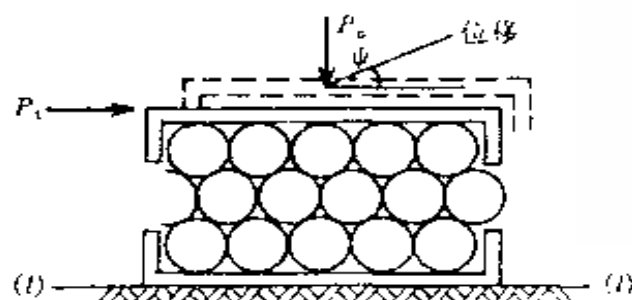


图 5.41 一个简单的物理模型

§ 4.9 中曾得出结论：对于具有非关联流动法则的材料，穿过速度间断线，速度变化倾斜间断线于 ψ 角；对于服从关联流动法则的材料，穿过速度间断线，速度的变化倾斜间断线于 φ 角（图 4.21）。把图 5.41 的土层考虑为速度间断过渡层，位移增量方向就是速度变化向量方向。因此，当图 5.41 中的角 $\psi = \varphi$ 时，材料服从关联流动法则。

再考察图 5.40，这里的位移向量相应于 $\psi = 0$ ，因此不符合关联流动法则。因此， $\psi = 0$ 的摩擦材料属于具有非关联流动法则的材料，这时，在屈服面上一点处的塑性应变率向量，一般来说不垂直屈服面。

对于摩擦材料的摩擦内面的两种特殊情况，可以建立塑性极限分析定理。这两种情况是：（1）摩擦系数是零；（2）在摩擦内面处，没有相互运动或分离。正如我们已看出的，正交性确实可应用于光滑的或无摩擦材料；在内面处没有相对运动意味着，摩擦系数为无穷大。借助于这些基础知识，下述两个定理在直觉上是清楚的。

定理一：使具有无相对运动条件的摩擦内面的弹性-塑性体的集合系统产生破坏的任何一组载荷，将使具有有限摩擦的情况

下产生破坏。

定理二：不能引起具有摩擦系数全等于零的摩擦内面的弹性-塑性体的集合系统产生破坏的任何一组载荷，也不能使摩擦内面的摩擦系数为任何其他值时产生破坏。

按照摩擦定理，从下面，极限载荷被具有零内面摩擦同样物体的极限载荷所限制；从上面，极限载荷被在内面处无相对运动的极限载荷所限制。根据这两个定理，如果把具有一定摩擦系数的基础底面简化处理为光滑的，即摩擦系数等于零，于是，得到的极限载荷将是小于实际的极限载荷。如果把基础底面简化为不会发生相对运动，于是得到的极限载荷将会大于实际的极限载荷。

3. 具有非关联流动法则的材料极限分析定理

上面提到的摩擦材料，属于一类具有非关联流动法则的材料。前面对具有关联流动法则的材料所建立的极限分析定理，不能用于具有非关联流动法则的材料。然而，对于与具有关联流动法则材料有着相同屈服条件，但是具有非关联流动法则的材料（此处的含意是有两种材料：一种是具有关联流动法则的材料，另一种是具有非关联流动法则的材料；但它们的屈服条件相同），能够证明下述定理。

上限定理：任何一组使服从相关联流动法则的材料产生破坏的载荷，将使服从不相关联流动法则的同样材料产生破坏。

这个定理容易从下述事实得出：因为静力许可的应力解是与流动法则无关的，所以，相应于服从非关联流动法则的材料实际破坏载荷的应力场，也必定是服从关联流动法则的同样材料的静力许可应力场。因此从下限定理（对服从关联流动法则材料所建立的下限定理）直接得出：对于服从非关联流动法则的材料实际破坏载荷，必定小于或等于服从关联流动法则的同样材料的实际破坏载荷。一些研究者曾讨论和应用了这个定理^[2]

对于服从非关联流动法则的材料，也有下限定理，但是它不

便于应用，这里就不介绍了。

关于极限平衡状态分析计算技术的进一步的讨论，可参见文献[31]。对于塑性极限分析方法在土力学及混凝土工程中的广泛应用，可见文献[2]，这是一本涉及塑性力学基本理论及在土工问题中实际应用的很有参考价值的专著。

另外，虽然基于塑性理论的应力分析的数值分析方法已被普遍用于求解岩土力学中各种稳定问题的解答，但值得注意的是，有限元方法却不能用于求解极限平衡状态分析中遇到的双曲型偏微分方程组（参见附录）。正如文献[31]所指出的：因此，在极限分析的数值方法研究方面，近 20 年来进展不大。

第六章 地下工程围岩的 极限平衡状态

巷道开挖后改变了岩体的初始应力状态，围岩应力产生应力重分布现象。当巷道周边围岩局部地区应力状态超过岩体弹性极限状态而进入塑性状态时，处于塑性状态的岩体在巷道区域形成一个塑性区，塑性区以外的围岩则仍处于弹性状态。通常认为：塑性区内岩体的应力状态满足松散介质的极限平衡条件；但是，对于不同性质的岩体，这个极限平衡条件的极限曲线可以是直线型的、双曲线型的或二次抛物线型的等。本章将研究侧压系数 $\lambda=1$ 时，圆形巷道围岩应力的弹塑性分析。尽管在实际工程中巷道很少做成圆形，但对圆形巷道所得到的结果在定性上不会失去一般性。

§ 6.1 巷道围岩弹性应力及位移

如果围岩应力状态位于岩体弹性极限状态以内，那么围岩处于弹性状态。本节首先研究围岩弹性状态下的应力和变形，所得结果对于完整均匀坚硬的围岩是完全可用的。另外，本节所研究的内容，也为后面几节围岩弹塑性应力分析作一些准备。

当水平巷道在长度方向的尺寸比横截面尺寸大得多，且在不考虑掘进的影响时，围岩的分析可作为平面变形问题研究；当巷道所处的深度大于巷道半径 20 倍时，被孔削弱了的有重半平面中的应力和位移问题，可以足够近似地用孔外无穷远处作用着初始应力的无重无限平面来代替^[34]（图 6.1）。图 6.1a 为巷道围岩应力分析的计算简图，这是一个极对称平面变形问题。使用极坐标系 (r, θ) ，图中符号的意义如下： r 为围岩中一点的极径坐标； R_0 为巷道周边点的极径坐标； P_i 为支架反力； P_0 为巷道中心点处的初始二向等压主应力值。

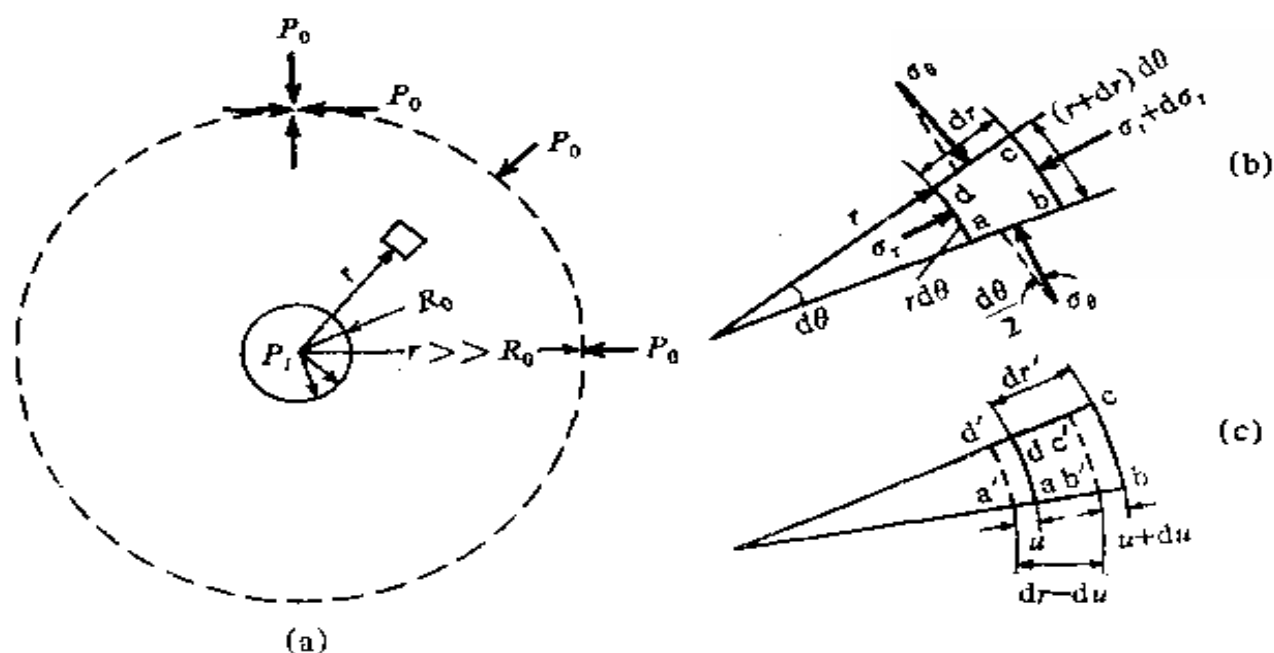


图 6.1 巷道围岩的受力与变形

1. 静平衡条件

用半径为 r 及 $r+dr$ 的两个圆柱面、夹角为 $d\theta$ 的两个径向面及两个相距为单位长度的横截面，从围岩中截出一个微元体 $abcd$ (图 6.1b)。现考虑该微元体的平衡条件。微元体距中心为 r 的微面 ad 上的径向正应力为 σ_r ，在 $r+dr$ 微面 bc 上的正应力则为 $\sigma_r+d\sigma_r$ ，微面 ab 及 cd 上的切向正应力为 σ_θ 。因为这里是极对称问题，所以 σ_r 、 σ_θ 只是 r 的函数，而与幅角 θ 无关，且各微面上没有剪应力。仍采用正应力压为正的规定。将作用于微元体上的内力投影于坐标 r 方向，得

$$\sigma_r r d\theta + 2\sigma_\theta dr \frac{d\theta}{2} - (\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)d\theta = 0$$

整理上式，并略去高阶微量，得

$$-\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (6.1.1)$$

至于内力在坐标 θ 方向上的投影，已自动满足平衡条件。

$$\frac{d(r\varepsilon_\theta)}{dr} = \varepsilon_r$$

将物理方程代入上式，得

$$\frac{d(r\sigma_\theta)}{dr} - \frac{\mu}{1-\mu} \cdot \frac{d(r\sigma_r)}{dr} = \sigma_r - \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_\theta$$

从式 (6.1.1) 可得 $\sigma_\theta = \frac{d(r\sigma_r)}{dr}$ ，代入上式整理得

$$r \frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + 3 \frac{d\sigma_r}{dr} = 0$$

令 $\sigma_r = r^n$ ，代入上式，得 $n = 0$ 或 $n = -2$ ，利用式 (6.1.1)，可得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= A + \frac{B}{r^2} \\ \sigma_\theta &= A - \frac{B}{r^2} \end{aligned} \right\} \quad (6.1.6)$$

式中， A 、 B 为积分常数。

利用应力边界条件

$$\begin{aligned} \sigma_r \Big|_{r=R_0} &= P_i \\ \sigma_r \Big|_{r \rightarrow \infty} &= P_0 \end{aligned}$$

可得， $A = P_0$ ， $B = R_0^2 (P_i - P_0)$ ，因此得出巷道弹性围岩的应力场为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= P_0 + \frac{R_0^2}{r^2} (P_i - P_0) \\ \sigma_\theta &= P_0 - \frac{R_0^2}{r^2} (P_i - P_0) \end{aligned} \right\} \quad (6.1.7)$$

下面确定围岩的位移场。注意到由初始应力场所产生的初始位移在巷道开挖前已经完成，因此在确定由开挖而引起的围岩位移时不应将其计入。我们用 Δu 、 $\Delta \varepsilon_\theta$ 、 $\Delta \sigma_r$ 、 $\Delta \sigma_\theta$ 分别表示

因开挖而引起的位移、相应应变及应力增量。它们之间满足弹性关系。由式(6.1.7),

$$\Delta\sigma_r = \sigma_r - P_0 = -\frac{R_0^2}{r^2} (P_i - P_0)$$

$$\Delta\sigma_\theta = \sigma_\theta - P_0 = -\frac{R_0^2}{r^2} (P_i - P_0)$$

由式(6.1.3)及式(6.1.5)可得

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon_\theta &= \frac{\Delta u}{r} = \frac{1-\mu^2}{E} \left(\Delta\sigma_\theta - \frac{\mu}{1-\mu} \Delta\sigma_r \right) \\ &= -\frac{1-\mu^2}{E} \left(1 + \frac{\mu}{1-\mu} \right) \frac{R_0^2}{r^2} (P_i - P_0)\end{aligned}$$

所以, 因开挖而引起的位移为

$$\Delta u = -\frac{1+\mu}{E} \cdot \frac{R_0^2}{r} (P_i - P_0) \quad (6.1.8)$$

巷道周边位移为

$$\Delta u|_{r=R_0} = -\frac{1+\mu}{E} R_0 (P_0 - P_i) \quad (6.1.9)$$

§ 6.2 巷道围岩弹塑性应力及位移

当巷道埋深增加时, 围岩应力将增大。从某一深度开始, 如果围岩应力状态达到了岩体的极限状态, 则周边岩石首先开始破坏, 或出现裂缝, 或出现大的塑性变形, 造成巷道周边的非弹性位移。这种现象从周边向岩体深处扩展到某一范围, 在此范围内的岩体称为塑性区或非弹性变形区, 以外为弹性区。

假设圆形巷道在无穷远处作用着相等的竖直及侧向压力 $P_0 = \gamma h$ (γ 为岩石平均容重; h 为巷道中心点在地表下的深度; 图 6.2), 这是极对称平面变形问题。图 6.2 中符号意义如下: r 为围岩中一点的极径坐标; R_0 为巷道周边点的极径坐标; R 为

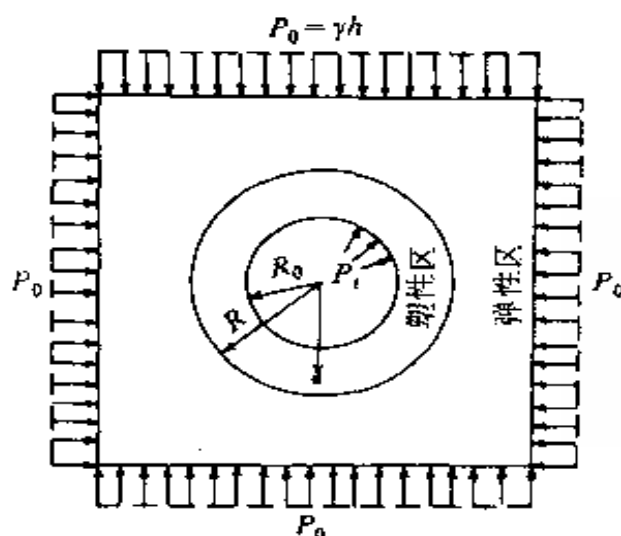


图 6.2 巷道围岩应力位移计算图

围岩弹塑性交界周线点的极径坐标； P_i 为支架反力； $P_0 = \gamma h$ 为圆形巷道中心点的静水初始应力值。

1. 弹性区 ($R < r < \infty$) 应力的确定

围岩弹性区内的应力分量，可由 § 6.1 中的弹性围岩的应力表达式 (6.1.6) 来表示。再根据无穷远处的应力边界条件 $\sigma_r|_{r \rightarrow \infty} = P_0$ ，可得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= P_0 + \frac{B}{r^2} \\ \sigma_\theta &= P_0 - \frac{B}{r^2} \end{aligned} \right\} \quad (6.2.1)$$

式中， σ_r 为径向正应力； σ_θ 为环向正应力； B 为待定常数。

2. 塑性区 ($R_0 < r < R$) 应力的确定

由式(3.3.5)可得松散介质极对称平面问题的极限平衡条件为

$$\frac{\sigma_\theta + c \operatorname{ctg} \varphi}{\sigma_r + c \operatorname{ctg} \varphi} = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad (6.2.2)$$

式中， c 为岩石的粘结力； φ 为岩石的内摩擦角。由式(6.2.2)

$$\frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{\sigma_r + c \operatorname{ctg} \varphi} = \frac{2 \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}$$

将此式代入平衡方程式(6.1.1), 得

$$\frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{1}{r} \cdot \frac{2\sin\varphi}{1-\sin\varphi} (\sigma_r + c\operatorname{ctg}\varphi) = 0$$

解此微分方程式, 得

$$\sigma_r = -c\operatorname{ctg}\varphi + C_0 r^{\frac{2\sin\varphi}{1-\sin\varphi}} \quad (6.2.3)$$

式中, C_0 为积分常数。

由应力边界条件 $\sigma_r|_{r=R_0} = P_i$, 求得

$$C_0 = (P_i + c\operatorname{ctg}\varphi) \left(\frac{1}{R_0} \right)^{\frac{2\sin\varphi}{1-\sin\varphi}}$$

因此

$$\sigma_r = -c\operatorname{ctg}\varphi + (P_i + c\operatorname{ctg}\varphi) \left(\frac{r}{R_0} \right)^{\frac{2\sin\varphi}{1-\sin\varphi}} \quad (6.2.4)$$

将式(6.2.4)代入式(6.2.2), 得

$$\sigma_\theta = -c\operatorname{ctg}\varphi + (P_i + c\operatorname{ctg}\varphi) \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} \left(\frac{r}{R_0} \right)^{\frac{2\sin\varphi}{1-\sin\varphi}} \quad (6.2.5)$$

式(6.2.4)及式(6.2.5)即为塑性区内的应力表达式。

3. 弹塑性边界的确定

在弹性区与塑性区的交界面上, σ_r 与 σ_θ 的方程既应符合弹性状态方程式(6.2.1), 也应符合塑性状态方程式(6.2.4)及式(6.2.5), 因此有

$$\left. \begin{aligned} P_0 + \frac{B}{R^2} &= -c\operatorname{ctg}\varphi + (P_i + c\operatorname{ctg}\varphi) \left(\frac{R}{R_0} \right)^{\frac{2\sin\varphi}{1-\sin\varphi}} \\ P_0 - \frac{B}{R^2} &= -c\operatorname{ctg}\varphi + (P_i + c\operatorname{ctg}\varphi) \\ &\quad \cdot \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{\frac{2\sin\varphi}{1-\sin\varphi}} \end{aligned} \right\} \quad (6.2.6)$$

由式(6.2.6)的两式相加, 可得

$$R = R_0 \left[(1 - \sin\varphi) \frac{P_0 + c \cot\varphi}{P_i + c \cot\varphi} \right]^{\frac{1 - \sin\varphi}{2\sin\varphi}} \quad (6.2.7)$$

由式(6.2.6)的两式相减, 再利用式(6.2.7), 有

$$B = -(P_0 \sin\varphi + c \cos\varphi) R_0^2 \cdot \left[(1 - \sin\varphi) \frac{P_0 + c \cot\varphi}{P_i + c \cot\varphi} \right]^{\frac{1 - \sin\varphi}{\sin\varphi}}$$

由式(6.2.7)可见:

(1) 巷道所在处的原岩初始应力 P_0 愈大, 非弹性变形区就愈大;

(2) 支架对围岩的反力 P_i 愈大, 非弹性变形区的半径 R 就愈小, 如不用支架, 即 $P_i = 0$, 则求得的非弹性变形区的半径为最大值;

(3) 反映岩石强度性质的两个指标 c 和 φ 值愈小, 也就是岩石的强度愈低, 则非弹性变形区就愈大。

从式(6.2.1)及常数 B 的表达式, 即可得到弹性区应力的最后表达式为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= P_0 - \frac{R_0^2}{r^2} (P_0 \sin\varphi + c \cos\varphi) \\ &\quad \cdot \left[(1 - \sin\varphi) \frac{P_0 + c \cot\varphi}{P_i + c \cot\varphi} \right]^{\frac{1 - \sin\varphi}{\sin\varphi}} \\ \sigma_\theta &= P_0 + \frac{R_0^2}{r^2} (P_0 \sin\varphi + c \cos\varphi) \\ &\quad \cdot \left[(1 - \sin\varphi) \frac{P_0 + c \cot\varphi}{P_i + c \cot\varphi} \right]^{\frac{1 - \sin\varphi}{\sin\varphi}} \end{aligned} \right\} \quad (6.2.8)$$

由式(6.2.4)、式(6.2.5)及式(6.2.8), 可作出沿径向的应力分布曲线图 6.3。为了对比, 图中也画出了支架反力 $P_i = 0$ 时巷道

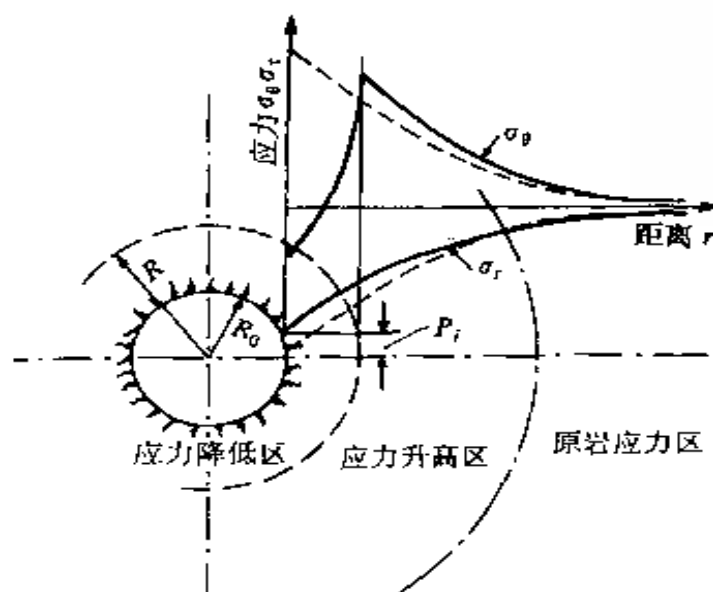


图 6.3 巷道围岩中出现非弹性变形区后应力的再分布图
虚线为未出现非弹性变形区时的应力分布曲线
实线为出现非弹性变形区时的应力分布曲线

弹性围岩的应力分布曲线，可以看出：非弹性变形区中的应力因满足极限条件而相对减小，成为应力降低区；最大的应力集中由围岩周边转移到弹性区与塑性区的交界面上，因而弹性区也可称为应力升高区。

4. 巷道周边位移

弹塑性交界处的位移，可由巷道弹性围岩周边位移公式求得。这时，只要将式(6.1.9)中的 R_0 改为 R ， P_i 改为 $\sigma_r|_{r=R}$ 即可，即

$$\Delta u|_{r=R} = \frac{1+\mu}{E} R (P_0 - \sigma_r|_{r=R}) \quad (6.2.9)$$

由式(6.2.4)及式(6.2.7)，

$$\begin{aligned} \sigma_r|_{r=R} &= -c \operatorname{ctg} \varphi + (P_i + c \operatorname{ctg} \varphi) \left(\frac{R}{R_0} \right)^{\frac{2 \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}} \\ &= -c \operatorname{ctg} \varphi + (P_i + c \operatorname{ctg} \varphi) (1 - \sin \varphi) \frac{P_0 + c \operatorname{ctg} \varphi}{P_i + c \operatorname{ctg} \varphi} \\ &= P_0 (1 - \sin \varphi) - c \cos \varphi \end{aligned}$$

因此，可得弹塑性交界处的位移为

$$\Delta u|_{r=R} = \frac{1+\mu}{E} R (P_0 \sin \varphi + c \cos \varphi)$$

产生非弹性变形区时，巷道周边位移可根据塑性区体积不变的条件求得，即

$$2\pi R \cdot \Delta u|_{r=R} = 2\pi R_0 \cdot \Delta u|_{r=R_0}$$

利用 $\Delta u|_{r=R}$ 式及式(6.2.7)，可得

$$\begin{aligned} \Delta u|_{r=R_0} &= \frac{R}{R_0} \Delta u|_{r=R} \\ &= \frac{1+\mu}{E} \cdot \frac{R^2}{R_0} (P_0 \sin \varphi + c \cos \varphi) \\ &= \frac{1+\mu}{E} R_0 (P_0 \sin \varphi + c \cos \varphi) \\ &\quad \cdot \left[(1 - \sin \varphi) \frac{P_0 + c \operatorname{ctg} \varphi}{P_i + c \operatorname{ctg} \varphi} \right]^{\frac{1 - \sin \varphi}{\sin \varphi}} \quad (6.2.10) \end{aligned}$$

这就是圆形巷道弹塑性围岩周边位移公式。

§ 6.3 二次抛物线型极限曲线的 巷道围岩应力及位移 [35]

1. 极限平衡条件

一般认为：莫尔强度理论能较好地反映岩石的强度条件。它假定：如果在通过物体中任意一点的各个微面上的剪应力分量 τ_n 与正应力分量 σ_n 满足条件 $\max\{|\tau_n| - f(\sigma_n)\} = 0$ [其中 $f(\sigma_n)$ 为 σ_n 的对该物体材料的已知函数]，则该点处于极限平衡状态。在 $\sigma_n - |\tau_n|$ 坐标平面上，滑移面上应力分量所满足的函数关系 $|\tau_n| = f(\sigma_n)$ 的图形，是材料达到极限应力状态时一系列极限应力圆的包络线——极限曲线。关于极限曲线的形状，有着不同的建议：有直线型的、抛物线型的、摆线（半拱）型的、摆线直线

型的、双曲线型的和折线型的（双直线型）等（图 6.4）。对于具体的岩石材料，应根据岩石试验结果，确定其最适宜的极限曲线形状。

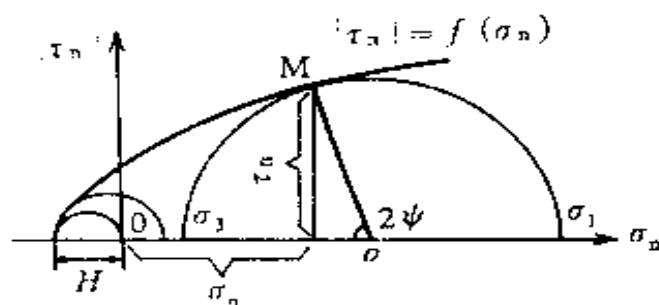


图 6.4 岩石的极限曲线

为使单一极限曲线在 $|\tau_n| \approx 0$ 的区域有物理意义（极限曲线在 $|\tau_n| = 0$ 点也应与极限应力圆相切），它必须在与 σ_n 轴交点处（ $|\tau_n| = 0$ ）满足下列条件：与 σ_n 轴正交，且有有限的曲率半径 r_0 ($r_0 \neq 0$)。

在上面所列举的单一极限曲线中，只有二次抛物线及双曲线满足在 $|\tau_n| = 0$ 处的条件；并且二次抛物线型极限曲线还满足 $\frac{d|\tau_n|}{d\sigma_n} \rightarrow 0 (\sigma_n \rightarrow \infty)$ 。因此，本节以二次抛物线作为极限曲线。

2. 二次抛物线型包络线的极限平衡条件

二次抛物线型包络线的一般方程为：

$$|\tau_n|^2 = \lambda(\sigma_n + H) \quad (6.3.1)$$

式中， H 为单轴抗拉强度； λ 为待定正常数。于是，

$$|\tau_n| = \sqrt{\lambda(\sigma_n + H)} \quad (6.3.2)$$

用 2ψ 表示极限曲线上 M 点处的法线对 σ_n 轴的倾角（图 6.4）。§ 4.3 中曾指出，在松散介质极限平衡的平面变形问题中，通过变形平面的每一点存在两条滑动线，它们之间的夹角为 $2\mu = \frac{\pi}{2} - \varphi$ 。在图 4.3a 中， $\angle AO'\sigma_3 = 2\mu$ 。同理，这里的 2ψ 为通

过物体一点的两个滑移面之间的夹角。此时

$$\frac{d|\tau_n|}{d\sigma_n} = \operatorname{ctg} 2\psi = \frac{\lambda}{2\sqrt{\lambda(\sigma_n + H)}} \quad (6.3.3)$$

$$\frac{1}{\sin 2\psi} = \sqrt{1 + \frac{\lambda}{4(\sigma_n + H)}} \quad (6.3.4)$$

根据极限平衡条件 (图 6.4)，可以用 σ_n 、 $|\tau_n|$ 、 2ψ 表示主应力 σ_1 、 σ_3 于下

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) &= \sigma_n + |\tau_n| \operatorname{ctg} 2\psi \\ \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) &= \frac{|\tau_n|}{\sin 2\psi} \end{aligned} \right\} \quad (6.3.5)$$

将式 (6.3.2)、式 (6.3.3)、式 (6.3.4) 代入式 (6.3.5) 中得

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \sigma_n + \frac{\lambda}{2} \quad (6.3.6)$$

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \sqrt{\lambda(\sigma_n + H) + \frac{\lambda^2}{4}} \quad (6.3.7)$$

由式 (6.3.6)、式 (6.3.7) 消去 σ_n ，得

$$\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2 = \lambda \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right) + B \quad (6.3.8)$$

其中， $B = \lambda H - \frac{\lambda^2}{4}$ 。

式 (6.3.8) 即为二次抛物线型包络线的主应力表达式。

下面，用单轴压缩的应力状态条件，来确定出现在式 (6.3.8) 中的 λ 值。设岩石单向抗压强度为 σ_c ，此时， $\sigma_1 = \sigma_c$ ， $\sigma_3 = 0$ ，代入式 (6.3.8)，可得确定 λ 的方程为

$$\lambda^2 - 2(\sigma_c + 2H)\lambda + \sigma_c^2 = 0 \quad (6.3.9)$$

其两根为

$$\left(\frac{\sigma_{\theta} - \sigma_r}{2}\right)^2 = \lambda\left(\frac{\sigma_{\theta} + \sigma_r}{2}\right) + B \quad (6.3.12)$$

式中, σ_r 为径向应力分量; σ_{θ} 为环向应力分量.

令 $\frac{\sigma_{\theta} + \sigma_r}{2} = s$, 则

$$\frac{\sigma_{\theta} - \sigma_r}{2} = (\lambda s + B)^{1/2}$$

因此,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= s - (\lambda s + B)^{1/2} \\ \sigma_{\theta} &= s + (\lambda s + B)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (6.3.13)$$

式(6.3.13)即为极限平衡条件式(6.3.12)的参数表达式.

本问题的平衡方程为

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_{\theta}}{r} = 0 \quad (6.3.14)$$

将式(6.3.13)代入到式(6.3.14)得

$$\left[1 - \frac{\lambda}{2}(\lambda s + B)^{-1/2}\right] \frac{ds}{dr} - \frac{2(\lambda s + B)^{1/2}}{r} = 0 \quad (6.3.15)$$

分离变量, 有

$$\left[(\lambda s + B)^{-1/2} - \frac{\lambda}{2}(\lambda s + B)^{-1}\right] ds = \frac{2dr}{r}$$

两边积分, 得

$$\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{(\lambda s + B)^{1/2}}{1/2} - \frac{1}{2} \ln(\lambda s + B) = 2 \ln r + C$$

即

$$\frac{2}{\lambda} (\lambda s + B)^{1/2} - C = \ln[(\lambda s + B)^{1/2} r^2]$$

式中, C 为积分常数.

于是

$$r = (\lambda s + B)^{-1/4} e^{\left[\frac{(\lambda s + B)^{1/2}}{\lambda} - \frac{C}{2}\right]} \quad (6.3.16)$$

式(6.3.16)即为微分方程式(6.3.15)的一般积分.

将条件 $r = R_0$ 时, $s = s_0$, 代入式(6.3.16), 有

$$e^{-c/2} = \frac{R_0}{(\lambda s_0 + B)^{-1/4} e^{\frac{(\lambda s_0 + B)^{1/2}}{\lambda}}}$$

从而得

$$r = R_0 \left(\frac{\lambda s_0 + B}{\lambda s + B} \right)^{1/4} \frac{1}{c\lambda} \left[(\lambda s + B)^{1/2} - (\lambda s_0 + B)^{1/2} \right] \quad (6.3.17)$$

下面确定出现在式(6.3.17)中的 s_0 。

从边界条件 $r = R_0$, $\sigma_r = P_i$ 及式(6.3.13), 得

$$P_i = s_0 - (\lambda s_0 + B)^{1/2}$$

解此根式方程, 得

$$\begin{aligned} s_0 &= P_i + \frac{\lambda}{2} + \sqrt{\left(P_i + \frac{\lambda}{2}\right)^2 + (B - P_i^2)} \\ &= P_i + \frac{\lambda}{2} + \sqrt{P_i \lambda + \lambda H} \end{aligned} \quad (6.3.18)$$

从式(6.3.17), 给 s 一个值, 即可求 r 的一个对应值; 又由式(6.3.13), 给 s 同一个值, 又可求出 σ_r 、 σ_θ 的对应值, 因此即可确定 σ_r 、 σ_θ 与 r 的对应关系。

(2) 弹性区 ($R < r < \infty$) 应力的确定。

根据式(6.2.1), 可得弹性区中应力分量

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= P_0 + \frac{A}{r^2} \\ \sigma_\theta &= P_0 - \frac{A}{r^2} \end{aligned} \right\} \quad (6.3.19)$$

式中, A 为待定常数。

(3) 弹塑性边界的确定。

假定 $r = R$ 时, $s = s_R$ 。

我们认为, 应力分量通过弹塑性边界是连续的。由式(6.3.13)、式(6.3.19), 有

$$\left. \begin{aligned} P_0 + \frac{A}{R^2} &= s_R - (\lambda s_R + B)^{1/2} \\ P_0 - \frac{A}{R^2} &= s_R + (\lambda s_R + B)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (6.3.20)$$

因此

$$s_R = P_0 = \gamma h$$

于是, 由式(6.3.17), 得

$$R = R_0 \left(\frac{\lambda s_0 + B}{\lambda \gamma h + B} \right)^{1/4} e^{\frac{1}{\lambda} [(\lambda \gamma h + B)^{1/2} - (\lambda s_0 + B)^{1/2}]} \quad (6.3.21)$$

式(6.3.21)即确定了弹塑性边界的半径。

由式(6.3.20), 又有

$$A = -R^2 (\lambda \gamma h + B)^{1/2}$$

最后, 得出弹性区应力分量为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= P_0 - \frac{R^2}{r^2} (\lambda \gamma h + B)^{1/2} \\ \sigma_\theta &= P_0 + \frac{R^2}{r^2} (\lambda \gamma h + B)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (6.3.22)$$

(4) 滑移面夹角 2ψ 的确定。

对应于 r 的 σ_r 、 σ_θ 值求出后, 由式(6.3.6), 即可求得

$$\sigma_n = \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2} - \frac{\lambda}{2} \quad (6.3.23)$$

将式(6.3.23)代入到式(6.3.3), 即可求出对应于 r 的 2ψ 值。

(5) 巷道周边位移的确定。

在 § 6.2 中, 已给出巷道弹塑性交界处的位移公式(6.2.9)

$$\Delta u|_{r=R} = \frac{1+\mu}{E} R (P_0 - \sigma_r|_{r=R})$$

由式(6.3.22)的第一式, 得

$$\sigma_r|_{r=R} = P_0 - (\lambda \gamma h + B)^{1/2}$$

将其代入 $\Delta u|_{r=R}$ 式, 得

$$\Delta u|_{r=R} = \frac{1+\mu}{E} R(\lambda\gamma h + B)^{1/2}$$

§ 6.2 指出: 产生非弹性变形区时, 巷道周边位移可根据塑性区体积不变的条件求得, 即

$$\Delta u|_{r=R_0} = \frac{R}{R_0} \Delta u|_{r=R} = \frac{1+\mu}{E} \cdot \frac{R^2}{R_0} (\lambda\gamma h + B)^{1/2} \quad (6.3.24)$$

这与文献[35]中所给出的巷道周边位移公式是相同的。

§ 6.4 以主应力和为参数的双曲线型极限曲线的围岩应力及位移^[36]

前苏联学者鲁宾涅特 (К.В.Руппенейт) 曾用双曲函数导出了双曲线型极限曲线的巷道围岩应力解析式^[37]。但其思路曲折, 推导过程繁杂。本节以主应力和为参数, 对同一问题进行分析。与前者相比, 其思路简捷, 推导过程较简单, 最后得出了便于应用的公式。

1. 双曲线型包络线的极限平衡条件

在图 6.5 所示的坐标系下, 双曲线型包络线的方程为

$$\frac{(\sigma_n + a + H)^2}{a^2} - \frac{|\tau_n|^2}{b^2} = 1 \quad (6.4.1)$$

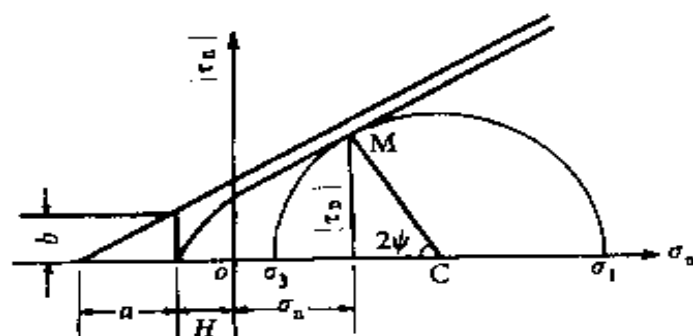


图 6.5 双曲线型极限曲线

即

$$|\tau_n| = b \sqrt{\frac{(\sigma_n + a + H)^2}{a^2} - 1} \quad (6.4.2)$$

式中, σ_n 、 τ_n 为物体中处于极限平衡状态的某点的滑移微面上的正应力分量和剪应力分量; H 为岩石单向抗拉强度极限; a 、 b 为待定常数。由式 (6.4.1), 可知双曲线在 $|\tau_n| = 0$ 处的曲率半径为

$$r_0 = b^2 / a$$

仿照文献[37]假定 $H = 2r_0$, 从而

$$b = \sqrt{aH/2}$$

于是式(6.4.2)成为

$$|\tau_n| = \sqrt{\frac{aH}{2}} \sqrt{\frac{(\sigma_n + a + H)^2}{a^2} - 1} \quad (6.4.3)$$

用 2ψ 表示极限曲线上 M 点处的法线对 σ_n 轴的倾角, 由式 (6.4.3) 有

$$\frac{d|\tau_n|}{d\sigma_n} = \operatorname{ctg} 2\psi = \frac{1}{a^2} \sqrt{\frac{aH}{2}} \frac{\sigma_n + a + H}{\sqrt{\frac{(\sigma_n + a + H)^2}{a^2} - 1}} \quad (6.4.4)$$

$$\frac{1}{\sin 2\psi} = \sqrt{\frac{(\sigma_n + a + H)^2 \left(\frac{H}{2a} + 1 \right) - a^2}{(\sigma_n + a + H)^2 - a^2}} \quad (6.4.5)$$

可用 σ_n 、 $|\tau_n|$ 及 2ψ 表示主应力 σ_1 、 σ_3 于下

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) &= \sigma_n + |\tau_n| \operatorname{ctg} 2\psi \\ \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) &= |\tau_n| / \sin 2\psi \end{aligned} \right\} \quad (6.4.6)$$

将式(6.4.3)、式(6.4.4)及式(6.4.5)代入到式(6.4.6), 得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} &= \left(\frac{H}{2a} + 1 \right) (\sigma_n + a + H) - (a + H) \\ \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} &= \sqrt{\frac{H}{2a}} \sqrt{(\sigma_n + a + H)^2 \left(\frac{H}{2a} + 1 \right) - a^2} \end{aligned} \right\} \quad (6.4.7)$$

由式(6.4.7)消去 σ_n , 得

$$\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2 = \frac{H}{H + 2a} \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + a + H \right)^2 - \frac{aH}{2} \quad (6.4.8)$$

式(6.4.8)即为双曲线型极限曲线的主应力表达式。

下面用单向压缩的应力状态条件, 确定出现在式(6.4.8)中的 a 值。设岩石单向抗压强度极限为 σ_c 。此时, $\sigma_1 = \sigma_c$, $\sigma_3 = 0$, 代入式(6.4.8)

$$\left(-\frac{H + 2a}{H} \right) \frac{\sigma_c^2}{4} = \left(-\frac{\sigma_c}{2} + a + H \right)^2 - \frac{a}{2}(H + 2a)$$

化简后有

$$\frac{1}{2H} (\sigma_c - 3H)(\sigma_c + H)a = H(\sigma_c + H)$$

因之

$$a = \frac{2H}{\frac{\sigma_c}{H} - 3} \quad (6.4.9)$$

与文献[37]所推值一致。

将式(6.4.9)代入到式(6.4.8), 化简, 最后得双曲线型极限曲线的主应力表达式

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2 &= \frac{\sigma_c - 3H}{\sigma_c + H} \left[\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{H(\sigma_c - H)}{\sigma_c - 3H} \right]^2 \\ &\quad - \frac{H^3}{\sigma_c - 3H} \end{aligned} \quad (6.4.10)$$

2. 圆形巷道围岩应力及位移计算

问题的计算简图仍为图 6.2, 其中符号意义与 § 6.2 中相同。这是极对称平面变形问题。

(1) 塑性区 ($R_0 \leq r \leq R$) 应力的确定。

令 $n = \sigma_c / H$ 及 $(\sigma_\theta + \sigma_r) / 2 = s$, 从式(6.4.10)有

$$\frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{2} = \left\{ \frac{n-3}{n+1} \left[s + \frac{H(n-1)}{n-3} \right]^2 - \frac{H^2}{n-3} \right\}^{1/2}$$

所以

$$\begin{cases} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{cases} = s \mp \left\{ \frac{n-3}{n+1} \left[s + \frac{H(n-1)}{n-3} \right]^2 - \frac{H^2}{n-3} \right\}^{1/2} \quad (6.4.11)$$

式(6.4.11)即为双曲线型极限平衡条件的参数表达式。

将式(6.4.11)代入平衡方程

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$$

得

$$\begin{aligned} & \left\{ 1 - \frac{\frac{n-3}{n+1} \left[s + \frac{H(n-1)}{n-3} \right]}{\left\{ \frac{n-3}{n+1} \left[s + \frac{H(n-1)}{n-3} \right]^2 - \frac{H^2}{n-3} \right\}^{1/2}} \right\} \frac{ds}{dr} \\ & - \frac{2}{r} \left\{ \frac{n-3}{n+1} \left[s + \frac{H(n-1)}{n-3} \right]^2 - \frac{H^2}{n-3} \right\}^{1/2} = 0 \end{aligned} \quad (6.4.12)$$

令

$$X = s + \frac{H(n-1)}{n-3} \quad (6.4.13)$$

则有

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{n-3}{n+1} X^2 - \frac{H^2}{n-3} \right)^{1/2} - \frac{n-3}{n+1} X \right] \frac{dX}{dr} \\ & - \frac{2}{r} \left(\frac{n-3}{n+1} X^2 - \frac{H^2}{n-3} \right) = 0 \end{aligned}$$

分离变量后积分, 得

$$\left(\frac{n+1}{n-3}\right)^{1/2} \int \frac{dX}{\left[X^2 - \frac{H^2(n+1)}{(n-3)^2}\right]^{1/2}} \\ - \int \frac{XdX}{X^2 - \frac{H^2(n+1)}{(n-3)^2}} = \int \frac{2dr}{r}$$

由积分表得

$$\left(\frac{n+1}{n-3}\right)^{1/2} \ln \left\{ X + \left[X^2 - \frac{H^2(n+1)}{(n-3)^2} \right]^{1/2} \right\} \\ - \frac{1}{2} \ln \left[X^2 - \frac{H^2(n+1)}{(n-3)^2} \right] + 2 \ln A = 2 \ln r$$

式中, $2 \ln A$ 为积分常数。

因此

$$r = A \frac{\left\{ X + \left[X^2 - \frac{H^2(n+1)}{(n-3)^2} \right]^{1/2} \right\}^{\frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n-3} \right)^{1/2}}}{\left[X^2 - \frac{H^2(n+1)}{(n-3)^2} \right]^{1/4}} \quad (6.4.14)$$

式(6.4.14)即为微分方程式(6.4.12)的一般积分。

将条件 $r = R_0$ 时, $s = s_0$, $X = X_0$ 代入到式(6.4.14)求出 A 后, 最后得

$$r = R_0 \left\{ \frac{X + \left[X^2 - \frac{H^2(n+1)}{(n-3)^2} \right]^{1/2}}{X_0 + \left[X_0^2 - \frac{H^2(n+1)}{(n-3)^2} \right]^{1/2}} \right\}^{\frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n-3} \right)^{1/2}} \\ \cdot \left\{ \frac{X_0^2 - \frac{H^2(n+1)}{(n-3)^2}}{X^2 - \frac{H^2(n+1)}{(n-3)^2}} \right\}^{1/4} \quad (6.4.15)$$

下面，确定式 (6.4.15) 中的 X_0 值，为了书写简单，现研究未支护的情况。从边界条件 $r = R_0$ ， $\sigma_r = 0$ 及式 (6.4.11)，经化简得

$$4s_0^2 - 2(n-1)Hs_0 - nH^2 = 0$$

其合理根为 $s_0 = nH/2$ ，从而由式 (6.4.13) 得

$$X_0 = \frac{(n+1)(n-2)H}{2(n-3)} \quad (6.4.16)$$

从式 (6.4.13) 及式 (6.4.15)，给 s 一个值，即可求 r 的一个对应值；又由式 (6.4.11)，给 s 同一个值，又可求出 σ_r 、 σ_θ 的对应值，因此即可确定 σ_r 、 σ_θ 与 r 的对应关系。

(2) 弹性区 ($R \leq r < \infty$) 应力的确定。

根据式 (6.2.1)，可得弹性区中的应力分量

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= P_0 + \frac{B}{r^2} \\ \sigma_\theta &= P_0 - \frac{B}{r^2} \end{aligned} \right\} \quad (6.4.17)$$

式中， B 为待定常数。

(3) 弹塑性边界的确定。

假定 $r = R$ 时， $s = s_R$ 。我们认为，应力分量通过弹塑性边界是连续的。由式 (6.4.11) 及式 (6.4.17)，有

$$P_0 \pm \frac{B}{R^2} = s_R \mp \left\{ \frac{n-3}{n+1} \left[s_R + \frac{H(n-1)}{n-3} \right]^2 - \frac{H^2}{n-3} \right\}^{1/2} \quad (6.4.18)$$

因此， $s_R = P_0 = \gamma h$ ，由式 (6.4.13) 即可求出 X_R 值

$$X_R = P_0 + \frac{H(n-1)}{n-3} \quad (6.4.19)$$

于是从式 (6.4.15)，得

将上式代入式(6.2.9), 得巷道弹塑性交界处的位移

$$\Delta u|_{r=R} = \frac{1+\mu}{E} R (P_0 - \sigma_r|_{r=R}) = -\frac{1+\mu}{E} \cdot \frac{B}{R}$$

根据塑性区体积不变的条件, 可求得巷道周边位移

$$\Delta u|_{r=R_0} = \frac{R}{R_0} \Delta u|_{r=R} = -\frac{1+\mu}{E} \cdot \frac{B}{R_0}$$

将式 (6.4.21) 代入上式, 最后得巷道周边位移公式为

$$\begin{aligned} \Delta u|_{r=R_0} = & \frac{1+\mu}{E} R_0 \left(\frac{n-3}{n+1} \right)^{1/2} \left[X_0^2 - \frac{H^2(n+1)}{(n-3)^2} \right]^{1/2} \\ & \cdot \left\{ \frac{X_R + \left[X_R^2 - \frac{H^2(n+1)}{(n-3)^2} \right]^{1/2}}{X_0 + \left[X_0^2 - \frac{H^2(n+1)}{(n-3)^2} \right]^{1/2}} \right\} \left(\frac{n+1}{n-3} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (6.4.22)$$

在 § 6.2、§ 6.3、§ 6.4 中, 分别采用直线型极限曲线、二次抛物线型极限曲线、双曲线型极限曲线, 对侧压系数等于 1 的圆形水平巷道的弹塑性围岩进行了应力及位移计算。在直线型极限曲线的情况下, 所得到的全部公式 (弹性区应力分布、塑性区应力分布、弹塑性交界线方程及巷道周边位移) 均是显式的解析表达式。在二次抛物线型极限曲线及双曲线型极限曲线的情况下, 所得到的弹性区应力分布公式、弹塑性交界线方程及巷道周边位移公式仍是显式解析表达式; 而塑性区应力分布公式, 实际上是通过参数 s (主应力和) 确定的参数表达式。

巷道围岩处于弹性变形状态时, 围岩是稳定的。如果出现非弹性变形区、形成破裂带, 巷道随时都有冒落危险, 破裂范围越大, 巷道越不易维护。因此, 矿山巷道的稳定性, 基本上由其周围形成的非弹性变形区的形状和尺寸所确定。所以应当计算破裂范围的大小。

另外, 矿山巷道支架的受力特点, 在于支架是在与岩体的共

同变形过程中承受载荷。因而作用于支架上的载荷，原则上不可能作为计算初始条件所给定，而应该在支架-岩体的全部变形体系的统一计算过程中来确定。为此，除了应该知道支架的刚度特性外，还应计算在指定支架反力情况下的巷道周边位移，以确定支架与巷道相互作用的特性曲线。

[例] 一圆形平巷，掘进半径为 2m，原岩应力 $P_0 = 1000 \text{ t/m}^2$ ，侧压系数为 1，四周为页岩，计算指标为： $\varphi = 42^\circ$ ， $c = 55 \text{ t/m}^2$ ， $H = 37.8 \text{ t/m}^2$ ， $\sigma_c = 236 \text{ t/m}^2$ ， $E = 2 \times 10^5 \text{ t/m}^2$ ， $\mu = 0.2$ 。试求巷道破裂带半径及巷道周边位移。

解：为计算简单，假定巷道未支护， $P_i = 0$ 。

① 按直线型极限曲线计算。根据式(6.2.7)，得弹塑性交界线半径（破裂带半径）为

$$R = 3.0818 \text{ m}$$

由式(6.2.10)，得巷道周边位移为

$$\Delta u|_{r=R_0} = 0.0202 \text{ m}$$

② 按二次抛物线型极限曲线计算。从式(6.3.21)求出

$$R = 10.7623 \text{ m}$$

从式(6.3.24)求出

$$\Delta u|_{r=R_0} = 0.1047 \text{ m}$$

③ 按双曲线型极限曲线计算。利用式(6.4.20)，算得

$$R = 3.0988 \text{ m}$$

利用式(6.4.22)，算出

$$\Delta u|_{r=R_0} = 0.0204 \text{ m}$$

由以上计算可见，在上述原岩应力较大的情况下，直线型极限曲线与双曲线型极限曲线的计算结果十分相近。反之，抛物线型极限曲线下算得的结果与直线型、双曲线型相差很大，破裂带半径和巷道周边位移可相差数倍。因此，对极限曲线接近抛物线型的岩性，在埋深较大情况下，如仍采用直线型的公式计算，将

会有很大误差。由此看来，硬岩可用直线型或双曲线型极限曲线；软岩宜用二次抛物线型极限曲线。

§ 6.5 三种型式极限曲线极限平衡条件的统一表达式^[38]

目前，在岩体力学围岩弹塑性分析中，经常使用直线型、双曲线型及二次抛物线型极限曲线。文献[39]给出的三种型式极限曲线的极限平衡条件的统一形式如下：

$$\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_r}{2}\right)^n = \lambda_1 \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_r}{2}\right) + \lambda_3 \sigma_r + \lambda_2 \quad (6.5.1)$$

在双曲线型极限曲线的情况下， $n = 1$ ， $\lambda_1 = 1$ ， $\lambda_2 = 0$ ， $\lambda_3 = -1$ ，将这些数值代入式 (6.5.1)，得

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_r}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_r}{2} - \sigma_r = \frac{\sigma_1 - \sigma_r}{2}$$

这是一个恒等式，它丝毫没有反映双曲线型极限曲线的极限平衡条件的内容。因此文献 [39] 并未求得三种型式极限曲线的极限平衡条件的统一表达式。

三种型式的极限曲线均属于莫尔强度理论。其基本形式为

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = f \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right)$$

式中， σ_1 、 σ_3 为岩体中处于极限平衡状态的某点处的最大、最小主应力。

§ 3.3 指出，可用主应力表示直线型的莫尔-库仑极限条件

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + c \cot \varphi \right) \sin \varphi \quad (3.3.4)$$

§ 6.3 已导出二次抛物线型极限曲线的主应力表达式为

$$\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2 = \lambda \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right) + \lambda H - \frac{\lambda^2}{4} \quad (6.3.8)$$

对于双曲线型极限曲线，文献[38]首先假定双曲线型极限曲线的主应力表达式为一个含有待定常数的方程式，然后求出极限应力圆族的包络线，并与已知的在 $\sigma_n - |\tau_n|$ 平面内的双曲线型极限曲线的方程式比较，最后确定双曲线型极限曲线的主应力表达式为

$$\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 = \frac{n-3}{n+1} \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \frac{2(n-1)H}{n+1} \cdot \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right) + \frac{nH^2}{n+1} \quad (6.5.2)$$

式中符号意义与 § 6.4 相同。其实，§ 6.4 已得到了双曲线型极限曲线的主应力表达式(6.4.10)，将其稍加整理即为式(6.5.2)。

从式(3.3.4)、式(6.3.8)及式(6.5.2)的形式可发现，三种型式极限曲线极限平衡条件的统一形式为

$$\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^m = A \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 + B \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right) + C \quad (6.5.3)$$

式中， m 、 A 、 B 、 C 为由极限曲线型式所确定的常数。不同型式极限曲线的极限平衡条件中的系数 m 、 A 、 B 和 C 的具体数值见表 6.1。

由极限平衡条件式(6.5.3)可得：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= s + (As^2 + Bs + C)^{1/m} \\ \sigma_3 &= s - (As^2 + Bs + C)^{1/m} \end{aligned} \right\} \quad (6.5.4)$$

表 6.1

型 式	系 数 值			
	m	A	B	C
直 线	1	0	$\sin\varphi$	$c\cos\varphi$
二次抛物线	2	0	λ	$\lambda H - \frac{\lambda^2}{4}$
双 曲 线	2	$\frac{n-3}{n+1}$	$\frac{2(n-1)H}{n+1}$	$\frac{nH^2}{n+1}$

式中,

$$s = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$$

式(6.5.4)即为以主应力和为参数来表示的三种型式极限曲线的极限平衡条件的统一表达式。

关于用松散介质极限平衡方法进行围岩应力分析,再简要提及以下几方面问题:①巷道周围形成的破裂带,使得其中的岩体变为非均质的,其岩性随着离开巷道的距离而变化,在这种情况下,可利用弹塑性非均质模型进行研究^[40, 41];②考虑一般非线性莫尔-库仑极限曲线时,可用任意精度的一系列不同斜率的直线段来逼近^[42];③对于侧压系数 $\lambda \neq 1$ 时的圆形巷道及椭圆形巷道围岩的弹塑性分析,可用摄动法求解^[43-45];④对于小曲率弯曲水平巷道围岩弹塑性应力场的确定,属于物体弹塑性平衡的空间问题,也可用摄动法研究^[46];⑤对于非圆形巷道弹塑性围岩的一般分析,可用有限元法处理^[47]。另外,用极限平衡方法还可研究岩体力学的其他一些问题,例如散体压力理论^[48],边坡稳定的空间问题等^[49]。

附录 特征线方法

在塑性力学、松散介质力学、空气动力学等力学中，经常会遇到如下形式的一阶偏微分方程组：

$$\left. \begin{aligned} a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_1 \frac{\partial u}{\partial y} + c_1 \frac{\partial v}{\partial x} + d_1 \frac{\partial v}{\partial y} + e_1 &= 0 \\ a_2 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} + c_2 \frac{\partial v}{\partial x} + d_2 \frac{\partial v}{\partial y} + e_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.1})$$

其中， a_i, b_i, c_i, d_i, e_i ($i=1, 2$) 是自变量 x, y 以及未知函数 u, v 的已知函数，称式 (A.1) 为关于 u, v 的一阶拟线性偏微分方程组。

现在把方程式 (A.1) 化为常微分方程形式。为此，把式 (A.1) 第一式乘以待定系数 λ_1 ，式 (A.1) 第二式乘以待定系数 λ_2 ，然后相加得到：

$$\begin{aligned} &\lambda_1 \left(a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_1 \frac{\partial u}{\partial y} + c_1 \frac{\partial v}{\partial x} + d_1 \frac{\partial v}{\partial y} + e_1 \right) \\ &+ \lambda_2 \left(a_2 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} + c_2 \frac{\partial v}{\partial x} + d_2 \frac{\partial v}{\partial y} + e_2 \right) = 0 \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} &\left[(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2) \frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2) \frac{\partial u}{\partial y} \right] \\ &+ \left[(\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2) \frac{\partial v}{\partial x} + (\lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2) \frac{\partial v}{\partial y} \right] \\ &+ \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

把上式中括号内二因子化为 u, v 沿某方向的方向导数，这就要求

$$\frac{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2}{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2} = \frac{\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2}{\lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2} = \frac{dx}{dy} \quad (\text{A.3})$$

于是有

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 \left(a_1 \frac{dy}{dx} - b_1 \right) + \lambda_2 \left(a_2 \frac{dy}{dx} - b_2 \right) &= 0 \\ \lambda_1 \left(c_1 \frac{dy}{dx} - d_1 \right) + \lambda_2 \left(c_2 \frac{dy}{dx} - d_2 \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.4})$$

现要求 λ_1, λ_2 有非零解, 所以方程式 (A.4) 的系数行列式必须等于零, 即:

$$\begin{vmatrix} a_1 \frac{dy}{dx} - b_1 & a_2 \frac{dy}{dx} - b_2 \\ c_1 \frac{dy}{dx} - d_1 & c_2 \frac{dy}{dx} - d_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{A.5})$$

由于方程式 (A.5) 是关于 $\frac{dy}{dx}$ 的二次方程, 它的根可以有几种不同的情况, 现在要讨论的是有两个不同实根的情况, 这时式 (A.1) 叫做双曲型偏微分方程组, 设两根为

$$\frac{dy}{dx} = \alpha, \quad \frac{dy}{dx} = \beta \quad (\text{A.6})$$

这里

$$\left. \begin{aligned} \alpha \\ \beta \end{aligned} \right\} = \frac{(a_1 d_2 - d_1 a_2) + (b_1 c_2 - c_1 b_2) \mp D}{2(a_1 c_2 - c_1 a_2)}$$

而

$$D^2 = [(a_1 d_2 - d_1 a_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2)^2 - 4(a_1 c_2 - c_1 a_2)(b_1 d_2 - d_1 b_2)]$$

由方程式 (A.6) 第一、第二式决定的两组曲线, 分别称为 α 族和 β 族特征线。

下面推导未知函数 u, v 在特征线上必须满足的关系式。在式 (A.5) 的条件下, 方程式 (A.4) 有无穷多组解。取它的解为

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= c_2 \frac{dy}{dx} - d_2 \\ \lambda_2 &= d_1 - c_1 \frac{dy}{dx} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.7})$$

考虑到式 (A.3)，将式 (A.2) 改写为

$$(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right) + (\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2) \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right) + \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0$$

用 dx 乘以上式两端，得：

$$(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2) du + (\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2) dv + (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2) dx = 0 \quad (\text{A.8})$$

式中， du 、 dv 和 dx 分别为沿某一特征线未知函数 u 、 v 和自变量 x 的微分。将式 (A.7) 代入式 (A.8)，有

$$\begin{aligned} & \left[(d_1 a_2 - a_1 d_2) + (a_1 c_2 - c_1 a_2) \frac{dy}{dx} \right] du \\ & + (d_1 c_2 - c_1 d_2) dv + (d_1 e_2 - e_1 d_2) dx \\ & + (e_1 c_2 - c_1 e_2) dy = 0 \end{aligned}$$

上式可简写为

$$\left(E + A \frac{dy}{dx} \right) du + B dv + M dx + N dy = 0 \quad (\text{A.9})$$

其中

$$\begin{aligned} E &= \begin{vmatrix} d_1 & a_1 \\ d_2 & a_2 \end{vmatrix}; \quad A = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}; \quad B = \begin{vmatrix} d_1 & c_1 \\ d_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ M &= \begin{vmatrix} d_1 & e_1 \\ d_2 & e_2 \end{vmatrix}; \quad N = \begin{vmatrix} e_1 & c_1 \\ e_2 & c_2 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

将式 (A.6) 的第一、第二式分别代入式 (A.9) 中，即得到沿两个特征线上的特征关系式：

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \alpha \text{ 时, } & (E + \alpha A) du + B dv + M dx + N dy = 0 \\ \frac{dy}{dx} = \beta \text{ 时, } & (E + \beta A) du + B dv + M dx + N dy = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.11})$$

现在以松散介质平面变形应力方程组式 (4.3.5)、

式 (4.3.6) 为例, 导出它们的特征线方程及特征关系式。这时

$$\begin{aligned} & \frac{\partial P}{\partial x} (1 + \sin\varphi \cos 2\theta) + \frac{\partial P}{\partial y} \sin\varphi \sin 2\theta \\ & + 2R \left(-\frac{\partial \theta}{\partial x} \sin 2\theta + \frac{\partial \theta}{\partial y} \cos 2\theta \right) - \gamma \cos \varepsilon = 0 \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial P}{\partial x} \sin\varphi \sin 2\theta + \frac{\partial P}{\partial y} (1 - \sin\varphi \cos 2\theta) \\ & + 2R \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \cos 2\theta + \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin 2\theta \right) + \gamma \sin \varepsilon = 0 \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

并且

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 + \sin\varphi \cos 2\theta & ; & & a_2 &= \sin\varphi \sin 2\theta \\ b_1 &= \sin\varphi \sin 2\theta & ; & & b_2 &= 1 - \sin\varphi \cos 2\theta \\ c_1 &= -2R \sin 2\theta & ; & & c_2 &= 2R \cos 2\theta \\ d_1 &= 2R \cos 2\theta & ; & & d_2 &= 2R \sin 2\theta \\ e_1 &= \gamma \cos \varepsilon & ; & & e_2 &= \gamma \sin \varepsilon \end{aligned}$$

通过简单推导, 可得

$$\begin{aligned} D^2 &= 16R^2 \cos^2 \varphi \\ \alpha &= \frac{\sin 2\theta - \cos \varphi}{\cos 2\theta + \sin \varphi} = \operatorname{tg}(\theta - \mu) \\ \beta &= \frac{\sin 2\theta + \cos \varphi}{\cos 2\theta + \sin \varphi} = \operatorname{tg}(\theta + \mu) \end{aligned}$$

这就是式 (4.3.9) 的结果。

下面推导出特征关系式。由式 (A.10), 可求得:

$$\begin{aligned} E &= -2R \sin 2\theta, \quad A = 2R(\cos 2\theta + \sin \varphi), \quad B = 4R^2 \\ M &= 2R\gamma \sin(2\theta + \varepsilon), \quad N = -2R\gamma \cos(2\theta + \varepsilon) \end{aligned}$$

由式 (A.11) 的第一式, 当

$$\frac{dy}{dx} = \alpha = \frac{\sin 2\theta - \cos \varphi}{\cos 2\theta + \sin \varphi} = \operatorname{tg}(\theta - \mu)$$

从而有,

$$\cos\varphi dP + 2Rd\theta + \gamma\sin(\theta + \varepsilon - \mu)dS_\beta = 0 \quad (\text{A.13})$$

另外, 式 (4.3.11) 可简化为

$$\begin{aligned} & \cos\varphi \frac{\partial P}{\partial S_\beta} + 2R \frac{\partial \theta}{\partial S_\beta} + \gamma[\sin(\varepsilon - 2\mu)\cos(\theta + \mu) \\ & + \cos(\varepsilon - 2\mu)\sin(\theta + \mu)] = 0 \end{aligned}$$

由此可见, 式 (A.13) 与式 (4.3.11) 相同.

关于特征线方法的进一步讨论, 可见文献[51, 52].

参 考 文 献

- [1] Соколовский В.В., Статика сыпучей среды, ФИЗМАТГИЗ, 1960
- [2] Chen W.F., Limit Analysis and Soil Plasticity, Elsevier Scientific Publishing Company, 1975
- [3] 赵彭年, 关于Tresca屈服条件的表达式, 力学与实践, 2, 1989
- [4] Ивлев Д.Д., Теория идеальной пластичности, М., НАУКА, 1966
- [5] Salencon J., Applications of the Theory of Plasticity in Soil Mechanics, John Wiley & Sons, Ltd., 1977
- [6] Desai C.S. and Christian J.T., Numerical Methods in Geotechnical Engineering, McGraw-Hill, Ch.21, 1977
- [7] Chowdhury R.N., Slope Analysis, Elsevier Scientific Publishing Company, 1978
- [8] 张天宝, 土坡稳定分析和土工建筑物的边坡设计, 成都科技大学出版社, 1987
- [9] Мухин И.С., Срагович А.И., Построение предельных контуров равноустойчивых откосов, М., Изд-во АН СССР, 1954
- [10] Демин А.М., Устойчивость открытых горных выработок и отвалов, М., Недра, 1973
- [11] 普拉格 W., 霍奇 P.G., 陈森译, 理想塑性固体理论, 科学出版社, 1964
- [12] Shield R.T., Mixed Boundary Value Problems in Soil Mechanics, Q. Appl. Math., Vol.11, 1953
- [13] 赵彭年, 光滑基础下 $c-\phi$ 土中的连续速度场, 力学与实践, 4, 1986
- [14] 赵彭年, 关于 $c-\phi$ 土中速度场所满足的条件, 力学与实践, 4, 1987
- [15] Березанцев В.Г., Осесимметричная задача теории предельного равновесия сыпучей среды, Гостехиздат, 1952
- [16] 王仁、熊祝华、黄文彬, 塑性力学基础, 科学出版社, 1982
- [17] Дженике А.В., Бинг Ченг йен, США., Устойчивость осесимметричных откосов, Rock Mechanics, Fifth Symposium on Rock Mechanics, Pergamon Press (Oxford), 1963
- [18] Drucker D.C., Conventional and Unconventional Plastic Response and Representation, Appl. Mech. Rev. Vol. 41, 4, 1988

- [19] Drescher A., Christopoulos C., Limit Analysis Slope Stability with Nonlinear Yield Condition., Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech., Vol.12, No.3, 1988
- [20] Drucker D.C., Prager W., Soil Mechanics and Plastic Analysis or Limit Design, Q. Appl. Math., Vol. 10, 1952
- [21] Heyman J., The Stability of a Vertical Cut, Int. J. Mech. Sci. Vol. 15, 1973
- [22] 沈珠江, 散粒体极限平衡理论及其应用, 水利学报, 3, 1962
- [23] 屈智炯, 土的塑性力学, 成都科技大学出版社, 1987
- [24] Zhang X.J., Chen W.F., Stability Analysis of Slope with General Nonlinear Failure Criterion, Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech., Vol.11, 1, 1988
- [25] Collins I.F., Gunn C.I.M., Pender M.J. and Yan W., Slope Stability Analyses for Materials with a Non-linear Failure Envelope, Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech., Vol.12, 5, 1988
- [26] Martin J.B., Plasticity: Fundamentals and General Results, MIT Press, Cambridge, Mass, 1975
- [27] 赵祖武, 塑性力学导论, 高等教育出版社, 1989
- [28] Shield R.T., Plastic Potential Theory and Prandtl Bearing Capacity Solution, J. Appl. Mech., Vol. 21, 2, 1954
- [29] 余同希, 塑性力学, 高等教育出版社, 1990
- [30] Drucker D.C., Greenberg H.J., Prager W., Extended Limit Design Theorems for Continuous Media, Q. Appl. Math., Vol. IX, 4, 1952
- [31] 朱百里、沈珠江等, 计算土力学, 上海科学技术出版社, 1990
- [32] Spencer A.J.M., Deformation of Ideal Granular Materials, Mechanics of Solids — The Rodney Hill 60th Anniversary Volume, Edited by H.G.Hopkins and M.J.Sewell, 1982
- [33] 克列因 Г.К., 陈万佳译, 散粒体结构力学, 中国铁道出版社, 1983
- [34] 北京矿业学院、东北工学院, 岩石力学与井巷支护, 中国工业出版社, 1961
- [35] 赵彭年, 二次抛物线型极限曲线的巷道围岩应力及位移, 有色金属, 1, 1979
- [36] 赵彭年, 以主应力和为参数的双曲线型极限曲线的围岩应力分析, 有

色金属, 3, 1983

- [37] Руппенейт К.В., Давление и смещение горных пород в лавах пологопадающих пластов, М., Углетехиздат, 1957
- [38] 赵彭年, 三种型式极限曲线的极限平衡条件的统一表达式, 地下工程, 11, 1981
- [39] 郑颖人、刘怀恒, 三种型式极限曲线的巷道围岩应力与位移的统一表达式, 地下工程, 11, 1980
- [40] 郑颖人, 圆形洞室围岩压力理论探讨, 地下工程, 1, 1979
- [41] 布雷切夫 Н.С., 王明恕译, 地下结构力学, 煤炭工业出版社, 1985
- [42] Kenedy T.C., Lindberg H.E., 考虑非线性莫尔-库仑函数作用时隧道的边界位移, 地下工程, 11, 1980
- [43] Протосеня А.Г., Горшунова Т.Н., Упруго-пластическая задача для выработки эллиптической формы при условии пластичности Кулона, Изв. вузов., Горный журнал, 5, 1981
- [44] 赵彭年, 与“用摄动法计算椭圆形巷道的弹塑性问题”一文的商榷, 工程力学 (下册), 北京科学技术出版社, 1992
- [45] 赵彭年, “不对称荷载作用下圆洞围岩塑性区的估算方法”再讨论, 岩土工程学报, 4, 1982
- [46] Алимжанов М.Т., Джумагулов Н.А., Упруго-пластическое напряженное состояние горного массива вблизи искривленной выработки, Изв. вузов., Горный журнал, 1, 1978
- [47] 于学馥、郑颖人、刘怀恒、方正昌, 地下工程围岩稳定分析, 煤炭工业出版社, 1983
- [48] 赵彭年, 考虑水平方向原始应力时巷道顶板上自然平衡拱的形态, 中国矿业学院学报, 1, 1978
- [49] 赵彭年, 被两组斜交弱面切割的岩体台阶边坡的稳定参数, 中国矿业学院学报, 2, 1984
- [50] 北京钢铁学院力学教研室, 松散介质力学 (讲义), 1983
- [51] Hopkins H.G., Developments in the Mathematical Theory of Plasticity, Trends in Solid Mechanics, ed. J.F.Besseling, A.M.A.VAN Der Heijden, 1979
- [52] 王仁、黄文彬、黄筑平, 塑性力学引论 (修订版), 北京大学出版社, 1992