理论物理第三册

电　磁　学

吴大猷

科学出版社

理论物理第三册

电　磁　学

吴大猷　著

科学出版社

内 容 简 介

本书为著名物理学家吴大猷先生的著述《理论物理》（共七册）的第三册。《理论物理》是作者根据长期从事的教学实践编写的一部比较系统全面的大学物理教材。本册内容共分七章：第一章，静电学、Coulomb定律；第二章，静电学，场位理论；第三章，磁学与稳定电流；第四章，Maxwell方程式；第五章，电磁波，激发与传播；第六章，微观的电动力学；第七章，电磁场之Lagrangian形式。在多数章节之后还附有附录和习题供读者研讨和学习。

本书根据台湾联经出版事业公司出版的原书翻印出版，作者对原书作了部分更正。李政道教授为本书的出版写了序言，我们对原书中一些印刷错误也作了订正。

本书可供高等院校物理系师生教学参考，也可供研究生阅读。

理论物理第三册

电 磁 学

吴大猷 著

*

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

国防工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1983年8月第一版 开本：850×1168 1/32

1983年8月第一次印刷 印张：8 7/8 插页：精2 平4

统一书号：13031·2286

本社书号：3126·13—3

定价：布面精装 3.00元

压膜平装 2.35元

54/24

序言

吳大猷先生是國際著名的學者，在中國物理界，是和嚴濟慈、周培源、趙忠堯諸教授同時的老前輩。他的這一部《理論物理》，包括了"古典"至"近代"物理的全豹。1977年初，在台灣陸續印出。這幾年來對該省和東南亞的物理教學界起了很大的影響。現在中國科學院，特別是由於盧嘉錫院長和錢三强、嚴東生副院長的支持，決定翻印出版，使全國對物理有興趣者，都可以閱讀參考。

看到了這部巨著，聯想起在1945年春天，我初次在昆明遇見吳老師，很幸運地得到他在課內和課外的指導，從"古典力學"學習起至"量子力學"，其經過就相當於唸吳老師的這套叢書，由第一册開始，直至第七册。在昆明的這一段時期是我一生學物理過程中的大關鍵，因爲有了紮實的根基，使我在1946年秋入芝加哥大學，可立刻參加研究院的工作。

1933年吳老師得密歇根大學的博士學位後，先留校繼續研究一年。翌年秋回國在北大任教，當時他的學生中有馬仕俊、郭永懷、馬大猷、虞福春等，後均致力物理研究有成。抗戰期間，吳老師隨北大加入西南聯大。這一段時期的生活是相當艱苦的，但是中國的學術界，還是培養和訓練了很多優秀青年。下面的幾

段是錄自吳老師的《回憶》一書：

“組成西南聯大的三個學校，各有不同的歷史。……北京大學規模雖大，聲望也高，但在抗戰時期中，除了有很小數目的款，維持一個‘北京大學辦事處’外，沒有任何經費作任何研究工作的。在抗戰開始時，我的看法是以爲應該爲全面抗戰，節省一切的開支，研究工作也可以等戰後再作。但抗戰久了，我的看法便改變了，我漸覺得爲了維持從事研究者的精神，不能讓他們長期的感到無法工作的苦悶。爲了培植及訓練戰後恢復研究工作所需的人材，應該在可能情形下，有些研究設備。西南聯大沒有此項經費，北大也無另款。……我知道祇好儘自己個人的力量做一點點工作了。……請北大在崗頭村租了一所泥牆泥地的房子做實驗室，找一位助教，幫着我把三稜柱放在木製架上拼成一個最原始形的分光儀，試着做些‘拉曼效應’的工作。

“我想在二十世紀，在任何實驗室，不會找到一個拿三稜柱放在木架上做成的分光儀的了。我們用了許多腦筋，得了一些結果。……

“1941 年秋，有一位燕京大學畢業的黃昆，要來北大當研究生隨我工作，他是一位優秀的青年。我接受了他，讓他半時作研究生，半時作助教，可以得些收入。那年上學期我授‘古典力學’，下學期授‘量子力學’。班裏優秀學生如楊振寧、黃昆、黃授書、張守廉等可以說是一

個從不易見的羣英會。……

“1945 年日本投降前，是生活最困難的時期。每月發薪，紙幣滿箱。因爲物價飛躍，所以除了留些做買菜所需外，大家都立刻拿去買了不易壞的東西，如米、炭等。……我可能是教授中最先擺地攤的，……抗戰初年，託人由香港、上海帶來的較好的東西，陸續的都賣去了。等到 1946 年春復員離昆明時，我和冠世的東西兩個手提箱便足够裝了。”

就在 1946 年春，離昆明前吳老師還特爲了我們一些學生，在課外另加工講授“近代物理”和“量子力學”。當時聽講的除我以外，有朱光亞、唐敖慶、王瑞駪和孫本旺。

在昆明時，吳老師爲了北京大學的四十週年紀念，寫了《多原分子的結構及其振動光譜》一書，於 1940 年出版。這本名著四十多年來至今還是全世界各研究院在這領域中的標準手册。今年正好是中國物理學會成立的五十週年，科學出版社翻印出版吳大猷教授的《理論物理》全書，實在是整個物理界的一大喜事。

李政道

1982年8月

寫於瑞士日內瓦

總序

若干年來，由於與各方面的接觸，筆者對臺灣的物理學教學和學習，獲有一個印象：（一）大學普通物理學課程之外，基層的課程，大多强納入第二第三兩學年，且教科書多偏高，量與質都超過學生的消化能力。（二）學生之天資較高者，多眩於高深與時尚，不知或不屑於深厚基礎的奠立。（三）專門性的選修課目，琳瑯滿目，而基層知識訓練，則甚薄弱。

一九七四夏，筆者擬想以中文編寫一套筆者認為從事物理學的必須有的基礎的書。翌年夏，得褚德三、郭義雄、韓建珊(交通大學教授）三位之助，將前此教學的講稿譯為中文，有（1）古典力學，包括 Lagrangian 和 Hamitlonian 力學，（2）量子論及原子結構，（3）電磁學，（4）狹義與廣義相對論等四册。一九七六年春，筆者更成（5）熱力學，氣體運動論與統計力學一册。此外將有（6）量子力學一册，稿在整理中。

這些册的深淺不一。筆者對大學及研究所的物理課程，擬有下述的構想：

第一學年：普通物理（力學，電磁學為主）；微積分。

第二學年：普通物理（物性，光學，熱學，近代物理）；高等微積分；中等力學（一學期）。

第三學年：電磁學（一學年）及實驗；量子論（一學年）。

第四學年：熱力學（一學期）；狹義相對論（一學期）；量子力學（引論）（一學年）。

研究院第一年：古典力學（一學期）；分子運動論與統計力學（一學年）；量子力學（一學年）；核子物理（一學期）。

研究院第二年：電動力學（一學年）；專門性的課目，如固體物理；核子物理，基本粒子；統計力學；廣義相對論等，可供選修。

上列各課目，都有許多的書，各有長短。亦有大物理學家，集其講學精華，編著整套的書，如 Planck, Sommerfeld, Landau 者。Landau-Lifshitz 大著既深且博，非具有很好基礎不易受益的。Sommerfeld 書雖似較易，然仍是極嚴謹有深度的書，不宜輕視的。筆者本書之作，是想在若干物理部門，提出一個綱要，在題材及著重點方面可作為 Sommerfeld 書的補充，為 Landau 書的初階。

筆者深信，如一個教師的講授或一本書的講解，留給聽者或讀者許多需要思索、補充、擴展、涉獵、旁通的地方，則聽者讀者可獲得較多的益處。故本書風格，偏於簡練，課題範圍亦不廣。偶以習題的方式，引使讀者搜索，擴大正文的範圍。

筆者以為用中文音譯西人姓名，是極不需要且毫無好處之舉。故除了牛頓，愛恩斯坦之外，所有人名，概用西文。*

---

* 商務印書館出版之中山自然科學大辭典中，將 Barkla, Blackett, Lamb, Bloch, Brattain, Townes 譯為巴克納，布拉克，拉目，布勞克，布勞頓，湯里士，錯誤及不準確可見。

本書得褚德三，郭義雄，韓建珊三位交通大學教授之助，單超（清華大學）教授的校閱，筆者特此誌謝。

吳大猷

1977 年元旦

本册前言

本册題材選定的構想，是為大學普通物理的電磁學部份之後，研究院電動力學（J. D. Jackson 的書的水準）之前，作一個由淺入深的電磁學入門。

有些書是從 Maxwell 電磁場方程式為出發點，計算 E, D, H, B 等函數而不先予這些量的來源和物理意義。電磁學究竟是物理學而不是數學，這樣看電磁學是不能令習物理者滿意的。本册試着由現象的觀點及數學的觀念，清晰的定義上述的電磁量；在概論中先指出電磁學頗擾人的各單位制的來源和它們間的關係。

第二章的場位理論，目的是介紹古典的應用數學的一部。在電磁學中，學習正交函數如諧函數等，可能比在另外“應用數學”一類的課程為自然且有效些。電磁學和電動力學，自然和狹義相對論有極密切的關係，但如祇草率的把電磁學寫成 Lorentz 變換的協變形式而不詳解釋相對論的意義，則是無甚意義之舉。故本册中不講 Lorentz 變換；本書第四册甲部狹義相對論中將詳述之。

末章應用 Lagrange 和 Hamilton 動力學方法於電磁場，係古典場論。在這裡祇是一個數學形式，但對量子場論，這是一個起步點，故本册附了一個短短的介紹。

本册由交通大學郭義雄教授譯成中文，特此致謝。

目　錄

概論

1. 引言 …… 1

2. 電荷之 Coulomb 定律 …… 2

3. 磁極之 Coulomb 定律 …… 2

4. 由電流所產生的磁場之 Biot-Savart 定律 …… 2

5. 兩帶電流—導體間作用力之 Ampere 定律 …… 3

6. 單位制 …… 4

(1) 有理化靜電單位 (c . g. s.) …… 6

(2) 有理化電磁單位 (c. g . s.) …… 7

(3) Gaussian 制 …… 8

(4) 有理化 m. k. s. a. 制 …… 8

第一章　靜電學: Coulomb定律 …… 13

1. 自由空間之電場E與電位V …… 13

2. 群體電荷之能量 …… 18

3. 靜電平衡中之導體 …… 20

(1) 電荷分佈定理 …… 20

(2) 電位, 電容, 電感之係數等 …… 26

(3) 導體群之能量 …… 30

(4) 導體位移時所需之功 ……32
4. 電介質 (Dielectrics) ……34
(I) 極化現象 (polarization) ……34
1) 電極化率 (electric susceptibility) ……34
2) 由極化分佈P所產生之電位; Clausius-Mossotti 式 ……37
3) 位移場D之邊界條件……39
4) 電介質中之電場E……41
(II) 電介質中之場能……45
1) 電介質中之機械力 (mechanical force) ……46
2) 電介質中之應力 (stress) ……48
習　題……54
第二章　靜電學; 場位理論 (The theory of potential) ……59
1. 邊界值問題之唯一性定理 (uniqueness theorem) ……60
2. Poisson 方程式之解: Green 函數……64
3. 像法與倒轉法 (methods of image and inversion) ……70
4. Laplace 方程式; 諧函數 (harmonics) ……74
(I) Legendre 係數等……76
(II) 聯附 Legendre 係數 (associated) ……91
5. Laplace 方程式; Bessel 函數 …… 100
6. Laplace 方程式; 橢球座標 …… 108
習　題…… 115
第三章　磁學與穩定電流…… 123

1. 眞空中靜荷學…… 123
2. 磁介質中靜磁學…… 126
3. 靜磁場能量…… 129
4. 穩定電流等所產生的磁場; Biot-Savart 定律…… 131
5. Ampere 定律; 兩電流線圈間之作用力 …… 135
6. 電流所產生之向量位 (vector potential) 與磁矩 (magnetic moment) …… 140
7. 穩定電流的磁場之能量; 感應係數; 磁通量 (flux) … 146
8. 歐姆定律 (Ohm); Joule 定律…… 148
習 題…… 151
第四章 Maxwell 方程式 …… 159
1. Ampere 定律與 Maxwell 之位移電流 …… 159
2. Faraday 之電磁感應定律 …… 161
3. Maxwell 方程式…… 162
4. 由向量位A與純量位ϕ所表示之 Maxwell 方程式…… 164
(1) Lorentz 關係式…… 166
(2) 規範變換 (gauge transformation) …… 167
(3) 以向量位A和純量位ϕ所表示之 Maxwell 方程式 168
5. 波動方程式之解; 延後與超前之電位 (retarded and advanced) …… 170
6. 電磁場之能量與應力…… 174
7. Maxwell 方 之空間與時間對稱性 …… 178
習 題…… …… 182

第五章　電磁波: 激發與傳播 (generation and propagation) …… 189
1. 電偶與磁偶之輻射 …… 189
(1) 電　偶 …… 189
(2) 磁　偶 …… 194
2. 電磁波之傳播 …… 197
(1) 均勻電介體 …… 197
(2) 均勻導電介質 …… 199
3. 反射與折射 …… 202
4. 空心金屬管中之電磁波; 波導 (wave guide) …… 206
(1) 橫磁波 (transverse magnetic wave) (TM) …… 208
(2) 橫電波 (TE) …… 209
(3) 橫電磁波 (TEM) …… 210
5. 緩慢變化之電磁場 …… 211
(1) 有電阻與電感之線路 …… 212
(2) 有電阻、電感與電容之線路 …… 213
6. 趨膚效應 (skin effect) …… 215
第六章　微觀的電動力學 …… 219
1. 微觀的場方程式 …… 219
2. 常電磁場中電荷運動 …… 223
(1) 均勻磁場中運動 …… 223
(2) 穩定電場中運動 …… 224
(3) 垂直交叉均勻磁場和電場的運動 …… 225

(4) 緩漸不變性 (adiabatic invariants) …… 225
3. 原子內之電子在磁場的運動…… 228
(1) Larmor 定理 …… 228
(2) Larmor 旋進 (precession) …… 230
(3) 逆磁性 (diamagnetism) …… 231
4. 振盪中之電子; 輻射與減幅 (radiation and damping) 232
5. 波譜線之 Lorentz 寬度 …… 236
6. 色散理論 (theory of dispersion): …… 238
高空電離層中電子密度之量定…… 292
第七章 電磁場之 Lagrangian 形式…… 245
1. Lagrange 方程式 …… 245
2. 正則方程式…… 247
3. Lagrangian 形式之電磁場方程式 …… 249
4. Hamiltonian 形式之電磁場 …… 252
5. 電磁場之 Fourier 表象 (representation) …… 255
索 引…… 259

概　論

1. 引言

不管是學生或是教師在學習電磁學時，常常因爲有各種不同的單位而發生極大困擾。在使用不同單位時，不僅電磁物理量之數值隨着單位有所差異，且其因次也截然不同。雖然，爲了避免上述之困擾，吾人當然可從頭到尾持用一種單位，而將其他略去不管。但是，當在參閱其他書籍或文獻時，則發現必需深切地瞭解各種單位間的關係。所以作者認爲在介紹本題材主要內容之前，吾人必須將平常使用之單位制、定義及來源等一一解說清楚。

凡一物理定律，乃係若干物理觀念（量）間之函數關係。有時物理定律中之物理觀念早已有定義；但常常一個觀念—其正確意義與單位—需由實驗定律予以定義之。如電磁理論中之電場$\boldsymbol{E}$，磁場$\boldsymbol{B}$，以及$\boldsymbol{D}$和$\boldsymbol{H}$，乃是依據實驗定律如 Coulomb 定律，Ampere 定律和 Faraday 定律等，而定義的。本節裡，吾人將先接受這些定律，說明其各如何爲各不同單位制中電磁量定義之基石。

2. 電荷之Coulomb定律

兩電荷e_1，e_2之間作用力，與其距離 r 平方成反比，此定律在1776年由 H. Cavendish發現，在1785年由 Coulomb建立之

$$F=\frac{e_1e_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \qquad (O\text{-}1)$$

常數ϵ_0之值，視 e，r 和 F 所取之單位而定。倘若 e 尚未由其他方法予以定義，則ϵ_0之選擇也可決定 e 之單位。若電荷量 e 已有定義，則每單位時間之電荷稱爲電流 I。而電場 $\boldsymbol{E}$ 則爲每單位電荷所受作用力。這是所謂靜電制單位 ($e.\ s.\ u.$)。

3. 磁極之Coulomb定律

約在 1785 年Coulomb 也建立了磁極之間作用力與距離平方成反比之定律，(該磁極爲細長磁棒之端極，而不是孤立單極)

$$F=\frac{\mu_0 p_1 p_2}{4\pi\ r^2} \qquad (O\text{-}2)$$

常數μ_0之值乃視其他量之單位而定，或如已先選擇一值μ_0，則可用來決定磁極强度 p 之單位。一旦 p 已有定義，則磁場 $\boldsymbol{B}$ 可定義爲每單位磁極上之作用力。

注意：(1) 和 (2) 式，若無進一步發展，它們是毫無關係的。

4. 由電流所產生的磁場之Biot-Savart定律

1820年 Oersted 發現電流能產生磁場。同年, Biot 與 Savart 建立下一定律

$$\gamma \boldsymbol{H}=\frac{I_1}{4\pi R^3}[d\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{R}],\qquad \boldsymbol{R}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1 \tag{O-3}$$

在$\mathbf{r}_2$之磁場乃是由在$\mathbf{r}_1$之導體元素$d\boldsymbol{s}_1$中之電流I_1所產生。或在無限長之直導線s_1之特例下，則得

$$\gamma \boldsymbol{H} = \frac{I_1}{2\pi R} \tag{O-3a}$$

(參看 (Ⅲ-27) 和 (Ⅲ-28))。這裡又引入一個新的常數γ，因爲(3)與 (1) (2) 式之電荷和磁極的個別 Coulomb 定律不同，乃是將電場與磁場之關係聯接在一起的。事實上，我們沒有理由說除了ϵ_0和μ_0兩常數外不能再加上另一常數。其實，如 (3) 或 (3a) 中的$\boldsymbol{H}$先予以定義，則可得電流之另一定義。相反地，若電流先予以定義 (借用下面 Ampere 定律)，則 (3) 或 (3a) 可予$\boldsymbol{H}$以定義。電磁現象近代的處理，皆傾向後述之觀點。但由 (2) 和 (3) 定義的$\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{H}$，它們必須能牽連在一起，而常數ϵ_0, μ_0, γ之引入，正足使吾人能將電磁理論中所有現象，組成一完整之理論。

5. 兩帶電流導體間作用力之Ampere定律

1825年, Ampere 由廣而且深入的研究，建立了兩電流I_1, I_2間的作用力之定律如下;

$$\boldsymbol{F}_2=\frac{\mu_0}{4\pi\gamma^2}\, I_1 I_2 \frac{1}{R^3}[d\boldsymbol{s}_2\times[d\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{R}]],\quad \boldsymbol{R}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1 \tag{O-4}$$

I_1, I_2分別爲兩導體所通過之電流。ds_1與ds_2分別爲導體之（長度）元素，兩者之間距離爲$\mathbf{R}$（見（Ⅲ-36））。若上式之兩導體爲無窮長之直導線時；則每導體上每單位長度所受之作用力爲

$$\frac{dF}{dL}=-\frac{\mu_0}{4\pi\gamma^2}\frac{I_1I_2}{R^2} \qquad (O\text{-}4a)$$

定律（4）可視爲兩個因素所組成：（1）F力乃是由已定義之磁場$\boldsymbol{B}$而來（$\boldsymbol{B}$稱爲磁感應），即

$$\boldsymbol{F}_2=I_2[d\boldsymbol{s}_2\times\frac{1}{\gamma}\boldsymbol{B}] \qquad (O\text{-}5)$$

（2）在$\mathbf{r}_2$點的B場乃是由在ds_1之電流$\boldsymbol{I}_1$所產生，即

$$\frac{1}{\gamma}\boldsymbol{B}(\mathbf{r}_2)=\frac{\mu_0}{4\pi\gamma^2}\frac{[d\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{R}]}{R^3},\quad \boldsymbol{R}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1 \qquad (O\text{-}6)$$

由（6）和（3），可見

$$\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H} \qquad (O\text{-}7)$$

吾人亦可利用（5）定義$\boldsymbol{B}$，然後再利用（7）定義$\boldsymbol{H}$。或者，利用（3a）定義$\boldsymbol{H}$，再利用（7）定義$\boldsymbol{B}$。因在眞空μ_0乃是常數，故上述兩觀點皆相同。但在其他介質裡，則$\boldsymbol{H}$和$\boldsymbol{B}$並不是相同之物理量；二者之差別不僅限于一μ_0而已。在此情形下，電磁感應之 *Faraday* 定律，對$\boldsymbol{B}$之觀念極重要。$\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{H}$之問題將留待於第三章討論之。（參看（Ⅲ-29）下的討論）

6　單位制

電磁理論中，不同之單位制，不僅是物理量之數值不同而已且物理之因次亦不同。若吾人由電荷之 Coulomb 定律（1）

出發，則所有電之物理量皆屬於 *e. s. u.* 制。現由磁極之 Coulomb 定律 (2)，可定義單位磁極强度 p 及場 B。若今按 Biot-Savart 定律定義單位電流及電荷，則所得者爲電磁單位制 (*e. m. u.*)。這兩個單位制並不是互相獨立的；它們可由定義所使用之定律予以連接。由定義，可知電荷之 *e. m. u.* 單位和 *e. s. u.* 單位的因次及數值之比，皆$1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$。*

*電荷之 *e. m. u.* 及 *e. s. u.* 單位之比，可獲得如下：

歷史上 *e. m. u.* 制乃由磁極之庫倫定律 (2) 出發，它定義單位磁極 p，及作用在單位磁極上之力 B，由 (2) 式，可見 p 之因次乃視μ_0而定，如$\frac{1}{\sqrt{4\pi\mu_0}}$，而 B之單位則如$\sqrt{4\pi\mu_0}$。由 (7) 式，可見H之單位變化如$\sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}}$。

若已定義 p，B，H如上，則吾人可按 Biot-Savart 定律 (3a) 將單位電流予以定義，(在 *e.m. u.* 制中使$\gamma=1$)。單位電流乃一流通一半徑爲 $1cm$，弧長爲$1cm$ 之圓弧，在圓弧中心產生作用一 dyne之力于一單位磁極之電流。電荷之單位乃是電流一秒，其對μ_0之變如$\sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}}$。

在 *e. s. u* 制，電荷之單位乃由庫倫定律 (1) 定律，其與 ϵ_0 之變如$\sqrt{4\pi\epsilon_0}$。因此乃得下述之比

$$\frac{e_{e.m.u.}}{e_{e.s.u.}}=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$$

在早期習慣，Coulonb 定律 (2) 中之 μ_0乃在分母裡，而H却定義爲作用于每單位磁極之力。

. 如爲了一般性起見，吾人保留 Biot-Savart 定律 (3) 及 Ampere 定律 (4) 中之常數 γ，則電荷在 *e. m. u.* 和 *e. s. u.* 兩單位制，其數值及因次之比爲

$$\frac{e_{e.m.u.}}{e_{e.s.u.}}=\left(\frac{\gamma^2}{\epsilon_0\mu_0}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{O-8}$$

〔在 (1), (2), (3a) 中, 皆用 *cm-gram-sec* 單位〕。

玆試探討$\gamma^2/\epsilon_0\mu_0$的意義。由 (1) 式吾人可得電荷 e 之因次

$$[e^2]=[\epsilon_0 ML^3T^{-2}]$$

而電流

$$[I]=[eT^{-1}]$$

故　　$$[I^2]=[\epsilon_0 ML^3T^{-4}] \tag{O-9}$$

但由 (4) 或 (4a) 中, 吾人可得電流爲

$$[I^2]=[\gamma^2\mu_0^{-1}MLT^{-2}] \tag{O-10}$$

由 (9) 和 (10) 式, 則得

$$\left[\frac{\gamma^2}{\epsilon_0\mu_0}\right]=\left[\frac{L^2}{T^2}\right] \tag{O-11}$$

此卽$\gamma^2/\epsilon_0\mu_0$乃有速度平方之因次。

當然, 任何只有因次上之考慮, 是不能得到該速度之數值的。電磁場之 Maxwell 方程式早期發展最大成功之一, 乃是 $\gamma/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ 適爲電磁波在自由空間傳播速度, 並且由實驗發現該速度與光速完全相同。

吾人將會明瞭, 在下述條件下

$$\frac{\gamma^2}{\epsilon_0\mu_0}=c^2, \tag{O-12}$$

如何對ϵ_0, μ_0, γ作不同之選擇, 可獲各不同的單位制。

(1) 有理化靜電單位 (*e. s. u.*) (*c. g. s.*)

在 (1), (2) 式, 使

$$4\pi\epsilon_0=1, \quad \frac{\mu_0}{4\pi}=\frac{1}{c^2}, \quad \gamma=1 \tag{O-13}$$

如兩個同性之單位電荷，距離爲 1 厘米時，其相互排斥之力爲 1 達因 (dyne)，該單位電荷稱爲 1 Statcoulomb。而單位電流稱爲 Statampere，亦卽 Statcoul/sec。電位單位爲 Statvolt，乃距 1 Statcoul 電荷 1cm之電位。

假使吾人由 (1)，(2) 式開始，而將4π取去，並使

$$\epsilon_0=1, \quad \mu_0=\frac{1}{c^2}, \quad \gamma=1 \tag{O-14}$$

則 e 及電流等之單位，與上述相同。但由於 (1)，(2) 式中無4π，此後在許多方程式中將出現4π，主要乃是應用 *Gauss* 定理之結果。這就是所謂非有理化單位制。

(2) 有理化電磁單位 (*é. m. u.*) (*c. g. s.*)

出發點乃從 Ampere 定律 (4a)。使

$$\frac{\mu_0}{4\pi}=1, \quad 4\pi\epsilon_0=\frac{1}{c^2}, \quad \gamma=1 \tag{O-15}$$

故 (4a) 可寫爲

$$\frac{dF}{dL}=\frac{2I_1I_2}{R} \tag{O-16}$$

電流之單位爲 abampere；若有兩平行導體，其距離爲1*cm*，帶有同向之單位電流，則其導體相互吸引之力，爲每厘米之導體 1 達因。

如用 (12) 式于 (4a)，則將得

$$\frac{dF}{dL}=\frac{2I_1I_2}{4\pi\epsilon_0 c^2 R}$$

在 *e. s. u.* 制度下，$4\pi\epsilon_0=1$，上式即成$\frac{dF}{dL}=\frac{2I_1I_2}{c^2R}$。以此與（16）式比較，得見 *e. m. u.* 之電流單位，較 *e. s. u.* 的大 c 倍。

$$1\ abampere=c\ Statampere \tag{O-17}$$

(3) Gaussian 單位

在（1），（2）及（4a）式中，使

$$4\pi\epsilon_0=1,\quad \frac{\mu_0}{4\pi}=1,\quad \gamma=c \tag{O-18}$$

因此所有電之物理量皆是使用有理化*e. s. u.*制，而所有磁之物理量皆是使用e. m. u.（c. g. s）制。這單位制稱爲Heaviside 制。

假若吾人由（1），（2）（4a）式出發，將所有之4π略去，並使

$$\epsilon_0=1,\quad \mu_0=1,\quad \gamma=c, \tag{O-19}$$

則所有單位與前面之單位制相同（即電量爲 *e. s. u.* ，磁量爲 *e.m. u.* 皆用*c. g. s.*），但此後電荷密度ρ及電流密度$\boldsymbol{j}$將有4π之出現。這單位制稱爲 Gaussian 制。

(4) 有理化*m. k. s. a.* 制

在此制，基本單位爲米*m*，千克*kg*，秒 *sec*， Ampere 。力的單位是 newton（10^5 dynes）。效在（1），（2），（4a）式中使

$$4\pi\epsilon_0=\frac{10^7}{c^2},\qquad \frac{\mu_0}{4\pi}=10^{-7},\qquad \gamma=1 \tag{O-20}$$

所以選 10^7 與 10^{-7} 數值者，乃使電荷量與電流之單位，等於日常慣用之 Coulomb 及 Ampere之故。

$$1\ coulomb = 1\ amp.\ sec.$$
$$= 3\times 10^9 statcoul \qquad (O\text{-}21)$$
$$1\ ampere = \frac{1}{10}\ abamp. = 3\times 10^9\ statamperes.$$

該制首由 Giorgi (1901) 所介紹，在 1935年爲國際電技協會所採用。

每個單位制皆有其優點。如 Gaussian 制，ϵ_0，μ_0 爲無因次（等於 1），而下述之量

$$\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{P},\ \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{H},\ \boldsymbol{M}$$

的物理因次皆相同，雖則它們有不同名稱與不同的單位。在 *m. k. s. a.* 制，μ_0，ϵ_0 已不再是無因次，且所有電，磁量皆有較複雜之因次（參閱下面表）。但是好處却是所有量皆是用實用單位來表示，如 ampere，volt，watt等。

在早期文獻裡，Gaussian 制較爲物理學家所喜歡採用。但近年來，*m. k. s. a.* 制却較受人歡迎。本書裡，首先採用一般的形式，對 ϵ_0，μ_0，γ 不作特殊的限定，直至得到 (12) 式之條件 $\gamma^2/\mu_0\epsilon_0 = c^2$ 止（見第 N 章 (N-23, 24)）。此後則將採用 *m. k. s. a.* 制。下表 1，乃是說明在 Gaussian 與 *m. k. s. a.* 制裡，電磁學之量，其因次及單位等，且附有此兩不同單位制換算之關係。下表 2，表示如何從 *m. k. s. a.* 制將電磁量轉換至 Gaussian 制。反之亦然。

表　1

		m. k. s. a. 因次	單位		Gaussian (c. g. s) 單位	因次
長度	L	L	meter	$=10^{2}$	cm	L
質量	m	M	kilogram	$=10^{3}$	gram	M
時間	t	T	sec	$=1$	sec.	T
力	F	MLT^{-2}	newton	$=10^{5}$	dynes	MLT^{-2}
能量	w	$ML^{2}T^{-2}$	joule	$=10^{7}$	ergs	$ML^{2}T^{-2}$
功率	p	$ML^{2}T^{-1}$	watt	$=10^{7}$	ergs/sec.	$ML^{2}T^{-1}$
電荷	q	AT	coulomb	$=3\cdot10^{9}$	statcoulomb	$M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}T^{-1}$
電流	I	A	ampere	$=3\cdot10^{9}$	statampere	$M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}T^{-2}$
電場	E	$MLT^{-3}A^{-1}$	volt/m	$=\frac{1}{30,000}$	statvolt/cm	$M^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}T^{-1}$
電移	D	$L^{-2}TA$	coulomb/m^2	$=4\pi\cdot3\cdot10^{5}$	statcoul./cm^2	$M^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}T^{-1}$
電位	ϕ, V	$ML^{2}T^{-3}A^{-1}$	volt	$=\frac{1}{300}$	statvolt	$M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}T^{-1}$
電極化	P	$L^{-2}TA$	coulomb/m^2	$=4\pi\cdot3\cdot10^{5}$	statcou./cm^2	$M^{-\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}T^{-1}$
電容量	C	$M^{-1}L^{-2}T^{4}A^{2}$	farad (coulomb/volt)	$=9\times10^{11}$	cm	L
電阻	R	$ML^{2}T^{-3}A^{-2}$	ohm (volt/ampere)	$=\frac{1}{9}\times10^{-11}$	statohm	$L^{-1}T$
磁感應	B	$MT^{-2}A^{-1}$	weber/m^2	$=10^{4}$	gauss	$M^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}T^{-1}$
磁化強度	M	$MT^{-2}A^{-1}$	weber/m^2	$=\frac{1}{4\pi}\times10^{4}$	gauss	$M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}T^{-1}$
磁場	H	$L^{-1}A$	amp.turn/m.	$=4\pi\times10^{-3}$	oersted	$M^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}T^{-1}$
磁通量	Φ	$ML^{2}T^{-2}A^{-1}$	weber $\left(\frac{\text{newton m}}{\text{amp.}}\right)$	$=10^{8}$	maxwell (gauss emu	$M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}T^{-1}$
電感	L	$ML^{2}T^{-2}A^{-2}$	henry $\left(\frac{\text{volt sec}}{\text{amp.}}\right)$	$=\frac{1}{6}\times10^{-11}$	gauss e. s. u..	$L^{-1}T^{2}$
介電係數 (眞空)	ϵ_0	$M^{-1}L^{-3}T^{4}A^{2}$	farad/m (coul./volt m)	$=1$	1	$M^{0}L^{0}T^{0}$
磁導率 (眞空)	μ_0	$MLT^{-2}A^{-2}$	henry/m $\left(\frac{\text{volt sec.}}{\text{amp. m.}}\right)$	$=1$	1	$M^{0}L^{0}T^{0}$

表 2

由 m. k. s. a. 換爲 Gaussian 制間 將式中之	代以下式	Gaussian 與m. k. s. a.制間公式之轉換 Gaussian	m. k. s. a.
ρ, I, E,	ρ, I, E,	ρ, I, E,	$\frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}(\rho, I, E)$
ϕ, V, P	ϕ, V, P	ϕ, V, P	$\sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0}{1}}(\phi, V, P)$
D	$\frac{1}{4\pi}$ D	D	$\sqrt{\frac{4\pi}{\epsilon_0}}$ D
ϵ	$\frac{1}{4\pi}\epsilon$	$\epsilon/1$	ϵ/ϵ_0
B	$\frac{1}{c}$ B	B	$\sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}}$ B
H	$\frac{c}{4\pi}$ H	H	$\sqrt{4\pi\mu_0}$H
μ	$\frac{4\pi}{c^2}\mu$	$\mu/1$	μ/μ_0
ϵ_0	$\frac{1}{4\pi}$	R	$4\pi\epsilon_0$R
μ_0	$\frac{4\pi}{c^2}$		
M	$\frac{c}{4\pi}$M	M	$\sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}}$ M
L	$\frac{1}{c}$ L	L	$4\pi\epsilon_0$L
C	$\frac{1}{4\pi}$ C	C	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ C

第一章

靜電學：Coulomb定律

靜電場者乃是電場之值，不隨時間而變化。首先，吾人欲探討之題材爲以兩個在不同位置之靜電荷，其相互間之作用力（Coulomb 力）爲基石，而予電場，電位以明確之定義。再利用疊加原理（principle of Superposition）去尋找群體電荷分佈所造成之電場與電位。

1. 自由空間之電場E與電位V

由 Coulomb 定律 (*O*-1)，吾人可將電場予以定義；電場強度$\boldsymbol{E}$（簡稱電場）乃是作用在單位電荷上之力。因此由 $\mathbf{r}_i$ 之電荷 e_i 在 $\mathbf{r}$ 所產生之電場（如圖（I-1）所示）爲



(圖1-1)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{F}{e} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i) \qquad (\mathrm{I}-1)$$

注意；此處故意保留 ϵ_0，乃是爲了以後所討論之問題時，能任意選用單位制，且建立一個不

限于單位制的一般理論。

今吾人引入靜電位$V(\mathbf{r})$的觀念。電位$V(\mathbf{r})$乃是由在$\mathbf{r}_s$之電荷e_s在$\mathbf{r}$所產生之電位，使

$$\boldsymbol{E}=-grad V(\mathbf{r}) \qquad (\text{I}-2)$$

依照（1）式，

$$V(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e_s}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_s|} \qquad (\text{I}-3)$$

若有一群固定電荷$e_1, e_2, \cdots e_s, \cdots$分別在$\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \cdots \mathbf{r}_s \cdots$等處，則由疊加原理與（I-1）和（I-3）式可知

$$\boldsymbol{E}(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_s \frac{e_s}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_s|^3}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_s) \qquad (\text{I}-4)$$

$$V(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_s \frac{e_s}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_s|} \qquad (\text{I}-5)$$

由（4），（5）兩式，可見（2）式仍成立。（4），（5）兩式可推廣到一般性之電荷分佈。設$\rho(\mathbf{r}')$，$\sigma(\mathbf{r}')$分別爲在$\mathbf{r}'$之體積與表面之電荷密度。故

$$V(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}d^3\mathbf{r}' \qquad (\text{I}-6)$$

$$=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iint_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}ds \qquad (\text{I}-7)$$

$$\boldsymbol{E}(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}d^3\mathbf{r} \qquad (\text{I}-8)$$

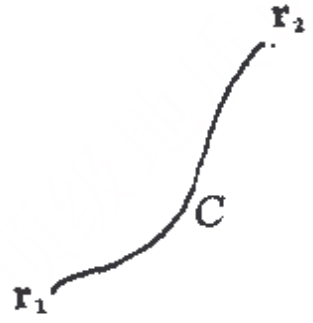
$$=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iint_S\frac{\sigma(\mathbf{r}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,ds \qquad (\text{I}-9)$$

由（2）式與（I-6），（I-7）可得（I-8），（I-9）式。注意；以後吾人將以 $\mathbf{r}$ 表示觀察點，而以 $\mathbf{r}'$ 爲電荷所在地。

(4)，(5) 兩式裡，吾人已利用所謂疊加原理。該原理乃是基於實驗之性質歸納而來，並非由特定之邏輯或先有之理由所得。但此疊加原理一經假定，整部電磁學的數學結構，乃獲有一極簡單的性質，即所謂"線性"是也。這線性使電磁理論成功的應用於所有的電磁現象，包括光學。這些成功使這疊加原理也成爲愛因斯坦的狹義相對論與近代量子理論之最基本原理之一。

如圖 (2)，電場 $\boldsymbol{E}$ 乃是由 $q_1, q_2\cdots$等電荷所造成。今有一電荷 e 從 $\mathbf{r}_1$ 沿着 C 之路徑走到 $\mathbf{r}_2$，爲反抗 $\boldsymbol{E}$ 所需作之功爲

$$W=\int_C \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s}=-\int_{r_1}^{r_2} e\,\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s}$$



(圖1-2)

由（2）式可得

$$W=e\int_{r_1}^{r_2} grad V\cdot d\vec{l}=e$$

$$=e\int_{r_1}^{r_2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}dx+\frac{\partial V}{\partial y}dy+\frac{\partial V}{\partial z}dz\right)$$

$$=e\left[V(\mathbf{r}_2)-V(\mathbf{r}_1)\right] \qquad (\text{I}-10)$$

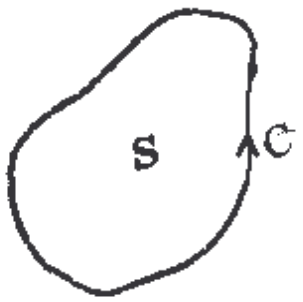
此式之結果與電荷所走之路徑無關，即：靜電場者乃是保守場也（conservative field）。由此可見，倘若該電荷在任一密閉路徑

運行，回至原點時，其所作之功爲零；

$$e\oint_c \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} = 0 \qquad (\text{I}-11)$$

按 Stokes 定理，任何向量$\boldsymbol{A}$之 $curl\,\boldsymbol{A}$面積分與A之線積分之關係

$$\oint_c \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s} = \iint_s curl\,\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} \qquad (\text{I}-12)$$



(圖1-3)

C爲封閉曲線，而$\boldsymbol{S}$乃是以C爲邊界的任一薄膜面，如圖 3 所示。

(11) 式按 Stokes 定理亦可寫爲 $curl\boldsymbol{E} = 0$，或

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=0 \qquad (\text{I}-13)$$

（I -1）式裡，吾人已知電場之定義是由庫倫定律而得來。電場之大小亦可使用"通量"（flux） 之觀念表示之。若有一點 q 電荷， 由該電荷所發出之通量爲 $\iint_s \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{S}$乃是將 q 包圍在內之封閉面。欲討論 "通量 " 與電場關係，吾人需先瞭解所欲使用之數學工具—— Gauss 定理。

下列所述之 Gauss 兩大定理純是數學結果而與物理內函無關。

Gauss 定理；設有一點 $\mathbf{r}_1$， S乃是任意封閉面。則

$$\oiint \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|\cdot d\boldsymbol{S}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|^3}=\begin{cases}4\pi & \text{若}\mathbf{r}_1\text{是在}\boldsymbol{S}\text{封閉的體積}V\text{內}\\ 0 & \text{若}\mathbf{r}_1\text{是在}S\text{封閉的體積外}\end{cases} \qquad (\text{I}-14)$$

上述之積分子乃是由 $\mathbf{r}_1$ 對 d_S 所張開之立體角，由此積分即得（14）之結果。

Gauss divergence 定理：任何向量場$\boldsymbol{A}$，

$$\iiint_V div\ \boldsymbol{A}\, d^3\mathbf{r}=\oiint_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} \qquad (\text{I}-15)$$

S乃是體積V之邊界面。

今若將（14）式之 Gauss 定理應用於（4）或（5）式之 Coulomb 定律時，則可得

$$\oiint_S \epsilon_0 \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\sum_k e_k,\quad e_k \text{位在}\boldsymbol{S}\text{面內}, \qquad (\text{I}-16)$$

或

$$=\iiint_V \rho(\mathbf{r}')\ d^3\mathbf{r}',\quad \mathbf{r}'\text{位在}\boldsymbol{S}\text{面內}。 \qquad (\text{I}-17)$$

若再使用Gauss divergence 定理 (15) 時，則

$$\iiint_V [\ div\ \epsilon_0 \boldsymbol{E}-\rho(\mathbf{r})\ ]d^3\mathbf{r}=0$$

因爲體積V乃是任意取的，故可得 Poisson 方程式

$$div\ (\epsilon_0 \boldsymbol{E})=\rho(\mathbf{r}') \qquad (\text{I}-18)$$

或

$$\nabla^2 V=-\rho/\epsilon_0 \qquad (\text{I}-18\text{a})$$

∇^2稱爲 del 平方，或 Laplacian 算符。

在自由空間裡，某一點$\rho(\mathbf{r})=0$，則（I-18a）式即成 Laplace

方程式

$$div\ (\epsilon_0 \boldsymbol{E}) = 0,\ 或\ \ \nabla^2 V = 0。 \qquad (\text{I}-19)$$

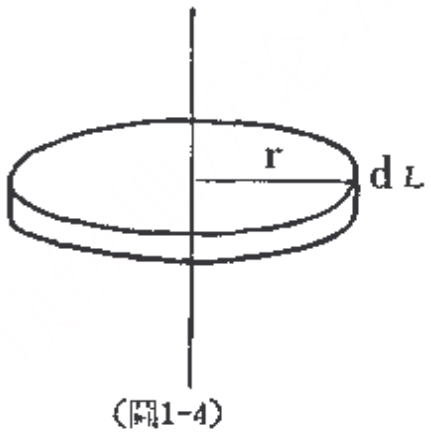
因此由（18）式，若已知電場$\boldsymbol{E}$，則可求出電荷密度$\rho(\mathbf{r})$分佈之情形。

但除了$\rho(\mathbf{r})$與$\sigma(\mathbf{r})$是具有特殊之對稱性的簡單問題（如下例）外，欲求電場$\boldsymbol{E}$，通常是不使用（6）和（7）式，甚至也不使用（18）式。一般方法，乃是解 Poisson 方程式式中之$V(\mathbf{r})$，然後再由（2）式將$V(\mathbf{r})$微分而得$\boldsymbol{E}$。解（18a）之方法乃是下一章電位理論之主要題材。

例題

若有一無限長之線電荷，其上每米處有ρ_l Coulomb 電荷，求它四週圍之電場。

解



(圖1-4)

由（17）式可知（如圖）

$$\epsilon_0 \iint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \rho_l L \cdots (1)$$

因　$d\boldsymbol{S} = 2\pi r dL$

∴故由（1）得

$$2\pi r \epsilon_0 L \boldsymbol{E} = \rho_l L$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\ \frac{\rho_l}{\mathbf{r}} \cdots (2)$$

$\boldsymbol{E}$之方向垂直於該線

2. 群體電荷之能量

在（I-10)式，若電場$\boldsymbol{E}_1$（乃由電荷e_1在$\mathbf{r}_1$所產生）裡，

有一電荷 e_2 從無窮遠處移至 r_2 點時，則爲抵抗E_1之作用而所需作之功應爲（由 (2) 式）

$$W=-e_2\int \boldsymbol{E}\cdot d\,\boldsymbol{s}\ =+\,e_2\int grad\ V(r_{12})\cdot d\boldsymbol{s}$$

故 $$W=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\ \frac{e_1e_2}{r_{12}}\ ,\qquad r_{12}=|\,\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2\,| \qquad (\text{I}-20)$$

今有一群電荷 $e_1, e_2, \cdots e_s, \cdots$分別在$r_1$, $r_2, \cdots r_s, \cdots$等處，設吾人將該群電荷同時從無窮遠處移至上述各點時，爲抵抗相互作用之庫倫力，其所需作的功爲

$$4\pi\epsilon_0 W=\frac{e_1e_2}{r_{12}}+\ (\frac{e_1}{r_{13}}+\frac{e_2}{r_{23}})\ e_3\ +\ (\frac{e_1}{r_{14}}+\frac{e_2}{r_{24}}+\frac{e_3}{r_{34}})\ e_4+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}e_1\ (\frac{e_2}{r_{12}}+\frac{e_3}{r_{13}}+\frac{e_4}{r_{14}}+\cdots)+\frac{1}{2}\ e_2\ (\frac{e_1}{r_{21}}+\frac{e_3}{r_{23}}+\cdots)$$

$$W=\sum_s\frac{1}{2}e_sV_s \qquad (\text{I}-21)$$

V_s乃由除了在 r_s 之電荷 e_s 外所有其他電荷在 r_s 處所產生之電位。假若所有電荷爲點電荷時，則欲將 e_s之各小部份，從無窮遠處移至 r_s 處，所需作之功爲無限大。此能量亦稱本身能量 (Self energy)。爲避免上述"無限大"之困擾，乃用連續性之電荷分佈以代替點電荷之觀念，有如第(6)式，在 $r'=r$ 時，亦爲有限值。故 (21) 可寫爲

$$W=\frac{1}{2}\iiint_V \rho(r')V(r')d^3r' \qquad (\text{I}-22)$$

此表示W在電荷分佈在一有限空間區域時之式，可藉 Poisson 方程式改寫爲

$$W=\frac{1}{2}\iiint_V \epsilon_0\ div\,\boldsymbol{E}\,V(\mathrm{r}')\,d^3\mathrm{r}'$$

$$=\frac{1}{2}\iiint_V \epsilon_0\,\boldsymbol{E}^2(\mathrm{r}')\,d^3\mathrm{r}' \qquad (\mathrm{I}\text{-}22')$$

因此式只有電場$\boldsymbol{E}$出現，故將所有電荷作成此分佈所儲蓄的能量W，可視爲儲存於電場裡。如介體爲自由空間（眞空），則這"場能量"的密度爲

$$\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$$

3. 靜電平衡中之導體

（1）電荷之分佈

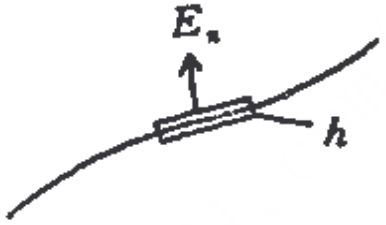
帶電或是中性之導體，皆有下述之特性：當將導體引入一電場時，則在該導體上之電荷將重新分佈，使其處於一個靜電平衡狀態。由定義，此狀態乃是整個導體具有一均勻等量之電位。特別是，其表面亦爲一等位面，故在該面上切線方向之電場分量爲零。整個導體之電位V既皆均勻，則導體內部所有點的電荷密度，按 Poisson 方程式，應爲零：

$$\rho(\mathrm{r}')=0,\quad \text{在導體內。} \qquad (\mathrm{I}\text{-}23)$$

故當導體在靜電平衡狀態時，所有電荷必分佈於其表面上。〔注意的是當導體有電流通過時，導體內必有一電場E的存在，故

(23) 式是不成立的。]

但導體面上，其電場之法線方向之分量並不爲零。設$\sigma(\mathbf{r}_s)$爲導體面$\mathbf{r}_s$點之表面電荷密度。如圖四所示，於跨過導體面上畫一小“葯盒”，應用第 (17) 式，並使其高度h趨近於零。因導體內部之電場爲零，故在表面，得



$$\epsilon_0 E_n(\mathbf{r}_s) = \sigma(\mathbf{r}_s), \qquad (1\text{-}24)$$

此$\sigma(\mathbf{r}_s)$不僅決定在導體表面的 E_n，且在空間任何一點 $\mathbf{r}$，亦產生電位$V(\mathbf{r})$及電場$E(\mathbf{r})$。問題是如何求得 $\sigma(\mathbf{r}_s)$之分佈情形。這問題的解答，可由下述更爲一般性之問題獲得之。今有一群處在靜電平衡狀態之固定導體 (帶電或是中性)。設$V(\mathbf{r})$爲空間 $\mathbf{r}$ 點之電位，$\sigma_i(\mathbf{r}_s)$爲導體 i 之表面$\mathbf{r}_s$處之電荷密度。則下述之條件在此體系裡皆可成立；

(1) 每個 i 導體面皆爲一等位面 V_i

(2) 每個 i 導體面之電荷密度爲$\sigma_i(\mathbf{r}_s)$，使該導體面爲一等位面，

(3) 該群導體之外 $\mathbf{r}$ 點之電位 $V(\mathbf{r})$必滿足 Poisson 方程式 (18)

$$\nabla^2 V(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\mathbf{r})$$

(4) $V(\mathbf{r})$則滿足下列邊界條件；

(a) 在 i 導體表面，$V = V_i$ = 常數，

（b）在某些特定面，V（或$\frac{\partial V}{\partial n}$，"法線微分"）＝已知函數

（例；圍繞所有導體之空間體積的邊界面）。

上述問體加上1)~ 4)之邊界條件而所得之解，乃是下一章將欲討論之電位理論之主要問題。但在尚未討論此類問題之時，吾人仍然能得到一些較廣泛性之結果。這些結果將於下面用定理表示之。

定理 1：

在多個導體系統裡，若每個導體上之電位爲已知，則每個導體面電荷密度即完全決定。

證明：

假設每個導體面電荷密度，可有兩個不同的分佈情形——稱爲σ和σ'，則由（$\sigma-\sigma'$）所造成之電位$V(\mathbf{r})$爲

$$\overline{V}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iint_{\Sigma}\frac{\sigma-\sigma'}{\mathrm{R}}\,dS_i$$

dS_i乃是導體i面積元素，$R=|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|$，$\Sigma$是所有導體之面積$S_1+S_2+\cdots$之總和。設$\mathbf{r}_A$爲$A$導體面上之一點。由上設定，得知

$$V(\mathbf{r}_A)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iint_{\Sigma}\sigma\frac{dS_i}{\mathrm{R}}\,,\quad V(\mathbf{r}_A)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iint_{\Sigma}\frac{\sigma' dS_i}{R}\,,$$

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_A-\mathbf{r}_i$$

故　　$\overline{V}(\mathbf{r}_A)=0$

因A乃是任意取之點，故由上結果得知 $\sigma-\sigma'$ 在所有導體上所產生之電位爲零，且在此系統中任何 r 點，其電場皆爲零。由(24)式，得見此卽謂不可能有兩個不同之電荷分佈也。

定理 2：

若每個導體之總電荷量爲已知，則在靜電平衡狀態下之導體群，其每個導體上之電荷分佈，皆完全決定。

證明：

先假設每個導體上可有兩個不同電荷密度 σ 和 σ'。由命題，導體 i 上之總電荷量 Q_i 爲已知的，故有

$$Q_i=\iint_{S_i}\sigma dS_i=\iint_{S_i}\sigma' dS_i \text{ 。}$$

設有 $\sigma=\sigma-\sigma'$（假想之分佈），則導體 i 的總電荷量必爲零，因

$$\bar{Q}_i=\iint_{S_i}(\sigma-\sigma')\,dS_i=0,$$

或

$$\iint_{S_i}\epsilon_i\overline{E_i}\cdot d\boldsymbol{S}_i=0\text{。}$$

上式乃是表示進到導體 i 之電場通量與出去的是相等的。電場通量乃是由高電位"流"至低電位點。假若通量有流進，流出時，則其電位必在較高與較低電位之間。按假定，導體是在由本身電荷所產生的場裡的靜電平衡狀態。若每一個導體的進、出通量相等，則這意謂所有導體皆處於同樣電位，但這亦意謂它們沒有通量進出，也就是

$$\sigma-\sigma'=0。$$

定理 3 (Thomson 定理):

一群帶電之導體，當其在靜電平衡狀態時，其場能爲最小值。

由定理 2 得知，若一群導體中，已知每個導體之總電荷量 e_k，則各導體上之電荷密度 σ，卽完全決定了。該平衡狀態可以下式表示之;

$$V_i=\text{常數}\qquad\text{在每個導體上}$$

玆欲證明在此狀態下，該體系之場能爲最小值。

證明:

假設嵌這些導體于自由空間裡（證明方法亦可適用於有介電質之空間裡），使$\boldsymbol{E}(\mathrm{r})$爲

$$div\,\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0}\,,\qquad \oiint_{S_i}\epsilon_0\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}_k=e_k,\qquad (\mathrm{I}-25)$$

$$\boldsymbol{E}=-grad\ V\qquad\text{因此}\qquad curl\ \boldsymbol{E}=0$$

設$\boldsymbol{E}'$爲任何其他（非靜止的）場，並滿足（25）各方程式，祇除了 $V_i'=$常數。該兩個不同狀態$\boldsymbol{E}$及$\boldsymbol{E}'$之場能差距，按（21）式應爲

$$\Delta W=\frac{1}{2}\iiint_V(\epsilon_0\boldsymbol{E}'\cdot\boldsymbol{E}'-\epsilon_0\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E})d^3\mathrm{r}'$$

$$=\frac{1}{2}\iiint_V\epsilon_0(\boldsymbol{E}'-\boldsymbol{E})^2d^3\mathrm{r}'+\iiint\epsilon_0(\boldsymbol{E}'-\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{E}\,d^3\mathrm{r}'$$

今　　$(\boldsymbol{E}'-\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{E} = -\nabla V\cdot(\boldsymbol{E}'-\boldsymbol{E})$

$$= -div[V'(\boldsymbol{E}'-\boldsymbol{E})]+V\,div(\boldsymbol{E}'-\boldsymbol{E})$$

且　$div(\boldsymbol{E}'-\boldsymbol{E})=0$。因此

$$\iiint \epsilon_0(\boldsymbol{E}'-\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{E}\,d^3\mathrm{r} = -\sum_k \iint_{S_k} V(\boldsymbol{E}'-\boldsymbol{E})\,d\boldsymbol{S}$$

$$= -\sum_k V_k \iint_{S_k}(\boldsymbol{E}'-\boldsymbol{E})\cdot d\boldsymbol{S} = 0。$$

用（25）式第二方程式，

故　　$$\Delta W = \frac{1}{2}\iiint_V \epsilon_0(\boldsymbol{E}'-\boldsymbol{E})^2 d^3\mathrm{r}' \geq 0。$$

定理 4：

玆在由固定電荷（或帶電導體）產生之電場，引入一不帶電之導體，則該體系之場能必降低。

證明：

設$\boldsymbol{E}(\mathrm{r})$和$\boldsymbol{E}'(\mathrm{r})$乃引入不帶電之導體$A$前後之電場。其場能之改變應爲

$$\Delta W = \frac{1}{2}\iiint_{V-V_0}\epsilon_0 E'^2 d^3\mathrm{r} - \frac{1}{2}\iiint_V \epsilon_0 E^2 d^3\mathrm{r}$$

V_0乃是導體A之體積。上兩積分之範圍，不包括所有導體佔據之空間（因導體內之電場爲零）。吾人可得

$$\Delta W = \frac{1}{2}\iiint_{V-V_0}(\boldsymbol{E}'+\boldsymbol{E})\cdot\epsilon_0(\boldsymbol{E}'-\boldsymbol{E})\,d^3\mathrm{r} - \frac{1}{2}\iiint_{V_0}\epsilon_0 E^2 d^3\mathrm{r}$$

第一項積分爲零*，故

$$\Delta W = -\frac{1}{2}\iiint_{V_0} \epsilon_0 E^2 d^3\mathrm{r} \qquad (\mathrm{I}-26)$$

負值乃表示，當不帶電之導體加入此空間時，其場能必降低。

*今　　$curl(\boldsymbol{E}'+\boldsymbol{E})=0$　　…註(1)

又　　$div(\epsilon_0\boldsymbol{E}'-\epsilon_0\boldsymbol{E})=(\rho'-\rho)=0$　　…註(2)

因按題假定，電荷分佈是固定的。茲據註(1)，我們可引入一純量函數U，使

$$\boldsymbol{E}'+\boldsymbol{E}=-\nabla U$$

故
$$\iiint(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}')\cdot(\epsilon_0\boldsymbol{E}'-\epsilon_0\boldsymbol{E})d^3\mathrm{r}$$

$$=\iiint U\ div\ (\epsilon_0\boldsymbol{E}'-\epsilon_0\boldsymbol{E})d^3\mathrm{r}=0\ ,$$

在上作分部積分時，其已積分之部等於零，乃假設$\boldsymbol{E}$與$\boldsymbol{E}'$在r值甚大時，其趨近於零，較$\frac{1}{r}$爲迅速。

（2）電位，電容，電感等係數

在（4），（5）式，吾人已述及電場及電位適用疊加原理之假定。依據該原理，吾人立即可得下述之結果；

假如在1, 2…n等固定導體，分別附有$e_1, e_2, \cdots e_n$等電荷時，將產生$V_1, V_2, \cdots V_n$等電位，又假如另外一組之電荷$(e_1', \cdots e_n')$，將產生$V_1'\cdots V_n'$等電位，則由$e_1+e_1', e_2+e_2'+\cdots, e_n+e_n'$等之電荷，所產生之電位，爲$V_1+V_1', \cdots, V_n+V_n'$等。

1）電位係數

今有 n 個固定導體之系統。若於該 n 個導體上分別附有 e_1, $e_2, \cdots e_n$ 等電荷時，依據疊加原理，則在第 j 個導體之電位應爲

$$V_j = \sum_k p_{jk} e_k, \qquad j=1, 2, \cdots n \tag{I-27}$$

p_{jk} 之意義，可如下見之，設祇有導體 k 帶有一單位電荷，其他導體皆不帶電，則導體 j 之電位爲 p_{jk}. p_{jk}等有對稱性，可獲得如下。

設於導體"1"上之電荷密度分佈情形爲 $\sigma_1(\mathbf{r}_1)$,

$$\iint_{S_1} \sigma_1 \, d^2 \mathbf{r}_1 = 1 \tag{I-28}$$

$d^2 \mathbf{r}_1$乃導體"1"面 $\mathbf{r}_1$點之"表面元素"。該導體 1 在導體 2 上 $\mathbf{r}_2$ 點所產生之電位爲

$$4\pi\epsilon_0 V_2(\mathbf{r}_2) = \iint_{S_1} \frac{\sigma_1(\mathbf{r}_1') d^2 \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \tag{I-29}$$

導體"2"上之電荷密度σ_2',

$$\iint_{S_2} \sigma_2'(\mathbf{r}_2) d^2 \mathbf{r}_2 = 1 \tag{I-30}$$

則在導體"1"上 $\mathbf{r}_1$ 點所產生之電位爲

$$4\pi\epsilon_0 V_1'(\mathbf{r}_1) = \iint_{S_2} \frac{\sigma_2'(\mathbf{r}_2) d^2 \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \tag{I-31}$$

由 (29) 與 (31)，可得

$$\iint_{S_1} \sigma_2'(\mathbf{r}_2) V_2(\mathbf{r}_2) \, d^2 \mathbf{r}_2 = \iint_{S_2} \iint_{S_1} \frac{\sigma_2'(\mathbf{r}_1) \sigma_1(\mathbf{r}_1) \, d^2 \mathbf{r}_1 \, d^2 \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}$$

$$=\iint_{S_1}\sigma_1(r_1)V_1'(r_1)d^2r_1 \qquad (1-32)$$

但每個導體的表面之電位是一常數，因此，由 (29) 與 (30)，可得

$$V_2=V_1' \qquad (1-33)$$

按 (27) 之定義，此即

$$p_{21}=p_{12}, \qquad (1-34)$$

或一般的

$$p_{jk}=p_{kj} \qquad (1-35)$$

此 p_{jk} 稱爲電位係數；它們的數值，僅視導體之形狀、大小及位置而定。

2) Green 互易關係 (Reciprocity relation)

設 (27) 式中之電荷改爲$e_1', e_2'\cdots\cdots e_n'$，則其相當之電位爲

$$V_j'=\sum_k p_{jk}e_k'$$

由此方程式與 (27)，更用 (35) 之關係，可得

$$\sum_j e_j' V_j=\sum_{j,k}p_{jk}e_j'e_k=\sum_{k,j}p_{kj}e_ke_j'=\sum_k e_kV_k' \qquad (1-36)$$

這就是所謂Green's Reciprocity定理。

3) 電容與電感係數：

由 (27) 之聯立方程式，求 e_m 之解，可得

$$e_m=\sum_{n=1}^{n}c_{nm}V_n \qquad (,-37)$$

c_{nm}爲 p_{nm} 在行列式Δ中之餘因子 (Cofactor) 而除以Δ之值，Δ爲

$$\Delta = \begin{vmatrix} p_{11} p_{21} \cdots p_{n1} \\ \vdots \\ p_{1n} \cdots \cdots p_{nn} \end{vmatrix} \geqslant 0$$

因$p_{ij}=p_{ji}$，故

$$c_{ij}=c_{ji} \qquad (\text{I}-38)$$

c_{mm}爲當導體"m"之電位爲一單位，所有其他導體之電位皆爲零時，該導體m的電荷。c_{mm}稱爲電容係數，其值爲$c_{mm}>0$，若$n\neq m$，則c_{mn}稱爲電感係數，而$c_{mn}<0$。

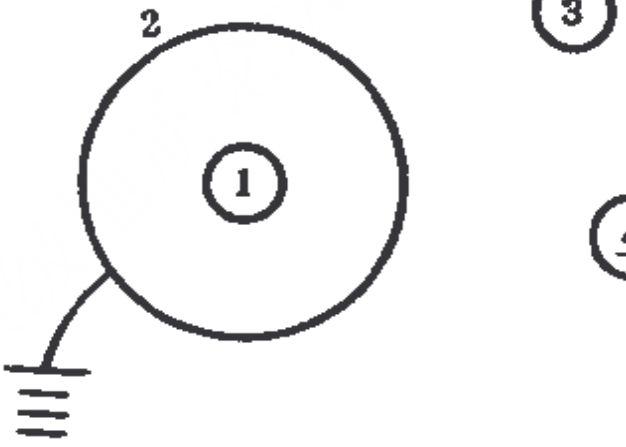
習題：證明下列關係；

$$p_{ij}\geq 0,$$

$$c_{ij}\leq 0, \qquad (\text{I}-39)$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\geqslant 0,$$

4）電屏蔽原理（principle of electrical screening）



(圖1-5)

如圖（1-5）所示，在此體系內，導體"1"完全爲導體"2"所包圍住。假如$Q_1=0$，而導體2又接地，則

$$V_1=V_2=0$$

將（37）式應用在"1"上，則

$$c_{31}V_3+c_{41}V_4+\cdots\cdots=0$$

此式在V_3，V_4爲任意值時皆應成立。故

$$c_{21}=c_{41}=\cdots\cdots c_{N1}=0$$

故，當"2"接地時，則該系統由（37）式可得

$$\begin{aligned}
Q_1&=c_{11}V_1\\
Q_2&=c_{12}V_1+c_{22}V_2+c_{42}V_4+\cdots\cdots\\
Q_3&=c_{13}V_1+c_{33}V_3+c_{43}V_4+\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
Q_N&=\qquad c_{3N}V_3+c_{4N}V_4
\end{aligned}\qquad(1-40)$$

由（40）式可見"1"爲"2"所包圍而"2"接地時，"1"之電荷與在"2"外之導體之電位無關，且"3"，"4"……"N"（在"2"外之導體）之電位也與"2"之內的電荷無關。這就是電屏蔽原理。

（3）導體群之能量：

在（21）式中，吾人已述及如何計算自由空間裡一群固定導體之場能。因爲導體內之電場 $\boldsymbol{E}=0$，故當對所有空間體積積分時，體積V是已扣除所有導體佔有之體積，故

$$\begin{aligned}
W&=\frac{1}{2}\iiint_V \epsilon_0 E^2 d^3\tau=-\frac{1}{2}\iiint_V \epsilon_0(\boldsymbol{E}\cdot grad\ V)d^3\tau\\
&=-\frac{1}{2}\iiint_V\{(div(\epsilon_0 V\boldsymbol{E}-\epsilon_0 V div\boldsymbol{E})\}d^3\tau\\
&=-\frac{1}{2}\iiint_V div\,(\epsilon_0 V\boldsymbol{E})\,d^3\tau=-\frac{1}{2}\oiint_S \epsilon_0 V\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}
\end{aligned}\qquad(1-42)$$

$\boldsymbol{S}$面有二部份：S_0與S_∞。S_0 面乃是所有導體表面之總和，而S_∞乃一無限大的球之面。$d\boldsymbol{S}$之方面爲朝向導體。上面吾人已假定在空間V裡無電荷，故 $div\,\boldsymbol{E}=0$

爲計算（42）式的積分，可將dS之方向反轉，再用（24）式$\epsilon_0 E_n=\sigma$，（E_n與導體面垂直分量）。更假設S_∞上之電場，對（42）無何貢獻（因電場在無窮遠時趨近於零），則（42）式卽成

$$W=\iint_{S_i}\frac{1}{2}V\sigma\,dS=\frac{1}{2}\sum_k V_k e_k \qquad (\text{I}-43)$$

（43）式之W，亦可由電荷c_k從O增加至e_k，將電位V_j從O增加至V_j所作之功計算之。按疊加原理，卽得

$$W=\sum_k\int_0^1 (\lambda V_k)'\,d(\lambda e_k)=\frac{1}{2}\sum_k V_k\,e_k$$

（43）式可藉（27）或（37）式化簡爲僅有e_k，或僅有V_k之式子，如

$$W(e)=\frac{1}{2}\sum_{i,j}p_{ij}e_ie_j,\qquad p_{ij}=p_{ji} \qquad (\text{I}-44)$$

$$W(V)=\frac{1}{2}\sum_{i,j}c_{ij}V_iV_j,\qquad c_{ij}=c_{ji} \qquad (\text{I}-45)$$

所以
$$\frac{\partial W}{\partial e_i}=\sum_j p_{ij}e_j=V_i^* \qquad (\text{I}-46)$$

$$\frac{\partial W}{\partial V_i}=\sum_j c_{ij}V_j=e_i \qquad (\text{I}-47)$$

並且
$$dW=\sum_i\frac{\partial W}{\partial e_i}de_i=\sum_i V_i\,de_i \qquad (\text{I}-48)$$

$$=\sum_i\frac{\partial W}{\partial V_i}dV_i=\sum_i e_i\,dV_i \qquad (\text{I}-49)$$

由（44）式$W(e)$變爲（45）式之$W(V)$，乃係一個 Legendre 變換。

$$W(V)=\sum e_iV_i-W(e) \qquad (\text{I}-50)$$

參閱本書，第一册、動力學（乙）部，第Ⅲ章1節。由 Euler 齊次函數定理可得

$$\sum e_i\frac{\partial W}{\partial e_i}=2W(e),\qquad \sum V_i\frac{\partial W}{\partial V_i}=2W(V)\quad(\text{I}-51)$$

（4）導體位移時所需之功

若導體位置之一般座標爲 $(\xi_1,\xi_2\cdots\cdots)$，使 p_{ij} 及 c_{ij} 等係數成爲此等座標之函數。（44）及（45）之能量式玆可寫爲

$$W(e;\xi)=\frac{1}{2}\sum p_{ij}(\xi)e_ie_j\qquad(\text{I}-52)$$

$$W(V;\xi)=\frac{1}{2}\sum c_{ij}(\xi)V_iV_j\qquad(\text{I}-53)$$

廣義力（generalized force）F_k 可定義如下：

位移 $d\xi_k$ 時，爲抵抗 F_k 所需作之功之元素爲 $F_kd\xi_k$ I（-54）

此 F_k 係　$F_k=-\dfrac{\partial W(e,\xi)}{\partial\xi_k}\qquad(\text{I}-55)$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial p_{ij}}{\partial\xi_k}e_ie_j\qquad(\text{I}-56)$$

由（50）式，已得

$$W(e,\xi)+W(V,\xi)-\sum_k e_kV_k=0$$

此可寫作下式

$$f(e_1,\cdots e_n,V_1,\cdots,V_n,\xi_1,\xi_2\cdots)=0\qquad(1-57)$$

故　$\delta f=\sum_k\left(\dfrac{\partial f}{\partial e_k}\delta e_k+\dfrac{\partial f}{\partial V_k}\delta V_k\right)+\sum_j\dfrac{\partial f}{\partial\xi_j}\delta\xi_j=0$

惟　$\dfrac{\partial f}{\partial e_k}=\dfrac{\partial W(e,\xi)}{\partial e_k}-V_k=0,$

$$\frac{\partial f}{\partial V_k}=\frac{\partial W(V,\xi)}{\partial V_k}-e_k=0,$$

故得 $\sum_k \frac{\partial f}{\partial \xi_k}\delta\xi_k=0$。但 $\delta\xi_k$ 乃是任意取之值，故

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\partial f}{\partial \xi_k}=\frac{\partial W(e,\xi)}{\partial \xi_k}+\frac{\partial W(V,\xi)}{\partial \xi_k}=0 \qquad (\text{I}-58)$$

（此式係Legendre 變換之結果。見前參考第一册乙部）

若所有e_k無改變，則F_i的方向，乃是$W(e,\xi)$減少之方向。若所有導體之電位保持不變（如利用電池相接），則此系統之能量按下式增加；

$$\sum_k \frac{\partial W(V;\xi)}{\partial \xi_k}d\xi_k \qquad (\text{I}-59)$$

而力則爲

$$-\frac{\partial W(e;\xi)}{\partial \xi_k}=\frac{\partial W(V;\xi)}{\partial \xi_k} \qquad (\text{I}-60)$$

該系統所作之功爲$\sum_k \frac{\partial W(V;\xi)}{\partial \xi_k}d\xi_k$。故由電池所供應之能量則應爲

$$=\text{該系統所增加之內能}+\text{由該系統所作之機械功}$$

$$=2\sum \frac{W(V;\xi)}{\partial \xi_k}d\xi_k \qquad (\text{I}-61)$$

總之：由該力作用之效果，一個未帶電之介電體，將永被吸到電場較强之區域，在所有 e 值不變的情況下，該系統之能量必降低；但在V保持不變情形下，則介電體所作之功，其能量由電池提供。

4. 電介質　(dielectrics)

(Ⅰ) 極化現象 (polarization)

1) 電極化率 (susceptiblity)

電介質中如 $O_2, N_2, CO_2, CH_4, C_6H_6$……等分子，皆具有高度之對稱性，故這些分子沒有永久電偶矩 (electric dipole moment)。但如 $H_2O, O_3, HCl, C_2H_5OH, SO_2$ 等分子，則具有永久電偶矩。下面吾人將討論極化理象與永久電偶矩之關係。玆使 $\boldsymbol{p}_0$ 代表水久電偶矩。

氣體或液體中之分子電偶或離子電偶，由於受了熱的激動，其指向是沒有一定的，故在一個體積 V 內，這些分子之平均電偶矩應爲零。但當有外加電場時，則一個電偶之電位能可寫爲

$$V = -\boldsymbol{p}_0 \cdot \boldsymbol{E} \qquad (\text{I}-62)$$

使該電偶指向電場方向的力偶 T 爲

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{p}_0 \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial V}{\partial \theta} = -p_0 E \sin\theta \qquad (\text{I}-63)$$

θ 爲 $\boldsymbol{p}_k$ 與 $\boldsymbol{E}$ 間之夾角。

設 $x = \cos\theta, y = p_0 E/kT$，$k$ 爲Boltzmann 常數，T 爲絕對溫度。按統計力學之 Boltzmann 定律，電偶矩沿 $\boldsymbol{E}$ 方向之分量是

$$\overline{p_0} = \langle p_0 \cos\theta \rangle = \frac{p_0 \int x e^{yx} dx}{\int e^{yx} dx} \qquad (\text{I}-64)$$

積分極限是從 $x=-1$到 $x=+1$。計算的結果是

$$\langle p_0\cos\theta\rangle = p_0\left[\coth y - \frac{1}{y}\right] \qquad (\text{I}-64a)$$

$$p_0 = \frac{p_0^2 E}{3kT} \qquad \text{當} p_0 E \ll kT \qquad (\text{I}-64b)$$

這個 $\langle p_0\cos\theta\rangle$ 隨着溫度而改變的理論，乃是由 Debye 所導出。此理論與 p.127 Langevin在 1912 年處理磁偶矩的情形完全相似。(參閱本書，"理論物理，第二册、第甲部第六章，3 節)

無論電介質的分子是否具有永久電偶矩，在外加電場中，則該分子必有感應的電偶矩。雖個別分子內之電子，受有束縛，不能如在導題內從一個分子流到另一個分子，但每個分子中的正電荷與電子之間，却會產生一微小之位移，因而產生一個感應電偶矩，其平均值爲

$$\boldsymbol{p}_{in} = \iiint \rho\, \mathbf{r}\, d^3\mathbf{r}$$

ρ 乃是電荷密度，積分範圍乃是整個分子之體積。$\boldsymbol{p}_{in}$ 與$\overline{\boldsymbol{p}_0}$不同處，是$\boldsymbol{p}_{in}$與溫度無關。當然，由上述之定義得知，$\boldsymbol{p}_{in}$乃視外加電場之大小而定。若該場並非太大時（與分子內本身電場相比）

則感應電偶極爲*

$$\boldsymbol{p}_{in} = \alpha\epsilon_0 \boldsymbol{E} \qquad (\text{I}-65)$$

$\boldsymbol{E}$ 與$\boldsymbol{p}_{in}$有線性之關係，α 稱爲分子極化率，完全係分子之性質。其值可由實驗中量定，亦可用量子力學計算之。若N爲電介

註*在用巨觀來寫（65）之前，不妨先指出（65）式中之$\boldsymbol{E}$，實應寫爲$\boldsymbol{E}+\frac{1}{3\epsilon_0}\boldsymbol{P}$

此點將留待下文（72）式詳述之。

質中每單位體積分子數，則每單位體積之感應電偶矩爲

$$N\boldsymbol{p}_{in}=N\alpha\epsilon_0\boldsymbol{E} \qquad (\text{I}-65a)$$

由（64b）和（65）兩式，每單位體積之電偶矩總和（P，稱爲極化）爲

$$\boldsymbol{p}=N(\boldsymbol{p}_0+\boldsymbol{p}_{in})=\kappa\epsilon_0\boldsymbol{E} \qquad (\text{I}-66)$$

κ稱爲電介質之（巨觀的）電極化率（electric susceptibility）。由庫倫定律（1），得知，$\epsilon_0\boldsymbol{E}$之因次爲er^{-2}，而$\boldsymbol{p}$之因次亦爲$\frac{e\,r}{r^3}$。因此κ乃是因次爲零之量。（65）式中之α，其因次爲體積。

絕大部份之氣體，κ之值約在0.0001左右。大多數的固體或液體之電介質，κ是在1與10之間。但酒精（25與30之間）與蒸餾水（約80）却是例外。有些半導體，κ之值會達10^5之譜。

某些電介質（如 Rochelle salt, barium titanate），它們之$\boldsymbol{p}$和$\boldsymbol{E}$並不具有線性之關係。當外加電場移去時，$\boldsymbol{p}$並不恢復爲零，而尙剩留一些極化理象，甚似鐵磁性物質之磁滯理象。因此，該類之電介質乃稱爲鐵電物質（ferroelectric）。

更有一類電介質，如石英（Quartz）晶體等，可藉機械應力使之極化。這卽所謂壓電效應（piezoelectric effect）。與此相反的效應，卽是用外加電場使該物質引起某特定頻率振動，有多種實用價值，如可用做爲頻率之標準等，（如石英錶）。

至若各向同性之電介質（isotropic dielectric），κ是個純

量（非向量）。若晶體具有某種特殊之對稱性，則感應電偶矩$\boldsymbol{P}_i$之方向可異于$\boldsymbol{E}$之方向，換言之，κ係張量（tensor）$\kappa_{ij}, i,j=x,y,z$，在此情形下，

$$P_i=\sum_j \kappa_{ij}\epsilon_0 E_j, \qquad i=x,y,z \tag{I-67}$$

（關于本節所討論各項目，可參閱L. Loeb 所著之 The Kinetic Theory of Gases, 第三版, chapter 10）

2）因極化分佈$\boldsymbol{P}$所產生之電位

由一個在r'點電偶極在r點所產生之電位，當$|r-r'$遠大於P之尺度（dimension）時，吾人從（1）得知爲

$$V(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^3}(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{R}), \qquad \boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$$

$$=-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\boldsymbol{P}\cdot\nabla\left(\frac{1}{R}\right)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\boldsymbol{p}\cdot\nabla'\left(\frac{1}{R}\right) \tag{I-68}$$

∇與∇'之梯度算符，乃是分別對r和r'微分。

若極化分佈爲P，由（68）式可得

$$V_P(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')\cdot\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)d^3r'$$

$$=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\oint\!\!\!\oint_S \frac{1}{R}\boldsymbol{P}\cdot d\boldsymbol{S}'-\iiint_V \frac{1}{R}\,div\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')d^3r'\right\} \tag{I-69}$$

S乃是介電質體積V之邊界面。玆將（69）與（6），（7）兩式（由于體積及面的電荷分佈所生之電位）

$$V(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\oint\!\!\!\oint_S \frac{\sigma\cdot d\boldsymbol{S}'}{R}-\iiint_V \frac{1}{R}\rho d^3r'\right\} \quad (\text{I}-70)$$

相比，則見：(69)式右邊第一項的P_n，相當於一個表面電荷σ_p所生之電位，而第二項$div\,\boldsymbol{P}$ 相當于體積電荷σ_p所生之電位，

$$\sigma_p=P_n, \text{與} d\boldsymbol{S}\text{垂直之分量} \quad (\text{I}-71a)$$

$$\rho_p=-div\,\boldsymbol{P}, \quad (\text{I}-71b)$$

σ_p, ρ_p可視爲"束縛電荷"(bound charges)，而σ，ρ乃係"自由"電荷。

玆再回看（65）式是否須加以較正。電介質$\boldsymbol{r}$處之極化情形，乃視$\boldsymbol{r}$處電場之總和而定。而該處之電場可視爲由兩部構成：(1) 巨觀現象理論所用之平均電場，及(2) 電介質的分子經極化後，所產生的"局部電場" $\boldsymbol{E}_{loc}(\mathrm{r})$。欲求 $\boldsymbol{E}_{loc}$，（如圖所示）可計算來自兩個區域之電場（i）以$\boldsymbol{r}$爲中心的一個球之外分子，該球體積，以巨觀看是極小的但仍足容下許多分子，和（ii）球內之分子。(i) 的部份，乃來自相當於P_n的表面電荷密度$\sigma_p=P_n$，（見(71a)，P_n乃指向$\boldsymbol{r}$的法線分量)。由 (70)，吾人可得此部份之電位 $\boldsymbol{E}_{loc}$



$$\boldsymbol{E}_{loc}=\frac{1}{3\epsilon_0}\boldsymbol{P} \quad (\text{I}-72)$$

(ii) 部份來自鄰近的分子，不易計算，惟如分子的排列有高度之對稱性如簡單立體正方晶體等，按 Lorentz 的理論，(ii) 部份實爲零。我們通常假設 (ii) 之等於零的。

(66) 式中若取 $\boldsymbol{p}_0=0$ (即電介質無永久電偶)。(65a),(66) 將由下式取代

$$\boldsymbol{P}=N\alpha\epsilon_0(\boldsymbol{E}+\frac{\boldsymbol{P}}{3\epsilon_0}) \qquad (\text{I}-73a)$$

$$\boldsymbol{P}=\kappa\epsilon_0\,\boldsymbol{E} \qquad (\text{I}-73b)$$

如定義介質係數 (permittivity) 爲

$$\epsilon=(1+\kappa)\epsilon_0, \qquad (\text{I}-73c)$$

則

$$N\alpha=\frac{3(\epsilon-\epsilon_0)}{\epsilon+2\epsilon_0} \qquad (\text{I}-74a)$$

(74a) 稱爲 Clausius-Mossotti 式。該式係每單位體積分子密度 N，分子極化率 α，與介電係數 ϵ 之關係。

若在 (66) 式中保留 $\boldsymbol{p}_0$，由 (64b)，立即可證明 (74a) 變爲下式

$$N(\alpha+\frac{\boldsymbol{p}_0^2}{3kT\epsilon_0})=\frac{3(\epsilon-\epsilon_0)}{\epsilon+2\epsilon_0} \qquad (\text{I}-74b)$$

3) 位移場 $\boldsymbol{D}$ 之邊界條件

若應用 (18) 式 (Coulomb 定律之 Gauss 形式) 于電介質，其右邊之自由電荷密度，須再加上經極化所產生之束縛電荷密度 ρ_p，故 (18) 式應寫爲

$$div\ \epsilon_0 \boldsymbol{E} = \rho + \rho_p \qquad (\text{I}-75)$$

因$\boldsymbol{E}$仍可由一純量電位微分而得，即（69）式及（70）式之$V+V_p$，故

$$\nabla \times \epsilon_0 \boldsymbol{E} = 0 \qquad (\text{I}-76)$$

現定義一個重要的，新的向量"位移場"$\boldsymbol{D}$爲

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \qquad (\text{I}-77)$$

$\boldsymbol{D}$與$\epsilon\boldsymbol{E}$的因次相同。由 Coulomb 定律之 Gauss 形式得

$$\iiint div\ \boldsymbol{E}\, d^3\boldsymbol{r} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint (\rho + \rho_p) d^3\boldsymbol{r} \qquad (\text{I}-78)$$

由（77），（78），（71b），即得*

$$div\ \boldsymbol{D} = \rho \qquad (\text{I}-79)$$

注意，這裡ρ祇係"自由"電荷密度。電介質之特性（如極化$\boldsymbol{P}$則包含于$\boldsymbol{D}$之內。在眞空，$\boldsymbol{P}=0$, 故$\boldsymbol{D}=\epsilon_0\boldsymbol{E}$。但在一般介電質中，$P$與$\boldsymbol{E}$之方向，可相同，亦可不同，故$\boldsymbol{D}$及$\boldsymbol{E}$的方向可不同。見下文。

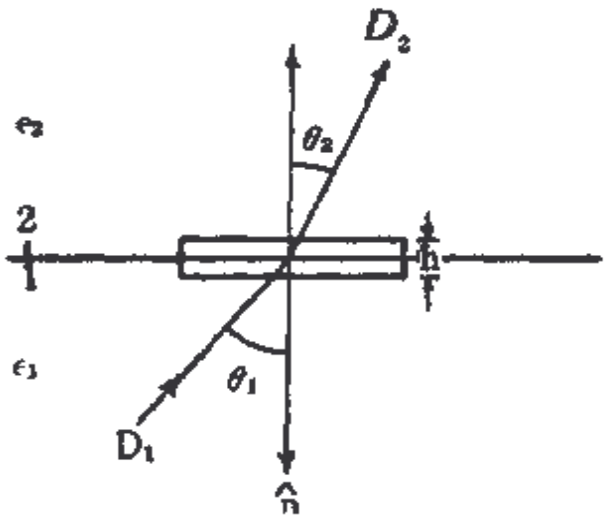
*吾人可定義表面divergence Div爲

$$DivD = (D_2 - D_1)_n \qquad (\text{I}-83)$$

$$DivD = \sigma, \qquad \sigma = \text{自由電荷表面密度} \qquad (\text{I}-84)$$

$$Div\epsilon E = \sigma \qquad (\text{I}-85)$$

處理電介質問題時，吾人必將遇到兩個不同電介質之邊界問題。設有兩個不同電介質 1 和 2（如圖所示），它們表面之自



由電荷密度爲σ。如有一跨過邊界面之小葯盒子（pill box）其高度爲h，表面積爲S。今應用Gauss 定理於該盒體積V。從（79）式，可得

$$\iint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}=\iiint_V \rho d^3r \qquad (\text{I}-80)$$

在$h\to 0$的極限情況下，即得

$$D_2\cos\theta_2-D_1\cos\theta_1=\sigma \qquad (\text{I}-81)$$

或 $$(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)_n=\sigma$$

如兩電介質邊界無自由電荷，則在該邊界上，$\boldsymbol{D}$之法線分量是連續的，

$$D_2\cos\theta_2-D_1\cos\theta_1=0 \qquad (\text{I}-82)$$

（4）電介質中之電場$\boldsymbol{E}$

由（77）及（66）式，已知

$$\boldsymbol{D}=(1+\kappa)\epsilon_0\boldsymbol{E}\equiv k\epsilon_0\boldsymbol{E} \qquad (\text{I}-86)$$

$k\epsilon_0\equiv(1+\kappa)\epsilon_0$稱介電係數。$k$(有時亦寫爲$\epsilon=\epsilon_0 k$）稱爲介電常數（dielectric constant），k可爲純量，或張量，視電介質之性質而定。

由（86）和（79）式中，可見電介質中之場電$\boldsymbol{E}$比其在眞空中減小了k倍。這乃由於電介質經極化後產生了一些相當於“束

縛"電荷（71a, b）之故。

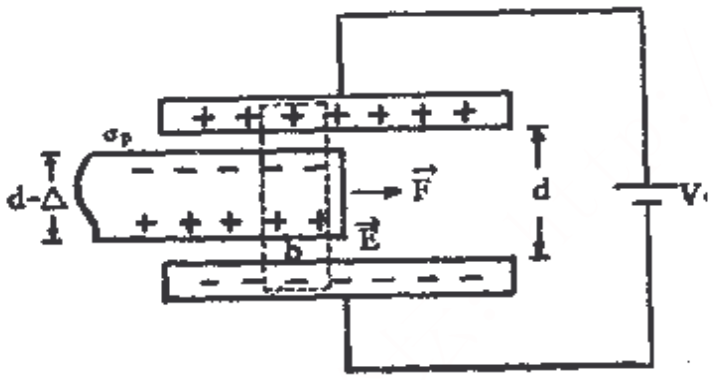
下例可說明電介質中D與E之關係，及兩電介質之邊界問題

今有一電位差V之電池，串接于一平行板之電容器。若電容器之介質爲眞空，則在兩板間的電場應爲

$$E=\frac{V}{d},\qquad d=\text{兩板間之距離。}$$

由 Gauss 定理，

$$E=\frac{\sigma}{\epsilon_0},\qquad \sigma\text{爲板上之自由電荷密度，}$$



如圖所示，今於兩板之間挿入一介電質片，該片厚度爲$d-\Delta$。設現表面電荷密度爲$\sigma+\sigma_p$，σ_p爲該片上之極化（束縛）電荷密度。在空隙裡Δ（$\Delta\to 0$），其E爲

$$E=\frac{1}{\epsilon_0}(\sigma+\sigma_p)\qquad (\text{I}-87)$$

但在該片裡之電場仍爲$E=\frac{V}{d}$，與挿入之前是完全一樣。這乃由於將一個電荷跨過電容器之兩板時，需要作的功仍爲$eV=eEd$之故。今電場乃由所有電荷（自由與束縛）所產生，即

$$\epsilon_0 E=\underset{\text{板上}}{(\sigma+\sigma_p)}+\underset{\text{片上}}{(-\sigma_p)}=\sigma\qquad (\text{I}-88)$$

結果與上述完全一致。

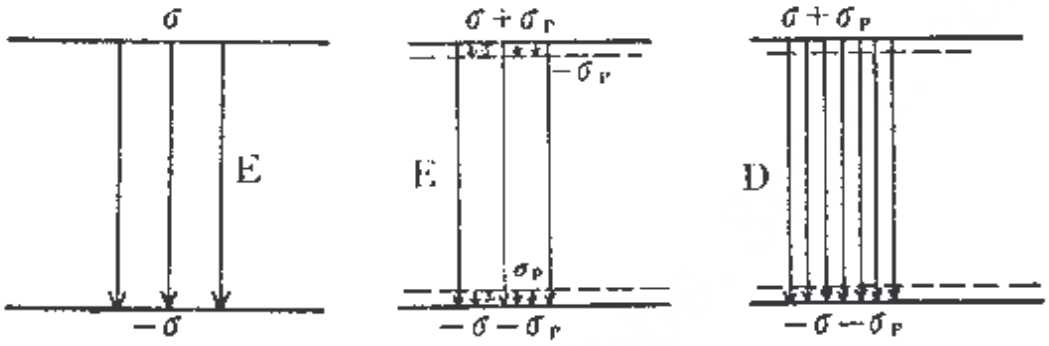
但$\boldsymbol{D}$却只由板上自由電荷而來，故

$$\boldsymbol{D}=(\sigma+\sigma_p)_{\text{板上}}$$

此值從空隙至電介質片是有連續性的。

欲說明上述之結果，請參閱$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{D}$之電力線略圖。

無電介質時　　有電介質時　$\kappa=1+x=3$



$$\boldsymbol{D}=3\epsilon_0\boldsymbol{E}\quad\text{（由電容器板上之自由電荷）}$$

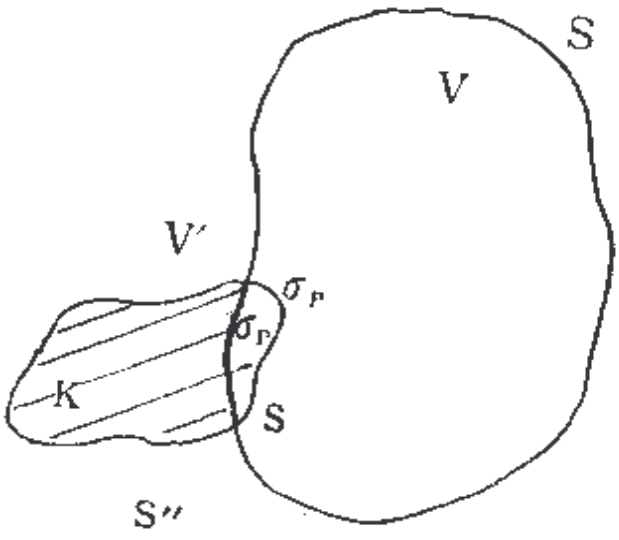
$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{3}\boldsymbol{D}\quad\text{（由所有之電荷 }\sigma=(\sigma_p+\sigma)-\sigma_p$$

$$\sigma+\sigma_p=(1+\kappa)\sigma=3\sigma)$$

在（78）式，如應用 Gauss 定理於 S 面上，

$$\oiint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{1}{\epsilon_0}(\Sigma q+Q_p)$$

S 面可以部份或全部在電介質裡，Q_p 乃包括所有在 S 面內之體



積與表面極化電荷。例如下圖所示；設S''乃是S面在電介質內之一部份，而S'乃是電介質表面在體積V內的部份。則

$$Q_p = \iiint_V \rho_p \, d^3r + \iint_{S'} \sigma_p dS$$

$$= \iiint_{V'} \rho_p \, d^3r + \iint_{S'} \sigma_p dS$$

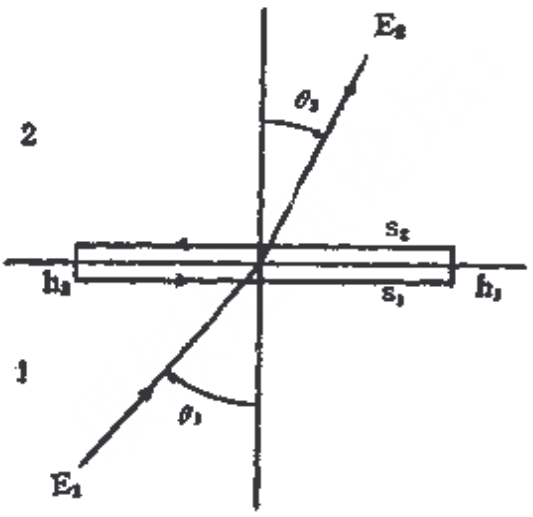
$$= -\iiint_{V'} div\, \boldsymbol{P} d^3r + \iint_{S'} \boldsymbol{P}\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$= -\iint_{S+S'} \boldsymbol{P}\cdot d\boldsymbol{S} + \iint_{S'} \boldsymbol{P}\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$= -\iint_{S''} \boldsymbol{P}\cdot d\boldsymbol{S} = -\iint_{S} \boldsymbol{P}\cdot d\boldsymbol{S}$$

如S面的其餘部份均不在任何其他電介質內。

$\boldsymbol{E}$在兩電介質之邊界條件，可由其定義及 Stokes 定理求得。設有 1 及 2 兩介體，如圖所示。設將一電荷Q沿着跨邊界面上之長方形曲線上行走時，因$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$，故該電荷回至原點，其所作之功爲零。若$h_1, h_2 \to 0$，而$|s_1| \to |s_2|$則由 Stokes 定理，可得



$$E_1 \sin\theta_1 = E_2 \sin\theta_2 \qquad (\text{I}-89)$$

在無向性之電介質情形下，$\boldsymbol{D}_1, \boldsymbol{D}_2$分別與$\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2$平行，

$$\boldsymbol{D}_1 = k_1 \boldsymbol{E}_1, \qquad \boldsymbol{D}_2 = k_2 \boldsymbol{E}_2$$

由 (82) 式，可得

$$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}=\frac{k_1}{k_2} \qquad (\text{I}-90)$$

此乃D之折射定律。設$k_1>k_2$（如由電介質至空氣）如上圖所示，$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{E})$之方向偏於法線之方向。此與光之折射方向適相反。

（Ⅱ）電介質中之場能

由（21）式，已知一群之電荷，其場能可由下式表示之；

$$W=\frac{1}{2}\iiint_{\nu}\rho(\boldsymbol{r})V(\boldsymbol{r})\,d^3r \qquad (\text{I}-21)$$

此積分乃伸展至整個的空間。

由 Coulomb 定律，在（79）式已知

$$div\boldsymbol{D}=\rho$$

ρ乃是自由電荷密度。因此

$$W=\frac{1}{2}\iiint V\,div\,\boldsymbol{D}\,d^3r=\frac{1}{2}\iint_{S}V\,\boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$-\frac{1}{2}\iiint(\boldsymbol{D}\cdot grad\ V)d^3r=\frac{1}{2}\iiint_{\nu}(D\cdot\boldsymbol{E})\,d^3r \qquad (\text{I}-91)$$

上式也可認爲是電介質中之場能。如當S趨於無窮遠時，V及D之值迅速趨近於0則上式之面積分等于零。

習題：一均勻帶電荷之電介質之球，其半徑爲a，其總電荷爲Q。證明在$r(<a)$點之電位爲

$$4\pi\epsilon_0V(r)=\frac{Q}{r}\left(\frac{r}{a}\right)^3+\frac{3Q}{4\pi a^3}\int_r^a 4\pi r dr\ 。$$

1）電介質上機械力 (Mechanical forces on a dielectric)

由 (91)，(79)，(86) 等式，已知介電質中之場能爲

$$W=\frac{1}{2}\iiint_V \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\,d^3r$$

$$div\boldsymbol{D}=\rho$$

$$\mathbf{D}=k\epsilon_0\boldsymbol{E},\ [k=1+\kappa,\ \boldsymbol{P}=\kappa\epsilon_0\boldsymbol{E}]$$

因此，電介質之狀態可完全由 ρ 和些予以確定。玆假設下述介電質乃是各向同性的，故 k 乃一純量（非張量）。

設 $\delta s(\delta x, \delta y, \delta z)$ 乃物體的一點（x, y, z）在場中之位移，並設作用在單位體積電介質上之力爲 $\boldsymbol{F}(F_x, F_y, F_z)$。能量之減低，乃由作功之能，或

$$\delta W=-\iiint_V(\boldsymbol{F}\cdot\delta\boldsymbol{s})d^3r$$

$$=-(\iiint F_x\delta x+F_y\delta y+F_z\delta z)d^3r \qquad (\text{I-92})$$

但該位移（由點 1 至點 2）能量改變應爲

$$\delta W=\frac{1}{2}\iiint_V(\boldsymbol{E}_2\cdot\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{D}_1)d^3r \qquad (\text{I-93})$$

又　$$\delta W=\frac{\partial W}{\partial\rho}\delta\rho+\frac{\partial W}{\partial k}\delta k$$

$$=(\delta W)_k+(\delta W)_\rho \qquad (\text{I-94})$$

若欲求 $(\delta W)_k$，〔即只 ρ 改變而 k 保持常數值〕，則 $\frac{D_2}{E_2}=\frac{D_1}{E_1}$

且　$$(\boldsymbol{E}_2\cdot\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{D}_1)=(\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2)\cdot(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)=2\boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{D}$$

$$\boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{D}=-\nabla V\cdot\delta\boldsymbol{D}=-div(V\delta\boldsymbol{D})+V div\delta\boldsymbol{D}$$

故可得　$$(\delta W)_k=\iiint V div\delta\boldsymbol{D}d^3r=\iiint V\,\delta\rho\,d^3r \qquad (\text{I-95})$$

若欲求 $(\delta W)_\rho$，〔只 k 改變，而 $\delta\rho=div\delta\boldsymbol{D}=0$〕，由 Gauss 定理，得知

$$0=\iint V\delta\boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}=\iiint div\ (V\delta\boldsymbol{D})d^3r$$
$$=\iiint(V div\delta\boldsymbol{D}+\nabla V\cdot\delta\boldsymbol{D})d^3r=-\iiint\boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{D}\,d^3r$$

但　$\boldsymbol{E}_2\cdot\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{D}_1=(\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2)\cdot(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)$
$+(\boldsymbol{E}_2\cdot\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{D}_2)$

因此　$(\delta W)_\rho=\frac{1}{2}\iiint(\boldsymbol{E}_2\cdot\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{D}_2)d^3r$

$$=-\frac{1}{2}\iiint(k_2-k_1)\,\epsilon_0\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{E}_2d^3r$$

$$=-\frac{1}{2}\iiint\epsilon_0E^2\delta k\,d^3r$$

在 $d\boldsymbol{s}$ 位移時，電荷密度 ρ 是固定于電介質中的，故有連續方程式

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+div(\rho\frac{d\boldsymbol{s}}{dt})=0$$

由此可得

$$\delta\rho=-\ div(\rho\delta\boldsymbol{s})\qquad(\text{I}-97)$$

欲計算 δk，同理可用

$$\frac{dk}{dt}=\frac{\partial k}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\Delta k\ ,\quad \boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{s}}{dt}\qquad(\text{I}-98)$$

設 σ 乃是滿足連續方程式之物質密度，故

$$\frac{\partial\sigma}{dt}=-div\,(\sigma\boldsymbol{v})$$

或　$\frac{d\sigma}{dt}=-\sigma div\boldsymbol{v}$ 。

因此　$$\frac{dk}{dt}=\frac{dk}{d\sigma}\ \frac{d\sigma}{dt}=-\sigma div\boldsymbol{v}\frac{dk}{d\sigma}\qquad(\text{I}-99)$$

且　$$\frac{\partial k}{\partial t}=-\boldsymbol{v}\cdot\nabla k-\sigma div\,\boldsymbol{v}\frac{dk}{d\sigma}$$

或　$$\delta k=-\nabla k\cdot\delta\boldsymbol{s}-\sigma\frac{dk}{d\sigma}div\delta\boldsymbol{s}$$

最後，可得

$$\delta W=-\iiint V div(\rho\delta\boldsymbol{s})d^3r+\frac{1}{2}\iiint\epsilon_0E^2(\nabla k\cdot\vec{\delta s}$$

$$+\sigma\frac{dk}{d\sigma}div\delta\boldsymbol{s})d^3r$$

用（1）式及 Gauss 定理，可得

$$\delta W=\iiint\left\{\rho(\nabla V\cdot\delta\boldsymbol{s})+\frac{1}{2}\epsilon_0E^2(\nabla k\cdot\delta\boldsymbol{s})\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\epsilon_0\nabla(E^2\frac{dk}{d\sigma}\sigma)\cdot\delta\boldsymbol{s}\right\}d^3r\qquad(\text{I}-100)$$

若與　$\delta W=-\iiint\boldsymbol{F}\cdot\delta\boldsymbol{s}\,d^3r$ 相比，則得

$$\boldsymbol{F}=\rho\boldsymbol{E}-\frac{1}{2}\epsilon_0E^2\nabla k+\frac{1}{2}\epsilon_0\nabla(E^2\frac{dk}{d\sigma}\sigma)\qquad(\text{I}-101)$$

由此可知，作用於每單位體積之電介質之機械力，可分爲三部份；(i)$\rho\boldsymbol{E}$乃是$\boldsymbol{E}$作用在ρ上之力，(ii)$-\frac{1}{2}\epsilon_0E^2\Delta k$。在電介質爲空氣所包圍情形下，此力指向電介質之外向法線，(iii) 最後一項。一般而言，$\frac{dk}{d\sigma}>0$故$-\frac{1}{2}\epsilon_0E^2\sigma\frac{dk}{d\sigma}\leq0$有如流體靜壓力。此項乃是由 Helmholtz 所導出，對電效伸縮現象，(electrostriction) 極爲重要。

2) 電介質中 Maxwell 應力 (Stress)

已知在電場$\boldsymbol{E}$作用下，電介質所受"體力"（body force）爲

(101)

$$\boldsymbol{F}=\rho\boldsymbol{E}-\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2\nabla k+\frac{1}{2}\epsilon_0\nabla\left(E^2\frac{dk}{d\sigma}\sigma\right)$$

Maxwell 認爲此力，可以作用於電介質之邊界面之表面力T（Surface force）替代之。此來自電場之應力，乃視爲由一媒體（以太）傳遞的。我們擬將作用於d^3r上之體力$\boldsymbol{F}$

$$\iiint F_x d^3r \cdot \qquad x=x,y,z \qquad (\text{I}-102)$$

變換成作用於d^3r之面dS之力T

$$\iint T_x dS \qquad (\text{I}-103)$$

欲覓此變換，玆假設一張量（tensor）T_{xx}，有下述之特性

；

$$F_x=\frac{\partial T_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial T_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial T_{xz}}{\partial z}\ ,$$

$$F_y=\frac{\partial T_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial T_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial T_{yz}}{\partial z}\ ,\quad (\text{或}F_i=\sum\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}\quad (\text{I}-104)$$

$$F_z=\frac{\partial T_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial T_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial T_{zz}}{\partial z}\ , \qquad i,j=x,y,z$$

$$x_j=x,y,z$$

則
$$\iiint F_x d^3r=\iiint\left(\frac{\partial T_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial T_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial T_{xz}}{\partial z}\right)d^3r$$

$$=\iint(\lambda T_{xx}+\mu T_{xy}+\nu T_{xz})dS,\ \text{等} \qquad (\text{I}-105)$$

上式用及 Gauss 定理，λ,μ,ν乃dS之法線與x,y,z三軸之間角度之餘弦。由上述，表面力應可寫成

$$T_x=\lambda T_{xx}+\mu T_{xy}+\nu T_{xz}$$

$$T_y=\lambda T_{yx}+\mu T_{yy}+\nu T_{yz}\ ,$$

$$T_z=\lambda T_{zx}+\mu T_{zy}+\nu T_{zz}$$

或
$$\begin{pmatrix}T_x\\T_y\\T_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}T_{xx}&T_{xy}&T_{xz}\\T_{yx}&T_{yy}&T_{yz}\\T_{zx}&T_{zy}&T_{zz}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\\mu\\\nu\end{pmatrix} \qquad (\text{I}-106)$$

使
$$\beta \equiv \frac{1}{k}\frac{dk}{d\sigma}\sigma$$

且由
$$\epsilon_0 E^2\nabla k=\nabla(\epsilon_0 E^2 k)-2(\boldsymbol{D}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}-2[\boldsymbol{D}\times curl\boldsymbol{E}]$$

$$\rho=div\boldsymbol{D}, \qquad curl\boldsymbol{E}=0,$$

我們可將F_x寫成下式;

$$F_x=E_x div\boldsymbol{D}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D})+(\boldsymbol{D}\cdot\nabla)E_x$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\beta\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E})$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(E_xD_x-\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot D+\frac{1}{2}\beta\boldsymbol{D}\boldsymbol{E}\cdot+\frac{\partial}{\partial y}(E_xD_y)+\frac{\partial}{\partial z}E_xD_z$$

同理可得F_y, F_z. 由這些式子，可見T_{ij}爲 $(\text{I}-107)$

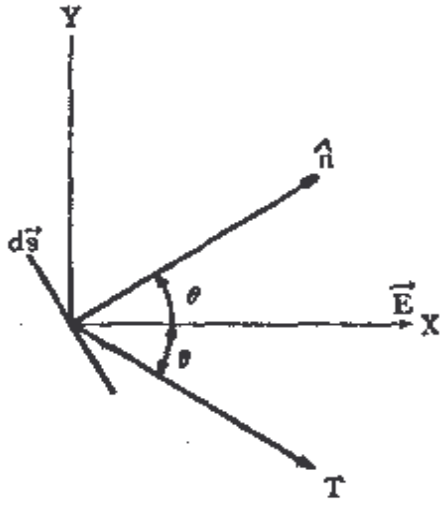
$$T_{ij}=\begin{vmatrix}\frac{k\epsilon_0}{2}(E_x^2-E_y^2-E_z^2+\beta E^2) & k\epsilon_0E_xE_y & k\epsilon_0E_xE_z\\ k\epsilon_0E_yE_x & \frac{k\epsilon_0}{2}(E_y^2-E_z^2-E_x^2+\beta E^2) & k\epsilon_0E_zE_y\\ k\epsilon_0E_zE_x & k\epsilon_0E_zE_y & \frac{k\epsilon_0}{2}(E_z^2-E_x^2-E_y^2+\beta E^2)\end{vmatrix}$$

$(\text{I}-108)$

含有β之項並非由 Maxwell 導出，乃是由 Helmholtz 加入的。

該項只出現于對角線上，顯示該力在各方向皆相等，因此有如一種流體靜壓力。眞空裡，$\beta=0$。

應力$\boldsymbol{T}$之特性，可由下列之情形見之：



(i) 如圖所示，取dS，n爲其單位法線向量。若E沿着x一軸，Z一軸與n垂直（故E軸切於dS）。在此情形下，$E_x=E, E_y=E_z=0$,

而 $$T_x=\frac{k\epsilon_0}{2}E^2\cos\theta$$

$$T_y=-\frac{k\epsilon_0}{2}E^2\sin\theta$$

$$T_z=0 \qquad (\text{I}-109)$$

故應力T與x軸之間夾角爲θ，在x軸之另一邊，n亦與該軸成一θ之夾角。故應力T在dS之法線方向上之分量爲$\frac{k\epsilon_0}{2}E^2\cos2\theta$

而在切線方向上爲$\frac{k\epsilon_0}{2}E^2\sin2\theta$。

(ii) 若$\theta=\frac{\pi}{4}$，則應力$\boldsymbol{T}$切於$\boldsymbol{dS}$，故爲純切應力（pure shearing stress）。

(iii) 若將dS繞Z軸旋轉，使n平行於E（即$\theta=0$），

則 $$T_x=\frac{k}{2}\epsilon_0E^2, \qquad T_y=T_z=0 \qquad (\text{I}-111)$$

此時T爲純張力。

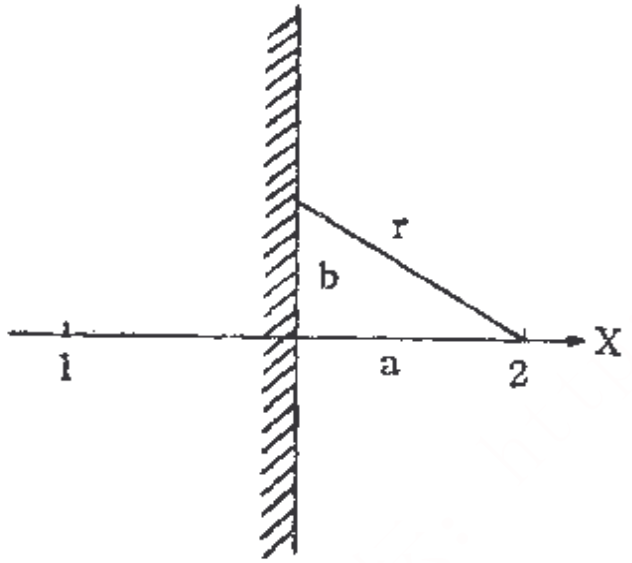
(iv) 若n垂直於E時。（即E切於dS），則

$$T_y=-\frac{k}{2}\epsilon_0 E^2, \qquad T_x=T_z=0 \tag{I-112}$$

此時T爲純壓力。

（v）若$\boldsymbol{E}$乃沿一$\boldsymbol{n}$方向（即$\theta=\pi$），則T爲純張力，與（iii）情形同。故$\boldsymbol{E}$之方向（即正負號）是無關重要的。

例 1：欲說明應力張量之應用，今取相距2a之兩相等電荷 e 爲例。



（如圖所示）由該兩電荷作用於對稱面之表面力總和T，乃作用於電荷"1"上之體力（body force）。今在對稱面上（y-z平面），

$$E_x=0,$$

$$E_y=\frac{2e}{4\pi k\epsilon_0 r^3}\,y,$$

$$E_z=\frac{2e}{4\pi k\epsilon_0 r^3}\,y,$$

而
$$\boldsymbol{F}=\iint T\,dS=\iint T_x\,ds=-\frac{1}{(4\pi)^3}\int_0^\infty \frac{2e^2b^2}{k\epsilon_0(a^2+b^2)^3}2\pi b\,db$$

$$=-\frac{e^2}{4\pi k\epsilon_0(2a)^2} \qquad \text{（壓力）} \tag{I-113}$$

此乃兩電荷之排拒力（參閱上面（iv））。

若今兩電荷正負相反，則

$$E_x=-\frac{2ea}{4\pi k\epsilon_0 r^3}, \qquad E_y=E_z=0$$

$$\boldsymbol{F}=\iint T\,dS=\iint T_x\,dS=\int_0^{\infty}\frac{2e^2a^2}{(4\pi)^2k\epsilon_0(a^2+b^2)^2}\,2\pi b\,db$$

$$=\frac{e^2}{4\pi k\epsilon_0(2a)^2}\qquad\text{(張力)}\qquad\text{(I-114)}$$

此乃該兩電荷之吸引力（參閱上面 (iii)）。

例 2：電介質中之帶電導體所受之力

因導體內之電場$\boldsymbol{E}$爲零，故導體內之應力亦爲零。但於其表面上，若電荷密度爲σ，其應力乃一純張力（因電場$\boldsymbol{E}$垂直於導體之表面，見上 (iii) 及 (iv) 情形)。故

$$T=\frac{k}{2}\epsilon_0E^2+\frac{1}{2}\epsilon_0\,S\frac{dk}{dS}\qquad(S\text{爲電介質中物質密度})$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{\sigma^2}{k\epsilon_0}+\frac{1}{2}\epsilon_0S\frac{dk}{dS}$$

習　題

1. 所謂双極層（double layer），乃係由兩層正及負電荷構成，其面密度爲 σ 及 $-\sigma$，二層之間隔距爲 d，其每單位雙極矩 u

$$u=\lim_{\substack{d\to 0\\ \sigma\to\infty}} \sigma d = \text{有限值}$$

u 稱爲双極層之强度。

試證在 r 點之電位 $V(r)$ 爲

$$V(r)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iint u(r')\cdot\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)dS, \qquad R=|r-r'|$$

$$=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iint u(r')\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)dS$$

$$=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iint u(r')d\Omega,$$

$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)$ 梯度皆取（由負至正號）自極矩的方向，$d\Omega$ 乃 dS 在 r 點（在双極層的正電方面）的立體角（solid angle）。

2. 試證由上題的双極層的負電面到正電面時，電位作一不連續的躍變，其變爲

$$V_+ - V_- = \frac{1}{\epsilon_0}u$$

並計算將一電子携經一双極層所需的能量(以電子伏計)。

該双極層的面密度爲每平方 $4\times10^{-8}cm$ 有一電子，其正電的密度亦同。兩層的間距爲$0.5\times10^{-8}cm$

3. Earnshaw 氏定理謂在一靜電場中，一個單獨電荷不可能的有一穩定平衡狀態。

（注：證明在一靜電場中，在任何一點，電位不可能是一最高或一最低値。）

4. 玆有一系集的電荷。試求此系集電荷在 r 點的電位V；證明該式中首二項之和（Coulomb 及双極項），與所採座標中心無關。

證明此系集電荷的極化强度（polarization），祇當總電荷爲零（卽系集爲中和的）時與座標中心的選擇無關。

5. 在空間$x>0$區，電場$\boldsymbol{E}$爲

$$E_x=2+x,\qquad E_y=3+y,\qquad E_z=3+z,$$

在$x<0$區域，

$$E_x=3y+4z-x,\quad E_y=3+y+z,\quad E_z=3+z-x,$$

試求在 $x=0$ 面上之電荷面密度，及任何點 r 的電荷密度。

6. 證明一在 r_1 點之電双極矩 p_1，與另一在 r_2 點之電双極矩 p_2 之交互作用爲

$$W=\frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^3}\left\{p_1\cdot p_2-\frac{3}{R^2}(p_1\cdot R)(p_2\cdot R)\right\},\quad R=r_1-r_1$$

（用（I-68），（I-62）式）。

7. 如兩電荷 e_1, e_2 的作用力係按下定律的

$$F=\frac{e_1e_2}{4\pi\epsilon_0 r^{2-\epsilon}},\quad |\epsilon|\ll 1,$$

試證 Cavendish 實驗（證明 Coulomb 反平方定律的）中，其內球的電荷Q爲

$$Q=\frac{2Vbc}{(b-a)}\left\{a\ ln\frac{4b^2}{b^2-a^2}-b\ ln\frac{a+b}{b-a}\right\}$$

a, b係內球及外球的半徑，V乃外球的電位。

8. 鄰近電荷的導體外一點P之電場E爲$\frac{\sigma}{\epsilon_0}$，$\sigma$爲電的面密度。證明此電場之一半，係來自$P$點鄰近的電荷，其他一半則係來自導體上所有他處的電荷。

電導體表面的垂直應力爲何（以σ表之）？玆有金箔一片，面積爲$10cm^2$，質量密度爲每 cm^2 $10^{-3}gm$，置于平面導體上。問如提該箔離起導體面，需若干$volt/cm$之電場E？其將携去電荷若干 Coulomb？

9. 一導電體連接于地。以一電荷Q，感應電于該導體。證明該導體上的感應電的絕對值，永小于Q。又設Q爲正電，證明電導體上各處的感應電面密度，皆是負的。

10. 一平行面的電容器，兩面的間距爲d，接連于一電瓶，使兩面的電位差，恒爲V常值。容器中的電能量密度爲$u_0=\frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2=\frac{1}{2}\epsilon_0\left(\frac{V}{d}\right)^2$。

現將一電介體引入電容器間，電介體的介電常數$k=$

$1+\kappa$。證明電能密度爲 $u=\frac{1}{2}k\epsilon_0 E_0^2$，並證明電瓶所供給的能量（每單位體積）爲

$$W=(k-1)\epsilon_0 E_0^2$$

問其他的部份

$$W-(u-u_0)=\frac{1}{2}(k-1)\epsilon_0 E_0^2$$

之能，歸於何處？

11. 如上題之電容器于接連電瓶後卽拆離之，繼乃引入電介體。證明電能密度減量爲

$$u_0-u'=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{k}\right)\epsilon_0 E_0^2。$$

又證明此減量，乃耗于電介體之極化（ polarization ）

$$u_P=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{k}\right)\frac{\epsilon_0}{k}E_1^2 \qquad \text{（每單位體積）}$$

及牽入電介體至電容器所作之功。

又　$u-u_P=\frac{1}{2}\epsilon_0\left(\frac{E_0}{k}\right)^2$

之意義爲何？

12. 一球狀電容器由二同心球面構成，其半徑爲a，b $(a<b)$。二球面之間，盛有二個同心層的電介體，在$a<r<c$間的，其電介常數爲 k_1，在 $c<r<b$ 間者爲k_2，證明此電容器之電容量 $C=\frac{Q}{V}$爲

$$4\pi\epsilon_0\frac{1}{C}=\frac{1}{k_2a}-\frac{1}{k_2b}+\frac{1}{C}\left(\frac{1}{k_2}-\frac{1}{k_1}\right)。$$

13. 玆有二封閉的等電位面，$V=V_1$者包括$V=V_2$的。設V_P係二面間一P點之電位。玆置一電荷于P點，而將二等位面換以導電體片且接連于地。證明在兩導電面上的感應電荷Q_1, Q_2爲

$$\frac{Q_1}{V_2-V_P}=\frac{Q_2}{V_P-V_1}=\frac{Q}{V_1-V_2}$$

14. 設A爲任一在體積V，表面S之空間中連續且有限值的向量函數。試證明以下定理

$$\iiint curl\boldsymbol{A}d^3r=-\iint_S[\boldsymbol{A}\times d\boldsymbol{S}]$$

注：引用以下恆等式

$$div[\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{A}]=-(\boldsymbol{K}\cdot curl\boldsymbol{A}),$$

$\boldsymbol{K}$爲任何常數向量。

15. 設一電介體之自由電荷密度$\rho=0$，故第（I-75），（I-71b）式得

$$div(\epsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P})=0$$

使ϕ爲純量電位，$\boldsymbol{E}=-\nabla\phi$，並引入"極化位"（polarization potential）Π

$$\phi=-div\Pi$$

證明 $\Pi(r)$可由極化P函數按下式求得

$$\Pi(r)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint\frac{1}{|r-r'|}P(r')d^3r'$$

第 二 章

靜電學——場位理論

前章述及，靜電學之基本定律乃 Coulomb 定律，此定律與疊加原理及 Gauss 定理，可以（Ⅰ-18） Poisson 方程式表示之，

$$\nabla^2 V = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(r), \qquad (\text{Ⅱ-1})$$

$\rho(r)$乃 r 處之電荷密度。若於任何點 $\rho(r)=0$, 則（1）式即化成 Laplace 方程式

$$\nabla^2 V = 0 \qquad (\text{Ⅱ-2})$$

靜電學中的許多問題在求電位V，由V可以下式求電場$\vec{E}$，

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V \qquad (\text{Ⅱ-3})$$

問題常是已知 $\rho(r)$ 及V之邊界條件，例如已知在特定封閉面上每一點之V或$\frac{\partial V}{\partial \hat{n}}$(法線微分值)。該封閉面可包括在場裡之導體等之表面，及以無窮大之球面。這類問題的研究，構成“位之理論” (theory of potential)。

1. 邊界值問題之"唯一性定理" (Uniqueness theorems)

場位理論的最基本原理乃唯一性定理及存在定理 (existence theorem)。如我們假定上述的問題之解是存在的，則欲證明唯一性定理，是很容易的。欲證明該定理，吾人將引用下述之。Green 定理。

按Gauss divergence 定理，任若有一向量函數A，皆滿足下式

$$\oiint \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}=\iiint_v div\boldsymbol{A}\,d^3r$$

若使

$$\boldsymbol{A}=\phi\,\boldsymbol{B}$$

ϕ是純量，而$\boldsymbol{B}$是一向量函數，則得

$$div\boldsymbol{A}=\phi\,div\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\cdot grad\,\phi$$

若B本身乃是純量函數之梯度值時，

$$B=grad\,\phi$$

則
$$div(\phi\,grad\,\phi)=\phi\,\nabla^2\phi+\nabla\phi\cdot\nabla\phi$$

由 Gauss 定理，得知

$$\oiint_s(\phi\,grad\,\phi)\cdot d\boldsymbol{S}=\iiint_v(\phi\nabla^2\phi+\nabla\phi\cdot\nabla\phi)d^3r \qquad (\text{Ⅱ}-4)$$

同理，

$$\oiint(\psi\,grad\,\phi)\cdot d\boldsymbol{S}=\iiint_v(\psi\nabla^2\phi+\nabla\phi\cdot\nabla\psi)d^3r \qquad (\text{Ⅱ}-5)$$

因此

$$\iiint_v(\phi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\phi)d^3r=\iint_s\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)\cdot dS \quad (\text{Ⅱ-6})$$

此處法線微分方向，係採用在 dS 面上向外之法線方向。(4), (5), (6) 乃兩個純量函數之 Green 定理的各不同形式。Green 定理不僅在電位理論極爲重要，即在熱傳導與引力等問題亦然。

定理 1：若已知有一函數 V 滿足 (1) 式，且滿足在空間 v 區域之邊界面 S 上每一點所指定之 V 之值，則該函數是唯一的。**證明**：首先，假設今有兩個不同的函數 V_1 和 V_2，皆滿足 (1) 式，且亦滿足在 S 面之邊界條件，則

$$V_1=V_2, \quad \text{在 } S \text{ 面。} \qquad (\text{Ⅱ-7})$$

在 Green 定理 (4)，使

$$V=V_1-V_2, \quad \phi=\psi=V$$

則面積分爲零，且

$$\iiint_v\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right\}d^3r=0$$

但上式祇有當在所有空間 v 皆有

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{\partial V}{\partial z}=0$$

亦即 $V=$常數，

時，可以成立。但於 S 面上，$V=V_1-V_2=0$。因此在所有 v 空間裡，$V=0$ 故 V_1 和 V_2 是同一的。

定理 2：若有一函數 V，滿足 (1) 式，亦滿足在空間 v 區域裡之邊界面 S 上之每一點所指定之 $\frac{\partial V}{\partial n}$ 之值，則該函數 V 是唯一

的。

證明：若今有兩函數 V_1 和 V_2，在 S 面上

$$\frac{\partial V_1}{\partial n}=\frac{\partial V_2}{\partial n} \qquad (\text{II}-8)$$

用同上定理法可證明在所有 v 空間裡，V_1 和 V_2 是相等的。

這些唯一性定理是非常實用的。因爲，假使吾人能使用某些特殊、簡便方法求得 Poisson 方程式一個解，滿足上述兩定理中之任一邊界條件的，則此解必是該問題唯一之解。故這兩個定理，乃下文第 3 節之像法和倒轉法 (Image and Inversion) 等理論的根據。

若已知邊界面 S 上之所有點 V 之值，則此類邊界問題稱爲 Dirichlet 問題。如已知邊界面 S 上之所有點 $\frac{\partial V}{\partial n}$ 之值，則此類邊界問題稱爲 Neumann 問題。注意：此處 S 面必爲一封閉面，否則上述證明所採用的 Gauss 和 Green 定理，即不成立。用證明上兩定理之方法，吾人將可立即證明下一定理。

定理 3：若有一函數 V，滿足 (1) 式，亦滿足在空間區域裡 v 之邊界 S 之一部份 S_1 上 V 之值，及其餘 $S-S_1$ 面上每一點 $\frac{\partial V}{\partial n}$ 之值，則函數 V 是唯一的。

上述兩個邊界條件之一，已完全定了 V 之唯一解，故吾人不能同時任意指定 V 及 $\frac{\partial V}{\partial n}$ 在 $\hat{S}$ 面上之值。

最後，吾人欲畧提關於 Laplace 方程式及在封閉面之邊界條件之解的存在之數學問題。Dirichelet, Lord Kelvin Riemann

等的"證明"略如下。設 $u(x, y, z)$ 爲一函數，在空間 v 內所有點是均勻，有限和連續的，並滿足在 S 面上之指定值，且使下列積分

$$I=\iiint_v\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}d^3r=\text{最小值}$$

此積分必爲正值。由於上述之條件，吾人務須除去 $u=$常數的情形，故 I 不等於零。由變分問題

$$\delta I=0,\quad \delta u=0 \quad \text{於 } S \text{ 面上}$$

可導出 Euler 方程式。在此情形下即爲 Laplace 方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0。$$

事實上，該證明已暗中假設函數 u 之存在性，使 I 爲最小值。Weierstrass, Kronecker 等數學家皆認這證是錯誤的。但是由物理上所有已知的問題，對於 Laplace 方程式之解的存在，是無庸置疑的。吾人將假設有解的存在。

場位理論裡，吾人也時常會碰到下面之一般性問題；設 V(x, y, z) 係滿足 Laplace 方程式之函數。是否有一群以 λ 爲參數之面

$$F(x, y, z, \lambda)=0 \qquad (\text{II}-9)$$

之等位面存在？該問題是由 Lamé 予以回答。假如有這些面存在，則

$$V=V(\lambda)$$

並且

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{dV}{d\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x},\ \text{等等}$$

以致

$$\nabla^2 V=\nabla^2\lambda\frac{dV}{d\lambda}+\frac{d^2V}{d\lambda^2}(grad\lambda)^2$$

或

$$\frac{\nabla^2\lambda}{(grad\lambda)^2}=-\frac{d}{d\lambda}ln\left(\frac{dV}{d\lambda}\right)$$

$$=V(\lambda) \qquad (\text{Ⅱ}-10)$$

這裡 $V(\lambda)$ 只是 λ 之函數。這係使 (9) 式爲一群之等位面必要條件。下文第 6 節橢圓球問題中將舉一例。

2. Poisson 方程式之解: Green 函数

按一般微分方程式理論，若有一非齊次之微分方程

如

$$\nabla^2 V=-\frac{1}{\epsilon_0}\rho \qquad (\text{Ⅱ}-1)$$

則其 V 之解，乃非齊次方程之一個特別積分 (particular integral) 加上輔助函數 (complementary function) (即其齊次方程之解，如在 (1) 的情形，即係 $\nabla^2 V=0$ 之解)。

欲尋 (1) 式之特別積分，設 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 爲下述方程式之解

$$\nabla^2 G=-\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \qquad (\text{Ⅱ}-11)$$

$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 稱爲 Green 函數。$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$爲一奇數函數 (singular function)，具有下述特性;

一維空間,

$$\delta(x-x')=\begin{cases}\infty & \text{當 } x-x'=0,\\ 0 & \text{當 } x-x'\neq 0,\end{cases} \qquad (\text{Ⅱ-12a})$$

$$\int_a^b \delta(x-x')dx=1, \quad \text{當 } a<x'<b,$$

$$\int_a^b f(x)\delta(x-x')dx=f(x'), \text{於} a<x'<b,$$

三維空間，

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')$$

$$\iiint_v \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')d^3r=1, \quad \boldsymbol{r}'\text{位在} v \text{之內時}, \qquad (\text{Ⅱ-12b})$$

$$\iiint_v f(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')d^3\boldsymbol{r}=f(\boldsymbol{r}') \quad \text{當 } \boldsymbol{r}' \text{ 位在 } \boldsymbol{v} \text{ 之內時。}$$

此 δ 函數係 Paul A. M. Dirac 首次引用于量子力學，在近代文獻中稱爲 Dirac δ 函數。但此函數亦曾出現於舊的文獻中（在負載分佈中的一個點的負載）；被稱爲 *Zag* 函數。

在解微分方程式時，函數G是極有用的。它不僅於此處來解靜電學上之問題，且亦用來解熱傳導與量子力學上之問題。在目前的問題中，我們很易的證明以下的函數V

$$V(\boldsymbol{r})=-\frac{1}{\epsilon_0}\iiint_v G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')d^3\boldsymbol{r}' \qquad (\text{Ⅱ-13})$$

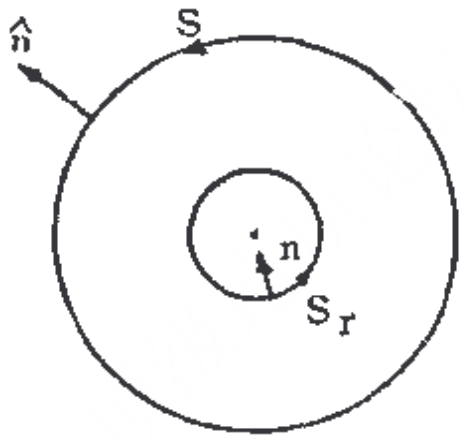
乃（1）或在空間區域v之解。欲求 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$，由（11）式可見除了 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$ 點爲不連續點外，$\dfrac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$乃是（11）式之解。故一個簡單的（但不是唯一的）選擇係

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\frac{1}{4\pi R}, \quad \boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'。 \qquad (\text{Ⅱ-14})$$

由（14）式，則（1）之特別積分爲

$$V(r)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint\frac{1}{R}\rho(r')d^3r' \qquad (\text{Ⅱ}-15)$$

但吾人亦可藉（6）式之 Green 定理，以求得（1）式之完全積分（解）。設 $\phi=V$，V 爲所欲求之電位，又設 $\phi=G(r,r')$ 它的形式尙未加以特定。因 $G(r,r')$ 除在 $r=r'$ 之點外，在其他點皆滿足 Laplace 方程式，故若以 r 點爲球心，以 a 爲半徑，作一小球，其體積爲 v_r，其表面積爲 $4\pi a^2$。在 $v-v_r$ 之空間裡的所有點，$G(r,r')$ 皆滿足 Laplace 方程式。今（6）式之面積，要分作兩部，其一爲 v 之"外"表面，其它則爲"內"表面 S_r（如圖所示）。面積分之 dS 之法線方向，乃永是向外的（由 $v-v_r$ 的觀點看）。故（6）卽可化爲



$$\iiint_{v-v_r}G\nabla'^2(r')d^3r'=\oiint_{S+S_r}\left(G\frac{\partial V(r')}{\partial\hat{n}}-V(r')\frac{\partial G}{\partial n}\right)\cdot dS \qquad (\text{Ⅱ}-16)$$

但在 $v-v_r'$ 之空間裡，$\nabla'^2V(r')=-\dfrac{\rho(r')}{\epsilon_0}$。對內表面 S_r，該積分（16）可以計算之。吾人可選擇 Green 函數使其滿足 V 之

邊界條件。今設 $G(\boldsymbol{r},'\boldsymbol{r}')$ 之形式爲

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}+W \qquad (\text{Ⅱ}-17)$$

這裡W係一諧函數（即在v中滿足 Laplace 方程式，且有限又連續的）。如記着在 dS_i 的法線的方向，即得

$$\frac{\partial V(\boldsymbol{r}')}{\partial n}=-\frac{\partial V}{\partial R}\Big|_{R=a},\quad \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)\Big|_{R=a}=-\frac{1}{a^2}$$

並且

$$\lim_{a\to 0}\int_{S_i}\frac{1}{a^2}\left(-\frac{\partial V}{\partial R}a-V\right)_{|r'-r|=a}dS=-4\pi V(r')\Big|_{r'=r}$$

$$=-4\pi V(r), \qquad (\text{Ⅱ}-18)$$

因（17）之W於空間任何點皆係有限的，故對（18）式無何貢獻。故（16）式可寫爲

$$V(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint_V G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')d^3\boldsymbol{r}'$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iint_S\left(G\frac{\partial V(\boldsymbol{r}')}{\partial n}-V(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G}{\partial n}\right)\cdot dS \qquad (\text{Ⅱ}-19)$$

此式的形式乃適合 Dirichlet（或 Neumann）問題，即在密閉面S上，V有指定之值。吾人可選擇一W，使（17）式之 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 在S面上爲

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=0,$$

則電位可由上述之邊界條件（在S上，V之值）按下式求得

$$V(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint_V G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')d^3\boldsymbol{r}'-\frac{1}{4\pi}\iint_S V(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G}{\partial n}\cdot dS$$

(Ⅱ-20)

實際上，欲求 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$使在$S$面上爲零，並不永是簡單之問題。Neumann 問題通常更較困難，在此將不予探討。讀者可參閱 Jackson 所着 Classical Electrodynamics，第一、二、三章。

上述之一般理論，於任何電荷分佈 $\rho(\boldsymbol{r})$情形下，和任何體積v內之任何"內點"皆可成立。在特殊情形下，其結果可略簡化。

(1) 若於體積v內 $\rho=0$，則 (20) 式卽成

$$V(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi}\oiint_S V(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G}{\partial n}\cdot d\boldsymbol{S} \qquad (Ⅱ-21)$$

這乃是典型的 Dirichlet 問題：指定V在v的面S的每一點之值，求 $V(\boldsymbol{r})$。

(2) 如所有電荷只分佈於一有限的空間，則電位將着隨距離成$\frac{1}{R}$而遞減，故當 S 之半徑趨於無窮時，(19) 式之面積分將趨於零。在此情形下，吾人可選

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \qquad (Ⅱ-22)$$

而 (20) 式卽成

$$V(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint_V\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}d^3\boldsymbol{r}'\cdot \qquad (Ⅱ-23)$$

(3) 若將 (22) 式之G代入 (19)，則

$$V(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint_V\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}d^3\boldsymbol{r}'$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iint_S\left(\frac{1}{R}\frac{\partial V(r')}{\partial n}-V(r')\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{R}\right)\cdot dS \quad (\text{Ⅱ-24})$$

右邊第一項係由體積 v 內之所有電荷所在 r 點產生之電位 V。其面積分乃代表 S 面外所有電荷所產生之電位。(24) 式有一重要結論；就是該面積分可想像爲由在 S 面上之電荷密度

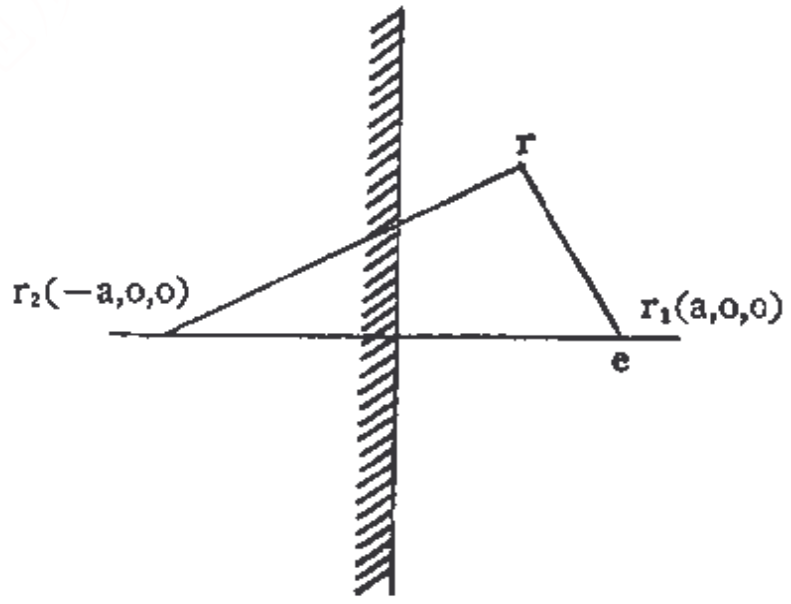
$$\sigma(r')=\epsilon_0\frac{\partial V(r')}{\partial n} \quad (\text{Ⅱ-25})$$

和一相當於複層 (double layer) 之電偶極

$$u(r')=-\epsilon_0 V(r') \quad (\text{Ⅱ-26})$$

所產生的電位，與 S 外之電荷的眞實分佈，完全無關。見第一章第一、二習題。

(4) 玆舉一簡單的例，說明用 Green 函數解電位問題的方法。設有一接地而無窮大之導體面 (如圖所示)。於該導體面前之 r_1 點，有一電荷 e，求在該空間裡任何點 r 之電位。這乃 Dirichlet 之邊界問題。在該無窮面上，$V=0$。設電荷 e 在 $r_1(x, y, z)=(a, 0, 0)$點並設 Green 函數 (17) 爲



$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}+W$$

設 $r_2(-a.0,0)$係爲 $\boldsymbol{r}_1$ 之像點。欲使在無窮面上之 $G=0$，則可選一W函數使

$$G=\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}-\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2|} \qquad (\text{Ⅱ}-27)$$

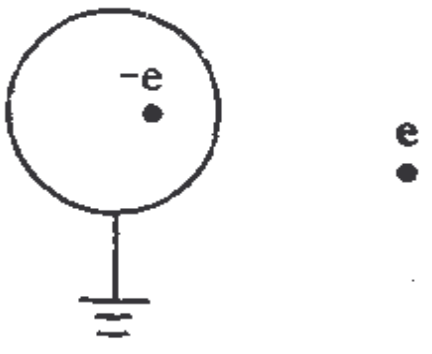
因在該無窮面及無窮大半球面,V皆爲零，故由（19）式可得

$$V(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{e}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}-\frac{e}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2|}\right\} \qquad (\text{Ⅱ}-28)$$

3. 像法和倒轉法 (Methods of images and inversion)

(1) 像法

前述之例子，係用 Green 函數方法，以解無窮大而接地之導體前之空間有一電荷 e 所產生電位之問題。上述之方法甚爲簡單。但下述之像法，對解此類問題，更爲簡單。假設將導體移去而置 $-e$ 之電荷於 e 之像點上。這兩個點電荷在導體原來所在的平面上之電位爲零。上述之兩個情形之邊界條皆相同，則空間裡之電位只有唯一之解（第1節之定理1）。但兩點電荷之電位爲



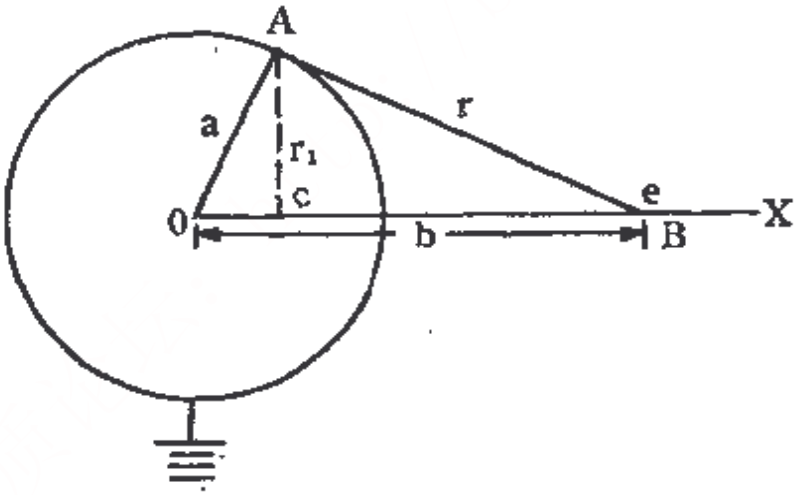
$$V(x,y,z)=\frac{e}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{1}{(x-a)^2+y^2+z^2}-\frac{1}{(x+a)^2+y^2+z^2}\right\},\quad x\geq 0$$

x軸係垂直於導體之平面，a乃e與平面之間垂直距離。這結果與（28）完全相同。

於$(-a, 0)$之電荷$-e$稱爲像電荷（image charge），而用這種方法解電位問題時，則稱爲像法。

另一簡單例題如下；一個接地之導體球，其半徑爲a，球外B點，電荷e，距球心爲b。求在該球外空間任何處之電位。

如圖所示；顯然地電位V對OB軸對稱。（O爲球心）故只需考慮$x-y$平面（x軸乃連貫OB）的$V(x, y)$。最後祇需以y^2+z^2代y^2即可。



設定$C(c, o)$係$(x, y)=(b, o)$之"像點"，它們之關係爲

$$cb=a^2 \qquad (\text{II}\text{-}29)$$

若A是球面上任一點，r是$B-A$之距離。r_1是$C-A$之距離由（29）之關係得知，OAC與OAB是相似三角形。因此，

$r_1=\frac{a}{b}r$。假使今將導球移去而置電荷$-\frac{a}{b}e$於C點，則在A點之電位爲

$$V_A=-\frac{a}{b}\frac{e}{r_1}+\frac{e}{r}=0$$

因此，原問題可以置電荷$\left(-\frac{a}{b}e\right)$於$B$之像點$C$處而代之，蓋上述兩種情形，皆能使該球面上之電位爲零。故於任何點 $p(x, y, z)$ 之電位爲

$$V(x,y,z)=\frac{e}{\sqrt{(x-b)^2+y^2+z^2}}+\frac{ae}{b\sqrt{\left(x-\frac{a^2}{b}\right)^2+y^2+z^2}}$$

只要記着唯一性定理（第1節），則上述的像法確是淺易方法。

上述的問題，亦可用 Green 函數方法。只要取（17）式之 Green 函數爲

$$G=\frac{1}{r}-\frac{a}{br_1} \qquad (\text{Ⅱ-30})$$

使在該球上，$G(r, r')=0$。由（19）式，或（20），卽可得上式之 $V(x,y,z)$。

(2) 倒轉法

設在 $r_j(r_j, \theta_j, \varphi_j)$ 點有一電荷 e，則在 $r\,(r, \theta, \varphi)$ 點，其電位爲

$$V(r)=V(r,\theta,\varphi)=\frac{e_j}{\sqrt{r^2+r_j^2-2rr_j\cos\Theta}} \qquad (\text{Ⅱ-31A})$$

Θ 乃是向量 r，r_j間的夾角，按球面三角公式，

$$\cos\Theta=\cos\theta\cos\theta_i+\sin\theta\sin\theta_i\cos(\varphi-\varphi_i)。$$

設在向量 r 和 r_j 之原點，以半徑 a 作一球面，今置$\frac{a}{r_1}e$ 之

電荷於$\left(\frac{a^2}{r_j}, \theta_j, \varphi_j\right)$點。則 $r(r,\theta,\varphi)$點之電位爲

$$V'(r,\theta,\varphi) \quad \frac{\left(\frac{a}{r_j}\right)e_j}{\sqrt{r^2+\left(\frac{a^2}{r_j}\right)^2-2r\left(\frac{a^2}{r_j}\right)\cos\theta}}$$

$$=\frac{\left(\frac{a}{r}\right)e_j}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{r}\right)^2+r_j^2-2\left(\frac{a^2}{r}\right)r_j\cos\theta}} \qquad (\text{Ⅱ}-31\text{B})$$

因此

$$V'(r,\theta,\varphi)=\frac{a}{r}V\left(\frac{a^2}{r},\theta,\varphi\right) \qquad (\text{Ⅱ}-31)$$

這結果可應用於群體電荷所產生的電位之問題，只需求上式對 j 之和。

上述之結果亦可以下式表示之，先對（31A）式之 r，作下面轉換式予以倒轉

$$I_n(r)=\frac{a^2}{r} \qquad (\text{Ⅱ}-32)$$

（I_n 乃是倒轉之意，a 爲一個球之半徑）。再乘此 V 以 $\frac{a}{r}$，即得在 $r=\frac{a^2}{r_j}$ 點之 $\frac{a}{r_j}e$ 電荷，在 r 點所產生之電位 $V'(r,\theta,\varphi)$。

這方法之好處乃在使問題由（32）之轉換而簡單化。通常係將一個球"S"轉換成另外一個球。但是若當倒轉球之球心位於 S 面時，則一個球 S 將轉換成無窮大之平面。

4. Laplace 方程式：諧函數 (harmonics)

許多靜電學與重力之位能等問題皆需解 Laplace 方程式。故求 Laplace 方程式之解，係 x, y, z 座標之齊次函數者。此函數稱爲球諧函數 (spherical harmonics)。球諧函數乃

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0 \qquad (\text{II}-33)$$

及齊次函數之 Euler 方程式

$$x\frac{\partial V}{\partial x}+y\frac{\partial V}{\partial y}+z\frac{\partial V}{\partial z}=nV \qquad (\text{II}-34)$$

之解。此解稱爲 n 次球諧函數。

最普遍之 n 次齊次函數，若以 (x, y, z) 爲座標，應有 $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ 項。若該 V 滿足 Laplace 方程式，則可得一個 $(n-2)$ 次之齊次函數之方程式。假使該函數恒等於零，則它的 $\frac{1}{2}(n-1)n$ 係數務須等於零。因此，該 V 應有 $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)-\frac{1}{2}(n-1)n=(2n+1)$ 個任意係數。

設 V 爲 n 次之諧函數，換言之，卽 V 滿足 (33) 和 (34) 式。由計算可得

$$\begin{aligned}\nabla^2(r^m V)&=r^m\nabla^2 V+m(m+1)r^{m-2}V\\&\quad+2mr^{m-2}\left(x\frac{\partial V}{\partial x}+y\frac{\partial V}{\partial y}+z\frac{\partial V}{\partial z}\right)\\&=m(m+1+2n)r^{m-2}V\end{aligned}$$

如 $m+1+2n=0$，則 $r^m V$ 乃是諧函數，換言之，一個 n 次

諧函數，必有一個$-(n+1)$次之齊次$r^{-1-2n}V_n$諧函數，與其相應。下文（45）和（54）兩式將見此點。

Laplace 方程式可以不同座標表示之，如直角，球極（spherical polar），圓柱，橢圓，拋物線（parabolic），球（Spheroidal），橢球（ellipsoidal）和其他等。按此，就有各式的諧函數。座標之選擇，乃視物理問題之對稱性而定（如邊界條件，電荷分佈情形等）。吾人將先取球極座標如下：

$$r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rV)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}=0$$

設 （Ⅱ-35）

$$V(r,\theta,\varphi)=R(r)P(\theta)\Phi(\varphi) \qquad (Ⅱ-36)$$

則（35）式可分成三個常微分方程

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=-m^2\Phi \qquad (Ⅱ-37a)$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}P=-\alpha^2P \qquad (Ⅱ-37b)$$

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2}+2r\frac{dR}{dr}-\alpha^2R=0 \qquad (Ⅱ-37c)$$

m^2,α^2係未定常數。這些常數可由V之邊界條件定之。今$V(r,\theta,\varphi)$必須爲單值（single-valued），即

$$V(r,\theta,\varphi+2\pi)=V(r,\theta,\varphi), \qquad (Ⅱ-38)$$

故（37a）式之m，必須爲

$$m=\pm\text{整數}, \qquad (Ⅱ-39)$$

$$\Phi(\varphi)=e^{\pm im\varphi},\ \text{或}\ \cos m\varphi,\ \sin m\varphi。 \qquad (Ⅱ-40)$$

欲解 (37c)，吾人可知 $r=0$ 爲奇點 (singular point)，故使

$$R(r)= \quad a_k r^k \tag{Ⅱ-41}$$

以此代入 (37c)，並使 r 最低次項之係數等於零，則可得一指數方程式（indicial equation）爲

$$\{k(k+1)+2k-\alpha^2\}r^{k-2}=0$$

當α^2係任何值，k 有兩個根，爲

$$k=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}+\alpha^2\right)} \tag{Ⅱ-42}$$

欲使 k 爲整數值（參閱第 (II) 節 (81)），則需

$$\alpha^2=l(l+1) \tag{Ⅱ-43}$$

因此，k 之兩根分別爲

$$k_1=l, \qquad k_2=-(l+1) \tag{Ⅱ-44}$$

故

$$R(r)=Ar^l+Br^{-(l+1)} \tag{Ⅱ-45}$$

（I） Legendre 係數

使$x=\cos\theta$, 代入 (37b) 可得

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dP}{dx}\right\}+\left\{l(l+1)\ -\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right\}P=0 \tag{Ⅱ-46}$$

先論爲$m=0$之特別情形。上式乃成

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dP}{dx}\right\}+l(l+1)P=0, \tag{Ⅱ-47}$$

或

$$(1-x^2)\frac{d^2P}{dx^2}-2x\frac{dP}{dx}+l(l+1)P=0, \tag{Ⅱ-47a}$$

l 爲正整數 (0, 1, 2…)。(47) 式稱爲 Legendre 方程式。

使

$$P=\sum_{n=0} a_n x^n, \qquad (\text{II}-48)$$

將 (48) 代入 (47)，即得

$$\sum_n [n(n-1)a_n x^{n-2}-(n+1)na_n x^n+l(l+1)a_n x^n]=0$$

因 (48) 乃一個多項式 (見下文)，且上方程式的 x 之區域爲 $-1\leq x\leq 1$，故 x 之任何次項之係數務必爲零。因此，可得遞推公式 (recurrence formula) 爲

$$a_{n+2}=-\frac{(l-n)(l+n+1)}{(n+1)(n+2)}a_n \qquad (\text{II}-49)$$

故 (48) 式之最高次項爲 $n=l$，該多項式乃

$$P_l(x)=a_l\left[x^l-\frac{(l-1)l}{2(2l-1)}x^{l-2}+\frac{(l-3)(l-2)(l-1)l}{2\cdot 4\cdot(2l-3)\cdots(2l-1)}x^{l-4}+\cdots\right] \qquad (\text{II}-50)$$

最後一項爲 $\begin{Bmatrix} x^0 \\ x^1 \end{Bmatrix}$，視 l 是 $\begin{Bmatrix} \text{偶} \\ \text{奇} \end{Bmatrix}$ 而定。

a_l 爲任意值，但吾人將取

$$a_l=\frac{1,3\cdots(2l-3)(2l-1)}{l!} \qquad (\text{II}-51)$$

故得

$$P_l(1)=1 \qquad l \text{ 等於任何正整數} \qquad (\text{II}-52)$$

$$P_0(x)=1, \qquad P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

$$P_1(x)=x, \qquad P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3) \qquad (\text{II}-53)$$

$$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),\quad P_3(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$$

(50) 式之$P_l(x)$可寫爲

$$P_l(x)=\frac{1}{2^l l!}\sum_{s=0}^{m}(-1)^s\frac{l!}{s!(l-s)!}\frac{(2l-2s)!}{(l-2s)!}x^{l-2s}$$

$$m=\begin{cases}\frac{1}{2}l\\(l-1)/2\end{cases}\qquad 當l=\begin{cases}偶數\\奇數\end{cases}\qquad(\text{Ⅱ}-50a)$$

$P_l(x)$ 稱曰 Legendre 係數，或面帶諧函數（surface zonal harmonics），將 (45) 與 (50) 兩式合併，卽可得 (34) 式之解爲

$$V(r,\theta)=\sum_l\left(A_l r^l+B_l\frac{1}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta)。\qquad(\text{Ⅱ}-54)$$

下面將摘要舉出 Legendre 係數 $P_l(\cos\theta)$之性質。

（1）設有r_1, r兩向量，r_1是固定的，它們之間的夾角爲θ，則

$$\frac{1}{|r-r_1|}=\frac{1}{r_1\sqrt{1+\left(\frac{r}{r_1}\right)^2-2\left(\frac{r}{r_1}\right)\cos\theta}}\qquad 當r_1>r$$

$$=\frac{1}{r\sqrt{1+\left(\frac{r_1}{r}\right)^2-\left(2\frac{r_1}{r}\right)\cos\theta}}\qquad 當r>r_1\quad(\text{Ⅱ}-55)$$

將上式展開，使 $x=\cos\theta$, 則得

$$\frac{1}{|r-r_1|}=\frac{1}{r}\sum C_l(x)\left(\frac{r_1}{r}\right)^l\qquad 當r>r_1\qquad(\text{Ⅱ}-56)$$

$$=\frac{1}{r_1}\sum C_l(x)\left(\frac{r}{r_1}\right)^l\qquad 當r_1>r$$

因$\frac{1}{|r-r_1|}$除了於點$r=r_1$點外，在其他點皆是 Laplace方程式之解。故將（56）代入（35）時，並由$\frac{\partial V}{\partial \varphi}=0$, 可得

$$\sum_l \left\{ l(l+1)C_l(x)+\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dC_l}{dx}\right]\right\}\left(\frac{r_1}{r}\right)^l \frac{1}{r}=0$$

當$r>r_1$

或　　$$\sum_l \left\{ l(l+1)C_l(x)+\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dC_l}{dx}\right]\right\}\left(\frac{r}{r_1}\right)^l \frac{1}{r_1}=0$$

當$r_1>r$

可見$C_l(x)$滿足（47）式之 Legendre 方程式。換言之，$P_l(x)$爲展開式（56）之係數。故

$$\frac{1}{|r-r_1|}=\sum_{l=0}^{\infty}P_l(x)\frac{r^l}{r_1^{l+1}} \qquad \text{當} r_1>r$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}P_l(x)\frac{r_1^l}{r^{l+1}} \qquad \text{當} r_1<r \qquad \text{(II-56a)}$$

((2))　$P_l(\cos\theta)$ 之微分式

設 r_1乃在x軸上，且 $r=r(x, y, z)$。則

$$\frac{1}{|r-r_1|}=\frac{1}{\sqrt{(x-r_1)^2+y^2+z^2}}=\sum_l \frac{(-1)^l}{l!}r_1^l \frac{\partial^l}{\partial x^l}\left(\frac{1}{r}\right)$$

以此與（56a）式相比，因

$$\frac{1}{|r-r_1|}=\sum_l P_l(\cos\theta)\frac{r_1^l}{r^{l+1}}$$

即得　　$$P_l(\cos\theta)=\frac{(-1)^l}{l!}r^{l+1}\frac{\partial^l}{\partial x^l}\left(\frac{1}{r}\right)。 \qquad \text{(II-57)}$$

((3))　$P_l(x)$之 Rodrigues 式

將（50）式予以積分，即得

$$\int_0^x P_l dx=\frac{a_l}{l+1}\left\{x^{l+1}-\frac{l(l+1)}{2(2l-1)}x^{l-1}\right.$$
$$\left.+\frac{(l-2)(l-1)l(l+1)}{2\cdot4\cdot(2l-3)(2l-1)}x^{l-3}\cdots\right\}$$

將上式再積分，

$$\int_0^x\int_0^{x'} P_l dxdx'=\frac{a_l}{(l+1)(l+2)}\left\{x^{l+2}-\frac{(l+1)(l+2)}{2(2l-1)}x^l\right.$$
$$\left.+\frac{(l-1)l(l+1)(l+2)}{2\cdot4\cdot(2l-3)(2l-1)}x^{l-2}\cdots\right\}$$

再積分 l 次，左邊利用符號式簡寫，用（51）式之a_l，得

$$\left[\int_0^x\right]^l P_l dx^l=\frac{1,3\cdots\cdots(2l-1)}{(2l)!}\left\{x^{2l}-x^{2l-2}\right.$$
$$\left.+\frac{l(l-1)}{2!}x^{2l-4}+\cdots\right\}$$

右邊的括號式 $\{\cdots\}$，與 $(x^2-1)^l$ 的差別，祇在低於x^l的項。因此，若將上述兩邊微分 l 次，可得

$$P_l(x)=\frac{1\cdot3\cdot\cdots(2l-3)(2l-1)}{(2l)!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l$$
$$=\frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l \qquad (\text{II}-58)$$

（(4)）$P_l(\cos\theta)$展開成$\cos\theta$之級數

$$(1-2z\cos\theta+z^2)=1-2(e^{i\theta}+e^{-i\theta})z+z^2$$
$$=(1-ze^{i\theta})(1-ze^{-i\theta})$$

$$(1-ze^{i\theta})^{-1/2}=1+\frac{1}{2}ze^{i\theta}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}z^2e^{2i\theta}\cdots+$$

$$(1-ze^{-i\theta})^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}zei^{-i\theta}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}z^2e^{-2i\theta}+\cdots$$

因$P_l(\cos\theta)$係$(1-xe^{i\theta})^{-\frac{1}{2}}(1-ze^{-i\theta})^{-\frac{1}{2}}$乘積中之$z^l$項之係數，故得

$$P_l(\cos\theta)=\frac{1\cdot3\cdots(2l-1)}{2\cdot4\cdots2l}\left\{e^{il\theta}+e^{-il\theta}+\frac{1}{2}\frac{2l}{2l-1}\right.$$

$$\left.\times\left[e^{i(m-2)\theta}+e^{-i(m-2)\theta}\right]+\cdots\right\}$$

$$=\frac{1\cdot3\cdots(2l-1)}{2\cdot4\cdots2l}\left\{2\cos l\theta\right.$$

$$+2\cdot\frac{l}{(2l-1)}\cos(l-2)\theta$$

$$\left.+2\frac{1\cdot3\cdots(l-1)l}{1\cdot2\cdots(2l-3)(2l-1)}\cos(l-4)\theta\cdots\right\}\quad(\text{Ⅱ}-59)$$

$P_0(\cos\theta)=1$　　$P_3(\cos\theta)=\frac{1}{8}(5\cos3\theta+3\cos\theta)$

$P_1(\cos\theta)=\cos\theta$　　$P_4(\cos\theta)=\frac{1}{64}(35\cos4\theta+20\cos2\theta+9)$

(Ⅱ-60)

$P_2(\cos\theta)=\frac{1}{4}(3\cos2\theta+1)$,　　$P_5(\cos\theta)=\frac{1}{124}(63\cos5\theta$

$$+35\cos3\theta+30\cos\theta)$$

(59) 式中所有 $\cos n\theta$ 之係數皆爲正值，故P_l之最大值是當$\theta=0$。但由 (51) a_l 之選定，$P_l(1)=1$，因此

$$-1\leq P_l\leq1\qquad(\text{Ⅱ}-61)$$

由 (59)式，可得

$$P_{2l}(\cos\theta)=P_{2l}(\cos(\pi-\theta))$$
$$P_{2l+1}(\cos\theta)=-P_{2l+1}(\cos(\pi-\theta)) \qquad (\text{II}-62)$$

或
$$P_{2l}(x)=P_{2l}(-x)$$
$$P_{2l+1}(x)=(-1)P_{2l+1}(-x) \qquad (\text{II}-62a)$$

((5)) 遞推關係式 (recurrence relations)

由 (56) 式

$$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_l t^l P_l(x), \qquad (\text{II}-63)$$

將 (63) 式對 t 微分，並將兩邊 t 同次之係數予以相等，則得

$$(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0 \qquad (\text{II}-64)$$

再將 (63) 對 x 微分，同理可得

$$P'_{n+1}-2xP_n'+P'_{n-1}-P_n=0 \qquad (\text{II}-65)$$

今將 (64) 對 x 微分，可得

$$xP_n'-P'_{n-1}-nP_n=0 \qquad (\text{II}-66)$$

由 (65) 及 (66)，可得

$$P'_{n+1}-P'_{n-1}=(2n+1)P_n \qquad (\text{II}-67)$$

由此式可得

$$P'_{n+1}+P_n'=\sum_{l=0}^{n}(2l+1)P_l \qquad (\text{II}-68)$$

同理，可得其他遞推關係式

$$P'_{n+1}-xP_n'=(n+1)P_n \qquad (\text{II}-66a)$$

$$(x^2-1)P_n'=nxP_n-nP_{n-1} \qquad (\text{II}-66b)$$

((6)) $P_l(x)$之正交關係與歸一化

以P_n乘 (47) 式之P_m之 Legendre 方程式，再將P_m與P_n互

換，所得之兩方程式予以相減，並對 x 積分，其積分極限係從 -1 到 $+1$，即得

$$\{n(n+1)-m(m+1)\}\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx$$
$$=\left|(1-x^2)(P_nP_m'-P_mP_n')\right|_{-1}^{1}=0$$

因此，

$$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx=0 \qquad \text{當} m\neq n \qquad (\text{II}-69)$$

若$m=n$時，則取用下述之方法。

今將用由 Green 定理所表示之電位式 (24) 如下；

$$V(\mathrm{r})=\frac{1}{4\pi}\oint\!\!\!\oint_S\left(\frac{1}{R}\frac{\partial V(\mathrm{r}')}{\partial n}-V(\mathrm{r}')\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{R}\right)\cdot dS \qquad (\text{II}-70)$$

$R=|\mathrm{r}-\mathrm{r}'|$。由 (56)

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{r'}\sum_s\left(\frac{r}{r'}\right)^s P_s(\cos\theta), \quad r<r' \qquad (\text{II}-71)$$

θ乃是向量 r 與 r' 之間的夾角，

$$\cos\theta=\cos\theta\ \cos\theta'+\sin\theta\ \sin\theta'\ \cos(\varphi-\varphi')$$

設取 (54) 式之解爲 $V=r^mP_m(\cos\theta)$ 代入 (70)，得

$$V_m(r,\theta)=r^mP_m(\cos\theta) \qquad (\text{II}-72)$$

$$V_m(r,\theta)=\frac{1}{4\pi}\oint\!\!\!\oint_S\left\{r'^mP_m(\cos\theta)\sum_s(s+1)\frac{r^s}{r'^{s+2}}P_s(\cos\Theta)\right.$$
$$\left.+mr'^{m-1}P_m(\cos\theta')\sum_s\frac{r^s}{r'^{s+1}}P_s(\cos\Theta)\right\}$$
$$\times r'^2\sin\theta'd\theta'd\varphi'$$

當$r<r'$，上兩式恒相等，故由 r^m 項之係數得

$$\frac{2m+1}{4\pi}\iint P_m(\cos\theta')P_s(\cos\Theta)d\cos\theta' d\varphi' = P_m(\cos\theta)\delta_{ms} \tag{Ⅱ-73a}$$

使$\theta=0$, 則$\cos\Theta=\cos\theta'$, 又因 $P_m(1)=1$, 並用 (69), 則得

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = \frac{2}{2m+1}\delta_{mn} \tag{Ⅱ-73b}$$

((7)) 第二類 Legendre 係數 (Legendre coefficient of the second kind)

(47) 式爲一個二次微分方程式, 故應有兩個獨立解。Legendre 係數$P_l(x)$僅是一個解, 此外尙有一獨立解。吾人將不於此導出, 只將其如 (50a) 之$P_l(x)$用級數表示之;

$$Q_l(x) = 2^l\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(l+s)!\,(l+2s)!}{s!\,(2l+2s+1)!}\,\frac{1}{x^{l+2s+1}},\quad |x|>1 \tag{Ⅱ-74}$$

當$|x|=1$, 此式爲發散的, 但$|x|>1$, 則爲收斂。Q_l稱爲 l 次之第二類 Legendre 係數。它與$P_l(x)$之關係爲

$$Q_l(x) = \frac{1}{2}P_l(x)ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{2l-1}{1\cdot x}P_{l-1}(x) - \frac{2l-5}{3\cdot(n-1)}P_{l-3}\cdots \tag{Ⅱ-75}$$

最後一項爲$P_0(x)$。只要$|x|<1$, 上式皆可成立。

$$Q_0(x) = \frac{1}{2}ln\frac{1+x}{1-x},\quad Q_1(x) = P_1(x)Q_0 - 1$$

$$Q_2(x) = \frac{1}{2}P_2 ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{3}{2}P_1$$

$$= \frac{3}{2}P_1(x)Q_1(x) - \frac{1}{2}Q_0$$

（Ⅱ-75a）

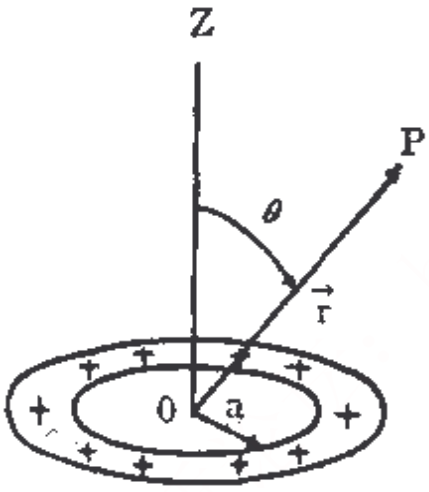
$Q_l(x)$也同樣滿足（64—68）各遞推關係式。

Legendre 方程式（47）之通解爲

$$P(x)=A\ P_l(x)+B\ Q_l(x), \qquad (Ⅱ-76)$$

茲用 *Legendre* 係數以解電位理論之簡單問題如下；

（i）若有半徑 a 之圓環，其上總電荷爲 e 。求於空間任何點之電位。因此題之情形乃是軸（如圖對Z一軸）對稱之問題，電位只與 r,θ 有關，r 乃是環心 0 與觀察點 p 之距離，θ 乃是 z 軸與 r 的夾角。但因（54）中$V(r,\theta)$ 之通解爲



$$V(r,\theta)=\sum_m A_m r^m + B_m \frac{1}{r^{m+1}}\Big) P_m(\cos\theta)$$

若今有一點在 z 軸上，則 $\theta=0$，$P_l(1)=1$。故得

$$V(r,0)=\frac{e}{\sqrt{a^2+r^2}}$$

若將上式予展開得

$$V(r,0)=\frac{e}{a}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{a}\right)^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\left(\frac{r}{a}\right)^4\cdots\right],\quad 當\frac{r}{a}<1$$

$$=e\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{2}\frac{a^2}{r^3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{a^4}{r^5}\cdots\right]\qquad 當\frac{a}{r}<1,$$

將上式與

$$V(r,0)=\sum_m\left(A_m r^m+B_m\frac{1}{r^{m+1}}\right)$$

相比，則得係數 A_m, B_m。因此可得所需之解

$$V(r,\theta)=\frac{e}{a}\left\{P_0-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{a}\right)^2P_2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\left(\frac{r}{a}\right)^4P_4+\cdots\right\},$$

當 $\frac{r}{a}<1$

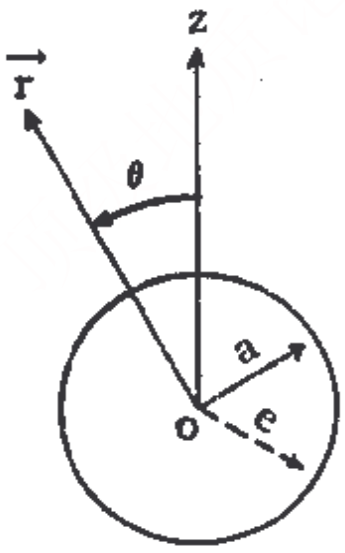
$$=\frac{e}{r}\left\{P_0-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2P_2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\left(\frac{a}{r}\right)^4P_4\cdots\right\},$$

當 $\frac{a}{r}<1$

（ii）若有一帶電圓盤，其半徑爲 a，電荷密度爲

$$\sigma(\rho)=\frac{e}{4\pi a\sqrt{a^2-\rho^2}}$$

ρ 係與盤中心之距離，求空間任何點之電位。



與（i）相似，此題也是軸對稱問題。今在盤軸上（如圖 z 軸）取一點 $(r,0)$，則該點之電位爲

$$V(r,0)=\frac{e}{a}\int_0^a\frac{\rho d\rho}{\sqrt{(a^2-\rho^2)(r^2+\rho^2)}}$$

$$=\frac{e}{2a}\cos^{-1}\frac{r^2-a^2}{r^2+a^2}$$

今　$\frac{e}{2a}\cos^{-1}\frac{r^2-a^2}{r^2+a^2}=\frac{e}{2a}\left\{\pi-2\left[\left(\frac{r}{a}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{r}{a}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{r}{a}\right)^5\right.\right.$

$$-\frac{1}{7}\left(\frac{r}{a}\right)^7\cdots\Big]\Big\}, \qquad \frac{r}{a}<1$$

$$=\frac{e}{2a}\cdot 2\Big[\left(\frac{a}{r}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{a}{r}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{a}{r}\right)^5\cdots\Big], \quad \frac{a}{r}<1$$

因此與（i）同理可得

$$V(r,\theta)=\frac{e}{a}\Big[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{r}{a}\right)P_1+\frac{1}{3}\left(\frac{r}{a}\right)^3P_3-\frac{1}{5}\left(\frac{r}{a}\right)^5P_5\cdots\Big],$$

$$\frac{r}{a}<1$$

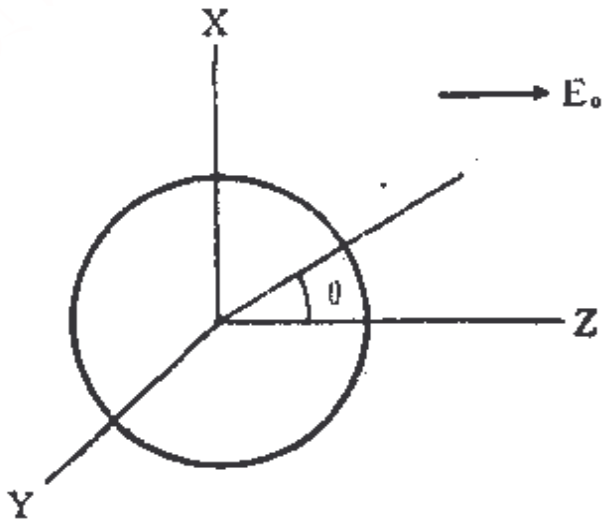
$$=\frac{e}{r}\Big[\frac{a}{r}-\frac{1}{3}\left(\frac{a}{r}\right)^3P_3+\frac{1}{5}\left(\frac{a}{r}\right)^5P_4+\cdots\Big],$$

$$\frac{a}{r}<1$$

（iii）若今有一導球於一均勻電場E_0裡，求導球表面電荷密度。

本題係解 Laplace 方程式

$$\nabla^2V=0$$



其邊界條件爲在球面上（$r=a$）時$V(r)=0$，及當 $r\to\infty$時，

$V\longrightarrow -E_0 r\cos\theta$。由於第二條件，$V$ 務有下式

$$V=(Ar+B\frac{1}{r^2})P_1(\cos\theta)。$$

由此二條件，乃得

$$A=-E_0,\quad B=a^3E_0$$

所以　$V=-(1-\frac{a^3}{r^3})E_0 r\cos\theta,\quad a<r$

故電荷面密度 σ 爲

$$\sigma=\epsilon_0 E_r\Big|_{r=a}=3\epsilon_0 E_0\cos\theta。$$

(iv) 上題之導球代以電介質球 ($\epsilon=k\epsilon_0$)。

本題也是解 Laplace 方程式，但其邊界條件則爲

(a) $V(r,\theta)\longrightarrow -E_0 r\cos\theta$　　當$r\longrightarrow\infty$

(b) $(D_i)_n=(D_e)_n$　　於$r=a$

D_i 係電介質（$k\epsilon_0$）球內之位移電場 $k\epsilon_0 E$，D_e爲電介質球外之位移電場（球外之介質若爲空氣）。n表示法線分量。則本題可用下式表示;

$$V_e(r,\theta)=(A_e r+B_e\frac{1}{r^2})P_1(\cos\theta)=A_e r\cos\theta+B_e\frac{1}{r^2}\cos\theta$$

$$V_i(r,\theta)=(A_i r+B_i\frac{1}{r^2})\cos\theta$$

i,e分別表示該球內，外之意思。由（a）之邊界條件得

$$A_e=-E_0$$

因當$r=0$ 時，V_i爲（有限）定值，故令

$$B_i=0。$$

由（b）之邊界條件可得

$$-k\epsilon_0 A_i\cos\theta=\epsilon_0 E_0\cos\theta+\frac{2\epsilon_0 B_e}{a^3}\cos\theta$$

於$r=a$, $V_e=V_i$, 故從這些方程解得

$$A_i=-\frac{3E_0}{k+2}=-(1-\frac{k-1}{k+2})E_0$$

$$B_e=\frac{k-1}{k+2}a^3E_0$$

因此,　$V_i=-(1-\frac{k-1}{k+2})E_0 r\cos\theta$

$$V_e=-(1-\frac{k-1}{k+2}\frac{a^3}{r^3})E_0 r\cos\theta$$

故電介質內的電場係沿x方向（若E_0之方向爲x如圖）爲

$$E_i=\frac{3}{k+2}E_0$$

但因（見（I-77））

$$D_i=k\epsilon_0 E_i=\epsilon_0 E_i+P,$$

故

$$P=\frac{3(k-1)}{k+2}\epsilon_0 E_0=3(k-1)\epsilon_0 E_i$$

介質球之電偶矩爲

$$P=4\pi a^3\frac{k-1}{k+2}\epsilon_0 E_0$$

若E_p係因電介質之極化所造成之內電場，則

$$E_i=E_0+E_p$$

故　　$E_p=-\frac{k-1}{k+2}E_0$

$$D_i=\frac{3k}{k+2}\epsilon_0 E_0=\frac{3}{1+\frac{2}{k}}\epsilon_0 E_0>\epsilon_0 E_0$$

當 $k\to\infty$，則上式之結果與前題（ii）相同。

（v）本題乃是在均勻電場E_0中電介質裡（$k\epsilon_0$）挖一個球形空洞。則可證（當習題）

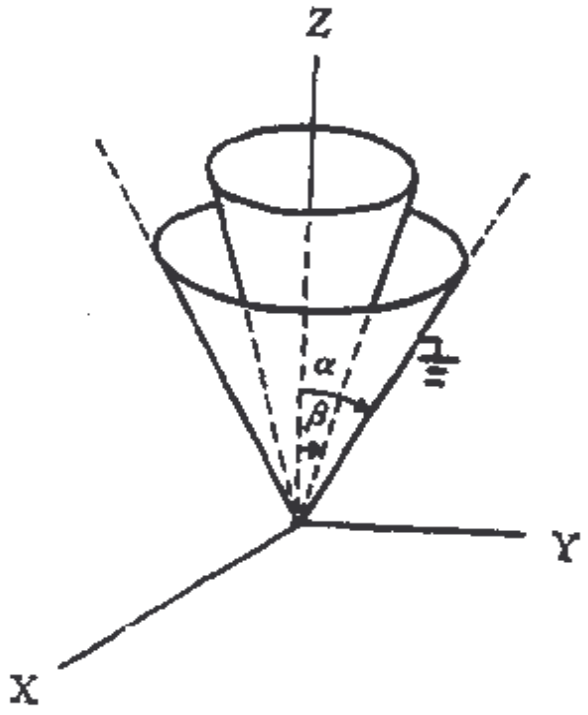
$$V_{介電質}=-(1+\frac{k-1}{2k+1}\frac{a^3}{r^3})E_0 r\cos\theta$$

$$V_{空洞}=-\frac{3k}{2k+1}E_0 r\cos\theta$$

$$E_{空洞}=\frac{3k}{2k+1}E_0=\frac{3}{2+\frac{1}{k}}E_0>E_0$$

表面電荷密度 $\sigma_p=-\frac{3(k-1)}{2(k+1)}\epsilon_0 E_0\cos\theta$

（vi）本例乃說明 Legendre 係數$Q_l(x)$之用途。設有一邊界問題如下；若有一無窮大錐面導體（$\theta=\alpha$），其電位爲零，另有一共軸錐體（$\theta=\beta, \beta>$或$<\alpha$），其電位爲 $V(r,\beta)$係滿足Laplace 方程式的。求於 α與β之間θ角之電位$V(r,\theta)$。



本題通解可寫作下式

$$V(r,\theta)=\sum_n\left(A_nr^n+B_n\frac{1}{r^{n+1}}\right)\left(C_nP_n(\cos\theta)+D_nQ_n(\cos\theta)\right)$$

而邊界條件爲

$$V(r,\alpha)=0 \quad 及V(r,\beta)=\sum_n\left(A_nr^n+B_n\frac{1}{r^{n+1}}\right)$$

因此，吾人可選

$$C_n=aQ_n(\cos\alpha),\quad D_n=-aP_n(\cos\alpha)$$

這裡

$$\frac{1}{a}=Q_n(\cos\alpha)P_n(\cos\beta)-P_n(\cos\alpha)Q_n(\cos\beta)$$

如邊界條件爲

$$V(r,\alpha)=0,\quad V(r,\beta)=常數=V_1$$

則只有 $n=0$ 項存在。因 $P_0(x)=1$,

$$Q_0(x)=\frac{1}{2}ln\frac{1+x}{1-x}=-lntan\frac{\theta}{2},\quad (x=\cos\theta)$$

$$A_0=V_1$$

故

$$V(r,\theta)=V(\theta)=V_1\frac{ln\tan\frac{\beta}{2}-lntan\frac{\theta}{2}}{ln\tan\frac{\beta}{2}-lntan\frac{\alpha}{2}}。$$

（Ⅱ）聯附 Legendre 係數 (Associated Legendre coefficients)

今再回來討論$m=$±整數時，(46) 式之情形，

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP}{dx}\right]+\left[\alpha^2-\frac{m^2}{1-x^2}\right]P=0 \qquad (\text{II}-77)$$

我們將不假設$\alpha^2=l(l+1)$，而將證明α^2爲（77）式之本徵值（eigenvalues），由這些值所得P之解，皆滿足特定邊界條件。方程式（77）在$x=\pm1$有兩個非本性之奇點（吾人並不考慮在無窮遠之奇點，因爲x之範圍乃在$-1\leq x\leq1$之間）。欲探討$x=1$時該方程式之特性，吾人可將x變數，代以$z=1-x$，則該式卽爲

$$\frac{d^2P}{dz^2}+\frac{2(1-z)}{z(2-z)}\frac{dP}{dz}+\left[\frac{\alpha^2}{z(2-z)}-\frac{m^2}{z^2(2-z)^2}\right]P=0$$

當$z=0$, 上式有一個極（pole）。設

$$P=z^\lambda\sum_s a_s z^s$$

將此代入上方程式，並使z之最低項的係數等於零，則得指數方程式爲

$$\lambda(\lambda-1)+\lambda-\frac{m^2}{4}=0,\ \text{或}\ \lambda=\pm\frac{|m|}{2} \qquad (\text{II}-7)$$

此方程式λ有兩個根，其互差爲一整數，由此兩根所得之兩個解並非相互獨立的。欲找第二個獨立之解，則需使用其他方法。此法可參閱 Whittaker 和Watson 的 A Course on Modern Analysis, Cambridge Univ. press (1927). p.200. 吾人將取$\lambda=\frac{|m|}{2}$之根。

在$x=-1$之極，則同理可得 $(1+x)^{\frac{|m|}{2}}$之因子。今設

$$P(x)=[(1-x)(1+x)]^{\frac{|m|}{2}}u(x)$$

$$=(1-x^2)^{\frac{|m|}{2}}u(x) \qquad (\text{Ⅱ-79})$$

由 (77) 式，可得$u(x)$之方程式爲

$$(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2}-2(m+1)x\frac{du}{dx}+[\alpha^2-(m+1)m]u=0 \qquad (\text{Ⅱ-80})$$

這裡m係$|m|$。設

$$u(x)=\sum_s C_s x^s$$

即得一遞推關係式如下；

$$(s+1)(s+2)C_{s+2}$$

$$=[s(s+1)+2(m+1)s-\alpha^2-m(m+1)]C_s$$

當 s 甚大時，由上式之級數裡，兩個連接項之比應爲

$$\frac{C_{s+2}\,x^{s+2}}{C_s\,x^s}\approx x^2$$

故該級數可視爲$\frac{1}{1-x^2}$，而在 (79) 式之 $P(x)$ 可視爲 $(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}$。當$m=0$，或$m=1$，x在±1點，則$P(x)$即不收斂。欲免此困難，吾人可使該級數到x^k項即終止，而使$C_{k+2}=C_{k+4}=\cdots=0$，欲達上述之目的，則需

$$\alpha^2=(k+m)(k+m+1)=l(l+1), \qquad (\text{Ⅱ-81})$$

l 爲一整數，

$$l\geq m$$

將 $\alpha^2=l(l+1)$ 代入 (77) 式，則得

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP}{dx}\right]+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]P(x)=0$$

(Ⅱ-77a)

欲得 (80) 式之 u 解，則只需將第 (47a) 式

$$(1-x^2)\frac{d^2P_l}{dx}-2x\frac{dP_l}{dx}+l(l+1)P_l=0$$

對 x 加以微分 m 次。結果爲

$$(1-x^2)\frac{d^{m+2}P_l}{dx^{m+2}}-2(m+1)x\frac{d^{m+1}P_l}{dx^{m+1}}$$

$$+(l-m)(l+m+1)\frac{d^mP_l}{dx^m}=0 \qquad (Ⅱ-82)$$

以 (80) 與 (82) 相比，可知 $u(x)$ 與 $\frac{d^mP_l}{dx^m}$ 皆滿足同一個方程式。故 (77a) 之解應爲

$$P_l^m(x)=(-1)^m(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^mP_l}{dx^m} \qquad (Ⅱ-83)$$

這函數乃稱爲 l 次，m 階之聯附 Legendre 函數（或多項式），$l\geq m$。若 $l<m$，則 $\frac{d^mP_l}{dx^m}=0$。$(-1)^m$ 乃是傳統地習慣加上去的。

由 (50a) 之 $P_l(x)$ 式，可得 $P_l^m(x)$ 之級數爲

$$P_l^m(x)=\frac{(2l)!}{2^ll!(l-m)!}(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\left[x^{l-m}\right.$$

$$-\frac{(l-m)(l-m-1)}{2\cdot(2l-1)}x^{l-m-2}$$

$$+\frac{(l-m)(l-m-1)(l-m-2)(l-m-3)}{2\cdot4\cdot(2l-1)(2l-3)}$$

$$\left.\times x^{l-m-4}+\cdots\right] \qquad (Ⅱ-84)$$

下面爲該多項式之幾個形式

$$P_0^0=1 \qquad P_3^2=15(1-x^2)x$$

$$P_1^0=x \qquad P_3^3=15(1-x^2)^{3/2}$$

$$P_1^1=(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \qquad P_4^0=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$$

$$P_2^0=\frac{1}{2}(3x^2-1) \qquad P_4^1=\frac{5}{2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(7x^3-3x) \quad (\text{Ⅱ-85})$$

$$P_2^1=3(1-x^2)^{\frac{1}{2}}x \qquad P_4^2=\frac{15}{2}(1-x^2)(7x^2-1)$$

$$P_2^2=3(1-x^2) \qquad P_4^3=105(1-x^2)^{\frac{3}{2}}x$$

$$P_3^0=\frac{1}{2}(5x^3-3x) \qquad P_4^4=105(1-x^2)^2$$

$$P_3^1=\frac{3}{2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(5x^2-1)$$

今已知 $(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\dfrac{d^mP_l}{dx^m}(x)$ 爲 (77a) 之特別解。該方程式之第二個線性的獨立解，可用下法求得。將(47a)式之 $P_l(x)$ 代以 $Q_l(x)$，得

$$(1-x^2)\frac{d^2Q_l}{dx^2}-2x\frac{dQ_l}{dx}+l(l+1)Q_l=0 \qquad (\text{Ⅱ-86})$$

將其微分 m 次可得

$$Q_l^m(x)=(-1)^m(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^mQ_l}{dx^m}, \quad -1<x<1, \quad (\text{Ⅱ-87})$$

此爲第二類之聯附 Legendre 函數。

〔於純數理之探討，而非在解電位理論問題時，常於 P_l^m, Q_l 等函數，將變數 x 的領域拓展至 $x>1$，或甚至爲虛數。若 $z>1$ 而爲實數，則由 (58) 可定義 $P_l(z)$，及

$$P_l^m(z) = (z^2-1)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m P_l(z)}{dz^m}, \quad z>1$$

同理，可借用（75）式，並將$ln\frac{(1+x)}{1-x}$改爲$\ln\frac{1+z}{1-z}$，則得$Q_l(z)$爲

$$Q_l^m(z)=(z^2-1)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m Q_l(z)}{dz^m}$$

此處對這些函數將不再做進一步討論，讀者若有興趣請參閱前已述及之Whittaker 和 Watson 書。]

下面將列舉些$P_l^m(x)$之特性，

《1》遞推關係式;

$$(1-x^2)\frac{dP_l^m}{dx}=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}P_l^{m+1}-mxP_l^m \qquad (\text{Ⅱ}-88\text{-a})$$

$$(1-x^2)\frac{dP_l^m}{dx}=(l+m)P_{l-1}^m-lxP_l^m \qquad (\text{Ⅱ}-88\text{-b})$$

$$(2l+1)xP_l^m=(l-m+1)P_{l+1}^m+(l+m)P_{l-1}^m \qquad (\text{Ⅱ}-88\text{-c})$$

$$(2l+1)\,(1-x^2)^{\frac{1}{2}}P_l^m=P_{l+1}^{m+1}-P_{l-1}^{m+1} \qquad (\text{Ⅱ}-88\text{-d})$$

$$=-(l-m+1)(l-m+2)P_{l+1}^{m-1}$$

$$+(l+m-1)(l+m)P_{l-1}^{m-1} \qquad (\text{Ⅱ}-88\text{-e})$$

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}}P_l^{m+1}=2mxP_l^m-(l+m)(l-m+1)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}P_l^{m-1}$$

$$(\text{Ⅱ}-88\text{-f})$$

《2》$P_l^m(x)$之正交化與歸一化

設有積分如下

$$F(m)=\int_{-1}^{1}(1-x^2)^m\,\frac{d^m P_l}{dx^m}\,\frac{d^m P_k}{dx^m}dx \qquad (\text{Ⅱ}-89)$$

用部份積分法，可得

$$F(m)=-\int_{-1}^{1}\frac{d^{m-1}P_l}{dx^{m-1}}\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^m\frac{d^mP_k}{dx^m}\right]dx$$

於（82）式中m代以$m-1$，並乘上$(1-x^2)^{m-1}$，得

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)^m\frac{d^mP_l}{dx^m}\right\}$$

$$=-(l-m+1)(l+m)(1-x^2)^{m-1}\frac{d^{m-1}P_l}{dx^{m-1}}$$

用此式於上面之積分，可得一遞推關係式爲

$$F(m)=(l-m+1)(l+m)F(m-1)$$

將上述之方法一再重複，可得

$$F(m)=(l-m+1)(l+m)(l-m+2)(l+m-1)\times F(m-2)$$

$$=\frac{(l+m)!}{(l-m)!}F(0)\qquad(\text{Ⅱ-89a})$$

由（69）式已知$F(0)$，因此

$$\int_{-1}^{1}P_l^m(x)P_k^m(x)dx=\frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\delta_{l,k}\qquad(\text{Ⅱ-90})$$

故能將$P_l^m(x)$歸一化如下。設

$$\Theta_{l,m}(x)=(-1)^m\left[\frac{2l+1}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right]^{\frac{1}{2}}P_l^m(x)\qquad(\text{Ⅱ-91})$$

則
$$\int_{-1}^{1}\Theta_{l,m}(x)\Theta_{l,m}(x)dx=1\qquad(\text{Ⅱ-90a})$$

（90）式外另一積分爲

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{(1-x^2)}P_l^m(x)P_l^m(x)dx=\frac{1}{2m}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\qquad(\text{Ⅱ-92})$$

設將（40）式之$\Phi(\varphi)$與（83）式之$P_{lm}(\cos\theta)$集合一起，則（35）式 Laplace 方程之通解爲

$$\sum_{l=0}^{\infty} Y_l(\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l} Y_{l,m}(\theta,\varphi) \qquad (\text{II}-93)$$

$$Y_{l,m}(\theta,\varphi)=(A_{l,m}\cos m\varphi+B_{l,m}\sin m\varphi)P_l^m(\cos\theta) \qquad (\text{II}-94)$$

$Y_{l,m}$ 稱爲 l 次田諧函數 (tesseral harmonic)。

今再回到 (72) 式，將$V(r,\theta)$ 代以下式

$$V(r,\theta,\varphi)=r^l Y_l(\theta,\varphi)$$

以同於由 (72) 至 (73a) 之方法，可得

$$\frac{2l+1}{4\pi}\iint Y_l(\theta',\varphi')P_s(\cos\Theta)d\cos\theta' d\varphi'=Y_l(\theta,\varphi)\delta_{l,s} \qquad (\text{II}-95)$$

此處　$\cos\Theta=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')$　(II −96)

(73a) 乃是 (95) 之特例。

玆假設 $P_l^m(\cos\theta)$, $e^{im\varphi}$在θ,φ之空間裡構成一完集 (a complete set)，換言之，此空間中任何函數$f(\theta,\varphi)$，皆可用 $Y_{l,m}(\theta,\varphi)$之級數予以展開。〔若欲知晓完集之定義與條件，請參閱 Courant and Hilbert 的 Methoden der Mathematischen physik. Vol. 1. (1931), Chapter 6, §3, 或 E. C. Kemble 的 The Fundamental Principles of Quantum Mechanics(1937), pp. 136-7〕。設今將$P_s(\cos\Theta)$ 展開

$$P_s(\cos\Theta)=\sum_{k,k} C_{k,k}(\theta',\varphi')P_k^k(\cos\theta)e^{ik\varphi} \qquad (\text{II}-97)$$

將上式兩邊乘以 $P_l^m(\cos\theta)\,e^{-im\varphi}d\cos\theta d\varphi$，並對$\theta,\varphi$積分，再用 (90) 和 (95) 式，可得

$$C_{lm}(\theta',\varphi')=\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}P_l^m(\cos\theta')e^{-im\varphi'} \qquad (\text{II}-98)$$

故
$$P_l(\cos\theta)=\sum_{m=-l}^{l}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}P_l^m(\cos\theta)P_l^m(\cos\theta')e^{im(\varphi-\varphi')}$$

$$(\text{II}-99)$$

$$=2\sum_{m=1}^{l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(\cos\theta)P_l^m(\cos\theta')$$

$$\times\cos m(\varphi-\varphi')+P_l(\cos\theta)P_l(\cos\theta') \qquad (\text{II}-99a)$$

這結果乃稱爲球諧函數之額加定理（Addition theorem）。

今將（99）或（99a）代入（71），得

$$\frac{1}{|r-r'|}=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}P_l^m(\cos\theta)P_l^m(\cos\theta')e^{im(\varphi-\varphi')}$$

$$(\text{II}-100)$$

$r_>$，$r_<$乃視r和r'孰大孰小而定，大的稱爲$r_>$，小的稱爲$r_<$。

（91）式中歸一化之Θ_{lm}和下式歸一化的Φ_m

$$\Phi_m(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi}$$

合併起來，滿足下式之關係

$$\sum_{m=-l}^{l}\left|\Theta_{l,m}(\cos\theta)\Phi_m(\varphi)\right|^2=\frac{2l+1}{4\pi} \qquad (\text{II}-101)$$

此結果可於（99）式中使$\theta=0$及（91）式得之。

最後（36）之$V(r,\theta,\varphi)$電位爲

$$V(r,\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{l}\left(A_lr^l+B_l\frac{1}{r^{l+1}}\right)P_l^m(\cos\theta)\begin{cases}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{cases}$$

$$(\text{II}-102)$$

$R(r)$乃由（45）式中得之。

5. Laplace 方程式, Bessel 函數

某些電位理論，熱傳導與量子力學等問題，常常地使用圓柱座標 $\boldsymbol{r}(\rho, z, \varphi)$。該座標線元素（line element）爲

$$ds^2=d\rho^2+dz^2+\rho^2d\varphi^2$$

Laplace 方程式爲

$$\nabla^2V=\frac{\partial^2V}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2V}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2V}{\partial Z^2}=0 \qquad (\text{Ⅱ}-103)$$

這方程式亦可使用分離變數法解之。設

$$V=R(\rho)Z(z)\Phi(\varphi)$$

則（103）式化分成三個常微分方程

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+n^2\Phi=0 \qquad (\text{Ⅱ}-104)$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2}-k^2Z=0 \qquad (\text{Ⅱ}-105)$$

$$\frac{d^2R}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dR}{dx}+(1-\frac{n^2}{x^2})R=0,\quad x=k\rho \qquad (\text{Ⅱ}-106)$$

n^2, k^2爲未定之常數。（104）和（105）之解爲

$$\Phi(\varphi)=\begin{cases}\cos\\ \sin\end{cases}(n\varphi) \qquad (\text{Ⅱ}-107)$$

$$Z(z)=\begin{cases}\cosh\\ \sinh\end{cases}(kz) \qquad (\text{Ⅱ}-108)$$

（106）式稱爲Bessel方程式，其解稱爲 Bessel函數，或是圓柱諧函數。

茲將試用級數法解 (106)。設

$$R(x)=x^{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k。 \qquad (\text{Ⅱ}-109)$$

代入 (106)，即得指數方程式爲

$$(\lambda-n)(\lambda+n)=0 \qquad (\text{Ⅱ}-110)$$

若 n 是整數時，則 (110) 的兩根 λ，只差一個整數，若取 $\lambda=n$，則可得一個解，而另外一個獨立解，需用其他方法求取（和討論 (78) 式情形同)。見下文 106 頁 ((7))。

今取$\lambda=n$（整數或非整數）。將 (109) 代入 (106) 中，則得一遞推關係式爲

$$a_k=-\frac{1}{k(2n+k)}a_{k-2}$$

或 $$a_2=\frac{a_0}{2^2(n+1)},\qquad a_4=\frac{a_0}{2^22!(n+1)(n+2)},$$

$$a_{2k}=\frac{(-1)^ka_0}{2^{2k}k!(n+1)\cdots(n+k)}$$

若令 $$a_0=\frac{1}{2^n\Gamma(n+1)}$$

$\Gamma(z)$爲 gamma 函數，

$$\Gamma(z-1)=z\Gamma(z),$$

$$\Gamma(z+1)=z!\ \text{若}\ z\ \text{是正整數}0,1,2,\cdots$$

則 $$a_{2k}=\frac{(-1)^k}{2^n2^{2k}k!\Gamma(n+k+1)}$$

故 (109) 解爲一無窮級數，該級數稱爲 n 次第一類$J_n(x)$Bessel 函數 (Bessel function $J_n(x)$ of the first kind of order n)，即爲

$$J_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}\quad(\text{Ⅱ}-111)$$

下文將簡單的介紹一些 Bessel 函數之性質

《1》 若 n 爲整數，則 $J_n(x)$ 可由下述之母函數（ generating function ）予以定義

$$\phi(x,t)\equiv exp\left[\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]\qquad(\text{Ⅱ}-112)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}t^nJ_n(x)\qquad(\text{Ⅱ}-112a)$$

若將 (112) 式中 $exp(\frac{xt}{2})$ 及 $exp(-\frac{xt}{2})$ 展開，提出 t^n 之係數使它等於 (112a) 式 t^n 係數，則可得

$$J_n(x)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s(\frac{x}{2})^{n+2s}}{s!(s+n)!}\qquad(\text{Ⅱ}-111a)$$

注意：變數 x 可爲實數或虛數。

《2》從 (112) 可見

$$\phi(x,t)=\phi(x,-\frac{1}{t})$$

由此式和 (112a)，即得

$$J_n(x)=(-1)^nJ_{-n}(x),\qquad n=\text{整數}\qquad(\text{Ⅱ}-113)$$

《3》遞推公式

將 (112a) 對 t 微分，比較 t^{n-1} 之係數，則得

$$J_{n+1}(x)+J_{n-1}(x)=\frac{2n}{x}J_n(x)\qquad(\text{Ⅱ}-114)$$

將 (112a) 對 x 微分，同理可得

$$\frac{dJ_n}{dx}=\frac{1}{2}(J_{n-1}-J_{n+1}) \qquad (\text{II}-115)$$

重覆運用此關係，則任何高階之 J_n 微分，皆可用 J_n *Bessel* 函數予以表示。

《4》 Bessel 函數之積分形式

若於 (112) 式中，使$t=e^{i\phi}$，則 (112) 可化爲

$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}=\sum_{-\infty}^{\infty}J_n(x)e^{in\phi} \qquad (\text{II}-116)$$

乘以 $e^{-in\phi}$，對ϕ從0到2π予以積分，則得

$$2\pi J_n(x)=\int_0^{2\pi} exp[i(x\sin\phi-n\phi)]d\phi \qquad (\text{II}-117)$$

如x爲實數，則$J_n(x)$亦爲實數。所以

$$2\pi J_n(x)=\int_0^{2\pi}\cos(x\sin\phi-n\phi)d\phi \qquad (\text{II}-118)$$

這乃是 Bessel 之原來形式。

使 $$I(n,k)=\int_0^{\pi}\sin^{2n}\phi\cos^{2k}\phi d\phi \qquad (\text{II}-119)$$

以部份積分法，可得

$$I(n,k)=\frac{2k-1}{2(n+k)}I(n,k-1)=\frac{2n-1}{2(n+k)}I(n-1,k)$$

再連續運用部份積分法，最後可得

$$I(n,k)=\frac{(2n)!(2k)!\pi}{2^{2n+2k}n!k!(n+k)!} \qquad (\text{II}-120)$$

由 (119) 和 (120) 可得

$$\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

$$=\frac{2^{2n}n!}{(2n)!}\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\sin^{2n}\phi\cos^{2k}\phi x^{2k}d\phi$$

兩邊乘以$\left(\frac{x}{2}\right)^n$，再對級數之$k$總加起來，由（111a）可看出其左方爲$J_n(x)$，其右方經改寫後爲

$$J_n(x)=\frac{x^n}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^{2n}\phi\cos(x\cos\phi)\,d\phi \qquad (\text{Ⅱ}-121)$$

$$=\frac{x^n}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(1-y^2)^{\frac{2n-1}{2}}\cos xy\;dy \qquad (\text{Ⅱ}-121a)$$

注意：在導上式之時，n係取作整數。但（121）和（121a）在任何n值皆可成立，只要將分母$1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)$代以$\sqrt{\pi}2^n\Gamma(n+\frac{1}{2})$。若$n=\frac{1}{2}$或$\frac{3}{2}$，則（121a）稱爲三角 *Bessel*函數

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x \qquad J_{\frac{3}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x}-\cos x\right) \qquad (\text{Ⅱ}-122)$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x \qquad J_{-\frac{3}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\sin x+\frac{\cos x}{x}\right) \qquad (\text{Ⅱ}-122a)$$

由（114）可得其它階次（order）之$J_n(x)$。而n不管是整數或非整數，第（114）式關係是皆可成立的。

《5》 Bessel 函數之根

（111a）中n爲整數之 Bessel 函數，係無窮級數，該方程式等對每個n值，均有無數個根，如

$$J_n(x)=0, \quad \text{則根爲}\ \xi_{n,s}, \quad s=1,2,3,\cdots \qquad (\text{Ⅱ}-123)$$

$$\frac{dJ_n(x)}{dx}=0, \quad \text{則根爲}\ \eta_{n,s}, \quad s=1,2,3,\cdots \qquad (\text{Ⅱ}-123a)$$

吾人將採用$\xi_{n1}, \xi_{n2}\cdots$代表 $J_n(x)=0$之根。

《6》階次 n 相同但變數不同之 Bessel 函數的正交關係。

當應用 $J_n(x)$ Bessel 函數於電位問題時，吾人可遇到 J_n 在圓柱邊界（$\rho=a$）爲零之條件的情形。吾人可運用一完集的 $J_n(\xi_{ns}\frac{\rho}{a})$級數。今（106）可寫爲

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho\frac{dJ_n}{d\rho})+(\frac{\xi^2_{ns}}{a^2}-\frac{n^2}{\rho^2})J_n(\xi_{ns}\frac{\rho}{a})=0 \quad (\text{Ⅱ}-124)$$

將上式乘以 $J_n(\xi_{nt}\frac{\rho}{a})$，寫下 $J_n(\xi_{nt}\frac{\rho}{a})$的方程式而乘以$J_n(\xi_{ns}\frac{a}{\rho})$，二式相減，再乘以$\rho d\rho$ 予以積分，可得

$$(\xi^2_{ns}-\xi^2_{nt})\int_0^a J_n(\xi_{ns}\frac{\rho}{a})\,J_n(\xi_{nt}\frac{\rho}{a})\rho d\rho=0, \quad s\neq t \quad (\text{Ⅱ}-125)$$

因此，該無窮集（infinite set）$J_n(\xi_{ns}\frac{\rho}{a})$, $s=1,2,3\cdots$,

在$0\leq\rho\leq a$之範圍裡，皆爲正交的。

若 $s=t$，則（125）之積分，可如下求得。將（106）式乘以 $x^2\frac{dJ_n}{dx}dx$，並作部份積分，可得

$$\int_0^x J_n^2(x)xdx=\frac{1}{2}\Big|x^2(J_n'(x))^2+(x^2-n^2)J_n^2(x)\Big|_0^x$$

由（114）及（115）可得

$$J_n'=\frac{n}{\rho}J_n-J_{n+1}=-\frac{n}{\rho}J_n+J_{n-1}$$

故
$$\int_0^a J_n^2(x)xdx=\frac{1}{2}\left\{x^2J_n^2(x)+x^2J_{n+1}^2(x)\right\}$$
$$-nxJ_n(x)J_{n+1}(x)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{x^2J_n^2(x)+x^2J^2{}_{n-1}(x)\right\}-nxJ_n(x)J_{n-1}(x)\quad(\text{II}-126)$$

若$x=\xi_{n,s}\frac{\rho}{a}$, 且問題的物理邊界位於$\rho=a$, 則按(123), $J_n(\xi_{n,s})=0$,

故
$$\int_0^a J_n^2(\xi_{n,s}\frac{\rho}{a})\,\rho\,d\rho=\frac{a^2}{2}J_{n+1}^2(\xi_{n,s})\text{，或}\frac{a^2}{2}J_{n-1}^2(\xi_{n,s})$$
$$(\text{II}-127)$$

因$\xi_{n,s}$不是$J_{n+1}(x)$或$J_{n-1}(x)$之根，故上式皆不爲零。

《7》第二類 Bessel 函數(Bessel fumcfions of the second kind)

若n爲整數，則$J_n(x)$和$J_{-n}(x)$並不是各自獨立的函數。故必須求（106）之另外一個獨立解。

已知函數
$$N_n(x)=\frac{1}{\sin n\pi}(\cos n\pi J_n(x)-J_{-n}(x))\qquad(\text{II}-128)$$

也是（106）之解。但若n爲整數，則此係一未定值$(\frac{0}{0})$。在此情形，可將分母與分子同時對n微分以定其值。因詳細步驟過於冗長，故僅將其結果列於下面;

$$\pi N_n(x)=2ln(\frac{x}{2})J_n(x)-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\Big[\Psi(k)+$$
$$\Psi(n+k)\Big](\frac{x}{2})^{n+2k}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}(\frac{x}{2})^{-n+2k}\quad(\text{II}-129)$$

這裡
$$\Psi(z)=\frac{dln\Gamma(z+1)}{dz}\qquad(\text{II}-130)$$

爲 Gamma 函數之對數導數，滿足下列遞推關係式的

$$\Psi(z)=\Psi(z-1)+\frac{1}{z}$$

$$\Psi(n)=\Psi(0)+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} \qquad (\text{II}-130a)$$

$$\Psi(0)=-C, \quad C=0{,}577215\cdots, (Euler常數)$$

(參閱 G. N. Watson 書61-2頁。此處採用 Jahnke and Emde 的 Tables of Functions 的 Ψ 的定義；該 Ψ 與Watson 所用的 ψ 有所差別，此處之$\Psi(z)$，乃 Watson 書中的$\psi(z+1)$

$N_n(x)$同樣滿足 (114)，(115) 之遞推關係式，且如 (113) 亦得

$$N_{-n}(x)=(-1)^n N_n(x) \qquad (\text{II}-131)$$

《8》J_n，J_{-n}，N_n，N_{-n}之漸近性質

由 (111) 和 (129) 式，可見於$x\ll 1$時

$$J_n(x)\simeq\frac{1}{\Gamma(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^n, \quad J_n(0)=1$$

$$N_0(x)\simeq\frac{2}{\pi}\left[\ln\frac{x}{2}+C\right] \qquad (\text{II}-132)$$

$$N_n(x)\simeq-\frac{\Gamma(n)}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^n$$

C爲 *Euler* 常數。若$x\gg 1$時，(且$x\gg n$))，則

$$J_{\pm n}(x)\simeq\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x\mp\frac{\pi}{2}n-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$N_{\pm n}(x)\simeq\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x\mp\frac{\pi}{2}n-\frac{\pi}{4}\right) \qquad (\text{II}-132a)$$

《9》修變的 Bessel 函數 (Modified Bessel functions)

若將（106）代以

$$\frac{d^2R}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dR}{dx}-(1+\frac{n^2}{x^2})R=0 \qquad (\text{Ⅱ}-133)$$

則該方程式稱爲修變的 Bessel 方程式。若將 x 代以 ix，則上式可轉換成（106）。因此（133）之解，可由（106）得之。設（133）之解，在 n 爲整數時，以 I_n 來表示，則

$$I_n(x)=\frac{1}{i^n}J_n(ix)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!(n+k)!}(\frac{x}{2})^{2k+n} \qquad (\text{Ⅱ}-133a)$$

（133）之第二獨立解不是 I_{-n}，在通常文獻中是用 K_n 來表示。

6. Laplace 方程式；橢球座標

按解析幾何，二次曲面的方程式爲

$$\frac{x^2}{a_1}+\frac{y^2}{a_2}+\frac{z^2}{a_3}=1 \qquad (\text{Ⅱ}-134)$$

若 a_1，a_2，a_3 皆大於零，則爲橢圓球曲面。設 $a_3<a_2<a_1$，則於 $z=0$ 平面的截面係橢圓，其二焦點在 x 軸上，與原點之距離爲 $\pm\sqrt{a_1-a_2}$。於 $y=0$ 平面的截面亦爲橢圓，其二焦點在 x 軸上，與原點之距離爲 $\pm\sqrt{a_1-a_3}$。同理，於 $x=0$ 平面的截面，亦爲橢圓，其二焦點在 y 軸，與原點之距離爲 $\pm\sqrt{a_2-a_3}$。若於 a_1，a_2，a_3 各加上常數 ρ，(a_1-a_3)，(a_1-a_2)，(a_2-a_3) 等間之差值不變，故

$$\frac{x^2}{a_1+\rho}+\frac{y^2}{a_2+\rho}+\frac{z^2}{a_3+\rho}=1 \qquad (\text{Ⅱ}-135)$$

乃係與（136）共焦點之橢圓曲面。

若 a_1, $a_2>0$, 而 $a_3<0$, 則 $z=0$ 截面爲橢圓, 而 $x=0$, 和 $y=0$ 之兩截面乃爲双曲面。該二次曲面乃係"一片的双曲面"。若 $a_1>0$, 而 a_2, $a_3<0$, 則 $z=0$ 和 $y=0$ 之截面皆爲双曲面, 該二次曲面乃係"兩片双曲面", 不與 $x=0$ 平面相交。(135) 的二次曲面, 仍與 (134) 的共焦點。

先討論共焦點二次曲面

$$\frac{x^2}{a^2+\rho}+\frac{y^2}{b^2+\rho}+\frac{z^2}{c^2+\rho}=1 \qquad (\text{Ⅱ-136})$$

並設 $c^2<b^2<a^2$

於下面 ρ 值之範圍, (136) 所表示之圖形如下;

$$\begin{aligned} &-c^2<\rho, && \text{橢圓球} \\ &-b^2<\rho<-c^2, && \text{一片双曲面} \\ &-a^2<\rho<-b^2, && \text{兩片双曲面} \end{aligned} \qquad (\text{Ⅱ-137})$$

今可取一 ρ_1 值, 使 (136) 二次曲面通過任何點 (x_1, y_1, z_1), 即是

$$\begin{aligned} f(\rho_1)\equiv&(a^2+\rho_1)(b^2+\rho_1)(c^2+\rho_1)-x_1^2(b^2+\rho_1) \\ &\times(c^2+\rho_1)-y_1^2(c^2+\rho_1)(a^2+\rho_1) \\ &-z_1^2(a^2+\rho_1)\times(b^2+\rho_1)=0 \end{aligned}$$

今由細察得知: $f(-a_1^2)<0$, $f(-b_1^2)>0$, $f(-c_1^2)<0$, 及 $f(\infty)>0$。因此, $f(\rho_1)=0$ 方程式有三個實數根。設以 ζ, η, ξ 爲 ρ_1 之三個根, 其次序爲 $\zeta<\eta<\xi$, 由此可見

$$-a^2<\zeta<-b^2, \quad -b^2<\eta<-c^2, \quad -c^2<\xi \qquad (\text{Ⅱ-138})$$

因此任何一點 (x_1, y_1, z_1), 對應三個數 (ξ_1, η_1, ζ_1)。ξ, η, ζ

可視爲座標，下述的表

$$\zeta=\text{常數},\quad \eta=\text{常數},\quad \xi=\text{常數} \qquad (\text{Ⅱ}-139)$$

乃是（137）式中之二次曲面。

玆將證明於（139）之三組曲面是互相正交的。今橢球之法線n_ξ，其方向餘弦可如下求得。因橢球方程爲

$$F(\xi,x,y,z)\equiv\frac{x^2}{a^2+\xi}+\frac{y^2}{b^2+\xi}+\frac{z^2}{c^2+\xi}-1=0 \qquad (\text{Ⅱ}-140)$$

或　　$\xi(x,y,z)=\text{常數}$　　（Ⅱ-140a）

其方向餘弦乃

$$\left(\frac{\partial\xi}{\partial x},\ \frac{\partial\xi}{\partial y},\ \frac{\partial\xi}{\partial z}\right)/|grad\xi|$$

但由

$$dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz+\frac{\partial F}{\partial\xi}d\xi=0$$

可得

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial\xi}}=-\frac{2x}{(a^2+\xi)F'(\xi)}$$

這裡

$$-F'(\xi)=\frac{x^2}{(a^2+\xi)^2}+\frac{y^2}{(b^2+\xi)^2}+\frac{z^2}{(c^2+\xi)^2}$$

同法，以η代（140）式之ξ，即可得n_η法線之餘弦方向，由（140）式，$\rho=\xi,\eta$，即可證n_ζ，n_η互相正交，同法可證明n_ζ，n_η，n_ξ互相正交。

今引入一般傳統之符記

$$h_\xi \equiv \frac{1}{2}\sqrt{-F'(\xi)}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{(a^2+\xi)^2}+\frac{y^2}{(b^2+\xi)^2}+\frac{z^2}{(c^2+\xi)^2}\right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Ⅱ-141})$$

換言之; $\frac{1}{h_\xi} = |grad\xi| = -\frac{\partial \xi}{\partial n}$ (Ⅱ-141a)

同理 $\frac{1}{h_\eta} = |grad\eta| = -\frac{\partial \eta}{\partial n}$, $\frac{1}{h_\zeta} = |grad\zeta| = -\frac{\partial \zeta}{\partial n}$

(Ⅱ-141b)

$h_\xi^{-1}, h_\eta^{-1}, h_\zeta^{-1}$分別爲$\xi$＝常數，$\eta$＝常數，$\zeta$＝常數等曲面之法線微分導數。由二次曲面方程式可得

$$\frac{1}{h_\xi} = -\frac{\partial \xi}{\partial n} = \frac{2S_\xi}{\sqrt{(\xi-\eta)(\xi-\zeta)}}$$

$$\frac{1}{h_\eta} = -\frac{\partial \eta}{\partial n} = \frac{2S_\eta}{\sqrt{(\eta-\zeta)(\eta-\xi)}} \quad (\text{Ⅱ-142})$$

$$\frac{1}{h_\zeta} = -\frac{\partial \zeta}{\partial n} = \frac{2S_\zeta}{\sqrt{(\zeta-\xi)(\zeta-\eta)}}$$

這裡 $S_\xi = [(a^2+\xi)(b^2+\xi)(c^2+\xi)]^{\frac{1}{2}}$, $\xi = \xi, \eta, \zeta$

(Ⅱ-142b)

用這種 (ξ, η, ζ) 爲座標之橢圓球Laplace 方程式，可寫爲

$$\Delta^2 V = \frac{4}{(\xi-\eta)(\eta-\zeta)(\xi-\zeta)}\left[(\eta-\zeta)S_\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\left(S_\xi\frac{\partial V}{\partial\xi}\right)\right.$$

$$\left.+(\zeta-\xi)S_\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\left(S_\eta\frac{\partial V}{\partial\eta}\right)+(\xi-\eta)S_\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(S_\zeta\frac{\partial V}{\partial\zeta}\right)\right]=0$$

(Ⅱ-143)

從數學觀點而言，解該方程式是非常困難的。但吾人仍欲將該理論應用在最簡單，而尚有興趣的電位問題。該問題乃是：有一總

電荷 e 之橢圓體導球，求在其表面上之電荷密度。

該導體之面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (\text{Ⅱ}-144)$$

係等位面。首先，吾人必須證明 (140)之共焦點橢球是否也是等位面。該問題可由第（Ⅱ-10）式 Lamé 條件予以回答。利用 (143) 之 Laplacian 並使用 (141) － (142)，可得

$$\frac{\nabla^2\xi}{|grad\xi|^2}=\frac{1}{S_\xi}\frac{d}{d\xi}S_\xi$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(a^2+\xi)}+\frac{1}{(b^2+\xi)}+\frac{1}{(c^2+\xi)}\right]$$

這確祇是 ξ 的函數（與 ζ，η 無關），故滿足 Lamé 條件。因此 (140) 一組之 ξ＝常數之橢圓球面，皆是等位面，且在每一個 ξ＝常數面上，皆得

$$V(\xi)=\text{常數。}$$

在導體之外，該 Laplace 方程式化爲

$$\frac{d}{d\xi}\left\{\sqrt{(a^2+\xi)(b^2+\xi)(c^2+\xi)}\ \frac{dV}{d\xi}\right\}=0$$

其解爲

$$V(\xi)=\int_\xi^\infty dV=C\int_\xi^\infty\frac{d\xi}{\sqrt{(a^2+\xi)(b^2+\xi)(c^2+\xi)}}$$

$$(\text{Ⅱ}-145)$$

上式爲橢圓積分，不能用初等函數求解的。但在距離遠時（$r^2=x_2+y_2+z_2\to\infty$），它的特性可以立即得知。由（140）式，可見，當 $\xi\gg a^2, b^2, c^2$ 時，ξ 接近 r^2，故

$$V(\xi)=C\int_{\xi}^{\infty}\frac{1}{\xi^{3/2}}d\xi=\frac{2C}{\sqrt{\xi}}\to\frac{2C}{r} \qquad (\text{II}-146)$$

於無窮遠處時，$V(\xi)$爲零。積分常數C可由一帶電荷 e 之導體在很遠距離所造成之電位爲$\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}$予以求得。故 $C=\frac{e}{8\pi\epsilon_0}$

今將回到前面所說欲求橢圓導球表面電荷密度的問題。在導球上之電荷密度爲

$$\sigma=\epsilon_0 E_n=-\epsilon_0\frac{\partial V}{\partial n}\ 。$$

由 (145)，(141)，(141a)，可得

$$\frac{\partial V}{\partial n}=\frac{dV}{d\xi}\frac{\partial\xi}{\partial n}=\frac{-e}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{(a^2+\xi)^2(b^2+\xi)(c^2+\xi)}}$$

$$\times\left[\frac{x^2}{(a^2+\xi)^2}+\frac{y^2}{(b^2+\xi)^2}+\frac{z^2}{(c^2+\xi)^2}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

在導體面上，(140) 中 $\xi=0$，故

$$\sigma=\frac{e}{4\pi abc}\left[\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right]^{-\frac{1}{2}} \qquad (\text{II}-147)$$

橢球之特例之一，係一圓盤，可看作下述的極限情形

$$a=b \qquad\qquad c\to O\ 。$$

欲求圓盤之 σ，可由方程式 (145) 得

$$\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x_2^2+y_2^2}{a^2}$$

所以 $$\frac{x^2+y^2}{a^4}+\frac{z^2}{c^4}=\frac{1}{c^2}\left[1-(1-\frac{c^2}{a^2})\frac{x^2+y^2}{a^2}\right]$$

$$\lim_{c\to 0}\sigma=\frac{e}{4\pi b}\frac{1}{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}} \qquad (3-148)$$

故在該盤的邊緣，表面電荷密度爲無窮大。

橢圓球的另一特例爲細針形導體，於此須使

$$b=c\to\delta\ (\text{小}),\quad a=\text{有限值}$$

用上述相同方法，可得

$$\lim_{b=c\to 0}\sigma=\frac{e}{4\pi\delta}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \qquad (\text{II}\text{-}149)$$

於針的兩端，電荷密度係無窮大。電導體之尖端或凸出點，其電場E極强，可產生所謂電暈放電 (corona discharge)，這卽是避雷針所根據之原理。

習題

1. 設A，B係二向量函數，二者及其一次二次導數皆係于體積V及其表面S連續的。證明下列定理:

$$\iiint_V (curl\boldsymbol{A}\cdot curl\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}\cdot curl\ curl\ \boldsymbol{B})d^3r =$$

$$\iint_S [\boldsymbol{A}\times curl\boldsymbol{B}]_n d\boldsymbol{S},$$

$$\iiint_V (\boldsymbol{B}\cdot curl\ curl\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\cdot curl\ curl\ \boldsymbol{B})d^3r=$$

$$\iint_S [\boldsymbol{A}\times curl\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}\times curl\boldsymbol{A}]_n d\boldsymbol{S},$$

n乃指（向外）垂直于$d\boldsymbol{S}$之分量。

註: 應用 divergence 定理于$\boldsymbol{A}\times curl\boldsymbol{B}$，等。

2. 證明

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

乃（Ⅱ-11）方程式之解

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

（即第（Ⅱ-126）之意)。

3. 玆有$V(\boldsymbol{r})$之方程式

$$\nabla^2 V+k^2V=0 \qquad k=常數$$

設v乃一空間的體積，其表面爲S。玆引入一函數u

$$u(R)=\frac{1}{R}e^{ikR}, \qquad R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|,$$

係下方程式之解

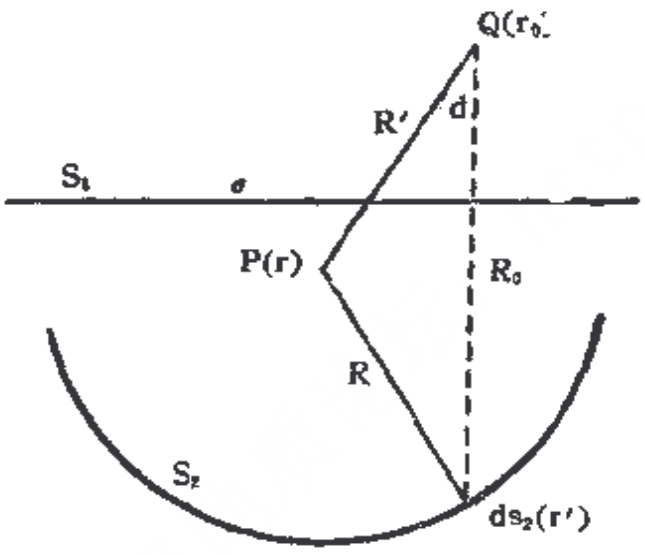
$$\nabla^2_R u + k^2 u = 0$$

故$u(R)$乃一以r點爲中心的圓球波。證明在S面內任何點r，$V(r)$之值係

$$V(r) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \left[\frac{e^{ikR}}{R}\frac{\partial V(r')}{\partial n} - V(r')\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikR}}{R}\right)\right]dS$$

如在一面積素ΔS上，$V=0$及$\frac{\partial V}{\partial n}=0$，證明在$S$內所有的點，$V$皆等於零。

4. Kirchhoff-Huygen原則



設$Q(r_0)$點爲

$$V(R_0) = \frac{1}{R_0}e^{ikR_0},$$

$$R_0 = |r' - r_0|,$$

波的波源；將閉面S視作由一無限平面S_1及一大半球面S_2構成。S_2半球面的中心爲$P(r)$點，其半徑爲$R=|r'-r|$，如圖。

證明當$R\to\infty$時，第3題之面積分成爲祇在S_1面的積分。

設S_1面代以一不透明的片而有一洞孔σ，Kirchhoff的計算$V(r)$的方法，係假設：

（1）在S_1不透明的部份，V和$\frac{\partial V}{\partial n}$都等於零，

（2）在洞孔σ，則V和$\frac{\partial V}{\partial n}$之值，　與引入不透明片之前的原來值相同。

此方法（或理論）的錯誤何在？

5. 在下式

$$V(r)=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left(G\frac{\partial V}{\partial n}-V\frac{\partial G}{\partial n}\right)dS$$

中之G函數，設取下方程式

$$\nabla_R^2G+k^2G=0$$

在體積v（$R=0$ 點除外）內之解，符合下各條件的

$$G(R)\to\frac{1}{R}e^{ikR}\qquad 當R\to 0$$

$$G(R)=0\qquad 在第4題中S_1面上,$$

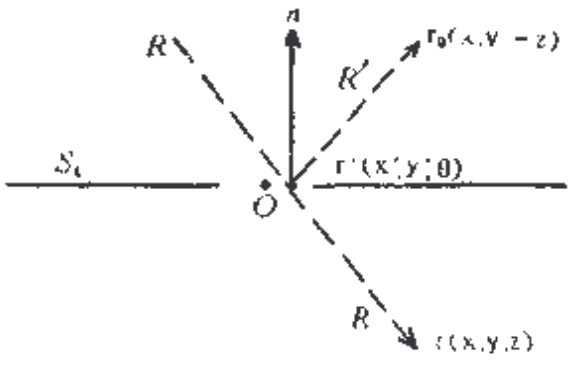
$$R\left(\frac{\partial G}{\partial n}-ikG\right)\to 0\qquad 當R\to\infty。$$

證明

$$V(r)=-\frac{1}{4\pi}\iint_{S_1}V\frac{\partial G}{\partial n}dS$$

6. Haygen 原則

於第4題（見前圖）之S_1面的σ孔，設有一座標，其中心點O在孔的中央（見圖）。使



$$G=\frac{e^{ikR}}{R}-\frac{e^{ikR'}}{R'}$$

$$R=|r-r'|,$$

$$R'=|r_1-r'|,$$

故在S_1面（包括孔σ）時，

$$G=0,$$

試由下式

$$\frac{\partial G}{\partial n}=-\frac{\partial G}{\partial x'}=2\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{e^{ikR}}{R}\right)\cos n\hat{R}$$

$$=2\cos n\hat{R}ik\frac{e^{ikR}}{R}\left(1-\frac{1}{ikR}\right)$$

在短波長 $\lambda\ll R$，或$\frac{2\pi R}{\lambda}=kR\gg 1$，情形下，證明

$$V(r)=-\frac{ik}{2\pi}\iint_{S_1}V(r')\frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|}\cos n\hat{R}\ dS$$

並解釋這 Huygen 原則的意義。

7. 如第 4 題的波源Q係一點源，證明

$$V(r)=-\frac{ik}{2\pi}\iint_{S_1}\frac{e^{ik|r_0-r_1|+ik|r-r'|}}{|r_0-r'||r-r'|}\cos n\hat{R}\ dS$$

8. Eikonal

設介體的介電常數爲 ϵ，電磁導常數爲 μ。電磁場在該介體中的傳播，遵守下波動方程式

$$\left(\nabla^2-\epsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)U(r,t)=0$$

（U爲電場E，或磁場H，或矢量位等，見本册第四章）。ϵ，μ 可能是座標x，y，z 的函數，而與時間 t 無關的。茲引用波速（相位速）v，波矢量（或稱爲傳播矢量）k，波長 λ 及頻率 ω，

$$v^2=\frac{1}{\mu\epsilon},$$

$$k^2=\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2=\left(\frac{\omega}{v}\right)^2,$$

並使

$$U(r,t)=u(r)e^{-i\omega t}$$

由此可得 u 的方程式爲

$$\nabla^2 u+k^2 u=0$$

玆引入Eikonal S, 其定義爲

$$u(r)=A(r)e^{ik_0 S(r)},$$

此處之k_0, 係 k 在介體爲眞空（$\epsilon=\epsilon_0, \mu=\mu_0$）之值,

$$k_0=\frac{2\pi}{\lambda_0}=\sqrt{\mu_0\epsilon_0}\,\omega$$

證明在 $\lambda_0\to 0$（或$k_0\to\infty$）的極限時, u 的方程式成

$$(\nabla S)^2-n^2(r)=0,$$

$$(\nabla lnA)\cdot(\nabla S)=-\frac{1}{2}\nabla^2 S,$$

$$n(r)=\frac{k}{k_0}=\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{\mu_0\epsilon_0}}=\text{折射率}。$$

試解釋 S 的物理意義。

9. 二次微分方程式

$$\Lambda y+\lambda\rho(x)y=0, \qquad \lambda=\text{常數}, \ \rho(x)\geq 0,$$

$$\Lambda=\frac{d}{dx}\left(p\,(x)\frac{d}{dx}\right)-q(x),$$

謂爲self-adjoint, 如對任二函數$y(x)$, $z(x)$,

$$z\Lambda y-y\Lambda z=\frac{dF(x)}{dx},$$

亦卽謂左方式爲一個函數$F(x)$的導數。如 $F(x)$符合下邊界條件

$F(b)-F(a)=0$ （或$F(b)=F(a)=0$）.

證明:

（1）屬於兩個不同 λ 值，λ_1，λ_2，之解$y_1(x)$，$y_2(x)$係垂直的，即

$$\int_a^b y_1(x)y_2(x)\rho(x)dx=0, \qquad \lambda_1\neq\lambda_2,$$

（2）運算子 Λ 的本徵值（eigenvalue）λ 係實數。

10. 證下列各方程式係self-adjoint的:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d}{d\theta}\right)P_l+l(l+1)P_l=0, \qquad 0\leq\theta\leq\pi$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d}{d\theta}\right)P_l^m-\frac{m^2}{\sin^2\theta}P_l^m+l(l+1)P_l^m=0,$$

$$0\leq\theta\leq\pi$$

$$\frac{d^2J}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dJ}{dx}+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)J=0, \qquad 0\leq x$$

$$\frac{d^2H}{dx^2}-2x\frac{dH}{dx}+2nH(x)=0, \qquad -1\leq x\leq 1$$

$$x\frac{d^2L}{dx^2}+(1-x)\frac{dL}{dx}+nL=0, \qquad 0\leq x$$

$$x\frac{d^2L}{dx^2}+(1-\alpha-x)\frac{dL}{dx}+(n-\alpha)L=0, \qquad 0\leq x$$

11. 所謂三角Bessel 函數$j_n(x)$係

$$j_n(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{n+\frac{1}{2}}(x),$$

$J_{n+\frac{1}{2}}(x)$見（Ⅱ-121, 121a, 122, 122a）各式。

$$\int_{-\infty}^{\infty} j_n(x)\, j_n(x)dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \dfrac{\pi}{2(2n+1)}, & m=n,\end{cases}$$

m, n 係正整數$n\geq 0$, $m>0$

註: 參看 G. N. Watson, Bessel Functions, P.404, 及本書（Ⅱ-133）式。

12.

$$r_{12}=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2x}\quad ,\quad x=\cos\theta$$

設 $r_1<r_2$ 證明

$$\int_{-1}^{1}\frac{e^{ikr_{12}}}{r_{12}}dx=2\frac{\sin kr_1}{kr_1}\,\frac{e^{ikr_2}}{kr_2}$$

註: 用下公式

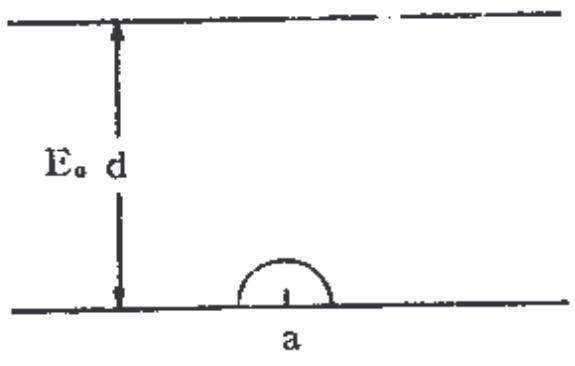
$$\frac{e^{ikr_{12}}}{r_{12}}=\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)j_l(kr_1)\{i\,j_l(kr_2)+(-1)^l j_{-l}(kr_2)\}\times P_l(x),$$

及(Ⅱ-122, 122a), (Ⅱ-73b) 各式。

13. 一長圓柱形導電桿，半徑爲a，外罩以均勻電介體，其半徑爲b，電介常數爲k。此桿置於均勻電場E中，桿與E垂直，導電桿連接於地（電位等於零）。求電介體內及外之電位，及導電桿上之電荷密度。

14. 一導電球，帶有電荷Q，置於一均勻電場E_0中。證明球上感應電在球外所產生的電場，係與一强度爲E_0a^3之雙電極所生的同。

15. 一平行板的電容器的一面，有一半球形的凸起處，其半徑



a，遠小於電容器兩板的間距 d $(a \ll d)$，如圖。離凸出處甚遠處的電場爲 E_0。求凸出半球面的電荷密度，及其附近板面，對面板面的密度。又求兩板間各處的電位。

16. 兩球形導電體，半徑各爲 a，各帶電荷 Q，兩球心之距離爲 d $(d>2a)$。求等位面及兩球面之電荷面密度。

17. 如前題兩球的電荷爲 Q 及 $-Q$，求等位面及兩球的電荷面密度

18. 有一電介體之球，其半徑爲 a，於其赤道平面上，繞有一細電絲圈，圈之半徑爲 $b(b>a)$，圈帶有電荷 Q。求球內的電位。

第三章　磁學與穩定電流

1. 真空中靜磁學

歷史上，磁學現象發現遠較電學爲早。約在1785年，Coulomb 提出兩個磁極之間作用力與距離平方成反比之定律（此處所謂磁極，並非孤立的單極，而是細長磁針之磁極）。眞空中，該力可由下式表示之*；

$$F=\frac{\mu_0}{4\pi r^2}p_1p_2 \qquad (\text{Ⅲ}-1)$$

若使　$\frac{\mu_0}{4\pi}=1$　(Ⅲ-2)

則每單位磁極强度 p_0，定義爲兩個同性單位磁極，其距離爲1 cm 時，其相互排斥力爲 1 達因。

$\boldsymbol{B}$，稱爲磁感應（magnefic induction），係作用在單位磁極 p_0之力，故

$$\boldsymbol{B}=\frac{F}{p}\ (\text{或，}\lim_{\Delta p\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta p}) \qquad (\text{Ⅲ}-3)$$

*注意，此處 Coulomb 定律係μ_0在分子上，而早期之文獻，則在分母。經由 (1) 式作p_0之定義。按此定義，則作用于單位磁極上之力爲B，而非H。關於B及H之意義，在下文第5節中將再申述之。

設定義$\boldsymbol{H}$（磁場强度）爲

$$\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H} \qquad (\text{Ⅲ}-4)$$

注意，於眞空中，$\boldsymbol{B}$與$\boldsymbol{H}$只差個常數μ_0，μ_0乃視所取之單位而定。至於$\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{H}$在磁介質裡不同情形，將於本章第 2 節申述之。

玆引入靜磁學之磁位（magnetic potential）U(r)如下；

$$U(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{p_1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|} \qquad (\text{Ⅲ}-5)$$

上式乃是由在$\boldsymbol{r}_1$處之磁極 p_1，於 $\boldsymbol{r}$ 點所產生之磁位。在 $\boldsymbol{r}$ 點之磁場可寫爲

$$B(\boldsymbol{r})=-\nabla U \qquad (\text{Ⅲ}-6)$$

$$=\frac{\mu_0 p_1}{4\pi R^3}\cdot\boldsymbol{R}, \qquad \boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1 \qquad (\text{Ⅲ}-7)$$

若磁極分佈的密度爲 ρ，則其磁位爲

$$U(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V\frac{\rho(\boldsymbol{r}_1)d^3\boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|} \qquad (\text{Ⅲ}-5a)$$

利用（Ⅰ-18）之 Gauss 定理，可得

$$div\ \boldsymbol{B}=\mu_0\rho \qquad (\text{Ⅲ}-8)$$

或得 Poisson 方程式

$$\nabla^2U=-\mu_0\rho \qquad (\text{Ⅲ}-8a)$$

但由實驗至今尚未發現單磁極之存在，故

$$\rho=0,$$

$$div\ \boldsymbol{B}=0 \qquad (\text{Ⅲ}-9)$$

磁偶矩（magnetic dipole moment）m之定義爲

$$m=pd$$

乃是由兩個異性而大小相等之磁極 p 構成。如其間距爲 d，則pd

之乘積，稱爲磁偶矩，或定義爲

$$m=\lim_{\substack{p\to\infty\\ d\to 0}} pd=\text{有限值}$$

一磁偶矩m置於磁場B中，則作用於其上之力偶，由第（3）式之定義，爲

$$\text{力偶}=[m\times B] \qquad (\text{Ⅲ-10})$$

m之能量則爲

$$W=-m\cdot B \qquad (\text{Ⅲ-11})$$

在r_1之磁偶矩，在 r 點所產生之磁位（若$|r-r_1|\gg d$）爲

$$U(r)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m\cdot R}{R^3} \qquad R=|r-r_1| \qquad (\text{Ⅲ-12})$$

$$=-\frac{\mu_0}{4\pi}m\cdot\nabla\left(\frac{1}{R}\right) \qquad (\text{Ⅲ-12a})$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}m\cdot\nabla_1\left(\frac{1}{R}\right) \qquad (\text{Ⅲ-12b})$$

這裡∇和∇_1係分別對座標 r 和 r_1 之梯度算符。若磁偶矩分佈之密度爲M（每單位體積的磁偶矩），則磁位爲

$$U(r)=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_v M(r_1),\nabla_1\left(\frac{1}{R}\right)d^3r_1,\quad R=|r-r_1| \qquad (\text{Ⅲ-13})$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\iint_S\frac{M\cdot dS}{R}-\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_v\frac{1}{R}div_1 M d^3r_1 \qquad (\text{Ⅲ-13a})$$

S乃該分佈之體積之邊界面，M亦稱磁化强度（magnetization），

2. 磁介質中靜磁學 (magnetostatics in a magnetic medium)

由 (13a) 和 (5a)，可見一磁偶之分佈，是相當於一磁極密度分佈

$$\rho_M = -div\, \boldsymbol{M} \qquad (\text{Ⅲ-14})$$

$$\sigma_M = M_n$$

M_n乃是沿 S 之法線的分量。這情形與靜電學中電介體裡靜電場現象完全一樣。(參閱 (Ⅰ-71b)—(Ⅰ-71a))

今將 (14) 代入 (8)，由於 (4) 式，可寫成

$$div\ (\mu_0 \boldsymbol{H}) = \mu_0 \rho_M,$$

故得　$$div\ (\mu_0 \boldsymbol{H}) = -\mu_0\ div \boldsymbol{M} \qquad (\text{Ⅲ-15})$$

玆定義在介體裡之$\boldsymbol{B}$磁場爲

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}) \qquad (\text{Ⅲ-16})$$

故由 (15)，(16) 可得

$$div\ \boldsymbol{B} = 0 \qquad (\text{Ⅲ-17})$$

此式綜合所有靜磁學中庫倫定律之結論，並指出無自由單磁極存在。下文將由$\boldsymbol{B}$和傳導電流與磁化電流間的關係，再導出 (16) 式，參閱 (65))。

物質中磁化强度$\boldsymbol{M}$之構成，可分爲兩部份：(1) 由永久磁性而來的$\boldsymbol{M}_0$，和 (2) 由外來磁場感應所生之$\boldsymbol{M}_H$，

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_0 + \boldsymbol{M}_H \qquad (\text{Ⅲ-18})$$

在某些溫度範圍中，M_0 是與溫度變化無關的。除鐵磁性物質（ferromagnetic material）外，所有其他物質之M_H，通常與H，的關係，可以線性接近表示之

$$M_H=\chi H \qquad (\text{Ⅲ}-19)$$

χ稱爲磁化率（ susceptibility ），其值可爲正或負，視物質不同而定。

（1）$\chi>0$ 順磁性（paramagnetism）

順磁性物質（如週期表內過渡元素之鹽類等）之 χ，與溫度之關係如下;

$$\chi=\frac{C}{T}$$

這就是所謂 Curie 定律。1905年，法國P. Langevin 氏有理論解釋之。該理論可詳閱本書第二册，甲部，第四章第 4 節。該理論可簡述如下。液離或氣體之順磁性物質，由原子或離子組成。這些原子或離子內之電子，不僅有軌道上運動並有自旋運動。這些運動可產生磁偶矩。由於分子之運動，這些磁偶矩的排列方向是無規律的，在任一特定方向M之平均值應爲 0 。但若有外磁場H加於其上時，這些磁偶矩有順此磁場方向指向的趨勢，故沿着H方向之磁偶矩M_H 平均值已不爲零。但若溫度愈高，則熱激動現象愈呈重要，M_H 之平均值亦愈小。在溫度T時，每個磁偶矩沿着H方向之分量平均值m_H，依照 Boltzmann 定律計算可得

$$\overline{m}_H=\frac{m_0^2}{3kT}H$$

但　　$N\bar{m}_H = \bar{M}_H = \chi H$

故　　$$\chi = \frac{Nm_0^2}{3kT} \qquad (\text{Ⅲ}-20)$$

N乃是每單位體積之分子數。(20) 也就是上文之 Curie 定律。

（2）反磁性 (*diamagnetism*)　$\chi < 0$

有許多物質如稀有氣體，氫分子，鹼土金屬離子如 Na^+，K^+ 等，或鹵素離子等，它們的原子或離子內之電子雖有軌道運動或自旋運動，但其總角動量爲零，故沒有磁偶矩之產生。但當有外加磁場時，由於需產生反抗電流以阻止磁場進入（請參閱下面 Lenz 定律），該電流產生磁偶矩，成爲負磁化率。反磁性之古典理論將於第六章，第 2 節討論之。

順磁性之情形與電學極化現象非常相似。(關于後者的 Debye 理論，與前者的 Langevin 理論，實是相同的)。但電學中則無類似$\chi < 0$之情形。

（3）鐵磁性 (ferromagnetism)

自然界有許多非常强的磁性物質（如鐵等），它們不僅有很大M値（故必有很大磁導率μ），且有顯著的磁滯現象。關於鐵磁性之理論比上面述及之順，反磁性理論遠爲困難與複雜。在此，吾人將不予以討論。

除鐵磁性物質外，由 (16) 和 (19)，已知

$$\boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{H} + \chi \boldsymbol{H})$$

$$= \mu \boldsymbol{H}$$

故

$$\mu=\mu_0(1+\chi) \qquad (\text{Ⅲ}-21)$$

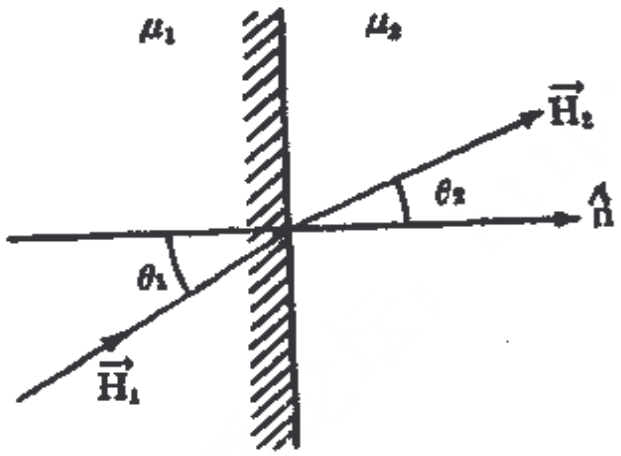
現將討論兩個介質間B場之邊界條件，與靜電學之邊界條件（Ⅰ-87）的討論完全相同。但因無自由單磁極之存在，故$\boldsymbol{B}$之法線分量在交接面，乃滿足連續條件。

$$(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)\cdot\boldsymbol{n}=0, \qquad (\text{Ⅲ}-22)$$

或按（Ⅰ-89）式，

$$Div\ \boldsymbol{B}=0 \qquad (\text{Ⅲ}-22a)$$

由（22）和（21）可得



$$\frac{H_2\cos\theta_2}{H_1\cos\theta_1}=\frac{\mu_1}{\mu_2} \qquad (\text{Ⅲ}-23)$$

如圖θ_1和θ_2乃分別爲H_1，H_2與邊界面之法線n之夾角。若$\mu_1\gg\mu_2$（如介質1係鐵磁性物質），則$\cos\theta_2\approx1$及H_2垂直於邊界面。這與導電體外之電場邊界條件相類似。

下文第四節將述$\boldsymbol{H}$之邊界條件。

3. 靜磁場能量

眞空中靜磁場能量係與（Ⅰ-22）相似，而於介質裡，則仍與（Ⅰ-91）相似，故

$$W=\frac{1}{2}\iiint \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}d^3\mathrm{r} \qquad (\text{Ⅲ}-24)$$

這裡　　$\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}$　　於眞空裡

$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$　　於介質裡，（16）式

若有永久磁化强度$\boldsymbol{M}_0$之分佈（16），（18），則其能量爲

$$W=\frac{1}{2}\iiint \mu_0\boldsymbol{M}_0\cdot\boldsymbol{H}d^3\mathrm{r}$$

由（16）和（21），得

$$W=-\frac{1}{2}\iiint \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}d^3\mathrm{r}+\frac{1}{2}\iiint (1+\chi)\mu_0H^2d^3\mathrm{r} \qquad (\text{Ⅲ}-24a)$$

因 $div\ curl\equiv 0$，由（17）式，吾人可引入一向量場（vector field）$\boldsymbol{A}$，稱爲向量位 vector potential，使

$$\boldsymbol{B}=curl\boldsymbol{A} \qquad (\text{Ⅲ}-25)$$

按任何兩向量函數，皆符合下述之恒等式

$$\boldsymbol{H}\cdot curl\boldsymbol{A}=div[\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{H}]+\boldsymbol{A}\cdot curl\boldsymbol{H}$$

故（24）可改寫爲

$$W=\frac{1}{2}\iiint div(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{H})\,d^3\mathrm{r}+\frac{1}{2}\iiint \boldsymbol{A}\cdot curl\boldsymbol{H}d^3\mathrm{r}$$

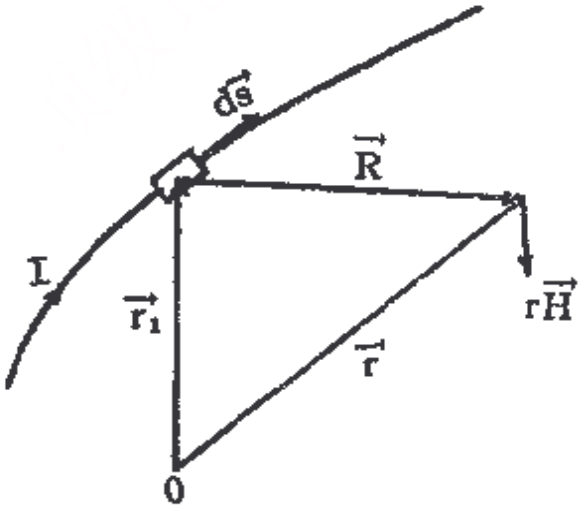
第一項積分可應用 Gauss 定理：將體積分化成面積分。如場$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{H}$在無窮遠之距離時，其值趨近於零，分別如$\frac{1}{r^2}$，$\frac{1}{r^3}$，則面積分爲零。故得

$$W=\frac{1}{2}\iiint_V (\boldsymbol{A}\cdot curl\boldsymbol{H})d^3\mathrm{r} \qquad (\text{Ⅲ}-26)$$

4. 穩定電流所產生之磁場：Biot-Savart定律

在早期，靜磁學乃建立于磁極觀念上。早在 1825 年，Ampere (1775—1836)揣測謂磁性係源自物質內分子間之電流。可驚異的是當時分子的存在，是尚未建立的。當然，按近代理論原子結構之看法，這觀念是完全正確的。現代電磁學之討論皆根據電流產生磁場效應，而不用磁極觀念。現代的靜磁學理論，皆是根據下述之 Biot-Savart 定律和 Ampere 定律，而不是 Coulomb 定律。

於1820年，首先由丹麥的 Oersted (Hans Christian, 1777-1851) 發現穩定電流產生磁場（影響磁針）之現象。不久後，Biot (Jean-Baptiste, 1774-1862) 和 Savart (Felix, 1791-1841) 建立關於磁場之定律如下；若有電流 I 於導線上（如圖），今在線上 $\boldsymbol{r}_1$ 點取一導體元素 $d\boldsymbol{S}$，其方向爲電流方向，則在 $\boldsymbol{r}$ 點之磁場爲

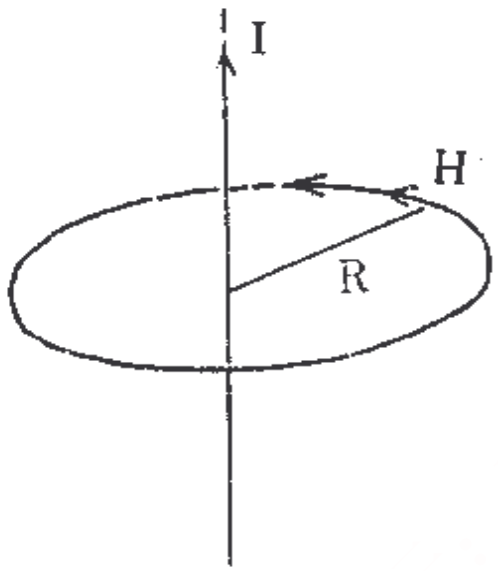


$$\gamma \boldsymbol{H} = \frac{I}{4\pi R^3}[d\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{R}] \qquad (\text{III-27})$$

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1$$

〔$ds \times R$〕之方向由右手旋轉定則決定之。實驗裡，(27) 右邊之量相當於作用在單位磁極上之力（這空間裡之介質雖是空氣，但吾人仍可視其爲在眞空)。欲說明 (27)，玆取一特例：有一無窮細長的直線導線，載有電流 I，求於距離導線 R 處之磁場（如圖所示）

由 (27)，經簡單積分，可得



$$\gamma H=\frac{I}{2\pi R} \qquad (\text{Ⅲ-28})$$

H乃位在垂直於電流之平面上，構成無數同心圓（如圖）。

一個單位磁極，如沿H繞電流一週，所作之功

$$2\pi\gamma HR=I \qquad (\text{Ⅲ-29})$$

在舊的文獻中，這稱爲magnetomotive 力，雖則以維度言，實非"力" 也。在進一步探討磁學前，讀者或會訝異 (27) 式 Biot-Savart定律之形式與其他書有異。在此我們將試申述數點。

（i）(27) 式之 γ 常數

靜電學中之庫倫定律，吾人引入常數ϵ_0，而在靜磁學之庫倫定律也引入常數μ_0。即在眞空，吾人亦須引入這兩個常數，俾能

自由選擇電荷與磁極之單位的定義。於今， Biot-Savart 定律，係電流與磁的相互關係的定律，我們沒有先天的理由（ a priori reason ）認爲 ϵ_0和μ_0已够將所有電磁量自由定義了的。故吾人在 Biot-Savart 定律中引入另一常數 γ。下文吾人將可看出：在 (a) 靜電單位制 (*e.s. u*)，(b) 電磁單位制 (*e. m. u*) (c) *m. k. s. a*單位制，所有電磁量的選定，皆可採 $\gamma=1$ 之值。但在Gauss 制，則必需使$\gamma=c$ （c爲光在眞空中速率)。

（ii）$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$

第（3）式中，曾定義$\boldsymbol{B}$爲作用于單位磁極之力。但在 (27) 或 (28) 式， Biot-Savart 定律却以H來表示，而H是未曾先有定義的。有些書的 Biot-Savart 定律，是用 $\boldsymbol{B}$ 而不是 $\boldsymbol{H}$，更使人迷糊。所以於此處，吾人擬著重下一點。若電流 I 是傳導電流 (conduction current) 時，則正確 Biot-Savart 定律應爲 (27) 或 (28)。從歷史的實驗觀點，發現 Biot-Savart 定律時，電流是傳導電流。這點在討論介質中之磁化電流時將可予以澄清。參閱 (64-65a) 式。

若吾人不願將 Biot-Savart 定律看作H的定義，則關於$\boldsymbol{H}$之定義，仍有待解釋。這點亦需在討論到 Ampere 定律時予以解釋。

今再回到 (28) 或 (29) 之 Biot-Savart 定律。該定律亦可表成下式

$$\gamma\int_c \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{s}=I \qquad (\text{III}-30)$$

該積分係取圍繞着電流 I 之封閉曲線 C 的積分。此處 I 可能不是一個電流，而是包括在 C 曲線內所有電流。若 C 是圍繞 I 之同心圓時，則（30）式可化爲（28）式。（30）式之完滿論據，將於下文見之。

若今有一電流密度 j 之電流分佈而不是單一電流，則（30）爲

$$\oint_C \gamma H \cdot ds = \iint_S j \cdot dS \qquad (\text{Ⅲ}-31)$$

j 爲每通過單位面積之電流，（面積與 j 垂直），S 係以封閉曲線 C 爲邊界之任一表面。由 Stokes 定理得知

$$curl\, \gamma H = j \qquad (\text{Ⅲ}-32)$$

此處宜注意者，是上式祇適用于穩定電流，（詳見下文）。

若取（32）之兩邊之 divergence，因 div curl≡0，故得

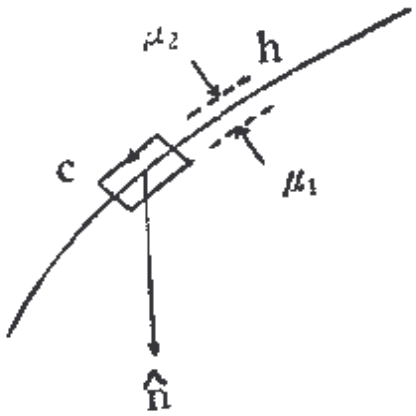
$$div j = 0 \qquad (\text{Ⅲ}-33)$$

由電荷不滅定律，電荷密度 ρ 和電流密度 j 應遵守連續性方程式（ continuity equation ）

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\, j = 0 \qquad (\text{Ⅲ}-34)$$

祇於穩定電流情況下，電流通過的每點皆無增損，即 $\frac{\partial \rho}{\partial t}=0$，始得 $divj=0$。若電流隨着時間而改變，則由（32）所導出之（33）就不合（34）之連續性方程式。此點將于第四章、第 2 節詳論之。

前已述及 B 之邊界條件，今將討論 H 之邊界條件。設若有兩



不同之性質μ_1和μ_2。今在跨過交接面取一垂直截面，使ds爲一長方形的封閉線C上，圍繞交接線，如圖，該長方形之長邊各在不同介質之一側。n爲垂直於該小平面dS之法線，n故切於交接面。玆使該長方形之短邊h漸小而趨近於零。由(31)，H切線分量滿足下式

$$\gamma(H_2-H_1)_t=i \qquad (\text{Ⅲ}-35)$$

i爲S面上之電流 面密度（每單位長度之電流），若 $i=0$ 則，

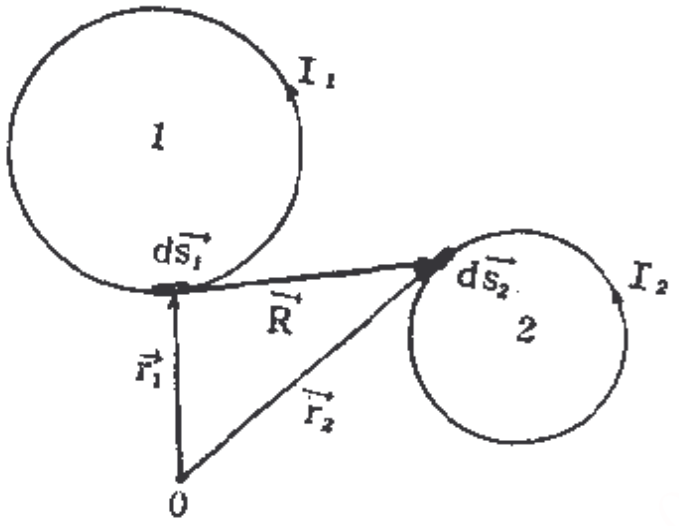
$$(H_2-H_1)_t=0 \qquad (\text{Ⅲ}-35a)$$

該式與（Ⅰ-89）之電場E邊界條件相類似。

5. Ampere定律：兩電流線圈間之作用力

Oersted 發現電流之磁效應後，Ampere 卽作進一步探討，其結果刊於1825年的一極重要的著作；確立了帶有電流之導體在磁場內所受作用力之定律，及兩個電流間的作用力之定律。後者稱爲安培（Ampere）完律。

若有兩載電流之導體線圈（如圖），第一線圈內載有電流I_1，今於 r_1 點取一線元素 ds_1。同樣的，於載電流 I_2 第二線圈上也取一 ds_2 之線元線。由實驗得知作用於r_2點之ds_2上之力爲



$$F_2=\frac{\mu_0}{4\pi\gamma^2}I_1I_2\frac{1}{R^3}\left[ds_1\times(ds_1\times R)\right]$$

(Ⅲ-36)

$$R=r_2-r_1$$

常數 μ_0 和 γ 乃視 Coulomb 定律中之磁極單位和電流之單位而定。

該定律可化成兩個定律；一是 (27) 式之 Biot-Savart 定律

$$\gamma H(r_2)=\frac{I_1}{4\pi R^3}\left[ds\times R\right] \qquad (Ⅲ-37)$$

此乃ds_1線素的電流I_1，在r_2點所產生之場H。另一定律爲

$$F_2=I_2\left[ds_2\times\frac{1}{\gamma}B(r_2)\right] \qquad (Ⅲ-38)$$

此乃 I_2ds_2 在磁場 $B(r_2)$ 所受的作用力。(38) 可視爲 B 之定義，即B係每單位電流每單位長度s_2所受之作用力，以之替代第 (3) 式的定義（謂B乃每單位磁極上所受之作用力)。目前電磁學皆傾向於採用電流以定義所有的磁量。在本書中，吾人特將第

（1）式中之Coulomb 定律，第（27）式的 Biot-Savart 定律，和第（38）式之 Ampere *定律，寫成一形式，使$\boldsymbol{B}$的兩種不同定義，是相互吻合而不相矛盾的。

註* （38）式之定律係 Ampere 所立。Heaviside 認爲是 Ampere 之最偉大貢獻。有些較舊的書亦稱該式爲 Ampere 定律。但很不幸，最近一些書裡，對（38）式皆不特別予以命名。

若將（36）之 Ampere 定律，與（37）Biot-Savart 定律及（38）之Ampere 定律相比較，可看出於眞空時

$$\frac{1}{\gamma}B=\frac{\mu_0}{\gamma^2}\gamma H \qquad (\text{Ⅲ}-39)$$

或　　$B=\mu_0 H$　　（Ⅲ-39a）

此可視爲H的定義．由此乃視（36）式爲電流的定義，而（38）式却是B的定義，最後（37）或（39）係H的定義。

今再回頭討論（36）式之 Ampere 定律。對有限長的s_1和s_2之導線，則作用於s_2之力爲

$$\boldsymbol{F}_2=\frac{\mu_0}{4\pi\gamma^2}I_1I_2\int_{S_2}\int_{S_1}\frac{1}{R^3}\left[d\boldsymbol{s}_2\times(d\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{R})\right], \qquad (\text{Ⅲ}-40)$$

化簡可得

$$\boldsymbol{F}_2=\frac{\mu_0}{4\pi\gamma^2}I_1I_2\int_{S_2}\int_{S_1}\left[\frac{d\boldsymbol{s}_2\cdot\boldsymbol{R}}{R^3}d\boldsymbol{s}_1-\frac{(d\boldsymbol{s}_1\cdot d\boldsymbol{s}_2)}{R^3}\boldsymbol{R}\right] \qquad (\text{Ⅲ}-41)$$

若s_1和s_2爲兩個密閉線圈（並不需係平面的），則第一個積分爲零。

欲求作用在s_1之力F_1，則只需將下標 1 和 2 予以交相替換。又因$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$爲向量，故可見

$$\boldsymbol{F}_2=-\boldsymbol{F}_1$$

這卽是牛頓第三定律。

Ampere 定律之一特例係：兩條載有電流的無窮長平行導線，二者間距離爲R，則作用於每導線上每單位長之力，由（36）式可求得

$$\frac{\Delta F}{\Delta L}=\frac{\mu_0}{4\pi\gamma^2}\ \frac{2I_1I_2}{R}\qquad(\text{III}\text{-}42)$$

用這個形式的 Ampere 定律作電流之定義，是極方便的，("不需明顯地"使用磁極的觀念的)。在本書導言中，卽以此作m. k. s. a 制中電流單位之定義。

上段特用"不需明顯地"數字，是經過下述的考慮的。在用 Coulomb 定律作磁極 p 的定義，是和常數μ_0有關的。見第（3）式。如以 Ampere 定律第（42）式作電流的定義，而（42）式有μ_0之出現，則間接地電流也和p有關的。由（42）式定義I，再以（37）式定義B，和以第（3）式定義B，兩個定義在因次上是相符合而不矛盾的。由於未有自由單磁極的證實，現代的偏向是不採用磁極的觀念，而却採用（42） Ampere 定律作電流的定義。再由此而按（38） 式 Ampere 定律，作B的定義。這樣，表面上似未"顯明地"使用磁極觀念，但因（42）式有μ_0之出現，則B與磁極之間仍有關係存在的。所幸的是根據上述的兩種觀點的定義，是不相抵觸的。

在此我們擬再指出卽在眞空，B和H仍有分別的問題。我們已有下列各關係

$$F=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{p_1p_2}{r^2} \qquad (\text{Ⅲ}-1)$$

$$B=\frac{F}{p} \qquad (\text{Ⅲ}-3)$$

$$\frac{B}{\mu_0}=H=\frac{I}{2\pi R} \qquad (\text{Ⅲ}-28)$$

在後一式中已使$\gamma=1$。在（1）式中，我們使 $\frac{\mu_0}{4\pi}=1$ 作磁極單位的定義，以（3）式定義B，再按（28）定義I。p之單位是與$\sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}}$成比例，而$B$則與$\sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}}$ 成比例。按較早期的習慣，上三定律乃寫作下列形式；

$$F=\frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{p_1p_2}{r^2} \qquad (\text{Ⅲ}-1a)$$

$$H=\frac{F}{p} \qquad (\text{Ⅲ}-3a)$$

$$H=\frac{I}{2\pi R} \qquad (\text{Ⅲ}-28a)$$

在（1a）式使 $4\pi\mu_0=1$ 作磁極之單位的定義，它的數值，和今採用之單位制完全相同，但其單位却與 $\sqrt{4\pi\mu_0}$ 成比，而作用於單位磁極之力則爲H，與 $\frac{1}{\sqrt{4\pi\mu_0}}$ 成比。因此，由（3）式所得作用於單位的磁極之力 B，乃是早期習慣所使用之（3a）式的 H 的μ_0 倍。下述的關係

$$B=\mu_0 H$$

在舊的或新的制度裡均相同。

從上述的比較，知在昔日制度裡，H 乃對(1a)式中定義的

單位磁極之作用力，而在目前通用之制度中，對由(1)式定義的單位磁極之作用力乃係B，雖則B可由（42）式之 Ampere 定律而定義的。（42）式雖與磁極沒有直接關係，但由於 μ_0 之出現，仍與 Coulomb 定律有關係之存在，故亦與磁極有間接之關係。〔μ_0在（1），（23）及（42）式出現的位置，是使前述兩個觀點的B定義，不相衝突的〕。

這裡要著重的，是上述對B和H的討論，不是無謂的，因爲 μ_0 並非永係無因次之常數（雖則於(1)式裡可使 $\mu_0 = 4\pi$，而於(1a)可使 $\mu_0 = \frac{1}{4\pi}$)。在 Gauss 制，我們使 $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$，但必需引用第三個因次常數 $\gamma = c$ 於（28）和許多關係式。在其他的制度，則 ϵ_0 和 μ_0 不是無因次的純數字常數。

但欲更瞭然B和H之關係，則有待下節介質問題的討論，見（64），（65）和（65a）各式。

6. 電流所產生之向量位(vector potential 與磁矩(magnetic moment)

於穩定電流下，由(25)，(32) 和 (39a)，可得

$$curl\, \boldsymbol{B} = curl\ curl\, \boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{\gamma} \boldsymbol{j} \qquad (\text{Ⅲ}-44a)$$

按恒等式

$$curl\, curl = grad\, div - \nabla^2$$

及在靜磁學中可加下條件（見下第四章（Ⅳ-18）式）

$$div\, A=0 \qquad (\text{Ⅲ-43})$$

故得

$$\nabla^2 A=-\frac{\mu_0}{\gamma} j \qquad (\text{Ⅲ-44})$$

這乃是一個 Poisson 方程式，它在無邊界之空間裡的特解（見Ⅱ-15）式係

$$A(r')=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{j(r)d^3r}{|r-r'|} \qquad (\text{Ⅲ-45})$$

(45) 式係 r 點之電流分佈密度爲 $j(r)$，在 r' 點所產生之向量位。

今若有一小電流圈(如圖)，它的大小，遠小於與觀察點 P 之距離（$|R|=|r-r'|$）。求在 r 點之向量位。

首先將 $\frac{1}{|r-r'|}$ 展開，並取到 $\frac{r'}{r}$ 項爲止，

$$\frac{1}{|r-r'|}=\frac{1}{r}+\frac{r\cdot r'}{r^3}+\cdots\cdots \qquad (\text{Ⅲ-46})$$

代入 (45) 式，則向量位爲

$$A(r)=\frac{\mu_0}{4\pi\gamma}\left[\oint\frac{Idr'}{r}+\oint I\frac{(r,r')}{r^3}dr'+\cdots\cdots\right] \qquad (\text{Ⅲ-47})$$

r 爲定點，積分乃是沿該密閉之小線圈的積分。第一個積分 $\oint dr'=0$。第二個積分可證明* 爲

---

* $\frac{1}{2}[(r'\times dr')\times r]_x=\frac{1}{2}(r'\cdot r)dr'_x-\frac{1}{2}r_x(r\cdot dr')$

所以

$$(r\cdot r')dr'_x-\frac{1}{2}[r'\times dr']\times r_x=\frac{1}{2}(r\cdot r')dr_x'+\frac{1}{2}(r\cdot dr')r_x'$$

及 $\oint_{s'}(r\cdot r')dr'-\frac{1}{2}[r'\times dr']\times dr\}=\frac{1}{2}\oint_{s'}d(r'(r'\cdot r))=0$

$$\oint(\mathbf{r},\mathbf{r}')d\mathbf{r}'=\frac{1}{2}\oint[(\mathbf{r}'\times d\mathbf{r}')\times\mathbf{r}] \qquad (\text{Ⅲ-48})$$

故

$$\mathbf{A}=\frac{\mu}{4\pi r'^3}\left\{\frac{1}{2}\oint\mathbf{r}'\times d\mathbf{s}\right\}\times\mathbf{r} \qquad (\text{Ⅲ-49})$$

這裡 $d\mathbf{s}=d\mathbf{r}'$。今定義一個電流圈之磁矩爲

$$\mathbf{m}=\frac{1}{2r}I\oint\mathbf{r}\times d\mathbf{s} \qquad (\text{Ⅲ-50})$$

所以　　$$\mathbf{A}\epsilon\mathbf{r}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{[\mathbf{m}\times\mathbf{r}]}{r^3} \qquad (\text{Ⅲ-51})$$

上式乃是由微小之電流線圈於 $\mathbf{r}$ 點所產生之向量位。(50) 式可寫爲

$$\mathbf{m}=\frac{1}{r}I\iint d\mathbf{S}=\frac{1}{r}I\mathbf{S} \qquad (\text{Ⅲ-52})$$

這裡 $d\mathbf{S}=\frac{1}{2}(\mathbf{r}\times d\mathbf{s})$ 爲向量面積素，$\mathbf{S}$ 乃該線圈之向量面積。在平面線圈情形下，S 卽係圈之面積。

由電流線圈所產生之磁場 B 爲

$$\mathbf{B}(\mathbf{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\,curl\frac{\mathbf{m}\times\mathbf{r}}{r^3}=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5}-\frac{\mathbf{m}}{r^3}\right] \qquad (\text{Ⅲ-53})$$

如係一電流素之分佈，則只要將 (50) 代以下式

$$\mathbf{m}=\frac{1}{2r}\iiint(\mathbf{r}'\times\mathbf{j})d^3\mathbf{r}' \qquad (\text{Ⅲ-54})$$

第 (51) 式之 $\mathbf{A}$ 和 (53) 式之 $\mathbf{B}$，仍皆可用此 $\mathbf{m}$。

若磁矩於空間分佈之密度爲 $\mathbf{M}(\mathbf{r}_1)$(每單位體積之磁矩)，則向量位 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$，由 (51) 式得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}_1)\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|^3}\,d^3\boldsymbol{r}_1 \qquad (\text{Ⅲ}-55)$$

玆考慮由於磁性物質中由感應磁化 $\boldsymbol{M}_H$ 所產生的該向量位 $\boldsymbol{A}_M$（非如（50）和（51）等式中由電流所產生之$\boldsymbol{A}$），則與(55)相似，可得

$$\boldsymbol{A}_M(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{\boldsymbol{M}_H(\boldsymbol{r}_1)\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|^3}\,d^3\boldsymbol{r}_1 \qquad (\text{Ⅲ}-56)$$

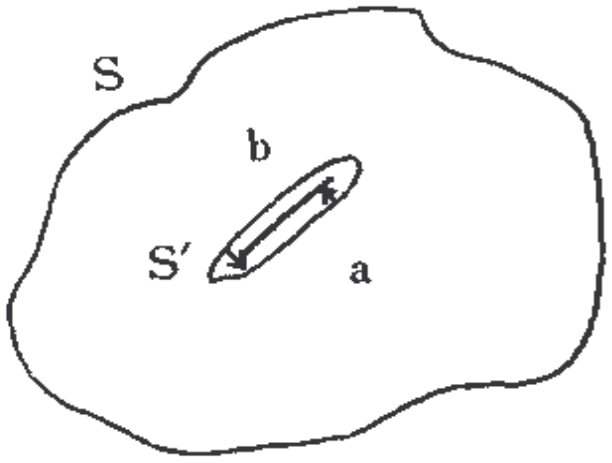
今

$$curl_1\frac{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}_1)}{R}=\frac{1}{R}\,curl_1\boldsymbol{M}+\frac{\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{M}_H}{R^3},\quad \boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1 \qquad (\text{Ⅲ}-57)$$

下標 1 指係對 $\boldsymbol{r}_1$ 微分。

$$\iiint_V curl_1\left(\frac{\boldsymbol{M}_H}{R}\right)d^3\boldsymbol{r}_1=\iint_S\frac{d\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{M}_H}{R} \qquad (\text{Ⅲ}-58)$$

S乃是概括所有磁性物質的體積之表面。如體積V中，有 a，b 兩介質之邊界面 S_{ab}，則 M 於跨過 S_{ab} 時有不連續性。吾人可用一密閉面 S' 包圍 S_{ab}，除去該不連續性，（如圖所示）。則上



積分成爲

$$\iint_S \frac{d\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{M}_H}{R} \to \iint_S \frac{d\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{M}_H}{R} + \iint_{S'} \frac{d\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{M}_H}{R} \qquad (\text{Ⅲ}-59)$$

假使所有磁性物質在 S 面內，則第一個積分爲零。當 S' 趨合 S_{ab} 時，則第二個積分爲

$$-\iint_{S_{ab}} \frac{d\boldsymbol{S}_{ab}\times\boldsymbol{M}_b}{R} + \iint_{S_{ab}} \frac{d\boldsymbol{S}_{ab}\times\boldsymbol{M}_a}{R} \qquad (\text{Ⅲ}-60)$$

將 (59)，(60) 代入 (58) 式裡，並將 (58)，(57) 代入 (56) 式，則得

$$\boldsymbol{A}_M(r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \frac{curl\,\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}_1)d^3\boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|} + \frac{\mu_0}{4\pi}\iint_{S_{ab}} \frac{(\boldsymbol{M}_b-\boldsymbol{M}_a)\times d\boldsymbol{S}_{ab}}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_1|} \qquad (\text{Ⅲ}-61)$$

$d\boldsymbol{S}_{ab}$ 之方向乃由 a 到 b。

玆將 (61) 式與 (45) 式相較，即見物質之磁化强度 M，相當於一個分子的平均電流密度 $\boldsymbol{j}_M$

$$\overline{\boldsymbol{j}_M} = \gamma\, curl\,\boldsymbol{M} \qquad (\text{Ⅲ}-62)$$

且兩物質之間邊界面 S_{ab} 之 M 亦與一平均表面電流密度相當

$$\overline{\boldsymbol{i}_M} = (\boldsymbol{M}_b-\boldsymbol{M}_a)\times\boldsymbol{n} \qquad (\text{Ⅲ}-63)$$

$\boldsymbol{n}$ 係 S_{ab} 面由 a 到 b 之法線（單位矢量）。

若 (32) 寫爲下式

$$curl\,\mu_0\boldsymbol{H} = \frac{\mu_0}{\gamma}\boldsymbol{j}$$

對右方之 j，加上相當之分子電流（62），並引入一個 B

$$curl B=\frac{\mu_0}{\gamma}(j+\gamma\, curl\, M_H), \qquad (\text{Ⅲ}-64)$$

或

$$curl\left(\frac{B}{\mu_0}-M_H\right)=j \qquad (\text{Ⅲ}-65)$$

依照（16），則再得前此之（32）式

$$curl\,\gamma H=j \qquad (\text{Ⅲ}-65a)$$

按此，傳導電流與 H 的關係，和總電流（傳導＋磁化）與 B 的關係相當。這與電學（Ⅰ-79），（Ⅰ-75）完全類似：

$$div\, D=\rho$$

$$div\,\epsilon_0 E=\rho+\rho_p$$

此處是謂自由電荷與 D 的關係，和總電荷（自由＋極化）與 E 的關係相當。由此我們可說 B 是相當於 E，而 H 是相當於 D 的。

第（19）式中，M_H 代以近似值

$$M_H=\chi H \qquad (\text{Ⅲ}-66)$$

故從（65），得

$$\frac{B}{\mu_0}-\chi H=H$$

或

$$B=(1+\chi)\mu_0 H \qquad (\text{Ⅲ}-67)$$

$(1+\chi)\mu_0=\mu$ 稱爲磁導率（permeability）

$$B=\mu H \qquad (\text{Ⅲ}-67a)$$

如感應磁化 M_H 外，還有永久磁化 M_0 如（18）式，則祇需將（67），(67a）代以下式

$$B=(1+\chi)\mu_0 H+\mu_0 M_0 \qquad (\text{Ⅲ}-68)$$

$$B=\mu H+\mu_0 M_0 \qquad (\text{Ⅲ}-68a)$$

磁矩m於磁場B中之能量，由（11）式可知爲

$$W=-m\cdot B \qquad (\text{Ⅲ}-69)$$

m見於（50）式。作用於m之力爲

$$F=\nabla(m\cdot B) \qquad (\text{Ⅲ}-70)$$

7. 穩定電流的磁場之能量

(26) 式裡已知場能爲

$$W=\frac{1}{2}\iiint(A\cdot curl\, H)d^3r$$

用 (32) 式，可得

$$W=\frac{1}{2\gamma}\iiint(A\cdot j)d^3r \qquad (\text{Ⅲ}-71)$$

上式係磁場之能量，以電流密度 j （這是磁場H之源）和向量位表示的。如向量位是由電流密度 $j(r)$ 而來的，則由（45）式可得

$$W=\frac{\mu_0}{8\pi\gamma^2}\iiint\cdot\iiint\frac{j'(r')\cdot r(r)}{|r-r'|}d^3r'\,d^3r \qquad (\text{Ⅲ}-72)$$

此式可視爲穩定電流的交互作用之能量。

假如有許多負載電流（I_k）之導體（k），則（72）可寫爲

$$W=\frac{1}{2\gamma^2}\sum_{i,k}L_{ik}I_iI_k \qquad (\text{Ⅲ}-73)$$

這裡

$$L_{ik}=\frac{\mu_0}{4\pi I_iI_k}\iiint_{V_i}\iiint_{V_i}\frac{\boldsymbol{j}_i(\boldsymbol{r}_i)\cdot\boldsymbol{j}_k(\boldsymbol{r}_k)}{|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_k|}d^3\boldsymbol{r}_i\,d^3\boldsymbol{r}_k,\quad i\neq k \qquad (\text{Ⅲ}-74)$$

此間的 L_{ik}，稱爲互感係數(coefficients of mutual induction)，其值大小，乃視導體之幾何形狀與空間分佈情形而定。若有"線"性電流（當導體之截面遠小於它們之間距離 $|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_k|$ 時），則（74）可化爲

$$L_{ik}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{s_i}\int_{s_k}\frac{d\boldsymbol{s}_i\cdot d\boldsymbol{s}_k}{|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_k|},\qquad i\neq k \qquad (\text{Ⅲ}-74a)$$

$d\boldsymbol{s}_i, d\boldsymbol{s}_k$ 乃是導體之長度素（element of length)。由（74）或（74a），可見

$$L_{ik}=L_{ki} \qquad (\text{Ⅲ}-75)$$

玆將（71）式應用于一群導體 k，則

$$W=\frac{1}{2\gamma}\sum_k\iiint\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}_k\,d^3\boldsymbol{r}_k=\frac{1}{2\gamma}\sum_kI_k\oint\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s}_k \qquad (\text{Ⅲ}-76)$$

由 Stokes 定理

$$\oint_{s_i}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s}=\iint_{s_i}curl\,\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}\equiv\Phi_k \qquad (\text{Ⅲ}-77)$$

此處的面積分之值，即第 k 線路之磁通量（magnetic flux)。該通量於下一章電磁感應之法拉第定律中，爲一極重要之觀念。

目前我們以（77）定義 Φ_k。(76) 可化爲

$$W=\frac{1}{2\gamma}\sum_k I_k\Phi_k \qquad (\text{Ⅲ}-78)$$

由 (78) 與 (73) 相比，得

$$\gamma\Phi_k=\sum_i L_{ik}I_i=\sum_i L_{ki}I_i \qquad (\text{Ⅲ}-79)$$

$L_{ki}=L_{ik}$ 互感係數，乃將通過 k 線路之磁通量 Φ_k，與 i 線路之電流 I_i 連繫起來。

但在 $i=k$ 情形，方程式（74）和（74a）不能適用，因爲 $|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j|=0$。若只有單一線路時，吾人可定義自感係數 (coefficient of self-inducion) L 爲

$$W=\frac{1}{2\gamma}LI^2 \qquad (\text{Ⅲ}-80)$$

若有一線電路s，由 (71) 可得

$$W=\frac{1}{2\gamma}I\oint\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s}$$

$$=\frac{1}{2\gamma}I\iint_S\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$=\frac{1}{2\gamma}I\Phi \qquad (\text{Ⅲ}-81)$$

有如 (77) 式。Φ 爲聯于線路 s 之磁通量。將 (80) 與 (81) 相比，則見

$$\gamma\Phi=LI \qquad (\text{Ⅲ}-82)$$

8. Ohm 定律; Joule 定律

Ohm 定律乃是經驗定律；若有一負載電流 I 之線性導體，

該導體上任兩點之間的電位差，是與該電流 I 成正比；

$$V=RI \qquad (\text{Ⅲ}-83)$$

該比例常數 R 稱爲電阻。一已知之導體物質，電阻乃與其長度 l 成正比而與其截面積 A 成反比

$$R=\rho\frac{l}{A} \qquad (\text{Ⅲ}-84)$$

ρ 爲電阻率 (Resistivity)。若 R 之單位爲 Ω(Ohm)，則在 (83) 式之電位差 V 爲 1 伏特，而電流 I 爲 1 安培。

(83) 係 Ohm 定律的積分形式。若將 (83) 式兩邊除以長度 l，再除以截面積 A，則因

$$E=\frac{V}{l},\quad j=\frac{I}{A}$$

故

$$E=\left(R\frac{A}{l}\right)j=\rho j \qquad (\text{Ⅲ}-85)$$

ρ 爲上述之電阻率，假如 E 爲伏特/米而 j 是安培/米^2，則其單位爲歐姆-米。此處雖無微分出現，(85) 亦稱爲 Ohm 氏定律的微分形式。(85) 式也可寫爲

$$\boldsymbol{j}=\sigma\boldsymbol{E} \qquad (\text{Ⅲ}-86)$$

σ 稱爲物質電導係數 (conductivity)，ρ 和 σ 係物質的性質。

當一電荷 e 降落電位差 V 時，該電場所作之功爲

$$W=eEd=eV$$

當電流 I 流經一電位差 V 時，電場場所作之功率爲

$$(Power)\ \text{功率}=I\ V$$

$$=\frac{V^2}{R}=RI^2 \qquad (\text{Ⅲ}-87)$$

功率單位爲瓦特（伏特一安培）。電能（每秒）可轉換或被消耗成熱能，乃是由於導體中之電阻（摩擦）所致。這種能量轉換定律，于 1841 年 J. P. Joule 由實驗予以建立。此熱能 $VI\Delta t = RI^2\Delta t = \frac{1}{R}V^2\Delta t$，稱爲 Joule 熱。

最後有宜注意的兩點。(一) 電阻率 ρ (85) 之因次爲歐姆—長度。但它常被誤解爲電阻/立方厘米；因爲它的數值恰與具有截面積 1 平方厘米而長度 1 厘米之物質的電阻相等之故。

第二點更爲重要。(83) 或 (86) 之定律，和電磁學其它定律不同；那就是它對時間之不可逆性。這與熱傳導之方程式相似，熱（電荷）永是由高溫（電位）處流至低溫（電位）處，而不逆轉的。

習　題

1. 穩定的電流（不變的電流）的向量位A，符合下方程式

$$curl\, curl\, A=\frac{\mu_0}{I} j \tag{1}$$

$$div\, A=0 \tag{2}$$

見（Ⅲ-44a, 43）式。證明此方程式之解，符合下邊界條件

$$A=\text{在一閉的面}S\text{上等于一某函數}\ F(r), \tag{3}$$

的，是唯一的解。

註：運用第二章第 1 題之第一定理。

證明：如將上（3）邊界條件，代以下述條件：

$$\text{在}S\text{面上，}curl\, A=\text{某一函數}\ G(r), \tag{4}'$$

方程式（1），（2）之解亦係唯一的。

2. 證明下二向量位 A，A'

$$A\left(-\frac{B}{2}y, \frac{B}{2}x, 0\right),\ A'(-By, 0, 0)$$

的差別，祇是一純量的梯度，故由二者所得的磁場相同（在靜場情形下）。

3. 在有限領域中，分佈有穩定電流 $j(r)$。證明其在 r' 點所產生的磁場 $B(r')$ 爲

$$B(r')=\frac{\mu_0}{4\pi I}\iiint \frac{1}{|r'-r|}\, curl j(r) d^3r$$

註：用（Ⅲ-45）式及第一章第 14 題的定理。

4. 證明任一矢量函數 $F(r)$, 永可寫成二向量函數之和, 其一之 curl 等于零, 其他之 divergence 等于零, 亦卽

$$F=-\nabla\phi+curl\,G,$$

故

$$div\,F=-\nabla^2\phi,\qquad curl\,F=curl\,curl\,G$$

證明

$$\phi(r')=\frac{1}{4\pi}\iiint\frac{1}{|r'-r|}div\,F(r)d^3r+\Psi(r'),$$

$$\nabla^2\Psi(r)=0,$$

$$G(r')=\frac{1}{4\pi}\iiint\frac{1}{|r'-r|}curl\,F(r)d^3r$$

此結果係 Helmholtz 定理。

5. 在靜磁場的情形, (Ⅲ-43) 式中的向量位 A, 符合

$$div\,A=0$$

按第 4 題之 Helmholtz 定理, 此關係的意義爲何？$div\,A=0$ 的條件, 是否完全確定了 A (對磁場 $B=curl\,A$ 而言)？

6. 如應用第 4 題的定理于電場 E, 卽

$$E=-\nabla\phi+curl G,$$

求一均勻電磁 E_x (在 x 一軸方向) 的 ϕ, G 及 Ψ 位。

7. 電流面密度 j_s 之定義如下:

$$j_s=\lim_{d\to 0}jd,$$

j 係在一片形空間 (厚度爲 d) 的電流密度。

j_s 之向量位 $A(r')$ 係

$$A(r')=\frac{\mu_0}{4\pi\gamma}\iint_S\frac{1}{R}j_s(r)dS,\qquad R=|r-r'|,$$

見（Ⅲ-45）式。證明穿過一有 j_s 的面積素 dS 時，向量位 A是連續的。

證明磁場 $B(r')$ 乃

$$B(r')=\frac{\mu_0}{4\pi\gamma}\iint_S\left[j_s(r)\times\nabla\frac{1}{R}\right]dS$$

證明穿過有 j_s 的 dS 時，B是不連續的，

$$B_+-B_-=\frac{\mu_0}{\gamma}\,[j_s\times n],$$

n 係 dS 的單位法線向量，即：在法線方向

$$(B_+-B_-)_n=0,$$

在切線方面，

$$n\times(B_+-B_-)=\frac{\mu_0}{\gamma}\,\{j_s-(j_s)n\}$$

8. 設N爲磁化强度（magnetization）之面密度（即每單位面積的磁双極矩）。證明 S 面的 $N(r)$在 r' 點所生之向量位A爲

$$A(r')=\frac{\mu_0}{4\pi}\iint_S\left[N(r)\times\nabla\frac{1}{R}\right]dS,\qquad R=|r-r'|,$$

見（Ⅲ-55）式.

證明穿經一有 $N(r)$ 的 dS 時，向量位 A 乃不連續的

$$A_+-A_-=\mu_0[N\times n]$$

n 乃與 dS 垂直的單位向量，亦即謂在法線方向，

$$(A_+-A_-)_n=0,$$

在切線方向，

$$[n\times(A_+-A_-)]=\mu_0\{N-(n\cdot N)n\}$$

$$\neq 0,\text{除 } N \text{ 與 } dS \text{ 垂直外}$$

（見第一章第 1 及 2 題）。

9. 證明 S 面 $N(r)$ 磁極化强度在 r' 點之磁場 B 爲

$$B(r')=-\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\iint_S N_n\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)dS$$

$$-\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\left\{\iint\frac{1}{R}\,(curl[n\times N])\cdot dS\right.$$

$$\left.-\int_C\frac{1}{R}[n\times N]\cdot ds\right\},\qquad R=|r-r'|,$$

n 乃與 dS 垂直之單位向量，C 乃 S 面之邊，ds 乃 C 之線素

註：參看 J. A. Stratton, Electromagnetic Theory, 第 248-9 頁

10. 電流密度 $j(r)$ 的向量位（見（Ⅲ-44）式），係

$$\nabla^2 A=-\frac{\mu_0}{\gamma}j, \tag{1}$$

或

$$curl\,curl\,A=\frac{\mu_0}{\gamma}\,j$$

$$div\,A=0$$

按第（Ⅲ-45）式，第（1）式的一個特解係

$$A(r')=\frac{\mu_0}{4\pi\gamma}\iiint_V\frac{1}{R}j(r)d^3r,\quad R=|r-r'|$$

證明一全解是

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}')=\frac{\mu_0}{4\pi\gamma}\iiint_V\frac{1}{R}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})d^3\boldsymbol{r}-\frac{1}{4\pi}\iint_S\left\{\frac{1}{R}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{B}\right.$$

$$\left.-(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A})\times\nabla\frac{1}{R}-A_n\nabla\frac{1}{R}\right\}dS \qquad (2)$$

註: 用第二章第 1 題之第二定理，使其 B 向量函數等於

$$B(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{R}\boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{b}=\text{常數矢量。}$$

由于 $\frac{1}{R}$ 之出現，需由體積 V 中挖去圍 r 點的一小圓球，其面爲 S_1. 先證由該定理可得

$$\frac{\mu_0}{\gamma}\iiint\frac{1}{R}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})d^3\boldsymbol{r}=\iint_{S+S_1}\left\{(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n})\nabla\frac{1}{R}\right.$$

$$\left.+\left(\nabla\frac{1}{R}\right)\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{n})+\frac{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{B}}{R}\right\}dS,$$

更由此證明上第 (2) 式結果。

11　設在閉表面爲 S 的體積 V 中 $\boldsymbol{r}$ 點之電流密度爲 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$，證明在 V 內 $\boldsymbol{r}'$ 點的磁場 $\boldsymbol{B}$ 爲

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}')=\frac{\mu_0}{4\pi\gamma}\iiint_V\left[\boldsymbol{j}\times\nabla\frac{1}{R}\right]d^3\boldsymbol{r}$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iint_S\left\{[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{B}]\times\nabla\frac{1}{R}+(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B})\nabla\frac{1}{R}\right\}dS,$$

在 V 外 $\boldsymbol{r}'$ 點，則

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}')=\frac{\mu_0}{4\pi\gamma}\iiint\left[\boldsymbol{j}\times\Delta\frac{1}{R}\right]d^3\boldsymbol{r}, \quad R=|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|$$

12　證明由磁極矩 $\boldsymbol{M}$ 分佈所產生的向量位 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$，符合下方程式

$$curl\ curl\ \boldsymbol{A}=0$$

13　證明由磁化强度$\boldsymbol{M}$（每單位體積之磁極矩）所生之磁場$\boldsymbol{B}$，符合下式

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}')=-\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V curl'\left[\boldsymbol{M}\times\nabla'\frac{1}{R}\right]d^3\boldsymbol{r}$$

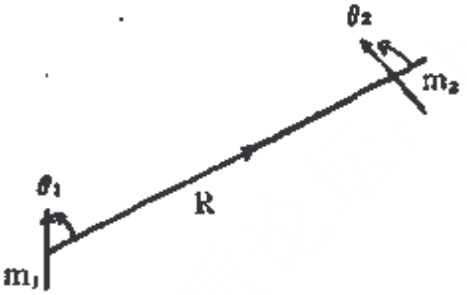
$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V\nabla\left(\boldsymbol{M}\cdot\nabla\frac{1}{R}\right)d^3\boldsymbol{r},\qquad R=|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|$$

註：由第（Ⅲ-56）式開始

14　一靜磁場，純由磁化體分佈所產生，在任何點皆無電流。證明對整個空間積分的

$$\frac{1}{2}\iiint H\cdot B\,d^3\boldsymbol{r}=0.$$

15　光滑平面桌上置有二小磁極矩，其强度爲m_1, m_2，二者之距離R，遠大于磁矩之長度。見圖。m_1，m_2與$\boldsymbol{R}$所作之角爲θ_1, θ_2。求作用于m_1及m_2之力，並求作用于m_1及m_2之力矩（torque），二者的總角動量（對平面上的一固定點）。



16　一電線路之自感係數爲L。如其電流爲I（密度$\boldsymbol{j}$），第（Ⅲ-80, 71）式有下關係

$$\frac{1}{2\gamma^2}LI^2=\frac{1}{2\gamma}\iiint_V(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j})d^3\boldsymbol{r},$$

$\boldsymbol{A}$係矢量位函數。證明上式可寫作

$$\frac{1}{2\gamma^2}LI^2=\frac{1}{2}\iiint_{V'}\mu H^2\,d^3\boldsymbol{r},$$

$\boldsymbol{H}$係磁場。二式中之體積V及 V'，意義爲何？

17　一銅球，半徑爲a，有電荷均勻的分佈其表面上。玆將球繞其直徑之一，以等角速度旋轉。求球內及球外之向量位函數$\boldsymbol{A}$及磁場$\boldsymbol{B}$。

18　一線圈，其半徑爲r，其總電荷爲Q均勻分佈於圈上。玆使圈繞其（垂直）軸心以等角速度w旋轉。

證明在線圈平面上距中心爲R（$R>r$）之點處，其磁場Hg（與圈平面垂直）爲

$$Hg=\frac{Q\omega}{2\pi e}\left[\frac{1}{R+r}K(k)-\frac{1}{R-r}E(k)\right],$$

K, E爲橢圓積分

$$K(k)=\int_0^{\pi/2}(1-k^2\sin\phi)^{-1/2}d\phi$$

$$E(k)=\int_0^{\pi/2}(1-k^2\sin\phi)^{-1/2}d\phi$$

$$k^2=\frac{4Rr}{(R+r)^2}$$

證明在線圈對稱軸上距中心爲R($R>r$)之點處，其磁場H_p（沿對稱軸）爲

$$H_p=\frac{Q\omega}{C}\frac{r^2}{(R+r)^3}.$$

計算當 $R=4r$ 時，H_q 及H_p 之值。

註：用 *Biot−Savart* 定律

Scanned by CamScanner

第 四 章

Maxwell 方程式

目前爲止，吾人已知靜磁、電學之庫倫定律，穩定電流之 Biot-Savart 定律和 Ampere 定律。這可以下面方程式表之；

$$div\, \boldsymbol{D}=\rho \qquad (\mathrm{N}-1)$$

$$div\, \boldsymbol{B}=0 \qquad (\mathrm{N}-2)$$

$$curl\, \gamma \boldsymbol{H}=\boldsymbol{j} \qquad (\mathrm{N}-3)$$

分別參閱（Ⅰ-79），（Ⅲ-9），和（Ⅲ-32）式。

但吾人已注意到第（3）式，除了在穩定電流情況下，是與（Ⅲ-34）式之連續性方程式抵觸的。下文將述 Maxwell 除去此抵觸，及綜合 Faraday 之感應定律，構成電磁場整部的方程式。

1. Ampere 定律與 Maxwell 之位移電流 (displacement current)

首先，吾人將（1）式 Coulomb 定律拓展到非靜電場之情

形，使 $\boldsymbol{D}$ 及 ρ 可視爲時間函數，

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t} div\, \boldsymbol{D}=div\, \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \qquad (\text{Ⅳ-4})$$

以此與（Ⅲ-34）合併，則得

$$div\left(\boldsymbol{j}+\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right)=0$$

Maxwell，于第（3）式中，將 $\boldsymbol{j}$ 代以 $\boldsymbol{j}+\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ 即得

$$curl(\gamma \boldsymbol{H})=\boldsymbol{j}+\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \qquad (\text{Ⅳ-5})$$

此式與（1）式及連續性方程式，均無抵觸。Maxwell 稱 $\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ 爲位移電流。它與傳導電流截然不同。其物理意義可由下簡例瞭解：若有一電容器，將其兩片導電板接於電池之兩極予以充電，雖兩板極間無傳導電流，但於接連時必有瞬時的電流。同樣的，在將電容器放電時，亦有瞬時電流。在上述兩情形下，電容器板極間之 $\boldsymbol{D}$，乃隨時間而改變的。Maxwell 之理論，謂 $\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ 就有如一相當之電流在電容器板極之間出現。這與線路其他點出現之傳導電流無異。

依照狹義相對論中之電磁理論，所有 Maxwell 方程式在 Lorentz 轉換時，皆應具有不變性，則 $\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ 項之存在乃是必需的。吾人可肯定的說，即使沒有 Maxwell 之發現，$\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ 一項，亦將必爲相對論理論發現的。

2. Faraday 之電磁感應定律

1831 年，Michael Faraday (1791—1867) 發現下述之基本現象；

(1) 若有導線線圈，其面積爲 S，在磁場 $\boldsymbol{B}$ 裡轉動(其轉動軸垂直於 $\boldsymbol{B}$)，則在該線圈上有一電動勢 *emf* 產生 (*emf* 之因次與"力"不同) 如下；

$$\int_c \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=-\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} \qquad (\text{N-6})$$

〔如線圈非一平面的，則 S 乃是以線路 l 爲邊界之任何表面〕。$\iint_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}$ 乃是 (Ⅱ-77) 所謂之磁通量 Φ.

(2) 如上述之線圈係靜止的，而通過 S 面之磁通量却隨時間而改變 (如將一磁石移動，或將附近一電線圈的電流改變)，則亦有如 (6) 式之 *emf* 在導線中產生。

感應電動勢的存在，非必需有封閉的線。但若該線圈爲封閉時，則有電流而已。

第 (6) 式之負號，係表示感應 *emf* 之方向，俾使於該方向上所產生之電流所產生之磁場，抗阻線圈內原來磁場之變化。第 (6) 式定律中的此一部份，稱爲 Lenz 定律 (1834 年)。

第 (6) 式定律之積分形式，亦可寫爲微分形式。由 Stokes 定理，第 (6) 式可化爲

$$\iint_S \left(curl\,\boldsymbol{E}+\frac{1}{\gamma}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right)\cdot d\boldsymbol{S}=0 \qquad (\text{N-7})$$

但封閉面 S 是任意的，故

$$curl\,\boldsymbol{E}=-\frac{1}{\gamma}\,\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad (\text{Ⅳ}-8)$$

此乃 Faraday 之電磁感應定律（包括 Lenz 定律）。

3. Maxwell 方程式

茲將（5）之 Ampere 定律，（8）式之 Faraday 定律，（Ⅰ-79），（Ⅲ-17）式之 Coulomb 定律，與（Ⅰ-87），（Ⅲ-16）之關係式等，綜合如下，

$$curl\,\gamma\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}+\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \qquad (\text{Ⅰ})$$

$$curl\,\boldsymbol{E}=-\frac{1}{\gamma}\,\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad (\text{Ⅱ})$$

$$div\,\boldsymbol{D}=\rho \qquad (\text{Ⅲ})$$

$$div\,\boldsymbol{B}=0 \qquad (\text{Ⅳ})$$

$$\boldsymbol{D}=\epsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}$$

$$=(1+\kappa)\epsilon_0\boldsymbol{E}=k\epsilon_0 E \qquad (\text{Ⅴ})$$

$$\frac{1}{\gamma}\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{\gamma^2}\gamma(H+M)=\frac{\mu_0}{\gamma^2}\gamma(1+\chi)\boldsymbol{H} \qquad (\text{Ⅵ})$$

這裡 $\frac{1}{\gamma}B$，rH，$\frac{\mu_0}{\gamma^2}$ 係依據（Ⅲ-27），（Ⅲ-36），（Ⅲ-38）等式而來的。

因 $div\,curl\equiv 0$，由（Ⅰ）和（Ⅲ）式，可得連續性方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+div\boldsymbol{j}=0 \qquad (\text{Ⅳ}-9)$$

故此式已包含於（Ⅰ）及（Ⅲ）式。

由 $div\,curl\equiv 0$，第（Ⅱ）式可得

$$\frac{\partial}{\partial t} div\,\boldsymbol{B}=0 \qquad (\text{Ⅳ}-10)$$

換言之，$div\boldsymbol{B}$＝常數（對時間而言，不管B 如何改變)。如某一瞬間之 $\boldsymbol{B}=0$，$div\boldsymbol{B}$於那瞬間必亦爲零，則於任何時刻均繼續等於零。因此，可得第（Ⅳ）式。

因此，假若吾人認定 (9) 式連續性方程式所代表之電荷不滅定律爲最大基本原理，則僅有方程式（Ⅰ）和（Ⅱ）是獨立的。

（Ⅴ）和（Ⅵ）式係所謂“構成方程式”(constitutive equation)。第（1）至（Ⅳ）式乃是著名之 Maxwell 電磁理論方程式，是 Maxwell (James, Clerk, 1831-1879) 於 1864 年完成的。這些方程式，可應用於下情形：所有在場內之物質皆是靜止，並且其介電特性 $k=1+\kappa$ 及磁特性 $1+\chi$ 具與時間無關的，

於（Ⅰ）－（Ⅳ）式中，電荷密度 ρ 與電流密度 $\boldsymbol{j}$，是場 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$ 之源。

第（Ⅰ）－（Ⅳ）式乃電磁場的方程式，未能對電子在場中運動作何敘述。H. A. Lorertz (1853-1928) 的電子理論，乃將動力學與電磁學結合（該理論係在“電子”的發現前提出的)。該理論指出；若密度爲 ρ 之電荷以$\boldsymbol{V}$之速度在電磁場$\boldsymbol{E}$及$\boldsymbol{B}$運行時，則其每單位體積所受之力爲

$$f=\rho E+\frac{1}{\gamma}\rho(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{B}) \qquad (\text{Ⅵ}-11)$$

f 稱爲 Lorentz 力。〔γ 係與（Ⅳ-27）或其他方程式之常數 γ

相同，於 m. k. s. a 制度，$\gamma=1$，但於 Gauss 制，則 $\gamma=c$，參閱下表〕。此處應注意的是

$$\rho[V\times B]=j\times B$$

雖似與（Ⅲ-38）式之 Ampere 定律相同，但二者的起點與內函是不相同的。Ampere 定律係說明負載電流之導體在場 B 上所受之作用力之實驗定律。而 Lorentz 力，乃是電荷在場 B 運動所受之力之假設。該假設旋即由電子偏折實驗（J.J. Thompson 實驗）直接證實。在相對論中，Lorentz 力的存在，是電動力學定理具有協變性的必須結果。*

4. 以向量位 A 與純量位中所表示之 Maxwell 方程式

因 $div\ curl\equiv 0$，由（Ⅳ）式中，吾人可引入一向量位 A 使

---

* 註　由 Maxwell 方程式（Ⅰ），（Ⅱ），（Ⅲ），（Ⅳ），可看到顯然的不對稱情形，即第（Ⅱ）式無與電流密度 j 相當的磁流密度，第（Ⅳ）式沒有與電荷密度 ρ 相當的磁極密度是也。這不對稱性，是由於從未發現有單獨磁極（北或南極）之故。

1931 年 Dirac 氏基於帶電質點的波函數的相位性質，創一單磁極的理論。此理論的論據在量子力學，將於本書第四册甲部狹義相對論第Ⅳ章略述其由來。茲僅可指出一個單磁的向量位 A 的性質。

設在座標中心 $r=0$ 有一單磁極，其強度爲 g。按第（Ⅲ-7）式，在點，B 場的值爲

$$B=\frac{\mu_0 g}{4\pi r^3}r \qquad (Ⅳ\text{-}11\text{-}1)$$

如用 Gauss 單位，則

$$H=\frac{g}{r^3}r \qquad (Ⅳ\text{-}11\text{-}2)$$

設 A 爲向量位

$$H=curl\ A \qquad (Ⅳ\text{-}11\text{-}3)$$

按 Stokes 定理，

$$\frac{1}{\gamma}\boldsymbol{B}=curl\,\frac{\boldsymbol{A}}{\gamma} \qquad (\text{N-11})$$

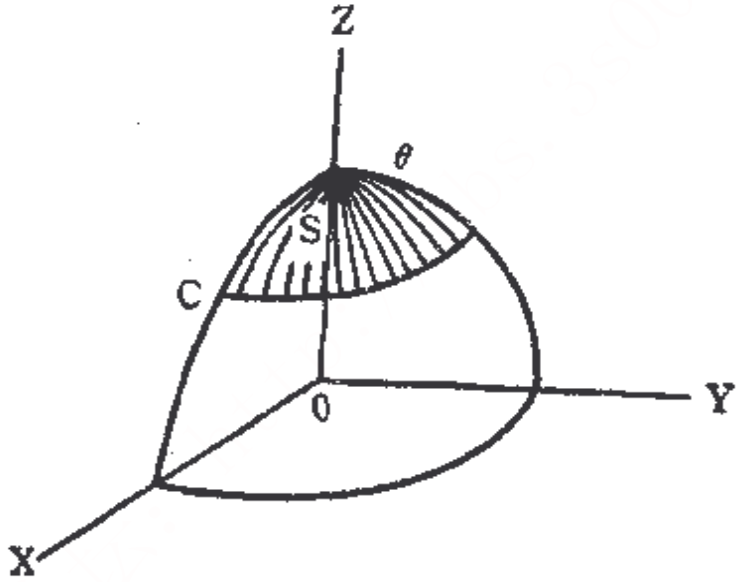
第（Ⅱ）式 Faraday 定律可寫爲

$$curl\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{\gamma}\,\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)=0 \qquad (\text{N-12})$$

$$\oint \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s}=\iint curl\,\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} \qquad (\text{N-11-4})$$

左方之線積分係沿一閉圖C，右方之面積分係取在以C爲邊緣的表面S。

茲取一緯度圈爲C，球面頂部爲S，如下圖。



$$\oint_c \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s}=\iint_s \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{S}=g\iint \frac{1}{r^3}\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$=2\pi g(1-\cos\theta)$$

$$=\begin{cases}0 & for\ \theta=0\\ 4\pi g & for\ \theta=2\pi\end{cases} \qquad (\text{N-11-5})$$

當 $\theta=2\pi$ 時，C 圈縮爲一點，故左方之線積分趨於零，而第 (11-5) 式卽成矛盾 $0=4\pi g$。此矛盾之解答，乃 A 有奇異點，左方之積分，實不等於零也。由 (11-2) 及 (11-3) 式，可得

$$A_x=-\frac{gy}{r(r+z)},\quad A_y=\frac{gx}{r(r+z)},\quad A_z=0 \qquad (\text{N-11-6})$$

或

$$A_r=0,\quad A_\theta=0,\qquad A_\varphi=\frac{g}{r}\tan\frac{\theta}{2} \qquad (\text{N-11-7})$$

故 $r=-z$（或 $\theta=2\pi$）係 A 兩數之奇異點。又上圖之球面半徑 r 乃係任意的。故由 $r=0$ 到 $z=-\infty$ 線上每一點皆係 $\boldsymbol{A}$ 之奇異點。

用 $curl\ grad \equiv 0$，故於（12）式中，可引入一純量位 ϕ，使得

$$\boldsymbol{E}+\frac{1}{\gamma}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}=-\nabla\phi \qquad (\text{N}-13)$$

已知$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{B}$，由（11）和（13）式並不能得唯一的$\boldsymbol{A}$，ϕ。如於$\boldsymbol{A}$加一任何純量函數ψ之梯度時，（11）式之$\boldsymbol{B}$並不改變。同理，若於（13）式中同時加$-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial \psi}{\partial t}$，$\boldsymbol{E}$亦不改變。因此，吾人可對$\boldsymbol{A}$和$\phi$加上其他關係

(1) Lorentz 關係式

欲將 Biot-Savart 定律（Ⅲ-37），（Ⅲ-39）拓展至電流分佈與時間相依之一般情形；

$$Ids=\rho V$$

ρ 爲電荷密度，V 係該電荷在 $\boldsymbol{r}'$ 點和 t' 時之速度。場 $\boldsymbol{B}$ 在 $(\boldsymbol{r}\cdot t)$ 爲

$$\frac{1}{\gamma}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi\gamma^2}\iiint\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t')[\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}',t')\times\boldsymbol{R}]}{R^3}d^3\boldsymbol{r}' \qquad (\text{N}-14)$$

這裡　　$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'=c(t-t')$

或　　$$t'=t-\frac{R}{c} \qquad (\text{N}-15)$$

這些關係式係表示；於點 $(\boldsymbol{r}',t')$ 之電流所產生之效應，需經 $\frac{R}{c}$ 的時間方能到達點 $(\boldsymbol{r},t)$。c 爲電磁效應傳播之速度。

同理，吾人亦可將（Ⅰ-6）式之 Coulomb 定律之靜電荷拓展至動電荷，則（Ⅰ-6）式可化爲

$$\phi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t')}{R}d^3\boldsymbol{r}' \qquad (\text{N}-16)$$

R, $r-r'$, $t-t'$ 之間關係，參看上（15）式。

茲將（Ⅲ-45）式亦推廣至變場之電流，

故得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi\gamma}\iiint\frac{\rho(\boldsymbol{r}'_1,t')V(\boldsymbol{r}'_1,t')\,d^3\boldsymbol{r}'}{R} \qquad (\text{Ⅳ-17})$$

此式中 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}', t-t', R$ 之關係，亦同（Ⅳ-15） （Ⅳ-15）

式。(16)，(17)式先爲 Lorenz（1897年）Poincare′（1891年），Lorentz（1892年）求得。下文將正式導出之（見(37)，(38)式）。

由（16）與（17），如用連續性方程式，我們可證明下關係

$$div\ \boldsymbol{A}+\frac{\mu_0\epsilon_0}{\gamma}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0 \qquad (\text{Ⅳ-18})$$

此點似首爲 Levi-Civita 於1897年指出，但(18)式通常稱爲 Lorentz 關係。

此關係極重要，將於下文第五節末再論之。

(2) 規範變換 (Gauge transformation)

在第（13）式，吾人已略提及規範變換

$$\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}+\nabla\phi \qquad (\text{Ⅳ-19})$$

$$\phi'=\phi-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial\phi}{\partial t} \qquad (\text{Ⅳ-20})$$

可使場$\boldsymbol{B}$及$\boldsymbol{E}$不變。欲使 $\boldsymbol{A}'$ 和 ϕ' 滿足 Lorentz 關係（18），則ϕ必須滿足下方程式

$$\nabla^2\phi-\frac{\mu_0\epsilon_0}{\gamma^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=0 \qquad (\text{N}-21)$$

此係波動方程式的形式，傳播速度爲 $\gamma/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$。

(3)　以向量位 A 和純量位 ϕ 所表示之 Maxwell 方程式

若介體係均勻且各向同性的，則於（V），（Ⅵ）式裡之 ϵ，μ 必與時間、空間座標無關。換言之，下式之 ϵ，μ 爲常數

$$\boldsymbol{D}=k\epsilon_0\boldsymbol{E}\equiv\epsilon\boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{B}=(1+\chi)\mu_0\boldsymbol{H}\equiv\mu\boldsymbol{H} \qquad (\text{N}-22)$$

由（Ⅰ），(11) 及 (13) 式

$$curl\,\boldsymbol{H}=\frac{1}{\gamma}\left(\boldsymbol{j}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\right),$$

$$\boldsymbol{B}=curl\,\boldsymbol{A},\qquad \boldsymbol{E}=-\nabla\phi-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}$$

及　　$curl\,cur\,\boldsymbol{X}=grad\,div\,\boldsymbol{X}-\nabla^2\boldsymbol{X},$

用 (18) Lorentz 關係，可得

$$\left(\nabla^2-\frac{\mu\epsilon}{\gamma^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A}=-\frac{\mu}{\gamma}\boldsymbol{j} \qquad (\text{N}-23)$$

由（Ⅲ）式

$$div\,\boldsymbol{D}=\rho$$

及 (18) 式，可得

$$\left(\nabla^2-\frac{\mu\epsilon}{\gamma^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi=-\frac{1}{\epsilon}\rho \qquad (\text{N}-24)$$

如于 Maxwell 方程式（Ⅱ）及（Ⅳ）中用 (11) 和 (13) 式，則所得者爲恒等式。

下表將綜集電磁場方程式在 *m. k. s. a* 制及 Gauss 制之

形式;

	m. k. s. a.	Gaussian 制
Amper's 定律	$curl\ \boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}+\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$	$curl\ H=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$
Faraday's 定律	$curl\ \boldsymbol{E}=-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$	$curl\ \boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$
Coulomb's定律	$div\ \boldsymbol{D}=\rho$	$div\ \boldsymbol{D}=4\pi\rho$
Coulomb's 定律	$div\ \boldsymbol{B}=0$	$div\ \boldsymbol{B}=0$
連續性方程式	$\frac{\partial \rho}{\partial t}=-div\,\boldsymbol{j}$	$\frac{\partial \rho}{\partial t}=-div\,\boldsymbol{j}$
Lorentz 力	$\boldsymbol{f}=\rho(\boldsymbol{E}+[\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{B}])$	$f=\rho\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}[\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{B}]\right)$
	$\left(\nabla^2-\mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A}=-\mu\boldsymbol{j}$	$\left(\nabla^2-\frac{\mu\epsilon}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A}=-\frac{4\pi\mu}{c}\boldsymbol{j}$
	$\left(\nabla^2-\mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi=-\frac{1}{\epsilon}\rho$	$\left(\nabla^2-\frac{\mu\epsilon}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi=-\frac{4\pi}{\epsilon}\rho$
Lorentz 關係式	$div\boldsymbol{A}+\mu\epsilon\frac{\partial \phi}{\partial t}=0$	$div\,\boldsymbol{A}+\frac{\mu\epsilon}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t}=0$
在眞空內	$\mu_0\epsilon_0=1/c^2$	$\mu_0\epsilon_0=1$
在介質內	$\mu\epsilon=1/v^2$	$\mu\epsilon=c^2/v^2$
	$\boldsymbol{D}=\epsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}$	
	$=\epsilon_0(1+\kappa)\boldsymbol{E}=k\epsilon_0\boldsymbol{E}$	
	$=\epsilon\boldsymbol{E}$	
	$\boldsymbol{B}=\mu_0(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M})$	
	$=\mu_0(1+\chi)\boldsymbol{H}$	
	$=\mu\boldsymbol{H}$	

5. 波動方程式之解；延後與超前之電位 (Retarded and Advanced potential)

按非齊次微分方程之一般理論，一個完全積分（complete integral）係

完全積分＝輔助函數＋特別積分

所謂輔助函數，乃係使該微分方程之齊次部份等於零之解，而特別解乃係該非齊次方程之任一特別解。今（23）式之齊次部份爲

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A}=0 \qquad (N-25)$$

其解很容易求得:

$$\boldsymbol{A}=F(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}-vt)+G(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}+vt) \qquad (N-26)$$

這裡　　$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}=\lambda x+\mu y+\nu z,$

$\boldsymbol{n}$爲沿着傳播方向之單位向量。若$\boldsymbol{A}$爲向量（或純量）函數，則F和G爲任意的向量（或純量）函數。

第（23）或（24）方程式之特別積分，可以下述之 Green 函數方法求得。

先定義 Dirac δ 函數之特性如下；在一維空間，

$$\delta(x-x_0)=\begin{cases}\infty & \text{若 } x-x_0=0\\ 0 & \text{若 } x-x_0\neq 0\end{cases} \qquad (N-27)$$

使　　$\int_a^d f(x)\delta(x-x_0)dx=f(x_0)\ ,\quad$ 若 $a<x_0<b$

在三維空間

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0) \qquad (\text{N-28})$$

使 $\iiint_V f(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)d^3\boldsymbol{r}=f(\boldsymbol{r}_0)$，若 $\boldsymbol{r}_0$ 在 V 內

第 (23) 式之 Green 函數，係下述方程式之解

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(t-t') \qquad (\text{N-29})$$

則

$$A(\boldsymbol{r},t)=\iiiint G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')\{-\mu\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t')\}d^3\boldsymbol{r}'dt' \qquad (\text{N-30})$$

係 (23) 式之解。只要將 (30) 式代入 (23) 式，並且利用(27)和 (28) 等式，即可得證。本題只要找到 (29) 式之解，則(30)之解也就迎双而解。欲達到此目的，先暫使$\boldsymbol{r}'=0$，$t'=0$，並使

$$g=rG \qquad (\text{N-31})$$

g 係下式之解

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)g=0 \qquad (\text{N-32})$$

按 (26) 式，(32) 式之解爲

$$g(\boldsymbol{r},t)=f\left(t-\frac{r}{v}\right)+h\left(t+\frac{r}{v}\right), \qquad (\text{N-33})$$

f,h 分別爲 $t-\frac{r}{v}$，$t+\frac{r}{v}$ 之任意函數。

則

$$\nabla^2G=g\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)+2\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\nabla g+\frac{1}{r}\nabla^2 g$$

$$=-4\pi g(\boldsymbol{r},t)\delta(\boldsymbol{r}-0)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}$$

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G=-4\pi g(r,t)\delta(r-0)$$

$$+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}\right) \qquad (\text{N}-34)$$

除 $r=0$, $t=0$ 之點外，於所有點，G 皆滿足下式

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G=0 \qquad (\text{N}-35)$$

現假設（即採取）$g=g\left(t-\frac{r}{v}\right)$。則（34）式最後一項將消去，故

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G=-4\pi g\left(t-\frac{r}{v}\right)\delta(r-0)$$

於 $r'=0$, $t'=0$, 由（29）式可得

$$\delta(r)\delta(t-0)=-4\pi g\left(t-\frac{r}{v}\right)\delta(r)=-4\pi g(t)\delta(r)$$

$$g(t)=-\frac{1}{4\pi}\delta(t)$$

所以

$$G(r,t;0,0)=\frac{-1}{4\pi r}\delta\left(t-\frac{r}{v}\right)$$

如將奇點從 $r=0$, $t=0$ 移至 $r=r'$, $t=t'$ 點，則

$$G(r,t;r',t')=\frac{-1}{4\pi|r-r'|}\delta\left(t-t'-\frac{|r-r'|}{v}\right) \qquad (\text{N}-36)$$

（23）式之向量位之解（30）式可寫爲

$$A(r,t)=\frac{\mu}{4\pi}\iiint\frac{[j]}{|r-r'|}d^3r' \qquad (\text{N}-37)$$

$$[j]=j\left(r',t'=t-\frac{|r-r'|}{v}\right)$$

同理，(24) 式之純量位之解爲

$$\phi(r,t)=\frac{1}{4\pi\epsilon}\iiint\frac{[\rho]}{|r-r'|}\,d^3r' \qquad (\text{N-38})$$

$$[\rho]=\rho\left(r',t'=t-\frac{|r-r'|}{v}\right)$$

第 (37)，(38) 式之延後效應，前曾於 (14) 及 (16) 式解釋，玆在此證明。

設我們所取 (33) 式之解爲 $g\left(t+\frac{r}{v}\right)$時，則將得

$$A(r,t)=\frac{\mu}{4\pi}\iiint\frac{[j]}{|r-r'|}\,d^3r' \qquad (\text{N-39})$$

$$\phi(r,t)=\frac{1}{4\pi\epsilon}\iiint\frac{[\rho]}{|r-r'|}\,d^3r' \qquad (\text{N-40})$$

$$[j]=j\left(r',t'=t+\frac{|r-r'|}{v}\right),$$

$$[\rho]=\rho\left(r',t'=t+\frac{|r-r'|}{v}\right)$$

此二式是所謂超前電位，意謂在 r,t 點之A及ϕ值，係由在 r' 點未來之時間 t' 時之電流 j 及電荷 ρ 所產生的。這種電位似違背因果律，但實可視爲開始條件的結果。(23) 和 (24) 場方程式之解(具有延後及超前效應)，保有對時間逆轉的不變性。若將時間 t 倒轉，則延後電位卽成超前電位，超前電位則成爲延後電位了。

於 1938 年，Dirac 在他的古典電子理論中，有超前電位的出現。

前第四節 ((N-17) 式下文) 曾指出：由(16)，(17)式及連

續性方程式(9)，即可得 Lorentz 關係(18)。（見本章末習題1.)。本節由 (23)，(24) 方程式，導出(37)及 (38)式，此亦即(16)，(17)式。如是，則驟觀之，似吾人可由(23)，(24) 式及連續方程式導出 Lorentz 關係了。實則不然。我們務須記憶由 Maxwell 方程式導出(23)，(24)式時，必需用(18)式。如不用(18)式，則得

$$\Box A = -\frac{\mu}{\gamma} j + \nabla\left(div A + \frac{\mu\epsilon}{\gamma}\frac{\partial \phi}{\alpha t}\right)$$

$$\Box \phi = -\frac{1}{\epsilon}\rho + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial t}\left(div A + \frac{\mu\epsilon}{\gamma}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)$$

$$\Box \equiv \nabla^2 - \frac{\mu\epsilon}{\gamma^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

故(23)，(24)二式係需引用 Lorentz 關係(18)的。由(37)，(38)和連續性方程式而導出(18)式，祇是還原而已。

故在電磁理論中，Lorentz 關係乃一外加的選定。符合(18)關係的A，ϕ，稱爲 Lorentz 規範 (gauge)。在量子電動場論中，這(18)方程式引致了許多的困難，不能於此討論了。

6. 電磁場之能量與應力 (m.k.s.a. 制)

由 Maxwell 方程中之（Ⅰ）及（Ⅱ）式

$$curl\, \gamma \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\ (\text{Ⅰ}), \qquad curl\, \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\gamma \partial t}\ (\text{Ⅱ})$$

若取（Ⅰ）式與$\boldsymbol{E}$之純量積 (scalar product)，並用以下恒等式

$$div\,[\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}] = \boldsymbol{B}\cdot curl\, \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\cdot curl\, \boldsymbol{B}$$

即得

$$j\cdot E+E\cdot\frac{\partial D}{\partial t}+H\cdot\frac{\partial B}{\partial t}+\gamma\, div[E\times H]=0 \quad (\text{N}-41)$$

今有介質，其特性 $\epsilon=(1+\kappa)\epsilon_0$，$\mu=(1+\chi)\mu_0$ 皆與時間無關，則

$$E\cdot\frac{\partial D}{\partial t}+H\cdot\frac{\partial B}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(E\cdot D+H\cdot B)$$

玆定義 Poynting 向量 P 及場能量密度 u

$$P=\gamma[E\times H] \quad (\text{N}-42)$$

而

$$u=\frac{1}{2}(E\cdot D+H\cdot B) \quad (\text{N}-43)$$

將 (41) 式對體積 V 積分，並用 Gauss divergence 定理，則得

$$\iiint_V j\cdot E d^3r+\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V u d^3r+\iint_S P\cdot dS=0 \quad (\text{N}-44)$$

第一項係體積 V 中，電能轉換成 Joule 熱能之率。第二項係體積 V 中，場能量之增加率。第三項係電磁能流經 S 面離開 V 之率。故 Poynting 向量稱爲能通量，係在每單位時間通過單位面積之能量。

用（Ⅱ）及（Ⅲ）式，並從 Lorentz 力式，則可得力的密度 f（作用于電荷分佈每單位體積之力）

$$f=E\,div\,D+(curl\,H)\times B-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial D}{\partial t}\times B \quad (\text{N}-45)$$

由（Ⅳ）及（Ⅴ）式，可得

$$H\,div\,B=0$$

$$(curl\boldsymbol{E})\times\boldsymbol{D}+\frac{1}{\gamma}\left[\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\times\boldsymbol{D}\right]=0$$

將上三式相加，則得

$$\boldsymbol{f}=-\frac{\partial}{\gamma\partial t}[\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B}]+\{\boldsymbol{E}\,div\,\boldsymbol{D}+(curl\boldsymbol{E})\times\boldsymbol{D}$$
$$+\boldsymbol{H}div\boldsymbol{B}+(curl\,\boldsymbol{H})\times\boldsymbol{B}\}$$

現

$$(curl\,\boldsymbol{E})\times\boldsymbol{D}=(\boldsymbol{D}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}-\frac{1}{2}\nabla(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D})$$

$$E_x\,div\,\boldsymbol{D}=div(E_x\boldsymbol{D})-(\boldsymbol{D}\cdot\nabla)E_x$$

$$\nabla(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D})=i\,div(i\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D})+j\,div(j\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D})+k\,div(k\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D})$$

i, j, k 分別爲 x, y, z 軸之單位向量。同理，將 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$ 代以 $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$，便得有關 $\boldsymbol{H}, \boldsymbol{B}$ 之式子。

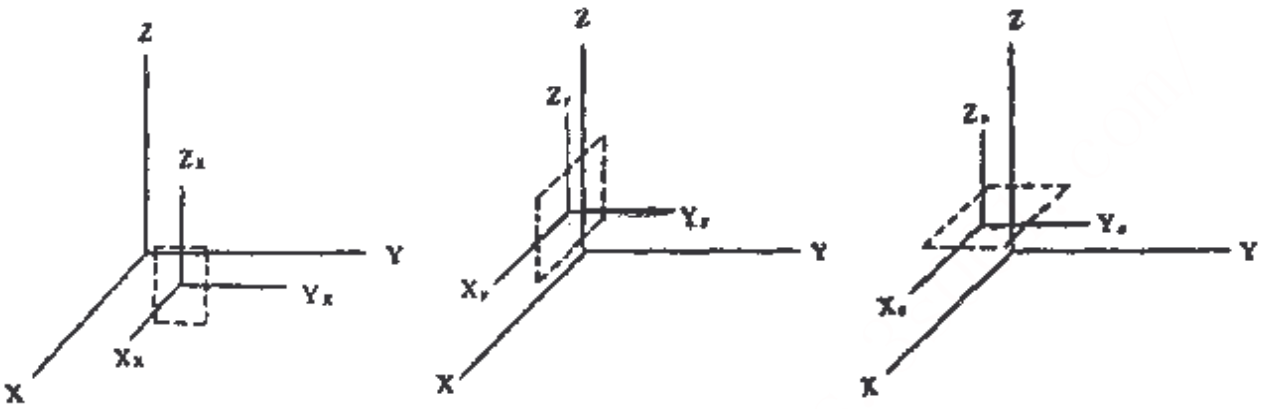
將這些式子代入 $\boldsymbol{f}$ 式時，並對體積 V 積分，即得

$$\iiint_V \boldsymbol{f}d^3\boldsymbol{r}=-\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B})d^3\boldsymbol{r}+\iint_S\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S})+\boldsymbol{H}(\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S})\}$$
$$-\frac{1}{2}\iiint_V\{i\,div(i\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D})+j\,div(j\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D})$$
$$+k\,div(k\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D})\}d^3\boldsymbol{r}$$
$$=-\mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V\boldsymbol{P}d^3\boldsymbol{r}-\iint_S u\,dS+\iint_S\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S})$$
$$+\boldsymbol{H}(\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S})\}\qquad(\text{N}-46)$$

$\boldsymbol{P}$ 爲 (42) 式之 Poynting 向量，u 係 (43) 式之場能量密度。

作用於體積 V 之力 $\boldsymbol{f}$，可視爲由 Poynting 向量體積分及兩個面積分所組合而成。欲明瞭表面力之性質，依次於 x, y, z 軸

取一垂直面素 dS。設 X_x 爲作用于垂直 x 軸之單位面積上之力（方向沿着 x 軸）。同理可取 Y_x 爲作用在同面積上，但方向沿着 y 軸，（見圖），餘類推，



$$X_x=E_xD_x+H_xB_x-\frac{\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}}{2}$$

$$Y_x=E_yD_x+H_yB_x$$

$$Z_x=E_zD_x+H_zB_x$$

$$X_y=E_xD_y+H_xB_y$$

$$Y_y=E_yD_y+H_yB_y-\frac{\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}}{2} \qquad (\text{N-47})$$

$$Z_y=E_zD_y+H_zB_y$$

$$X_z=E_xD_z+H_xB_z$$

$$Y_z=D_yE_z+H_yB_z$$

$$Z_z=E_zD_z+H_zB_z-\frac{\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}}{2}$$

面積 dS 之法線的方向餘弦爲 l, m, n,

$$d\boldsymbol{S}=(\boldsymbol{i}l+\boldsymbol{j}m+\boldsymbol{k}n)|dS| \qquad (\text{N-48})$$

作用于 $d\boldsymbol{S}$ 上之每單位面積之力，其 x, y, z 方向之分量分別爲

$$\boldsymbol{i}(lX_x+mX_y+nX_z)+\boldsymbol{j}(lY_x+mY_y+nY_z)$$

$$+\hat{k}(lZ_x+mZ_y+nZ_z) \qquad (\text{Ⅳ-49})$$

此可用對稱張量T表示之

$$(l, m, n)T\equiv(l, m, n)\begin{vmatrix} X_x & Y_x & Z_x \\ X_y & Y_y & Z_y \\ X_z & Y_z & Z_z \end{vmatrix} \qquad (\text{Ⅳ-50})$$

$$T_{xy}=T_{yx}, \text{餘類推} \qquad (\text{Ⅳ-51})$$

若有一平面波，以垂直方向投射在該單位面積上（該面係與x軸垂直的，$E_x=D_x=H_x=B_x=0$），即得

$$X_x=-\frac{\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}}{2}=-u \qquad (\text{Ⅳ-52})$$

$$Y_x=Z_x=0$$

換言之，垂直壓力等於能量密度。（52）式相當於靜電情形之（Ⅰ-112）式，（50）式之張量，相當于（Ⅰ-108）式。

在相對論中討論電磁學時，上述的張量T，可拓展使其包括場之動量。此並非意謂該張量純係相對論之結果，但以張量數學處理此問題，較由上述（45）到（50）式之步驟爲簡單。（見本書第四册相對論（甲）第Ⅳ章第3節）。

7. Maxwell 方程式之空間與時間對稱性 (m.k.s.a.)

吾人已知電磁場基本方程式爲

$$curl\,\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}+\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \qquad (\text{Ⅰ})$$

$$curl\,\boldsymbol{E}=-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad (\text{II})$$

$$div\,\boldsymbol{D}=\rho \qquad (\text{III})$$

$$div\,\boldsymbol{B}=0 \qquad (\text{IV})$$

再加上 Lorentz 力之方程式爲

$$\boldsymbol{f}=\rho[\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})] \qquad (\text{VI})$$

這些方程式構成全部電動力學之基石。玆研討上述系統，在下述兩個運作下的特性。

(1) 空間反轉 (space inversion)：該運算子 P 使得座標 r 反轉

$$P\boldsymbol{r}=-\boldsymbol{r} \qquad (\text{IV-53})$$

或 $$P(x,y,z)=(-x,-y,-z)$$

(2) 時間反轉 (time reversal)；運算子 θ 使時間變數 t 變號

$$\theta t=-t \qquad (\text{IV 54})$$

近代文獻裡，運算子 P 亦稱宇稱性 (parity) 運算子。(53) 的運作，與下述運作相當：將座標系繞着 Z 軸轉 π 角，隨之再作對 $Z=0$ 平面的反映。此二運作，與將右手定則之座標系變成左手定則座標系相等。按古典物理，物理定律對宇稱性運作有不變性，皆認爲是天經地義，無可置疑的。又物理定理必與時間變數 t 之正負號無關的。這些信念，是基於古典力學及電磁等的。但於 1956 年，李政道、楊振寧、吳健雄等發現基本粒子間的所謂弱交互作用，並不遵守宇稱性不變的定律。這下震撼了物理學家，使他們注意物理定理之對空間或時間反轉之對稱性問題。

我們要依據實驗所發現的基本定律，證明 Maxwell 方程式

在P和θ運作下，具有不變性。電場觀念，包括電荷e，電場E（和D），與磁場H（或B）。我們假設電荷在P之運作具有不變性*。力$\boldsymbol{f}$是向量，故

$$P\boldsymbol{e}=-\boldsymbol{e}, \qquad P\boldsymbol{f}=-\boldsymbol{f}$$

因爲電場與e和$\boldsymbol{f}$之關係爲$\boldsymbol{f}=e\boldsymbol{E}$，故

$$P\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{E} \qquad (\text{Ⅳ}-55)$$

若欲找$\boldsymbol{B}$對P轉換的性質，設於$x-z$平面上有一負載電流I之線圈，I之方向如圖所示，並有一導體C平行x軸。設該導體以速度v沿着z方向運動。依據 Fareday 定律和 Lenz 定律，則有 emf 感應產生，其方向係使其所產生之電流i，抵阻導體之運動（如圖 1）。次乃作同此的實驗，但其安排（如圖 2）則是第一圖之鏡像。由實驗得知，導體速度v'之方向與感應電流i'之方向之關係皆表示如

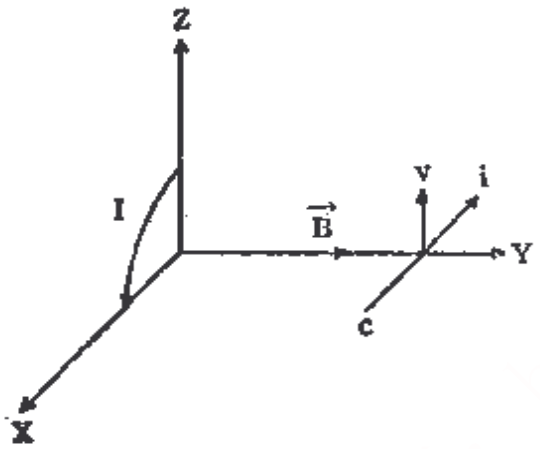


圖 1

---

* 在原則上，吾人亦可假設

$$P\boldsymbol{e}=-\boldsymbol{e},$$ 換言之，$\boldsymbol{e}$是準純量。

於此情形，可得

$$P\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}, \quad P\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}$$

換言之，$\boldsymbol{E}$爲準向量，而$\boldsymbol{B}$爲向量，（Ⅰ），（Ⅱ）……（Ⅷ）等方程式在$\boldsymbol{P}$之運作下，同樣的有不變性。

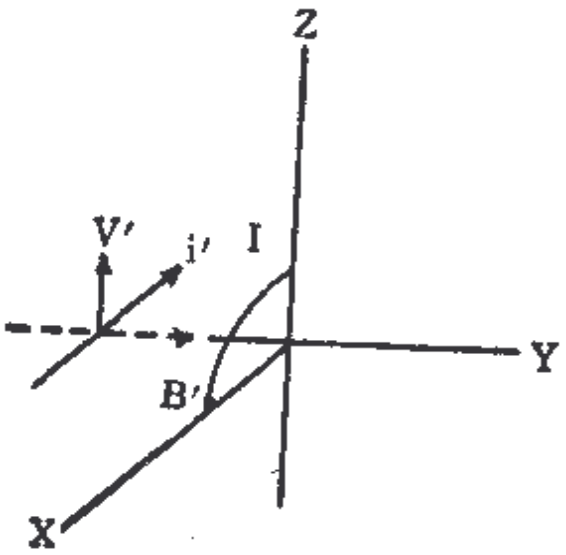


圖 2

圖 2。這乃意謂 B' 之方向與 B 相同，而不是 $-B$。否則，B'，v'，i' 之關係將違反 Lenz 定律。因此 B 向量爲於空間反轉時，不改變符號之向量，稱爲軸向量（axial vector）或準向量（pseudo vector）。

$$PB=B \tag{N-56}$$

由 (55)，(56) 式可知，(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)，(Ⅳ)，(Ⅵ) 各方程式在 P 之運作下，具有不變性。

玆考慮時間變數 t 變號的運作情形。由 Biot-Savart 定律，(Ⅲ-27) 式，可見電流反轉使磁場 H 亦反轉。

因　　$\theta e=e,\quad \theta j=-j,\quad \theta f=f$

故　　$\theta E=E,\quad \theta D=D$　　(Ⅳ-57)

　　$\theta H=-H,\quad \theta B=-B$

由這些式，可知 (Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)，(Ⅳ)，(Ⅵ) 各方程式在時間反轉運作下，同樣的具有不變性。

本書第一册，動力學乙部第五章中，已曾獲得同樣結果。

習　題

1. 由第（N-16），（N-17）式之延後位（retarded poteptial）A及ϕ，導出 Lorentz 關係(18)式。

   註: 用連續性方程式。

2. 證明自由空間之電磁場方程式

$$curl\, H=\frac{\partial D}{\partial t},\qquad curl E=-\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$div\, B=0,\qquad div D=0$$

可用二個位函數 $\bar{A}$，$\bar{\phi}$ 表示之

$$\epsilon E=D=-curl\bar{A},\qquad H=\frac{1}{\mu}B=\left(\nabla\bar{\phi}+\frac{\partial\bar{A}}{\partial t}\right),$$

$\bar{A}$，$\bar{\phi}$乃符合下方程式者

$$\nabla^2\bar{A}-\mu\epsilon\frac{\partial\bar{A}}{\partial t^2}=0,\qquad \nabla^2\bar{\phi}-\mu\epsilon\frac{\partial^2\bar{\phi}}{\partial t^2}=\theta,$$

$$div\,\bar{A}+\mu\epsilon\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial t}=0$$

(與（N-11，13，19）各式比較)

3. 證明 Maxwell 方程式（Ⅰ），（Ⅱ），（Ⅲ），（Ⅳ），可以A，ϕ函數（見第（11），(13)，(19）式）及上題之 $\bar{A}$，$\bar{\phi}$ 函數表示之如下

$$E=-\left(\nabla\phi+\frac{\partial A}{\partial t}\right)-\frac{1}{\epsilon}curl\,\bar{A},$$

$$B=curl\,A-\mu\left(\nabla\bar{\phi}+\frac{\partial\bar{A}}{\partial t}\right)。$$

4. 證明在導電介體中之 E, D, H, B 場方程式

$$curl\,H=\sigma E+\frac{\partial D}{\partial t}, \qquad curl\,E=-\frac{\partial B}{\partial t},$$

$$div\,B=0, \qquad div\,D=0,$$

σ=導電係數,

可以 A, ϕ 位函數

$$E=-\left(\nabla\phi+\frac{\partial A}{\partial t}\right), \qquad B=curl\,A$$

加以

$$div\,A+\mu\epsilon\frac{\partial\phi}{\partial t}+\mu\sigma\phi=0$$

關係表示之

又證明E, B場, 對下述規範變換有不變性:

$$\phi'=\phi+\frac{\partial\chi}{\partial t}, \quad A'=A-\nabla\chi,$$

$\chi=\chi(r,t)$ 爲符合下方程式之純量函數

$$\left(\nabla^2-\mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\sigma\mu\frac{\partial}{\partial t}\right)\chi=0$$

又證明如作規範變換使 $\phi'=0$, 則在導電介體中之E, H, D, B場可祇用一符合下方程式之向量函數A代示之

$$\left(\nabla^2-\mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\mu\sigma\frac{\partial}{\partial t}\right)A=0,$$

$$div\,A=0.$$

5. 在 μ, ϵ 等於常數, 電荷電流密度等於零之領域中, 場的方程式爲

$$curl\,E=-\frac{\partial B}{\partial t}, \qquad curl\,H=\frac{\partial D}{\partial t},$$

$$div\,\boldsymbol{D}=0, \qquad div\,\boldsymbol{B}=0$$

我們可假定$\boldsymbol{A}$可寫作一向量函數$\boldsymbol{\pi}$的導數，$\boldsymbol{\pi}$稱爲 *Hertz* 矢量，

$$\boldsymbol{A}=\mu\epsilon\,\frac{\partial\boldsymbol{\pi}}{\partial t},$$

故

$$\boldsymbol{B}=\mu\epsilon\,curl\,\frac{\partial\boldsymbol{\pi}}{\partial t}, \quad \boldsymbol{E}=-\left(\nabla\phi-\mu\epsilon\,\frac{\partial^2\boldsymbol{\pi}}{\partial t^2}\right),$$

此處之ϕ及符合下式的任意函數

$$\nabla^2\phi-\mu\epsilon\,\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=0$$

設我們取

$$\phi=-div\boldsymbol{\pi}$$

證明下方程式（等於直角座標三個分量方程式）

$$\nabla^2\boldsymbol{\pi}-\mu\epsilon\,\frac{\partial^2\boldsymbol{\pi}}{\partial t^2}=0$$

之任一解，即按下式確定$\boldsymbol{B}$及$\boldsymbol{E}$場

$$\boldsymbol{B}=\mu\epsilon\,curl\,\frac{\partial\boldsymbol{\pi}}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{E}=\nabla\,div\boldsymbol{\pi}-\mu\epsilon\,\frac{\partial^2\boldsymbol{\pi}}{\partial t^2}。$$

註：用 $curl\,curl\,\boldsymbol{X}=grad\,div\,\boldsymbol{X}-\nabla^2\boldsymbol{X}$ 恒等式。

6. 玆按下式引入上第 2 題之 $\overline{A}$，$\overline{\phi}$位函數

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\mu\epsilon\,\frac{\partial\overline{\boldsymbol{\pi}}}{\partial t}, \qquad \overline{\phi}=-div\,\overline{\boldsymbol{\pi}}$$

試明下方程

$$\nabla^2\overline{\boldsymbol{\pi}}-\mu\epsilon\,\frac{\partial^2\overline{\boldsymbol{\pi}}}{\partial t^2}=0$$

之任一解$\overline{\boldsymbol{\pi}}$可按下例式作$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{E}$之定義

$$\epsilon \boldsymbol{E}=\boldsymbol{D}=-\mu\epsilon\ curl\frac{\partial\overline{\boldsymbol{\pi}}}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{\mu}\boldsymbol{B}\ grad\ div\overline{\boldsymbol{\pi}}-\mu\epsilon\frac{\partial^2\overline{\boldsymbol{\pi}}}{\partial t^2},$$

證明$\overline{\pi}$爲一準向量，$\overline{\phi}$爲一準純量(pseudovector, pseudoscalar)

7. 取一介體,

$$\boldsymbol{D}=\epsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P},\quad (見第(Ⅰ-77)式)$$

$$\boldsymbol{B}=\mu_0(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M}),\quad (見第(Ⅲ-16)$$

Maxwell 方程式乃成

$$curl\boldsymbol{E}=-\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}-\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{M}}{\partial t},\qquad div\boldsymbol{H}=-div\boldsymbol{M},$$

$$curl\boldsymbol{H}=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\qquad\qquad div\boldsymbol{D}=0$$

證明

$$\boldsymbol{D}=-\mu_0\epsilon\ curl\frac{\partial\overline{\boldsymbol{\pi}}}{\partial t},\qquad \boldsymbol{D}=\epsilon\boldsymbol{E},$$

$$\boldsymbol{H}=\nabla div\overline{\boldsymbol{\pi}}-\mu_0\epsilon\frac{\partial^2\overline{\boldsymbol{\pi}}}{\partial t^2},\qquad \boldsymbol{B}=\mu_0(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M}),$$

$$\nabla^2\overline{\boldsymbol{\pi}}-\mu_0\epsilon\frac{\partial^2\overline{\boldsymbol{\pi}}}{\partial t^2}=-\boldsymbol{M},$$

符合上 Maxwell 方程式。

又證明

$$\boldsymbol{B}=\mu\epsilon_0\ curl\frac{\partial\boldsymbol{\pi}}{\partial t},\qquad \boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$$

$$\boldsymbol{E}=\nabla div\pi-\mu\epsilon_0\frac{\partial^2\pi}{\partial^2 t},\qquad \boldsymbol{D}=\epsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}$$

$$\nabla^2\pi-\mu\epsilon_0\frac{\partial^2\pi}{\partial t^2}=-\frac{1}{\epsilon_0}P$$

符合下列方程式

$$curl\boldsymbol{H}=\epsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t},\qquad div\boldsymbol{B}=0$$

$$curl\boldsymbol{E}=-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t},\qquad div\boldsymbol{E}=-\frac{1}{\epsilon_0}div\boldsymbol{P},$$

求延後（retarded）位函數π，及$\overline{\pi}$

8. 使

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+\chi\epsilon_0\boldsymbol{E}\text{（見（}I\text{-66）式）}$$

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}_0+\chi\boldsymbol{H}\text{（見（Ⅱ-16, 19）式）}$$

則

$$\boldsymbol{D}=\epsilon_0(1+\kappa)\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}_0=\epsilon\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}_0$$

$$\boldsymbol{B}=\mu_0(1+\chi)\boldsymbol{H}+\mu_0\boldsymbol{M}_0=\mu\boldsymbol{H}+\mu_0\boldsymbol{M}_0,$$

或

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{\mu}\boldsymbol{B}-\frac{\mu_0}{\mu}\boldsymbol{M}_0。$$

（$\boldsymbol{P}_0$，$\boldsymbol{M}_0$ 係與$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{H}$無關的部份）。

證明$\boldsymbol{E}$及$\boldsymbol{H}$場係由下方程式定之

$$\boldsymbol{E}=\nabla div\boldsymbol{\pi}-\mu\epsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{\pi}}{\partial t^2}-\mu\,curl\,\frac{\partial\overline{\boldsymbol{\pi}}}{\partial t},$$

$$\boldsymbol{H}=\epsilon curl\,\frac{\partial\boldsymbol{\pi}}{\partial t}+\nabla\,div\overline{\boldsymbol{\pi}}-\mu\epsilon\,\frac{\partial^2\overline{\boldsymbol{\pi}}}{\partial t^2},$$

π及$\overline{\pi}$乃下方程式之解

$$\nabla^2\pi-\mu\epsilon\frac{\partial^2\pi}{\partial t^2}=-\frac{1}{\epsilon}P_0,\qquad \nabla^2\overline{\pi}-\mu\epsilon\frac{\partial^2\overline{\pi}}{\partial t^2}=-\frac{\mu_0}{\mu}\boldsymbol{M}_0。$$

9. 證明向量及純量位函數 A, ϕ, 可由下方程式定之

$$A=\mu\epsilon\frac{\partial\pi}{\partial t}+\mu\, div\bar{\pi}-\nabla\chi,$$

$$\phi=-div\pi+\frac{\partial\chi}{\partial t}$$

χ乃符合下方程式的一純量函數

$$\nabla^2\chi-\mu\epsilon\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}=0$$

10. 在導電介體見上第 4 題, 如 $P_0=M_0=0$, 則 E 及 H 場乃由下方程式定之

$$E=curl\, curl\,\pi-\mu\, curl\,\frac{\partial\bar{\pi}}{\partial t}$$

$$H=curl\left(\epsilon\frac{\partial\pi}{\partial t}+\sigma\pi\right)+curl\, curl\,\bar{\pi},$$

$$curl\, curl\,\pi-\nabla div\pi+\mu\epsilon\frac{\partial^2\pi}{\partial t^2}+\mu\sigma\frac{\partial\pi}{\partial t}=0$$

$$curl\, curl\bar{\pi}-\nabla div\bar{\pi}+\mu\epsilon\frac{\partial^2\bar{\pi}}{\partial t^2}+\mu\sigma\frac{\partial\bar{\pi}}{\partial t}=0$$

第 五 章

電磁波：激發與傳播

1. 電偶與磁偶之輻射

Maxwell 電磁理論最早的直接證明，係由于 H. Hertz 在 1887-8 年的實驗。該實驗係將鋅板連接於感應機之兩極，而使電荷來回振盪。所產生之“波”，由另一線圈量取之。這實驗，發現該波傳播之速度爲光的速度，具有許多光波之性質如反射，繞射和偏極化等。Hertz 之實驗確立了 Maxwell 理論中光乃是電磁波之說。下文將簡單的描述電偶振盪之理論。該電偶亦稱 Hertz 振盪子。

(1) 電偶

若 r' 點之電荷分佈爲 $\rho(r')$，這分佈區域之尺度，遠小于 $|r-r'|$，r 乃是所欲求之輻射場 A，ϕ 所在點。由（N-38）式，已知

$$\phi(r,t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint\frac{\varphi\left(r,\ t-\dfrac{|r-r'|}{c}\right)}{|r-r'|}d^3r' \qquad (V-1)$$

爲方便計，可取原點於電荷分佈之區域裡。故 $r' \ll r$，今將 $\frac{\rho}{|r-r'|}$ 展開，只取到 r'/r 項，則

$$\phi(r,t) \cong \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{1}{r}\iiint \varphi\left(r', t-\frac{r}{c}\right)d^3r' - \frac{1}{r}r\cdot\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\iiint r'\varphi\left(r', t-\frac{r}{c}\right)d^3r'\right\} \qquad (V-2)$$

若總電荷爲零，則第一個積分爲零，(此電荷系統爲中性的)。第二個積分

$$p\left(t-\frac{r}{c}\right) = \iiint r'\rho\left(r', t-\frac{r}{c}\right)d^3r' \qquad (V-3)$$

稱爲電偶矩。因此

$$\phi(r,t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}r\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}\right)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}div\left(\frac{p\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}\right) \qquad (V-4)$$

向量位可由 Lorentz 關係式（Ⅳ-19）求得，即（*m. k. s. a* 制），

$$A(r,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\frac{p\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r} \qquad (V-5)$$

今定義 Hertzian 向量 π 爲

$$\pi(r\cdot t) \equiv \frac{p\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r} \equiv P_0\Psi\left(t-\frac{r}{c}\right) \qquad (V-6)$$

由（6）式，很容易直接地證實 π 滿足下方程式

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\pi=0 \qquad (\text{V-7})$$

欲求該線性電偶所造成之電磁場，可用（5）及（6）式，即

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\,curl\,\pi \qquad (\text{V-8})$$

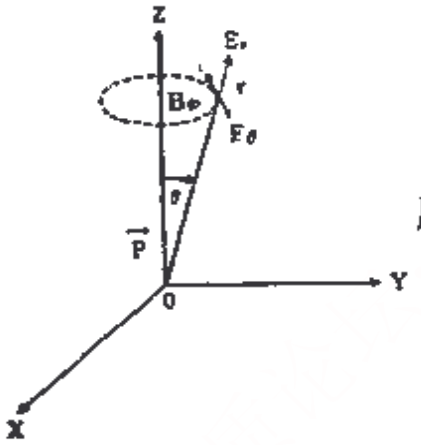
以（5）及（4）代入（V-13）式，即得

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,grad\;div\,\pi-\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\partial^2\pi}{\partial t^2}$$

由（7）式及下面恒等式

$$curl\,curl\;\pi=grad\,div\;\pi-\nabla^2\pi$$

故得



$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}curl\,curl\,\pi \qquad (\text{V-9})$$

設電偶 $\boldsymbol{P}_0$ 係沿着 z 軸，並採用球極座標 (r,θ,φ)。則

$$curl\,\pi=curl(\boldsymbol{P}_0\Psi)$$

$$=[\nabla\Psi\times\boldsymbol{P}_0]=\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}[r\times\boldsymbol{P}_0]$$

$$[\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{P}_0]_r=[r\times\boldsymbol{P}_0]_\theta=0,\quad (r\times\boldsymbol{P}_0)_\varphi=-r\boldsymbol{P}_0\sin\theta$$

$$[curl\pi]_r=[curl\pi]_\theta=0,\quad (curl\pi)_\varphi=-\sin\pi\theta\frac{\partial\pi}{\partial r}$$

由這些方程式，可得

$$\boldsymbol{B}_r=\boldsymbol{B}_\theta=0$$

$$B_\varphi=-\frac{\mu_0}{4\pi}\sin\theta\frac{\partial^2\pi}{\partial r\partial t} \qquad (\text{V-10})$$

$$E_r=-\frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial\pi}{\partial r}$$

$$E_\theta=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\pi}{\partial r}\right) \qquad (V-11)$$

$$E_\varphi=0$$

此顯示 $\boldsymbol{E}$ 位在包有該電偶之各平面，$\boldsymbol{H}$ 則沿着緯線之圓環，$\boldsymbol{E}$ 與 $\boldsymbol{H}$ 互相垂直。

(6) 式中 π 的時間因子 Ψ，尚未確定。如

$$\pi=P_0\frac{\exp\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)}{r},\quad \frac{\omega}{c}=\frac{2\pi}{\lambda},\quad \lambda=\text{波長} \qquad (V-12)$$

則 (10) 及 (11) 式可化爲

$$\begin{aligned}B_\varphi&=i\frac{\mu_0}{4\pi}\omega\sin\theta\left(\frac{1}{r}+\frac{2\pi i}{\lambda}\right)\pi\\ E_r&=\frac{1}{2\pi\epsilon_0}\cos\theta\left(\frac{1}{r^2}+\frac{2\pi i}{r\lambda}\right)\pi\\ E_\theta&=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sin\theta\left(\frac{1}{r^2}+\frac{2\pi i}{r\lambda}-\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\right)\pi\end{aligned} \qquad (V-13)$$

若各距離有下列的關係

$$p\text{之尺度}\ll r\ll\lambda$$

則電場 $\boldsymbol{E}$ 趨近由靜止電偶所產生的，而 $\boldsymbol{B}$ 則趨近由穩定電流所產生的，

如　　$r\gg\lambda$

此區域稱爲波區 (wave zone)，則 (13) 卽成

$$B_\varphi=-\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\omega^2}{c}\sin\theta\,\boldsymbol{P}_0\frac{1}{r}\cos\left(\omega t-\frac{2\pi r}{\lambda}\right), \qquad (V-14)$$

$$E_\theta=-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\omega^2}{c^2}\sin\theta\boldsymbol{P}_0\frac{1}{r}\cos\left(\omega t-\frac{2\pi r}{\lambda}\right),$$

其他分量皆爲零，或遠小于上式之値而可以略去。因此，在 *m. k. s. a* 制，可得

$$\sqrt{\epsilon_0}\,E_\theta=\sqrt{\mu_0}\,H_\varphi \qquad (\text{V-15})$$

當 E 爲 $volt/m$，而 H 爲 amp/m，則 (15) 卽成

$$E_\theta=4\pi\times3\times10^6H_\varphi \qquad (\text{V-15a})$$

如用 *Gauss* 制，則 (15) 式成

$$\boldsymbol{E}_\theta=\boldsymbol{H}_\varphi \qquad (\text{V-15}l)$$

由 (14) 式可知，垂直於 $\boldsymbol{P}$ 電偶之方向，$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$ 之値爲最大。並且可看出 $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$ 皆爲球面波，其相位於球面上（以 r 爲半徑）皆爲等値。其相位速度爲 $\frac{\lambda\omega}{2\pi}=c$。它們組成之 Poynting 向量(見 (N-42))

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$$

代表電磁能量通過與 P 方向垂直的每單位面積之率，

$$P=\frac{1}{(4\pi)^2\epsilon_0}\,\frac{\omega^4P_0^2}{c^3r^2}\cos^2\left(\omega t-\frac{\omega r}{c}\right)\sin^2\theta$$

電荷能輻射之總率，係上式對半徑爲 r 之球面積分，卽得

$$Q=\iint\boldsymbol{P}.\,d\boldsymbol{S}=\frac{1}{6\pi\epsilon_0}\,\frac{\omega^4P_0^2}{c^3}\cos^2\left(\omega t-\frac{\omega r}{c}\right) \qquad (\text{V-16})$$

電磁能輻射的平均率，乃

$$\langle Q\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T Q\,dt$$

T 爲週期、等於 $\frac{2\pi}{\omega}$、故

$$\langle Q\rangle=\text{電磁能輻射平均率}$$

$$=\frac{1}{12\pi\epsilon_0}\,\frac{\omega^4P_0^2}{c^3} \qquad (\text{V-16a})$$

此式與頻率四次方成比。

(2) 磁偶一電流線圈

若有一密閉之電流線圈，則

$$div\, j=0$$

由連續性方程式，可得 $\frac{\partial \rho}{\partial t}=0$，故按（Ⅳ-38）式，純量位 ϕ 與時間無關，因之 ϕ 與輻射完全無關。

今只剩（Ⅳ-37）之向量位 A。如前（2）式，將 $\frac{j}{|r-r'|}$ 展開，則向量位爲

$$A(r\cdot t)\cong \frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\frac{1}{r}\iiint j\left(r', t-\frac{r}{c}\right)d^3r'\right.$$

$$\left.-\frac{1}{r}\iiint (r\cdot r')\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{j}{r}\right)d^3r'\right\} \qquad (\text{V-17})$$

若爲密閉電流線圈，則第一個積分等于零。第二個積分；可寫爲

$$A(r, t)\simeq \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \frac{(r\cdot r')}{r^3}\left\{j\left(r', t-\frac{r}{c}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{r}{c}\ \frac{\partial}{\partial t}j\left(r', t-\frac{r}{c}\right)\right\}d^3r' \qquad (\text{V-18})$$

於第一項積分，用與（Ⅲ-47）—（Ⅲ-51），（Ⅲ-54）式同樣方法，得

$$m\left(t-\frac{r}{c}\right)=\frac{1}{2}\iiint\left[r'\times j\left(r', t-\frac{r}{c}\right)\right]d^3r' \qquad (\text{V-19})$$

$$\iiint \frac{(r\cdot r')}{r^3}j\left(r', t-\frac{r}{c}\right)d^3r'=\frac{\left[m\left(t-\frac{r}{c}\right)\times r\right]}{r^3} \qquad (\text{V-20})$$

及　$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\frac{\boldsymbol{m}\left(t-\frac{r}{c}\right)\times\boldsymbol{r}}{r^3}+\frac{1}{r^2c}\left[\frac{\partial\boldsymbol{m}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{\partial t}\times\boldsymbol{r}\right]\right\}\quad(\text{V}-21)$$

玆比較第（5）式的電偶及第（21）式的磁偶二者的重要性。由（3）式已知 $\boldsymbol{p}$，由（19）式已知 $\boldsymbol{m}$，（以 $\rho\boldsymbol{v}$ 代 $\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{v}$ 乃電荷之平均速度）。它們數量級之比爲

$$\frac{A_{magn}}{A_{elect}}=\frac{\frac{1}{rc}\frac{\partial m}{\partial t}}{\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial t}}$$

$$=\frac{v}{c}\qquad(\text{V}-22)$$

因 $\frac{v}{c}\ll1$，故磁偶所產生的效應，比電偶爲小。

現計算磁場與電場。（21）式有兩項。在波區裡（$\lambda\ll r$）。第一項按 $\frac{1}{r^2}$ 減低，而第二項按 $\frac{1}{r}$ 減少。故第一項可略去不計。

假設

$$\boldsymbol{m}=\boldsymbol{m}_0\cos\left(\omega t-\frac{\omega r}{c}\right)\qquad(\text{V}-23)$$

所以

$$\boldsymbol{A}=-\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\omega}{cr^2}\sin\left(\omega t-\frac{\omega r}{c}\right)[\boldsymbol{m}_0\times\boldsymbol{r}]\qquad(\text{V}-24)$$

$\boldsymbol{E}$ 及 $\boldsymbol{B}$ 場爲

$$\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t},\qquad\boldsymbol{B}=curl\,\boldsymbol{A}$$

使 $\boldsymbol{m}_0$ 沿着 z 軸。以球極座標，則

$$A_r=A_\theta=0\qquad(\text{V}-25)$$

$$A_\varphi=-\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\omega}{c}m_0\frac{\sin\theta}{r}\sin\left(\omega t-\frac{\omega r}{c}\right),$$

$$B_r=0$$

$$B_\theta=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)=-\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\omega^2}{c^2}m_0\frac{\sin\theta}{r}\cos\left(\omega t-\frac{\omega r}{c}\right) \quad (V-26)$$

$$B_\varphi=0$$

$$E_r=0$$

$$E_\theta=0 \quad (V-27)$$

$$E_\varphi=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\omega^2}{c}m_0\frac{\sin\theta}{r}\cos\left(\omega t-\frac{\omega r}{c}\right)$$

因此（在 $m.\ k.\ s.\ a$ 制）

$$E_\varphi=-cB_\theta \quad (V-28a)$$

於 Gauss 制，則爲

$$E_\varphi=-B_\theta \quad (V-28b)$$

這與（15b）式之電偶情形完全相似。

由（26），（27）式可看出：以線圈爲中心的任何球面，其相位皆爲等值；$\boldsymbol{E}$ 與 $\boldsymbol{B}$ 場互相正交；在與磁偶矩 $\boldsymbol{m}$ 垂直之方向，$\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ 之值爲最大，沿磁偶矩 $\boldsymbol{m}$ 之方向，其值則爲零。

計算一振盪磁偶輻射能量之率，可將(26)，(27) 式與（14）式相比，有如（16），(16a) 等式，可得

$$Q=\oint\!\!\int \boldsymbol{P}\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{1}{6\pi\epsilon_0}\frac{\omega^4 m_0^2}{c^3}\cos^2\left(\omega t-\frac{\omega r}{c}\right) \quad (V-29a)$$

故輻射能的平均率乃

$$\langle Q\rangle=\frac{1}{12\pi\epsilon_0}\frac{\omega^4 m_0^2}{c^3} \quad (V-29b)$$

2. 電磁波之傳播

(1) 均勻電介體：ϵ＝常數，μ＝常數

在無電流與電荷情形下，Maxwell 方程式可寫爲

$$curl\,\boldsymbol{H}=\epsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t},\qquad curl\boldsymbol{E}=-\mu\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\qquad (\text{V-30a, b})$$

將第一式對 t 微分，取第二式兩邊之 curl，再用下恒等式

$$curl\ curl=grad\ div-\nabla^2$$

可得

$$\left(\nabla^2-\epsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{E}=0\qquad (\text{V-31a})$$

同理

$$\left(\nabla^2-\epsilon\mu\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{H}=0\qquad (\text{V-31b})$$

這裡

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}=v,\ \text{相位速度}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}=c,\qquad (\text{V-32})$$

一沿着 z 方向傳播的平面波，其相位等于常數之面，乃與傳播方向直垂之平面。今引入波向量（wave vector）k 和頻率 ω，

$$k\equiv\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{\omega}{v}=\omega\sqrt{\epsilon\mu}\qquad (\text{V-33})$$

並設

$$\boldsymbol{E}(z,t)=\boldsymbol{E}(z)e^{i\omega t},\qquad \boldsymbol{H}(z,t)=\boldsymbol{H}(z)e^{i\omega t}\quad (\text{V-34})$$

(31a) 及 (31b) 之波動方程式可爲化爲

$$\frac{d^2E(z)}{dz^2}+k^2E(z)=0,\quad \frac{d^2H(z)}{dz^2}+k^2H(z)=0 \quad (\text{V-35})$$

它們的解可寫爲

$$E(z)=a_1e^{-ikz}+a_2e^{ikz} \quad (\text{V-36})$$

$$H(z)=b_1e^{-ikz}+b_2e^{ikz}$$

故 (34) 式爲

$$E(z,t)=a_1e^{i(\omega t-kz)}+a_2e^{i(\omega t+kz)} \quad (\text{V-37})$$

$$H(z,t)=b_1e^{i(\omega t-kz)}+b_2e^{i(\omega t+kz)}$$

係指該平面波沿着 $+z$ 和 $-z$ 之方向前進，該波頻率爲 ω，波長爲 $\lambda=\frac{2\pi}{k}$，而相位速度爲 $v=\frac{\omega\lambda}{2\pi}=\frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$。

沿着 $\pm\boldsymbol{k}$ 之方向傳播的平面波，則只要將 (37) 式改寫爲

$$\boldsymbol{E}(r,t)=\boldsymbol{E}_1e^{i(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot r)}+\boldsymbol{E}_2e^{i(\omega t+\boldsymbol{k}\cdot r)}$$

$$\boldsymbol{H}(r,t)=\boldsymbol{H}_1e^{i(\omega t+\boldsymbol{k}\cdot r)}+\boldsymbol{H}_2e^{i(\omega t+\boldsymbol{k}\cdot r)} \quad (\text{V-38})$$

此處的 $\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{H}_1,\boldsymbol{H}_2$ 爲常數向量。

在無電荷，無電流之均勻電介質中，則

$$div\boldsymbol{E}=0,\quad div\,\boldsymbol{H}=0$$

由 (38) 式，可得

$$-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_1)e^{i(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot r)}+i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{H}_2)e^{i(\omega t+\boldsymbol{k}\cdot r)}=0$$

$$-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{H}_1)e^{i(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot r)}+i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{H}_2)e^{i(\omega t+\boldsymbol{k}\cdot r)}=0$$

此二式的解，爲

$$(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_1)=(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_2)=0$$

$$(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{H}_1)=(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{H}_2)=0 \quad (\text{V-39})$$

換言之；$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 皆垂直於傳播方向 $\boldsymbol{k}$。故電磁波稱爲橫波。

今（38）式代入（30, ab）式，並設 $\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{H}_1=0$，則得

$$-i[\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H}_1]=i\omega\epsilon\boldsymbol{E}_1 \qquad (\text{V}-40\text{a})$$

$$-i[\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_1]=-i\omega\mu\boldsymbol{H}_1 \qquad (\text{V}-40\text{b})$$

此式證明 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 也互相正交。

由（33）式，$\boldsymbol{k}$ 向量之絕對值爲

$$|\boldsymbol{k}|=\frac{2\pi}{\lambda} \qquad (\text{V}-41)$$

用（33）式，可得（從純數值觀點）

$$\sqrt{\epsilon}\,E=\sqrt{\mu}\,H \qquad (\text{V}-42)$$

此與在眞空裡（15）式完全相同。故前在眞空情形之討論，亦可適用。

今 Poynting 向量之絕對值爲

$$|\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}|=|\boldsymbol{E}|\cdot|\boldsymbol{H}|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}\,\frac{1}{2}\,(\epsilon E^2+\mu H^2) \qquad (\text{V}-43\text{a})$$

$$=v\cdot\frac{1}{2}\,(\epsilon E^2+\mu H^2)=vu \qquad (\text{V}-43\text{d})$$

u 爲電磁場之能量密度。

（2）均勻導電介質

今（30a, b）之 Maxwell 方程式，爲

$$curl\,\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}+\epsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \qquad (\text{V}-44\text{a})$$

$$curl\,\boldsymbol{H}=-\mu\,\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \qquad (\text{V}-44\text{b})$$

玆引入導電係數 σ，其定義於（Ⅲ-86）式爲

$$\boldsymbol{j}=\sigma\boldsymbol{E} \qquad (\text{Ⅴ-45})$$

欲瞭解電磁波在導電體內之特性，假設電場 $\boldsymbol{E}$ 和磁場 $\boldsymbol{B}$ 爲座標 z 和時間 t 之函數。若取沿着 $\boldsymbol{k}$ 方向前進的波，以 ∥ 及 ⊥ 分別表示縱與橫之分量，換言之；

$$E=(E_{\parallel}+E_{\perp})e^{i(\omega t-k'\cdot r)} \qquad (\text{Ⅴ-46})$$

$$H=(H_{\parallel}+E_{\perp})e^{i(\omega t-k'\cdot r)}$$

將這些式代入（44a, b）及以下方程式

$$div\,\epsilon\boldsymbol{E}=0, \qquad div\,\mu\boldsymbol{H}=0$$

則得

$$\frac{\partial E_{\parallel}}{\partial z}=0, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\sigma}{\epsilon}\right)E_{\parallel}=0 \qquad (\text{Ⅴ-47a})$$

$$\frac{\partial H_{\parallel}}{\partial z}=0, \qquad \frac{\partial H_{\perp}}{\partial t}=0 \qquad (\text{Ⅴ-47b})$$

及

$$-[\boldsymbol{k}'\times\boldsymbol{H}_{\perp}]=\omega\left(\epsilon+\frac{\sigma}{i\omega}\right)E_{\perp} \qquad (\text{Ⅴ-48a})$$

$$[\boldsymbol{k}'\times\boldsymbol{E}]=\omega\mu\boldsymbol{H}_{\perp} \qquad (\text{Ⅴ-48b})$$

（47a）顯示 $E_{\parallel}$ 在空間的分佈是均勻的，且

$$E_{\parallel}=E_{\parallel}{}^{0}e^{-\sigma t/\epsilon},$$

換言之；$E_{\parallel}$（縱電場）並非振盪而的是減幅的。以銅而言，

$$\sigma=5\times10^{7}/\text{歐姆-米}$$

$$\epsilon\simeq\epsilon_0=\frac{1}{4\pi9\times10^{9}}\ \text{牛頓/米}$$

則衰減時間（decay time）$\frac{\sigma}{\epsilon}$ 約爲 10^{-19} 秒。（47b）亦顯示縱磁場$H_{\parallel}$，於空間是均勻，對時間而言乃是常數。

（48a, b）式與（40a, b）式之不同點，乃在於前者之 ϵ', k' 爲複數

$$\epsilon'=\epsilon+\frac{\sigma}{\omega}, \qquad k'=k-is \tag{V-49a}$$

由（33）式，

$$k'^2=\omega^2\epsilon'\mu=\omega^2\epsilon\mu-i\omega\sigma\mu \tag{V-49b}$$

由（49a, b）兩式解 k 與 s，則得

$$k^2=\frac{\omega^2\epsilon\mu}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2}+1\right) \tag{V-50a, b}$$

$$s^2=\frac{\omega^2\epsilon\mu}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2}-1\right)$$

（46）式得該橫場爲

$$\begin{Bmatrix} E_\perp \\ H_\perp \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} E_\perp{}^0 \\ H_\perp{}^0 \end{Bmatrix} e^{-s\cdot r}e^{i(\omega t-k\cdot r)} \tag{V-51}$$

由於導電係數σ，使（51）式成爲一衰減波(damped wave)。若

$\lambda \cong 6000$Å, 卽 $\omega\cong 3\times10^{15}$/sec

$\mu=\mu_0\doteqdot 4\times10^{-7}$ 享利/米

$\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\doteqdot 2\times 10^3 \gg 1$

$\delta=\frac{1}{s}=3\times10^{-7}$ 厘米

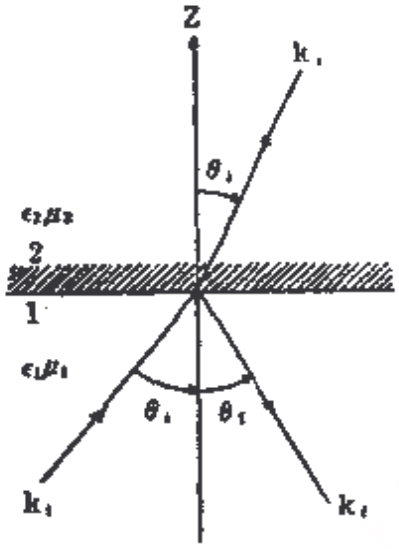
δ 稱爲“穿透深度”(penetration depth)。由此可見，光波（在可見光譜區）是難於穿過金屬。若每秒 60 週之電磁波，

$\omega=2\pi\times60/\text{sec}$，則

$$\delta=\frac{1}{s}\simeq\sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}}=0.9\text{ 厘米}$$

3. 反射與折射

設有一電磁波由介質（1）投射于與介質(2)之邊界面上。



若 i,f,r 分別代表入射，反射，折射等波。各該電場 E 可寫爲

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_i(r,t)&=\boldsymbol{E}_i^0e^{i(\omega_it-k_i\cdot r)}\\ \boldsymbol{E}_f(r,t)&=\boldsymbol{E}_f^0e^{i(\omega_ft-k_f\cdot r)}\\ \boldsymbol{E}_r(r,t)&=\boldsymbol{E}_r^0e^{i(\omega_rt-k_r\cdot r)}\end{aligned}\qquad(\text{V-52})$$

E_i^0, E_f^0, E_r^0 爲常向量（幅度）。同理，磁場 $\boldsymbol{B}$ 之式亦同此。

在邊界面上，電場 $\boldsymbol{E}$ 之切線分量是有連續性的（參看(I-89)式），即

$$E_i\sin\theta_i+E_f\sin\theta_f=E_r\sin\theta_r\qquad(\text{V-53})$$

使

$$a\equiv E_i^0e^{-ik_i\cdot r}\sin\theta_i,\quad b\equiv E_f^0e^{-ik_f\cdot r}\sin\theta_f,\quad c\equiv E_r^0e^{-ik_r\cdot r}\sin\theta_r$$

則（53）式可化爲

$$ae^{i\omega_it}+be^{i\omega_ft}=ce^{i\omega_rt},\qquad(\text{V-54})$$

若對 t 微分，即得

$$a\omega_ie^{i\omega_it}+b\omega_fe^{i\omega_ft}=c\omega_re^{i\omega_rt}\qquad(\text{V-54a})$$

由（54）及（54a）式中消去 c，可得

$$a(\omega_i-\omega_r)e^{i(\omega_i-\omega_r)t}+b(\omega_t-\omega_r)=0$$

欲使在任何 t 內，上式皆能成立，則需

$$\omega_i-\omega_t=0$$

同理，由上兩式消去 b，又得

$$\omega_r-\omega_i=0$$

因此，入射、反射、折射等波，其 E 場之頻率皆相同。

$$\omega_i=\omega_t=\omega_r \qquad (V-55)$$

當然，根據在邊界面上 B 場法線分量具有連續性之條件，所得結果同上。

玆在邊界面內取一任意向量 r 代入（52）式裡。用(55)式，則（53）連續性方程式寫成

$$\alpha e^{-i(k_i\cdot r}+\beta e^{-i(k_t\cdot r}=\gamma e^{-i(k_r\cdot r} \qquad (V-56)$$

這裡

$$\alpha\equiv E_i^0\sin\theta_i, \qquad \beta\equiv E_t^0\sin\theta_t, \qquad \gamma\equiv E_r^0\sin\theta_r$$

以 $r\cdot\nabla$ 運作於（56）式由，則得

$$\alpha(k_i\cdot r)e^{-i(k_i\cdot r}+\beta(k_t\cdot r)e^{-i(k_t\cdot r}=\gamma(k_r\cdot r)e^{-i(k_r\cdot r} \qquad (V-56a)$$

由（56）及（56a）兩式中消去 γ，即得

$$\alpha\{(k_i\cdot r)-(k_r\cdot r)\}e^{-i(k_i\cdot r)+i(k_t\cdot r)}+\beta\{(k_t\cdot r)-(k_r r)\}=0$$

同法，消去 β

$$\alpha\{(k_i\cdot r)-(k_t\cdot r)\}e^{-i(k_i\cdot r)+i(k_r\cdot r)}-\gamma\{(k_i\cdot r)-(k_t\cdot r)\}=0$$

欲使邊界面上之任意向量 r，皆能使上兩式成立，則需

$$k_i\cdot r=k_t\cdot r=k_r\cdot r \qquad (V-57)$$

這些條件，係需 k_i, k_f, k_r 向量皆在同一平面上。

由（33）式及（55）式，可得

$$k_i=\frac{\omega}{v_i},\quad k_f=\frac{\omega}{v_f},\quad k_r=\frac{\omega}{v_r} \tag{V-58}$$

v_i, v_f, v_r，分別爲入射、反射、折射等波之相位速度。v_i 和 v_f 是同在一介質裡，故

$$v_i=v_f \tag{V-59}$$

由（57），可得

$$\sin\theta_i=\sin\theta_f,\qquad \frac{\sin\theta_i}{v_i}=\frac{\sin\theta_f}{v_r} \tag{V-60a, b}$$

這就是反射與折射定律。(60b) 式亦可寫成 Snell 定律之形式

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r}=\left[\frac{\epsilon_2\mu_2/\epsilon_0\mu_0}{\epsilon_1\mu_1/\epsilon_0\mu_0}\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{n_2}{n_1} \tag{V-60c}$$

n_2，n_1 分別爲介質 2 與 1 之折射率。

如 $n_2<n_1$，由（60c）式可見當

$$\theta_i\geq\sin^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \tag{V-60d}$$

則該波於介質 1 中發生全反射。$\left(\text{當 } \sin\theta_i=\frac{n_2}{n_1} \text{ 時，則 } \theta_r=\frac{\pi}{2}\right)$

上述之結果於無線電波在高空電離層反射的問題，極爲重要。(參閱第六章第 6 節末)。

欲找 E_i，E_f，E_r，H_i，H_f，H_r，可參閱前面的圖；Z 軸係由介質 1 至介質 2，與邊界面垂直。故垂直入射，即係沿着 Z 軸。設 E_i 沿着 x 方向。由（15）或（42）式之關係

$$\sqrt{\epsilon}E=\sqrt{\mu}H$$

則得

$$E_{ix}=E_i^0 e^{i(\omega t-k_1 z)} \quad , \quad E_{iy}=E_{iz}=0$$

$$H_{iy}=\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}}E_i \quad , \quad H_{iz}=H_{ix}=0 \qquad (\text{V-61a})$$

$$E_{fx}=E_{f0}e^{i(\omega t+k_1 z)} \quad , \quad E_{fy}=0$$

$$H_{fy}=-\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}}E_f \quad , \quad H_{fz}=H_{fx}=0 \qquad (\text{V-61b})$$

折射波係沿負 z 軸方向，

$$E_{rx}=E_r^0 e^{i(\omega t-k_2 z)}, \quad E_{ry}=E_{rz}=0$$

$$H_{ry}=\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}}E_{rx}, \quad H_{rz}=H_{rx}=0 \qquad (\text{V-61c})$$

(53) 式之邊界條件，及H之切線分量的條件，於垂直入射情形下 ($Z=0$) 乃

$$E_i^0+E_f^0=E_r^0 \qquad (\text{V-62a})$$

$$\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}}E_i^0-\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}}E_f^0=\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}}E_r^0 \qquad (\text{V-62b})$$

由這些式子，可得

$$E_{r0}=\frac{2}{1+\frac{\mu_1}{\mu_2}\sqrt{\frac{\mu_2\epsilon_2/\mu_0\epsilon_0}{\mu_1\epsilon_1/\mu_0\epsilon_0}}}E_i^0=\frac{2}{1+\frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{n_2}{n_1}}E_i^0 \qquad (\text{V-63a})$$

$$E_f^0=\frac{1-\frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{n_2}{n_1}}{1+\frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{n_2}{n_1}}E_i^0 \qquad (\text{V-63b})$$

能量流過與波傳播方向垂直的每單位面積之乃 Poynting 向量 P。平均率 $\bar{P}$ (一個週期 $\frac{2\pi}{\omega}$ 時間) 可如 (16) 及 (16a)之方法求得。用 (61a, b, c) 及 (63a, b)，即得

$$\bar{P}_i=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}}\,|E_i^0|^2 \qquad (\text{V-64a})$$

$$\bar{P}_r=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}}\,|E_r^0|^2=\frac{4\xi}{(1+\xi)^2}\bar{P}_i, \qquad (\text{V-64b})$$

$$\bar{P}_f=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}}\,|E_{f0}|^2=\left(\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)^2\bar{P}_i \qquad (\text{V-64c})$$

$$\xi=\frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{n_2}{n_1}\simeq \text{介質 2 對介質 1 之相對折射率,}$$

$$(\text{如 } \mu_1\simeq\mu_2)$$

由 (64b, c), 可見

$$\bar{P}_f+\bar{P}_r=\bar{P}_i \qquad (\text{V-65})$$

這乃表示能量不滅 (因無 Joule 熱的喪失)。

方程式 (64a, b, c) 稱爲 Fresnel 公式, $\left(\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)^2$, $\frac{4\xi}{(1+\xi)^2}$ 分別爲反射和折射係數。

4. 空心金屬管中之電磁；波導 (wave guides)

Maxwell 方程式中, 如無任何傳導電流, 則 $\boldsymbol{j}=0$ (見第四章第 I 表)。設以管中心軸之方向爲 Z 軸, 並假設 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 之時間關係式爲

$$e^{-i\omega t}$$

則 Maxwell 方程式爲

$$curl\,\boldsymbol{E}=i\omega\boldsymbol{B}, \qquad curl\,\boldsymbol{B}=-i\mu\epsilon\omega\boldsymbol{E}$$

$$div\,\boldsymbol{E}=0, \qquad div\,\boldsymbol{B}=0 \qquad (\text{V-66})$$

由這些式子，可得

$$(\nabla^2+\mu\epsilon\omega^2)\boldsymbol{E}=0 \qquad (\text{V-67})$$

$$(\nabla^2+\mu\epsilon\omega^2)\boldsymbol{B}=0$$

假設

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}(x,y)e^{-i(\omega t\mp kz)},\quad \boldsymbol{B}=B(x,y)e^{-i(\omega t\mp kz)} \qquad (\text{V-68})$$

則（67）式可化爲

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\mu\epsilon\omega^2-k^2\right)\left\{\begin{array}{c}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{B}\end{array}\right\}=0 \qquad (\text{V-69})$$

設 E 及 B 可分解爲

$$\boldsymbol{E}=E_z+E_t,\qquad \boldsymbol{B}=B_z+B_t \qquad (\text{V-70})$$

Z表示沿着管中心軸之分量，而 t 爲橫分量（如圖）。於管內之邊界面上，$\boldsymbol{E}$只有法線分量存在。又因$\boldsymbol{E}$及$\boldsymbol{B}$作正交，故 B亦祇有切線分量存在，換言之；於邊界面上（n 爲法線單位矢量）



$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}=0,\qquad \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}=0 \qquad (\text{V-71})$$

以（70）式代入（66）式，並用（68）式與 z 之關係，則得

$$(\mu\epsilon\omega-k^2)E_t=grad_t\frac{\partial E_z}{\partial z}-i\omega[e_z\times grad_t B_z] \qquad (\text{V-72a})$$

$$(\mu\epsilon\omega-k^2)B_t=grad_t\frac{\partial B_z}{\partial z}+i\mu\epsilon\omega[e_z\times grad_t E_z] \qquad (\text{V-72b})$$

$grad_t$ 係兩維 (x,y) 之梯度算符，e_z 爲 Z 方向之單位向量。

(71) 式之邊界條件（用(72b)式）即可化爲

$$E_t=0,\quad \frac{\partial B_z}{\partial n}=0 \quad \text{在於邊界面上} \qquad (V-73)$$

$E_z=0$, 之條件係 Dirichlet 式之問題, $\frac{\partial B_z}{\partial n}=0$ 之條件則係 Neumam 式問題。對任一頻率 ω, (72a, b) 式祇當 k 爲某些值時，有滿足 (73) 式之解。但一般的說，(73) 式之兩條件，不能同時滿足。因此，吾人將考慮分別滿足下述條件之三種的電磁波。

(a) 橫磁波 (TM)，即

$$\left.\begin{aligned} &B_z=0 \text{ 在所有點,}\\ &\text{並有邊界條件}\\ &E_z=0 \quad \text{在該面上} \end{aligned}\right\} \qquad (V-74ab)$$

由 (72a, b) 式，可得

$$B_t=\mp\frac{\mu\epsilon\omega}{k}[e_z\times E_t], \qquad (V-75a, b)$$

$$E_t=\pm\frac{ik}{\mu\epsilon\omega^2-k^2}\,grad_t E_z,$$

此純量函數 E_z 滿足(69)之新程式，及其邊界條件 (74b) $E_z=0$ 茲定義長度 Λ 爲

$$\left(\frac{2\pi}{\Lambda}\right)^2=\mu\epsilon\omega^2-k^2 \qquad (V-76)$$

故 (69) 式即成

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\left(\frac{2\pi}{\Lambda}\right)^2\right\}E_z=0 \qquad (V-77)$$

欲滿足 (74b) 之邊界條件，則 E_z 之解，在 x, y 變數必是振

盪性的，故$\left(\frac{2\pi}{\Lambda}\right)^2$必爲正值。換言之；$\Lambda$必爲實數。(74b) 條件乃決定一組本徵值 Λ_1，Λ_2，……。這乃是波導 (Wave guide) 之簡正振盪方式 (normal modes of oscillation)。該波譜爲不連續的、無窮的。

對任何方式 Λ_n 及任一頻率ω，其波數 k $\left(\text{或波長 } \lambda=\frac{2\pi}{k}\right)$皆由 (76) 式決定。今有最小頻率 ω_n 爲

$$\mu\epsilon\omega_n^2=\left(\frac{2\pi}{\Lambda}\right)^2 \qquad (V-78)$$

頻率之低於 ω_n 者，則無實數 k 之存在。但若 $\omega>\omega_n$，則 k 爲實數，

$$\frac{k_n}{\sqrt{\mu\epsilon}\,\omega}=\sqrt{1-\left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)^2}$$

故對每一頻率 ω，祇有一有限 (finite) 數目之 n 方式，相當於 $\omega>\omega_1, \omega_2\cdots\cdots\omega_n$ 的，可以傳播前進。

回看 (33) 式的關係，吾人可見在管內之相位速度 $\frac{\omega}{k}=v\left[1-\left(\frac{\omega^2}{\omega}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$，是大於在無邊無限之介質的速度 $v=\frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$。

(b) 橫電波 (TE)，即

$$E_z=0 \text{ 在所有點}$$

及邊界條件

$$\frac{\partial B_z}{\partial n}=0 \text{ 於面上。}$$

由 (72a, b) 式，可得

$$E_t=\mp\frac{\omega}{k}\left[e_z\times B_t\right]$$

$$B_t = \pm \frac{ik}{\mu\epsilon\omega^2 - k^2} grad_t B_z \qquad (\text{V-80a, b})$$

此純量函數 B_z 滿足（69）式邊界條件（79b)。所有上述 TM波的討論，皆可移用於此.

(c) 橫電磁波 (*TEM*)

這種波係

$$E_z = B_z = 0 \quad \text{於所有點} \qquad (\text{V-81})$$

方程式（72a, b）即可化爲

$$(\mu\epsilon\omega^2 - k^2)\begin{Bmatrix} E_t \\ B_t \end{Bmatrix} = 0 \qquad (\text{V-82})$$

顯示

$$k = \sqrt{\mu\epsilon}\,\omega = \frac{\omega}{v} \qquad (\text{V-83})$$

v 爲在無限的介質之相位速度$\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$。方程式（69）可化爲二維之 Laplace 方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\begin{Bmatrix} E_t \\ B_t \end{Bmatrix} = 0 \qquad (\text{V-84})$$

如邊界面爲等位面時*，則 Laplace 方程式在管內所有點之解必爲零，故在空心管內，不可能有 TEM 波。但假設如管內裝有一同心管，並使兩管維持不同的電位，則於兩管之間，便可能有 TEM 波傳播前進。這就是所謂共軸電纜 (coaxial cable)。

---

* 上述之等位面，係表示該金屬有一無窮大之導電係數，所以即有電流流過時，沿管亦無電位差。

5. 緩慢變化之電磁場

Maxwell 方程式爲

$$curl\,\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}+\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t},\qquad cul\boldsymbol{E}=-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t},\qquad (\text{V-85})$$

$$div\,\boldsymbol{B}=0\qquad ,\ div\,\boldsymbol{D}=\varphi$$

設電磁場對時間及空間有緩慢的變化。假使場 E 以平面波（近似的來說）傳播前進

$$E=E_0e^{i(\omega t-kx)}。\qquad (\text{V-86})$$

則位移電流與傳導電流之比爲

$$R\simeq\frac{\omega\epsilon E}{\sigma E}=\frac{\omega\epsilon}{\sigma}\qquad (\text{V-86a})$$

σ 是 $\boldsymbol{j}=\sigma\boldsymbol{E}$ 式中的導電係數。以金屬言（參閱（51）式下之數據），若 $\omega\ll\frac{\sigma}{\epsilon}=6\times10^{18}$/sec，則上面之比 $R\ll1$，故（85）式之位移電流的效應可略去不計。

次看（86）式空間變化之情形。今將（86）式展開

$$e^{i(\omega t-kx)}=e^{i\omega t}(1-ikx\cdots\cdots)$$

若 x 滿足下情形

$$kx=\frac{\omega}{v}x\ll1,$$

或，因　$\frac{\omega}{v}=\frac{2\pi}{\lambda}$，$\lambda$ 爲波長，

$$x\ll\frac{\lambda}{2\pi},\qquad (\text{V-87})$$

則在理論中，可將對空間的變化略去。

電力工程使用的 ω，爲每秒 60 週波，波長則爲 $\frac{1}{2}\times 10^4 km$ 故吾人可將（85）式之位移電流與 $\boldsymbol{E}$ 場之空間關係略去不計。

向量位 $\boldsymbol{A}$ 與純量位 ϕ 之方程式係

$$\nabla^2 A=-\mu j,\quad \nabla^2\phi=-\frac{1}{\epsilon}\rho \text{（見 Ⅳ-23, 24），}$$

及　　（Ⅴ-88）

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\phi-\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\qquad \text{（見Ⅳ-13）}$$

（1）有電阻與電感之線路

茲取一負載電流 I 之密閉導體線路，該線路中裝有一供應電動力 V_0 之電池。將(Ⅳ-13)式對整條線路積分，並用（Ⅲ-77）之磁通量，即得

$$\oint_s \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s}=-\oint grad\phi\cdot d\boldsymbol{s}-\frac{\partial}{\partial t}\oint \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s}\qquad (Ⅴ-89)$$

$$=-\frac{\partial}{\partial t}\iint_s curl\,\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s}$$

$$=-\frac{\partial \Phi}{\partial t}\qquad (Ⅴ-89a)$$

由（Ⅲ-83, 84）式，整條線路之電位降爲

$$\oint dV=\int\frac{r}{A}dl\,s=\frac{rI}{A}\boldsymbol{s}=RI。$$

因此

$$RI=V-\frac{\partial \Phi}{\partial t}\qquad (Ⅴ-90)$$

若有一群導體線路 k，由（Ⅲ-79）式得知

$$\Phi_k=\sum_j L_{kj}I_j\qquad (Ⅴ-91)$$

L_{kj} 爲線路 k 和 j 之互感係數。將（91）式代入（90）式，可得

$$I_k R_k = V_k - \sum_i L_{ki} \frac{dI_i}{dt} \qquad (\text{V}-92)$$

此處已假設：這群導體之形狀與位置皆固定不變，故 L_{ki} 可視爲常數。(92) 式若有 n 條線路，則卽有 n 個方程式。

玆舉一簡單例子。若有兩個密閉線路，其中之一，有外加 *emf*

$$V_1 = V_0 e^{i\omega t}$$

而另一線路則爲 $V_2 = 0$。假設

$$I_j = I_j^0 e^{i\omega t}$$

則由（92）式可得二代數方程式

$$I_1^0 R_1 = V_0 - i\omega(L_{11} I_1^0 + L_{12} I_2^0)$$

$$I_2^0 R_2 = \quad -i\omega(L_{21} I_1^0 + L_{22} I_2^0)$$

故

$$\frac{I_2^0}{I_1^0} = \frac{-i\omega L_{21}}{R_2 + i\omega L_{22}}$$

或其絕對值爲

$$\frac{|I_2^0|}{|I_1^0|} = \frac{\omega L_{21}}{\sqrt{R_2^2 + \omega_2 L_{22}^2}} \qquad (\text{V}-93)$$

ωL_{22} 稱爲線路（2）之電抗（Reactance）。如 $R_2 \ll \omega L_{22} \ll \omega L_{21}$，（該情形相當於線路（2）僅有數匝線圈，而線路（1）則有無數之線圈）則 $I_2^0 \gg I_1^0$。這就是所謂變流器（current transformer）。

（2）有電阻，電感和電容之線路

若（89）之線路有一電容器，其兩板之電位爲 ϕ_1 和 ϕ_2，則（90）式可化爲

$$RI=V-(\phi_2-\phi_1)-\frac{d\Phi}{dt} \qquad (\text{V}-94)$$

設電容器之電容爲C，一板上之電荷爲e，二者與電位差$(\phi_2-\phi_1)$之關係爲

$$(\phi_2-\phi_1)C=e \qquad (\text{V}-95)$$

並用（Ⅲ-82）$\Phi=LI$，則（94）式爲

$$RI+\frac{e}{C}+L\frac{dI}{dt}=V$$

對時間t微分，並用$I=\frac{de}{dt}$，則得

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}I=\frac{dV}{dt} \qquad (\text{V}-96)$$

例如取

並設
$$\left.\begin{aligned} V&=V^0e^{-i\omega t}\\ I&=I^0e^{-i\omega t}\end{aligned}\right\} \qquad (\text{V}-97)$$

則由（96）式得

$$I=\frac{V}{R-i\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}=\frac{V}{Z} \qquad (\text{V}-98)$$

Z稱爲阻抗（impedence）。（98）式可表爲下式

$$I(t)=\frac{V_0\cos(\omega t-\delta)}{|Z|},\quad |Z|=\left[R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (\text{V}-99)$$

$$\tan\delta=\frac{\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}{R} \qquad (\text{V}-99\text{a})$$

由（99）和（99a）式可知：若$\omega L>\frac{1}{\omega C}$，則電流$I$之相位，對

V 的落後爲 δ；但若 $\frac{1}{\omega C}=\omega L$，則線路純爲電阻，而 I 和 V 爲同相位。功率消耗爲

$$P=VI=\frac{V_0^2\cos\omega t\ \cos(\omega t-\delta)}{Z} \qquad (\text{V}-100)$$

若 $\delta=0$，則消耗率爲最大。

如將 (96)－(98) 式中之外加 V 予以關掉，則 (97) 式之 I 爲

$$I=I_0e^{-i\omega_0 t}$$

ω_0 由下式定之

$$R-i\left(\omega\omega_0 L-\frac{1}{\omega_0 C}\right)=0$$

或

$$\omega_0=-i\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

如 $R=0$ (或 $R\ll 2L$)，則電流將以頻率 $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ 振盪。$\frac{1}{\sqrt{LC}}$ 稱爲自由振盪頻率。假如 $\left(\frac{R}{2L}\right)^2>\frac{1}{LC}$，則 ω_0 爲負純虛數，故電流不會振盪而衰減至零。如 $\frac{1}{LC}>\left(\frac{R}{2L}\right)^2$，則電流以頻率 $\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}$ 振盪，但按 $e^{-Rt/2L}$ 之因子衰減。

6. 趨膚效應 (skin effect)

今考慮一電磁波沿着圓柱導體傳播前進。吾人已有 Maxwell 方程式 (44a, b) 及 Ohm 定律 (45)。在位移電流與傳導電流

相比時可以略去之條件（86a）下，則得電流密度之方程式爲

$$\nabla^2 j=\sigma\mu\frac{dj}{dt} \qquad (\text{V-101})$$

玆取一無窮長之圓柱（或是圓截面之長線路），其半徑爲 a，並取圓柱之軸爲 Z 軸。假設

$$j=j(x,y)e^{i\omega t} \qquad (\text{V-102})$$

玆用圓柱座標 (z,r,φ) 則 $j(x,y)=j(r,\varphi)=j(r)$ 之方程式爲

$$\frac{d^2j}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dj}{dr}-i\sigma\mu\omega j=0 \qquad (\text{V-103})$$

玆定義一新的變數 ρ 爲

$$\rho=\sqrt{i\sigma\mu\omega}\,r=\sqrt{i}\,x \qquad (\text{V-104})$$

使（103）式化爲

$$\frac{d^2j}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dj}{d\rho}-j=0 \qquad (\text{V-105})$$

此爲修變的 Bessel 方程式（Ⅱ-133），它的解是階爲 0 之 Bessel 函數 $I_0(\rho)$（Ⅱ-133a），

$$I_0(\rho)=I_0(\sqrt{i}\,x),$$

及第二類之 Bessel 函數 $K_0(\varphi)$。故（105）之通解爲

$$j(x)=AI_0(\sqrt{i}\,x)+BK_0(\sqrt{i}\,x) \qquad (\text{V-106})$$

因爲 $j(x)$ 在 $0\leq r\leq a$ 時爲有限值，而 $K_0(\sqrt{i}\,0)=\infty$，故（106）中常數 B 必須爲零。設

$$j=j_a \text{ 在 } x=a,$$

則 $A=[I_0(\sqrt{i}\,a)]^{-1}$。

函數 $I_n(\sqrt{i}\,x)$，$K_n(\sqrt{i}\,x)$ 皆爲複數。Lord Kelvin 曾引入實函數 $Ber_n(x)$，$Bei_n(x)$，$Ker_n(x)$，$Kei_n(x)$，使得

$$I_n(\sqrt{i}\,x)=Ber_n(x)+i\,Bei_n(x)$$

$$K_n(\sqrt{i}\,x)=Ker_n(x)+iKei_n(x)$$

所以

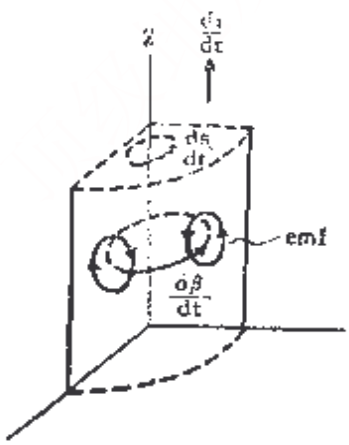
$$j(r)=\left[\frac{Ber_0^2x+Bei_0^2x}{Ber_0^2x_a+Bei_0^2x_a}\right]^{\frac{1}{2}}j_a \qquad (V-107)$$

有此處如（104），

$$x=\sqrt{\sigma\mu\omega}\,r, \qquad x_a=\sqrt{\sigma\mu\omega}\,a,$$

Ber_0x, Bei_0x 函數可查表。電流密度在圓柱形導體的表面爲最大。向軸心而減小。若頻率ω與導電係數愈大，則減小愈快。如頻率甚高時，則電流皆聚集在接近導體“表皮”之非常小薄層裡。

造成此趨膚效應之物理原因，乃是感應效應。當導體之電流隨着時間而改變時，則由 Biot-Savart 定律得知由該電流所造成之磁場大小也隨着改變。但按 Faraday 定律，磁場變化產生一感應 *emf*，而由這 *emf* 又產生了電流，使導體內之電流需再做重新分佈，結果產生趨膚效應。這一連串之關係可用附圖予以闡明。設電流沿着 Z 方向以 $\frac{dI}{dt}$ 率增加。則其磁場 $\boldsymbol{B}$ 也必以 $\frac{\partial B}{\partial t}$ 而增加，$\frac{\partial B}{\partial t}$ 之方向爲垂直于電流 I 之圓的切線，按右手定則定之。該 $\frac{\partial B}{\partial t}$ 又產生感應 *emf*，因此也產生電流，該電流之方向乃由 Lenz 定律決定之，（但可知必在含有圓柱導體之軸的平面上），若於接近軸處，I 與



$\frac{dI}{dt}$ 之方向相反，但在接近導體表面時，則 I 與 $\frac{dI}{dt}$ 方向相同。因此，電流密度於接近軸時減少，而接近表面處增加。

如是交流電，所有上述方向皆要反轉，故電流密度仍于接近表面處增强。

由於趨膚效應，在高頻率之線路，吾人寧可用空心管導體而不用實心的，且該管可鍍以良好導性之金屬（如銀或金），以減小電阻。

第 六 章

微觀的電動力學

1. 微觀的場方程式 (Microscopic field equations)

前幾章裡，吾人研討靜電和電磁等現象，並由這些現象推導出電磁場之 Maxwell 方程式。除了於討論極化（polarization）和磁化（magnetization）現象時簡短引用分子之電偶與磁偶外，所有現象皆是依據所謂巨觀（macroscopic view）的觀點，換言之：亦即未引用物質之電子構造觀念。本章中吾人將明顯地引用物質的電子結構的觀點，討論一些電磁問題。

歷史上，早在電子被確定之前，H. A. Lorentz 和其他一些物理學家已從微觀的看法展開電磁理論，這微觀的理論，是假設電荷 e，電荷密度 ρ，電流密度 $\rho v=j$，（v 係 ρ 之速度），皆遵守與巨觀之 Maxwell 方程式同形式的方程式。如以 $\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{d}$，$\boldsymbol{h}$，$\boldsymbol{b}$ 等小寫字母代表微觀的 $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{D}$，$\boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{B}$ 等電磁量，則我們假定微觀的場方程式爲:

$$curl\ \boldsymbol{h}=\rho\boldsymbol{v}+\frac{\partial \boldsymbol{d}}{\partial t}, \tag{M11a}$$

$$curl\ \boldsymbol{e}=-\frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial t}, \tag{M-1b}$$

$$div\ \boldsymbol{b}=0; \tag{M-1c}$$

$$div\ \boldsymbol{d}=\rho, \tag{M-1d}$$

$$\boldsymbol{d}=\epsilon_0\boldsymbol{e}, \tag{M-1e}$$

$$\boldsymbol{b}=\mu_0\boldsymbol{h} \tag{M-1f}$$

及 Lorentz 力爲

$$\boldsymbol{f}=\rho(\boldsymbol{e}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{b}) \tag{M-1g}$$

Poynting 向量爲

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{h} \tag{M-1h}$$

能量密度爲

$$u=\frac{1}{2}(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{d}+\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{b}) \tag{M-1i}$$

動量密度爲

$$\boldsymbol{g}=\frac{1}{c^2}\boldsymbol{P} \tag{M-1j}$$

$\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{b}$, 皆是眞空之場; ϵ_0, μ_0 乃是眞空之介電係數與磁導率, 因此僅視所選擇之場的單位而定, 與物質之特性無關。我們宜注意的是從微觀觀點來看, 巨觀的觀念如極化强度 P, 或磁化强度 M, 是不存在的, 因爲這些現象已包含在 ρ, $\boldsymbol{v}$ 之分佈情形。而 ρ, $\boldsymbol{v}$ 就確定了 $\boldsymbol{e},\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{h},\boldsymbol{b}$ 等場了。巨觀的 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$ 等場, 全係平均值。該平均化的過程, 是下文定義的所謂"粗粒過程" (coarse-graining)。

今考慮一函數 $f(x, y, z, t)$，係微觀場量之一。設 $\langle f(x, y, z, t)\rangle$ 爲下式的平均值

$$\langle f(x, y, z, t)\rangle = \frac{1}{\Delta V \Delta t}\iiint_{\Delta V}\int_{\Delta t} f(x_1, y', z', t')\, dr' dt \quad (\text{VI}-2)$$

此處的積分，係對在 (x, y, z) 點之體積 ΔV 及時間 t 之時距 Δt 上的積分。因此，$\langle f(\boldsymbol{r}, t)\rangle$ 乃係 f 在 $\boldsymbol{r}$，t 之體積 ΔV 與時間距 Δt 之平均值。體積 ΔV 乃是大得足可容納許許多多之分子，但却小得使巨觀之量在其間沒有多大變化。而時間間距 Δt 是長得足可包納許多個微觀場之週期，但却短得使 (2) 式之平均值在此時間距內無多大變化。故此 $\langle f\rangle$ 稱爲"粗粒平均值"。

(2) 式之積分子可寫爲

$$f(x+x', y+y', z+z', t+t')d^3\boldsymbol{r}'dt'。$$

則由此可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle f\rangle = \langle\frac{\partial f}{\partial t}\rangle,\quad \frac{\partial}{\partial x}\langle f\rangle = \langle\frac{\partial f}{\partial x}\rangle \text{ 等} \quad (\text{VI}-3)$$

若將 (1-a)－(1-f) 等微觀的場方程式，以粗粒平均法作平均，並用 (3) 式，即得

$$curl\,\langle\boldsymbol{h}\rangle = \langle\rho\boldsymbol{v}\rangle + \frac{\partial}{\partial t}\langle\boldsymbol{d}\rangle \quad (\text{VI}-4a)$$

$$curl\langle\boldsymbol{e}\rangle = -\frac{\partial}{\partial t}\langle\boldsymbol{b}\rangle \quad (\text{VI}-4b)$$

$$div\langle\boldsymbol{b}\rangle = 0 \quad (\text{VI}-4c)$$

$$div\langle\boldsymbol{d}\rangle = \langle\rho\rangle \quad (\text{VI}-4d)$$

$$\langle\boldsymbol{b}\rangle = \epsilon_0\langle\boldsymbol{e}\rangle \quad (\text{VI}-4e)$$

$$\langle\boldsymbol{b}\rangle = \mu_0\langle\boldsymbol{h}\rangle \quad (\text{VI}-4f)$$

玆以此和巨觀的場方程式比較

$$curl\ \boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}+\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \qquad (\text{Ⅵ-5a})$$

$$curl\ \boldsymbol{E}=-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad (\text{Ⅵ-5b})$$

$$div\ \boldsymbol{B}=0 \qquad (\text{Ⅵ-5c})$$

$$div\ \boldsymbol{D}=\rho \qquad (\text{Ⅵ-5d})$$

$$\boldsymbol{D}=\epsilon \boldsymbol{E} \qquad (\text{Ⅵ-5e})$$

$$\boldsymbol{B}=\mu \boldsymbol{H} \qquad (\text{Ⅵ-f})$$

由 (4b) 及 (5b)，又由 (4c) 及 (5c)，我們可作下的鑑定

$$\boldsymbol{E}=\langle \boldsymbol{e} \rangle, \qquad \boldsymbol{B}=\langle \boldsymbol{b} \rangle \qquad (\text{Ⅵ-6})$$

由 (4f) 及 (5f) 式，上第二個方程式顯示

$$\mu \boldsymbol{H}=\boldsymbol{B}=\mu_0 \langle \boldsymbol{h} \rangle \qquad (\text{Ⅵ-7})$$

如將此式寫爲 $\langle \boldsymbol{h} \rangle=\frac{\mu}{\mu_0}\boldsymbol{H}$，則其意義更爲清楚，蓋在 Gauss 制，$\mu_0=1$，上式成爲 $\langle \boldsymbol{h}' \rangle=\mu' \boldsymbol{H}'=\boldsymbol{B}'$，換言之，平均值 $\boldsymbol{h}$ 亦卽是巨觀中之 $\boldsymbol{B}$。此係因爲於 (2) 式中對 ΔV 作平均時，已將介質之特性計及在內也。

由 (4e, f) 及 (6) 式，可將 (4a)，(4b) 寫爲

$$curl\ \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}=\langle \rho \boldsymbol{v} \rangle+\frac{\partial}{\partial t}\ \epsilon_0 \boldsymbol{E} \qquad (\text{Ⅵ-4aa})$$

$$div\ \epsilon_0 \boldsymbol{E}=\langle \rho \rangle \qquad (\text{Ⅵ-4dd})$$

今從 (Ⅰ-77) 和 (Ⅲ-16)，可得

$$\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}=\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M}, \qquad (\text{Ⅵ-8})$$

$$\boldsymbol{D}=\epsilon_0 \boldsymbol{E}+\boldsymbol{P} \qquad (\text{Ⅵ-9})$$

故巨觀方程式（5a），（5d）可寫下式

$$curl\,\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}=\boldsymbol{j}+curl\,\boldsymbol{M}+\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \epsilon}+\frac{\partial(\epsilon_0\boldsymbol{E})}{\partial t} \qquad (\text{Ⅵ-5aa})$$

$$div\,\epsilon_0\boldsymbol{E}=\rho-div\,\boldsymbol{P} \qquad (\text{Ⅵ-5dd})$$

以此與（4aa），（4dd）式相比，可見吾人須作下列的鑑定

$$\langle\rho\boldsymbol{v}\rangle=\boldsymbol{j}+curl\,\boldsymbol{M}+\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} \qquad (\text{Ⅵ-10a})$$

$$\langle\rho\rangle=\rho-div\,\boldsymbol{P} \qquad (\text{Ⅵ-10b})$$

這些鑑定的依據如下：　j 爲傳導電流密度；$curl\,\boldsymbol{M}$ 係由磁化按（Ⅲ-62）所生的電流密度，$\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}$ 乃相當於（Ⅳ-5）式位移電流中極化部份所產生之電流密度。故（10a）式意謂平均値〈$\rho\boldsymbol{v}$〉引致傳導，磁化，極化的電流密度。由（Ⅰ-71b），吾人已知 $\boldsymbol{P}$ 與束縛電荷密度 ρ_p 之關係爲 $\rho_p=-div\,\boldsymbol{P}$。故方程式（10b）僅意謂平均値〈$\rho$〉，一部份係“自由電荷”$\rho$，一部份係“束縛電荷”$\rho_p$。

因此，巨觀的場方程式可由微觀的場方程式經平均過程得來。(1a)－(1f) 一系列的方程式，稱爲 Maxwell-Lorentz 方程式，可視爲最基本的方程式；它不僅可應用於眞空，且經過“粗粒平均”後，亦可應用於介質。

2. 常電磁場中電荷的運動

(1) 均勻磁場中的運動

一個電荷 e 之運動方程式爲

$$m\frac{dv}{dt}=e(v\times B) \qquad (\text{Ⅵ-11})$$

兩邊與 v 作純量積，再作積分。因 v 與〔$v\times B$〕垂直，即得能量不滅式

$$\frac{1}{2}\,mv^2=\text{常數} \qquad (\text{Ⅵ-12})$$

茲考慮與 B 平行的運動。由 (11) 式，該速度之分量 $v_\parallel$ 爲

$$v_\parallel=\text{常數} \qquad (\text{Ⅵ-13})$$

但因 $v^2=v_\parallel^2+v_\perp^2=$常數，故又得

$$v_\parallel=\text{常數} \qquad (\text{Ⅵ-14})$$

在與 B 垂直之平面的運動，其所受力之方向永是垂直於速度。因 B 爲常數，其運動軌道乃一半徑 a 之圓。

$$\frac{mv_\perp^2}{a}=ev_\perp B \qquad (\text{Ⅵ-15})$$

其角速度爲

$$\omega=\frac{v_\perp}{a}=\frac{eB}{m} \qquad (\text{Ⅵ-16})$$

$$a=\frac{mv_\perp}{eB} \qquad (\text{Ⅵ-17})$$

ω 稱爲迴旋加速器頻率 (cyclotron frepuency)，a 爲迴旋半徑 (radius of gyration)。

(2) 穩定電場中的運動

一個電荷 e 之運動方程式爲

$$m\frac{dv}{dt}=eE=-e\,grad\,\phi \qquad (\text{Ⅵ-18})$$

兩邊與 v 作純量積，再作積分，結果乃能量不滅關係式

$$\frac{1}{2}mv^2+e\phi=常數 \qquad (\text{VI-19})$$

(3) 交叉均勻電場磁場中的運動方程式為

$$m\frac{dv}{dt}=e\boldsymbol{E}+e[v\times\boldsymbol{B}] \qquad (\text{VI-20})$$

若將速度由 v 轉換爲 v'

$$v=v'+\frac{1}{B^2}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}] \qquad (\text{VI-21})$$

因
$$[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}]\times\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}\times[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}]=-\boldsymbol{E}\boldsymbol{B}^2+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{E})$$
$$=-\boldsymbol{E}\boldsymbol{B}^2,$$

故得

$$m\frac{dv'}{dt}=e[v'\times\boldsymbol{B}] \qquad (\text{VI-22})$$

由此方程式，得見 v' 的變化，與在無電場情形下相同。因此在垂直交叉場的運動係由下述兩個運動會成的：一是“漂移速度”(drift velocity)

$$v_d=\frac{1}{B^2}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}), \qquad (\text{VI-23})$$

另一是第 (13), (16), (17) 等式所描述，相對於“漂移中心”(23) 的運動 (22)，

我們應注意的是該漂移速度與電荷 e 之符號無關！另一點是 (20) 式係非相對論形式，故 (23) 式之結果只有在 $v_d\ll c$ 時可成立。

(4) 緩漸不變性 (Adiabatic invariant)

現可證明在緩漸變化之磁場裡，帶電粒子運動之磁矩有不變

性。

先取電荷 e，在磁場 B，以速度 $v_\perp$ 於一密閉軌道上運動之情形。按（Ⅲ-50, 52）等式，磁矩 M 爲

$$M=IS=\frac{ev_\perp}{2\pi a}\pi a^2=\frac{ev_\perp a}{2} \qquad (Ⅵ-24)$$

或，按（17）式之 a，

$$MB=\frac{1}{2}mv_\perp^2=W_\perp \qquad (Ⅵ-25)$$

這是與 B 垂直的運動的能量。

當 B 改變時，感應 emf 對電荷於一廻旋週所作之功，可由 Faraday 定律計算之

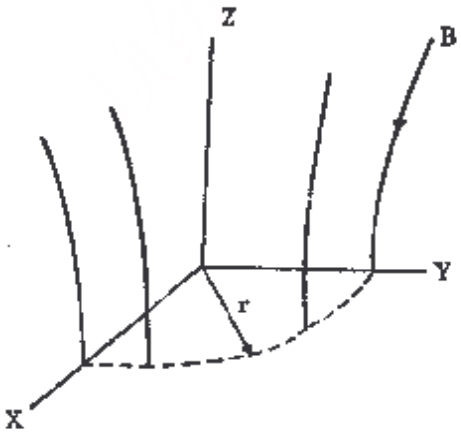
$$curl\ \boldsymbol{E}=-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t},$$

$$\Delta W_\perp=\oint e\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=e\iint\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}$$

玆　$\Delta W_\perp=T\frac{dW_\perp}{dt}$，　$T=\frac{2\pi a}{v_\perp}$＝廻旋週期

故由（25）及（24）式，可得

$$\frac{d}{dt}(MB)=M\frac{dB}{dt}, \qquad (Ⅵ-26)$$



此式顯示 $\frac{dM}{dt}=0$，亦卽謂磁矩 M 對時間而言，有緩漸不變性。

次研電荷 e 在靜態而稍爲不均勻磁場 B 中的運動。

爲簡單起見，取場 B 如圖所示，假設有軸的對稱性。 $div\ \boldsymbol{B}=0$ 的圓柱座標式爲

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r)+\frac{\partial B_z}{\partial z}=0 \qquad (\text{M-27})$$

就半徑 a 之 Larmor 軌道作積分，可得

$$aB_r=-\int r\frac{\partial B_z}{\partial z}\,dr$$

或

$$B_r=-\frac{a}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z}$$

以 (17)，(25) 式，可得與 B 場平行之 Lorentz 力爲

$$\begin{aligned} m\frac{dv_\parallel}{dt}&=F_\parallel=e[\boldsymbol{v}\times B]_\parallel \\ &=e\,v_\perp\,B_r=-\frac{eav_\perp}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z} \\ &=-\frac{W_\perp}{B}\frac{\partial B_z}{\partial z} \\ &=-(M\cdot\nabla)B \end{aligned} \qquad (\text{M-28})$$

設 l 爲沿着 B 之長度。則

$$m\frac{dl}{dt}\cdot\frac{dv_\parallel}{dl}=mv_\parallel\frac{dv_\parallel}{dl}=\frac{dW_\parallel}{dl}=-M\frac{\partial B}{\partial l} \qquad (\text{M-29})$$

但於靜場 B，能量爲常數

$$\frac{dW_\parallel}{dl}+\frac{dW_\perp}{dl}=0$$

再用 (25) 式，即得

$$\frac{d}{dl}(MB)=M\frac{\partial B}{\partial l} \qquad (\text{M-30})$$

此式顯示 $\dfrac{\partial M}{\partial l}=0$，即當一電荷在一非均勻磁場運動時，該運行軌道所連鎖起來的磁矩 M 係一常數。

M 之不變性具有下述之意義。該運行軌道所連之磁通量 $\Phi=\pi a^2B$，由（17）式，乃

$$\Phi=\pi a^2B=\frac{2\pi m}{e^2}\frac{W_\perp}{B}=\frac{2\pi m}{e^2}M。\qquad(\text{Ⅵ-31})$$

M之不變性，明示與每帶電粒子運行軌道所相連之磁通量 Φ 係一常數。這結果有一應用，將高速之電荷局限於某空間一區域裡，如熱核器設計中所謂磁瓶效應者是。今考慮磁場沿着 Z 方向增加的情形。因磁場並不作功於電荷，其能量 $W_\parallel+W_\perp$ 爲一常數。$v_\perp$ 及 $W_\perp$ 將增加，而 $v_\parallel$ 及 $W_\parallel$ 減少。若 B 足够强，$v_\parallel$ 將會減少至零，而不繼續在 Z 方向運進，使 $\boldsymbol{B}$ 場有如“鏡子”的反照作用。

上面（26）和（30）式之計算，證明 M 磁矩之不變性。

$$M=\frac{ev}{2\pi}\pi a^2=\frac{ev_\perp a}{2}=\frac{W_\perp}{B}=\frac{e^2B}{m}\pi a^2\qquad(\text{Ⅵ-32})$$

（參閱（24），(16)，(17）等式），係古典力學中的作用變數（action variable）之緩漸不變性理論之例子。（參看本書第一册，古典動力學乙部，第七章；第二册量子論甲部第八章第 6 節）按第二册甲部第八章（Ⅷ-25, 26）式，證明 M 之不變性，將留給讀者爲習題。

3. 原子內之電子在磁場的運動：Larmor 旋進及逆磁性

(1) Larmor 定理

前節所論的乃"自由"電子。茲將研論束縛電子(如原子內的)在外加磁場中的運動。

一個電荷 e 在原子內之向心靜電場運動，可由純量位 ϕ 表示之，其運動方程式爲

$$m\ddot{x}=F_x,\quad m\ddot{y}=F_y,\quad m\ddot{z}=F_z,\quad \boldsymbol{F}=-e\nabla\phi \qquad (\text{VI-33})$$

爲方便起見，吾人可引用複變數

$$r=x+iy,\quad f=F_x+iF_y \qquad (\text{VI-33a})$$

故 (33) 成爲

$$m\ddot{r}=f,\qquad m\ddot{z}=F_z \qquad (\text{VI-33b})$$

茲將 x，y 軸以 ω 之角速度繞 z 軸旋轉。由轉動座標系的觀點，將 r 轉換至 r' 如下式;

$$r'=re^{-i\omega t} \qquad (\text{VI-34a})$$

及

$$f'=f\,e^{-i\omega t} \qquad (\text{VI-34b})$$

方程式 (33b) 卽化爲

$$m\ddot{r}'=f'-2im\omega\dot{r}'+m\omega^2r' \qquad (\text{VI-35})$$
$$m\ddot{z}=F_z$$

茲置原子於一磁場 $\boldsymbol{B}$ 中，以 $\boldsymbol{B}$ 方向爲 Z 軸。有 Lorentz 力 $-e\nabla\phi+e[v\times\boldsymbol{B}]$ 之運動方程式 (33) 爲

$$m\ddot{x}=F_x+e\dot{y}B,$$
$$m\ddot{y}=F_y-e\dot{x}B, \qquad (\text{VI-36})$$
$$m\ddot{z}=F_z$$

或，如 (32a) 式，

$$m\ddot{r}=f-ie\dot{r}B, \qquad m\ddot{z}=F_z \qquad (\text{Ⅵ-36a})$$

若將（35）式之 mw^2r' 項略去，則比較（36a）與（35）式，可見原子內之電子在磁場 B 之運動，與無磁場 B 而以頻率 ω_L 轉動之座標作參考之運動，完全一樣，

$$\omega_L=\frac{eB}{2m} \qquad (\text{Ⅵ-37})$$

此意謂磁場 B 對原子內之電子之效應，係使電子得到額外之轉動頻率 ω_L。此結果稱爲 Larmor 定律，ω_L 稱爲 Larmor 頻率。

可將（35）式之最後一項略去之條件（亦卽 Larmor 定理可成立之條件）爲

$$\frac{\omega_L r}{2\dot{r}} \ll 1 \quad (\text{或 } \frac{\omega_L}{2\omega_0} \ll 1)$$

ω_0 爲無磁場 B 時，原子內電子運動之頻率上述之條件爲

$$\frac{eB}{4m\omega_0} \ll 1, \qquad (\text{Ⅵ-38})$$

卽 $B \ll 10^4\ tesla = 10^8\ gauss$。在一般實驗情形下，這條件皆能滿足的。

(2) Larmor 旋進 (precession)

（Ⅲ-50）已曾定義電流線圈之磁矩 M 爲

$$M=\frac{1}{2}I\oint[r\times dl] \qquad (\text{Ⅵ-39})$$

今有一電荷 e 在向心場（原子內）沿一密閉軌道運動，其週期爲 T。因此，電流 $I=\frac{e}{T}$。在向心場，粒子之角動量 L 係一常數

$$L=mr^2\frac{d\phi}{dt}=2m\frac{dS}{dt}=\text{常數} \qquad (\text{Ⅵ-40})$$

因 $[\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{dl}]=2dS$，由（39）式可得

$$\boldsymbol{M}=\frac{e}{2m}\boldsymbol{L} \qquad (\text{Ⅵ-41})$$

注意：電子之電荷爲負值，故 $\boldsymbol{M}$ 與 $\boldsymbol{L}$ 二者方向是相反的。

於磁場裡，磁偶矩所受之力偶 T 爲

$$\boldsymbol{T}=[\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{B}] \qquad (\text{Ⅵ-42})$$

該電子之運動方程式爲

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=[\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{B}]=\frac{e}{2m}[\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{B}] \qquad (\text{Ⅵ-43})$$

若引入角向量速度 ω_L

$$\omega_L=-\frac{eB}{2m} \qquad (\text{Ⅵ-44})$$

（43）式即化爲

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=[\boldsymbol{\omega}_L\times\boldsymbol{L}] \qquad (\text{Ⅵ-45})$$

此顯示角動量 $\boldsymbol{L}$ 係以 Larmor 頻率 ω_L 環繞 B 之方向旋進。

（3）逆磁性（Diamagnetisn）

玆取一原子，其在正常狀態時（即無外磁場）之磁矩爲零。但若有磁場時，Larmor 旋進乃產生一磁矩。其于 B 方向之分量，可由（41），（40）及（44）等式計算之。

$$M_z=\frac{1}{2}er^2\frac{d\phi}{dt}=\frac{1}{2}er^2\omega_L,\quad r^2=x^2+y^2 \qquad (\text{Ⅵ-46a})$$

以電子言，$e=-|e|$，故

$$M_z=-\frac{1}{2}|e|\omega_L r^2 \qquad (\text{Ⅵ-46b})$$

一個原子所有電子之 M_z 之和，須對電子軌道各方向作平均。

今

$$\overline{x^2}=\overline{y^2}=\overline{z^2}=\frac{1}{3}\overline{r^2}$$

如原子內有Z個電子，由（46）式可得

$$\overline{M}_s=-\frac{e^2Z}{6m}\overline{Br^2},\quad (-\text{乃平均值})$$

若每單位體積有N個原子，則磁化强度M(每單位體積之磁矩)爲

$$M=-\frac{Ne^2Z\mu}{6m}\overline{r^2}H \qquad (\text{Ⅵ-47})$$

此式乃定義逆磁化率爲

$$\chi=-\frac{Ne^2Z\mu}{6m}\overline{r^2} \qquad (\text{Ⅵ-48})$$

由（Ⅲ-23a），$\mu=(1+\chi)\mu_0$。若 $\chi\ll1$，（48）式可代以

$$\chi\cong-\frac{Ne^2Z\mu_0}{6m}\overline{r^2} \qquad (\text{Ⅵ-48a})$$

逆磁化率與順磁化率的不同點，是除因N與溫度的關係外，它與溫度無關。（48a）式已由實驗證實。但 $\overline{r^2}$（電子與核之間距離平方平均值）則祇可由量子力學計算之。

4. 振盪中之電子：輻射與減幅 (radiation and damping)

一電荷 e 受簡諧力束縛的運動方程式爲

$$m\ddot{z}=-kz \qquad (\text{Ⅵ-49})$$

其解爲

$$z=a\cos(\omega t+b), \qquad \omega^2=\frac{k}{m}$$

其電偶矩（選適宜的之 t 的原點）爲

$$ez=ea\cos\omega t \tag{Ⅵ-50}$$

該振盪中之電荷，輻射一電磁場。該理論與結果已詳見於第五章第1節。由（Ⅴ-14）得知電場 E_θ 及磁場 B_φ 爲

$$cB_\varphi=E_\theta=\frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2}\frac{\sin\theta}{r}\ddot{Z}, \qquad z=a\cos\omega\left(t-\frac{r}{c}\right) \tag{Ⅵ-51}$$

$(r,\ \theta,\ \varphi)$ 爲 P 點之極座標，P 點爲所量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的點。

由（Ⅴ-16）式，電偶輻射能的率爲

$$Q=\oiint P\cdot dS=\frac{1}{6\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{c^3}(\ddot{Z})^2 \tag{Ⅵ-52}$$

其平均率爲

$$\langle Q\rangle=\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}Q\,dt=\frac{1}{12\pi\epsilon_0}\frac{e^2a^2\omega^4}{c^3} \tag{Ⅵ-53}$$

該簡諧振盪子（50）式之平均總能爲

$$W=\frac{1}{2}m\dot{z}^2+\frac{1}{2}kz^2=\frac{1}{2}ma^2\omega^2 \tag{Ⅵ-54}$$

由（54）和（53）式，

$$\frac{dW}{dt}=-\frac{e^2a^2\omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}=-\gamma W \tag{Ⅵ-55}$$

此示，振盪子能量按下式衰減

$$W=W_0e^{-\gamma t}, \quad \gamma=\frac{e^2\omega^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} \tag{Ⅵ-56}$$

這輻射之減幅，可在運動方程式加入減幅項以表示之。如將該方程式寫成

$$m\ddot{z}+kz=F, \tag{Ⅵ-57}$$

即得

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{z}^2+\frac{1}{2}kz^2\right)=F\dot{z} \qquad \text{(Ⅵ-57a)}$$

將此式與（55）式相比，可見

$$F\dot{z}=-\frac{(e)^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}(\ddot{z})^2 \qquad \text{(Ⅵ-58)}$$

當減幅效應非常小且該運動可視爲週期性時，吾人可計算 $F\dot{z}$ 在振盪數次之平均值。由

$$(\ddot{z})^2=\frac{d}{dt}(\ddot{z}\dot{z})-(z\dot{z})$$

及平均值

$$\overline{\frac{d}{dt}(\ddot{z}\dot{z})}=\frac{1}{T}\left\{(\dot{z}\ddot{z})_T-(\dot{z}\ddot{z})_0\right\}=0$$

（Ⅵ-57a）化爲

$$m\ddot{z}+kz-\frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\dddot{z}=0 \qquad \text{(Ⅵ-59)}$$

玆假設

$$z=be^{i\omega_r t} \qquad \text{(Ⅵ-60)}$$

則（59）式爲

$$-\omega_r^2+\omega^2+i\gamma\frac{\omega_r^3}{\omega^2}=0, \qquad \text{(Ⅵ-61)}$$

$\omega^2=\frac{k}{m}$，γ 見（56）式。如 $\gamma=0$（即無輻射減輻），即得

$\omega_r=\pm\omega$。

如減輻效應非常小，則可使

$$\omega_r=\pm\omega+\epsilon, \qquad \epsilon\ll\omega$$

將此代入（61）式，並略去 ϵ^2，$\gamma\epsilon$ 等，則得

$$\omega_r = \pm\omega + i\frac{\gamma}{2} \qquad (\text{VI-62})$$

故（60）式解爲

$$z = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(b_1 e^{i\omega t} + b_2 e^{-i\omega t}), \qquad (\text{VI-63})$$

b_1，b_2 皆爲常數。

如假設輻射減幅非常小，（59）式 $\ddot{z}$ 中之 z，可用 $z = be^{i\omega t}$，故得 $\ddot{z} = -\omega^2 z$。（59）式乃成

$$\ddot{z} + \omega^2 z + \gamma\dot{z} = 0 \qquad (\text{VI-64})$$

這乃是一個附有“摩擦力”阻止速度的振盪方程式。

由(52)式，可得自由電子的 Thomson 散射。在電場 $E(t)$ 作用下，電子之運動方程式爲

$$m\ddot{z} = eE(t)$$

該强逼振盪的輻射能量率 Q，由（52）式得之

$$Q = \frac{e^4 E^2(t)}{6\pi\epsilon_0 c^3 m^2} \qquad (\text{VI-65})$$

該入射波之輻射能可由 Poynting 向量求得（用（V-15）式，$\sqrt{\epsilon_0}E = \sqrt{\mu_0}H$）

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}E^2 \qquad (\text{VI-66})$$

此係經過與傳播方向垂直之每單位面積之能量率。今定義

$$\sigma = \frac{Q}{P} \qquad (\text{VI-67})$$

其因次爲面積，稱爲一自由電子散射輻射之截面積，則

$$\sigma=\frac{8\pi}{3}r_0^2 \qquad (\text{Ⅵ-68})$$

這裡

$$r_0=\frac{e^2}{4\pi_0\epsilon mc^2}=2.8\times10^{-13}cm \qquad (\text{Ⅵ-69})$$

稱爲電子之古典半徑。上述乃 J. J. Thomson 的理論。

5. 光譜線之 Lorentz 寬度 (Lorentian width of sbectral lines)

週期時間函數 $e^{i\omega t}$ 的頻率爲 ω。任何時間函數 $f(t)$ 皆可用 Fourier 解析法分析成頻率之譜系。

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\omega t}\,dt \qquad (\text{Ⅵ-70a})$$

該式反轉換爲

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{-i\omega t}d\omega \qquad (\text{Ⅵ-70b})$$

玆取（49）式之簡諧振盪子。若它在無窮長之時間放出一電磁波，則該波是頻率 ω 之單色光。若該振盪運動，由於輻射能放出而呈減幅的現象（其 z 可以（63）表示），則（70a）式 z 之 Fourier 轉換將有一頻率分佈。下文將求減幅之振盪子〔(59) 或（64）式〕放出之輻射之波譜分佈。

設一振盪子的運動，於 $t=0$ 時開始，於 $t>0$，則遵守 (63) 式，

$$z(t)=\begin{cases} 0, & t<0, \\ e^{-\frac{\gamma t}{2}}\left(be^{i\omega_0 t}+b^* e^{-i\omega_0 t}\right), & t>0。\end{cases} \qquad (\text{VI}t71)$$

假設該減幅甚小，換言之，$\gamma \ll \omega_0$，則

$$\ddot{z}\cong -\omega_0^2 z, \qquad (\text{VI-72})$$

由 $t=0$ 開始，總共輻射出之能量，按 (52) 式，爲

$$W=\int_0^\infty Q dt=\frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\int_{-\infty}^{\infty}(\ddot{z})^2 dt$$

$$=\frac{e^2\omega_0^4}{6\pi\epsilon_0 c^3}\int_{-\infty}^{\infty} dt\, z(t)\, z(t) \qquad (\text{VI-73})$$

玆用 (70b) 之 z 轉換式，該積分可化爲

$$\int_{-\infty}^{\infty}dt\int_{-\infty}^{\infty}y(\omega)e^{-i\omega t}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}y(\omega')e^{-i\omega' t}d\omega'$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\, d\omega'\, y(\omega)\, y(\omega')\int_{-\infty}^{\infty}dt e^{-i'(\omega+\omega')t}$$

$$=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega d\omega' y(\omega)y(\omega')\delta(\omega+\omega')$$

這裡 $\delta(\omega+\omega')$ 爲 (II-12a, b) 定義之 δ 函數。此積分爲

$$=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}d\omega y(\omega)y(-\omega)=4\pi\int_0^\infty d\omega y(\omega)y(-\omega) \qquad (\text{VI-74})$$

欲得 $y(\omega)$，以 (71) 代入 (70a) 式，

$$y(\omega)=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{b}{\frac{\gamma}{2}-i(\omega_0+\omega)}+\frac{b^*}{\frac{\gamma}{2}+i(\omega_0-\omega)}\right],$$

$$y(-\omega)=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{b}{\frac{\gamma}{2}-i(\omega_0-\omega)}+\frac{b^*}{\frac{\gamma}{2}+i(\omega_0+\omega)}\right]。$$

因 $\gamma\ll\omega_0$，如我們注意點係濘近 ω_0 的 ω，則可得 $y(\omega)y(-\omega)$ 之近似値爲

$$y(\omega)y(-\omega)=\frac{1}{4\pi^2}\ \frac{|b|^2}{\frac{\gamma^2}{4}+(\omega_0-\omega)^2} \qquad (\text{VI}-75)$$

將 (75), (74) 等式代入 (73) 式, 可得

$$W=\frac{e^2\omega_0^4}{6\pi^2\epsilon_0 c^3}\ \frac{|b|^2}{\frac{\gamma^2}{4}+(\omega_0-\omega)^2} \qquad (\text{VI}-76)$$

上式係在無減幅之振盪子頻率 $\omega_0=\frac{k}{m}$ 附近之波譜分佈, 該分佈稱爲 Lorentz 線形狀 (line shape)。當 $\omega=\omega_0$ 時, 能量爲最大值 W_{max}。在 $\omega=\omega_0\pm\frac{\gamma}{2}$, 則 $W=\frac{1}{2}\ W_{max}$ 所謂 "半寬度" ΔW (half-width) 的定義爲

$$\Delta W=\gamma$$

(76) 式 Lorentz 線形狀與 Doppler 線形狀大異, 後者呈 Gaussian 分佈, 乃由輻射源之原子速度分佈而定的。

6. 色散理論 (Theory of dispersion)

按 (IV-21) 式, 電磁波在介質 (μ, ϵ) 傳播之速度爲

$$v=\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}=\frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu/\epsilon_0\mu_0}} \qquad (\text{VI}-78)$$

該介質之折射率爲 (V-77c)

$$n=\sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}} \qquad (\text{VI}-79)$$

在許多的介質中, n 常爲電磁波頻率的函數。這也就是白色光會經一三稜鏡而散成一光譜的原因。下文將按古典電磁理論, 從原

子的觀點，導出色散理論。但一完整的色散理論，是需用量子力學的。

設有頻率ω之電磁波入射於介質，該介質每單位體積有N個分子。每個分子中有一個被簡諧力所束縛的電子，它振盪頻率爲ω_0。該電子輻射出能量，故有減幅現象。在入射波之電場$E=E_0e^{i\omega t}$作用下的電子，其運動方程式，由（64）式，爲

$$\ddot{r}+\omega_0^2 r+\gamma\dot{r}=\frac{eE_0}{m}e^{i\omega t} \qquad (\text{VI-80})$$

如欲求一形式爲$r=r_0e^{i\omega t}$之解，則

$$r_0=\frac{1}{e}\alpha\epsilon_0 E_0$$

這裡

$$\alpha=\frac{e^2}{m\epsilon_0}\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)+i\gamma\omega} \qquad (\text{VI-81})$$

每單位體積之感應電偶矩爲

$$\boldsymbol{P}=Ne\boldsymbol{r}=N\alpha\epsilon_0\boldsymbol{E} \qquad (\text{VI-82})$$

與（*I*-65a）式相比，可見（81）式之α係分子極化率（polarizability）。若在固體介質或濃密之氣體時，可將E代以$E+\frac{P}{3\epsilon_0}$，而得（I-74a）式

$$N\alpha=\frac{3(\epsilon-\epsilon_0)}{\epsilon+2\epsilon_0} \qquad (\text{VI-83})$$

由此得

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0}=\frac{1+\frac{2}{3}N\alpha}{1-\frac{1}{3}N\alpha} \qquad (\text{VI-84})$$

α 則見（81）式。設 $N\alpha \ll 1$，則

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \simeq 1+\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m}\ \frac{1}{\omega_0^2-\omega^2+i\gamma\omega-\dfrac{Ne^2}{3\epsilon_0 m}} \qquad (\text{VI-85})$$

此式顯示（79）式之折射率 n 爲一複數。設

$$n=\sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}}=n_r-in_i \qquad (\text{VI-85a})$$

其實數和虛數部份分別爲（略去分母之最後一項）

$$n_r^2-1=n_i^2+\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m}\ \frac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2} \qquad (\text{VI-86a})$$

$$n_i=\frac{Ne^2}{2n_r\epsilon_0 m}\ \frac{\omega\gamma}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2} \qquad (\text{VI-86b})$$

如減幅甚小，又 ω 離 ω_0 很遠處

$$\gamma^2\omega^2 \ll (\omega_0^2-\omega^2)^2, \qquad (\text{VI-87})$$

則可得（86a）之近似值

$$n_r^2-1=\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m(\omega_0^2-\omega^2)} \qquad (\text{VI-88})$$

若該介質係由頻率 ω_S 之 N_S 分子所構成（N_S 爲每單位積之分子數），則（88）式可代以下式

$$n_r^2-1=\frac{e^2}{\epsilon_0 m}\ \sum_S\ \frac{N_S}{(\omega_S^2-\omega^2)} \qquad (\text{VI-88a})$$

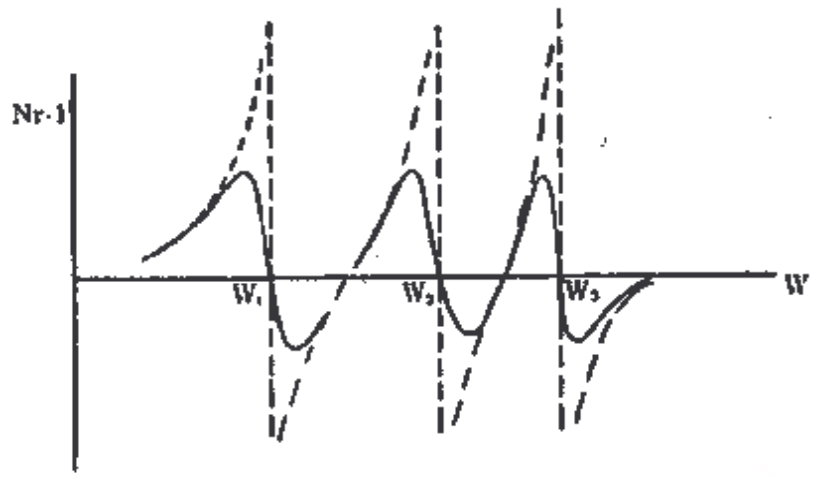
如 $n_r-1 \ll 1$，則 $n_r^2-1 \simeq 2(n_r-1)$，此式可化爲

$$n_r \simeq 1+\frac{e^2}{2\epsilon_0 m}\ \sum_S \frac{N_s}{(\omega_s^2-\omega^2)} \qquad (\text{VI-88b})$$

若不略去（86a）式內之減幅，則（88b）式代以下式

$$n_r \simeq 1+\frac{e^2}{2\epsilon_0 m}\sum_S \frac{N_s}{\omega_s^2-\omega^2+\gamma^2\omega^2} \qquad (\text{VI-89})$$

下圖所示，實線代表（89）式之 n_r，而虛線爲（88b）式之



n_r。將減幅項 $\gamma^2\omega^2$ 加入考慮，使色散曲線不呈（88b）式的不連續性。於振盪子振盪頻率 ω_1, ω_2……之附近，折射率隨着頻率 ω 增加而減小，此稱爲反常色散（anomalous dispersion）。n_r 隨着頻率增加而增加，則稱爲正常色散（normal dispersion）。

上述的古典的色散理論，假設有簡諧力束縛之電子，其振盪頻率分別爲 ω_1, ω_2, ……。近代原子或分子理論，這些頻率須代以躍遷頻率（transition frequencies）ω_{mn}，（$h\omega_{mn}=2\pi(E_m-E_n)$ E_m, E_n 爲不同態之能量）。反常色散，是在吸頻率 ω_{mn} 處出現。該現象在量子力學中有完滿的理論。

折射率 n 的虛數部份之物理意義如下：（V-33）式，可得

$$k=\omega\sqrt{\epsilon\mu}=\frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}}=\frac{\omega}{c}n \qquad (\text{VI-90})$$

由（85a），可得

$$k=\frac{\omega}{c}n_r-i\frac{\omega}{c}n_i \qquad (\text{VI-91})$$

故 E 波

$$E(z,t)=E_0e^{i(\omega t-kz)}$$

乃成

$$E(z,t)\doteq E_0 e^{-\frac{\omega}{c}n_i z}e^{i(\omega t-\frac{\omega}{v}z)} \qquad (\text{Ⅵ-92})$$

$v=\frac{c}{n_r}$ 爲相位速度。該波有減幅現象。該現象之發生係由於振盪子吸收了入射波之能量，而這些被吸收之能量，再經振盪子向各方放出。n 之虛數部分，出現於這吸收現象。

上述之色散理論，在量定地球上空電離層之電子密度和電離層之高度，極爲重要。在白天，高空大氣的原子和分子，吸收了大陽輻射能而離子化。在每一高度，離子化過程與電子與正離子的各種結合過程，可達到一穩定狀態。在離地平面約 100 公里高處的電離層稱爲 E層，其電子密度約 $10^5-10^6/cm^3$；在 200 公里高處的稱爲F層，電子密度爲 $10^6/cm^3$。電子密度最大值，係約當午後一小時，其最低則約在午夜。

欲量定這些電離層的電子密度和它們的高度，我們參看(88)式。式中之 ω_0 等於零，因這些電子，皆是"自由"電子。(88)式可化爲

$$n_r=\sqrt{1-\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m\omega^2}} \qquad (\text{Ⅵ-93})$$

茲向上空放射不同頻率之電磁波信息。電磁波之反射及折射理論，已見第（Ⅴ-60a, b, c, d）等式。由（Ⅴ-60d）式，在垂直入射 $\theta_i=0$ 情形下，全反射之條件爲

$$n_r=\sqrt{1-\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m\omega^2}}=0 \qquad (\text{Ⅵ-94})$$

換言之;

$$N=\frac{\epsilon_0 m}{e^2}\omega^2$$

實驗方面，乃藉改變頻率，使（94）全反射條件得以滿足，電磁波垂直的反射地面，由此 ω，即獲得N之值。

發生全反射處之高度 h 可由下法測定：以電子振盪儀記錄將脈波送出去及反射波回來所需之時間 Δt，由 $h=\frac{1}{2}c\Delta t$ 式，即可得高度。（c 爲光速）

（1912年）Eccles 和（1924年）Larmor 首先提出無磁場時，電磁波在離子氣體中傳播之理論。實驗工作則由下舉物理學家展開：Appleton 和 Barnett（1925），Smith-Rose 和 Barfield（1926），和 Breit 和 Tuve（1926）。但地球是有磁場的。包括磁場之理論，是由 Lorentz，Goldstein(1928)，Hartree(1929)，Darwin（1934，1943）所展開的。

此課題的進一步研究與探討，可參閱 S. K. Mitra，的 The Upper Atmosphere，第二版，（1952）

第 七 章

電磁場之 Lagrangian 及 Hamiltonian 形式

本書第一册動力學甲部及乙部的古典力學所討論之力學系統，是質點(或剛體)的系統，其座標係不連續的，如 $q_1, q_2 \cdots\cdots q_n$ 是。此外還有一些力學系統，如流體或彈性連續介質，電磁場等，則需用連續性的座標。本章將應用 Lagrangian 及 Hamiltonian 方法於電磁場理論。

1. Lagrange 方程式

本書第一册動力學乙部第二章曾應用 Hamilton 原理於一條繩的橫振動之問題。其 Lagranian 函數爲

$$L=\int_0^l \left\{\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{2}S\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\}dx \qquad (\text{VI}-1)$$

此亦可寫成下式

$$L=\int_0^l \mathscr{L}(y_t, y_x)dx, \quad y_t=\frac{\partial y}{\partial t}, \quad y_x=\frac{\partial y}{\partial x}, \qquad (\text{VI}-2)$$

$\mathscr{L}$ 稱爲（線性）Lagrangian 密度。該 Lagrangian 密度是一有

用的觀念。於三維空間介質裡，Lagrangian L 和 Lagrangian 密度 $\mathscr{L}$ 的關係乃

$$L=\iiint \mathscr{L}\, dx\, dy\, dz \qquad (\text{Ⅵ-3})$$

在前述問題中，變數 y 及其導數 $\frac{\partial y}{\partial t}$，$\frac{\partial y}{\partial x}$ 是在作變分時改變的，而 x，t 是獨立參數。

今考慮由 Hamilton 原理所產生之變分原理（variational principle）

$$\delta \iiint\!\!\int \mathscr{L}(q, q_x, q_y, q_z, q_t, x, y, z, t)\, dx\, dy\, dz\, dt=0 \qquad (\text{Ⅵ-4})$$

這裡 $q_x=\frac{\partial q}{\partial x}$，等等。在體積 V 之邊界面上及在時間始點及終點的變分 δq 皆等於零。作這些變分及部份積分，因在體積 V 內 δq 是任意的，即得下 Euler 方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)}+\sum_{k}^{z}\frac{d}{dx_k}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial q}{\partial x_k}\right)}-\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q}=0 \qquad (\text{Ⅵ-5})$$

第（4）式可推廣至有 $q_1\cdots\cdots q_n$ 之變數的情形，第（5）式乃 n 個方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial q_i}{\partial t}\right)}+\sum_{k=1}^{3}\frac{d}{dx_k}\frac{\partial \mathscr{L}}{\left(\frac{\partial q_i}{\partial x_k}\right)}-\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_i}=0$$

$$i=1, \cdots\cdots n \qquad (\text{Ⅵ-6})$$

現定義函數導數（functional derivative）如下：

$$\frac{\delta L}{\delta q_i}\equiv\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_i}-\sum_{k=1}^{3}\frac{d}{dx_k}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial q_i}{\partial x_k}\right)} \qquad (\text{Ⅵ-7})$$

$$\frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i} \equiv \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i}, \tag{Ⅶ7a}$$

這乃因 $\mathscr{L}$ 與 $\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial x_k}$ 無關係$\left(\dot{q}_i \equiv \frac{\partial q_i}{\partial t}\right)$。由這些公式可得

$$\delta L = \delta \iiint \mathscr{L}\left(q_i, \frac{\partial q_i}{\partial x_k}, \frac{\partial q_i}{\partial t}, x_k, t\right) dx_1\, dx_2\, dx_3$$

$$= \iiint \sum_i \left(\frac{\delta L}{\delta q_i}\delta q_i + \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i\right) d^3x$$

$$= \iiint \sum_i \left(\frac{\delta L}{\delta q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i}\right)\delta q_i\, d^3x, \tag{Ⅶ-8}$$

(6) 式乃得較簡形式

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i} - \frac{\delta L}{\delta q_i} = 0 \tag{Ⅶ-9}$$

因第 (4) 式之 $dx\,dy\,dz\,dt$ 爲四維空間之體積素，故 (4) 式之變分方程式及 (5) 式之 Lagrange 方程式皆具有 Lorentz 不變性，只要 $\mathscr{L}$ 和 q 爲四度之純量。(5) 式可寫下面之協變式

$$\sum_{\mu=1}^{4} \frac{d}{dx_\mu}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial q}{\partial x_\mu}\right)} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q} = 0 \tag{Ⅶ-10}$$

2. 正則方程式

現定義動量密度 π，Hamitonian 密度 $\mathscr{H}$ 和 Hamiltonian 函數 H如下:

$$\pi_i = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i} \quad \left(= \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i} \text{ 按 } (7a) \text{ 式}\right) \tag{Ⅶ-11}$$

$$\mathscr{H} = \sum \pi_i \dot{q}_i - \mathscr{L} \tag{Ⅶ-12}$$

$$H=\iiint \mathscr{H}\, d^3x \qquad (\text{Ⅶ-13})$$

$\mathscr{H}$ 爲 q_i, $\frac{\partial q}{\partial x_k}$, π_i, t 之函數。

以本書第一册乙部第二章第 2 節所用的方法，及與（7）相似之函數導數之定義

$$\frac{\delta H}{\delta q_i}\equiv\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q_i}-\sum_k \frac{d}{dx_k}\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial\left(\frac{\partial q_i}{\partial x_k}\right)}, \qquad (\text{Ⅶ-14})$$

$\frac{\delta H}{\delta \pi_i}\equiv\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \pi_i}$，因 $\mathscr{H}$ 不含有 $\frac{\partial \pi_i}{\partial x_k}$，

即得

$$\dot{q}_i=\frac{\delta H}{\delta \pi_i},\quad \dot{\pi}_i=-\frac{\delta H}{\delta q_i},\quad \frac{\delta \mathscr{L}}{\partial t}+\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial t}=0 \qquad (\text{Ⅶ-15})$$

（15）係正則方程式。

由（14），（13）式，作部份積分，可得

$$\frac{dH}{dt}=\iiint\left\{\sum\left(\frac{\delta H}{\delta q_i}\dot{q}_i+\frac{\delta H}{\delta \pi_i}\dot{\pi}_i\right)+\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial t}\right\}d^3x$$

由（15）式，此式可化爲

$$\frac{dH}{dt}=\iiint\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial t}d^3x \qquad (\text{Ⅶ-16})$$

如 $\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial t}=0$，則 $H=$常數。

效取任一函數 G

$$G=\iiint \mathscr{G}\, d^3x \qquad (\text{Ⅶ-17})$$

由（15）式，

$$\frac{dG}{dt}=\iiint\left\{\sum\left(\frac{\delta G}{\delta q_i}\frac{\delta H}{\delta \pi_i}-\frac{\delta G}{\delta \pi_i}\frac{\delta H}{\delta q_i}\right)+\frac{\partial \mathscr{G}}{\partial t}\right\}d^3x \qquad (\text{Ⅶ-18})$$

該積分 V 內之和，可定義爲 Poisson 括號 $[G,H]$，故

$$\frac{dG}{dt}=[G,H]+\frac{\partial G}{\partial t} \qquad (\text{Ⅶ-19})$$

總之，在連續性的變數情形下，運動方程式（Lagrangian 式或正則式）的形式，與不連續的變數情形者同，只是以函數的導數代替了偏微分導數而已。

3. Lagrangian 形式之電磁場方程式

第四章中，已知在眞空（Gauss 制，$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{B}$, $\epsilon_0=1$, $\mu_0=1$, $\gamma=c$）的電動力學基本方程式爲

靜磁定律 $$div\,\boldsymbol{B}=0 \qquad (\text{Ⅶ-20})$$

Faraday 定律 $$curl\,\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=0 \qquad (\text{Ⅶ-21})$$

Coulomb 定律 $$div\,\boldsymbol{E}=4\pi\rho \qquad (\text{Ⅶ-22})$$

Ampere 定律（加位移電流） $$curl\,\boldsymbol{H}-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\rho\boldsymbol{v} \qquad (\text{Ⅶ-23})$$

連續性方程式 $$div(\rho\boldsymbol{v})+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \qquad (\text{Ⅶ-24})$$

運動方程式 $$\frac{d}{dt}\boldsymbol{p}=e\boldsymbol{E}+\frac{e}{c}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) \qquad (\text{Ⅶ-25})$$

若用向量位 A 及純量位 ϕ，

$$\boldsymbol{B}=curl\,\boldsymbol{A} \qquad (\text{Ⅶ-26})$$

$$\boldsymbol{E}=-grad\,\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}, \qquad (\text{Ⅶ-27})$$

及 Lorentz 關係

$$div\boldsymbol{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0, \qquad (\text{Ⅶ-28})$$

上數方程式對規範轉換,

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_0-\nabla\chi$$

$$\phi=\phi_0+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\chi \qquad (\text{Ⅶ-29})$$

有不變性, 如 χ 滿足下面方程式

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\chi=0 \qquad (\text{Ⅶ-30})$$

(1) 眞空 (卽 $\rho=j=0$, (22), (23) 式)

在此情形下, $\boldsymbol{A}$, ϕ 滿足以下波動方程式

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=0 \qquad (\text{Ⅶ-31a})$$

$$\nabla^2\phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=0 \qquad (\text{Ⅶ-31b})$$

欲將這些方程式變成 (9) 式之 Lagrangian 形式, 可選定 Lagrangian 密度爲

$$\mathscr{L}=\frac{1}{8\pi}(E^2-B^2)$$

$$=\frac{1}{8\pi}\left\{\left(-grad\,\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)^2-(curl\,\boldsymbol{A})^2\right\} \qquad (\text{Ⅶ-32})$$

如將 ϕ, A_x, A_y, A_z 當作場變數 q_i, 以此 Lagrangian 計算 (6) 式或 (9) 式並用 Lorentz 關係 (28), 卽可導出 (31a, b)。

由另一觀點, 乃選定純電磁場之 Lagrangian 密度爲

$$\mathscr{L}_f=\frac{1}{8\pi}\left\{\left(-grad\,\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)^2-(curl\,\boldsymbol{A})^2\right.$$

$$-\left(div\boldsymbol{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2\Big\} \qquad (\text{Ⅶ-33})$$

以此 Lagrangian 密度計算 (6) 或 (9) 式，不需用 Lorentz 關係卽可導出場方程式 (30) 及 (31) 式。

(2) 有源之電磁場

由 (22)，(23) 及 (26)，(27) 等式，可得

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{c}\rho\boldsymbol{v} \qquad (\text{Ⅶ-34})$$

$$\nabla^2\phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=-4\pi\rho \qquad (\text{Ⅶ-35})$$

若採與電流，電荷相互作用之電磁場之 Lagrangian 密度$\mathscr{L}_F$爲

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_F=\frac{1}{8\pi}\Big\{&\left(-grad\,\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)^2-(curl\,\boldsymbol{A})^2\\&-\left(div\,\boldsymbol{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2\Big\}-\rho\left(\phi-\frac{1}{c}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}\right)\\=&\mathscr{L}_f-\rho\left(\phi-\frac{1}{c}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}\right),\end{aligned} \qquad (\text{Ⅶ-36})$$

則由 (6) 或 (9) 式卽得 (34) 及 (35) 之場方程式。

(3) 粒子和電磁場的系統

帶電粒子在電磁場中之運動方程式，可由粒子之 Lagrangian L_e 得之

$$L_e=m_0c^2\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\right)-e\left(\phi-\frac{1}{c}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v})\right) \qquad (\text{Ⅶ-37})$$

若有連續分佈之電荷密度 ρ，則可用電荷之 Lagrangian 密度 $\mathscr{L}_e$ 取代 Lagrangian L_e

$$\mathscr{L}_e=\mathscr{P}-\rho\left(\phi-\frac{1}{c}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v})\right) \qquad (\text{Ⅶ-38})$$

這裡 $\mathscr{T}$ 爲動能密度。

將 (36) 式與 (38) 式相比，得知 $-\rho\left(\phi-\frac{1}{c}(A\cdot v)\right)$ 一項在 $\mathscr{L}_1$ 及 $\mathscr{L}_4$ 皆同樣。這是當然的，因爲該項係場與電荷之相互作用也。因此，若有一系統是由相互作用之電荷與場組成，則祇需引入下面之 Lagrangian 密度

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}_{\text{電荷}}+\mathscr{L}_{\text{場}}+\mathscr{L}_{\text{相互作用}} \qquad (\text{Ⅵ-39})$$

$$=\mathscr{T}+\frac{1}{8\pi}\left\{\left(-grad\,\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}\right)^2-(curl A)^2\right.$$

$$\left.-\left(div\,A+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2\right\}-\rho\left(\phi-\frac{1}{c}(A\cdot v)\right) \qquad (\text{Ⅵ-39a})$$

以此 Lagrangian 密度，則由 Hamilton 原理可導出通常的 Lagrange 方程式。這些方程式爲運動方程式，同時亦有 (6) 或 (9) 式之 Lagrange 方程式，由之而得 (34) 和 (35) 之場方程式。但須注意的：對電荷，其變數爲空間座標 $r_i(x_i, y_i z_i)$，對場，則變數爲 ϕ，$A(A_x, A_y, A_z)$。

4. Hamiltonian 形式之電磁場

如 (11) 式，玆定義動量。由 (39a) 式，可得

$$\pi_{A_k}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{A}_k}=\frac{1}{4\pi c}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_k}+\frac{1}{c}\frac{\partial A_k}{\partial t}\right)=-\frac{1}{4\pi c}E_k \qquad (\text{Ⅵ-40})$$

$$\pi_\phi=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}}=-\frac{1}{4\pi c}\left(div\,A+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) \qquad (\text{Ⅵ-41})$$

總 Hamiltonian 是由下列各項所組成（參看 (39a)）

$$H=H_{\text{電荷}}+H_{\text{相互作用}}+H_{\text{場}}$$

$$H=\sum P_i\dot{q}_i-\iiint\mathscr{P}d^3\boldsymbol{r}+\iiint\rho\left(\phi-\frac{1}{c}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v})\right)d^3\boldsymbol{r}$$

$$+\iiint\left(\sum_k^3(\pi_{A_k}\dot{A}_k+\pi_\phi\dot{\phi})\right)d^3\boldsymbol{r}-\iiint\mathscr{L}_f d^3\boldsymbol{r}\quad(\text{Ⅶ-42})$$

在連續電荷分佈時,

$$P_i=\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\iiint(\mathscr{L}_{\text{電荷}}+\mathscr{L}_{\text{相互作用}})d^3\boldsymbol{r}$$

$$=p_i+\iiint\sum_k\left(\frac{\rho}{c}\frac{\partial v_k}{\partial\dot{q}_i}A_k\right)d^3\boldsymbol{r}\quad(\text{Ⅶ-43})$$

今 H 寫爲

$$H=H_{\text{電荷}}(q_i,\ P_i-\frac{\rho}{c}\iiint\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})\mathrm{d}^3\boldsymbol{r})+\iiint\rho\phi d^3\boldsymbol{r}$$

$$+\iiint\sum_k^3(\pi_k\dot{A}_k+\pi_\phi\dot{\phi}-\mathscr{L}_f)d^3\boldsymbol{r}\quad(\text{Ⅶ-44})$$

這裡 $H_{\text{電荷}}$爲動力系統之 Hamiltonian（在場裡之粒子)。場部份可由 (40), (41), (33), (26), (27) 等式計算之;

$$\mathscr{H}_f=\sum_k\pi_{Ak}\dot{A}_k+\pi_\phi\dot{\phi}-\mathscr{L}_f$$

$$=\frac{1}{8\pi}\left\{-\frac{2}{c}(\boldsymbol{E}\cdot\dot{\boldsymbol{A}})-\frac{2}{c}\left(div\boldsymbol{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\dot{\phi}\right.$$

$$\left.-E^2+B^2+\left(div\boldsymbol{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{1}{8\pi}\left\{E^2+B^2+2(\boldsymbol{E}\cdot grad\phi)+(div\boldsymbol{A})^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2\right\}$$

如用 Lorentz 關係 (28), 則最後兩項無所貢獻。$\boldsymbol{E}\cdot grad\phi$ 與 (44) 式 $\rho\phi$ 項之和爲零, 蓋用 (22) 式,

$$\iiint\left(\rho\phi+\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{E}\cdot grad\phi\right)d^3\boldsymbol{r}=\frac{1}{4\pi}\iiint(\phi divE+\boldsymbol{E}\cdot grad\phi)d^3\boldsymbol{r}$$

$$=\frac{1}{4\pi}\iiint div(\phi\boldsymbol{E})d^3\boldsymbol{r}=\frac{1}{4\pi}\iint\phi\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S},\quad(\text{Ⅶ-46})$$

如距離大時，ϕ，E很快的遞減爲零，該面積分卽消滅也。故“電荷＋場”之系統，其 H 爲

$$H=H_{\text{電荷}}+\frac{1}{8\pi}\iiint(E^2+B^2)d^3r \qquad (\text{Ⅶ-47})$$

該積分係所熟知的電磁場之能量。

欲由正則方程式求得場方程式，必需將 $\mathscr{H}_f$ 以場變數 ϕ，A_k 及其共軛動量 π_ϕ, π_{A_k} 表示之。由 (33)，(40)，(41) 等式，可得

$$\mathscr{H}_f=\frac{1}{8\pi}\{(4\pi c)^2(\pi_A\cdot\pi_A)+(curl\,A)^2-8\pi c(\pi_A\cdot grad\,\phi)$$
$$-8\pi c\pi_\phi(div\,A+2\pi c\pi_\phi)\} \qquad (\text{Ⅶ-48})$$

運用 $\dot{A}_k=\frac{\delta H_f}{\delta\pi_{A_k}}$ 可導出 (25) 式；而 $\dot{\phi}=\frac{\delta H_f}{\delta\pi_\phi}$ 則導出 Lorentz 關係 (28)式。但若運用 $\dot{\pi}_\phi=-\frac{\delta H}{\delta\phi}$，$H$是 (44) 式，則可導出

$$\dot{\pi}_\phi=\frac{1}{4\pi}div\,E-\rho$$

如用 (41) 式之 π_ϕ 及 Lorentz 關係（由之得 $\pi_\phi=0$）則上式卽係 (22) 式。最後，運用 $\dot{\pi}_{A_k}=-\frac{\delta H}{\delta A_k}$，則可導出 (23) 式，因

$$\dot{\pi}_{A_x}=-\frac{\partial H_{\text{電場}}}{\partial p_x}\left(-\iiint\frac{\rho}{c}d^3r\right)+\sum_k^3\frac{d}{dx_k}\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_k}\right)}$$

$$-\frac{1}{4\pi c}\dot{E}_x=\frac{\rho v_x}{c}-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$
$$-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+4\pi c\frac{\partial\pi_\phi}{\partial x}$$

如用 (28) 式之 Lorentz 關係 ($\pi_\phi=0$)，上式卽係 (23) 式。

因此，(15) 式之正則方程配上 (44) 式Hamiltonian，確可導出電磁場方程式。

上面所述之方法，吾人採用 (33) 式之 Lagrangian 來定義動量 π_A, π_ϕ。若用 (32) 式，則 $\mathscr{L}$ 將與 $\dot{\phi}$ 無關，而亦無 π_ϕ 了，故 (48) 式裡 $\mathscr{H}_f$ 式可化爲

$$\mathscr{H}_f=\frac{1}{8\pi}\{(4\pi c)^2(\pi_A\cdot\pi_A)+(curl\boldsymbol{A})^2-8\pi c(\pi_A\cdot\nabla\phi)\},\quad(\text{Ⅶ-49})$$

而方程式 $\dot{\phi}=\frac{\delta H}{\delta\pi_\phi}$ 將導致 $\phi=$常數。此乃錯誤結果。現所採的步驟，係用 (33) 式之 Lagrangian 密度及 (48) 式之 Hamiltonian 密度且用 (15) 式之正則方程式，最後引入 Lorentz 關係 (28)，

5. 電磁場之 Fourier 表象 (represenfation)

若吾人今引入場位 $\boldsymbol{A}(A_x, A_y, A_z)$，$\phi$ 之 Fourier 轉換 α，φ，即是

$$A(\boldsymbol{r})=\int_{-\infty}^{\infty}\alpha e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}d^3\boldsymbol{k},\qquad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=k_xx+k_yy+k_zz$$

$$\phi(\boldsymbol{r})=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}d^3\boldsymbol{k},\qquad(\text{Ⅶ-50})$$

則場可以 $\alpha(\boldsymbol{k})$ 表之。

(26)，(27) 式之電磁場方程式，改成

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}=\int(-i\varphi(\boldsymbol{k})\boldsymbol{k}-\frac{1}{c}\dot{\alpha}(\boldsymbol{k}))e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}d^3\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}=\int i[\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{\alpha}]e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}d^3\boldsymbol{k} \qquad (\text{Ⅵ-51})$$

由 (40), (41) 式, 可得

$$\int d^3\boldsymbol{r}\left(\sum_r^3 \pi_A\dot{A}_r+\pi_\phi\dot{\phi}\right)=-\frac{1}{4\pi c}\int d^3\boldsymbol{r}\left\{\boldsymbol{E}\cdot\dot{\boldsymbol{A}}+\left(div\boldsymbol{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\dot{\phi}\right\}$$

$$=-\frac{1}{4\pi c}\int d^3\boldsymbol{r}\left[\left[\left\{\int\left(-ik\varphi-\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{\alpha}}\right)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}d^3\boldsymbol{k}\right\}\cdot\left\{\int\dot{\boldsymbol{\alpha}}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}d^3\boldsymbol{k}\right\}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left\{\int d^3\boldsymbol{k}\left(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\alpha}+\frac{1}{c}\dot{\varphi}\right)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right\}\left\{\int\dot{\varphi}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}d^3\boldsymbol{k}\right\}\right]\right] \qquad (\text{Ⅵ-52})$$

今第一個積分可寫爲

$$\int d^3\boldsymbol{r}\left\{\int d^3\boldsymbol{k}\left(-ik\varphi-\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{\alpha}}\right)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right\}\cdot\left\{\int d^3\boldsymbol{l}\dot{\boldsymbol{\alpha}}e^{i\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{r}}\right\}$$

$$=\int d^3\boldsymbol{r}\iint d^3\boldsymbol{k}d^3\boldsymbol{l}\left(-i\varphi(\boldsymbol{k})\boldsymbol{k}\cdot\dot{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{l})-\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{k})\dot{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{l})\right)e^{i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{r}}$$

對 r 積分, 除了當

$$\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l}=0, \qquad \text{亦卽 } \boldsymbol{k}=-\boldsymbol{l}, \qquad (\text{Ⅵ-53})$$

此二積分皆爲 0。因此 (52) 式可化爲

$$-\frac{1}{4\pi c}\cdot 8\pi\int d^3\boldsymbol{k}\left\{-i\varphi(\boldsymbol{k})\boldsymbol{k}\cdot\dot{\boldsymbol{\alpha}}(-\boldsymbol{k})-\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{k})\dot{\boldsymbol{\alpha}}(-\boldsymbol{k})\right.$$

$$\left.+i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{k})\dot{\varphi}(-\boldsymbol{k})+\frac{1}{c}\dot{\phi}(\boldsymbol{k})\dot{\varphi}(-\boldsymbol{k})\right\}$$

$$=\frac{2\pi^2}{c^3}\int d^3\boldsymbol{k}\left\{\dot{\boldsymbol{\alpha}}_k\cdot\dot{\boldsymbol{\alpha}}_{-k}-\dot{\varphi}_k\dot{\varphi}_{-k}+ic\frac{d}{dt}(\varphi_k\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\alpha}_{-k})\right\} \qquad (\text{Ⅵ-54})$$

這裡 $\boldsymbol{\alpha}_k\equiv\alpha(\boldsymbol{k})$, 等等。

按正則轉換理論, (54) 式乃定義一共軛變數的正則變換, 由

$$\left.\begin{matrix}A_{(r)},\ \phi_{(r)}\\ \pi_{A_r},\ \pi_\phi\end{matrix}\right\} \text{至} \left\{\begin{matrix}\boldsymbol{\alpha}_k,\ \varphi_k\\ \frac{2\pi^2}{c^3}\dot{\boldsymbol{\alpha}}_{-k},\ \frac{\alpha\pi^2}{c^3}\dot{\varphi}_{-k}\end{matrix}\right. \qquad (\text{Ⅵ-55})$$

效定義 α_k, φ_k 之共軛動量爲

$$(Q_k)_\tau=\frac{2\pi^2}{c^2}(\dot{\alpha}_{-k})_\tau,\quad \Omega_k=-\frac{2\pi^2}{c^2}\dot{\varphi}_{-k} \tag{Ⅶ-56}$$

用同 (53) 式的理，可證 (45a) 式的場的 Hamiltonian $\mathscr{H}_f$ 爲

$$H_f=\int d^3r\mathscr{H}_f=\pi^2\int d^3k\left\{k^2\boldsymbol{\alpha}_k\cdot\boldsymbol{\alpha}_{-k}+\frac{1}{c^2}\dot{\boldsymbol{\alpha}}_k\cdot\dot{\boldsymbol{\alpha}}_{-k}-k^2\varphi_k\varphi_{-k}-\frac{1}{c^2}\dot{\varphi}_k\dot{\varphi}_{-k}\right\} \tag{Ⅶ-57}$$

用上列的共軛變數 α_k, φ_k, Q_k,Ω_k, 此式成爲

$$H_f=\int d^3k\left\{\pi^2k^2\sum_\tau^3(\alpha_k)_\tau(\alpha_{-k})_\tau+\frac{c^2}{4\pi^2}\sum_\tau^3(Q_k)_\tau(Q_{-k})_\tau-\pi^2k^2\varphi_k\varphi_{-k}-\frac{c^2}{4\pi^2}\Omega_k\Omega_{-k}\right\} \tag{Ⅶ-58}$$

該系統（電荷＋場）之總 Hamiltonian, 按 (44) 式, 爲

$$H=H_{電荷}\left(q_j,p_j-\int\frac{\rho}{c}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_j}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})d^3r\right)+\int\rho\phi\,d^3r+H_f \tag{Ⅶ-59}$$

在此，有如 (50) 式, $\boldsymbol{A}$, ϕ 乃視作 Fourier 轉換 α, φ 的函數。

(15) 式之正則方程式爲

$$(\dot{\alpha}_k)_\tau=\frac{\delta H}{\delta(Q_k)_\tau},\quad (Q_k)_\tau=\frac{\delta H}{\delta(\alpha_k)_\tau},\qquad \tau=x,y,z\ (\text{或 }1,2,3) \tag{Ⅶ-60}$$

$$\dot{\varphi}_k=\frac{\delta H}{\delta\Omega_k},\quad \dot{\Omega}_k=-\frac{\delta H}{\delta\varphi_k} \tag{Ⅶ-61}$$

由 $\dot{\alpha}_k$, $\dot{\varphi}_k$ 的方程式，可得*

$$(\dot{\alpha}_k)_r=\frac{c^2}{2\pi^2}(\dot{Q}_{-k})_r, \qquad \dot{\varphi}_k=-\frac{c^2}{2\pi^2}\Omega_{-k} \qquad (\text{Ⅶ}-62)$$

此亦卽 (57) 式。由 $(\dot{Q}_k)_r$ 的方程式，可得*

$$(Q_k)_r=\sum_j \frac{H_{電荷}}{P_j}\int\frac{\rho}{c}\frac{\partial v_r}{\partial \dot{q}_j}e^{ik\cdot r}d^3r-2\pi^2k^2(\alpha_{-k})_r$$

或

$$\frac{2\pi^2}{c^2}(\ddot{\alpha}_{-k})_r=\frac{1}{c}\int\rho v e^{ik\cdot r}d^3r-2\pi^2k^2(\alpha_{-k})_r$$

上式亦卽

$$\left(k^2+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)(\alpha_{-k})=\frac{1}{2\pi^2c}\int\rho v e^{ik\cdot r}d^3r \qquad (\text{Ⅶ}-63)$$

由 (61) 式之 $\dot{Q}_k$ 的方程式，可得

$$\dot{Q}_k=-\int\rho e^{ik\cdot r}d^3r+2\pi^2k^2\varphi_{-k},$$

或由 (57) 式，

$$\left(k^2+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi_{-k}=\frac{1}{2\pi^2}\int\rho e^{ik\cdot r}d^3r \qquad (\text{Ⅶ}-64)$$

若用 (50) 式之變換及下列的恒等式，

$$\rho v=\frac{1}{8\pi^6}\iint\rho v e^{ik\cdot r}d^3\,r e^{-ik\cdot r}d^3k,$$

卽見 (63), (64) 正是 (34), (35) 式的 Fourier 轉換。

用 α_k, φ, Q_k, Ω_k 等變數較用 A, π_A; ϕ, π_ϕ 等變數的優點，是因爲用前者表示之 Hamitonian 較用後者之(48)式遠爲簡單。(58) 式較易的轉入量子場論。本册中將不及討論此點。

---

* 此處有一個 2 的因數，係因在 (58) 式對 k 積分時每個 k 卽有一項負 k 之故。

索　引

常數

介電係數 (permittivity)ϵ_0,ϵ 2-11, 39, 139-40

磁導率 (permeability) μ_0, μ 2-11, 123, 139-40

電極化率 (electric susceptibility) χ 34-6

磁化率 (magnetic susceptibility) χ 127

介電常數 (dielectric conslant) k 41

極化率 (polarizability) α 35-6, 39

因次係數 γ 3, 132, 144-5

電磁單位

靜電單位 6

Gauss 單位 8

電磁單位 7

m. k. S. A. 單位 9

電量

電場E 2, 13-4, 16-8

邊界條件 44

電位移場D 40

邊界條件 41

電位V 13-5, 17-8

電位係數 p_{ij} 26-8

電容係數 C_{ij} 28-30

電感係數 C_{ij} 28-30

電荷之能 28-30

束縛電荷 18-20

自由電荷 38-43
38-43

導電體電荷之分佈 20-26

導電體群之能 30-33

電極化（極化强度，polarization）P 36-40

電偶 P 34-6

電阻 R 148

電阻率 ρ 或 r 148

電導係數 σ 149

電介體(dielectrics) 34下文

能量 45

機械力 46

Maxwell 應力 48-53

偶層(double layer) 54, 69

位移電流(displacement current) 160

電子古典半徑 (Thomson) 236

磁量

磁感應（或磁感應强度） B 2, 4-5, 123, 125, 133, 138-9

邊界條件 129

磁場H　3, 4, 5, 123, 125, 132-4, 138-9, 144-5
　邊界條件　135
順磁性　127
逆磁性　128, 231
磁場
　能量　129
　電流產生的磁場之能　146, 173-4
磁矩 m　140, 142
　不變性 invariant　225-8
磁通量 Φ　147-8, 161
磁化强度 (magnetization) M　142-45, 153
單獨磁極　164-5
定律
　Ampere　3, 135-40, 159
　Biot-Savart　2-3, 131, 134, 137, 166
　Coulomb　2
　Faraday　161
定理
　Gauss　16
　散度 (divergence)　17
　Earnshaw 氏　55
　Green 氏　60
　Lame'氏　65

Helmholtz 氏　152
Larmor 氏　228-30
邊界值問題唯一性　60

原理

疊加 (superposition)　14-5
電屏蔽　29
Kirchhoff-Huggen　116-18

方程式

Clausius-Massotti　39
Poisson　17, 59, 64, 124
Laplace　17, 59, 74, 100, 108
Self-adjoint 微公方程式　119-20
Legendre　76
Bessel　100, 108
Maxwell 氏　159-62, 168
電磁波　189, 197
Lagrange (連續變數)　243-45
正則 (連續變數)　245-47
電磁場之 Lagrange 方程式　247-50
電磁場之 Hamilton 方程式　250-55

函數

Green 氏　64-5, 67-8, 70
諧函數　74

Legendre（諧函数）　76–90
第二類 Legendre　84, 90
聯附 Legendre　91–99
第二類聯附 Legendre　95
Bessel（圓柱諧函数）　100–108
Ber, Bei, Ker, Kei　216–7
Eikonal　118–9
純量位, ϕ　164, 166
向量位, A　140–2, 153–4, 164, 166
延後位　166–7, 170–3, 182
超前位　173
電磁量
電磁場應力T　176–7
電磁場能密度u　174–177
Poynting 向量　174–5, 199, 203–4
電磁波　168, 170
介電體　197
導電介體　199
電磁波反射折射　200–204
電磁波之產生與輻射
電偶　189–194
磁偶　194–196
波導　204–10

橫磁波　206
橫電波　209
橫電磁波　210
電磁場之緩慢變化　211-2
Lorentz 關係　167, 173
趨膚效應 (skin effect)　215-18
電磁理論
邊界值問題
Dirichlet 問題　62, 67
Neumann 問題　62, 67
倒像法　70-2
倒轉法　70, 72-3
Debye 之理論　34-5
Lorentz 力　163-4, 224-29
規範變換 (gauge)　166-7
電磁場之微觀方程式　219-223
粗粒過程　220-1
Maxwell 方程式之宇稱性　178-80
Maxwell 方程式之時對稱　180
色散理論 (dispersion)　238-41
Lorentz (光譜線) 寬度　236-8
輻射減幅 (radiation damping)　232-36
電離層 (大氣, 上空)　242-3

電荷運動
均勻磁場中　223-4
Larmor 旋進　230
穩定電場中　224-25
交叉電場磁場中　225
漸緩不變性　225-8

參 考 文 獻

J. H. Jeans: The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism

此書的靜電學，靜磁學，諧函數，場位論等部份，係清楚謹嚴的標準名著，每一個電磁量觀念，均從物理觀察的觀點引入，各章集有昔年英國劍橋大學考試的題目。為本册第一，二，三章的極佳參考。

P. Lorrain and D. R. Corson; Electromagnetic Fields and waves

此書的體裁，是文字和印圖都淺易，詳細，甚合自行學習之用。

J. D. Jackson: Classical Eectrodynamics

此書較深，其在近年許多物理部門的應用的討論，為他書所不及。為充份瞭解該書，本册及一些量子力學知識，實為必需的準備。