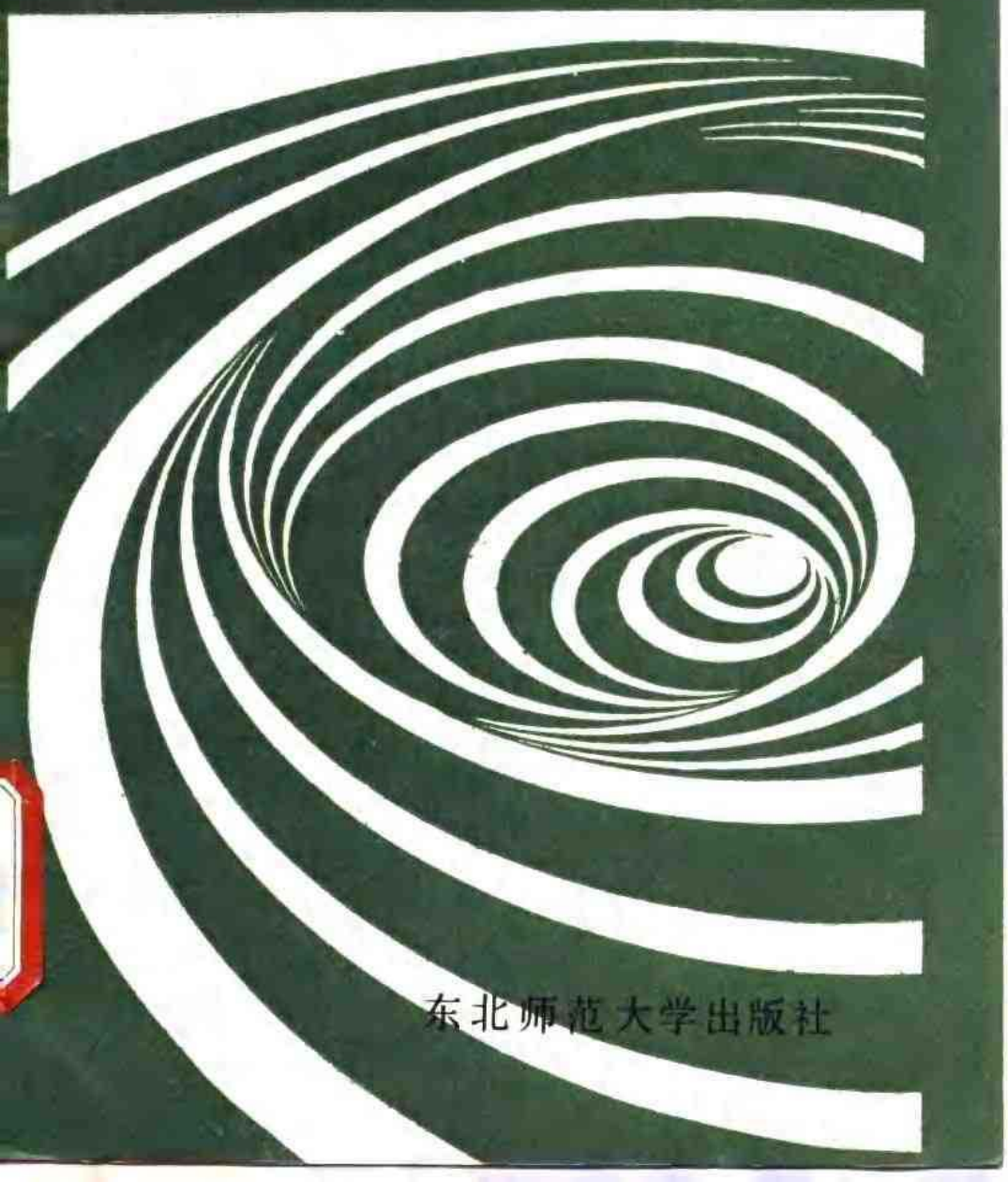
振动论坛 http://vib.hit.edu.cn/vibbbs

杨宝俊 王宝昌 张伯军 编著

弹性波理论

TAN XING BO LI LUN



东北师范大学出版社

弹性波理论

杨宝俊 王宝昌 张伯军 编著

O343.30

东北师范大学出版社

弹性波理论

TANXINGBO LILUN

杨宝俊 王宝昌 张伯军 编著

责任编辑：王忠山 封面设计：李冰彬 责任校对：陈 江

东北师范大学出版社出版
（长春市斯大林大街 110 号）
吉林省新华书店发行
长春市第九印刷厂印刷

开本：850×1168 毫米 1/32
印张：9.5
字数：215 千
1990 年 1 月第 1 版
1990 年 1 月第 1 次印刷
印数：0 001—1 000 册

ISBN 7-5602-0315-9/O·30 （压胶）定价：2.60 元

前　言

弹性波理论是理论物理的重要分支之一，它的任务是在材料力学实验定律的基础上，进一步引进数学方法来研究弹性物体受力与变形间的静、动态关系问题。由于弹性波具有传播距离远、穿透能力强、物性特征明显等特殊优点，近年来，特别是在电子计算机技术迅速发展的今天，已被广泛应用于地震勘探、水利工程、建筑工程、海洋勘测以及爆破技术等众多领域，并在很多同类问题的研究方面有取代其他方法的趋势。

本书是以地球物理等专业的学生和科技人员为主要对象编写的专业基础理论教材。书中系统地阐述了应力分析，应变分析，应力与应变的关系以及弹性波动方程，弹性波的传播，弹性波的激发等重要基础理论，并对地震中经常遇到的主应力、主应变、平面波、球面波、柱面波、瑞利波、洛夫波等给予了特殊的强调，同时对上述理论在其具体应用方面及有关前沿问题进行了必要的介绍。编者希望通过本书的学习，能够使读者对弹性波理论的研究方法、内容及典型计算问题有一个较为全面的了解，为进一步学习专业和从事科学研究奠定良好的基础。

本书采用的是近年来国内外参考书及有关文献中较为常用的哑指标规则，并对其作了较为详细的论述。为配合学生自学，加深学生对教材内容的进一步理解，书中配有相当的例题、习题及习题参考答案，书后还设有附录和参考书目。

本书是作者在总结多年教学、科研经验的基础上编写而成的。全书共分十章，其中，第一、二、三、四章由张伯军编写，第五、六、七、八章由王宝昌编写，第九、十章由杨宝俊编写。

全书由杨宝俊统稿。

本书在编写过程中，得到了纪英楠教授、王为民教授、何檀璧教授的大力支持和协助，在此谨向他们表示衷心的感谢。由于编者水平所限，错误、疏漏之处在所难免，敬请读者批评指正。

编 著 者

1988年10月于长春地质学院

目　　录

第一章　基础知识 …… (1)

§ 1—1　哑指标和克罗尼克尔符号 …… (1)
§ 1—2　应力的概念 …… (9)
§ 1—3　应变的概念 …… (14)
§ 1—4　应力-应变曲线 …… (18)
习题与参考答案一 …… (20)

第二章　应力分析 …… (22)

§ 2—1　应力张量 …… (22)
§ 2—2　正应力　剪应力　主应力 …… (28)
§ 2—3　最大正应力与最大剪应力 …… (35)
§ 2—4　运动方程　平衡方程 …… (42)
§ 2—5　应力张量的坐标变换公式 …… (45)
习题与参考答案二 …… (50)

第三章　应变分析 …… (55)

§ 3—1　位移场 …… (55)
§ 3—2　应变张量　旋转张量 …… (58)
§ 3—3　一点的应变状态 …… (63)
§ 3—4　应变张量的坐标变换公式 …… (68)
§ 3—5　主应变 …… (71)
§ 3—6　体积应变 …… (75)
§ 3—7　应变协调方程 …… (76)
习题与参考答案三 …… (79)

第四章 应力与应变的关系 …… (83)

§ 4—1 广义虎克定律 …… (83)
§ 4—2 以应变表示应力的广义虎克定律 …… (86)
§ 4—3 以应力表示应变的广义虎克定律 …… (92)
§ 4—4 应变位能 …… (96)
§ 4—5 应变位能与弹性常数间的关系 …… (102)
习题与参考答案四 …… (103)

第五章 线性弹性动力学基础 …… (106)

§ 5—1 弹性媒质的位移场方程 …… (106)
§ 5—2 无旋波与无散波 …… (109)
§ 5—3 标量势与矢量势 …… (111)
§ 5—4 弹性波的能量与能流 …… (116)
习题与参考答案五 …… (119)

第六章 弹性波在均匀无界媒质内的传播 …… (121)

§ 6—1 平面波解 …… (221)
§ 6—2 平面波的一般性质 …… (123)
§ 6—3 平面波的能流 …… (128)
§ 6—4 平面简谐波 …… (130)
§ 6—5 非均匀平面波 …… (134)
§ 6—6 球面波 …… (138)
§ 6—7 球面波的平面波展开 …… (140)
§ 6—8 柱面波 …… (147)
习题与参考答案六 …… (148)

第七章 弹性波在均匀有界媒质内的传播 …… (150)

§ 7—1 P波、SV波和SH波 …… (150)
§ 7—2 半空间的平面波 …… (154)
§ 7—3 P波在自由界面上的反射 …… (159)
§ 7—4 SV波及SH波在自由界面上的反射 …… (162)

§ 7—5 SH波在媒质分界面上的反射与折射 …… (166)
§ 7—6 分层媒质中的P波与SV波 …… (170)
§ 7—7 P波、SV波在媒质分界面上的反射与折射 …… (172)
§ 7—8 半空间的面波——瑞利波 …… (177)
§ 7—9 加层半空间中的SH型面波——洛夫波 …… (181)
§ 7—10 SH波在柱形腔中的散射 …… (186)
习题与参考答案七 …… (191)

第八章 弹性波的激发 …… (194)

§ 8—1 面力激发的球面波 …… (194)
§ 8—2 体力激发的SH波 …… (200)
§ 8—3 非齐次波动方程及其解答 …… (203)
§ 8—4 集中力激发的弹性波 …… (206)
§ 8—5 初值问题 …… (211)
习题与参考答案八 …… (215)

第九章 兰姆（Lamb）问题 …… (220)

§ 9—1 兰姆问题的基本理论 …… (220)
§ 9—2 半无限弹性固体表面的垂直集力 …… (223)
§ 9—3 半无限弹性固体表面的线垂直力源 …… (224)
§ 9—4 半无限弹性固体表面的切向力 …… (225)
§ 9—5 三维兰姆问题 …… (226)
§ 9—6 半无限弹性固体表面的周期力面源 …… (228)
§ 9—7 积分解答的计算 …… (229)
习题与参考答案九 …… (235)

第十章 滞弹体与滞弹波 …… (236)

§10—1 滞弹体及其性质 …… (236)
§10—2 简单线性滞弹体 …… (238)
§10—3 简单线性滞弹体中的波 …… (242)
§10—4 线性滞弹体中的波 …… (246)
§10—5 滞弹波的波型 …… (251)

§10—6 S-Ⅱ波的反射和折射 …… (254)
§10—7 实际媒质中滞弹波的衰减 …… (257)
§10—8 粘性可压缩流体中的波 …… (260)
§10—9 关于滞弹波的瑞克（Ricker）理论的概述 …… (266)
§10—10 经典弹性波理论的问题 …… (267)
§10—11 大地介质的地震波吸收作用 …… (269)
§10—12 完整的斯托克斯波动方程 …… (274)
§10—13 斯托克斯方程的瑞克解法 …… (278)
习题与参考答案十 …… (286)

附 录 …… (288)

参考书目 …… (297)

第一章 基础知识

本章主要叙述哑指标规则和材料力学中关于应力、应变的概念，为进一步学习奠定基础。特别是哑指标规则，在以后的运算中会经常遇到，应予以足够的重视。

§1—1 哑指标和克罗尼克尔符号

一、哑 指 标

在笛卡尔坐标系中，我们习惯以 x、y、z 表示坐标轴，以 $\boldsymbol{A}$ 表示某一向量（一阶张量），以 $\boldsymbol{B}$ 表示二阶张量，以 Σ 表示求和，如

$$u=\sum_{i=1}^{3}a_ix_i=a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3 \tag{1.1}$$

等等。若采用哑指标规则，则将以 x_i（$i=1$，2，3）表示坐标轴，以 A_i 表示向量 $\boldsymbol{A}$ 在 x_i 坐标轴上的三个分量，以 B_{ij} 表示二阶张量 $\boldsymbol{B}$ 在 x_i 坐标系中的九个分量，求和时省略求和符号 Σ，如以 a_ix_i 表示 $\sum_{i=1}^{3}a_ix_i$ 等等。由此可见，采用哑指标规则，就是用一些添加角标（即指标）的符号，代替那些直接表明自身意义的符号。这样的代换会给运算与书写带来许多方便。

按照上述替换关系，下面的矢量式

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D} \tag{1.2}$$

可写成

$$C_i = A_j B_{ji} + D_i \quad (i,\ j = 1,\ 2,\ 3) \tag{1.3}$$

由于（1.2）式可展开为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C} &= C_1\boldsymbol{i}_1 + C_2\boldsymbol{i}_2 + C_3\boldsymbol{i}_3 \\ &= (A_1\boldsymbol{i}_1 + A_2\boldsymbol{i}_2 + A_3\boldsymbol{i}_3)[B_{11}\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_1 + B_{12}\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2 \\ &\quad + B_{13}\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_3 + B_{21}\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_1 + B_{22}\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_2 + B_{23}\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_3 \\ &\quad + B_{31}\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_1 + B_{32}\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_2 + B_{33}\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_3] + (D_1\boldsymbol{i}_1 \\ &\quad + D_2\boldsymbol{i}_2 + D_3\boldsymbol{i}_3) \\ &= (A_1B_{11} + A_2B_{21} + A_3B_{31})\boldsymbol{i}_1 \\ &\quad + (A_1B_{12} + A_2B_{22} + A_3B_{32})\boldsymbol{i}_2 \\ &\quad + (A_1B_{13} + A_2B_{23} + A_3B_{33})\boldsymbol{i}_3 \\ &\quad + (D_1\boldsymbol{i}_1 + D_2\boldsymbol{i}_2 + D_3\boldsymbol{i}_3)\end{aligned}$$

亦即

$$\begin{aligned}C_1 &= A_1B_{11} + A_2B_{21} + A_3B_{31} + D_1 \\ C_2 &= A_1B_{12} + A_2B_{22} + A_3B_{32} + D_2 \\ C_3 &= A_1B_{13} + A_2B_{23} + A_3B_{33} + D_3\end{aligned} \tag{1.4}$$

而（1.3）式的意义应为

$$C_i = \sum_{j=1}^{3} A_j B_{ji} + D_i \tag{1.5}$$

将其进行展开，则得

$$\begin{aligned}C_1 &= \sum_{j=1}^{3} A_j B_{j1} + D_1 \\ &= A_1B_{11} + A_2B_{21} + A_3B_{31} + D_1 \\ C_2 &= \sum_{j=1}^{3} A_j B_{j2} + D_2 \\ &= A_1B_{12} + A_2B_{22} + A_3B_{32} + D_2 \\ C_3 &= \sum_{j=1}^{3} A_j B_{j3} + D_3 \\ &= A_1B_{13} + A_2B_{23} + A_3B_{33} + D_3\end{aligned} \tag{1.6}$$

由此可见，这里的C_1，C_2，C_3与（1.4）式完全一致，故C_i与$\boldsymbol{C}$是同一矢量的不同表示形式。

对于（1.3）式，如果将其写为如下形式，即

$$C_l = A_k B_{kl} + D_l \quad (l,\ k=1,\ 2,\ 3) \tag{1.7}$$

则根据（1.3）式的展开过程可知，（1.7）式与（1.3）式完全相同，不同的只是用k、l代换j、i罢了。

至此，对哑指标规则可作如下归纳：

1. 如果表达式中的某一项出现重复指标〔如（1.3）式中的j〕，则意味着对该指标求和（从1到3）。而对其他单独出现的指标〔如（1.3）式中的i〕，则意味着可分别取1，2，3。

2. 同一等式中的不同项，单独出现的指标数目和符号必须相同，如（1.3）式中的每一项单独出现的指标都只有一个，并且符号都是i。

3. 同一等式中的某项有重复出现的指标，将重复指标换记为别的符号，并不影响结果〔如（1.7）式中的k代换（1.3）式中的j〕。

4. 同一等式中所有项内单独出现的某一指标，都换记为别的符号，并不影响结果〔如（1.7）式中的l代换（1.3）式中的i〕。

〔例1—1〕 试对下列用哑指标表示的各式进行展开：

（1）$\varepsilon = e_{ij} n_j n_i$

（2）$\dfrac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho f_i = \rho \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$

解 （1）从式中可以看出，等式右端的指标j和i都为重复出现的指标。根据哑指标规则1可知，应对j和i分别从1到3求和。为清楚起见，我们先对j求和，将i视为不变，有

$$\varepsilon = e_{1i} n_1 n_i + e_{2i} n_2 n_i + e_{3i} n_3 n_i$$

再考虑到将i从1到3求和，则

$$\varepsilon = e_{11} n_1 n_1 + e_{12} n_1 n_2 + e_{13} n_1 n_3 + e_{21} n_2 n_1 + e_{22} n_2 n_2 + e_{23} n_2 n_3 + e_{31} n_3 n_1 + e_{32} n_3 n_2 + e_{33} n_3 n_3$$

此式中的前、中、后3项分别是$e_{1i} n_1 n_i$、$e_{2i} n_2 n_i$、$e_{3i} n_3 n_i$的求和展开式。如果此求和式中存在3个或更多个重复指标（如

$\varepsilon = e_{ij} n_{ik} n_{kj}$ 等）时，则依旧按上述规律，逐一对重复指标求和即可。

（2）从前面给出的式子中可以看出，等式左端的第一项有重复指标j，其他各项仅有单独指标i，根据哑指标规则可知，对j应从1到3求和，对i应分别取1，2，3。如此，当i取1时，上述所给等式成为

$$\frac{\partial \sigma_{j1}}{\partial x_j} + \rho f_1 = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$$

再对j求和，得

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + \rho f_1 = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$$

与此对应，$i=2$时有

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + \rho f_2 = \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}$$

$i=3$时有

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho f_3 = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}$$

由此知，就表达式中的某一项来说，只要存在复重指标，则无论该项是乘式形式还是除式形式，是代数形式还是微分形式，都应予以求和。对表达式中出现的单独指标，则应分别取1，2，3。

二、克罗尼克尔符号

正同前面讲过的用B_{ij}表示任一二阶张量时一样，如果用二阶张量δ_{ij}（即克罗尼克尔符号）表示一特殊形式的二阶张量即二阶单位张量，则根据二阶张量δ_{ij}的矩阵表示

$$\begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{21} & \delta_{31} \\ \delta_{12} & \delta_{22} & \delta_{32} \\ \delta_{13} & \delta_{23} & \delta_{33} \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

和二阶单位张量的矩阵表示

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

知

$$\delta_{ji}=\begin{cases}1 & \text{当}i=j\text{时} \\ 0 & \text{当}i\neq j\text{时}\end{cases} \tag{1.10}$$

此式即为克罗尼克尔符号的定义式。根据此定义知，δ_{ji} 的矩阵表示式（即单位矩阵）具有与任意矩阵相乘时得原矩阵的性质（参照线性代数）。正是这样的性质，决定了 δ_{ji} 在运算过程中的特殊性。

首先，我们使 δ_{ji} 作用于任意矢量 A_i 上，成为 $\delta_{ji}A_i$。根据哑指标规则，i 为重复指标，故应有

$$\delta_{ji}A_i=\delta_{j1}A_1+\delta_{j2}A_2+\delta_{j3}A_3$$

当 $j=1$ 时

$$\delta_{1i}A_i=\delta_{11}A_1+\delta_{12}A_2+\delta_{13}A_3=A_1$$

同理，$j=2$ 时

$$\delta_{2i}A_i=A_2$$

$j=3$ 时

$$\delta_{3i}A_i=A_3$$

这与 A_j（$j=1$，2，3）完全一致。因此可建立如下等式：

$$\delta_{ji}A_i=A_j \tag{1.11}$$

其次，我们再使 δ_{ji} 作用于任意二阶张量 B_{ik} 上成为 $\delta_{ji}B_{ik}$，按哑指标规则，i 为重复指标，故应有

$$\delta_{ji}B_{ik}=\delta_{j1}B_{1k}+\delta_{j2}B_{2k}+\delta_{j3}B_{3k}$$

因为 $j\neq i$ 时，$\delta_{ji}=0$。因此，当 j 取 1 时，等式右端只有第一项不为零，且当 k 取 1，2，3 时，得三个分量 B_{11}，B_{12}，B_{13}；而 i 取 2 时，等式右端第二项不为零，当 k 取 1，2，3 时，也得三个分量 B_{21}，B_{22}，B_{23}；同理，j 取3时，得三个分量 B_{31}，B_{32}，

B_{33}。这九个分量与二阶张量 B_{jk} 的九个分量完全一致。因此，又可建立如下的关系式：

$$\delta_{ji}B_{ik}=B_{jk} \tag{1.12}$$

从（1.11）与（1.12）式可以看出，二阶单位张量 δ_{ji} 作用于任意阶张量时，只需将任意阶张量中与 δ_{ji} 对应出现的重复指标（如（1.11）与（1.12）式中的 i）用 δ_{ji} 内的另一单独指标（如前两式中的 j）替换即可。比如

$$\delta_{ji}B_{jl}=B_{il}$$

$$\delta_{ji}B_{iklm}=B_{jklm}$$

$$\delta_{ji}B_{jl}=B_{jj}=B_{ll} \quad \text{（缩并）}$$

等等。反过来，如果见到 B_{jk}，应该立即想到它可以写成 $\delta_{ji}B_{ik}$。

三、循环符号 δ_{klm}

为按哑指标规则进行矢量叉乘运算，我们引入一特殊的三阶张量 δ_{klm}（即循环符号），使其为

$$\delta_{klm}=\begin{cases} 0 & \text{当 } klm \text{ 三个间有任意两个或三个相等时} \\ 1 & \text{当 } klm \text{ 为123，231，312排列时} \\ -1 & \text{当 } klm \text{ 为132，321，213排列时} \end{cases} \tag{1.13}$$

如 $\delta_{113}=\delta_{111}=\delta_{232}=\delta_{331}=0$，$\delta_{231}=1$，$\delta_{132}=-1$ 等等。为记忆方便，我们可将角标 1，2，3 分别标在圆周的对称位置上（如图 1—1）。由图 1—1 与定义式（1.13）可以看出，无论以 1，2，3 哪一个数字指标为起点，按其顺时循环排列（或称偶序）时，δ_{klm} 为 + 1，逆时循环排列（或称奇序）时为 − 1，出现重复数字指标排列时为0。

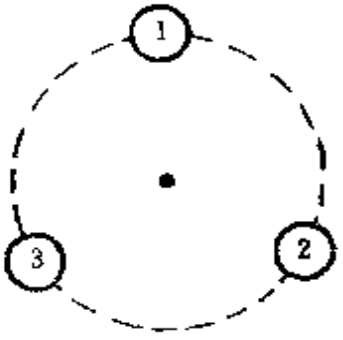


图 1—1

根据 δ_{klm} 的定义，我们可以证明矢量式

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$$

可以写成

$$A_k = \delta_{klm} B_l C_m \tag{1.14}$$

的形式。因为按哑指标规则，当上式中单独指标k取1时，有

$$\begin{aligned} A_1 &= \delta_{111} B_1 C_1 + \delta_{112} B_1 C_2 + \delta_{113} B_1 C_3 \\ &\quad + \delta_{121} B_2 C_1 + \delta_{122} B_2 C_2 + \delta_{123} B_2 C_3 \\ &\quad + \delta_{131} B_3 C_1 + \delta_{132} B_3 C_2 + \delta_{133} B_3 C_3 \\ &= \delta_{123} B_2 C_3 + \delta_{132} B_3 C_2 \\ &= B_2 C_3 - B_3 C_2 \end{aligned}$$

k取2时有

$$\begin{aligned} A_2 &= \delta_{231} B_3 C_1 + \delta_{213} B_1 C_3 \\ &= B_3 C_1 - B_1 C_3 \end{aligned}$$

k取3时有

$$\begin{aligned} A_3 &= \delta_{312} B_1 C_2 + \delta_{321} B_2 C_1 \\ &= B_1 C_2 - B_2 C_1 \end{aligned}$$

而对$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}$按叉乘法则展开，可得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= A_1 \boldsymbol{i}_1 + A_2 \boldsymbol{i}_2 + A_3 \boldsymbol{i}_3 \\ &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i}_1 & \boldsymbol{i}_2 & \boldsymbol{i}_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \\ &= (B_2 C_3 - B_3 C_2) \boldsymbol{i}_1 + (B_3 C_1 - B_1 C_3) \boldsymbol{i}_2 \\ &\quad + (B_1 C_2 - B_2 C_1) \boldsymbol{i}_3 \end{aligned}$$

此式中的分量A_1、A_2、A_3与按（1.14）式展开的结果完全相同。

四、微分符号

利用上述符号规则，微分算符∇的分量形式可以用$\frac{\partial}{\partial x_i}$来表示。譬如，对空间任意标量场$\Phi$求梯度，则由梯度的定义知

$$\nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \boldsymbol{i}_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \boldsymbol{i}_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \boldsymbol{i}_3$$

如果将$\nabla\Phi$换记为$\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}$，由于$i$可以取1，2，3，故应有$\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}$，$\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}$，$\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}$，这三个值正是$\nabla\Phi$的三个分量。

与此对应，对某一矢量场A求散度，则可将$\nabla\cdot A$写成$\frac{\partial A_i}{\partial x_i}$，因为

$$\nabla\cdot A=\frac{\partial A_1}{\partial x_1}+\frac{\partial A_2}{\partial x_2}+\frac{\partial A_3}{\partial x_3}$$

与

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_i}=\frac{\partial A_1}{\partial x_1}+\frac{\partial A_2}{\partial x_2}+\frac{\partial A_3}{\partial x_3}$$

完全一致。

对某一矢量场A求旋度时，$\nabla\times A$的三个分量可以用$\delta_{klm}\frac{\partial A_m}{\partial x_l}$表示，如$k=1$时

$$\delta_{klm}\frac{\partial A_m}{\partial x_l}=\delta_{1lm}\frac{\partial A_m}{\partial x_l}$$

$$=\delta_{123}\frac{\partial A_3}{\partial x_2}+\delta_{132}\frac{\partial A_2}{\partial x_3}$$

$$=\frac{\partial A_3}{\partial x_2}-\frac{\partial A_2}{\partial x_3}$$

$k=2$时

$$\delta_{2lm}\frac{\partial A_m}{\partial x_l}=\frac{\partial A_1}{\partial x_3}-\frac{\partial A_3}{\partial x_1}$$

$k=3$时

$$\delta_{3lm}\frac{\partial A_m}{\partial x_l}=\frac{\partial A_2}{\partial x_1}-\frac{\partial A_1}{\partial x_2}$$

此结果与$\nabla\times A$展开时的三个分量相同。类似地，我们还有$\nabla^2\Phi$可

记为

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\quad \frac{\partial}{\partial x_i}\Phi$$

$\oint_S A\cdot n ds=\int_V \nabla\cdot A dV$（高斯定理）可记为

$$\oint_S A_i n_i ds=\int_V \frac{\partial A_i}{\partial x_i}dV$$

$\oint_l A\cdot dl=\int_S \nabla\times A\cdot n ds$（斯托克斯定理）可记为

$$\oint_l A_k dx_k=\int_S \delta_{kl}\frac{\partial A_m}{\partial x_l}n_k ds$$

等等。这里值得注意的是，采用上述符号规则表达一个具有矢量性的结果时，它仅仅表达了该矢量在 x_i 坐标轴上的分量值的大小。当然，只要知道一个矢量在各坐标轴上的分量值，这个矢量即被确定。

§1—2 应力的概念

为了从分子结合力的角度讨论应力的概念，我们给出分子与分子之间结合力的数学表示式（参见固体力学），即

$$F(r)=-\frac{a'}{r^{m+1}}-\frac{b'}{r^{n+1}} \qquad (1.15)$$

其中 a'、b'、m、n $(n>m)$ 为与材料有关的常数，r 为两个分子间的距离。$F(r)$ 随 r 变化的情形如图1—2所示。

从图中可以看出，构成宏观物体的分子与分子之间同时存在着吸引力与排斥力，当 $r=r_0$ 时，吸引力与排斥力相互抵消，分子处于平衡位置。如果设想某宏观物体是由大量的处于平衡位置的分子所组成，那么我们称该宏观物体所处的状态为自然状态。由式（1.15）知，自然状态的宏观物体也有内力作用，但此内力没有改变物体自身形态的能力，对外不显力的作用。如果对此处

于自然状态的物体施加外力，比如沿某一方向施加拉力，则此拉力在物体内部的微观表现相当于各分子之间在这个方向上增加了排斥力，它将使分子之间的距离增大（$r>r_0$），直到这个排斥力与分子间由于$r>r_0$而产生的吸引力相等时为止。反之，如果物体受的是某一方向上的压力，则相当于物体内各分子之间在这个方向上增加了吸引力，它将使分子之间距离减小（$r<r_0$），直至分子之间由于$r<r_0$而产生的排斥力与此吸引力相等时为止。这些由于$r>r_0$或$r<r_0$而产生的吸引力与排斥力都具有使物体恢复自然状态的性质，它们直接反映了外力的作用效果。我们称这种在外力作用下物体内部由于$r>r_0$或$r<r_0$而产生的力为附加内力。

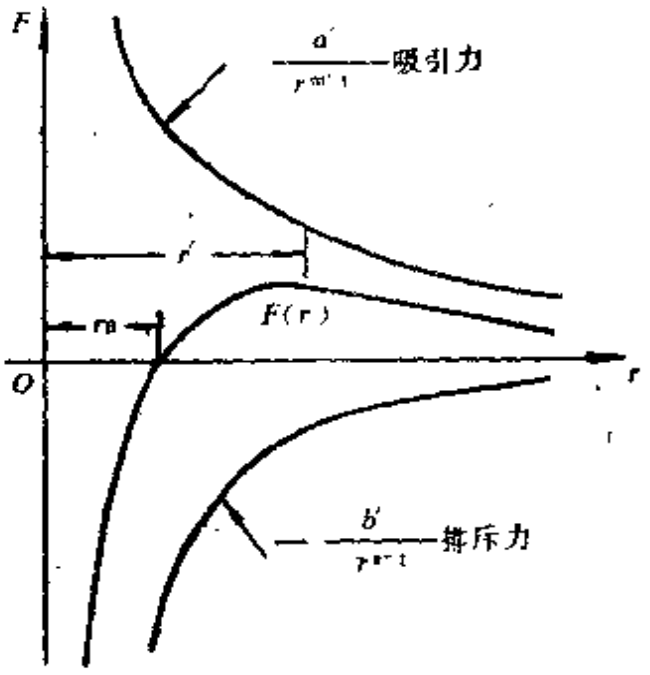


图 1—2

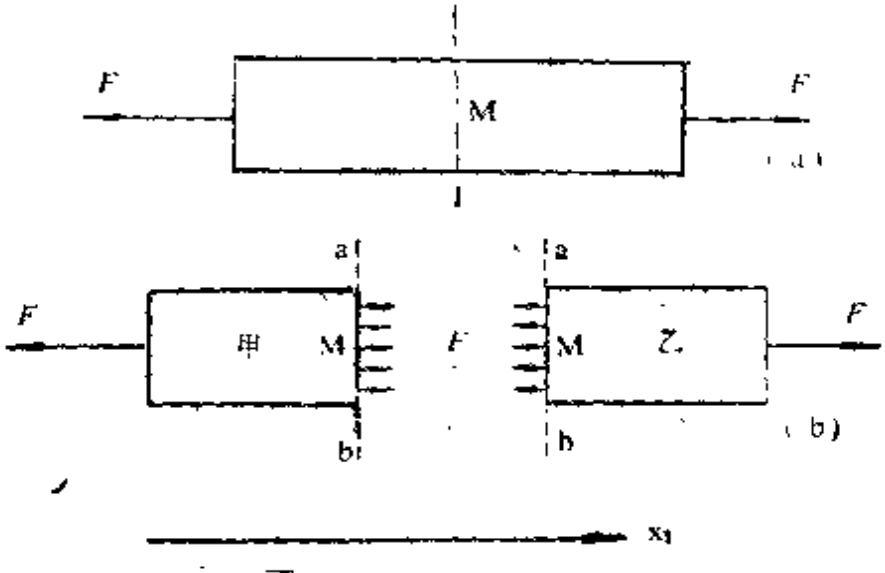


图 1—3

有了附加内力的概念，我们再来看一个简单的受力情形。设有一处在自然状态的矩形柱体，在两端施加拉力 F（如图1—3），由于拉力的作用，柱体内将产生由 $r>r_0$ 而引起的附加内力。如果在M处沿垂直于 x_1 轴（轴线）方向截取一正截面ab使柱体分成甲乙两块，在截面两侧分别用力线表示质点间的相互作用，那么当外力 $F=0$ 时，由于甲乙两块各自平衡，故此该截面上没有附加内力。如果 $F\neq 0$，则从它们所处的新的平衡状态[如图（b）]知，截面上应有一附加内力 F（截面上各分子间的附加内力之和），它的方向与外力 F 相反。我们就把此附加内力 F 与所截取的截面面积（设为 A）的比值称为M点在该截面上的应力，以 σ_{11} 表示，其数学表示式为

$$\sigma_{11}=\frac{F}{A} \tag{1.16}$$

所以，应力即为所取截面单位面积上的附加内力。σ_{11} 中的第一个角标表示所取截面的法线方向与 x_1 轴平行；第二个角标表示力的方向与 x_1 轴平行。

如果上述物体的受力情形不变，而改变其截面的选取方向，使其法线方向 n 与 x_1 轴成 θ 角（如图 1—4），则斜截面cd的面积

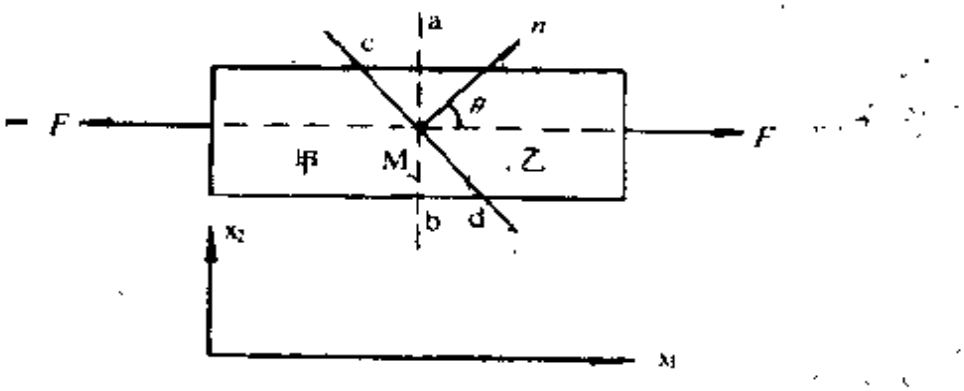


图 1—4

$A_\theta=A/\cos\theta$。从甲乙两块柱体的平衡得知，作用在cd截面上的总附加内力仍然是 F，且平行于 x_1 轴。根据应力的定义，cd截面上的应力为

$$P_n = \frac{F}{A/\cos\theta} = \sigma_{11}\cos\theta \tag{1.17}$$

这里$\sigma_{11}=F/A$表示正截面ab上的应力，P_n表示法线方向为n的斜截面cd上的应力，其方向与截面上的合力（总的附加内力）F相同。从式（1.17）可以看出，过M点选取不同的截面，会得到不同的应力值。随着θ的增长，应力值变小，当$\theta=90°$时，$P_n=0$。由此可见斜截面上的应力P_n不但与力F的大小有关，还与斜截面的方向有关。因此，笼统地说“物体内某点的应力”其含意是不清的。

为了便于对某些具体问题进行力学分析，我们常常把上述P_n（也称之为总应力）分解为垂直于截面和平行于截面的两个分量。由图1—4可知，垂直于截面亦即沿截面外法线方向n的分量为

$$\sigma_n = p_n\cos\theta = \sigma_{11}\cos^2\theta \tag{1.18}$$

σ_n称之为任意法线方向为n的截面上的正应力分量。平行于截面的分量为

$$\sigma_\tau = P_n\sin\theta = \sigma_{11}\cos\theta\sin\theta \tag{1.19}$$

σ_τ称之为法线方向为n的截面上的剪应力分量（在地质力学书中常称之为扭应力）。

根据解析几何知识可知，图1—4中外法向单位矢量n的方向余弦分别为

$$\begin{aligned} n_1 &= \cos(\hat{n,i_1}) = \cos\theta \\ n_2 &= \cos(\hat{n,i_2}) = \sin\theta \end{aligned} \tag{1.20}$$

这里的i_1、i_2分别为x_1、x_2轴向上的单位矢量。将n_1、n_2代入正应力与剪应力的表示式中，可得

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_{11}n_1^2 \\ \sigma_\tau &= \sigma_{11}n_1n_2 \end{aligned} \tag{1.21}$$

这样代换是为了与后面所讲问题的表示相一致。关于正应力与剪应力的正负号问题，我们做如下规定：正应力以拉应力为正；剪

应力以使物体产生顺时针转动趋势的剪应力为正。

〔例 1—2〕 根据应力的定义求解一横截面积为A，高为h，上端受压力 P，在自重作用下的柱体各横截面上的应力（如图 1—5）。已知材料的容重（单位体积内的重量）为 $(\rho g/1000)$ kg/cm^3。

解 选如图所示的坐标系，取任一横截面距顶端的距离为x_3，则在x_3处的横截面上所受之合力F_3应为

$$F_3 = P + \frac{\rho g}{1000}(A \cdot x_3)$$

根据应力的定义，在此截面上的应力σ_{33}应为

$$\sigma_{33} = \frac{F_3}{A} = \frac{P}{A} + \frac{\rho g}{1000} x_3$$

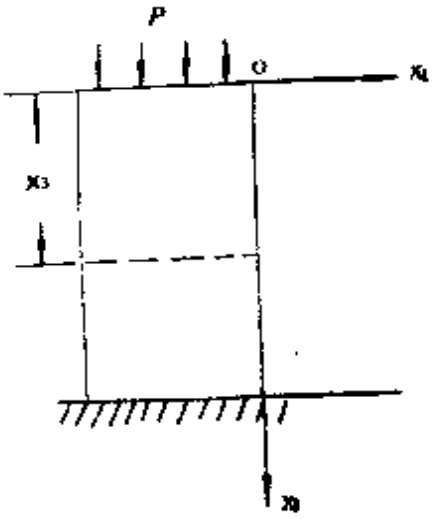


图 1—5

因为x_3处横截面所受的是压应力，所以体现在数学表示式上应为

$$\sigma_{33} = -\left(\frac{P}{A} + \frac{\rho g}{1000} x_3\right)$$

当$x_3 = 0$时

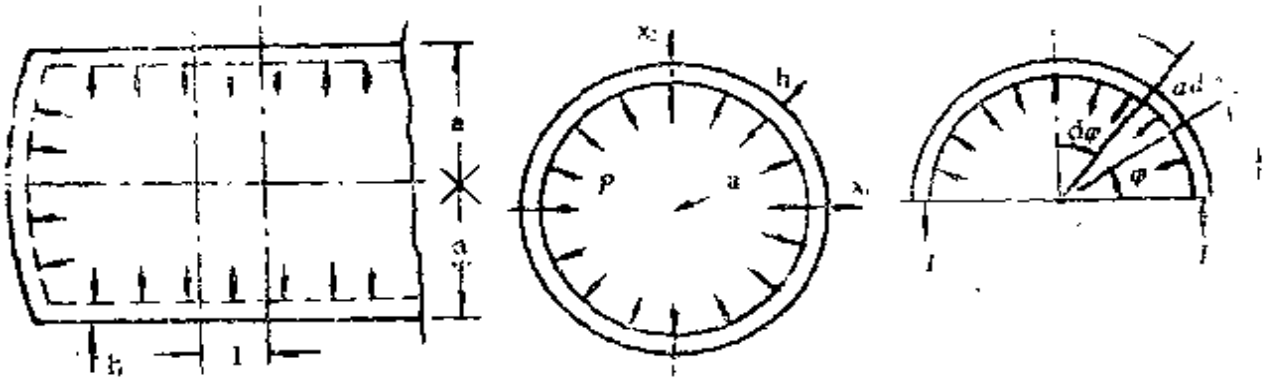
$$\sigma_{33} = -P/A$$

$x_3 = h$时

$$\sigma_{33} = -\left(\frac{P}{A} + \frac{\rho g}{1000} h\right)$$

〔例 1—3〕 参看图 1—6（a），有一个半径为a，壁厚为h的柱状气缸，受内压力P的作用，试求该气缸壁沿圆周方向上的应力。

解 为方便起见，我们在柱状气缸上截取一单位长度的圆环，其正视图如图 1—6（b）所示。从图中可以看出，在压力P的作用下，圆环任意横截面上均受一拉力T〔见图 1—6(c)〕



(a) (b) (c)

图 1—6

的作用。根据圆环所处的新的平衡状态知，P 在竖直方向上的投影（半环内的）应该与 $2T$ 的量值相等。采用极坐标系，可列如下方程：

$$-2T+\int_0^{\pi} pa\cdot 1\cdot \sin\varphi d\varphi = 0$$

于是有

$$T=\frac{1}{2}pa\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi = pa$$

因为T作用的面积为$h\cdot 1$，所以圆环切线方向的应力为

$$\sigma_\varphi = T/h\cdot 1 = Pa/h \quad (\text{拉力})$$

由此式可见，当半径a比厚度h大得多时，σ_φ也比P大得多，地质学家李四光曾用一个圆球壳受内压力 P作用的情况，说明地球表面上的水平应力比垂直于地球表面的应力大很多倍，用以阐释地壳内水平应力的主导性。这也是我们以后讨论地应力时仅仅讨论平面问题的理论根据。

§1—3 应变的概念

与讨论应力时一样，为了说明应变的概念，我们仍选取一矩形柱体。设其长度为L，横截面积为A，当两端施加拉力F的作用

时（如图1—7），由上节的讨论可知，柱体内各分子与分子之间水平方向上的距离将增大，尽管这种分子与分子之间的距离改变极其微小，但体现在宏观效果上却相当于柱体伸长了 ΔL，我们就将此 ΔL 与原长 L 之比称之为水平方向上的线应变，写成数学形式则为

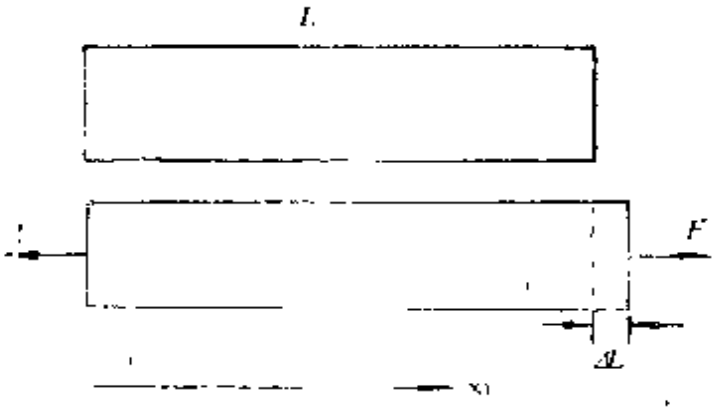


图 1—7

$$e_{11}=\Delta L/L \tag{1.22}$$

这里 e_{11} 中的第一个角标表示 L（或水平方向上的任意线段）与 x_1 轴平行，第二个角标表示 ΔL 也与 x_1 轴平行。由此可见，所谓线应变即为某一线段单位长度内的伸长量。它是一个无量纲的量，一般取拉伸线应变（如这里所定义的线应变）为正，压缩线应变为负。

以上我们定义的仅仅是沿 x_1 轴方向上的线应变，它描述的不过是在外力作用下沿 x_1 轴方向上某一线段的变形情况。在实际问题中，通常要求解决沿任意方向上某一线段的变形问题。为此，

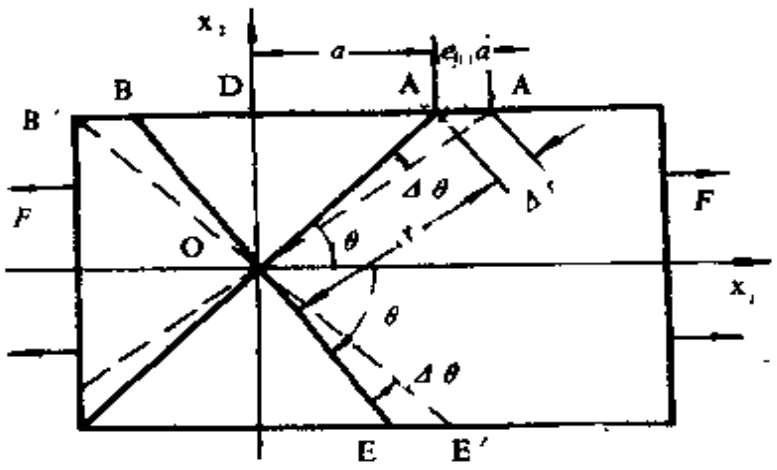


图 1—8

我们看图 1—8，设图中 OA 为任意选取的线段，其长度为r，与 x_1 轴成θ角，A点与O点的水平距离为a（AD），在外来拉力 F 的作用下，如果设 OD 线的位置不动，由于水平方向上存在线应变 e_{11}，于是DA 成为 DA'，其伸长量AA'应该等于 $e_{11}\cdot a$。与之对应，OA成为OA'，OA'相对于OA除在线量上伸长了 Δr 外，还在角量上改变了$\Delta\theta$，Δr与$\Delta\theta$便是线段OA 在变形过程中的改变量。其中Δr可通过三角形ACA'求得：

$$\Delta r = e_{11}a\cos(\theta-\Delta\theta)$$

在小变形（这是弹性力学的基本假设之一）的情况下，$\Delta\theta$ 相对θ可忽略不计，于是

$$\Delta r = e_{11}a\cos\theta$$

此外，从三角形OAD知 $r=a/\cos\theta$，因此线段OA沿 r 方向上的线应变为

$$e_r = -\frac{\Delta r}{r} = \frac{e_{11}a\cos\theta}{a/\cos\theta} = e_{11}\cos^2\theta$$

应用上节所讲的$\cos\theta=n_1$，则

$$e_r = e_{11}n_1^2 \qquad (1.23)$$

对于$\Delta\theta$，则可由扇形OAC表示如下：

$$\Delta\theta = -\overline{AC}/r$$

这里加负号是因为$\Delta\theta$的方向与θ相反（θ以逆时针转角为正）。再由三角形ACA'知

$$\overline{AC} = e_{11}a\sin\theta$$

所以

$$\Delta\theta = -\frac{e_{11}a\sin\theta}{a/\cos\theta} = -e_{11}\sin\theta\cos\theta$$

如果将$\Delta\theta$用$e_{r\theta}$表示，并考虑到$n_1=\cos\theta$，$n_2=\sin\theta$，则

$$e_{r\theta} = -e_{11}n_1n_2 \qquad (1.24)$$

我们把$e_{r\theta}$称为与x_1轴成θ角的线段OA沿θ方向的剪应变，它是一条线段上的剪应变。通常所定义的剪应变，是指物体内任意两条

相互成直角的段线在变形后角度减小值的一半。对上述问题来说，相当于线段OA与线段OE（如图1—8）之间角度减小值$\Delta\theta$与$\Delta\theta_1$之和的一半。利用（1.24）式，$\Delta\theta_1=-e_{11}\sin(-\theta_1)\cdot\cos(-\theta_1)=e_{11}n_1n_2$。因此有

$$e_{r\theta}=\frac{1}{2}[|\Delta\theta|+|\Delta\theta_1|]=e_{11}n_1n_2 \qquad (1.25)$$

除此之外，有的教材将$(\Delta\theta+\Delta\theta_1)$定义为剪应变，并用符号$\gamma$表示，因此有

$$\gamma=2e_{r\theta} \qquad (1.26)$$

这一点在参考其它教材时应予以注意。

〔例1—4〕 设有一立方形岩块，其边长为$L=1$m，在外来作用下发生变形，变形后某一面上水平方向的线应变为$e_{11}=0.01$，竖直方向的线应变为$e_{22}=-0.01$，如图1—9所示，试求该平面内与水平成30°角方向上的线应变与剪应变（设应变是均匀的）。

解 根据题中所给线应变的数值，知在水平方向上的伸长量为$\Delta L_1=L\cdot e_{11}=0.01$m，竖直方向上的伸长量为$\Delta L_2=L\cdot e_{22}=-0.01$m（即缩短了0.01m）。为解题方便，我们可以将此应变想象为一个仅仅由水平拉力而引起的线应变（参见图1—8）与一个仅仅由竖直压力而引起的线应变的迭加。这样，应用（1.23）式可得与水平成30°角方向上的线应变，即

$$e_r=e_{11}n_1^2+e_{22}n_2^2$$

$$=0.01\times\frac{3}{4}+(-0.01)\times\frac{1}{4}$$

$$=0.005$$

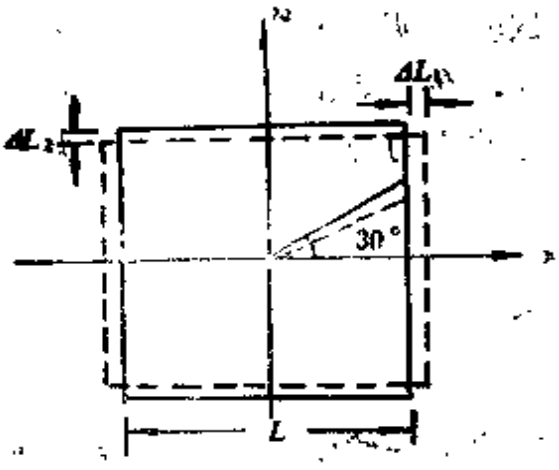


图 1—9

对剪应变来说，由于水平拉应变与竖直压应变均使原30°角变小，即$\Delta\theta$应为负值，应用

(1.24) 式，得

$$\begin{aligned} e_{\nu\vartheta} &= (-e_{11}n_1n_2)+(e_{22}n_1n_2) \\ &= -0.01\times\frac{\sqrt{3}}{4}-0.01\times\frac{\sqrt{3}}{4} \\ &= -0.005\sqrt{3} \end{aligned}$$

§1—4 应力-应变曲线

由前面的讨论可知，当对处在自然状态下的矩形柱体施加拉力为 F 的作用时，柱体内将同时存在应力与应变，而当撤除外力时，柱体内应力与应变同时为零。这表明应力与应变之间存在着一定的关系。这种关系可由对标准试件进行简单拉伸试验的结果给出。

为此，我们看一矩形柱体试件，设试件的两定点 A、B 间的原长为 L_0（图 1—10），截面积为 S_0。施加拉力 F 后，A、B 间长度变为 L，令 $\Delta L = L - L_0$。根据前面所讲的应力与应变的定义可知

$$\sigma_{11} = F/S_0$$

$$e_{11} = \Delta L/L_0$$

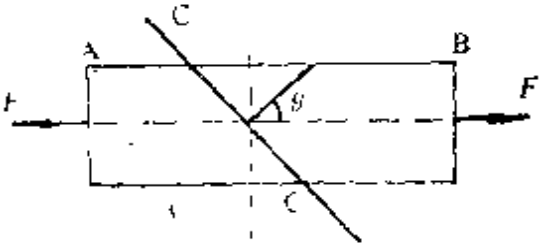


图 1—10

试验表明，对大多数固体材料来说，在一定的拉伸应力范围内，拉伸应力与拉伸应变之比为常数。写成数学形式则为

$$E = \sigma_{11}/e_{11} = FL_c/S_0\Delta L$$

或

$$\sigma_{11} = Ee_{11} \tag{1.27}$$

这就是一维情况下的虎克定律。E 称为杨氏模量。

试验还发现，当试件被拉伸时，其横截面积会缩小，设试件的横截面为正方形，原边长为 b_0，拉伸后成为 b，则 $\Delta b = b - b_0$。

试验表明，对大多数固体材料来说，在一定的拉伸应力范围内，横向相对缩短$\Delta b/b_0$与纵向相对伸长$\Delta L/L_0$之比为常数，即

$$\nu = -\frac{\Delta b/b_0}{\Delta L/L_0} = -\frac{L_0\Delta b}{b_0\Delta L} \tag{1.28}$$

ν称之为泊松比。负号表示横向相对缩短。

在试验中，如果选取任意斜截面CC′，则由前面的讨论可知，斜截面上同时存在剪应力σ_τ与剪应变e_τ。试验表明，对大多数固体材料来说，剪应力与剪应变之比也为常数，写成数学形式为

$$\sigma_\tau/e_{\tau\theta} = 2\mu$$

若考虑到$\gamma = 2e_{\tau\theta}$，则

$$\mu = \sigma_\tau/\gamma \tag{1.29}$$

μ称为刚性系数。

为了进一步表达应力与应变之间的关系，我们给出材料试验机上直接画出的曲线，即应力－应变曲线（或拉伸图），如图1—11所示。

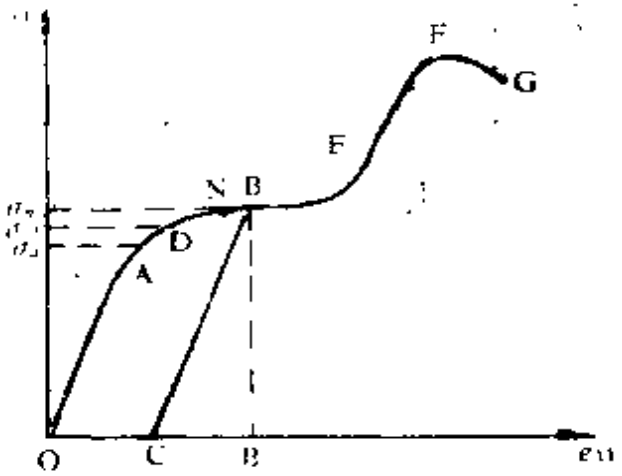


图 1—11

由图可见，当$\sigma_{11} < \sigma_e$时，σ_{11}与e_{11}保持线性关系，σ_e称为比例极限。

当$\sigma_e < \sigma_{11} < \sigma_a$时，$\sigma_{11}$与$e_{11}$不保持线性关系，但当外力撤除后，$\sigma_{11}$与$e_{11}$按原来的曲线返回零点，$\sigma_a$称为弹性极限。

当$\sigma_{11} > \sigma_a$时，材料失去弹性，外力撤除后，材料不能恢复原状，而留有剩余形变。

当$\sigma_{11} > \sigma_s$时，σ_{11}几乎不增加而e_{11}则不断增加，图上NE段为屈服阶段，σ_s称为屈服极限。

在EF段，当e_{11}增加时，σ_{11}也有显著增加，这一阶段称为

硬化阶段。过F点以后，当e_{11}再增加时σ_{11}减小直至断裂。

对材料施加剪切力后，剪切应力与剪切应变的关系类似于图1—11的曲线。

在弹性力学中，我们研究的仅仅是应力-应变曲线中$\sigma_{11}<\sigma_s$的线性阶段。在这一阶段，物体的应变是很小的，反映在宏观物体上相当于物体的变形也是很小的。同时，在这一阶段，当外力撤除后，应力与应变可同时返回零点而不存留任何剩余形变，即物体可看成是完全弹性的。弹性力学中把这称之为小变形假设和完全弹性假设。除此之外，在前面诸问题的讨论中，我们没有考虑构成宏观物体各部分（包括分子之间）之间的间隙，而认为物体是由连续介质所充满的。同时，关于该物体的物理性质，一般认为是在各个方向上没有区别的，即在各个方向上材料的物理性质完全一致。弹性力学中把这称之为连续性假设和各向同性假设。其次，在分析前面各物体受力情况时，一般均假定物体在受力前所处的状态为自然状态，即当外力为零时，物体内部的应力也为零，物体内无初始应力。弹性力学中把这称之为无初始应力假设。

上述五条基本假设，是使弹性力学问题得以简化的重要依据。尽管这些假设（除小变形假设外）都是理想化的模型，但对大多数较规则的固体材料来说，由此而导出的结果与实际情况基本吻合。以后我们所讨论的物体均限于满足这五条基本假设的物体。

习题与参考答案一

1．试对下列附哑指标表示的各式进行展开：

（1）$u=a_{ij}x_ix_j$

（2）$W=\frac{1}{2}\sigma_{ij}e_{ij}$

（3）$g_{ij}=(\partial x_i/\partial x_k)(\partial x_j/\partial u_k)$

（4）$\sigma'_{kl}=\alpha_{ki}\alpha_{lj}\sigma_{ij}$

2．试对下列用哑指标和克罗尼克尔符号表示的各式进行展开：

（1）$\delta_{ji}a_ib_j$

（2）$a_{ik}b_{kj}=\delta_{ji}$

（3）$(e_{ji}-e\delta_{ji})n_j=0$

（4）$\sigma_{ji}=\lambda\theta\delta_{ji}+2\mu e_{ji}$

（5）$e_{ji}=-\frac{\gamma}{E}\theta\delta_{ji}+\frac{1+\gamma}{E}\sigma_{ji}$

8．证明矢量式$\boldsymbol{u}=\nabla\times\boldsymbol{A}$可以写成

$$u_k=\delta_{kl}\frac{\partial A_m}{\partial x_l}$$

的形式。

4．如图1—12所示，某地块受东西方向水平应力500kg/cm²，垂直方向压应力100kg/cm²，求倾向正东，倾角60°的断层上的正应力与剪应力。

（答案：$\sigma_n=-400\text{kg/cm}^2$，$\sigma_\tau=-100\sqrt{3}\text{ kg/cm}^2$）

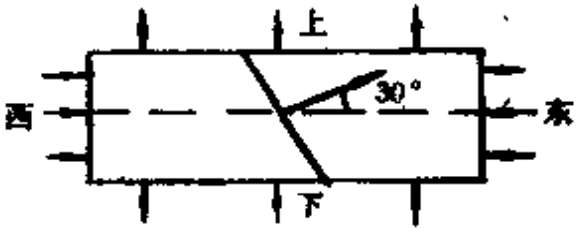


图 1—12

5．在例1—2中，根据已求得的σ_{33}，进一步求解柱体内的应变与柱体的总变形量。

（答案：$e_{33}=-\left(\frac{P}{AE}+\frac{\rho g}{1000E}x_3\right)$，

总变形量$\delta=-\left(\frac{P}{AE}h+\frac{\rho g}{1000E}h^2\right)$）

6．有一直径为9cm，长为100m的实心钢质钻杆，问在提起钻杆和放下钻杆时两者长度相差多少？已知$\rho g=(7.8/1000)\text{kg/cm}^3$，$E=2\times10^6\text{kg/cm}^2$。

（答案：长度相差0.39cm）

第二章　应力分析

对地质体进行力学分析，总的说来，就是寻求在外力作用下物体内部各处的应力分布和伴随着的变形情况。在第一章中，我们叙述了物体在简单拉伸情况下的应力与应变的概念及关系，对任意截斜面上的总应力、正应力、剪应力等下了明确的定义。但是，实际物体的受力问题往往要比简单拉伸模型（一维受力体）复杂得多，因此，有必要做进一步的讨论。本章的目的就在于解决一般情况下物体受力产生应力的问题。

§2—1　应力张量

将§1—2节的讨论推广到三维空间，如图2—1所示，取mn为任意截面，在mn截面上选取一小面积ΔS包围Q点，若在外力作用下该小面积上总的附加内力为ΔF，则根据应力的定义知Q点的应力为

$$P_n=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta S} \qquad (2.1)$$

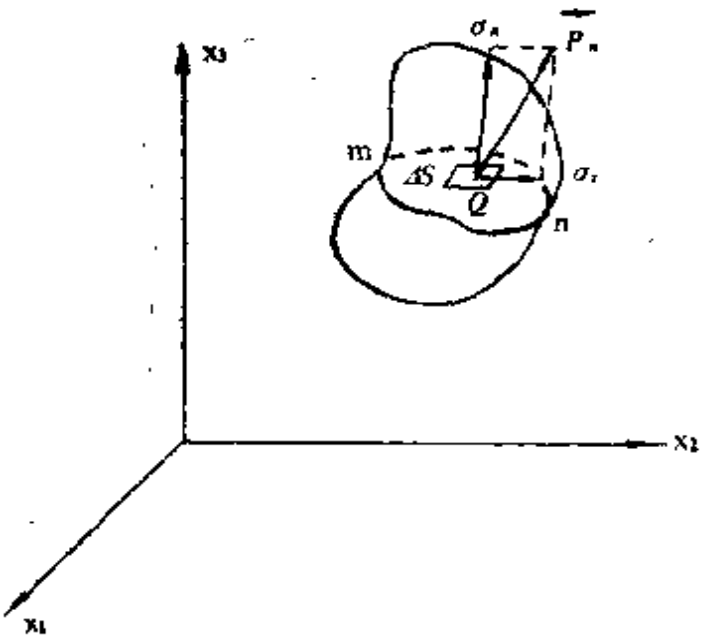


图 2—1

P_n即为前面所讲过的总应力。它在截面ΔS法线方向的投影（或

分量）为正应力，在切向方向的投影为剪应力。由前面的讨论知道，P_n 不仅与外来作用有关，而且与截面的法线方向选取有关，当外来作用一定的情况下，因为Q点截面的取向可以是任意的，所以对应物体内Q点的应力也应有无数多的取值。这样，对于某一点Q来说，似乎需用无穷多个量来描述它的应力状态（各个不同截面上应力的大小和方向）。但实际上并非如此。下面我们将证明，描述一点的应力状态，只需三个矢量或九个标量就可以完全确定。

为了说明这一点，我们看图 2—2，选坐标原点 O 与所研究

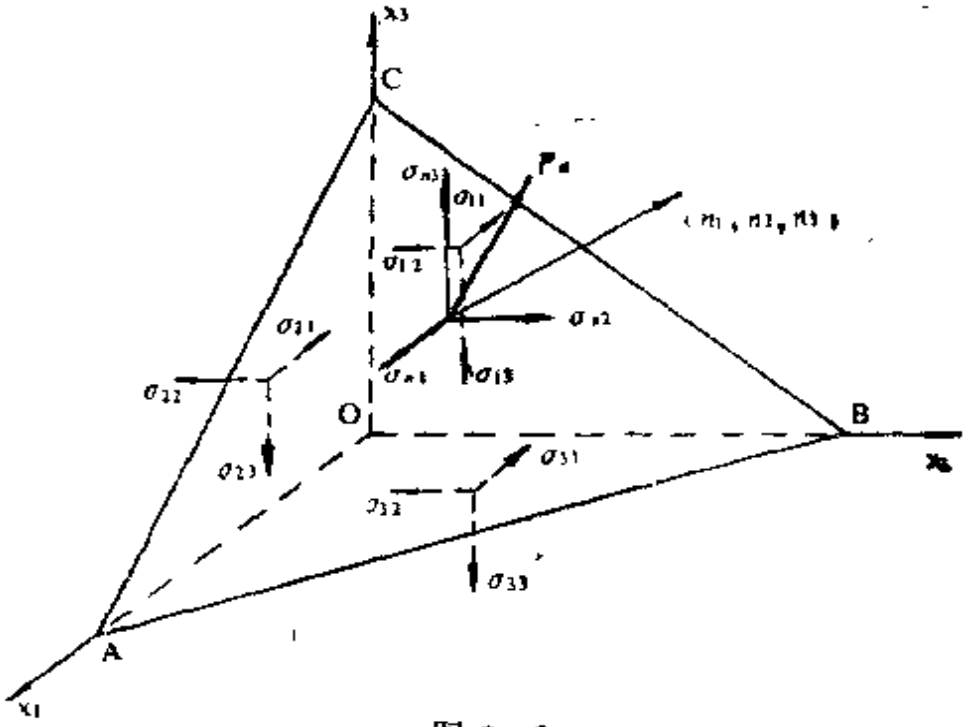


图 2—2

的空间任意点Q重合，在 O 点的极近处选取截面 ABC，并设其为 ds，法线方向为 n，n 的方向余弦为

$$\begin{aligned} n_1 &= \cos\ (\hat{n,i_1}) \\ n_2 &= \cos\ (\hat{n,i_2}) \\ n_3 &= \cos\ (\hat{n,i_3}) \end{aligned} \qquad (2.2)$$

其中 i_1，i_2，i_3 为 x_1，x_2，x_3 轴上的单位矢量。根据解析几何知识可知，图中面积 OBC (ds_1)，OAC (ds_2)，OAB (ds_3) 分别

是ds面在ox_2x_3，ox_1x_3，ox_1x_2面上的投影，即

$$\begin{aligned} ds_1 &= n_1 ds \\ ds_2 &= n_2 ds \\ ds_3 &= n_3 ds, \end{aligned} \tag{2.3}$$

假如在外来作用下，四面微分体ds面上作用有总应力$\boldsymbol{P}_n$，ds_1面上作用有总应力$\boldsymbol{P}_1$，ds_2面上作用有总应力$\boldsymbol{P}_2$，ds_3面上作用有总应力$\boldsymbol{P}_3$（注：$\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$，$\boldsymbol{P}_3$图中未画出，只画出其分量），则因为应力是单位面积上所受的力，所以ds，ds_1，ds_2，ds_3各面上所受的合力分别为$\boldsymbol{P}_n ds$，$\boldsymbol{P}_1 \cdot ds_1$，$\boldsymbol{P}_2 \cdot ds_2$和$\boldsymbol{P}_3 \cdot ds_3$。当四面微分体OABC在外来作用下处于平衡状态时，根据力的平衡条件，有

$$\boldsymbol{P}_n ds - \boldsymbol{P}_1 ds_1 + \boldsymbol{P}_2 ds_2 + \boldsymbol{P}_3 ds_3 = 0 \tag{2.4}$$

如果将$\boldsymbol{P}_n$分解为与x_1、x_2、x_3平行的三个分量σ_{n1}、σ_{n2}、σ_{n3}，将$\boldsymbol{P}_1$分解为σ_{11}、σ_{12}、σ_{13}，$\boldsymbol{P}_2$分解为σ_{21}、σ_{22}、σ_{23}，$\boldsymbol{P}_3$分解为σ_{31}、σ_{32}、σ_{33}，如图2—2所示，则（2.4）式可写成如下分量形式：

$$\begin{aligned} \sigma_{n1} ds &= \sigma_{11} ds_1 + \sigma_{21} ds_2 + \sigma_{31} ds_3 \\ \sigma_{n2} ds &= \sigma_{12} ds_1 + \sigma_{22} ds_2 + \sigma_{32} ds_3 \\ \sigma_{n3} ds &= \sigma_{13} ds_1 + \sigma_{23} ds_2 + \sigma_{33} ds_3 \end{aligned} \tag{2.5}$$

其中各分量中的第一个角标表示所在微分面的外法线方向，第二个角标表示力的作用方向。将$ds_1 = n_1 ds$，$ds_2 = n_2 ds$，$ds_3 = n_3 ds$代入并整理得

$$\begin{aligned} \sigma_{n1} &= \sigma_{11} n_1 + \sigma_{21} n_2 + \sigma_{31} n_3 \\ \sigma_{n2} &= \sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{32} n_3 \\ \sigma_{n3} &= \sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 + \sigma_{33} n_3 \end{aligned} \tag{2.6}$$

利用哑指标规则，（2.6）式可写成

$$\sigma_{ni} = \sigma_{ji} n_j \quad (i,\ j = 1,\ 2,\ 3) \tag{2.7}$$

也可写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix}\sigma_{n1}\\ \sigma_{n2}\\ \sigma_{n3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31}\\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32}\\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1\\ n_2\\ n_3\end{pmatrix} \tag{2.8}$$

式中

$$\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31}\\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32}\\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33}\end{pmatrix} \tag{2.9}$$

即为应力张量。它是与坐标轴平行的三个微分面上的九个分量。由（2.7）或（2.8）式可以看出，若一点的应力张量已知，则可求出任意微分面（外法线方向为n_1，n_2，n_3）上的总应力的三个分量σ_{n1}，σ_{n2}，σ_{n3}。根据解析几何知识可知，总应力之模值为

$$|\boldsymbol{P}_n|=\sqrt{\sigma_{n1}^2+\sigma_{n2}^2+\sigma_{n3}^2} \tag{2.10}$$

总应力之方向为

$$\begin{aligned}n_{p1}&=\sigma_{n1}/|\boldsymbol{P}_n|\\ n_{p2}&=\sigma_{n2}/|\boldsymbol{P}_n|\\ n_{p3}&=\sigma_{n3}/|\boldsymbol{P}_n|\end{aligned} \tag{2.11}$$

由此可见，一点的应力状态，只需九个应力分量便可以完全确定。

如果上述四面微分体不是取在物体内部而是取在物体表面，则可设面元ds为表面元，此时，σ_{n1}、σ_{n2}、σ_{n3}表示作用于该处表面的外力在各坐标轴上的投影。为与物体内部的应力描述加以区别，用$\overline{F}_1$，$\overline{F}_2$、$\overline{F}_3$表示σ_{n1}、σ_{n2}、σ_{n3}，则方程（2.6）式可写成

$$\begin{aligned}\overline{F}_1&=\sigma_{11}n_1+\sigma_{21}n_2+\sigma_{31}n_3\\ \overline{F}_2&=\sigma_{12}n_1+\sigma_{22}n_2+\sigma_{32}n_3\\ \overline{F}_3&=\sigma_{13}n_1+\sigma_{23}n_2+\sigma_{33}n_3\end{aligned} \tag{2.12}$$

（2.12）式表示物体表面上的外力与物体表面内部应力之间的关系。这个关系称之为边界条件。若将其用哑指标表示，则为

$$\overline{F}_i=\sigma_{ji}n_j \tag{2.13}$$

当物体处于平衡状态时，除合外力为零的条件外，还应有合外力矩为零的条件。我们仍将图2—2所示的处于平衡状态的四面微分体作为研究对象。

如图 2—3 所示，设x_3'是通过微分截面 ds 的重心 C 且平行于 x_3 轴的直线。由于点 C 在其它三个面上的投影均与这三个面的重心重合，所以 ds 面的重心 C 至其它各面的垂直距离分别为$dx_1/3$，$dx_2/3$，$dx_3/3$。若以 x_3' 为转轴，则四面微分体各面上的12个分力，除 σ_{12} 与 σ_{21} 外，其它各量要不是与x 轴平行，就是通过x_3'轴。因此，对轴线x_3'的力矩方程应为如下形式：

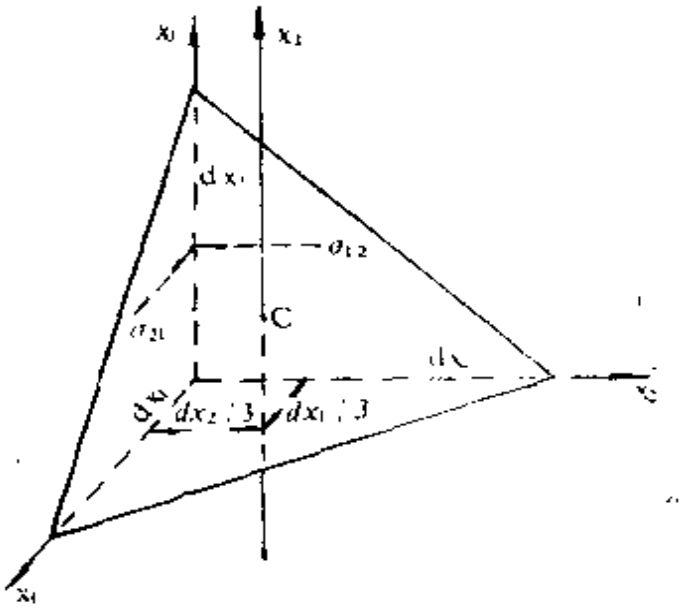


图 2—3

$$\sigma_{21}\cdot\frac{1}{2}dx_1dx_3\cdot\frac{dx_2}{3}-\sigma_{12}\cdot\frac{1}{2}dx_2dx_3\cdot\frac{dx_1}{3}=0$$

由此得

$$\sigma_{12}=\sigma_{21} \tag{2.14}$$

类似地还可导出

$$\begin{aligned}\sigma_{23}&=\sigma_{32}\\ \sigma_{31}&=\sigma_{13}\end{aligned} \tag{2.15}$$

将（2.14）与（2.15）式写成哑指标形式则为

$$\sigma_{ji}=\sigma_{ij}\quad(i\neq j) \tag{2.16}$$

(2.16)式称为剪应力的互易定律。它表明应力张量是对称张量。亦即一点的应力状态，实际上只需要六个应力分量便可确定。

〔例 2—1〕已知地质体中某点的应力分量为$\sigma_{11}=200a$，$\sigma_{22}=0$，$\sigma_{33}=-100a$，$\sigma_{12}=400a$，$\sigma_{23}=0$，$\sigma_{31}=300a$，试求作用在通过此点且平行于方程为$x_1+2x_2+2x_3=6$平面上的总应力。

解　首先由平面方程求平面法向的方向余弦。根据解析几何知识，可得

$$n_1=\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{1}{3}$$

$$n_2=\frac{2}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{2}{3}$$

$$n_3=\frac{2}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{2}{3}$$

再根据（2.6）式，求出总应力分量σ_{*1}，σ_{*2}，σ_{*3}，即

$$\sigma_{*1}=\sigma_{11}n_1+\sigma_{21}n_2+\sigma_{31}n_3$$

$$=200a\cdot\frac{1}{3}+400a\cdot\frac{2}{3}+300a\cdot\frac{2}{3}$$

$$\doteq 533a$$

$$\sigma_{*2}=\sigma_{12}n_1+\sigma_{22}n_2+\sigma_{32}n_3$$

$$\doteq 400a\cdot\frac{1}{3}+0+0$$

$$\doteq 133a$$

$$\sigma_{*3}=\sigma_{13}n_1+\sigma_{23}n_2+\sigma_{33}n_3$$

$$\doteq 33a$$

则

$$|P_*|=\sqrt{\sigma_{*1}^2+\sigma_{*2}^2+\sigma_{*3}^2}\doteq 551a$$

其方向余弦为

$$n_{p1}=\sigma_{*1}/|P_*|=0.967$$

$$n_{p2}=\sigma_{*2}/|P_*|=0.241$$

$$n_{p3}=\sigma_{*3}/|P_*|=0.060$$

如果该点位于物体表面上，则所求得的 P_n 即为该点单位面积上所受的外力，σ_{n1}，σ_{n2}，σ_{n3} 为单位面积上所受外力的分量。

§2—2 正应力 剪应力 主应力

前节所述的总应力 P_n，一般来说，不与所取截面 ds 的法线方向重合（如图2—4）。由§1—2节所述的正应力与剪应力的定义知，P_n 在 ds 面上的法线方向投影（或分量）为该面上的正应力，以 σ_n 表示；P_n 在 ds 面上的切向投影为该面上的剪应力，以 σ_τ 表示。

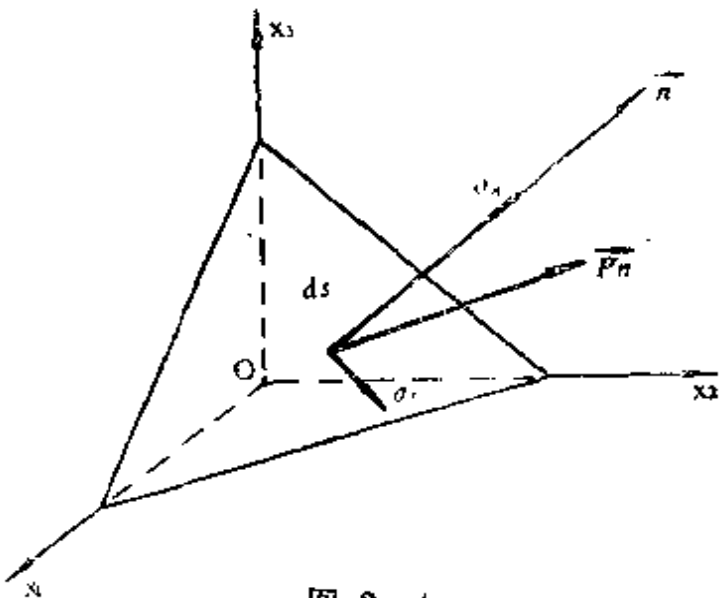


图 2—4

根据矢量运算法则，正应力 σ_n 可以写为

$$\sigma_n = \boldsymbol{P}_n \cdot \boldsymbol{n} \qquad (2.17)$$

因为 P_n 的分量表示式为 σ_{ni}，n 的分量表示式为 n_i，所以 $P_n \cdot n$ 可以用 $\sigma_{ni} n_i$ 来代换，即

$$\sigma_n = \sigma_{ni} n_i \qquad (2.18)$$

将（2.7）式代入得

$$\sigma_n = \sigma_{ij} n_j n_i \qquad (2.19)$$

此式的展开式为

$$\sigma_n = \sigma_{11} n_1^2 + \sigma_{22} n_2^2 + \sigma_{33} n_3^2 + 2\sigma_{12} n_1 n_2 + 2\sigma_{23} n_2 n_3 + 2\sigma_{31} n_1 n_3 \qquad (2.20)'$$

（2.19）或（2.20）式即为在三维空间中给定某点应力张量 σ_{ij} 时过该点任意微分截面 ds 上的正应力的表示式。

若将其写为矩阵形式，则为

$$\sigma_n = [n_1 n_2 n_3]\begin{Bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31}\\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32}\\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}n_1\\ n_2\\ n_3\end{Bmatrix} \tag{2.21}$$

同样，对于剪应力来说，根据矢量运算法则，有

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau = \boldsymbol{P}_n - \boldsymbol{\sigma}_n \tag{2.22}$$

因为$\boldsymbol{\sigma}_n$的大小为σ_n，方向为n，所以$\boldsymbol{\sigma}_n$可以用$\sigma_n \cdot n$表示，代入上式，可得

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau = \boldsymbol{P}_n - \sigma_n \cdot n \tag{2.23}$$

如果用$\sigma_{\tau i}$表示$\boldsymbol{\sigma}_\tau$在各坐标轴上的分量，则因为$\boldsymbol{P}_n$的分量为σ_{ni}，n的分量为n_i，所以有

$$\sigma_{\tau i} = \sigma_{ni} - \sigma_n \cdot n_i \tag{2.24}$$

根据哑指标规则，（2.24）式可展开成如下形式：

$$\begin{aligned}\sigma_{\tau 1} &= \sigma_{n1} - \sigma_n \cdot n_1\\ \sigma_{\tau 2} &= \sigma_{n2} - \sigma_n \cdot n_2\\ \sigma_{\tau 3} &= \sigma_{n3} - \sigma_n \cdot n_3\end{aligned} \tag{2.25}$$

（2.25）式即为ds面上的剪应力在各坐标轴上的分量表示式，式中σ_{n1}，σ_{n2}，σ_{n3}，σ_n分别由（2.6）与（2.20）式给出。显然，ds面上的剪应力的量值应为

$$\sigma_\tau = \sqrt{\sigma_{\tau 1}^2 + \sigma_{\tau 2}^2 + \sigma_{\tau 3}^2} \tag{2.26}$$

而方向为

$$\begin{aligned}n_{\tau 1} &= \sigma_{\tau 1}/\sigma_\tau\\ n_{\tau 2} &= \sigma_{\tau 2}/\sigma_\tau\\ n_{\tau 3} &= \sigma_{\tau 3}/\sigma_\tau\end{aligned} \tag{2.27}$$

求解剪应力的另一种方法，是根据图2—4中P_n，σ_n，σ_τ之间的三角函数关系，直接写出剪应力的量值表示式

$$\sigma_\tau = \sqrt{P_n^2 - \sigma_n^2} \tag{2.28}$$

该式在事先求得P_n与σ_n的情况下，用起来是十分方便的。

下面我们讨论主应力。由前面的讨论可知，对空间某点来说，微分截面ds可有无穷多的取向。如果适当选取微分截面，使

该面上只作用有正应力而无剪应力，则此时该面上的正应力就是总应力。我们把这样特殊取向的截面称之为主微分面，而把主微分面上的总应力称之为主应力（用σ表示），如图2—5所示。

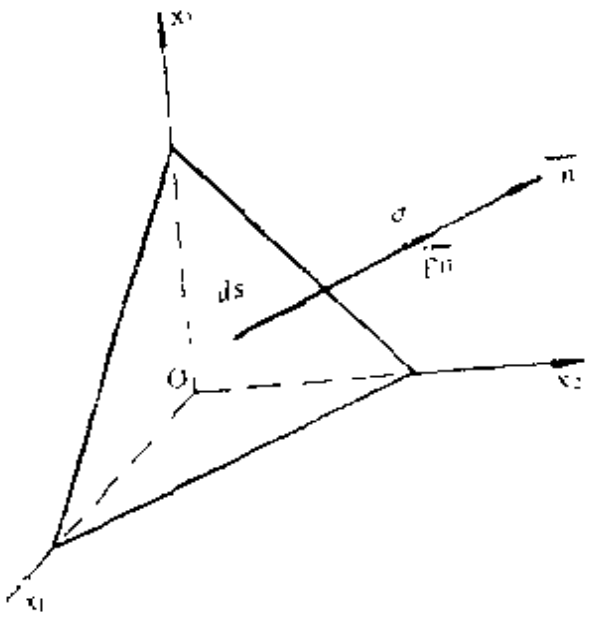


图 2—5

这样一来，主应力σ在正交坐标系x_i各轴上的投影$\sigma \cdot n_i$，就应该等于主微分面上总应力在各坐标轴上的分量σ_{ji}，即

$$\sigma \cdot n_i - \sigma_{ji} = 0 \tag{2.29}$$

由（2.7）式知，$\sigma_{ji} = \sigma_{ij} n_j$，因此（2.29）式也可写成

$$\sigma \cdot n_i - \sigma_{ij} n_j = 0 \tag{2.30}$$

将其按哑指标规则展开，有

$$\begin{aligned}
(\sigma_{11} - \sigma) n_1 + \sigma_{21} n_2 + \sigma_{31} n_3 &= 0 \\
\sigma_{12} n_1 + (\sigma_{22} - \sigma) n_2 + \sigma_{32} n_3 &= 0 \\
\sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 + (\sigma_{33} - \sigma) n_3 &= 0
\end{aligned} \tag{2.31}$$

式中n_1，n_2，n_3之间存在如下关系：

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \tag{2.32}$$

由（2.31）与（2.32）式可知，若一点的应力张量σ_{ij}为已知，则可由此二式求出该点的主应力σ及主方向（主应力的方向）n_1，n_2，n_3。这里需要注意的是，齐次方程（2.31）不能有$n_1 = n_2 = n_3 = 0$的解答，因为该解答与（2.32）式相抵触。要使方程组（2.31）有别的解答，则必须是这方程组的系数行列式等于零，即

$$\begin{vmatrix}
(\sigma_{11} - \sigma) & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\
\sigma_{12} & (\sigma_{22} - \sigma) & \sigma_{32} \\
\sigma_{13} & \sigma_{23} & (\sigma_{33} - \sigma)
\end{vmatrix} = 0 \tag{2.33}$$

将行列式展开并整理得

$$\sigma^3 - J_1\sigma^2 + J_2\sigma - J_3 = 0 \tag{2.34}$$

其中

$$J_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{33} & \sigma_{31} \\ \sigma_{13} & \sigma_{11} \end{vmatrix}$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \tag{2.35}$$

三次方程（2.34）式即为在已知某点应力张量的情况下，求解该点主应力的特征方程式。对于弹性力学问题，可以证明①（2.34）式有三个实根，通常以 σ_1，σ_2，σ_3 表示。σ_1，σ_2，σ_3 就是所要求解的主应力。表示（2.34）式系数 J_1，J_2，J_3 的（2.35）式分别称为应力张量的第一、第二、第三不变量。

若将所求得的主应力值 σ_1 代入（2.31）式，并考虑到 $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$，则可求出对应 σ_1 的方向余弦（或主方向）n_1，n_2，n_3。同样，将 σ_2，σ_3 代入（2.31）式，可求得对应主应力 σ_2，σ_3 的方向余弦（或主方向）n_1'，n_2'，n_3' 和 n_1''，n_2''，n_3''。

σ_1，σ_2，σ_3 所对应的方向余弦之间存在着一个特殊关系，即它们彼此是相互垂直的。下面我们对此给予证明。

设 σ_1 的方向余弦为 n_1、n_2、n_3，σ_2 的方向余弦为 n_1'、n_2'、n_3'。将其代入（2.31）式，有

$$\begin{aligned}
(\sigma_{11} - \sigma_1)n_1 + \sigma_{21}n_2 + \sigma_{31}n_3 &= 0 \\
\sigma_{12}n_1 + (\sigma_{22} - \sigma_1)n_2 + \sigma_{32}n_3 &= 0 \\
\sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 + (\sigma_{33} - \sigma_1)n_3 &= 0
\end{aligned} \tag{2.36}$$

$$\begin{aligned}
(\sigma_{11} - \sigma_2)n_1' + \sigma_{21}n_2' + \sigma_{31}n_3' &= 0 \\
\sigma_{12}n_1' + (\sigma_{22} - \sigma_2)n_2' + \sigma_{32}n_3' &= 0 \\
\sigma_{13}n_1' + \sigma_{23}n_2' + (\sigma_{33} - \sigma_2)n_3' &= 0
\end{aligned} \tag{2.37}$$

① 可参阅王龙甫《弹性理论》一书。

若对前三式即对应主应力σ_1的式子分别乘以n_1'，n_2'，n_3'，而对后三式即对应σ_2的式子分别乘以$-n_1$，$-n_2$，$-n_3$，则有

$$\begin{aligned}
&(\sigma_{11}-\sigma_1)n_1n_1'+\sigma_{21}n_2n_1'+\sigma_{31}n_3n_1'=0\\
&\sigma_{12}n_1n_2'+(\sigma_{22}-\sigma_1)n_2n_2'+\sigma_{32}n_3n_2'=0\\
&\sigma_{13}n_1n_3'+\sigma_{23}n_2n_3'+(\sigma_{33}-\sigma_1)n_3n_3'=0\\
&-(\sigma_{11}-\sigma_2)n_1n_1-\sigma_{21}n_2'n_1-\sigma_{31}n_3'n_1=0\\
&-\sigma_{12}n_1'n_2-(\sigma_{22}-\sigma_2)n_2'n_2-\sigma_{32}n_3n_2=0\\
&-\sigma_{13}n_1'n_3-\sigma_{23}n_2'n_3-(\sigma_{33}-\sigma_2)n_3'n_3=0
\end{aligned}\tag{2.38}$$

将此六式相加，可得

$$(\sigma_2-\sigma_1)(n_1n_1'+n_2n_2'+n_3n_3')=0\tag{2.39}$$

一般来说，σ_1与σ_2的值不一定相等，所以要保持等式成立，必有

$$n_1n_1'+n_2n_2'+n_3n_3'=0\tag{2.40}$$

由解析几何知识可知，（2.40）式是主应力σ_1与σ_2的主方向相互垂直的条件，或者说σ_1与σ_2作用的主微分面相互垂直。同理，也可证明$\sigma_2\perp\sigma_3$，$\sigma_3\perp\sigma_1$。这是$\sigma_1\neq\sigma_2\neq\sigma_3$的情况，如果$\sigma_1=\sigma_2\neq\sigma_3$，则由（2.39）式可知，$\sigma_1\perp\sigma_3$，$\sigma_2\perp\sigma_3$，但$\sigma_1$与$\sigma_2$（二值相等）并不一定垂直，它们之间的夹角可以是任意数值。因此，垂直σ_3的任意方向都可以是主应力σ_1，σ_2的方向。如果$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$，则很容易看出，空间任意方向都可以是主方向。

如果选用应力主轴为正交坐标系的三个坐标轴，则因为此时应力张量中的剪应力分量均为零，正应力分量即为三个主应力值，因此应力张量成为

$$\begin{pmatrix}\sigma_1 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3\end{pmatrix}$$

相应地，应力张量的不变量（2.35）式变为

$$\begin{aligned}
J_1&=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3\\
J_2&=\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1\\
J_3&=\sigma_1\sigma_2\sigma_3
\end{aligned}\tag{2.41}$$

〔例 2—2〕已知地质体内某点的应力张量为 $\sigma_{11}=50a$，$\sigma_{22}=80a$，$\sigma_{33}=-70a$，$\sigma_{12}=-20a$，$\sigma_{23}=60a$，$\sigma_{31}=0$。计算该点的主应力及主方向，并根据主应力与主方向上的磁化强度的改变关系 $\Delta J_1=\gamma J_1(\sigma_2/2+\sigma_3/2-\sigma_1)$，$\Delta J_2=\gamma J_2(\sigma_3/2+\sigma_1/2-\sigma_2)$，$\Delta J_3=\gamma J_3(\sigma_1/2+\sigma_2/2-\sigma_3)$求解三个主方向上的磁化强度的改变量$\Delta J_i$。其中 J_1，J_2，J_3 分别为三个主方向上无外载荷时的磁化强度，γ为应力感应系数。

解 为求主应力，首先由应力分量求出应力张量的不变量，即

$$J_1=\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}=60a$$

$$J_2=\begin{vmatrix}\sigma_{11}&\sigma_{12}\\ \sigma_{21}&\sigma_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\sigma_{22}&\sigma_{23}\\ \sigma_{32}&\sigma_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\sigma_{33}&\sigma_{31}\\ \sigma_{13}&\sigma_{11}\end{vmatrix}$$

$$=-9100a^2$$

$$J_3=\begin{vmatrix}\sigma_{11}&\sigma_{21}&\sigma_{31}\\ \sigma_{12}&\sigma_{22}&\sigma_{32}\\ \sigma_{13}&\sigma_{23}&\sigma_{33}\end{vmatrix}=-432\,000a^3$$

将其代入（2.34）式，得

$$\sigma^3-60a\sigma^2-9\,100a^2\sigma+432\,000a^3=0$$

为计算方便，引进$x=\sigma/100a$，则上式化为

$$x^3-0.6x^2-0.91x+0.432=0$$

再对其进行变量替换，用$x=y+0.6/3=y+0.2$消去二次项，得

$$y^3-1.03y+0.234=0$$

上式的判别式为

$$\Delta=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3$$

$$=\left(\frac{0.234}{2}\right)^2+\left(-\frac{1.03}{3}\right)^3=-0.0267<0$$

故应有三个实根：

$$y_1 = 2\sqrt[3]{r}\cos\theta$$
$$y_2 = 2\sqrt[3]{r}\cos(\theta + 120°)$$
$$y_3 = 2\sqrt[3]{r}\cos(\theta + 240°)$$

其中，$r = \sqrt{-(p/3)^3} = 0.201$，$\theta = \frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{q}{2r}\right) = 41°52'$。

将r，θ代入y_1，y_2，y_3得

$$y_1 = 0.873$$
$$y_2 = -1.11$$
$$y_3 = 0.241$$

由此得 $x_1 = 1.073$，$x_2 = -0.914$，$x_3 = 0.441$，如令 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$，则

$$\sigma_1 = 107.3a$$
$$\sigma_2 = 44.1a$$
$$\sigma_3 = -91.4a$$

这便是所要求的主应力，将σ_1代入（2.31）中前二式，则有

$$(50a - 107.3a)n_1 - 20an_2 = 0$$
$$-20an_1 + (80a - 107.3a)n_2 + 60an_3 = 0$$

因为

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

联立求解得

$$n_1 = 0.314$$
$$n_2 = -0.900$$
$$n_3 = 0.303$$

这便是对应主应力σ_1的主方向。同理，可得对应σ_2及σ_3的主方向：

$$n_1' = 0.948 \qquad n_1'' = -0.047$$
$$n_2' = 0.282 \qquad n_2'' = 0.337$$
$$n_3' = 0.146 \qquad n_3'' = -0.940$$

再将上述结果代入到磁化强度改变量的表示式中，可分别求

得σ_1，σ_2，σ_3方向上磁化强度的改变量为

$$\Delta J_1 = -130.9a\gamma J_1$$
$$\Delta J_2 = -36.1a\gamma J_2$$
$$\Delta J_3 = 167.1a\gamma J_3$$

主应力及主方向是一个极为重要的概念。在地震预测问题中，求解地应力主要就是求解主应力，并根据主应力求解最大正应力与最大剪应力，以判定地质体是否会产生破裂与滑移。同时，地应力的改变还会引起地质体内部磁化强度（如本例）、电导率以及弹性波的传播速度等的改变，它是间接测量地应力的理论根据。

§2—3 最大正应力与最大剪应力

一、最大正应力

根据公式（2.20），任一截斜面上的正应力为

$$\sigma_n = \sigma_{11}n_1^2 + \sigma_{22}n_2^2 + \sigma_{33}n_3^2 + 2\sigma_{12}n_1n_2 + 2\sigma_{23}n_2n_3 + 2\sigma_{31}n_1n_3$$

为求解最大正应力，我们设正交坐标系中的各轴分别与该点的三个主方向（相互垂直）相互重合。由于主微分面上只有正应力而无剪应力，所以，此时应力张量中的剪应力分量均为零，即

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma_{23} = \sigma_{32} = \sigma_{31} = \sigma_{13} = 0$$

又因为主微分面上的正应力即为主应力，所以有

$$\sigma_{11} = \sigma_1,\quad \sigma_{22} = \sigma_2,\quad \sigma_{33} = \sigma_3$$

将其代入正应力的表示式中，得

$$\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \qquad (2.42)$$

这是以应力主轴（主方向上的坐标轴）为坐标轴时，任意截面上的正应力的表示式。

利用关系式$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$，消去（2.42）式中的三个方向余弦之一，例如消去n_1，得

$$\sigma_n = (1-n_2^2-n_3^2)\sigma_1 + n_2^2\sigma_2 + n_3^2\sigma_3 \qquad (2.43)$$

为求正应力极值所对应的方向，可令

$$\frac{\partial\sigma_n}{\partial n_2} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_n}{\partial n_3} = 0$$

将σ_n代入得

$$-2\sigma_1 n_2 + 2\sigma_2 n_2 = 0$$
$$-2\sigma_1 n_3 + 2\sigma_3 n_3 = 0$$

当$\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$时，必有

$$n_2 = 0, \quad n_3 = 0$$

故

$$n_1 = \pm 1$$

再将$n_1 = \pm 1$，$n_2 = n_3 = 0$代入（2.42）式，可得

$$\sigma_n = \sigma_1 \qquad (2.44)$$

即正应力的一个极值等于σ_1。用同样的方法，可求得正应力σ_n的另外两个极值分别为σ_2与σ_3。也就是说，对应某点的应力状态，正应力有三个极值，而这三个极值恰是该点在给定外载情况下的三个主应力。主应力中量值最大的称为最大正应力。例如上节例2—2中，考察点的最大正应力为$\sigma_1 = 107.3a$。

二、最大剪应力

与讨论最大正应力相仿，设正交坐标系的各轴分别与三个主方向重合。此时，$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma_{23} = \sigma_{32} = \sigma_{31} = \sigma_{13} = 0$，$\sigma_{11} = \sigma_1$，$\sigma_{22} = \sigma_2$，$\sigma_{33} = \sigma_3$。将其代入总应力的表示式

$$P_n = \sqrt{\sigma_{n1}^2 + \sigma_{n2}^2 + \sigma_{n3}^2}$$

中，得

$$P_n = \sqrt{\sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2}$$

因为此时的正应力为

$$\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2$$

所以，由（2.28）式可知

$$\sigma_\tau^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - (\sigma_1 n^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2 \qquad (2.45)$$

同样，用关系式$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$消去该式中的$n_1$，可得

$$\sigma_\tau^2 = (1 - n_2^2 - n_3^2)\sigma_1^2 + n_2^2\sigma_2^2 + n_3^2\sigma_3^2 - [(1 - n_2^2 - n_3^2)\sigma_1 + n_2^2\sigma_2 + n_3^2\sigma_3]^2 \qquad (2.46)$$

为求剪应力极值所对应的方向，令

$$\frac{\partial \sigma_\tau^2}{\partial n_2} = 0 \qquad \frac{\partial \sigma_\tau^2}{\partial n_3} = 0$$

将σ_τ代入并整理得

$$n_2(\sigma_2 - \sigma_1)\left[(\sigma_2 - \sigma_1)n_2^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)n_3^2 - \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1)\right] = 0$$

$$n_3(\sigma_3 - \sigma_1)\left[(\sigma_2 - \sigma_1)n_2^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)n_3^2 - \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1)\right] = 0 \qquad (2.47)$$

考虑到$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$，则上述两个方程的解为

$$(n_2 = 0,\ n_3 = 0,\ n_1 = \pm 1)$$

$$\left(n_2 = 0,\ n_3 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ n_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad (2.48)$$

$$\left(n_3 = 0,\ n_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ n_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

将这三组解分别代入（2.45）式中，可得对应此三个方向的剪应力极值为

$$\left[0,\ \pm\frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1),\ \pm\frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1)\right] \qquad (2.49)$$

如果不是消去n_1而是消去n_2，则对应剪应力极值方向的方程为

$$n_1(\sigma_1 - \sigma_2)\left[(\sigma_1 - \sigma_2)n_1^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)n_3^2 - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\right] = 0$$

$$n_3(\sigma_3 - \sigma_2)\left[(\sigma_1 - \sigma_2)n_1^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)n_3^2 - \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_2)\right] = 0 \qquad (2.50)$$

此方程满足关系式$n_1^2+n_2^2+n_3^2=1$的解为

$$(n_1=0,\ n_3=0,\ n_2=\pm 1)$$

$$\left(n_3=0,\ n_1=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ n_2=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \tag{2.51}$$

$$\left(n_1=0,\ n_3=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ n_2=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

对应的剪应力极值为

$$\left[0,\ \pm\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2),\ \pm\frac{1}{2}(\sigma_3-\sigma_2)\right] \tag{2.52}$$

同样，若是消去n_3，则有

$$n_1(\sigma_1-\sigma_3)\left[(\sigma_1-\sigma_3)n_1^2+(\sigma_2-\sigma_3)n_2^2-\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3)\right]=0$$

$$n_2(\sigma_2-\sigma_3)\left[(\sigma_1-\sigma_3)n_1^2+(\sigma_2-\sigma_3)n_2^2-\frac{1}{2}(\sigma_2-\sigma_3)\right]=0 \tag{2.53}$$

此方程满足$n_1^2+n_2^2+n_3^2=1$的解为

$$(n_1=0,\ n_2=0,\ n_3=\pm 1)$$

$$\left(n_2=0,\ n_1=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ n_3=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \tag{2.54}$$

$$\left(n_1=0,\ n_2=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ n_3=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

对应的剪应力极值为

$$\left[0,\ \pm\frac{1}{2}(\sigma_3-\sigma_1),\ \pm\frac{1}{2}(\sigma_2-\sigma_3)\right] \tag{2.55}$$

上述结论可综合列于表2—1中。由表2—1可见，前三组解对应于三个主应力方向，相应的剪应力为零，为剪应力绝对值的极小值。后三组解对应与主应力成45°角的三个截面，最大剪应力就是这三个面上主应力之差最大的那个面上的数值。例如在上节

表 2—1

	一	二	三	四	五	六
n_1	0	0	±1	0	$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$
n_2	0	±1	0	$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$
n_3	±1	0	0	$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
$\sigma_{1,2,3}$ $\sigma_{1,3,2}$	0	0	0	$\pm\frac{1}{2}(\sigma_2-\sigma_3)$	$\pm\frac{1}{2}(\sigma_3-\sigma_1)$	$\pm\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)$

例 2—2 中，最大剪应力就应该是 $\sigma_{max}=\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3)=69.4a$，而最大剪应力的面元的法线方向应该是与 σ_2 垂直且与 σ_1、σ_3 成 45° 角的方向〔如图2—6(a)〕。如果最大剪应力的量值为 $\frac{1}{2}|\sigma_1-\sigma_2|$，则最大剪应力面元的法线方向如图2—6（b）所示。如果最

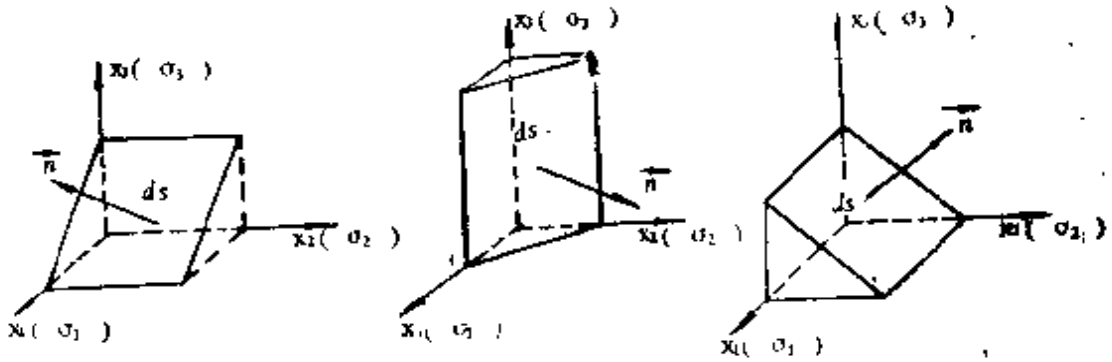


图 2—6

大剪应力的量值为 $\frac{1}{2}|\sigma_2-\sigma_3|$，则其面元的法线方向如图 2—6（c）所示。

上述关于剪应力极值的讨论是当 $\sigma_1\neq\sigma_2\neq\sigma_3$ 的一般情况。

如果主应力值中有两个相等，例如$\sigma_1=\sigma_3\neq\sigma_2$，则可由（2.47）式中的前式或（2.53）式中的后式求得$n_2=0$或$n_2=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$，当$n_2=0$时，代入（2.45）式得$\sigma_\tau=0$。当$n_2=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$时，得

$$\sigma_\tau=\frac{1}{2}(\sigma_2-\sigma_3)$$

所以最大剪应力对应的面元的法线方向为一与x_2轴成45°角的圆锥面，如图2—7所示。

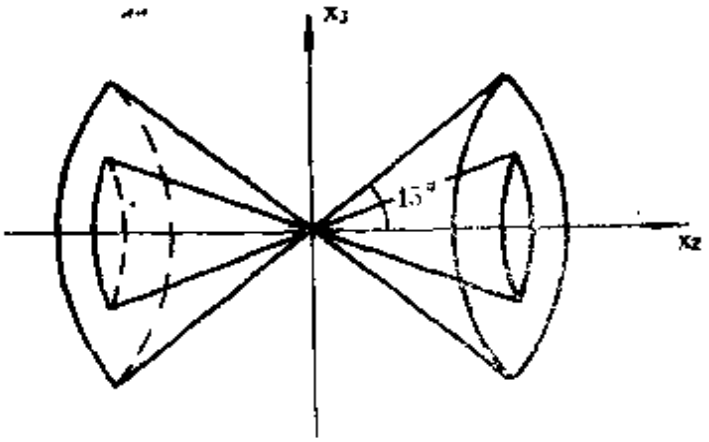


图 2—7

如果三个主应力的量值均相等，则由（2.45）式知，剪应力在各个方向上均为零。

〔例 2—3〕讨论平面应力作用下岩石的剪破裂问题。

解 在平面应力作用下岩石是否会发生剪破裂，主要看岩石所受的剪应力是否会超过其剪破裂强度。因为在同一外载荷的情况下不同截斜面上所受的剪应力值大小不同，所以岩石应该在最大剪应力的方向上首先产生断裂或滑移。如前所述，断裂面的法线方向应与主应力轴成45°角。但事实上并非如此。由于在断裂面上除剪应力σ_τ的作用外，还作用着正应力σ_n。若断裂面上内摩擦系数为μ，则在断裂面上将作用着内摩擦力$\mu\cdot\sigma_n$，此摩擦力阻滞断裂面两侧的相对滑移，结果使断裂面的方向发生改变。这就是说断裂面的方向决定于断裂面上的剪应力与内摩擦力双重因

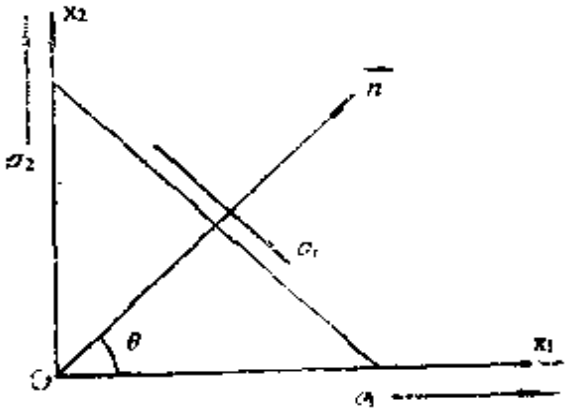


图 2—8

素。下面我们从数值方面进行讨论。

为方便起见，设坐标轴 x_1、x_2 与平面上的主应力 σ_1、σ_2 重合，此时应力分量成为 $\sigma_{11}=\sigma_1$，$\sigma_{22}=\sigma_2$，$\sigma_{12}=\sigma_{21}=0$。同时设断裂面的法线方向与 x_1 轴之间的夹角为 θ（如图 2—8），则由（2.45）式知

$$\begin{aligned}\sigma_\tau^2 &= n_1^2\sigma_1^2+n_2^2\sigma_2^2-(n_1^2\sigma_1+n_2^2\sigma_2)^2\\ &=\cos^2\theta\sigma_1^2+\sin^2\theta\sigma_2^2-(\cos^2\theta\sigma_1+\sin^2\theta\sigma_2)^2\end{aligned}$$

整理后得

$$\sigma_\tau=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\sin2\theta$$

而对正应力来说，由（2.20）式知

$$\sigma_n=\sigma_1n_1^2+\sigma_2n_2^2=\sigma_1\cos^2\theta+\sigma_2\sin^2\theta$$

当σ_n为压应力时，内摩擦力阻滞断裂面两侧的相对滑移。因此，欲使岩石产生剪破裂，必须保证该面上的剪应力与内摩擦力之差大于岩石的剪破裂强度。即

$$\sigma_\tau-\mu\sigma_n>\text{剪破裂强度}$$

如果截面上的正应力为拉应力，则因为拉应力与压应力符号相反，所以对应拉应力来说，上式变为

$$\sigma_\tau+\mu\sigma_n>\text{剪破裂强度}$$

实验指出：当截面上的正应力为拉应力时，截面上的剪破裂比受压应力时易于发生，而且岩石在一个方向上首先产生破裂或滑移，主要看该方向上岩石所受的剪应力与该方向上由正（拉）应力所产生的摩擦力之和 $\sigma_\tau+\mu\sigma_n$ 是否最大。该方向可由下式给出：

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(\sigma_\tau+\mu\sigma_n)=0$$

将σ_τ，σ_n代入得

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\sin2\theta+\mu(\sigma_1\cos^2\theta+\sigma_2\sin^2\theta)\right]$$

$$= (\sigma_1 - \sigma_2)\cos 2\theta - \mu(\sigma_1 - \sigma_2)\sin 2\theta$$
$$= 0$$

于是有

$$\mathrm{tg}2\theta = \frac{1}{\mu}$$

此式即为岩石力学中的库仑－纳维叶公式。它指出了断裂面的方向与内摩擦系数之间的关系。当内摩擦系数趋于零时，$\theta \to \frac{\pi}{4}$。可见，这与前面不考虑内摩擦力时的结果一致。

§2—4 运动方程 平衡方程

前面讲述了静力平衡条件下总应力、正应力、剪应力、主应力以及最大正应力、最大剪应力的求解方法，这里面没有涉及到物体的运动问题。事实上，当物体所受的合外力不为零时，物体将沿合外力的方向产生加速度。连接合外力与加速度之间关系的是牛顿第二定律。下面我们就从牛顿第二定律入手讨论物体在外力作用下的运动方程。

设想在弹性介质中，取任意一闭合面S，S面内包围的体积为V。如果V内单位体积的介质受到的体力（如重力等）为ρf_i，其中ρ为介质密度，f_i为单位质量的介质上所受到的外力，则V内介质所受的总的体力为$\int_V \rho f_i dV$。除体力外，闭合面内的介质还将受面力的作用。设在闭合曲面上的任意点选取一面元ds，如果ds上的总应力（单位面积上的力）分量为σ_{ji}，则ds面上外介质对内介质的作用力就应该是$\sigma_{ji} \cdot ds$。而整个闭曲面上外介质对内介质的作用力为$\oint_S \sigma_{ji} ds$。因此，闭合面内的介质所受的合力为$\oint_S \sigma_{ji} ds + \int_V \rho f_i dV$。如果介质内各质点之间的相对位移忽略不

计（根据小变形假设），且以u_i表示S面内某点的位移矢量，则根据牛顿第二定律，有

$$\oint_s \sigma_{ji} ds + \int_V \rho f_i dV = \int_V \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} dV \tag{2.56}$$

将$\sigma_{ji} = \sigma_{ij} n_j$代入，得

$$\oint_s \sigma_{ij} n_j ds + \int_V \rho f_i dV = \int_V \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} dV$$

利用第一章§ 1—1中所讲的高斯定理

$$\oint_s A_i n_i ds = \int_V \frac{\partial A_i}{\partial x_i} dV$$

上式可化为

$$\int_V \left(\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho f_i \right) dV = \int_V \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} dV$$

由于S面是任意选取的，可令它收缩为一点，此时有

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \tag{2.57}$$

此式即为所讨论的运动方程的微分表示式，简称运动微分方程。它揭示了物体内某点力与加速度之间的关系。将其按哑指标规则展开，则有

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + \rho f_1 = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \\
&\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + \rho f_2 = \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \\
&\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho f_3 = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{2.58}$$

在（2.57）式中，如果位移场不随时间改变，即$\partial^2 u_i / \partial t^2 = 0$时，则（2.57）式变为

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho f_i = 0 \tag{2.59}$$

将其展开，则为

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3}+\rho f_1=0\\
&\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3}+\rho f_2=0 \qquad (2.60)\\
&\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2}+\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3}+\rho f_3=0
\end{aligned}$$

(2.59) 或 (2.60) 式称为平衡微分方程。显然，它是运动方程的一个特例。

〔例 2—4〕 如图 2—9 所示的矩形截面梁处在静力平衡状态，按材料力学求得其应力分量为 $\sigma_{11}=-2q_0x_1^3x_2/lh^2$，$\sigma_{12}=-3q_0x_1^2(h^2-4x_2^2)/4h^3l$。试求出$\sigma_{22}$的表示式（设体力为零）。

解 首先观察按材料力学求得的应力分量在静力平衡条件下是否满足弹性力学中的平衡方程。为此，将 σ_{11}，σ_{12} 代入 (2.60) 中的第一式，由于σ_{11}，σ_{12}均与x_3无关，因此可认为与x_3相关的应力分量 $\sigma_{13}=\sigma_{23}=\sigma_{33}=$常量（或0）。于是有

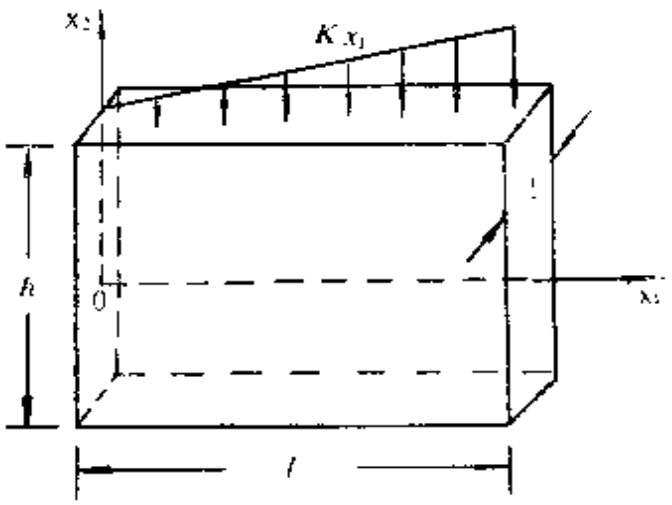


图 2—9

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2}=-6q_0\frac{x_1^2x_2}{lh^3}+6q_0\frac{x_1^2x_2}{lh^3}=0$$

即此应力分量满足平衡方程。为求 σ_{22} 的表达式，再将 σ_{12} 代入 (2.60) 中的第二式，得

$$-\frac{3}{2}\frac{q_0x_1}{h^3l}(h^2-4x_2^2)+\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2}=0$$

因此有

$$\sigma_{22}=\int\frac{3}{2}\cdot\frac{q_0x_1}{h^3l}(h^2-4x_2^2)dx_2+C$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{q_0x_1x_2}{h^3l}\left(h^2-\frac{4}{3}x_2^2\right)+C$$

利用边界条件

$$\sigma_{22}\big|_{x_2=h/2}=kx_1$$

确定常数 C，得

$$kx_1=\frac{3}{2}\cdot\frac{q_0x_1\cdot h/2}{h^3l}(h^2-h^2/3)+C$$

$$=\frac{q_0x_1}{2l}+C$$

所以

$$C=kx_1-q_0x_1/2l$$

再将 C 代回σ_{22}的表示式中，得

$$\sigma_{22}=\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{q_0x_2}{h^3l}\left(h^2-\frac{4}{3}x_2^2\right)+\left(k-\frac{q_0}{2l}\right)\right]x_1$$

这便是正应力分量σ_{22}的表示式。

§2—5 应力张量的坐标变换公式

如果在正交坐标系x_i中一点的应力张量σ_{ij}为已知，当坐标轴旋转任意角度后，如何用旋转后坐标系表达原坐标系中的应力张量σ_{ij}所对应的应力状态，这便是应力张量的坐标变换。换句话说，所谓应力张量的坐标变换，就是在不同坐标系中，描述同一应力状态时应力张量不同表示之间的变换关系。

下面，我们来推导应力张量的坐标变换公式。为方便起见，设所考察的空间任意点Q与原坐标系x_i的原点O及新坐标系x_i'的原点O′重合（如图2—10），同时设新坐标系x_i'的各轴对原坐

标系x，各轴的方向余弦如表2—2所示。

表 2—2

	x_1	x_2	x_3
x_1'	α_{11}	α_{12}	α_{13}
x_2'	α_{21}	α_{22}	α_{23}
x_3'	α_{31}	α_{32}	α_{33}

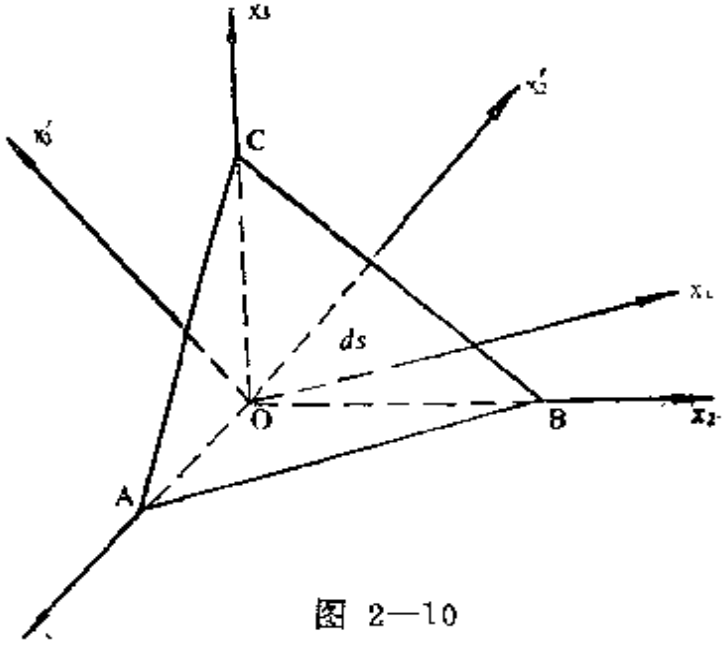


图 2—10

这样一来，新坐标系x_i'可视为原坐标系x，旋转所致，且新坐标系的各轴分别表示原坐标系中的三个方向。假设我们以这三个方向为外法向，在O点的极近处截取三个微分截面，则此三个微分截面的外法向分别为$(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13})$，$(\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23})$，$(\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33})$。图中$ds$面是以新坐标系$x_1'$轴为外法线方向截取的微分截面。根据本章§2—1所讲的任意截斜面上总应力的分量公式（2.6）式可知，以$(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13})$为外法线方向的微分截面上的总应力分量为

$$\sigma_{*1} = \sigma_{11}\alpha_{11} + \sigma_{21}\alpha_{12} + \sigma_{31}\alpha_{13}$$

$$\sigma_{*2} = \sigma_{12}\alpha_{11} + \sigma_{22}\alpha_{12} + \sigma_{31}\alpha_{13}$$

$$\sigma_{*3} = \sigma_{13}\alpha_{11} + \sigma_{23}\alpha_{12} + \sigma_{33}\alpha_{13}$$

这是以x_1'轴为外法线方向的截面上的总应力在原坐标系x_1、x_2、x_3轴上的分量。因为x_1'，x_2'，x_3'轴相互垂直，所以x_2'，x_3'一定在微分截面ds上。故此，若将σ_{*1}，σ_{*2}，σ_{*3}投影在新坐标轴x_1'，x_2'，x_3'上，便得以x_1'轴为外法线方向的截面上的三个垂直分量σ_{11}'，σ_{12}'，σ_{13}'，即

$$\sigma_{11}' = \sigma_{*1}\alpha_{11} + \sigma_{*2}\alpha_{12} + \sigma_{*3}\alpha_{13}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sigma_{11}\alpha_{11}^2 + \sigma_{21}\alpha_{11}\alpha_{12} + \sigma_{31}\alpha_{11}\alpha_{13} \\
&\quad + \sigma_{12}\alpha_{11}\alpha_{12} + \sigma_{22}\alpha_{12}^2 + \sigma_{32}\alpha_{13}\alpha_{12} \\
&\quad + \sigma_{13}\alpha_{11}\alpha_{13} + \sigma_{23}\alpha_{12}\alpha_{13} + \sigma_{33}\alpha_{13}^2 \\
\sigma'_{12} &= \sigma_{*1}\alpha_{21} + \sigma_{*2}\alpha_{22} + \sigma_{*3}\alpha_{23} \\
&= \sigma_{11}\alpha_{11}\alpha_{21} + \sigma_{21}\alpha_{12}\alpha_{21} + \sigma_{31}\alpha_{13}\alpha_{21} \\
&\quad + \sigma_{12}\alpha_{11}\alpha_{22} + \sigma_{22}\alpha_{12}\alpha_{22} + \sigma_{32}\alpha_{13}\alpha_{22} \\
&\quad + \sigma_{13}\alpha_{11}\alpha_{23} + \sigma_{23}\alpha_{12}\alpha_{23} + \sigma_{33}\alpha_{13}\alpha_{23} \\
\sigma'_{13} &= \sigma_{*1}\alpha_{31} + \sigma_{*2}\alpha_{32} + \sigma_{*3}\alpha_{33} \\
&= \sigma_{11}\alpha_{11}\alpha_{31} + \sigma_{21}\alpha_{12}\alpha_{31} + \sigma_{31}\alpha_{13}\alpha_{31} \\
&\quad + \sigma_{12}\alpha_{11}\alpha_{32} + \sigma_{22}\alpha_{12}\alpha_{32} + \sigma_{32}\alpha_{13}\alpha_{32} \\
&\quad + \sigma_{13}\alpha_{11}\alpha_{33} + \sigma_{23}\alpha_{12}\alpha_{33} + \sigma_{33}\alpha_{13}\alpha_{33}
\end{aligned}
$$

其中σ'_{11}是以x'_1轴为外法线方向的截面上的正应力，σ'_{12}是该面上沿x'_2方向的剪应力，σ'_{13}是该面上沿x'_3方向上的剪应力。这三个分量也就是用新坐标系表达原坐标系的应力张量σ_{ij}时，在以x_1轴为外法线方向的截面上的三个应力分量。

若将其写为矩阵形式，则为

$$
\begin{pmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{12} \\ \sigma'_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{13} \end{pmatrix} \tag{2.61}
$$

若将其写为哑指标形式，则为

$$
\sigma'_{1i} = \alpha_{1j}\alpha_{1i}\sigma_{ji} \tag{2.62}
$$

同理，我们还可以求出以x'_2轴为外法线方向的微分截面上的正应力与剪应力分量的矩阵形式和哑指标形式

$$
\begin{pmatrix} \sigma'_{21} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{23} \end{pmatrix} \tag{2.63}
$$

$$
\sigma'_{2i} = \alpha_{2j}\alpha_{1i}\sigma_{ji} \tag{2.64}
$$

以x_3轴为外法线方向的微分截面上的应力分量为

$$\begin{Bmatrix}\sigma'_{31}\\ \sigma'_{32}\\ \sigma'_{33}\end{Bmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}\\ \alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}\\ \alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}\end{pmatrix}\left(\begin{matrix}\sigma_{11}&\sigma_{21}&\sigma_{31}\\ \sigma_{12}&\sigma_{22}&\sigma_{32}\\ \sigma_{13}&\sigma_{23}&\sigma_{33}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}\alpha_{31}\\ \alpha_{32}\\ \alpha_{33}\end{matrix}\right) \tag{2.65}$$

$$\sigma'_{3l}=\alpha_{3j}\alpha_{li}\sigma_{ji} \tag{2.66}$$

(2.61)、(2.63)、(2.65)式的全部矩阵关系可综合为下列矩阵表示式：

$$\begin{pmatrix}\sigma'_{11}&\sigma_{21}&\sigma'_{31}\\ \sigma'_{12}&\sigma'_{22}&\sigma'_{32}\\ \sigma'_{13}&\sigma'_{23}&\sigma'_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}\\ \alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}\\ \alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_{11}&\sigma_{21}&\sigma_{31}\\ \sigma_{12}&\sigma_{22}&\sigma_{32}\\ \sigma_{13}&\sigma_{23}&\sigma_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{21}&\alpha_{31}\\ \alpha_{12}&\alpha_{22}&\alpha_{32}\\ \alpha_{13}&\alpha_{23}&\alpha_{33}\end{pmatrix} \tag{2.67}$$

(2.62)、(2.64)、(2.66)式可归纳为下列哑指标表示式：

$$\sigma'_{kl}=\alpha_{kj}\alpha_{li}\sigma_{ji} \tag{2.68}$$

比如

$$\begin{aligned}\sigma'_{12}&=\alpha_{1j}\alpha_{2i}\sigma_{ji}\\ &=\alpha_{11}\alpha_{2i}\sigma_{1i}+\alpha_{12}\alpha_{2i}\sigma_{2i}+\alpha_{13}\alpha_{2i}\sigma_{3i}\\ &=\alpha_{11}\alpha_{21}\sigma_{11}+\alpha_{11}\alpha_{22}\sigma_{12}+\alpha_{11}\alpha_{23}\sigma_{13}\\ &\quad+\alpha_{12}\alpha_{21}\sigma_{21}+\alpha_{12}\alpha_{22}\sigma_{22}+\alpha_{12}\alpha_{23}\sigma_{23}\\ &\quad+\alpha_{13}\alpha_{21}\sigma_{31}+\alpha_{13}\alpha_{22}\sigma_{32}+\alpha_{13}\alpha_{23}\sigma_{33}\end{aligned}$$

这与前面所得的σ'_{12}完全相同。(2.67)或(2.68)式即为应力张量的坐标变换公式。

前面已经证明，原坐标系中的应力张量σ_{ji}为对称张量，下面我们证明σ'_{kl}也为对称张量。将

$$\sigma'_{kl}=\alpha_{kj}\alpha_{li}\sigma_{ji}$$

利用哑指标规则3，改写成

$$\sigma'_{kl}=\alpha_{ki}\alpha_{lj}\sigma_{ij}$$

式中i，j均系重复指标，故α_{ki}与α_{lj}可互换位置，同时用σ_{ji}代换σ_{ij}，则上式变为

$$\sigma'_{kl}=\alpha_{lj}\alpha_{ki}\sigma_{ji} \tag{2.69}$$

再将该式与$\sigma'_{kl}=\alpha_{kj}\alpha_{li}\sigma_{ji}$进行比较可知，两式之间的不同仅

在于等式右端交换了角标 k 与 l，而 k 与 l 互换并不影响结果。因此，σ'_{lk} 可以写成 σ'_{kl}，即

$$\sigma'_{kl}=\sigma'_{lk} \tag{2.70}$$

从而证明了 σ_{kl} 也是对称张量。

〔例 2—5〕 已知物体内某点的应力状态以正交坐标系 x_i 表示时的应力分量为 σ_{11}，σ_{22}，σ_{33}，σ_{12}，σ_{23}，σ_{31}。试求以柱坐标系表示时的应力分量 σ_r，σ_θ，σ_z，$\sigma_{r\theta}$，$\sigma_{\theta z}$，σ_{zr}。

解　为方便起见，我们选柱坐标系的原点与直角坐标系的原点重合，且使柱坐标系的 z 轴与直角坐标系的 x_3 轴重合（如图 2—11）。此时，柱坐标系中 r，θ，z 对于直角坐标系中 x_1，x_2，x_3 的方向余弦如表 2—3 所示。若将 r，θ，z 看成是前述的 x'_1，x'_2，x_3，则上表变成表 2—4。

表 2—3

	x_1	x_2	x_3
r	$\cos\theta$	$\sin\theta$	0
θ	$-\sin\theta$	$\cos\theta$	0
z	0	0	1

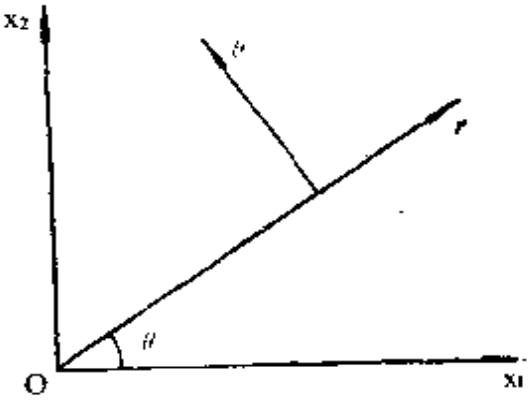


图 2—11

表 2—4

	x_1	x_2	x_3
x'_1 (r)	$\alpha_{11}(\cos\theta)$	$\alpha_{12}(\sin\theta)$	$\alpha_{13}(0)$
x'_2 (θ)	$\alpha_{21}(-\sin\theta)$	$\alpha_{22}(\cos\theta)$	$\alpha_{23}(0)$
x_3 (z)	$\alpha_{31}(0)$	$\alpha_{32}(0)$	$\alpha_{33}(1)$

利用（2.67）式，得

$$\begin{pmatrix}\sigma'_{11} & \sigma'_{21} & \sigma'_{31}\\ \sigma'_{12} & \sigma'_{22} & \sigma'_{32}\\ \sigma'_{13} & \sigma'_{23} & \sigma'_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma_r & \sigma_{\theta r} & \sigma_{zr}\\ \sigma_{r\theta} & \sigma_\theta & \sigma_{z\theta}\\ \sigma_{rz} & \sigma_{\theta z} & \sigma_z\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31}\\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32}\\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

这便是以柱坐标系表示时的应力张量的矩阵表示式。

利用（2.68）式，我们可直接写出柱坐标系表示时的应力分量，如

$$\sigma_{r\theta}(\sigma'_{12})=\alpha_{1j}\alpha_{2i}\sigma_{ij}$$

$$=\alpha_{11}\alpha_{21}\sigma_{11}+\alpha_{11}\alpha_{22}\sigma_{12}+\alpha_{11}\alpha_{23}\sigma_{13}$$
$$+\alpha_{12}\alpha_{21}\sigma_{21}+\alpha_{12}\alpha_{22}\sigma_{22}+\alpha_{12}\alpha_{23}\sigma_{23}$$
$$+\alpha_{13}\alpha_{21}\sigma_{31}+\alpha_{13}\alpha_{22}\sigma_{32}+\alpha_{13}\alpha_{23}\sigma_{33}$$

将$\alpha_{11}=\cos\theta$，$\alpha_{12}=\sin\theta$，$\alpha_{21}=-\sin\theta$等代入（参见表2—4），便得

$$\sigma_{r\theta}=-\sigma_{11}\sin\theta\cos\theta+\sigma_{12}\cos^2\theta-\sigma_{21}\sin^2\theta+\sigma_{22}\sin\theta\cos\theta$$
$$=(\sigma_{22}-\sigma_{11})\sin\theta\cos\theta+\sigma_{12}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$

同理可得

$$\sigma_r=\sigma_{11}\cos^2\theta+\sigma_{22}\sin^2\theta+2\sigma_{12}\sin\theta\cos\theta$$
$$\sigma_\theta=\sigma_{11}\sin^2\theta+\sigma_{22}\cos^2\theta-2\sigma_{12}\sin\theta\cos\theta$$
$$\sigma_z=\sigma_{33}$$
$$\sigma_{\theta z}=\sigma_{23}\cos\theta-\sigma_{31}\sin\theta$$
$$\sigma_{zr}=\sigma_{23}\sin\theta+\sigma_{31}\cos\theta$$

因为应力张量是对称张量，所以非对角元素中的六个分量用三个分量表示即可。

习题与参考答案二

1．已知物体内某点的应力分量为$\sigma_{11}=50a$，$\sigma_{22}=0$，$\sigma_{33}=-30a$，$\sigma_{12}=50a$，$\sigma_{23}=-75a$，$\sigma_{31}=80a$。试求方向余弦为$n_1=1/2$，$n_2=1/2$和$n_3=1/\sqrt{2}$的面上的总应力。

（答案：$P_n=111.5a$）

2．已知一点的应力张量为$\sigma_{11}=75a$，$\sigma_{22}=50a$，$\sigma_{33}=-50a$，σ_{12}

$=\sigma_{23}=\sigma_{31}=0$。 试求该点与各坐标轴成等角倾斜面（正八面体）上的总应力。

（答案：$P_n=59.5a$）

3．物体边界上某一点（设n_1，n_2，n_3为已知）作用着分布载荷$\overline{F}_1=a$，$\overline{F}_2=\overline{F}_3=0$，该点在物体内部的侧面上的应力分量$\sigma_{12}=\sigma_{13}=\sigma_{33}=0$，试求其余的应力分量。

（答案：$\sigma_{32}=\sigma_{22}=0$，$\sigma_{11}=a/n_1$）

4．已知物体表面由方程$6x_1+3x_2+6x_3=1$确定，物体表面作用着与其外法线方向一致的分布载荷P。试写出其边界条件的表示式。

〔答案：$2(\sigma_{11}-P)+\sigma_{21}+2\sigma_{31}=0$

$2\sigma_{12}+(\sigma_{22}-P)+2\sigma_{32}=0$

$2\sigma_{13}+\sigma_{23}+2(\sigma_{33}-P)=0$〕

5．如图所示的三角形截面水坝，材料的比重为γ，承受比重为γ_1的液体的压力，已求得的应力之解为

$$\sigma_{11}=ax_1+bx_2$$

$$\sigma_{22}=cx_1+dx_2-\gamma_1x_2$$

$$\sigma_{12}=-dx_1-ax_2$$

试根据直边及斜边上的表面条件确定系数a，b，c，d。

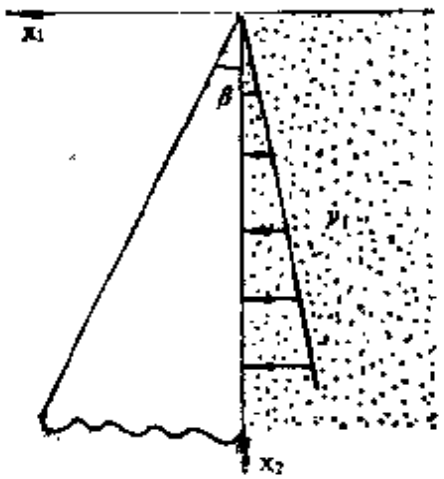


图 2—12

（答案：$a=0$，$b=-\gamma_1$，$c=\gamma_1\mathrm{ctg}\beta-2\gamma_1\mathrm{ctg}^3\beta$，$d=\gamma_1\mathrm{ctg}^2\beta$）

6．已知物体内某点$(x_{10}$，x_{20}，$x_{30})$的应力分量为$\sigma_{11}=100a$，$\sigma_{22}=50a$，$\sigma_{33}=-100a$，$\sigma_{12}=\sigma_{23}=\sigma_{31}=0$。 试求作用于方程为$(x_1-x_{10})+(x_2-x_{20})+(x_3-x_{30})=0$的平面上的正应力与剪应力。

（答案：$\sigma_n=16.67a$，$\sigma_\tau=84.98a$）

7．已知物体内某点的应力分量为$\sigma_{11}=0$，$\sigma_{22}=2a$，$\sigma_{33}=a$，$\sigma_{12}=a$，$\sigma_{23}=0$，$\sigma_{31}=2a$。试求作用在通过此点且方程为$x_1+3x_2+x_3=1$的平面上总应力、正应力和剪应力的数值。

（答案：$P_n=2.747a$，$\sigma_n=2.636a$，$\sigma_\tau=0.771a$）

8．已知物体内某点的应力分量为$\sigma_{11}=100a$，$\sigma_{22}=50a$，$\sigma_{33}=-10a$，$\sigma_{12}=40a$，$\sigma_{23}=30a$，$\sigma_{31}=-20a$。试计算该点的主应力。

（答案：$\sigma_1=122.2a$，$\sigma_2=49.4a$，$\sigma_3=-31.7a$）

9．物体中某点的应力分量是 $\sigma_{11}=\sigma_{22}=\sigma_{12}=0$，$\sigma_{33}=200a$，$\sigma_{23}=\sigma_{31}=100a$。试求该点的主应力及主方向。

（答案：$\sigma_1=273.2a$，$\sigma_2=0$，$\sigma_3=-73.2a$，$(n_1,\ n_2,\ n_3)=(0.325,\ 0.325,\ 0.888)$，$(n_1',\ n_2',\ n_3')=(0.707,\ -0.707,\ 0)$，$(n_1'',\ n_2'',\ n_3'')=(0.628,\ 0.628,\ 0)$）

10．已知物体内某点的应力分量为$\sigma_{11}=50a$，$\sigma_{22}=0$，$\sigma_{33}=-30a$，$\sigma_{12}=50a$，$\sigma_{23}=-75a$，$\sigma_{31}=80a$。计算该点的主应力及最大剪应力。

答案：$\sigma_1=99.3a$，$\sigma_2=58.8a$，$\sigma_3=-138a$，$\sigma_{\tau max}=118.6a$）

11．已知物体内某点的应力分量为 $\sigma_{11}=a$，$\sigma_{22}=-a$，$\sigma_{33}=a$，$\sigma_{12}=0$，$\sigma_{23}=0$，$\sigma_{31}=-a$。试计算该点的最大正应力及最大剪应力。

（答案：$\sigma_{max}=2a$，$\sigma_{\tau max}=1.5a$）

12．已知一点的主应力为$\sigma_1=50a$，$\sigma_2=50a$，$\sigma_3=-100a$。试求与应力主轴成等角倾斜面（正八面体）上的总应力、正应力及剪应力。

（答案：$P_v=70.7a$，$\sigma_v=0$，$\sigma_\tau=70.7a$）

13．使坐标面与一点的主微分面（或主平面）重合，则这微分面上只有正应力而没有剪应力，即$\sigma_{11}=\sigma_1$，$\sigma_{22}=\sigma_2$，$\sigma_{33}=\sigma_3$。试列出任意截面上的正应力与剪应力的表达式。

14．试证明下列应力分量满足平衡方程（设体力为零）：

（1）$\sigma_{11}=Q\sin\alpha x_1\mathrm{ch}\alpha x_2$，

$\sigma_{22}=-Q\sin\alpha x_1\mathrm{ch}\alpha x_2$，

$\sigma_{12}=-Q\cos\alpha x_1\mathrm{sh}\alpha x_2$。

（2）$\sigma_{11}=\sin\alpha x_1(2c_2+6c_3x_2+12c_4x_2^2+\cdots\cdots)$，

$\sigma_{22}=-\alpha^2\sin\alpha x_1(c_0+c_1x_2+c_2x_2^2+c_3x_2^3+c_4x_2^4+\cdots\cdots)$，

$\sigma_{12}=-\alpha\cos\alpha x_1(c_1+2c_2x_2+3c_3x_2^2+4c_4x_2^3+\cdots\cdots)$。

其中Q，α，c_0，c_1，……均为常数。

15．如图2—13所示，某物体中取出的无穷小平行六面体，承受位于点(ξ_1,ξ_2,ξ_3)处质量为m的物体的吸引力，试写出六面体的平

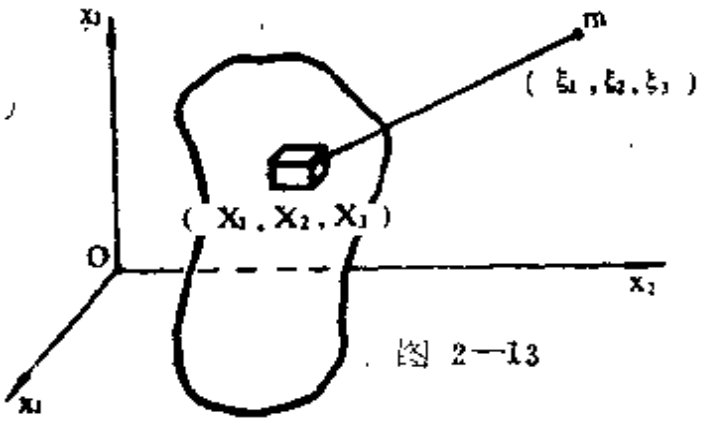


图 2—13

衡方程。

16．已知处于平衡状态的平板上（如图 2—14）的应力分量为 $\sigma_{11}=qx_1x_2$，$\sigma_{22}=0$，$\sigma_{12}=c\left(\frac{h^2}{4}-x_2^2\right)$。试求出系数 c，并在板面上画出 $x_1=l$ 处的应力分布（体力为零）。

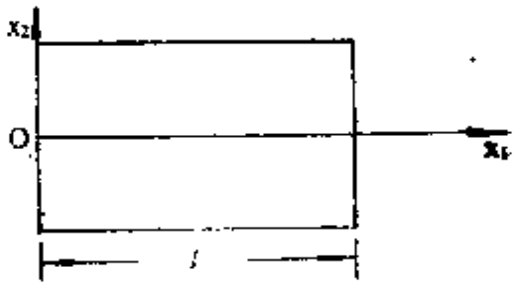


图 2—14

17．已知某物体位于地球表面且承受着地球的吸引力，试写出由该物体内取出的无穷小平行六面体的平衡方程。

18．已知物体内某点的应力张量在原坐标系 x_i 中的矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} 50a, & 50a, & 80a \\ 50a, & 0, & -75a \\ 80a, & -75a, & -30a \end{pmatrix}$$

试求当坐标轴绕 x_3 轴右旋（指右手螺旋）45°角时，以新坐标系 x_i' 表示时的应力张量。

（答案，其矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} \sigma_{12}' & \sigma_{21}' & \sigma_{31}' \\ \sigma_{12}' & \sigma_{22}' & \sigma_{32}' \\ \sigma_{13}' & \sigma_{23}' & \sigma_{33}' \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 50a & 50a & 80a \\ 50a & 0 & -75a \\ 80a & -75a & -30a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

19．已知物体内某点的应力状态以柱坐标系表示时的应力分量为 σ_r，σ_θ，σ_z，$\sigma_{r\theta}$，$\sigma_{\theta z}$，σ_{zr}，试求以直角坐标系表示时的应力分量。

〔答案：$\sigma_{11}=\sigma_r\cos^2\theta+\sigma_\theta\sin^2\theta-2\sigma_{r\theta}\sin\theta\cos\theta$，

$\sigma_{22}=\sigma_r\sin^2\theta+\sigma_\theta\cos^2\theta+2\sigma_{r\theta}\sin\theta\cos\theta$，

$\sigma_{33}=\sigma_z$，

$\sigma_{12}=\sigma_r\sin\theta\cos\theta-\sigma_\theta\sin\theta\cos\theta+\sigma_{r\theta}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$，

$\sigma_{23}=-\sigma_{\theta z}\cos\theta+\sigma_{zr}\sin\theta$，

$\sigma_{31}=-\sigma_{\theta z}\sin\theta+\sigma_{zr}\cos\theta$〕

20．已知物体内某点的应力状态以直角坐标系表示时的应力张量 σ_{ij}，试求以球坐标系表示时的应力张量。

（答案：其矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} \sigma_R & \sigma_{\theta R} & \sigma_{\varphi R} \\ \sigma_R & \sigma_\rho & \sigma_{\varphi\theta} \\ \sigma_{R\varphi} & \sigma_{\rho\theta} & \sigma_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \quad)$$

第三章 应变分析

由第二章的讨论可知，在静力学中，当物体内某点的应力张量 σ_{ij} 为已知时，则可据此应力张量求解通过该点任意截斜面上的总应力、正应力、剪应力以及该点的主应力、最大剪应力等等。由此可见，应力张量是求解物体受力问题的关键。然而，第二章中并没有涉及应力张量的求解问题。因为在一般情况下，一点的应力张量往往是根据物体受力与变形的关系通过间接测量计算出来的。此外，从动力学观点看，第二章给出的运动方程（2.57）式是连接应力张量、体力分量和位移函数的偏分微方程。大家知道，偏微分方程的求解是相当复杂的，而连接不同变量的偏微分方程是无法求解的。因此，有必要对物体的变形问题作进一步的讨论，以建立位移与应变、应变与应力的关系，为最终求解应力张量和运动方程奠定基础。

§3—1 位移场

设正交坐标系 x 中有一物体 V，在外载作用下物体发生位置的改变和变形，使 V 变成 V'（如图 3—1），V 内任一点 A（r）移到了A′（r'）点。因为构成 V 与 V' 的质点是一一对应的，因此 r' 应是 r 的单值连续函数。可以写成

$$r' = r'(r) \tag{3.1}$$

物体 V 到 V' 的位移场为

$$u(r) = r'(r) - r \tag{3.2}$$

由此，位移场 $u(r)$ 也是向径 r 的单值连续函数。

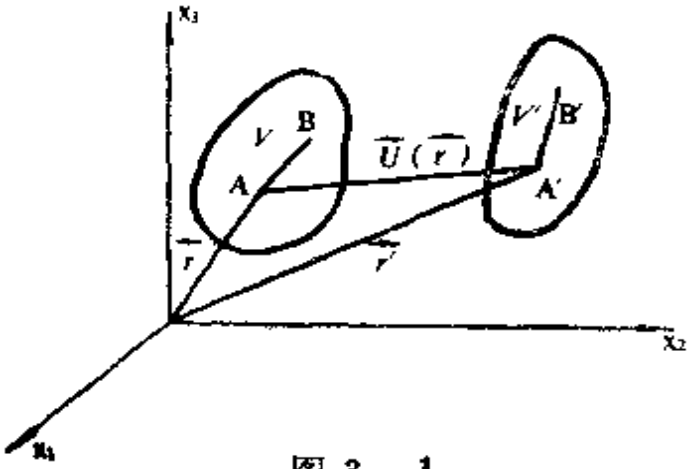


图 3—1

设在物体 V 内与 A 点相邻有 B 点，由于在外力作用下 A 点移到 A′ 点，相应地 B 点移到 B′ 点。A 点的位移为 $u(r)$，B 点的位移为 $u(r+dr)$。。那么 B 点的位移与 A 点的位移之间有什么关系呢？

按照第一章中所讲的哑指标规则，将 $u(r)$ 改写成 $u_i(x_j)$，将 $u(r+dr)$ 改写成 $u_i(x_j+dx_j)$。由于 B 点十分接近于 A 点，dr（或 dx_j）为一阶无穷小量，所以可以对 $u_i(x_j+dx_j)$ 进行泰勒展开，只取一次项，有

$$u_i(x_j+dx_j)=u_i(x_j)+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}dx_j \tag{3.3}$$

将（3.3）式右端加、减 $\frac{1}{2}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}dx_j$ 项，得

$$u_i(x_j+dx_j)=u_i(x_j)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)dx_j$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)dx_j \tag{3.4}$$

令

$$e_{ji}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{3.5}$$

$$w_{ji}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{3.6}$$

于是（3.4）式变为

$$u_i(x_j+dx_j)=u_i(x_j)+e_{ji}dx_j+w_{ji}dx_j \tag{3.7}$$

我们称 e_{ji} 为应变张量，w_{ji} 为旋转张量。

若将（3.5）式与（3.6）式按哑指标规则展开，则有

$$e_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1},\quad e_{12}=e_{21}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)$$

$$e_{22}=\frac{\partial u_2}{\partial x_2},\quad e_{23}=e_{32}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) \tag{3.8}$$

$$e_{33}=\frac{\partial u_3}{\partial x_3},\quad e_{31}=e_{13}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)$$

$$w_{11}=w_{22}=w_{33}=0$$

$$w_{12}=-w_{21}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)=(w_3)$$

$$w_{31}=-w_{13}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}-\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)=(w_2) \tag{3.9}$$

$$w_{23}=-w_{32}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)=(w_1)$$

由此可知，应变张量为对称张量，旋转张量为反对称张量。

（3.7）式还可以写成如下的矩阵形式：

$$\begin{pmatrix}u_1(x_j+dx_j)\\u_2(x_j+dx_j)\\u_3(x_j+dx_j)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_1(x_j)\\u_2(x_j)\\u_3(x_j)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}e_{11}e_{21}e_{31}\\e_{12}e_{22}e_{32}\\e_{13}e_{23}e_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dx_1\\dx_2\\dx_3\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}0&-w_3&w_2\\w_3&0&-w_1\\-w_2&w_1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dx_1\\dx_2\\dx_3\end{pmatrix} \tag{3.10}$$

由（3.7）或（3.10）式可知，B点的位移$u_i(x_j+dx_j)$等于A点的位移$u_i(x_j)$与另外两项之和。如果弄清另外两项的物理意义，则可进一步明确A点位移与B点位移之间的关系。

§3—2 应变张量 旋转张量

一、应变张量

首先我们讨论应变张量对角元素e_{11}、e_{22}、e_{33}的物理意义。在图3—1中，按哑指标规则，A点的位置矢量r可以用x_i表示，A′点的位置矢量r'可以用x'_i表示，A点的位移$u(r)$可以用$u_i(x_j)$表示，线元dr（AB）可以用dx_i表示，dr'（$A'B'$）可以用dx'_i表示。由图可以看出

$$x'_i = x_i + u_i(x_j) \tag{3.11}$$

两边微分，得

$$dx'_i = dx_i + du_i(x_j) \qquad \text{以下省略}x_j \tag{3.12}$$

两边平方，得

$$(dx'_i)^2 = (dx_i)^2 + 2dx_i du_i + (du_i)^2 \tag{3.13}$$

利用$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}dx_j$及$(dx'_i)^2 = (dr')^2$、$(dx_i)^2 = (dr)^2$，上式可化为

$$(dr')^2 = (dr)^2 + 2\frac{\partial u_i}{\partial x_j}dx_i dx_j + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}dx_j\frac{\partial u_i}{\partial x_i}dl \tag{3.14}$$

对三维物体而言，当形变很小时，也就是当$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \ll 1$时，可略去$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}$的二次项，因此上式变为

$$(dr')^2 = (dr)^2 + 2\frac{\partial u_i}{\partial x_j}dx_i dx_j \tag{3.15}$$

利用哑指标规则 3 。（3.15）式右端的第二项可以写成

$$2\frac{\partial u_i}{\partial x_j}dx_i dx_j = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}dx_i dx_j + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}dx_j dx_i$$

于是（3.15）式成为

$$(dr')^2 = (dr)^2 + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)dx_j dx_i \qquad (3.16)$$

考虑到（3.5）式，则有

$$(dr')^2 = (dr)^2 + 2e_{ji}dx_j dx_i \qquad (3.17)$$

将该式两端同除以$(dr)^2$，得

$$\left(\frac{dr'}{dr}\right)^2 = 1 + 2e_{ji}\frac{dx_j}{dr}\cdot\frac{dx_i}{dr} \qquad (3.18)$$

由解析几何知，$dx_j/dr = n_j$，$dx_i/dr = n_i$，所以上式成为

$$(dr'/dr)^2 = 1 + 2e_{ji}n_j n_i \qquad (3.19)$$

同前面忽略二阶无穷小量相仿，在（3.19）式右端加上一个二级无穷小量$e_{ji}^2 n_j^2 n_i^2$，于是有

$$(dr'/dr)^2 = (1 + e_{ji}n_j n_i)^2$$

或

$$dr'/dr = 1 + e_{ji}n_j n_i \qquad (3.20)$$

该式还可以写成

$$\frac{dr' - dr}{dr} = e_{ji}n_j n_i \qquad (3.21)$$

由第一章的讨论我们知道，$(dr' - dr)/dr$为线段$dr(AB)$的线应变。若以e_r表示，则（3.21）式成为为

$$e_r = e_{ji}n_j n_i \qquad (3.22)$$

将其按哑指标规则展开，有

$$e_r = e_{11}n_1^2 + e_{22}n_2^2 + e_{33}n_3^2 + 2e_{12}n_1 n_2 + 2e_{23}n_2 n_3 + 2e_{31}n_1 n_3 \qquad (3.23)$$

利用（3.23）式，很容易看出应变张量对角线元素的物理意义。当线元dr原来在x_1方向上时，则 $n_1 = 1$，$n_2 = n_3 = 0$，因

此有

$$e_{r1}=e_{11} \tag{3.24a}$$

同理，当线元 dr 原来在 x_2，x_3 方向上时，可得

$$e_{r2}=e_{22}$$

$$e_{r3}=e_{33} \tag{3.24b}$$

很明显，e_{r1}，e_{r2}，e_{r3} 是 x_1，x_2，x_3 方向上的线段沿各自方向的线应变或相对伸长量。由此可见，应变张量的对角元素 e_{11}，e_{22}，e_{33} 分别表示与 x_1，x_2，x_3 平行的线段在各自方向上的相对伸长量。

其次，我们再来讨论应变张量中非对角元素的物理意义。为明确起见，先讨论

$$e_{12}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)$$

回忆前面的讨论，$u_i(x_j+dx_j)$ 为 B 点的位移，$u_i(x_j)$ 为 A 点的位移，根据泰勒展开有

$$u_i(x_j+dx_j)=u_i(x_j)+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}dx_j \tag{3.25}$$

如果线元 AB 在变形前沿 x_1 方向，则 A 点的位置为（x_1，0，0），B 点的位置为（x_1+dx_1，0，0）。此时（3.25）式成为

$$u_1(x_1+dx_1)-u_1(x_1)=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}dx_1$$

$$u_2(x_1+dx_1)-u_2(x_1)=\frac{\partial u_2}{\partial x_1}dx_1 \tag{3.26}$$

$$u_3(x_1+dx_1)-u_3(x_1)=\frac{\partial u_3}{\partial x_1}dx_1$$

同样，如果线元 AB 变形前沿 x_2 方向，则有

$$u_1(x_2+dx_2)-u_1(x_2)=\frac{\partial u_1}{\partial x_2}dx_2$$

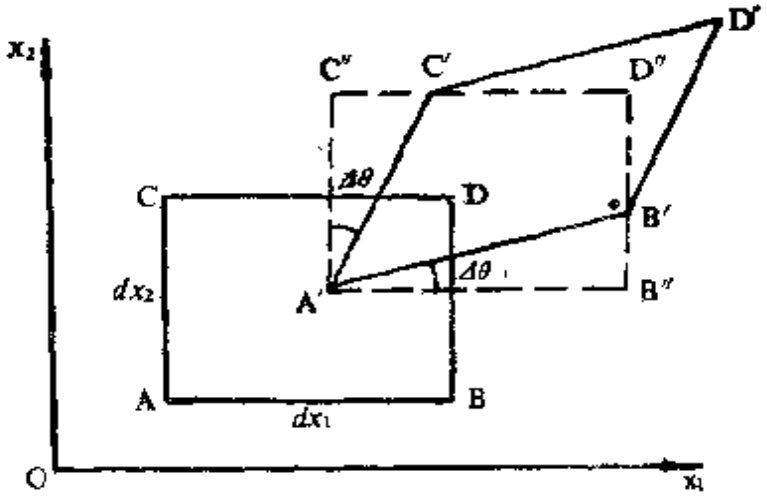


图 3—2

$$u_2(x_2+dx_2)-u_2(x_2)=\frac{\partial u_2}{\partial x_2}dx_2 \tag{3.27}$$

$$u_3(x_2+dx_2)-u_3(x_2)=\frac{\partial u_3}{\partial x_2}dx_2$$

下面，我们看图 3—2，$dx_1(AB)$ 即为变形前沿 x_1 方向的线元，$dx_2(AC)$ 为变形前沿 x_2 方向的线元。变形后 AB 成为 $A'B'$，AC 成为 $A'C'$，$\Delta\theta_1$ 表示线元 AB 变形后的角度改变量，$\Delta\theta$ 表示线元 AC 变形后的角度改变量。由图中三角形 $A'B''B'$ 可知

$$\mathrm{tg}\Delta\theta_1=B'B''/A'B'' \tag{3.28}$$

对于小变形而言，$\Delta\theta_1$ 很小 故有

$$\Delta\theta_1=B'B''/A'B'' \tag{3.29}$$

式中

$$\begin{aligned}A'B''&=dx_1+e_{11}dx_1\\&=(1+e_{11})dx_1\\&=(1+\partial u_1/\partial x_1)dx_1\\B'B''&=u_2(x_1+dx_1)-u_2(x_1)\\&=(\partial u_2/\partial x_1)dx_1\end{aligned}$$

于是有

$$\Delta\theta_1 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} / \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) \tag{3.30}$$

$\partial u_1/\partial x_1$表示 AB 在 x_1 方向上的相对伸长，它比 1 小得多，故可略去，于是（3.30）式变为

$$\Delta\theta_1 = \partial u_2/\partial x_1 \tag{3.31}$$

同样，可求得

$$\Delta\theta = \partial u_1/\partial x_2 \tag{3.32}$$

从而有

$$e_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{2}(\Delta\theta + \Delta\theta_1) \tag{3.33}$$

根据第一章所讲的剪应变的定义可知，e_{12}（或 e_{21}）为 ox_1x_2 平面内的剪应变。同理，可证明 e_{23}（或 e_{32}）为 ox_2x_3 平面内的剪应变，e_{31}（或 e_{13}）为 ox_1x_3 平面内的剪应变。

由此可见，在应变张量的九个分量中，对角元素分别表示物体沿各坐标轴方向上的线应变，而非对角元素则分别表示与各坐标平面平行的面上的剪应变。

二、旋转张量

为弄清旋转张量的物理意义，将（3.10）式中等式右端的第三项

$$\begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{Bmatrix}$$

改写成

$$[dx_1, dx_2, dx_3] \begin{pmatrix} 0 & w_3 & -w_2 \\ -w_3 & 0 & w_1 \\ w_2 & -w_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.34}$$

（3.34）式可以写成

$$[w_2dx_3 - w_3dx_2,\ w_3dx_1 - w_1dx_3,\ w_1dx_2 - w_2dx_1] \tag{3.35}$$

(3.35) 式又可以写成

$$\boldsymbol{w} \times d\boldsymbol{r} \tag{3.36}$$

其中 $\boldsymbol{w}$ 相当于 (w_1, w_2, w_3)，即 $\boldsymbol{w}$ 在 x_i 坐标系中的分量为 w_1，w_2，w_3，而 $\boldsymbol{w} \times d\boldsymbol{r}$ 的意义代表向量 $d\boldsymbol{r}$ 的旋转位移。由此可见，旋转张量中的某一个分量，都表示宏观为体变形时纯转动的角位移分量。

已知，对于前述式

$$u_i(x_j + dx_j) = u_i(x_j) + e_{ij}\,dx_j + w_{ij}\,dx_j$$

可作如下解释：任一线段的位移可以表示为平动位移 $u_i(x_j)$、形变位移 $e_{ij}\,dx_j$ 以及旋转位移 $w_{ij}\,dx_j$ 之和。

§3—3 一点的应变状态

如果在 (3.3) 式中不去加、减 $(1/2)(\partial u_j/\partial x_i)dx_j$，而引出应变张量与旋转张量的话，那么描述空间任一线段 $d\boldsymbol{r}$ 的位移表示式仍为

$$u_i(x_j + dx_j) = u_i(x_j) + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}dx_j \tag{3.37}$$

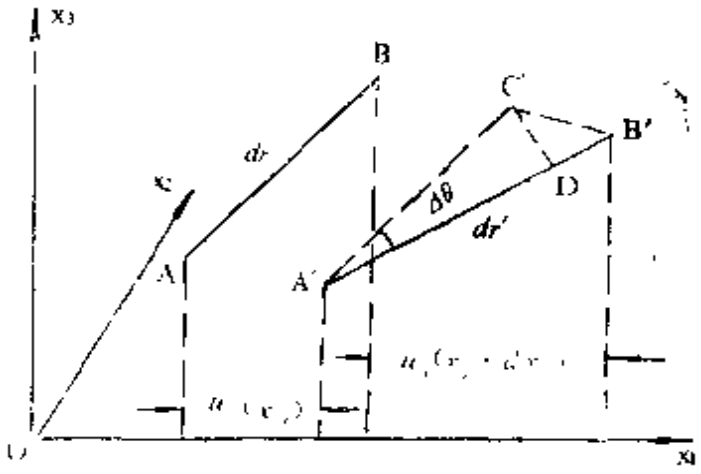


图 3—3

当 i 取 1 时，$u_1(x_j)$ 表示 A 点的位移在 x_1 轴方向上的投影（如图 3 — 3），$u_1(x_j+dx_j)$ 表示 B 点的位移在 x_1 轴方向上的投影。由图可以看出，$u_1(x_j+dx_j)-u_1(x_j)$ 是线段 dr 的改变量 $dr'-dr$ 在 x_1 轴上的投影。它包含着线量伸长与角量改变的综合成份。若设 $u_1(x_j+dx_j)-u_1(x_j)=\delta u_1$，则由（3.37）式可得

$$\delta u_1=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}dx_2+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}dx_3 \qquad (3.38)$$

根据应变的定义，可知 $\delta u_1/dr$ 的意义为线段 dr 由线量伸长（线应变）与角量改变（剪应变）而引起的“总”的形变在 x_1 轴方向上的投影，若以 e_{r1} 表示，则有

$$e_{r1}=\frac{\delta u_1}{dr}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dr}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dr}+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dr}$$

因为 $dx_1/dr=n_1$，$dx_2/dr=n_2$，$dx_3/dr=n_3$，所以上式可变为

$$e_{r1}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}n_1+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}n_2+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}n_3 \qquad (3.39)$$

同理，若以 e_{r2}、e_{r3} 表示“总”的形变在 x_2、x_3 轴上的投影，则可得下式中的后两式，即

$$\begin{aligned}
e_{r1}&=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}n_1+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}n_2+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}n_3\\
e_{r2}&=\frac{\partial u_2}{\partial x_1}n_1+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}n_2+\frac{\partial u_2}{\partial x_3}n_3 \qquad (3.40)\\
e_{r3}&=\frac{\partial u_3}{\partial x_1}n_1+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}n_2+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}n_3
\end{aligned}$$

（3.40）式就是“总”的形变在各坐标轴上分量的数学表示式。其哑指标形式为

$$e_{ri}=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}n_j \qquad (3.41)$$

其矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} e_{r1} \\ e_{r2} \\ e_{r3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial u_1/\partial x_1 & \partial u_1/\partial x_2 & \partial u_1/\partial x_3 \\ \partial u_2/\partial x_1 & \partial u_2/\partial x_2 & \partial u_2/\partial x_3 \\ \partial u_3/\partial x_1 & \partial u_3/\partial x_2 & \partial u_3/\partial x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \tag{3.42}$$

其中

$$\begin{pmatrix} \partial u_1/\partial x_1 & \partial u_1/\partial x_2 & \partial u_1/\partial x_3 \\ \partial u_2/\partial x_1 & \partial u_2/\partial x_2 & \partial u_2/\partial x_3 \\ \partial u_3/\partial x_1 & \partial u_3/\partial x_2 & \partial u_3/\partial x_3 \end{pmatrix} \tag{3.43}$$

称之为相对位移张量。它可以分解为如下的两个张量：

$$\begin{pmatrix} \partial u_1/\partial x_1 & \partial u_1/\partial x_2 & \partial u_1/\partial x_3 \\ \partial u_2/\partial x_1 & \partial u_2/\partial x_2 & \partial u_2/\partial x_3 \\ \partial u_3/\partial x_1 & \partial u_3/\partial x_2 & \partial u_3/\partial x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{21} & e_{31} \\ e_{12} & e_{22} & e_{32} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.44}$$

很明显，分解出的两个张量分别为应变张量和旋转张量。

由上面的讨论可以看出：表现“总”的应变（形变）在各坐标轴上分量的（3.42）式与第二章中表现总应力在各坐标轴上分量的（2.8）式完全相似，不同的只是相对位移张量不是对称张量。因为在一般情况下，$\partial u_1/\partial x_2 \neq \partial u_2/\partial x_1$，$\partial u_2/\partial x_3 \neq \partial u_3/\partial x_2$，$\partial u_3/\partial x_1 \neq \partial u_1/\partial x_3$，而应力张量是对称张量。

与讨论应力问题时一样，下面我们讨论图 3—3 中线段 AB（dr）的正应变与剪应变。

由于 AB 线段“总”的应变在各坐标轴上的投影为 e_{r1}，e_{r2}，e_{r3}，而 AB 的正应变应该是 AB 原方向上的线应变。将 e_{r1}, e_{r2}, e_{r3} 投影至 AB 的原方向上，即得 AB 线段的正应变，若以 e_r 表示，则应有

$$e_r = e_{r1}n_1 + e_{r2}n_2 + e_{r3}n_3 \tag{3.45}$$

将 e_{r1}，e_{r2}，e_{r3} 代入得

$$e_r = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}n_1^2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}n_1n_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}n_1n_3$$

$$+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}n_1n_2+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}n_2^2+\frac{\partial u_2}{\partial x_3}n_2n_3$$

$$+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}n_1n_3+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}n_2n_3+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}n_3^2$$

考虑到（3.8）式，则有

$$e_r=e_{11}n_1^2+e_{22}n_2^2+e_{33}n_3^2+2e_{12}n_1n_2+2e_{23}n_2n_3+2e_{31}n_1n_3 \tag{3.46}$$

很明显，（3.46）式与（3.23）式完全相同，而（3.23）式的意义是线段变形前后的相对伸长量（线应变），它并没有涉及线段是否旋转的问题。对应图 3 — 3 来说，相当于 $D'B'/A'D'$（其中$D'B'$是线段变形后的绝对伸长量，$A'D'$是线段的原长度），在小变形的情况下，也就是当$\Delta\theta$ 很小时，线段沿$A'B'$ 方向上的线应变与线段 AB 方向（或原方向）上的线应变值近似相等。故在忽略二阶无穷小量情况下进行推导，便得到两个完全相同的等式。

对于 AB 线段的剪应变（指某一线段的剪应变，不是通常定义的剪应变）来说，可由“总”的应变、正应变以及剪应变（$\Delta\theta$）各自产生的绝对位移$B'C'$、$D'B'$、$C'D'$之间的关系求得。从上面的讨论可以看出，对于小变形而言，可认为图 3 — 3 中的$D'C'\perp D'B'$，且

$$D'C'=\Delta\theta dr$$

$$D'B'=e_r dr$$

$$B'C'=[(e_{r1}dr)^2+(e_{r2}dr)^2+(e_{r3}dr)^2]^{1/2}$$

于是有

$$(\Delta\theta dr)^2+(e_r dr)^2=(e_{r1}dr)^2+(e_{r2}dr)^2+(e_{r3}dr)^2$$

整理后得

$$\Delta\theta=\sqrt{e_{r1}^2+e_{r2}^2+e_{r3}^2-e_r^2} \tag{3.47}$$

（3.47）式即为求解任一线段剪应变的具体表示式。读者可用此

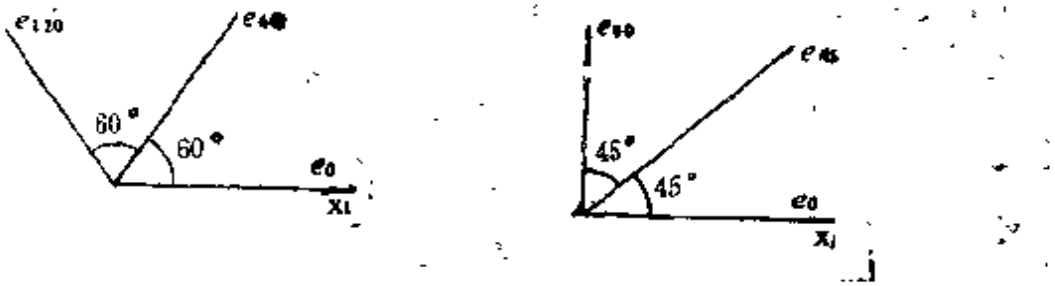
式验证第一章中例1— 4 的结果。

由上述讨论可以看出，如果物体内某点的应变张量为已知，那么该点的应变状态即可确定。

〔例 3 — 1〕为测量平面 应变分量 e_{11}，e_{22}，e_{12}，将三个电阻片贴 在 x_1 方 向、 与 x_1 成 60° 和 120° 方 向 上 〔如图 3 — 4 (a)〕。测得该三个方向上 的应变值为 e_0，e_{60}，e_{120}。试以 e_0，e_{60}，e_{120} 表示 e_{11}，e_{22}，e_{12}。

解　题中所给测量应变值 e_0，e_{60}，e_{120} 的装 置 叫做应变花，它由三个互成 60° 角的电阻应变计构成。在 地 应 力 的测量中，通常采用这类装置测量与地面平行的 三 个 方 向上的线应变（或正应变），并由此三个方向上的正应 变 求 解 该点的应变分量，最后利用应力与应变的关系（将在下章讨论）求解该点的应力分量。

常用的应变花有两种，一种是本题所给的应变计成等角分布的等角应变花〔图 3 — 4 (a)〕，另一种是应变计成 45° 角分布的直角应变花〔图 3 — 4 (b)〕。



(a)　　(b)

图 3 — 4

下面，我们根据本题的要求，求解平面应变分量 e_{11}、e_{22} 及 e_{12}。由于 e_0、e_{60}、e_{120} 分别是 x_1 方向、与 x_1 成 60° 角和 120° 角方向上的正应变，且在 x_1 方向上 $n_1 = 1$，$n_2 = 0$，$n_3 = 0$；在与 x_1 成 60° 角的方向上 $n_1 = 1/2$，$n_2 = \sqrt{3}/2$，$n_3 = 0$；在与 x_1 成 120 角的方向上 $n_1 = -1/2$，$n_2 = \sqrt{3}/2$，$n_3 = 0$。根据正

应变的表示式（3.46）得

$$e_0 = e_{11}$$

$$e_{60} = e_{11}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + e_{22}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 2e_{12}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$e_{120} = e_{11}\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + e_{22}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 2e_{12}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

解此方程，得

$$e_{11} = e_0$$

$$e_{12} = (e_{60} - e_{120})/\sqrt{3}$$

$$e_{22} = [2(e_{60} + e_{120}) - e_0]/3$$

这就是所求的以 e_0，e_{60}，e_{120} 表示的平面应变分量。

§3—4 应变张量的坐标变换公式

如果正交坐标系 x_i 中的六个应变分量为已知，则可求出对应于新正交坐标系 x_i' 中的六个应变分量。为简便起见，我们使 x_i 与 x_i' 坐标的原点重合。如此，x_i' 便可看作是 x_i 旋转而成。它们之间的方向余弦如表 3—1 所示。

表 3—1

	x_1	x_2	x_3
x_1'	α_{11}	α_{12}	α_{13}
x_2'	α_{21}	α_{22}	α_{23}
x_3'	α_{31}	α_{32}	α_{33}

新坐标系 x_i' 与原坐标系 x_i 之间的变换关系为

$$\begin{aligned} x_1' &= \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 \\ x_2' &= \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 \\ x_3' &= \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3 \end{aligned} \tag{3.48}$$

新坐标系中的位移分量 u_1'，u_2'，u_3' 与原坐标系中的位移分量之间的关系为

$$\begin{aligned} u_1' &= \alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}u_2 + \alpha_{13}u_3 \\ u_2' &= \alpha_{21}u_1 + \alpha_{22}u_2 + \alpha_{23}u_3 \\ u_3' &= \alpha_{31}u_1 + \alpha_{32}u_2 + \alpha_{33}u_3 \end{aligned} \tag{3.49}$$

由此，新坐标系中的应变分量可表示为

$$\begin{aligned} &e_{11}' = \frac{\partial u_1'}{\partial x_1'},\quad e_{12}' = e_{21}' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2'}{\partial x_1'} + \frac{\partial u_1'}{\partial x_2'}\right) \\ &e_{22}' = \frac{\partial u_2'}{\partial x_2'},\quad e_{23}' = e_{32}' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3'}{\partial x_2'} + \frac{\partial u_2'}{\partial x_3'}\right) \\ &e_{33}' = \frac{\partial u_3'}{\partial x_3'},\quad e_{31}' = e_{13}' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1'}{\partial x_3'} + \frac{\partial u_3'}{\partial x_1'}\right) \end{aligned} \tag{3.50}$$

因为 x_1' 可以看成原坐标系中过原点 O 的某一方向上的矢径，因此，应变分量中 $e_{11}' = \partial u_1'/\partial x_1'$ 的意义为函数 u_1' 沿 x_1' 方向上的偏导数。利用方向导数公式

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \cos(l,x_1)\frac{\partial f}{\partial x_1} + \cos(l,x_2)\frac{\partial f}{\partial x_2} + \cos(l,x_3)\frac{\partial f}{\partial x_3}$$

得

$$\begin{aligned} e_{11}' = \frac{\partial u_1'}{\partial x_1'} &= \alpha_{11}\frac{\partial}{\partial x_1}(\alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}u_2 + \alpha_{13}u_3) \\ &+ \alpha_{12}\frac{\partial}{\partial x_2}(\alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}u_2 + \alpha_{13}u_3) \\ &+ \alpha_{13}\frac{\partial}{\partial x_3}(\alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}u_2 + \alpha_{13}u_3) \\ &= \alpha_{11}^2\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \alpha_{12}^2\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \alpha_{13}^2\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{aligned}$$

$$+\alpha_{11}\alpha_{12}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)+\alpha_{11}\alpha_{13}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)$$

$$+\alpha_{12}\alpha_{13}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)$$

$$=\alpha_{11}^2e_{11}+\alpha_{12}^2e_{22}+\alpha_{13}^2e_{33}+2\alpha_{11}\alpha_{12}e_{12}$$
$$+2\alpha_{11}\alpha_{13}e_{13}+2\alpha_{12}\alpha_{13}e_{23} \qquad (3.51a)$$

同理得

$$e_{22}'=\alpha_{21}^2e_{11}+\alpha_{22}^2e_{22}+\alpha_{23}^2e_{33}^2+2\alpha_{21}\alpha_{22}e_{12}$$
$$+2\alpha_{22}\alpha_{23}e_{23}+2\alpha_{21}\alpha_{23}e_{13}$$
$$e_{33}'=\alpha_{31}^2e_{11}+\alpha_{32}^2e_{22}+\alpha_{33}^2e_{33}+2\alpha_{31}\alpha_{32}e_{12} \qquad (3.51b)$$
$$+2\alpha_{32}\alpha_{33}e_{23}+2\alpha_{33}\alpha_{31}e_{31}$$

利用坐标变换与方向导数公式，我们还可以求出 e_{12}'，e_{23}'，e_{31}'。如

$$e_{12}'=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1'}{\partial x_2'}+\frac{\partial u_2'}{\partial x_1'}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\alpha_{21}\frac{\partial}{\partial x_1}+\alpha_{22}\frac{\partial}{\partial x_2}+\alpha_{23}\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\right.$$
$$(\alpha_{11}u_1+\alpha_{12}u_2+\alpha_{13}u_3)$$
$$+\left(\alpha_{11}\frac{\partial}{\partial x_1}+\alpha_{12}\frac{\partial}{\partial x_2}+\alpha_{13}\frac{\partial}{\partial x_3}\right)$$
$$\left.(\alpha_{21}u_1+\alpha_{22}u_2+\alpha_{23}u_3)\right]$$
$$=\alpha_{11}\alpha_{21}e_{11}+\alpha_{12}\alpha_{22}e_{22}+\alpha_{13}\alpha_{23}e_{33}$$
$$+(\alpha_{12}\alpha_{21}+\alpha_{11}\alpha_{22})e_{12}+(\alpha_{13}\alpha_{21}$$
$$+\alpha_{11}\alpha_{23})e_{13}+(\alpha_{12}\alpha_{23}+\alpha_{13}\alpha_{22})e_{23} \qquad (3.52a)$$

同理得

$$e_{23}'=\alpha_{21}\alpha_{31}e_{11}+\alpha_{22}\alpha_{32}e_{22}+\alpha_{23}\alpha_{33}e_{33}$$
$$+(\alpha_{21}\alpha_{32}+\alpha_{31}\alpha_{22})e_{12}+(\alpha_{22}\alpha_{33}$$
$$+\alpha_{23}\alpha_{32})e_{23}+(\alpha_{23}\alpha_{31}+\alpha_{21}\alpha_{33})e_{31}$$
$$e_{33}'=\alpha_{11}\alpha_{31}e_{11}+\alpha_{12}\alpha_{32}e_{22}+\alpha_{13}\alpha_{33}e_{33}$$

$$+(\alpha_{11}\alpha_{32}+\alpha_{12}\alpha_{31})e_{12}+(\alpha_{12}\alpha_{33}+\alpha_{13}\alpha_{32})e_{23}$$
$$+(\alpha_{13}\alpha_{31}+\alpha_{11}\alpha_{33})e_{31} \qquad 3.52b$$

(3.51)、(3.52)式中的六个分量就是坐标变换后的应变分量，它可以写成如下的矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} e_{11}' & e_{21}' & e_{31}' \\ e_{12}' & e_{22}' & e_{32}' \\ e_{13}' & e_{23}' & e_{33}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} & e_{21} & e_{31} \\ e_{12} & e_{22} & e_{32} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \qquad (3.53)$$

或写成哑指标表示形式：

$$e_{ki}=\alpha_{kj}\alpha_{li}e_{jl} \qquad (3.54)$$

(3.53)或(3.54)式称为应变张量的坐标变换公式。

§3—5 主应变

与讨论主应力问题相仿，如果某一方向上的线段元在变形后只沿着原来的方向伸长或缩短，则该方向称为主方向（或应变主轴），该方向上的应变称为主应变，以 e 表示。

设主方向的单位矢量为 n_i，那么主应变在各坐标轴上的投影 $e\cdot n_i$ 就应该等于该方向上“总”的应变在各坐标轴上的投影 e_{Ti}，即

$$e_{Ti}-en_i=0 \qquad (3.55)$$

其中 e_{Ti} 的矩阵形式如(3.42)所示，亦即

$$\begin{pmatrix} e_{T1} \\ e_{T2} \\ e_{T3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial u_1/\partial x_1 & \partial u_1/\partial x_2 & \partial u_1/\partial x_3 \\ \partial u_2/\partial x_1 & \partial u_2/\partial x_2 & \partial u_2/\partial x_3 \\ \partial u_3/\partial x_1 & \partial u_3/\partial x_2 & \partial u_3/\partial x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \qquad (3.56)$$

参照（3.44）式，上式可写为

$$\begin{pmatrix} e_{r1} \\ e_{r2} \\ e_{r3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{21} & e_{31} \\ e_{12} & e_{22} & e_{23} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -w'_3 & w'_2 \\ w_3 & 0 & -w'_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \tag{3.57}$$

由于在主方向上旋转张量引起的形变为零，因此有

$$\begin{pmatrix} e_{r1} \\ e_{r2} \\ e_{r3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{21} & e_{31} \\ e_{12} & e_{22} & e_{32} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \tag{3.58}$$

将其用哑指标表示，则为

$$e_{ri} = e_{ji} n_j \tag{3.59}$$

再将上式代回（3.55）式，则有

$$e_{ji} n_j - e n_i = 0 \tag{3.60}$$

按哑指标规则，该式的展开式为

$$\begin{aligned} (e_{11} - e)n_1 + e_{21} n_2 + e_{31} n_3 &= 0 \\ e_{12} n_1 + (e_{22} - e)n_2 + e_{32} n_3 &= 0 \\ e_{13} n_1 + e_{23} n_2 + (e_{33} - e)n_3 &= 0 \end{aligned} \tag{3.61}$$

式中 n_1，n_2，n_3 应满足 $n_1 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ 的关系。故欲使此式有 n_1，n_2，n_3 不同时为零的解答，则必有其系数行列式等于零，即

$$\begin{vmatrix} (e_{11} - e) & e_{21} & e_{31} \\ e_{12} & (e_{22} - e) & e_{32} \\ e_{13} & e_{23} & (e_{33} - e) \end{vmatrix} = 0 \tag{3.62}$$

由此得

$$e^3 - \theta_1 e^2 + \theta_2 e - \theta_3 = 0 \tag{3.63}$$

其中

$$\theta_1 = e_{11} + e_{22} + e_{33}$$

$$\theta_2=\begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} e_{22} & e_{23} \\ e_{32} & e_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} e_{33} & e_{31} \\ e_{13} & e_{11} \end{vmatrix} \tag{3.64}$$

$$\theta_3=\begin{vmatrix} e_{11} & e_{21} & e_{31} \\ e_{12} & e_{22} & e_{32} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \end{vmatrix}$$

三次方程(3.63)式即为在已知某点应变张量的情况下，求解该点主应变的特征方程式。与主应力问题的讨论相同，（3.63）式有三个实根，通常以 e_1，e_2，e_3表示，这就是所要求解的主应变。

若将所求得的主应变值 e_1 代入（3.61）式，并考虑到 $n_1^2+n_2^2+n_3^2=1$，便可求出对应 e_1 的主方向 n_1，n_2，n_3。同理可求得对应 e_2，e_3 的主方向 $(n_1'，n_2'，n_3')$ 与 $(n_1^*，n_2^*，n_3^*)$。

（3.64）式中的θ_1，θ_2，θ_3称为应变张量的第一，第二，第三不变量，它是不随坐标变换改变的量。或者说，当坐标发生旋转时，应变张量中的六个分量都可能改变其数值，但作为(3.64)式中的各结果θ_1，θ_2，θ_3却保持不变。

对应主应力问题的讨论，我们来证明应变主轴的正交性。设 e_1，e_2 为三次方程（3.63）的两个根，相应的主方向为 n_i 和 n_i'，将其代入（3.60）式，得

$$\begin{aligned} e_{ji}n_j &= e_1 n_i \\ e_{ji}n_j' &= e_2 n_i' \end{aligned} \tag{3.65}$$

如果将（3.65）中的前式乘以 n_i'，后式乘以 n_i，则成为

$$\begin{aligned} e_{ji}n_j n_i' &= e_1 n_i n_i' \\ e_{ji}n_j' n_i &= e_2 n_i' n_i \end{aligned} \tag{3.66}$$

再将此式中的前式按哑指标规则进行变换（即重复指标互换不影响其结果），得

$$\begin{aligned} e_{ij}n_i n_j' &= e_1 n_i n_i' \\ e_{ji}n_j' n_i &= e_2 n_i' n_i \end{aligned} \tag{3.67}$$

因为 $e_{ij}=e_{ji}$，所以上式中前后两式相减得

$$(e_1-e_2)n_i n_i'=0 \tag{3.68}$$

在一般情况下，$e_1 \neq e_2$，故只有$n_i n_i' = 0$，亦即

$$n_1 n_1' + n_2 n_2' + n_3 n_3' = 0 \tag{3.69}$$

由此知，$n_i \perp n_i'$。同理可证，$n_i' \perp n^*$，$n_i^* \perp n_i$。

如果选用应变主轴为正交坐标系的三个坐标轴，由于此时应变张量的非对角线元素都为零，且$e_{11} = e_1$，$e_{22} = e_2$，$e_{33} = e_3$，所以应变张量的不变量（3.64）式变为

$$\begin{aligned} \theta_1 &= e_1 + e_2 + e_3 \\ \theta_2 &= e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1 \\ \theta_3 &= e_1 e_2 e_3 \end{aligned} \tag{3.70}$$

这与其它教科书中定义的应变张量的不变量完全一致。

〔例 3—2〕 设物体内某点的位移分量为$u_1 = 10 \times 10^{-3} + 0.1 \times 10^{-3} x_1 x_2 + 0.05 \times 10^{-3} x_3$，$u_2 = 5 \times 10^{-3} - 0.05 \times 10^{-3} x_1 + 0.1 \times 10^{-3} x_2 x_3$，$u_3 = 1.0 \times 10^{-3} - 0.1 \times 10^{-3} x_1 x_2 x_3$。试求解点$A$（1，1，1）的主应变值。

解 首先由位移分量求解应变分量。利用$e_{ij} = (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)/2$，得

$$\begin{aligned} e_{11} &= \partial u_1 / \partial x_1 = 0.1 \times 10^{-3} x_2 = 0.1 \times 10^{-3} \\ e_{22} &= \partial u_2 / \partial x_2 = 0.1 \times 10^{-3} x_3 = 0.1 \times 10^{-3} \\ e_{33} &= \partial u_3 / \partial x_3 = -0.1 \times 10^{-3} x_1 x_2 = -0.1 \times 10^{-3} \\ e_{12} &= (\partial u_2 / \partial x_1 + \partial u_1 / \partial x_2)/2 = 0.025 \times 10^{-3} \\ e_{23} &= (\partial u_3 / \partial x_2 + \partial u_2 / \partial x_3)/2 = 0 \\ e_{31} &= (\partial u_1 / \partial x_3 + \partial u_3 / \partial x_1)/2 = -0.025 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

再利用应变分量求解应变张量的不变量，由（3.64）式得

$$\theta_1 = e_{11} + e_{22} + e_{33} = 0.1 \times 10^{-3}$$

$$\theta_2 = \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_{22} & e_{23} \\ e_{32} & e_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_{33} & e_{31} \\ e_{13} & e_{11} \end{vmatrix}$$

$$= -0.01125 \times 10^{-6}$$

$$\theta_3=\begin{vmatrix} e_{11} & e_{21} & e_{31} \\ e_{12} & e_{22} & e_{32} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \end{vmatrix}=-0.001\times10^{-9}$$

将应变张量的不变量代入（3.63）式中，得

$$e^3-0.1\times10^{-3}e^2-0.01125\times10^{-6}e+0.001\times10^{-9}=0$$

为计算方便，令$10^4e=x$，代入上式得

$$x^3-x^2-1.125x+1=0$$

以$x=y+1/3$代入上式，消去二次项得

$$y^3-1.46y+0.552=0$$

此方程的根为 $y_1=0.931$，$y_2=0.434$，$y_3=-1.364$

由此得

$$e_1=0.1264\times10^{-3}$$

$$e_2=0.0767\times10^{-3}$$

$$e_3=-0.1031\times10^{-3}$$

这便是所求解的主应变值。如果将此e_1，e_2，e_3分别代入（3.61）式并考虑到$n_1^2+n_2^2+n_3^2=1$，即可求得对应e_1，e_2，e_3的主方向如下：

$(-0.724,\ -0.685,\ 0.080)$

$(0.679,\ -0.730,\ -0.094)$

$(-0.124,\ 0.015,\ -0.990)$

§3—6 体积应变

除应变分量外，我们再来讨论物体的体积应变，即受外载作用的物体变形前后的体积相对改变。写成数学形式则为

$$\theta=\frac{V'-V}{V} \tag{3.71}$$

其中V'为变形后体积，V为变形前体积。由于弹性力学所研究的

物体均限于小变形物体，因此 e_{ij} 应该是很小的量。可以想象，在这些小量中，非对角线元素（角应变分量）引起物体体积变形的量较之对角线元素（线应变分量）引起物体体积变形的量要小得多，故在研究物体的体积应变时，通常忽略由非对角线元素所引起的体积应变。这样，我们可以将坐标轴的取向平行于对角元素来进行体积应变的讨论。设有一正平行六面微分体，其棱边的边长分别为 dx_1，dx_2，dx_3，在变形前，它的体积是 $dx_1dx_2dx_3$，在变形后，它的体积成为 $(dx_1+e_{11}dx_1)(dx_2+e_{22}dx_2)(dx_3+e_{33}dx_3)$，因此，六面微分体体积相对改变（即体积应变）为

$$\theta=\frac{(dx_1+e_{11}dx_1)(dx_2+e_{22}dx_2)(dx_3+e_{33}dx_3)-dx_1dx_2dx_3}{dx_1dx_2dx_3} \tag{3.72}$$

略去一阶以上的微量，得

$$\theta=e_{11}+e_{22}+e_{33} \tag{3.73}$$

这就是体积应变的数学表示式。若将 $e_{11}=\partial u_1/\partial x_1$，$e_{22}=\partial u_2/\partial x_2$，$e_{33}=\partial u_3/\partial x_3$ 代入上式，则

$$\theta=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \tag{3.74}$$

此式便是体积应变与位移分量之间的简单微分关系。

§3—7 应变协调方程

由于应变张量中的六个应变分量都是由 u_1，u_2，u_3 对 x_1，x_2，x_3 求导而得出的，所以它们之间必定存在一定关系，这个关系可由应变协调方程来确定。

下面我们推导应变协调方程。首先对方程 $e_{11}=\partial u_1/\partial x_1$，$e_{22}=\partial u_2/\partial x_2$ 求二阶偏导数，得

$$\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2^2}=\frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2^2}$$

$$\frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_1^2}=\frac{\partial^3 u_2}{\partial x_2 \partial x_1^2} \tag{3.75}$$

将上列二式相加，得

$$\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_1^2}=\frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)$$

$$=2\frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \tag{3.76}$$

同理，可得

$$\frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_2^2}=2\frac{\partial^2 e_{23}}{\partial x_2 \partial x_3}$$

$$\frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_3^2}=2\frac{\partial^2 e_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} \tag{3.77}$$

(3.76) 和 (3.77) 式为应变协调方程的第一组方程。除此之外，我们还可以利用对应变张量非对角线元素求导的方法推导第二组方程。为清楚起见，先对其求一阶偏导数，得

$$\frac{\partial e_{12}}{\partial x_3}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_3}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_3}\right)$$

$$\frac{\partial e_{23}}{\partial x_1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_1}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3 \partial x_1}\right) \tag{3.78}$$

$$\frac{\partial e_{31}}{\partial x_2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3 \partial x_2}+\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2}\right)$$

将上式中的后二式相加再减去前一式，得

$$\frac{\partial e_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial e_{31}}{\partial x_2}-\frac{\partial e_{12}}{\partial x_3}=\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} \tag{3.79}$$

同理，将上式中的前二式相加再减去后一式和将前后二式相加再减去中式，得

$$\frac{\partial e_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial e_{12}}{\partial x_3}-\frac{\partial e_{31}}{\partial x_2}=\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1\partial x_3}$$

$$\frac{\partial e_{31}}{\partial x_2}+\frac{\partial e_{12}}{\partial x_3}-\frac{\partial e_{23}}{\partial x_1}=\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2\partial x_3} \tag{3.80}$$

(3.79) 和 (3.80) 式中还含有位移矢量函数 u_i，因此它们还不是应变协调方程（应变间的关系式）。为从(3.79)和 (3.80) 式中消去u_i，再对其求一阶偏导数，得

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial e_{23}}{\partial x_1}-\frac{\partial e_{31}}{\partial x_2}-\frac{\partial e_{12}}{\partial x_3}\right)=\frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1\partial x_2\partial x_3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial e_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial e_{12}}{\partial x_3}-\frac{\partial e_{31}}{\partial x_2}\right)=\frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1\partial x_2\partial x_3} \tag{3.81}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial e_{31}}{\partial x_2}+\frac{\partial e_{12}}{\partial x_3}-\frac{\partial e_{23}}{\partial x_1}\right)=\frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1\partial x_2\partial x_3}$$

考虑到$\partial u_3/\partial x_3=e_{33}$，$\partial u_2/\partial x_2=e_{22}$，$\partial u_1/\partial x_1=e_{11}$，则上式变为

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial e_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial e_{31}}{\partial x_2}-\frac{\partial e_{12}}{\partial x_3}\right)=\frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_1\partial x_2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial e_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial e_{12}}{\partial x_3}-\frac{\partial e_{31}}{\partial x_2}\right)=\frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_1\partial x_3} \tag{3.82}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial e_{31}}{\partial x_2}+\frac{\partial e_{12}}{\partial x_3}-\frac{\partial e_{23}}{\partial x_1}\right)=\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2\partial x_3}$$

这便是应变协调方程的第二组方程。第一、第二组方程合称应变协调方程。

应变协调方程主要用来检验所给应变状态是否存在。大家知道，当物体受外载作用时，物体内将同时产生应力与应变，如果

能先给出位移 u_i，则由式（3.8）可进行应变分量的计算，由于应变协调方程本是由（3.8）式推出的，故此算得的应变分量自然满足应变协调方程。但是，如果先给出的是应力，然后再根据应力与应变的关系求应变，则所求得的应变分量必须同时满足应变协调方程，否则，应变分量之间可能互不相容。由（3.8）式知，互不相容的应变分量不可能给出位移的正确解答。因此，通常认为应变分量互不相容的状态不存在。

习题与参考答案三

1．设弹性体中，任意点的位移分量为 $u_1=10^{-3}+0.2\times10^{-3}x_1x_2+0.1\times10^{-3}x_3$，$u_2=2\times10^{-3}+0.1\times10^{-3}x_1+0.2\times10^{-3}x_2x_3$，$u_3=10^{-3}-0.2\times10^{-3}x_1x_2x_3$。试求点 $A(1,\ 2,\ 3)$ 的应变分量。

（答案：$e_{11}=1.0\times10^{-4}$，$e_{22}=6.0\times10^{-4}$，$e_{33}=-4.0\times10^{-4}$，$e_{12}=1.5\times10^{-4}$，$e_{23}=-1.0\times10^{-4}$，$e_{31}=-5.5\times10^{-4}$）

2．已知位移分量为 $u_1=k(x_2-x_{20})$，$u_2=-k(x_1-x_{10})$，其中 k，x_{10}，x_{20} 为已知常数。试求应变分量及旋转分量，并说明此结果对应什么物理现象。

3．设弹性物体中任意点的位移分量为 $u_1=c_1x_1x_2+c_2x_3$，$u_2=c_3x_1+c_4x_2x_3$，$u_3=c_5x_1x_2x_3$。试写出应变张量与旋转张量的矩阵表示。

答案：

$$[e_{ij}]=\begin{Bmatrix} c_1x_2 & \frac{1}{2}(c_1x_1+c_3) & \frac{1}{2}(c_5x_2x_3+c_2) \\ \frac{1}{2}(c_1x_1+c_3) & c_4x_3 & \frac{1}{2}(c_4x_2+c_5x_1x_3) \\ \frac{1}{2}(c_5x_2x_3+c_2) & \frac{1}{2}(c_4x_2+c_5x_1x_3) & c_5x_1x_2 \end{Bmatrix}$$

$$[w_{ij}]=\begin{Bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(c_1x_1-c_3) & \frac{1}{2}(c_2-c_5x_2x_3) \\ \frac{1}{2}(c_3-c_1x_1) & 0 & \frac{1}{2}(c_4x_2-c_5x_1x_3) \\ \frac{1}{2}(c_5x_2x_3-c_2) & \frac{1}{2}(c_5x_1x_3-c_4x_2) & 0 \end{Bmatrix}$$

4．已知位移分量为$u_1 = Ax_1^2 + B$，$u_2 = Bx_2 + Cx_3^2$，$u_3 = Ax_1 + Bx_2 + Cx_3^2$，其中$A$，$B$，$C$是常数。试写出点$P(1, 1, 1)$的相对位移张量的矩阵表示式。

答案：
$$\begin{pmatrix} 2A & 0 & 0 \\ 0 & B & 2C \\ A & B & 2C \end{pmatrix}$$

5．如果位移分量可由一函数$\Phi(x_1, x_2, x_3)$导出，即$u_1 = \partial\Phi/\partial x_1$，$u_2 = \partial\Phi/\partial x_2$，$u_3 = \partial\Phi/\partial x_3$，试证其旋转分量为零（这种变形称为纯变形）。

6．已知由直角应变花测得的三个应变值为e_0，e_{45}，e_{90}。试求该处与此应变花平行的平面上应变分量的数值。

（答案：$e_{11} = e_0$，$e_{22} = e_{90}$，$e_{12} = e_{45} - (e_0 + e_{90})/2$）

7．已知物体内各点的位移分量为$u_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$，$u_2 = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$，$u_3 = C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3$，式中$a_i$，$b_i$，$C_i$（$i = 1, 2, 3$）均为常数。试求任一与正交坐标轴成等角方向的线段的正应变。

〔答案：$e_r = (a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2 + b_3 + C_1 + C_2 + C_3)/3$〕

8．设物体内任意一点的位移分量为$u_1 = 5\times10^{-4} + 0.1\times10^{-4}x_1x_2 + 0.05\times10^{-4}x_3$，$u_2 = 3\times10^{-4} - 0.05\times10^{-4}x_1 + 0.1\times10^{-4}x_2x_3$，$u_3 = 2\times10^{-4} - 0.1\times10^{-4}x_1x_2x_3$，试求解点$A(0.5, -1, 0)$的主应变及主方向。

〔答案：主应变为 $e_1 = 0.0832\times10^{-4}$，$e_2 = 0.0257\times10^{-4}$，$e_3 = -0.1045\times10^{-4}$；主方向为$(-0.116, 0.512, -0.852)$，$(0.173, 0.854, 0.491)$，$(-0.980, -0.083, -0.185)$〕

9．物体内一点的应变分量为 $e_{11} = 0.15\times10^{-3}$，$e_{22} = -0.04\times10^{-3}$，$e_{33} = 0$，$e_{12} = 0$，$e_{23} = 0.06\times10^{-3}$，$e_{31} = 0$。试计算主应变及主方向。

〔答案：$e_1 = 0.15\times10^{-3}$，$e_2 = 0.043\times10^{-3}$，$e_3 = -0.083\times10^{-3}$；$(1, 0, 0)$，$(0, 0.585, 0.811)$，$(0, -0.811, 0.585)$〕

10．试写出在平面应变（$e_{33} = e_{23} = e_{31} = 0$）情况下应变张量的不变量及主应变的表示式。

{答案：$\theta_1 = e_{11} + e_{22}$，$\theta_2 = e_{11}e_{22} - e_{12}^2$，$\theta_3 = 0$；$e_1$，$e_2 = [(e_{11} + e_{22}) \pm \sqrt{(e_{11} - e_{22})^2 + 4e_{12}^2}]/2$}

11．已知物体内某点的应变张量在原坐标系x_i中的矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} 0.1\times10^{-3} & 0.025\times10^{-3} & -0.025\times10^{-3} \\ 0.025\times10^{-3} & 0.1\times10^{-3} & 0 \\ -0.025\times10^{-3} & 0 & -0.1\times10^{-3} \end{pmatrix}$$

试求当坐标轴绕 x_2 轴右旋60°时，以新坐标系x_i'表示时的应变张量。

答案：其矩阵表示式为

$$\begin{pmatrix} e_{11}' & e_{21}' & e_{31}' \\ e_{12}' & e_{22}' & e_{32}' \\ e_{13}' & e_{23}' & e_{33}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.1\times10^{-3} & 0.025\times10^{-3} & -0.025\times10^{-3} \\ 0.025\times10^{-3} & 0.1\times10^{-3} & 0 \\ -0.025\times10^{-3} & 0 & -0.1\times10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

12．已知物体内某点的应变状态以直角坐标系表示时的应变分量为 e_{11}，e_{22}，e_{33}，e_{12}，e_{23}，e_{31}，试求以柱坐标系表示时的应变分量。

〔答案：$e_r = e_{11}\cos^2\theta + e_{22}\sin^2\theta + 2e_{12}\sin\theta\cos\theta$

$e_\theta = e_{11}\sin^2\theta + e_{22}\cos^2\theta - 2e_{12}\sin\theta\cos\theta$

$e_z = e_{33}$

$e_{r\theta} = (e_{22} - e_{11})\sin\theta\cos\theta + e_{12}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$

$e_{\theta z} = e_{23}\cos\theta - e_{31}\sin\theta$

$e_{zr} = e_{23}\sin\theta + e_{31}\cos\theta$〕

13．设弹性体中任意点的位移分量为 $u_1 = Ax_1 + Bx_2^2 - Cx_2x_3$，$u_2 = Ax_1 + Bx_2 + Cx_1x_3$，$u_3 = Ax_1 + Bx_1x_2 + Cx_3$，试求此弹性体内的体积应变。

（答案：$\theta = A + B + C$）

14．试确定下列各应变状态是否存在：

（1）$e_{11} = k(x_1^2 + x_2^2)$，$e_{22} = kx_2^2x_3$，$e_{33} = 0$，$e_{12} = kx_1x_2x_3$，$e_{23} = 0$，$e_{31} = 0$；

（2）$e_{11} = k(x_1^2 + x_2^2)$，$e_{22} = kx_2^2$，$e_{33} = 0$，$e_{12} = kx_1x_2$，$e_{23} =$

0，$e_{31}=0$；

（3）$e_{11}=ax_1x_2^2$，$e_{22}=ax_1^2x_2$，$e_{33}=ax_1x_2$，$e_{12}=0$，$e_{23}=ax_1+bx_2$，$e_{31}=ax_1^2+bx_2^4$。式中k，a，b均为常数。

〔答案：（1）不存在；（2）存在；（3）不存在。〕

15．已知应变分量为$e_{11}=(\partial^2\Phi/\partial x_1^2-\mu\partial^2\Phi/\partial x_2^2)/E$，$e_{22}=(\partial^2\Phi/\partial x_1^2-\mu\partial^2\Phi/\partial x_2^2)/E$，$e_{12}=-(1+\mu)(\partial^2\Phi/\partial x_1\partial x_2)/E$，$e_{33}=e_{23}=e_{31}=0$。试确定函数$(x_1, x_2)$应满足的方程式。

（答案：$\partial^4\Phi/\partial x_1^4+2\partial^4\Phi/\partial x_1\partial x_2^2+\partial^4\Phi/\partial x_2^4=0$）

16．已知位移分量为$u_1=[x_3^2+(\mu x_1^2-x_2^2)]/2a$，$u_2=\mu x_1x_2/a$，$u_3=-x_1x_3/a$，式中$a$、$\mu$为常数。试求应变分量，并指出它们能否满足应变协调方程。

（答案：$e_{11}=\mu x_1/a$，$e_{22}=\mu x_1/a$，$e_{33}=-x_1/a$，$e_{12}=e_{23}=e_{31}=0$；满足应变协调方程）

第四章　应力与应变的关系

第二、三章中，我们从动力学与几何学出发，对物体在外载作用下产生的应力与应变问题做了较为详细的讨论。然而，在地质力学问题中，仅凭应力与应变的讨论还不足以解决地质体的受力与变形问题。比如，进行地应力观测时，我们不可能把“应力计”直接放入地下某点去进行测量，而是根据地下各已知点相对位置的改变来确定地下某点的应力值的大小。因此，有必要对物体受力与变形间的关系做进一步的讨论，以便从物体的形状改变确定物体内部各点的应力数值。反过来，也可以由物体的受力状态确定物体的形变状态。

本章主要叙述以应力表示应变的广义虎克定律和以应变表示应力的广义虎克定律。这是弹性理论中十分重要的定律，也是解决具体的弹性力学问题时最常用的定律。此外，我们还将叙述应变位能和弹性常数间的关系等重要内容。

§4—1　广义虎克定律

由前面的讨论知道，物体内一点的应力状态由六个应力分量所确定，而同一点附近的应变状态由六个应变分量所确定。对小变形物体而言，由第一章第4节所给出的应力-应变曲线可知，应力与应变之间存在着线性关系。即“在弹性体中的任一点，六个应力分量中的每个应力都是六个应变分量的线性函数，反之亦然。”这个规律称之为广义虎克定律。

按此定律，弹性体内任一点的应力-应变的关系式，在没

有初始应力和小变形的情况下，一般可写为

$$\sigma_{11}=c_{1111}e_{11}+c_{1122}e_{22}+c_{1133}e_{33}+(c_{1112}+c_{1121})e_{12}+(c_{1123}+c_{1132})e_{23}+(c_{1113}+c_{1131})e_{31}$$

$$\sigma_{22}=c_{2211}e_{11}+c_{2222}e_{22}+c_{2233}e_{33}+(c_{2212}+c_{2221})e_{12}+(c_{2223}+c_{2232})e_{23}+(c_{2213}+c_{2231})e_{31}$$

$$\sigma_{33}=c_{3311}e_{11}+c_{3322}e_{22}+c_{3333}e_{33}+(c_{3312}+c_{3321})e_{12}+(c_{3323}+c_{3332})e_{23}+(c_{3313}+c_{3331})e_{31}$$

$$\sigma_{12}=c_{1211}e_{11}+c_{1222}e_{22}+c_{1233}e_{33}+(c_{1212}+c_{1221})e_{12}+(c_{1223}+c_{1232})e_{23}+(c_{1213}+c_{1231})e_{31}$$

$$\sigma_{23}=c_{2311}e_{11}+c_{2322}e_{22}+c_{2333}e_{33}+(c_{2312}+c_{2321})e_{12}+(c_{2323}+c_{2332})e_{23}+(c_{2313}+c_{2331})e_{31}$$

$$\sigma_{31}=c_{3111}e_{11}+c_{3122}e_{22}+c_{3133}e_{33}+(c_{3112}+c_{3121})e_{12}+(c_{3123}+c_{3132})e_{23}+(c_{3113}+c_{3131})e_{31} \qquad (4.1)$$

该式可以写成如下的哑指标形式：

$$\sigma_{ij}=c_{ijkl}e_{kl} \qquad (4.2)$$

(4.1) 或 (4.2) 式就是一般情况下的广义虎克定律。式中 c_{ijkl} 均为比例常数，它们的数值由材料的弹性性质决定。可以证明，对于一个保守系统，有 $c_{ijkl}=c_{klij}$，$c_{ijkl}=c_{jikl}$，即 $c_{1122}=c_{2211}$，$c_{1112}=c_{1121}$，$c_{2213}=c_{2231}=c_{3122}$ 等等（证明参阅本章第5节）。按此结论，(4.1) 或 (4.2) 式变为

$$\sigma_{11}=c_{1111}e_{11}+c_{1122}e_{22}+c_{1133}e_{33}+2c_{1112}e_{12}+2c_{1123}e_{23}+2c_{1131}e_{31}$$

$$\sigma_{22}=c_{2211}e_{11}+c_{2222}e_{22}+c_{2233}e_{33}+2c_{2212}e_{12}+2c_{2223}e_{23}+2c_{2231}e_{31}$$

$$\sigma_{33}=c_{3311}e_{11}+c_{3322}e_{22}+c_{3333}e_{33}+2c_{3312}e_{12}+2c_{3323}e_{23}+2c_{3331}e_{31}$$

$$\sigma_{12}=c_{1211}e_{11}+c_{1222}e_{22}+c_{1233}e_{33}+2c_{1212}e_{12}+2c_{1223}e_{23}+2c_{1231}e_{31}$$

$$\sigma_{23}=c_{2311}e_{11}+c_{2322}e_{22}+c_{2333}e_{33}+2c_{2312}e_{12}$$

$$+2c_{2323}e_{23}+2c_{2331}e_{31}$$

$$\sigma_{31}=c_{3111}e_{11}+c_{3122}e_{22}+c_{3133}e_{33}+2c_{3112}e_{12}$$

$$+2c_{3123}e_{23}+2c_{3131}e_{31} \tag{4.3}$$

将其写成矩阵形式，则为

$$\begin{pmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{12}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{31}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & 2c_{1112} & 2c_{1123} & 2c_{1131}\\ c_{2211} & c_{2222} & c_{2233} & 2c_{2212} & 2c_{2223} & 2c_{2231}\\ c_{3311} & c_{3322} & c_{3333} & 2c_{3312} & 2c_{3323} & 2c_{3331}\\ c_{1211} & c_{1222} & c_{1233} & 2c_{1212} & 2c_{1223} & 2c_{1231}\\ c_{2311} & c_{2322} & c_{2333} & 2c_{2312} & 2c_{2323} & 2c_{2331}\\ c_{3111} & c_{3122} & c_{3133} & 2c_{3112} & 2c_{3123} & 2c_{3191}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_{11}\\ e_{22}\\ e_{33}\\ e_{12}\\ e_{23}\\ e_{31}\end{pmatrix} \tag{4.4}$$

式中6个对角元素为独立的弹性常数，其余30个非对角线元素两两相等或呈倍数关系。即对保守系统来说，独立的弹性常数为6个对角元素与30个非对角元素的半数之和，计21个。对于不同的弹性物质，其独立的弹性常数不同。最简单的情况是各向同性物质，独立的弹性常数只有两个（证明见§ 4—2）。由此可见，对各向异性物质的讨论，远比各向同性物质的讨论复杂，而各向同性的假定往往是地球内部介质的很好近似。因此，下面着重讨论各向同性体内应力与应变的关系。

§4—2 以应变表示应力的广义虎克定律

对各向同性物质来说，应力与应变的关系在各个方向上应该不变，亦即当坐标轴旋转至任意方向时，应力与应变的关系应该不变。因此，我们可以利用坐标轴的旋转推导各向同性体内以应变表示应力的广义虎克定律。

为方便起见，首先将坐标轴做 180° 的转动。如果转动的是 x_3 轴，即 x_3 轴的方向改为相反的方向，则 x_3 和 u_3 的正、负号改为相反的符号，因此

$$e_{23}=(\partial u_3/\partial x_2+\partial u_2/\partial x_3)/2$$

与

$$e_{31}=(\partial u_1/\partial x_3+\partial u_3/\partial x_1)/2$$

也将改变其正、负号。由于x_3轴转为相反方向后，(4.3)式中的σ_{11}，σ_{22}，σ_{33}（拉应力为正，压应力为负）并不受影响，其余右端的前四项也不变，而后两项保持数值而改变其正、负号。欲使σ_{11}，σ_{22}，σ_{33}，σ_{12}不因x_3轴转为相反方向而变其正、负号或出现量值突变，只有$c_{1123}=c_{1131}=c_{2223}=c_{2231}=c_{3323}=c_{3331}=c_{1223}=c_{3123}=0$时，方程(4.3)式中的前四式才能成立。

对于方程(4.5)式的后两式，当x_3轴转为相反方向后，σ_{23}与σ_{31}保持原数值但改变其正、负号，而等式右端的前四项并不改变正、负号。因此，欲使应力与应变的关系在各个方向上保持不变，即当应力改变正、负号时应变也随之改变正、负号，则必须是$c_{2311}=c_{2322}=c_{2333}=c_{2312}=c_{3111}=c_{3122}=c_{3133}=c_{3112}=0$。此时，(4.3)式成为

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}&=c_{1111}e_{11}+c_{1122}e_{22}+c_{1133}e_{33}+2c_{1112}e_{12}\\
\sigma_{22}&=c_{2211}e_{11}+c_{2222}e_{22}+c_{2233}e_{33}+2c_{2212}e_{12}\\
\sigma_{33}&=c_{3311}e_{11}+c_{3322}e_{22}+c_{3333}e_{33}+2c_{3312}e_{12}\\
\sigma_{12}&=c_{1211}e_{11}+c_{1222}e_{22}+c_{1233}e_{33}+2c_{1212}e_{12}\\
\sigma_{23}&=2c_{2323}e_{23}+2c_{2331}e_{31}\\
\sigma_{31}&=2c_{3123}e_{23}+2c_{3131}e_{31}
\end{aligned}\qquad(4.5)$$

在此基础上，若将x_2轴转动180°而其它两轴不变，x_2与u_2改为相反的符号，因此

$$e_{12}=(\partial u_2/\partial x_1+\partial u_1/\partial x_2)/2$$

与

$$e_{23}=(\partial u_3/\partial x_2+\partial u_2/\partial x_3)/2$$

改变其正、负号。而(4.5)式左端除σ_{12}与σ_{23}改变正、负号外，其余四项均不受其影响。按照相同的理由，必有$c_{1112}=c_{2212}=c_{3312}$

$=c_{1211}=c_{1222}=c_{1233}=c_{2331}=c_{3123}=0$。此时（4.5）式变为

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}&=c_{1111}e_{11}+c_{1122}e_{22}+c_{1133}e_{33}\\
\sigma_{22}&=c_{2211}e_{11}+c_{2222}e_{22}+c_{2233}e_{33}\\
\sigma_{33}&=c_{3311}e_{11}+c_{3322}e_{22}+c_{3333}e_{33}\\
\sigma_{12}&=2c_{1212}e_{12}\\
\sigma_{23}&=2c_{2323}e_{23}\\
\sigma_{31}&=2c_{3131}e_{31}
\end{aligned}\tag{4.6}$$

同样，若再将 x_1 轴旋转 180°而 x_2、x_3 轴不变，则因为（4.6）式中应变分量只有 e_{12} 与 e_{31} 改变正、负号，而等式左端只有与 e_{12}、e_{31} 相对应的 σ_{12}、σ_{31} 改变正、负号，因此，（4.6）式保持不变。

由（4.6）式可以看出，弹性常数还有12个，若考虑到 $c_{ijkl}=c_{klij}$，则式中的弹性常数又减少3个，故（4.6）式中实际上只有9个独立的弹性常数。通过上述讨论可知，（4.6）式是将各坐标轴转为相反方向且认为其弹性关系不变而得到的方程式。因此，通常将其称为正交各向异性体内的广义虎克定律。

按照相同的方法，将各坐标轴作 90° 的转动，比如是 x_2 轴与 x_3 轴互换，则在方程（4.6）式的第一式中，σ_{11} 的正、负号不变，而等式右端的 e_{22} 与 e_{33} 彼此互换位置。此时，只有 $c_{1122}=c_{1133}$ 时，该式两端才能相等。同时，由于 σ_{12} 成为 σ_{13}（$=\sigma_{31}$），e_{12} 成为 e_{13}（$=e_{31}$），即 e_{31} 和 σ_{31} 分别成为 e_{21} 和 σ_{21}，这相当于方程（4.6）的第四与第六式除弹性系数 c_{1212}、c_{3131} 外互换位置。这只有在 $c_{1212}=c_{3131}$ 时，才能做此置换。同样，再将 x_3 与 x_1，x_1 与 x_2 轴互换，可得 $c_{1122}=c_{1133}=c_{2211}=c_{3311}=c_{2233}=c_{3322}$，$c_{1212}=c_{2323}=c_{3131}$。于是（4.6）式变为

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}&=c_{1111}e_{11}+c_{1122}(e_{22}+e_{33})\\
\sigma_{22}&=c_{2222}e_{22}+c_{1122}(e_{11}+e_{33})
\end{aligned}$$

$$\sigma_{33}=c_{3333}e_{33}+c_{1122}(e_{11}+e_{22}) \tag{4.7}$$
$$\sigma_{12}=2c_{1212}e_{12}$$
$$\sigma_{23}=2c_{1212}e_{23}$$
$$\sigma_{31}=2c_{1212}e_{31}$$

又因为在x_2与x_3轴互换时，σ_{22}与σ_{33}互换，e_{22}与e_{33}互换，由（4.7）式中的二、三式得$c_{2222}=c_{3333}$。同样，在x_1与x_2轴互换时，σ_{11}与σ_{22}互换，e_{11}与e_{22}互换，由（4.7）式的前两式得$c_{1111}=c_{2222}$。将$c_{1111}=c_{2222}=c_{3333}$代入（4.7）式，便得

$$\sigma_{11}=c_{1111}e_{11}+c_{1122}(e_{22}+e_{33})$$
$$\sigma_{22}=c_{1111}e_{22}+c_{1122}(e_{11}+e_{33})$$
$$\sigma_{33}=c_{1111}e_{33}+c_{1122}(e_{11}+e_{22})$$
$$\sigma_{12}=2c_{1212}e_{12}$$
$$\sigma_{23}=2c_{1212}e_{23}$$
$$\sigma_{31}=2c_{1212}e_{31} \tag{4.8}$$

由于（4.8）式是将各坐标轴作90°转动，认为其弹性关系不变而得到的方程式，因此通常称为正交各向同性体内的广义虎克定律。

对各向同性物质，坐标轴转动任意角度后，弹性关系不变，即应有

$$\sigma_{11}'=c_{1111}e_{11}+c_{1122}(e_{22}'+e_{33})$$
$$\sigma_{22}'=c_{1111}e_{22}'+c_{1122}(e_{11}'+e_{33})$$
$$\sigma_{33}'=c_{1111}e_{33}'+c_{1122}(e_{11}+e_{22}')$$
$$\sigma_{12}'=2c_{1212}e_{12}'$$
$$\sigma_{23}'=2c_{1212}e_{23}$$
$$\sigma_{31}'=2c_{1212}e_{31}' \tag{4.9}$$

现在取x_3'轴与x_3轴重合，x_1'轴与x_1轴间的夹角为φ（如图4—1）。很明显，x_i'系的各轴对x_j系各轴的方向余弦如表4—1所示。

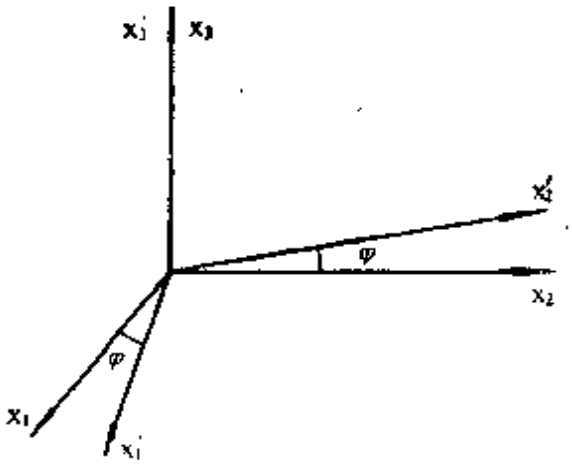


图 4—1

表 4—1

	x_1	x_2	x_3
x_1'	$\alpha_{11}(\cos\varphi)$	$\alpha_{12}(\sin\varphi)$	0
x_2'	$\alpha_{21}(-\sin\varphi)$	$\alpha_{22}(\cos\varphi)$	0
x_3'	0	0	1

将表 4 — 1 中所列方向余弦代入应力张量及应变张量的坐标变换公式（2.68）与（3.54）式，得

$$\sigma_1' = \alpha_{11}\alpha_{21}\sigma_{11} + \alpha_{11}\alpha_{22}\sigma_{12} + \alpha_{12}\alpha_{21}\sigma_{21} + \alpha_{12}\alpha_{22}\sigma_{22}$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2\varphi(\sigma_{22} - \sigma_{11}) + \cos 2\varphi \cdot \sigma_{12}$$

$$e_1' = \frac{1}{2}\sin 2\varphi(e_{22} - e_{11}) + \cos 2\varphi \cdot e_{12} \qquad (4.10)$$

将（4.10）式代入到（4.9）式中的第四式，得

$$\left[\frac{1}{2}\sin 2\varphi(\sigma_{22} - \sigma_{11}) + \cos 2\varphi \cdot \sigma_{12}\right]$$

$$= 2c_{1212}\left[\frac{1}{2}\sin 2\varphi(e_{22}-e_{11})+\cos 2\varphi\cdot e_{12}\right] \qquad (4.11)$$

因为 $\sigma_{12}=2c_{1212}e_{12}$，故上式可变为

$$\sigma_{22}-\sigma_{11}=2c_{1212}(e_{22}-e_{11}) \qquad (4.12)$$

再将（4.8）中的第一、第二式代入上式，得

$$(c_{1111}-c_{1122})(e_{22}-e_{11})=2c_{1212}(e_{22}-e_{11})$$

从而有

$$c_{1111}-c_{1122}=2c_{1212} \qquad (4.13)$$

由此可见，对各向同性物质来说，（4.8）式中三个弹性常数受（4.13）式的制约，故独立的弹性常数只有两个。若取 c_{1122} 和 c_{1212} 是独立的，则

$$c_{1111}=c_{1122}+2c_{1212} \qquad (4.14)$$

若令 $c_{1122}=\lambda$，$c_{1212}=\mu$，则上式成为

$$c_{1111}=\lambda+2\mu \qquad (4.15)$$

将其代入式（4.8），则得

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}&=\lambda\theta+2\mu e_{11}\\
\sigma_{22}&=\lambda\theta+2\mu e_{22}\\
\sigma_{33}&=\lambda\theta+2\mu e_{33}\\
\sigma_{12}&=2\mu e_{12}\\
\sigma_{23}&=2\mu e_{23}\\
\sigma_{31}&=2\mu e_{31}
\end{aligned} \qquad (4.16)$$

式中 $\theta=e_{11}+e_{22}+e_{33}$ 为体积应变。若将上式用哑指标表示，则为

$$\sigma_{ij}=\lambda\theta\delta_{ij}+2\mu e_{ij} \qquad (4.17)$$

（4.16）或（4.17）式即为各向同性体内以应变表示应力的广义虎克定律。

〔例 4—1〕用应力解除法计算地应力。

解 在测量地应力时，通常采用如下的办法，即在测量点钻一竖直小孔，将等角应变花或直角应变花水平地放入孔内，记下初

读数。然后在离孔壁较远处（一般是圆孔直径的3～5倍）开一同心圆槽，使中间的圆柱与周围岩体隔离，这时中间圆柱从原来受力状态卸载，应变花上出现新的读数。通过两次的读数便可判定三个水平方向上的线应变（或正应变）。设等角应变花的测量值为e_0，e_{60}，e_{120}，根据第三章中例3—1的讨论可知，平面应变分量为

$$e_{11}=e_0$$
$$e_{12}=(e_{60}-e_{120})/\sqrt{3}$$
$$e_{22}=[2(e_{60}+e_{120})-e_0]/3$$

欲求应力分量，只需将此应变分量代入（4.16）式便得

$$\sigma_{11}=\lambda\theta+2\mu e_{11}$$
$$=2[\lambda(e_0+e_{60}+e_{120})/3+\mu e_0]$$
$$\sigma_{22}=\lambda\theta+2\mu e_{22}$$
$$=2[(\lambda+2\mu)(e_{60}+e_{120})+(\lambda-\mu)e_0]/3$$
$$\sigma_{33}=\lambda\theta+2\mu e_{33}$$
$$=\lambda[3e_0+2(e_{60}+e_{120})-e_0]/3$$
$$=2\lambda(e_0+e_{60}+e_{120})/3$$
$$\sigma_{12}=2\mu e_{12}$$
$$=2\sqrt{3}\,\mu(e_{60}-e_{120})/3$$
$$\sigma_{23}=\sigma_{31}=0$$

式中的λ，μ为所求点的拉梅常数。

值得注意的是，在上述计算过程中，无形地假定了卸载前后圆柱体在竖直方向上没有相对伸长或相对缩短，这相当于竖直方向上的应变完全被限制住。限制应变的外力会使物体内部的应力发生改变。因此在竖直方向上虽然没有应变，但可有应力的作用。如果在竖直方向上不加如上假定，即对应真实的情况，则应按李四光的理论[4]（第一章第2节所述），忽略竖直方向上的应力分量，故求解应力分量的方程变为

$$\sigma_{11}=\lambda(e_{11}+e_{22}+e_{33})+2\mu e_{11}$$

$$\sigma_{22}=\lambda(e_{11}+e_{22}+e_{33})+2\mu e_{22}$$
$$\sigma_{33}=0=\lambda(e_{11}+e_{22}+e_{33})+2\mu e_{33}$$
$$\sigma_{12}=2\mu e_{12}$$
$$\sigma_{23}=\sigma_{31}=0$$

由此可求解出应力分量σ_{11}，σ_{22}，σ_{12}。式中e_{33}不可忽略，但通常小于e_{11}与e_{22}。

§4—3 以应力表示应变的广义虎克定律

在推导以应力表示应变的广义虎克定律之前，我们先考察拉梅常数λ、μ与杨氏模量E及泊松比ν之间的关系。设简单拉伸情况下的应力分量是$\sigma_{11}\neq 0$，$\sigma_{22}=\sigma_{33}=\sigma_{12}=\sigma_{23}=\sigma_{31}=0$（如图4—2）。若将其代入（4.16）式，则得

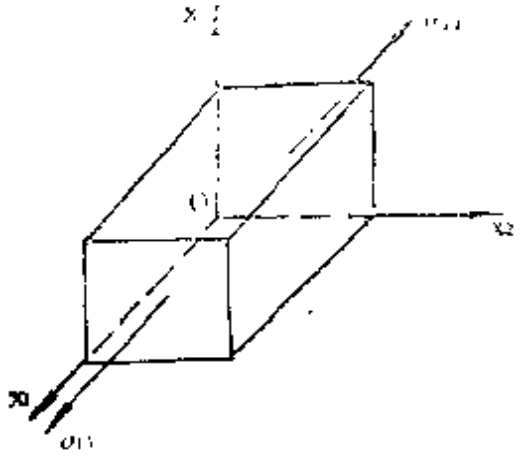


图 4—2

$$\lambda\theta+2\mu e_{11}=\sigma_{11}$$
$$\lambda\theta+2\mu e_{22}=0 \qquad (4.18)$$
$$\lambda\theta+2\mu e_{33}=0$$

将（4.18）式中的三式相加，考虑到$\theta=e_{11}+e_{22}+e_{33}$，得

$$\theta=\frac{1}{3\lambda+2\mu}\sigma_{11} \qquad (4.19)$$

再将（4.19）式代入（4.18）式中的第一式，得

$$\sigma_{11}=\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}e_{11} \tag{4.20}$$

对简单拉伸的情况，由第一章§1—4节的讨论知道，用杨氏模量 E 表示的一维情况下的虎克定律为

$$\sigma_{11}=Ee_{11} \tag{4.21}$$

将（4.20）式与（4.21）式进行比较，可得杨氏模量 E 与拉梅常数 λ、μ 之间的关系为

$$E=\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} \tag{4.22}$$

若将（4.19）式代入（4.18）式中的后二式，得

$$e_{22}=e_{33}=-\frac{\lambda}{2\mu}\theta$$

$$=-\frac{\lambda\sigma_{11}}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \tag{4.23}$$

再将（4.20）式代入上式，得

$$e_{22}=e_{33}=-\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}e_{11} \tag{4.24}$$

根据泊松比 ν 的定义（参阅第一章§1—4节）知

$$\nu=-\frac{\Delta b/b_0}{\Delta L/L_0}=-\frac{e_{22}}{e_{11}}=-\frac{e_{33}}{e_{11}}$$

上式可以改写为

$$e_{22}=e_{33}=-\nu e_{11} \tag{4.25}$$

将（4.24）式与（4.25）式进行比较，便得泊松比 ν 与拉梅常数 λ、μ 的关系为

$$\nu=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \tag{4.26}$$

利用（4.22）式和（4.26）式，我们还可以得到用杨氏模量与泊松比表示拉梅常数 λ 及 μ 的公式，即

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{4.27}$$

如果将（4.16）式中的前三式相加，则得

$$3\lambda\theta + 2\mu\theta = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

令$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \Theta$，则上式变为

$$(3\lambda + 2\mu)\theta = \Theta \tag{4.28}$$

将（4.27）式代入，得

$$\theta = \frac{1-2\nu}{E}\Theta \tag{4.29}$$

（4.28）式或（4.29）式即为通常所说的体积应变定律。

下面我们推导以应力表示应变的广义虎克定律。

将体积应变定律（4.29）式代入以应变表示应力的广义虎克定律（4.16）式中的第一式，得

$$\sigma_{11} = \frac{\lambda(1-2\nu)}{E}\Theta + 2\mu e_{11}$$

再将（4.27）式代入上式，得

$$e_{11} = -\frac{\nu}{E}\Theta + \frac{1+\nu}{E}\sigma_{11} \tag{4.30}$$

同理，可得

$$e_{22} = -\frac{\nu}{E}\Theta + \frac{1+\nu}{E}\sigma_{22}$$

$$e_{33} = -\frac{\nu}{E}\Theta + \frac{1+\nu}{E}\sigma_{33} \tag{4.31}$$

如果将（4.27）式代入（4.16）式的后三式，直接可得

$$e_{12} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{12}$$

$$e_{23}=\frac{1+\nu}{E}\sigma_{23}$$

$$e_{31}=\frac{1+\nu}{E}\sigma_{31} \tag{4.32}$$

(4.30)、(4.31)式和(4.32)式可合为下式，即

$$e_{11}=-\frac{\nu}{E}\Theta+\frac{1+\nu}{E}\sigma_{11}$$

$$e_{22}=-\frac{\nu}{E}\Theta+\frac{1+\nu}{E}\sigma_{22}$$

$$e_{33}=-\frac{\nu}{E}\Theta+\frac{1+\nu}{E}\sigma_{33}$$

$$e_{12}=\frac{1+\nu}{E}\sigma_{12}$$

$$e_{23}=\frac{1+\nu}{E}\sigma_{23} \tag{4.33}$$

$$e_{31}=\frac{1+\nu}{E}\sigma_{31}$$

上式也可用哑指标形式简记为

$$e_{ij}=-\frac{\nu}{E}\Theta\delta_{ij}+\frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} \tag{4.34}$$

(4.33)与(4.34)式就是我们推导的以应力表示应变的广义虎克定律。

〔例4—2〕 弹性体中某一点在x_1、x_2方向上的正应力为$\sigma_{11}=1\mathrm{N/mm^2}$、$\sigma_{22}=2\mathrm{N/mm^2}$，沿$x_3$方向上的应变完全被限制住，试求$e_{11}$、$e_{22}$和$\sigma_{33}$（$E=2.1\times10^5\mathrm{N/mm^2}$，$\nu=0.3$）

解 此题有两种解法，一是利用以应力表示应变的广义虎克定律，列出

$$e_{11}=-\frac{\nu}{E}\Theta+\frac{1+\nu}{E}\sigma_{11}$$

$$e_{22}=-\frac{\nu}{E}\Theta+\frac{1+\nu}{E}\sigma_{2}$$

$$0=-\frac{\nu}{E}\Theta+\frac{1+\nu}{E}\sigma_{33}$$

式中 ν、E、σ_{11}、σ_{22}均为已知量，$\Theta=\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}$。由此三个方程可求出三个未知数$e_{11}$，$e_{22}$，$\sigma_{33}$，即

$$\sigma_{33}=\frac{\nu(1-\nu)(\sigma_{11}+\sigma_{33})}{(1+\nu)(1-2\nu)+2\nu^2}=0.894\mathrm{N/mm^2}$$

$$e_{11}=-\frac{\nu}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})+\frac{1+\nu}{E}\sigma_{11}$$

$$=6.27\times10^{-7}$$

$$e_{22}=-\frac{\nu}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})+\frac{1+\nu}{E}\sigma_{22}$$

$$=6.82\times10^{-6}$$

此题的第二种解法是应用以应变表示应力的广义虎克定律，列如下方程：

$$\sigma_{11}=\lambda(e_{11}+e_{22})+2\mu e_{11}$$
$$\sigma_{22}=\lambda(e_{11}+e_{22})+2\mu e_{22}$$
$$\sigma_{33}=\lambda(e_{11}+e_{22})$$

式中 λ 和 μ 可由E、ν求得，故由此三个方程也可求出三个未知量σ_{33}，e_{11}，e_{22}。其结果与前一种解法完全相同。此外，本题还可以同时应用两个广义虎克定律混合求解，此处不再赘述。

§4—4 应变位能

前面已经讲过，物体在外力作用下要产生变形，对完全弹性

体来说，当外载撤除后，物体将恢复到受力前的状态。从这一点出发，我们可以把外力作用使物体发生形变看成是外力对物体作功，而外力撤除物体恢复原来形状过程看成是物体的释能过程。因此，对完全弹性物体，当其发生变形后将在弹性体内储存一定的能量，这个能量就是应变位能。

由于物体所受之力可分为体力 ρf_i 与面力 $\sigma_{n\cdot i}$，因此外力对物体作功也应是体力作功与面力作功之和。对体力来说，它对物体所作的功，可以写为如下形式，即

$$A_p = \int_V \rho(f_1\delta u_1 + f_2\delta u_2 + f_3\delta u_3)dV \tag{4.35}$$

其中 δu_i 为在体力作用下体积元 dV 在坐标轴 x_i 方向上所产生的位移。上式还可以写成 $A = \int_V \rho(f_i\delta u_i)dV$ (4.36)

同样，面力对物体所作的功，可以写成

或写成 $A_s = \oint_s (\sigma_{n1}\delta u_1 + \sigma_{n2}\delta u_2 + \sigma_{n3}\delta u_3)ds$ (4.37)

$$A_s = \oint_s \sigma_{n\cdot i}\delta u_i ds \tag{4.38}$$

考虑到 $\sigma_{n\cdot i} = \sigma_{ji}n_j$，上式可变为

$$A_s = \oint_s \sigma_{ji}n_j\delta u_i ds \tag{4.39}$$

利用第一章 § 1—1 中所讲的高斯定理

$$\oint_s A_i n_i ds = \int_V \frac{\partial A_i}{\partial x_i} dV$$

可将 (4.39) 式化为

$$A_s = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ji}\delta u_i)dV$$

$$= \int_V \left(\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j}\delta u_i + \sigma_{ji}\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j}\right)dV \tag{4.40}$$

因此，总功 A 应为

$$A = A_p + A_s$$

$$=\int_V\left[\left(\rho f_i+\frac{\partial\sigma_{ji}}{\partial x_j}\right)\delta u_i+\sigma_{ji}\delta\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right]dV \tag{4.41}$$

由前面所讲的平衡微分方程

$$\frac{\partial\sigma_{ji}}{\partial x_j}+\rho f_i=0$$

可知，当物体处于平衡状态时，总功A为

$$A=\int_V\sigma_{ji}\delta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)dV \tag{4.42}$$

此式还可以写成

$$A=\int_V\frac{1}{2}\left[\sigma_{ji}\delta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)+\sigma_{ji}\delta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)\right]dV$$

$$=\int_V\frac{1}{2}\left[\sigma_{ji}\delta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)+\sigma_{ij}\delta\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right]dV$$

（某项中重复指标换记为别的指标不影响结果）

$$=\int_V\frac{1}{2}\sigma_{ji}\delta\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)dV$$

$$(\because\sigma_{ji}=\sigma_{ij})$$

$$=\int_V\sigma_{ji}\delta e_{ji}dV \tag{4.43}$$

（4.43）式即为外力作功的表示式。式中e_{ji}为应变张量，σ_{ji}为应力张量。而$\sigma_{ji}\delta e_{ji}$为体积元内外力所做的功，若用符号δA表示，则有

$$\delta A=\sigma_{ji}\delta e_{ji} \tag{4.44}$$

如前所述，对完全弹性体（弹性力学基本假设之一）来说，外力做功使物体的形状发生改变，而外力撤除后物体恢复原来形状，在变形前后物体内部无耗散力做功，或者说外力对物体做功完全转变为物体的形变能量。因此有

$$\delta A=\delta W=\sigma_{ji}\delta e_{ji} \tag{4.45}$$

其中δW为体积元内的应变位能。因为当e_{ji}趋于零时，δW也

趋于零，所以应变位能是物体状态的单值函数，于是上式可写为

$$\frac{\partial W}{\partial e_{ji}}=\sigma_{ji} \tag{4.46}$$

同时，因为应变位能是物体状态的单值函数，所以应变位能W也可用下列函数形式表示，即

$$W=f(e_{ji}) \tag{4.47}$$

对小变形（弹性力学基本假设之一）物体而言，应变位能函数W可作如下的泰勒展开：

$$W=a_0+b_{ji}e_{ji}+\frac{1}{2}c_{jikl}e_{ji}e_{kl}+0(e^2) \tag{4.48}$$

式中a_0，b_{ji}，c_{jikl}代表常数，$0(e^2)$代表比e^2更高级的无穷小量。若将（4.48）式对e_{ji}求导，得

$$\frac{\partial W}{\partial e_{ji}}=b_{ji}+c_{jikl}e_{kl} \tag{4.49}$$

与（4.46）式对比，有

$$\sigma_{ji}=b_{ji}+c_{jikl}e_{kl} \tag{4.50}$$

由于在无初始应力（弹性力学基本假设之一）状态下，物体的应力分量为零时应变分量亦为零。将此结论应用到（4.50）式中，则有$b_{ji}=0$。因此（4.50）式变为

$$\sigma_{ji}=c_{jikl}e_{kl} \tag{4.51}$$

将上式代入到（4.48）式中，得

$$W=\frac{1}{2}\sigma_{ji}e_{ji} \tag{4.52}$$

此式即为应变位能公式。将其展开，则有

$$W=\frac{1}{2}(\sigma_{11}e_{11}+\sigma_{22}e_{22}+\sigma_{33}e_{33}+2\sigma_{12}e_{12}+2\sigma_{23}e_{23}+2\sigma_{31}e_{31}) \tag{4.53}$$

对各向同性物体来说，应力张量与应变张量之间的关系由（4.17）或（4.34）式决定。因此，在已知应变张量的情况下，可将

(4.17) 式代入 (4.52) 式，得

$$W=\frac{1}{2}(\lambda\theta\delta_{ji}+2\mu e_{ji})e_{ji}$$

$$=\frac{1}{2}\lambda\theta e_{ji}\delta_{ji}+\mu e_{ji}e_{ji}$$

因为 $e_{ji}\delta_{ji}=e_{11}+e_{22}+e_{33}=\theta$，所以

$$W=\frac{1}{2}\lambda\theta^2+\mu e_{ji}e_{ji} \tag{4.54}$$

这便是以应变张量表示应变位能的公式。同样，如果将 (4.34) 式代入 (4.52) 式，我们还可以得到以应力张量表示应变位能的公式，亦即

$$W=\frac{1}{2}\sigma_{ji}\left[-\frac{\nu}{E}\Theta\delta_{ji}+\frac{1+\nu}{E}\sigma_{ji}\right]$$

$$=\frac{1+\nu}{2E}\sigma_{ji}\sigma_{ji}-\frac{\nu}{2E}\Theta\sigma_{ji}\delta_{ji}$$

因为 $\sigma_{ji}\delta_{ji}=\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}=\Theta$，所以有

$$W=\frac{1}{2E}[(1+\nu)\sigma_{ji}\sigma_{ji}-\nu\Theta^2] \tag{4.55}$$

〔例 4—3〕 已知弹性物体中任一点的位移分量为 $u_1=10\times10^{-3}+0.1\times10^{-3}x_1x_2+0.05\times10^{-3}x_3$，$u_2=5\times10^{-3}-0.05\times10^{-3}x_1+0.1\times10^{-3}x_2x_3$，$u_3=10\times10^{-3}-0.1\times10^{-3}x_1x_2x_3$。杨氏模量与泊松比分别为 $E=2.1\times10^5\mathrm{N/mm^2}$，$\nu=0.3$。试求点 A（1，1，1）的应变位能。

解 为求应变位能，首先由位移分量求出应变分量。利用 (3.8) 式，可得

$$e_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}=0.1\times10^{-3}x_2=0.1\times10^{-3}$$

$$e_{22}=\frac{\partial u_2}{\partial x_2}=0.1\times10^{-3}x_3=0.1\times10^{-3}$$

$$e_{33}=\frac{\partial u_3}{\partial x_3}=-0.1\times10^{-3}x_1x_2=-0.1\times10^{-3}$$

$$e_{12}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)=0.025\times10^{-3}$$

$$e_{23}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)=0$$

$$e_{31}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)=-0.025\times10^{-3}$$

再利用以应变张量表示应变位能的（4.54）式，可得

$$W=\frac{1}{2}\lambda\theta^2+\mu e_{ij}e_{ij}$$

$$=\frac{1}{2}\lambda(e_{11}+e_{22}+e_{33})^2+\mu[e_{11}^2+e_{22}^2+e_{33}^2$$

$$+2e_{12}^2+2e_{23}^2+2e_{31}^2]$$

式中 λ、μ 可由（4.27）式求得，即

$$\lambda=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}=\frac{0.3\times2.1\times10^5}{(1+0.3)(1-2\times0.3)}$$

$$(\mathrm{N/mm^2})$$

$$=1.21\times10^5\mathrm{N/mm^2},$$

$$\mu=\frac{E}{2(1+\nu)}=\frac{2.1\times10^5}{2(1+0.3)}(\mathrm{N/mm^2})$$

$$=0.81\times10^5\mathrm{N/mm^2}$$

将其代入前式并利用已求得的各应变分量，有

$$W=\{\frac{1}{2}\times1.21\times10^5(0.1\times10^{-3}+0.1\times10^{-3}-0.1\times10^{-3})^2$$

$$+0.81\times10^5[(0.1\times10^{-3})^2+(0.1\times10^{-3})^2$$

$$+(-0.1\times10^{-3})^2+2\times(0.025\times10^{-3})^2+2\times0+2$$

$$\times(-0.025\times10^{-3})^2]\}(\mathrm{N/mm^2})$$

$$= 3.23 \times 10^{-3} \mathrm{N/mm^2}$$
$$= 3.23 \times 10^{-3} \mathrm{N \cdot mm/mm^3}$$
$$= 3.23 \times 10^{-6} \mathrm{J/mm^3}$$

由此可见，一点的应变位能实际上是指该点单位体积内所具有的应变能量。

§4—5 应变位能与弹性常数的关系

对完全弹性体来说，应变位能与应变张量及应力张量的微分关系由（4.46）式所确定，即

$$\frac{\partial W}{\partial e_{ij}} = \sigma_{ij} \tag{4.56}$$

由于完全弹性体所构成的系统可以看成是保守系统，因此由（4.56）式推导出的弹性常数间的关系，自然对保守系统成立。

下面我们利用（4.56）式推导保守系统内的弹性常数间的关系。取（4.56）式中的 $i=j=1$ 并考虑到（4.1）式，得

$$\frac{\partial W}{\partial e_{11}} = \sigma_{11} = c_{1111}e_{11} + c_{1122}e_{22} + c_{1133}e_{33} + (c_{1112} + c_{1121})e_{12} + (c_{1123} + c_{1132})e_{23} + (c_{1113} + c_{1131})e_{31} \tag{4.57}$$

同样，若取 $i=j=2$，则

$$\frac{\partial W}{\partial e_{22}} = \sigma_{22} = c_{2211}e_{11} + c_{2222}e_{22} + c_{2233}e_{33} + (c_{2212} + c_{2221})e_{12} + (c_{2223} + c_{2232})e_{23} + (c_{2213} + c_{2231})e_{31} \tag{4.58}$$

因为应变位能是物体状态的单值函数，因此有

$$\frac{\partial^2 W}{\partial e_{11}\partial e_{22}} = \frac{\partial^2 W}{\partial e_{22}\partial e_{11}} \tag{4.59}$$

将（4.57）式及（4.58）式代入上式，得

$$\frac{\partial}{\partial e_{22}}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{11}}\right)=c_{1122}$$

$$\frac{\partial}{\partial e_{11}}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{22}}\right)=c_{2211} \tag{4.60}$$

由此得

$$c_{1122}=c_{2211} \tag{4.61}$$

同理，可以证明(4.1)式中其它系数间也存在两两相等或简单的2倍关系，如$c_{2233}=c_{3322}$，$c_{1133}=c_{3311}$，$c_{1113}=c_{1131}=c_{3111}$（即$c_{1113}+c_{1131}=2c_{3111}$）等等。写成数学表示式则为

$$c_{ijkl}=c_{ijlk}$$

$$c_{ijkl}=c_{klij} \tag{4.62}$$

因此，对一个保守系统来说，弹性常数的数目应为（4.4）式中6个对角元素与15个独立的非对角元素之和，计21个。它是极端各向异性物质内的弹性常数。对于不同的物质，独立的弹性常数不同。现将各晶系的弹性常数列于表4—2中，以作参考。

各晶系的弹性常数　　表4—2

三斜晶系	单斜晶系	斜方晶系	正方晶系	六角晶系	立方晶系	各向同性体
21	13	9	7	5	3	2

习题与参考答案四

1．试写出一般情况下以应力表示应变的广义虎克定律。

2．试写出正交各向异性体内以应力表示应变的广义虎克定律。

3．试写出正交各向同性体内以应力表示应变的广义虎克定律。

4．利用坐标轴旋转180°的方法，证明各向同性体的主应力与主应变重合。

提示：选应变主轴与坐标轴重合，此时$\sigma_{12}=c_{1211}e_1+c_{1222}e_2+c_{1233}e_3$（$\because e_{12}=e_{23}=e_{31}=0$）。将坐标轴绕$x_2$轴旋转180°，则有$\sigma_{12}'$

$=c_{1211}e_1'+c_{1222}e_2'+c_{1233}e_3'$。然后利用$e_1=e_1'$，$e_2=e_2$，$e_3=e_3'$，$\sigma_{12}=-\sigma_{12}'$，便可证明$\sigma_{12}=0$，同理可证明$\sigma_{23}=\sigma_{31}=0$。因此，主应力的方向与主应变的方向重合。

5．已知在应力解除法计算地应力的过程中，由直角应变花测量的线应变值（或正应变）分别为e_0，e_{45}，e_{90}，试求地应力平面分量σ_{11}，σ_{22}，σ_{12}（设λ、μ为已知，且$e_{33}=0$）。

〔答案：$\sigma_{11}=(\lambda+2\mu)e_0+\lambda e_{90}$，$\sigma_{22}=(\lambda+2\mu)e_{90}+\lambda e_0$，$\sigma_{12}=\mu(2e_{45}-e_0-e_{90})$〕

6．已知在用应力解除法计算地应力的过程中，由与x_1轴正向成30°，60°、90°的方向上测得的应变值分别为e_{30}、e_{60}、e_{90}，试求平面地应力分量σ_{11}，σ_{22}，σ_{12}（设λ、μ为已知，且$e_{33}=0$）。

〔答案：$\sigma_{11}=2[(\lambda+2\mu)(e_{30}-e_{60})+(\lambda+\mu)e_{90}]$，$\sigma_{22}=2[\lambda(e_{30}-e_{60}+e_{90})+\mu e_{90}]$，$\sigma_{12}=-2\sqrt{3}\mu(e_{30}-3e_{60}+2e_{90})/3$〕

7．已知弹性体中任一点的位移分量为 $u_1=A_0+A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3$，$u_2=B_0+B_1x_1+B_2x_2+B_3x_3$，$u_3=c_0+c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3$，弹性体的杨氏模量与泊松比为$E$与$\nu$，试求弹性体中任一点的应力分量。

〔答案：$\sigma_{11}=E[(\nu A_1+B_2+C_3)/(1-2\nu)+A_1]/(1+\nu)$，$\sigma_{22}=E[\nu(A_1+B_2+C_3)/(1-2\nu)+B_2]/(1+\nu)$，$\sigma_{33}=E[\nu(A_1+B_2+C_3)/(1-2\nu)+C_3]/(1+\nu)$，$\sigma_{12}=E(B_1+A_2)/2(1+\nu)$，$\sigma_{23}=E(C_2+B_3)/2(1+\nu)$，$\sigma_{31}=E(A_3+C_1)/2(1+\nu)$〕

8．将某一小的弹性物体放入高压容器内，在静水压力为$P=0.45\text{N}/\text{mm}^2$的作用下，测得体积应变为$\theta=-3.6\times10^{-5}$，若$\nu=0.3$，试求该物体的杨氏模量$E$。

〔答案：$E=1.5\times10^4\text{N}/\text{mm}^2$〕

9．弹性体中某一点在x_1和x_2方向上的正应力分别为$\sigma_{11}=35\text{N}/\text{mm}^2$，$\sigma_{22}=25\text{N}/\text{mm}^2$，而沿$x_3$方向的应变完全被限制住。试求$\sigma_{33}$（$E=2.1\times10^5\text{N}/\text{mm}^2$，$\nu=0.3$）。

〔答案：$\sigma_{33}=18\text{N}/\text{mm}^2$〕

10．将橡皮方块放入与它同样体积的铁盒内，在顶部用铁盖封闭，使铁盖上面承受均匀压应力P（如图4—3），假设铁盖可视为刚体，在橡皮与铁之间无摩擦。试求铁盒内侧面所受到的压应力以及橡皮块的体积应变。若将橡皮块看成刚体或不可压缩时，其体积应变将有什么变化？

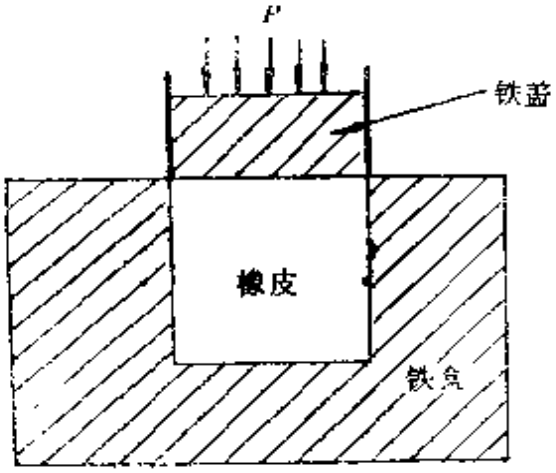


图 4—3

〔答案：$\sigma_{11}=\nu_{22}=\nu P/(1-\nu)$；$\theta=e_{33}=-P(1+\nu)(1-2\nu)/E(1-\nu)$；当换成刚体时，$E\to\infty$，$\theta=0$〕

11．已知由直角应变花测得的正应变值分别为 $e_0=130\times10^{-6}$，$e_{45}=75\times10^{-6}$，$e_{90}=130\times10^{-6}$，试求主应变。

〔答案：$e_1=185\times10^{-6}$，$e_2=75\times10^{-6}$，$e_3=0$〕

12．已知地球表面某点岩石的弹性常数为 $E=2.1\times10^5\mathrm{N/mm^2}$，$\nu=0.3$，测得$x_1$方向上的正应变为 $e_0=-100\times10^{-6}$，与 x_1 成 60° 和 90° 方向上的正应变为 $e_{60}=50\times10^{-6}$ 和$e_{90}=150\times10^{-6}$，试求该点的主应力。

〔答案：$\sigma_1=29.1\mathrm{N/mm^2}$，$\sigma_2=8.9\mathrm{N/mm^2}$，$\sigma_3=0$〕

13．已知弹性体中任一点的位移分量为 $u_1=A_0+A_1x_1$，$u_2=B_0+B_1x_1+B_2x_2$，$u_3=C_0+C_1x_2+C_2x_3$，试求任一点的应变位能（λ、μ为已知）。

〔答案：$W=[\lambda(A_1+B_2+C_2)^2+\mu(2A_1^2+2B_2^2+2C_2^2+B_2^1+C^1)]/2$〕

14．已知弹性体内某点的应力分量为 σ_{11}，σ_{22}，σ_{33}，σ_{12}，σ_{23}，σ_{31}，若该弹性体的拉梅常数为 λ、μ，试写出以此应力分量和拉梅常数表示的应变位能的表达式。

15．试写出坐标轴与应变主轴重合时的应变位能的表达式。

16．设弹性物体中任一点的位移分量为 $u_1=10^{-3}+0.2\times10^{-3}x_1x_2+0.1\times10^{-3}x_3$，$u_2=2\times10^{-3}+0.1\times10^{-3}x_1+0.2\times10^{-3}x_2x_3$，$u_3=10^{-3}-0.2\times10^{-3}x_1x_2x_3$。试计算点 $A(1,\ 2,\ 3)$ 的应变位能（$E=2.1\times10^5\mathrm{N/mm^2}$，$\nu=0.3$）。

〔答案：$W=1.093\times10^{-4}\mathrm{J/mm^3}$〕

第五章 线性弹性动力学基础

在前面几章里，我们研究了弹性力学的静力学问题，即在一定的边值条件下弹性体处于平衡状态时的应力、应变及能量等问题，亦即稳定场问题。从本章起我们将研究弹性媒质的动力学问题，即在非稳定条件下弹性体的位移、应变、应力及能流等问题，亦即弹性媒质的波动问题。为此，本章介绍有关弹性波动的基础知识，其中包括波动方程、标量势及矢量势、波的能流密度矢量等。

§5—1 弹性媒质的位移场方程

本节将从描写弹性媒质的运动方程出发，利用应变与位移之关系及广义虎克定律推导出运动方程的另一种形式——位移场方程，亦即纳维方程。

一、弹性动力学基本方程

我们知道扰动的传播形成波动。在弹性媒质里，机械扰动的传播形成弹性波动，简称弹性波。弹性媒质动力学主要研究波的产生与传播的规律，进而弄清弹性媒质的位移矢量场、应变以及应力张量场随时间的变化情况，亦即寻求 $u_i(r, t)$、$e_{j,i}(r, t)$、$\sigma_{j,i}(r, t)$。因此，必须求解下列基本方程：

$$\frac{\partial \sigma_{j,i}}{\partial x_j} + \rho f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \tag{5.1}$$

$$e_{j,i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{5.2}$$

$$e_{ij}=-\frac{\nu}{E}\Theta\delta_{ij}+\frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} \tag{5.3}$$

或者 $$\sigma_{ij}=\lambda\theta\delta_{ij}+2\mu e_{ij} \tag{5.4}$$

但是，仅有这些方程还是不够的。对于具体问题尚须给出一定的边值条件和初值条件才能确定唯一的解。

边值条件可以有下面几种情况。

1．**应力边界条件** 已知物体表面所受外力S_{*i}。此时表面应力与外力平衡，于是有$S_{*i}=\sigma_{ji}n_j$。

2．**位移边界条件** 已知物体表面的位移$u_i(s)$，即$u_i=u_i(s)$（在表面上）。

3．**混合边界条件** 如物体表面的某一部分给出的是所受外力S_{*i}，面其余部分给出的是位移$u_i(s')$。

问题的初始条件是指当 $t=0$时质点的初始位移 $u_{0i}(r)$ 和初始速度$V_{0i}(r)$。可以写做如下形式：

$$u_i(r,0)=u_{0i}(r)\qquad \dot{u}_i(r,0)=V_{0i}(r) \tag{5.5}$$

二、纳维(Navier)方程

方程（5.1）、（5.2）、（5.4）式共组成15个方程，面未知量u_i、e_{ij}、σ_{ij}也是15个。如果联立求解上述方程不但计算量大，而且常常是很烦难的。为减少计算上的麻烦尽量减少未知量的数目，通常将(5.1)式化成以位移u_i作为基本未知量的形式，即

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_j}+\rho\left(f_i-\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\right)=0 \tag{5.6}$$

这就是著名的纳维方程。如果边界条件给出的是位移，则(5.6)式直接可用，面协调方程自然满足。如果边界条件给出的是外力，则可由各关系式化成u_i在边界上应满足的方程。地震学的许多动力学问题就是沿着这条路线求解的。

下面我们来推导纳维方程。将(5.2)、(5.4)式代入（5.1）

式中得

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\lambda\theta\delta_{ij}) + \frac{\partial}{\partial x_j}\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \rho f_i$$

$$= \theta\delta_{ij}\frac{\partial\lambda}{\partial x_j} + \lambda\delta_{ij}\frac{\partial\theta}{\partial x_j} + \lambda\theta\frac{\partial\delta_{ji}}{\partial x_j} + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial\mu}{\partial x_j}$$

$$+ \mu\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j\partial x_i} + \mu\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i\partial x_j} + \rho f_i = \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \qquad (5.7)$$

其中$\theta = \partial u_j/\partial x_j$，$\partial\delta_{ji}/\partial x_j = 0$，$\partial^2 u_j/\partial x_j\partial x_i = \partial\theta/\partial x_i$。对于均匀各向同性弹性媒质有 $\partial\lambda/\partial x_j = \partial\mu/\partial x_j = 0$，于是（5.7）式化为

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x_i} + \mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_j} + \rho f_i = \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \qquad (5.8)$$

也可写成一般的矢量形式：

$$(\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) + \nabla^2\mu\boldsymbol{u} + \rho\boldsymbol{f} = \rho\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2} \qquad (5.9)$$

将 $\theta = \nabla\cdot\boldsymbol{u}$ 代入（5.9），则得

$$(\lambda+\mu)\nabla\theta + \mu\nabla^2\boldsymbol{u} + \rho\boldsymbol{f} = \rho\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2} \qquad (5.10)$$

（5.9）式即位移矢量场方程，也称之为纳维方程。(5.8)、(5.10)式是它的两种不同表达形式。纳维方程包含着弹性力学所依据的力学、几何学和物理学三方面的条件在内。它们分别是：

1．表示物体内每个微分体的运动方程；

2．变形的几何要素u_i和θ；

3．确定物体的弹性和密度的参数λ、μ和ρ。

总之，纳维方程（5.9）式是用位移表达的均匀各向同性弹性体的运动方程。几乎可以说，线性弹性固体的整个理论，就是要在上边列举的那些类型的边界条件和初值条件下求解纳维方程。

§5—2 无旋波与无散波

均匀各向同性弹性体的位移场满足纳维方程（5.10）式，重写如下：

$$(\lambda+\mu)\nabla\theta+\mu\nabla^2\boldsymbol{u}+\rho\boldsymbol{f}=\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2} \tag{5.11}$$

回顾一下矢量分析理论可知，斯托克斯－亥姆霍兹矢量分解定理可以表述为：任何一个足够平滑的矢量场都可以分解成无旋的和无散的部分。由此对位移矢量场进行分解可得

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_{(1)}+\boldsymbol{u}_{(2)}$$

且 $\nabla\times\boldsymbol{u}_{(1)}=0$，$\nabla\cdot\boldsymbol{u}_{(2)}=0$，于是有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=\nabla\cdot\boldsymbol{u}_{(1)} \qquad \nabla\times\boldsymbol{u}=\nabla\times\boldsymbol{u}_{(2)}$$

无旋位移场的散度是弹性体的胀缩应变场，无散位移场的旋度对应弹性体的转动情形。在非稳定条件下，这两种场分别以波的形式运动着，故分别叫做无旋波和无散波，也称之为胀缩波和等体积波。下面我们对这两种波分别进行研究。

一、无 旋 波

对（5.11）式两边取散度，利用算符∇、∇^2及$\partial^2/\partial t^2$之间的对易关系可得

$$(\lambda+\mu)\nabla\cdot\nabla\theta+\mu\nabla\cdot\nabla^2\boldsymbol{u}+\rho\nabla\cdot\boldsymbol{f}=\rho\nabla\cdot\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2}$$

或者

$$(\lambda+2\mu)\nabla^2\theta+\rho\nabla\cdot\boldsymbol{f}=\rho\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}$$

也可化为

$$v_p^2\nabla^2\theta+\nabla\cdot\boldsymbol{f}=\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} \tag{5.12}$$

其中

$$v_p=[(\lambda+2\mu)/\rho]^{1/2} \tag{5.13}$$

由（5.13）式可知v_p，是个具有速度量纲的恒量。方程（5.12）式是传播速度为v_p的无旋场的非齐次波动方程。可见，在一种均匀各向同性弹性媒质中，胀缩扰动以速度v_p传播着，我们称之为胀缩波或弹性纵波，在地震学上则称之为P波。v_p即为纵波速度。

若只研究波的传播，不考虑波源的影响，可令$f=0$，于是（5.12）式化为

$$\nabla^2\theta=\frac{1}{v_p^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} \tag{5.14}$$

这是弹性纵波传播时体积应变θ满足的齐次波动方程。

二、无 散 波

对（5.11）式两边取旋度可得

$$\mu\nabla^2(\nabla\times\boldsymbol{u})+\rho\nabla\times\boldsymbol{f}=\rho\frac{\partial^2(\nabla\times\boldsymbol{u})}{\partial t^2} \tag{5.15}$$

弹性体发生剪切形变时，由于转动很小，由矢量分析可知，可以把

$$\boldsymbol{\Omega}=\frac{1}{2}\nabla\times\boldsymbol{u} \tag{5.16}$$

表示为体积元的角位移矢量。将（5.16）式代入（5.15）式可得

$$v_s^2\nabla^2\boldsymbol{\Omega}+\frac{1}{2}\nabla\times\boldsymbol{f}=\frac{\partial^2\boldsymbol{\Omega}}{\partial t^2} \tag{5.17}$$

其中

$$v_s=(\mu/\rho)^{1/2} \tag{5.18}$$

v_s是个具有速度量纲的恒量。方程（5.17）式是传播速度为v_s的无散位移场的非齐次矢量波动方程。可见旋转扰动以速度v_s传播着，我们称之为切变波或弹性横波。地震学上则称之为S波。v_s即横波速度。

若只研究横波的传播，可以不考虑波源的影响。令$f=0$，可由（5.17）Ω式得到满足的齐次矢量波动方程

$$\nabla^2\Omega=\frac{1}{v_s^2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2} \tag{5.19}$$

由（5.18）式可知，横波速度v_s只依赖于密度ρ和剪切模量μ，而胀缩波速度v_p似乎应当与μ无关，而只应当与密度ρ和压缩模量K有关。但是，由（5.13）式可知，v_p与μ有关。由于$K=\lambda+2\mu/3$，若以K、μ作为独立参数，则$v_p=[(K+4\mu/3)/\rho]^{1/2}$。因此，$v_p$既依赖于体积压缩模量$K$，又依赖于剪切模量$\mu$。这说明，在胀缩波传播时，媒质不是只承受一个简单的压缩，而承受的是压缩和剪切的组合。我们设想在平面胀缩波传播的路径上有一个微小的立方体，当波通过它时，垂直于传播方向的横截面的面积将保持不变，而传播方向上的尺寸改变了。因此，当它的体积改变时，单元体的形状也同时改变。在抗压或拉伸的同时，媒质也抵抗了剪切。

三、波速比

由（5.13）、（5.18）两式可见，固体媒质既能传播纵波也能传播横波。对于理想流体，由于$\mu=0$，故只能传播纵波而不能传播横波。地球的外核由于没有横波通过，它应当属于流态性质。

纵波与横波之波速比为

$$\frac{v_p}{v_s}=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\mu}}=\sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}} \tag{5.20}$$

很多固体，特别是地表附近的岩石，其泊松比ν接近于1/4，这时拉梅常数$\lambda=\mu$，$v_p=\sqrt{3}\,v_s$。在地震及震法勘探的实际工作中，常常利用测定波速比预报地震和寻找天然油气藏。

§5—3 标量势与矢量势

纳维方程(5.9)式的微分算符结构比较复杂，往往是很难积分

的。但是，可以将u通过某种变换导致比较简单常见的微分方程。这种变换常常要引入势函数，其中比较简便的一种是引入拉梅势。

一、拉梅（Lame）势

根据斯托克斯－亥姆霍兹矢量分解定理，位移矢量场可以分解成无旋场与无散场两个部分。如果位移矢量$u(r, t)$是纳维方程的二次可微解，那么就存在一个标量势函数$\phi(r, t)$和一个矢量势函数$\psi(r, t)$，使得位移$u(r, t)$写做

$$u(r, t) = \nabla\phi(r, t) + \nabla \times \psi(r, t) \tag{5.21}$$

式中的$\phi(r, t)$称为位移矢量场的标量势函数，$\psi(r, t)$则称为位移矢量场的矢量势函数。同理，对于单位质量的体力$f(r, t)$，也存在一个标量势函数$F(r, t)$，与一个矢量势函数$A(r, t)$[1]，使得$f(r, t)$表示为

$$f(r, t) = \nabla F(r, t) + \nabla \times A(r, t) \tag{5.22}$$

则$\phi(r, t)$、$\psi(r, t)$称为拉梅势。

二、以势函数表示的波动方程

把（5.21）、（5.22）式代入（5.9）式可得

$$(\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot(\nabla\phi+\nabla\times\psi)+\mu\nabla^2(\nabla\phi+\nabla\times\psi)$$
$$+\rho(\nabla F+\nabla\times A)=\rho(\ddot{\nabla\phi}+\nabla\times\ddot{\psi}) \tag{5.23}$$

整理后化成

$$\nabla[(\lambda+2\mu)\nabla^2\phi+\rho F-\rho\ddot{\phi}]+\nabla\times[\mu\nabla^2\psi$$
$$+\rho A-\rho\ddot{\psi}]=0 \tag{5.24}$$

为使（5.24）式在所研究的空间域V和时间域(t_1, t_2)中成立，方括号内的值应为零。于是得

$$v_p^2\nabla^2\phi+F=\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \tag{5.25}$$

$$v_s^2\nabla^2\psi+A=\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{5.26}$$

方程（5.25）式是位移矢量场的标势 ϕ 所满足的非齐次标量波动方程；方程（5.26）式是位移矢量场的矢势所满足的非齐次矢量波动方程。它们称之为达朗贝尔（D'Alembert）方程。这是波源与波特性相互联系的方程。

对于波的传播问题，波源影响可以忽略。令 $F=0$，$\boldsymbol{A}=0$，则由（5.25）、（5.26）式可以得到 ϕ 与 ψ 满足的齐次波动方程

$$\nabla^2\phi=\frac{1}{v_p^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \tag{5.27}$$

$$\nabla^2\psi=\frac{1}{v_s^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{5.28}$$

对于拉梅势 ϕ 与 ψ 可有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=\nabla^2\phi \tag{5.29}$$

若加上规范性条件 $\nabla\cdot\psi=0$，则有

$$\nabla\times\boldsymbol{u}=-\nabla^2\psi \tag{5.30}$$

根据 ϕ 与 ψ 满足的波动方程及一定的边值和初值条件可求得 ϕ 与 ψ；由（5.21）式可以求出位移矢量场 $\boldsymbol{u}$；由（5.2）、（5.4）式可以求出应变及应力张量场。

如果对（5.25）、（5.26）式分别取梯度和旋度，则可得到无旋位移场 $\boldsymbol{u}_{(1)}(r,t)$ 和无散位移场 $\boldsymbol{u}_{(2)}(r,t)$ 满足的非齐次波动方程

$$v_p^2\nabla^2\boldsymbol{u}_{(1)}+\nabla F=\frac{\partial^2\boldsymbol{u}_{(1)}}{\partial t^2} \tag{5.31}$$

$$v_s^2\nabla^2\boldsymbol{u}_{(2)}+\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{\partial^2\boldsymbol{u}_{(2)}}{\partial t^2} \tag{5.32}$$

若令 $F=\boldsymbol{A}=0$，则可得到 $\boldsymbol{u}_{(1)}$，$\boldsymbol{u}_{(2)}$ 满足的齐次波动方程

$$\nabla^2\boldsymbol{u}_{(1)}=\frac{1}{v_p^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{u}_{(1)}}{\partial t^2} \tag{5.33}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{u}_{(2)}=\frac{1}{v_s^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{u}_{(2)}}{\partial t^2} \tag{5.34}$$

由以上讨论可知，位移矢量u、位移势函数ϕ和ψ、体积应变θ及转动角位移矢量Ω都满足相同形式的方程。为了方便起见，可以用统一形式的方程表示。当体力存在时（研究波的激发问题）它们遵从达朗贝尔方程

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -f \tag{5.35}$$

式中的ϕ称做波函数，它可以代表体积应变θ或标势ϕ，也可以代表Ω、v、ψ的一个分量。对于P波v取v_p，对于S波v取v_s。f是和体力场分布有关的函数，且事先给出。f描写的是波源情况，叫做源函数。在波源不存在的地方，（5.35）式变为齐次波动方程

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0 \tag{5.36}$$

方程（5.35）、（5.36）式是具有广泛意义的一般形式的波动方程，它们不仅适用于弹性波理论，而且也适用于电磁波理论。

为了熟悉势函数与位移之间的关系以及为更好地学习后面几章内容，应当熟练地掌握下边例题的运算方法。

【例 5—1】 若位移矢量场的标势函数$\phi = A\exp[i(k_1x_1 + k_3x_3 - \omega t)]$，试求位移矢量$u$和体积应变$\theta$。

解 对于ϕ这类形式的简谐函数，确定下面的微商算符并记住它是很有益处的。令

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = ik_j, \qquad \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} = -k_j^2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = k_ik_j, \qquad \frac{\partial}{\partial t} = -i\omega$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\omega^2$$

上边这些微商算符作用到ϕ上，使得微商运算化做简单的乘法运算。由$u_i = \partial\phi/\partial x$可知

$$u_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = ik_1\phi, \qquad u_2 = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = 0$$

$$u_3 = \frac{\partial \phi}{\partial x_3} = ik_3\phi$$

写成一般矢量形式为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= u_1\boldsymbol{i}_1 + u_2\boldsymbol{i}_2 + u_3\boldsymbol{i}_3 = i(k_1\boldsymbol{i}_1 + k_3\boldsymbol{i}_3)\phi \\ &= i\boldsymbol{k}\phi \end{aligned}$$

继续求得

$$e_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = ik_1u_1 = -k_1^2\phi$$

$$e_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = ik_2u_2 = 0$$

$$e_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = ik_3u_3 = -k_3^2\phi$$

$$\begin{aligned} \theta &= e_{11} + e_{22} + e_{33} = -k_1^2\phi - k_3^2\phi \\ &= -(k_1^2 + k_3^2)\phi = -k^2\phi \end{aligned}$$

或者 $\theta = \nabla\cdot\boldsymbol{u} = i\boldsymbol{k}\cdot i\boldsymbol{k}\phi = -k^2\phi$

或者 $\theta = \nabla\cdot\boldsymbol{u} = \nabla\cdot\nabla\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x_i^2} = -k^2\phi$

[例 5—2] 若位移矢量的矢势函数 $\boldsymbol{\psi} = B\exp[i(k_1x_1 + k_3x_3 - \omega t)]\boldsymbol{i}_2$，试求位移矢量$\boldsymbol{u}$和转动角位移矢量$\Omega$。

解 由公式 $u_i = \delta_{ij}\,\partial\psi_k/\partial x_j$ 可得

$$u_1 = \frac{\partial \psi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} = -ik_3\psi_2$$

$$u_2 = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} = 0$$

$$u_3 = \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} = ik_1\psi_2$$

写成一般矢量式有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} &= u_1\boldsymbol{i}_1 + u_2\boldsymbol{i}_2 + u_3\boldsymbol{i}_3\\ &= -ik_3\phi_2\boldsymbol{i}_1 + ik_1\phi_2\boldsymbol{i}_3\\ &= i(-k_3\boldsymbol{i}_1 + k_1\boldsymbol{i}_3)\phi_2\end{aligned}$$

由公式$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \boldsymbol{u}/2$得$\Omega_i = (1/2)\delta_{ijk}\cdot(\partial u_k/\partial x_j)$，于是

$$\Omega_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) = 0$$

$$\Omega_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{2}(k_3^2 - k_1^2)\phi_2$$

$$\Omega_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) = 0$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}(k_3 - k_1^2)\phi_2\boldsymbol{i}_2$$

F、A的表送式见§8—3。

§5—4 弹性波的能量与能流

弹性波在媒质内传播时会引起媒质的形变，因而存在弹性位能；每个体积元在各自的平衡位置附近振动，因而具有动能；波的传播会伴随能量的传输，因而存在能流。下面将分别叙述。

一、弹性波的能量密度

单位体积的弹性位能称做弹性位能密度，若以w_u代表之，则有

$$w_u = \frac{1}{2}\sigma_{ij}e_{ij} = \frac{\lambda}{2}(e_{11} + e_{22} + e_{33})^2 + \mu[(e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2) + 2(e_{12}^2 + e_{23}^2 + e_{31}^2)] \tag{5.37}$$

单位体积内的动能称做动能密度，若以w_k代表之，则有

$$w_k = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\right)^2 \tag{5.38}$$

位能与动能之和称为机械能。单位体积的机械能称为机械能密度亦即能量密度，若以w代表之，则有

$$w = w_u + w_k \tag{5.39}$$

显然，这样定义的w与w_u、w_k相同，也是个标量场。在非稳定的条件下，它们不仅是场点坐标的函数，而且也是时间t的函数。这时，弹性媒质的运动表现为波动，弹性媒质的机械能也就是弹性波的能量。

二、能流密度矢量与能量连续方程

事实上弹性体内任一微体元，当有波经过时会有能量流入，也会有能量流出。因此，讨论机械能的传输问题，必须计算w随时间的变化率$\partial w/\partial t$

首先计算w_u的时间变化率$\partial w_u/\partial t$。由（5.37）式得

$$\frac{\partial w_u}{\partial t} = (\lambda\theta + 2\mu e_{11})\frac{\partial e_{11}}{\partial t} + (\lambda\theta + 2\mu e_{22})\frac{\partial e_{22}}{\partial t}$$

$$+ (\lambda\theta + 2\mu e_{33})\frac{\partial e_{33}}{\partial t} + 4\mu e_{12}\frac{\partial e_{12}}{\partial t}$$

$$+ 4\mu e_{23}\frac{\partial e_{23}}{\partial t} + 4\mu e_{13}\frac{\partial e_{13}}{\partial t}$$

将（5.2）式和（5.4）式应用于上式得

$$\frac{\partial w_u}{\partial t} = \sigma_{11}\frac{\partial^2 u_1}{\partial t\partial x_1} + \sigma_{22}\frac{\partial^2 u_2}{\partial t\partial x_2} + \sigma_{33}\frac{\partial^2 u_3}{\partial t\partial x_3}$$

$$+ \sigma_{12}\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial t\partial x_1} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial t\partial x_2}\right) + \sigma_{23}\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial t\partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial t\partial x_3}\right)$$

$$+ \sigma_{13}\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t\partial x_3} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial t\partial x_1}\right) \tag{5.40}$$

其次计算w_k对时间变化率$\partial w_k/\partial t$。由（5.38）式可得

$$\frac{\partial w_k}{\partial t} = \rho\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

将（5.1）式用于上式并令$f=0$，上式可变为

$$\frac{\partial w_k}{\partial t}=\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}i_1+\frac{\partial u_2}{\partial t}i_2+\frac{\partial u_3}{\partial t}i_3\right)\cdot\left[\left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3}\right)i_1+\left(\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3}\right)i_2+\left(\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1}+\frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2}+\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3}\right)i_3\right]$$

$$=\frac{\partial u_1}{\partial t}\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial t}\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial u_3}{\partial t}\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial t}\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial t}\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial t}\frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2}+\frac{\partial u_1}{\partial t}\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3}+\frac{\partial u_2}{\partial t}\frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial t}\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3}\qquad(5.41)$$

将（5.40）式和（5.41）式相加经过简单运算可得机械能密度对时间的变化率为

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sigma_{11}\frac{\partial u_1}{\partial t}+\sigma_{12}\frac{\partial u_2}{\partial t}+\sigma_{13}\frac{\partial u_3}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\sigma_{21}\frac{\partial u_1}{\partial t}+\sigma_{22}\frac{\partial u_2}{\partial t}+\sigma_{23}\frac{\partial u_3}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\sigma_{31}\frac{\partial u_1}{\partial t}+\sigma_{32}\frac{\partial u_2}{\partial t}+\sigma_{33}\frac{\partial u_3}{\partial t}\right)\qquad(5.42)$$

我们定义一个能流密度矢量场，以I代表之，且

$$I_j=-\sigma_{ji}\frac{\partial u_i}{\partial t}\qquad(5.43)$$

将（5.43）式应用于（5.42）式可得

$$\frac{\partial w}{\partial t}=-\nabla\cdot I\qquad(5.44a)$$

或者写做

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\nabla\cdot I=0\qquad(5.44b)$$

以上二式为连续性方程的微分形式。它的意义是：在能流密度连续的域中，任何一点的能量密度随时间的变化率等于该点能流密度的负散度。

如果设想在弹性媒质内取一闭合曲面 S，包围的体积是 V。将（5.44a）式对 V 取积分，则有

$$\int_V \frac{\partial w}{\partial t} dV = -\int_V \nabla \cdot I dV \tag{5.45}$$

应用高斯定理把上式右边的体积分化为沿曲面 S 的面积分，且将左端 $\partial/\partial t$ 移到积分号外边，可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V w dV = -\oint_S I \cdot ds \tag{5.46}$$

方程（5.46）式为连续性方程的积分形式。它的意义是：单位时间内空间域 V 内减少的机械能，等于从 V 内穿过其界面 S 流出的机械能。式中 I 为“流量”密度，在此自然而然地解释为机械能的能流密度矢量。也就是说，空间某点处 I 的方向表示该点处机械能的传输方向，其量值则表示单位时间内通过单位垂直截面的能量。

方程（5.44）、（5.46）式即为标械能守恒的数学表示形式。

习题与参考答案五

1．若位移的标势函数 $\phi = A\exp[i(k_j x_j - \omega t)]$，试求出位移 u 和体积应变 θ。

（答案：$u = ik\phi$，$\theta = -k^2\phi$）

2．若位移的矢势函数 $\psi = B\exp[i(k_1 x_1 + k_3 x_3 - \omega t)]i_1$，试求出位移矢量和转动角位移矢量 Ω。

〔答案：$u = ik_3\psi_1 i_2$，$\Omega = (1/2)k_3(k_3 i_1 - k_1 i_3)\psi_1$〕

3．若位移的矢势函数 $\psi = B\exp[i(k_1 x_1 + k_3 x_3 - \omega t)]i_3$，试求位移矢量 u 和转动角位移矢量 Ω。

〔答案：$u = -ik_1\psi_3 i_2$，$\Omega = (k_1/2)(-k_3 i_1 + k_1 i_3)\psi_3$〕

4．已知媒质单位质量体力的标势函数为 $F = P_0\exp[i(k_j x_j - \omega t)]$，

试写出位移$u_{(1)}$满足的达朗贝尔方程。

（答案：$v_p^2\nabla^2 u_{(1)}+ikF=\partial^2 u_{(1)}/\partial t^2$）

5．已知媒质单位质量体力的矢势函数为 $A=(p_1i_1+p_2i_2+p_3i_3)\exp[i(k_jx_j-\omega t)]$，试求位移矢量$u_{(2)}$满足的达朗贝尔方程。

（答案：$v_s^2\nabla^2 u_{(2)}+i[(k_2A_3-k_3A_2)i_1+(k_3A_1-k_1A_3)i_2+(k_1A_2-k_2A_1)i_3]=\partial^2 u/\partial t^2$）

6．已知媒质的密度为ρ、弹性常数为E、ν，求P波、S波的速度v_p、v_s。

（答案：$v_p=[E(1-\nu)/\rho(1+\nu)(1-2\nu)]^{1/2}$，$v_s=[E/2\rho(1+\nu)]^{1/2}$）

7．已知位移标势$\phi=f(k_jx_j-\omega t)$，试证明其满足方程（5.27），其中$k=\omega/v_p$。

8．已知位移矢势为 $\psi=(B_1i_1+B_2i_2+B_3i_3)\exp[i(k_jx_j-\omega t)]$，试证明$\psi$满足方程（5.28）式。其中$k=\omega/v_s$。

9．已知位移的矢势为$\psi=f_m(k_jx_j-\omega t)i_m$，试证明$\psi$满足方程（5.28）式。其中$k=\omega/v_s$。

10．已知位移之标势为 $\phi=A\exp[-\alpha x_3+i(kx_1-\omega t)]$，试求空间某点机械能变化率。

〔答案：$\partial w/\partial t=(\lambda+2\mu)(\alpha^2-k^2)^2\omega A^2\exp(-2\alpha x_3)\sin(kx_1-\omega t)$〕

11．已知位移标势$\phi=A\exp[-(\alpha x_1+\beta t)]$，其中$A$、$\alpha$、$\beta$皆为常数，且$0\leqslant x_1\leqslant\infty$。试求空间某点能流密度矢量$I$及机械能变化率$\partial w/\partial t$。

（答案：$I_1=-(\lambda+2\mu)\alpha^3\beta\phi^2$，$\partial w/\partial t=2(\lambda+2\mu)\alpha^4\beta\phi^2$）

12．已知位移矢势$\psi_2=B\exp[-\alpha x_3+i(kx_1-\omega t)]$，试求空间某点机械能变化率$\partial w/\partial t$。

（答案：$\partial w/\partial t=[\mu(\alpha^2-k^2)-2(\lambda+\mu)k^2](\alpha^2-k^2)\omega A^2\exp(-2\alpha x_3)\sin 2(kx_1-\omega t)$

第六章 弹性波在均匀无界媒质内的传播

在这一章里，我们主要研究平面波、球面波及柱面波的传播规律。

首先，假定媒质是均匀各向同性的弹性体且充满整个空间。由于不存在边界，边值条件的影响可以忽略。其次，认为波已经产生，波源及初值条件的影响可以忽略。在数学上则是研究齐次波动方程及其通解的问题。

§6—1 平面波解

严格说来，平面波只是一种理想化模型。实际上，只有当离开波源足够远时，才可以近似看做平面波。根据波函数对时间的依赖关系，平面波可以分为脉冲型与简谐型；根据振幅随场点坐标的变化又可分为均匀与非均匀平面波。

一、一维波动方程及其通解

由于平面波的波阵面（即等位相面）是一系列互相平行的平面，同一波阵面上各点振动情况都相同，所以对于沿某一方向传播的平面波，我们可以这样选择坐标系，使得波在某一坐标方向上传播，例如x_1轴，从而使得波函数的场点坐标只依赖于x_1，而与x_2、x_3无关。这样使得波动方程（5.36）变得比较简单，即

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=0 \qquad (6.1)$$

此式即为一维波动方程。由于空间维数的减少，使得方程分析求解大为简化，因此对它的研究具有广泛的意义。

我们现在求解方程（6.1）式。为了方便，去掉角标，令 $\phi(x, t)$ 表示位移，即 $\phi = u$。将（6.1）式写做微商算符的乘积形式，有

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right)u = 0 \qquad (6.2)$$

引入新变量 $\xi = x - vt$，$\eta = x + vt$。由复合函数求微商法则可得

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = v\left(\frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi}\right)$$

其中 $\partial\xi/\partial x = \partial\eta/\partial x = 1$。由上边两式可得

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

将以上二式用于（6.2）式得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

将上式先对 ξ 积分再对 η 积分，可得

$$u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$$
$$= f(x - vt) + g(x + vt) \qquad (6.3)$$

式（6.3）是一维波动方程的通解，其中 $f(x - vt)$、$g(x + vt)$ 是它们的宗量的任意函数。$f(x - vt)$ 描写的是以速度 v 沿 x 轴正方向传播的行波；$g(x + vt)$ 描写的是以速度 v 沿 x 轴反方向传播的行波。此种求解方程方法常称之为行波法。由于 f、g 中振幅都是常数，故它们代表的都是均匀平面波。（6.3）式也适用于描写无限长的弦、杆的自由振动。

二、达朗贝尔解

波的具体波形与它的初始扰动有关，即决定于初始条件

$$u(x,\ 0)=u_0(x),\qquad \dot{u}(x,\ 0)=V_0(x)$$

由（6.3）式得

$$f(x)+g(x)=u_0(x)$$

$$-f(x)+g(x)=\frac{1}{v}\int_{x_0}^{x}V_0(\xi)d\xi+2c$$

式中 c 为任意积分常数，可进一步解出

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{2}\left[u_0(x)-\frac{1}{v}\int_{x_0}^{x}V_0(\xi)d\xi\right]-c\\ g(x)&=\frac{1}{2}\left[u_0(x)+\frac{1}{v}\int_{x_0}^{x}V_0(\xi)d\xi\right]+c\end{aligned}\qquad(6.4)$$

将（6.4）代入（6.3）可得

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2}\left[u_0(x-vt)+u_0(x+vt)+\frac{1}{v}\int_{x-vt}^{x+vt}V_0(\xi)d\xi\right]\qquad(6.5)$$

式（6.5）称做达朗贝尔解。它表示后来时刻 t 的位移是由初始条件决定的。

对于初始速度 $V_0=0$ 这一简单例子，（6.5）式可简化为

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2}[u_0(x-vt)+u_0(x+vt)]$$

这表明初始位移分成两部分，成为各自沿相反方向传播的波。

§6—2 平面波的一般性质

一、沿任意方向传播的平面波

一般情况下平面波不一定沿坐标轴方向传播，这时波函数 ψ 的

空间变量为x_1、x_2、x_3。方程（5.36）在直角坐标系下的形式为

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \tag{6.6}$$

如图6.1所示，设平面波在x_1'方向上传播，n是波阵面的单位法向量，它的三个分量（即它的方向余弦）用n_j（$j=1$、2、3）表示，显然n的指向即沿x_1'轴之正方向。根据前一节的讨论可知，在x_1'轴上传播的平面波其解式为（6.3）式，即

$$\phi(x_1',\ t)=\phi_{\mathrm{I}}(x_1'-vt)+\phi_{\mathrm{II}}(x_1'+vt) \tag{6.7}$$

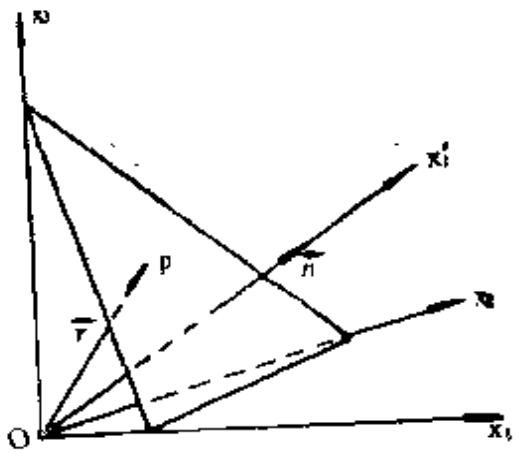


图 6—1

沿任意方向n传播的平面波

波阵面上任一点P都应满足（6.7）式。由图6—1可以看出，P点在x_1'轴上的坐标为

$$x_1'=\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}=n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3=n_jx_j$$

将上式代入（6.7）式便得到直角坐标系$0-x_1x_2x_3$中沿任意方向传播的平面波解为

$$\phi(\mathbf{r},\ t)=\phi_{\mathrm{I}}(n_jx_j-vt)+\phi_{\mathrm{II}}(n_jx_j+vt) \tag{6.8a}$$

或者

$$\phi(\mathbf{r},\ t)=\phi_{\mathrm{I}}\left(t-\frac{n_jx_j}{v}\right)+\phi_{\mathrm{II}}\left(t+\frac{n_jx_j}{v}\right) \tag{6.8b}$$

须注意，式中 $n_j^2=n_1^2+n_2^2+n_3^2=1$。

方程（6.8）式中ϕ_{I}、ϕ_{II}分别表示沿n正、反两个不同方向传播的平面波，其波速为v。ϕ_{I}、ϕ_{II}是它们宗量的任意函数。若将（6.8）式对空间和时间变量的二次偏微商代入（6.6）式可知$\phi(\mathbf{r},\ t)$是该方程的通解。

平面波的等位相面方程为

$$n_jx_j\pm vt=a$$

其中a为常数，上式确定了一个运动平面的方程，对任一时刻t，该平面都是以速度v前进着。可见（6.8）式确实代表平面波。至于它的传播方向与n平行，可以由解析几何知识得到证明。

二、平面波的传播条件

前面我们仅就平面波的解式进行了一般地讨论，并没有进一步探讨具备什么样条件的平面波可以在均匀无限弹性空间内传播。下面就来研究这个问题。

若波函数ϕ表示的是位移$u_i(r, t)$，而我们只对沿n正方向传播的波感兴趣，则位移可写做

$$u_i = a_i f(n_j x_j - vt) \tag{6.9}$$

式中a_i是常数，表示波幅。令$\xi = n_j x_j - vt$，则

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = a_i \frac{\partial f(\xi)}{\partial x_j} = a_i \frac{df(\xi)}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} = a_i n_j f'$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = a_i n_j n_j f'' = a_i f''$$

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} = a_j n_j n_i f'' \qquad \ddot{u}_i = a_i v^2 f''$$

将以上四式代入纳维方程（5.8）式并令体力等于零，于是可得

$$(\lambda + \mu) a_i n_i n_j + (\mu - \rho v^2) a_i = 0 \tag{6.10}$$

i、j分别取1、2、3，由（6.10）可以得到关于振幅a_1、a_2、a_3的齐次方程组。这方程组有非零解的条件是它们的系数行列式为零，由此可得

$$(\lambda + 2\mu - \rho v^2)(\mu - \rho v^2)^2 = 0$$

此方程有两个异根，即

$$v_p = [(\lambda + 2\mu)/\rho]^{1/2} \qquad v_s = [\mu/\rho]^{1/2} \tag{6.11}$$

这一结果与（5.13）、（5.18）式结果相同。这表明，在均匀各向同性的无限弹性空间内，平面波只能以速度v_p和v_s传播。

三、纵波与横波

下面我们来研究纵波场与横波场中质点位移与波的传播方向之间的关系。在普通物理中，我们曾经依据质点的振动方向与波的传播方向平行或垂直定义了纵波与横纵，现在我们从场论的观点对此给以证明。

位移矢量场的标势ϕ满足波动方程

$$\nabla^2\phi=\frac{1}{v_p^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$$

若只研究沿n之正方向传播的波则有

$$\phi(r,\ t)=\phi(n_jx_j-v_pt)$$

令$\xi=n_jx_j-v_pt$，位移为$u=\nabla\phi$，可得

$$u_i=\frac{\partial\phi(\xi)}{\partial x_i}=\frac{d\phi(\xi)}{d\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x_i}=n_i\phi'$$

其一般矢量式为

$$u_p=n\phi' \tag{6.12}$$

由（6.12）式可知，在无旋波场中，质点位移方向与波的传播方向一致，通常称之为纵波。

位移矢量场的矢势ψ满足方程

$$\nabla^2\psi_i=\frac{1}{v_s^2}\frac{\partial^2\psi_i}{\partial t^2}$$

若只研究沿n正方向传播的波，则平面波解为

$$\psi_i(r,\ t)=\psi_i(n_jx_j-v_st)$$

令$\xi=n_jx_j-v_st$，位移为$u_s=\nabla\times\psi$。若使用循环符号，则位移为

$$u_i=\delta_{ijk}\frac{\partial\psi_k}{\partial x_j}=\delta_{ijk}\frac{d\psi_k(\xi)}{d\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x_j}=\delta_{ijk}n_j\psi_k'$$

或写成一般矢量式为

$$u_s=n\times\psi' \tag{6.13}$$

由（6.13）式可知 $u_i \perp n$，即无散波场中质点位移方向与波的传播方向垂直，通常称之为横波。

四、波阵面的应力分布

当弹性波在媒质内传播时，媒质由于形变而产生应力 $\sigma_{ij} = \sigma_{ji} n_j$。由广义虎克定律可知

$$\sigma_{ij} = \left[\lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ji} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x}\right)\right] n_j$$

对于平面波，将（6.9）式代入上式得

$$\sigma_{ij} = [(\lambda+\mu) n_k a_k + \mu a_i] f'(\xi)$$

对于纵波，位移与波阵面法线平行，由上式可得

$$\sigma_{ij} = (\lambda + 2\mu) a_i f'(\xi) \qquad (6.14)$$

其中 $a = a_k n_k$，$a_i = a n_i$。由（6.14）式可知，波面上应力平行于波的前进方向。

对于横波，由于位移 u 与波面法线 n 垂直，即 $a_i n_i = 0$，于是得

$$\sigma_{ij} = \mu a_i f'(\xi) \qquad (6.15)$$

可见波阵面上只有剪切应力。

须指出：首先，对于上面的讨论，n_j 只限于取实数，否则结论均不成立。其次，当纵波在有限横断面媒质例如直径为 D 的细长杆内传播时，杆的纵向的伸长和缩短，必定伴随着横向的压缩和膨胀，质点既有纵向位移也有横向位移。横向与纵向应变之比等于泊松比 ν。由于横向运动的存在，使得原来平面波面发生弯曲且应力分布亦不均匀。计算与观测都表明，当波长与杆直径 D 在同一数量级时，这种影响是很重要的。但是，对于无限大媒质，因波长总是有限的，故不会出现上述影响。

§6—3 平面波的能流

在这一节里，我们研究平面波的能量、能流及能量传播速度。

一、平面波的能量密度

设有一平面纵波，其位移为

$$u = n\,u(n_j x_j - v_p t) \tag{6.15}$$

这里为了方便令振幅 $a=1$，并不影响问题的讨论。动能密度与位能密度分别为

$$w_k = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\rho v_p^2 u'^2 \tag{6.16}$$

$$w_u = \frac{1}{2}\sigma_{ji}e_{ji} = \frac{1}{2}(\lambda\theta\delta_{ji} + 2\mu e_{ji})e_{ji}$$

$$= \frac{1}{2}\lambda\theta^2 + \mu e_{ji}e_{ji} \tag{6.17}$$

式中 $u'(\xi) = du(\xi)/d\xi$，$\xi = n_j x_j - v_p t$

$$e_{ji} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = n_j n_i u' \tag{6.18}$$

$$e_{ji}e_{ji} = (n_j n_i)^2 u'^2 = u'^2 \tag{6.19}$$

由（6.15）式可知

$$\theta = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = n_i^2 u' = u' \tag{6.20}$$

由（6.19）式及（6.20）式可得

$$\theta^2 = e_{ji}e_{ji} \tag{6.21}$$

将（6.21）式代入（6.17）式得

$$w_u = \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)\theta^2 = \frac{1}{2}\rho v_p^2 u'^2 \tag{6.22}$$

由（6.16）式及（6.22）式可得平面弹性波能量密度为

$$w = w_k + w_u = \rho v_p u'^2 \tag{6.23}$$

若振幅为a，则(6.23)式应为$w = \rho v_p^2 a^2 u'^2$。比较(6.16)式及(6.22)式可知$w_k = w_u$。这与我们在振动学里学过的弹簧振子的动能与位能之总和等于常数是不同的。因为在波动过程中质点间具有相互作用，一个小体元要向周围媒质传递能量，动能与位能之和就不能恒定，动能与位能可以同时达到最大也可以同时达到最小。

二、平面波的能流密度矢量

根据（5.42）式，平面波能流密度矢量为

$$I_j = -\sigma_j \frac{\partial u_i}{\partial t} = -(\lambda\theta\delta_{j,i} + 2\mu e_{j,}) \frac{\partial u_i}{\partial t} \tag{6.24}$$

对于纵波，可将（6.15）、（6.18）式代入（6.24）式得

$$\begin{aligned} I_j &= (\lambda\delta_{j,} + 2\mu n_j n_i) n_i v_p u'^2 \\ &= (\lambda + 2\mu) v_p n_j u'^2 \\ &= \rho v_p u'^2 v_{pj} = w v_{pj} \end{aligned} \tag{6.25}$$

写成一般矢量式为

$$\boldsymbol{I} = w\boldsymbol{v}_p \tag{6.26}$$

同理，可以得到平面横波能流密度矢量为

$$\boldsymbol{I} = w\boldsymbol{v}_s \tag{6.27}$$

可见，平面弹性波能流密度矢量总是指向波的传播方向，其大小等于能量密度与波速之乘积。

对于周期波，能流密度在周期T内的平均值称为平均能流密度，也称为波的强度。以$\langle I\rangle$表示波的强度，其值为

$$\langle I\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T I dt \tag{6.28}$$

机械能密度在周期T内的平均值称为平均机械能密度，若以$\langle w\rangle$表示之，则

$$\langle w\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T w dt \tag{6.29}$$

我们把平均能流密度与平均能量密度之比定义为能量传播速度，若以 c 表示之，则

$$c=\frac{\langle I\rangle}{\langle w\rangle} \tag{6.30}$$

由（6.26）～（6.30）诸式可求得平面纵波与横波能量传播速度分别为

$$c=v_p, \qquad c=v_s \tag{6.31}$$

在一般情况下，能量传播速度等于波的群速度。这一点将在下一节中介绍。

§6—4 平面简谐波

平面简谐波是最简单、最基本也是最重要的一种波。根据迭加原理，任何类型的平面波都可视为简谐平面波的迭加，甚至球面波和柱面波也可由平面简谐波迭加而成。因此，在研究各种类型波之前，人们往往首先研究它。

一、平面简谐波解

为了得到平面简谐波解，我们用分离变量法求解波动方程（5.36）式。在直角坐标系下方程的形式为

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{6.32}$$

令

$$\psi=X(x_1)Y(x_2)Z(x_3)T(t) \tag{6.33}$$

将（6.33）式代入（6.32）式得

$$YZT\frac{d^2X}{dx_1^2}+XZT\frac{d^2Y}{dx_2^2}+XYT\frac{d^2Z}{dx_3^2}=\frac{XYZ}{v^2}\frac{d^2T}{dt^2}$$

将上式两边同除以 ψ 得

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx_1^2}+\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dx_2^2}+\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dx_3^2}=\frac{1}{v^2T}\frac{d^2T}{dt^2}$$

欲使上式对任意的x_j、t都成立，必等于某一常数，令其为$-k^2$，则上式可化为

$$\frac{d^2X}{dx_1^2}=-k_1^2X \qquad \frac{d^2Y}{dx}=-k_2^2Y$$

$$\frac{d^2Z}{dx_3^2}=-k_3^2Z \qquad \frac{d^2T}{dt^2}=-\omega^2T$$

其中$k^2=\omega^2/v^2=k_1^2+k_2^2+k_3^2$。解上边四个方程可得如下形式的解：

$$\begin{aligned}X&=A_Ie^{ik_1x_1}+A_{II}e^{-ik_1x_1}\\Y&=B_Ie^{ik_2x_2}+B_{II}e^{-ik_2x_2}\\Z&=C_Ie^{ik_3x_3}+C_{II}e^{-ik_3x_3}\\T&=D_Ie^{i\omega t}+D_{II}e^{-i\omega t}\end{aligned}\tag{6.34}$$

其中k_j、ω为不等零的实数，$A_I\cdots D_{II}$均为常数。将（6.34）式代入（6.33）式，得到的所有可能的解不外乎是下面两种情形：

$$\phi=\begin{cases}A\ \exp[\pm i(\omega t-k_jx_j)]\\A\ \exp[\pm i(\omega t+k_jx_j)]\end{cases}\tag{6.35}$$

$$\phi=\begin{cases}A\ \exp[\pm i\omega(t-n_jx_j/v)]\\A\ \exp[\pm i\omega(t+n_jx_j/v)]\end{cases}\tag{6.36}$$

若平面波沿单位矢量n方向传播，定义波矢量为k，且有

$$k=\frac{\omega}{v}n=\frac{2\pi}{\lambda}n\tag{6.37}$$

其中$k=2\pi/\lambda$，称为圆波数，λ为波长。由（6.37）式可得

$$\begin{aligned}k_j&=kn_j\\k^2=k_j^2&=k_1^2+k_2^2+k_3^2=k^2n_j^2=\frac{\omega^2}{v^2}\end{aligned}\tag{6.38}$$

由于前面讲过，平面波解（6.8）式中的ϕ_I、ϕ_{II}是其宗量的任意

函数，故此我们也可以不必进行上边的求解而直接写出(6.35)、(6.36)式形式的简谐波解。

解式（6.36）之第一式也可以写做

$$\phi = Ae^{\pm i\omega t}\, e^{\pm i\omega\left(\frac{x_1}{v/n_1}+\frac{x_2}{v/n_2}+\frac{x_3}{v/n_3}\right)}$$

式中v/n_j是波阵面与x_j轴交点的速度。由于$n = n_j\, i$，而$n_j \leqslant 1$，故视速度大小总是大于或等于真实波速大小。

如果波的传播速度仅依赖于媒质密度、拉梅系数等参数而与波的频率无关，则称之为非频散波；如果波的传播速度与频率有关，则称之为频散波。所谓频散，是指初始扰动的每一简谐成分都以不同的速度前进，从而初始波形在行进中发生了变化，扰动将分散成一些波列的现象。简谐波的传播速度称为相速度，即位相传播速度；由简谐波迭加而成的波其合成振幅的传播速度称之为群速度。当波的频谱很窄时，定义波的群速度为

$$U = v + k\frac{dv}{dk} \tag{6.40}$$

其中v为简谐波的相速度，k为圆波数。能够证明能量的传播速度等于波的群速度。由（6.11）式可知，对于非频散波，群速度等于相速度

我们可以通过下面的例题认识一下平面简谐波场的应变、应力及能流等的分布情况。

〔例 6—1〕 位移标势 $\phi = A\exp[i(kx_1 - \omega t)]$，试求：（1）应变张量；（2）应力张量；（3）能流密度矢量；（4）波的强度；（5）能量传播速度。

解 （1）应变张量

位移 $$u_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = ik\phi, \quad u_2 = u_3 = 0$$

应变张量 $$e_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -k^2\phi$$

$$e_{22}=e_{33}=e_{12}=e_{23}=e_{31}=0$$

（2）应力张量

$$\sigma_{11}=(\lambda+2\mu)e_{11}=-(\lambda+2\mu)k^2\phi=-\rho\omega^2\phi$$

$$\sigma_{22}=\sigma_{33}=-\lambda k^2\phi,\qquad \sigma_{12}=\sigma_{23}=\sigma_{31}=0$$

（3）能流密度矢量

$$I_1=-\sigma_{11}\frac{\partial u_1}{\partial t}=\rho\frac{\omega^4}{v_p}A^2\cos^2(kx_1-\omega t)$$

$$I_2=I_3=0$$

（4）波的强度

$$\langle I\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T I_1\,dt=\frac{\rho\omega^4A^2}{v_pT}\int_0^T\cos^2(kx_1-\omega t)\,dt$$

$$=\frac{1}{2v_p}\rho\omega^4A^2$$

（5）能量传播速度

$$w=\rho v_p^2a^2u'^2=\rho v_p^2k^4A^2\cos^2(kx_1-\omega t)$$

$$\langle w\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T w\,dt=\frac{\rho v_p^2k^4A^2}{T}\int_0^T\cos^2(kx_1-\omega t)\,dt$$

$$=\frac{1}{2v_p}\rho\omega^4A^2$$

$$c=\frac{\langle I\rangle}{\langle w\rangle}=\frac{\rho\omega^4A^2/2v_p}{\rho\omega^4A^2/2v_p^2}=v_p$$

二、平面波的展开

在前面已经提到过，任一平面波可以视为许多简谐平面波的迭加，下面就来研究这个问题。

我们知道，任何一个复杂振动都可以化为许多简谐振动的迭加。完成这一过程是用傅里叶分析进行的，这叫做频谱分析。同理，我们可以对任意的平面波$\phi(n_jx_j/v-t)$进行频谱分析。应用傅里叶积分变换及逆变换可得

$$A(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(\xi)e^{-i\omega t}d\xi$$
$$\phi(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}A(\omega)e^{i\omega t}d\omega \tag{6.41}$$

式中$\xi=n_jx_j/v-t$，$A(\omega)$称为频谱密度，而$|A(\omega)|$称为振幅谱。$A(\omega)\exp[i\omega(n_jx_j/v-t)]$表示振幅为$A(\omega)$，圆频率为$\omega$的平面简谐波。由（6.41）式可见，平面波可以表示成许多平面简谐波的迭加。

上面讨论的平面波波矢量k取实数矢量，波的等位相面上各点振动情况都相同，即等位相面和等振幅面互相平行。这样的平面波称为均匀平面波。

§6—5 非均匀平面波

一、非均匀平面波

如果波的等位相面各点振动幅值不等，即等位相面和等振幅面并不平行，则称之为非均匀平面波。这时，波矢k取复数矢量，但须满足（6.38）式，并且波函数仍须满足波动方程（5.36)式。

下面我们以简谐平面波为例研究非均匀平面波。

一简谐平面波的波函数为

$$\phi=Ae^{i(k_jx_j-\omega t)} \tag{6.42}$$

其中
$$k_j=k_j'+ik_j'' \tag{6.43}$$

将（6.43）式代入（6.42）式得

$$\phi=Ae^{-k_j''x_j}e^{i(k_j'x_j-\omega t)} \tag{6.44}$$

此式表示的就是非均匀平面简谐波。它的波幅$A\exp(-k_j''x_j)$不是常数，与空间点的坐标有关。将（6.43）式代入（6.38）式得

$$k^2 = k_j^2 = (k_j' + ik_j'')^2 = (k_j'^2 - k_j''^2) + 2ik_j'k_j''$$

比较两边实部与虚部有

$$k_j'^2 - k_j''^2 = k^2 \qquad k_j'k_j'' = 0 \qquad (6.45)$$

只要（6.43）式满足(6.45)式，则（6.44）式一定满足（5.36）式。波的等相面方程与等幅面方程分别为

$$k_j'x_j - \omega t = 常数 \qquad k_j''x_j = 常数$$

由(6.45)式中的第二式可见，等位相面与等振幅面互相垂直。这是各向同性均匀弹性空间中非均匀波得以传播的条件之一。波的传播方向为$k'/|k'|$，即波的等位相面的法线方向，称k'为波的传播矢量。波的衰减方向为$k''/|k''|$，即波的等幅面的法线方向，称k''为波的衰减矢量（见图6—2）。

当$k_j'' = 0$时，有$k = k'$，表示波没有衰减，即为均匀平面波

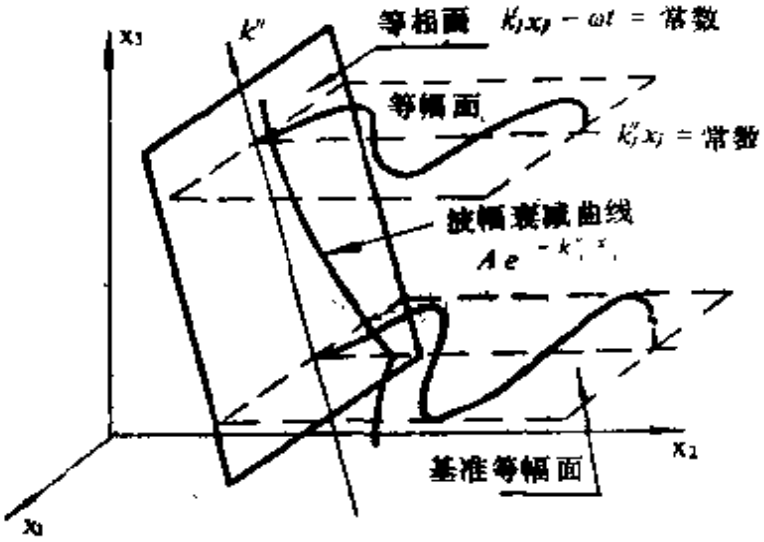


图 6—2

非均匀平面谐波传播示意图

情形；当$k_j'' > 0$，且当$x_j \to \infty$时，ϕ随x_j增大很快衰减为零；而$x_j \to -\infty$，$\phi \to \infty$，波的幅值趋于无穷大，这是没有物理意义的。当$k_j'' < 0$时，$x_j \to -\infty$，ϕ随x_j的减小很快趋于零；当$x_j \to \infty$，波幅趋于无穷大，这也是没有物理意义的。可见，非均匀波不能在全空间中传播，它只能存在于媒质的表面层附近。这类波通

常称为表面波，以区别可以在整个弹性媒质内传播的波（俗称体波）。这是非均匀平面波在均匀各向同性媒质中传播的另一条件。下一章研究的瑞利波与洛夫波便是属于此种类型的波。

任一非均匀平面波亦可视为由许多非均匀简谐平面波迭加而成。

令 $n_j = n_j' + in_j''$，且 $n_j^2 = 1$，$n_j'^2 - n_j''^2 = 1$，$n_j' n_j'' = 0$。

对任一非均匀平面波 $\phi(n_j x_j/v - t)$ 进行频谱分析，则有

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\xi) e^{-i\omega t} d\xi$$

$$\phi(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) e^{-k_j'' x_j} e^{i(k_j' x_j - \omega t)} d\omega$$

其中 $\xi = n_j x_j/v - t$。

二、时间场方程

下面我们利用非均匀波的概念得出波动学中至关重要的时间场方程。

从三维波动方程

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{v^2(x_1, x_2, x_3)} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \tag{6.46}$$

出发，可设方程的解为

$$\phi = A(x_1, x_2, x_3) e^{-\omega i \left[t - \frac{r(x_1, x_2, x_3)}{v(x_1, x_2, x_3)} \right]} \tag{6.47}$$

其中 ϕ 为一般的谐和体波，r 是坐标原点至观测点的距离，A 为振幅，而 $\omega[t - r(x_1, x_2, x_3)/v(x_1, x_2, x_3)]$ 表示波动在空间的相位。我们知道，分析等相位面的形状及其运动情况可以描述

波动的传播过程。$[t-\tau(x_1, x_2, x_3)/v(x_1, x_2, x_3)]=0$ 是等位相面方程，也称之为波前方程。当波在介质中传播时，有一系列t_k值满足这个方程。等相位面在空间中随着波的传播而连续地移动，因此 t 也是空间坐标的函数，这样，（6.47）式可以写成

$$\phi = A(x_1, x_2, x_3)e^{-i\omega(t-t)}$$

把上式代入（6.46）式中得

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\omega^2 A e^{-i\omega(t-t_k)}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i^2} = \left[\frac{\partial^2 A}{\partial x_i^2} + 2i\omega\frac{\partial A}{\partial x_i}\frac{\partial t_k}{\partial x_i} + i\omega A\frac{\partial^2 t_k}{\partial x_i^2}\right.$$

$$\left. - A\omega^2\left(\frac{\partial t_k}{\partial x_i}\right)^2\right]e^{i\omega(t-t_k)}$$

于是 $-\omega^2 A = v^2[\nabla^2 A + 2i\omega(\nabla A)(\nabla t_k) + i\omega A\nabla^2 t_k - A\omega^2(\nabla t_k)^2]$

由两复数相等的原则可得（略去下角标K）

$$v^2[\nabla^2 A - A\omega^2(\nabla t)^2] = -\omega^2 A \qquad (6.48)$$

$$2(\nabla A)(\nabla t) + A\nabla^2 t = 0 \qquad (6.49)$$

由 $\omega = 2\pi/T$ 和 $\lambda = vT$，当 λ 很小时，若 $\nabla^2 A$ 不很大，则 $(vT)^2\nabla^2 A$可以忽略，则由（6.48）式可得

$$(\nabla t)^2 = \frac{1}{v^2(x_1, x_2, x_3)} \qquad (6.50)$$

此式称为时间场方程（或程函方程，哈密尔顿方程）。

当已知介质中的速度分布时，由方程式（6.50）式可以确定波前的位置，进而可由方程（6.49）式求得波的振幅分布情况。如果有附加的边界条件，则由方程（6.50）、（6.49）式能够在近似情况即射线条件下确定波的所有主要特征。

时间场方程还可以写成矢量形式

$$\nabla t = \frac{1}{v}\mathbf{r}_0$$

其中r_0为沿波传播方向的单位向量。由上式计算沿任意方向的线积分，得到从点S_1到点S_2波的传播时间为

$$\int_{S_1}^{S_2}\nabla t\,dl\leqslant\int_{S_1}^{S_2}\frac{1}{v}dl$$

这是因为沿梯度的方向时间总是最小的。即表明一般在两点间波沿射线传播的时间最短。即有

$$\delta\int_{S_1}^{S_2}\frac{1}{v}dl=0$$

这就是著名的费马原理。它说明沿射线传播的时间与其他路径的时间相比是一个极小值。

§6—6 球面波

一、球面波解

如果弹性媒质的位移矢量场具有球对称性，且仅为空间变量r与时间变量t的函数，而与方位角θ、φ无关，这样的波称为球面波。

若以ϕ表示位移势函数，ϕ满足波动方程

$$\nabla^2\phi=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\tag{6.51}$$

在球坐标系中

$$\nabla^2\phi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}\tag{6.52}$$

由于球面对称性，ϕ与θ、φ无关，由(6.51)、(6.52)式可得

$$\frac{\partial^2(r\phi)}{\partial r^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2(r\phi)}{\partial t^2}\tag{6.53}$$

此式为一维波动方程，参照一维平面波解式可得

$$\phi=\frac{1}{r}\phi_{\mathrm{I}}(r-vt)+\frac{1}{r}\phi_{\mathrm{II}}(r+vt) \qquad (6.54)$$

式中等号后边第一项表示从原点发出沿 r 方向传播的发散波，第二项则代表沿 r 反向指向原点传播的会聚波。

如果空间域扩展到无穷远，根据索麦菲(Sommerfeld) 辐射条件

$$\lim_{r\to\infty}\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{1}{v}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)=0 \qquad (6.55)$$

即自无穷远向原点传播的会聚波位移场为零，自然这个会聚波就不存在，(6.54) 只剩下我们感兴趣的发散波。对于实际问题，如果把地球视为均匀各向同性弹性体，震源是球对称的，则地震波在地球内部的传播(未遇到地面之前)可以视为发散的球面波。爆炸产生的地震波基本如此。

我们可以仿照平面波的频谱分析对球面波进行频谱分析。对发散球面波有 $\phi=\phi_{\mathrm{I}}$，于是

$$A(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(\xi)e^{-i\omega t}d\xi$$

$$\phi(r,\ \omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}A(\omega)\frac{1}{r}\cdot e^{i\omega t}d\omega$$

其中 $\xi=r/v-t$，而 $[A(\omega)/r]\exp(i\omega\xi)$ 即表示球面谐波。可见，球面波可以视为许多不同频率的球面谐波的迭加。对会聚的球面波也可以同样处理。

如果球面波中既有 P 波成分也有 S 波成分，则媒质的位移场为

$$u=u_p+u_s=\nabla\phi+\nabla\times\psi$$

式中算符 "∇" 取球坐标系中的表达式。如果位移沿径向对称，且 $u_\theta=u_\varphi=0$，$u_r=u(r,\ t)$，则位移势函数即为标量势 ϕ，这时前被称为球面纵波，波速 $v_p=[(\lambda+2\mu)/\rho]^{1/2}$；球面横波波速

$v_s=[\mu/\rho]^{1/2}$。显见这两种波都是非频散波。

二、球面简谐波

我们以球面简谐纵波为例研究球面谐波之传播特性。

考虑球面简谐纵波

$$\phi=\frac{A}{r}e^{i(kr-\omega t)}\quad(r>0)\tag{6.56}$$

式中 A 为波源处 ϕ 的振幅，等于常数。ω 为波的圆频率，$k=\omega/v=2\pi/\lambda$ 为圆波数。位移矢量场为

$$\begin{aligned}u_p&=\nabla\phi=\frac{\partial\phi}{\partial r}e_r\\&=A\left(\frac{ik}{r}-\frac{1}{r^2}\right)e^{i(kr-\omega t)}e_r\end{aligned}\tag{6.57}$$

当 $r\gg\lambda$ 时，$1/\lambda\gg1/r$，$1/r^2$ 可以略去，于是(6.57)式变为

$$u_p=\frac{ikA}{r}e^{i(kr-\omega t)}e_r=\frac{a}{r}e^{i(kr-\omega t)}e_r\tag{6.58}$$

其中 $a=ikA$ 为波源位移之复振幅。

式（6.58）式表明球面谐波的振幅按 r^{-1} 衰减。显然，这种随传播距离不断增大导致波阵面不断扩大致使振幅的衰减与由于媒质对波的吸收造成的衰减是截然不同的。由于总能流沿波面分布，而波面面积正比 r^2，因面由振幅平方所确定的波的强度与 r^2 成反比。

§6—7 球面波的平面波展开（Sommerfeld积分）

我们已经讨论了平面波和球面波。因为平面波的传播理论比较清楚，在一些波动理论文献中也常常使用平面波的方法研究问

题，所以我们研究索麦菲积分，即把球面波展开为平面波。

考虑一个连续的球面波源，其速度势为

$$\phi = \frac{V_0}{4\pi} \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r}$$

其中r为源距离，V_0为源强度，ϕ表示一个球面谐波。

为了方便起见，仅考虑下面形式的球面波：

$$\frac{e^{-ikr}}{r}$$

在 $z=0$平面上，$r=(x_1^2+x_2^2)^{1/2}$，我们把这个波场对波数k_1和k_2进行双重傅里叶积分展开为

$$\frac{e^{-ikr}}{r} = \iint_{-\infty}^{\infty} A(k_1, k_2) e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)} \, dk_1 dk_2 \qquad (6.59)$$

其中 $$A(k_1, k_2) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikr}}{r} e^{-i(k_1 x_1 + k_2 x_2)} \, dx_1 dx_2$$

把坐标变换为极坐标，有

$$x_1 = r\cos\varphi \qquad x_2 = r\sin\varphi$$

$$q = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \qquad k_1 = q\cos\alpha$$

$$k_2 = q\sin\alpha$$

则$dx_1 dx_2 = r dr d\varphi$，于是

$$A(k_1, k_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-ir[k + q\cos(\alpha - \varphi)]} \, dr$$

若引进足够小的衰减，即 $k = -ik''$，$k''>0$，$\exp(-ikr) = \exp(-k''r)$，又设$B = -[k + q\cos(\alpha - \varphi)]$，则有

$$\int_0^{\infty} e^{irB} dr = \left[-\frac{e^{irB}}{iB} \right]_0^{\infty} = -\frac{1}{iB} = \frac{i}{B}$$

令$\delta = \alpha - \varphi$，对给定的传播方向 $\mathrm{tg}\alpha = k_2/k_1 =$ 常数，所以 $d\delta = -d\varphi$，那么

$$A(k_1, k_2) = \frac{i}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{-[k + q\cos(\alpha - \varphi)]}$$

$$= \frac{i}{4\pi^2 k}\int_{\alpha}^{\alpha-2\pi}\frac{-d\delta}{-\left(1+\frac{q}{k}\cos\delta\right)}$$

$$= -\frac{i}{4\pi^2 k}\int_{0}^{2\pi}\frac{d\delta}{1+\frac{q}{k}\cos\delta}$$

我们已知

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+a\cos x}=\frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}} \qquad (a^2<1)$$

和

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\delta}{1+\frac{q}{k}\cos\delta}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\delta}{1+\frac{q}{k}\cos\delta}=2\int_0^{\pi}\frac{d\delta}{1+\frac{q}{k}\cos\delta}$$

所以

$$A(k_1,k_2)=\frac{i}{4\pi^2 k}\cdot\frac{2\pi}{\sqrt{1-\left(\frac{q}{k}\right)^2}}=\frac{i}{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{k^2-q^2}}$$

$$=\frac{i}{2\pi\sqrt{k^2-k_1^2-k_2^2}}$$

故此（6.59）式可变为

$$\frac{e^{-ikr}}{r}=-\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(k_1x_1+k_2x_2)}}{\sqrt{k^2-k_1^2-k_2^2}}dk_1dk_2 \qquad (6.60)$$

又

$$k^2=k_1^2+k_2^2+k_3^2 \qquad k_3=\sqrt{k^2-k_1^2-k_2^2}$$

考虑到空间连续性，（6.60）式可以推广到三维情况。三维方程为

当$z>0$时

$$\frac{e^{-ikR}}{R}=-\frac{i}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}e^{i(k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3)}\frac{dk_1dk_2}{k_3}$$

当$z<0$时 (6.61)

$$\frac{e^{ikR}}{R}=\frac{i}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}e^{i(k_1x_1+k_2x_2-k_3x_3)}\frac{dk_1dk_2}{k_3}$$

上述公式给出了球面波的平面波展开。把上式的被积函数与时间因子$\exp(i\omega t)$组合起来，可以看出，被积函数中的指数表示了沿着波矢量k_j给出的不同方向传播的平面波。

在（6.61）中，与二维情形不同的是增加了$\exp(ik_3x_3)$项。其正确性在于公式中被积函数满足波动方程；并且对于$R=0$的波场，由于

$$\lim_{R\to} \left| 4\pi R^2 \frac{\partial \phi}{\partial R} \right| = \left| V_0 e^{\cdots} \right| = V_0$$

故此给出了正确的源强度值V_0。

现在继续变换公式，把展开变换为常用的数学形式。

图6—3给出

$$k_1 = k\sin\delta\cos\alpha$$

$$k_2 = k\sin\delta\sin\alpha$$

$$k_3 = k\cos\delta$$

$$0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$$

为引进非均匀波，δ的积分不再限于角度的实数值。注意到

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - ix\right) = \sin(ix)$$

$$= \frac{i}{2}(e^{x} - e^{-x}) \xrightarrow[x\to\infty]{} i\infty$$

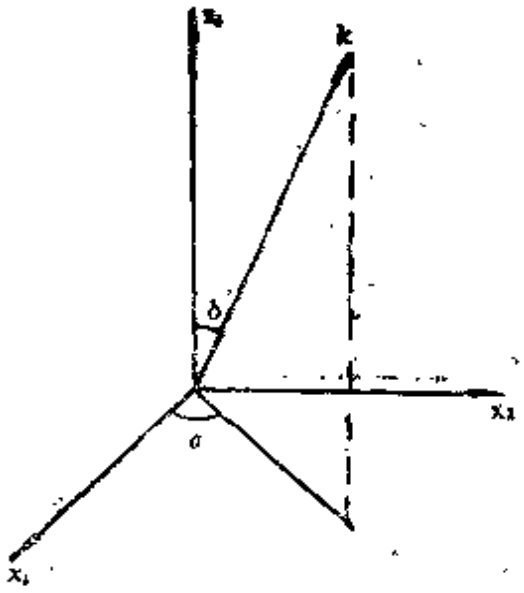


图 6—3
波数示意图

所以有

$$\cos\delta = \frac{k_3}{k} \begin{cases} = 1 & k_1 = k_2 = 0,\ k_3 = k,\ \delta = 0 \\ = i\infty & k_1 \text{或} k_2 = \pm\infty,\ k_3 = i\infty,\ k \text{有限} \\ & \delta = \frac{\pi}{2} - i\infty \end{cases}$$

又 $$\frac{dk_1 dk_2}{k_3} = \frac{k\sin\delta \cdot d\alpha \cdot d(k\sin\delta)}{k\cos\delta} = k\sin\delta d\delta d\alpha$$

这时，积分取图6－4所示复δ平面中的路径，式（6.61）可写为

$$\frac{e^{-ikR}}{R}=\frac{ik}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty}\int_0^{2\pi}e^{i(k_1x_1+k_2x_2\pm k_3x_3)}\sin\delta d\delta d\alpha$$

其中指数中＋、－号取决于 $z>0$ 或 $z<0$，而且k_3是δ、α的函数。

由上述可知，球面波的展开式中，除了区间 $0\leqslant\alpha\leqslant2\pi$，$0\leqslant\delta\leqslant\pi/2$ 上的一般波外，还有对应着复δ值的波，这即是§6—5中叙述的非均匀波。

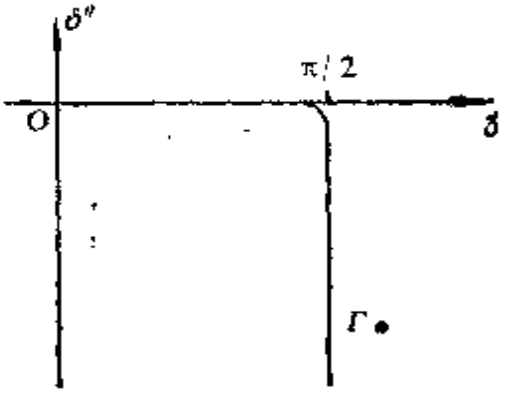


图 6—4
复平面上的积分路径

引进 $\beta=\pi/2-\delta$，则

$$\frac{e^{-ikR}}{R}=-\frac{ik}{2\pi}\cdot\int_{\frac{\pi}{2}-i\infty}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}e^{i(k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3)}\cos\beta d\beta d\alpha \qquad (6.62)$$

及 $k_1=k\cos\alpha\cos\beta$，$k_2=k\cos\beta\sin\alpha$，$k_3=k\sin\beta$。

我们在x_1 x_2平面中引进极坐标

$$x_1=r\cos\varphi \qquad x_2=r\sin\varphi$$

而且代替β引进独立变数γ：

$$\gamma=k\cos\beta$$

即

$$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}$$

$$=\sqrt{1-\frac{\gamma^2}{k^2}}=\frac{1}{k}\sqrt{k^2-\gamma^2}=\frac{i}{k}\sqrt{\gamma^2-k^2}$$

则可把（6.62）式（$x_3\geqslant0$）用贝塞尔积分表示出来。

$$\frac{e^{-ikR}}{R}=-\frac{ik}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}e^{i[k\cos\alpha\cos\beta\cdot r\cos\varphi+k\sin\alpha\cos\beta\cdot r\sin\varphi]}$$

$$\cdot e^{ik\sin\beta\cdot x_3}\cdot\frac{\gamma}{k}\cdot\frac{d\gamma}{-k\sin\beta}d\alpha$$

$$= -\frac{ik}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{i\gamma r[\cos\alpha\cos\varphi+\sin\alpha\sin\varphi]} e^{ik\sin\beta\cdot x_3} \cdot \frac{\gamma}{k}\cdot\frac{1}{-k\frac{i}{k}\sqrt{\gamma^2-k^2}}\,d\gamma d\alpha$$

$$= -\frac{ik}{2\pi}\cdot\frac{-1}{ik}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{i\gamma r\cos(\alpha-\varphi)} \cdot e^{-x_3\sqrt{\gamma^2-k^2}}\frac{\gamma d\gamma d\alpha}{\sqrt{\gamma^2-k^2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{-x_3\sqrt{\gamma^2-k^2}}}{\sqrt{\gamma^2-k^2}}\gamma d\gamma \int_{\theta-\varphi}^{2\pi-\varphi} e^{i\gamma r\cos\theta}\,d\theta$$

其中$\theta=\alpha-\varphi$。下面计算积分

$$I=\int_{\varphi}^{2\pi-\varphi} e^{i\gamma r\cos\theta}\,d\theta$$

函数$\exp[z(t-t^{-1})/2]$在$0<|t|<\infty$上的罗朗展开为

$$e^{\frac{z}{2}(t-t^{-1})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^n$$

其中
$$J_n(z)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l!}\frac{1}{(n+l)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2l}$$

$$J_{-n}(z)=\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^{l+n}\frac{(z/2)^l}{l!}\frac{(z/2)^{n+l}}{(n+l)!}$$

$$=(-1)^n J_n(z) \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

$J_n(z)$为n阶贝塞尔函数。令$t=i\exp(i\theta)$，$z=\gamma r$，则

$$e^{i\gamma r\cos\theta}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\gamma r)i^n e^{in\theta}$$

$$=J_0(\gamma r)+\sum_{n=1}^{\infty}[J_n(\gamma r)i^n e^{in\theta}+J_{-n}(\gamma r)i^{-n}e^{-in\theta}]$$

$$= J_0(\gamma r) + 2\sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(\gamma r)\cos n\theta$$

于是积分

$$I = \int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} \left[J_0(\gamma r) + 2\sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(\gamma r)\cos n\theta\right] d\theta$$

$$= J_0(\gamma r)\cdot 2\pi + 2\sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(\gamma r)\int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} \cos n\theta\, d\theta$$

$$= J_0(\gamma r)\cdot 2\pi + 2\sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(\gamma r)\cdot 0$$

$$= 2\pi J_0(\gamma r)$$

最后得

$$\frac{e^{-ikR}}{R} = \int_0^{\infty} \frac{J_0(\gamma r)e^{-x_3\sqrt{\gamma^2+k^2}}}{\sqrt{\gamma^2-k^2}}\gamma\, d\gamma$$

上式即为球面波展为平面波的索麦菲公式。

如果媒质不是无限的，那么我们可以应用上面的积分公式处理在平界面处球面波的反射。显然，反射波 ϕ 可表示为由组成球面波的平面波的反射所产生的平面波的迭加。在求解过程中，应该考虑两个因素：一是反射的平面波振幅必须乘以反射系数

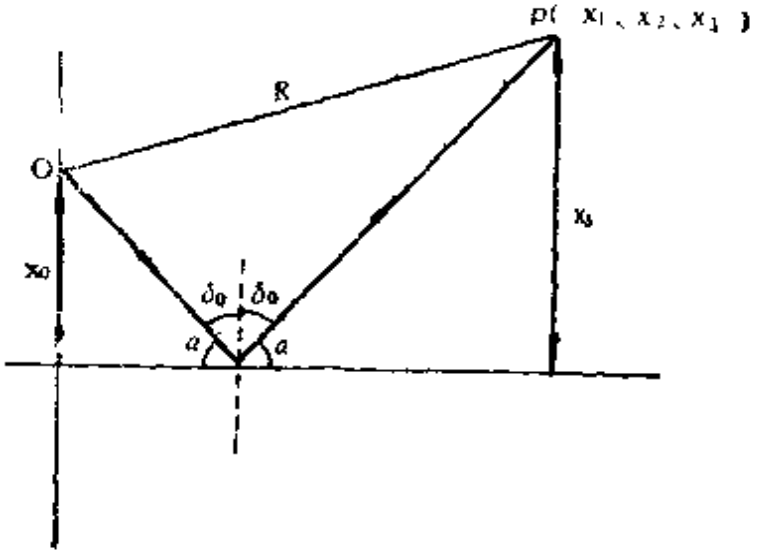


图 6—5
界面反射示意图

$\xi(\alpha)$，α是出射角，参看图6—5；二是必须考虑由波源经过界面传播到观测点$p(x_i)$所产生的相变。

应用索麦菲积分，反射波势可求得为

$$\phi=\int_0^{\infty}\frac{\xi(\alpha)J_0(\gamma r)e^{-(x_3+x_{30})\sqrt{\gamma^2+k^2}}}{\sqrt{\gamma^2+k^2}}\gamma d\gamma$$

§6—8 柱面波

如果波在媒质中的位移场对某一条直线（例如我们选定的柱坐标系的z轴）具有对称性，且仅是依赖于与z轴的距离r和时间t的函数而与z,φ无关，这种波即为柱面波。这时，位移势函数$\phi(r,\ t)$满足如下形式的波动方程：

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=0 \qquad (6.63)$$

方程（6.63）的通解比平面波和球面波情况下的通解要复杂得多，然而，我们最感兴趣的却是柱面谐波。为了求得柱面谐波的表达式，下面我们用分离变量法求解（6.63）式。

设（6.63）式的解为

$$\phi(r,\ t)=\phi(r)e^{-i\omega t} \qquad (6.64)$$

将（6.64）式代入（6.63）式得

$$\frac{d^2\phi}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\phi}{dr}+k^2\phi=0 \qquad (6.65)$$

此式即为零阶贝塞尔方程，它的解为零阶汉克函数。随时间变化的因子取$\exp(-i\omega t)$，发散行波的解为

$$\phi=DH_0^{(1)}(kr)e^{-i\omega t} \qquad (6.66)$$

式中$H_0^{(1)}(kr)$为第一类零阶汉克函数。在大距离上有如下的渐近公式：

$$\phi=D\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}e^{i\left(kr-\frac{\pi}{4}-\omega t\right)} \qquad (6.67)$$

也可写做

$$\phi(r,\ t) = Ar^{-1/2}\, e^{i(kr-\omega t)}, \qquad (6.68)$$

其中复振幅$A = D(2/\pi k)^{1/2}\exp(-i\pi/4)$，$A$可由初始条件确定。（6.67）、（6.68）式即表示柱面简谐波，可见，此时柱面波幅与$r^{-1/2}$成正比，而强度与r成反比。

从理论上可以证明，柱面发散波与球面波或平面波的相同之处是它们都具有前波阵面即波前；不同之处是球面波或平面波都有明确限定的后波阵面即波后，柱面波却没有明确的波后，面是有个波尾。换句话说，一个柱面脉冲的波前抵达空间给定点后，扰动并不终止，直待$t\to\infty$时，它才相当缓慢地趋于消失。

习题与参考答案六

1．一平面纵波的复波矢量为$k = \beta + i\alpha$位移势$\phi = A\exp(-\alpha x_3)\exp[i(\beta x_1 - \omega t)]$。试讨论当$\alpha$、$\beta$满足什么条件时，$\phi$满足波动方程$\nabla^2\phi - (1/v_p^2)\partial^2\phi/\partial t^2 = 0$。

2．一平面纵波位移势$\phi = A\cos\alpha x_3\exp[i(\beta x_1 - \omega t)]$，波矢量$k = \beta + i\alpha$，当$\alpha$、$\beta$满足什么条件时，$\phi$满足波动方程$\nabla^2\phi = (1/v_p^2)\partial^2\phi/\partial t^2$。

3．已知位移场的标势函数$\phi = A\exp[i(k_j x_j - \omega t)]$。试计算波场内应变张量、应力张量及波阵面上的应力。

（答案：$e_{ij} = -k_i k_j\phi$，$\sigma_{ij} = -(\lambda k^2\delta_{ij} + 2\mu k_j k_i)\phi$，$\sigma_n = -(\lambda + 2\mu)k^2\phi n$。

4．在上题基础上求波的能流密度矢量及波的强度。

（答案：$I_j = \rho\omega^4\phi^2 n_j/v_p$，$\langle I\rangle = \rho\omega^4 A^2/2v_p$）

5．位移场的矢势函数为$\psi = (B_1 i_1 + B_2 i_2 + B_3 i_3)\exp[i(k_j x_j - \omega t)]$。试求：空间应变张量场、应力张量场及波阵面上的应力分布。

〔答案：$e_{ij} = -(1/2)(k_i\delta_{jm}k_k\psi_l + k_j\delta_{im}k_m\psi_n)$，$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij}$，$\sigma_n = -\mu k u_i$〕

6．位移场的矢势函数为$\psi_2 = B_2\exp[i(k_1 x_1 + k_3 x_3 - \omega t)]$。试求：应变张量场、应力张量场、能流密度、波的强度的分布。

（答案：$e_{11}=k_1k_3\psi_2$，$e_{33}=-k_1k_3\ _2$，$e_{13}=(k_3^2-k_1^2)\psi_2/2$；
$\sigma_{11}=2\mu k_1k_3\psi_2$，$\sigma_{33}=-2\mu k_1k_3\psi_2$，$\sigma_{13}=\mu(k_3^2-k_1^2)\psi_2$；
$I=\mu k\omega^2\psi_2^2k$；$\langle I\rangle=\rho\omega^4B^2/2v_s$）

7．位移场的矢势为 $_1=B_1\exp[i(k_1x_1+k_3x_3-\omega t)]$。试求：应变张量场、应力张量场、能流密度矢量及波的强度的分布。

（答案：$e_{12}=-k_1k_3\psi_1/2$，$e_{23}=-k_3^2\psi_1/2$；$\sigma_{12}=\mu k_1k_3\psi_1$，
$\sigma_{33}=-\mu k_3^2\psi_1$；$I=\mu k_3^2\omega\eta_1^2k$；$\langle I\rangle=\mu k_3^2k\omega B_1^2/2$）

8．位移场的矢势为 $\psi_3=B_3\exp[i(k_1x_1+k_3x_3-\omega t)]$。试求：应变张量场、应力张量场、能流密度矢量场及波的强度的分布。

（答案：$e_{13}=-k_1^2\psi_3/2$，$e_{23}=-k_1k_3\psi_3/2$；$\sigma_{12}=-\mu k_1^2\psi_3$，
$\sigma_{23}=-\mu k_1k_3\psi_3$；$I=\mu\omega k_1^2\psi_3^2k$，$\langle I\rangle=\mu\omega k_1^2k\psi_3^2/2$）

9．位移场的矢势为 $\psi=(B_1i_1+B_3i_2)\exp[i(k_1x_1+k_3x_3)-\omega t]$。试求：应变张量场、应力张量场能流密度矢量场及波的强度分布。

（答案：$e_{12}=-(k_1k_3\psi_1+k_1^2\psi_3)/2$，$e_{23}=-\mu(k_3^2\psi_1+k_1k_3\psi_3)$；
$I=\mu\omega(k_3\psi_1+k_1\psi_3)^2k$；$\langle I\rangle=\mu\omega k(k_3B_1+k_1B_3)^2/2$

10．已知媒质的杨氏模量 $E=2.12\times10^{10}\mathrm{N/m^2}$，泊松比$\nu=0.20$，一平面简谐纵波 $u_1=0.1\sin2000\pi[(x_1/5000\,\mathrm{ms^{-1}}-t)]$（m）在媒质内传播。试计算当 $t=2$秒，$x_1=1000$m处的应变张量、应力张量、能量密度、能流密度。

（答案：$e_{11}=0.126$，$\sigma_x=2.97\times10^9\mathrm{N/m^2}$，$w=3.72\times10^{10}\mathrm{J/m^3}$，
$I=1.87\times10^{12}\mathrm{J/m^2\cdot s}$）

11．一球面 P波位移标势为 $\phi=(A/r)\exp[i(kr-\omega t)]$。试求应变张量、应力张量场之分布。

（答案：$e_{r,r}=(2/r^3-2ik/r^2-k^2/r)\phi$，$e_{\theta\theta}=e_{\varphi\varphi}=(-1/r^3+ik/r^2)\phi$，$\sigma_{r,r}=[-\lambda k^2/r+2\mu(2/r^3-2ik/r^2-k^2/r)]\phi$，$\sigma_{\theta\theta}=\sigma_{\varphi\varphi}=[-\lambda k^2/r+2\mu(-1/r^3+ik/r^2)]\phi$）

12．一柱面P波位移势函数$\phi=Ar^{-1/2}\exp[i(kr-\omega t)]$。试求：应变张量场、应力张量场之分布。

〔答案：$e_{r,r}=(-k^2-ik/r+3/4r^2)\phi$，$e_{\theta\theta}=(-1/2r^2+ik/r)\phi$，
$e_{\theta\theta}-(-1/2r^2-ik/i)\phi$；$\sigma_{r,r}=\lambda(-k^2+1/4r^2)\phi+2\mu(-k^2-ik/r+3/4r^2)\phi$，$\sigma_{\theta\theta}=\lambda(-k^2+1/4r^2)\phi+2\mu(-1/2r^2+ik/r)\phi$〕

第七章 弹性波在均匀有界媒质内的传播

均匀无限大的媒质只是一种理想化模型，实际的媒质是有限的，通常是不均匀或近似分层均匀的，甚至会出现不规则的断裂。像地球这样巨大的媒质也不是无限均匀的，地面就是其边界，地壳及地球内部可以近似视为成层结构。震法勘探主要是通过成层媒质中弹性波的传播来推断地下岩层的结构形态和物理特性。在均匀各向同性的媒质中，震源产生的地震波一般是球面脉冲波。当研究它的传播问题时，我们应当讨论球面波遇到分界面时的情形，但是处理这类问题一般并不简单。实际上经常遇到的是震源到接收点的距离比波长大得多（$r \gg \lambda$），这时，把球面波可以近似视为平面波。当分界面的曲率半径远远大于波长时（$\rho \gg \lambda$），也可把分界面视为平面。应用傅里叶变换可以把脉冲波化为简谐波的迭加。球面波也可以展开为平面波。这样既可以使问题的处理大大简化，又不失其准确性。因此，弄清楚平面谐波在分界面上的行为尤其重要。

本章主要研究媒质的特性对波速、偏振状态的影响，以及平面波在分界面上的反射、透射及散射等问题。这里假定弹性波已经产生，不必考虑波源的影响，在数学上仍然处理齐次波动方程。由于存在边界，须用边界条件确定方程的解。

§7—1 P波 SV波和SH波

这一节主要介绍媒质的分界面、*P*波、*SV* 波、*SH* 波等基本

概念，今后经常用到的几个应力张量分量的表达式，求解方程时需用的边界条件等。

一、媒质的界面

弹性波在分层均匀的媒质内传播时必然会遇到媒质的分界面。界面问题是关于波动方程的边值问题，它决定解的具体形式。为此我们必须弄清界面的概念及其特性。所谓界面就是媒质性质的不连续面。在固体的自由表面上所有的应力分量都等于零。如图7—1中1区间是固体媒质，2区间中若 $\overline{\rho}=0$ 即为真空。x_1 轴 x_2 轴（图中未画出）所在平面即为媒质1的自由表面，在自由表面上 $\sigma_{jk}=0$。若2区间不是真空，即 $\overline{\rho}\neq 0$，则 x_1x_2 平面即为媒质1与媒质2的分界面。通常我们总认为两侧的固体媒质是紧密接触的。就是说在应力作用下，两种媒质不会沿界面发生破裂、剥离以及滑动等现象。下面的一些物理量在跨越界面时是连续的：

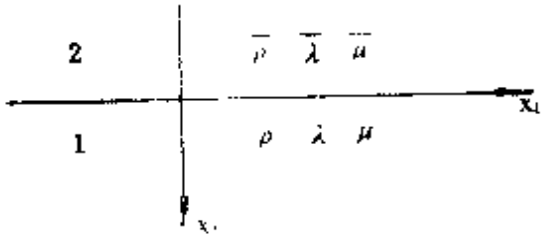


图 7—1
两种紧密接触的媒质

1．弹性位移的法向分量和切向分量；

2．应力的法向分量和切向分量。

值得注意的是，若界面一侧为流体媒质，不能称为紧密接触，因其易于流动，故上述物理量的切向分量不连续，只有法向分量连续。我们就是在这样的边界条件下来研究弹性波的反射与折射。

二、P波、SV波和SH波

如图7—1所示，x_1x_2 平面为1、2两种媒质的界面，x_1x_3 为波的入射面。入射波在分界面上将产生反射波和折射波。两种媒质中位移场都可以用下式表示：

$$u=u_p+u_s \qquad (7.1)$$

其中 $\mathbf{u}_p = \nabla\phi \quad \mathbf{u}_s = \nabla \times \psi$

由于平面波波阵面与x_2轴平行，故垂直于x_1x_3平面的直线上各点必然在同一波阵面内，而同一波阵面上的ϕ、ψ均系确定的常数，亦即与x_2无关。因此必有

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_2} = -\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} = \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2} = \frac{\partial\psi_3}{\partial x_2} = 0 \qquad (7.2)$$

由（7.1）式及（7.2）式可得位移场的表达式

$$u_1 = u_{p1} + u_{s1} = \frac{\partial\phi}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi_2}{\partial x_3}$$

$$u_2 = u_{s2} = \frac{\partial\psi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial\psi_3}{\partial x_1} \qquad (7.3)$$

$$u_3 = u_{p3} + u_{s3} = \frac{\partial\phi}{\partial x_3} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}$$

由（7.3）式可知，标势ϕ与矢势ψ_2对位移u_1、u_3有贡献，矢势ψ_1、ψ_3只对u_2有贡献。这一点只要认真演算习题6中的5—8题即可知道。

如图7—2所示，设平面波沿n方向传播，位移u的偏振方向可以是任意的，令其与n之夹角为α。位移u可以沿x_j轴分解成u_j，也可以沿n方向及与n垂直的方向分解。沿n方向的分量为u_p，这就是p波（即纵波），沿与n垂直方向的分量为u_s，这就是S波（即横波）。u_s又可以分解成在x_1x_3平面的分量和垂直于x_1x_3平面内的分量，前者称为SV波，后者称为SH波。由图

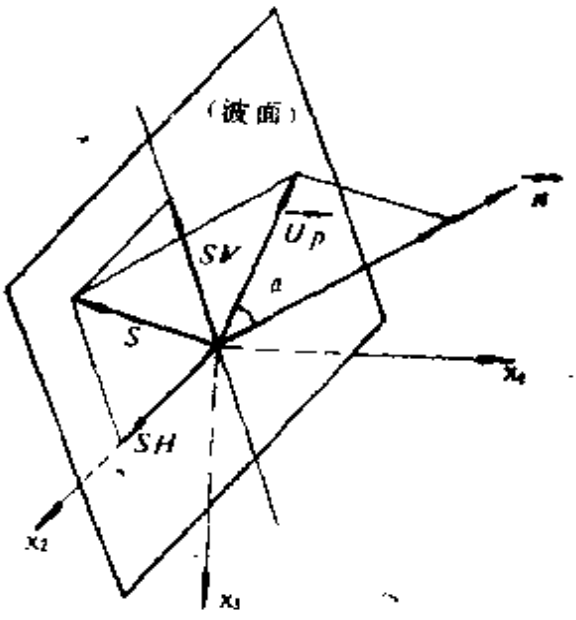


图7—2
平面波分解成P波、SV波、SH波

7—2 及式（7.3）的第二式可见，u_p没有x_2轴方向分量，$u_2 = u_{s2}$即表明u_2全部为横波场的分量。

媒质的应力场为

$$\sigma_{33} = \lambda\theta = 2\mu e_{33} = \lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) + 2\mu\frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

$$= \lambda\nabla^2\phi + 2\mu\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2\phi_2}{\partial x_1\partial x_3}\right)$$

$$= \rho\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + 2\mu\left(\frac{\partial^2\phi_2}{\partial x_1\partial x_3} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}\right)$$

$$= \rho\left[v_p^2\nabla^2\phi + 2v_s^2\left(\frac{\partial^2\phi_2}{\partial x_1\partial x_3} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}\right)\right]$$

$$\sigma_{31} = 2\mu e_{31} = \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \tag{7.4}$$

$$= \mu\left(2\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_3} + \frac{\partial^2\phi_2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2\phi_2}{\partial x_3^2}\right)$$

$$= \rho v_s^2\left(2\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_3} + \frac{\partial^2\phi_2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2\phi_2}{\partial x_3^2}\right)$$

$$\sigma_{32} = 2\mu e_{32} = \mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) = \mu\frac{\partial u_2}{\partial x_3}$$

$$= \mu\left(\frac{\partial^2\phi_1}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2\phi_3}{\partial x_1\partial x_3}\right) = \rho v_s^2\left(\frac{\partial^2\phi_1}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2\phi_3}{\partial x_1\partial x_3}\right)$$

边值条件为

$$u_1 = \bar{u}_1 \qquad u_2 = \bar{u}_2 \qquad u_3 = u_3$$
$$\sigma_{33} = \bar{\sigma}_{33} \qquad \sigma_{31} = \bar{\sigma}_{31} \qquad \sigma_{32} = \bar{\sigma}_{32} \tag{7.5}$$

由（7.4）式可知，u_2只出现在σ_{32}的表达式中，而u_1、u_3只出现在σ_{33}、σ_{31}的表达式中。因此，如果入射波在x_2方向位移$u_2 \neq 0$，且$u_1 = u_3 = 0$，那么根据边界条件（7.5）式可知，反射波与折射波中$u_2 \neq 0$，而$u_1 = u_3 = 0$。另外还可以看出，当入射到界面的是P波或SV波时，可能每一种波都会产生反射、折射的P

波与SV波。这种现象称为波型转换。但是，上述两种波均不会产生SH波。

为什么会发生波型转换的现象呢？我们知道当弹性波在媒质内部传播时，P波波阵面上的应力是在波射线方向上，质点也只在这个方向上振动，微体元也只发生胀缩形变。S波波阵面上的应力是在波面的切线方向上，质点也只在这个方向上振动，微体元只有剪切形变。但是，当波到达界面上时情况就复杂多了。如果入射角$\alpha \neq 0$，则界面附近分子与媒质内部分子受力情况不同。由于界面分子作用力的影响，使得质点受力方向一般不再沿波射线方向，也不再沿波面切线方向，而是成某一角度。这样，边界面上的微体元不但发生胀缩形变还要发生剪切形变。于是两种扰动分别以速度v_p和v_s在两种媒质内各自沿不同方向传播开去，即形成反射和折射的P波和SV波。

§7—2 半空间的平面波

考虑具有自由表面的弹性半空间（$x_3 \geqslant 0$），其间传播平面简谐波。由于界面的作用会形成反射波。我们的任务是寻求入射波及反射波波函数的具体形式。对于实际问题，在忽略大气层对地震波的微小影响时，地球表面可以看做自由表面，地球也可以看做弹性半空间。如果入射面是x_1x_3平面，则波函数$\phi\ (n_j x_j \pm vt)$的空间坐标只是x_1、x_3的函数而与x_2无关。这样，三维空间问题便化为二维空间的平面运动问题。通过求解二维波动方程，可以寻求平面动力学问题的平面简谐波形式的特解。

一、半空间的平面波解

二维波动方程为

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2}=\frac{1}{v_p^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \tag{7.6}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2}=\frac{1}{v_p^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$$

我们可以用分离变量法求解（7.6）式。为了简便，可以参照一维平面简谐波解的形式$A\exp[i(kx_1-\omega t)]$，对波矢量与x_1轴成某一角度的波，令其通解为

$$\begin{aligned}\phi(x_1,\ x_3,\ t)&=\Phi(x_3)e^{i(kx_1-\omega t)}\\ \psi(x_1,x_3,\ t)&=\Psi(x_3)e^{i(kx_1-\omega t)}\end{aligned}\qquad(7.7)$$

其中k为待定常数。将（7.7）式代入（7.6）式可得亥姆霍兹（Helmhotz）方程

$$\begin{aligned}\Phi''+(k_p^2-k^2)\ \Phi&=0\\ \Psi''+(k_s^2-k^2)\Psi&=0\end{aligned}\qquad(7.8)$$

令 $k^2p_1^2=k_p^2-k^2$ $\qquad$ $k^2p_2^2=k_s^2-k^2$

其中

$$p_1=\left(\frac{k_p^2}{k^2}-1\right)^{1/2}\quad p_2=\left(\frac{k_s^2}{k^2}-1\right)^{1/2}\qquad(7.9)$$

令 $k=\omega/v$，则上式变为

$$p_1=\left(\frac{v^2}{v_p^2}-1\right)^{1/2}\quad p_2=\left(\frac{v^2}{v_s^2}-1\right)^{1/2}\qquad(7.9)$$

p_1、p_2取不同范围之数值时可以得如下几种形式的解：

1．当p_1、p_2均为实数时，则有

$$\begin{aligned}\Phi&=A_Ie^{-ikp_1x_3}+A_{II}e^{ikp_1x_3}\\ \Psi&=B_Ie^{-ikp_2x_3}+B_{II}e^{ikp_2x_3}\end{aligned}\qquad(7.10)$$

2．当$p_1=0$，$p_2=[(v_p/v_s)^2-1]^{1/2}$，则解为

$$\begin{aligned}\Phi&=A_Ix_3+A_{II}\\ \Psi&=B_Ie^{-ikp_2x_3}+B_{II}e^{ikp_2x_3}\end{aligned}\qquad(7.11)$$

3．当p_1、p_2皆为虚数，此时有$p_1=i\xi_1=i[1-(v/v_p)^2]^{1/2}$，$p_2=i\xi_2=i[1-(v/v_s)^2]^{1/2}$。于是

$$\begin{aligned}\Phi&=A_Ie^{k\xi_1x_3}+A_{II}e^{-k\xi_1x_3}\\ \Psi&=B_Ie^{k\xi_2x_3}+B_{II}e^{-k\xi_2x_3}\end{aligned}\qquad(7.12)$$

4．$v=v_s$，即$p_2=0$，$p_1=i\xi_1$，有解

$$\Phi=A_{\mathrm{I}}e^{k\xi_1 x_3}+A_{\mathrm{II}}e^{-k\xi_1 x_3}$$
$$\Psi=B_{\mathrm{I}}x_3+B_{\mathrm{II}} \tag{7.13}$$

5．当$v_s<v<v_p$，此时p_1为虚数，p_2为实数，则解为

$$\Phi=A_{\mathrm{I}}e^{k\xi_1 x_3}+A_{\mathrm{II}}e^{-k\xi_2 x_3}$$
$$\Psi=B_{\mathrm{I}}e^{-ikp_2 x_3}+B_{\mathrm{II}}e^{ikp_1 x_3} \tag{7.14}$$

以上诸式中$A_{\mathrm{I}}\cdots B_{\mathrm{II}}$皆为复常数。将以上五种解式分别代入(7.7)式即可得到半空间中具有不同特征的平面波解。

二、自由界面上的入射波与反射波

将(7.10)式代入(7.7)式可得

$$\phi=\phi_{\mathrm{I}}+\phi_{\mathrm{II}} \qquad \psi=\psi_{\mathrm{I}}+\psi_{\mathrm{II}}$$

其中

$$\begin{aligned}\phi_{\mathrm{I}}&=A_{\mathrm{I}}e^{i(kx_1-kp_1x_3-\omega t)}\\ \phi_{\mathrm{II}}&=A_{\mathrm{II}}e^{i(kx_1+kp_1x_3-\omega t)}\\ \psi_{\mathrm{I}}&=B_{\mathrm{I}}e^{i(kx_1-kp_2x_3-\omega t)}\\ \psi_{\mathrm{II}}&=B_{\mathrm{II}}e^{i(kx_1+kp_2x_3-\omega t)}\end{aligned} \tag{7.15}$$

式(7.15)中各项的物理意义是不难解释的。首先考虑ϕ_{II}的波阵面方程

$$kx_1+kp_1x_3-\omega t=const$$

这是一个运动平面的方程，波阵面法线n确定了平面的运动方向：

$$n_1=\frac{k}{\sqrt{k^2+k^2p_1^2}}=(1+p_1^2)^{-1/2}=\frac{v_p}{v}$$
$$n_3=\frac{kp_1}{\sqrt{k^2+k^2p_1^2}}=\frac{p_1}{\sqrt{1+p_1^2}} \tag{7.16}$$

由上式可知$v=v_p/n_1$，即波在x_1轴方向的视速度。

其次考虑ϕ_{I}的波阵面方程

$$kx_1-kp_1x_3-\omega t=常数$$

从而又得到沿法线n'传播的运动平面，n'的方向余弦为

$$n_1' = -\frac{v_p}{v} = n_1 \qquad n_3' = -p_1(1+p_1^2)^{-1/2} = -n_3$$

波的传播速度仍为v_p。可见，ϕ_{II}代表振幅为A_{II}，以式（7.16）式所确定的角度离开界面的波；ϕ_I则代表振幅为A_I并以相同角度入射到界面上的波（见图7—3）。可以认为ϕ_I代表入射波，ϕ_{II}代表反射波。它们的频率显然都相同。

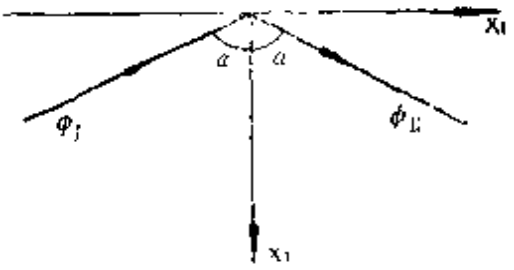


图 7—3

在入射角为α的情况下有

$$n_1 = v_p/v = \sin\alpha \qquad n_3 = p_1\sin\alpha = \cos\alpha$$

$$k = \omega/v = (\omega/v_p)\sin\alpha = k_p\sin\alpha$$

$$n_1' = \sin\alpha \qquad n_3' = -n_3 = -\cos\alpha$$

若令 $k_{p1} = k_p\sin\alpha \qquad k_{p3} = k_p\cos\alpha$

则由（7.15）可得

$$\phi = A_I e^{i(k_{p1}x_1 - k_{p3}x_3 - \omega t)} + A_{II} e^{i(k_{p1}x_1 + k_{p3}x_3 - \omega t)} \tag{7.17}$$

同理，类似的解对ψ_{II}、ψ_I也成立。不难看出，ψ_I代表入射SV波，ψ_{II}代表反射SV波。传播速度为v_s，传播方向为

$$n_1 = \frac{v_s}{v} \qquad n_3 = p_2 n_1$$

$$n_1' = n_1 \qquad n_3' = -n_3$$

在入射角为β的情况下

$$n_1 = \frac{v_s}{v} = \sin\beta \qquad n_3 = p_2\sin\beta = \cos\beta$$

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{v_s}\sin\beta = k_s\sin\beta$$

$$n = \sin\beta \qquad n_3' = -\cos\beta$$

若令 $k_{s1}=k_s\sin\beta$ $k_{s3}=k_s\cos\beta$

由（7.15）式可以得出

$$\phi=B_{\mathrm{I}}e^{i(k_{s1}x_1-k_3x_3-\omega t)}+B_{\mathrm{II}}e^{i(k_{s1}x_1+k_{s3}x_3-\omega t)} \tag{7.18}$$

我们还注意到，（7.15）式中的ϕ与ψ所含的k似乎应有所不同，但是下面就会看到它们是同一个常数，即有$k_p\sin\alpha=k_s\sin\beta$。这便是斯涅尔（Snell）反射定律。

既然ϕ与ψ都包含着入射波和反射波，那么（7.15）式中的A_{I}、A_{II}、B_{I}、B_{II}就不可能是完全独立的，它们应当满足自由表面（$x_3=0$）的边界条件

$$\sigma_{33}=0 \qquad \sigma_{31}=0$$

亦即

$$\left[\lambda\nabla^2\phi+2\mu\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_3}\right)\right]_{x_3=0}=0 \tag{7.19}$$

$$\left(2\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_3}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2}\right)_{x_3=0}=0$$

把（7.17）、（7.18）式代入（7.19）式并令$x_3=0$，可得

$$\begin{aligned}&(\lambda k_p^2+2\mu k_{p3}^2)\left[A_{\mathrm{I}}e^{i(k_{p1}x_1-\omega t)}+A_{\mathrm{II}}e^{i(k_{p1}x_1-\omega t)}\right]\\&-2\mu k_{s1}k_{s3}\left[B_{\mathrm{I}}e^{i(k_{s1}x_1-\omega t)}+B_{\mathrm{II}}e^{i(k_{s1}x_1-\omega t)}\right]=0\\&2k_{p1}k_{p3}\left[A_{\mathrm{I}}e^{i(k_{p1}x_1-\omega t)}-A_{\mathrm{II}}e^{i(k_{p1}x_1-\omega t)}\right]\\&+(k_{s3}^2-k_{s1}^2)\left[B_{\mathrm{I}}e^{i(k_{s1}x_1-\omega t)}+B_{\mathrm{II}}e^{i(k_{s1}x_1-\omega t)}\right]=0\end{aligned}$$

欲使上式对任意的x_1、t都成立，须使$k_{p1}=k_{s1}$，即

$$\frac{\omega}{v_p}\sin\alpha=\frac{\omega}{v_s}\sin\beta \qquad \text{即}\frac{\sin\alpha}{v_p}=\frac{\sin\beta}{v_s} \tag{7.20}$$

这就是著名的斯涅尔定律。将斯涅尔定律应用于上边的边值方程可以得到

$$\begin{aligned}&(\lambda k_p^2+2\mu k_{p3}^2)(A_{\mathrm{I}}+A_{\mathrm{II}})-2\mu k_{s1}k_{s3}(B_{\mathrm{I}}-B_{\mathrm{II}})=0\\&2k_{p1}k_{ps}(A_{\mathrm{I}}-A_{\mathrm{II}})+(k_{s3}^2-k_{s1}^2)(B_{\mathrm{I}}+B_{\mathrm{II}})=0\end{aligned} \tag{7.21}$$

如果给出入射波的振幅A_{I}、B_{I}，则可由（7.21）式确定反射波振幅A_{II}、B_{II}。

从上面的讨论可以看出：无论P波或SV波，其反射波与入射波频率相同；反射角等于入射角；满足边界条件的P波与SV波，反射角与入射角的关系由斯涅尔定律给出。我们还可以看到，无论$\phi_{\text{I}}=0$或$\psi_{\text{I}}=0$，ϕ_{II}，ψ_{II}，都不等于零。这就说明无论P波或SV波单独入射时，一般其反射波都会产生P波和SV波。这就从理论上证明了波型转换的存在。既然如此，当P波和SV波同时入射时会产生各自的P波和SV波，于是就会有四个反射波。这样，讨论起来是很麻烦的，为简便起见，在上边的讨论中使入射角α、β满足斯涅尔定律，从而使反射数目减少一半。可见，反射的P波、SV波中都有入射的P波、SV波引起的成分在内。

§7—3 P波在自由界面上的反射

在前一节讨论的基础上，我们来研究当P波单独入射到自由表面时的反射情形。

为了与地震工作的实际情况相对照，坐标系的选取如图7—4所示。x_1x_2平面为媒质的自由表面，x_1x_3平面是波的入射面。$x_3<0$的区间是真空，$x_3\geqslant 0$的区间是媒质。设媒质的密度为ρ、拉梅系数为λ、μ。

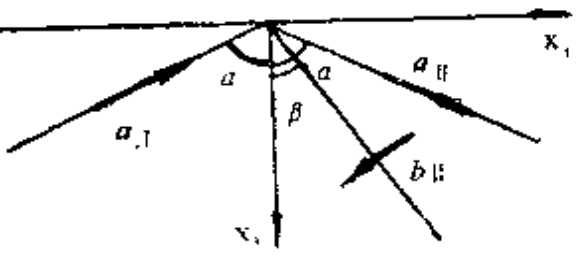


图 7—4

P波在自由表面的反射

假设一个振幅为A_{I}的平面简谐P波以α角入射到媒质的自由表面并形成反射的P波与SV波。位移势函数分别为

$$\Phi_{\text{I}}=A_{\text{I}}e^{i(k_{p1}x_1-k_{p3}x_3-\omega t)}$$

$$\Phi_{\text{II}}=A_{\text{II}}e^{i(k_{p1}x_1+k_{p3}x_3\omega t)} \qquad (7.22)$$

$$\phi_{\text{II}} = B_{\text{II}} e^{i(k_{s1}x_1 + k_{s3}x_3 - \omega t)}$$

其中 $k_{p1} = (\omega/v_p)\sin\alpha$ $k_{p3} = (\omega/v_p)\cos\alpha$

$k_{s1} = (\omega/v_s)\sin\beta$ $k_{s3} = (\omega/v_s)\cos\beta$

ϕ_{I}、ϕ_{II}、ϕ_{II}须满足自由表面的边值条件。由于真空中没有媒质，谈不上位移的连续条件。应力的边值条件为

$$\sigma_{33}\Big|_{x_3=0} = 0 \qquad \sigma_{31}\Big|_{x_3=0} = 0$$

我们之所以用这两个应力等于零的条件而不用$\sigma_{32}|_{x=0}=0$，是因为σ_{33}、σ_{31}与波函数的关系中包含了ϕ_{I}、ϕ_{II}、ϕ_{II}并由此可以确定A_{II}、ϕ_{II}与A_{I}之关系，而σ_{32}中却不包括ϕ_{I}、ϕ_{II}、ϕ_{II}。接下去的工作是重复做（7.19）式的微商，这留给读者去完成。实际上，既然无入射的SV波，可自（7.21）式看出，只须令$B_{\text{I}}=0$，即可得边值方程

$$(\lambda + 2\mu\cos^2\alpha)k_p^2(A_{\text{I}} + A_{\text{II}}) + \mu k_s^2 B_{\text{II}}\sin 2\beta = 0$$

$$k_p^2(A_{\text{I}} - A_{\text{II}})\sin 2\alpha + k_s^2 B_{\text{II}}\cos 2\beta = 0$$

把$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$，$v_p\sin\beta = v_s\sin\alpha$，$\rho v_p^2 = \lambda + 2\mu$，$\rho v_s^2 = \mu$，$\cos 2\beta = 1 - 2\sin^2\beta$等关系式运用到上边方程中，经过简单运算可得

$$\begin{aligned}&(A_{\text{I}} + A_{\text{II}})\cos 2\beta + B_{\text{II}}\sin 2\beta = 0\\ &(A_{\text{I}} - A_{\text{II}})\, v_s^2\sin 2\alpha + B_{\text{II}} v_p^2\cos 2\beta = 0\end{aligned} \tag{7.23}$$

由（7.23）式分别消去B_{II}、A_{II}可得反射P波、SV波以振幅比定义的反射系数分别为

$$\begin{aligned}F_{pp} &= \frac{A_{\text{II}}}{A_{\text{I}}} = \frac{v_s^2\sin 2\alpha\sin 2\beta - v_p^2\cos^2 2\beta}{v_s^2\sin 2\alpha\sin 2\beta + v_p^2\cos^2 2\beta}\\ F_{ps} &= \frac{B_{\text{II}}}{A_{\text{I}}} = \frac{-2v_s^2\sin 2\alpha\cos 2\beta}{v_s^2\sin 2\alpha\sin 2\beta + v_p^2\cos^2 2\beta}\end{aligned} \tag{7.24}$$

由此式可以确定反射波振幅A_{II}，B_{II}。由于$v_s < v_p$故由斯涅尔定律可知$\beta < \alpha$（见图7—4）。

由（7.24）式可以看出，随入射角取值的变化F_{pp}、F_{ps}可出现大于零或小于零的情形，对不同媒质其情形又各不相同。我们

规定当$F>0$，表示二波同位相，$F<0$表示二波反位相。例如当P波垂直入射时，$\alpha=0$，$A_{\text{II}}/A_{\text{I}}=-1$；当$\alpha\to\pi/2$，$A_{\text{II}}/A_{\text{I}}\to-1$。这时反射$P$波与入射$P$波反位相而振幅相同。

如果$F_{pp}=0$，即

$$v_s^2\sin2\alpha\sin2\beta-v_p^2\cos^2 2\beta=0$$

也就是说当入射角α满足上式时，反射波中不出现P波，全部变为SV波。这种现象称为偏振交换。这一点亦不难理解，此时入射波与表面分子相互作用的结果，只引起表面微体元产生剪切形变，故只有切变波反射出去。很明显，当发生偏振交换时，反射波与入射波的方向垂直。拉梅系数$\lambda=\mu$的材料称为泊松材料。构成地球的岩石可近似看做泊松材料，这时引起偏振交换的入射角$\lambda\alpha=60°$，$77°12'$。

我们定义反射波能流密度矢量与入射波能流密度矢量在界面上的法线分量之比为能流反射系数。对于反射P波、SV波能流反射系数分别为

$$D_{pp}=\left(\frac{A_{\text{II}}}{A_{\text{I}}}\right)^2\qquad D_{pv}=\left(\frac{B_{\text{II}}}{A_{\text{I}}}\right)^2\frac{v_p}{v_s}\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\tag{7.25}$$

利用$\boldsymbol{u}_p=\nabla\phi$，$\boldsymbol{u}_s=\nabla\times\psi$可由（7.22）式分别求出入射波及反射波的位移为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_{p\text{I}}&=iA_{\text{I}}(k_{p1}\boldsymbol{i}_1-k_{p3}\boldsymbol{i}_3)e^{i(k_{p1}x_1-k_{p3}x_3-\omega t)}\\&=\boldsymbol{a}_{\text{I}}e^{i(k_{p1}x_1-k_{p3}x_3-\omega t)}\\\boldsymbol{u}_{p\text{II}}&=iA_{\text{II}}(k_{p1}\boldsymbol{i}_1+k_{p3}\boldsymbol{i}_3)e^{i(k_{p1}x_1+k_{p3}x_3-\omega t)}\\&=\boldsymbol{a}_{\text{II}}e^{i(k_{p1}x_1+k_{p3}x_3-\omega t)}\\\boldsymbol{u}_{s\text{II}}&=iB_{\text{II}}(-k_{s3}\boldsymbol{i}_1+k_{s1}\boldsymbol{i}_3)e^{i(k_{s1}x_1+k_{s1}x_3-\omega t)}\end{aligned}\tag{7.26}$$

其中$\boldsymbol{a}_{\text{I}}=iA_{\text{I}}(k_{p1}\boldsymbol{i}_1-k_{p3}\boldsymbol{i}_3)$、$\boldsymbol{a}_{\text{II}}=iA_{\text{II}}(k_{p1}\boldsymbol{i}_1+k_{p3}\boldsymbol{i}_3)$，$\boldsymbol{b}_{\text{II}}=iB_{\text{II}}(-k_{s3}\boldsymbol{i}_1+k_{s1}\boldsymbol{i}_3)$为各波的复振幅矢量。规定了当$iA_{\text{I}}$，$iA_{\text{II}}$，$iB_{\text{II}}$分取绝对值时，振幅矢量的方向为振幅谱之正方向（见图7—4）

由（7.26）式及边值条件可以求出以振幅比定义的位移反射系数为

$$R_{pp}=\frac{a_{\text{II}}}{a_{\text{I}}}=F_{pp}\qquad R_{pv}=\frac{b_{\text{II}}}{a_{\text{I}}}=-\frac{v_p}{v_s}F_{pv}\qquad(7.27)$$

为简便，若设$a_{\text{I}}=1$，则可求出地表位移水平分量与铅直分量的振幅分别为

$$\begin{aligned}U_1&=(1+R_{pp})\sin\alpha-R_{pv}\cos\beta\\&=2\cos\alpha\sin2\beta/\Delta\\U_3&=(R_{pp}-1)\cos\alpha+R_{pv}\sin\beta\\&=-2\cos\alpha\cos2\beta/\Delta\\\Delta&=\cos^2 2\beta+(v_s/v_p)^2\sin2\alpha\cos2\beta\end{aligned}$$

当P波垂直入射时，$\alpha=0$，由上式可得$U_1=0$，$U_3=-2$。可见垂直方向振幅是入射振幅的2倍。

§7—4 SV、SH波在自由界面的反射

这一节我们研究平面简谐横波在媒质的自由界面上的反射问题。

一、SV波的反射

坐标系的选取如图7—5所示。以ψ_{I}、ψ_{II}、ϕ_{II}表示入射的SV波及反射的SV波、P波的位移势函数，且仅有x_2方向分量 它们的形式各为

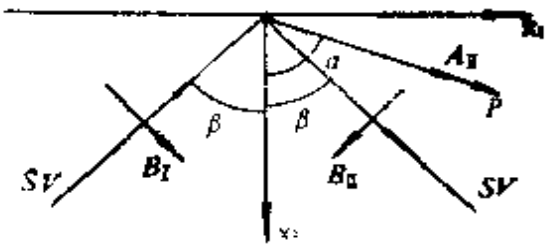


图 7—5
SV波在自由表面的反射

$$\begin{aligned}\psi_{\text{I}}&=B_{\text{I}}e^{i(k_{s1}x_1-k_{s3}x_3-\omega t)}\\\psi_{\text{II}}&=B_{\text{II}}e^{i(k_{s1}x_1+k_{s3}x_3-\omega t)}\\\phi_{\text{II}}&=A_{\text{II}}e^{i(k_{p1}x_1+k_{p3}x_3-\omega t)}\end{aligned}\qquad(7.28)$$

其中$k_{s1}=k_s\sin\beta$，$k_{s3}=k_s\cos\beta$，$k_{p1}=k_p\sin\alpha$，$k_{p3}=k_p\cos\alpha$。波函数须

满足自由表面的边值条件：$\sigma_{s3}|_{x_3=0}=0$，$\sigma_{s1}|_{x_3=0}=0$。

既然无入射的P波，可以令$A_{\mathrm{I}}=0$，由（7.21）式得到边值方程

$$\begin{aligned}&(\lambda k_p^2+2\mu k_{p3}^2)A_{\mathrm{II}}-2\mu k_{s1}k_{s3}(B_{\mathrm{I}}-B_{\mathrm{II}})=0\\&-2k_{p1}k_{p3}A_{\mathrm{II}}+(k_{s3}^2-k_{s1}^2)(B_{\mathrm{I}}+B_{\mathrm{II}})=0\end{aligned}\tag{7.29}$$

类似于讨论P波情况，利用几个三角函数公式及斯涅尔定律可将（7.29）式化为

$$\begin{aligned}&A_{\mathrm{II}}\cos 2\beta-(B_{\mathrm{I}}-B_{\mathrm{II}})\sin 2\beta=0\\&-A_{\mathrm{II}}v_s^2\sin 2\alpha+v_p^2(B_{\mathrm{I}}+B_{\mathrm{II}})\cos 2\beta=0\end{aligned}\tag{7.30}$$

由（7.30）式分别消去A_{II}、B_{II}，可以得到反射SV波、反射P波的反射系数分别为

$$\begin{aligned}F_{vv}&=\frac{B_{\mathrm{II}}}{B_{\mathrm{I}}}=\frac{v_s^2\sin 2\alpha\sin 2\beta-v_p^2\cos^2 2\beta}{v_s^2\sin 2\alpha\sin 2\beta+v_p^2\cos^2 2\beta}\\F_{vp}&=\frac{A_{\mathrm{II}}}{B_{\mathrm{I}}}=\frac{2v_p^2\sin 2\beta\cos 2\beta}{v_s^2\sin 2\alpha\sin 2\beta+v_p^2\cos^2 2\beta}\end{aligned}\tag{7.31}$$

入射波、反射波位移振幅谱如图7—5所示。利用$u_p=\nabla\phi$及$u_s=\nabla\times\psi$以及边值条件可以得出位移反射系数

$$R_{vv}=\frac{b_{\mathrm{II}}}{b_{\mathrm{I}}}=F_{vv}\qquad R_{vp}=\frac{a_{\mathrm{II}}}{b_{\mathrm{I}}}=\frac{v_s}{v_p}F_{vp}\tag{7.32}$$

由（7.31）式可知，对于正入射（$\beta=0$）和掠入射（$\beta\to\pi/2$，反射P波将消失，全部为SV波。而当

$$v_s^2\sin 2\alpha\sin 2\beta-v_p^2\cos^2 2\beta=0$$

时，反射SV波将消失，反射波全部为P波，即SV波亦存在偏振交换。

下面我们研究SV波发生全反射的情况。

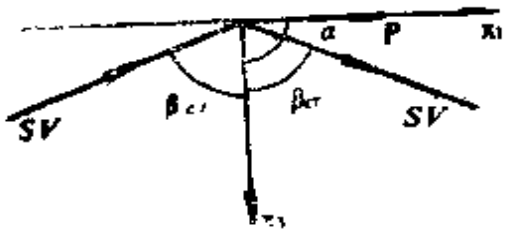


图 7—6 临界反射

由于$v_s/v_p<1$，故$\sin\beta=(v_s/v_p)\sin\alpha<1$。对于$P$波入射时，由于存在小于$\alpha$的实数值$\beta$，故$F_{pv}$、$F_{pp}$等都是实数。但是，当$SV$波入射时，由于$v_p>v_s$，故$\alpha>\beta$。当$\beta=\sin^{-1}(v_s/v_p)$时，则

$\alpha=\pi/2$，反射P波沿x_1轴方向传播。此时的入射角称为临界角，以β_c表示之。此种现象称为临界反射（见图7—6）。由（7.9）式及（7.11）式可知

$$\Phi_{\text{II}}=A_1x_3+A_{\text{II}}$$

当$x_3\to\infty$，有$\Phi_{\text{II}}\to\infty$。无穷大的波是没有物理意义的，因为它不符合能量守恒定律。此时取$A_1=0$，于是

$$\Phi_{\text{II}}=A_{\text{II}}e^{i(k_px_1-\omega t)}\qquad F_{vv}=-1$$

由于β可以任意变化，故当$\beta>\sin^{-1}(v_s/v_p)$时，有$\sin\alpha=(v_p/v_s)\sin\beta>[(v_p/v_s)(v_s/v_p)=1]$。此时$\alpha$必为复数，且有$\alpha=\pi/2-i\varphi$（$\varphi>0$，且依赖于媒质的拉梅系数）。由复数理论可得

$$\sin\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-i\varphi\right)=\text{ch}\varphi$$

$$\cos\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-i\varphi\right)=i\,\text{sh}\varphi \tag{7.33}$$

$$\phi_{\text{II}}=A_{\text{II}}e^{-k_px_3\text{sh}\varphi}e^{i(k_px_1\text{ch}\varphi-\omega t)}$$

此时的反射波已不是均匀P波，而是非均匀面波。它的振幅$A_{\text{II}}\exp(-k_px_3\,\text{sh}\varphi)$已不再是常数，而是随$x_3$的增大呈指数衰减。当$x_3$增大时，波幅将很快衰减为零，故波不会透入媒质很深，它只在表面层附近沿x_1轴方向传播，波的相速度为$v=v_p/\text{ch}\varphi$。这正是（7.12）式的情形。若令$k=\omega/v$，则由$\text{sh}^2\varphi=\text{ch}^2\varphi-1=(v_p/v)^2-1$可得

$$\Phi_{\text{II}}=A_{\text{II}}e^{-k\xi x_3}e^{i(kx_1-\omega t)} \tag{7.34}$$

其中$\xi=[(v/v_p)^2-1]^{1/2}$，ki_1、$k\xi i_3$分别为波的传播矢量和衰减矢量。若以$\boldsymbol{k}$表示非均匀波的复波矢量，则

$$\boldsymbol{k}=k_1'i_1+ik_3''i_3=ki_1+ik\xi i_3$$

将$\alpha=(\pi/2)-i\varphi$代入F_{vv}表达式中可得

$$F_{vv}=-\frac{-a+ib}{a+ib}$$

其中 $a=v_p^2\cos^2 2\beta$ $b=v_s^2\sin 2\varphi\sin 2\beta$

两波位相差为 $\delta=-2\tan^{-1}(b/a)$。由上式可知 $|F_{vv}|=1$。可见，当反射 SV 波的反射系数为复数，其模数为1，也就是说反射波与入射波振幅相同而有一位相差。此种情况称为全反射。

二、SH 波的反射

令入射波、反射波的位移矢势为

$$\psi_{\mathrm{I}}=\psi_1+\psi_3=B_1e^{i(k_{s1}x_1-k_{s3}x_3-\omega t)}i_1+B_3e^{i(k_{s1}x_1-k_{s3}x_3-\omega t)}i_3$$

$$\psi_{\mathrm{II}}=\psi_{,1}+\psi_{,3}=B_{,1}e^{i(k_{s1}x_1+k_{s3}x_3-\omega t)}i_1+B_{,3}e^{i(k_{s1}x_1+k_{s3}x_3-\omega t)}i_3$$

利用 $u_s=\nabla\times\psi$ 可以得出 SH 波位移场 $u_2=(u_1+u_{\mathrm{II}})i_2$

$$u_1=C_1e^{i(k_{s1}x_1-k_{s3}x_3-\omega t)}$$

$$u_{\mathrm{II}}=C_{\mathrm{II}}e^{i(k_{s1}x_1+k_{s3}x_3-\omega t)} \tag{7.35}$$

其中 u_1、u_{II} 分别为入射及反射的 SH 波位移场（俗称位移波），

$$k_{s1}=k_s\sin\beta,\quad k_{s3}=k_s\cos\beta$$

此时，边值条件为

$$\sigma_{32}|_{x_3=0}=-\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\Big|_{x_3=0}=0$$

将（7.35）式代入上式，微商后令 $x_3=0$，于是得

$$R_{HH}=\frac{C_{\mathrm{II}}}{C_1}=1 \tag{7.36}$$

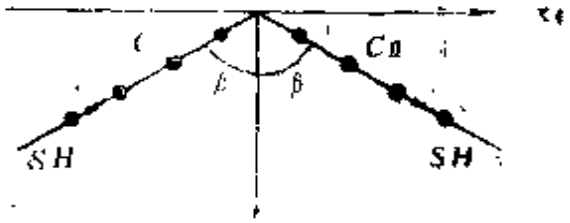


图 7—7 SH 波的反射

可见 SH 波的振幅和位相都不因反射而改变（见图7—7）。可以证明，此情形下不存在 SH 型面波。

在§7—3、§7—4两节里，我们讨论了 P 波、SV 波及 SH 波单独入射的情形。实际上，入射波偏振方向可以是任意

的。按矢量分解法可以分解为P波、SV波和SH波，这些分解后的波场按各自的规律形成反射波总波场（见图7—8）。

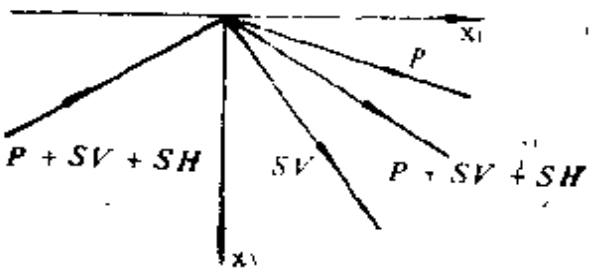


图 7—8

一般平面波的反射

§7—5 SH波在媒质分界面上的反射与折射

分层均匀的媒质中弹性波的传播问题在地球物理学和地震学中都有重要应用。大地的传播特征是随深度变化的。作为实际问题的一级近似，可以认为地球是由若干地层组成的，每一层的物理特性都是恒定的。这样，地震波在地球内部传播时发生的反射和折射，就可以看做弹性波在层状结构媒质的分界面上发生的反射和折射。

一、SH波解

两个具有不同力学性质的均匀各向同性的弹性半空间彼此紧密接触，x_1x_2平面就是它们的分界面，x_1x_3平面是波的入射面（见图7—9）。我们主要研究这样的区间内平面简谐SH波解的形式。

对于SH波，假设两种媒质中的位移由下式给出：

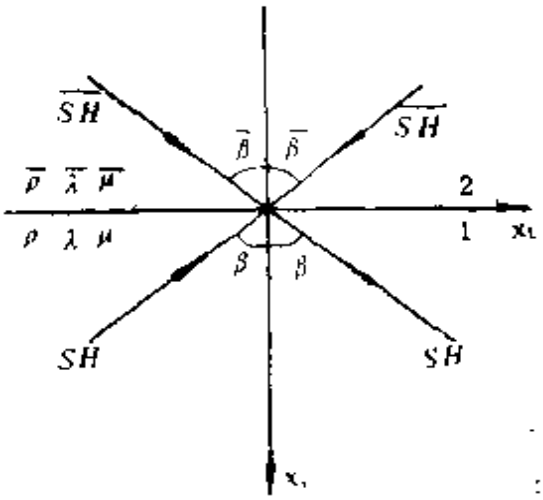


图 7—9

SH波解

$$u_2 = f(x_3)e^{i(k_{s1}x_1 - \omega t)}$$
$$\bar{u}_2 = \bar{f}(x_3)e^{i(\bar{k}_{s1}x_1 - \omega t)} \tag{7.37}$$

将（7.37）式代入波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = \frac{1}{v_s^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

得到亥姆霍兹方程

$$f'' + (k_s^2 - k_{s1}^2)f = 0$$
$$\bar{f}'' + (\bar{k}_s^2 - \bar{k}_{s1}^2)\bar{f} = 0$$

若令$k_{s3}^2 = k_s^2 - k_{s1}^2 > 0$，　　$\bar{k}_{s3}^2 = \bar{k}_s^2 - \bar{k}_{s1}^2 > 0$

可得
$$f = C_I e^{-ik_{s3}x_3} + C_{II} e^{ik_{s3}x_3}$$
$$\bar{f} = \bar{C}_I e^{-i\bar{k}_{s3}x_3} + \bar{C}_{II} e^{i\bar{k}_{s3}x_3}$$

将上式代入（7.37）式得

$$u_2 = C_I e^{i[k_s(n_1x_1 - n_3x_3) - \omega t]} + C_{II} e^{i[k_s(n_1x_1 + n_3x_3) - \omega t]}$$
$$\bar{u}_2 = \bar{C}_I e^{i[\bar{k}_s(\bar{n}_1x_1 - \bar{n}_3x_3) - \omega t]} + \bar{C}_{II} e^{i[\bar{k}_s(\bar{n}_1x_1 + \bar{n}_3x_3) - \omega t]} \tag{7.38}$$

若假定n_1、n_3、$\bar{n}_1$、$\bar{n}_3 > 0$，则（7.38）式的第一式后边两项依次表示自媒质1射向及离开分界面的波，传播方向分别为$\boldsymbol{n}' = \{n_1, -n_3\}$，$\boldsymbol{n} = \{n_1, n_3\}$，第二式中后边两项依次代表在媒质2中离开分界面及射向分界面的波。实际上，这些波包括入射波、反射波及折射波。可见C_I、C_{II}、$\bar{C}_I$，$\bar{C}_{II}$并非完全独立的，它们必须满足边界条件（$x_3 = 0$）

$$u_2 = \bar{u}_2, \qquad \sigma_{32} = \bar{\sigma}_{32} \text{或} \ \mu\frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \bar{\mu}\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_3}$$

为使边界方程对任何的x_1，t都成立，须有

$$k_{s1} = \bar{k}_{s1}$$

此即斯涅尔定律。

二、SH波的反射与折射

现在考虑媒质1中有一振幅为C_I的SH波以入射角β向分界面传播，媒质2中没有射向分界面的波，即（7.38）式中$C_{II}=0$。于是媒质1、2内位移场为

$$u_2 = C_I e^{i[k_{s1}(n_1x_1 - n_3x_2) - \omega t]} + C_{II} e^{i[k_{s1}(n_1x_1 + n_3x_2) - \omega t]}$$

$$\bar{u}_2 = \bar{C}_I e^{i[\bar{k}_{s1}(\bar{n}_1x_1 - \bar{n}_3\bar{x}_3) - \omega t]}$$

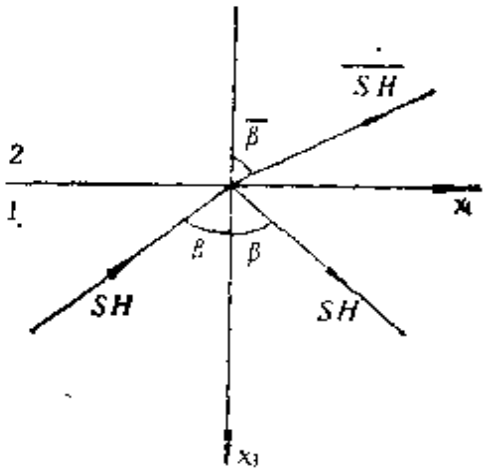


图 7—10
SH波的反射与折射

其中 （7.39）

$$n_1 = \sin\beta \qquad n_3 = \cos\beta$$

$$\bar{n}_1 = \sin\bar{\beta} \qquad \bar{n}_3 = \cos\bar{\beta}$$

当$x_3 = 0$时，位移（7.39）式及应力须满足边界条件

$$u_2 = \bar{u}_2 \qquad \mu\frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \bar{\mu}\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_3}$$

亦即

$$C_I e^{i(k_{s1}x_1 - \omega t)} + C_{II} e^{i(k_{s1}x_1 - \omega t)} = \bar{C}_I e^{i(\bar{k}_{s1}x_1 - \omega t)}$$

$$\mu[C_I k_{s3} e^{i(k_{s1}x_1 - \omega t)} - C_{II} k_{s3} e^{i(k_{s1}x_1 - \omega t)}] = \bar{\mu}\bar{C}_I\bar{k}_{s3} e^{i(\bar{k}_{s1}x_1 - \omega t)}$$

欲使上式对任何的x_1，t都成立，须有

$$k_{s1} = \bar{k}_{s1} \qquad \text{即} \frac{\sin\beta}{v_s} = \frac{\sin\bar{\beta}}{\bar{v}_s}$$

或者

$$\sin\bar{\beta} = \frac{1}{m}\sin\beta \qquad m = \frac{v_s}{\bar{v}_s}$$

此式即斯涅尔定律。由此可以确定折射角$\bar{\beta}$。m对SH波起着光学中定义的折射率的作用。若使$\bar{\beta}$为实数，则有$|\sin\beta| \leqslant m$。由边值方程可进一步得到

$$C_{\mathrm{I}}+C_{\mathrm{II}}=\bar{C}_{\mathrm{I}} \qquad C_{\mathrm{I}}-C_{\mathrm{II}}=\frac{\bar{\rho}\,\bar{v}_s n_3}{\rho v_s n_3}\bar{C}_{\mathrm{I}}$$

由此可以确定反射波与折射波的振幅 C_{II}、$\bar{C}_{\mathrm{I}}$。由上式尚可确定反射系数与折射系数分别为

$$R_{HH}=\frac{C_{\mathrm{II}}}{C_{\mathrm{I}}}=\frac{\rho v_s\cos\beta-\bar{\rho}\,\bar{v}_s\cos\bar{\beta}}{\rho v_s\cos\beta+\bar{\rho}\,\bar{v}_s\cos\bar{\beta}}$$

$$T_{H\bar{H}}=\frac{\bar{C}_{\mathrm{I}}}{C_{\mathrm{I}}}=\frac{2\rho v_s\cos\beta}{\rho v_s\cos\beta+\bar{\rho}\,\bar{v}_s\cos\bar{\beta}} \qquad (9.40)$$

当入射角 β 满足 $\rho v_s\cos\beta-\bar{\rho}\,\bar{v}_s\cos\bar{\beta}\approx 0$ 反射波振幅 $C_{\mathrm{II}}=0$，发生全透射。

根据斯涅尔定律，只要 $m\geqslant 1$，$\bar{\beta}$ 取实数值，总可以存在折射波。但是，如果 $m<1$，就会存在一个由 $\sin\beta_{cr}=m$ 定义的临界角，当 $\beta=\beta_{cr}$，则有 $\bar{\beta}=\pi/2$，从而折射波沿界面传播（见图7—11）。如果 $\beta>\beta_{cr}$，则 $\bar{\beta}$ 变为虚数。这时没有折射的 SH 波，只是有面波类型的扰动沿分界面传播，并随着进入媒质2的深度的增加而衰减。于是发生了全反射。这时

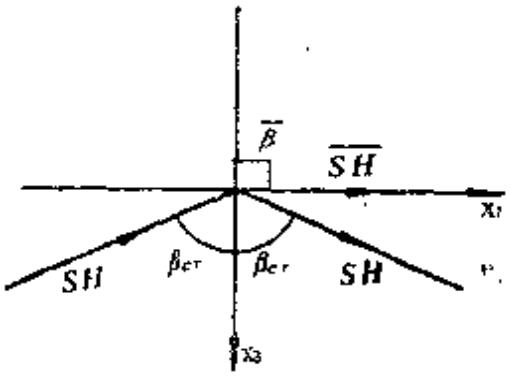


图 7—11

$$\bar{\beta}=\frac{\pi}{2}-i\varphi$$

$$\overline{u_2}=\bar{C}_1 e^{-\overline{k_s}\,\mathrm{sh}\varphi\cdot x}\,e^{i(\overline{k_s}\,\mathrm{ch}\varphi\cdot x_1-\omega t)} \qquad (7.41)$$

令 $$\overline{k_s}\,\mathrm{ch}\varphi=\frac{\omega}{v}$$

于是 $$\mathrm{ch}\varphi=\frac{\overline{v}}{v} \qquad \mathrm{sh}\varphi=\left[\left(\frac{\overline{v}}{v}\right)^2-1\right]^{1/2}$$

式（7.41）式又可写做

$$\bar{v}_2 = \bar{C}_1 e^{\frac{\omega}{\bar{v}}(1-(v/\bar{v})^2)^{1/2}x_3} e^{i(-\frac{\omega}{\bar{v}}x-\omega t)}$$

$$= \bar{C}_1 e^{k\xi x_3} e^{i(kx-\omega t)}$$

其中 $k=\omega/v$，v 为面波相速度，$\xi=[1-(v/\bar{v})^2]^{1/2}$。此时反射系数 R_{HH} 变为复数，其模数为 $|R_{HH}|=1$。这表明反射的 SH 波振幅不变，但与入射波存在一位相差 2δ，写做 $C_{\text{II}}/C_{\text{I}} = e^{-2i\delta}$。其中

$$\tan\delta = \frac{\bar{\mu}}{\mu}\frac{(\sin^2\beta - m^2)^{1/2}}{\cos\beta} \qquad (7.42)$$

§7—6 分层媒质中的P波与SV波

这一节我们研究两个紧密接触的半无限大弹性空间内 P 波、SV 波的形式及其传播规律。

一、P波、SV波解

根据前一节的讨论，我们仍设 x_1x_2 平面为媒质 1、2 的分界面，x_1x_3 平面为波的入射面。设 P 波、SV 波解分别为

$$\phi = \Phi(x_3)e^{i(k_{p1}x_1-\omega t)} \qquad \psi = \Psi(x_3)e^{i(k_{s1}x_1-\omega t)}$$

$$\bar{\phi} = \bar{\Phi}(x_3)e^{i(\bar{k}_{p1}x_1-\omega t)} \qquad \bar{\psi} = \bar{\Psi}(x_3)e^{i(\bar{k}_{s1}x_1-\omega t)}$$

我们很容易得出上式的解为

$$\phi = A_{\text{I}}e^{i(k_{p1}x_1-k_{p3}x_3-\omega t)} + A_{\text{II}}e^{i(k_{p1}x_1+k_{p3}x_3-\omega t)}$$

$$\psi = B_{\text{I}}e^{i(k_{s1}x_1-k_{s3}x_3-\omega t)} + B_{\text{II}}e^{i(k_{s1}x_1+k_{s3}x_3-\omega t)} \qquad (7.43)$$

$$\bar{\phi} = \bar{A}_{\text{I}}e^{i(\bar{k}_{p1}x_1-\bar{k}_{p3}x_3-\omega t)} + \bar{A}_{\text{II}}e^{i(\bar{k}_{p1}x_1+\bar{k}_{p3}x_3-\omega t)}$$

$$\bar{\psi} = \bar{B}_{\text{I}}e^{i(\bar{k}_{s1}x_1-\bar{k}_{s3}x_3-\omega t)} + \bar{B}_{\text{II}}e^{i(\bar{k}_{s1}x_1+\bar{k}_{s3}x_3-\omega t)}$$

其中 $k_{p1}\cdots\bar{k}_{p3}>0$。上式中 ϕ 与 ψ 表达式中右边第一项表示自媒质

1 向边界面传播的波，第二项则表示离开分界面在媒质 1 中传播的波。$\bar{\phi}$与$\bar{\bar{\phi}}$表达式中右边第一项表示离开分界面在媒 2 质中传播的波，第二项则表示在媒质 2 中向分界面传播的波。这包含了入射、反射及折射波。

二、P波、SV波在分界面上的反射与折射

如果仅在 1 区中存在波源，则$\bar{A}_{\text{II}}=\bar{B}_{\text{II}}=0$。若入射波$A_{\text{I}}$、$B_{\text{I}}$已经给定，入射波、反射波以及折射波由（7.43）式可以给出如下：

$$
\begin{aligned}
\phi_{\text{I}} &= A_{\text{I}} e^{i(k_{p1}x_1 - k_{p3}x_3 - \omega t)} \\
\psi_{\text{I}} &= B_{\text{I}} e^{i(k_{s1}x_1 - k_{s3}x_3 - \omega t)} \\
\phi_{\text{II}} &= A_{\text{II}} e^{i(k_{p1}x_1 + k_{p3}k_3 - \omega t)} \\
\psi_{\text{II}} &= B_{\text{II}} e^{i(k_{s1}x_1 + k_{s3}x_3 - \omega t)} \\
\bar{\phi}_{\text{I}} &= \bar{A}_{\text{I}} e^{i(\bar{k}_{p1}x_1 - \bar{k}_{p1}x_3 - \omega t)} \\
\bar{\psi}_{\text{I}} &= \bar{B}_{\text{I}} e^{i(\bar{k}_{s1}x_1 - \bar{k}_{s3}x_3 - \omega t)}
\end{aligned}
\qquad (7.44)
$$

式（7.44）须满足边界条件（$x_3=0$）

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \bar{\sigma}_1 \qquad & u_3 &= \bar{u}_3 \\
\sigma_{33} &= \bar{u}_{33} \qquad & \sigma_{31} &= \bar{u}_{31}
\end{aligned}
\qquad (7.45)
$$

每个入射的P波或SV波一般各形成两个反射波和两个折射波。这样P波、SV波同时入射时就会形成四个反射波和四个折射波，研究起来比较烦难。欲使问题简单且又不失其一般性，可使入射、反射及折射的P波、SV波的入射角和出射角满足斯涅尔定律

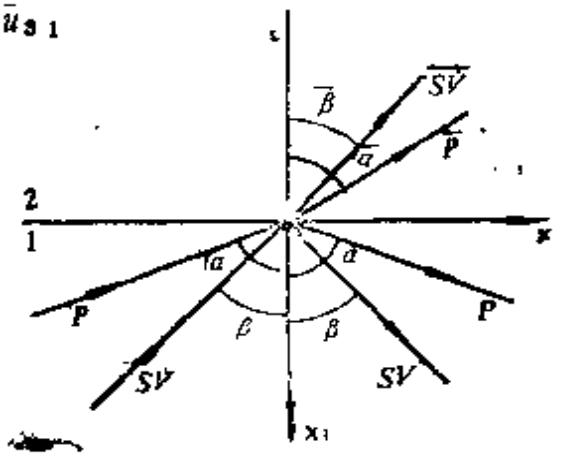


图 7—12
P波SV波的反射与折射

$$\frac{\sin\alpha}{v_p}=\frac{\sin\beta}{v_s}=\frac{\sin\bar{\alpha}}{\bar{v}_p}=\frac{\sin\bar{\beta}}{\bar{v}_s} \tag{7.46}$$

这样，可以使反射波与折射波的数目减少一半（见图7—12）。此时有

$$\begin{aligned} k_{p1}&=k_p\sin\alpha & k_{p3}&=k_p\cos\alpha\\ k_{s1}&=k_s\sin\beta & k_{s3}&=k_s\cos\beta\\ \bar{k}_{p1}&=\bar{k}_p\sin\bar{\alpha} & \bar{k}_{p3}&=\bar{k}_p\cos\bar{\alpha}\\ \bar{k}_{s1}&=\bar{k}_s\sin\bar{\beta} & \bar{k}_{s3}&=\bar{k}_s\cos\bar{\beta} \end{aligned} \tag{7.47}$$

当$x_3=0$时，由（7.44）～（7.46）式可得如下边值方程：

$$\begin{aligned} &A_{\mathrm{I}}+A_{\mathrm{II}}+P_2(B_{\mathrm{I}}-B_{\mathrm{II}})-\bar{A}_{\mathrm{I}}-\bar{P}_2\bar{B}_{\mathrm{I}}=0\\ &P_1(A_{\mathrm{I}}-A_{\mathrm{II}})-(B_{\mathrm{I}}+B_{\mathrm{II}})-\bar{P}_1\bar{A}_{\mathrm{I}}+\bar{B}_{\mathrm{I}}=0\\ &[\lambda(1+P_1^2)+2\mu P_1^2](A_{\mathrm{I}}-A_{\mathrm{II}})-2\mu P_2(B_{\mathrm{I}}-B_{\mathrm{II}})\\ &-[\bar{\lambda}(1+\bar{P}_1^2)+2\bar{\mu}\bar{P}_1^2]\bar{A}_{\mathrm{I}}+2\bar{\mu}\bar{P}_2\bar{B}_{\mathrm{I}}=0\\ &\mu[2P_1(A_{\mathrm{I}}-A_{\mathrm{II}})-(1-P_2^2)(B_{\mathrm{I}}+B_{\mathrm{II}})]\\ &-\bar{\mu}[2\bar{P}_1\bar{A}_{\mathrm{I}}-(1-\bar{P}_2^2)\bar{B}_{\mathrm{I}}]=0 \end{aligned} \tag{7.48}$$

其中

$$P_1=\frac{k_{p3}}{k_{p1}}=\mathrm{ctg}\alpha \qquad P_2=\frac{k_{s3}}{k_{s1}}=\mathrm{ctg}\beta$$

$$\bar{P}_1=\frac{\bar{k}_{p3}}{\bar{k}_{p1}}=\mathrm{ctg}\bar{\alpha} \qquad \bar{P}_2=\frac{\bar{k}_{s3}}{\bar{k}_{s1}}=\mathrm{ctg}\bar{\beta}$$

由（7.47）式及图7—12可以确定反射波与折射波的方向。由于$v_p>v_s$，$\bar{v}_p>\bar{v}_s$，故有$\alpha>\beta$，$\bar{\alpha}>\bar{\beta}$。由（7.48）式可以确定反射波振幅A_{II}、B_{II}及折射波振幅$\bar{A}_{\mathrm{I}}$、$\bar{B}_{\mathrm{I}}$。但是求解（7.42）式涉及四阶行列式，因计算量较大，故在此省略。

§7—7 P波、SV波在分界面上的反射和折射

这一节我们来研究P波、SV波单独入射到分界面上形成的反射与射折。

一、P波入射时的反射波与折射波

如果P波自1区中入射到分界面上，则有$B_{\mathrm{I}}=\overline{A}_{\mathrm{II}}=\overline{B}_{\mathrm{II}}=0$。由(7.44)式可知，这时入射波、反射波及折射波分别为

$$\phi_{\mathrm{I}}=A_{\mathrm{I}}e^{i(k_{p1}x_1-k_{p3}x_3-\omega t)}$$

$$\phi_{\mathrm{II}}=A_{\mathrm{II}}e^{i(k_{p1}x_1+k_{p3}x_3-\omega t)}$$

$$\psi_{\mathrm{II}}=B_{\mathrm{II}}e^{i(k_{s1}x_1+k_{s3}x_3-\omega t)}$$

$$\overline{\phi}_{\mathrm{I}}=\overline{A}_{\mathrm{I}}e^{i(\overline{k}_{p1}x_1-\overline{k}_{p3}x_3-\omega t)}$$

$$\overline{\psi}_{\mathrm{I}}=\overline{B}_{\mathrm{I}}e^{i(\overline{k}_{s1}x_1-\overline{k}_{s3}x_3-\omega t)}$$

根据边界条件(7.45)式及斯涅尔定律(7.16)式，A_{I}，…，$\overline{B}_{\mathrm{I}}$须满足如下的边值方程：

$$\begin{aligned}
&A_{\mathrm{I}}+A_{\mathrm{II}}-P_2B_{\mathrm{II}}-\overline{A}_{\mathrm{I}}-\overline{P}_2\overline{B}_{\mathrm{I}}=0\\
&P_1(A_{\mathrm{I}}-A_{\mathrm{II}})-B_{\mathrm{II}}-\overline{P}_1\overline{A}_{\mathrm{I}}+\overline{B}_{\mathrm{I}}=0\\
&[\lambda(1+P_1^2)+2\mu P_1^2](A_{\mathrm{I}}+A_{\mathrm{II}})+2\mu P_2B_{\mathrm{II}}\\
&\qquad -[\overline{\lambda}(1+\overline{P}_1^2)+2\overline{\mu}\overline{P}_1^2]\overline{A}_{\mathrm{I}}+2\overline{\mu}\overline{P}_2\overline{B}_{\mathrm{I}}=0\\
&\mu[2P_1(A_{\mathrm{I}}-A_{\mathrm{II}})-(1-P_2^2)B_{\mathrm{II}}]\\
&\qquad -\overline{\mu}[2\overline{P}_1\overline{A}_{\mathrm{I}}-(1-\overline{P}_2^2)\overline{B}_{\mathrm{I}}]=0
\end{aligned}\tag{7.49}$$

解上述方程可得反射系数与折射系数。但由于过于繁冗，这里仅给出以振幅比定义的式子，它们是

$$F_{pp}=\frac{A_{\mathrm{II}}}{A_{\mathrm{I}}}\qquad F_{ps}=\frac{B_{\mathrm{II}}}{A_{\mathrm{I}}}$$

$$E_{p\bar{p}}=\frac{\overline{A}_{\mathrm{I}}}{A_{\mathrm{I}}}\qquad E_{p\bar{s}}=\frac{\overline{B}_{\mathrm{I}}}{A_{\mathrm{I}}}$$

我们感兴趣的也是实际工作中应用最多的情况是P波垂直入射问题。当P波正入射时，由斯涅尔定律可知，$\beta=\alpha=\bar{\alpha}=\bar{\beta}$

$=0$。由方程（7.49）式可得

$$B_{\text{II}}/v_s + \bar{B}_{\text{I}}/\bar{v}_s = 0$$
$$A_{\text{I}}/v_p - A_{\text{II}}/v_p - \bar{A}_{\text{I}}/\bar{v}_p = 0$$
$$\rho A_{\text{I}} + \rho A_{\text{II}} - \bar{\rho}\,\bar{A}_{\text{I}} = 0$$
$$B_{\text{II}} - \bar{B}_{\text{I}} = 0$$

由此方程组解得 $B_{\text{II}} = B_{\text{I}} = 0$，即这时不会产生反射和折射的 SV 波。由上边方程解得 P 波的反射系数与折射系数分别为

$$F_{pp} = \frac{A_{\text{II}}}{A_{\text{I}}} = \frac{\bar{\rho}\,\bar{v}_p - \rho v_p}{\rho v_p + \bar{\rho}\,\bar{v}_p} \qquad (7.50)$$

$$E_{p\bar{p}} = -\frac{\bar{A}_{\text{I}}}{A_{\text{I}}} = \frac{2\rho\bar{v}_p}{\rho v_p + \bar{\rho}\bar{v}_p}$$

由 $u_p = \nabla\phi$ 可得 $u_p = ik_p\phi$。欲求位移波的反射、折射系数，只须把（7.50）式分子、分母分别乘以相应的波数即可。于是有

$$R_{pp} = \frac{a_{\text{II}}}{a_{\text{I}}} = \frac{A_{\text{II}}}{A_{\text{I}}} = F_{pp}$$

$$T_{p\bar{p}} = \frac{\bar{\alpha}_{\text{I}}}{a_{\text{I}}} = \frac{v_p}{\bar{v}_p} \qquad E_{p\bar{p}} = \frac{2\rho v_p}{\rho v_p + \bar{\rho}\,\bar{v}_p}$$

ρv 称为波阻抗。若 $\overline{\rho v} > \rho v$，则称媒质 2 为波密媒质，媒质 1 为波疏媒质。若以各波振幅谱的方向作为位移之参考方向，由（7.50）式可知，P 波自波疏媒质垂直入射到波密媒质时，反射波与入射波同位相，此时 $F_{pp} > 0$；反之，则反位相，即存在“半波损失”。在这两种情形下，折射波无“半波损失”。一般情况下，α 可取 $0 \sim \pi/2$ 的任意值，反射波及折射波的相位变化既取决于媒质的波阻抗，也决定于 α 之取值。这是一个复杂的问题，须进行数字计算。

二、SV 波入射时的反射与折射

当媒质 1 中仅有 SV 波入射到分界面上，媒质 2 中无入射到界

面上的波，则$A_{\mathrm{I}}=\bar{B}_{\mathrm{II}}=\bar{A}_{\mathrm{II}}=0$。入射、反射、折射波势函数分别为

$$\phi_{\mathrm{I}}=B_{\mathrm{I}}e^{i(k_{s1}x_1-k_{s3}x_3-\omega t)}$$

$$\phi_{\mathrm{II}}=B_{\mathrm{II}}e^{i(k_{s1}x_1+k_{s3}x_3-\omega t)}$$

$$\phi_{\mathrm{II}}=A_{\mathrm{II}}e^{i(k_{p1}x_1-k_{p3}x_3-\omega t)}$$

$$\bar{\phi}_{\mathrm{I}}=\bar{A}_{\mathrm{I}}e^{i(\bar{k}_{p1}x_1-\bar{k}_{p3}x_3-\omega t)}$$

$$\bar{\phi}_{\mathrm{I}}=\bar{B}_{\mathrm{I}}e^{i(\bar{k}_{s1}x_1-\bar{k}_{s3}x_3-\omega t)}$$

当$x_3=0$时，各波须满足边值条件（7.15）式及斯涅尔定律（7.46）式。将上边波函数代入（7.45）式可得如下边值方程：

$$A_{\mathrm{II}}+P_2(B_{\mathrm{I}}-B_{\mathrm{II}})-\bar{A}_{\mathrm{I}}-\bar{P}_2\bar{B}_{\mathrm{I}}=0$$

$$-P_1A_{\mathrm{II}}-(B_{\mathrm{I}}+B_{\mathrm{II}})-\bar{P}_1\bar{A}_{\mathrm{I}}+\bar{B}_{\mathrm{I}}=0$$

$$[\lambda(1+P_1^2)+2\mu P_1^2]A_{\mathrm{II}}-2\mu P_2(B_{\mathrm{I}}-B_{\mathrm{II}})$$
$$-[\bar{\lambda}(1+\bar{P}_1^2)+2\bar{\mu}\bar{P}_1^2]\bar{A}_{\mathrm{I}}+2\bar{\mu}\bar{P}_2\bar{B}_{\mathrm{I}}=0$$

$$\mu[2P_1A_{\mathrm{II}}+(1-P_2^2)(B_{\mathrm{I}}+B_{\mathrm{II}})]$$
$$+\bar{\mu}[2\bar{P}_1\bar{A}_{\mathrm{I}}-(1-\bar{P}_2^2)\bar{B}_{\mathrm{I}}]=0$$

以振幅比定义的反射、折射系数分别为

$$F_{vv}=\frac{B_{\mathrm{II}}}{B_{\mathrm{I}}}\qquad F_{vp}=\frac{A_{\mathrm{II}}}{B_{\mathrm{I}}}$$

$$E_{v\bar{v}}=\frac{\bar{B}_{\mathrm{I}}}{B_{\mathrm{I}}}\qquad E_{v\bar{p}}=\frac{\bar{A}_{\mathrm{I}}}{B_{\mathrm{I}}}$$

由$u_s=\nabla\times\psi$，可得SV波位移为$u_s=ik_s\phi$。由此可得位移反射、折射系数，只要在上式中分子分母各乘以相应的波数即可。例如

$$R_{v\bar{p}}=\frac{\bar{k}_p\bar{A}_{\mathrm{I}}}{k_s\bar{B}_{\mathrm{I}}}=\frac{v_s}{\bar{v}_p}F_{v\bar{p}}$$

当SV波垂直界面入射时，$\alpha=\beta=\bar{\alpha}=\bar{\beta}=0$。解上边的边值方程可知，$A_{\mathrm{II}}=\bar{A}_{\mathrm{II}}$，不存在$P$波。位移反射折射系数分别为

$$R_{\mathrm{II}}=\frac{\bar{\rho}\,\bar{v}_s-\rho v_s}{\rho v_s+\bar{\rho}\,\bar{v}_s}\qquad T_{v\bar{v}}=\frac{2\rho v_s}{\rho v_s+\bar{\rho}\bar{v}_s}$$

三、全反射

当两种媒质中的波速满足不等式$\bar{v}_s<\bar{v}_p<v_s<v_p$，由斯涅尔定律及图7—12可知，所有反射角及折射角均取实数，即反射波与折射波都存在。如果两种媒质违反这一不等式，即当入射角超过某一临界角，有些或所有折射波就不复存在，代之以沿界面传播的非均匀波。具体情况可以有多种，作为其中之一我们可考虑$v_s<v_p<\bar{v}_s<\bar{v}_p$的情况。根据斯涅尔定律有

$$\sin\bar{\beta}=\frac{\bar{v}_s}{v_p}\sin\alpha$$

若临界角$\alpha_{cr}=\sin^{-1}(v_p/\bar{v}_s)$，则$\bar{\beta}=\pi/2$。若$\alpha>\alpha_{cr}$，则$\sin\bar{\beta}>1$。$\bar{\beta}$必为虚数，$\bar{\alpha}$亦为虚数。从而入射的$P$波、$SV$波都会受到全反射。如果$\sin\alpha>v_s/v_p$，则当$SV$波入射时反射$P$波将消失，代之以沿分界面传播的非均匀面波。

以上我们研究的是单一分界面上波的行为，实际上波的传播过程中往往会遇到多个分界面。这时可以将上边的研究方法加以推广，只要考虑各反射波、折射波在遇到新界面时又产生新的反射、折射波即可，然而问题却要比想象的复杂得多。

下面我们举一地震勘探中的例子说明弹性波理论在实践中的应用。

在地震勘探的实际工作中经常利用P波与SV波。譬如利用反射的P波和SV波探查地下区分媒质的层面位置。在得到反射层位之后，确定它的形态，这有利于能源勘探。已有文献叙述了利用这两种波进行地震勘探工程中的有限单元法弹性波位移。其基本方法是，入射纵波可以产生反射纵波和反射转换波—SV波。这两种波的共同之处是在反射点同时产生。接收器收到的两种波用向下延拓的方法回推到任意深度的水平面上。在这个任意水平面上所得到的向下延拓的结果将和在该水平面上直接观测的地震记

录是相同的。然后，逐个水平面向下延拓，当某个水平面与反射面相交于反射点时，则上行的反射纵波的旅行时将和下行的入射波的旅行时是相等的，这时反射纵波和转换横波将在反射点上结合在一起。利用上述思想即可确定反射界面位置。

§7—8 半空间的面波——瑞利波

在§7—2中我们曾经通过求解波动方程讨论了半空间中可能存在的各种类型的平面波。一种类型是当p_1、p_2均为实数时得到平面简谐波。它们的振幅为常数，可以在整个媒质内传播，俗称体波，如我们讨论过的P波、SV波和SH波。还有一种是当p_1、p_2都取虚数时得到其空间部分形如（7.12）式类型的波。它们的振幅随进入媒质深度增加而急剧衰减，它们只能在媒质表面层附近传播，俗称面波。下面，我们比较详细地研究一种在弹性半空间表面附近传播的面波。

一、表面波解

设x_1x_2平面为均匀弹性半空间的自由表面，x_1x_3平面为波的入射面。此时波动方程为

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2}=\frac{1}{v_p^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2}=\frac{1}{v_s^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{7.51}$$

其中$\psi=\psi_2 i_2$。设满足上边方程的解为

$$\phi=\Phi(x_3)e^{i(kx_1-\omega t)}$$
$$\psi=\Psi(x_3)e^{i(kx_1-\omega t)} \tag{7.52}$$

其中$k=\omega/v$为待定常数。将（7.52）式代入（7.51）式得亥姆霍兹方程

$$\Phi'' + (k_p^2 - k^2)\Phi = 0$$
$$\Psi'' + (k_s^2 - k^2)\Psi = 0 \qquad (7.53)$$

令 $k^2 p_1^2 = k_p^2 - k^2 = k^2[(v^2/v_p^2) - 1]$

$k^2 p_2^2 = k_s^2 - k^2 = k^2[(v^2/v_s^2) - 1]$

当 p_1、p_2均取虚数时有

$$p_1 = i\,[1 - (v/v_p)^2]^{1/2} = i\xi_1 \qquad (v < v_p)$$
$$p_2 = i\,[1 - (v/v_s)^2]^{1/2} = i\xi_2 \qquad (v < v_s) \qquad (7.54)$$

于是（7.53）式的解为

$$\Phi = A_I e^{-k\xi_1 x_3} + A_{II} e^{k\xi_1 x_3}$$
$$\Psi = B_I e^{-k\xi_2 x_3} + B_{II} e^{k\xi_2 x_3}$$

当$x_3 \to \infty$时为使Φ、Ψ有物理意义，应令 $A_{II} = B_{II} = 0$。将 Φ、Ψ代入（7.52）式可得（7.51）式的一组解

$$\phi = Ae^{-k\xi_1 x_3} e^{i(kx_1 - \omega t)}$$
$$\psi = Be^{-k\xi_2 x_3} e^{i(kx_1 - \omega t)} \qquad (7.55)$$

事实上我们是在重复§ 7—2 的工作，目的是为进一步熟练这一方法。显然，（7.55）式表示的是以速度v沿 x_1 轴方向传播的平面简谐波。波的振幅在 $x_3 = 0$ 处最大，并随着离开自由表面的距离x_3的增大而迅速减小。可见，扰动仅局限在靠近表面的一个薄层中，故称之为面波。早在1887年瑞利（Rayleigh）就已指出这一问题，故称此种面波为瑞利波。

二、瑞利方程

实际上面波的存在是依赖于一个实数速度v的存在。为了确定这个速度，我们应用边界条件（$x_3 = 0$）：$\sigma_{33} = 0$，$\sigma_{31} = 0$。将（7.1）式重写如下：

$$\left[v_p^2 \nabla^2 \phi + 2v_s^2 \left(-\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2}\right)\right]_{x_3 = 0} = 0$$

$$\left(2\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_3}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2}\right)_{x_3=0}=0$$

将（7.54）代入上式并令$x_3=0$，可得

$$\begin{aligned}(2v_s^2-v^2)A-2i\xi_2v_s^2B&=0\\2i\xi_1v_s^2A+(2v_s^2-v^2)B&=0\end{aligned}\qquad(7.56)$$

欲使（7.56）式中A、B具有非零解，须使系数行列式为零，即

$$\begin{vmatrix}2v_s^2-v^2 & -2i\xi_2v_s^2\\ 2i\xi_1v_s^2 & 2v_s^2-v^2\end{vmatrix}=0$$

亦即 $$(2v_s^2-v^2)^2-4\xi_1\xi_2v_s^4=0$$

将（7.54）式中ξ_1、ξ_2代入上式得

$$\left(2-\frac{v^2}{v_s^2}\right)^2-4\sqrt{1-\frac{v^2}{v_p^2}}\sqrt{1-\frac{v^2}{v_s^2}}=0\qquad(7.57)$$

式（7.57）称为瑞利方程。

若令$x=v^2/v_s^2$，$m=v_s^2/v_p^2$，并代入（7.57）式，将其去掉根号整理可得

$$x[x^3-8x^2+8(3-2m)x+16(m-1)]=0\qquad(7.58)$$

显然，$x=0$是上式的一个根。此时$v=0$，对应无面波情况，这对我们的研究讨论没有什么意义。（7.58）式的方括号内是x的三次多项式，在$x=0$时为负数，在$x=1$时为正数。因此，在区间（0，1）内，x至少有一个根。即有

$$0<x<1$$

或者 $$0<\frac{v^2}{v_s^2}<1\qquad 0<\left|\frac{v}{v_s}\right|<1$$

于是可得 $$v<v_s$$

可见瑞利波速小于横波速度，当然也小于纵波速度。这与(7.54)式是一致的。

若将$m=v_s^2/v_p^2=\mu/(\lambda+2\mu)=(1-2\nu)/2(1-\nu)$代入（7.58）式可见，瑞利波速依赖于材料的泊松比。对于泊松固体$(\lambda=\mu)m=1/3$，将m代入（7.58）式可得方程

$$(x-4)(3x^2-12x+8)=0$$

解得方程的根为

$$x_1=2-\frac{2}{\sqrt{3}} \qquad x_2=4 \qquad x_3=2+\frac{2}{\sqrt{3}}$$

由根x_2可得瑞利波速为

$$v_R=0.9194v_s \tag{7.59}$$

根x_2、x_3与面波不发生联系，它们使ξ_1、ξ_2变为纯虚数，对应的是均匀平面谐波。由（7.59）式可知，半空间表面传播的瑞利波的速速与频率无关，即无频散现象。

三、瑞利波的位移场

瑞利波在媒质中传播时，质点沿x_1、x_3方向的位移分别为

$$u_1=\frac{\partial\phi}{\partial x_1}-\frac{\partial\psi}{\partial x_3} \qquad u_3=-\frac{\partial\phi}{\partial x_3}+\frac{\partial\psi}{\partial x_1}$$

将（7.55）式代入上式并利用（7.55）式消去B得

$$u_1=ikA\left(e^{-k\xi_1x_3}-\frac{2\xi_1\xi_2v_s^2}{2v_s^2-v^2}e^{-k\xi_2x_2}\right)e^{i(kx_1-\omega t)}$$

$$u_3=kA\left(-\xi_1e^{-k\xi_1x_3}+\frac{2\xi_1v_s^2}{2v_s^2-v^2}e^{-k\xi_2x_3}\right)e^{i(kx_1-\omega t)}$$

取上式之实部可得

$$u_1=-kA\left(e^{-k\xi_1x_3}-\frac{2\xi_1\xi_2v_s^2}{2v_s^2-v^2}e^{-k\xi_2x_3}\right)\sin(kx_1-\omega t) \tag{7.60}$$

$$u_3=-kA\left(\xi_1e^{-k\xi_1x_3}-\frac{2\xi_1v_s^2}{2v_s^2-v^2}e^{-k\xi_2x_3}\right)\cos(kx_1-\omega t)$$

可见，位移既有纵向部分也有横向部分，且二者相位差为$\pi/2$，质点的运动轨迹应当是椭圆。当$x_3\to\infty$时，则u_1、$u_3\to0$。若介质为泊松固体（地壳可以近似视为泊松固体），令$x_3=0$，由（7.60）式可算得地表质点位移为

$$u_1=0.426kA\sin(kx_1-\omega t)$$

$$u_3 = 0.622kA\cos(kx_1 - \omega t)$$

可见，瑞利波沿地表面传播时，质点运动轨迹是逆进的椭圆。竖直方向的振幅约为水平方向的1.5倍。当$x_3 \approx 0$时，由（7.60）式可进一步算得当$x_3 = 0.913$个波长时，$u_1 = 0$。质点运动轨迹为沿x_3方向的直线。而在此深度以下，质点的运动轨迹为顺进的椭圆。这一点对在地震曲线图上鉴别地震波十分重要。

实际上瑞利波在地震中心附近并不存在，只是当地震波中的SV波遇到界面反射后，以大于临界角入射到地表面使反射P波变为非均匀波时，它才沿地表面以地震中心到地表的垂线为轴呈柱状向四周传播。在实际地震问题中，当地球表面的曲率不可忽略时，则应研究瑞利波沿球面传播。研究结果表明，这两种情形下面波的基本特性与上面用平面波的概念进行分析所得的结果完全相似。但是，由于波的传播致使波阵面发生扩散，当$r \gg \lambda$时，柱面波的振幅按$r^{-1/2}$衰减，沿球面传播的面波按$1/\sqrt{\sin\theta}$的规律衰减，而均匀无限媒质中的球面波是按r^{-1}的方式衰减，故一般面波振幅比体波振幅衰减得缓慢，这也就是它可以沿地表传播得很远的原因。由于$v_R < v_s < v_p$，故由地震波记录曲线分析表明，初至波为P波，随后是S波，最后到来的是破坏力更大的大振幅的面波。

§7—9 加层半空间中的SH型面波——洛夫波

在§7—4中我们曾提到过，可以证明在具有自由表面的半空间不会产生SH型面波。在§7—8中我们讨论了发生在半空间表面层的面波即瑞利波，它无x_2方向位移且无频散现象。但是，在最早期的地震记录中已经发现了具有很大横向位移的频散波，这表明可能存在另一种类型的波。1911年，洛夫（Love）首先对此给以解释，并证明了这是在半空间表面上覆盖有限厚度的

媒质层的情况下存在的SH型面波。后来人们称之为洛夫波。

一、洛夫波解

如图 7—13 所示，在半无限空间 2 上覆盖一层力学性质完全不同的厚度为 h 的媒质，从而构成新的半空间。洛夫波就是在这样的半空间中波的传播问题的一个特例。

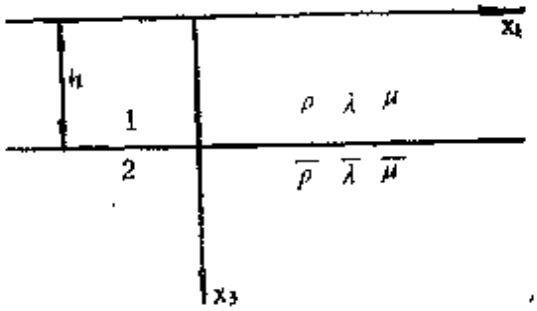


图 7—13
有覆盖层的半空间

在图 7—13 所示的坐标系下，SH 波位移满足波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}=\frac{1}{v_s^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{7.61}$$

假设两种媒质中满足上述方程的位移分别是

$$\begin{aligned} u &= f(x_3)e^{i(kx_1-\omega t)} \\ \bar{u} &= \bar{f}(x_3)e^{i(kx_1-\omega t)} \end{aligned} \tag{7.62}$$

将（7.62）式代入（7.61）式可得亥姆霍兹方程为

$$f''+(k_s^2-k^2)f=0$$
$$\bar{f}''+(\bar{k}_s-k^2)f=0$$

令
$$k^2p^2=k_s^2-k^2=k^2[(k_s^2/k^2)-1]=k^2[(v^2/v_s^2)-1]$$
$$k^2\bar{p}^2=\bar{k}_s^2-k^2=k^2[(\bar{k}_s^2/k^2)-1]=k^2[(v^2/\bar{v}_s^2)-1]$$

其中
$$p=[(v/v_s)^2-1]^{1/2} \qquad \bar{p}=[(v/\bar{v}_s)^2-1]^{1/2}$$

式（7.62）须满足边界条件

$$\sigma_{23}|_{x_3=0}=0 \qquad u|_{x_3=h}=\bar{u}|_{x_3=h}$$

$$\sigma_{23}|_{x_3=h}=\bar{\sigma}_{23}|_{x_3=h} \qquad \bar{u}\to 0\ (x_3\to\infty)$$

最后一个边界条件要求$\bar{p}$取虚数，写做

$$\bar{p}=i\bar{\xi} \qquad \bar{\xi}=[1-(v/v_s)^2]^{1/2}$$

将亥姆霍兹方程之解代入（7.62）式可得媒质中的位移场为

$$u=(C_{\mathrm{I}}e^{-ikpx_3}+C_{\mathrm{II}}e^{ikpx_3})e^{i(kx-\omega t)}$$

$$\bar{u}=\bar{C}_{\mathrm{I}}e^{-k\xi x_3}e^{i(kx_1-\omega t)} \tag{7.63}$$

其中$k=\omega/v$为沿水平方向的波数。由边界条件可得

$$C_{\mathrm{I}}-C_{\mathrm{II}}=0$$

$$C_{\mathrm{I}}e^{-ikph}+C_{\mathrm{II}}e^{ikph}-\bar{C}_{\mathrm{I}}e^{-k\xi h}=0$$

$$i\mu p(-C_{\mathrm{I}}e^{-ikph}+C_{\mathrm{II}}e^{ikph})+\bar{\mu}\bar{\xi}\bar{C}_{\mathrm{I}}e^{-k\bar{\xi}h}=0$$

消去上边方程中的C_{II}得

$$\begin{aligned}&(e^{ikph}+e^{-ikph})C_{\mathrm{I}}-e^{-k\bar{\xi}h}\bar{C}_{\mathrm{I}}=0\\&i\mu p(e^{ikph}-e^{-ikph})C_{\mathrm{I}}-e^{-k\bar{\xi}h}\bar{C}_{\mathrm{I}}=0\end{aligned} \tag{7.64}$$

将$C_{\mathrm{II}}=C_{\mathrm{I}}$及由（7.64）式解出的$\bar{C}_{\mathrm{I}}$代入（7.63）式可得

$$u=C\cos kpx_3\cdot e^{i(kx_1-\omega t)}$$

$$\bar{u}=C\cos kph\cdot e^{k\xi(h-x_3)}e^{i(kx_1-\omega t)}$$

上式表明，在媒质1中洛夫波的振幅是在x_3方向的驻波，在自由表面（$x_3=0$）处永远是水平分量的波幅，即最大位移。在媒质2中振幅随x_3的增大按指数衰减。它们都以相速度v沿x_1方向传播。

二、洛夫波的频散

我们下面研究决定洛夫波重要性质的关键问题——波的相速度v。

式（7.64）中C_{I}、$\bar{C}_{\mathrm{I}}$不同时为零的条件是其系数行列式为零，即

$$\begin{vmatrix} e^{ikph}+e^{-ikph} & -e^{-k\bar{\xi}h} \\ i\mu p\,(e^{ikph}-e^{-ikph}) & \mu\bar{\xi}e^{-k\bar{\xi}h} \end{vmatrix}=0$$

由此可得方程

$$\tan kph=\frac{\bar{\mu}\,\bar{\xi}}{\mu p}=q\left[\frac{1-(v/\bar{v}_s)^2}{(v/v_s)^2-1}\right]^{1/2} \tag{7.65}$$

此式即洛夫波的频散方程。它确定了k、v、ω任意两个量的隐含关系。可见洛夫波与我们已经讨论过的波具有迥然不同的性质：洛夫波的速度与频率（或波长或波数）有关。如果扰动不是单频的，则其波形在传播过程中将发生变化，即有频散发生。可见洛夫波是频散波。它们的整体传播特征用群速度v表示。

很明显，只有当$v_s<v<\bar{v}_s$时（7.65）式才有实数根，而当$v_s>\bar{v}_s$时所得的根对面波并不适用。由正切函数的周期性可知（7.65）式具有重根。解之可得

$$kh=\left[\left(\frac{v}{v_s}\right)^2-1\right]^{-1/2}\left\{\tan^{-1}q\left[\frac{1-(v/\bar{v}_s)^2}{(v/v_s)^2-1}\right]^{1/2}+n\pi\right\}$$

$$(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \tag{7.66}$$

由上式可以看出，对任一满足$v_s<v<\bar{v}_s$的洛夫波，都有无穷多个kh值与之相对应，而这每一个kh值都对应一种类型的洛夫波。$n=0$称为基阶振型洛夫波；$n=M$则称为M阶振型洛夫波。我们用“简正振型”一词来描写各种类型的洛夫波。“简正振型”一词来源于振动学，是用以描写振动方式的。例如一根长为L的绷紧的弦可能存在的振动都称为“简正振型”。把它推广到波动，对于洛夫波而言，n取每一个整数所表示的洛夫波都称为简正振型。

如果用v_L表示洛夫波的相速度，由（7.66）式可知，当$v_L=\bar{v}_s$时，对基阶洛夫波有$n=0$，$kh=0$，从而有$kh=2\pi h/\lambda=h\omega/v_L=0$。于是就有$\lambda\to\infty$或$\omega\to 0$。对$n$阶洛夫波则有

$$kh \approx n\pi\left[\left(\frac{\bar{v}_s}{v_s}\right)^2 - 1\right]^{1/2}$$

由于 $$kh = \frac{\omega}{v_L}h = \frac{\omega}{\bar{v}_s}h$$

故 $$\omega = \frac{n\pi}{h}\left(\frac{1}{v_s^2} - \frac{1}{\bar{v}_s^2}\right)^{-1/2}$$

若$v_L = v_s$，由（7.66）式知，$kh \to \infty$，无论对基阶洛夫波或n阶洛夫波都必有$\omega \to \infty$即$\lambda \to 0$。

若$v_s < v_L < \bar{v}_s$，对基阶洛夫波而言有$\infty > \omega > 0$。对n阶洛夫波则有

$$\infty > \omega > \frac{n\pi}{h}\left(\frac{1}{v_s^2} - \frac{1}{\bar{v}_s^2}\right)^{-1/2}$$

令 $$\omega_C = \frac{n\pi}{h}\left(\frac{1}{v_s^2} - \frac{1}{\bar{v}_s^2}\right)^{-1/2}$$

称为截止频率，也就是说n阶洛夫波不能低于此频率，否则不能在该媒质内传播。由$\lambda_C = 2\pi v_L/\omega_C$可得截止波长

$$\lambda_C = \frac{2h}{n}\left[\left(\frac{\bar{v}_s}{v_s}\right)^2 - 1\right]^{1/2} = \frac{2h}{n}\left[\frac{1}{m^2} - 1\right]^{1/2}$$

三、表层洛夫波的本质

在覆盖层内传播的洛夫波，究其本质是局限在层内并分别在分界面和自由表面上受到全反射的那些平面波经过加强干涉形成的。平面波以大于临界角$\beta_{cr} = \sin^{-1}m$入射到分界面上时，在分界面上发生全反射，位相变化2δ，然后又受到自由

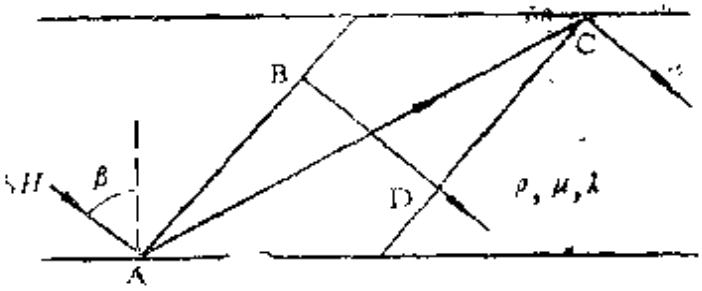


图 7—14
表层洛夫波

表面的反射，位相不变化。既然 k 是沿水平方向的波数，那么沿波阵面法向的波数就应是 $k_0 = k/\sin\beta$。如果波阵面 AB 移动了一段距离 $\overline{BD}$，而和经过 $\overline{AC}$ 路程后在C点反射的波阵面 CD 重合发生干涉而加强，则总的位相差须是 2π 的整数倍，即

$$k_0(\overline{AC} - \overline{BD}) - 2\delta = 2n\pi$$

总之，洛夫波基本上是干涉过程的产物，而且每一个级次更高的振型就代表级次更高的干涉。因此，远方一点处的扰动，可以看做是一些沿倾斜的波射线传播的一些平面波在那一点相互干涉而加强的结果。

最后，须指出的是：带有覆盖层的半空间不但可以传播洛夫波，还可以传播诸如瑞利波等其他类型的面波。这时的瑞利波也是频散波。研究的方法与对洛夫波类似，但推导繁冗。

§7—10 SH波在柱形腔上的散射

平面波在传播过程中除了与平面界面作用外，还会遇到柱面、球面、椭球面等规则几何形状的界面，甚至还会遇到裂缝、障碍物的不规则表面。研究波与这些界面的相互作用问题统称做波的衍射（或绕射）。研究波与光滑的具有规则几何形状的界面相互作用问题，通常称为波的散射。在地震勘探及超声波探伤等场合经常遇到上面这些问题。弹性波与电磁波对于波的散射问题的处理方法是极其相似的。主要差别在于弹性波在散射时往往会出现波型转换，使得研究工作变得复杂。下面，我们讨论最简单的无波型转换的散射问题，即一平面 SH 波在柱形腔表面的散射，其散射波也只是 SH 波。

一、散射波的位移场

如图 7—15 所示，在一无限大的弹性固体媒质中，有一半径为 a 的无限长圆柱形空腔。以 r、θ、z 代表柱面坐标系，取

Z（x_3）轴为柱形腔的轴线。

设沿x_1轴方向入射到圆柱面上的SH波位移场为

$$u_1 = u_2 = 0$$

$$u_3 = U_0 e^{i(kx_1 - \omega t)} \tag{7.67}$$

其中U_0为波幅，$k = \omega / v_s$为沿x_1轴方向之波数。

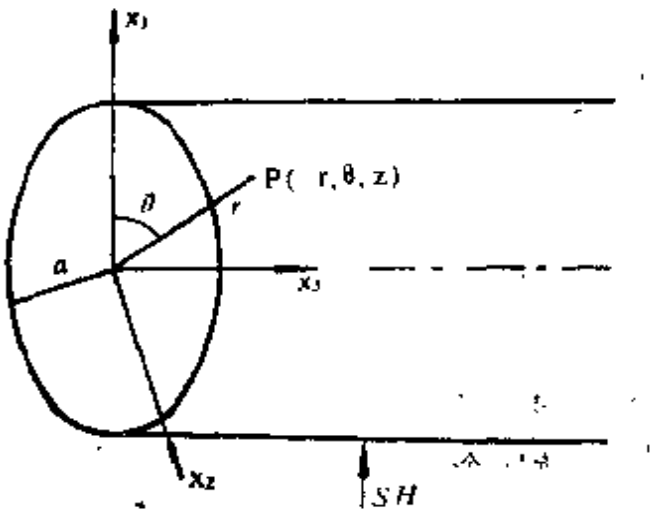


图 7—15
SH波入射到柱形腔表面上

设由柱面散射出的波位移场为

$$u_r = u_\theta = 0 \qquad u_{ZS} = u\ (r,\ \theta,\ t) \tag{7.68}$$

位移u_{ZS}满足波动方程

$$\nabla^2 u = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) u = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{7.69}$$

边值条件为

$$\sigma_{rz}\Big|_{r=a} = 0 \qquad \text{即} \qquad \frac{\partial u_Z}{\partial r}\Big|_{r=a} = 0 \tag{7.70}$$

其中u_Z为总位移场。

为了便于区别入射、散射波场，分别以u_i、u_s表示它们的位移并写为

$$u_i = U_0 e^{i(kx_1 - \omega t)} \qquad u_s = R(r)\Theta(\theta)e^{-i\omega t} \tag{7.71}$$

媒质中总位移场为

$$u_Z\ (r,\ \theta,\ t) = u_i + u_s \tag{7.72}$$

将（7.71）中第二式代入（7.69）得

$$\Theta\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{\Theta}{r}\frac{dR}{dr} + \frac{R}{r^2}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = -k^2 R\Theta$$

上式可以化为如下两个方程：

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}+n^2\Theta=0 \tag{7.73}$$

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}+\left(k^2+\frac{n^2}{r^2}\right)R=0 \tag{7.74}$$

方程（7.73）式的解为

$$\Theta_n=a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta$$

由于问题的对称性，上式中应保留第一项，而第二项不具备对称性，故应令$b_n=0$；又由于Θ的周期性，n应取整数。于是上式变为

$$\Theta_n=a\cos n\theta \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \tag{7.75}$$

方程（7.74）式为 n 阶贝塞尔方程，其解为

$$R=c_nH_n^{(1)}(kr)+d_nH_n^{(2)}(kr) \tag{7.76}$$

其中$H_n^{(1)}$、$H^{(2)}$为汉克函数。对于宗量$\zeta\gg 1$的条件，汉克函数可以写成渐近形式，即

$$H_n^{(1)}(\zeta)=\sqrt{\frac{2}{\pi\xi}}\,e^{i\left(\xi-\frac{\pi}{4}-\frac{n\pi}{2}\right)}$$

$$H^{(2)}(\zeta)=\sqrt{\frac{2}{\pi\zeta}}\,e^{-i\left(\xi-\frac{\pi}{4}-\frac{n\pi}{2}\right)} \tag{7.77}$$

由于腔内视为真空，散射波由界面向外传播。考虑散射波应满足幅射条件，与时间有关的因子如取$\exp(-i\omega t)$，则散射波应取$\exp[i(kr-\omega t)]$形式。若$H_n^{(1)}(kr)$满足此要求，须使(7.76)中$d_n=0$，于是散射波位移场表示为

$$u_s(r,\ \theta,t)=U(r,\ \theta)\,e^{-i\omega t}$$

$$=U_0\sum_{n=0}^{\infty}A_nH_n^{(1)}(kr)\cos n\theta e^{-i\omega t} \tag{7.78}$$

其中A_n为待定系数。为了确定A_n，可以将u_i写成与u_s相类似的形式，即

$$u_i(r,\ \theta,\ t)=U_0U_i(r,\ \theta)e^{-i\omega t}$$

$$=U_0 e^{ikr\cos\theta} e^{-i\omega t} \tag{7.79}$$

将上式中$U_i(r, \theta)$写成级数形式为

$$U_i(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n J_n(kr)\cos n\theta \tag{7.80}$$

其中$\varepsilon_0=1$，$\varepsilon_n=2$（$n=1, 2, 3, \cdots$）。将（7.72）式代入（7.70）式得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\varepsilon_n i^n \frac{dJ_n(kr)}{dr} - A_n \frac{dH_n^{(1)}(kr)}{dr}\right]\cos n\theta \Big|_{r=a} = 0$$

由此式解得

$$A_n = -\frac{i^n \varepsilon_n J_n'(ka)}{H_n^{1\prime}(ka)} \tag{7.81}$$

当$kr \gg 1$，远处散射波位移场可用渐近式（7.77）式进行化简得

$$u_s(r, \theta, t) = U_0\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\,\phi_s(\theta)e^{i(kr-\omega t)} \tag{7.82}$$

其中 $$\phi_s(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}}\cos n\theta$$

由（7.82）式可知，散射波幅与$r^{-1/2}$成正比，且与散射角θ有关。

二、散射波的能流

由(7.82)式可知，当r给定后，散射波的能流应与散射角θ有关，因为θ决定了散射波的辐值。考虑应力与位移都是复函数，由复数二次式平均值公式可知，平均能流密度为

$$\langle I_i\rangle = -\frac{1}{4}\left(\sigma_{ij}\frac{\partial u_j^*}{\partial t} + \sigma_{ij}^*\frac{\partial u_j}{\partial t}\right) \tag{7.83}$$

其中u_j^*、σ_{ij}^*分别为u_j、σ_{ij}的共轭复数。

以$\langle I_r\rangle$表示入射波平均能流密度，由（7.83）式可得

$$\langle I_r\rangle = -\frac{1}{4}\left(\sigma_{13}\frac{\partial u_3^*}{\partial t} + \sigma_{13}^*\frac{\partial u_3}{\partial t}\right) \tag{7.84}$$

由（7.67）式可以算出σ_{1s}，把u_s、σ_{1s}连同它们的共轭复数一起代入（7.84）式可算得

$$\langle I_i\rangle = \frac{1}{2}\mu\omega k|U_0|^2 = \frac{1}{2}\sigma_0\omega|U_0| \tag{7.85}$$

其中$\sigma_0 = \mu k|U_0|$是入射波应力的最大值。

散射波平均能流密度为

$$\langle I_s\rangle = -\frac{1}{4}\left(\sigma_{rz}\frac{\partial u_s^*}{\partial t} + \sigma_{rz}^*\frac{\partial u_s}{\partial t}\right) \tag{7.86}$$

将（7.78）式的u_s以及由它算得的σ_{rs}连同它们的共轭复数一起代入（7.86）得

$$\langle I_s\rangle = -\frac{1}{4}i\mu\omega|U_0|^2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left[A_nA_m^*H_n^{(1)\prime}(kr)H_m^{*(1)}(kr)\right.$$
$$\left. - A_n^*A_mH_n^{*(1)\prime}(kr)H_m^{(1)}(kr)\right]\cos n\theta\cos m\theta \tag{7.87}$$

当$kr\gg 1$时，由（7.77）式得

$$\begin{aligned} H_n^{(1)\prime}(kr) &= ikH_n^{(1)}(kr) \\ H_n^{*(1)\prime}(kr) &= -ikH_n^{*(1)}(kr) \end{aligned} \tag{7.88}$$

将(7.77)式中$H_n^{(1)}$及其共轭复数连同（7.88）式一起代入（7.87）式中，并将得到的$\langle I_s\rangle$与（7.85）式相除，可得散射波与入射波能流密度之比为

$$\frac{\langle I_s\rangle}{\langle I_i\rangle} = \frac{1}{\pi kr}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left(A_nA_m^*e^{i\frac{m-n}{2}\pi} + A_n^*A_m\,e^{i\frac{n-m}{2}\pi}\right)$$
$$\cos n\theta\cos m\theta = \frac{1}{\pi kr}|\phi_s(\theta)|^2 \tag{7.89}$$

由（7.81)式可知$|\phi_s(\theta)|^2$应与Ka有关。图7—16所示为当kr很大时$|\phi_s(\theta)|^2$随θ的变化情况。当$ka=1$时，入射波大部分能量返回柱面前方，柱腔后面只有很少一部分能量；当$kr\gg 1$，柱腔后面将出现阴影区。类似于光学的衍射效应，在阴影区的边缘将出现许多“条纹”，即能量的极大值与极小值。

若波的能流密度矢量为I，则通过任一闭合曲面的总能流为

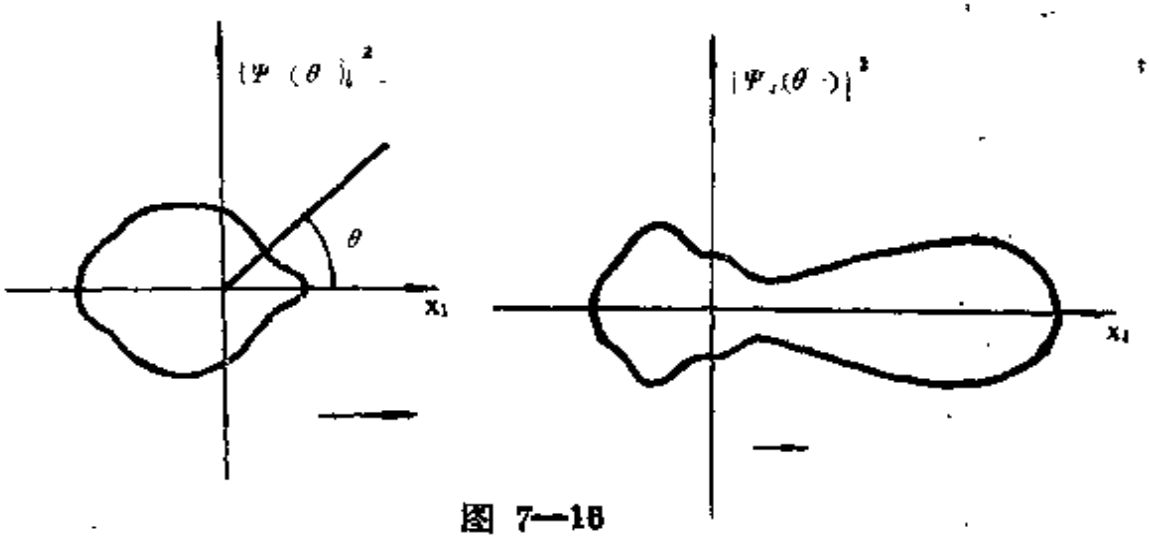


图 7—16

半径为a的圆柱形空腔表面散射波强度的极坐标曲线

$$Q = \oint_S \boldsymbol{I} \cdot d\boldsymbol{S}$$

通过任一曲面S的能流为

$$Q = \int_s \boldsymbol{I} \cdot d\boldsymbol{S}$$

在一个周期内的平均能流为

$$\langle Q \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T Q\,dt$$

定义散射截面为散射波的平均能流与平均能流密度之比

$$\gamma = \langle Q \rangle / \langle I \rangle \tag{7.90}$$

由上边的讨论进一步算得 SH 波在柱形腔表面散射时其散射截面为

$$\gamma = \frac{2}{k}\left(2A_0A_0^* + \sum_{n=2}^{\infty} A_n A_n^*\right) \tag{7.91}$$

且 $$A_0 = -i\pi\left(-\frac{ka}{2}\right)^2 \qquad A_n = \frac{2\pi i^{n+1}}{n!\,(n-1)!}\left(-\frac{ka}{2}\right)^{2n}$$

习题与参考答案七

1．平面简谐P波位移势函数$\phi = A\exp[i(kx_3 - \omega t)]$正入射到半无限弹性空间自由表面上形成反射波。试利用边界条件推导反射系数

答案：$F_{pp} = 1$，$F_{pv} = 0$

2．SV波位移势函数$\psi_2 = B\exp[i(kx_3 - \omega t)$垂直入射到媒质自由表面上形成反射波。试利用边值条件推导反射系数。

（答案：$F_{vv} = -1$，$F_{vp} = 0$）

3．试用（7.31）、（7.32）式计算SV波入射到地表面时，地表位移的水平分量和铅直分量的振幅。

（答案：$U_1 = 2v_s\cos\beta\cos 2\beta/\Delta$，$U_3 = 2v_s\cos\alpha\sin 2\beta/v_p\Delta$，$\Delta = \cos^2 2\beta + v_s^2/v_p^2\sin 2\alpha\sin 2\beta$）

4．一SH波入射到二媒质的界面上，位移的反射系数为R_{HH}，折射系数为T_{HH}，试证明满足关系式$T_{HH} = 1 + R_{HH}$。

5．SV波位移势函数为$\psi_2 = B\exp[i(kx_3 - \omega t)]$，波正入射到二个密接的半无限大媒质的分界面上。试推导位移的反射系数与折射系数。

（答案：见§7—7）

6．P波位移势函数$\phi = A\exp[i(k_1x_1 - k_3x_3 - \omega t)$、入射到两种半无限大理想流体（$\mu = \mu = 0$）的分界面上，形成反射波与折射波。试推导反射系数与折射系数。

〔答案：$F_{pp} = (\rho v\cos\alpha - \rho v\cos\bar{\alpha})/(\rho v\cos\alpha + \bar{\rho}\bar{v}\cos\alpha)$，
$E_{\overline{pp}} = 2\rho v\cos\alpha/(\rho v\cos\alpha + \bar{\rho}\bar{v}\cos\alpha)$〕

7．在第6题基础上讨论：在什么情况下，折射P波变为沿界面传播的非均匀波？反射波与入射波的位相有什么不同？非均匀波的势函数形式如何？

8．一平面SH波位移场为$u = A\exp[i(k_1x_1 - k_3x_3 - \omega t)]$入射到两种半无限大固体媒质分界面上。当入射角$\beta > \beta_c$时发生全反射。试求出此非均匀波的位移、应变及应力分布。

{答案：$u_2 = \bar{A}\exp(k_3'x_3)\exp[i(k_1'x_1 - \omega t)]$；$e_{12} = ik_1'\bar{u}_2/2$，
$e_{23} = k_3'\bar{u}_2/2$；$\sigma_{12} = i\mu k_1'\bar{u}_2$，$\sigma_{23} = \mu k_3'\bar{u}_2$〕}

9．由第8题得到的结果计算该非均匀波的能流密度矢量；计算$x_2 = 1$，$x_3 \to -\infty$的截面上的能流。

〔答案：$I = (\omega/k_1')\mu\bar{A}^2\exp(2k_3'x_3)(k^2\sin^2\xi + k_3'^2/2)i_1$，
$Q = (\mu\omega/2kk_3')\bar{A}^2(k^2\sin^2\xi + k_3'^2/2)$，$\xi = k_1'x_1 - \omega t$〕

10．试证明SH波入射到弹性半空间的自由表面不会产生SH型面波。

11．简述瑞利波的特点。

12. 洛夫波传播的条件是什么？洛夫波有何特点？洛夫波形成的本质是什么？

13. 试推导出 n 阶洛夫波波长 λ 与媒质覆盖层厚度 h 之关系。

〔答案：$\lambda \leqslant (2h/n)[(1/m^2)-1]^{1/2}$〕

14. 波在媒质内传播时，其振幅衰减到它原始值的 $1/e$ 倍时的深度称为波的透入深度，用 h_e 表示。试求面波在媒质中的透入深度与波长之关系。

〔答案：$he=\lambda/2\pi\xi$，　$\xi=(1-v/v_\alpha)^{1/2}$，　$v_\alpha=v_p$ 或 v_s〕

15. 瑞利波位移的标势 $\phi=A\exp(-\alpha x_3)\exp[i(kx_1-\omega t)]$，矢势函数为 $\psi_2=B\exp(-\beta x_3)\exp[i(kx_1-\omega t)]$。试分别求出其复波矢量及能流密度矢量。（提示：用位移的实部进行计算）

（答案：$k_p=ki_1+i\alpha i_3$，　$k_s=ki_1+i\beta i_3$，　$I=(w\omega/k)i_1$，　$w=(\lambda/2)(\alpha^2-k^2)^2A^2\exp(-2\alpha x_3)\cos^2\xi+\mu\{[k^2A\exp(-\alpha x_3)\cos\xi-k\beta B\exp(-\beta x_3)\sin\xi]^2+(1/2)[k^2+\beta^2)B\exp(-\beta x_3)\cos\xi-2k\alpha A\exp(-\alpha x_3)\sin\xi]^2+[\alpha^2A\exp(-\alpha x_3)\cos\xi+k\beta B\exp(-\beta x_3)\sin\xi]^2\}+(\rho/2)\{[\omega kA\exp(-\alpha x_3)\cos\xi-\beta\omega B\exp(-\beta x_3)\sin\xi]^2+[\omega kB\exp(-\beta x_3)\cos\xi-\omega\alpha A\exp(-\alpha x_3)\sin\xi]^2\}$，　$\xi=kx_1-\omega t$）

16. 洛夫波位移为 $u=A\cos kpx_3\cdot\exp[i(kx_1-\omega t)]$　$(0\leqslant x_3\leqslant h)$，求出能流密度矢量，计算在 $x_2=1$，$x_3=\pi/\alpha$ 的截面上的能流。

（答案：$I=(w\omega/k)i_1$，　$w=(\mu/2)(\alpha^2A^2\sin^2\alpha x_3\cos^2\xi+k_2A^2\cos^2\alpha x_3\sin^2\xi)+(\rho A^2\omega^2/2)\cos^2\alpha x_3\sin^2\xi$，　$\alpha=kp$，　$\xi=kx_1-\omega t$；　$Q=(\pi\mu\omega A^2/4k)[\cos^2\xi+(1/p^2+\rho\omega^2/\alpha^2)\sin^2\xi]$）

17. 当 $kr\gg1$ 时，利用汉克函数的渐近式及递推公式计算（当 ka 很小时，取 $n=0$，$n=1$ 两项即可）：沿柱轴方向单位长的圆柱面散射 SH 波的平均能流 $\langle Q\rangle$。

〔答案：$\langle Q\rangle=\nu k\mu|H_0|^2\pi^2(ka)^4/8$〕

18. 在17题基础上证明：（1）$ka\to0$，$\gamma=3a^4k^3\pi^2/4$；（2）当 $ka\gg1$，$\gamma=4a$；（3）当 $ka\ll1$，$\gamma=6\pi^5a^4/\lambda^3$。

第八章　弹性波的激发

前面几章是通过求解齐次波动方程研究波的传播规律。这一章则是通过求解非齐次波动方程研究弹性波在均匀各向同性媒质里的激发问题，也就是外力（即波源）与波的关系问题。

弹性波的实际激发方式概括起来大体可分为三类：一是随时间变化的面力；二是随时间变化的体力；三是在一定区域内存在初始扰动（初位移、初速度），也就是初值问题。集中点力和集中线力都是理想化模型。以这种力激发弹性波不仅在理论研究是至关重要的，而且在实践中也是不容忽视的，因为实际上许多波源可以近似看做点波源和线波源。

对弹性波激发问题的研究，即使用最简单的理论简化模型，其数学推导也是十分繁冗的。这里我们仅仅介绍几种最简单的情形。

§8—1　面力激发的球面波

人们为了弄清地震现象的起源，或是为了阐明固体媒质中一点爆炸所引起的波动现象，对弹性固体中球形空腔表面上由于突力的作用而激发的弹性波给以很大的注意和广泛的研究，并得出了精确解答。人们早已把这方面的理论成功地应用到地震勘探、地下爆破、地下核爆炸以及火箭的固体推进剂的燃烧等技术领域中。

下面我们研究均匀的球面力是如何激发起球面波的，并认识

两个最典型的实际例子：球面脉冲及球面谐波的激发问题。

一、求解边值方程

设想一无限大弹性固体媒质中有一半径为 a 的球形空腔，球心 o 为爆炸点。设爆炸后作用到球腔表面上的压力 $P(t)$ 是均匀径向对称分布的（见图 8—1）。此时只会产生球面 P 波，不会产生 S 波。质点位移为 $u_\theta = u_\varphi = 0$，$u_r = u(r, t)$。位移势函数满足球坐标系下的波动方程

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi) = \frac{1}{v_p^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\phi) \tag{8.1}$$

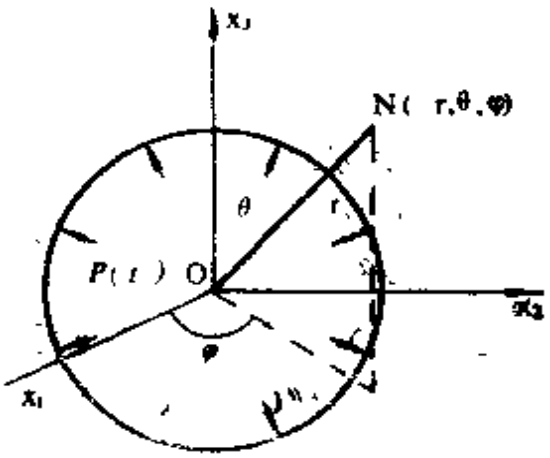


图 8—1
球腔面上压力的均匀分布

其通解为

$$\phi(r, t) = \frac{1}{r}f\left(t - \frac{r-a}{v_P}\right) + \frac{1}{r}g\left(t + \frac{r-a}{v_P}\right) \tag{8.2}$$

对于发散波

$$\phi(r, t) = \frac{1}{r}f\left(t - \frac{r-a}{v_p}\right) \tag{8.3}$$

边界条件为

$$\sigma_{rr}|_{r=a} = -P(t) \tag{8.4}$$

按应力符号规定，压力总是取负值，故 $P(t)$ 前冠以负号。当爆炸的冲击波作用到腔壁上之前，即 $t \leqslant 0$，故有

$$\phi(r, t) = 0 \quad u(r, t) = 0$$

而当 $t > 0$ 的某时刻，波前位置满足方程

$$r = a + v_p t \tag{8.5}$$

对于 $r \geqslant a + v_p t$ 处，根据函数的连续性应有

$$\phi(r, t) = 0 \quad u(r, t) = 0 \tag{8.6}$$

即此时波前上位移及势函数都为零。可以写做

$$\phi(r,\ t)\Big|_{t=\frac{r-a}{v_p}}=0 \qquad u(r,\ t)\Big|_{t=\frac{r-a}{v_p}}=0 \tag{8.7}$$

由广义虎克定律可知，应力张量在球坐标系的分量为

$$\sigma_{rr}=\lambda\theta+2\mu e_{rr}=\lambda\nabla^2\phi+2\mu\frac{\partial u_r}{\partial r} \tag{8.8}$$

将$u_r=\partial\phi/\partial r$、（8.3）、（8.4）式代入（8.8）式可得

$$\frac{\lambda+2\mu}{v_p^2a}f''(t)+\frac{4\mu}{v_pa^2}f'(t)+\frac{4\mu}{a^3}f(t)=-P(t) \tag{8.9}$$

把（8.9）式稍加化简便得到振动学中的强迫振动方程

$$f''(t)+2h\omega_0f'(t)+\omega_0^2f(t)=cP(t) \tag{8.10}$$

其中

$$\omega_0=\frac{2v_s}{a} \qquad h=\frac{v_s}{v_p} \qquad c=-\frac{a}{\rho} \tag{8.11}$$

可以给出方程（8.10）一般的积分解，只是积分过程较复杂，此处暂不去研究它。

二、球面脉冲波的激发

下面我们研究实际工作中经常遇到的球面脉冲波的激发中的一个简单情形。

设球面上作用着的均布压力为

$$P(t)=P_0H(t) \qquad H(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases} \tag{8.12}$$

将（8.12）式代入（8.10）式并解之可得

$$f(t)=e^{-h\omega_0t}\ (A\cos\omega t+B\sin\omega t)-\frac{P_0a}{\rho\omega_0^2} \tag{8.13}$$

其中 $\omega=\omega_0\sqrt{1-h^2}$。$A$与$B$为常数，可由边值条件和初值条件确定。将波前方程（8.7）式应用于腔壁上，可得

$$\phi(r,\ t)\Big|_{\substack{r=a\\t=0}}=\frac{f(0)}{a}=0$$

$$u(r,\ t)\Big|_{\substack{r=a\\t=0}}=-\frac{f'(0)}{v_p a}-\frac{f(0)}{a^2}\qquad 0 \tag{8.14}$$

由此得 $$A=-\frac{P_0a^3}{4\mu}\qquad B=\frac{P_0a^3}{4\mu}\sqrt{\frac{\mu}{\lambda+\mu}} \tag{8.15}$$

令$\tau=t-(r-a)/v_p$，对$r>a$处，用τ代替t可得一般解。于是位移

$$u_r=\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{f(\tau)}{r}\right]=-\frac{1}{v_p r}f'(\tau)-\frac{1}{r^2}f(\tau) \tag{8.16}$$

将（8.15）式代入（8.13）式后将得到的$f(\tau)$，再代入（8.16）式可得

$$u_r=\frac{aP_0}{4\mu}\left\{2\sqrt{\frac{\mu}{\lambda+\mu}}\frac{a}{r}e^{-\sqrt{\frac{\mu}{\lambda+\mu}}\omega\tau}\sin\omega\tau+\frac{a^2}{r^2}\right.$$

$$\left.\cdot\left[1-\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}}e^{-\sqrt{\frac{\mu}{\lambda+\mu}}\omega\tau}\sin(\omega\tau+\delta)\right]\right\}H(\tau) \tag{8.17}$$

其中 $$\delta=\tan^{-1}\sqrt{\frac{\lambda+\mu}{\mu}}$$

当$r\gg a$，可以忽略a^2/r^2，（8.17）式变为

$$u_r=\frac{a^2P_0}{2\mu}\sqrt{\frac{\mu}{\lambda+\mu}}\frac{1}{r}e^{-\sqrt{\frac{\mu}{\lambda+\mu}}\omega\tau}(\sin\omega\tau)H(\tau) \tag{8.18}$$

对泊松固体$\lambda=\mu$，由上式可得

$$u_r=\frac{a^2P_0}{2\sqrt{2}\mu}\frac{1}{r}e^{-\frac{\omega\tau}{\sqrt{2}}}(\sin\omega\tau)H(\tau) \tag{8.19}$$

式（8.19）由于有指数项$\exp(-\omega\tau/\sqrt{2})$，可见振动衰减很快，经过一个往复运动后，振幅就是原来的$\exp(-\sqrt{2}\pi)$倍，约为$0.0120u_r$。振幅尚与r^{-1}成正比。

从数学上看，上述波的激发问题是在给定的边界条件及初始条件下求解波动方程问题。显然，对于其他形状的边界和其他形式的外力仍可用此法求解。此外，我们可以根据边界条件及初始条件的特点可以设出解的一部分，然后通过求解方程寻求解的另一部分。这通常应用在分离变量法上。下面我们用此法寻求球面简谐 P 波的解式。

三、球面简谐 P 波的激发

设作用在腔壁上的压力为$P(t)=P_0\exp(-i\omega t)$，显然只能产生 P 波。位移势函数ϕ满足的波动方程为

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial r}=\frac{1}{v_p^2}\cdot\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \tag{8.20}$$

设方程之通解为

$$\phi(r,\ t)=\Phi(r)e^{-i\omega t} \tag{8.21}$$

将（8.21）式代入（8.20）式可得

$$\Phi''+\frac{2}{r}\Phi'+k^2\Phi=0 \tag{8.22}$$

其中$k=\omega/v_p$。（8.22）式为零阶贝塞尔方程。其解为

$$\Phi=Ah_0^{(1)}(kr)+Bh_0^{(2)}(kr) \tag{8.23}$$

其中$h_0^{(1)}$、$h_0^{(2)}$是零阶第一种、第二种球汉克函数。若取时间因子为$\exp(-i\omega t)$，由辐射条件可知，发散波的形式为$\exp[i(kr-\omega t)]$。不存在会聚波，须取$B=0$。于是，（8.23）式变为

$$\Phi=Ah_0^{(1)}(kr)$$

将上式代入（8.21）式得

$$\phi=Ah_0^{(1)}(kr)e^{-i\omega t}=-\frac{iA}{kr}e^{i(kr-\omega t)} \tag{8.24}$$

其中 $$h_0^{(1)} = -\frac{1}{kr}e^{ikr}$$

且有 $$\frac{dh_0^{(1)}}{dr} = k\left(\frac{i}{k^2r^2} + \frac{1}{kr}\right)e^{ikr} = kh_1^{(1)}$$

$$h_1^{(1)} = \left(\frac{i}{k^2r^2} + \frac{1}{kr}\right)e^{ikr}$$

边界条件为

$$\sigma_{rr}|_{r=a} = -P(t) = -P_0e^{-i\omega t} \tag{8.25}$$

在球坐标系下

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u}{\partial r} + 2\lambda\frac{u}{r}$$

$$= (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{2\lambda}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}$$

$$= \left[(\lambda + 2\mu)\left(-\frac{2k}{r}h_1^{(1)} - k^2h_0^{(1)}\right)A + \frac{2\lambda k}{r}Ah_1^{(1)}\right]e^{-i\omega t}$$

$$= -\left[(\lambda + 2\mu)k^2h_0^{(1)} + \frac{4\mu}{r}kh_1^{(1)}\right]Ae^{-i\omega t} \tag{8.26}$$

由（8.25）式及（8.26）式可得

$$A = \frac{P_0}{(\lambda + 2\mu)k^2h_0^{(1)}(ka) + \frac{4\mu}{a}kh_1^{(1)}(ka)} \tag{8.27}$$

由（8.24）式可得位移场

$$u_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r} = kA\left(\frac{i}{k^2r^2} + \frac{1}{kr}\right)e^{ikr}\cdot e^{-i\omega t}$$

$$= kAh_1^{(1)}(kr)e^{-i\omega t} \tag{8.28}$$

若当 a 很小，波长 λ 很大，r 又较小（$r>a$）时，（8.28）式可以化为

$$u_r = i\frac{1}{k}\frac{A}{r^2}e^{i(kr-\omega t)} \tag{8.29}$$

当$r \gg \lambda$时，（8.28）式可化为

$$u_r = \frac{A}{r}e^{i(kr-\omega t)} \tag{8.30}$$

应力张量的分量可以由广义虎克定律求出（可参阅附录）。

§8—2 体力激发的SH波

SH 波位移只有 x_2 方向分量 u_2，因而是较为简单的二维问题。在这类问题中，质点只沿一个方向振动，波具有偏振性。产生SH波的力通常称为SH波源，它们可以是面力、体力，也可以是集中线力。这一节将介绍求解非齐次波动方程的另一种方法即积分变换法。这种方法的优点是将积分变换作用于微分方程，可将变换后的方程变得简单易解，然后将所得结果进行逆变换，即得所求之解答。

一、体力激发 SH 波

设在无限大固体媒质中，体力及位移只有x_2方向分量，写做

$$f_1 = f_3 = 0 \qquad f_2 = f(x_1, x_3, t)$$
$$u_1 = u_3 = 0 \qquad u_2 = u(x_1, x_3, t) \tag{8.31}$$

位移u_2满足达朗贝尔方程

$$\nabla^2 u + f = \frac{1}{v_s^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{8.32}$$

设单位质量体力按简谐规律变化，力的幅值是空间点坐标的函数，并写为

$$f_2 = F(x_1, x_3)e^{-i\omega t} \tag{8.33}$$

因为是简谐力，故而产生简谐波。设（8.32）式的解为

$$u_2 = U(x_1, x_3)e^{-i\omega t} \tag{8.34}$$

现在我们主要的任务是求出函数$U(x_1, x_3)$。将（8.34）式代入（8.32）式得

$$\nabla^2 U + k^2 U = -F(x_1, x_3) \tag{8.35}$$

其中$k = \omega/v$。

函数$H(x_1, x_3)$的二维傅里叶积分变换及其逆变换为

$$\overline{H} = (\xi, \zeta) = \frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty} H(x_1, x_3)\, e^{-i(\xi x_1 + \zeta x_3)} dx_1 dx_3$$

$$H(x_1, x_3) = \frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty} \overline{H}(\xi, \zeta) e^{i(\xi x_1 + \zeta x_3)}\, d\xi d\zeta \tag{8.36}$$

将积分算符$\frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\xi x_1 + \zeta x_3)} dx_1 x_3$作用到方程（8.35）式的两边得

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2}\right) e^{-i(\xi x_1 + \zeta x_3)} dx_1 dx_3 + k^2 \overline{U}(\xi, \zeta)$$

$$= -\overline{F}(\xi, \zeta) \tag{8.37}$$

由于

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left[U e^{-i(\xi x_1 - \zeta x_3)}\right]$$

$$= \frac{\partial U}{\partial x_1} e^{-i(\xi x_1 + \zeta x_3)} - i\xi U e^{-i(\xi x_1 + \zeta x_3)}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left[U e^{-i(\xi x_1 + \zeta x_3)}\right] = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} e^{-i(\xi x_1 + \zeta x_3)}$$

$$-2i\xi \frac{\partial}{\partial x_1}\left[U e^{-i(\xi x_1 + \zeta x_3)}\right] + \xi^2 U e^{-i(\xi x_1 + \zeta x_3)}$$

如果x_1或$x_3 = \pm\infty$，$U = \partial U/\partial x_1 = \partial U/\partial x_3 = 0$，那么（8.37）式左边积分

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} e^{-i(\xi x_1 + \zeta x_3)} dx_1 dx_3$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx_3 \left[\frac{\partial}{\partial x_1} U e^{-i(\xi x_1+\zeta x_3)} \Big|_{x_1=\infty} - \frac{\partial}{\partial x_1} U e^{-i(\xi x_1+\zeta x_3)} \Big|_{x_1=-\infty} \right]$$

$$+ \frac{i\xi}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx_3 \left[U e^{-i(\xi x_1+\zeta x_3)} \Big|_{x_1=\infty} - U e^{-i(\xi x_1+\zeta x_3)} \Big|_{x_1=-\infty} \right] - \xi^2 \bar{U}(\xi, \zeta) = -\xi^2 \bar{U}(\xi, \zeta)$$

同理

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2} e^{-i(\xi x_1+\zeta x_3)} dx_1 dx_3 = -\zeta^2 \bar{U}(\xi, \zeta)$$

于是则由以上诸式可得

$$\bar{U}(\xi, \zeta) = \frac{\bar{F}(\xi, \zeta)}{\xi^2+\zeta^2-k^2} \tag{8.38}$$

由傅里叶逆变换可得

$$U(x_1, x_3) = \frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{F}(\xi, \zeta)}{\xi^2+\zeta^2-k^2} e^{i(\xi x_1+\zeta x_3)} d\xi d\zeta \tag{8.39}$$

将（8.39）式代入（8.34）式即可求得u_2的表达式。

二、集中线力激发的SH波

作为一个特例，我们考虑作用力是集中线力的情况。力的作用线的坐标为x_{10}，x_{30}，在x_2方向无限长。作用力可写做

$$f_2 = F(x_1, x_3)e^{-i\omega t} = P_0\delta(x_1-x_{10})\delta(x_3-x_{30})e^{-i\omega t} \tag{8.40}$$

$F(x_1, x_3)$的傅里叶变换为

$$\bar{F}(\xi, \zeta) = \frac{P_0}{2\pi} e^{-i(\xi x_{10}+\zeta x_{30})} \tag{8.41}$$

把（8.41）式代入（8.39）式可得

$$U(x_1,\ x_3)=\frac{P_0}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i[\xi(x_1-x_{10})+\zeta(x_3-x_{30})]}}{\xi^2+\zeta^2-k^2}d\xi d\zeta \qquad (8.42)$$

若在ξ—ζ平面内有两个矢量（如图8—2）

$$\boldsymbol{l}=\xi\boldsymbol{i}_1+\zeta\boldsymbol{i}_3 \qquad (8.43)$$

$$\boldsymbol{R}=(x-x_{10})\boldsymbol{i}_1+(x_3-x_{30})\boldsymbol{i}_3$$

则它们的标积

$$\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{R}=\xi(x_1-x_{10})+\zeta(x_3-x_{30})$$

$$=lR\cos(\theta-\alpha) \qquad (8.44)$$

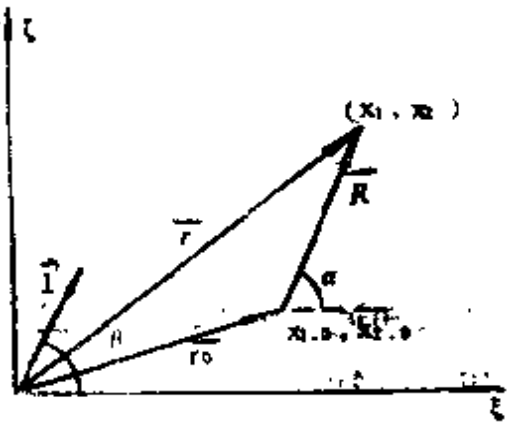


图 8—2

(8.42) 式在极坐标系中可写为

$$U(r,\ r_0)=\frac{P_0}{4\pi^2}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{e^{ilR\cos(\theta-\alpha)}}{l^2-k^2}\,l\,dl\,d\theta \qquad (8.45)$$

其中 $l^2=\xi^2+\zeta^2$ $d\xi d\zeta=l\,dl\,d\theta$

式 (8.45) 右端对θ的积分是贝塞尔函数$2\pi J_0(lR)$，于是可得

$$U(r,\ r_0)=\frac{P_0}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{J_0(lR)}{l^2-k^2}\,l\,dl=\frac{iP_0}{4}H_0^{(1)}(kR)$$

其中 $$\int_0^{\infty}\frac{J_0(lR)}{l^2-k^2}\,l\,dl=\frac{i\pi}{2}H_0^{(1)}(kR)$$

上述方程除应用傅里叶变换求解外，尚可用其他类型的变换，例如汉克变换。对于非简谐力的波源可以应用三维傅里叶变换求解，若不限于SH波源，则可以应用四维傅里叶变换。当然，其过程比较繁冗。

§8—3 非齐次波动方程及其解答

研究体力激发弹性波问题，也可以把力和位移用相应的势函数表示出来，求解以势函数表示的非齐次波动方程。

设单位质量媒质所受体力为$f(r,\ t)$，位移为$u(r,\ t)$。引进

f与u的势函数并写成

$$f=\nabla F+\nabla\times A \qquad u=\nabla\phi+\nabla\times\psi \tag{8.46}$$

其中F与A分别为无旋场和无散场的力势；ϕ与ψ分别为无旋场与无散场的位移势，即拉梅势。它们满足的非齐次波动方程为

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi-\frac{1}{v_p^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}&=-\frac{1}{v_p^2}F\\ \nabla^2\psi=\frac{1}{v_s^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}&=-\frac{1}{v_s^2}A\end{aligned} \tag{8.47}$$

如果知道力势F，A，就可以由（8.47）式求出位移势ϕ和ψ，再由（8.46）式求出位移u。因此，现在的关键问题是如何由给定的f求出F和A。如图8—3所示，V'表示力源区域，$P'(x_1', x_2, x_3')$表示力源区域内任意一点。$P(x_{i1}, x_{i2}, x_{i3})$表示力势点，$M(x_1, x_2, x_3)$表示任选的观测点位置。力源区内作用着随时间变化的力$f(x_1', x_2', x_3', t)$。分别求（8.46）式的第一式的散度和旋度，并按规范条件令$\nabla\cdot A=0$，可以得到如下的泊松方程：

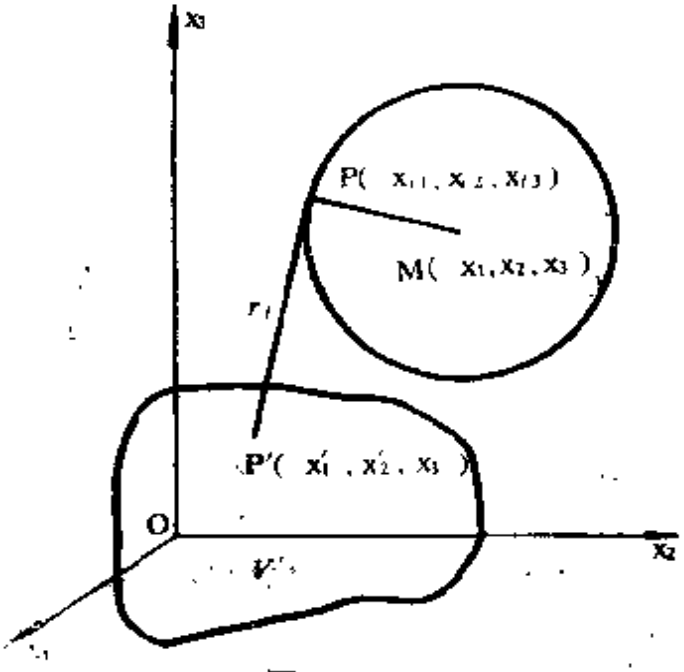


图 8—3

$$\nabla^2F=\nabla\cdot f \qquad \nabla^2A=-\nabla\times f$$

由数理方法可知上边方程之解为

$$F(x_1, x_2, x_3, t)=-\frac{1}{4\pi}\int_{V'}\frac{\nabla'\cdot f(x_1', x_2', x_3', t)}{r_i}dV' \tag{8.48}$$

$$A(x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, t) = \frac{1}{4\pi}\int_{V'}\frac{\nabla' \times f(x_1', x_2', x_3', t)}{r_i}dV' \tag{8.49}$$

其中 $r_i = [(x_{i1}-x_1')^2 + (x_{i2}-x')^2 + (x_{i3}-x)^2]^{1/2}$

$dV' = dx_1 dx_2 dx_3'$

根据矢量微商公式

$$\nabla \cdot \frac{u}{v} = \frac{1}{v}\nabla \cdot u + u \cdot \nabla \frac{1}{v}$$

式（8.48）可以化为

$$F = \frac{1}{4\pi}\left[-\int_{V'}\nabla' \cdot \frac{f}{r}dV' + \int_{V'} f \cdot \nabla' \frac{1}{r_i}dV'\right]$$

根据高斯定理，上式又可化为

$$F = \frac{1}{4\pi}\left[\int_{V'} f \cdot \nabla' \frac{1}{r_i}dV' - \oint_{S'}\frac{f}{r_i} \cdot n dS\right]$$

其中 S' 是包围区域 V' 的曲面。我们可以使 S' 落在 $f=0$ 的区域内，以使上式中的面积分等于零。于是得到

$$F(x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, t) = \frac{1}{4\pi}\int_{V'} f \cdot \nabla' \frac{1}{r_i}dV' \tag{8.50}$$

以上诸式中算符“∇'”是表示对V'区域内坐标微商。

同理，根据矢量微商公式

$$\nabla \times \frac{u}{v} = \frac{1}{v}\nabla \times u - u \times \nabla \frac{1}{v}$$

及格林定理 $$\int_V \nabla \times A dV = \oint_S n \times A dS$$

可得

$$A(x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, t) = \frac{1}{4\pi}\int_{V'} f \times \nabla' \frac{1}{r}dV' \tag{8.51}$$

若考虑初始条件

$$\phi(r, 0) = 0 \qquad \left.\frac{\partial \phi}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$$

$$\psi(r,\ 0)=0 \qquad \left.\frac{\psi}{\partial t}\right|_{t=0}=0$$

则方程（8.47）式的解为

$$\phi(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t)=\frac{1}{4\pi v_p^2}\int_\infty \frac{F\left(x_{;1},\ x_{;2},\ x_{;3},\ t-\frac{r}{v_p}\right)}{r}dV$$

$$\psi(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t)=\frac{1}{4\pi v_s^2}\int_\infty \frac{A\left(x_{;1},\ x_{;2},\ x_{;3},\ t-\frac{r}{v_s}\right)}{r}dV \tag{8.52}$$

其中 $r=[(x_1-x_{;1})^2+(x_2-x_{;2})^2+(x_3-x_{;3})^2]^{1/2}$

$dV=dx_{;1}dx_{;2}dx_{;3}$

式（8.52）之ϕ、ψ即为推迟势。它表示离开观测点(x_1, x_2, x_3)距离为r的地方力势的影响要推迟r/v_p或r/v_s时刻后才能到达观测点。到达观测点距离为r的点，都在以观测点为中心以r为半径的球面上，亦即球面上$t-r/v_p$或$t-r/v_s$时刻的外力势，在t时刻能够影响到观测点。

综上所述，可得出求解位移u的步骤如下：

首先，由外力场f通过（8.50）、（8.51）求出力势F、A；

其次，由力势F，A通过（8.52）求出ϕ与ψ；

最后，由ϕ及ψ根据（8.46）求出位移场u。

§8—4 集中力激发的弹性波

前一节讨论了在一般情况下任意外力场激发弹性波问题。这一节以一特殊情况为例，研究前一节的结论及求解u步骤的具体运用。我们考虑一种特殊外力场，即集中力作用下产生的位移场，也就是求集中力产生的弹性波。

设有集中力$F(t)\delta(r'-r_0)$，所谓集中力是指表示体力场强

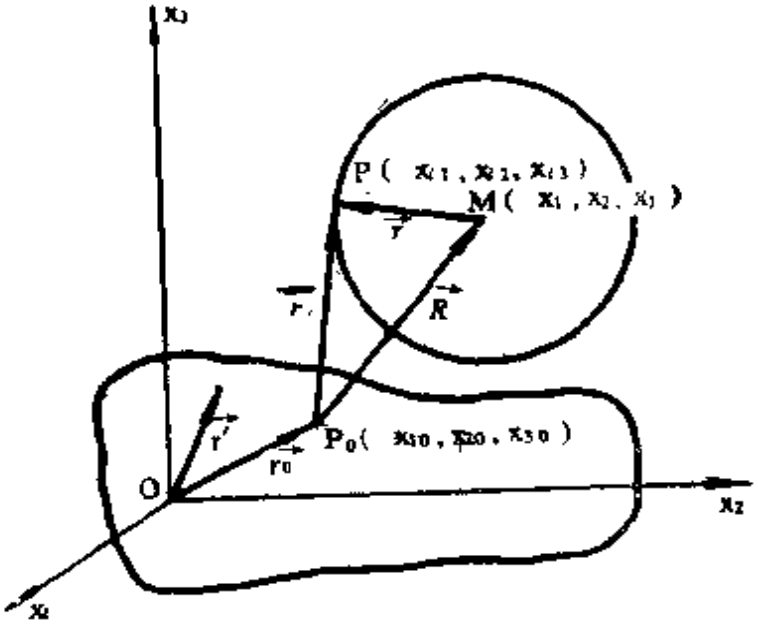


图 8—4

度$f(r', t)$的作用区域包括r_0而无限缩小，当收缩到r_0时，ρf的体积分趋于一非零的有限值$f(t)$的情况。写成数学表达式为

$$\int_{V_1}\rho f\,dV' = \int_{V'}F(t)\delta(r'-r_0)\,dV' = f(t)$$

图 8—4 给出集中力位置$P_0(x_{10}, x_{20}, x_{30})$、力势位置$P(x_{i1}, x_{i2}, x_{i3})$以及观测点位置$M(x_1, x_2, x_3)$。下面我们按照前一节求解 u 之步骤进行。

首先，求集中力$F(t)\delta(r'-r_0)$的力势F、A。令

$$F(t)\delta(r'-r_0) = \nabla F + \nabla\times A \qquad (8.53)$$

由（8.50）式及（8.51）式可知力的标势和矢势分别为

$$F(x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, t) = \frac{1}{4\pi}\int_{V'}\frac{F(t)\delta(r'-r_0)\cdot\nabla'\frac{1}{r}}{\rho}\,dV'$$

$$= \frac{F(t)}{4\pi\rho}\times\frac{r_i}{r_i^3} \qquad (8.54)$$

$$A(x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, t) = \frac{1}{4\pi}\int_{V'} \frac{F(t)\delta(r'-r_0)\times\nabla'\frac{1}{r_i}}{\rho} dV'$$

$$= -\frac{F(t)}{4\pi\rho}\times\frac{r_i}{r_i^3} \qquad (8.55)$$

其中 $r_i = [(x_{i1}-x_{10})^2+(x_{i2}-x_{20})^2+(x_{i3}-x_{30})^2]^{1/2}$

其次，由（8.52）式求 ϕ 及 ψ。因为

$$\phi(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{4\pi v_p^2}\int_{\infty}\frac{F(t-\frac{r}{v_p})}{4\pi\rho r}\cdot\frac{r_i}{r_i^3}\,dV$$

$$\psi(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{4\pi v_s^2}\int_{\infty}\frac{F(t-\frac{r}{v_s})}{4\pi\rho r}\times\frac{r_i}{r_i^3}dV \qquad (8.56)$$

其中 $r = [(x_{i1}-x_1)^2+(x_{i2}-x_2)^2+(x_{i3}-x_3)^2]^{1/2}$

进一步可以把（8.56）式表达ϕ及ψ的体积分化为以 M(x_1, x_2, x_3) 为球心，r为半径的球面S上的面积分，再对 r 从零积到无穷，则有

$$\phi(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{4\pi v_p^2}\int_0^{\infty}\frac{F(t-\frac{r}{v_p})}{4\pi\rho r}dr\cdot\int_s\frac{r_i}{r_i^3}ds \qquad (8.57)$$

设以 R 为表示观测点 M(x_1, x_2, x_3) 对力的作用点 P_0(x_{10}, x_{20}, x_{30}) 的矢径，且

$$R = [(x_1-x_{10})^2+(x_2-x_{20})^2+(x_3-x_{30})^2]^{1/2}$$

利用球函数展开定理可得

$$\int_s\frac{r_i}{r_i^3}ds = \begin{cases} 0 & (r>R) \\ 4\pi r^2\dfrac{R}{R^3} & (r<R) \end{cases}$$

因此（8.57）式中对 r 之积分应以 R 为上限，形为

$$\phi(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{4\pi\rho v_p}\cdot\frac{R}{R^3}\int_0^R rF(t-\frac{r}{v_p})dr$$

若令$\tau = r/v_p$，则上式变为

$$\phi(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{4\pi\rho} \frac{\boldsymbol{R}}{R^3} \cdot \int_0^{\frac{R}{v_p}} \tau \boldsymbol{F}(t-\tau) d\tau \qquad (8.58)$$

用类似方法可以从（8.56）式的第二式得

$$\psi(x_1, x_2, x_3, t) = -\frac{1}{4\pi\rho} \frac{\boldsymbol{R}}{R^3} \times \int_0^{\frac{R}{v_s}} \tau \boldsymbol{F}(t-\tau) d\tau \qquad (8.59)$$

最后，由（8.58）、（8.59）式及（8.46）式求位移 $\boldsymbol{u}$：

$$\boldsymbol{u} = \nabla\phi + \nabla \times \psi = \boldsymbol{u}_p + \boldsymbol{u}_s + \boldsymbol{u}_L$$

其中

$$\boldsymbol{u}_p = \frac{\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{F}(t - \frac{R}{v_p})}{4\pi\rho v_p^2} \frac{\boldsymbol{R}}{R^2} = \frac{1}{4\pi\rho v_p^2 R} \boldsymbol{P}(t - \frac{R}{v_p})$$

$$\boldsymbol{u}_s = -\frac{1}{4\pi\rho v_s^2} \left\{ \frac{1}{R} \boldsymbol{F}(t - \frac{R}{v_s}) - [\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{F}(t - \frac{R}{v_s})] \frac{\boldsymbol{R}}{R^3} \right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi\rho v_s^2 R} \boldsymbol{S}(t - \frac{R}{v_s}) \qquad (8.60)$$

$$\boldsymbol{u}_L = \frac{1}{4\pi\rho} \int_{R/v_p}^{R/v_s} \tau [2\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{F}(t-\tau) \frac{\boldsymbol{R}}{R^5} - \frac{\boldsymbol{F}(t-\tau)}{R^3}] d\tau$$

$$= \frac{1}{4\pi\rho R^3} \int_{R/v_p}^{R/v_s} \tau [2\boldsymbol{P}(t-\tau) - \boldsymbol{S}(t-\tau)] d\tau$$

式（8.60）要经过复杂的计算才能得到，在此我们省略了计算过程，只是写出结果。上式中$\boldsymbol{P}(t)$代表集中力$\boldsymbol{F}(t)$在$\boldsymbol{R}$方向上的分力，$\boldsymbol{S}(t)$代表$\boldsymbol{F}(t)$垂直于$\boldsymbol{R}$方向的分力。（8.60）式表示总的位移由三部分组成：第一部分为$\boldsymbol{u}_p$。$\boldsymbol{u}_p$之波速为v_p，位移方向与力的作用点（震源）到观测点（台站）的矢径$\boldsymbol{R}$的方向一致，故为纵波（或 P 波）。振幅大小与集中力$\boldsymbol{F}(t)$在$\boldsymbol{R}$上的分量有

关。若R大小不变，只是方向变化，F在R上的分量也变化。因此，球面纵波振幅大小依方向而改变。同理，第二部分u_s为球面横波或S波，其波速为v_s，位移方向与波的传播方向相垂直，且与F、R同面。横波幅值亦随方向而改变。第三部分u_L为拉普拉斯（Laplace）波。它在P波与S波之间。如图8—5所示，

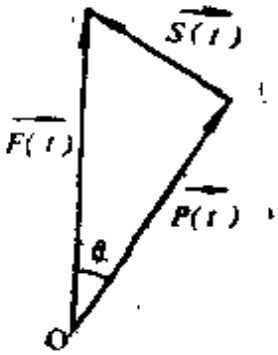


图 8—5

选球坐标系，设$F(t)$沿x_3方向，作用点在原点，且有

$$\boldsymbol{F}(t)=F(t)\boldsymbol{i}_3$$

由（8.60）式可得

$$\boldsymbol{P}(t)=F(t)\cos\theta\boldsymbol{e}_r \quad \boldsymbol{S}(t)=-F(t)\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta$$

于是（8.60）式可化为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_p &= \frac{F(t-\frac{R}{v_p})}{4\pi\rho R}\frac{\cos\theta}{v_p^2}\boldsymbol{e}_r \\
\boldsymbol{u}_s &= -\frac{F(t-\frac{R}{v_s})}{4\pi\rho R}\frac{\sin\theta}{v_s^2}\boldsymbol{e}_\theta \qquad (8.61)\\
\boldsymbol{u}_L &= \frac{1}{4\pi\rho R^3}\int_{R/v_p}^{R/v_s}\tau F(t-\tau)(2\cos\theta\boldsymbol{e}_r+\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta)d\tau
\end{aligned}$$

当$F(t)$为集中瞬时脉冲力时，设

$$\boldsymbol{F}(t)=F_0\delta(t)\boldsymbol{i}_3$$

则由（8.61）式可得

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_p &= \frac{F_0\delta(t-\frac{R}{v_p})}{4\pi\rho R}\frac{\cos\theta}{v_p^2}\boldsymbol{e}_r \\
\boldsymbol{u}_s &= -\frac{F_0\delta(t-\frac{R}{v_s})}{4\pi\rho R}\frac{\sin\theta}{v_s^2}\boldsymbol{e}_\theta \qquad (8.62)
\end{aligned}$$

$$u_L=\begin{cases}\dfrac{t}{4\pi\rho R^3}F_0(2\cos\theta e_r+\sin\theta e_\theta) & \left(\dfrac{R}{v_L}<t<\dfrac{R}{v_s}\right)\\ 0 & \left(t<\dfrac{R}{v_p}\quad,\quad t>\dfrac{R}{v_s}\right)\end{cases}$$

由（8.61）、（8.62）式可知，当 $\theta=0$ 时，$|u_p|$ 最大，而 $|u_s|$ 最小；当 $\theta=\pi/2$ 时，$|u_p|$ 最小，而 $|u_s|$ 最大。当 R 充分大时 u_L 的数值很小，并随 R 继续增大迅速减小，故距震源很远的观测点只能收到 P 波、S 波而收不到 L 波。

综上所述，可以得出如下结论：在无限均匀的弹性介质中，集中力产生的位移场主要为纵波与横波。纵波在力的方向上最强，而在过力的作用点垂直于力的方向的平面内为零；横波在过作用点而垂直于力的方向的平面内最强，而在力的方向上为零。

集中力的位移场全部推导过程较为复杂，但幸好我们并不着眼其推导过程，我们的目的是要了解需用什么样的方法分析和解决这一类问题，并得到怎样的结果，其作用和意义如何。这种处理问题的方法具有相当普遍的意义。在地震学、声学及电磁学中曾被广泛地采用，所得结果也颇为重要。

§8—5 初值问题

这一节我们研究三维空间中某处的扰动状态经过一段时间后对周围介质的影响如何，换句话说，空间某点的扰动状况与波源的初始扰动关系如何。

由于不考虑反射波的影响，故设三维空间充满了均匀弹性介质。在有限区间 T_0 内存在一初始扰动，即在 $t=0$ 时刻该区域的初始位移和初始速度可以不为零，可写为

$$u(x_1,\ x_2,\ x_3,\ 0)=u_0(x_1,\ x_2,\ x_3)$$
$$\dot{u}(x_1,\ x_2,\ x_3,\ 0)=\dot{u}_0(x_1,\ x_2,\ x_3)$$

由于存在不为零的初始扰动，故从扰动处将有弹性波向外传播。

当体力不为零时，位移 u 满足达朗贝尔方程

$$\nabla^2 u - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -f$$

当体力为零时，位移 u 满足齐次波动方程

$$\nabla^2 u = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

上述方程的 u 可看成是位移沿某一坐标轴的分量。这些方程的解我们已在前边的章节里介绍过。现在我们要研究解的另一种形式，即用扰动区的初始位移和初始速度来表示的一种解答。对于弹性体内任一点M，它在 t 时刻的位移 u 可以由泊松公式给出：

$$u(M,\ t) = \frac{1}{4\pi v}\left[\frac{\partial}{\partial t}\iint_{S_{vt}^M}\frac{u_0}{r}ds + \iint_{S_{vt}^M}\frac{\dot{u}_0}{r}ds\right] \qquad (8.63)$$

其中 S_{vt}^M 是以 M 点为心，半径为 vt 的球面。

下面我们来具体推导（8.63）式。在媒质中任选一点 M，并以其为球心，以 r 为半径作一球面，并记做 S_r^M，以 $\langle u(r,\ t)\rangle$ 表示该球面上位移平均值，并写做

$$\langle u(r,\ t)\rangle = \frac{1}{4\pi r^2}\iint_{S_r^M} u\,ds = \frac{1}{4\pi}\iint_{S_r^M} u\,d\Omega \qquad (8.64)$$

其中 $d\Omega = dS/r^2$，是面元 dS 对应的立体角。显然，当 $r\to 0$ 时，有

$$u(M,\ t) = \langle u(0,\ t)\rangle \qquad (8.65)$$

显见 $\langle u(r,\ t)\rangle$ 不依赖于方位角 θ、φ，故此在球坐标系中 $\langle u(r,\ t)\rangle$ 应该满足波动方程

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial r}\right) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\langle u\rangle}{\partial t^2} = 0 \qquad (8.66)$$

不难得到上式的解为

$$\langle u\rangle = \frac{1}{r}\left[f_1\left(t-\frac{r}{v}\right) + f_2\left(t+\frac{r}{v}\right)\right] \qquad (8.67)$$

由此可见，当 $r\to 0$ 时，因为 $\langle u\rangle$ 是有限量，所以有

$$f_{\mathrm{I}}+f_{\mathrm{II}}\equiv 0 \quad \text{即} \quad f_{\mathrm{I}}(t)=-f_{\mathrm{II}}(t)\equiv -f(t)$$

对于$r\neq 0$，则有

$$r\langle u\rangle = f(t+\frac{r}{v})-f(t-\frac{r}{v}) \tag{8.68}$$

将上式对r微商得

$$\langle u\rangle + r\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial r} = \frac{1}{v}\left[f'(t-\frac{r}{v})+f'(t+\frac{r}{v})\right] \tag{8.69}$$

当$r=0$，$t=t_i$时，由上式可得

$$\langle u(0,\ t_i)\rangle = u(M_i,\ t_i)=\frac{2}{v}f'(t_i) \tag{8.70}$$

将（8.68）式两边对t求微商后乘以$1/v$可得

$$\frac{1}{v}\ \frac{\partial}{\partial t}(r\langle u\rangle)=\frac{1}{v}\left[-f'(t-\frac{r}{v})+f'(t+\frac{r}{v})\right] \tag{8.71}$$

将（8.69）与（8.71）两式相加得

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\langle u\rangle)+\frac{1}{v}\ \frac{\partial}{\partial t}(r\langle u\rangle)=\frac{2}{v}f'(t+\frac{r}{v}) \tag{8.72}$$

令$t=0$，$r=vt_i$，比较（8.70）式与（8.72）式则得

$$u(M_i,\ t\ )=\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\langle u\rangle)+\frac{1}{v}\ \frac{\partial}{\partial t}(r\langle u\rangle)\right]_{\substack{r=vt_i\\ t=0}}$$

将（8.64）式代入上式得

$$u(M_i,\ t_i)=\frac{1}{4\pi v}\left[\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{S_r^{M_i}} r u\,d\Omega+\iint\limits_{S_r^{M_i}} r\ \frac{\partial u}{\partial t}\ d\Omega\right]_{\substack{r=vt_i\\ t=0}}$$

将初始条件代入上式，并考虑M_i、t_i是任意选定的，略去指标i，则得

$$u(M,\ t)=\frac{1}{4\pi v}\left[\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{S_{vt}^{M}}\frac{u_0}{r}dS+\iint\limits_{S_{vt}^{M}}\frac{\dot{u}_0}{r}\,dS\right] \tag{8.73}$$

此式的物理意义是很明显的。它表明在t时刻，任意一点M处的位

移 u 是由球心为M而半径为 v 的球面 S^M_{vt} 上各点的初始状态所决定的。换句话说，三维无界空间中的扰动，只要知道它的初始状况，可以用泊松公式推算它以后任一时刻的状况。既然扰动是以速度 v 传播的，那么，只有扰动区域与M点相距为 vt 的那些点的初始扰动经过时刻 t 传过了 r 的距离到达M点，如图 8—6 所示。设初始扰动局限在 T_0 内，只有当球面 S^M_{vt} 与 T_0 相交，（8.73）式的积分才不为零。设 d 和 D 分别为M点到区域 T_0 的最近和最远距离。显然，当 $t<t_d=d/v$，（8.73）式的面积分为零，表示扰动的前锋尚未到达M点；若当 $d/v\leqslant t\leqslant D/v$，$S^M_{vt}$ 与区域 T_0 相交，泊松公式的面积分不为零，表示区域 T_0 的扰动已到达M点；若 $t>t_D=D/v$，上述面积分为零，表明扰动阵尾已过了M点。

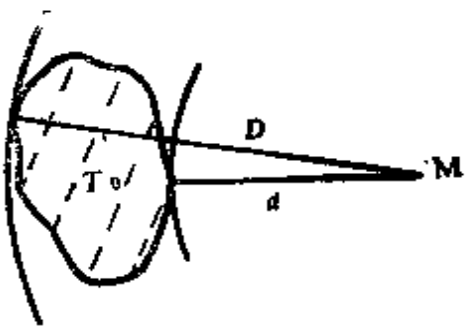


图 8—6

〔例 8—1〕在无限大的均匀媒质内有一半径为1的球体区域，其内初速度为零，初始位移为 a，球外位移为零。试求：球内、球外满足方程

$$\nabla^2 u-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

定解问题的解。

解 因为不存在边界，也就不必考虑边界条件的影响，仅由初始条件即可定解。

（1）球内

将初始位移、初始速度代入泊松公式中有

$$u=\frac{1}{4\pi v}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{S^M_{vt}}\frac{a}{vt}dS$$

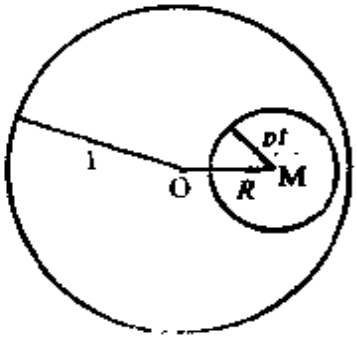


图 8—7

$$= \frac{a}{4\pi v} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\pi} \frac{2\pi (vt)^2}{vt} \sin\theta d\theta = \frac{a}{2} \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta = a$$

上述结果是当 $t<(1-R)/v$时成立。

当 $(1-R)/v<t<(1+R)/v$ 时

$$u = \frac{1}{4\pi v} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_{vt}^M} \frac{a}{vt} dS = \frac{a}{4\pi v} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\theta_0} \frac{2\pi (vt)^2}{vt} \sin\theta d\theta$$

$$= \frac{a}{2Rv} \frac{\partial}{\partial t} \int_{vt-R}^{1} r dr = \frac{a}{2}\left(1 - \frac{vt}{R}\right)$$

当$t>(1+R)/v$时，由泊松公式可知$u=0$。

（2）球外

当$t<(R-1)/v$时

$$u = 0$$

当 $(R-)/v<t<(1+R)/v$时

$$u = \frac{a}{2}\left(1 - \frac{vt}{R}\right)$$

当$t>(1+R)/v$时

$$u = 0$$

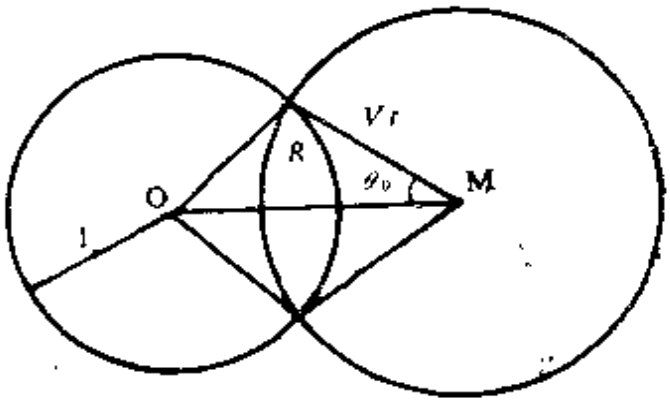


图 8—8

习题与参考答案八

1. 在弹性半空间表面上作用着均匀压力 $P(t)$，在媒质内产生P波。初始条件为$\phi(x_1, x_2, 0, 0) = u(x_1, x_2, 0, 0) = 0$。求媒质内的$\phi$及$u$，应变及应力张量。

（1） $P(t) = \begin{cases} P_0 & 0<t<\hat{t} \\ 0 & t<0 \end{cases}$

（2） $P(t) = \begin{cases} P_0 e^{-i\omega t} & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$

（3） $P(t)=\begin{cases}P_0e^{-\alpha} & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$

（4） $P(t)=\begin{cases}P_0t^2 & 0<t<\hat{t}\\ 0 & t<0\end{cases}$

{答案：(1) $\phi(r,\ t)=\frac{P_0}{2\rho}(t-\frac{x_3}{v})^2[H(\tau)-H(\tau-\hat{t})]$,

$u_1=u_2=0,\ u_3=-\frac{P_0}{\rho}(t-\frac{x_3}{v})[H(\tau)-H(\tau-\hat{t})]$,

$e_{12}=e_{23}=e_{31}=e_{11}=e_{22}=0,\ e_{33}=\frac{P_0}{\rho v^2}[H(\tau)-H(\tau-\hat{t})]$;

$\sigma_{11}=\sigma_{22}=\lambda e_{33},\ \sigma_{33}=P_0[H(\tau)-H(\tau-\hat{t})]$。

（2） $\phi=\frac{P_0}{\rho\omega^2}[e^{i(kx_3-\omega t)}-i(kx_3-\omega t)-1]H(\tau)$,

$u_1=u_2=0,\ u_3=-\frac{ikP_0}{\rho\omega^2}[e^{i(kx_3-\omega t)}-1]H(\tau)$;

$e_{33}=-\frac{P_0}{\rho v^2}e^{i(kx_3-\omega t)}H(\tau),\ \sigma_{11}=\sigma_{22}=\lambda e_{33}$

$\sigma_{33}=-P_0e^{i(kx_3-\omega t)}$。

（3） $\phi=-\frac{P_0}{\rho\alpha^2}[-e^{-\alpha(t-\frac{x_3}{v})}-\alpha(t-\frac{x_3}{v})+1]H(\tau)$,

$u_3=-\frac{P_0}{\rho v\alpha}[-e^{-\alpha(t-\frac{x_3}{v})}+1]H(\tau),\ e_{33}=-\frac{P_0}{\rho v^2}e^{-\alpha(t-\frac{x_3}{v})}H(\tau)$,

$\sigma_{33}=-P_0e^{-\alpha(t-\frac{x_3}{v})}H(\tau),\ \sigma_{11}=\sigma_{22}=\lambda e_{33}$。

（4） $\phi=-\frac{P_0}{12\rho}(\tau)^4[H(\tau)-H(\tau-\hat{t})],\ u_3=\frac{P_0}{3\rho v}\tau^3[H(\tau)-$

$H(\tau-\hat{t})],\ e_{33}=-\frac{P_0}{\rho v^2}\tau^2[H(\tau)-H(\tau-\hat{t})],\ \sigma_{11}=\sigma_{22}=\lambda e_{33}$,

$\sigma_{33}=-P_0\tau^2[H(\tau)-H(\tau-\hat{t})]$,

以上答案中的$\tau=(t-(x_3/v))$。}

2．在弹性半空间的表面上作用着均匀的剪切力$P(t)$，媒质中将产生SH波。初始条件为$u_2(r,0)=0$，$\dot{u}_2(r,0)=0$。求媒质内位移u_2及应力张量分量σ_{23}。

(1) $P(t)=\begin{cases} P_0\dfrac{1}{1+t} & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$

(2) $P(t)=\begin{cases} P_0(1-t) & 0<t<\hat{t} \\ 0 & t<0 \end{cases}$

(3) $P(t)=\begin{cases} P_0te^{-\alpha t} & t>0 \\ 0 & t\leqslant 0 \end{cases}$

(4) $P(t)=\begin{cases} P_0t\sin t & 0<t<\hat{t} \\ 0 & t\leqslant 0 \end{cases}$

{答案：(1) $u_2=-\dfrac{v}{\mu}P_0\ln(1+\tau)H(\tau)$，$\sigma_{32}=\dfrac{P_0}{1+\tau}H(\tau)$。

(2) $u_2=-\dfrac{v}{\mu}P_0[\tau-\dfrac{1}{2}\tau^2][H(\tau)-H(\tau-\hat{t})]$，

$\sigma_{32}=P_0(1-\tau)[H(\tau)-H(\tau-\hat{t})]$。

(3) $u_2=\dfrac{vP_0}{\mu\alpha^2}[1+\alpha\tau)\ e^{-\alpha\tau}H(\tau)$，

$\sigma_{32}=P_0\tau e^{-\alpha\tau}H(\tau)$。

(4) $u_2=-\dfrac{vP_0}{\mu}[\sin\tau-\tau\cos\tau)[H(\tau)-H(\tau-\hat{t})]$，

$\sigma_{23}=P_0[2\cos\tau-\tau\sin\tau)[H(\tau)-H(\tau-\hat{t})]$}

3．在无限大媒质中挖一半径为r_0的球形空腔，腔壁受到一均布压力$P(t)$，求媒质中纵波ϕ。

(1) $P(t)=\begin{cases} P_0e^{-i\omega t} & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$

(2) $P(t)=\begin{cases} P_0e^{-\alpha t} & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$

(3) $P(t)=\begin{cases} P_0(1-e^{-\alpha t}) & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$

{答案：（1） $\phi=\{e^{-h\omega_0\tau}(A\cos\omega'\tau-B\sin\omega'\tau)+\frac{cP_0e^{-i\omega\tau}}{\omega_0^2-\omega^2-2h\omega_0\omega i}\}H(\tau)$。

（2） $\phi=\{e^{h\omega_0\tau}(A\cos\omega'\tau+B\sin\omega'\tau+\frac{cP_0e^{-s\tau}}{\omega_0^2+s^2-2h\omega_0 s}\}H(\tau)$。

（3） $\phi=\{e^{-h\omega_0\tau}(A\cos\omega'\tau+B\sin\omega'\tau+\frac{cP_0}{\omega_0^2}-\frac{cP_0e^{-s\tau}}{\omega_0^2+s^2-2h\omega_0 s}\}H(\tau)$

以上答案中 $\tau=t-\frac{r-r_0}{v}$，$\omega'=\omega_0\sqrt{1-h^2}$。利用波前方程

$\phi(r,t)\Big|_{\substack{r=r_0\\t=0}}=0$，$\phi'(r,t)\Big|_{\substack{r=r_0\\t=0}}=0$定出常数$A$、$B$。}

4．在无限大媒质中挖一无限长半径为r_0的圆柱形空腔，腔壁受到一均匀作用力，试求媒质内产生的纵波ϕ或横波ψ。

（1）均匀压力 $P(t)=\begin{cases}P_0e^{-i\omega t} & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$

（2）沿柱轴方向剪切力 $P(t)=\begin{cases}P_0e^{-i\omega t} & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$

（3）沿方位角θ方向剪切力 $P(t)=\begin{cases}P_0e^{-i\omega t} & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$

〔答案：（1） $\phi=\frac{P_0H_0^{(1)}(k_pr)e^{-i\omega t}}{(\lambda+2\mu)k_pH_0^{(1)}(k_pr_0)+\frac{2\mu}{r_0}k_pH_1^{(1)}(k_pr_0)}$

（2） $\psi_z=-\frac{P_0}{\mu N(k_s,r_0)}H_0^{(1)}(k_sr)e^{-i\omega t}$，其中$N(k_s,r_0)$

$=k_s^2H_0^{(1)}(k_s,r_0)-\frac{2k_s}{r_0}H_1^{(1)}(k_s,r_0)$

（3）与（2）类同。〕

5．在半无限大空间表面上作用着剪切力$P_z(x_1,t)$，在媒质内产生

SH波。试用积分变换法求出媒质内质点位移函数的积分表达式。

（1） $P(x_1,\ t)=P_0e^{-x_1^2}e^{-i\omega t}$

（2） $P(x_1,\ t)=\dfrac{P_0}{\sqrt{|x_1|}}e^{-i\omega t}$

提示：当$x_1\to\infty$时，$U=\partial U/\partial x_1=\partial^2U/\partial x_1^2=0$；泊松积分$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\xi^2}d\xi=\sqrt{\pi}$；$k=\omega/v_s$。

〔答案：(1) $u_2=\dfrac{-iP_0e^{-i\omega t}}{2\sqrt{\pi\mu}}\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{e^{i\omega x_1-\frac{\omega^2}{4}-i\sqrt{\omega^2+k^2}\,x_3}}{\sqrt{\omega^2+k^2}}d\omega$。

(2) $u_2=-\dfrac{iP_0e^{-i\omega t}}{\sqrt{2\pi\mu}}\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{e^{i\left(\omega x_1-\sqrt{\omega^2-k^2}x_3\right)}}{\sqrt{|\omega|}\sqrt{\omega^2+k^2}}d\omega$。〕

6．在无限大媒质内有一半径为r_0的球域，域内初始速度为零，初始位移为$A\cos(\pi r/2r_0)$，球外为零。试应用泊松公式计算满足方程$\nabla^2u-(1/v^2)\partial^2u/\partial t^2=0$的解（设任意点M到球心距离为$R$）。

〔答案：球内 $u=\dfrac{A}{2R}\left[(R-vt)\cos\dfrac{\pi(R-vt)}{2r_0}+(R+vt)\cos\dfrac{\pi(R+vt)}{2r_0}\right]$

$\left(\dfrac{r_0-R}{v}>t\right)$，$u=\dfrac{A}{2R}(R-vt)\cos\dfrac{\pi(R-vt)}{2r_0}$ $\left(\dfrac{r_0-R}{v}<t<\dfrac{r_0+R}{v}\right)$，

$u=0$ $\left(t>\dfrac{r_0+R}{v}\right)$

球外 $u=0$， $\left(t<\dfrac{R-r_0}{v}\right)$，$u=\dfrac{A}{2R}(R-vt)\cos\dfrac{\pi(R-vt)}{2r_0}$

$\left(\dfrac{R-r_0}{v}<t<\dfrac{R+r_0}{v}\right)$，$u=0$ $\left(t>\dfrac{R+r_0}{v}\right)$〕

7．二维波动，初始速度为零，初始位移在$\rho=1$为半径的圆内为1，在圆外为零。试求位移$u|_{\rho=0}$。

〔答案：$u|_{\rho=0}=1$ $(t<1/v)$，$u=1-\dfrac{vt}{\sqrt{v^2t^2-1}}$ $(t>1/v)$〕

第九章 兰姆(Lamb)问题

兰姆在1904年发表了他对弹性半空间介质受力后波场分布的研究结果。从此人们把震源位于半无限介质表面或内部所产生的地震波传播问题称为兰姆问题。基于兰姆问题的专一性，我们把它作为单独一章来处理。

本章着重叙述兰姆问题的基本原理与主要计算方法，包括二维情况下的线源与三维情况下的面源。

§9—1 兰姆问题的基本理论

在二维问题中，例如（x_1，x_2）平面问题，对于弹性固体有下面两个方程：

$$\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}=(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x_1}+\mu\nabla^2 u_1$$

$$\rho\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}=(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x_2}+\mu\nabla^2 u_2$$

其中 $$\theta=e_{11}+e_{22}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}$$

$$\boldsymbol{u}=u_1\boldsymbol{i}_1+u_2\boldsymbol{i}_2$$

若 $$\boldsymbol{u}=\mathrm{grad}\phi+\mathrm{rot}\boldsymbol{\psi}$$

则有 $$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\nabla^2\phi$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \psi \tag{9.1}$$

其中ϕ、ψ分别为位移场的标量势与矢量势，并且$\psi = \psi(\psi_1, \psi_2, \psi_3)$。在我们的问题里，矢量势的三个分量都与$x_3$轴无关，即$\psi_i = \psi_i(x_1, x_2)$，$\partial\psi_i/\partial x_3 = 0$ $(i = 1, 2, 3)$，所以

$$u_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_2}$$

$$u_2 = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1}$$

为了方便，可以去掉角标，令$\psi_3 = \psi$，则

$$u_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2}$$

$$u_2 = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \tag{9.2}$$

设

$$\phi \sim e^{i\omega t} \qquad \psi \sim e^{i\omega t}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\omega^2 \phi$$

则（9.1）式变为

$$(\nabla^2 + h^2)\phi = 0$$
$$(\nabla^2 + k^2)\psi = 0 \tag{9.3}$$

其中

$$h^2 = \frac{\omega^2 \rho}{\lambda + 2\mu} = \omega^2 a^2$$

$$k^2 = \frac{\omega^2 \rho}{\mu} = \omega^2 b^2$$

式中a和b分别是P波和S波速度的倒数。兰姆称之为波慢（wavesiownese）。

对于完全弹性的固体媒质采用一般的应力-应变关系式

$$\sigma_{i,j}=\lambda\theta\delta_{i,j}+2\mu e_{i,j}$$

$$e_{i,j}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

对于x_1方向之正应力可以写做

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_{1,1}}{\mu}&=\frac{\lambda}{\mu}\theta+2\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\\&=\frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)+2\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\\&=\left(\frac{\lambda}{\mu}+2\right)\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\\&=\left(\frac{\lambda}{\mu}+2\right)\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_2}\right)+\frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_2}\right)\\&=\left(\frac{\lambda}{\mu}+2\right)\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}\right)-2\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}+2\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_2}\\&=\left(\frac{\lambda}{\mu}+2\right)(-h^2\phi)-2\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}+2\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_2}\\&=-k^2\phi-2\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}+2\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_2}\end{aligned}$$

同理，对x_2方向正应力以及x_1方向切应力可得到相应的方程。所以有

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_{1,1}}{\mu}&=\frac{\lambda}{\mu}\theta+2\frac{\partial u_1}{\partial x_1}=-k^2\phi-2\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}+2\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_2}\\\frac{\sigma_{2,1}}{\mu}&=\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}=2\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_2}-k^2\phi-2\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}\qquad(9.4)\\\frac{\sigma_{2,2}}{\mu}&=\frac{\lambda}{\mu}\theta+2\frac{\partial u_2}{\partial x_2}=-k^2\phi-2\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}-2\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_2}\end{aligned}$$

我们考虑一个位于平面$x_2=0$处的源。略去时间因子$\exp(i\omega t)$，对于$x_2>0$的区间有如下形式的解：

$$\phi = Ae^{-\alpha x_2} e^{i\xi x_1}$$

$$\phi = Be^{-\beta x_2} e^{i\xi x_1} \tag{9.5}$$

其中x_1方向的波数ξ为实数。α、β为正实数时，表示离开震源$x_2=0$后波动衰减；为虚数时，表示沿x_2增加方向为无衰减的简谐波动。把（9.5）式代入（9.4）式可得

$$\alpha^2=\xi^2-h^2 \qquad \beta^2=\xi^2-k^2$$

把位移势函数的表示式（9.5）代入（9.4）式及（9.3）式中，可分别得到位移和应力的表达式，即

$x_2=0$处的位移：

切向 $u_{1,0}=(i\xi A-\beta B)\,e^{i\xi x_1}$

垂直 $u_{2,0}=(-\alpha A-i\xi B)\,e^{i\xi x_1}$ (9.6)

$x_2=0$处的应力：

切向 $[\sigma_{21}]_0=\mu[-2i\xi\alpha A+(2\xi^2-k^2)B]e^{i\xi x_1}$ (9.7)

垂直 $[\sigma_{22}]_0=\mu([2\xi^2-k^2)A+2i\xi\beta B]e^{i\xi x_1}$

与此类似地，也可得到$x_2<0$一侧相应的表示式。

§9—2 半无限弹性固体表面的垂直曳力

在平面$x_2=0$处，即弹性固体的表面处，有下述的作用力：

$$[\sigma_{21}]_0=0 \qquad [\sigma_{22}]_0=Ye^{i\xi x_1}$$

〔已略去时间因子$\exp(i\omega t)$〕。把（9.7）式代入上式，可得

$$-2i\xi\alpha A+(2\xi^2-k^2)B=0$$

$$(2\xi^2-k^2)A+2i\xi\beta B=\frac{Y}{\mu}$$

由上式可得

$$A=\frac{2\xi^2-k^2Y}{F(\xi)\mu} \qquad B=\frac{2i\xi\alpha Y}{F(\xi)\mu} \tag{9.8}$$

其中 $F(\xi)=(2\xi^2-k^2)^2-4\xi^2\alpha\beta$

$F(\xi)$称为瑞利函数，$F(\xi)=0$称为瑞利方程。把（9.8）式中的A、B表示式代入（9.6）式中，可得表面的位移值为

$$u_{1,0}=\frac{i\xi(2\xi^2-k^2-2\alpha\beta)e^{i\xi x_1}}{F(\xi)}\frac{Y}{\mu} \tag{9.9}$$

$$u_{2,0}=-\frac{k^2\alpha e^{i\xi x_1}}{F(\xi)}\frac{Y}{\mu}$$

§9—3 半无限弹性固体表面的线垂直力源

现在我们考虑下面形式的力，即假定沿x_3轴作用于半无限弹性固体表面的单位面积力为

$$Ye^{i\xi x_1}e^{i\omega t}$$

并且采用下述形式的外压力：

$$-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q}{2\pi}e^{i\xi x_1}e^{i\omega t}d\xi$$

其中 $$Q=-\frac{2\pi Y}{d\xi} \tag{9.10}$$

上面的负号表示力Y的方向与固体外表面法线方向相反。

把（9.10）式代入（9.9）式可直接得到表面位移

$$u_{1,0}=-\frac{iQ}{2\pi\mu}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\xi(2\xi^2-k^2-2\alpha\beta)e^{i\xi x_1}}{F(\xi)}d\xi$$

$$u_{2,0}=-\frac{Q}{2\pi\mu}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{k^2\alpha e^{i\xi x_1}}{F(\xi)}d\xi \tag{9.11}$$

§9—4 半无限弹性固体表面的切向力

下面求解作用于$x_2=0$平面上切向力的问题，即作用于固体自由表面的切向力。假定切向力作用在整个$x_2=0$的平面上，即

$$[\sigma_{21}]_0 = Xe^{i\xi x_1}$$
$$[\sigma_{22}]_0 = 0$$

上式已略去时间因子$\exp(i\omega t)$。与垂直力相似，可得

$$A = -\frac{2i\xi\beta}{F(\xi)} \cdot \frac{X}{\mu}$$

$$B = -\frac{2\xi^2 - k^2}{F(\xi)} \cdot \frac{X}{\mu}$$

把上面A、B表达式代入（9.6）式，可得表面位移的表示式为

$$u_{1,0} = -\frac{k^2\beta e^{i\xi x_1}}{F(\xi)} \cdot \frac{X}{\mu}$$

$$u_{2,0} = \frac{i\xi[2\alpha\beta - (2\xi^2 - k^2)]e^{i\xi x_1}}{F(\xi)} \cdot \frac{X}{\mu}$$

若把切向面作用力集中为沿着x_3轴作用在x_1方向的切向作用力，即取

$$X = -\frac{Pd\xi}{2\pi}$$

对ξ从$-\infty$到$+\infty$积分，即得表面位移为

$$u_{1,0} = -\frac{P}{2\pi\mu}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{k^2\beta e^{i\xi x_1}}{F(\xi)}d\xi \qquad (9.12)$$

$$u_{2,0} = \frac{iP}{2\pi\mu}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\xi(2\xi^2 - k^2 - 2\alpha\beta)e^{i\xi x_1}}{F(\xi)}d\xi$$

§9—5 三维兰姆问题

在三维问题中，运动方程为

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x_i}+\mu\nabla^2 u_i \quad (i=1,\ 2,\ 3) \tag{9.13}$$

其中体胀系数

$$\theta=\nabla\cdot u=\frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

我们假定一个简谐运动，即

$$u\sim e^{i\omega t} \qquad \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=-\omega^2 u_i$$

把三个坐标方向的位移写成

$$u_i=\frac{\partial\phi}{\partial x_i}+u_i' \tag{9.14}$$

把上式代入（9.13）式，可得

$$(\nabla^2+h^2)\phi=0 \tag{9.15}$$

$$(\nabla^2+k^2)u_1'=0$$

$$(\nabla^2+k^2)u_2'=0 \tag{9.16}$$

$$(\nabla^2+k^2)u_3'=0$$

$$\frac{\partial u_1'}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2'}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3'}{\partial x_3}=0$$

这表明（9.15）、（9.16）式是（9.14）式成立的条件。

方程组（9.16）式的一个特解为

$$u_1'=\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_3}$$

$$u_2'=\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2\partial x_3} \tag{9.17}$$

$$u_3' = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3} + k^2 \phi$$

只要

$$(\nabla^2 + k^2)\phi = 0 \tag{9.18}$$

由上面的（9.15）式与（9.18）式可知，ϕ 与 ϕ 是使其成立的波动势函数。

我们假定引入的任何力系都以x_3轴为对称轴。变换到柱坐标系，坐标为

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\ ,\ Z\ ,\ \varphi$$

在柱坐标系中算符 "∇^2" 的形式为

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

位移分量表示为：q 垂直于z轴，w沿着z方向。由（9.14）、（9.17）式可得q和w的表示式。其中u_1和u_2组成q的表示式：

$$q = \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z} \tag{9.19}$$

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + k^2 \phi$$

利用分离变量法，再考虑到问题的轴对称性，我们可以假定波位函数解的形式为

$$\phi = Ae^{-\alpha z} J_0(\xi r)$$

$$\phi = Be^{-\beta z} J_0(\xi r)$$

其中 $z > 0$ $\alpha^2 = \xi^2 - k^2$ $\beta^2 = \xi^2 - k^2$

再注意到 $J_0'(x) = -J_1(x)$，由（9.19）式可直接得到位移表达式

$$q = (-\xi A e^{-\alpha z} + \xi\beta B e^{-\beta z}) J_1(\xi r)$$

$$w = (-\alpha A e^{-\alpha z} + \xi^2 B e^{-\beta z}) J_0(\xi r) \qquad (9.20)$$

应用应力—应变的基本关系式可得 $z=0$ 平面上的应力 $(\lambda \approx \mu)$

$$[\sigma_{zr}]_0 = \mu[2\xi\alpha A - (2\xi^2 - k^2)\xi B] J_1(\xi r)$$

$$[\sigma_{zz}]_0 = \mu[(2\xi^2 - k^2)A - 2\xi^2\beta B] J_0(\xi r)$$

若以 $\phi = A' e^{\alpha z} J_0(\xi r)$

$$\phi = B' e^{\beta z} J_0(\xi r)$$

作为波位表达式，可得$z<0$情况下的位移表达式为

$$q = (-\xi A e^{\alpha z} - \xi\beta B e^{\beta z}) J_1(\xi r)$$

$$w = (\alpha A e^{\alpha z} + \xi^2 B e^{\beta z}) J_0(\xi r)$$

以及应力的表达式

$$[\sigma_{zr}]_0 = \mu[-2\xi\alpha A - (2\xi^2 - k^2)\xi B] J_1(\xi r)$$

$$[\sigma_{zz}]_0 = \mu[(2\xi^2 - k^2)A + 2\xi^2\beta B] J_0(\xi r)$$

§9—6 半无限弹性固体表面的周期力面源

设有半无限弹性固体占有半空间$z>0$，使$z=0$与自由表面重合。在自由表面有作用力

$$[\sigma_{zr}]_0 = 0$$

$$[\sigma_{zz}]_0 = Z J_0(\xi r)$$

已略去时间因子$\exp(i\omega t)$。在$z=0$处的应力条件决定了波位ϕ与ψ的表达式中的系数A和B，利用（9,20）式，则有

$$(2\xi^2 - k^2)A - 2\xi^2\beta B = \frac{Z}{\mu}$$

$$2\alpha A - (2\xi^2 - k^2)B = 0$$

此式给出

$$A = \frac{2\xi^2 - k^2}{F(\xi)} \frac{Z}{\mu}$$

$$B = \frac{2\alpha}{F(\xi)} \frac{Z}{\mu}$$

其中 $F(\xi)$为瑞利函数。由（9.20）可求得表面位移为

$$q_0 = -\frac{\xi(2\xi^2 - k^2 - 2\alpha\beta)}{F(\xi)} J_1(\xi r)\frac{Z}{\mu}$$

$$w_0 = \frac{k^2\alpha}{F(\xi)} J_0(\xi r) \frac{Z}{\mu}$$

对于表面上的作用力常因子Z，用$-\xi Q d\xi/2\pi$代替之，对ξ从0到∞积分，则可得到作用于源处的集中垂直压力点源的结果：

$$q_0 = \frac{Q}{2\pi\mu}\int_0^\infty \frac{\xi^2(2\xi^2 - k^2 - 2\alpha B)}{F(\xi)} J_1(\xi r)d\xi$$

$$\omega_0 = -\frac{Q}{2\pi\mu}\int_0^\infty \frac{k^2\xi\alpha}{F(\xi)} J(\xi r)d\xi \qquad (9.21)$$

§9—7 积分解答的计算

从（9.11）、（9.12）式及（9.21）式可以看到，求解兰姆问题，必须求解下面的积分：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\zeta)d\zeta = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\zeta\{(2\zeta^2 - k^2) - 2\sqrt{\zeta^2 - h^2}\sqrt{\zeta^2 - k^2}\}e^{i\zeta x_1}}{(2\zeta^2 - k^2)^2 - 4\zeta^2\sqrt{\zeta^2 - k^2}\sqrt{\zeta^2 - h^2}}d\zeta \qquad (9.22)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(\zeta)d\zeta = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{k^2\sqrt{\zeta^2 - h^2}\, e^{i\zeta x_1}}{(2\zeta^2 - k^2)^2 - 4\zeta^2\sqrt{\zeta^2 - k^2}\sqrt{\zeta^2 - h^2}}d\zeta$$

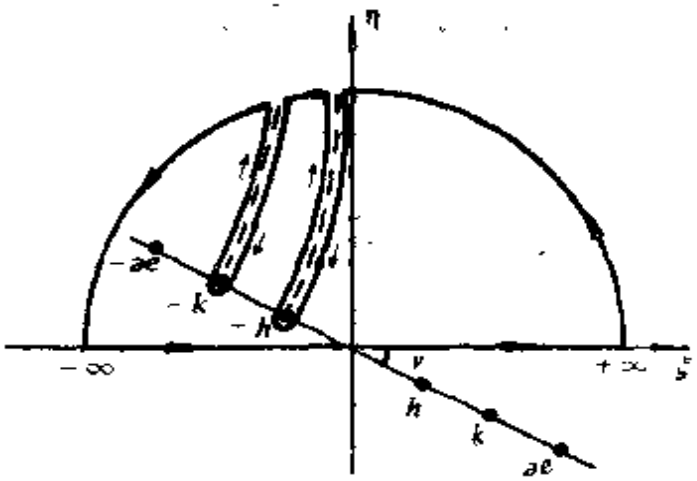
可以采用ζ复平面中适当的回路积分去寻求上面两个积分的解。

积分（9.22）式中被积函数的极点是下述方程的根的一部分：

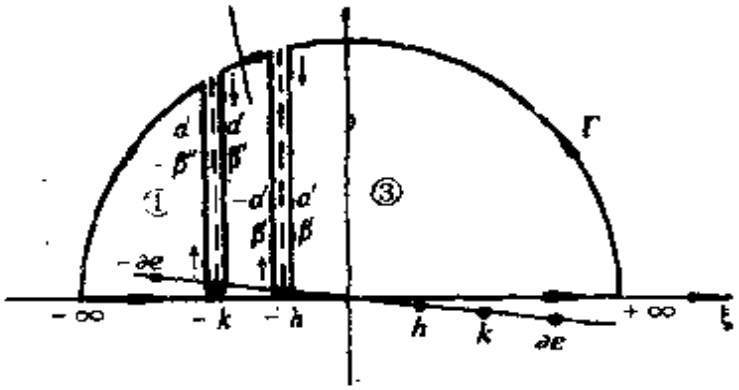
$$F(\zeta)=(2\zeta^2-k^2)^2-4\zeta^2\alpha\beta=0 \tag{9.23}$$

由于ζ仅取实数，所以（9.23）式有两个根$\zeta=\pm\mathscr{L}$，$\mathscr{L}>k$。此外由被积函数中的根式$\sqrt{\zeta^2-h^2}$和$\sqrt{\zeta^2-k^2}$引起四个支点，即$\zeta=\pm h$和$\zeta=\pm k$。由$\zeta=pc$、$h=pa$、$k=pb$（其中波幔c、a和b假定为实数）可知，这些支点和极点位于一条直线上（见图9—1（a），直线的斜率γ由关系式$\tan\gamma=I_m p/Re\,p$确定。

在式（9.12）中要求α和β或者是正实数或者是虚数，即要求$Re(\zeta^2-h^2)^{1/2}\geqslant 0$及$Re(\zeta^2-k^2)^{1/2}\geqslant 0$，所以我们选取如图9—1（$a$）中的割口，在割口上两个不等式取等号。



(a)



(b)

图 9—1

假定$p=s-i\sigma$，因为在割口上$Re\,(\zeta^2-k^2)^{1/2}=0$，因此可以说在割口上$(\zeta^2-k^2)^{1/2}$为纯虚数，令其为$iA$，其中$A$为实数，

又$\zeta=\xi+i\eta$，$k=pb=(s-i\sigma)b$，所以

$$\xi^2-\eta^2+2i\xi\eta-(s^2-\sigma^2-2i\sigma s)b^2=-A^2$$

$$\xi\eta=-s\sigma b^2$$

$$\xi^2-\eta^2<(s^2-\sigma^2)b^2 \qquad (9.24)$$

(9.24) 式中的第一个方程确定了图9—1（a）中的双曲线形状割口，第二个方程确定了可以应用的割口的一部分。图9—1（a）表示了完整的积分回路。

但是，沿着双曲线形状的曲线积分计算有很大困难。在一定近似条件下，例如p的虚部非常小，即σ值很小，我们可以采用图9—1（b）上面的割口。此时可求得下述近似表达式：

$$\alpha'=-\sqrt{2h\eta}\;e^{-i\frac{\pi}{4}} \qquad \beta'=i\sqrt{k^2-h^2}$$

$$\alpha''=\sqrt{k^2-h^2} \qquad \beta''=-\sqrt{2k\eta}\;e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

再利用 $F'(\xi)=-F'(-\xi)$

即可以改写（9.22）式。

如图9—1（b）所示，回路由（1）、（2）、（3）三部分组成。积分形式如下：

$$\int\Phi(\zeta)d\zeta=\int_{(1)}\Phi(\zeta)d\zeta+\int_{(2)}\Phi(\zeta)d\zeta+\int_{(3)}\Phi(\zeta)d\zeta$$

$$=2\pi iRes(-\mathscr{L})$$

当ζ很大时，积分（9.22）式趋于零，所以假定外边Γ为无穷大时，它们对解无贡献。从而得到下述表示式：

$$\int_{(1)}\Phi(\zeta)d\zeta=\int_{-\infty}^{-k}\frac{\xi(2\xi^2-k^2-2\alpha\beta)}{F(\xi)}e^{i\xi x_1}\,d\xi$$

$$+e^{-ikx_1}\int_0\frac{2\zeta^2-k^2+2\alpha''\beta''}{(2\zeta^2-k^2)^2+4\zeta^2\alpha''\beta''}\zeta e^{-\eta x_1}\,id\eta$$

$$=2\pi iRes(-\mathscr{L})=2\pi i\frac{-\mathscr{L}(2\mathscr{L}^2-k^2-2\alpha_1\beta_1)}{F'(-\mathscr{L})}e^{i\mathscr{L}x_1}$$

$$= 2\pi i \frac{\mathscr{L}(2\mathscr{L}^2 - k^2 - 2\alpha_1\beta_1)}{F'(\mathscr{L})} \cdot e^{-i\mathscr{L}x_1}$$

其中 $\alpha_1 = \sqrt{\mathscr{L}^2 - h^2}$ $\beta_1 = \sqrt{\mathscr{L}^2 - k^2}$

同理可得

$$\int_{(2)} \Phi(\zeta)d\zeta = \int_{-k}^{-h} \frac{\xi(2\xi^2 - k^2 - 2\alpha\beta)}{F(\xi)} e^{i\xi x_1} d\xi$$

$$+ e^{-ihx_1} \int_0^{\infty} \frac{2\zeta^2 - k^2 - 2\alpha'\beta'}{(2\zeta^2 - k^2)^2 - 4\zeta^2\alpha'\beta'} \zeta e^{-\eta x_1} id\eta$$

$$- e^{-ikx_1} \int_0^{\infty} \frac{2\zeta^2 - k^2 - 2\alpha''\beta''}{(2\zeta^2 - k^2)^2 - 4\zeta^2\alpha''\beta''} \zeta e^{-\eta x_1} id\eta$$

$$\int_{(3)} \Phi(\zeta)d\zeta = \int_{-k}^{\infty} \frac{\xi(2\xi^2 - k^2 - 2\alpha\beta)}{F(\xi)} e^{i\xi x_1} d\xi$$

$$- e^{-ihx_1} \int_0^{\infty} \frac{2\zeta^2 - k^2 - 2\alpha'\beta'}{(2\zeta^2 - k^2)^2 - 4\zeta^2\alpha'\beta'} \zeta e^{-\eta x_1} id\xi$$

引入符号H、N，且

$$H = -\frac{\mathscr{L}(2\mathscr{L}^2 - k^2 - 2\alpha_1\beta_1)}{F'(\mathscr{L})}$$

$$N = -\frac{k^2\alpha_1}{F'(\mathscr{L})}$$

最后可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(2\xi^2 - k^2 - 2\alpha\beta)}{F(\xi)} e^{i\xi x_1} d\xi = -2\pi i H e^{-i\mathscr{L}x_1}$$

$$+ 4ie^{-ikx_1} \int_0^{\infty} \frac{k^2(2\zeta^2 - k^2)\alpha''\beta''\zeta e^{-\eta x_1}}{(2\zeta^2 - k^2) + 16\zeta^4(\zeta^2 - h^2)(k^2 - \zeta^2)} d\eta$$

$$+4ie^{-il\mathscr{L}x_1}\int_c^{\infty}\frac{k^2(2\zeta^2-k^2)\alpha'\beta'\zeta e^{-\eta x_1}\,d\eta}{(2\zeta^2-k^2)^4+16\zeta^4(\zeta^2-h^2)(k^2-\zeta^2)}$$

同样可得（9.22）式中的另一积分

$$\int_{-\infty}\frac{k^2\alpha e^{i\xi x_1}}{F(\xi)}d\xi=2\pi ike^{-i\mathscr{L}x_1}$$

$$+8ie^{-ikx_1}\int_0^{\infty}\frac{k^2(2\zeta^2-k^2)\alpha''\beta''\zeta e^{-\eta x_1}\,d\eta}{(2\zeta^2-k^2)+16\zeta^2(\zeta-h^2)(k^2-\zeta^2)}$$

$$+2ie^{-ihx_1}\int_0^{\infty}\frac{k^2(2\zeta^2-k^2)\alpha'\beta'\zeta e^{-\eta x_1}\,d\eta}{(2\zeta^2-k^2)^4+16\zeta^4(\zeta^2-h^2)(k^2-\zeta^2)}$$

上面这些转换后的积分可以简单地计算出来，特别是当 x_1 很大和 η 很小时，其最终结果为

$$-2\pi iHe^{-i\mathscr{L}x_1}+2\sqrt{2\pi}\left(1-\frac{h^2}{k^2}\right)^{1/2}\frac{ie^{-i\left(kx_1+\frac{\pi}{4}\right)}}{(kx_1)^{3/2}}$$

$$+2\sqrt{2\pi}\,\frac{h^3k^2\sqrt{k^2-h^2}\;e^{-i\left(hx_1+\frac{\pi}{4}\right)}}{(k^2-2h^2)^3(hx_1)^{3/2}}$$

以及

$$2\pi iNe^{-i\mathscr{L}x_1}-4\sqrt{2\pi}\left(1-\frac{h^2}{k^2}\right)^{1/2}\frac{ie^{-i\left(kx_1+\frac{\pi}{4}\right)}}{(kx_1)^{3/2}}$$

$$-\sqrt{2\pi}\,\frac{h^2k^2}{(k^2-2h^2)^2}\,\frac{ie^{-i\left(hx_1+\frac{\pi}{4}\right)}}{(hx_1)^{3/2}}$$

至此，（9.11）式的积分已经完成。引入时间因子 $\exp(i\omega t)$，则（9.11）式变为

$$u_{1,0}=-\frac{Q}{\mu}He^{i(\omega t-\mathscr{L}x_1)} \qquad (\text{I})$$

$$+\frac{Q}{\mu}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\left(1-\frac{h^2}{k^2}\right)^{1/2}\frac{e^{i\left(\omega t-kx_1-\frac{\pi}{4}\right)}}{(kx_1)^{3/2}} \qquad (\text{II})$$

$$-\frac{Q}{\mu}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\frac{h^2k^2\sqrt{k^2-h^2}}{(k^2-2h^2)^2}\frac{ie^{i(\omega t-kx_1-\frac{\pi}{4})}}{(hx_1)^{3/2}} \quad (\text{Ⅲ})$$

(9.25)

$$u_{2,0}=-\frac{iQ}{\mu}Ne^{i(\omega t-\mathscr{L}x_1)} \quad (\text{Ⅰ})$$

$$+\frac{2Q}{\mu}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\left(1-\frac{h^2}{k^2}\right)\frac{ie^{i(\omega t-kx_1-\frac{\pi}{4})}}{(kx_1)^{3/2}} \quad (\text{Ⅱ})$$

$$+\frac{Q}{2\mu}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\frac{h^2k^2}{(k^2-2h^2)^2}\frac{ie^{i(\omega t-kx_1+\frac{\pi}{4})}}{(hx_1)^{3/2}} \quad (\text{Ⅲ})$$

(9.26)

下面讨论（9.25）式及（10.26）式的解答。

解答中第（Ⅰ）项由极点推导出来，（Ⅱ）和（Ⅲ）项由支线积分得到。在求解过程中作了些近似处理。

其中的一项表示瑞利波。略去$(\omega t-\mathscr{L}x_1)$，组合$u_{1,0}$和$u_{2,0}$两部分，则有椭圆轨迹方程

$$\frac{u_{1,0}^2}{\left(\frac{QH}{\mu}\right)^2}+\frac{u_{2,0}^2}{\left(\frac{Qk}{\mu}\right)^2}=1$$

第（Ⅱ），（Ⅲ）项的振幅在传播过程中以$1/x_1^{1/2}$衰减，而（Ⅰ）项振幅与x_1无关，这意味着当震源距离很大时，运动基本上是由瑞利波组成。与无限介质中位移的$1/x^{1/2}$衰减相比，在有自由表面时衰减的更快。

在上述中假定是周期性震源，作用时间无始无终。因此，所考虑的三种波（分别相当于解答中的（Ⅰ）、（Ⅱ）、（Ⅲ）），虽然传播速度不同，但却同时存在。位移$u_{1,0}$和$u_{2,0}$是这三部分贡献的和，且在每点x_1处这三种波同时存在。

当$\lambda\approx\mu$时，三种波相应的地表的垂直位移和水平位移之比分

别约为1.47、1.63、0.35。

习题与参考答案九

1．举例说明兰姆问题以及求解兰姆问题的一般步骤。

2．作用于半无限弹性固体表面的切向力可写作

$$\left.\begin{aligned}[P_{21}]x_2 = 0 &= x_1 e^{i\xi x}\\ [P_{22}]x_2 = 0 &= 0\end{aligned}\right\}$$

试导出表面位移的表达式。

（答案：

$$u_{10} = -\frac{P}{2\pi\mu}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k^2\beta e^{i\xi x_1}d\xi}{F(\xi)},$$

$$u_{20} = \frac{iP}{2\pi\mu}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi\,(2\xi^2 - k^2 - 2\alpha\beta)\,e^{i\xi x}\,d\xi}{F(\xi)}\ )$$

3．简述兰姆问题为位移积分解的计算方法。

4．在M.巴特著《地震学的数学问题》第八章第四节中介绍了卡格尼阿（Cagniard）问题与解决的方法。试与兰姆问题进行比较。

第十章　线性滞弹体与滞弹波

在前面几章里，我们比较详细地阐述了弹性体及弹性波等基础知识。本章介绍有关粘滞性弹性体（简称滞弹体或粘弹体）与粘滞性媒质内弹性波的传播等方面知识。

滞弹体与弹性体相比，一个重要的区别在于应力与应变关系（或曰本构关系）不是简单的瞬时关系，而与应变的历史有关。对于小应变而言，滞弹体的本构关系仍呈线性，我们称这类滞弹体为线性滞弹体。本章只限于研究线性滞弹体。

滞弹体中传播的机械波动称为滞弹波。滞弹波与弹性波相比有许多新特点，例如有能量损耗，偏振性也复杂得多。

滞弹体比弹性体更接近实际物体。地球可视为滞弹体。研究滞弹波可以进一步了解物体的成分和密度情况，例如可以更多地较为准确地获取地球内部的物理状态的信息。

§10—1　滞弹体及其性质

当应力超过弹性极限后取消外力，物体不能恢复原状而留有剩余形变，这种形变称为永久性形变。如图 10—1 所示，若应力逐渐减少，应变并不沿开始的曲线减少到零，而是沿另一条曲线 BD 减少到有限值（图 10—1 中 OD 段）。固体具有永久形变的性质叫做范性，工程上常称为塑性，故永久形变也称为范性形变或塑性变形。

固体除了在大应力时具有范性形变外，在小应力长时间作用下也会发生范性形变。这种应力处于弹性极限内的范性形变称

为蠕变。在应力不变的条件下，固体内部的应力会随着时间的增加而自动降低，这称为应力弛豫（或曰松弛）。

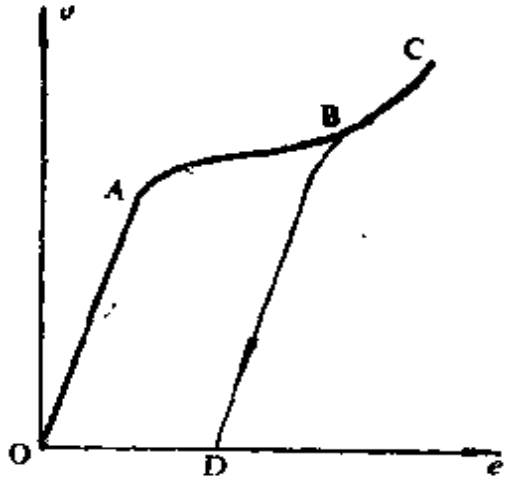


图 10—1

由于存在应力弛豫，实验表明形变体在相当长的时间后取消负载仍能维持形变。这点与流体性质很相似。因为流体在无外力时仍能维持永久形变。为说明得更详细一些，我们先来研究粘滞性流体的特性。

设在一很宽的槽内盛有流体，沿表面施一切向力 P。在此力作用下，流体沿 x_1 方向产生层流（图 10—2）。对于粘滞性流体，它有反抗流体流动的趋势，因而上、下流体速度各不相同。如果流体沿 x_1 方向流动，并设速度的大小只是坐标 x_2 的函数，即

$$v_1 = v(x_2) \quad v_2 = 0 \quad v_3 = 0$$

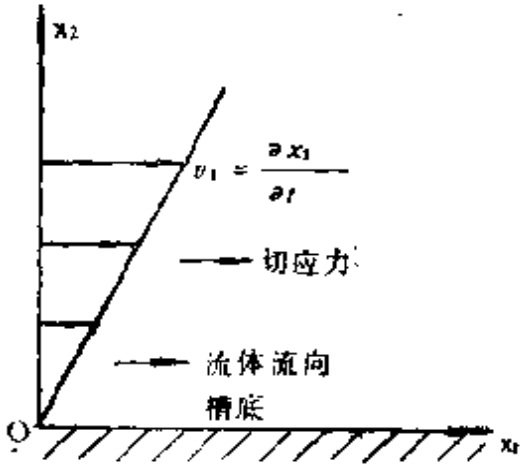


图 10—2

再假定愈靠近槽底壁（图 10—2 中 x_1x_3 平面）的那层流速愈小，离槽壁愈远的那层流速就愈大。在 $x_2 = c$（常数）的平面上，上面一层的流体在下面一层流体上沿 x_1 方向滑动，并且有一个力作用在流动较慢的下层流体上。这个力的方向和运动方向相同，企图迫使下层流体加快速度，和上层流体一同运动。同理，流动得比较慢的下层流体也有一个力作用在运动得比较快的上层流体上。这力和运动方向相反，企图迫使上层流体减低速度，和下层流体一同运动。

我们通常把当两层流体相互滑动时，作用在两层流体之间的力称为粘滞力，或内摩擦力。它实际上是剪应力的一个分量。因

为该力沿着所考虑的面 c 的切线方向。

实验发现，如果流体流动的情况如图 10—2 所示，那么粘滞力（即剪应力）σ_{21} 与剪速度（即速度梯度）$\partial v_1/\partial x_2$ 成比例，即

$$\sigma_{21}=\eta\frac{\partial v_1}{\partial x_2} \tag{10.1}$$

式中 η 称为粘滞系数。（10.1）式通常称为牛顿定律。速度 $v_1=dx_1/dt$，它只是 x_2 的函数。（10.1）还可以变为

$$\sigma_{21}=\eta\frac{d}{dx_2}\left(\frac{dx_1}{dt}\right)=\eta\frac{d}{dt}\left(\frac{dx_1}{dx_2}\right)=\eta\frac{de}{dt}=\eta D$$

式中 e 表示切应变，$D=de/dt$ 表示切应变对时间变化率，即单位时间内切应变的改变量。如果粘滞系数是恒定常数，则遵从（10.1）式的流体称为牛顿流体。牛顿流体只是对实际流体的近似描述。

粘滞系数 η 表示流体反抗流动的阻力大小，即等于单位应变力时的切应力。量纲是 $ML^{-1}T^{-1}$，在国际单位制中其单位是千克/米·秒，即帕斯卡·秒$^{-1}$。粘滞系数与流体的温度有关，随温度的升高，液体的粘滞系数减小，气体的粘滞系数增大。

对于牛顿流体，当应力维持恒定时，应变率也应为常量。这说明应变与时间成线性关系。固体的行为与牛顿流体行为相似，这表示在长时间的力的作用下，固体具有粘滞性流体的类似性质。我们把既有弹性又有粘滞性的固体称之为滞弹体或粘弹体。实际的固体接近滞弹体。

§10—2 简单线性滞弹体

我们主要研究滞弹体的宏观性质，至于其微观结构及作用机制可以不予考虑。这样可以用简单、直观、现成的力学元件去模拟固体的弹性及粘滞性。用一个弹簧表示固体的弹性，用牛顿流体做成的阻尼器表示粘滞性。阻尼器又叫做吸收器，是由圆筒与

活塞组成，筒内装满牛顿流体，活塞运动时受到流体的阻力。图10-3（a）和（b）分别表示弹簧和阻尼器。这两种元件以串联、并联及混联等各种方式组成各种不同类型的力学体系，用以模拟各种不同类型滞弹体的弹性和粘滞性。我们将这种力学体系称为描写滞弹体的“力学模式”。此后我们将按力学模式考虑滞弹体的本构关系（即应力－应变关系）。



(a) (b)

图 10—3

弹簧的应力－应变关系遵从虎胡定律，即

$$\sigma_1 = Ee_1 \tag{10.2}$$

其中σ_1表示应力，e_1表示弹性应变，E为弹性模量。

用阻尼器表示粘滞性时，它的应力－应变关系由牛顿流体来决定，即

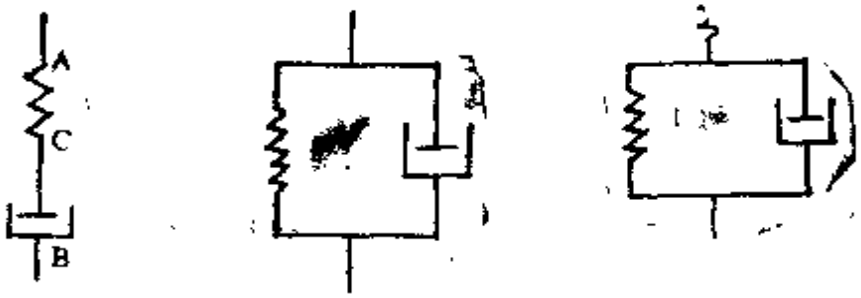
$$\sigma_2 = \eta\dot{e}_2, \tag{10.3}$$

其中σ_2表示存在粘滞作用时的应力，即属于剪应力。η为粘滞系数，$\dot{e}_2$表示粘滞（剪切）应变对时间变化率。

用力学模式表示滞弹体，弹簧和阻尼器构成的网络应遵从下述原则：如果两个元件串联，每个元件上的应力相同并等于总应力，即有$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$。总应变则是两个元件应变之和，即$e = e_1 + e_2$。如果两个元件并联，则两个元件的总应变相同，并等于系统的总应变，即$e = e_1 = e_2$。系统的总应力等于各元件上应力之和，即$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$。

一个弹簧和一个阻尼器串联而成的网络表示麦克斯韦（Maxwell）体〔图10—4（a）〕；一个弹簧和一个阻尼器并联表示伏各特（Voigt）体〔图10—4（b）〕；一个弹簧与伏各特体串联称为标准线性体〔图10—4（c）〕。

下面让我们以细长棒的简单拉伸实验来建立麦克斯韦体的本构关系。设长为l的细长棒受拉力F，相当于图10—4（a）系统上受一拉力F。发生的形变设为x，同时发生的弹性形变以弹簧的伸长x_{AD}表示，非弹性形变以阻尼器活塞的位移x_{CB}表示。



(a) (b) (c)

图 10—4

于是总形变为

$$x = x_{AC} + x_{CB}$$

将上式两端同除以 l 得

$$e = e_1 + e_2$$

其中 e 表示细长棒的总应变，e_1、e_2 分别表示弹性与非弹性应变。将上式对时间 t 求微商得

$$\dot{e} = \dot{e}_1 + \dot{e}_2$$

将(10.2)式对时间 t 求微商后连同(10.3)式一起代入上式可得

$$\dot{e} = \frac{1}{E}\dot{\sigma} + \frac{1}{\eta}\sigma \qquad (10.4)$$

若σ为切应力，则$E = \mu$，e为切应变。

当麦克斯韦体受一突然形变，以后保持恒定的形变，则(10.4)式变为

$$\dot{\sigma} + \frac{E}{\eta}\sigma = 0$$

上式的解为

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (10.5)$$

其中 σ_0 是由虎克定律确定的应力最大值，$\tau = \eta/E$ 是应力弛豫时间。(10.5)式表明在常应变时，应力随时间按指数减少。

同理，重复类似上边的方法可以得到伏各特体的本构关系为

$$\sigma = Ee + \eta\dot{e} \qquad (10.6)$$

当一恒定的应力脉冲加在伏各特体上时，则上式的解为

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \tag{10.7}$$

当应力突然撤除时，应变为

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{10.8}$$

对于标准线性体类似地可有

$$(E_1 + E_2)\sigma + \eta\dot{\sigma} = E_1 E_2 \varepsilon + E_1 \eta \dot{\varepsilon} \tag{10.9}$$

上式也可写成

$$p_0\sigma + p_1\dot{\sigma} = q_0\varepsilon + q_1\dot{\varepsilon} \tag{10.10a}$$

其中

$$p_0 = E_1 + E_2 \qquad p_1 = \eta$$

$$q_0 = E_1 E_2 \qquad q_1 = \eta E_1$$

令

$$\tau_1 = \frac{p_1}{p_0} \qquad \tau_2 = \frac{q_1}{q_0} \qquad M = \frac{q_0}{p_0}$$

其中 τ_1 是常应变时的应力弛豫时间，τ_2 是常应力时应变的弛豫时间，M 是系统完全松弛后应力与应变之比。（10.10）式可以写做

$$\sigma + \tau_1\dot{\sigma} = M(\varepsilon + \tau_2\dot{\varepsilon}) \tag{10.10b}$$

设在 $t = 0$ 时，一个恒定应力 σ_0 突然加在标准线性体上，则上式之解为

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{M} + (\varepsilon_0 - \frac{\sigma_0}{M})e^{-\frac{t}{\tau_2}} \tag{10.11}$$

此式表明，当 $t = 0$ 时，即刚刚加上应力时，应变有一瞬时上升值，以后逐渐上升到 σ_0/M；当应力去掉后，应变突然降到 ε_0，以后逐渐减少到零。（10.11）式所描述的情形与实际固体的行为很接近，这也就是我们称这种滞弹体为标准线性体的理由。

当 $t = 0$ 时，标准线性体发生一常应变，则（10.10b）式的解可以写做

$$\sigma = M\varepsilon_0 + (\sigma_0 - M\varepsilon_0)e^{-\frac{t}{\tau_1}}$$

滞弹体在载荷为单位阶跃函数

$$H(t)=\begin{cases}1 & t\geqslant 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

的作用下的应变$e(t)$称为蠕变函数。产生单位阶跃函数$H(t)$的形变所必须加在滞弹体上的载荷称为弛豫函数。

以上三种滞弹体统称为简单线性滞弹体。利用力学模式可以描述各种滞弹体，它们的本构关系可以表示成：

$$p(D)\sigma(t)=Q(D)e(t) \qquad (10.12)$$

其中

$$p(D)=p_0+p_1\frac{\partial}{\partial t}+p_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\cdots+p_n\frac{\partial^n}{\partial t^n}$$

$$Q(D)=q_0+q_1\frac{\partial}{\partial t}+q_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\cdots+q_n\frac{\partial^n}{\partial t^n}$$

$$D_1=\frac{\partial}{\partial t}\quad D_2=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\quad\cdots\quad D_n=\frac{\partial^n}{\partial t^n}$$

严格说来，粘滞系数并非标量而是张量，称为粘滞张量。在各向异性物体中它有81个分量，在各向同性物质中可减少到2个分量，与拉梅系数情况很相似。

§10—3 简单线性滞弹体中的波

我们知道，简单线性滞弹体包括麦克斯韦体、伏各特体和标准线性体。现在我们以伏各特体为例研究简单线性滞弹体之波动特性。

对于小形变，滞弹体的动量方程、本构方程、应变张量和旋转张量，在形式上仍如弹性体那样定义，可重新写做

$$\frac{\partial\sigma_{ji}}{\partial x_j}+\rho f_i=\rho\ddot{u}_i$$

$$e_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\omega_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\sigma_{ij}=\lambda e_{kk}\delta_{ij}+2\mu e_{ij}$$

对于伏各特体，应力张量应当包括弹性与粘滞性等两部分应力张量。理论推导及实验表明，只要将 $\lambda+\lambda'\partial/\partial t$，$\mu+\mu'\partial/\partial t$ 分别代替上述方程的λ与μ即可得伏各特体的本构方程

$$\sigma_{ij}=(\lambda+\lambda'\frac{\partial}{\partial t})e_{kk}\delta_{ij}+2(\mu+\mu'\frac{\partial}{\partial t})e_{ij} \qquad (10.13)$$

式中λ'与μ'是描写滞弹体性质的两个参量，其地位与作用分别相当于描写弹性体时的 λ 与 μ。

若只考虑波的传播特性，可令体力为零。将（10.13）式代入上述动量方程中可得伏各特体运动方程为

$$\rho\ddot{u}=(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i\partial x_j}+(\lambda'+\mu')\frac{\partial^2 \dot{u}_j}{\partial x_i\partial x_j}$$

$$+\mu\nabla^2 u_i+\mu'\nabla^2\dot{u}_i \qquad (10.14)$$

对于纵波，由（10.14）式可得

$$(\lambda+\lambda'\frac{\partial}{\partial t})\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i\partial x_j}+2(\mu+\mu'\frac{\partial}{\partial t})\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i\partial x_j}=\rho\ddot{u}_i \qquad (10.15)$$

对于横波 $e_{ii}=0$，由（10.14）式可得

$$(\mu+\mu'\frac{\partial}{\partial t})\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_j}=\rho\ddot{u}_i \qquad (10.16)$$

由（10.15）、（10.16）式可以看出，在滞弹性媒质中纵波与横波也可以分开独立地传播。但是，它们所满足的方程都出现了含有对时间 t 的一阶偏导数的项。为了研究这些附加项的影响，我们以沿x_1方向传播的简谐横波为例加以讨论。

波场内质点位移在x_2x_3平面内，满足方程

$$\mu\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}+\mu'\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}\right)=\rho\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}$$

$$\mu\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}+\mu'\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}\right)=\rho\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}$$

可见两式具有相同形式，必具有相同形式的解。如令其解为

$$u=Be^{i(kx_1-\omega t)} \tag{10.17}$$

将（10.17）式代入上述方程中可得

$$\mu k^2-i\mu'\omega k^2=\rho\omega^2$$

欲使上式成立，k必为复数。设

$$k=k'+ik'' \tag{10.18}$$

并代入上式，使其实部、虚部各自相等，于是可得

$$\mu(k'^2-k''^2)+2\mu'\omega k'k''=\rho\omega^2$$

$$2\mu k'k''=\mu'\omega(k'^2-k''^2)$$

解此方程组得

$$k'^2=-\frac{\mu\rho\omega^2}{2(\mu^2+\mu'^2\omega^2)}\left\{\left[1+\left(\frac{\mu'\omega}{\mu}\right)^2\right]^{1/2}+1\right\}$$

$$k''^2=-\frac{\mu\rho\omega^2}{2(\mu^2+\mu'^2\omega^2)}\left\{\left[1+\left(\frac{\mu'\omega}{\mu}\right)^2\right]^{1/2}-1\right\} \tag{10.19}$$

将（10.18）式代入（10.17）式可得

$$u=Be^{-k''x_1}e^{i(k'x_1-\omega t)}$$

其中B为无衰减时波的振幅，即弹性波的振幅。可见弹性波在粘滞性媒质内传播时，沿传播方向振幅随x_1增大呈指数方式衰减。$k'=\omega/v$，为沿x_1方向的波数，亦称传播常数。k''为衰减系数，这里$k''>0$，使得波幅随x_1增加而减小。

从（10.19）式可知，k'与k''都与ω有关。这表明波的相速度与衰减系数随波的频率而变化，即存在频散效应。当$\mu'\ll\mu$，且ω较小时，近似可得

$$k''=\frac{\rho^{1/2}\mu'\omega^2}{2\mu^{3/2}}\qquad v=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{10.20}$$

可见，此时衰减系数k''与频率ω的平方成正比，波速与弹性波的相速度一致。若当频率ω较大且$\mu'\omega \gg \mu$，近似可得

$$k'' = \left(\frac{\rho\omega}{2\mu'}\right)^{1/2} \qquad v = \left(\frac{2\mu\omega}{\rho}\right)^{1/2}$$

这时，衰减系数、波速都和频率的平方根成正比。

如果把地球看做伏各特体，由上面的讨论可知：远离震源处接收到的地震波中，低频成分比高频成分丰富。这样，在远离震源处接收的波谱与震源实际的波谱是不同的。大地就相当于一个滤波器，滤去了高频成分而保留了低频成分。这种作用叫做“大地滤波”。

对平面纵波可作类似地讨论。设有一平面纵波沿x_1方向传播，位移为

$$u = Ae^{i(kx_1 - \omega t)}$$

将上式代入（10.15）式可得类似横波的情况。当低频时，近似得到纵波的相速度和衰减系数为

$$v = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\right)^{1/2} \qquad k'' = \frac{\omega^2(\lambda' + 2\mu')}{2\rho v^3}$$

上式表明滞弹体的纵波速与弹性体的相同，由弹性系数决定。衰减系数k''与频率平方成正比。

下面我们介绍一下讨论滞弹体经常用到的一个参数——品质因数Q。

从滞弹体的力学模式上看，弹性元件可以储存一部分势能，滞性元件必损耗一部分能量。当一简谐波沿x_1方向通过滞弹体时，设一个周期内耗损能量为Δw，也就是在$x_1 = x_0$处及$x_1 = x_0 + \lambda$（λ为波长）处，一个周期内通过的能量之差。w为一个周期内通过垂直于x_1轴单位截面上的能量。定义

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{2\pi}\frac{\Delta w}{w} \qquad (10.21)$$

仿照电路品质因数的意义，称 Q 为品质因数。Q^{-1} 是媒质对能量损耗的量度，称为损耗因数。媒质的衰减系数 k'' 是与 Q^{-1} 成比例的，因此它也是媒质对能量损耗的度量。这一点，可以做如下简单地证明。

设一简谐波位移为 $u=A\exp[i(kx_1-\omega t)]$，其能量正比于 u^2，(10.21) 式可以写做

$$\frac{1}{Q}=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\int_0^T A^2e^{2i(kx_1-\omega t)}dt-\int_0^T A^2e^{2i[k(x_1+\lambda)-\omega t]}dt}{\int_0^T A^2e^{2i(kx-\omega t)}dt}$$

$$=\frac{1}{2\pi}(1-e^{2ik\lambda})$$

将 $k=k'+ik''$ 代入上式并注意 $k'\lambda=2\pi$，则上式可变为

$$\frac{1}{Q}=\frac{1}{2\pi}(1-e^{-2k''\lambda})$$

当 $\gamma\lambda\ll 1$ 时，即在一个波长范围内衰减足够小时

$$\frac{1}{Q}\approx\frac{k''\lambda}{\pi}=\frac{2k''}{k'}$$

其中 $k'=2\pi/\lambda$。由上式可见 Q^{-1} 与 k'' 成正比。

§10—4 线性滞弹体中的波

线性滞弹体的应力张量 σ_{ij} 与同一点的应变张量 e_{ij} 的历史有关。可表示为

$$\sigma_{ij}(t)=\int_{\tau=-\infty}^{t}T_{ijkl}\,e_{kl}(\tau) \qquad (10.22)$$

其中 T_{ijkl} 是一个函数，对各向异性滞弹体，它的各个分量是不同的。在线性理论中，(10.22) 式可表示为

$$\sigma_{ij}(t)=\int_{-\infty}^{t}c_{ijkl}(t-\tau)\dot{e}_{kl}\,d\tau \qquad (10.23)$$

其中c_{ijkl}是三维应力弛豫函数，是个四阶张量。当$\tau=-\infty$时，认为是固体尚未形变时的初始状态，对各向同性滞弹体(10.23)式可表示为

$$\sigma_{ji}(t)=\delta_{ji}\int_{-\infty}^{t}\lambda(t-\tau)\dot{e}_{kk}(\tau)d\tau + 2\int_{-\infty}^{t}\mu(t-\tau)\dot{e}_{ji}(t)d\tau \tag{10.24}$$

若把对角元素与非对角元素分开来表示，式（10.24）可表示为

$$\sigma'_{ji}(t)=\int_{-\infty}^{t}r_s(t-\tau)de'_{ji}(\tau)$$

$$\sigma_{ji}(t)=\int_{-\infty}^{t}r_f(t-\tau)de_{kk}(\tau)$$

其中r_s表示与切变有关的弛豫函数，r_f表示与胀缩形变有关的弛豫函数。上式中带撇的量表示非对角线元素。

对于波的传播问题，波源影响可以忽略。令体力$f_i=0$，滞弹体的动量方程为

$$\frac{\partial\sigma_{ji}}{\partial x_j}=\rho\ddot{u}_i \tag{10.25}$$

应变与位移关系为

$$e_{ji}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{10.26}$$

（10.24）式～（10.26）式即为均匀各向同性线性滞弹体的基本方程，利用它们就可以描述线性滞弹体的运动。

为了研究波的定态传播，须研究波方程的稳态解。我们认为波被激发后会传播很长时间，初始条件的影响甚微，可以略去不计。所有与时间相联系的物理量都随时间呈简谐规律变化。写成复数形式为

$$\begin{aligned}u_j&=U_je^{-i\omega t}\\ \sigma_{ji}&=P_{ji}e^{-i\omega t}\\ e_{ji}&=E_{ji}e^{-i\omega t}\end{aligned} \tag{10.27}$$

其中 U_j、P_{ji}、E_{ji} 都是空间坐标的复函数，其实部表示真实数值。对稳态运动的滞弹体，把（10.27）式代入（10.24）式～（10.26）式可以得到如下方程：

$$\frac{\partial P_{ji}}{\partial x_j}+\rho\omega^2 U_i=0$$

$$E_{ji}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) \tag{10.28}$$

$$P_{ji}=i\omega R_s E_{ji} \quad (i\neq j)$$

$$P_{kk}=i\omega R_f E_{kk}$$

其中 R_s、R_f 分别是弛豫函数 r_s、r_f 的傅里叶变换的负值。如果定义复的切变模量

$$M=\frac{i\omega}{2}R_s$$

复的体变模量

$$K=\frac{i\omega}{3}R_f$$

则滞弹体的本构关系为

$$P_{ji}=2ME_{ji}\ (i\neq j) \qquad P_{kk}=3KE_{kk}$$

或者写成

$$P_{ji}=\delta_{ji}\left(K-\frac{2}{3}M\right)E_{kk}+2ME_{ji}$$

把上式代入（10.28）式的第一式可得

$$\left(K+\frac{M}{3}\right)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u})+M\nabla^2\boldsymbol{u}=\rho\ddot{\boldsymbol{u}} \tag{10.29}$$

上式与弹性体的运动方程具有非常相似的形式。

象研究弹性波那样，对滞弹体中的平面波也可以引入位移矢量的标势ϕ和矢势ψ。位移矢量同样可以表示为

$$\boldsymbol{u}=\nabla\phi+\nabla\times\boldsymbol{\psi} \quad 且 \quad \nabla\cdot\boldsymbol{\psi}=0$$

将上式代入（10.29）式可以得到势函数 ϕ 与 ψ 满足的方程分别为

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{v_p^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \qquad \nabla^2\psi = \frac{1}{v_s^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{10.30}$$

其中v_p、v_s分别为纵波与横波的复速度，且

$$v_p = [(K + \frac{4}{3}M)/\rho]^{1/2}$$

$$v_s = (M/\rho)^{1/2}$$

设 $$\phi = \Phi e^{-i\omega t} \qquad \psi = \Psi e^{-i\omega t}$$

并代入（10.30）式可得复的亥姆霍兹方程

$$\begin{aligned} \nabla^2\Phi + k_p^2\Phi &= 0 \\ \nabla^2\Psi + k_s^2\Psi &= 0 \end{aligned} \tag{10.31}$$

其中k_p、k_s为复波数，且

$$k_p = \omega/v_p \qquad k_s = \omega/v_s$$

为方便讨论可将（10.31）式形式相同的两个方程以统一形式，即

$$\nabla^2\Psi + k^2\Psi = 0 \tag{10.32}$$

对于P波Ψ表示标势Φ，对于S波表示Ψ_i（$i=1$、2、3）。

若定义复波矢量为

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}' + i\mathbf{k}'' \tag{10.33}$$

其中$\mathbf{k}'$为传播矢量；$\mathbf{k}''$为衰减矢量，表示波的衰减程度且指向衰减最大方向。

由分离变量法可得（10.32）式的解为

$$\Psi = Ae^{-\mathbf{k}''\cdot\mathbf{r}}e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}}$$

考虑时间因子$\exp(-i\omega t)$，则（10.30）式的解为

$$\begin{aligned} \phi &= Ae^{-\mathbf{k}''\cdot\mathbf{r}}e^{i(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \\ \phi &= Be^{-\mathbf{k}''\cdot\mathbf{r}}e^{i(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \end{aligned} \tag{10.34}$$

由（10.33）式可知

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}k^2 &= \mathbf{k}'\cdot\mathbf{k}' - \mathbf{k}''\cdot\mathbf{k}'' = k'^2 - k''^2 \\ \mathrm{Im}k^2 &= 2\mathbf{k}''\cdot\mathbf{k}' = 2k'k''\cos\varphi \end{aligned} \tag{10.35}$$

由上式可以解出$\mathbf{k}'$、$\mathbf{k}''$。$\mathbf{k}'$垂直于$\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}=\mathrm{const}$所定义的等位相面；$\mathbf{k}''$垂直于$\mathbf{k}''\cdot\mathbf{r}$所定义的等振幅面。

按照能量守恒定律，波的振幅在波的传播方向上不能增长，更不能无穷大，这要求矢量k''与k'之间夹角满足$0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$。

对于平面波，若其等位相面与等振幅面平行，或者说$k'\parallel k''$则称之为均匀波，否则称为非均匀波。

对于无耗散的媒质（例如弹性体）与有耗散媒质（如滞弹体）都可以传播均匀波与非均匀波，但它们仍然有本质差别。对于无耗散媒质，若$\mathrm{Im}k^2=0$，从（10.35）式可知有两种可能：其一是$k''=0$，此时$k^2=k'^2$，即为无衰减的均匀波；其二是$\varphi=\pi/2$，波的最大衰减方向与其传播方向垂直，此即非均匀波。反之，若$k''=0$或$\varphi=\pi/2$，则媒质是非耗散的。那末，不难得出当$k''\neq 0$，$\varphi\neq\pi/2$，则媒质一定是耗散的结论。

上述结论表明，无耗散媒质中的非均匀波k'必须与k''垂直；耗散媒质中的非均匀波的k'与k''并不互相垂直。可见，线性滞弹体内的波与弹性体内的波性质是不同的。在耗散媒质中的非均匀波不能在无耗散媒质内传播；而无耗散媒质中的非均匀波，也不能在耗散媒质内传播。

对于（10.34）式表示的平面波，等相面的速度为

$$v=\omega k'/|k'|^2 \tag{10.36}$$

最大衰减值为$|k''|$。

当传播矢量k'与衰减矢量k''之夹角$\varphi\neq\pi/2$时，从（10.35）可解得

$$|k'|=\left\{\frac{1}{2}\left[\mathrm{Re}k^2+\sqrt{(\mathrm{Re}k^2)^2+\frac{(\mathrm{Im}k^2)^2}{\cos^2\varphi}}\right]\right\}^{1/2}$$

$$|k''|=\left\{\frac{1}{2}\left[-\mathrm{Re}k^2+\sqrt{(\mathrm{Re}k^2)^2+\frac{(\mathrm{Im}k^2)^2}{\cos^2\varphi}}\right]\right\}^{1/2}$$

上式表明，对给定的φ，传播矢量和衰减矢量的数值由媒质的参数唯一确定。

对于均匀波，由于$k'\parallel k''$，$\cos\varphi=1$，由（10.36）可知相速度

大小及衰减系数之值为

$$|v_H| = \omega/\mathrm{Re}k \qquad |k''| = \mathrm{Im}k$$

对于非均匀波，由于$\cos\varphi < 1$，故此时的$|k'|$及$|k''|$比均匀波的都大。

综上所述，可知在同一媒质中非均匀波的相速度小于均匀波的相速度，最大衰减则刚好相反，即

$$|v_{ih}| < |v_H| \qquad |k''_H| < |k''_{ih}|$$

对于均匀S波可有

$$|v_{HS}| = \mathrm{Re}\sqrt{\frac{M}{\rho}}, \qquad |k''_{HS}| = \mathrm{Im}\frac{\omega}{v_{HS}} \tag{10.37}$$

只有当$\mathrm{Re}(M/\rho)^{1/2}$是常数时，即$M$是实常数时，$S$波的波速才与频率$\omega$无关。对于弹性媒质$M=\mu$，有$v_s=(\mu/\rho)^{1/2}$。(10.37)式表明对完全弹性体，衰减为零；对于滞弹体，M为复数，衰减不为零，而且与频率有关。所以滞弹体内的平面S波既有频散也有耗散。

同样，对于均匀P波有

$$|v_{HP}| = \mathrm{Re}\left[\left(K+\frac{4}{3}M\right)/\rho\right]^{1/2}$$

$$|k''_{HP}| = \mathrm{Im}\frac{\omega}{v_{HP}}$$

上式表明，只有当K、M皆为实数时，开平方的结果为实数，对弹性体才不存在衰减。对于滞弹体因K与M均为复数，故表示滞弹体内均匀P波既有频散也有耗散。

§10—5 滞弹波的波型

本节介绍几种类型的滞弹波及质点运动轨迹的特点。

滞弹波也可分为P波和S波两大类型，也有均匀波与非均匀

波之区别。

对于P波，位移势函数为

$$\phi = Ae^{-\boldsymbol{k}''\cdot\boldsymbol{r}}e^{i(\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} \tag{10.38}$$

位移场为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u} &= \mathrm{Re}\nabla\phi = e^{-\boldsymbol{k}''\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{Re}(-\boldsymbol{k}''+i\boldsymbol{k}')Ae^{i(\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} \\
&= e^{-\boldsymbol{k}''\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{Re}i(\boldsymbol{k}'+i\boldsymbol{k}'')Ae^{i(\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} \\
&= e^{-\boldsymbol{k}''\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{Re}Ak\boldsymbol{i}e^{i(\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} \\
&= e^{-\boldsymbol{k}''\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{Re}iAk\frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\cdot\frac{|\boldsymbol{k}|}{|\boldsymbol{k}|}e^{i(\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} \\
&= e^{-\boldsymbol{k}''\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{Re}|Ak|\frac{k\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|^2}e^{i(\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}-\omega t+\frac{\pi}{2}+\arg|Ak|)} \\
&= C\mathrm{Re}k(\boldsymbol{k}'+i\boldsymbol{k}'')(\cos\zeta+i\sin\zeta)/|\boldsymbol{k}|^2 \\
&= C[(\mathrm{Re}k\boldsymbol{k}'+\mathrm{Im}k\boldsymbol{k}'')\cos\zeta+\mathrm{Im}k\boldsymbol{k}'-\mathrm{Re}k\boldsymbol{k}'')]/|\boldsymbol{k}|^2 \\
&= C[\boldsymbol{\xi}_1\cos\zeta(t)+\boldsymbol{\xi}_2\sin\zeta(t)]
\end{aligned} \tag{10.39}$$

其中

$$C = |Ak|e^{-\boldsymbol{k}''\cdot\boldsymbol{r}}$$

$$\boldsymbol{\xi}_1 = (\mathrm{Re}k\boldsymbol{k}'+\mathrm{Im}k\boldsymbol{k}'')/|\boldsymbol{k}|^2$$

$$\boldsymbol{\xi}_2 = (\mathrm{Im}k\boldsymbol{k}'-\mathrm{Re}k\boldsymbol{k}'')/|\boldsymbol{k}|^2$$

$$\zeta(t) = \boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}-\omega t+\frac{\pi}{2}+\arg|Ak|$$

式（10.35）表示有下列关系

$$\boldsymbol{\xi}_1\cdot\boldsymbol{\xi}_2 = 0 \qquad \boldsymbol{\xi}_1\cdot\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2\cdot\boldsymbol{\xi}_2 = 1 \tag{10.40}$$

引入变换

$$\tilde{\boldsymbol{u}}_1 = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\xi}_1/c|\boldsymbol{\xi}_1| \qquad \tilde{\boldsymbol{u}}_2 = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\xi}_2/c|\boldsymbol{\xi}_2| \tag{10.41}$$

由（10.39）式和（10.40）式可得

$$\cos\zeta(t) = \tilde{\boldsymbol{u}}_1/|\boldsymbol{\xi}_1| \quad \sin\zeta(t) = \tilde{\boldsymbol{u}}_2/|\boldsymbol{\xi}_2|$$

把上式平方后相加可得

$$\frac{\tilde{\boldsymbol{u}}^2}{|\boldsymbol{\xi}_1|^2}+\frac{\tilde{\boldsymbol{u}}_2^2}{|\boldsymbol{\xi}_2|^2} = 1$$

上式为一椭圆方程。半长轴为$|\xi_1|$，半短轴为$|\xi_2|$，偏心率为

$(1-|\xi_2|^2/|\xi_1|^2)^{1/2}$。

可见对于P波，粒子在$k'\cdot k''$平面内作椭圆运动，如图10—5所示。旋转方向由k'向k''。椭圆长轴与传播方向之夹角由下式确定：

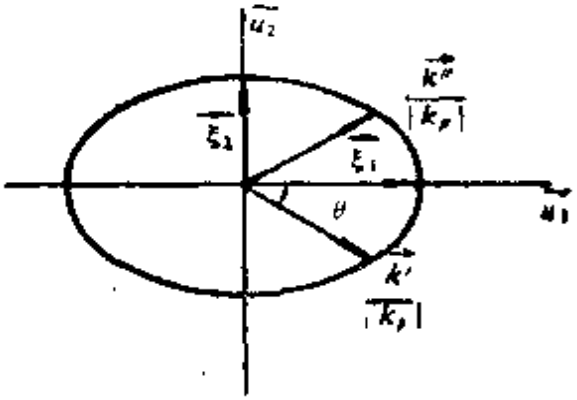


图 10—5

$$\cos\theta=\frac{\xi_1\cdot k'}{|\xi_1||k'|}=\mathrm{Re}\frac{k'k}{|k'k|}\left[1+\frac{(\mathrm{Im}k'k)^2}{|k'|^2}\right]^{1/2}$$

对于均匀P波，粒子的椭圆运动退化为沿波的传播方向的直线运动。因为这时$|k'|=\mathrm{Re}k$，$|k''|=\mathrm{Im}k$，$|\xi_2|=0$，$\theta=0$。

对于S波，位移矢势函数为

$$\psi=Be^{-k''\cdot r}e^{i(k'\cdot r-\omega t)}$$

仿照对P波的分析可知，粒子的运动轨迹也成椭圆，如图10—6所示。旋转方向由k'向k''。上述这种非均匀波的复振幅矢量$\boldsymbol{B}=B_0\boldsymbol{n}$，其中$B_0$为一复数，$\boldsymbol{n}$是实数的单位矢量。这种波称之为$S$—$I$型波。若为均匀$S$波，粒子的椭圆运动退化为直线运动，它的方

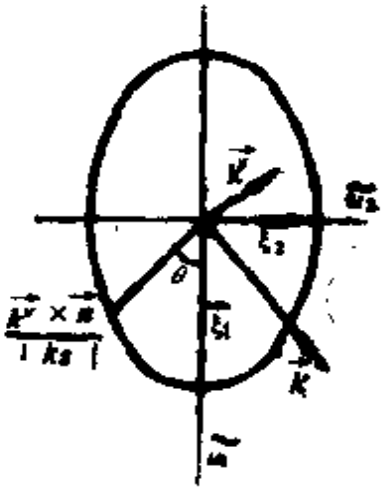


图 10—6

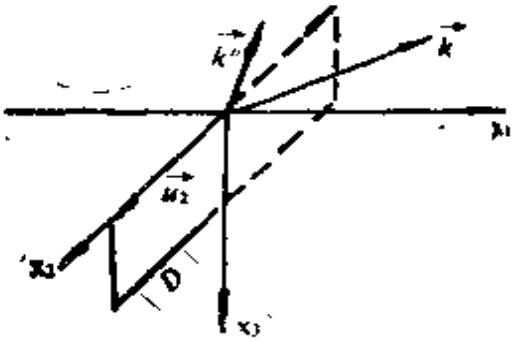


图 10—7

向与波的传播方向垂直。

S 波除上述 S—I 型波外，还有另外一种类型。它的复振幅矢量是一般的复矢量形式，即

$$\boldsymbol{B} = Z_1\boldsymbol{i}_1 + Z_2\boldsymbol{i}_2 + Z_3\boldsymbol{i}_3$$

其中 Z_1、Z_2、Z_3为任意复数。$\boldsymbol{B}$ 应当满足$\nabla\cdot\psi = 0$。这时粒子的运动并不一定是椭圆，也不一定限定在$\boldsymbol{k}''$和$\boldsymbol{k}'$所确定的平面内，特别是当 $Z_2 = 0$ 时，这种波的位移场为

$$\boldsymbol{u} = \mathrm{Re}(\nabla\times\psi)$$

$$= |\boldsymbol{C}|e^{-\boldsymbol{k}''\cdot\boldsymbol{r}}\cos\left(\boldsymbol{k}''\cdot\boldsymbol{r} - \omega t + \frac{\pi}{2} + \arg D\right)\boldsymbol{i}_2$$

其中 $$|\boldsymbol{C}| = |(Z_3\boldsymbol{i}_1 - Z_1\boldsymbol{i}_3)\cdot(\boldsymbol{k}' + i\boldsymbol{k}'')| \qquad D = |k_s B|$$

上式指出，对于这种非均匀S波，粒子并不在$\boldsymbol{k}'$和$\boldsymbol{k}'$的平面内做椭圆运动，而是垂直于$\boldsymbol{k}'$和$\boldsymbol{k}''$的平面方向上作线振动，图10—7表明了这种波场粒子的运动情况($\boldsymbol{k}'$、$\boldsymbol{k}''$在x_1x_3平面内，n沿x_2方向）。等位相面与传播矢量 $\boldsymbol{k}'$ 垂直，等振幅面与衰减矢量$\boldsymbol{k}''$垂直。我们把这种波称为 S—Ⅱ型波，用以区别 S—Ⅰ型波。当一个平面界面垂直于$\boldsymbol{k}''$和$\boldsymbol{k}'$确定的平面时，作为弹性媒质中定义的推广，S—Ⅱ波也称为SH波。对于均匀的S—Ⅰ型和S—Ⅱ型波$\boldsymbol{k}'$与$\boldsymbol{k}''$平行，粒子作直线运动并且都和波的传播方向垂直。

§10—6 S—II波的反射和折射

设有两种半无限大滞弹介质 1 和 2 紧密接触。坐标面 ox_1x_2 为介质分界面。$x_3>0$ 的空间为介质 1，$x_3<0$ 的空间为介质2。$\boldsymbol{i}_1$、$\boldsymbol{i}_2$、$\boldsymbol{i}_3$为x_1、x_2、x_3轴的单位矢量。

今有一 S—Ⅱ波从介质 1 入射到分界面上，它的传播矢量 $\boldsymbol{k}'$和衰减矢量$\boldsymbol{k}''$均在入射面(x_1x_3平面）内。由于位移只有 x_2方向分量，所以方程可以化为标量求解。

介质1中位移矢量为

$$u = u_1 + u_2 = \sum_{j=1}^{2} c_j e^{-k_j'' \cdot r} e^{i(k_j' \cdot r - \omega t)} i_2 \qquad (10.41)$$

其中u_1、u_2分别为入射与反射波引起的质点位移。

介质2中位移矢量为

$$\bar{u} = \bar{c} e^{-\bar{k}'' \cdot r} e^{i(\bar{k}' \cdot r - \omega t)} i_2 \qquad (10.42)$$

上边式中 $c_j (j=1, 2)$ 和 $\bar{c}$是位移复振幅。介质 1 中波的传播矢量和衰减矢量定义为

$$k_j' = k_R i_1 + (-1)^j \nu_{\beta R} i_3$$

$$k_j'' = -k_I i_1 + (-1)^{j+1} \nu_{\beta I} i_3$$

$$\nu_\beta = \pm (k_3^2 - k^2)^{1/2}$$

传播矢量k_j'与衰减矢量k_j''满足

$$k_j' \cdot k_j' - k_j'' \cdot k_j'' = \mathrm{Re}(k_3^2)$$

$$k_j' \cdot k_j'' = -\frac{1}{2}\mathrm{Im}(k_3^2)$$

在媒质2中则有

$$\bar{k}' = \bar{k}_R i_1 - \bar{\nu}_{\beta R} i_3$$

$$\bar{k}'' = -\bar{k}_I i_1 + \bar{\nu}_{\beta I} i_3$$

$$\bar{\nu}_\beta = \pm (\bar{k}_3^2 - \bar{k}^2)^{1/2}$$

且有

$$\bar{k}' \cdot \bar{k}' - \bar{k}'' \cdot \bar{k}'' = \mathrm{Re}(\bar{k}_3^2)$$

$$\bar{k}' \cdot \bar{k}'' = -\frac{1}{2}\mathrm{Im}(\bar{k}_3^2)$$

角标R、I分别表示各量取其实部和虚部。ν_β及$\bar{\nu}_\beta$的符号由边界上能流的方向确定。例如入射波能流为$-x_3$方向，反射波为x_3正方向，折射波为$-x_3$方向。

方程（10.41）、（10.42）式的位移可以是均匀波的也可以是非均匀波的。

由边界条件可知，在分界面上应力和位移应该连续，即

$$(c_1+c_2)e^{ikx_1}=\bar{c}e^{i\bar{k}x_1}$$

$$\mu\nu_\beta(c_1-c_2)e^{ikx_1}=\bar{c}\bar{\mu}\bar{\nu}_\beta e^{i\bar{k}x_1}$$

由上式可得

$$c_2=c_1(\mu\nu_\beta-\bar{\mu}\bar{\nu}_\beta)/(\bar{\mu}\bar{\nu}_\beta+\mu\nu_\beta)$$

$$\bar{c}=c_1(2\mu\nu_\beta)/(\bar{\mu}\bar{\nu}_\beta+\mu\nu_\beta)$$

由以上方程组可知，当入射 S—Ⅱ 波，反、折射波也只有 S—Ⅱ 波，并可直接得出振幅和位相关系、反射系数与折射系数。

为了认识 SH 波在平界面上的反射、折射特性可以利用图10—8所示的符号。其中 c_1、θ_1、φ_1、ω为入射波参量。θ_1 为入射角，φ_1 是传播方向与衰减方向之间夹角，且 $0\leqslant\varphi_1<\frac{\pi}{2}$。由方程（10.41）式可得

$$k=|k_j'|\sin\theta_j-i|k_j''|\sin(\theta_j-\varphi_j)$$

$$\bar{k}=|\bar{k}'|\sin\bar{\theta}-i|\bar{k}''|\sin(\bar{\theta}-\bar{\varphi})$$

由此得到

$$\mathrm{Re}k=|k_1'|\sin\theta_1=|k_2'|\sin\theta_2=|\bar{k}'|\sin\bar{\theta}=\mathrm{Re}\bar{k}$$

$$\begin{aligned}-\mathrm{Im}k&=|k''|\sin(\theta_1-\varphi_1)\\&=|k_2''|\sin(\theta_2-\varphi_2)\\&=|\bar{k}''|\sin(\bar{\theta}-\bar{\varphi})\\&=-\mathrm{Im}\bar{k}\end{aligned}$$

引入波的相速度可得

$$|v|/\sin\theta_1=|v|/\sin\theta_2=|\bar{v}|/\sin\bar{\theta}$$

上述方程表明，在分界面上，反射、折射波的视速度和衰减与入射波的相等。同时，从以

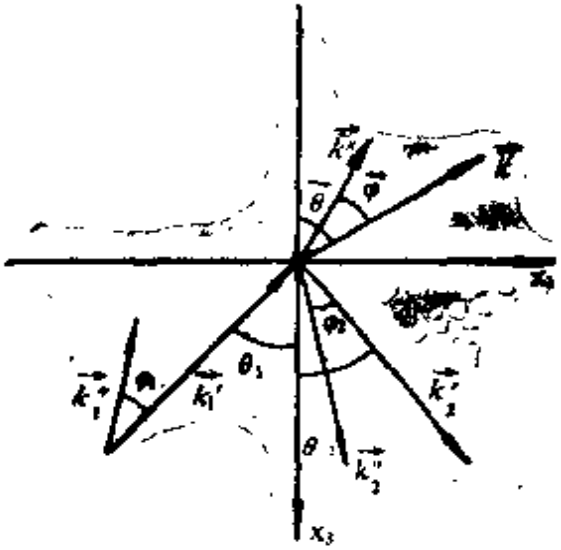


图 10—8

上诸式可知$|k_1'|=|k_2'|$，$|k_1''|=|k_2''|$，

$$\theta_1=\theta_2$$

$$\theta_1-\varphi_1=\theta_2-\varphi_2$$

即入射角等于反射角。因此当入射波为均匀波时，反射波也为均匀波；当入射波为非均匀波时，反射波也是非均匀波。

§10—7 实际介质中滞弹波的衰减

在波的衰减研究中，通常是借用实验室条件对高频、超高频波进行研究，得到许多有益的结论[6][7][8]。为了说明在实际介质中滞弹波的衰减，我们用一实例叙述。该实例是地震勘探工程中实测的结果，所考虑的频带是低频范围。

在地面以下的垂直方向上，每5 m布置一次三分量（x_1，x_2，x_3）观测，其深度自250m～2 455m，炸药震源位于地表附

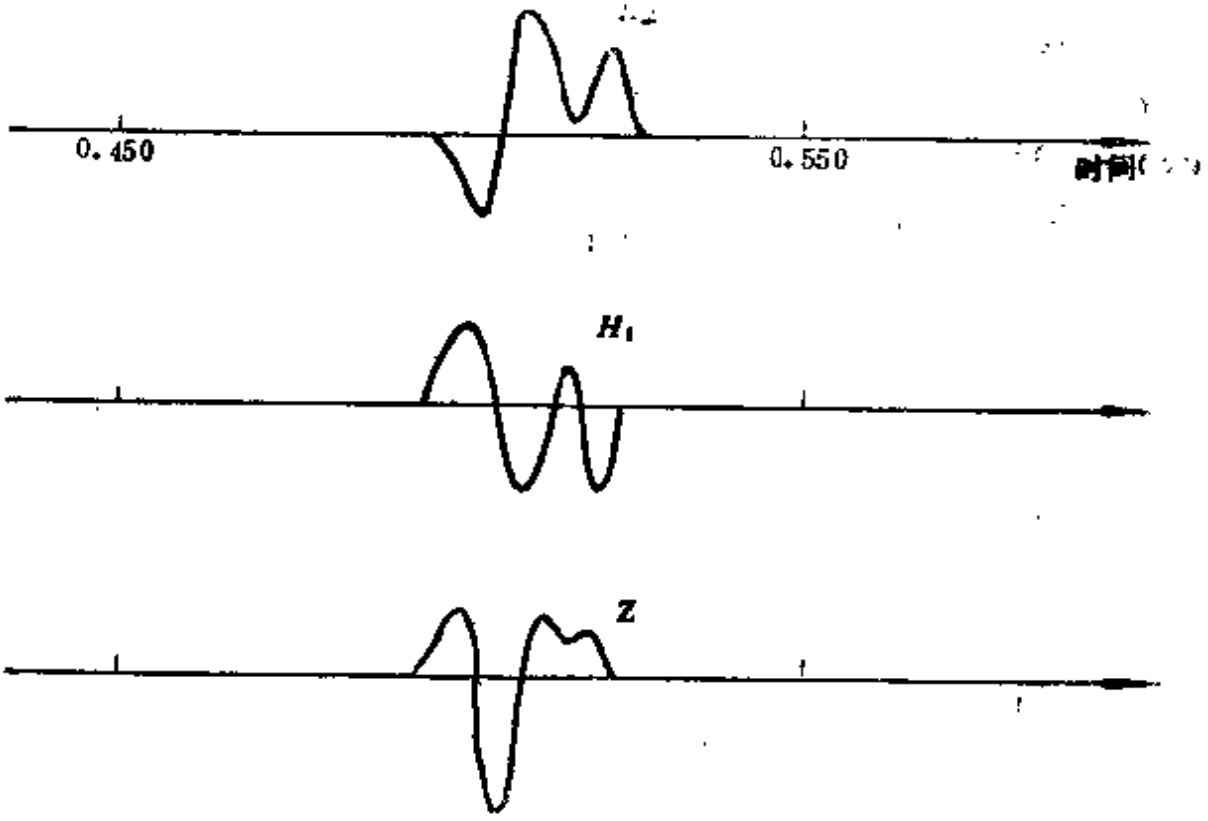


图 10—9

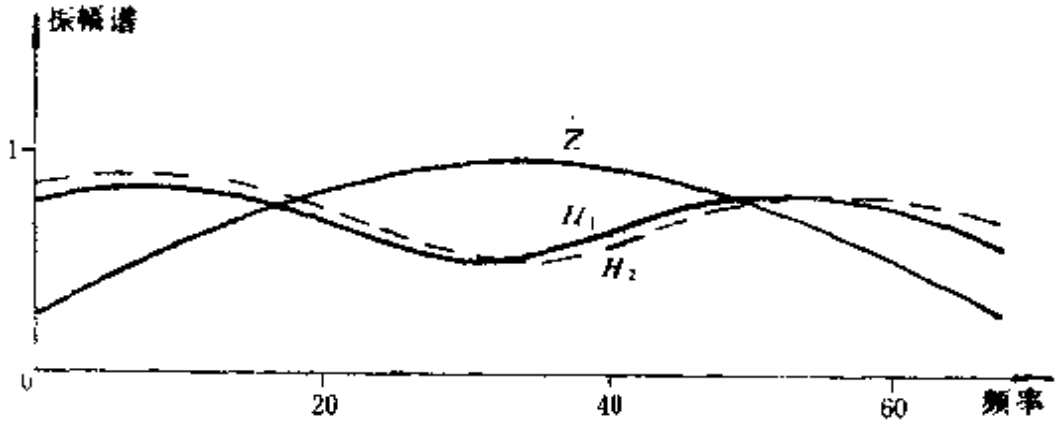


图 10—10

近。震源子波如图 10—9 所示，它们相应的傅里叶谱如图 10—10所示。由原始记录可以确定出四个强反射层，深度为 1960m、1 700m、1 260m 和 815m。把它们分别命名为 4、3、2、1 反射层，震源记为 0。这里我们只列出几组结果。包括 0、1 之间滞弹波的衰减，0、2，0、4，0、3 等组（如图 10—11）所使用的信息已经过真振幅恢复处理，可以较真实地反映相应反射层之间真实介质对滞弹波的影响。440m 距离内三个分量 x_1，x_2，x_3的衰减是有较大差异的，x_1、x_2分量即图10—12 中H_1、H_2分量分别在20Hz与37Hz处有一极大衰减，在其两侧逐渐减小。这表明在同一种介质中，胀缩波和剪切波所经受的衰减可以是不同的。波

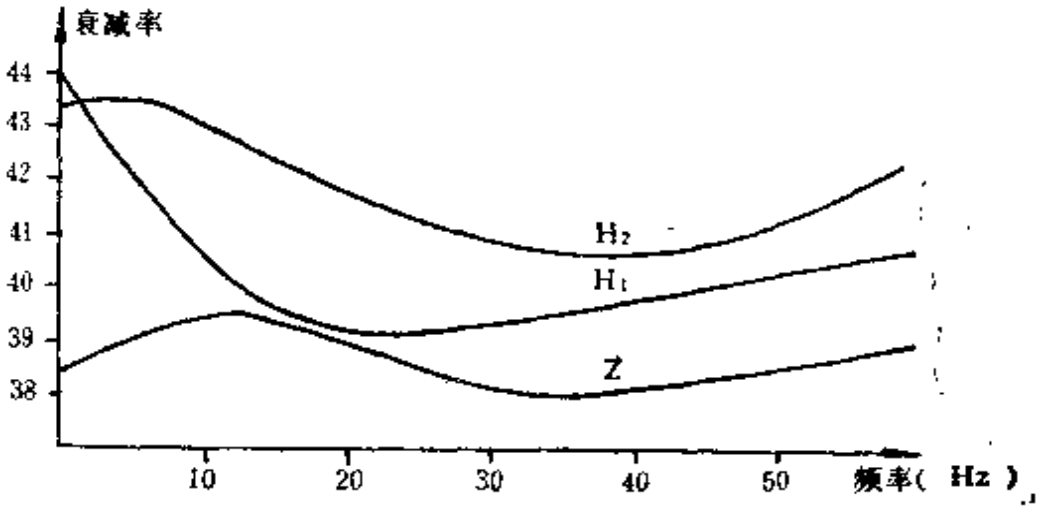


图 10—11

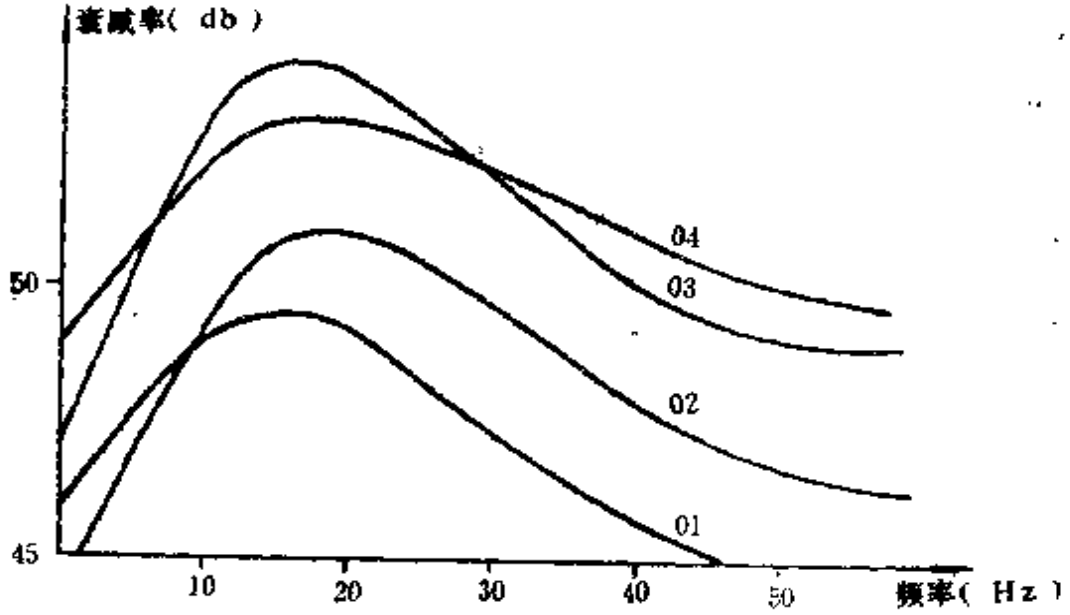


图 10—12

的衰减表现的机制还没有完整的理论，下面简要综述之〔8〕〔10〕。

可以假定各种衰减机制是相互独立的，因此可单独地研究每一种机制，然后结合每一种机制的作用，以便确定总的衰减。地震波在地下岩层中传播发生衰减的原因是很多的。基质滞弹性引起的衰减，饱和流体的滞弹性，压力与温度的影响，局部饱和的张弛效应，等等。地震波在岩石格架中的衰减可以认为是由两种因素产生的：一是基质矿物的固有滞弹性，二是由于在颗粒之间界面上和裂缝两个表面的相对运动而引起的摩擦损耗。矿物的固有滞弹性一般是小的。在各个晶体中，Q 值一般高于几千，而在整个岩石中，正常的 Q 值低于几百。因此，在研究基质衰减时，忽略矿物的固有衰减，仅考虑在颗粒表面间与窄裂隙表面间的衰减是合理的。岩层的颗粒界面和裂隙损耗的确切机制还不知道，但由于界面两边的相对运动而引起的摩擦损耗可能是主要因素。如果是这样，那么衰减应很大程度地决定于改变颗粒之间对摩擦有影响的表面条件。无论岩石是饱和的，还是干燥的，这些条件包括饱和流体的性质、基质中粘土的数量或者其他柔软成分。

在地壳上部的所有岩石部分地或全部地由某些液体所饱和。

因而在一个固体岩石格架中考虑粘滞液体效应是特别有意义的。这里的液体效应包括促进摩擦的裂缝润滑作用、带有界面切变的毕奥（Biot）型液体流动、孔隙裂缝的喷射流动、气泡运动和挤压等等。对于大部分被水饱和的沉积岩来说，在地震频带范围的（$f=10\text{Hz}\sim200\text{Hz}$）液体流动的效应是小的，而在超声频率范围，这种效应会变得重要。

对上面提到的实例，衰减表现基本是二次曲线，对x_3分量有极小值。岩层中的流体由于地温的增加，可以部分挥发生成气体弥散在孔隙中。这样岩层物质中有三种物态。地震波经过岩层，骨架引起振动，然后是孔隙中气态物质振动和液态物质振动。在一定条件下，气态分子组合与液态分子组合可以发生共振，其相应频率成分衰减相对地少，因而衰减曲线出现极小值。此外固体物质骨架是由无数晶体组成的，晶体格被的频谱分布很可能有极大值，从而该极大值对应的频率将受到较小的衰减。综合岩层中各种物质的效应，产生我们得到的实测衰减曲线。

§10—8 粘性可压缩流体中的波

我们现在考察粘性可压缩流体中的滞弹波[8]。流体的粘滞力影响其中的纵波特性，而且将导致粘性流体中出现横波。本节着重研究粘性可压缩流体中有耗损纵波及横波在某些分界面上的反射与透射规律。

参照第十章§10—4节与文献[8]可以得到

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=\left(\frac{K}{\rho}+\frac{\zeta+\frac{4}{3}\eta}{\rho}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=\frac{\eta}{\rho}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2}\right)$$

其中$u=\nabla\phi+\nabla\times\psi$，$\rho$为流体的密度，$K$为流体的不可压缩系数，

η、ζ分别为第一粘性系数和第二粘性系数。

用分离变量法求出它们的通解为

$$\phi = Ae^{\pm k\sigma x_3 - ikx_1 + i\omega t}$$

$$\phi = Be^{\pm k\tau x_3 - ikx_1 + i\omega t}$$

其中$k=\omega/v$，v为波沿x_1方向的相速度，A和B为常数，而

$$\sigma = g + if \qquad \tau = q + is$$

$$f = \sqrt{\frac{\sqrt{M^2+N^2}+M}{2}} \qquad g = \sqrt{\frac{\sqrt{M^2+N^2}-M}{2}}$$

$$M = \frac{v^2\alpha^2}{\alpha^4+\omega^2k''^2} - 1 \qquad N = \frac{v^2\omega k''}{\alpha^4+\omega^2k''^2}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{k}{\rho}} \qquad \gamma = \frac{(\zeta+4/3\eta)}{\rho}$$

$$s = \sqrt{\frac{\sqrt{1+v^4/\omega^2k''^2}-1}{2}} \qquad q = \sqrt{\frac{\sqrt{1+v^4/\omega^2k''^2}+1}{2}}$$

$$k'' = \eta/\rho$$

连续介质位移的水平分量及垂直分量为

$$u_1 = \frac{\partial\phi}{\partial x_1} - \frac{\partial\phi}{\partial x_3}$$

$$u_3 = \frac{\partial\phi}{\partial x_3} - \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \qquad (10.43)$$

弹性固体的应力分量为

$$\sigma_{13} = \mu\left(2\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_3} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2}\right) \qquad (10.44)$$

$$\sigma_{33} = \lambda\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} + (\lambda+2\mu)\frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2} + 2\mu\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_3}$$

粘性流体应力分量为

$$\sigma_{13}=\eta\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)=i\omega\eta\left(2\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_3}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2}\right)$$

$$\sigma_{33}=k\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)+\zeta\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)=\xi\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2}\right)\tag{10.45}$$

其中 $\xi=k+i\omega\zeta$

利用上述的连续条件可以研究粘性流体之间的界面上的反射和透射问题。

设两个半无限可压缩流体之间的界面为平面，参见图 10—13，用下标 1、2 区分两种流体。因为波在分界上具有相同的相速度 v，于是两种流体中的波可表示为

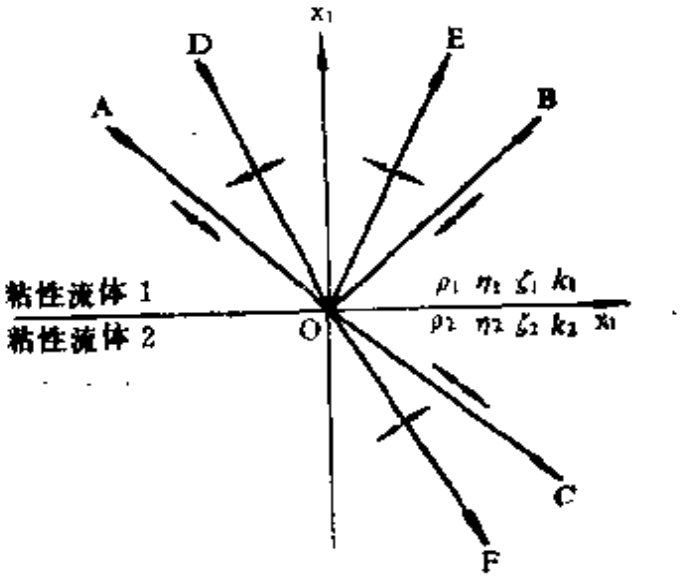


图 10—13

$$\phi=(Ae^{k\sigma x_3}+Be^{-k\sigma x_3})e^{ik(vt-x_1)}$$

$$\psi=(De^{k\tau x_3}+Ee^{-k\tau x_3})e^{ik(vt-x_1)}$$

及

$$\bar{\phi}=Ce^{k\bar{\sigma}x_3}e^{ik(vt-x_1)}$$

$$\bar{\psi}=Fe^{k\bar{\tau}x_3}e^{-ik(vt-x_1)}$$

由流体的分界面上位移和应力连续条件 (10.43)、(10.45) 式，即当 $x_3=0$ 时，$u_1=\bar{u}_1$，$u_3=\bar{u}_3$，$\sigma_{13}=\bar{\sigma}_{13}$，$\sigma_{33}=\bar{\sigma}_{33}$，于是得到联立方程

$$i(A+B)+\tau(D-E)=iC+\bar{\tau}F$$

$$\sigma(A-B)-i(D+E)=\bar{\sigma}C-iF$$

$$i2\eta\sigma(A-B)+\eta(\tau^2+1)(D+E)=i2\bar{\eta}\bar{\sigma}C+\bar{\eta}(\bar{\tau}^2+1)F$$

$$\xi(\sigma^2-1)(A+B)=\bar{\xi}(\bar{\sigma}^2-1)C$$

解之可得：

当只入射P波（$D=0$）时

$$\frac{B}{A}=\frac{(l_1-l_3)(m_2+m_4)-(l_2+l_4)(m_1-m_3)}{(l_1+l_3)(m_2+m_4)-(l_2+l_4)(m_1+m_3)}$$

$$\frac{C}{A}=\frac{2(m_2+m_4)}{(l_1+l_3)(m_2+m_4)-(l_2+l_4)(m_1+m_3)}$$

$$\frac{E}{A}=\frac{2(l_4m_2-l_2m_4)}{(l_1+l_3)(m_2+m_4)-(l_2+l_4)(m_1+m_3)} \qquad (10.46)$$

$$\frac{F}{A}=\frac{-2(l_2+l_4)}{(l_1+l_3)(m_2+m_4)-(l_2+l_4)(m_1+m_3)}$$

当只入射SV波（$A=0$）时

$$\frac{E}{D}=\frac{(l_2-l_4)(m_1+m_3)-(m_2-m_4)(l_1+l_3)}{(l_1+l_3)(m_2+m_4)-(l_2+l_4)(m_1+m_3)}$$

$$\frac{B}{D}=\frac{(l_3-l_1)(m_1+m_3)+(l_1+l_3)(m_1-m_3)}{(l_1+l_3)(m_2+m_4)-(l_2+l_4)(m_1+m_3)} \qquad (10.47)$$

$$\frac{F}{D}=\frac{2(l_1+l_3)}{(l_1+l_3)(m_2+m_4)-(l_2+l_4)(m_1+m_3)}$$

$$\frac{C}{D}=\frac{-2(m_1+m_3)}{(l_1+l_3)(m_2+m_4)-(l_2+l_4)(m_1+m_3)}$$

其中

$$l_1=\frac{\bar{\xi}(\bar{\sigma}^2-1)}{\xi(\sigma^2-1)} \qquad m_1=0$$

$$l_2=\frac{i}{\tau}\left[1-\frac{\bar{\xi}(\bar{\sigma}^2-1)}{\xi(\sigma^2-1)}\right] \qquad m_2=\frac{\bar{\tau}}{\tau}$$

$$l_3=\frac{\bar{\sigma}}{\sigma}\,\frac{\tau^2+1-2\dfrac{\bar{\eta}}{\eta}}{\tau^2-1} \qquad m_3=\frac{i}{\sigma}\,\frac{\dfrac{\bar{\eta}}{\eta}(\bar{\tau}^2+1)-(\tau^2+1)}{\tau^2-1}$$

$$l_4=i2\bar{\sigma}\,\frac{\dfrac{\bar{\eta}}{\eta}-1}{\tau^2-1} \qquad m_4=\frac{\dfrac{\bar{\eta}}{\eta}(\bar{\tau}^2+1)-2}{\tau^2-1}$$

当两种流体的粘性都趋于零，即η、ζ、$\bar{\eta}$、$\bar{\zeta}\to 0$，有$\sigma\to if$，$\bar{\sigma}\to i\bar{f}$，$|\tau|$、$|\bar{\tau}|\to\infty$，于是可得

$$\frac{B}{A}=\frac{\bar{Z}-Z}{\bar{Z}+Z}$$

$$\frac{C}{A}=\frac{2\bar{Z}}{(\bar{\rho}/\rho)(Z+\bar{Z})} \qquad (10.48)$$

$$\frac{D}{A}=0$$

$$\frac{F}{A}=0$$

其中波阻抗

$$Z=\frac{\rho\alpha}{\cos\theta}$$

$$\bar{Z}=\frac{\bar{\rho}\bar{\alpha}}{\cos\bar{\theta}}$$

α为理想流体中的声波速度，θ为声波射线与界面法线的夹角。（10.48）式正是众所周知的理想流体分界面上的声波反射系数与透射系数。

下面考虑从粘性流体到弹性固体的分界面的情况。

假设P波及SV波从粘性可压缩流体入射到它与均匀各向同性弹性固体的平界面上。这时将产生同型波及转换波的反射与透射（如图10—14）。在界面上波是

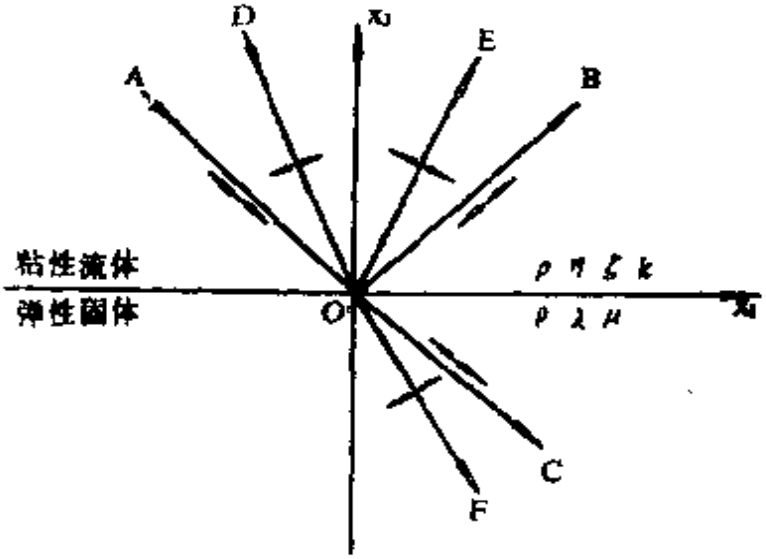


图 10—14

协调的，令粘性流体中的波为

$$\phi' = (Ae^{k\sigma x_3} + Be^{-k\sigma x_3})e^{ik(vt-x_1)}$$

$$\psi' = (De^{k\tau x_3} + Ee^{-k\tau x_3})e^{ik(vt-x_1)}$$

弹性固体中的波为

$$\phi = Ce^{ik\sigma x_3}e^{ik(vt-x_1)}$$

$$\psi = Fe^{ik\sigma x_3}e^{ik(vt-x_1)}$$

由无滑动条件：在粘性流体与弹性固体的分界面上位移及应力连续。即当$x_3=0$时，$u_1=u_1'$，$u_3=u_3'$，$\sigma_{13}=\sigma_{13}'$，$\sigma_{33}=\sigma_{33}'$。从而得到联立方程

$$\begin{aligned}
&i(A+B)+\tau(D-E)=iC+ibF\\
&\sigma(A-B)-i(D+E)=ia\sigma C-iF\\
&2\omega\eta\sigma(A-B)-i\omega\eta(\tau^2+1)(D+E)=2\mu a\sigma C+\mu(b^2-1)F\\
&\xi(\sigma^2-1)(A+B)=-\mu(b^2-1)C+2\mu bF
\end{aligned}\tag{10.46}$$

解此方程组可得形如（10.46）、（10.47）式的反射系数及透射系数公式，但其中 l 和 m 如下：

$$l_1=-\frac{\mu(b^2-1)}{\xi(\sigma^2-1)} \qquad m_1=\frac{2\mu b}{\xi(\sigma^2-1)}$$

$$l_2=i\frac{\xi(\sigma^2-1)+\mu(b^2-1)}{\xi\tau(\sigma^2-1)} \qquad m_2=i\frac{\xi b(\sigma^2-1)-2\mu b}{\xi\tau(\sigma^2-1)}$$

$$l_3=\frac{ia\omega\eta(\tau^2+1)-2\mu a}{\omega\eta\sigma(\tau^2-1)} \qquad m_3=-\frac{\mu(b^2-1)+i\omega\eta(\tau^2+1)}{\omega\eta\sigma(\tau^2-1)}$$

$$l_4=\frac{2\omega\eta a+i2\mu a}{\omega\eta(\tau^2-1)} \qquad m_4=\frac{i\mu(b^2-1)-2\omega\eta}{\omega\eta(\tau^2-1)}$$

当流体的粘性趋于零（η、$\zeta\to 0$），以上结果化为

$$\frac{B}{A}=\frac{-\rho' a\frac{v^4}{\beta^2}+\mu a'\left[\left(\frac{v^2}{\beta^2}-2\right)^2+4ab\right]}{\rho' a\frac{v^4}{\beta^2}+\mu a'\left[\left(\frac{v^2}{\beta^2}-2\right)^2+4ab\right]}$$

$$\frac{C}{A}=\frac{2\rho' a' v^2\left(\frac{v^2}{\beta^2}-2\right)}{\rho' a\frac{v^4}{\beta^2}+\mu a'\left[\left(\frac{v^2}{\beta^2}-2\right)^2+4ab\right]}$$

$$\frac{E}{A}=0$$

$$\frac{F}{A}=\frac{-4\rho' a' a v^2}{\rho' a\frac{v^4}{\beta^2}+\mu a'\left[\left(\frac{v^2}{\beta^2}-2\right)^2+4ab\right]}$$

从上面的公式可以看出，在两相介质（从粘性流体到弹性固体）分界面上的反射波的强弱既与介质性质有关，又与波速有关，还与频率有关。

§10—9 关于滞弹波的瑞克(Ricker)理论的概述

在本章的前面几节里，我们叙述了粘滞性介质中的弹性波。自本节以后的内容着重阐述瑞克提出的滞弹性介质中的地震子波理论。对于粘弹性介质中弹性波方程，瑞克指出一种解法，进而得到接近实际情况的地震子波，包括质点运动的位移、速度、加速度函数形式。

粘弹性介质中的弹性波的传播可用著名的斯托克斯(Stokes)波动方程描述。但这个方程仅涉及剪切应变。实际上还有一种与体积变化有关的粘滞性。考虑到两种粘滞性，对方程引进一个参量 ω_0，再经过一些数学推导（见§10—13），即可得到瑞克处理的波动方程

$$\frac{\partial}{\partial k^2}\left(\Phi+\frac{\partial\Phi}{\partial T}\right)=\frac{\partial^2\Phi}{\partial T^2}$$

瑞克在求解此方程时，采取的是不同于一般的级数解法，最终的解答也是级数形式。所得到的解答与实际地层中的记录子波

相比，在时间域与频率域，都拟合得较为理想。瑞克进一步进行了子波衰减方面的探讨，得出一些有益的结果。

瑞克理论的特点是把地震子波数学化，一方面便于理论研究，从不同的物理量描述子波状态，探讨子波变化的机制。另一方面便于进行模型设计，长时间以来许多地震工作者使用瑞克子波作为地震模型技术的震源脉冲形式，收到较满意的结果。

§10—10 经典弹性波理论的问题

根据经典弹性固体理论，弹性位移$\mathbf{u}$可以由无旋向量$\mathbf{u}_{(1)}$与无散向量$\mathbf{u}_{(2)}$组成，并且$\mathbf{u}_{(1)}$、$\mathbf{u}_{(2)}$分别满足下列方程：

$$\nabla^2\mathbf{u}_{(1)}=\frac{\rho}{\lambda+2\mu}\frac{\partial^2\mathbf{u}_{(1)}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2\mathbf{u}_{(2)}=\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2\mathbf{u}_{(2)}}{\partial t^2}$$

其中

$$v_p=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$$

$$v_s=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

分别为纵波与横波传播速度。

为讨论方便而又不失一般性，我们仅考虑沿x_1轴正方向传播的平面波。这时波动方程变为

$$\frac{\partial^2 u_{(1)}}{\partial x_1^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u_{(1)}}{\partial t^2}$$

该方程的通解为

$$u_{(1)}=F_1(x_1-vt)+F_2(x_1+vt)$$

其中F_1、F_2均为完全任意的函数，F_1代表沿x轴正方向传播的波，F_2代表沿x_1轴负方向传播的波。每一部分中的波形均保持不变。因此如果波由尖锐爆炸脉冲产生，则它应以尖锐波形而

传播。

现在我们不考虑波散，即低频波和高频波具有相同的速度。震源脉冲假定如图10—15。若地震波的传播严格遵从弹性方程，则用无时变机械地震仪所记录的地震记录就应该是由一系列这样的尖锐扰动组成。预期的地震记录如图10—16所示。可是，实际

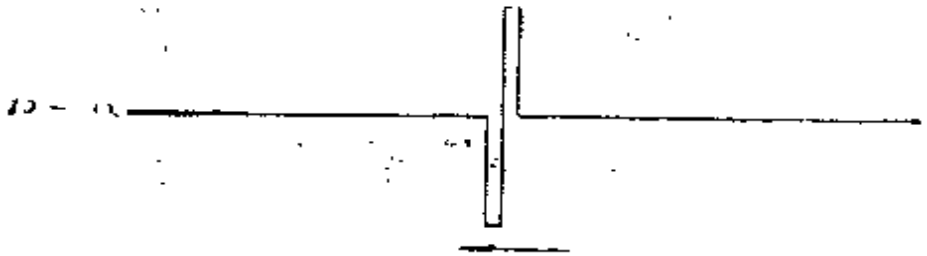


图 10—15

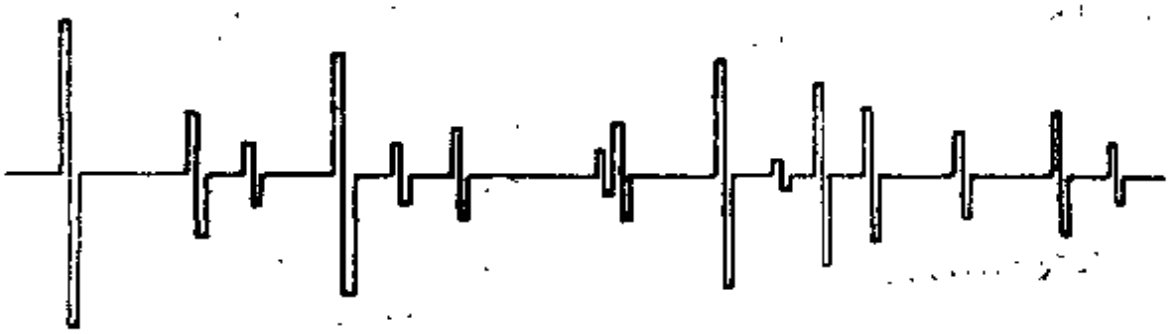


图 10—16



图 10—17

地震波在地下传播时所接收的并非如此简单的地震记录，而是类似于图10—17所示那种地震记录。

经典弹性理论是对精确遵守胡克定律的理想介质建立的。其中并未考虑因为摩擦而产生的能量耗散。满足经典弹性固体理论之理想要求的实际介质是不存在的[8]。地下的花岗岩之类的岩石并不严格服从完全弹性理论，由泥岩、砂岩及页岩组成的大多数近地表地层也是如此。由此可知，严格按弹性固体而建立的经典波动方程解绝不会对弹性波在这些构成地下岩层的物质中的传播情形做出真实描述。

§10—11 大地介质的地震波吸收作用

爆炸产生的震源脉冲可以认为是由从零至无限大整个频率范围的单频分量的无限系列构成。脉冲波形与频率间的关系可由傅里叶积分来表示。

图10—18作为一个爆炸脉冲，其波形我们以下式表示：

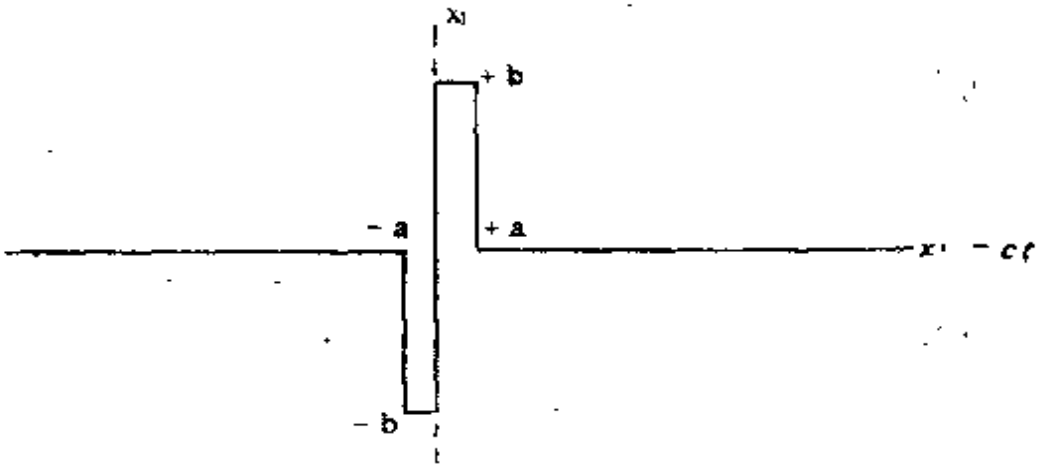


图 10—18

$u = 0$　　当 $-\infty < (x_1 - vt) < -a$ 时

$u = -b$　　当 $-a < (x_1 - vt) < 0$ 时

$u = +b$　　当 $0 < (x_1 - vt) < +a$ 时

$u = 0$　　当 $+a < (x_1 - vt) < +\infty$ 时

$u=0$ 当$x_1-vt=0$时

可以利用奇函数的傅里叶积分，得

$$u(x_1-vt)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty u(\lambda)d\lambda\int_0^\infty \sin\xi\lambda\sin\xi(x_1-vt)d\xi$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin\xi(x_1-vt)d\xi\int_0^a b\sin\xi\lambda d\lambda$$

$$=\frac{2b}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos\xi a}{\xi}\sin(x_1-vt)d\xi$$

若令

$$\xi=\frac{2\pi f}{v}$$

$$u(x_1-vt)=-\frac{2b}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos\frac{2\pi fa}{v}}{f}\sin 2\pi f\left(t-\frac{x_1}{v}\right)df \tag{10.50}$$

其中f为频率。对上式余弦展开，并用傅里叶变换的表达，则可得到该扰动的傅里叶谱为

$$\frac{2b}{\pi}\left[\left(\frac{2\pi a}{v}\right)^2\frac{f}{2!}-\left(\frac{2\pi a}{v}\right)^4\frac{f^3}{4!}+\left(\frac{2\pi a}{v}\right)^6\frac{f^5}{6!}-,\cdots\right]df$$

方程（10、50）给出的这种波形属于无吸收时的类型，并且是经典波动方程的一个解。我们已知，扰动通过地层时，波形发生变化，它相应的谱将因吸收而被改造。其结果基本是记录的频率低于震源脉冲，高频比低频衰减程度更大。

描述上述吸收性质的方法是将大地透过因子写为

$$\exp\left[-\left(\frac{f}{f_C}\right)^q\frac{x_1}{x_C}\right]$$

其中f为频率，f_C为恒定参考频率，x_C为常数，x_1为波在大地中的传播距离，q为一个决定吸收频带边缘陡度的参量。图 10—19所示为函数

$$\exp\left[-\left(\frac{f}{f_C}\right)^q\right]$$

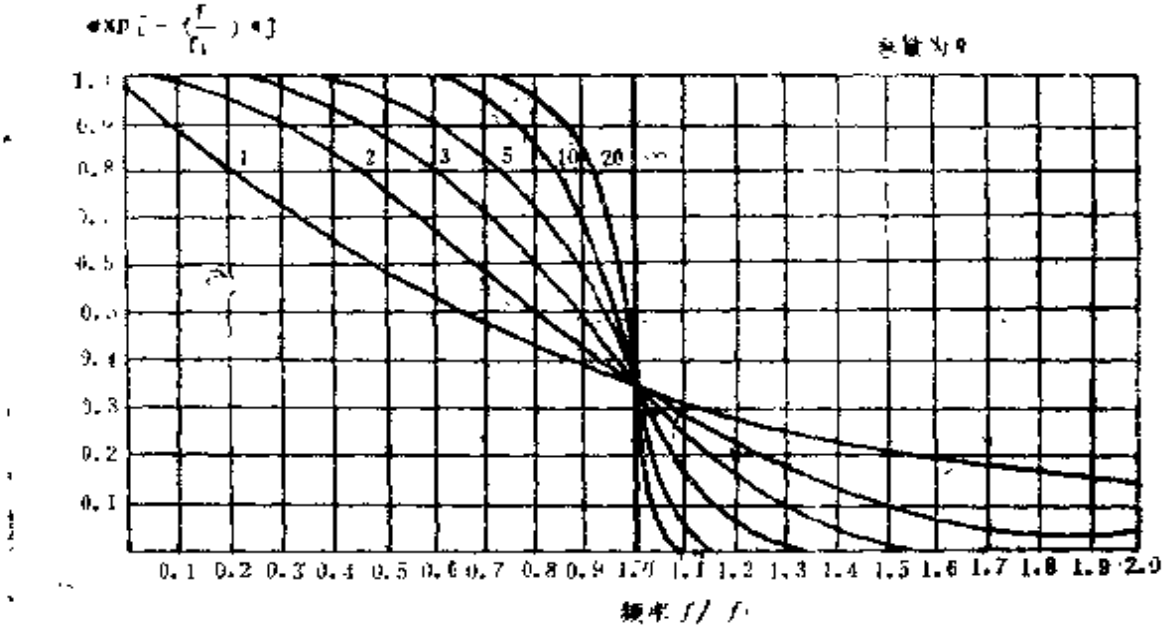


图 10—19

大地吸谱曲线簇

在参量 q 取不同值时所绘制的曲线簇。这些曲线代表可能表示大地吸收谱的频带。图中曲线表明，当 q 增大时，吸收频带边缘陡度增加，而当q无限增大时，则所有低于f_1的频率均自由通过，而所有高于f_1的频率均完全被吸收。图10—19所示谱线是由图10—18脉冲通过一部分地层后的吸收谱曲线（其中，q具有某种确定的然而是未知的值），若假设属于构成该波形的所有单频分量均以恒定速度v传播，则在x_1距离上观测到的扰动由下式给出：

$$u_q = -\frac{2b}{\pi}\int_0^\infty \exp\left[-\left(\frac{f}{f_C}\right)^q \frac{x_1}{x_C}\right]\cdot\left[\left(\frac{2\pi a}{v}\right)^2 \frac{f}{2!} - \left(\frac{2\pi a}{v}\right)^4 \frac{f^3}{4!} + \left(\frac{2\pi a}{v}\right)^6 \frac{f^5}{6!} - \cdots\right]$$

$$\sin 2\pi f\left(t - \frac{x_1}{v}\right)df$$

令

$$\zeta^q = \left(\frac{f}{f_C}\right)^q \frac{x_1}{x_C}$$

$$\Xi = 2\pi f_C \frac{t - \frac{x_1}{v}}{\left(\frac{x_1}{x_C}\right)^{1/q}}$$

于是

$$u_q = -\frac{2b}{\pi}\int_0^\infty \exp(-\zeta^q)\left[\left(\frac{2\pi f_C a}{v x_C^{-1/q} x^{1/q}}\right)^2 \frac{\zeta}{2!} - \left(\frac{2\pi f_C a}{v x_C^{-1/q} x_1^{1/q}}\right)^4 \frac{\zeta^3}{4!} + \cdots\right]\sin\zeta\Xi d\zeta$$

令 $$H^q(\Xi) = -\int_0^\infty \zeta\exp(-\zeta^q)\sin\zeta\Xi d\zeta,$$

$$H_q'(\Xi) = -\frac{d}{d\Xi}H^q(\Xi), \quad H_q''\Xi = \frac{d^2}{d\Xi^2}H^q(\Xi), \cdots$$

则 $$u^q = \frac{2b}{\pi}\left[\left(\frac{2\pi f_C a}{v x_C^{-1/q} x_1^{1/q}}\right)^2 \frac{1}{2!}H^q(\Xi) + \left(\frac{2\pi f_C a}{v x_C^{-1/q} x_1^{1/q}}\right)^4 \cdot \frac{1}{4!}H''(\Xi) + \left(\frac{2\pi f_C a}{v x_C^{-1/q} x_1^{1/q}}\right)^6 \frac{1}{6!}H'''(\Xi) + \cdots\cdots\right]$$

由上式可看出，需要考虑的只是第一项，其余各项可用第一项的导数表示，如果原始震源脉冲形状不同于图10—18，仅是类似，则形成的表达式也是类似的，当然第一项及各阶导数前面的系数有一点差别。如果原始波形非常尖锐以致 a 值是小值时，则除第一项之外，所有项均可忽略不计。于是可得下列扰动：

$$u_q = -\frac{1\pi f_C}{v^2} \frac{a^2 b}{x_C^{2/q} x_1^{2/q}}\int_0^\infty \zeta\exp(-\zeta^q)\sin\zeta\Xi d\zeta \qquad (10.51)$$

上式给出的波形将随传播距离之增加按 $x^{-2/q}$ 的规律衰减。

令 $$G_q(\Xi) = \int_0^\infty \exp(-\zeta^q)\cdot\cos\zeta\Xi d\zeta \qquad (10.52a)$$

则有 $$u_q = \frac{4\pi f_C^2}{v^2} \cdot \frac{a^2 b}{\left(\frac{x_1}{x_C}\right)^{2/q}} \frac{d}{d\Xi}G_q(\Xi)$$

式（10.52a）可写为

$$\int_0^\infty \exp(-\zeta^q)\cos\zeta\Xi d\zeta$$

$$=\int_0^\infty \exp(-\zeta^q)\left(1-\frac{\Xi^2}{2!}\zeta^2+\frac{\Xi^4}{4!}\zeta^4-\frac{\Xi^6}{6!}\zeta^6+\cdots\right)d\zeta$$

因为

$$\int_0^\infty \zeta^p \exp(-\zeta^q)d\zeta=\frac{1}{q}\Gamma\left(\frac{p+1}{q}\right)$$

故有

$$\int_0^\infty \exp(-\zeta^q)\cos\zeta\Xi d\zeta=\frac{1}{q}\left[\Gamma\left(\frac{1}{q}\right)-\Gamma\left(\frac{3}{q}\right)\frac{\Xi^2}{2!}+\Gamma\left(\frac{5}{q}\right)\frac{\Xi^4}{4!}\cdots\right] \tag{10.52b}$$

这样，积分被表示成变量 Ξ 的幂级数，其系数为 $(2\pi+1)/q$ 阶的伽玛函数。式（10.51）可改写为

$$u_q=\frac{a^2b}{\pi v^2}\left(\frac{2\pi f_C}{\left(\frac{x_1}{x_C}\right)^{1/q}}\right)^2\frac{d}{d\Xi}\int_0^\infty \exp(-\zeta^q)\cos\zeta\Xi d\zeta$$

因为

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial\Xi}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial\Xi}\right)$$

则

$$\text{位移}=\frac{a^2b}{\pi v^2}\left[\frac{2\pi f_C}{\left(\frac{x_1}{x_C}\right)^{1/q}}\right]^2\frac{d}{d\Xi}\int_0^\infty \exp(-\zeta^q)\cos\zeta\Xi d\zeta$$

$$\text{速度}=\frac{a^2b}{\pi v^2}\left[\frac{2\pi f_C}{\left(\frac{x_1}{x_C}\right)^{1/q}}\right]^3\frac{d^2}{d\Xi^2}\int_0^\infty \exp(-\zeta^q)\cos\zeta\Xi d\zeta$$

$$\text{加速度}=\frac{a^2b}{\pi v^2}\left[\frac{2\pi f_C}{\left(\frac{x_1}{x_C}\right)^{1/q}}\right]^4\frac{d^3}{d\Xi^3}\int_0^\infty \exp(-\zeta^q)\cos\zeta\Xi d\zeta$$

我们可以利用（10.52b）把由上述公式表达的扰动改写为用伽玛函数表达的形式。进一步在取定 q 值时，得到用 Ξ 表示的位移、速度和加速度波形。瑞克在美国 Verdigris 河地区用小炸药量作震源所得到的记录与 $q=2$ 时的速度型子波波形一致。这基本证明

了瑞克提出的子波函数的合理性。

§10—12 完整的斯托克斯波动方程

本节我们得到沿x_1轴方向传播的平面波完整的斯托克斯波动方程，该方程含有切向粘滞与体积粘滞两种粘滞的影响。

非完全弹性体对地震波的衰减吸收表现与流体介质的粘滞性表现可以类比。

设在垂直于x_2轴的两平面间为粘滞性介质层（如图(10—20)，上平面相对下平面沿x_1方向有一速度差$\Delta\dot{u}_1$，则介质对上平面作用一阻力，其方向和上平面运动方向相反，其值和面积$\Delta x_1 \cdot \Delta x_3$成正比，和$\Delta\dot{u}_1$成正比，并与间距$\Delta x_2$成反比。

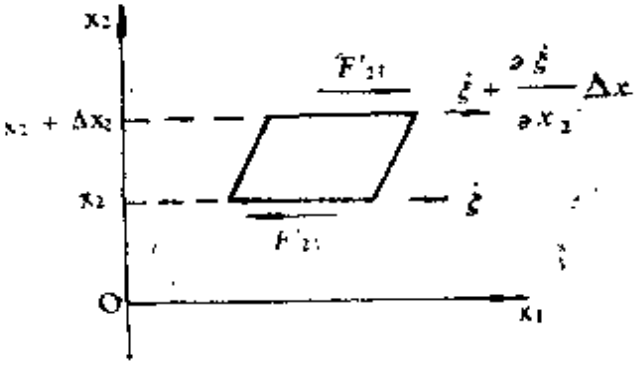


图 10 -20

根据粘滞性系数定义，粘滞力为

$$F_{21} = -\mu' \frac{\Delta\dot{u}_1}{\Delta x_2} \Delta x_1 \Delta x_3 \qquad (10.53)$$

上平面对介质的作用力为

$$F'_{21} = F_{21} = \mu' \frac{\Delta\dot{u}_1}{\Delta x_2} \Delta x_1 \Delta x_3$$

其中μ'为流体介质的粘滞性系数。

设想介质层取自介质内部，上下平面为层与上下方介质的交界面，下界面速度为$\dot{X}_1$，上界面速度为$\dot{X}_1 + \Delta\dot{X}_1$，则在此片介质和它上面的介质之间就有一内作用力——粘滞性力。由(10.53)式可得上面介质对片介质的单位面积作用力

$$f_{21} = \mu' \frac{\Delta\dot{u}_1}{\Delta x_2}$$

当介质中速度沿 x_2 方向是连续分布时，则取层厚 $\Delta x_2 \to 0$ 时的极限值定义为介质作用在 x_2 平面上的粘滞性应力

$$f'_{21} = \mu \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial x_2}$$

这里，下角标的前一字母表示力所在的面，后一字母表示力的方向。

现在把上式的结果推广到声波作用的介质中。由于介质中位移 $u_{(1)}$ 是空间坐标和时间的连续函数，当振速值很小时，$du_1/dt \approx \partial u_1/\partial t$，则

$$f_{21} = \mu' \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial x_2} = \mu' \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)$$

由于 $\partial u_1/\partial x_2$ 反映介质的切形变，所以上式表明粘滞应力与切应变成正比，f_{21} 称为切变粘滞性应力，系数 μ' 称为切变粘滞性系数。

在小形变情况，粘滞应力和形变速度成线性关系。把粘滞应力和应变速度的关系类比弹性体中应力和应变关系，则可写成

$$\sigma_{11} = -p_{11} + \lambda'\dot{\theta} + 2\mu'\dot{e}_{11} \qquad \sigma_{22} = -p_{22} + \lambda'\dot{\theta} + 2\mu'\dot{e}_{22}$$

$$\sigma_{33} = -p_{33} + \lambda'\dot{\theta} + 2\mu'\dot{e}_{33} \qquad \sigma_{21} = \sigma_{12} = 2\mu'\dot{e}_{12} \qquad (10.54)$$

$$\sigma_{32} = \sigma_{23} = 2\mu'\dot{e}_{23} \qquad \sigma_{12} = \sigma_{31} = 2\mu'\dot{e}_{31}$$

也可写成

$$\sigma_{ji} = (-p_{ji} + \lambda\dot{\theta})\delta_{ji} + 2\mu'\dot{e}_{ji} \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

其中

$$\theta = e_{11} + e_{22} + e_{33}$$

$$e_{ji} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

上式中 λ'、μ' 都是粘滞应力的系数，μ' 就是前述的切变粘滞性系数。常数 λ' 又称为第二粘滞系数。下面引入体积粘滞系数 μ''：

考虑一均匀介质团，各方施以均匀张力，其强度为T，即

$$T = \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}, \quad p_{11} = p_{22} = p_{33}$$

代入式（10.54）中的前三项，然后三式相加，并利用关系式

$$\theta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

则有

$$T = -p + (\lambda' + \frac{2}{3}\mu')\dot{\theta}$$

此式表明，当介质体积形变变化时，由于介质粘滞性作用产生的阻力与体积形变的速度成正比。实际上引起介质形变的力p并不等于外作用力T，而等于外作用力与粘滞性作用产生的阻力之差。由于这种粘滞力仅和体积形变的速度成正比，所以体积粘滞应力为

$$f = (\lambda' + \frac{2}{3}\mu')\dot{\theta} = \mu''\dot{\theta}$$

$$\mu'' = \lambda' + \frac{2}{3}\mu'$$

其中μ''为体积粘滞性系数。所以

$$\lambda' = \mu'' - \frac{2}{3}\mu'$$

把上式代入式（10.54）中，即得粘滞性流体中应力和应变的基本关系式

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= -p_{11} + (\mu'' - \frac{2}{3}\mu')\dot{\theta} + 2\mu'\dot{e}_{11} \\
\sigma_{22} &= -p_{22} + (\mu'' - \frac{2}{3}\mu')\dot{\theta} + 2\mu'\dot{e}_{22} \\
\sigma_{33} &= -p_{33} + (\mu'' - \frac{2}{3}\mu')\dot{\theta} + 2\mu'\dot{e}_{33} \\
\sigma_{12} &= \sigma_{21} = 2\mu'\dot{e}_{12} \\
\sigma_{23} &= \sigma_{32} = 2\mu'\dot{e}_{23} \\
\sigma_{13} &= \sigma_{31} = 2\mu'\dot{e}_{13}
\end{aligned} \tag{10.55}$$

或者 $$\sigma_{ji}=[-p_{ji}+(\mu''-\frac{2}{3}\mu')\dot{\theta}]\delta_{ji}+2\mu'\dot{e}_{ji}$$

下面考虑沿x_1方向传播的平面声波。这时介质在x_1方向产生压缩和伸张形变，设质点位移

$$u_1=u_1(x_1,\ t)\qquad u_2=u_3=0$$

于是式（10.55）简化为

$$\sigma_{11}=-p+(\mu''+\frac{4}{3}\mu')\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial t}\tag{10.56}$$

$$\sigma_{12}=\sigma_{23}=\sigma_{31}=0$$

在图10—21中绘出$(x_1,\ x_2,\ x_3)$点邻近一个立方体$\Delta V=\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3$，同时标出它的六面受力情况。当$\Delta x_1$，$\Delta x_2$，$\Delta x_3$

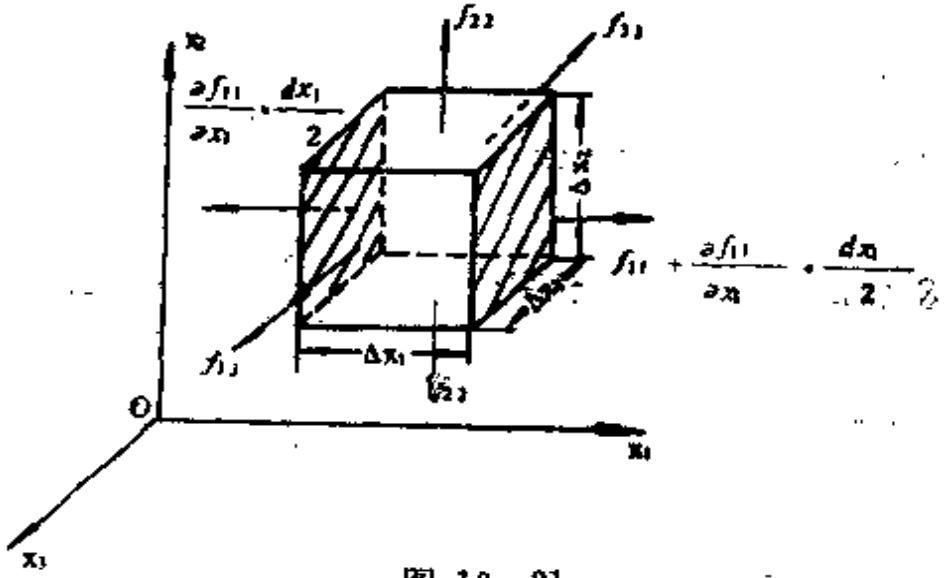


图 10—21

取得足够小时，可以认为每个面上的力为均匀分布。由式（10.56）可见，u_1只是x_1的函数，所以σ_{11}，σ_{22}，σ_{33}皆是x_1的函数，与x_2、x_3无关。而作用在x_2和x_3方向两对面上的力大小相等方向相反。即在沿x_1方向传播的平面声波作用下，小质团受x_2和x_3两方向的合力为零。而在x_1方向的两对面上，由于靠近两面处的介质形变不等，同时形变速度也不等，因此面上声压和粘滞力都不等。于是该受力单元体的运动方程为

$$\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}=\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1}=-\frac{\partial p}{\partial x_1}+\left(\mu''+\frac{4}{3}\mu'\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2\partial t} \qquad (10.\text{[illegible]})$$

因为 $$\partial u_2/\partial x_2=\partial u_3/\partial x_3=0$$

所以 $$dV/V=\theta=\partial u_1/\partial x_1$$

声压可由绝热过程的状态方程

$$p=\rho v^2\frac{d\rho}{\rho_0}=-\rho v^2\frac{\Delta V}{V}=-\rho v^2\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \qquad (10.58)$$

给出，

把（10.58）式代入（10.57）式中，即得粘弹性介质中平面纵波的完整的方程

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(u_1+\frac{\mu''+\frac{4}{3}\mu'}{\rho v^2}\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \qquad (10.59)$$

该式即为完整的斯托克斯方程

§10—13 斯托克斯方程的瑞克解法

对于方程（10.59）式，令$(\mu''+\frac{3}{4}\mu')/\rho v^2=\frac{1}{\omega_0}$，则该方程变为

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(u_1+\frac{1}{\omega_0}\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$$

现定义下列无量纲量：

$$k=\frac{\omega_0 x_1}{v} \qquad T=\omega_0 t$$

其中k称为数值距离，T称为数值时间。

引入这些无量纲变量的目的是使计算工作与采用的单位系统无关，此外也可简化偏微分方程，上面方程变为

$$\frac{\partial^2}{\partial k^2}\left(u_1+\frac{\partial u_1}{\partial T}\right)=\frac{\partial^2 u_1}{\partial T^2} \tag{10.60}$$

设此方程的解的形式为

$$u_1=e^{-\alpha k}\cdot e^{i\beta T} \tag{10.61}$$

其中α、β是常数，则有

$$\alpha^2(1+i\beta)=-\beta^2$$

即

$$\alpha=\frac{i\beta}{\sqrt{1+i\beta}}$$

将其展开为级数形式有

$$\alpha=i\beta+\frac{1}{2}\beta^2-i\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\beta^3-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\beta^4+i\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\beta^5+\cdots$$

于是方程（10.61）式可变为

$$u_1=e^{-\frac{\beta^2}{2}k}\cdot e^{i\beta(T-k)}\cdot e^{\left(i\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\beta^3+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\beta^4-i\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\beta^5\cdots\right)k}$$

令

$$a_3=\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\qquad a_4=\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\qquad a_5=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}$$

$$a_6=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10}\qquad a_7=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot12}\qquad\cdots$$

则有

$$u_1=e^{-\frac{\beta^2}{2}k}\cdot e^{i\beta(T-k)}e^{(a_3\beta^3+a_4\beta^4-ia_5\beta^5-a_6\beta^6+\cdots)k} \tag{10.62}$$

此式可写为

$$u_1=e^{-\frac{\beta^2}{2}k}\cdot e^{i\beta(T-k)}[f_0(k,\ \beta)+if_1(k,\ \beta)] \tag{10.63}$$

$$=e^{-\frac{\beta}{2}k}[f_0\cdot\cos\beta(T-k)-f_1\cdot\sin\beta(T-k)]$$

$$+ie^{-\frac{\beta^2}{2}k}[f_0\cdot\sin\beta(T-k)+f_1\cos\beta(T-k)]$$

在此我们仅讨论 u_1 的虚部。由于 u_1 的虚部是方程（10.60）的一种解，故有

$$u_1 = e^{-\frac{\beta^2}{2}k}\left[f_0\sin\beta(T-k)+f_1\cos\beta(T-k)\right]$$

而积分

$$\int_0^\infty \beta e^{-\frac{\beta^2}{2}k}\left[f_0\sin\beta(T-k)+f_1\cos\beta(T-k)\right]d\beta$$

也是方程（10.60）的解，故此有

$$u_1 = \int_0^\infty \beta e^{-\frac{\beta^2}{2}k}\left[f_0\sin\beta(T-k)+f_1\cos(T-k)\right]d\beta$$

设

$$k\frac{\beta^2}{2} = \xi^2$$

则

$$\beta = \left(\frac{2}{k}\right)^{1/2}\cdot\xi$$

$$d\beta = \left(\frac{2}{k}\right)^{1/2}d\xi$$

所以

$$u_1 = \left(\frac{2}{k}\right)^{3/2}\int_0^\infty\left[\xi e^{-\xi^2}f_0\sin\xi\Xi+\xi e^{-\xi^2}\cos\xi\Xi\right]d\xi$$

其中

$$\Xi = \frac{T-k}{\left(\frac{k}{2}\right)^{1/2}}$$

令

$$U(\Xi/k) = \int_0^\infty \xi e^{-\xi^2}\left[f_0\sin\xi\Xi+f_1\cos\xi\Xi\right]d\xi$$

则

$$u_1(\Xi/k) = \left(\frac{2}{k}\right)^{3/2}U(\Xi/k) \qquad (10.64)$$

由于

$$f_0+if_1=\exp[(ia_3\beta^3+a_4\beta^4-ia_5\beta^5-a_6\beta^6+\cdots)k]$$

$$=\exp[(ia_3(\frac{2}{k})^{3/2}\xi^3+a_4(\frac{2}{k})^{4/2}\cdot\xi^4-ia_5(\frac{2}{k})^{5/2}\cdot\xi^5\cdots)k]$$

所以

$$f_0=1+(\frac{2}{k})^{2/2}[2a_4\xi^4-\frac{4a_3^2}{2!}\xi^6]+(\frac{2}{k})^{4/2}[-2a_6\xi^6$$

$$+\frac{2^2}{2!}(a_4^2+2a_3a_5)\xi^8-\frac{2^3}{3!}\cdot a_3^2a_4\xi^{10}+\frac{2^4}{4!}a_3^4\xi^{12}]$$

$$+(\frac{2}{k})^{6/2}[2a_8\xi^8-\frac{2^2}{2!}(a_5^2+2a_4a_6+2a_3a_7)\xi^{10}$$

$$+\frac{2^3}{3!}(a_4^3+3a_3^2a_6+6a_3a_4a_5)\xi^{12}-\frac{2^4}{4!}(4a_3^3a_5$$

$$+6a_3^2a_4^2)\xi^{14}+\frac{2^5}{5!}\cdot 5a_3^4a_4\xi^{16}-\frac{2^6}{6!}\cdot a_3^6\xi^{18}]+\cdots$$

$$f_1=(\frac{2}{k})^{1/2}\cdot 2a_3\xi^3+(\frac{2}{k})^{3/2}[-2a_5\xi^5+\frac{2^2}{2!}\cdot 2a_3a_4\xi^7$$

$$-\frac{2^3}{3!}a_3^3\cdot\xi^9]+(\frac{2}{k})^{5/2}[2a_7\xi^7-\frac{2^2}{2!}(2a_3a_6+2a_4a_5)\xi^9$$

$$+\frac{2^3}{3!}(3a_3^2a_5+3a_3a_4^2)\xi^{11}-\frac{2^4}{4!}\cdot 4a_3^3a_4\xi^{13}+\frac{2^5}{5!}a_3^5\xi^{15}]$$

$$+(\frac{2}{k})^{7/2}[-2a_9\xi^9+\frac{2^2}{2!}(2a_3a_8+2a_4a_7+2a_5a_6)\xi^{11}$$

$$-\frac{2^3}{3!}(3a_3a_5^2+3a_3^2a_7+6a_3a_4a_6+3a_4^2a_5)\xi^{13}$$

$$+\frac{2^4}{4!}(4a_3^3a_6+4a_3a_4^3+12a_3^2a_4a_5)\xi^{15}-\frac{2^5}{5!}(5a_3^4$$

$$+10a_3^3a_4^2)\xi^{17}+\frac{2^6}{6!}\cdot 6a_3^5a_4\cdot\xi^{19}-\frac{2^7}{7!}a_3^7\xi^{21}]+\cdots$$

我们定义

$$G_0(\Xi)\equiv\int_0^\infty e^{-\xi^2}\cos\xi\Xi d\xi=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{\Xi^2}{4}}$$

与

$$G_n(\Xi)\equiv\frac{d^n}{d\Xi^n}G_0(\Xi)$$

因为

$$\int_0^\infty\xi^{2n}e^{-\xi^2}\cos\xi\Xi d\xi=(-1)^nG_{2n}(\Xi)$$

$$\int_0^\infty\xi^{2n+1}e^{-\xi^2}\sin\xi\Xi d\xi=(-1)^{n+1}G_{2n+1}(\Xi)$$

故有

$$U(\Xi|k)=p_0(\Xi)+\left(\frac{2}{k}\right)p_1(\Xi)+\left(\frac{2}{k}\right)p_2(\Xi)+\left(\frac{2}{k}\right)p_3(\Xi)+\cdots$$

其中

$$p_0(\Xi)=-G_1(\Xi)$$

$$p_1(\Xi)=\frac{3}{4}G_4(\Xi)$$

$$p_2(\Xi)=-\left[\frac{9}{32}G_7(\Xi)+\frac{5}{8}G_5(\Xi)\right]$$

$$p_3(\Xi)=\left[\frac{9}{128}G_{10}(\Xi)+\frac{15}{32}G_8(\Xi)+\frac{35}{64}G_6(\Xi)\right]$$

$$p_4(\Xi)=-\left[\frac{27}{2048}G_{13}(\Xi)+\frac{45}{256}G_{11}(\Xi)+\frac{155}{256}G_9(\Xi)+\frac{63}{128}G_7(\Xi)\right]$$

$$p_5(\Xi)=\left[\frac{81}{40960}G_{16}(\Xi)+\frac{45}{1024}G_{14}(\Xi)+\frac{615}{2048}G_{12}(\Xi)+\frac{91}{128}G_{10}(\Xi)+\frac{231}{512}G_8(\Xi)\right]$$

$$p_6(\Xi) = -\left[\frac{81}{327680}G_{19}(\Xi) + \frac{135}{16384}G_{17}(\Xi) + \frac{765}{8192}G_{15}(\Xi)\right.$$
$$\left. + \frac{5351}{12288}G_{13}(\Xi) + \frac{6517}{8192}G_{11}(\Xi) + \frac{429}{1024}G_9(\Xi)\right]$$

$$p_7(\Xi) = \left[\frac{243}{9175040}G_{22}(\Xi) + \frac{81}{65536}G_{20}(\Xi) + \frac{2745}{131072}G_{18}(\Xi)\right.$$
$$\left. + \frac{1321}{8192}G_{16}(\Xi) + \frac{18893}{32768}G_{14}(\Xi) + \frac{7089}{8192}G_{12}(\Xi) + \frac{6435}{16384}G_{10}(\Xi)\right]$$

注意到（10.64）有

$$u_1 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{k}\right)^{\frac{n+2}{2}}P_n(\Xi)$$

其中

$$\Xi = (T-k)/\left(\frac{k}{2}\right)^{1/2}$$

上式即为瑞克提出的对方程（10.59）的级数解。

令

$$V(\Xi|k) = \frac{d}{dT}U(\Xi|k)$$

$$W(\Xi|k) = \frac{d^2}{dT^2}U(\Xi|k)$$

则

$$\dot{u}_1(\Xi|k) = \left(\frac{2}{k}\right)^{1/2}V(\Xi|k)$$

$$\ddot{u}_1(\Xi|k) = \left(\frac{2}{k}\right)^{1/2}W(\Xi|k)$$

分别为速度函数与加速度函数，我们通常把$u_1(\Xi|k)$、$\dot{u}_1(\Xi|k)$、$\ddot{u}_1(\Xi|k)$分别称为位移型、速度型、加速度型子波函数。

瑞克又引进母函数

$$\Psi_n(\Xi) = \int P_n(\Xi)dT$$

提出级数解可由$\Psi_n(\Xi)$表达，进而得出母函数的一系列关系式。

如果所传播的波是球面波，则上述解的公式中 k 将变为传播距离 r 相应的数值，径向距离 $R=\frac{\omega_0 r}{v}$。其解为

$$u_1=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{R}\right)^{n+1/12}\Psi_n^1(E)$$

$$u_1=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{R}\right)^{n+5/12}\Psi_n^2(E)$$

$$\dot{u}_1=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{R}\right)^{n+6/12}\Psi_n^3(E)$$

式中 $$E=(T-R)/\left(\frac{R}{2}\right)^{1/2}$$

上述结果图示于图10—22，该图上的四项分别为母函数、位移子波函数、速度子波函数及加速度子波函数。

1947年，美国的试验地震队在科罗拉多州(Colorado)的莱蒙(Limon)地区作了井中观测上述级数解与实际地震子波比较的试验。这里仅举该试验的一个结果作比较。这个实测记录是在井下250.71m处得到的，地面震源深度为76.25m，偏移距15.25m。参见图10—23，这是一个速度型子波记录。其中实线为实际子波记录，虚线为$V(u|25)$子波波形。即径向数值距离R取为25，由公式

$$\dot{u}_1=\left(\frac{2}{R}\right)^{5/12}V(E|R)$$

其中 $$E=(T-R)/\left(\frac{R}{2}\right)^{1/2}$$

可见，两者之间的拟合直到第二个弯曲点都是很好的。从频谱分布也可证明这一点。这表明瑞克理论得到的子波函数具有实际意义。

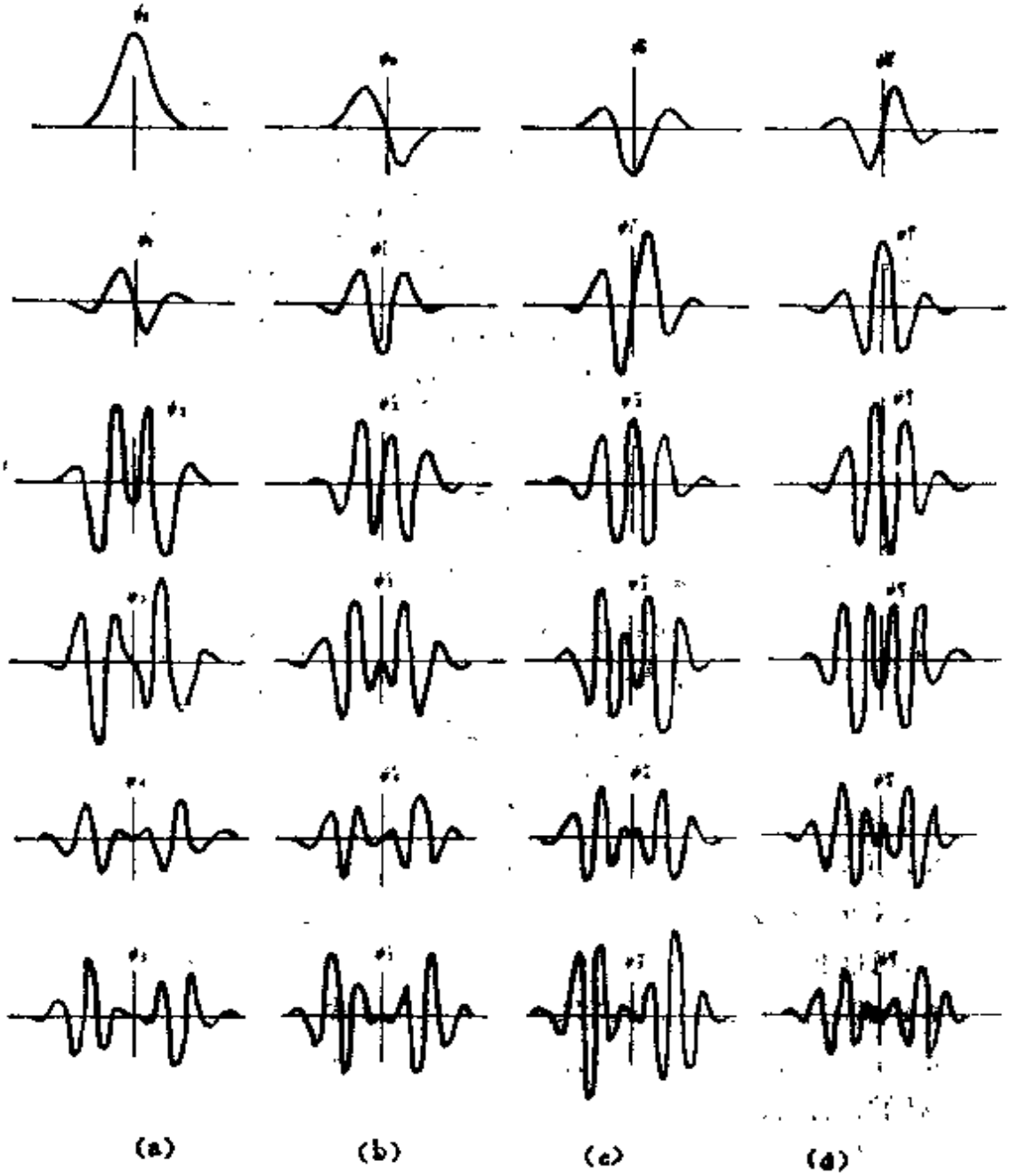


图 10—22

子波函数

(a) 母函数　(b) 位移子波函数

(c) 速度子波函数　(d) 加速度波子函数

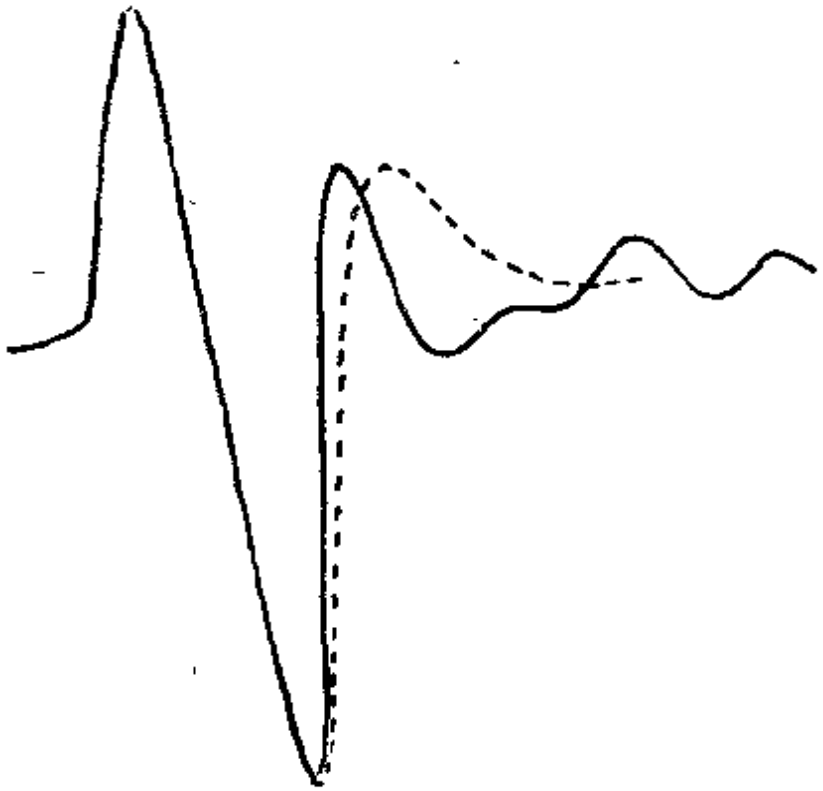


图 10—23

习题与参考答案十

1．如何理解媒质的蠕变与应力弛豫？

2．用力学模式描述滞弹体的基本思想与基本原则是什么？

3．简单线性滞弹体的本构关系如何？

4．试述品质因数Q的物理意义。

5．试总结弹性波与滞弹波的异同点及传播特性。

6．对于各向同性的滞弹体试导出在一维情况下波动方程。进一步对于平面纵波导出传播速度和衰减系数的表达式。

〔答案：对于伏各特体，

$$\rho \ddot{u}_i = (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + (\lambda'+\mu')\frac{\partial^2 \dot{u}_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \nabla^2 u_i + \mu' \nabla^2 \dot{u}_i ,$$

$$v = \left(\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\right)^{1/2}, \qquad \tau = \frac{\omega^2(\lambda'+2\mu')}{2\rho v^3}\]$$

7．本章列举了滞弹波在低频(0Hz 至 80Hz)带的传播变化资料。请

给出它的物理解释。比较滞弹波在不同频带传播特性，并且加以物理分析。

8．以速度 C 沿 x_1 轴正方向传播为一平面波 $\delta(t-x_1/v)$，它在 $x_1=0$ 进入一衰减介质。在距离 x_1，衰减波的脉冲形状为

$$p(x_1,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{-|\omega|x_1}{2CQ}\right]\exp\left[i\omega\left(\frac{x_1}{C}-t\right)\right]d\omega$$

试在 Q 为常数的情况，讨论 $p(x_1, t)$ 的形状。又若 Q 为偶函数，即 $Q(-\omega)=Q(\omega)$，但无频散，再讨论 $p(x_1, t)$ 的形状。

9．试说明N.H. Ricker 的研究滞弹性介质中的地震波的方法。

附　　录

I．通用符号对照表

位置矢量分量		位移矢量分量		坐标单位矢量		方向余弦	
(一)	(二)	(一)	(二)	(一)	(二)	(一)	(二)
x	x_1	u	u_1	i	i_1	l	n_1
y	x_2	v	u_2	j	i_2	m	n_2
z	x_3	w	u_3	k	i_3	n	n_3

应力分量			应变分量			体力分量	
(一)	(二)	(三)	(一)	(二)	(三)	(一)	(二)
σ_x	σ_{11}	X_x	ε_x	e_{11}	$e_{x\,x}$	X	f_1
σ_y	σ_{22}	Y_y	ε_y	e_{22}	$e_{y\,y}$		
σ_z	σ_{33}	Z_z	ε_z	e_{33}	$e_{z\,z}$	Y	f_2
τ_{xy}	σ_{12}	X_y	$\gamma_{x\,y}$	e_{12}	$e_{x\,y}$		
τ_{yz}	σ_{23}	Y_z	$\gamma_{y\,z}$	e_{23}	$e_{y\,z}$	Z	f_3
τ_{zx}	σ_{31}	Z_x	$\gamma_{z\,x}$	e_{31}	$e_{z\,x}$		

注：$\gamma_{x\,y}=\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)$，　$e_{12}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)$。

II．张量简介

在物理中，为了表示空间某点的物理状态和性质，常常引入标量和矢量。标量是只有数值大小而无方向的量，并只有一个分量，如温度、密度等。矢量是有大小和方向的量，如速度、加速度、电场强度等。矢量有三

个分量。然而在实际问题中发现，只用标量、矢量还不足以描述某些物理量的特征，如连续体的内应力，它是面力。任一面上的力，不仅与面积的大小有关，而且与面积的取向有关。这样一种性质的力用矢量就不能完全表示它的性质。诸如此类，就迫使人们扩大原来标量、矢量的概念，引入一个新的量——张量来描述某些量的性质。引入张量的概念需要注意以下两点：首先，应使它保持原有标量和矢量的主要性质；其次，应把标量和矢量包括在新定义的范围之内。

矢量的一个重要性质是当坐标轴旋转时矢量的长度保持不变。为了将这一性质表成数学形式，我们需要研究坐标轴旋转时空间一点的坐标变换关系，并从矢量长度不变性去得出这种变换满足的条件。在此基础上将矢量定义加以推广，就得到张量定义。这里定义的张量限于直角坐标系。相应的张量称为笛卡尔张量。

一、坐标变换

设两个直角坐标系具有相同原点。空间一点 P，在两个坐标系中的位置分别为 (x_1, x_2, x_3) 和 (x_1', x_2', x_3')。x_i' $(i=1, 2, 3)$ 坐标系可看成是由 x_j 坐标系旋转而成。设 $\alpha_{ij}=\cos(x_i', x_j)$ 表示 x_i' 轴与 x_j 轴夹角的方向余弦。则新旧坐标的变换关系为

$$x_i'=\alpha_{ij}x_j \qquad (i, j=1, 2, 3) \tag{1}$$

或者

$$\begin{aligned} x_1' &= \alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\alpha_{13}x_3 \\ x_2' &= \alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\alpha_{23}x_3 \\ x_3' &= \alpha_{31}x_1+\alpha_{32}x_2+\alpha_{33}x_3 \end{aligned} \tag{2}$$

它的矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{3}$$

上式的反变换可写成

$$x_i=\alpha_{ji}x_j' \qquad (i, j=1, 2, 3) \tag{4}$$

从长度不变性 $x_ix_i=x_j'x_j'=x_i'x_i'=x_jx_j$ 可得 α_{ij} 的下述性质，即

$$\begin{aligned} \alpha_{ij}\alpha_{ik} &= \delta_{jk} \\ \alpha_{ji}\alpha_{ki} &= \delta_{jk} \end{aligned} \tag{5}$$

具有这种性质的变换称为线性正交变换。

二、定 义

零阶张量：一量φ，它只有一个分量，当坐标按照（1）式变换时，它保持恒定，则φ称为标量或零阶张量。

一阶张量：设量A有三个分量A_i（$i=1, 2, 3$），当坐标按（1）式变换时，它按下式变换：

$$A_i' = a_{ij}A_j \tag{6}$$

则A_i称为一阶张量或矢量。

二阶张量：设有一量B，它有9个分量B_{ij}（$i, j=1, 2, 3$），当坐标按（1）式变换，B_{ij}按下式变换：

$$B_{ij}' = a_{il}a_{jm}B_{lm} \tag{7}$$

则B_{ij}称为二阶张量。

三阶张量：设有一量c，它有$3^3=27$个分量c_{ijk}（$i, j, k=1, 2, 3$），当坐标按（1）式变换时，它按下式变换：

$$c_{ijk}' = a_{ir}a_{js}a_{kt}c_{rst} \tag{8}$$

则c_{ijk}称为三阶张量。

n阶张量：设一量有3^n个分量，当坐标按（1）式变换时，它按下式变换：

$$e_{ijkl\cdots n}' = a_{ir}a_{js}a_{kt}\cdots\cdots a_{nu}e_{rst\cdots u} \tag{9}$$

则$e_{ijkl\cdots n}$称为n阶张量。

三、性 质

从张量定义可得张量的如下性质：

1．两个阶数相同的张量可以相加或相减，所得结果与原张量同阶。设a_{ij}和b_{ij}为二阶张量，则

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \tag{10}$$

2．两个一阶张量a_i和b_j，它的乘积定义为

$$c_{ij} = a_ib_j \tag{11}$$

由于

$$c_{ij}' = a_i'b_j' = a_{ik}a_{jl}a_kb_l \tag{12}$$

可见两个一阶张量相乘，结果为二阶张量。同样，一阶张量与二阶张量的

积为二阶张量。推而广之，乘积后张量阶数等于相乘张量阶数相加。

3．对称张量及反对称张量：设张量d_{ij}，当i，j互换后相等，即$d_{ij}=d_{ji}$，则此张量称为对称张量。当$d_{ij}=-d_{ji}$，则d_{ij}称为反对称张量。写成矩阵形式，对称张量T_{ij}可表示为

$$[T]=\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{12} & T_{22} & T_{23} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{pmatrix} \tag{13}$$

反对称张量T_{ij}可表示为

$$[T]=\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ -T_{12} & T_{22} & T_{23} \\ -T_{13} & -T_{23} & T_{33} \end{pmatrix} \tag{14}$$

任一二阶张量可以表示成对称张量与反对称张量之和。例如

$$T_{ij}=\frac{1}{2}[T_{ij}+T_{ji}]+\frac{1}{2}[T_{ij}-T_{ji}]=A_{ij}+B_{ij} \tag{15}$$

其中$A_{ij}=\frac{1}{2}(T_{ij}+T_{ji})$为对称张量，$B_{ij}=\frac{1}{2}[T_{ij}-T_{ji}]$为反对称张量。

4．张量的缩阶：三阶张量d_{ijk}，令其中两个指标相等，称为张量缩阶。缩阶后张量为d_{iik}，它是一阶张量。任一张量缩阶后阶数减少二阶。

5．张量不变量：任一二阶张量T_{ij}，有三个不变量T_{ii}，$T_{ij}T_{ji}$，$T_{ij}T_{jk}T_{ki}$。即在坐标按(1)式变换时它们保持恒定，或者写成

$$\begin{aligned} T_{ii}&=T'_{ii} \\ T_{ij}T_{ji}&=T'_{ij}T'_{ji} \\ T_{ij}T_{jk}T_{ki}&=T'_{ij}T'_{jk}T'_{ki} \end{aligned} \tag{16}$$

四、张量判别定义

定理1：设有A_j，B_i是一阶张量，假如T_{ij}与A_j的积满足下列关系：

$$B_i=T_{ij}A_j \tag{17}$$

则T_{ij}是二阶张量。其证明如下：

因为

$$B'_i=T'_{ij}A'_j=\alpha_{ik}B_k=\alpha_{ik}T_{km}A_m$$

且

$$A_m=\alpha_{jm}A'_j$$

代入上式右端可得

$$T'_{ij}A_j = \alpha_{ij}\alpha_{nm}T_{in}A'_j$$

此式左端重复指标j表示对它求和，故用n代j不影响结果，于是有

$$(T'_{in} - \alpha_{ij}\alpha_{nm}T_{im})A'_j = 0$$

因$A'_j \neq 0$，故此可得

$$T'_{in} = \alpha_{ij}\alpha_{nm}T_{im}$$

此式表示T_{ij}为二阶张量。

定理2：设A_i，B_j是一阶张量。若$T_{ij}A_iB_j$是零阶张量，则T_{ij}是二阶张量。证明从略。

从张量定义知替代符号δ_{ij}是二阶单位张量，循环符号δ_{ijk}是三阶张量。

Ⅲ．相似矩阵的特征值

设$[M]$表示一个矩阵，$[M]^{-1}$表示$[M]$的逆矩阵。当矩阵$[A]$与矩阵$[D]$满足

$$[D] = [M]^{-1}[A][M] \qquad (1)$$

关系时，则称$[D]$与$[A]$是相似的。

若有一线性正交变换

$$(T) = [A](x) \qquad (2)$$

这里用（ ）号表示矢量，它的分量形式为

$$T_i = A_{ij}x_j \quad (i, j = 1, 2, 3) \qquad (3)$$

(3) 式可以理解为变换算符作用在矢量x_j上，将矢量x_j变换成矢量T_i。现在我们寻找矢量x_j的某一方向，它在变换时保持方向恒定。即变换后仍与原来方向平行。在数学上表示为

$$(T) = \lambda(x)$$

或

$$[A](x) = \lambda[I](x) \qquad (4)$$

这里λ为一常数，$[I]$为单位张量。(4) 式还可写成如下形式，

$$([A] - \lambda[I])(x) = 0 \qquad (5)$$

此式是对于x_i（$i = 1, 2, 3$）的线性方程组，若使它有非零解，其系数行列式应为零，即

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

展开后得λ的三次方程

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0 \tag{6}$$

其中

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} \tag{7}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix} \tag{8}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{9}$$

在一般情况下，有三个根，即λ_1，λ_2，λ_3它们称为本征方程（6）的特征值。对每一个λ，代入方程（5）可得一组x_i，它们相应于一个矢量，称特征矢量。将每个矢量的分量作为矩阵$[M]$的行即得一方阵$[M]$（三个矢量，每个矢量三个分量）。特征值λ构成一对角矩阵，即

$$[D] = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix} \tag{10}$$

利用对角矩阵可以把方程组写成矩阵方程，于是（4）式可写成

$$[A][M] = [M][D] \tag{11}$$

用$[M]^{-1}$左乘（11）式得

$$[M]^{-1}[A][M] = [D] \tag{12}$$

方程（12）说明$[D]$与$[M]^{-1}[A][M]$满足（1）式。相似矩阵有一重要性质，就是它们的特征相同。为了证明这点，将$[M]^{-1}[A][M]$代替方程（5）中的$[A]$得

$$\begin{aligned} &|[M]^{-1}[A][M] - \lambda[I]| \\ &= |[M]^{-1}|\,|[A] - \lambda[I]|\,|[M]| \\ &= |[A] - \lambda[I]| \end{aligned} \tag{13}$$

可见$[M]^{-1}[A][M]$的特征方程与$[A]$的特征方程是相同的，它的特征值也是相同的。这说明λ_1，λ_2，λ_3不随线性变换而改变，即它是不变量。

由于λ_1，λ_2，λ_3是方程（5）的三个根，应有

$$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)=0 \tag{14}$$

将上式展开并与（6）比较可得

$$I_1=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 \tag{15}$$

$$I_2=\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1 \tag{16}$$

$$I_3=\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \tag{17}$$

既然λ_1，λ_2，λ_3不变量，那么推知I_1，I_2，I_3也是不变量。

Ⅳ．曲线坐标中的运算公式

一、柱坐标系

$$\text{grad}\phi=\frac{\partial\phi}{\partial r}e_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}e_\theta+\frac{\partial\phi}{\partial z}e_z \tag{1}$$

$$\text{div}A=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial A}{\partial z} \tag{2}$$

$$\text{rot}A=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\theta}-\frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)e_r+\left(\frac{\partial A_r}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial r}\right)e_\theta+\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)-\frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]e_z \tag{3}$$

$$\nabla^2\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \tag{4}$$

$$\nabla^2A=\left(\nabla^2A_r-\frac{A_r}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}\right)e_r+\left(\nabla^2A_\theta+\frac{A_\theta}{r^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial A}{\partial\theta}\right)e_\theta+\nabla^2A_z\,e_z \tag{5}$$

应变分量：

$$e_{rr}=\frac{\partial u_r}{\partial r}\qquad e_{\theta\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_r}{r}$$

$$e_{zz}=\frac{\partial u}{\partial z}\qquad e_{r\theta}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r}\right)$$

$$e_{zr}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{\partial z}\right) \tag{6}$$

$$e_{\theta z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)$$

广义虎克定律：

$$\sigma_{ij}=\lambda e_{kk}\delta_{ij}+2\mu e_{ij} \tag{7}$$

(σ_{ij}、e_{ij}角标i、j分别取1、2、3时各对应r、θ、z)

应力分量：

$$\sigma_{rr}=\lambda\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u}{r}\right)+2\mu\frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\sigma_{\theta\theta}=\lambda\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u}{r}\right)+2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_r}{r}\right)$$

$$e_{zz}=\lambda\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_r}{r}\right)+2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{8}$$

$$\sigma_{r\theta}=\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\right)$$

$$\sigma_{zr}=\mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)$$

$$\sigma_{\theta z}=\mu\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\theta}\right)$$

二、球坐标系

$$\mathrm{grad}\phi=\frac{\partial\phi}{\partial r}e_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}e_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}e_\varphi, \tag{8}$$

$$\mathrm{div}A=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta\sin\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} \tag{9}$$

$$\mathrm{rot}A=\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\varphi\sin\theta)-\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right]e_r+\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right]e_\theta+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]e_\varphi \tag{10}$$

$$\nabla^2\phi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} \tag{11}$$

$$\nabla^2A=\left[\nabla^2A_r-\frac{2}{r^2}A_r-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta\sin\theta)-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right]e_r$$

$$+\left[\nabla^2A_\theta-\frac{A_\theta}{r^2\sin\theta}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}-\frac{2}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right]e_\theta+\left[\nabla^2A_\varphi\right.$$

$$\left.-\frac{A_\varphi}{r^2\sin^2\theta}+\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}+\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right]e_\varphi \tag{12}$$

应变分量：

$$e_{rr}=\frac{\partial u_r}{\partial r}\qquad e_{\theta\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_r}{r}$$

$$e_{\varphi\varphi}=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{u_r}{r}+\frac{u_\theta}{r}\operatorname{ctg}\theta$$

$$e_{r\varphi}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}-\frac{u_\varphi}{r}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}\right)$$

$$e_{r\theta}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}-\frac{u_\theta}{r}+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)$$

$$e_{\varphi\theta}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta}-\frac{u_\varphi}{r}\operatorname{ctg}\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}\right)\qquad(13)$$

广义虎克定律：

$$\sigma_{ij}=\lambda e_{kk}\delta_{ij}+2\mu e_{ij}$$

(σ_{ij}、e_{ij}中 i，$j=1$，2，3时，相应角标对应 r，θ，φ)

应力张量分量

$$\sigma_{rr}=\lambda\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{2u_r}{r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{u_\theta}{r}\operatorname{ctg}\theta\right)+2\mu\frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$\sigma_{\theta\theta}=\lambda\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{2u_r}{r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{u_\theta}{r}\operatorname{ctg}\theta\right)+2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_r}{r}\right)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}=\lambda\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{2u_r}{r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{u_\theta}{r}\operatorname{ctg}\theta\right)+2\mu\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{u_r}{r}+\frac{u_\theta}{r}\operatorname{ctg}\theta\right)$$

$$\sigma_{r\varphi}=\mu\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}-\frac{u_\varphi}{r}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}\right)$$

$$\sigma_{r\theta}=\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}-\frac{u_\theta}{r}+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)$$

$$\sigma_{\varphi\theta}=\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta}-\frac{u_\varphi}{r}\operatorname{ctg}\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}\right)\qquad(14)$$

说明：曲线坐标系下的应变张量及应力张量公式之导出，过程繁冗，故此处仅给出其结果。

参 考 书 目

〔1〕牟永光，《有限单元法弹性波偏移》，《地球物理学报》Vol. 27, No.3 P.268-277, 1984。

〔2〕〔苏〕Л. М. 布列霍夫斯基赫著，杨训仁译，《分层介质中的波》p. 191—192, p.210—212，科学出版社，1960。

〔3〕Born, W.T., 1941, Attenuation constant of earth materials, Geophysics, Vol. 6, p. 13—148。

〔4〕Attewell, P.B., and Ramana, Y.V. 1966, Wave attenuation and internal friction as function of frequency in rocks, Geophysics, Vol.31, p.1049—1056。

〔5〕Knopoff, L., 1964, Q, Rev. Geophys. Vol. 2, p.625—660。

〔6〕Kuster, G. T., and Toksöz, M. N. 1974, Velocity and attenuation of seismic waves in two-phase media. Part I. Theoretical formulations, Geophysics, Vol.39, p.587—606。

〔7〕Toksöz M. N., Cheng, C.H., and Timur, A., 1976, Velocities of seismic waves in porous rocks, Geophysics, Vol. 41, p.621—645。

〔8〕王维佳，《粘性可压缩流体中的波》，《地球物理学报》Vol.27, No. 1, p.34—93, 1984。

〔美〕N. H. 瑞克著，许云译，《粘弹性介质中的地震波》第2、3、4章，地质出版社，1981。

〔9〕何祚镛、赵玉芳，《声学理论基础》p.353—357，国防工业出版社，1981。

〔10〕〔美〕W. 伊文等著，刘光鼎译，《层状介质中的弹性波》p.35—61，科学出版社，1966。

〔11〕〔瑞典〕M. 巴特著，郑治真译，《地震学的数学问题》73，第十二章，科学出版社，1976。

〔12〕郭自强，《固体中的波》，地震出版社，1982。

〔13〕〔美〕A.C.艾龙根、〔土耳其〕E.S.舒华毕，《弹性动力学》，石油工业出版社，1984。

〔14〕〔苏〕H. 考尔斯基著，王仁等译：《固体中的应力波》，科学技术出社，1958。

〔15〕徐果明、周惠兰：《地震学原理》，科学出版社，1982。

〔16〕王龙甫：《弹性理论》，科学出版社，1979。

〔17〕〔日〕力武常次等著：地球物理シリーズ《地震予知工》，学会出版センター1980。

〔18〕〔苏〕Л.Д. 朗道、E.M. 栗弗席兹：《连续介质力学》第一册，pp. 8、16、59—61，人民教育出版社，1956。

〔19〕王仁、丁中一等编：《固体力学基础》，地质出版社，1979。