# 作者序

本书是根据我在国立莫斯科大学数学力学系所用的讲义編成的。在編拟讲义的大綱时，我从这样的观点出发，就是内容的选取不应当是随意的，也不应当仅仅依靠原有的傳統。常微分方程在振动理論和自动控制理論中找到了最重要的和引起兴趣的技术上的应用。这些应用就成为我选擇材料的指导思想。振动理論和自动控制理論无疑地会在所有現代科学技术的发展中起重要作用，因此，我认为这样选擇教材的途徑不仅是可能的，而且在任何情况下也是合适的。我力求不仅教給学生在技术应用方面有用的純粹的数学工具，同时也讲一点技术应用本身，我把一些技术問題包括在讲义中，它們在 §13, 27, 29 中讲述。我认为这些問題組成了讲义的、因而也就是本书的不可分的有机部分。

除了讲义中讲述过的內容之外，也把学生討論班上研究的某些較难的問題列在书內。它們包含在 § 19, 31 两节中，§ 24, 25, 30 三节的材料中只有一部分是在課程中讲过的。为了讀者方便起見，在最末的第六章按照本书的需要引述了一些綫性代数的知識。

最后，我要对我的学生和亲近的同志們 В. Г. 巴尔强斯基 (В. Г. Болтянский), Р. В. 加姆克来列柔 (Р. В. Гамкрелидзе) 和 Е. Ф. 密什琴科 (Е. Ф. Мищенко) 表示感謝，他們在讲义的准备和讲授以及本书的編写和校閱的过程中給我很大的帮助。我也怀念同我有长久友誼的苏联杰出的振动理論和自动控制理論学家 А. А. 安德罗諾夫 (Александров Александрович Андронов)，他对我的研究兴趣有决定性的影响。他的影响主要体現在本书的风格和指导思想上。

Л. С. 龐特里雅金

1960 年 7 月 3 日　莫斯科

# 目　录

作者序

第一章　引論 ……1

§1. 一阶微分方程 ……1

§2. 一些初等的求积方法 ……6

§3. 存在性和唯一性定理的叙述 ……18

§4. 化一般的微分方程組为标准方程組 ……25

§5. 复的微分方程 ……33

§6. 关于綫性微分方程的一些知識 ……39

第二章　常系数綫性方程 ……41

§7. 常系数綫性齐次方程(单根的情形) ……42

§8. 常系数綫性齐次方程(重根的情形) ……50

§9. 稳定多項式 ……57

§10. 常系数綫性非齐次方程 ……63

§11. 消去法 ……68

§12. 复数振幅法 ……77

§13. 电路 ……81

§14. 标准的常系数綫性齐次方程組 ……95

§15. 自治的微分方程組和它們的相空間 ……105

§16. 常系数綫性齐次方程組的相平面 ……117

第三章　变系数綫性方程 ……129

§17. 标准綫性方程組 ……129

§18. $n$ 阶綫性方程 ……139

§19. 周期系数的标准綫性齐次方程組 ……147

第四章　存在性定理 ……153

§20. 对于一个方程的存在性和唯一性定理的証明 ……153

§21. 标准方程組的存在性和唯一性定理的証明 ……163

§22. 解的連續性和可微性的局部的定理 ……174

§23. 首次积分 ……186
§24. 軌綫在最大时間区間上的性态 ……194
§25. 連續性和可微性的整体的定理 ……198
**第五章 稳定性** ……207
§26. 李雅普諾夫定理 ……208
§27. 离心調速器(維什涅格拉德斯基的研究) ……221
§28. 极限圈 ……227
§29. 电子管振蕩器 ……243
§30. 二阶自治系統的平衡位置 ……250
§31. 周期解的稳定性 ……267
**第六章 綫性代数** ……284
§32. 最小化零多項式 ……284
§33. 矩陣函数 ……291
§34. 矩陣的若当型 ……299
**索引** ……305

# 第一章

# 引　論

这一章首先讲解后面要研究的一些概念的定义。諸如，什么是常微分方程組，什么是它的解以及这些解有多少等等的主要問題都要在这一章給以回答。解的多少由存在性与唯一性定理确定，在这里对它們只是叙述而不証明。这些定理以及一系列其他同样类型的定理的証明将在第四章給出，这时在第一章中所叙述的定理已經多次应用到面弄清楚它們的意义了。除了这些基本知識以外，在第一章还要介紹几种最簡单类型的微分方程的解法。最后，要討論复的微分方程以及它們的复值解，并且介紹关于綫性微分方程組的最簡单的知識。

## §1. 一阶微分方程

**微分方程** 是指这样的方程，其中未知的是一个变量或几个变量的函数，并且在方程中不仅有函数本身而且有它們的导数。如果方程中的未知函数是多个变量的函数，那末称这方程为 **偏微分方程**；否則，即所討論的函数只是一个变量的函数时，那末称这方程为 **常微分方程**。今后我們只討論常微分方程。

因为在許多物理应用中，未知函数的自变量是时間，并且簡記为 $t$，所以今后用 $t$ 表示自变量；用 $x, y, z$ 等等表示未知函数。函数关于 $t$ 的导数用点来記：

$$\dot{x}=\frac{dx}{dt},\quad \ddot{x}=\frac{d^2x}{dt^2},\quad \cdots;$$

当这种記法不方便或者不可能时，我們就用带括弧的上标指出导

数的阶数，例如，$x^{(n)}=\frac{d^nx}{dt^n}$.

我們先討論一个的一阶微分方程，它可以写成形式：

$$F(t, x, \dot{x})=0. \tag{1}$$

这里，$t$ 是自变量，$x$ 是 $t$ 的未知函数，$\dot{x}=\frac{dx}{dt}$ 是未知函数的导数；函数 $F$ 是三个变量确定的函数。函数 $F$ 可能并不是对变量的所有值有定义，所以要談論函数 $F$ 的**定义区域** $B$——这里所說的区域是三个变量 $t, x, \dot{x}$ 的坐标空間中的区域。因为在方程(1)中只是出現未知函数 $x$ 的一阶导数，所以称方程(1)是**一阶的**。如果自变量 $t$ 的函数 $x=\varphi(t)$ 在区間 $r_1<t<r_2$（并不排除 $r_1=-\infty$，$r_2=+\infty$ 的情形）上有定义，当用 $\varphi(t)$ 代替(1)中的 $x$ 时，得到了在区間 $r_1<t<r_2$ 上的恒等式，我們就称函数 $x=\varphi(t)$ 是方程(1)的**解**；而称区間 $r_1<t<r_2$ 为解 $\varphi(t)$ 的**定义区間**。很明显，仅当函数 $\varphi(t)$ 在整个区間 $r_1<t<r_2$ 上有一阶导数（特别，函数是連續的）时才能在关系(1)作代換 $x=\varphi(t)$，而为了在关系(1)中能作代換 $x=\varphi(t)$，还必須对区間 $r_1<t<r_2$ 中的变量 $t$ 的任一值，以 $(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t))$ 为坐标的点属于函数 $F$ 的定义区域 $B$.

关系式(1)联系了三个变化着的量 $t, x, \dot{x}$. 在某种情形下，它确定变量 $\dot{x}$ 为自变量 $t, x$ 的单值的隐函数。这时，微分方程(1)等价于形为

$$\dot{x}=f(t, x) \tag{2}$$

的微分方程。我們称微分方程(2)是**已解出导数的**。方程(2)較一般的微分方程(1)在某种意义下更容易研究些。我們現在将討論已解出导数的方程，我們不再认为关系(2)是形如(1)的方程关于 $\dot{x}$ 解出的結果，而是从两个自变量 $t, x$ 的給定的函数 $f(t, x)$ 出发。

为了利用明显的几何表示，我們引进变量 $t$ 和 $x$ 的坐标平面 $P$，这时，取自变量 $t$ 的軸作为横坐标軸，未知函数 $x$ 的軸作为纵坐标軸。确定微分方程(2)的函数 $f$ 可能不是对变量 $t$ 和 $x$ 的全部值

都有意义，或者說不是在平面 $P$ 的所有点处而仅在 $P$ 的某一集合 $\Gamma$ 上有定义(图1)。我們将設集合 $\Gamma$ 是一个区域，就是說，对 $\Gamma$ 的每一点 $p$，有一中心为 $p$，半徑不为零的圓位于 $\Gamma$ 中。我們又假設函数 $f$ 及其偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 在区域 $\Gamma$ 中是变量 $t, x$ 的連續函数。方程(2)的解 $x=\varphi(t)$ 在平面 $P$ 上的几何表示是以 $x=\varphi(t)$ 为方程的曲綫。这条曲綫是处处有切綫的，并且完全落在区域 $\Gamma$ 中；我們称这条曲綫是微分方程(2)的积分曲綫。

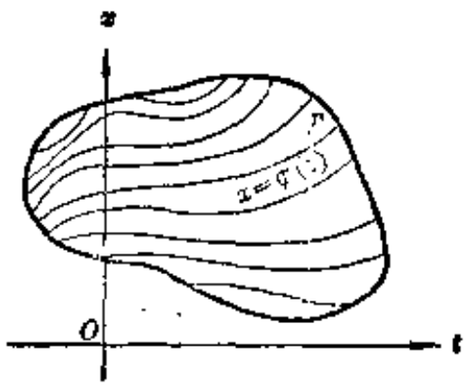

图 1

## 存在性与唯一性定理

我們知道，在代数学中解决各种代数方程組解的个数問題的定理起了很大的作用，例如，断定 $n$ 次多項式恰有 $n$ 个根(把它們的重数算在內)的**代数学基本定理**就是这样。同样，在微分方程理論中，关于微分方程解的个数的問題也是重要的理論問題。可以証明，每一微分方程的解的集合有連續統的势[①]，所以并不提关于解的个数的問題，而提如何描述給定微分方程解的集合的問題。在本节中叙述而不加証明的存在性和唯一性定理(定理1)回答了这一問題。至于这个定理的証明，我們将在§20中給出。

**定理1.** 給定微分方程

$$\dot{x}=f(t, x). \tag{3}$$

設函数 $f(t, x)$ 在变量 $t, x$ 的平面 $P$ 的某一区域 $\Gamma$ 上有定义，并且 $f$ 及其偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 在整个区域 $\Gamma$ 上是連續的。定理断言

1° 对于区域 $\Gamma$ 的任何点 $(t_0, x_0)$，方程(3)有一个解 $x=\varphi(t)$，

① 就是解的"个数"和区間 $[0, 1]$ 中点的"个数"是一样多的。关于集合的势的概念讀者将在实变函数論課程中学到。——譯者注

满足条件：

$$\varphi(t_0)=x_0; \tag{4}$$

2° 如果 $x=\psi(t)$ 和 $x=\chi(t)$ 是方程(3)的两个解，只要它們在某一值 $t=t_0$ 处是一致的，就是如果成立

$$\psi(t_0)=\chi(t_0),$$

那末在它們有定义的变量 $t$ 处两者是恒等的。

数 $t_0$, $x_0$ 称为解 $x=\varphi(t)$ 的**初始值**，关系式(4)称为这个解的**初始条件**。我們也說，解 $\varphi(t)$ **满足初始条件** (4)，或者說它**具有初始值** $t_0, x_0$. 在讲到解 $x=\varphi(t)$ 满足初始条件(4)(或者具有初始值 $t_0$, $x_0$)时，假設解 $x=\varphi(t)$ 的定义区間 $r_1<t<r_2$ 含有点 $t_0$.

于是，定理 1 断定，区域 $\Gamma$ 的任一点 $(t_0, x_0)$ 的坐标是方程(3)的某一解的初始值，并且两个具有同一初始值的解是一样的。

定理 1 的几何涵义是說，通过区域 $\Gamma$ 的每一点 $(t_0, x_0)$，有且只有方程(3)的一条积分曲綫(参見图 1).

我們已經以函数 $\varphi(t)$ 的图形对方程(3)的每一解 $x=\varphi(t)$ 作了几何解释。现在給出方程(3)本身的几何解释：过区域 $\Gamma$ 的每一点 $(t, x)$，引一条斜率为 $f(t, x)$ 的直綫 $l_{t,x}$，我們就得到了对应于方程(3)的**方向場**，这就給出了該方程的几何解释。

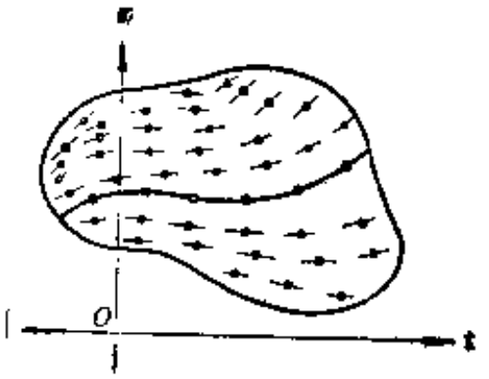


图 2

方程的几何解释与它的解的几何解释的联系是：任一积分曲綫 $x=\varphi(t)$ 在它的每一点 $(t, \varphi(t))$ 处与直綫 $l_{t,\varphi(t)}$ 是相切的(图 2).

## 例 題

**例題 1** 为了解释定理 1 的意义(这里是对它的第二部分)，我們来解微分方程

$$\dot{x}=ax, \tag{5}$$

其中 $a$ 是实数。现在，

$$f(t, x)=ax$$

实际上只依赖于变量 $x$，它的定义区域是整个平面 $P$。函数 $f(t,x)=ax$ 及其导数 $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}=a$ 在整个平面 $P$ 上是变量 $t$ 和 $x$ 的連續函数，因此，对于方程(5)可以应用定理 1。把函数

$$x=ce^{at} \tag{6}$$

直接代入方程(5)，可以驗証函数(6)是方程(5)的解，这里 $c$ 是任一实数。我們来証明，給数 $c$ 以所有可能的值，就得到方程(5)的所有解。設 $x=\varphi(t)$ 是該方程的任意解，我們来証明，可以选擇常数 $c$ 使得 $\varphi(t)=ce^{at}$。設 $t_0$ 是解 $\varphi(t)$ 的存在区間中的某一点，又 $x_0=\varphi(t_0)$。置 $c=x_0e^{-at_0}$，那末方程(5)的解 $x=\varphi(t)$ 和 $x=ce^{at}=x_0e^{a(t-t_0)}$ 有相同的初始值 $(t_0, x_0)$，根据定理 1 的第二部分，它們是一致的。所以，公式(6)給出了微分方程(5)的所有解。

**例題 2.** 我們来給出放射性物质的衰变过程的数学描述。如果用 $x(t)$ 表示到时刻 $t$ 还沒有衰变的物质的量，那末在从 $t$ 到 $t+h$ 的小的时間間隔中物质的衰变的量是 $\alpha h x(t)$，这里 $\alpha$ 是与放射性物质的性质有关而很少依賴于 $h$ 的系数，确切地說，即当 $h\to 0$ 时它趋于确定的极限值 $\beta$。于是，我們有

$$x(t)-x(t+h)=\alpha h x(t).$$

以 $h$ 除上式的两端，取当 $h\to 0$ 时的极限，得到

$$\dot{x}(t)=-\beta x(t).$$

我們看到，函数 $x(t)$ 滿足例題 1 中所討論的最簡单的微分方程，所以

$$x(t)=ce^{-\beta t}.$$

为了确定常数 $c$，只要指定初始值就够了。例如，如果知道在时刻 $t=0$ 时，物质的量是 $x_0$，那末 $c=x_0$，并且

$$x(t)=x_0e^{-\beta t}.$$

这里衰变速度是用量綱为1/秒的量$\beta$表示的。常常用半衰期——物质衰变一半所用的时間——代替量$\beta$来表征衰变速度。以$T$表示半衰期，我們来确定量 $\beta$ 和 $T$ 之間的关系。我們有

$$\frac{x_0}{2}=x_0e^{-\beta T},$$

所以

$$T=\frac{1}{\beta}\ln 2.$$

## §2. 一些初等的求积方法

我們在处理微分方程时，所面临的主要問題是求出它的解。在微分方程理論中，正象在代数学中一样，关于所謂寻找方程的解的問題可以用不同方式来理解。在代数学中，首先是企图找出运用开根求解任意次方程的一般公式，例如二次方程的解的公式，三次方程的解的卡尔旦(Cardan)公式和四次方程的解的飞拉里(Ferrari)公式。后来証明了，运用开根来求解四次以上的方程的一般公式是不存在的。可是，近似求解具有数值系数的方程以及研究方程的根对系数的依賴关系还是可能的。在微分方程理論中，解的概念的演变大致也是这样，开始时总是力求来解微分方程或者如所謂"以求积方式积分出微分方程"，就是說，試图用初等函数以及它們的积分来表示出解。以后，当弄清楚只是对少数类型的方程才存在这种意义的解时，理論的重心就轉移到研究解的性态的一般規律。在这一节中，将介紹某些一阶方程的求积方法。

### 1) 求解方程

$$\dot{x}=f(t), \tag{1}$$

它的右端只与自变量 $t$ 有关。我們认为函数 $f(t)$ 在区間 $\tau_1<t<\tau_2$ 上有定义，并且是連續的。这时，方程(1)滿足定理1的条件，并且它的区域 $\Gamma$ 在变量 $t, x$ 的平面 $P$ 上是由不等式 $\tau_1<t<\tau_2$ 确定的带状区域。設 $t_0$ 是区間 $\tau_1<t<\tau_2$ 中的一点，置

$$\varphi_0(t)=\int_{t_0}^{t} f(\tau)\,d\tau.$$

函数 $\varphi_0(t)$ 在区间 $r_1<t<r_2$ 上是有定义的。可以証明，方程(1)的任意解是由下面的公式給出的：

$$x=\varphi(t)=\varphi_0(t)+c, \tag{2}$$

其中 $c$ 是任意常数。等式(2)的右端就是函数 $f(t)$ 的不定积分，所以公式(2)可以写为形式：

$$x=\int f(t)\,dt.$$

可以直接驗証，函数(2)是滿足方程(1)的。其次，給 $c$ 以任一值，由(2)得到一个解，它的图形可以由解 $x=\varphi(t)$ 的图形在垂直方向平行移动量 $c$ 而得到(图3)。由此看到，通过区域 $\Gamma$ 的每一点有由公式(2)确定的一条曲綫。根据定理1，公式(2)实质上概括了方程(1)的所有解。

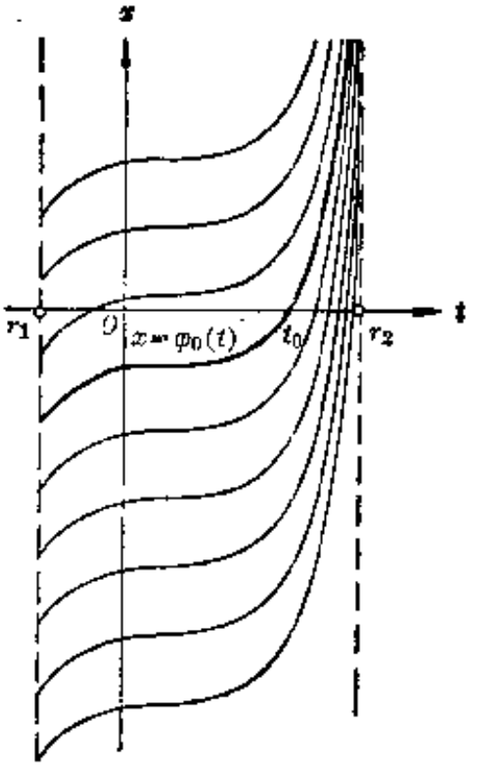

图 3

**2)** 求解方程

$$\dot{x}=g(x), \tag{3}$$

它的右端只依賴于未知函数 $x$。假設函数 $g(x)$ 在区間 $a_1<x<a_2$ 上有定义，并且有連續的导数。这时，定理1对方程(3)是适用的，且区域 $\Gamma$ 是变量 $t$，$x$ 平面 $P$ 上由不等式 $a_1<x<a_2$ 所确定的帶状区域。为简单起見，补充假設函数 $g(x)$ 在区間 $a_1<x<a_2$ 上不为零，因而不变号。設 $x_0$ 是区間 $a_1<x<a_2$ 上的任一点，置

$$G_0(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{g(\xi)}. \tag{4}$$

函数 $G_0(x)$ 在区間 $a_1<x<a_2$ 上有定义，并且它的导数在这个区間上不等于零，所以函数 $G_0(x)$ 是可逆的，即存在函数 $\psi_0(t)$，滿足

$$G_0(\psi_0(t)) = t. \tag{5}$$

可以証明，方程(3)的任一解是由公式

$$x = \psi(t) = \psi_0(t-c) \tag{6}$$

确定的，这里 $c$ 是任意常数。函数 $\psi(t)$ 是单調的，并且取属于区間 $a_1 < x < a_2$ 的所有的值。

首先証明函数(6)是方程(3)的解。由(5)得到

$$G_0(\psi(t)) = G_0(\psi_0(t-c)) = t-c. \tag{7}$$

关于 $t$ 导微这个关系式，得到

$$G_0'(\psi(t)) \cdot \dot{\psi}(t) = 1,$$

由此(参看(4))

$$\dot{\psi}(t) = g(\psi(t)).$$

因为函数 $\psi_0(t)$ 是 $G_0(x)$ 的逆函数，而 $G_0(x)$ 是在整个区間 $a_1 < x < a_2$ 上有定义的单調函数，所以函数 $\psi_0(t)$ (从而 $\psi(t)$) 是单調的，并且取区間 $a_1 < x < a_2$ 的所有值。其次，因为积分曲綫(6)是由曲綫 $x = \psi_0(t)$ 沿水平方向平行移动得到的 (图 4)，所以通过区域 $\Gamma$ 的每一点有形如(6)的一条曲綫。这样，根据定理 1，公式(6)概括了方程(3)的全部解。

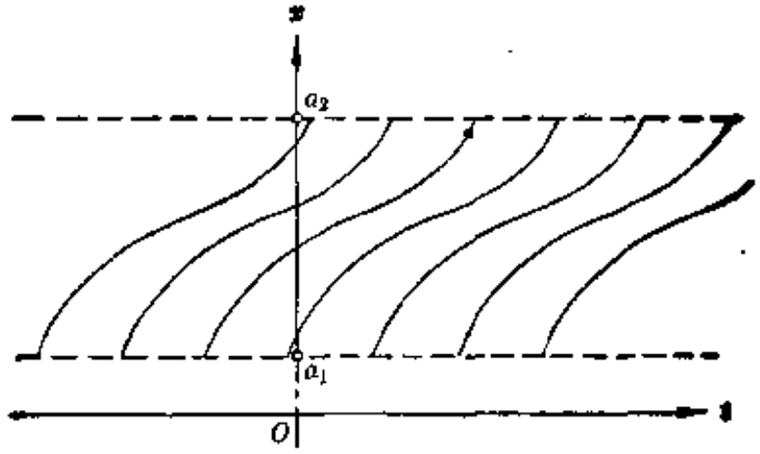


图 4

**注** 关系式(7)表明，函数 $\psi(t)$ 是函数 $G_0(x)+c$ 的逆函数，后者是函数 $\dfrac{1}{g(x)}$ 的不定积分。因此，方程(3)的所有解是用下式

来描述的：

$$\int \frac{dx}{g(x)} = t. \tag{8}$$

如果把函数 $t = G_0(x) + c$ 作为未知函数，那末为了求得它，我們得到方程(3)的等价微分方程

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{g(x)}.$$

后者可以用命题 1)的方法求解，这就給出了关系式(8)。

3) 我們来解所謂可分离变量的方程

$$\dot{x} = f(t)\,g(x). \tag{9}$$

假設函数 $f(t)$ 在区間 $r_1 < t < r_2$ 上有定义，且是連續的，函数 $g(x)$ 在区間 $a_1 < x < a_2$ 上有定义、且有連續的导数。这时，定理 1 对方程(9)是适用的，并且区域 $\Gamma$ 是由不等式

$$r_1 < t < r_2, \quad a_1 < x < a_2$$

确定的矩形。为簡单起見，假設函数 $g(x)$ 在区間 $a_1 < x < a_2$ 上不等于零。为了求解方程(9)，作两个輔助方程

$$\frac{du}{dt} = f(t), \tag{10}$$

$$\frac{dx}{du} = g(x). \tag{11}$$

方程(10)和(11)可以根据命题 1),2) 所說的方法求解。設 $u = \varphi_0(t)$ 是方程(10)的某一解，$x = \psi_0(u)$ 是方程(11)的在区間 $b_1 < u < b_2$ 上有定义的某一解，并且取区間 $a_1 < x < a_2$ 的所有值（参看命题 2)）。可以証明，方程(9)的任意解可以写为形式：

$$x = \chi(t) = \psi_0(\varphi_0(t) - c), \tag{12}$$

其中 $c$ 是任意常数。对于(12)中的每一个解，变量 $t$ 的变化区間应該使得函数 $u = \varphi_0(t) - c$ 的值属于区間 $b_1 < u < b_2$。

首先証明，函数(12)是方程(9)的解。因为函数 $\psi_0(u)$ 满足方

程(11)，所以 $\psi_0'(\varphi_0(t)-c)=g(\psi_0(\varphi_0(t)-c))=g(\chi(t))$；其次，$\dot{\varphi}_0(t)=f(t)$（参看 (10)）．导微关系式(12)，得到

$$\dot{\chi}(t)=\psi_0'(\varphi_0(t)-c)\cdot\dot{\varphi}_0(t)=g(\chi(t))\cdot f(t).$$

这就是說，函数 $x=\chi(t)$ 满足方程(9)．

現在証明，公式(12)給出了方程(9)的所有解。設 $(t_0,x_0)$ 是矩形 $\Gamma$ 的任一点。因为函数 $x=\psi_0(u)$ 取区間 $a_1<x<a_2$ 内的所有值，所以存在 $u_0$，使得 $\psi_0(u_0)=x_0$．置 $c=\varphi_0(t_0)-u_0$，根据(12)有 $\chi(t_0)=\psi_0(u_0)=x_0$．因此，通过矩形 $\Gamma$ 的每一点 $(t_0, x_0)$ 有形如(12)的曲綫。根据定理1，公式(12)概括了方程(9)的所有解。

**注** 公式(12)可以写成形式(与 1)，2)比較)：

$$\int\frac{dx}{g(x)}=\int f(t)\,dt.$$

**4)** 求解方程

$$\dot{y}=h\left(\frac{y}{t}\right), \tag{13}$$

它的右端只依賴于变量 $y$ 和 $t$ 的比值。这种方程叫做齐次方程。假設函数 $h(x)$ 在区間 $a_1<x<a_2$ 上有定义且有連續的导数。在变量 $t$ 和 $y$ 的平面 $P$ 上由不等式

$$a_1<\frac{y}{t}<a_2,\qquad t\neq 0$$

确定的区域 $\Gamma$ 中，定理 1 对于方程 (13) 是适用的。为簡单起見，补充假定函数 $h(x)-x$ 在区間 $a_1<x<a_2$ 上不为零。我們用**变量变換**的方法来解这个方程。在方程(13)中代替未知函数 $y$，置

$$y=xt, \tag{14}$$

引进了新的未知函数 $x$，于是得到关于新的未知函数 $x$ 的方程

$$\dot{x}t+x=h(x),$$

或者

$$\dot{x}=\frac{h(x)-x}{t}.$$

这是变量可分离的方程，可以用命题 3)的方法求解。

5) 求解**线性**方程

$$\dot{y}=a(t)y+b(t). \tag{15}$$

这里未知函数及其导数是线性地出现的。假設函数 $a(t)$ 和 $b(t)$ 在区間 $r_1<t<r_2$ 上有定义，并且是連續的。这时，在由不等式

$$r_1<t<r_2$$

确定的区域 $\Gamma$ 中，**定理** 1 对于方程(15)是适用的。如果 $b(t)\equiv 0$，則称方程(15)是**齐次的**。

我們先討論对应于**非齐次**方程(15)的齐次方程

$$\dot{x}=a(t)x. \tag{16}$$

方程(16)是变量可分离的方程，可以用命题 3)的方法来求解。可是在这里函数 $g(x)$ 等于 $x$，它是会变为零的。所以，为了解方程(16)，需要分别考察区域 $x>0$ 和 $x<0$，以及解 $x=0$。但我們不这样做，而直接指出形状如下的求解公式：

$$x=ce^{\int_{t_0}^{t}a(\tau)d\tau}, \tag{17}$$

这里 $r_1<t_0<r_2$，$c$ 是任意常数。把函数(17)代入方程(16)，就可証明公式(17)給出的函数是解；我們指出它包括了所有的解。設 $(\vartheta_0, x_0)$ 是带状区域 $r_1<t<r_2$ 的任一点，为使解(17)具有初始值 $(\vartheta_0, x_0)$，只要选擇常数 $c$ 满足条件

$$x_0=ce^{\int_{t_0}^{\vartheta_0}a(\tau)d\tau}.$$

上式关于 $c$ 是单值可解的。

我們用**常数变易法**来解非齐次方程(15)。假設

$$y=ce^{\int_{t_0}^{t}a(\tau)d\tau}, \tag{18}$$

且不把 $c$ 看成常数，而看成是 $t$ 的函数。把函数(18)代入方程(15)，得到

$$\dot{c}e^{\int_{t_0}^{t}a(\tau)d\tau}=b(t), \tag{19}$$

于是，$\dot{c}=b(t)e^{-\int_{t_0}^{t}a(\tau)d\tau}$。这个关于 $c$ 的微分方程，可以用命题 1) 的方法求解。

在这情形，常数变易法是引进新的未知函数的方法。也就是我們用公式(18)引进新的未知函数 $c$ 来代替未知函数 $y$. 找到方程 (19) 的任意解后，按照公式 (18)，就找到了方程 (15) 的任意解。

## 例 題

**例題 1.** 求解方程

$$\dot{x}=\frac{2}{t^2-1}. \tag{20}$$

这里和命題 1) 中一样，右端 $f(t)=\frac{2}{t^2-1}$ 只依賴于自变量 $t$，它在点 $t=1$ 和 $t=-1$ 处是間断的。

这样，变量 $t, x$ 的平面 $P$ 上区域 $\Gamma$ 是由带状区域 $-1<t<1$ 及两个半平面 $t<-1$ 及 $t>1$ 組成的。为了按命題 1) 的方法解方程(20)，应該把变量 $t$ 的区間 $-\infty<t<+\infty$ 分为三个区間 $-\infty<t<-1$, $-1<t<1$, $1<t<+\infty$，并在每一区間上取 $f(t)$ 的不定积分。为了求积，把函数 $f(t)$ 分解为最簡分式：

$$\dot{x}=\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}.$$

对于三个区間的每一个，方程(20)的解写成形式：

$$x=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\ln|t-1|-\ln|t+1|+c$$

$$=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+c. \tag{21}$$

如 §1 所說，微分方程的解是在区間上有定义的連續函数，且滿足方程，所以当固定 $c$ 时，公式(21)不是确定了方程(20)的一个解，而是确定了三个解，第一个解的定义区間是 $-\infty<t<-1$，第二个是 $-1<t<1$，第三个是 $1<t<+\infty$(图 5)。

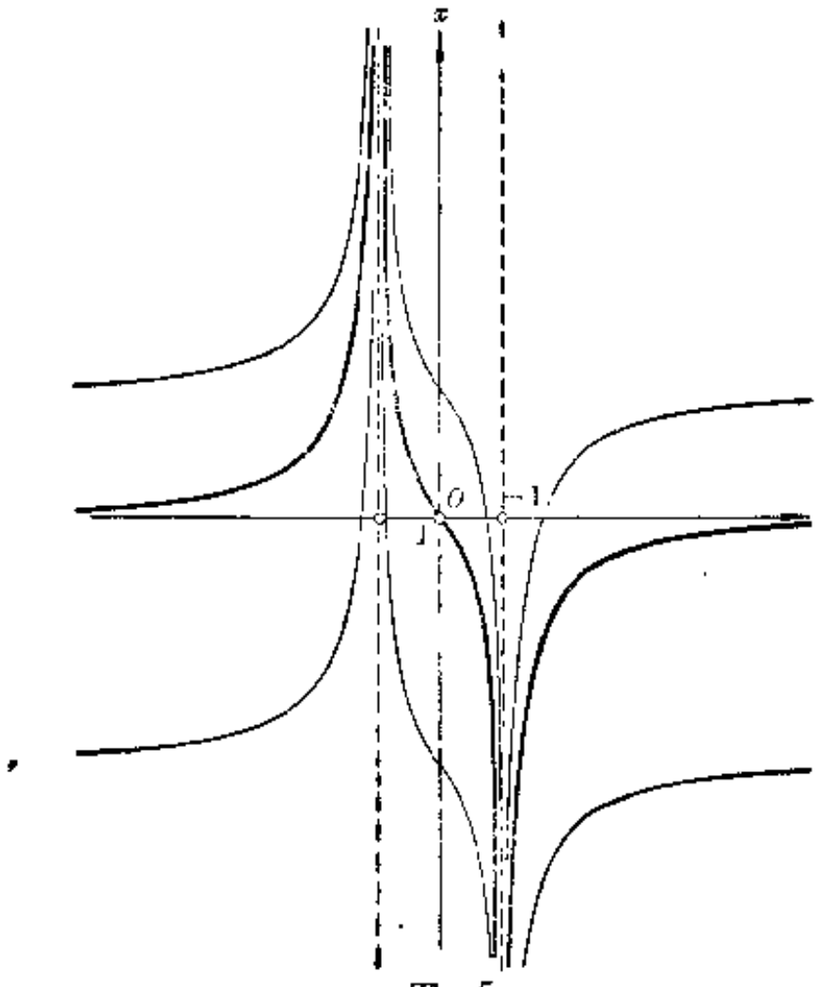


图 5

**例题 2.** 求解方程

$$\dot{x}=\frac{x^2-1}{2}. \tag{22}$$

它的右端仅依赖于 $x$，对所有的值 $x$ 有定义且是連續可微的，所以方程 (22) 的定义区域 $\Gamma$ 是整个平面 $P$。方程 (22) 的右端函数 $g(x)=\frac{x^2-1}{2}$ 在点 $x=-1$ 和 $x=1$ 处变为零，所以，为了利用命題 2) 中所說的法則来解方程 (22)，应把区域 $\Gamma$ 分为三个区域，它們由不等式

$$-\infty<x<-1,\quad -1<x<1,\quad 1<x<+\infty \tag{23}$$

确定，此外，考察明显的解 $x\equiv -1$，$x\equiv +1$。在 (23) 的任一区域上，解 $x=\psi(t)$ 是由方程

$$\int\frac{2dx}{x^2-1}=t$$

即
$$\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|=t-c_1$$

确定的隐函数。上式等价于方程

$$\left|\frac{x-1}{x+1}\right|=e^{t-c_1}=c_2e^t, \tag{24}$$

这里 $c_2$ 是任意的正的常数。在区间 $-\infty<x<-1$ 及 $1<x<+\infty$ 上，方程(24)写成形式：

$$\frac{x-1}{x+1}=c_2e^t,$$

而在区间 $-1<x<1$ 上是

$$\frac{x-1}{x+1}=-c_2e^t;$$

两种情形可以包括在一个公式

$$\frac{x-1}{x+1}=ce^t \tag{25}$$

中，这里 $c$ 是任一不为零的常数。从方程(25)解出 $x$，得到

$$x=\frac{1+ce^t}{1-ce^t}, \tag{26}$$

其中 $c\neq 0$.

当公式(26)中的 $c$ 是负数时，(26) 給出一个位在带状区域 $-1<x<1$ 中的解；而当(26)中的 $c$ 是正数时，它确定了两个解，其一定义在区間 $-\infty<t<-\ln c$ 上，位于半平面 $x>1$ 中；其另一定义在区間 $-\ln c<t<+\infty$ 上，位于半平面 $x<-1$ 中。方程(22)除了有位于(23)中的各区域的解以外，另外还有两个解 $x=1$ 和 $x=-1$，它們可以形式地在(26)中置 $c=0$ 和 $c=\infty$ 而得到。因为通过平面 $P$ 的每一点，有上面找到的一个解(图 6)，所以根据定理 1，就不存在另外的解。因此，如果认为(26)中的 $c$ 取所有的实数值，也包括 $\infty$，那末公式(26)概括了方程(22)的所有解。

**例題 3.** 例題 2 是下面一般形式的方程：

$$\dot{x}=g(x) \tag{27}$$

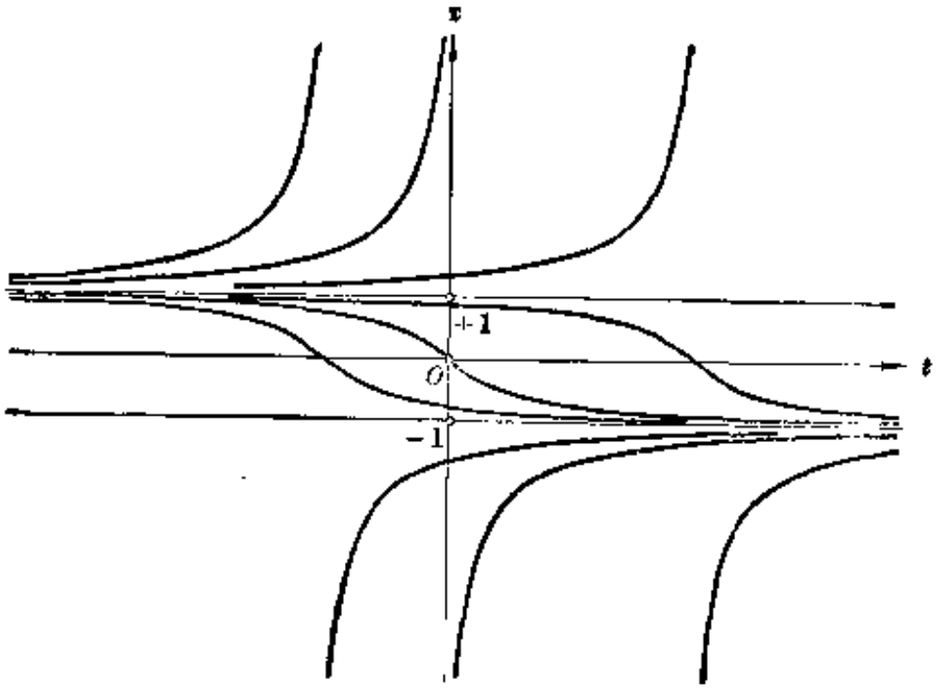


图 6

的典型例子，其中 $g(x)$ 对所有值 $x$，$-\infty<x<+\infty$，有連續的导函数。定理 1 对于方程(27)是适用的，区域 $T$ 是整个平面 $P$. 首先注意到，如果 $a$ 是函数 $g(x)$ 的零点，即 $g(a)=0$，那末函数

$$x\equiv a$$

是方程(27)的解。所以函数 $g(x)$ 的每一零点对应于一个解，它的图形是平面 $P$ 上的水平直綫 $x=a$. 为簡单計，假設函数 $g(x)$ 的零点集合沒有聚点。这时，形如 $x=a$ 的直綫把平面 $P$ 分成一系列的带状区域，其中可能有一个或者两个形如 $x<a'$ 和 $x>a''$ 的半平面。在每一带状区域中，方程(27)可以应用命題 2)中所說的方法求解。我們来指出这些解的某些本质的性质。設 $a_1$ 和 $a_2$ $(a_1<a_2)$ 是函数 $g(x)$ 的两个相邻的零点，于是 $g(x)$ 在区間 $a_1<x<a_2$ 上不等于零。設 $x=\psi_0(t)$ 是方程的位在区域 $a_1<x<a_2$ 中的任一解，在命題 2) 中曾指出，所有位在这个区域中的另外的解可以按公式 $x=\psi_0(t-c)$ 得到，也就是把解 $\psi_0(t)$ 沿水平方向平移而得到。由于函数 $g(x)$ 在区間 $a_1<x<a_2$ 上不等于零，所以解 $\psi_0(t)$ 是单調的。为确定起見，假設当 $a_1<x<a_2$ 时 $g(x)>0$，这时解 $\psi_0(t)$

是单調增加函数。从定理1容易得知，解 $\psi_0(t)$ 可以延展到区間 $-\infty<t<+\infty$，并且 $\lim_{t\to-\infty}\psi_0(t)=a_1$，$\lim_{t\to+\infty}\psi_0(t)=a_2$。設 $a$ 是 $g(x)$ 的最大零点（如果存在的話），我們来描述解在区域 $x>a$ 中的性状。很明显，当 $x>a$ 时 $g(x)\neq0$，为确定起見，設当 $x>a$ 时 $g(x)>0$。若 $\psi_0(t)$ 是方程(27)的位在区域 $x>a$ 中的任一解。根据命題2)，位在这一区域中的所有解可以由公式 $x=\psi_0(t-c)$ 得到。从定理1易知，解 $\psi_0(t)$ 可以延展到区間 $-\infty<t<r$，并且 $\lim_{t\to-\infty}\psi_0(t)=a$，$\lim_{t\to r}\psi_0(t)=+\infty$；这里 $r$ 可以取有限值或 $+\infty$。这样，在半平面 $x>a$ 上可能有两种情形：一是每一解定义在区間 $-\infty<t<+\infty$ 上，一是每一解定义在区間 $-\infty<t<r$ 上，这里数 $r$ 是有限的，并且与选择的解有关。因为过平面 $P$ 的每一点有上述

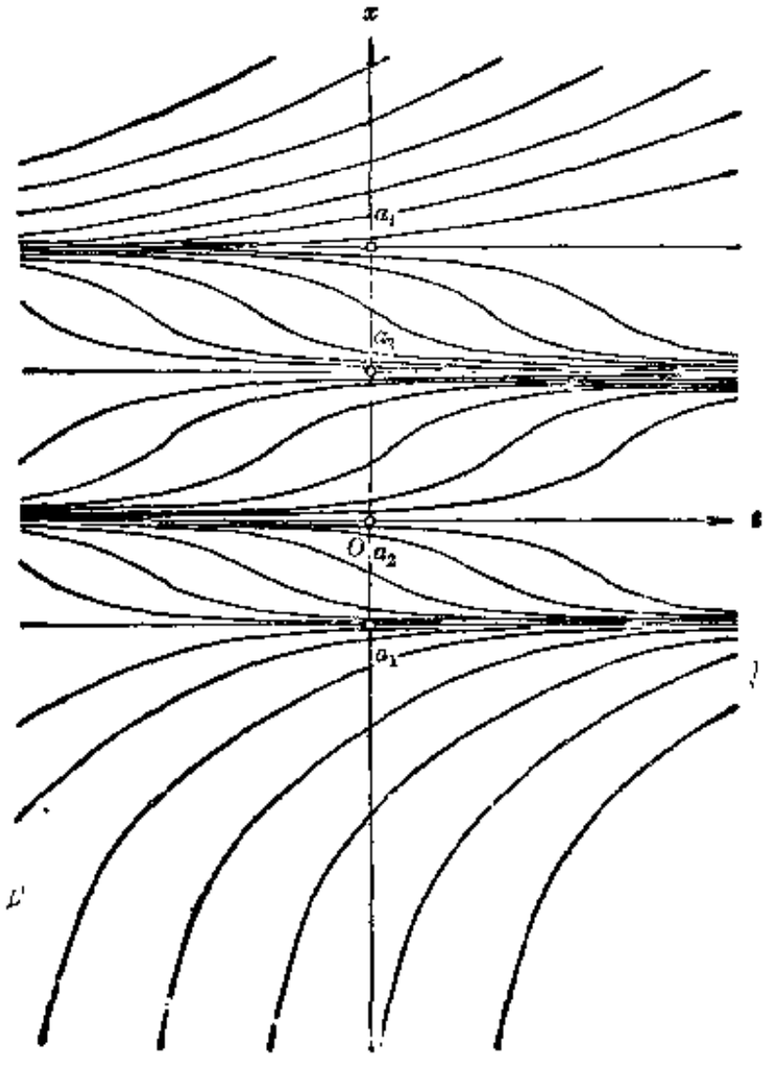


图 7

形式的一个解(图 7)，所以根据定理 1，上述的解概括了方程(27)的所有解。

**例题 4.** 我們来証明，如果方程的右端不具有連續的导数，那末定理 1 的第二部分(唯一性)可能不成立。討論方程

$$\dot{x}=3x^{\frac{2}{3}}. \tag{28}$$

方程(28)的右端对于所有的 $x$ 有定义，并且是連續的，但它的导数 $2x^{-\frac{1}{3}}$ 在点 $x=0$ 处有間断。如果取平面 $P$ 上所有滿足不等式 $x\neq 0$ 的点的集合作为区域 $\Gamma$，那末在这个区域中，定理 1 对方程 (28) 是适用的，且在每一半平面 $x>0$, $x<0$ 中可以用命題 2) 的方法来解方程(28)。用这样的方法解方程(28)，我們得到

$$x^{\frac{1}{3}}=t-c. \tag{29}$$

函数(29)的图形的一部分 (当 $t<c$ 时) 位于下半平面 $x<0$ 內，另一部分(当 $t>c$ 时)位于上半平面 $x>0$ 內。但是，直接可以驗証，

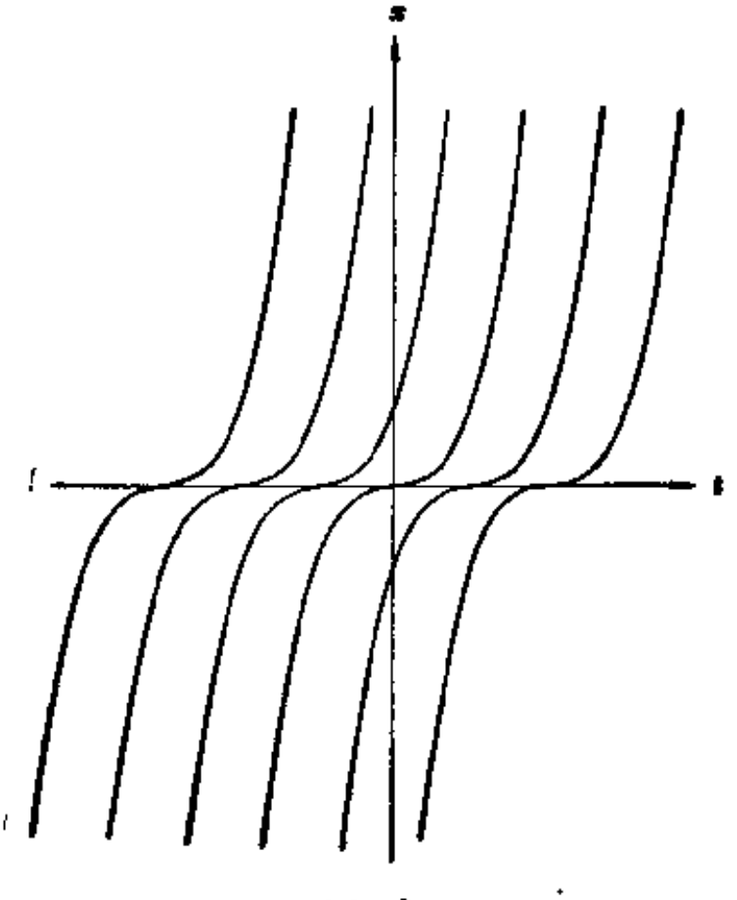


图 8

对于区間 $-\infty<t<+\infty$ 中的所有的 $t$，函数(29)[即 $x=(t-c)^3$]是方程(28)的解。同时，$x\equiv 0$ 也是方程(28)的解。这样，通过直綫 $x=0$ 的每一点 $x=0, t=c$，就有两个解(图8)——解(29)及解 $x=0$。我們看到，对于方程(28)，定理1的第二部分(唯一性)不成立。

## §3. 存在性和唯一性定理的叙述

在§1中，我們討論了一个一阶的微分方程，并且叙述了这个方程解的存在性和唯一性定理。常微分方程理論也研究更一般的方程組。通常，常微分方程組中方程的个数就是其中出現的未知函数的个数，而所有的未知函数是同一个自变量的函数。存在性和唯一性定理在一切情况下都是能够研究給定的微分方程組的理論根据。

存在性和唯一性定理都是对外表上有某种特殊性的方程組叙述和証明的。其实，比較一般形式的方程可以化到这种方程組。对这种特殊形式的微分方程組，我們以后称它是标准的，虽然这个术語一般并不采用。

常微分方程組

$$\dot{x}^i=f^i(t, x^1, \cdots, x^n), \qquad i=1, \cdots, n \tag{1}$$

叫做标准的。其中，$t$ 是自变量，$x^1, \cdots, x^n$ 是变量 $t$ 的未知函数，而函数 $f^1, \cdots, f^n$ 是定义在 $n+1$ 維空間——它的点的坐标是变量 $t, x^1, \cdots, x^n$——的某一区域 $\Gamma$ 上的 $n+1$ 个变量的函数。这里和以后，欧几里得空間的"区域"了解为开集，就是說，它是一个集合，对其每一点，有一以該点为中心而半徑不为零的球位在这个集合中。今后总假設函数

$$f^i(t, x^1, \cdots, x^n), \qquad i=1, \cdots, n \tag{2}$$

在区域 $\Gamma$ 中是連續的，同时假設它的偏导数

$$\frac{\partial f^i(t, x^1, \cdots, x^n)}{\partial x^j}, \qquad i, j=1, \cdots, n \tag{3}$$

在区域 $\Gamma$ 中也是連續的。应該指出，有連續偏导数(3)的假設只是关于变量 $x^1, \cdots, x^n$ 的，而不是关于变量 $t$ 的。

在現时流行的常微分方程理論的著作中，常常不是要求偏导数(3)的連續性，而改为更弱的要求，即要求函数(2)滿足李普希茲条件。我认为这个拓广不是本质的，把注意集中在这里是不必要的(以后这个条件是要說明的)。

如果連續函数組

$$x^i=\varphi^i(t), \qquad i=1, \cdots, n \tag{4}$$

在区間 $r_1<t<r_2$ 上有定义，并且滿足方程組(1)，我們就称它为方程組(1)的解，而称区間 $r_1<t<r_2$ 为解(4)的定义区間(不排除 $r_1=-\infty$, $r_2=+\infty$ 的情形)。所謂函数組(4)滿足方程組(1)，是指以它們代替(1)中的 $x^1, \cdots, x^n$ 时，关系式(1)在区間 $r_1<t<r_2$ 上是 $t$ 的恒等式。为了这样的代入是可能的，函数(4)必須在区間 $r_1<t<r_2$ 的每一点有导数，且方程組(1)的右端对代入后的所有变量的值有定义，这就是說，对于区間 $r_1<t<r_2$ 中的所有的 $t$，以 $t, \varphi^1(t), \cdots, \varphi^n(t)$ 为坐标的点必須属于区域 $\Gamma$。

現在叙述标准的方程組(1)的存在性和唯一性定理。

**定理 2.** 設(1)是标准的常微分方程組。方程組(1)右端在某一区域 $\Gamma$ 中有定义，而函数(2)和(3)在这区域中是連續的。可以証明，对于区域 $\Gamma$ 中的每一点

$$t_0, x_0^1, \cdots, x_0^n, \tag{5}$$

存在着方程組(1)的定义在某一含有 $t_0$ 的区間上的解

$$x^i=\varphi^i(t), \qquad i=1, \cdots, n, \tag{6}$$

且滿足条件：

$$\varphi^i(t_0)=x_0^i, \qquad i=1, \cdots, n. \tag{7}$$

其次，可以証明，如果方程組(1)有两个解

$$\left.\begin{aligned} x^i&=\psi^i(t), \qquad i=1, \cdots, n,\\ x^i&=\chi^i(t), \qquad i=1, \cdots, n, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

满足条件

$$\psi^i(t_0)=\chi^i(t_0)=x_0^i, \qquad i=1,\cdots,n, \tag{9}$$

并且每一解的定义区間皆含有值 $t_0$，那末这两个解在它們共同的定义区間上处处相等。

我們称(5)为解(6)，(8)的**初始值**，称关系式(7)，(9)为这些解的**初始条件**。今后我們說，解具有初始值(5)，或者說它滿足初始条件(7)，(9)。于是，标准方程組的**存在性和唯一性定理**可簡述如下：

对于任何初始值(5)，总存在方程組(1)的一个解，这解在某一含 $t_0$ 的区間上有定义，并以(5)为初始值。同时，如果两个解有相同的初始值(5)，其每一个的定义区間都含有值 $t_0$，那末这两个解在它們的定义区間的公共部分上到处是相等的。

存在性和唯一性定理使我們能够提出并且解决关于具有給定初始值的**解的最大存在区間**的問題。为了着手研究这个問題，設想有两个具有同样初始值(5)的解，其第一个解的定义区間是 $r_1<t<r_2$，第二个解的定义区間是 $s_1<t<s_2$，并且这两个区間都包含点 $t_0$，即它們是相交的。如果两区間之一，例如第一个，包含在另一个的內部，那末根据唯一性，第一个解在其定义区間中处处等于第二个，所以討論第一个区間是多余的。可是，也有可能两个区間互不包含，例如当 $r_1<s_1<r_2<s_2$ 时就是这样。这时，根据唯一性，两个解在区間 $s_1<t<r_2$ 中是一致的，在半开的 $r_1<t\leqslant s_1$ 中仅第一个解有定义，而在半开的 $r_2\leqslant t<s_2$ 中仅第二个解有定义。在包含原来两个区間的区間 $r_1<t<s_2$ 上，暫时还沒有确定任何解；可是这样的解很容易定义，就是說，它应該在区間 $r_1<t<r_2$ 上与第一个解重合，而在区間 $s_1<t<s_2$ 上則与第二个解重合。这样，我們就在包含原来两个区間的区間 $r_1<t<s_2$ 上定义了一个解，且已沒有必要討論原来定义在区間 $r_1<t<s_2$ 的一部分上的解。很明显，如果有有限个具有同样初始值的解，那就可以在由原来給定

的解的存在区間合并起来的区間上作出解来。也容易把所有具有同样初始值的解合并为一个，而得到具有給定初始值的解的最大存在区間的概念。让我們来叙述并証明下面的命題。

**1**) 对于任何初始值(5)，存在方程組(1)的定义在区間 $m_1<t<m_2$ 上的解

$$x^i=\hat{\varphi}^i(t), \qquad i=1, \cdots, n,$$

使得只要方程組(1)的解 $x^i=\varphi^i(t)$，$i=1, \cdots, n$ 具有初始值(5)，那末它的定义区間包含在区間 $m_1<t<m_2$ 中。根据唯一性定理，解 $x^i=\varphi^i(t)$ 在自己有定义的整个区間上与解 $x^i=\hat{\varphi}^i(t)$ 一致，因而沒有必要再討論解 $x^i=\varphi^i(t)$ 了。区間 $m_1<t<m_2$ 称为关于初始值(5)的**最大存在区間**。

我們来証明，对于給定的初始值(5)，最大区間是存在的。方程組(1)的每一个具有初始值(5)的解都有它的定义区間，这些区間的右端点的集合記为 $R_2$，左端点的集合記为 $R_1$。集合 $R_2$ 的上界記为 $m_2$(它可以是 $+\infty$)，$R_1$ 的下界記为 $m_1$(它可以是 $-\infty$)。現在証明，区間 $m_1<t<m_2$ 就是关于初始值(5)的最大区間。首先作具有初始值(5)的定义在区間 $m_1<t<m_2$ 中的解 $x^i=\hat{\varphi}^i(t)$，$i=1, \cdots, n$。設 $t^*$ 是这个区間的任一点，即 $m_1<t^*<m_2$。为确定起見，設 $t^*\geqslant t_0$。因为 $m_2$ 是集合 $R_2$ 的上界，所以存在方程組(1)的以(5)为初始值的解 $x^i=\psi^i(t)$，$i=1, \cdots, n$，它的定义区間 $r_1<t<r_2$ 含有点 $t^*$，置 $\hat{\varphi}^i(t^*)=\psi^i(t^*)$，$i=1, \cdots, n$。这样得到的函数 $\hat{\varphi}^i(t)$ 在点 $t^*$ 的值与解 $x^i=\psi^i(t)$，$i=1, \cdots, n$ 的选取无关。事实上，如果代替解 $x^i=\psi^i(t)$，$i=1, \cdots, n$，我們取以(5)为初始值的解 $x^i=\chi^i(t)$，$i=1, \cdots, n$，設它的定义区間 $s_1<t<s_2$ 也包含点 $t^*$，那末根据唯一性定理(参看定理 2)，我們有 $\psi^i(t^*)=\chi^i(t^*)$，$i=1, \cdots, n$。因此，函数 $\hat{\varphi}^i(t)$，$i=1, \cdots, n$，在整个区間 $m_1<t<m_2$ 上单值地确定了。同时，它們組成方程組(1)的以(5)为初始值的解。事实

上,在区間 $m_1<t<m_2$ 的每一点 $t^*$ 的附近,函数組 $\hat{\varphi}^i(t)$, $i=1,\cdots,n$ 与方程組(1)的某一解一致,所以函数 $\hat{\varphi}^i(t)$, $i=1,\cdots,n$ 是連續的,且組成方程組(1)的解。剩下来要証明区間 $m_1<t<m_2$ 是最大的。設 $x^i=\varphi^i(t)$, $i=1,\cdots,n$ 是方程組(1)的以(5)为初始值的解,它的定义区間是 $r_1<t<r_2$。这时,$r_1$ 是集合 $R_1$ 的元素,$r_2$ 是集合 $R_2$ 的元素,所以 $m_1\leqslant r_1$, $r_2\leqslant m_2$,就是說区間 $r_1<t<r_2$ 包含在区間 $m_1<t<m_2$ 之內。

現在还要不加証明地叙述一个存在定理,以后我們把它作为定理2的簡单推論。

**定理3.** 設

$$\dot{x}^i=\sum_{j=1}^{n}a_j^i(t)x^j+b^i(t),\qquad i=1,\cdots,n \tag{10}$$

是标准綫性微分方程組;其中系数 $a_j^i(t)$ 及自由項 $b^i(t)$ 在区間 $q_1<t<q_2$ 上有定义,并且是自变量 $t$ 的連續函数。可以証明,对于任何初始值

$$t_0, x_0^1, \cdots, x_0^n,\qquad q_1<t_0<q_2, \tag{11}$$

方程組 (10) 存在一个以 (11) 为初始值的解,这个解在整个区間 $q_1<t<q_2$ 上有定义。

換句話說,綫性方程組 (10) 的解的最大存在区間是整个区間 $q_1<t<q_2$ (在任何初始条件(11)下)。

当方程組(10)的系数及自由項在整个直綫上有定义,即 $q_1=-\infty$, $q_2=+\infty$ 时,对于任何初始值 存在方程組(10)的定义在整个无穷区間 $-\infty<t<+\infty$ 上的解。

标准方程組(1)的解的几何意义是以变量 $t, x^1,\cdots, x^n$ 为坐标的 $n+1$ 維空間中的积分曲綫(与§1比較),积分曲綫的方程具有形式:

$$x^i=\varphi^i(t),\qquad i=1,\cdots,n, \tag{12}$$

这里(12)是方程組的解。

方程組(1)本身可以用 $n+1$ 維空間中的方向場作几何解釋。

## 例 题

**例题 1** 求解綫性方程組

$$\dot{x}=-\omega y, \qquad \dot{y}=\omega x. \tag{13}$$

对此，区域 $\Gamma$ 是整个空間 $(t, x, y)$。直接可以驗証函数組

$$x=c_1\cos(\omega t+c_2), \quad y=c_1\sin(\omega t+c_2) \tag{14}$$

是方程組(13)的解，这里 $c_1$ 和 $c_2$ 是任意常数。为了証明在适当选定常数 $c_1$ 和 $c_2$ 下可由公式(14)得到任意的解，我們只要給定初始值 $t_0$, $x_0$, $y_0$, 并且指明在解(14)中有以 $t_0$, $x_0$, $y_0$ 为初始值的解。这时，我們得到决定常数 $c_1$ 和 $c_2$ 的条件

$$c_1\cos(\omega t_0+c_2)=x_0, \quad c_1\sin(\omega t_0+c_2)=y_0. \tag{15}$$

設 $\rho$ 和 $\varphi$ 是点 $(x_0, y_0)$ 的极坐标，那末

$$x_0=\rho\cos\varphi, \quad y_0=\rho\sin\varphi.$$

这时方程(15)写为形式：

$$c_1\cos(\omega t_0+c_2)=\rho\cos\varphi, \quad c_1\sin(\omega t_0+c_2)=\rho\sin\varphi.$$

置

$$c_1=\rho, \quad c_2=\varphi-\omega t_0,$$

它們滿足条件(15)是明显的，所以过每一点 $(t_0, x_0, y_0)$ 有由公式(14)給定的解。根据定理2(唯一性)，公式(14)包括了所有解。

**例题 2** 求解变量可分离的方程

$$\dot{x}=x^2\cos t. \tag{16}$$

对于它，区域 $\Gamma$ 是整个 $(t, x)$ 平面。当 $x>0$ 和 $x<0$ 时，这个方程可以用§2，命題3)所說的方法求解。对于每一个半平面，我們有

$$\int\frac{dx}{x^2}=\int\cos t dt,$$

或

$$-\frac{1}{x}=\sin t-c.$$

于是得到

$$x=-\frac{1}{c-\sin t}. \tag{17}$$

除了由上式所表示的解以外，还有明显的解

$$x=0. \tag{18}$$

我們来証明，公式(17)和(18)包括了方程(16)的所有解。設 $(t_0, x_0)$ 是任一初始值。如果 $x_0=0$，則解(18)以它为初始值；如果 $x_0\neq 0$，則常数 $c$ 的值是

$$c=\sin t_0+\frac{1}{x_0}.$$

解(18)在区間 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义，这个区間是关于相应初始值的最大存在区間。完全同样地，当 $|c|>1$ 时，公式(17)确定一个定义在区間 $(-\infty, +\infty)$ 上的解，并且这个区間是最大的。对于滿足条件 $|c|\leqslant 1$ 的确定的常数 $c$，公式(17)給出的不是一个解，而是无穷多个解。这时，每一个个别的解在区間 $r_1<t<r_2$ 中有定义，

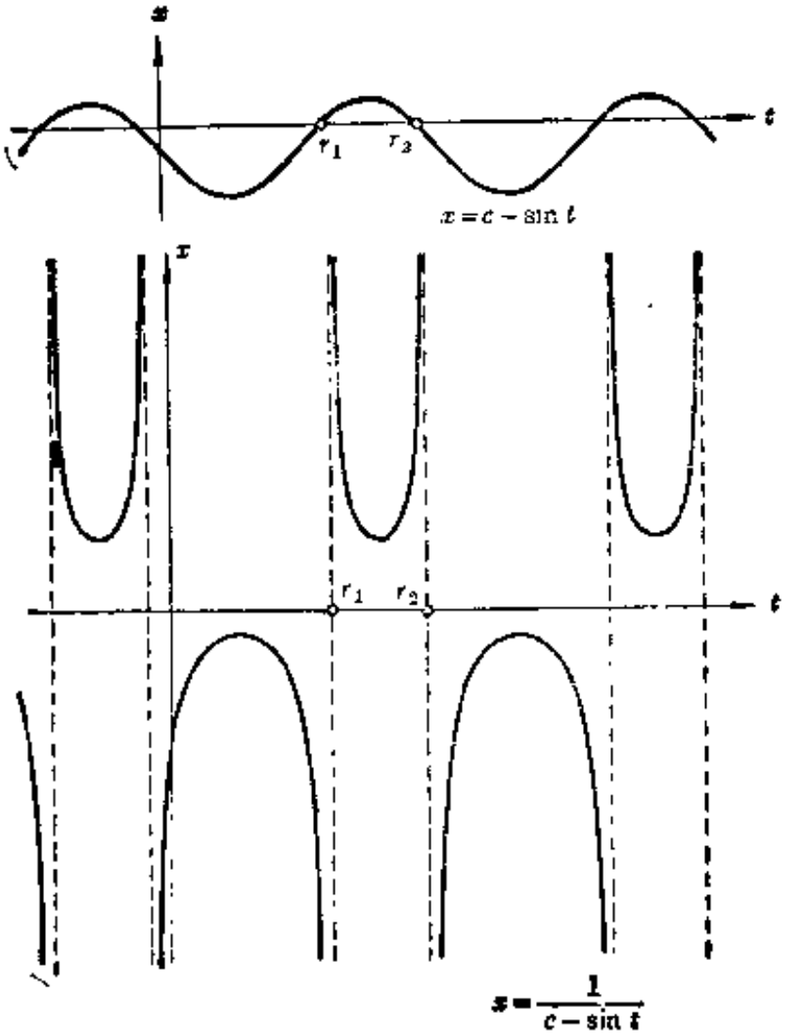


图 9

这里 $r_1$ 和 $r_2$ 是函数 $\sin t-c$ 的两个相邻的零点。这个区間是关于相应初始值的最大存在区間，因为当变量 $t$ 趋向它的端点时，函数(17)趋于无穷(图 9)。

例題 3. 我們来証明，如果方程組(1)的右端 (2) $k$ 次連續可微，也就是說，具有关于变量 $t, x^1, \cdots, x^n$ 的 $k$ 阶連續导数（包括混合导数），那末方程組的解(4)有 $k+1$ 阶的連續导数。

事实上，对于解(4)有恒等式

$$\dot{\varphi}^i(t) = f^i(t, \varphi^1(t), \cdots, \varphi^n(t)), \qquad i=1, \cdots, n. \tag{19}$$

如果右端(2)有連續的一阶导数，那末恒等式(19)的右端有关于 $t$ 的連續导数，所以 $\ddot{\varphi}(t)$ 存在且連續。导微恒等式(19) $k$ 次，我們就依次地驗証了函数 $\varphi^i(t)$ 的 2 阶，3 阶，$\cdots$，$k+1$ 阶导数存在且連續。

## § 4. 化一般的微分方程組为标准方程組

前一节对标准微分方程組叙述了存在性和唯一性定理。現在証明相当一般的微分方程組可以用一种方法化为标准微分方程組，同时对这种一般的方程組建立存在性和唯一性定理。

首先給出一般形式的微分方程組的概念。

在自变量 $t$ 的一个未知函数 $x$ 的情形，通常討論一个方程，它可以写为形式：

$$F(t, x, \dot{x}, \cdots, x^{(n)}) = 0. \tag{1}$$

这里 $t$ 是自变量，$x$ 是它的未知函数，而 $F$ 是給定的 $n+2$ 个变量的函数。函数 $F$ 可能不是对它的变元的所有值有定义，所以要說到函数 $F$ 的定义区域 $B$。这里所說的区域 $B$ 是在 $n+2$ 維坐标空間中的，其中点的坐标是 $t, x, \dot{x}, \cdots, x^{(n)}$。如果出現在微分方程中的导数的最大阶数等于 $n$，就称方程是 $n$ 阶的。如果用确定在区間 $r_1<t<r_2$ 中的自变量 $t$ 的連續函数 $x=\varphi(t)$ 代替方程(1)中的 $x$ 时，得到区間 $r_1<t<r_2$ 上关于 $t$ 的恒等式，就称 $x=\varphi(t)$ 是

方程(1)的解。很明显，仅当函数 $\varphi(t)$ 在区间 $r_1<t<r_2$ 上具有直到 $n$ 阶的导数时，才能把 $x=\varphi(t)$ 代入关系式(1)，同时，还必须使得以 $\{t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t), \cdots, \varphi^{(n)}(t)\}$ 为坐标的点当 $r_1<t<r_2$ 时属于函数 $F$ 的定义区域 $B$.

如果有同一自变量的两个未知函数，那就要討論两个微分方程构成的方程組，它可以写成形式：

$$\left.\begin{aligned} F(t, x, \dot{x}, \cdots, x^{(m)}, y, \dot{y}, \cdots, y^{(n)}) &= 0, \\ G(t, x, \dot{x}, \cdots, x^{(m)}, y, \dot{y}, \cdots, y^{(n)}) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

这里 $t$ 是自变量，$x$ 和 $y$ 是它的两个未知函数，而 $F$ 和 $G$ 都是 $n+m+3$ 个变量的函数，它們的定义区域皆是 $B$. 如果出現在方程組(2)中的函数 $x$ 的导数的最大阶数等于 $m$，而函数 $y$ 的导数的最大阶数是 $n$，那末称数 $m$ 为方程組(2)关于 $x$ 的阶，称数 $n$ 为(2)关于 $y$ 的阶，而称数 $n+m$ 为方程組(2)的阶。如果把定义在某一区間 $r_1<t<r_2$ 上的一对函数 $x=\varphi(t)$ 和 $y=\psi(t)$，代入关系式(2)时，得到在区間 $r_1<t<r_2$ 上关于 $t$ 的恒等式，我們就称它們是方程組(2)的解。和在一个方程的情形一样，要假定在方程組(2)中能够作代换 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ 的条件是滿足的。

类似地可以定义包含一个自变量的三个和多个未知函数的微分方程組。如果微分方程的未知函数是 $x^1, \cdots, x^n$，出現在方程組中的函数 $x^i$ 的导数的最大阶数等于 $q_i$，$i=1, \cdots, n$，那末数 $q_i$ 称为方程組关于 $x^i$ 的阶，而数 $q=q_1+q_2+\cdots+q_n$ 称为方程組的阶。依此，§3 中的标准方程組(1)是 $n$ 阶的。

如果关系式关于 $x^{(n)}$ 是可解的，那末方程(1)可以写为形式：

$$x^{(n)}=f(t, x, \dot{x}, \cdots, x^{(n-1)}). \tag{3}$$

同样，如果方程組(2)关于 $x^{(m)}$，$y^{(n)}$ 是可解的，那末这个方程組可以写为形式：

$$\left.\begin{aligned} x^{(m)} &= f(t, x, \dot{x}, \cdots, x^{(m-1)}, y, \dot{y}, \cdots, y^{(n-1)}), \\ y^{(n)} &= g(t, x, \dot{x}, \cdots, x^{(m-1)}, y, \dot{y}, \cdots, y^{(n-1)}). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

方程(3)和方程組(4)称为是**已解出最高阶导数的**。类似地定义具有任意个数未知函数的已解出最高阶导数的方程。特别，§3中的标准方程組(1)是已解出最高阶导数的方程。今后，我們几乎只研究已解出最高阶导数的方程。

現在証明，任何解出了最高阶导数的 $n$ 阶微分方程可化为 $n$ 阶标准方程組。为此先証明一个 $n$ 阶的方程可化为 $n$ 阶标准方程組。

**1) 設**

$$y^{(n)}=f(t, y, \dot{y}, \cdots, y^{(n-1)}) \tag{5}$$

是一个解出了最高阶导数的 $n$ 阶微分方程。这里，$t$ 是自变量，$y$ 是变量 $t$ 的未知函数，函数 $f(t, y, \dot{y}, \cdots, y^{(n-1)})$ 是 $n+1$ 个变量 $t$, $y$, $\dot{y}$, $\cdots$, $y^{(n-1)}$ 的給定函数，它的定义区域是 $n+1$ 維坐标空間的某一区域 $\Gamma$，又設函数 $f(t, y, \dot{y}, \cdots, y^{(n-1)})$ 及其偏导数

$$\frac{\partial f(t, y, \dot{y}, \cdots, y^{(n-1)})}{\partial y^{(k)}}, \quad k=0, 1, \cdots, n-1$$

(这里认为 $y^{(0)}=y$) 在区域 $\Gamma$ 中是連續的。为了把方程(5)变为标准方程組，按等式

$$x^1=y, \quad x^2=\dot{y}, \quad \cdots, \quad x^n=y^{(n-1)} \tag{6}$$

引入变量 $t$ 的新的未知函数 $x^1, \cdots, x^n$。可以証明，方程(5)与方程組

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}^1&=x^2,\\ \dot{x}^2&=x^3,\\ &\cdots\cdots\cdots\\ \dot{x}^{n-1}&=x^n,\\ \dot{x}^n&=f(t, x^1, x^2, \cdots, x^n) \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

是等价的。由此根据定理 2 可知，对于区域 $\Gamma$ 中的每一点 $t_0$, $y_0$, $\dot{y}_0$, $\cdots$, $y_0^{(n-1)}$，有方程(5)的解 $y=\psi(t)$，滿足初始条件

$$\psi^{(k)}(t_0)=y_0^{(k)}, \quad k=0, 1, \cdots, n-1,$$

換句話說，存在以

$$t_0, y_0, \dot{y}_0, \cdots, y_0^{(n-1)} \tag{8}$$

为初始值的解。其次，任何两个以(8)为初始值的解在它們定义区間的公共部分上是一致的。如果方程(5)是綫性的，就是說，函数 $f$ 关于变量 $y, \dot{y}, \cdots, y^{(n-1)}$ 是綫性的，而它的系数在区間 $q_1<t<q_2$ 上有定义并且是連續的，那末对于任何初始值 $t_0, y_0, \dot{y}_0, \cdots, y_0^{(n-1)}$，其中 $q_1<t_0<q_2$，具有在整个区間 $q_1<t<q_2$ 上有定义的解 $y=\psi(t)$。

我們来証明方程(5)和方程組(7)是等价的。設函数 $y$ 滿足方程(5)，要証明由关系式(6)所确定的函数 $x^1, \cdots, x^n$ 滿足方程組(7)。把引入新未知函数 $x^1, \cdots, x^n$ 的关系式(6)导微，得到

$$\dot{x}^k=y^{(k)}, \qquad k=1, \cdots, n-1, \tag{9}$$

$$\dot{x}^n=y^{(n)}. \tag{10}$$

根据关系式(6)来改变关系式(9)的右端，根据函数 $y$ 所滿足的方程(5)来改变关系式(10)的右端，我們就得到方程組(7)。反之，假設函数 $x^1, \cdots, x^n$ 滿足方程組(7)；并取 $x^1$ 为 $y$，我們来証明函数 $y$ 滿足方程(5)。在方程組(7)的第一式中置 $x^1=y$，得到 $x^2=\dot{y}$；在第二式中置 $x^2=\dot{y}$，得到 $x^3=\ddot{y}$。继續这样做，我們就导出关系式(6)。最后，在方程組(7)的最末一式中，根据关系式(6)改变每一个函数 $x^1, \cdots, x^n$，就得到关于 $y$ 的方程(5)。

因为函数 $f$ 在区域 $\Gamma$ 中有定义，所以方程組(7)的右端在按公式(6)进行坐标变换的条件下在区域 $\Gamma$ 中也有定义。在区域 $\Gamma$ 中，方程組(7)滿足定理 2 的条件。因此，可以在区域 $\Gamma$ 中任意选擇初始值 $t_0, x_0^1, \cdots, x_0^n$，这样的初始值根据变换(6)变为方程(5)的初始值

$$t_0, y_0, \dot{y}_0, \cdots, y_0^{(n-1)}.$$

如果方程(5)是綫性的，那末方程組(7)也是綫性的。从此根据定理 3 导出命題 1)的最后部分。

这样就証明了命題 1)。

命題 1) 中所讲的方法給出了把任意已解出最高阶导数的微分方程变为标准方程組的可能性。为了不增加研究的复杂性，下面的命題 2) 討論由两个方程构成的四阶方程組。

**2)** 設

$$\left.\begin{aligned}\ddot{u}&=f(t,\ u,\ \dot{u},\ v,\ \dot{v}),\\ \ddot{v}&=g(t,\ u,\ \dot{u},\ v,\ \dot{v})\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

是两个二阶的方程。这里，$t$ 是自变量，$u$ 和 $v$ 是 $t$ 的未知函数。按照下面的公式：

$$x^1=u,\quad x^2=\dot{u},\quad x^3=v,\quad x^4=\dot{v}$$

引入新的未知函数 $x^1$, $x^2$, $x^3$, $x^4$ 后，我們就把方程組 (11) 变为标准方程組

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}^1&=x^2,\\ \dot{x}^2&=f(t,\ x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4),\\ \dot{x}^3&=x^4,\\ \dot{x}^4&=g(t,\ x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4).\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

如果假設方程 (11) 右端的函数 $f$ 和 $g$，在五維空間的区域 $\Gamma$ 中有定义，这里点的坐标是 $t$, $u$, $\dot{u}$, $v$, $\dot{v}$，并且这些函数是連續的，它們有关于 $u$, $\dot{u}$, $v$, $\dot{v}$ 的連續的一阶偏导数，那末方程組 (12) 是标准的，且在区域 $\Gamma$ 中滿足定理 2 的条件。由此可知，对于区域 $\Gamma$ 的任一点 $t_0$, $u_0$, $\dot{u}_0$, $v_0$, $\dot{v}_0$，方程組 (11) 有解 $u=\varphi(t)$, $v=\psi(t)$，滿足初始条件

$$\varphi(t_0)=u_0,\quad \dot{\varphi}(t_0)=\dot{u}_0,$$
$$\psi(t_0)=v_0,\quad \dot{\psi}(t_0)=\dot{v}_0.$$

同时，任何两个具有同样初始条件的解，在它們的存在区間的公共部分上是一致的。

命題 2) 的証明和命題 1) 的証明完全一样。

如果一个 $n$ 阶的方程以形式

$$F(t, y, \dot{y}, \cdots, y^{(n)}) = 0 \tag{13}$$

給定，也就是說还沒有解出未知函数的最高阶导数 $y^{(n)}$，那末首先发生的是解出 $y^{(n)}$ 的可能性問題。可以认为，这个問題是不属于微分方程領域而属于函数論領域的問題。可是在这里有某些問題被归到微分方程理論中来了。它們带有下面的特征。設方程(13)关于变量 $y^{(n)}$ 是二次的，因此它确定 $y^{(n)}$ 为其余变元的 **两值** 函数。当两个值实际不同时，我們事实上得到两个形如(5)的不同的微分方程。但由方程(13)决定的变量 $y^{(n)}$ 的两个值并在一起了，不能分解为两个形如(5)的方程，这就一定要討論方程(13)。这种方程的研究，引向微分方程的 **奇解** 概念以及对曲面上的微分方程的討論。但在本书中不討論这些問題。

## 例 題

**例題 1**. 求解方程

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega \text{ 是常数。} \tag{14}$$

直接可以驗証函数

$$x = r\cos(\omega t + \alpha), \quad r \geqslant 0 \tag{15}$$

满足这个方程，这里 $r$ 和 $\alpha$ 是常数。現在証明，公式(15)包括了所有的解。設 $x = \varphi(t)$ 是方程(14)的任意解。根据定理 3(参看命題 1)的末尾)，可以认为 $x = \varphi(t)$ 对所有的值 $t$ 有定义，置 $\varphi(0) = x_0$，$\dot{\varphi}(0) = \dot{x}_0$。直接可看出，我們能选取常数 $r$ 和 $\alpha$，使得

$$r\cos\alpha = x_0, \quad -r\omega\sin\alpha = \dot{x}_0.$$

如果这些等式成立，那末解(15)和 $\varphi(t)$ 有相同的初始值 $0$，$x_0$，$\dot{x}_0$，所以它們是一致的(参看命題 1))。

函数(15)描述的是 **簡諧振动过程**。正的常数 $r$ 称为振动(15)的 **振幅**，而 $\alpha$ 称为它的 **初相** 或簡称为 **相**。方程 (14) 称为簡諧振动方程。数 $\omega$ 称为振动的 **頻率**，但每单位时間内振动的次数实际上是由公式

$$\nu=\frac{\omega}{2\pi}$$

确定的。

**例題 2.** 我們来討論质量为 $m$ 的质点 $p$ 在力 $F$ 的作用下沿水平直綫 $l$ 的运动，設力 $F$ 是沿直綫 $l$ 指向点 $O$ 的，其大小与点 $p$ 到 $O$ 的距离成正比。为了作出点 $p$ 的运动方程，在直綫 $l$ 上取点 $O$ 为原点，引进坐标。以 $x=x(t)$ 表示点 $p$ 的变动坐标。根据牛頓第二定律，点 $p$ 的运动方程具有形式：

$$m\ddot{x}=F=-kx. \tag{16}$$

在物理上力 $F$ 可以用某种弹簧来实現 (图 10)。数 $k$ 叫做这弹簧的**弹性系数**。根据公式(15)，方程(16)的解具有形式：

$$x=r\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t+\alpha\right),\quad r\geqslant 0.$$

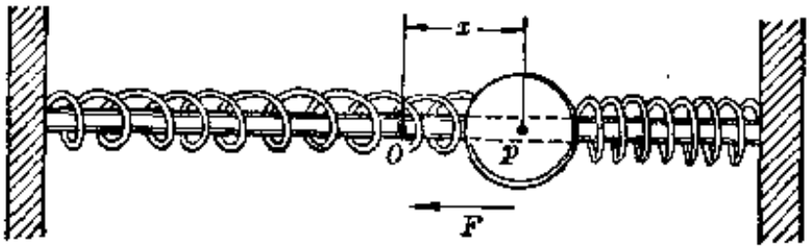


图 10

于是，点 $p$ 的振动頻率 $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ 由它的质量 $m$ 及弹簧的弹性 $k$ 来决定，而与初始条件无关。振动的振幅 $r$ 及其初相 $\alpha$ 与初始条件有关，就是与时刻 $t=0$ 时点 $p$ 的位置 $x_0$ 及其速度 $\dot{x}_0$ 有关。

**例題 3.** 我們来近似地作出**数学摆**的方程，并求解。数学摆乃是一个质量为 $m$ 的质点 $p$，在引力作用下沿着垂直平面中半徑为 $l$ 的圓周而运动。量 $l$ 称为**摆长**。取圓周 $K$ 的最低点 $O$ 作为坐标原点，在圓周 $K$ 上引进角坐标(图 11)。以 $\varphi=\varphi(t)$ 表示点 $p$ 的变动坐标，作用于点 $p$ 的引力 $mg$ 是垂直向下的。这个力沿圓周的法綫方向的分力与惯性力的法向分力(即离心力的反号)和約束(圓周或者使点沿圓周运动的綫)反作用的合力相平衡；这个力

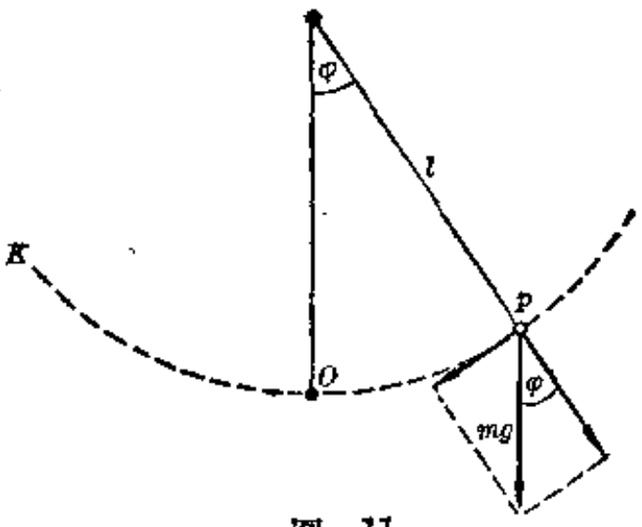


图 11

沿着角 $\varphi$ 增加方向的切向分力等于 $-mg\sin\varphi$。这样，点 $p$ 的运动方程具有形式：

$$ml\ddot{\varphi}=-mg\sin\varphi,$$

或

$$l\ddot{\varphi}+g\sin\varphi=0. \tag{17}$$

这个方程是非綫性的，求它的解相当困难。如果假設在运动过程中点 $p$ 的坐标 $\varphi$ 与零相差很小，那末在方程(17)中可以用 $\varphi$ 来代替 $\sin\varphi$，于是得到摆的"近似"的綫性方程

$$l\ddot{\varphi}+g\varphi=0.$$

它的解具有形式(参看 (15))：

$$\varphi=r\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t+\alpha\right).$$

这样，摆的"小振动"頻率由公式 $\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$ 确定。

方程(17)的解的振动頻率是与振动的振幅有关的，且当振幅增加时是减小的。

单位时間内摆的小振动次数 $\nu$ 等于

$$\nu=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

例如秒摆——一秒钟内振动一次的摆 ($\nu=1$)——的长度由下式确定：

$$l=\frac{g}{4\pi^2}\approx 0.25 \text{ 米}.$$

## §5. 复的微分方程

直到現在，我們只討論了实的微分方程及其实解。可是，有时——例如解常系数綫性方程时——先找出实的微分方程的**复值解**，然后导出它的实解却較为省力。为了討論这种处理方法，我們必須引进实变量的复值函数及复的微分方程組的概念。

**1**) 如果对于区間 $r_1<t<r_2$ 上的每一值 $t$，有复数

$$\chi(t)=\varphi(t)+i\psi(t)$$

与之对应，其中 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 是实变量 $t$ 的实函数，就称 $\chi(t)$ 为实变量 $t$ 的**复值函数**，而称函数 $\varphi(t)$ 为复值函数 $\chi(t)$ 的**实部**，函数 $\psi(t)$ 为它的**虚部**。如果函数 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 是連續的，就說复值函数 $\chi(t)$ 是**連續的**。同样，如果函数 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 是可微的，就說复值函数 $\chi(t)$ 是**可微的**，它的导数 $\dot{\chi}(t)$ 由下式决定：

$$\dot{\chi}(t)=\dot{\varphi}(t)+i\dot{\psi}(t).$$

可以直接驗証，对于实变量的复值函数，普通的和、积、商的导微法則是成立的。

**2**) 設

$$\dot{z}^j=h^j(t, z^1, \cdots, z^n), \qquad j=1, \cdots, n \tag{1}$$

是标准的微分方程組。假設方程右端的函数 $h^j(t, z^1, \cdots, z^n)$，对于复变量 $z^1, \cdots, z^n$ 是有定义的。我們可以限于討論这些函数是变量 $z^1, \cdots, z^n$ 的多項式的情形，而它們的系数是在区間 $q_1<t<q_2$ 上有定义的实的或者复的連續函数。这时，提出找方程組(1)的复值解的問題是完全合理的。設在某一区間 $r_1<t<r_2$ 上給定了实变量 $t$ 的复函数組

$$z^j=\chi^j(t), \quad j=1, \cdots, n. \tag{2}$$

如果以(2)代(1)中的变量 $z^j$，得到关于 $t$ 的恒等式，就称(2)为方程组(1)的解。因为根据假設，方程組(1)的右端是 $z^1, \cdots, z^n$ 的多项式，所以它对这些变量的所有值都有定义。可以証明，对于方程組(1)，有下面的存在性和唯一性定理。

設

$$t_0, z_0^1, z_0^2, \cdots, z_0^n$$

是任一組初始值，其中 $z_0^1, \cdots, z_0^n$ 是任意的复数，而 $t_0$ 是任何满足不等式 $q_1<t_0<q_2$ 的实数。那末方程組(1)存在解

$$z^j=\chi^j(t), \qquad j=1, \cdots, n,$$

满足初始条件

$$\chi^j(t_0)=z_0^j, \qquad j=1, \cdots, n.$$

又任何两个具有同样初始值的解在它們定义区間的公共部分上是一致的。

如果方程組(1)是綫性的，即多項式 $h^j$ 是一次的，那末对于任何初始值，恒存在方程組(1)的定义在整个区間 $q_1<t<q_2$ 上的解。

把每一个未知函数 $z^j$ 分解为它的实部和虛部，就可直接从定理 2 导出，关于复的标准方程組的存在性和唯一性定理。事实上，置

$$z^j=x^j+iy^j, \qquad j=1, \cdots, n, \tag{3}$$

在方程組(1)中以(3)代替变量 $z^j$，$j=1, 2, \cdots, n$，就得到

$$\begin{aligned}\dot{x}^j+i\dot{y}^j=&f^j(t, x^1, \cdots, x^n, y^1, \cdots, y^n)\\&+ig^j(t, x^1, \cdots, x^n, y^1, \cdots, y^n),\end{aligned} \tag{4}$$

这里 $f^j$ 和 $g^j$ 是实变量的实函数，滿足关系式

$$\begin{aligned}&f^j(t, x^1, \cdots, x^n, y^1, \cdots, y^n)+ig^j(t, x^1, \cdots, x^n, y^1, \cdots, y^n)\\&=h^j(t, x^1+iy^1, \cdots, x^n+iy^n).\end{aligned}$$

由(4)得到

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}^j&=f^j(t, x^1, \cdots, x^n, y^1, \cdots, y^n), \quad j=1, \cdots, n,\\ \dot{y}^j&=g^j(t, x^1, \cdots, x^n, y^1, \cdots, y^n), \quad j=1, \cdots, n.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

这样，复的标准方程組(1)就变为实的标准方程組(5)。因为(1)的

右端是 $z^1, \cdots, z^n$ 的多項式，所以(5)的右端是 $x^1, \cdots, x^n, y^1, \cdots, y^n$ 的多項式。由于多項式 $h^j$ 中的系数是区間 $q_1<t<q_2$ 上 $t$ 的連續函数，所以 $f^j$ 和 $g^j$ 中的系数在这同样的区間上也是連續的。因此，方程組(5)的右端在点 $(t, x^1, \cdots, x^n, y^1, \cdots, y^n)$，$(q_1<t<q_2$，$x^1, \cdots, x^n, y^1, \cdots, y^n$ 是任意的)，所构成的区域 $\Gamma$ 上有定义并滿足定理 2 的条件。設

$$z_0^j=x_0^j+iy_0^j, \quad j=1, \cdots, n,$$

$$\chi^j(t)=\varphi^j(t)+i\psi^j(t), \quad j=1, \cdots, n,$$

于是問題归結为求方程組(5)滿足初始条件

$$\left.\begin{aligned}\varphi^j(t_0)&=x_0^j, \quad j=1, \cdots, n,\\ \psi^j(t_0)&=y_0^j, \quad j=1, \cdots, n\end{aligned}\right\}$$

的解。根据定理 2，这样的解是存在的，并且任何两个具有相同初始值的解在它們定义区間的公共部分上是一致的。

如果方程組(1)是綫性的，那末方程組(5)也是綫性的，由定理 3 就推出命題 2)的第二部分。

应当指出，以变量 $z^1, \cdots, z^n$ 的多項式为右端的方程組(1)可能是实的，即这些多項式的系数可能是变量 $t$ 的实函数。但是在这情形，我們也可以把方程組(1)作为复的方程討論，即认为函数 $z^1, \cdots, z^n$ 是复的，而找它的复值解。对于实方程組所以要应用这种方法是由于在某些情况下，实方程組的复值解較之实值解更易于求出。在这种情形下，我們先求出实方程組的复值解，然后从复值解求出它的实值解，就是只討論虛部为零的复值解。今后我們正是要用这种方法解常系数綫性方程。

象实的情形一样，也可以把相当一般的复的微分方程組化为标准方程組。于是，在复的情形，有类似于 § 4 中命題 1)，2) 的命題。現在仅叙述一个 $n$ 阶方程的存在性和唯一性定理。

3) 設

$$z^{(n)}=f(t, z, \dot{z}, \cdots, z^{(n-1)}) \tag{6}$$

是 $n$ 阶方程，它的右端是变量 $z, \dot{z}, \cdots, z^{(n-1)}$ 的多項式，其系数是在区間 $q_1<t<q_2$ 上有定义的实的或复的連續函数。如果 $t_0, z_0, \cdots, z_0^{(n-1)}$ 是任意的初始值，其中 $t_0$ 是实数，满足不等式 $q_1<t_0<q_2$，而 $z_0, \dot{z}_0, \cdots, z_0^{(n-1)}$ 是任意的复数，那末方程組 (6) 存在一个解 $z=\varphi(t)$，满足初始条件

$$\varphi(t_0)=z_0, \quad \dot{\varphi}(t_0)=\dot{z}_0, \quad \cdots, \quad \varphi^{(n-1)}(t_0)=z_0^{(n-1)},$$

且任何两个具有相同初始值的解，在它們的定义区間的公共部分上是一致的。如果方程(6)是綫性的，即多項式 $f$ 是一次的，那末对任何初始值，解的存在区間是整个区間 $q_1<t<q_2$.

实变量 $t$ 的复值函数 $e^{\lambda t}$——$\lambda$ 是复数——在 §7 中和以后要起重要的作用。現在給出这个函数的定义，并証明它的一些性质。

**4)** 設 $w=u+iv$ 是任意的复数，置

$$e^w=e^u(\cos v+i\sin v). \tag{7}$$

容易看出，有关系式

$$e^{\bar{w}}=\overline{e^w}.$$

下面将証明公式

$$e^{w_1}\cdot e^{w_2}=e^{w_1+w_2}. \tag{8}$$

从(7)得到著名的**欧拉公式**：

$$\cos v=\frac{e^{iv}+e^{-iv}}{2}, \quad \sin v=\frac{e^{iv}-e^{-iv}}{2i}.$$

設 $\lambda=\mu+i\nu$ 是复数，根据公式(7)，

$$e^{\lambda t}=e^{\mu t}(\cos \nu t+i\sin \nu t).$$

我們来証明，对于复数 $\lambda$，有下面的导徵公式：

$$\frac{d}{dt}e^{\lambda t}=\lambda e^{\lambda t}, \tag{9}$$

这一公式在 $\lambda$ 为实参数时我們是早已熟悉的了。

我們在这里把公式(7)作为复变量 $w$ 的函数 $e^w$ 的定义，但如

果用級数

$$e^w=1+w+\frac{w^2}{2!}+\frac{w^3}{3!}+\cdots+\frac{w^n}{n!}+\cdots$$

来定义函数 $e^w$，那末也可以証明公式(7)。不过，我們仍将认为 $e^w$ 是用公式(7)定义的。

現在来証明公式(8)。設

$$w_1=u_1+iv_1,\quad w_2=u_2+iv_2.$$

这时有

$$e^{w_1}e^{w_2}=e^{u_1}(\cos v_1+i\sin v_1)\cdot e^{u_2}(\cos v_2+i\sin v_2)$$
$$=e^{u_1+u_2}[\cos(v_1+v_2)+i\sin(v_1+v_2)]=e^{w_1+w_2}.$$

下面証明公式(9)。首先討論 $\lambda$ 是純虛数 $iv$ 的情形，我們有

$$\frac{d}{dt}e^{ivt}=\frac{d}{dt}(\cos vt+i\sin vt)=-v\sin vt+iv\cos vt$$
$$=iv(\cos vt+i\sin vt)=ive^{ivt}.$$

其次，对任何 $\lambda=\mu+iv$，根据乘积的导数公式，有

$$\frac{d}{dt}e^{\lambda t}=\frac{d}{dt}(e^{\mu t}\cdot e^{ivt})=\frac{d}{dt}(e^{\mu t})\cdot e^{ivt}+e^{\mu t}\frac{d}{dt}(e^{ivt})$$
$$=\mu e^{\mu t}\cdot e^{ivt}+ive^{\mu t}\cdot e^{ivt}=(\mu+iv)e^{(\mu+iv)t}=\lambda e^{\lambda t}.$$

## 例　題

例題 1. 討論复的方程

$$\dot{z}=\lambda z,\tag{10}$$

其中 $z=x+iy$ 是实变量 $t$ 的复值未知函数，$\lambda=\mu+iv$ 是复数。由(9)可知，对任何复常数 $c$，

$$z=ce^{\lambda t}\tag{11}$$

是方程(10)的解。我們来証明，公式(11)包括了所有的解。为此，和§1的例1一样，可以利用唯一性定理，但現在我們利用定理3，为的是簡化計算。这种簡化在这里是无关重要的，但在以后这个方法可以給出更重要的結果。設 $z=\chi(t)$ 是方程(10)的任一解，根

据定理 3 (命題 3)的最后一部分)，可以认为这个解对所有的 $t$ 有定义。置 $\chi(0)=z_0$，我們看到解 $z=\chi(t)$ 具有初始值 0, $z_0$。而在(11)中置 $c=z_0$ 得到的解

$$z=z_0e^{\lambda t}$$

具有同样的初始值。如果置 $c=re^{i\alpha}$, $r>0$, $\alpha$ 是实数，那末解(11)可以写成形式

$$z=re^{\lambda t+i\alpha}. \tag{12}$$

現把方程(10)分解为实部和虛部，有

$$\dot{x}+i\dot{y}=(\mu+i\nu)(x+iy)=(\mu x-\nu y)+i(\nu x+\mu y),$$

或者

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=\mu x-\nu y,\\ \dot{y}&=\nu x+\mu y.\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

于是，两个实的方程的方程組(13)就等价于一个复的方程(10)，因而方程組(13)的任一解 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ 和方程組(10)的解由下式联系：

$$\varphi(t)+i\psi(t)=r[e^{\mu t}\cos(\nu t+\alpha)+ie^{\mu t}\sin(\nu t+\alpha)],$$

由此得到

$$\left.\begin{aligned}x=\varphi(t)&=re^{\mu t}\cos(\nu t+\alpha),\\ y=\psi(t)&=re^{\mu t}\sin(\nu t+\alpha).\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

这样，我們利用复值函数及复的方程求出了实的方程組(13)的解(14)。

**例題 2**. 下面再举一个把复的方程分解为两个实方程的例子。設

$$\dot{z}=z^2+iz$$

是复的方程，其中 $z=x+iy$ 是实变量 $t$ 的复值未知函数。我們有

$$\dot{x}+i\dot{y}=(x+iy)^2+i(x+iy)=x^2-y^2-y+i(2xy+x),$$

所以

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=x^2-y^2-y,\\ \dot{y}&=2xy+x.\end{aligned}\right\}$$

## §6. 关于綫性微分方程的一些知識

如果在微分方程組中出現的所有未知函数以及它們的导数都是綫性的，那末就称这个方程組是**綫性的**。綫性微分方程組的一般形式可写成

$$\sum_{j,k} a_{ijk}(t)\,(x^j)^{(k)}+b^i(t)=0,\quad i=1,\cdots,n. \tag{1}$$

这里 $x^1,\cdots,x^n$ 是自变量 $t$ 的未知函数，系数 $a_{ijk}(t)$ 和自由項 $b_i(t)$ 是变量 $t$ 的函数。如果方程組(1)中的所有自由項恒等于零，那末称方程組为**齐次的**。从每一綫性方程組丢掉它的自由項，就得到相应的綫性齐次方程組。所以，綫性方程組(1)对应的綫性齐次方程組是

$$\sum_{j,k} a_{ijk}(t)\,(y^j)^{(k)}=0,\quad i=1,\cdots,n. \tag{2}$$

我們指出綫性方程組的一些直接可以驗証的性质。在叙述中，假設綫性方程組的所有系数和自由項在区間 $q_1<t<q_2$ 中有定义，并在該区間上連續，所有討論到的解是在整个区間 $q_1<t<q_2$ 上給定的。

**1)** 如果 $y^i=\varphi^i(t)$ 和 $y^i=\psi^i(t)$，$i=1,\cdots,n$ 是綫性齐次方程組(2)的两个解，而 $c_1$ 和 $c_2$ 是两个任意常数，那末函数組

$$y^i=c_1\varphi^i(t)+c_2\psi^i(t),\quad i=1,\cdots,n$$

也是齐次方程組(2)的解。对于齐次方程組(2)的三个以及更多的解，类似的結論也成立。

**2)** 設 $x^i=\psi^i(t)$ 和 $x^i=\chi^i(t)$，$i=1,\cdots,n$ 是綫性方程組(1)的两个解，那末函数組

$$y^i=\chi^i(t)-\psi^i(t),\quad i=1,\cdots,n$$

是齐次方程組(2)的解。其次，如果 $y^i=\varphi^i(t)$，$i=1,\cdots,n$ 是齐次方程組(2)的解，而 $x^i=\psi^i(t)$，$i=1,\cdots,n$ 是綫性方程組(1)的解，

那末函数組

$$x^i=\varphi^i(t)+\psi^i(t),\quad i=1,\cdots,n$$

是方程組(1)的解。

3) 設綫性方程組(1)的自由項是和的形式:

$$b_i(t)=\alpha c_i(t)+\beta d_i(t),\quad i=1,\cdots,n,$$

除方程組(1)而外,同时考虑两个方程組:

$$\sum_{j,k} a_{ijk}(t)\,(x^j)^{(k)}+c_i(t)=0,\quad i=1,\cdots,n, \tag{3}$$

$$\sum_{j,k} a_{ijk}(t)\,(x^j)^{(k)}+d_i(t)=0,\quad i=1,\cdots,n. \tag{4}$$

如果 $x^i=\psi^i(t)$, $i=1,\cdots,n$ 是方程組(3)的解, $x^i=\chi^i(t)$, $i=1,\cdots,n$ 是方程組(4)的解,那末函数組

$$x^i=\alpha\psi^i(t)+\beta\chi^i(t),\quad i=1,\cdots,n$$

是方程組(1)的解。

# 第二章

# 常系数綫性方程

常系数綫性常微分方程組是很大的和重要的一类可以通过初等函微解到底的常微分方程。由于解这些方程在原理上并不太困难，因此常认为它們在理論上沒有多大兴趣，在教科书中通常只把它們放在作为一般綫性方程的簡单例題的地位。其实常系数綫性方程有許多技术上的应用，因为很多技术方面所討論的对象的工作規律在适当的方式下用这些方程就足能描述了。正是应用技术方面对常系数綫性方程理論提出了一系列新的带理論性的問題。解决这些理論性問題需要做大量的带有应用方向性的工作，其中有些部分在这一章中要有所反映。例如，在这一章要利用工程实际上常用的**算子法**，它們对于用消去法解方程組是很方便的。也討論在自动調节理論中很重要的綫性方程組的**解的稳定性問題**。并且要讲述所謂**复数振幅法**，它是在电工学上求特殊的定态解且具有广泛应用的方便的方法。

在这里并不限于解决实际方面产生的純数学問題，还对电路理論很簡略地作些結論式的叙述。电路的好处在于能从技术观点对本章所讲的数学方法給以很好的和重要的解釋。

此外，在这一章中还包括二阶綫性系統的相平面的研究，它是(一般說是非綫性的)自治系統的相空間研究的基础。自治系統的相空間在技术上也找到了重要的应用。

由于所有上述的理由，在本书中关于常系数綫性方程这一章要比在通常的常微分方程理論的教本中占有大得多的篇幅。这一章所有材料的讲述都是很初等的，只有§14是例外，其中应用了矩

陣的若当(Jordan)型。所有借助于若当型論述的內容以后并不要用，正如在§14中所詳細指出，是可以放过去的。

## §7. 常系数綫性齐次方程(单根的情形)

在这一节和下一节要解 $n$ 阶常系数綫性齐次方程，即方程

$$z^{(n)}+a_1z^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\dot{z}+a_nz=0, \tag{1}$$

其中 $z$ 是自变量 $t$ 的未知函数，而系数 $a_1, \cdots, a_n$ 是常数(实的或复的)。首先要求出这方程所有的复值解，然后(在系数 $a_1, \cdots, a_n$ 是实的情形)要从这些解中分出实解来。方程(1)可以写成形状：

$$z^{(n)}=-a_1z^{(n-1)}-\cdots-a_{n-1}\dot{z}-a_nz, \tag{2}$$

因此对它能应用存在性与唯一性定理(参看§5命題3))。今后将只利用唯一性定理，因为方程(2)的解是要明显求出的，从而它的存在性自然就确立了；唯一性用在証明已求得了所有解的事实上。

在工程应用上，常系数的常微分方程的**算子法**起了重要的作用。这里我們利用符号的(或者称为算子的)記法，它們是算子法的基础。这些符号是：函数 $z=z(t)$ 关于 $t$ 的导数不記为 $\frac{d}{dt}z$，而記为 $pz$，因此在函数左边的字母 $p$ 是关于 $t$ 导微的符号。如果把导微符号应用若干次，我們就得到符号

$$\frac{d^kz}{dt^k}=p^kz.$$

利用这些符号，我們可以写

$$a_0z^{(n)}+a_1z^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\dot{z}+a_nz$$
$$=a_0p^nz+a_1p^{n-1}z+\cdots+a_{n-1}pz+a_nz.$$

如果現在对上面等式的右边把 $z$ 放到括弧后面，就得到等式

$$a_0z^{(n)}+a_1z^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\dot{z}+a_nz$$
$$=(a_0p^n+a_1p^{n-1}+\cdots+a_{n-1}p+a_n)z.$$

这样，我們来作形式上的定义。

**1)** 設

$$L(p)=a_0p^n+a_1p^{n-1}+\cdots+a_{n-1}p+a_n$$

是符号 $p$ 的任意的(实的或复的)常系数的多項式，且 $z$ 是实自变量 $t$ 的某个实的或复的函数。置

$$L(p)z=a_0z^{(n)}+a_1z^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\dot{z}+a_nz. \tag{3}$$

如果 $L(p)$ 和 $M(p)$ 是符号 $p$ 的两个任意的多項式(或者說是两个 $p$ 的**微分算子**)，而 $z$, $z_1$, $z_2$ 是变量 $t$ 的函数，那末容易看出，我們有恒等式

$$\begin{cases} L(p)(z_1+z_2)=L(p)z_1+L(p)z_2, \\ (L(p)+M(p))z=L(p)z+M(p)z, \\ L(p)(M(p)z)=(L(p)M(p))z. \end{cases}$$

根据引进的符号，方程(1)可以写成形状：

$$L(p)z=0, \tag{4}$$

其中

$$L(p)=p^n+a_1p^{n-1}+\cdots+a_{n-1}p+a_n.$$

**2)** 設 $L(p)$ 是符号 $p$ 的任意的多項式。那末

$$L(p)e^{\lambda t}=L(\lambda)e^{\lambda t}. \tag{5}$$

我們来証明公式(5)．显然有

$$pe^{\lambda t}=\lambda e^{\lambda t}$$

(参看§5公式(9))．从此得到 $p^ke^{\lambda t}=\lambda^ke^{\lambda t}$，因而立即推得公式(5)(参看(3))．

从公式(5)直接推知，函数 $e^{\lambda t}$ 在且只在 $\lambda$ 是多項式 $L(p)$ 的根时才是方程(4)的解。多項式 $L(p)$ 称为方程(4)的**特征多項式**。当它沒有重根时，方程(4)的所有解的总体由以下定理来表述。

**定理4.** 假定方程(参看(1)和(4))

$$L(p)z=0 \tag{6}$$

的特征多項式 $L(p)$ 沒有重根，并記它的根为

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n.$$

置

$$z_1=e^{\lambda_1 t},\quad z_2=e^{\lambda_2 t},\quad \cdots,\quad z_n=e^{\lambda_n t}. \tag{7}$$

那末对于任何复值常数 $c^1, \cdots, c^n$，函数

$$z=c^1z_1+c^2z_2+\cdots+c^nz_n \tag{8}$$

是方程(6)的解。这个解是在这样的意义下的通解，就是方程(6)的每一个解可以在常数 $c^1, c^2, \cdots, c^n$ 的适当选取之下从公式(8)得到。同时对每一个給定的解 $z$，常数 $c^1, c^2, \cdots, c^n$（称为积分常数）是唯一地确定的。

这样，函数(7)构成方程(6)的所謂**基本解組**（参看 § 18, 3)）。

注意到，函数(7)是在整个数軸 $-\infty<t<+\infty$ 上确定的。

**証明** 从公式(5)推知組(7)中的每个函数是方程(6)的解，而从方程(6)的綫性齐次性推出（参看 § 6, 1)），对任意的复的常数 $c^1, \cdots, c^n$，公式(8)給出方程(6)的解。我們証明，如果 $z_*=z_*(t)$ 是方程(6)的任意一个解，那末它可以写成(8)的形状。根据 § 5 中命題 3)，我們可以假定解 $z_*$ 是在整个直綫 $-\infty<t<\infty$ 上定义的。置

$$z_*(0)=z_0,\quad \dot{z}_*(0)=\dot{z}_0,\quad \cdots,\quad z_*^{(n-1)}(0)=z_0^{(n-1)},$$

現在証明，可以选取常数 $c^1, c^2, \cdots, c^n$，使得由公式(8)所确定的解 $z(t)$ 满足同样的初始条件

$$z(0)=z_0,\quad \dot{z}(0)=\dot{z}_0,\quad \cdots,\quad z^{(n-1)}(0)=z_0^{(n-1)}. \tag{9}$$

把公式(8)的函数 $z$ 代入方程(9)，得到

$$c^1z_1^{(s)}(0)+\cdots+c^nz_n^{(s)}(0)=z_0^{(s)},\quad s=0, 1, \cdots, n-1, \tag{10}$$

关系式(10)是含未知量 $c^1, \cdots, c^n$ 的 $n$ 个綫性方程的方程組。为了組(10)有解，以下矩陣的行列式不等于零就行了：

$$\begin{pmatrix} z_1(0) & z_2(0) & \cdots & z_n(0) \\ \dot{z}_1(0) & \dot{z}_2(0) & \cdots & \dot{z}_n(0) \\ \ddot{z}_1(0) & \ddot{z}_2(0) & \cdots & \ddot{z}_n(0) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ z_1^{(n-2)}(0) & z_2^{(n-2)}(0) & \cdots & z_n^{(n-2)}(0) \\ z_1^{(n-1)}(0) & z_2^{(n-1)}(0) & \cdots & z_n^{(n-1)}(0) \end{pmatrix}. \tag{11}$$

直接可以看出,矩陣(11)有形状:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix},$$

由于所有的数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是两两不同的,所以它的行列式(范德蒙(Vandermonde)行列式)不等于零。但是我們要給出矩陣(11)的行列式异于零的别的(直接的)証明。这个証明在以后要拓广到重根的情形去。

如果矩陣(11)的行列式等于零,那末它的各行之間就有綫性关系。假定說,有这样的綫性关系。那末存在不同时等于零的常数 $b_{n-1}, b_{n-2}, \cdots, b_0$,当把它們依次乘矩陣(11)的各行并相加起来,就得到一行零。把这行零的第 $k$ 項写出来,得到

$$b_{n-1}z_k(0)+b_{n-2}\dot{z}_k(0)+\cdots+b_1z_k^{(n-2)}(0)+b_0z_k^{(n-1)}(0)=0. \quad (12)$$

如果用 $M(p)$ 来記多項式 $b_0p^{n-1}+b_1p^{n-2}+\cdots+b_{n-2}p+b_{n-1}$,那末关系式(12)可写成形式:

$$M(p)z_k|_{t=0}=0.$$

由于公式(5)和(7),从此得到

$$M(\lambda_k)=0,$$

而这是不可能的,因为多項式 $M(p)$ 的次数不超过 $n-1$,所以不可能有 $n$ 个不同的根 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k, \cdots, \lambda_n$。所得到的矛盾証明了組(10)的行列式异于零,因此可以(唯一地)选取常数 $c^1, c^2, \cdots, c^n$,使解 $z_*(t)$ 和 $z(t)$ 滿足同一組初始条件。在常数的这样的(且只在这样的)选取之下,解(8)就是給定的解 $z_*(t)$。

这样,定理 4 得証。

如果出現在方程(6)中的多項式 $L(p)$ 的系数是实数,那末就产生从所有的复的解的总体(8)中分出实解的問題。

这个問題的解决要依靠命題 4)，在叙述和証明这命題时，我們利用向量記法。这里把它們重提一下。

**3)** 由 $n$ 个数組成的一列：

$$\boldsymbol{u}=(u^1, u^2, \cdots, u^n)$$

称为 $n$ 維空間的 **向量**。这里 $\boldsymbol{u}$ 是向量，而 $u^1, u^2, \cdots, u^n$ 是数，称为向量的 **坐标**。向量常用黑体字标明。如果向量的坐标是实数，那末向量就算是 **实的**，如果它的坐标是复数，那末向量本身算是 **复的**。向量 $\boldsymbol{u}$ 的 **共軛复向量** $\overline{\boldsymbol{u}}$ 由等式

$$\overline{\boldsymbol{u}}=(\overline{u^1}, \overline{u^2}, \cdots, \overline{u^n})$$

定义。显然，向量 $\boldsymbol{u}$ 在且只在

$$\overline{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{u}$$

时才是实的。向量 $\boldsymbol{u}=(u^1, u^2, \cdots, u^n)$ 与实数或复数 $\alpha$ 的 **乘积** 由

$$\alpha\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}\alpha=(\alpha u^1, \alpha u^2, \cdots, \alpha u^n)$$

定义。向量

$$\boldsymbol{u}=(u^1, u^2, \cdots, u^n) \quad 与 \quad \boldsymbol{v}=(v^1, v^2, \cdots, v^n)$$

的 **和** 由公式

$$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=(u^1+v^1, u^2+v^2, \cdots, u^n+v^n)$$

定义。所有坐标等于零的向量 $\mathbf{0}$ 称为 **零** 向量(也用 0 表示)。

設

$$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_r$$

是有限个向量构成的向量組。假如有关系式

$$\alpha^1\boldsymbol{u}_1+\alpha^2\boldsymbol{u}_2+\cdots+\alpha^r\boldsymbol{u}_r=0,$$

其中 $\alpha^1, \alpha^2, \cdots, \alpha^r$ 是不全为零的常数，就称向量 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_r$ 之間是 **綫性相关的**。如果向量之間不存在綫性相关性，那末称它們是 **綫性独立的**。設

$$\boldsymbol{u}_j=(u_j^1, \cdots, u_j^n), \quad j=1, \cdots, r.$$

数 $u_j^i$ 构成矩陣 $(u_j^i)$，$i=1, \cdots, n$; $j=1, \cdots, r$。如果假定上指标

$i$ 表示行的号碼，下指标 $j$ 表示列的号碼，那末矩陣 $(u_j^i)$ 有高 $n$ 和寬 $r$. 因此，向量 $u_j$ 在矩陣 $(u_j^i)$ 中对应于第 $j$ 列(这一列由这个向量的坐标构成)。从此看出，向量 $u_1, u_2, \cdots, u_r$ 的綫性相关性对应于矩陣 $(u_j^i)$ 的列的綫性相关性。在 $r=n$ 的情形，矩陣 $(u_j^i)$ 是方陣，而向量 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 当且只当这个矩陣的行列式 $|u_j^i|$ 异于零时才是綫性独立的。

**4)** 設

$$z_1, z_2, \cdots, z_n \tag{13}$$

是 $n$ 維空間中的 $n$ 个綫性独立的复向量組。假定說，組(13)在含有每一个向量的同时，也含有它的共軛复向量。在这个假定之下，由公式

$$z=c^1z_1+\cdots+c^nz_n \tag{14}$$

确定的向量 $z$，在且只在相互共軛的向量前面的系数为相互共軛、实向量的系数为实数时，才能是实的。

我們来証明这件事。为了确定起見，假定成立关系式：

$$\left.\begin{aligned}&\bar{z}_1=z_2, \cdots, \bar{z}_{2k-1}=z_{2k};\\&\bar{z}_j=z_j, \quad j=2k+1, \cdots, n.\end{aligned}\right\}$$

那末按(14)，向量 $z$ 有形状：

$$\begin{aligned}z=&c^1z_1+c^2z_2+\cdots+c^{2k-1}z_{2k-1}\\&+c^{2k}z_{2k}+c^{2k+1}z_{2k+1}+\cdots+c^nz_n,\end{aligned} \tag{15}$$

而向量 $\bar{z}$ 有形状：

$$\begin{aligned}\bar{z}=&\overline{c^2}z_1+\overline{c^1}z_2+\cdots+\overline{c^{2k}}z_{2k-1}\\&+\overline{c^{2k-1}}z_{2k}+\overline{c^{2k+1}}z_{2k+1}+\cdots+\overline{c^n}z_n.\end{aligned} \tag{16}$$

如果

$$c^1=\overline{c^2}, \cdots, c^{2k-1}=\overline{c^{2k}}, c^{2k+1}=\overline{c^{2k+1}}, \cdots, c^n=\overline{c^n}, \tag{17}$$

那末从等式(15)，(16)推出 $\bar{z}=z$，即向量 $z$ 是实的。相反的，如果假設向量 $z$ 是实的，即 $\bar{z}=z$，那末等式(15)和(16)給出(由于向

量(13)是线性独立的)关系式组(17)。

这样，命题4)得证。

下面的命题5)給出在多项式 $L(p)$ 有实系数时从方程(6)的所有复的解的总体中分出实解的方法。

**5)** 設多项式 $L(p)$ 的系数是实的；那末多项式 $L(p)$ 除了每一个复数根 $\lambda$ 而外也有共軛于它的根 $\bar{\lambda}$。方程(6)的解 $e^{\lambda t}$ 和 $e^{\bar{\lambda}t}$ 互为共軛(参看 § 5,4))。如果根 $\lambda$ 正好是实的，那末解 $e^{\lambda t}$ 也是实的。因此，在基本解組(7)中除了每个解外，也有复数共軛于它的解。为了方程(6)的解(8)是实的，必要和充分的条件是：复数共軛的解前面的系数是共軛的，实解前面的系数是实的。

为了証明命題5)，以 $z_k$ 記坐标为 $\{z_k(0), \dot{z}_k(0), \cdots, z_k^{(n-2)}(0), z_k^{(n-1)}(0)\}$ 的向量，而 $z$ 是坐标为 $\{z_0, \dot{z}_0, \cdots, z_0^{(n-1)}\}$ 的向量。那末关系式(10)取形状

$$c^1 z_1 + c^2 z_2 + \cdots + c^n z_n = z.$$

由于矩陣(11)的行列式不为零，所以向量 $z_1, \cdots, z_n$ 是綫性独立的。因此，5)中所引述条件的必要性从4)立即得出。另一方面，如果这个条件滿足，那末解(8)是实的。事实上，如果 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 是一对复数共軛根，而 $c^1$ 和 $c^2$ 是复数共軛的常数，那末函数 $c_1 e^{\lambda_1 t}$ 和 $c_2 e^{\lambda_2 t}$ 是复数共軛的，从而它們的和是实的。

这样，命題5)得証。

## 例　題

**例題1.** 求方程

$$z - 3\ddot{z} + 9\dot{z} + 13z = 0$$

的一切复的解。它可以写成(6)的形式，其中

$$L(p) = p^3 - 3p^2 + 3p + 13.$$

可以直接驗証 $p = -1$ 是特征多项式 $L(p)$ 的根，用 $p+1$ 来除

$L(p)$，得到

$$L(p)=(p+1)(p^2-4p+13),$$

从此求得另外两个根为 $2\pm3i$. 这样，多項式 $L(p)$ 的所有的根是数

$$\lambda_1=2+3i,\quad \lambda_2=2-3i,\quad \lambda_3=-1.$$

根据定理 4，所討論的方程的复的通解有形状：

$$z=c^1e^{(2+3i)t}+c^2e^{(2-3i)t}+c^3e^{-t}.$$

在下面的例 2 和例 3 中給出分出实解的一般規則。这些規則直接从命題 5) 推出。

**例題 2.** 假設基本解組(7)滿足条件

$$\bar{z}_1=z_2,\ \cdots,\ \bar{z}_{2k-1}=z_{2k},\ \bar{z}_{2k+1}=z_{2k+1},\ \cdots,\ \bar{z}_n=z_n, \tag{18}$$

并置 $$z_1=x_1+iy_1,\ \cdots,\ z_{2k-1}=x_k+iy_k,$$

其中 $x_1,\cdots,x_k,y_1,\cdots,y_k$ 是实函数。其次，假定数 $c^1,c^2,\cdots,c^n$ 滿足条件(17)，并置

$$c^1=\frac{1}{2}(a^1-ib^1),\quad \cdots,\quad c^{2k-1}=\frac{1}{2}(a^k-ib^k),$$

其中 $a^1,\cdots,a^k,b^1,\cdots,b^k$ 是实数。在这些記号下，方程(6)的实的通解写成形状：

$$z=a^1x_1+b^1y_1+\cdots+a^kx_k+b^ky_k+c^{2k+1}z_{2k+1}+\cdots+c^nz_n,$$

其中 $$a^1,\ b^1,\ \cdots,\ a^k,\ b^k,\ c^{2k+1},\ \cdots,\ c^n$$

是任意的实数。因此，如果在基本解組(7)中每一对复数共軛的解換成其中之一的实部和虛部，那末我們得到实的基本解組。

**例題 3.** 仍旧假定解(7)滿足条件(18)；置

$$\lambda_1=\mu_1+i\nu_1,\quad \cdots,\quad \lambda_{2k-1}=\mu_k+i\nu_k.$$

在数 $c^1,c^2,\cdots,c^n$ 滿足条件(17)的假定下，我們可以置

$$c^1=\frac{1}{2}\rho_1e^{i\alpha_1},\quad \cdots,\quad c^{2k-1}=\frac{1}{2}\rho_ke^{i\alpha_k}.$$

在这些記号下，每一个实解 $z$ 写成形状：

$$z=\rho_1 e^{\mu_1 t}\cos(\nu_1 t+\alpha_1)+\cdots+\rho_k e^{\mu_k t}\cos(\nu_k t+\alpha_k)$$
$$+c^{2k+1}e^{\lambda_{2k+1}t}+\cdots+c^n e^{\lambda_n t},$$

其中 $\rho_1, \cdots, \rho_k, \alpha_1, \cdots, \alpha_k, c^{2k+1}, \cdots, c^n$ 是任意实常数。从最后的写法看出，每一个根 $\lambda_j$ 的虚部 $\nu_j\neq 0$ 給出有頻率为 $\nu$ 的振动特性的解，而根 $\lambda_j$ 的实部 $\mu_j$ 使得解或是增大(当 $\mu_j>0$)，或是減小(当 $\mu_j<0$)。

例題 4. 利用例題 2 和例題 3 中的結論，我們可以把在例題 1 中所考虑的方程的一切实解写成以下两种形式：

$$z=a^1e^{2t}\cos 3t+b^1e^{2t}\sin 3t+c^3e^{-t},$$
$$z=\rho_1e^{2t}\cos(3t+\alpha_1)+c^3e^{-t}.$$

## §8. 常系数綫性齐次方程(重根的情形)

如果方程

$$L(p)z=0 \tag{1}$$

的特征多項式

$$L(p)=p^n+a_1p^{n-1}+\cdots+a_{n-1}p+a_n$$

(参看 §7, 1))有重根，那末在形状为 $e^{\lambda t}$ 的函数中不可能求到方程(1)的 $n$ 个不同的解。为了在这种情形求出别的形状的解，可以运用下面的設想。設 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 是特征多項式 $L(p)$ 的两个不同的实根；那末函数 $\dfrac{e^{\lambda_1 t}-e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1-\lambda_2}$ 是方程(1)的解。如果現在假定，变动多項式 $L(p)$ 的系数，使得数 $\lambda_2$ 趋向于 $\lambda_1$，那末这个解过渡(取极限)到函数 $te^{\lambda_1 t}$，很自然地料想它就是方程(1)在 $\lambda_1$ 是多項式 $L(p)$ 的二重根时的解。类似地我們来推测，如果 $\lambda$ 是特征多項式 $L(p)$ 的 $k$ 重根，那末所有的函数

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \cdots, t^{k-1}e^{\lambda t}$$

是方程(1)的解。把这个猜测拓广到多重根的情形，我們推测以下定理(是定理 4 的推广)是成立的。

**定理 5.** 設

$$L(p)z=0 \tag{2}$$

是 $n$ 阶常系数綫性齐次方程。且設 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 是方程(2)的特征多項式 $L(p)$ 的所有两两不同的根的全部，其中 $\lambda_j$ 的重次为 $k_j$，因此 $k_1+\cdots+k_m=n$. 置

$$\left.\begin{aligned} &z_1=e^{\lambda_1 t}, \quad z_2=te^{\lambda_1 t}, \quad \cdots, \quad z_{k_1}=t^{k_1-1}e^{\lambda_1 t};\\ &z_{k_1+1}=e^{\lambda_2 t}, \ z_{k_1+2}=te^{\lambda_2 t}, \ \cdots, \ z_{k_1+k_2}=t^{k_2-1}e^{\lambda_2 t};\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\cdots, \qquad\qquad z_n=t^{k_m-1}e^{\lambda_m t}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

那末所有的函数 (3) 是方程 (2) 的解，因此，对任意的复常数 $c^1$, $c^2$, $\cdots$, $c^n$, 函数

$$z=c^1z_1+\cdots+c^nz_n \tag{4}$$

也是这个方程的解。这个解在这样的意义上是通解：方程(2)的每个解可以通过适当地选取常数 $c^1, \cdots, c^n$ 而由公式(4)得到。并且常数 $c^1, \cdots, c^n$ 对于每个給定的解 $z$ 是唯一确定的。

因此，函数(3)构成方程(2)的所謂**基本解組**(参看 § 18, 3))。我們注意到，函数(3)是在整个数軸 $-\infty<t<+\infty$ 上确定的。

在証明定理 5 之前，先証明**平移公式**。

1) 設 $L(p)$ 是任意的多項式，$\lambda$ 是任意的复数，且設 $f(t)$ 是足够次数可微的函数。那末成立以下的重要公式：

$$L(p)\,(e^{\lambda t}f(t))=e^{\lambda t}L(p+\lambda)f(t). \tag{5}$$

我們来証明公式(5)。首先对于 $L(p)\equiv p$ 的情形来驗証它。我們有

$$p(e^{\lambda t}f(t))=\lambda e^{\lambda t}f(t)+e^{\lambda t}f'(t)=e^{\lambda t}(p+\lambda)f(t).$$

現在容易对任意的一阶多項式 $L(p)=ap+b$ 来驗証公式(5)。我們有

$$(ap+b)(e^{\lambda t}f(t))=ap(e^{\lambda t}f(t))+be^{\lambda t}f(t)$$
$$=ae^{\lambda t}(p+\lambda)f(t)+be^{\lambda t}f(t)=e^{\lambda t}[a(p+\lambda)+b]f(t),$$

在一般情形，公式(5)的証明按关于多項式 $L(p)$ 的次数 $n$ 作归納进行。对 $n=1$，我們已看到公式(5)是成立的。假定它对于 $n-1$ $(n\geqslant 2)$ 次的多項式已成立，而来証明对 $n$ 次多項式 $L(p)$ 也成立。把这个多項式 $L(p)$ 分解为两个因子 $L(p)=L_1(p)L_2(p)$，其中 $L_1(p)$ 的次数等于 1，而 $L_2(p)$ 是 $n-1$ 次的。因为对于 $L_1(p)$ 及 $L_2(p)$ 的每一个多項式，公式(5)是成立的，所以我們有(参看 § 7, 1))

$$L(p)(e^{\lambda t}f(t))=L_1(p)(L_2(p)(e^{\lambda t}f(t)))$$
$$=L_1(p)(e^{\lambda t}L_2(p+\lambda)f(t))$$
$$=e^{\lambda t}L_1(p+\lambda)L_2(p+\lambda)f(t)=e^{\lambda t}L(p+\lambda)f(t),$$

这样，公式(5)得証。

現在証明命題 2)，定理 5 差不多完全包含在这个命題内。

**2)** 設 $L(p)$ 是关于符号 $p$ 的任意的多項式，且設实变量 $t$ 的函数 $\omega_r(t)$ 按公式

$$\omega_r(t)=L(p)t^re^{\lambda t}$$

定义，其中 $\lambda$ 是复数。可以証明，如果 $\lambda$ 是多項式 $L(p)$ 的 $k$ 重根，那末函数 $\omega_0(t),\cdots,\omega_{k-1}(t)$ 恒等于零。另一方面，如果函数 $\omega_0(t),\cdots,\omega_{k-1}(t)$ 至少对一个值 $t=t_0$ 等于零，即成立等式

$$\omega_0(t_0)=\omega_1(t_0)=\cdots=\omega_{k-1}(t_0)=0, \tag{6}$$

那末 $\lambda$ 是多項式 $L(p)$ 的根，并且这个根的重次不小于 $k$.

我們証明命題 2).

由平移公式(参看(5))，我們有

$$\omega_r(t)=e^{\lambda t}L(p+\lambda)t^r. \tag{7}$$

先假定 $\lambda$ 是多項式 $L(p)$ 的 $k$ 重根，即

$$L(p)=M(p)(p-\lambda)^k.$$

在这个恒等式中換 $p$ 为 $p+\lambda$，得到

$$L(p+\lambda)=M(p+\lambda)p^k. \tag{8}$$

从公式(7)和(8)，得到

$$\omega_r(t)=e^{\lambda t}M(p+\lambda)(p^k t^r)=0, \quad \text{当 } r=0,1,\cdots,k-1,$$

这是因为当 $r<k$ 时，$p^k t^r=0$. 因此，命題 2)的第一部分得証。

現在假定关系式(6)成立。把 $L(p+\lambda)$ 按 $p$ 的幂次展开，得到

$$L(p+\lambda)=b_0+b_1p+\cdots+b_{n-1}p^{n-1}+b_np^n. \tag{9}$$

从关系式(7)和(9)，得到

$$\omega_0(t_0)=e^{\lambda t_0}b_0,$$

由于(6)，这式給出

$$b_0=0.$$

現在假定成立等式

$$b_0=b_1=\cdots=b_{r-1}=0, \quad r\leqslant k-1, \tag{10}$$

来証明 $b_r=0$. 由(7)，(9)及(10)，有

$$\omega_r(t_0)=e^{\lambda t_0}r!\,b_r.$$

由于(6)，从此推出

$$b_r=0.$$

因此，$b_0=b_1=\cdots=b_{k-1}=0$，且多項式 $L(p+\lambda)$ 有形状：

$$L(p+\lambda)=b_kp^k+\cdots+b_np^n=(b_k+\cdots+b_np^{n-k})p^k$$
$$=M_1(p)p^k.$$

在这个恒等式中換 $p$ 为 $p-\lambda$，得到

$$L(p)=M_1(p-\lambda)\cdot(p-\lambda)^k,$$

这証明了 $\lambda$ 是多項式 $L(p)$ 的根，并且它的重次不小于 $k$.

这样，命題 2)得証。

**定理 5 的証明** 从命題 2)的第一部分立即推知，在定理的叙述中提到的函数(3)是方程(2)的解。要証明它們构成基本解組。为了証明这个事实，只要指出以适当方式选取常数 $c^1,\cdots,c^n$，就可以从公式(4)得到方程(2)的任意的解 $z_*$ 就行了。我們来証实

这件事(和証明定理 4 时所做的不同,在这里不利用定理 3)。

設 $z_*$ 是方程(2)的确定在某区間 $r_1<t<r_2$ 上的任意一个解,且設 $t_0$ 是这个区間上的某个数。置

$$z_*(t_0)=z_0,\ \dot{z}_*(t_0)=\dot{z}_0,\ \cdots,\ z_*^{(n-1)}(t_0)=z_0^{(n-1)}.$$

現在求常数 $c^1,\cdots,c^n$, 使得方程(2)的由公式(4)所确定的解 $z$ 和給定的解 $z_*$ 有相同的初始条件。那末由唯一性定理得到 $z\equiv z_*$(在区間 $r_1<t<r_2$ 上)。为了确定常数 $c^1,\cdots,c^n$, 我們得到方程組

$$c^1z_1^{(s)}(t_0)+c^2z_2^{(s)}(t_0)+\cdots+c^nz_n^{(s)}(t_0)=z_0^{(s)},$$
$$s=0,1,\cdots,n-1. \tag{11}$$

为了方程組(11)可解,矩陣

$$\begin{pmatrix} z_1(t_0) & z_2(t_0) & \cdots & z_n(t_0) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ z_1^{(s)}(t_0) & z_2^{(s)}(t_0) & \cdots & z_n^{(s)}(t_0) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ z_1^{(n-1)}(t_0) & z_2^{(n-1)}(t_0) & \cdots & z_n^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} \tag{12}$$

的行列式不等于零就行了。我們証明这个行列式不等于零。为此,証明矩陣(12)的行是綫性独立的。假定与此相反,且設 $b_{n-1}$, $b_{n-2},\cdots,b_0$ 是不同时等于零的常数,在用这些数分别乘矩陣的第一、第二以及其他各行使得它們的和等于零。写出第 $j$ 列元素之和,我們得到等式

$$b_0z_j^{(n-1)}(t_0)+b_1z_j^{(n-2)}(t_0)+\cdots+b_{n-2}\dot{z}_j(t_0)+b_{n-1}z_j(t_0)=0,$$

它可以改写为形状:

$$M(p)z_j|_{t=t_0}=0, \tag{13}$$

这里 $M(p)=b_0p^{n-1}+b_1p^{n-2}+\cdots+b_{n-2}p+b_{n-1}$。对于 $j=1,\cdots,k_1$ 所得到的等式(13)表明 $\lambda_1$ 至少是多項式 $M(p)$ 的 $k_1$ 重根(参看命題 2))。完全一样地,对 $j=k_1+1,\cdots,k_1+k_2$ 所得到的等式給出 $\lambda_2$ 至少是 $M(p)$ 的 $k_2$ 重根。所有的等式(13)的总体使我們得到(考虑了重次)多項式 $M(p)$ 的不少于 $n$ 个的根,但由于 $M(p)$

的次数不高于 $n-1$，这是不可能的。这样，由矩陣(12)的行列式等于零的假定引出矛盾，因而方程組(11)关于未知数 $c^1, c^2, \cdots, c^n$ 是可解的(并且是唯一的)。

这样，定理5完全証明。

我們指出定理5的一个明显的推論。

**3)** 方程(2)的每个解 $z(t)$ 可以写为形式：

$$z(t)=f_1(t)e^{\lambda_1 t}+f_2(t)e^{\lambda_2 t}+\cdots+f_m(t)e^{\lambda_m t},$$

其中 $f_j(t)$ 是次数不超过 $k_j-1$ 的多項式，$j=1, \cdots, m$。并且多項式 $f_1(t), \cdots, f_m(t)$ 是由解 $z(t)$ 唯一确定的，这是因为它們的系数是积分常数 $c^1, c^2, \cdots, c^n$，而根据定理5，这些常数是由解 $z(t)$ 唯一确定的。

如果方程(2)的系数是实的，那末在我們面前就提出从方程(2)的复数解的总体中分出实解的問題。

**4)** 假設方程(2)的特征多項式 $L(p)$ 的系数是实的。設 $\lambda$ 是多項式 $L(p)$ 的某个 $k$ 重根；那末当 $r=0, 1, \cdots, k-1$ 时，函数 $t^r e^{\lambda t}$ 是方程(2)的解。如果 $\lambda$ 是实数，那末函数 $t^r e^{\lambda t}$ 是实的，如果根是复的，那末除了有解 $t^r e^{\lambda t}$ 之外；还有和它复数共軛的解 $t^r e^{\bar{\lambda} t}$，因为 $\bar{\lambda}$ 是多項式 $L(p)$ 的 $k$ 重根。因此，在基本解組(3)中除了每个复数解而外，还有共軛于它的解。为了解(4)是实的，必要且充分的条件是：实解的系数是实的，成对复数共軛的解的系数是成对共軛的。

命題4)的証明和根据§7中命題4)来証明§7中命題5)一样来进行。

## 例　題

**例題1.** 解方程

$$z^{V}+3z^{IV}+3z'''+z''=0.$$

这个方程可以写成形状(2),而特征多项式 $L(p)$ 有形状:

$$p^5+3p^4+3p^3+p^2=p^3(p+1)^3.$$

这多项式的根是数

$$\lambda_1=0, \quad \lambda_2=-1,$$

而有重次 $k_1=2$, $k_2=3$. 所以根据定理5, 所討論的方程的基本解組有形式:

$$z_1=1,\ z_2=t,\ z_3=e^{-t},\ z_4=te^{-t},\ z_5=t^2e^{-t}.$$

通解由下式給出:

$$z=(c^1+c^2t)+(c^3+c^4t+c^5t^2)e^{-t}.$$

**例題2.** 解方程

$$z^{\mathrm{IV}}+2z''+z=0.$$

特征多項式等于 $L(p)=(p^2+1)^2$; 它的(二重)根为 $\lambda_1=i$, $\lambda_2=-i$. 所討論的方程的通解写为形状:

$$z=(c^1+c^2t)e^{it}+(c^3+c^4t)e^{-it}.$$

以下两个例題給出分出实解的一般規則, 它們直接从命題4)推得。例題3和4完全类似于§7中的例題2和3.

**例題3.** 在§7的例2中不考虑解的具体形状而只假定基本解組由成对共軛的解和实解构成。因此, 同样的討論指明在重根的情形,我們有以下的一般規則。在基本解組(3)中应当把每一对复数共軛的解換成这些解中之一的实部和虛部。这样得到的函数組是实解的基本解組。

**例題4.** 設

$$t^re^{\lambda t},\ t^re^{\bar{\lambda}t}$$

是基本解組(3)中的两个复数共軛的解。在实解 $z$ 的情形,和式(4)中相应于这些解的部分可以写成形式:

$$\hat{z}=ct^re^{(\mu+i\nu)t}+\bar{c}t^re^{(\mu-i\nu)t}.$$

置

$$c=\frac{1}{2}\rho e^{i\alpha},$$

那末我們就有

$$\hat{z}=\rho t^r e^{\mu t}\cos(\nu t+\alpha). \tag{14}$$

用这个方法可以把出現在和式(4)中的每一对复数共軛的解換成形状为(14)的实函数，其中含有两个任意的实常数 $\rho$ 与 $\alpha$。这里和在§7的例題3中一样，也可以看出，根 $\lambda$ 的虛部 $\nu\neq 0$ 使解有振动特性，而根 $\lambda$ 的实部 $\mu\neq 0$ 或者要引起解的增大(当 $\mu>0$)，或是使之減小(当 $\mu<0$)。最后，根 $\lambda$ 的多重性引起因子 $t^r$ 的出現，它也影响到解的增大，但是当 $t\to\infty$ 及 $\mu<0$ 时，由因子 $t^r$ 引起的解的增大比因子 $e^{\mu t}$ 的減小小得多，因此当 $\mu<0$ 时(对根的任何重次)，解当 $t$ 增大时趋向于零。

**例題5.** 利用例題3和4的結論，我們可以把在例題2中討論的方程的所有实解写成以下两种形式：

$$z=(a^1+a^2t)\cos t+(b^1+b^2t)\sin t,$$

$$z=\rho_1\cos(t+\alpha_1)+\rho_2 t\cos(t+\alpha_2).$$

## §9. 稳定多項式

設

$$L(p)=0 \tag{1}$$

是常系数綫性齐次方程。这方程的解当 $t\to\infty$ 时的趋向(它們是趋于零，还是保持有界或是无限增长)的問題，在一系列常微分方程理論的应用方面起重要的作用。在§7中例3和§8中例4已經指出，关于方程(1)的解的状态的这种問題和多項式 $L(p)$ 的根的实部有关。現在要更仔細地說明这种联系。

**1)** 如果多項式 $L(p)$ 的所有的根都具有負实部，就称它为稳定的。用几何上的話来說，就是根落在复数平面上虛軸的左边。設

$$\lambda_j=\mu_j+i\nu_j,\quad j=1,\cdots,m$$

是多項式 $L(p)$ 的所有的根。如果这个多項式是稳定的，那末存在

正数 $\alpha$，使得

$$\mu_j < -\alpha, \quad j=1, \cdots, m. \tag{2}$$

我們証明，在这种情形对方程(1)的每一个解 $\varphi(t)$ 可以找到正数 $M$，使得

$$|\varphi(t)| < Me^{-\alpha t}, \quad \text{当 } t \geqslant 0. \tag{3}$$

这公式不仅指出方程(1)的每个解当 $t\to\infty$ 时趋向于零，并且也估計了这个解趋向于零进行得多快。

首先对方程(1)的任意基本解 $z_s$，$s=1, \cdots, n$（参看 § 8，公式(3)）来証明公式(3)。我們有

$$z_s = t^r e^{\lambda_j t},$$

从此

$$\left|\frac{z_s}{e^{-\alpha t}}\right| = t^r e^{(\mu_j+\alpha)t}.$$

根据(2)，数 $\mu_j+\alpha$ 是負的，所以函数 $t^r e^{(\mu_j+\alpha)t}$ 当 $t\to\infty$ 时趋于零，因此当 $t\geqslant 0$ 时是有界的。这样有

$$\left|\frac{z_s}{e^{-\alpha t}}\right| < M_s, \quad \text{当 } t\geqslant 0,$$

或者

$$|z_s| < M_s e^{-\alpha t}, \quad \text{当 } t\geqslant 0.$$

如果現在

$$\varphi(t) = c^1 z_1 + c^2 z_2 + \cdots + c^n z_n$$

是方程(1)的任意解，那末当 $t>0$ 时有

$$|\varphi(t)| \leqslant (|c^1| M_1 + |c^2| M_2 + \cdots + |c^n| M_n) e^{-\alpha t} = Me^{-\alpha t}.$$

这样，不等式(3)得証。应当注意，如果多項式 $L(p)$ 至少有一个根 $\lambda_j$ 有正实部 $\mu_j>0$，那末方程(1)有解 $e^{\lambda_j t}$，当 $t\to\infty$ 时无限增大。

寻求各种对实际应用尽可能方便的判定多項式稳定性的条件問題，直到現在，数学家还有許多研究。对于二次多項式，稳定性条件直接从二次方程的解的公式得出（参看 2））。关于任意 $n$ 次的多項式的稳定性問題已由数学家劳斯(Routh)和胡尔維茨(Hurwitz)以略为不同的方式解决了。但是劳斯-胡尔維茨条件对于实际計算还不大方便，因此，直到現在还在探求稳定性条件的新的說法，

这里将推导 $n=3$ 时劳斯-胡尔維茨判别法的証明，并給出对于任意次数 $n$ 在胡尔維茨形式下的稳定性条件而不加証明。

**2)** 具有实系数 $a$ 和 $b$ 的二次多項式 $L(p)=p^2+ap+b$ 在且只在它的系数为正时才是稳定的。

这个断言容易由二次方程的解的公式来驗証。

**3)** 如果具有实系数的多項式 $L(p)=p^n+a_1p^{n-1}+\cdots+a_n$ 是稳定的，那末它的所有系数是正的。

为了証明，把多項式 $L(p)$ 分解为实的一次和二次的因子，就是分解成形状为 $p+c$ 及 $p^2+ap+b$ 的因子。由于多項式 $L(p)$ 是稳定的，那末所分成的以上形状的因子也是稳定的。为了因子 $p+c$ 稳定，数 $c$ 必須是正的；为了因子 $p^2+ap+b$ 稳定，必須两个数 $a$, $b$ 都是正的。从这些因子的系数的正号性容易推知乘积的系数的正号性。

下面的定理給出三次多項式稳定性的判别法。

**定理 6.** 具有实系数的多項式

$$L(p)=a_0p^3+a_1p^2+a_2p+a_3, \quad a_0>0$$

当且只当数 $a_1$, $a_2$, $a_3$ 是正的，并且滿足不等式

$$a_1a_2>a_0a_3$$

时，才是稳定的。

**証明** 在証明时我們考虑首項系数等于 1 的多項式

$$L(p)=p^3+ap^2+bp+c; \tag{4}$$

一般多項式 $L(p)$ 的情形容易化为这个多項式。由于命題 3)，我們証明有正系数 $a$, $b$, $c$ 的多項式(4)当且只当不等式

$$ab>c \tag{5}$$

成立时才是稳定的就行了。在証明中我們用到多項式的根是系数的連續函数的事实。

首先讲明在怎样的条件下多項式(4)有純虛根，特别是有根 $p=0$，因为它落在虛軸上，也应当看为純虛根。我們有

$$L(p)=(p+a)(p^2+b)-ab+c. \tag{6}$$

如果多項式 $L(p)$ 有零根，那末 $c=0$，按假定这个情形已經除去了，因为 $c>0$. 假定說，数 $i\omega$，$\omega\neq 0$，是多項式 $L(p)$ 的根。如果 $-\omega^2+b$ 不为零，那末数 $(i\omega+a)(-\omega^2+b)$ 有不等于零的虛部，因而不能和实数 $-ab+c$ 相消。因此，数 $i\omega$ 只在 $-\omega^2+b=0$ 时才能是多項式 $L(p)$ 的根；在这情形，我們有等式

$$L(i\omega)=-ab+c=0,$$

反之，如果 $ab=c$，那末由(6)，多項式 $L(p)$ 有純虛根 $p=\pm i\sqrt{b}$，因此，(正系数的)多項式 $L(p)$ 当且只当 $ab=c$ 时有純虛根。特别是，在連續变动正系数 $a$，$b$，$c$ 时，多項式 $L(p)$ 的根只在滿足等式 $ab=c$ 时才能和虛軸相交。

假設不等式(5)不滿足。那末或是 $ab=c$，或是 $ab<c$. 在前一情形，多項式 $L(p)$ 有純虛根，因此不稳定。要証明，在第二种情形，也就是滿足不等式

$$ab<c \tag{7}$$

时，多項式 $L(p)$ 也是不稳定的。我們来連續变动系数 $a$ 和 $b$，保持它們是正数，使得 $a$，$b$ 趋于零并且不破坏不等式。在这样变动的过程中沒有一个根从虛軸的一边穿到另一边去，因此多項式的稳定性并不改变。当 $a=b=0$ 时，得到多項式 $p^3+c$，它有根 $\sqrt[3]{c}\left(\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3}\right)$，这些根落在虛軸的右边。由根对系数的連續依賴性，对于充分小的正数 $a$ 和 $b$，不稳定性(根在虛軸的右边)是保持的。

現在假定滿足不等式(5)，而来証明多項式 $L(p)$ 是稳定的。为此，变动常数 $c$，使它保持为正但趋向于零，并且使不等式(5)不受破坏。当 $c=0$ 时，我們有多項式

$$L(p)=p(p^2+ap+b),$$

它有一个零根和两个具負实部的根。对于小的正数 $c$，这两个根的变动也不大，因此它們的乘积仍旧是正的，而零根变到小的正根或負根。因为所有三个根的乘积等于負数 $-c$，所以接近于零的根是負的。

这样，定理 6 得証。

为了叙述任意的实系数多項式的稳定性的必要和充分条件，先約定以下术語。設

$$P=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

是任意的 $n$ 阶方陣。矩陣

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk} \end{pmatrix}$$

的行列式称为它的 **$k$ 次主子式**；記这个主子式为 $\Delta_k(P)$。因此，行列式 $\Delta_k(P)$ 由矩陣 $P$ 中前 $k$ 行和 $k$ 列的元素組成。

**定理 7.** 設

$$a_0p^n+a_1p^{n-1}+\cdots+a_n, \quad a_0>0 \tag{8}$$

是任意的 $n$ 次实系数多項式，为了判明它的稳定性問題，作 $n$ 阶矩陣

$$Q=\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{n-2} & a_n \end{pmatrix}.$$

可以证明，多项式 (8) 当且只当矩阵 $Q$ 的所有的主子式 $\Delta_k(Q)$，$k=1, \cdots, n$ 为正数时，才是稳定的。

在本书中对定理 7 不予证明。它的证明可以在其他书中找到，例如：切塔也夫(H. Г. Четаев)，运动稳定性，1955①。

为了避免对矩阵 $Q$ 在写法上有误解起见，注意，矩阵 $Q$ 的第 $k$ 列元素有形状：

$$\cdots \; a_{k+2} \; a_{k+1} \; a_k \; a_{k-1} \; a_{k-2} \; \cdots,$$

其中元素 $a_k$ 在主对角线上；同时在指标 $k+j$ 为负数或大于 $n$ 时，把元素 $a_{k+j}$ 看作零。

## 例　题

**例题 1.** 从定理 7 导出定理 6. 在 $n=3$ 的情形，矩阵 $Q$ 有形状：

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix}.$$

它的三个主子式有以下数值：

$$\Delta_1(Q)=a_1, \quad \Delta_2(Q)=a_1a_2-a_0a_3, \quad \Delta_3(Q)=a_3\Delta_2(Q).$$

它的正号性条件和系数 $a_0$ 的正号性的条件一起等价于条件：

$$a_0>0,\ a_1>0,\ a_3>0,\ a_1a_2>a_0a_3.$$

从这些条件的总体，容易看出系数 $a_2$ 的正号性。因此，在 $n=3$ 的情形，定理 7 成为定理 6.

**例题 2.** 在 $n=4$ 的情形，矩阵 $Q$ 有形状：

$$Q=\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{pmatrix}.$$

① 在库洛什(А. Г. Курош)，高等代数教程(1946)中也可找到。——译者注

它的主子式有以下数值：

$$\Delta_1(Q)=a_1;\quad \Delta_2(Q)=a_1a_2-a_0a_3;$$
$$\Delta_3(Q)=a_3\Delta_2(Q)-a_1^2a_4;\quad \Delta_4(Q)=a_4\Delta_3(Q).$$

容易看出，这些主子式的正号性和条件 $a_0>0$ 一起等价于条件：

$$a_0>0,\ a_1>0,\ a_2>0,\ a_3>0,\ a_4>0,$$
$$\Delta_3(Q)=a_1a_2a_3-a_0a_3^2-a_1^2a_4>0.$$

## § 10. 常系数綫性非齐次方程

这里将給出带有特殊形状的，就是带有所謂拟多項式的自由項的常系数綫性方程的解法。

**1）** 每一个可以写成形状：

$$F(t)=f_1(t)e^{\lambda_1 t}+f_2(t)e^{\lambda_2 t}+\cdots+f_m(t)e^{\lambda_m t} \tag{1}$$

的函数 $F(t)$ 称为 **拟多項式**，其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是一些复数，而 $f_1(t),f_2(t),\cdots,f_m(t)$ 是 $t$ 的多項式。从 § 8 中命題 3) 知道常系数綫性齐次方程的每个解是拟多項式。相反的，可以証明，每个拟多項式是某一个常系数綫性齐次方程的解。如果叙列 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 中有某两个数相同，例如，如果 $\lambda_1=\lambda_2$，那末和式 (1) 中同这些数相应的項可以并成一項 $(f_1(t)+f_2(t))e^{\lambda_1 t}$。因此，写法(1)常可化为这样的形式，使得在它里面出現的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 两两不相同。注意到，任意两个拟多項式的和与积也是拟多項式；并且如果对任意的拟多項式运用微分算子 $L(p)$，我們仍旧得到拟多項式。

因此，在这一节将考察方程

$$L(p)z=F(t), \tag{2}$$

其中 $F(t)$ 是某一拟多項式。除了方程(2)之外，还考虑相应的齐次方程

$$L(p)u=0. \tag{3}$$

下面的命題直接从 § 6 中命題 2) 推出。

2) 如果 $\hat{z}$ 是方程(2)的某个解，那末同一方程的任意解可以写为形状

$$z=\hat{z}+u,$$

其中 $u$ 是方程(3)的某个解。

因为齐次方程的任意解我們已經会求了，所以問題归結为在 $F(t)$ 是拟多項式的情形，求方程(2)的一个解或者說是求特解的問題。其次，由于每一个拟多項式可以写为形式(1)，所以根据§6中命題3)，問題在于求方程(2)在 $F(t)=f(t)e^{\lambda t}$ 情形的特解，这里 $f(t)$ 是多項式。对这种情形，按下面定理来求解。

**定理8.** 考察非齐次方程

$$L(p)z=f(t)e^{\lambda t}, \tag{4}$$

其中 $f(t)$ 是 $t$ 的 $r$ 次多項式，而 $\lambda$ 是复数。如果 $L(\lambda)\neq 0$，我們假設 $k=0$；如果 $L(\lambda)=0$，設 $k$ 就是根 $\lambda$ 的重数。那末，方程(4)存在特解，具有形状：

$$z=t^k g(t)e^{\lambda t}, \tag{5}$$

其中 $g(t)$ 是 $t$ 的 $r$ 次多項式。多項式 $g(t)$ 的系数可以用待定系数法求得。

**証明** 置

$$f(t)=a_0t^r+f^*(t), \tag{6}$$

将求形状为

$$g(t)=b_0t^r+g^*(t) \tag{7}$$

的多項式 $g(t)$，其中多項式 $f^*(t)$ 和 $g^*(t)$ 有次数 $r-1$。其次，由于数 $k$ 的取法，我們有

$$L(p)=M(p)(p-\lambda)^k, \tag{8}$$

其中 $M(\lambda)\neq 0$。为使函数(5)是方程(4)的解，必須滿足条件(参看§8, 1))

$$L(p)e^{\lambda t}t^k g(t)=e^{\lambda t}L(p+\lambda)t^k g(t)=e^{\lambda t}f(t),$$

就是多項式 $g(t)$ 应当滿足条件：

$$L(p+\lambda)t^k g(t) = f(t). \tag{9}$$

多項式 $M(p+\lambda)$ 有常数項 $M(\lambda) \neq 0$，因此可以写成形式：

$$M(p+\lambda) = M(\lambda) + M^*(p)p, \quad M(\lambda) \neq 0. \tag{10}$$

注意到关系 (6)，(7)，(8) 和(10)，我們現在可以把对多項式 $g(t)$ 所加的条件(9)写成形状：

$$b_0 M(\lambda) p^k t^{k+r} + b_0 M^*(p) p^{k+1} t^{k+r} + L(p+\lambda) t^k g^*(t) = a_0 t^r + f^*(t). \tag{11}$$

比較等式(11)中含 $t^r$ 的項，得到关系

$$b_0 M(\lambda) p^k t^{k+r} = a_0 t^r, \tag{12}$$

从此确定待求的多項式 $g(t)$ 的系数 $b_0$ (因为 $M(\lambda) \neq 0$)，并且 $b_0$ 是唯一确定的。現在假定系数 $b_0$ 选得使关系式(12)滿足；那末关系(11)取形式：

$$L(p+\lambda)t^k g^*(t) = f^*(t) - b_0 M^*(p) p^{k+1} t^{k+r}, \tag{13}$$

其中等式的右边是已知的 $r-1$ 次多項式，而左边是未知的 $r-1$ 次多項式 $g^*(t)$. 方程(13)和方程(9)所不同的只是在(13)中出現的多項式低了一次。对方程(13)重复以上对方程(9)进行的計算，我們算出多項式 $g^*(t)$ 中 $t$ 的最高次即 $r-1$ 次項的系数 $b_1$. 继續这个步驟，我們就算出多項式 $g(t)$ 的一切系数 $b_0, b_1, \cdots, b_r$，使得 $g(t)$ 滿足条件(9)，这样就求得方程(4)的形状如(5)的解。

可以把形状(5)的解直接代到方程(4)并假定多項式 $g(t)$ 的系数是未知的，通过比較关系式(4)左右两边同次項的系数，就得到对于这些系数的綫性方程組。上面进行的計算表明，关于多項式 $g(t)$ 的系数的方程組是可解的。

这样，定理 8 得証。

注　所得到的确定多項式 $g(t)$ 系数的方程組是有三角矩陣的綫性方程組：比較項 $t^r e^{\lambda t}$ 的系数，我們得到只含 $b_0$ 的方程；比較項 $t^{r-1}e^{\lambda t}$ 的系数，我們得到只含 $b_0$ 和 $b_1$ 的方程等等。

我們来建立拟多項式的一个重要性质。

**3)** 如果拟多項式

$$F(t)=f_1(t)e^{\lambda_1 t}+f_2(t)e^{\lambda_2 t}+\cdots+f_m(t)e^{\lambda_m t}$$

在某区間 $r_1<t<r_2$ 上恒等于零，其中 $\lambda_1$，$\lambda_2$，…，$\lambda_m$ 是两两不同的数，那末所有的多項式 $f_1(t)$，$f_2(t)$，…，$f_m(t)$ 恒等于零，从而拟多項式的所有系数等于零。从此立即推出，如果两个拟多項式 $F(t)$ 和 $F^*(t)$ 在某区間上恒等，那末它們相应的系数是一致的。

命題 3) 将按数 $m$ 用归納法証明，这里数 $m$ 称为拟多項式的阶数。$m=1$ 时，它是成立的，因为在这种情形，等式 $F(t)=f_1(t)e^{\lambda_1 t}\not\equiv 0$ 和 $f_1(t)\not\equiv 0$ 是等价的。現在作归納法的从 $m-1$ 向 $m\ (m\geqslant 2)$ 的过渡。如果拟多項式 $F(t)$ 在区間 $r_1<t<r_2$ 上恒等于零，那末这个事实对于拟多項式

$$G(t)=p^{l+1}(F(t)e^{-\lambda_m t})$$

也成立，其中 $p$ 是微分算子，而 $l$ 是多項式 $f_m(t)$ 的次数。由于 §8 中命題 1)，我們有

$$G(t)=g_1(t)e^{(\lambda_1-\lambda_m)t}+g_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_m)t}+\cdots+g_{m-1}(t)e^{(\lambda_{m-1}-\lambda_m)t},$$

其中 $\quad g_i(t)=(p+\lambda_i-\lambda_m)^{l+1}f_i(t),\quad i=1,\cdots,m-1.$

拟多項式 $G(t)$ 的阶数为 $m-1$，由于它在区間 $r_1<t<r_2$ 上恒等于零，那末根据归納法假設，所有多項式 $g_1(t)$，…，$g_{m-1}(t)$ 恒等于零。假定說，多項式 $f_1(t)$，…，$f_{m-1}(t)$ 中的某一个不等于零，例如 $f_1(t)\not\equiv 0$，我們要从这个假定引出矛盾来。設多項式 $f_1(t)$ 的次数为 $k$，即 $f_1(t)=a_0t^k+a_1t^{k-1}+\cdots+a_k$，而 $a_0\neq 0$。可以直接驗証

$$g_1(t)=(p+\lambda_1-\lambda_m)^{l+1}f_1(t)=(\lambda_1-\lambda_m)^{l+1}a_0t^k+\cdots,$$

由于多項式 $g_1(t)$ 在区間上恒等于零，那末我們有

$$(\lambda_1-\lambda_m)^{l+1}a_0=0.$$

因为数 $\lambda_1$ 和 $\lambda_m$ 是不同的，从此推知 $a_0=0$。得到的矛盾証明了多項式 $f_1(t)$，…，$f_{m-1}(t)$ 的所有系数等于零，就是 $F(t)=f_m(t)e^{\lambda_m t}$。

从此可以断定多项式 $f_m(t)$ 的所有的系数也等于零。

两个拟多项式 $F(t)$ 和 $F^*(t)$ 在区间 $r_1<t<r_2$ 上恒等的情形，通过作拟多项式 $F(t)-F^*(t)$ 就化为已考虑过的情形。

这样，命题 3) 得証。

## 例　题

**例题 1.** 求方程

$$\ddot{z}+z=t\cos t=\frac{1}{2}\,te^{it}+\frac{1}{2}\,te^{-it} \tag{14}$$

的特解。我們分别来解方程

$$\ddot{z}+z=\frac{1}{2}\,te^{it}, \tag{15}$$

$$\ddot{z}+z=\frac{1}{2}\,te^{-it}. \tag{16}$$

显然，如果 $z$ 是方程(15)的解，那末 $\bar{z}$ 是方程 (16) 的解。因此，只解方程 (15) 就够了。对于它 $r=1$, $\lambda=i$, $k=1$。所以应当求形状为

$$t(c^1+c^2t)e^{it}$$

的特解。关系式(9)取形式：

$$[(p+i)^2+1](c^1t+c^2t^2)=\frac{1}{2}t,$$

或者是

$$(p^2+2ip)(c^1t+c^2t^2)=\frac{1}{2}t.$$

这給出

$$2c^2+2ic^1+4ic^2t=\frac{1}{2}t,$$

从此 $c^2=-\frac{1}{8}i$, $c^1=ic^2=\frac{1}{8}$。因此，方程(15)的特解有形状：

$$z=\left(\frac{1}{8}\,t-\frac{i}{8}\,t^2\right)e^{it},$$

而方程(14)的解等于

$$z+\bar{z}=\frac{1}{8}\,t(e^{it}+e^{-it})+\frac{1}{8i}\,t^2(e^{it}-e^{-it})=\frac{t}{4}\cos t+\frac{t^2}{4}\sin t.$$

**例題 2.** 考虑函数

$$f(t)=\cos 2t\cdot\cos 3t\cdot e^{4t}.$$

因为每个因子 $\cos 2t$, $\cos 3t$, $e^{4t}$ 是拟多項式，所以它們的乘积 $f(t)$ 也是拟多項式。把这个拟多項式化为形状(1)：

$$\cos 2t\cdot\cos 3t\cdot e^{4t}=\frac{e^{2it}+e^{-2it}}{2}\cdot\frac{e^{3it}+e^{-3it}}{2}\cdot e^{4t}$$

$$=\frac{1}{4}\,e^{(4+5i)t}+\frac{1}{4}\,e^{(4+i)t}+\frac{1}{4}\,e^{(4-i)t}+\frac{1}{4}\,e^{(4-5i)t}.$$

化拟多項式为形状(1)，对于按照定理 8 来解非齐次方程是有利的。

## §11. 消 去 法

直到現在，我們都是在解一个常系数的綫性方程。但是可以証明，很一般的常系数綫性方程組在某种意义上可以化为一个方程。这个化簡由**消去法**来实現，它类似于在綫性代数(不是微分)方程理論中用到的消去法。在这里我們要讲这种方法并从此作出一些結論。

我們考察方程組

$$\sum_{s=1}^{n}L_s^j(p)x^s=f^j(t),\quad j=1,\cdots,n;\tag{1}$$

其中 $x^1,\cdots,x^n$ 是自变量 $t$ 的未知函数，而 $f^1(t),\cdots,f^n(t)$ 是給定的时間 $t$ 的函数。每个符号 $L_s^j(p)$ 是关于微分算子 $p$ 的常系数的多項式，因此每一項 $L_s^j(p)x^s$ 是函数 $x^s$ 以及它的导数的常系数的綫性組合。組(1)中方程的个数等于未知函数的个数。

方程組(1)关于未知函数 $x^s$ 的阶数記为 $q_s$，因此方程組(1)的总的阶数按公式 $q=q_1+q_2+\cdots+q_n$ 定义。既然提出解方程組(1)的問題，我們自然应当假定每个函数 $x^s$ 有直到 $q_s$ 阶为止的一切导

数;但从問題的提法并不能引出关于更高阶的导数也存在的假定。

对方程組(1)应用消去法时,我們要假定每个未知函数 $x^i$ 有足够次数的导数; 对每个函数 $f^j(t)$ 也是如此。作了这样假定,一方面我們縮小了所討論的解的类别 (关于未知函数的足够次数可微性的假設),而另一方面,縮小了所考察的方程的类别 (关于函数 $f^j(t)$ 的足够次数可微性的假設)。第一个限制在証明了下列的事实后,就可以取消: 如果 $x^1, \cdots, x^n$ 是方程組(1)的解,并且右边的 $f^j(t)$ 有足够次数的导数,那末每一个函数 $x^i$ 就有足够次数的导数 (参看例題 3 和 4)。

我們轉来叙述消去法。

**1)** 考虑方程組(1)的矩陣

$$\begin{pmatrix} L_1^1(p) & \cdots & L_n^1(p) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ L_1^n(p) & \cdots & L_n^n(p) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

矩陣 (2) 的每个元素 $L_i^j(p)$ 是关于 $p$ 的多項式。因此可以計算矩陣(2)的行列式 $D(p)$ 和它的余子式。矩陣(2)中元素 $L_i^j(p)$ 的代数余子式 (就是这个元素的帶有适当符号的余子式) 記为 $M_j^i(p)$, 从高等代数教程中知道成立恒等式

$$\sum_{j=1}^{n} M_j^i(p) L_s^j(p) = \delta_s^i D(p), \tag{3}$$

其中 $\delta_s^i$ 是所謂克朗涅克尔(Kronecker)符号:

$$\delta_i^i = 1, \quad \delta_s^i = 0 \quad 当\ i \neq s.$$

用多項式 $M_j^i(p)$ 乘方程(1)(就是进行一系列导数,同数相乘以及加法的运算),然后关于 $j$ 取和,我們得到等式

$$\sum_{j} \sum_{s=1}^{n} M_j^i(p) L_s^j(p) x^s = \sum_{j} M_j^i(p) f^j(t) \tag{4}$$

(在把方程(1)化到方程(4)时,我們利用到函数 $x^i$ 和 $f^j(t)$ 足够多次导数的存在性)。由于(3),可以改写等式(4)为形状:

$$D(p)x^i=\sum_j M_j^i(p)f^j(t). \tag{5}$$

我們得到的方程組(5) ($i=1, \cdots, n$) 具有这样的性质，每一个未知函数 $x^i$ 只含在(5)的一个方程之內。因此，我們証明了如果函数組 $x^1, \cdots, x^n$ 是方程組(1)的解，那末每一个个别的函数 $x^i$ 是方程(5)的解。

但是不应当以为：只要对每个数 $i$，以任意方式选取方程 (5) 的解 $x^i$，然后作出函数組 $x^1, \cdots, x^n$，所得到的函数組就会是方程組(1)的解。为了求出方程組(1)的通解，需要对每一个 $i=1, \cdots, n$，求方程 (5) 的通解 $x^i$，作函数組 $x^1, \cdots, x^n$，然后弄清楚在什么条件下(在积分常数之間的什么关系下)，这函数組滿足方程組(1)。

現在从消去法作出一些結論。首先对齐次方程組

$$\sum_{s=1}^{n} L_s^j(p)x^s=0, \quad j=1, \cdots, n \tag{6}$$

的情形来叙述在命題 1) 中所得到的結論。

**2)** 如果函数組 $x^1, \cdots, x^n$ 是方程組(6)的解，那末出現在这个解中的每一个个别的函数 $x^i$ 滿足方程

$$D(p)x^i=0,$$

其中 $D(p)$ 是方程組(6)的矩陣 $(L_s^j(p))$ 的行列式。从此推出，特别是在行列式 $D(p)$ 为稳定多項式时(参看 § 9, 1))，方程組(6)的每个解 $x^1, \cdots, x^n$ 就滿足不等式

$$(x^1)^2+\cdots+(x^n)^2<R^2e^{-2\alpha t} \quad \text{当 } t\geqslant 0, \tag{7}$$

其中 $\alpha$ 是与方程組(6)有关的正常数，而 $R$ 是与解 $x^1, \cdots, x^n$ 有关的常数。

不等式(7)可以直接从 § 9 中的不等式(3)推出。

現在指出，利用消去法能很好地解齐次方程組(6)。

**3)** 假定方程組(6)的行列式 $D(p)$ 不恒等于零，且設 $\lambda$ 是多

項式 $D(p)$ 的 $k$ 重根。我們来求方程組(6)的形状为

$$x^s = g^s(t)e^{\lambda t}, \quad s=1, \cdots, n \tag{8}$$

的解，其中

$$g^1(t), \cdots, g^n(t) \tag{9}$$

是 $k-1$ 次多項式。把函数 (8) 代入方程組 (6)，我們得到（参看 § 8, 1))

$$0 = \sum_{s=1}^{n} L_s^j(p)g^s(t)e^{\lambda t} = \sum_{s=1}^{n} e^{\lambda t}L_s^j(p+\lambda)g^s(t), \quad j=1, \cdots, n;$$

略去因子 $e^{\lambda t}$ 后給出

$$\sum_{s=1}^{n} L_s^j(p+\lambda)g^s(t) = 0, \quad j=1, \cdots, n. \tag{10}$$

因此，函数組(8)当且只当多項式(9)滿足条件 (10) 时才是方程組(6)的解。关系式(10)左边的每一項

$$L_s^j(p+\lambda)g^s(t)$$

是 $t$ 的多項式，而它的系数是多項式 $g^s(t)$ 的系数的綫性齐次而数。这样，条件(10)的总体等价于某个关于多項式(9)的系数的綫性齐次方程組。从綫性齐次代数方程的理論知道，在从这綫性方程組求多項式 (9) 的系数时，可以把这些系数中的一部分看成是任意的，而其余的系数用它們来表出（事先并未排除任意的系数的个数等于零的情形）。这样得到的方程組(6)的解(8)将称为对应于根 $\lambda$ 的解。显然，这些解对于一切 $t$ 的值 $-\infty<t<\infty$ 是有定义的。

**定理 9.** 假定方程組(6)的行列式 $D(p)$ 不恒等于零，且設

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$$

是多項式 $D(p)$ 的所有不同的根的全体。那末方程組 (6) 的任意的解 $x^1, \cdots, x^n$ 可以写成形状：

$$x^s = x_1^s + \cdots + x_m^s, \quad s=1, \cdots, n, \tag{11}$$

其中

$$x_i^1, x_i^2, \cdots, x_i^n$$

是方程組(6)的对应于根 $\lambda_i$ 的解（参看 3)）。特别，从此推知方程組(6)的每个解对一切 $t$ 的值有定义。

**証明** 設

$$x^1, x^2, \cdots, x^n$$

是方程組(6)的解，确定在区間 $r_1<t<r_2$ 上；我們来証明在这区間上解可以表示为形状 (11)。根据命題 2)，每个函数 $x^s$ 在区間 $r_1<t<r_2$ 上滿足方程

$$D(p)x^s=0,$$

且由于 § 8 中命題 3) 在这区間上可以写成形状：

$$x^s=\sum_{i=1}^{m} g_i^s(t)e^{\lambda_i t}, \quad s=1, \cdots, n, \tag{12}$$

其中 $g_i^s$ 是次数低于根 $\lambda_i$ 的重次的多項式。把函数組 (12) 代入方程組(6)，得到(参看 § 8, 1))

$$\begin{aligned} 0&=\sum_{s=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} L_s^j(p)g_i^s(t)e^{\lambda_i t} \\ &=\sum_{i=1}^{m}\left(e^{\lambda_i t}\sum_{s=1}^{n} L_s^j(p+\lambda_i)g_i^s(t)\right), \quad j=1, \cdots, n. \end{aligned} \tag{13}$$

因为 $\sum_{s=1}^{n} L_s^j(p+\lambda_i)g_i^s(t)$ 是 $t$ 的多項式，而数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 两两不同，所以根据 § 10 中命題 3)，从等式(13)得到

$$\sum_{s=1}^{n} L_s^j(p+\lambda_i)g_i^s(t)=0, \quad i=1, \cdots, m;\ j=1, \cdots, n. \tag{14}$$

以 $e^{\lambda_i t}$ 乘等式(14)，得到

$$0=\sum_{s=1}^{n} e^{\lambda_i t}L_s^j(p+\lambda_i)\,g_i^s(t)=\sum_{s=1}^{n} L_s^j(p)g_i^s(t)e^{\lambda_i t},$$

这表明对每个 $i=1, \cdots, m$,

$$x_i^s=g_i^s(t)e^{\lambda_i t}, \quad s=1, \cdots, n$$

是方程組(6)的解。

这样，定理 9 得証。

## 例　題

**例題 1.** 用消去法解方程組

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}^1+x^1+\dot{x}^2&=0,\\ \ddot{x}^1-x^1+\ddot{x}^2+x^2&=0.\end{aligned}\right\}$$

把它改写成符号形式：

$$\left.\begin{aligned}(p+1)x^1+px^2&=0,\\ (p^2-1)x^1+(p^2+1)x^2&=0.\end{aligned}\right\}$$

容易看出，方程組的行列式等于 $p^2+2p+1$；它有二重根 $\lambda=-1$。按定理 9 应当求方程的形状为

$$\left.\begin{aligned}x^1&=(at+b)e^{-t},\\ x^2&=(ct+d)e^{-t}\end{aligned}\right\}$$

的解。把这些函数代入第一个方程(在略去 $e^{-t}$ 之后)給出

$$a+c-ct-d=0,$$

从此

$$\left.\begin{aligned}c&=0,\\ a&=d.\end{aligned}\right\}$$

在代入方程組的第二个方程时，对于系数得到同样的关系式。因此，所考察的方程組的通解写为形式：

$$\left.\begin{aligned}x^1&=(at+b)e^{-t},\\ x^2&=ae^{-t},\end{aligned}\right\}$$

其中 $a$ 和 $b$ 是任意常数。

**例題 2.** 我們把消去法应用于标准的常系数綫性齐次方程組：

$$\dot{x}^j=\sum_{s=1}^{n}a_s^jx^s,\quad j=1,\cdots,n \tag{15}$$

(在 § 14 中要更全面地研究这个方程組)。利用符号的記法改写方程組(15)为

$$px^j=\sum_{s=1}^{n}a_s^jx^s,\quad j=1,\cdots,n,$$

或者按另一种形式，写为

$$\sum_{s=1}^{n}(a_s^j-p\delta_s^j)x^s=0,\quad j=1,\cdots,n, \tag{16}$$

其中 $\delta_s^j$ 是克朗涅克尔符号。方程組(16)是一般方程組(6)的特殊

情形，其中

$$L_i^j(p)=a_s^j-p\delta_s^j,$$

这时行列式 $D(p)$ 是方程组(15)的矩陣 $(a_i^j)$ 的特征行列式。现在用定理9中所說的待定系数法来求方程组(16)的解。当多項式 $D(p)$ 的根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是单根的特殊情形，对应于每个根 $\lambda_i$ 有解

$$x_i^s=g_i^s e^{\lambda_i t},\quad s=1,\cdots,n, \tag{17}$$

其中

$$g_i^1, g_i^2,\cdots, g_i^n \tag{18}$$

是零次多項式，也就是常数。将函数(17)代入方程组(15)，我們得到关于待定的系数(18)的綫性方程組

$$\lambda_i g_i^j=\sum_{s=1}^{n} a_s^j g_i^s,\quad j=1,\cdots,n,$$

这方程組表明常数(18)是对应于矩陣 $(a_i^j)$ 的特征值 $\lambda_i$ 的特征向量的支量。因为在单根的情形，对应于同一个特征值 $\lambda_i$ 的所有的特征向量相互成比例，所以在用

$$h_i^1, h_i^2,\cdots, h_i^n$$

記对应于特征值 $\lambda_i$ 的任意一个特征向量的支量时，我們得到

$$g_i^s=c^i h_i^s,\quad s=1,\cdots,n.$$

因此，在单根的情形，方程組(15)的通解写成形状：

$$x^s=\sum_{i=1}^{n} c^i h_i^s e^{\lambda_i t},\quad s=1,\cdots,n,$$

其中 $c^1,\cdots,c^n$ 是任意常数。

**例題3.** 考虑常系数綫性方程組

$$\sum_{s=1}^{n} L_i^j(p)x^s=f^j(t),\quad j=1,\cdots,n, \tag{19}$$

(参看(1))，并設 $q_i$ 是方程組关于未知函数 $x^i$ 的阶数，而

$$q=q_1+q_2+\cdots+q_n$$

是方程組(19)的阶数。并且假設

$$\begin{pmatrix} L_1^1(p) & \cdots & L_n^1(p) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ L_1^n(p) & \cdots & L_n^n(p) \end{pmatrix} \tag{20}$$

是方程組 (19) 的矩陣，而 $D(p)$ 是它的行列式。我們来証明多項式 $D(p)$ 的次数不超过数 $q$. 如果这个次数等于 $q$，那末方程組 (19) 将称为**可标准化的**。在这情形可以把最高阶导数

$$(x^1)^{(q_1)}, \cdots, (x^n)^{(q_n)} \tag{21}$$

解出来，因此它可以化为标准方程組（参看 § 4, 2)）。

按假定，多項式 $L_s^j(p)$ 的次数不超过数 $q_s$，因此我們可以写成

$$L_s^j(p) = a_s^j p^{q_s} + \cdots, \tag{22}$$

其中虛点記次数低于 $q_s$ 的項。計算矩陣 (20) 的行列式 $D(p)$，并考虑到公式 (22)，容易断定

$$D(p) = \Delta \cdot p^q + \cdots,$$

这里的 $\Delta$ 是矩陣 $(a_s^j)$ 的行列式。在这公式中未写出的項的次数低于 $q$. 这样就确立了多項式 $D(p)$ 的最大可能次数是 $q$，并且如果这个次数等于 $q$，那末 $\Delta \neq 0$. 在方程組 (19) 中分出有最高次导数 (21) 的項，我們得到方程組

$$\sum_{s=1}^{n} a_s^j (x^s)^{(q_s)} + \cdots = f^j(t), \quad j = 1, \cdots, n, \tag{23}$$

因此，如果方程組 (19) 是可标准化的，那末 $\Delta \neq 0$，并且方程組 (23) 关于最高阶导数 (21) 是可以解出的。

由于可标准化的方程組 (19) 能化为标准的形状，所以按照 § 3 的例題 3 所說的，只要方程組 (19) 的右边 $f^j(t)$ 是足够次数可导的，每个可标准化方程組 (19) 的解就有任何預先給定次数的导数。

**例題 4.** 現在考察方程組 (19) 的行列式 $D(p)$ 不恒等于零，但是多項式 $D(p)$ 的次数小于方程組 (19) 的阶数 $q$ 的情形。我們来証明，在这种情形，只要右端 $f^j(t)$ 是足够次数可导的，方程組 (19) 的每个解就有任意給定次数的导数。

依假定多項式 $D(p)$ 的次数小于 $q$，所以行列式 $\Delta$ 等于零。因此，在矩陣 $(a_s^j)$ 的各列之間有綫性关系；設 $b^1, b^2, \cdots, b^n$ 是实現这个相关性的系数。在数 $b^1, \cdots, b^n$ 之中可以有等于零的。我們改变函数 $x^1, \cdots, x^n$ 的号碼，可以使以下的关系式成立：

$$b^1\neq 0,\ b^2\neq 0, \cdots, b^m\neq 0,\ b^{m+1}=\cdots=b^n=0,\quad 1\leqslant m\leqslant n, \tag{24}$$

$$q_1\geqslant q_2,\quad q_1\geqslant q_3, \cdots, q_1\geqslant q_m.$$

因为根据(24)有 $b^1\neq 0$，所以我們可以假定 $b^1=1$。

現在代替未知函数 $x^1, \cdots, x^n$，引进新的未知函数 $y^1, \cdots, y^n$，置

$$x^1=y^1;\quad x^i=y^i+b^ip^{n-q_i}y^1,\quad i=2, \cdots, m;$$
$$x^i=y^i,\quad i=m+1, \cdots, n. \tag{25}$$

关系式 (25) 可以关于新的未知函数 $y^1, \cdots, y^n$ 解出来；就是有

$$y^1=x^1;\quad y^i=x^i-b^ip^{n-q_i}x^1,\quad i=2, \cdots, m;$$
$$y^i=x^i,\quad i=m+1, \cdots, n. \tag{26}$$

在方程組 (19) 中以新未知函数 $y^1, \cdots, y^n$ 代替原来的未知函数 $x^1, \cdots, x^n$，我們得到新的方程組

$$\sum_{s=1}^{n}\overset{*}{L}_s^j(p)y^s=f^j(t),\quad j=1, \cdots, n. \tag{27}$$

立即看出，方程組(27)关于 $y^1$ 的阶数 $q_1^*$ 小于 $q_1$，而它关于其余未知函数 $y^2, \cdots, y^n$ 的阶数分别等于 $q_2, \cdots, q_n$。因此，方程組 (27) 的阶数 $q^*$ 小于方程組(19)的阶数 $q$。

如果把变换(25)和(26)看成是变量 $y^1, \cdots, y^n$ 向变量 $x^1, \cdots, x^n$ 的綫性变换和逆变换，而系数是关于 $p$ 的多項式，就看出綫性变换(25)和(26)的任何一个的行列式等于 $+1$。从此推知方程組 (27) 的行列式 $D^*(p)$ 等于方程組 (19) 的行列式 $D(p)$。因此，在方程組(27)中阶数和行列式的次数之差比在方程組 (19) 中的小；运用上述变换有限次以后，我們得到可标准化方程組。

現在假設

$$x^i=\varphi^i(t),\quad i=1,\cdots,n \tag{28}$$

是方程組(19)的某个解。因为方程組(19)关于未知函数$x^i$的阶数等于$q_i$，所以假定函数$\varphi^i(t)$是$q_i$次可微的。由于变换(26)，方程組(19)的解(28)对应于方程組(27)的解

$$y^i=\psi^i(t),\quad i=1,\cdots,n. \tag{29}$$

从关系式(26)看出，函数$\psi^i(t)$是$q_i$次可微的。由以上所說的推出，从方程組(19)的每个解(28)，得到方程組(27)的某个解(29)，因此在把方程組(19)变到方程組(27)时，沒有一个解会失去。由于一系列变换的結果我們得到可标准化的方程組，它的解有任意給定次数的导数，所以从变换(25)看出，方程組(19)的解(28)也有任意給定次数的导数。

## § 12. 复数振幅法

在各种同振动过程有关的技术和物理的領域內，**諧振动**占有重要的地位。在数学上諧振动由函数

$$r\cos(\omega t+\alpha),\quad r\geqslant 0 \tag{1}$$

給出。其中$r$是振动的**振幅**，$\alpha$是它的**初位相**，而数$\omega$确定了振动的頻率，通常就称为**頻率**。实际上，如果$\nu$是每秒內的振动次数，那末

$$\omega=2\pi\nu,$$

因此$\omega$是$2\pi$秒內而不是1秒內的振动次数。我們已經看到过(参看§4中例題1)，方程

$$\ddot{x}+\omega^2x=0 \tag{2}$$

是以頻率$\omega$以及任意振幅和位相的諧函数(1)作为它的通解。方程(2)称为**諧振蕩方程**。

在諧振动的研究中往往要牽涉到方程

$$L(p)x=r\cos(\omega t+\alpha), \tag{3}$$

其中右边是諧函数。由于諧函数是拟多项式，因而利用定理 8 中所說的方法容易求出方程(3)的解。当多項式 $L(p)$ 是实系数的情形，可以以另外的方式应用定理 8。这就是在电工学上称为**复数振幅法**的方法，現在說明如下。

1) 除了实的諧函数 (1) 之外还考虑和它相应的复的諧函数

$$\rho e^{i\omega t}, \tag{4}$$

其中

$$\rho = re^{i\alpha}. \tag{5}$$

函数(4)具有这样的特性，即它的实部合于函数(1)：

$$\rho e^{i\omega t} = re^{i(\omega t+\alpha)} = r\cos(\omega t+\alpha) + ir\sin(\omega t+\alpha).$$

复数(5)称为复諧函数 (4) 的**复数振幅**；它把实振幅 $r$ 和初位相 $\alpha$ 結合在一起。应当注意，

$$r = |\rho|.$$

在多項式 $L(p)$ 是实系数的情形，为了解方程(3)，先解方程

$$L(p)z = \rho e^{i\omega t}. \tag{6}$$

立即看出，如果 $z = x+iy$ 是方程(6)的解，那末 $x$ 是方程(3)的解。假設 $i\omega$ 不是多項式 $L(p)$ 的根，即

$$L(i\omega) \neq 0, \tag{7}$$

我們求（参看定理 8）方程 (6) 的有复数振幅 $\sigma = se^{i\beta}$ 的复諧函数 $z = \sigma e^{i\omega t}$ 形式的解。把函数 $z = \sigma e^{i\omega t}$ 代入方程(6)，得到

$$\sigma = \frac{\rho}{L(i\omega)} \tag{8}$$

（参看 §7, 2)）。因此，方程(3)的解是以下形状的函数：

$$x = s\cos(\omega t+\beta); \tag{9}$$

这个解的振幅 $s$ 和初位相 $\beta$ 由公式

$$se^{i\beta} = \frac{re^{i\alpha}}{L(i\omega)}$$

确定（参看(8)）。特别，$s = |\sigma| = \dfrac{r}{|L(i\omega)|}$。如果多項式 $L(p)$ 是

稳定的，那末关系式(7)显然是满足的。在这个情形，方程(3)的通解有形状：

$$x = u + s\cos(\omega t + \beta), \tag{10}$$

其中 $u$ 是齐次方程 $L(p)u = 0$ 的解。这齐次方程的解 $u$ 当 $t \to \infty$ 时趋向于零，因此(3)的任何解趋向于解(9)。解(9)称为**定态的**；它对应于**定态过程**，虽然解(10)描述的是**过渡过程**。定态解(9)是所有的解(10)中唯一的周期解。

在应用复数振幅法时通常不考虑解实方程(3)，而直接从复的方程(6)出发。

现在叙述应用在方程组上的复数振幅法。問題是求实系数方程組

$$\sum_{s=1}^{n} L_s^j(p)x^s = r^j\cos(\omega t + \alpha^j), \quad j = 1, \cdots, n \tag{11}$$

的特解，而右边是具有同一頻率 $\omega$ 的諧振动。

**2)** 我們假定方程組 (11) 的行列式 $D(p)$ (参看 § 11, 1)) 当 $p = i\omega$ 时不为零。为了求方程組(11)的解，先来求方程組

$$\sum_{k=1}^{n} L_k^j(p)z^k = \rho^j e^{i\omega t}, \quad j = 1, \cdots, n \tag{12}$$

的解，其中

$$\rho^j = r^j e^{i\alpha^j}.$$

因为所有的多項式 $L_k^j(p)$ 的系数是实的，所以从方程組(12)的每个解 $z^1, \cdots, z^n$，得到方程組(11)的解

$$x^k = \operatorname{Re} z^k, \quad k = 1, \cdots, n.$$

求方程組(12)的形状为

$$z^k = \sigma^k e^{i\omega t}, \quad k = 1, \cdots, n \tag{13}$$

的解。将函数(13)代入方程組(12)(略去 $e^{i\omega t}$ 以后)給出方程組

$$\sum_{k=1}^{n} L_k^j(i\omega)\sigma^k = \rho^j,$$

它关于未知数 $\sigma^k$ 是可以唯一地解出的，因为按假定这方程组的行列式 $D(i\omega)$ 异于零。我們求出这方程组的解并置

$$\sigma^k = s^k e^{i\beta^k};$$

那末根据(13)我們就得到方程组(11)的解

$$x^k = s^k \cos(\omega t + \beta^k), \quad k = 1, \cdots, n. \tag{14}$$

如果方程组(11)的行列式 $D(p)$ 是稳定多项式，那末不等式 $D(i\omega) \neq 0$ 是满足的，且除此以外，方程组(11)的每个解与解(14)相差当 $t \to \infty$ 时趋向于零的项(参看§11, 2))。因此，在稳定多项式 $D(p)$ 的情形，方程组(11)的解(14)不仅是一个特解，而且是定态解。

## 例 題

我們来解受周期外力作用的諧振蕩器的方程

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = r\cos(\omega t + \alpha). \tag{15}$$

代替方程(15)考虑对应的复式方程

$$\ddot{z} + \omega_1^2 z = re^{i(\omega t + \alpha)}. \tag{16}$$

如果 $\omega \neq \omega_1$，那末方程(16)有形状为 $z = \sigma e^{i\omega t}$ 的解，并且由公式(8)有

$$\sigma = \frac{re^{i\alpha}}{\omega_1^2 - \omega^2}.$$

因此，方程(15)有解

$$x = \frac{r}{|\omega_1^2 - \omega^2|}\cos(\omega t + \beta), \tag{17}$$

其中当 $\omega_1 > \omega$ 时，$\beta = \alpha$；当 $\omega_1 < \omega$ 时，$\beta = \alpha + \pi$. 公式(17)給出受周期外力作用的振蕩器的强迫振动。这里应該着重地注意到，在有共振現象时，强迫振动的振幅

$$\frac{r}{|\omega_1^2 - \omega^2|}$$

随着差 $|\omega_1 - \omega|$ 的減少而增大。我們也特别注意到，振动(17)的

位相 $\beta$ 在 $\omega_1>\omega$ 时和强迫力的位相 $\alpha$ 相合，而在 $\omega_1<\omega$ 时和它相反。方程(15)的通解写成形状：

$$x=r_1\cos(\omega_1 t+\alpha_1)+\frac{r}{|\omega_1^2-\omega^2|}\cos(\omega t+\beta),$$

其中 $u=r_1\cos(\omega_1 t+\alpha_1)$ 是对应的齐次方程的解。$u$ 这一项称为振荡器的**固有振动**。

如果 $\omega_1=\omega$，那末公式(17)失去意义。在这情形应当求方程(16)的形状为

$$z=\rho te^{i\omega t}$$

的解，其中 $\rho$ 为复数(参看定理 8)。按照 § 10 中公式(9)有

$$[(p+i\omega)^2+\omega^2]\rho t=re^{t\alpha},$$

从而

$$\rho=\frac{re^{i\alpha}}{2i\omega}.$$

因此，方程(16)(在 $\omega_1=\omega$ 时)的特解有形状：

$$z=\frac{rte^{i(\omega t+\alpha)}}{2i\omega}=\frac{rte^{i\left(\omega t+\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}}{2\omega},$$

而方程(15)的解等于

$$x=\frac{rt}{2\omega}\cos\left(\omega t+\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{rt}{2\omega}\sin(\omega t+\alpha).$$

因此，当 $\omega=\omega_1$ 时的共振现象在于振幅 $\frac{rt}{2\omega}$ 是变的而逐渐无限地增大。在实际的仪器中，由于有"阻尼"，这个現象并不出現。

## § 13. 电　路

常微分方程理論在許多技术領域內有它的应用；它应用在电工上，特别是在无綫电技术方面。无綫电仪器的工作在某些理想化之下可以用常微分方程組作数学的描述，并且在这方程組中的时間的未知函数就是流过仪器各零件的电流强度，或是仪器的各个連接点之間的电压降。无綫电仪器給出很丰富的(例如，比力学

問題丰富得多的）材料来說明常微分方程理論的应用。这种丰富性表現在从任何技术問題中产生的常微分方程組常常能用电子仪器来模拟，就是制造出这样的电子仪器，描述它的工作的方程組是同我們感兴趣的技术对象的方程組一样的。用电子仪器来模拟可以在一定程度上有助于解方程組，因为观察了仪器的工作状况，我們自然就观察到滿足方程組的未知函数的性态。支配电子仪器工作的物理規律可以很簡单地确定出来，它們甚至于能很容易地由人們来規定，这对于物理学家来說，几乎是不陌生的。在这里要对最簡单的电子技术的規律作一些結論式的說明，并引进几个应用微分方程来研究电子仪器的工作状态的例子。

## 电路的元件

电阻、电感（自感）和电容（电容器）是組成电子仪器的最重要的零件。每一个这种零件是一个二端网絡，就是有两个接点的网絡，在装配电子仪器时，一零件的两端和别的零件的端点相接。在电子仪器工作时，构成这仪器的各个二端网絡有电流通过，同时、二端网絡的导电状态在每个时刻 $t$ 由两个量来表征：从二端网絡 $ab$ 的一端 $a$ 走向一端 $b$ 的电流强度 $I_{ab}(t)$ 以及从 $a$ 端到 $b$ 端的电压降 $U_{ab}(t)$。电流强度 $I_{ab}(t)$ 可取正号也可取負号；如果电流从 $a$ 端流向 $b$ 端（应注意这是所謂技术上的电流方向），那末数 $I_{ab}(t)$ 是正的；在相反的情形下是負的。从 $a$ 端到 $b$ 端的电压降 $U_{ab}(t)$ 是 $a$ 端和 $b$ 端的电位差 $V_a(t)-V_b(t)$。因此，刻划二端网絡 $ab$ 在时刻 $t$ 的状态的两个量 $I_{ab}(t)$ 和 $U_{ab}(t)$ 与把那一端标为第一点以及那一端标为第二点有关。在交換端点的順序时，每个量 $I_{ab}(t)$，$U_{ab}(t)$ 显然要变号，因此有关系

$$I_{ba}(t)=-I_{ab}(t), \tag{1}$$

$$U_{ba}(t)=-U_{ab}(t). \tag{2}$$

对每个二端网絡 $ab$，时間 $t$ 的函数 $I_{ab}(t)$ 和 $U_{ab}(t)$ 不是独

立的，而由支配二端网络工作的物理规律的某些关系式来联系。对于电阻，自感和电容，支配它們工作的物理規律在下面的命題中給出。

**1）** 对于有电阻的二端网络 $ab$，成立关系式(欧姆定律)

$$U_{ab}(t)=R_{ab}I_{ab}(t); \tag{3}$$

这里 $R_{ab}$ 是正的系数，称为电阻，并且对不同的二端网絡能够取不同的值，但是对每一个給定的二端网絡是常数；并且我們永远有

$$R_{ba}=R_{ab}. \tag{4}$$

对于有电感的二端网絡 $ab$，成立关系式

$$U_{ab}(t)=L_{ab}\frac{d}{dt}I_{ab}(t); \tag{5}$$

这里 $L_{ab}$ 是正的系数，称为电感，并且对不同的二端网絡能够取不同的值，但是对于每一个給定的二端网絡是常数。并且

$$L_{ba}=L_{ab}. \tag{6}$$

对于有电容(电容器)的二端网絡 $ab$，成立关系式

$$I_{ab}(t)=C_{ab}\frac{d}{dt}U_{ab}(t), \tag{7}$$

这里 $C_{ab}$ 是正的系数，称为电容，并且对不同的二端网絡能够取不同的值，但对給定的二端网絡有完全确定的值；并且我們有

$$C_{ba}=C_{ab}. \tag{8}$$

积分出关系式(7)，我們得到

$$U_{ab}(t)=U_{ab}(t_0)+\frac{1}{C_{ab}}\int_{t_0}^{t}I_{ab}(t)\,dt. \tag{9}$$

函数

$$Q_{ab}(t)=C_{ab}U_{ab}(t)$$

是同在給定时刻的电容器的状态有关的物理量，称为电容器 $ab$ 的**电量**。关系式(9)常常写为形状：

$$U_{ab}(t)=\frac{1}{C_{ab}}\int I_{ab}(t)\,dt,$$

其中$\int I_{ab}(t)dt$表示电容器的电量。

关系式(4)可以从(1)，(2)和(3)推出：

$$R_{ab}I_{ab}(t) = U_{ab}(t) = -U_{ba}(t) = -R_{ba}I_{ba}(t)$$
$$= R_{ba}(-I_{ba}(t)) = R_{ba}I_{ab}(t).$$

关系式(6)和(8)也可以类似地确定。

在电子仪器的工作中两个电感之間的互感現象起重要的作用。

**2)** 两个有值$L_{a_1b_1}=L_1$和$L_{a_2b_2}=L_2$的电感$a_1b_1$和$a_2b_2$可能处于互感状态，它由互感系数$M=M_{a_1b_1,a_2b_2}$来表征。在这情形二端网絡$a_1b_1$的电压降$U_{a_1b_1}(t)=U_1(t)$不仅和电流$I_{a_1b_1}(t)=I_1(t)$有关，而且也和电流$I_{a_2b_2}(t)=I_2(t)$有关。完全一样地，二端网絡$a_2b_2$的电压$U_{a_2b_2}(t)=U_2(t)$不仅和电流$I_2(t)$而且也和$I_1(t)$有关。它們之間的关系由以下公式給出：

$$U_1(t) = L_1\frac{d}{dt}I_1(t) + M\frac{d}{dt}I_2(t), \tag{10}$$

$$U_2(t) = L_2\frac{d}{dt}I_2(t) + M\frac{d}{dt}I_1(t). \tag{11}$$

并且互感系数$M_{a_1b_1,a_2b_2}$满足等式

$$M_{a_1b_1,a_2b_2} = M_{a_2b_2,a_1b_1} = -M_{a_1b_1,b_2a_2}.$$

此外，对它成立不等式

$$M^2 \leqslant L_1L_2.$$

两个电感的"相互作用"愈大，互感系数$M$的数值就愈接近于数值$\sqrt{L_1L_2}$。

命題1)中所說的二端网絡称为**无源的**；它們本身不可能在仪器中引起导电現象。在仪器中出現电流的直接因素是要有有源的二端网絡——**电压源**和**电流源**。

**3)** 对于电压源的二端网络 $ab$，成立关系式

$$U_{ab}(t)=U(t), \tag{12}$$

其中 $U(t)$ 是时間 $t$ 的給定函数，它表征电压源。关系式(12)可以看成是 $U_{ab}(t)$ 和 $I_{ab}(t)$ 的約束函数，不过它只是这样的約束，在其中函数 $I_{ab}(t)$ 并不出現。对于电流源 $ab$，类似地成立关系式

$$I_{ab}(t)=I(t),$$

其中 $I(t)$ 是时間 $t$ 的給定函数，它表征电流源。对于最經常討論的电压源和电流源，函数 $U(t)$ 和 $I(t)$ 或是常数，或是形状为

$$r\cos(\omega t+\alpha)$$

的周期函数。

电子仪器就是由这一些最重要的同时也是最簡单的零件装配起来的。仪器本身称为 **电路**，而装配成仪器的零件称为 **元件**。应当注意，还有和上面所說的不同的元件，特别是有多个接点的(多端的)元件。例如(三极)**电子管** 是 **三端** 元件，它的工作状态以后要加以分析(参看 § 29)。

## 克希荷夫定律

**現在轉来叙述支配电路工作的 克希荷夫定律。**

**4)** 电路是指有限个元件(特别是上述类型的二端网絡)的总体，它們的各端連接成所謂电路的 **节点**，因此每一节点連接了电路中两个或两个以上的不同元件的端点。**克希荷夫第一定律** 断言：从会合在每一节点处的所有元件流向这节点的电流之和等于零。克希荷夫第二定律是从以下的假設推出的：在每个节点 $a$ 有 **电位** $V_a(t)$，而从节点 $a$ 到节点 $b$ 的电压降 $U_{ab}(t)$ 是节点 $a$ 和 $b$ 的电位差，因此 $U_{ab}(t)=V_a(t)-V_b(t)$。从这假設推出：如果 $a$, $b$, $c$, …, $h$, $k$ 是組成閉合回路的一系列节点，那末成立关系式

$$U_{ab}(t)+U_{bc}(t)+\cdots+U_{hk}(t)+U_{ka}(t)=0,$$

这就是**克希荷夫第二定律**。它可以簡述如下：沿电路的任一閉合回路的电压降之和等于零。在这些克希荷夫定律的叙述中并沒有假定电路中的元件是二端网络。現在要对应用在由二端网絡組成的电路的克希荷夫定律給以更明确的說明。

**5)** 設 $S$ 是某个由二端网絡組成的电路。克希荷夫第一定律肯定，如果 $a$ 是电路 $S$ 的任一节点，而 $b_1a$, $b_2a$, …, $b_qa$ 是所有会合在节点 $a$ 的二端网絡(图 12)，那末

$$I_{b_1a}(t)+I_{b_2a}(t)+\cdots+I_{b_qa}(t)=0.$$

克希荷夫第二定律断定，如果 $ab$, $bc$, …, $hk$, $ka$ 是出現在电路 $S$ 中的某一串二端网絡（后面一个二端网絡的起点是前一个二端网絡的終点，图 13)，那末

$$U_{ab}(t)+U_{bc}(t)+\cdots+U_{hk}(t)+U_{ka}(t)=0.$$

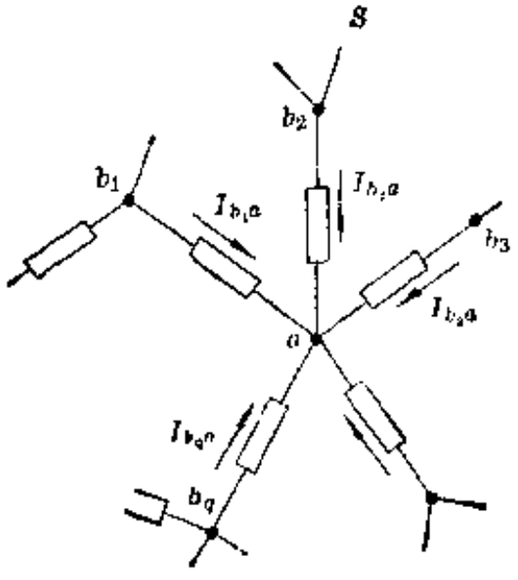


图 12

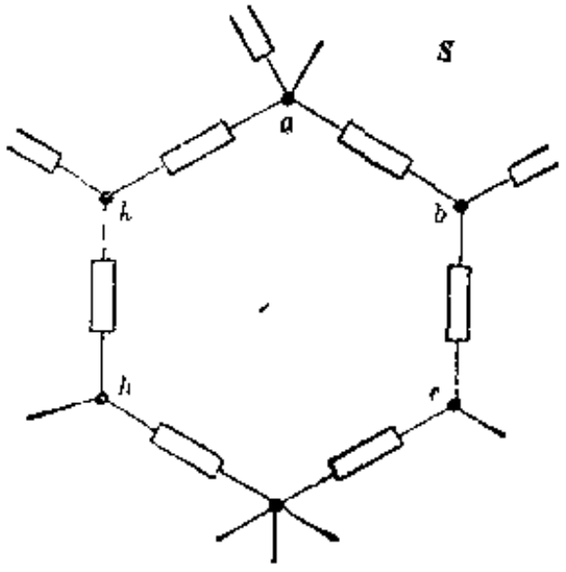


图 13

計算由二端网絡組成的电路的工作状态，就是要求出在电路中的每一个二端网絡的电流和电压；因此，如果电路由 $n$ 个二端网絡构成，那末在我們面前就提出求 $2n$ 个时間函数的問題。支配每一个二端网絡的規律給出未知函数之間的一个关系式，因此对 $2n$ 个未知函数，我們已經有了 $n$ 个关系式。其余 $n$ 个关系式由克希

荷夫定律給出。可以証明，克希荷夫定律給出 $n$ 个相互独立的关系式，但是在这里我們不去証明它。利用所有的关系式，最后我們就得到关于 $2n$ 个未知函数的 $2n$ 个方程。这些方程中的一部分是微分方程，一部分是有限（代数）方程。克希荷夫定律給出有限方程，首先应当利用它們来消去一部分未知函数。通常是用以下两种办法之一来达到的。可以取电流作为基本的未知函数，并通过它們来表示电压。这时首先要用克希荷夫第一定律，把所有电流用最小数目的独立函数表示出来（根据这个定律）。这些独立的电流，称为 **回路电流**。然后利用克希荷夫第二定律，把其中的每个电压換成它的相应的电流的表达式。这种方法称为 **回路电流法**。第二种方法是取二端网絡的电压作为基本的未知函数，而电流通过电压来表示（借助于支配每个二端网絡的規律），在这情形，应当通过克希荷夫第二定律把所有电压用最小数目的独立函数表出（根据这个規律）。这些独立的电压称为 **节点电压**。然后利用克希荷夫第一定律，把其中的每个电流換成它的相应的电压的表达式。这种方法称为 **节点电压法**。

## 二端网絡的算子阻抗

在轉到分析电路計算的例題前，我們借助于符号的記法写出关系式(3)，(5)，(9)，(10)，(11)，也就是支配二端网絡工作的規律。

**6)** 設 $ab$ 是电阻，电感或电容的二端网絡。置

$$U_{ab}(t)=U(t),\quad I_{ab}(t)=I(t),$$
$$R_{ab}=R,\quad L_{ab}=L,\quad C_{ab}=C.$$

作为对以前所用的符号記法的补充（参看 § 7, 1)），引进很自然的記号 $\frac{1}{p}f(t)=\int f(\tau)d\tau$，那末关系式(3)，(5)，(9) 可以用一个公式来記

$$U(t)=Z(p)I(t) \tag{13}$$

(图 14)，其中 $Z(p)$ 依次为 $Z(p)=R$, $Z(p)=Lp$, $Z(p)=\frac{1}{Cp}$.

函数 $Z(p)$ 称为二端网絡 $ab$ 的**算子阻抗**。对于电容，它不是多項式，而是有理函数 $\frac{1}{Cp}$：

$$U(t)=\frac{1}{Cp}I(t). \tag{14}$$

关系式(14)乘以 $Cp$ 之后，就有通常的形式 $I(t)=CpU(t)$，式中只有 $p$ 的多項式。如果置

$$G(p)=\frac{1}{Z(p)},$$

那末关系式(13)有形状：

$$I(t)=G(p)U(t).$$

函数 $G(p)$ 称为二端网絡 $ab$ 的**算子导納**；且分别取形式：

$$G(p)=\frac{1}{R},\quad G(p)=\frac{1}{Lp},\quad G(p)=Cp.$$

关系式(10)和(11)在算子記法下取形式：

$$U_1(t)=L_1pI_1(t)+MpI_2(t),$$
$$U_2(t)=L_2pI_2(t)+MpI_1(t).$$

我們轉来分析例題。为了清楚起見，把电路用图表示，在图上以点和电路的每个节点对应，以直綫或曲綫和每个二端网絡对应，这些綫段連接相应节点的对应点，在每个这样的綫段上，标出相应于二端网絡的符号 (图 15)。

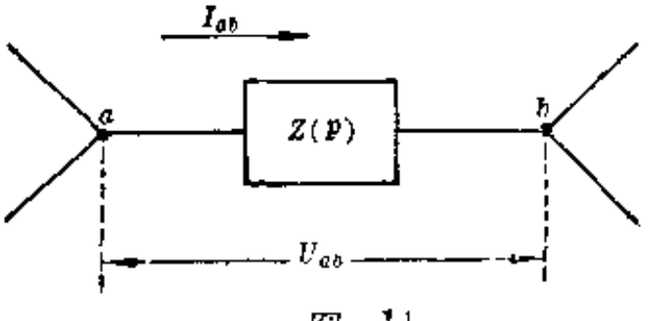


图 11

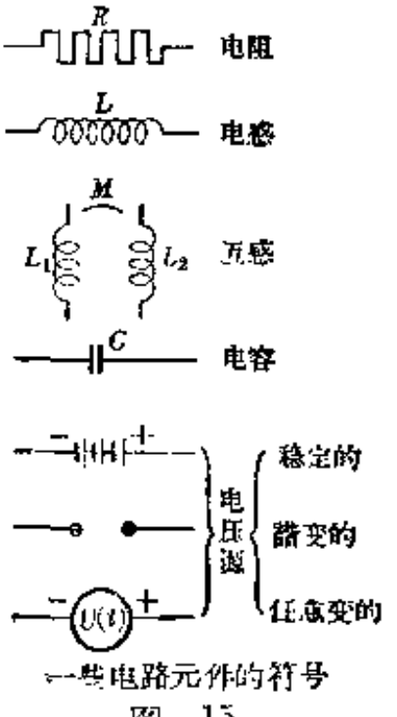


图 15

## 例 題

**例題 1.** **(振蕩回路)** 設 $S$ 是有四个节点 $a, b, c, d$ 的电路，由四个二端网絡 $ab, bc, cd, da$ 組成(图 16)。二端网絡 $ab$ 是电感 $L$，二端网絡 $bc$ 是电阻 $R$，二端网絡 $cd$ 是电容；最后，二端网絡 $ad$ 是电源 $U_{ad}(t)=U(t)$。我們利用回路电流法来进行計算，对节点 $b$ 应用克希荷夫第一定律，得到 $I_{ab}(t)+I_{cb}(t)=0$，或者用另一个形式，$I_{ab}(t)=I_{bc}(t)$。当在一个节点只有两个二端网絡相会合时，总是这样的。因此，我們有

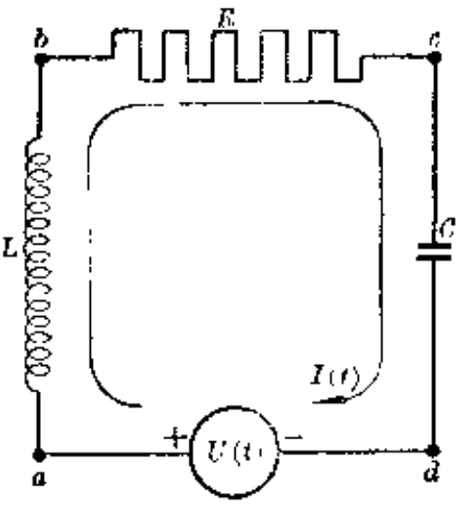

图 16

$$I_{ab}(t)=I_{bc}(t)=I_{cd}(t)=I_{da}(t)=I(t),$$

这里 $I(t)$ 是回路电流。其次，記下支配每个二端网絡工作的規律，得到

$$\left.\begin{aligned} &U_{ab}(t)=LpI(t), \quad U_{bc}(t)=RI(t), \\ &U_{cd}(t)=\frac{1}{Cp}I(t), U_{da}(t)=-U(t). \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

克希荷夫第二定律給出

$$U_{ab}(t)+U_{bc}(t)+U_{cd}(t)+U_{da}(t)=0. \tag{16}$$

从关系式(15)和(16)得到

$$\left(Lp+R+\frac{1}{Cp}\right)I(t)=U(t). \tag{17}$$

可以对关系式(17)的两边乘以 $p$ (表示逐项导微)；那末我們得到

$$\left(Lp^2+Rp+\frac{1}{C}\right)I(t)=pU(t). \tag{18}$$

这是所討論的电路的微分方程。

如果从电路中除去二端网絡 $ad$，那末我們就得到所謂**开断**

电路，它由三个无源的二端网络 $ab$，$bc$，$cd$ 組成。可以把整个这样的电路看作有两端 $a$ 和 $d$ 的二端网絡（图 17）。对于这个二端网絡，支配它的工作的規律由类似于关系式 (13) 的关系式(17)給出。这里函数 $Z(p)=Lp+R+\frac{1}{Cp}$ 是算子阻抗，而它的倒数 $G(p)=\frac{Cp}{LCp^2+RCp+1}$ 是算子导納。

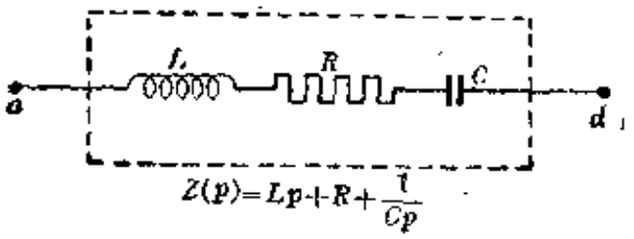


图 17

如果假定 $U(t)=0$，那末就相当于在我們的回路中沒有有源的二端网絡 $ad$，而电路由三个无源的二端网絡 $ab$，$bc$，$cd$ 构成，并且节点 $a$ 和 $d$ 相合（图 18），描述这个无源电路 $S^*$ 的工作規律的方程有形状：

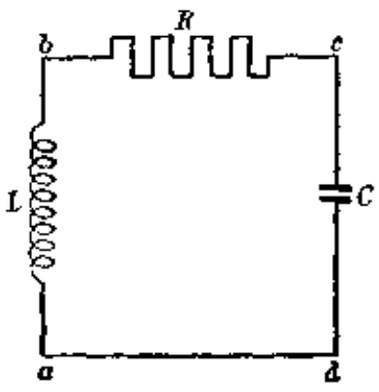


图 18

$$\left(Lp^2+Rp+\frac{1}{C}\right)I(t)=0. \tag{19}$$

如同以前曾經指出的，在无源电路中导电現象不会自动发生，而函数 $I(t)\equiv 0$ 是方程 (19) 的特解，就反映了这一点。但是假定在电路中已經有了电流，那末就可以考察电路 $S^*$ 的工作，而且也可以知道这个电流是怎样随时間变化的。設 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 是多項式

$$Lp^2+Rp+\frac{1}{C} \tag{20}$$

的根。由于 $L$，$R$，$C$ 大于零（参看 1），所以根 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 的实数部分是負的，因此在电路 $S^*$ 中电流随着时間而衰減了（参看 § 9，1），但是这种衰減可以通过各种方式达到；如果根 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 是复数，那末方程 (19) 的每个非零解有振动特性（参看 § 7 中例題 3）；如果两

个根皆是实的，那末衰减是非周期的，就是方程(19)的每个解从某个时刻起是单調的。至于根 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 究竟是复的还是实的，由数

$$\Delta=\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}$$

的符号决定；如果 $\Delta<0$，那末方程 (19) 的解有振动特性，如果 $\Delta>0$，那末它是非周期的。

特别有趣的是这样的振蕩回路 $S^*$，在回路中完全沒有电阻 $R$. 这时电路只由两个无源元件 $ab$ 和 $cd$ 組成，并且 $b=c$, $a=d$ (图 19). 在这样的假定下，电路方程取形式：

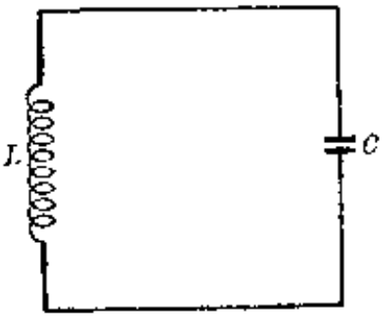

图 19

$$\left(p^2+\frac{1}{LC}\right)I(t)=0.$$

这个方程的通解写成形式：

$$I(t)=s\cos(\omega_1 t+\beta_1),$$

其中 $\omega_1=\frac{1}{\sqrt{LC}}$. 因此，当沒有电阻时，在无源振蕩回路中发生頻率为

$$\omega_1=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

的非衰减振蕩。量 $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ 称为一般情形下的振蕩回路 $S$ 的固有頻率。

現在回到振蕩回路 $S$ 的討論，并考察有簡諧电源 $U(t)$ 的情形。

由于多項式(20)的根有負实部，所以可以考察电路 $S$ 中的定态过程。現在按照复数振幅法来求解(参看 § 12). 設 $U(t)=re^{i\omega t}$ 是有实振幅 $r>0$ 的复数諧振动。那末方程(18)的右边有形状：

$$pU(t)=p(re^{i\omega t})=ir\omega e^{i\omega t}.$$

我們有

$$I_{\text{定態}}(t)=\sigma e^{i\omega t},$$

其中电流 $I_{\text{定常}}(t)$ 的复数振幅 $\sigma$ 由以下公式确定：

$$\sigma=\frac{ir\omega}{iR\omega+\left(-L\omega^2+\frac{1}{C}\right)}=\frac{r}{R+i\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)}$$

(参看 § 12, 1))。从此，我們得到实振幅：

$$s=|\sigma|=\frac{r}{\sqrt{R^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2}}.$$

从这个公式看出，对于給定振幅 $r$ 的电压源，当 $\omega$ 等于回路 $S$ 的固有頻率即 $\omega=\omega_1=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ 时，电流强度的振幅 $s$ 达到最大值。对于这个頻率，振幅 $s$ 和 $r$ 由关系式 $s=\frac{r}{R}$ 联系，也就是，对于这个頻率，回路进行得好象在其中只有电阻一样。这現象称为**共振**（参看 § 12, 例題）。$L$, $R$, $C$ 回路在頻率 $\omega$ 等于它的固有頻率 $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ 时发生共振。

**例題 2.**（**变压器**） 变压器由两个繞組构成：**第一捲**和**第二捲**，安放在同一軸上。第一捲接在可变电压源上，第二捲接在負載上，例如，接在外电阻上。每一捲有电感和电阻（内电阻）。在繞組之間有互感。因此，变压器可以看成由两个单独的回路組成，而由互感相联系。第一个回路由三个二端网絡組成：$a_1b_1$ 是电感 $L_1$；$b_1c_1$ 是内电阻 $R_1$；$a_1c_1$ 是电压源 $U_{a_1c_1}=U(t)$。第二个回路也由三个二端网絡組成：$a_2b_2$ 是电感 $L_2$；$b_2c_2$ 是内电阻 $R_2$；$c_2a_2$ 是負載电阻 $R$。此外，有互感 $M_{a_1b_1,a_2b_2}=M$（图 20）。根据克希荷夫第一定律，有

$$I_{a_1b_1}=I_{b_1c_1}=I_{c_1a_1}=I_1;\quad I_{a_2b_2}=I_{b_2c_2}=I_{c_2a_2}=I_2.$$

因此，我們有两个回路电流 $I_1$, $I_2$。应用克希荷夫第二定律，得到

$$L_1pI_1+MpI_2+R_1I_1-U(t)=0,$$
$$L_2pI_2+MpI_1+R_2I_2+RI_2=0.$$

这方程組的行列式有形式：

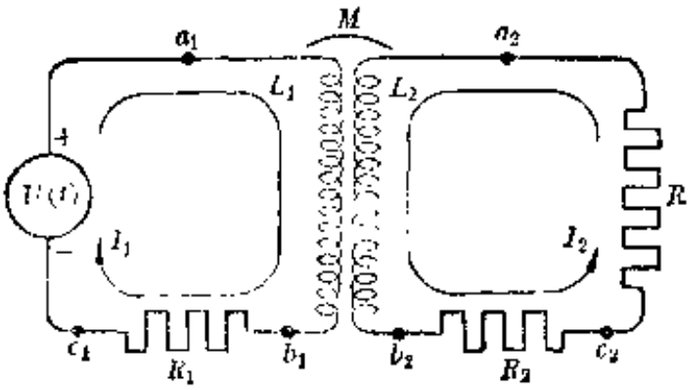


图 20

$$D(p)=(L_1L_2-M^2)p^2+(L_1R_2+L_1R+L_2R_1)p$$
$$+R_1(R_2+R).$$

根据 § 9 中命题 2)，这个多项式是稳定的 (因为 $L_1L_2-M^2>0$)。我們来討論当电压 $U(t)$ 諧变时变压器的工作状态，并将按照 § 12, 2) 的方法寻求定态解。置

$$U(t)=u_1e^{i\omega t},$$

其中 $u_1$ 是正实数(对第一綫組所加电压的振幅)。我們求形式为

$$I_1=\sigma_1e^{i\omega t},\quad I_2=\sigma_2e^{i\omega t}$$

的未知函数，其中 $\sigma_1$, $\sigma_2$ 是电流的复数振幅。

在理論上最感兴趣的是理想变压器，就是这样的变压器，在其中量 $R_1$, $R_2$ 和 $L_1L_2-M^2$ 很小。在确定 $\sigma_1$ 和 $\sigma_2$ 的方程中略去这些量，我們得到

$$L_1\cdot i\omega\sigma_1+M\cdot i\omega\sigma_2=u_1,$$
$$M\cdot i\omega\sigma_1+(L_2\cdot i\omega+R)\sigma_2=0.$$

由于 $M\approx\sqrt{L_1L_2}$，所以在用 $\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$ 乘第一个方程，并从第二个方程減去所得的方程，我們就有

$$R\sigma_2=-\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}u_1.$$

因此，在負載 $R$ 上电压降的振幅 $u_2=R|\sigma_2|$ 等于

$$u_2=\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}u_1;$$

量 $\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$ 称为**变压器系数**。因此，如果 $L_2>L_1$，我們得到增压变压器

$$\frac{u_2}{u_1}>1;$$

当 $L_2<L_1$ 时，我們得到降压变压器

$$\frac{u_2}{u_1}<1.$$

**例題 3.** （**电滤波器**） 我們考察有四个节点 $a, b, c, d$ 和五个二端网絡的电路（图 21）：

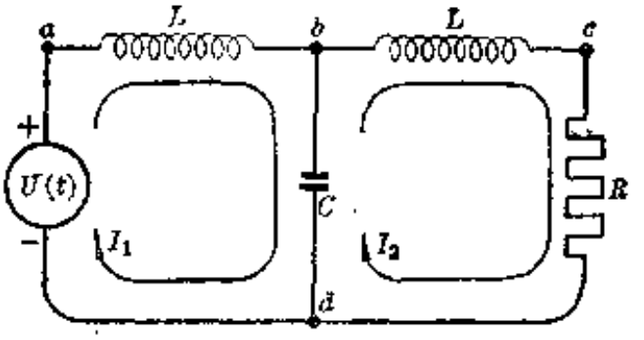


图 21

$ab$ 是电感 $L$，$bc$ 是具同样量 $L$ 的电感，

$bd$ 是电容 $C$，$ad$ 是电压源 $U_{ad}(t)=U(t)$，

$cd$ 是負載电阻 $R$。

置

$$I_{ab}=I_1, \quad I_{bc}=I_2.$$

那末由克希荷夫第一定律有

$$I_{bd}=I_1-I_2, \quad I_{cd}=I_2.$$

根据克希荷夫第二定律得到

$$U_{ab}+U_{bc}+U_{cd}+U_{da}=0,$$

$$U_{bc}+U_{cd}+U_{db}=0,$$

或

$$LpI_1+LpI_2+RI_2-U(t)=0,$$

$$LpI_2+RI_2+\frac{1}{Cp}(I_2-I_1)=0,$$

以 $p$ 乘第二个方程，得到以下的方程組：

$$LpI_1+(Lp+R)I_2=U(t),$$

$$-\frac{1}{C}I_1+\left(Lp^2+Rp+\frac{1}{C}\right)I_2=0.$$

这方程組的行列式有形状：

$$D(p)=L^2p^3+LRp^2+\frac{2Lp}{C}+\frac{R}{C}.$$

根据定理 6，多項式 $D(p)$ 是稳定的。現在假定 $U=be^{i\omega t}$，其中 $b$ 是电压的实振幅（参看 § 12）。求形状为

$$I_1=a_1e^{i\omega t},\quad I_2=a_2e^{i\omega t}$$

的未知函数 $I_1$ 和 $I_2$，其中 $a_1$ 和 $a_2$ 是电流的复数振幅，也就是限于寻求定态解。

我們提出确定在負載上的电压降 $U_{cd}=RI_2$ 的問題。我們有

$$a_2=\frac{\dfrac{b}{C}}{\left(\dfrac{R}{C}-LR\omega^2\right)+i\omega\left(\dfrac{2L}{C}-L^2\omega^2\right)},$$

从此求得电压 $U_{cd}$ 的振幅 $a=|a_2|R$：

$$a=|a_2|R=\frac{\dfrac{bR}{C}}{\sqrt{\left(\dfrac{R}{C}-LR\omega^2\right)^2+\omega^2\left(\dfrac{2L}{C}-L^2\omega^2\right)^2}}.$$

对于小的頻率 $\omega$，我們有 $\frac{a}{b}\approx1$；換句話說，低頻电压容易通过滤波器傳送出去，几乎不改变振幅。对于大的頻率 $\omega$，我們有

$$\frac{a}{b}\approx\frac{R}{CL^2\omega^3},$$

因此，高頻电压几乎不能通过而"滤掉"了。

## § 14. 标准的常系数綫性齐次方程組

在这里要解常系数方程組

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^{n} a_j^i x^j, \quad i = 1, \cdots, n. \tag{1}$$

这方程組可以用消去法来解（参看 § 11，特别是 § 11 中例題 2）。这里是通过把矩陣 $A = (a_j^i)$ 化为若当型来解的。当矩陣 $A$ 的所有的特征值不同时，把它化到若当型（在現在情形是对角綫型）的可能性是很初等的代数学上的事实。在一般情形，化矩陣 $A$ 为若当型的可能性牵涉到比較复杂的綫性代数教程中的結果。往后要用的只是本节的那些結論，它們依靠把矩陣 $A$ 在特征值是不同的情形化为对角綫型。利用在一般情形下能够把矩陣 $A$ 化为若当型而得到的一些結論，今后并不需要。它們在命題 3)，4)，7) 以及定理 28 中讲述，因为这些命題以及定理 28 对后面并无妨害，是可以把它們放过去的。

为了解方程組 (1) 而化矩陣 $A$ 为若当型时，通常利用未知函数 $x^1, \cdots, x^n$ 的綫性变换。这个方法将在本节末"变量的变换"标題之下来叙述。在本节的第一部分要讲述实质上也依靠把矩陣 $A$ 化为若当型的别的方法。

在这一节中我們不来区别矩陣 $A$ 和在向量 $\boldsymbol{x} = (x^1, \cdots, x^n)$ 的空間中同它对应的变换 $\boldsymbol{A}$，因为我們并不需要改变基底。只在証明命題 6) 时是例外。

### 特征方程的根全是单根的情形

**1)** 微分方程組(1)在向量形式下写成

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}, \tag{2}$$

这里 $A = (a_j^i)$。代替未知函数組 $x^1, \cdots, x^n$，引进未知向量

$$\boldsymbol{x} = (x^1, \cdots, x^n);$$

向量 $\boldsymbol{x}$ 的导数 $\dot{\boldsymbol{x}}$ 理解为向量 $(\dot{x}^1, \cdots, \dot{x}^n)$。如果 $\boldsymbol{h}$ 是矩陣 $A$ 的对应于特征值 $\lambda$ 的特征向量，就是如果

$$A\boldsymbol{h} = \lambda\boldsymbol{h}$$

(参看 § 32, 2)), 那末由关系式

$$x = he^{\lambda t}$$

所确定的向量函数 $x$ 是方程(2)的解。

最后的断言通过把 $x = he^{\lambda t}$ 代入关系式(2)来驗証。

**定理 10.** 設

$$\dot{x} = Ax \tag{3}$$

是这样的微分方程組 (参看 1)), 它的矩陣 $A$ 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 两两不同, 且設

$$h_1, \cdots, h_n$$

是这个矩陣的相应的特征向量。置

$$x_i = h_i e^{\lambda_i t}, \quad i = 1, \cdots, n. \tag{4}$$

那末向量函数

$$x = c^1 x_1 + \cdots + c^n x_n \tag{5}$$

是方程(3)的解, 其中 $c^1, \cdots, c^n$ 是常数, 并且方程(3)的任意的解由这公式給出。

**証明** 由命題 1), 每个函数 $x_i$ 是方程(3)的解, 所以根据 § 6 命題 1), 公式(5)总給出方程(3)的解。現在証明, 方程(3)的任一解可以写成形状 (5). 設 $\varphi(t)$ 是方程(3)的任意的解。由定理 3, 解 $\varphi(t)$ 可以认为是在整个无限直綫 $-\infty < t < \infty$ 上給定的。因此这个解在 $t = 0$ 时是确定的。置 $\varphi(0) = x_0$. 設

$$x_0 = c^1 h_1 + \cdots + c^n h_n$$

是向量 $x_0$ 按基底向量 $h_1, \cdots, h_n$ 的展开式(根据 §32 中命題 3), 向量 $h_1, \cdots, h_n$ 构成基底)。那末由公式(5)所确定的解 $x$ 显然滿足初始条件

$$x(0) = x_0.$$

解 $\varphi(t)$ 也滿足同样的初始条件 $\varphi(0) = x_0$; 因此, 由唯一性定理 (参看定理 2), $x = \varphi(t)$.

这样, 定理 10 得証。

当确定方程(3)的矩陣$(a_j^i)$是实矩陣的情形，在我們面前就提出从所有的解(5)中分出实解的問題。

**2)** 假設确定方程(3)的矩陣$(a_j^i)$是实的，并且选取向量$h_1, \cdots, h_n$，使得实的特征值对应于实向量，复数共軛的特征值对应于复数共軛的向量。那末在解組(4)中，对应于每个实的特征值是实解，对应于每两个复数共軛的特征值是复数共軛的解。可以証明，解(5)当且只当实解前面是实常数，而复数共軛解前面是复数共軛的常数时才是实的。

命題2)的正确性直接从§7中命題4)推出。

## 一般情形

現在轉到解一般情形的方程組(1)(矩陣$(a_j^i)$可能有重特征值)。对于这种情况的分析，要用到不很簡单并且証明也比較复杂的(代数学上)化矩陣为若当型的定理(参看§34)。

**3)** 写方程組(1)为向量形式：

$$\dot{x} = Ax, \tag{6}$$

且設

$$h_1, \cdots, h_k$$

是关于矩陣$A$的特征值$\lambda$的某一向量列(参看§34, 1))，因此滿足关系式

$$Ah_1 = \lambda h_1, \quad Ah_2 = \lambda h_2 + h_1, \quad \cdots, \quad Ah_k = \lambda h_k + h_{k-1}.$$

引进一組向量函数，置

$$\omega_r(t) = \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} h_1 + \frac{t^{r-2}}{(r-2)!} h_2 + \cdots + h_r, \quad r = 1, \cdots, k. \tag{7}$$

那末可以証明向量函数

$$x_r = \omega_r(t) e^{\lambda t}, \quad r = 1, \cdots, k \tag{8}$$

是方程(6)的解，并且

$$x_r(0)=h_r. \tag{9}$$

因此，对每一列这样的 $k$ 个向量有含 $k$ 个解的一組同它对应。

为了証明向量函数(8)是方程(6)的解，我們指出以下的关于向量函数(7)的两个恒等式：

$$\dot{\omega}_r(t)=\omega_{r-1}(t),\quad r=1,\cdots,k,$$

$$A\omega_r(t)=\lambda\omega_r(t)+\omega_{r-1}(t),\quad r=1,\cdots,k.$$

在这些关系式中取 $\omega_0(t)=0$。这些恒等式通过簡单計算可以立即驗証。借助于这些恒等式可以直接驗証(8)是方程(6)的解。事实上，我們有

$$\dot{x}_r(t)=\dot{\omega}_r(t)e^{\lambda t}+\lambda\omega_r(t)e^{\lambda t}=(\omega_{r-1}(t)+\lambda\omega_r(t))e^{\lambda t}$$
$$=A\omega_r(t)e^{\lambda t}=Ax_r(t).$$

現在轉来叙述并証明在一般情形給出方程組(1)的解的定理。

**定理 11.** 設

$$\dot{x}=Ax \tag{10}$$

是方程組(1)的向量写法。根据定理 28 (参看 § 34)，存在基

$$h_1,\cdots,h_n,$$

它由关于矩陣 $A$ 的列組成。为了确定起見，假設 $h_1,\cdots,h_{k_1}$ 是对于特征值 $\lambda_1$ 的列，$h_{k_1+1},\cdots,h_{k_1+k_2}$ 是对于特征值 $\lambda_2$ 的列等等。由命題 3)，每一列对应一个解組，因此我們可以写出方程(10)的下面的解：

$$\left.\begin{aligned}
&x_1=h_1e^{\lambda_1 t},\ \cdots,\ x_{k_1}=\left(\frac{t^{k_1-1}}{(k_1-1)!}h_1+\cdots+h_{k_1}\right)e^{\lambda_1 t},\\
&x_{k_1+1}=h_{k_1+1}e^{\lambda_2 t},\ \cdots,\ x_{k_1+k_2}\\
&\qquad=\left(\frac{t^{k_2-1}}{(k_2-1)!}h_{k_1+1}+\cdots+h_{k_1+k_2}\right)e^{\lambda_2 t},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

可以証明，公式

$$x=c^1x_1+\cdots+c^nx_n \tag{12}$$

給出方程(10)的解，其中 $c^1,\cdots,c^n$ 是常数，并且方程(10)的每个

解可以由公式(12)表示。

这样，函数 $x_1, \cdots, x_n$ 构成所謂方程(10)的基本解組。

**証明** 因为函数 $x_1, \cdots, x_n$ 是方程(10)的解(参看3))，所以由§6，命題1)，公式(12)給出方程(10)的解。我們来証明方程(10)的每一个解在常数 $c^1, \cdots, c^n$ 的适当选取之下，可以写成(12)的形式。由定理3，解 $\varphi(t)$ 可以看作是在整个直綫 $-\infty<t<\infty$ 上給定的，所以向量 $\varphi(0)=x_0$ 是有定义的。把这个向量关于基 $h_1, \cdots, h_n$ 展开：

$$x_0=c^1h_1+\cdots+c^nh_n.$$

如果現在把得到的常数 $c^1, \cdots, c^n$ 代入关系式(12)，那末就得到解 $x(t)$，满足初始条件

$$x(0)=c^1x_1(0)+\cdots+c^nx_n(0)=c^1h_1+\cdots+c^nh_n=x_0$$

(参看(9))。因此，解 $\varphi(t)$ 和 $x(t)$ 有公共的初始值，从而它們是一致的。

这样，定理11得証。

現在剩下的是在实矩陣 $(a_j^i)$ 的情形从公式(12)給出的解中分出实解来的問題。这完全和特征方程有单根的情形一样来做。

4) 假設确定方程(10)的矩陣 $(a_j^i)$ 是实的。在这情形，按定理28中对矩陣 $(a_j^i)$ 是实的情形所規定的方法(参看§34)选取基底 $h_1, \cdots, h_n$。在基底这样选取之下，定理11所作出的解(11)中有一部分是实的，另一部分是成对复数共軛的。可以証明，解(12)在且只在实解前面是实常数，而复数共軛的解前面是复数共軛的常数时才是实的。

命題4)直接从§7中命題4)推出。

最后应当注意本节的以上結論是和§7，8两节的結論密切联系的。§7，8两节所考虑的是一个 $n$ 阶常系数綫性齐次方程。按照§4中的方法，这个方程可以写成包含 $n$ 个方程的标准方程組

的形式。因此，§ 7，8 两节的結果可以从本节的結論中引出。并且可以証明，所得到的标准方程組的特征多項式与原来方程的特征多項式相同。

## 变量的变換

**5)** 在由常数矩陣 $A=(a_j^i)$ 确定的方程組(1)中，代替未知函数

$$x^1, \cdots, x^n, \tag{13}$$

引进新的未知函数

$$y^1, \cdots, y^n, \tag{14}$$

置

$$y^j=\sum_{i=1}^{n} s_i^j x^i, \quad j=1, \cdots, n, \tag{15}$$

其中 $s_i^j$ 是常系数，构成不退化的矩陣 $S=(s_i^j)$. 对新的未知函数，方程組写为形状：

$$\dot{y}^j=\sum_{i=1}^{n} b_i^j y^i, \quad j=1, \cdots, n, \tag{16}$$

其中矩陣 $B=(b_i^j)$ 从矩陣 $A$ 按公式

$$B=SAS^{-1} \tag{17}$$

得到。

我們来証明这件事。关于 $t$ 导微关系式(15)，得到

$$\dot{y}^j=\sum_{i=1}^{n} s_i^j \dot{x}^i, \quad j=1, \cdots, n. \tag{18}$$

因此，向量 $\dot{\boldsymbol{x}}=(\dot{x}^1, \cdots, \dot{x}^n)$ 的分量受到和向量 $\boldsymbol{x}=(x^1, \cdots, x^n)$ 的分量同样的变換。从此就已經推出公式(17)（参看 § 32, 1)). 但是我們还是从头进行証明。在矩陣的形式下，(15) 和 (18) 分别改写为形式：

$$\boldsymbol{y}=S\boldsymbol{x}, \quad \dot{\boldsymbol{y}}=S\dot{\boldsymbol{x}};$$

因此我們有

$$\dot{\boldsymbol{y}}=S\dot{\boldsymbol{x}}=SA\boldsymbol{x}=SAS^{-1}\boldsymbol{y}.$$

这样,公式(17)得証。

适当选取矩陣 $S$,我們可以使矩陣 $B$ 取最簡单的形式。因为矩陣 $A$ 到矩陣 $B$ 的变换(17)是矩陣 $S$ 的变位,所以我們可以做到使得矩陣 $B$ 有若当型(参看 § 34, 2))。

**6)** 如果方程組(1)的矩陣 $A$ 的特征值

$$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$$

都不相同,那末可以选取綫性变换(15),使得方程組(16)取形式:

$$\dot{y}^k=\lambda_k y^k, \quad k=1, \cdots, n. \tag{19}$$

此外,如果矩陣 $A$ 是实的,因而在特征值組 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 中除了每个复的特征值 $\lambda_k$ 之外,也有它的复数共軛值 $\lambda_l=\bar{\lambda}_k$,而变量(13)是实的,所以可以选取变换(15),使得每个实的特征值 $\lambda_j$ 对应于实变量 $y^j$,而成对复数共軛的特征值 $\lambda_k$ 和 $\lambda_l$,对应于复数共軛的变量 $y^k$ 和 $y^l=\bar{y}^k$。因此,共軛的特征值对应于共軛的方程

$$\dot{y}^k=\lambda_k y^k, \quad \dot{\bar{y}}^k=\bar{\lambda}_k\bar{y}^k. \tag{20}$$

設

$$\lambda_k=\mu_k+i\nu_k, \quad y^k=\xi^k+i\eta^k, \tag{21}$$

其中 $\mu_k$, $\nu_k$, $\xi^k$, $\eta^k$ 是实的。于是一对相互共軛的方程(20)可以換成一对实的方程

$$\dot{\xi}^k=\mu_k\xi^k-\nu_k\eta^k, \quad \dot{\eta}^k=\nu_k\xi^k+\mu_k\eta^k. \tag{22}$$

对每一对复数共軛的特征值都作这样的变换,我們就可把实变量(13)的方程組換成新的实变量的方程組,同时,其中一部分方程有形状(19)(对于实的特征值 $\lambda_j$),而另一部分有形状(22)(对于成对的复数共軛的特征值)。

为了証明命題 6),在向量 $\boldsymbol{x}=(x^1, \cdots, x^n)$ 的空間 $R$ 中,作对应于矩陣 $A$ 的綫性变换 $\boldsymbol{A}$(参看 § 32),并以 $\boldsymbol{h}_k$ 記变换 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_k$ 的特征向量。現在取向量

$$\boldsymbol{h}_1, \cdots, \boldsymbol{h}_n \tag{23}$$

作为 $R$ 的基，并把向量 $\boldsymbol{x}$ 关于这个基的坐标記为 $y^1, \cdots, y^n$. 这样我們得到綫性变換 (15). 在新坐标系之下变換 $\boldsymbol{A}$ 对应于矩陣 $B$，容易看出，它有对角綫形，且在对角綫上是数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. 因此，方程組(16)具形式(19).

現在如果矩陣 $A$ 是实的，那末对于每个实的特征值 $\lambda_j$，以实的特征向量 $\boldsymbol{h}_j$ 和它对应，而对于一对复数共軛的特征值 $\lambda_k$ 和 $\lambda_l = \bar{\lambda}_k$，以一对复数共軛的特征向量 $\boldsymbol{h}_k$ 和 $\boldsymbol{h}_l = \bar{\boldsymbol{h}}_k$ 同它对应。任意向量 $\boldsymbol{x}$ 在新坐标之下写成形状：

$$\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} y^j \boldsymbol{h}_j, \tag{24}$$

并且如果它是实的，那末在实向量之前的系数应当是实的，而复数共軛向量之前的系数必須是复数共軛的（参看 § 7, 4)). 因此，对应于每个实的特征值是实变量 $y^j$，而与成对复数共軛的特征值 $\lambda_k$ 和 $\lambda_l = \bar{\lambda}_k$ 对应的是复数共軛的变量 $y^k$ 和 $y^l = \bar{y}^k$.

为了从一对复数共軛的方程(20)化到一对实的方程 (22)，写出方程(20)，在其中数值 $\lambda_k$ 和 $y^k$ 以(21)来代，得到

$$\begin{aligned}\dot{\xi}^k + i\dot{\eta}^k &= (\mu_k + i\nu_k)(\xi^k + i\eta^k) \\ &= \mu_k \xi^k - \nu_k \eta^k + i(\nu_k \xi^k + \mu_k \eta^k).\end{aligned}$$

分别比較这关系式的实部和虛部，就得到方程組(22).

这样，命題 6) 得証。

方程組(19)有明显的解

$$y^k = c_k e^{\lambda_k t}, \quad k = 1, \cdots, n,$$

但是为了得到原来方程組(3)的解，需要从未知函数(14)化到未知函数(13)，为此，又需要知道矩陣 $A$ 的特征向量(23)（参看(24)）. 因此，命題 6) 等价于定理 10.

为了在一般情形解方程組(1)，可以利用矩陣 $A$ 化为若当型的事实；这里得到的命題 7) 等价于定理 11.

**7)** 設方程組(1)的矩陣 $A$ 是任意的。取变換 (15) 使得矩陣 $B$ 有若当型(参看 § 34)。設 $\lambda$ 是矩陣 $A$ 的一个特征值，又 $k$ 是矩陣 $B$ 对应于特征值 $\lambda$ 的一个若当块的次数。假定这一块位于前面 $k$ 行。对应于这一块的方程組有形状：

$$\dot{y}^1=\lambda y^1+y^2,\quad \dot{y}^2=\lambda y^2+y^3,\quad \cdots,\quad \dot{y}^{k-1}=\lambda y^{k-1}+y^k,\quad \dot{y}^k=\lambda y^k.$$

矩陣 $B$ 的每个其他的若当块对应于类似的方程組，它們都是容易解出的。

## 例　題

**例題 1.** 应用这一节所讲的方法来解方程組(1)，需要求出由列构成的向量空間的基

$$\boldsymbol{h}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{h}_n$$

(参看定理 11)。这种寻求本身是一些代数問題。我們指出，利用本节的結論，能用待定系数法来解方程組 (1)，而不求由列构成的基。設 $\lambda$ 是矩陣 $(a_j^i)$ 的某个特征值。一般地說，对应于这个特征值有几个列出現在基 $\boldsymbol{h}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{h}_n$ 之中；設 $k$ 是对应于特征值 $\lambda$ 的各列长度中的最大的。根据定理 11，每个对应于特征值 $\lambda$ 的解可以記成形式：

$$x^i=f^i(t)e^{\lambda t},\quad i=1,\ \cdots,\ n, \tag{25}$$

其中 $f^i(t)$ 是次数 $\leqslant k-1$ 的多項式。因此，把形式 (25) 的解代入方程組(1)，并把多項式 $f^i(t)$ 的系数看成未知常数，这里 $i=1,\cdots,n$，我們利用待定系数法得到方程組(1)的所有对应于特征值 $\lambda$ 的解。在用这种方法解方程組 (1) 时，并不需要知道对应于特征值 $\lambda$ 的列，而只要知道这些列的长度。求长度的問題是比化成标准型来得簡单的代数問題；这个問題要用属于綫性代数的**矩陣的初等因子理論**来解决。初等因子理論在本书的其他地方沒有用到。

**例題 2.** 現在指出怎样用 § 11 中所讲的消去法解方程組(1)。

为了应用消去法，記方程組(1)为形式：

$$\sum_{j=1}^{n} L_j^i(p)x^j = 0,$$

其中

$$L_j^i(p) = a_j^i - p\delta_j^i.$$

在这情形，矩陣$(L_j^i(p))$的行列式$D(p)$是矩陣$(a_j^i)$的特征多項式。設$\lambda$是多項式$D(p)$的某个根，或者同样地，是矩陣$(a_j^i)$的特征值。根的重次記为$l$。根据§11中命題3)，方程組(1)的对应于根$\lambda$的每一个解应当在形式：

$$x^i = g^i(t)e^{\lambda t}, \quad i=1, \cdots, n$$

之下来求，其中多項式$g^i(t)$的次数不超过数$l-1$。如果比較这个例題所說的方法和例題1所給的方法，我們就看出全部差别只在于多項式最大次数的确定方面。例題1的方法使多項式的次数确定得更精确，因为一般說来，数$k$小于$l$。事实上，对应于特征值$\lambda$的所有各列的长度之和等于$l$。因此，等式$k=l$只在对应于特征值$\lambda$仅有一列时才能成立。

## §15. 自治的微分方程組和它們的相空間

这里将在自治系統的**相空間**的形式下对**自治**方程組（自治系統）給出几何学解釋。这种解釋本质上不同于§1中对方程組所作的几何学解釋，正确地說，这种解釋并不是几何学的而是动力学的，因为在这种解釋中，和方程組的每个解相对应的不是空間的曲綫，而是点沿曲綫的运动。动力学的解釋（相空間）在某些关系上比几何学的解釋（积分曲綫族）能更加透彻些。

### 自治系統

如果在常微分方程組中自变量（或如通常所說的时間）$t$不明显地出現，我們称它为**自治的**。这表明出方程組所描述的未知函数的变动規律不随时間变化，通常的物理規律就是这样的。显然，

容易証明，如果

$$x^i=\varphi^i(t),\quad i=1,\cdots,n$$

是某个自治方程組的解，那末

$$x^i=\varphi^i_*(t)=\varphi^i(t+c),\quad i=1,\cdots,n$$

也是同一个自治方程組的解，这里 $c$ 是常数。我們以标准自治方程組为例来对这个事实进行証明。

1) 設

$$\dot{x}^i=f^i(x^1,\cdots,x^n),\quad i=1,\cdots,n \tag{1}$$

是 $n$ 阶自治标准方程組，且

$$\dot{x}=f(x)$$

是它的向量写法。系統(1)的自治性在于諸函数 $f^i(x^1,\cdots,x^n)$ 是变量 $x^1,\cdots,x^n$ 的函数而和时間 $t$ 无关。我們假定函数 $f^i(x^1,\cdots,x^n)$ 是确定在 $n$ 維空間的某个区域 $\Delta$ 上的，这空間中点的坐标是变量 $x^1,\cdots,x^n$。我們还假定，函数 $f^i(x^1,\cdots,x^n)$ 和它們的一阶偏导数在区域 $\Delta$ 上是連續的。可以証明，如果

$$x^i=\varphi^i(t),\quad i=1,\cdots,n \tag{2}$$

是方程(1)的解，那末

$$x^i=\varphi^i_*(t)=\varphi^i(t+c),\quad i=1,\cdots,n \tag{3}$$

也是方程 (1) 的解。显然，如果解 (2) 有最大的存在区間 $m_1<t<m_2$，那末解(3)有最大的存在区間

$$m_1-c<t<m_2-c.$$

从复合函数的导微法則推出关系式

$$\dot{\varphi}^i_*(t)=\dot{\varphi}^i(t+c),\quad i=1,\cdots,n. \tag{4}$$

事实上，

$$\dot{\varphi}^i_*(t)=\frac{d}{dt}\varphi^i_*(t)=\frac{d}{dt}\varphi^i(t+c)$$

$$=\frac{d}{d(t+c)}\varphi^i(t+c)\cdot\frac{d(t+c)}{dt}\quad\dot{\varphi}^i(t+c)\cdot 1=\dot{\varphi}^i(t+c).$$

現在証明(3)是系統(1)的解。由于(2)是解，所以我們有恒等式

$$\dot{\varphi}^i(t)=f^i(\varphi^1(t),\cdots,\varphi^n(t)),\quad i=1,\cdots,n.$$

在这恒等式中換 $t$ 为 $t+c$，就得到

$$\dot{\varphi}^i(t+c)=f^i(\varphi^1(t+c),\cdots,\varphi^n(t+c)),\quad i=1,\cdots,n.$$

从此根据(4)和(3)推出

$$\dot{\varphi}^i_*(t)=\dot{\varphi}^i(t+c)=f^i(\varphi^1(t+c),\cdots,\varphi^n(t+c))$$
$$=f^i(\varphi^1_*(t),\cdots,\varphi^n_*(t)).$$

現在轉到系統 (1) 的解的动力学解释。关于在 $n$ 維空間的解釋是形式地提出的，但是为了明显起見，介紹平面的情形($n=2$)是适宜的。

**2)** 对自治系統(1)的每个解

$$x^i=\varphi^i(t),\quad i=1,\cdots,n, \tag{5}$$

以 $n$ 維空間的点的运动和它对应，这运动由方程 (5) 給出，其中 $x^1,\cdots,x^n$ 是空間点的坐标，而 $t$ 为时間。点在运动的过程中描出某一曲綫——运动的 **軌綫**。如果把解(5)不比拟为运动过程而看成点的运动軌綫，那末我們就得到关于解的不很完全的表示，因此頂好在軌綫上至少还要指出运动的方向。可以証明，如果除了解(5)而外还有别的解

$$x^i=\psi^i(t),\quad i=1,\cdots,n, \tag{6}$$

那末对应于这个解的軌綫与前一軌綫或者在空間中不相交，或者相合。就是說，如果两条軌綫至少有一个公共点，即

$$\varphi^i(t_1)=\psi^i(t_2),\quad i=1,\cdots,n, \tag{7}$$

那末

$$\psi^i(t)=\varphi^i(t+c),\quad \text{其中 } c=t_1-t_2. \tag{8}$$

最后的等式指出第一个解和第二个解所描出的軌綫是一致的，可是第一个解带有时間 $c$ 的“滯后”而描出和第二个解同样的軌綫。

如果对应于第一个解的点在时刻 $t+c$ 到达轨线上的某个位置，那末对应于第二个解的点已經在时刻 $t$ 到过这个位置了。

为了从等式(7)导出恒等式 (8)，除了解(5)以外，我們还考察解

$$\varphi_*^i(t)=\varphi^i(t+c) \tag{9}$$

(参看1))。当 $c=t_1-t_2$ 时，从等式(7)推出等式

$$\varphi_*^i(t_2)=\varphi^i(t_2+c)=\varphi^i(t_1)=\psi^i(t_2),\quad i=1,\cdots,n.$$

这样，系统(1)的解 (6) 和 (9) 有公共的初始值 (就是在时刻 $t_2$ 的值)，从而根据唯一性定理，它們是一致的，因此我們有

$$\psi^i(t)=\varphi_*^i(t)=\varphi^i(t+c),\quad i=1,\cdots,n.$$

## 平衡位置和閉軌綫

我們提出关于系統的解所描出的軌綫能否自己相交的問題。

**3)** 設

$$x^i=\varphi^i(t),\quad i=1,\cdots,n \tag{10}$$

是系統(1)的某个解，它确定在最大区間 $m_1<t<m_2$ 上。假定說，等式

$$\varphi^i(t_1)=\varphi^i(t_2),\quad i=1,\cdots,n;\ t_1\neq t_2 \tag{11}$$

成立，这里数 $t_1$，$t_2$ 当然是属于区間 $m_1<t<m_2$ 的。可以証明，$m_1=-\infty$，$m_2=+\infty$ (就是解(10)的最大存在区間是整个无穷直綫)，并且只能有以下两种互不相容的情形。

1° 对一切 $t$ 的值成立等式

$$\varphi^i(t)=a^i,\quad i=1,\cdots,n,$$

其中 $(a^1,\cdots,a^n)$ 是区域 $\Delta$ 中和 $t$ 无关的点。因此，在这种情形，当 $t$ 变动时，点 $(\varphi^1(t),\cdots,\varphi^n(t))$ 实际上不动而停在原地。这时，解(10)本身以及点 $(a^1,\cdots,a^n)$ 称为系統(1)的**平衡位置**。

2° 存在正数 $T$，使得对任意的 $t$ 成立等式

$$\varphi^i(t+T)=\varphi^i(t),\quad i=1,\cdots,n.$$

但是当 $|\tau_1-\tau_2|<T$ 时，至少对一个 $i=1,\cdots,n$ 成立不等式

$$\varphi^i(\tau_1)\neq\varphi^i(\tau_2).$$

在这种情形，解 (10) 称为**周期的**，周期为 $T$，而解(10)所描出的軌綫称为**閉軌綫**或是**圈**(环)。

首先証明解的最大存在区間是整个直綫。如同在命題 2) 中已經注意到的，从等式(11)推出恒等式

$$\varphi^i(t+c)=\varphi^i(t),\quad i=1,\cdots,n;\ c=t_1-t_2. \tag{12}$$

根据这个等式，区間 $m_1-c<t<m_2-c$ 应当合于区間 $m_1<t<m_2$，所以 $m_1=-\infty$，$m_2=+\infty$。

每一个滿足恒等式(12)的数 $c$ 称为解 (10) 的**周期**；用 $F$ 来記解(10)的所有周期組成的集。集 $F$ 是某个数集。我們来建立它的一些性质。在关系式(12)中将 $t$ 換为 $t-c$，得到 $\varphi^i(t)=\varphi^i(t-c)$。因此，如果 $c$ 是周期，那末 $-c$ 也是周期。假定 $c_1$ 和 $c_2$ 是周期，即

$$\varphi^i(t+c_1)=\varphi^i(t),\quad \varphi^i(t+c_2)=\varphi^i(t),\quad i=1,\cdots,n.$$

那末 $$\varphi^i((t+c_2)+c_1)=\varphi^i(t+c_2)=\varphi^i(t),\quad i=1,\cdots,n.$$

因此，如果 $c_1$ 和 $c_2$ 是周期，那末 $c_1+c_2$ 也是周期。假定 $c_1$，$c_2$，$\cdots$，$c_m$，$\cdots$ 是由周期构成的序列，收敛于数 $c_0$；那末我們有

$$\varphi^i(t+c_m)=\varphi^i(t),\quad i=1,\cdots,n;\ m=1,2,\cdots.$$

因为函数 $\varphi^i(t)$ 是連續的，所以当 $m\to\infty$ 时得到

$$\varphi^i(t+c_0)=\varphi^i(t),$$

就是說，$c_0$ 也是周期，从而数集 $F$ 是閉的。

由于等式 (12) 中的数 $c$ 不等于零 ($t_1\neq t_2$)，所以数集 $F$ 中含有异于零的数。容易从所建立的集 $F$ 的性质推出，对于它只有两种可能：1° 集 $F$ 同全部实数构成的集一致；2° 集 $F$ 中有最小的正数 $T$，且因此 $F$ 由数 $T$ 的所有整数的倍数組成。在下一段我們将証明实际上只有这两种可能。因为集 $F$ 含数 $c$ 的同时也含数 $-c$，又在 $F$ 中有异于零的数，所以在 $F$ 中有正数。

假定在集 $F$ 中沒有最小的正数，就是說，对于任何正数 $\varepsilon$ 有正的周期 $c<\varepsilon$。从所証明的集 $F$ 的性质推出(因为 $c$ 是周期)，所有的 $mc$ 也是周期，这里 $m$ 是整数。由于 $c<\varepsilon$，所以对于任意实数 $c_0$，可以选取整数 $m$ 使得 $|c_0-mc|<\varepsilon$。这样一来，任何数 $c_0$ 是集 $F$ 的极限点，从而由集 $F$ 的封閉性，这个集和全体实数組成的集相一致。

現在假設 $F$ 不是全体实数构成的集。根据証明过的，这时在 $F$ 中有最小正数 $T$。設 $c$ 是任意周期。那末可以选取整数 $m$，使得 $|c-mT|<T$。假定 $c\neq mT$；那末 $|c-mT|$ 是异于零的周期，这是不可能的，因为 $|c-mT|<T$，而同 $T$ 的最小性矛盾。这样就証明了 $F$ 中的各个数 $c$ 可以写为形状 $c=mT$，其中 $m$ 为整数。

現在已經容易驗証，如果 $F$ 是全体实数組成的集，情形 1° 就发生，而如果 $F$ 不是全体实数組成的集，情形 2° 就发生。

这样，命題 3) 得証。

命題 3) 可以簡单地叙述为有三种軌綫：1. 平衡位置；2. 周期軌綫(圈)；3. 自己不相交的軌綫。自然应当认为后面的情形是"最普遍的"。

从定理 2 推出，对于系統(1)的定义域 $\Delta$ 中的每一点，有表示系統 (1) 的解的軌綫通过。因此，整个区域 $\Delta$ 充滿了軌綫，并且按照 2)，这些軌綫两两不相交。在所有的軌綫中特别分出自己相交的軌綫，它們或者是平衡位置，或者是圈。这两种軌綫有很重要的意义。

这就是自治方程系統的解的动力学解释。方程組本身也容許作几何解釋。

## 相 空 間

**4)** 既然自治方程系統 (1) 确定在区域 $\Delta$ 上，对区域 $\Delta$ 中的每一点 $(x_0^1, \cdots, x_0^n)$，有 $n$ 个数的一組同它对应，就是

$$f^1(x_0^1, \cdots, x_0^n), \cdots, f^n(x_0^1, \cdots, x_0^n).$$

这些数可以看成是在 $n$ 維空間所引的从点 $(x_0^1, \cdots, x_0^n)$ 出发的向量 $\boldsymbol{f}(x_0^1, \cdots, x_0^n)$ 的分量。因此，自治系統和几何图象——給定在区域 $\Delta$ 中的**向量場**——建立了对应。在区域 $\Delta$ 的每一点 $(x_0^1, \cdots, x_0^n)$，确定了从这点出发的向量 $\boldsymbol{f}(x_0^1, \cdots, x_0^n)$. 解的几何解释和方程組本身的几何解释之間有以下的联系：設 $(x_0^1, \cdots, x_0^n)$ 是区域 $\Delta$ 中的任一点。由方程組的几何解释，这一点同从它出发的向量 $\boldsymbol{f}(x_0^1, \cdots, x_0^n)$ 相对应。其次，由定理 2，存在方程組 (1) 的解 $x^i = \varphi^i(t)$，滿足初始条件

$$\varphi^i(t_0) = x_0^i, \quad i = 1, \cdots, n.$$

由动力学的解释，在空間有点的运动同解 $x^i = \varphi^i(t)$ 相对应，点描成軌綫，并且动点在时刻 $t = t_0$ 經过空間的位置 $(x_0^1, \cdots, x_0^n)$. 可以証明，表示解 $x^i = \varphi^i(t)$ 的点在它通过位置 $(x_0^1, \cdots, x_0^n)$ 时的速度向量合于向量 $\boldsymbol{f}(x_0^1, \cdots, x_0^n)$. 就是說，这种一致性由在

$$x^i = x_0^i, \quad i = 1, \cdots, n; \quad t = t_0$$

时的方程組 (1) 表示。

把自治系統 (1) 的解解释为軌綫的形式以及把自治系統 (1) 本身解释为向量場的形式所属的 $n$ 維空間，称为系統 (1) 的**相空間**。軌綫称为**相軌綫**，向量 $\boldsymbol{f}(x_0^1, \cdots, x_0^n)$ 称为**相速度**。两种解释之間的联系是：在每个时刻点沿軌綫的运动速度合于給定在这个时刻动点在空間所处位置的相速度。

現在从相速度的观点来考察平衡位置。

**5)** 为了区域 $\Delta$ 中的点 $(a^1, \cdots, a^n)$ 是系統 (1) 的平衡位置，也就是为了系統有解 $x^i = \varphi^i(t)$，对于它，

$$\varphi^i(t) \equiv a^i, \quad i = 1, \cdots, n, \tag{13}$$

必要且充分的条件是在点 $(a^1, \cdots, a^n)$ 的相速度 $\boldsymbol{f}(a^1, \cdots, a^n)$ 等于零。因此，为了求出系統 (1) 的所有平衡位置，需要解方程組

$$f^i(a^1, \cdots, a^n) = 0, \quad i = 1, \cdots, n.$$

这方程组不是微分方程组，而是所謂有限方程组（在其中不出現导数）。

为了証明命題 5），我們假定 $(a^1, \cdots, a^n)$ 是平衡位置，即有解 $x^i = \varphi^i(t)$ 滿足关系式 (13)，并把这个解代入系統 (1)。由于常数的导数等于零，所以代入后給出

$$f^i(a^1, \cdots, a^n) = \frac{d}{dt}\varphi^i(t) = \frac{d}{dt}a^i = 0.$$

因此，在点 $(a^1, \cdots, a^n)$ 的相速度向量 $\boldsymbol{f}(a^1, \cdots, a^n)$ 实际上等于零。相反的，假定在点 $(a^1, \cdots, a^n)$ 的相速度向量 $\boldsymbol{f}(a^1, \cdots, a^n)$ 等于零，即 $f^i(a^1, \cdots, a^n) = 0$, $i = 1, \cdots, n$, 要証明，在这情形，等式 (13) 确定了系統 (1) 的解。代入后給出

$$\dot{\varphi}^i(t) = f^i(a^1, \cdots, a^n), \quad i = 1, \cdots, n;$$

这些等式是滿足的，因为左边是常数的导数，而右边是零。

## 例　題

**例題 1.** （和 § 2 中例題 3 相比較）。考察一阶自治微分方程

$$\dot{x} = f(x), \tag{14}$$

它的右边在变量 $x$ 变动的全直綫 $P$ 上連續且有連續导数。我們还补充假定函数 $f(x)$ 的零点，或是同样地，方程 (14) 的平衡位置沒有极限点。在这样的假定之下，平衡位置把直綫 $P$ 分成区間組 $\Sigma$。組 $\Sigma$ 的每一个区間 $(a, b)$ 有这样的性质，在它的内部函数 $f(x)$ 不等于零，而它的每一个端点 $a$ 或 $b$，或是函数 $f(x)$ 的零点，或是等于 $\pm\infty$。因此，組 $\Sigma$ 由有限个或是可列个有限区間以及不多于两个的半无穷区間构成，或者只含一个两端无限的区間 $(-\infty, \infty)$。設 $(a, b)$ 是組 $\Sigma$ 的某一区間，$x_0$ 是这区間内的点，$x = \varphi(t)$ 是方程 (14) 有初始值 0，$x_0$ 的解，并且 $m_1 < t < m_2$ 是解 $\varphi(t)$ 的最大存在区間。为了确定起見，設 $f(x_0) > 0$；那末可以証明，

$$a<\varphi(t)<b, \text{ 当 } m_1<t<m_2, \tag{15}$$

$$\lim_{t\to m_1}\varphi(t)=a, \quad \lim_{t\to m_2}\varphi(t)=b. \tag{16}$$

并且如果数 $a$ (或是 $b$) 是有限数，那末数 $m_1$ (或是 $m_2$) 是无穷的。这样 (图 22)，每个区間 $(a, b)$ 是方程 (14) 的一个单独的相軌綫。

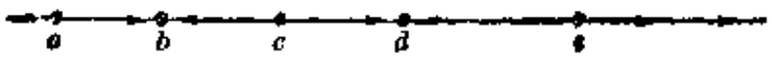


图 22

我們来証明关系式 (15) 和 (16)。从假設 $f(x_0)>0$ 推知，在区間 $(a, b)$ 上函数 $f(x)$ 是正数，所以在描相軌綫时，从左向右运动而經过这区間的每个点。当 $t$ 增大时，点 $\varphi(t)$ 只有越过区間 $(a, b)$ 的右端点 $b$ 时，才可以离开区間 $(a, b)$。假定說，在某时刻 $t=t_1$ 經过这点；那末当 $t=t_1$ 有 $\varphi(t_1)=b$，这就表明两个不同軌綫 $x=\varphi(t)$ 和 $x=b$ 相交，这是不可能的。完全同样地，可以証明在 $t$ 减小时点 $\varphi(t)$ 不离开区間 $(a, b)$。因此关系式 (15) 得証。

現在假定，$\lim_{t\to m_2}\varphi(t)=c<b$，并設 $\psi(t)$ 是方程 (14) 具有初始值 $0, c$ 的解。由于 $f(c)>0$，所以对某个負的值 $t_2$ 有 $\psi(t_2)<c$，而这表明两个不同的軌綫 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 相交，这是不可能的。因此，証明了 $\lim_{t\to m_2}\varphi(t)=b$。关系式

$$\lim_{t\to m_1}\varphi(t)=a$$

可以完全一样地証明。

最后，我們假定 $b<\infty$，而来証明 $m_2=+\infty$。如果与此相反，就是說 $m_2<\infty$。那末定义函数 $\chi(t)$，使 $\chi(t)=\varphi(t)$ 当 $m_1<t<m_2$；$\chi(t)=b$ 当 $t\geqslant m_2$。显然，函数 $\chi(t)$ 連續且滿足方程 (14)，但这是不可能的，因为否則两个不同的軌綫 $x=\chi(t)$ 和 $x=b$ 要相交了。得到的

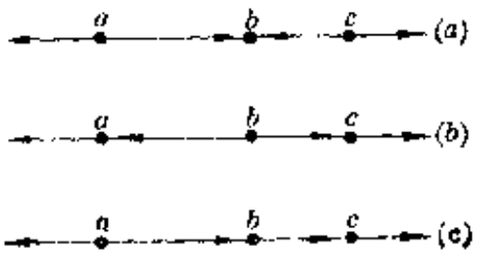


图 23

矛盾証明了 $m_2=+\infty$. 完全同样地可以証明当 $a>-\infty$ 时，有 $m_1=-\infty$.

設 $b$ 是方程(14)的任一平衡位置，而 $(a, b)$ 和 $(b, c)$ 是邻接于它（分别在左右）的 $\Sigma$ 中的两个区間。每一个区間 $(a, b)$, $(b, c)$ 是一条軌綫。如果当 $t$ 增大时，点在軌綫 $(a, b)$ 和 $(b, c)$ 上皆趋近于平衡位置 $b$，那末平衡位置 $b$ 称为**稳定的**（图 23(a)）. 如果点在軌綫 $(a, b)$ 和 $(b, c)$ 上皆离开 $b$ 点，那末平衡位置 $b$ 称为**不稳定的**（图 23(b)）. 如果点沿一条軌綫接近 $b$ 点而沿另一条軌綫远离 $b$ 点，那末平衡位置 $b$ 称为**半稳定的**（图 23(c)）. 为了平衡位置 $b$ 是稳定的，函数 $f(x)$ 在区間 $(a, b)$ 上为正而在区間 $(b, c)$ 上为負是必要且充分的。为了平衡位置 $b$ 是不稳定的，函数 $f(x)$ 在区間 $(a, b)$ 上为負以及在区間 $(b, c)$ 上为正是必要而充分的。为了平衡位置 $b$ 是半稳定的，函数 $f(x)$ 在两个区間 $(a, b)$ 和 $(b, c)$ 上有同一符号是必要而充分的。

假定 $\dot{f}(b)\neq 0$; 那末函数 $f(x)$ 的符号在靠近 $b$ 点和量 $\dot{f}(b)(x-b)$ 的符号相同。从此推出，当 $\dot{f}(b)<0$ 时，方程(14)的平衡位置 $b$ 是稳定的，而当 $\dot{f}(b)>0$ 时，它是不稳定的。

**例題 2.** *考察方程*

$$\dot{x}=f(x), \tag{17}$$

其中 $f(x)$ 是周期函数并有連續的一阶导数。为了确定起見，我們假定它的周期等于 $2\pi$. 在例題 1 中对于方程 (14) 所讲的一切对于方程 (17) 仍保持有效，因为方程 (17) 是方程 (14) 的特殊情形。但是考虑到方程(17)的特殊性(函数 $f(x)$ 的周期性)，把方程(17)的相空間不看成直綫而看成半徑为 1 的圓周 $K$ 是合适的，在圓周上选取某个計算起点 $O$ 以及环繞圓周的方向(例如，逆时針方向)。对每一点 $x$ 以圓周 $K$ 上的点 $\xi$ 同它对应，点 $\xi$ 是由从計算起点算起沿逆时針方向且长度为 $x$ 的弧所确定的（图 24）. 同时所有的数 $x+2k\pi$ ($k$ 为整数) 皆对应于圓周上同一点 $\xi$. 由于 $f(x+2k\pi)$

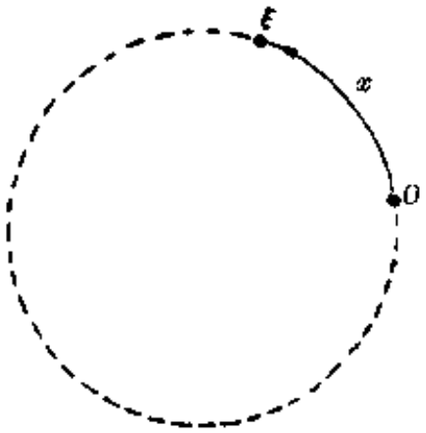


图 24

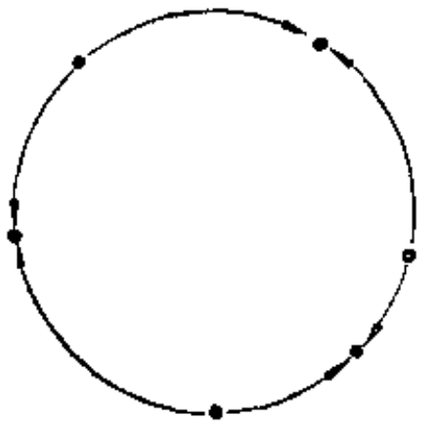

图 25

$=f(x)$，所以能置 $f(\xi)=f(x)$，函数 $f$ 就在圆周上給定了。方程 (17) 現在給出点 $\xi$ 沿圆周的运动。如果 $x(t)$ 是方程 (17) 的某个解，那末对应于数 $x(t)$ 的点 $\xi(t)$ 沿圆周 $K$ 运动。如果 $\alpha$ 是圆周 $K$ 上这样的点，$f(\alpha)=0$，那末方程(17)有解 $x(t)$，使得 $\xi(t)=\alpha$，$\alpha$ 就是方程(17)的平衡位置。为了簡单起見，假定方程 (17) 在圆周 $K$ 上的平衡位置沒有极限点；那末平衡位置只有有限个或者竟然一个也沒有 (图 25)。平衡位置分圆周为有限个区間組 $\Sigma$。如果根本沒有平衡位置，那末組 $\Sigma$ 只含一个"区間"(圆周)。如果只有一个平衡位置 $\alpha$，那末組 $\Sigma$ 也只含一个区間，它由圆周上除了点 $\alpha$ 以外的所有点构成。在第一种情形，区間根本沒有端点，在第二种情形，两个端点相重合。設 $I$ 是組 $\Sigma$ 的某个区間，且 $x(t)$ 是方程 (17) 的带有初始值 $0$，$x_0$ 的解，而 $\xi_0$ 是区間 $I$ 上和 $x_0$ 对应的点。解 $x(t)$ 总是对所有的值 $t$ 确定的，并且和 $x(t)$ 对应的 $\xi(t)$ 属于区間 $I$。如果区間 $I$ 有 (一个或两个) 端点，那末点在区間 $I$ 上沿确定的方向运动，同时解 $\xi(t)$ 經过区間 $I$ 内的每一点一次。如果区間 $I$ 合于整个圆周，那末从位置 $\xi_0$ 出发，点經过某个时間 $T$ 又回到原来位置，因此 $\xi(0)=\xi(T)$。在这种情形，$\xi(T)$ 和 $t$ 周期地相关而有周期 $T$。和运动 $\xi(t)$ 对应的方程 (17) 的数值解 $x(t)$ 满足条件

$$x(t+T)=x(t)\pm 2\pi.$$

从这个例子看出，系統的相空間并非总是要理解为欧几里得坐标空間，而有时必須看成較复杂的几何图象。下面在例題 3 中，我們将在比例題 2 更为复杂的情况下遇到这种情形。

**例題 3.** 考察方程組

$$\dot{x}^i = f^i(x^1, x^2), \quad i=1, 2, \tag{18}$$

其中函数 $f^i(x^1, x^2)$ 是关于两个变量的周期为 $2\pi$ 的函数：

$$f^i(x^1+2k\pi, x^2+2l\pi) = f^i(x^1, x^2), \quad i=1, 2.$$

和通常一样，假定函数 $f^i(x^1, x^2)$ 連續并有連續的一阶偏导数。由于函数 $f^i(x^1, x^2)$ 的周期性，系統(18)的相空間不看成平面而看为較复杂的几何图象，也就是圓环面或如所謂环面（图 26）是合适的。我們来描述这个曲面。

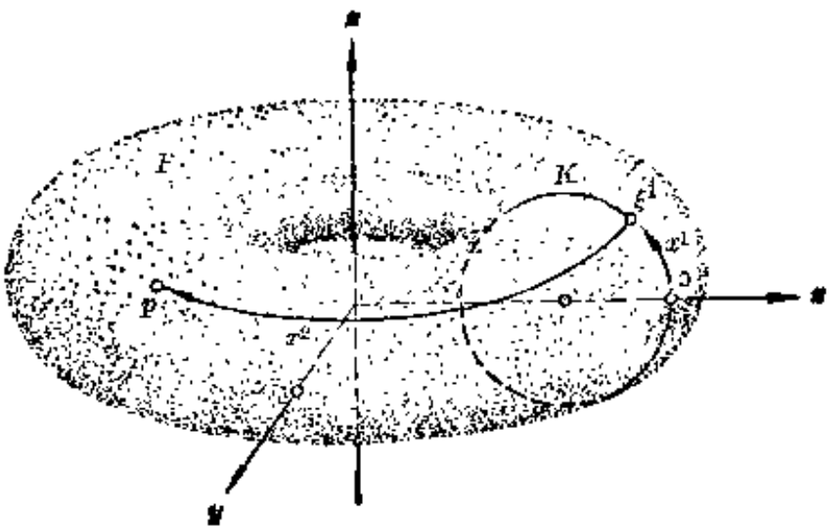


图 26

在有笛卡尔坐标 $x, y, z$ 的三維欧几里得空間中，取 $(x, z)$ 平面上中心在点 $(2, 0, 0)$ 半徑为 1 的圓周 $K$。在这圓周上取坐标为 $(3, 0, 0)$ 的点作为計算起点，那末对每个数 $x^1$ 以圓周 $K$ 上的点 $\xi^1$ 同它对应（参看例題 2）。現在在 $(x, y, z)$ 空間中繞 $z$ 軸旋轉 $(x, z)$ 平面。在旋轉的过程中，圓周 $K$ 所描成的曲面 $P$ 是一环面。設 $\xi^1$ 是圓周 $K$ 上的某一点。旋轉 $(x, z)$ 平面一个角度 $x^2$（按弧度計算）的結果，点 $\xi^1$ 走到环面 $P$ 上的某一点 $p$（图 26）。如果旋轉了不是角度 $x^2$ 而是角度 $x^2+2k\pi$，那末我們也走到环面 $P$ 上的同

一点 $p$. 因此,环面 $P$ 上的点 $p$ 由两个巡回坐标 $\xi^1,\xi^2$ 唯一确定,并且每一对巡回坐标对应于环面上一个完全确定的点。因此,我們看出函数 $f^i(x^1, x^2)$ 可以认为不是在平面上而是在环面 $P$ 上給定的:

$$f^i(\xi^1, \xi^2) = f^i(x^1, x^2).$$

现在假設 $x^1(t)$, $x^2(t)$ 是方程組(18)的某个解。对每組数 $x^1(t)$ 和 $x^2(t)$, 以巡回坐标 $\xi^1(t)$ 和 $\xi^2(t)$ 同它对应,我們得到环面 $P$ 上的点 $\xi^1(t)$, $\xi^2(t)$. 因此,系統(18)的每个解 $x^1(t)$, $x^2(t)$ 可以由点沿环面的运动来表示,并且在每一时刻的运动規律由环面上的点 $\xi^1(t)$, $\xi^2(t)$ 确定,这一点就是軌綫在这时刻所經过的点。这就讲明了函数 $f^i(\xi^1, \xi^2)$ 在环面上給定的事实。这样一来,整个环面 $P$ 就由軌綫布滿,每两条軌綫或者不相交或者相合。特别,如果軌綫本身相交,那末它或是閉軌綫或是平衡位置。

系統(18)的相軌綫不描繪在平面上而画在环面上反映了系統(18)的特殊性(函数 $f^i$ 的周期性),同时也便于对它进行研究。

## § 16. 常系数綫性齐次方程組的相平面

这里将作出实的常系数 $a_j^i$ 的系統

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}^1 &= a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2, \\ \dot{x}^2 &= a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

在相平面上的相軌綫,这系統在向量形式下为

$$\dot{x} = Ax, \tag{2}$$

这时,我們必須分析一些不同情况,因为系統的相軌綫和系数之值有本质的联系。

应当注意,坐标原点(点(0, 0))总是系統(1)的平衡位置。这个平衡位置当且只当矩陣 $(a_j^i)$ 的行列式异于零时,或是同样地,在这矩陣的两个特征值异于零时才是唯一的。

假定矩陣 $A$ 的两个特征值是实的、相异的且不等于零。那末

从 § 14 中的結論 (定理 10) 知道方程 (2) 的任何实解可以記为形状:

$$\boldsymbol{x}=c^1\boldsymbol{h}_1e^{\lambda_1 t}+c^2\boldsymbol{h}_2e^{\lambda_2 t}. \tag{3}$$

这里 $\boldsymbol{h}_1$ 和 $\boldsymbol{h}_2$ 是矩陣 $A$ 的实的綫性独立的特征向量; $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 是 $A$ 的实特征值,而 $c^1$ 和 $c^2$ 是实常数。关于基 $(\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2)$ 展开解 (3), 置

$$\boldsymbol{x}=\xi^1\boldsymbol{h}_1+\xi^2\boldsymbol{h}_2; \tag{4}$$

那末我們有

$$\xi^1=c^1e^{\lambda_1 t}, \quad \xi^2=c^2e^{\lambda_2 t}. \tag{5}$$

一般地說,系統 (1) 的相平面 $P$ 上的坐标 $\xi^1$, $\xi^2$ 并不是直角的,因此,我們把相平面 $P$ 仿射地映照到輔助平面 $P^*$ 上,使得在这映照下, 向量 $\boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{h}_2$ 变到平面 $P^*$ 上相互正交的分别指向横軸和纵軸的单位向量 (图 27). 平面 $P$ 上的点 $\boldsymbol{x}=\xi^1\boldsymbol{h}_1+\xi^2\boldsymbol{h}_2$ 在这映照下变到平面 $P^*$ 上笛卡尔直角坐标为 $\xi^1$, $\xi^2$ 的点。因此, 在平面 $P$ 上由参数方程 (5) 給定的軌綫,变到由同样方程在平面 $P^*$ 上的直角坐标之下給出的軌綫 (我們也称为 **相軌綫**)。我們先画出由方程(5)在平面 $P^*$ 上給出的軌綫, 然后把它們映回到平面 $P$ 上去。

在平面 $P^*$ 上除了相軌綫(5)以外,有由方程

$$\xi^1=c^1e^{\lambda_1 t}, \quad \xi^2=-c^2e^{\lambda_2 t} \tag{6}$$

給出的軌綫,也有由方程

$$\xi^1=-c^1e^{\lambda_1 t}, \quad \xi^2=c^2e^{\lambda_2 t} \tag{7}$$

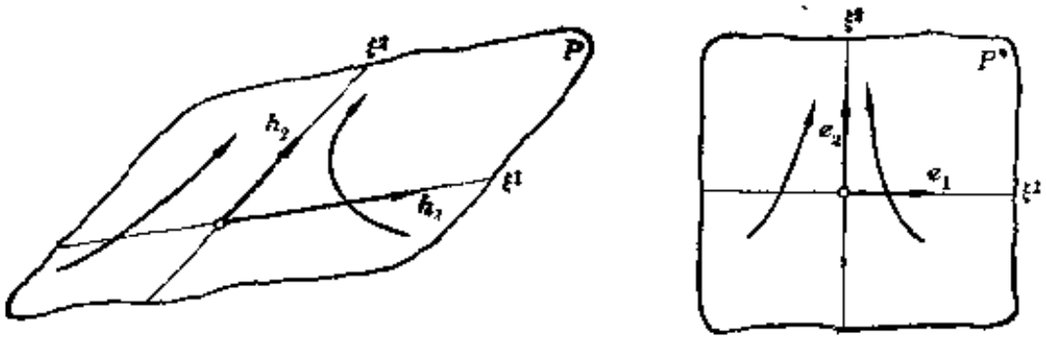


图 27

給出的軌綫。軌綫(6)由軌綫(5)关于横軸作鏡面反射得到，軌綫(7)由(5)經过关于纵軸的鏡面反射得到。因此，上述的两种鏡面反射保持平面 $P^*$ 上軌綫的图形不变。从此看出，如果在第一象限已經画出軌綫，那末就容易想象平面 $P^*$ 上所有的相图。

注意到，当 $c^1=c^2=0$ 时，我們得到表示平衡位置 (0, 0) 点的运动。当 $c^2=0$, $c^1>0$ 时，我們得到描出正半横軸的运动，当 $c^1=0$, $c^2>0$ 时，得到描出正半纵軸的运动。如果 $\lambda_1<0$，那末描出正半横軸的运动在进行中指向坐标原点，如果 $\lambda_1>0$，那末这个运动有相反的方向——离开坐标原点。在第一种情形，点无限接近于坐标原点而运动，在第二种情形，点无限远离而趋向于无穷远。这对于描出正半纵軸的运动同样是正确的。如果 $c^1$ 和 $c^2$ 是正数，那末点的运动在第一象限中进行而不走出它的境界。

下面要更仔細地描述相平面，我們对几种与数 $\lambda_1$, $\lambda_2$ 的符号有关的情形，分别进行討論。

**1) 結点** 假定两个数 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 异于零又有相同符号，并且

$$|\lambda_1|<|\lambda_2|. \tag{8}$$

先分析当

$$\lambda_1<0, \quad \lambda_2<0$$

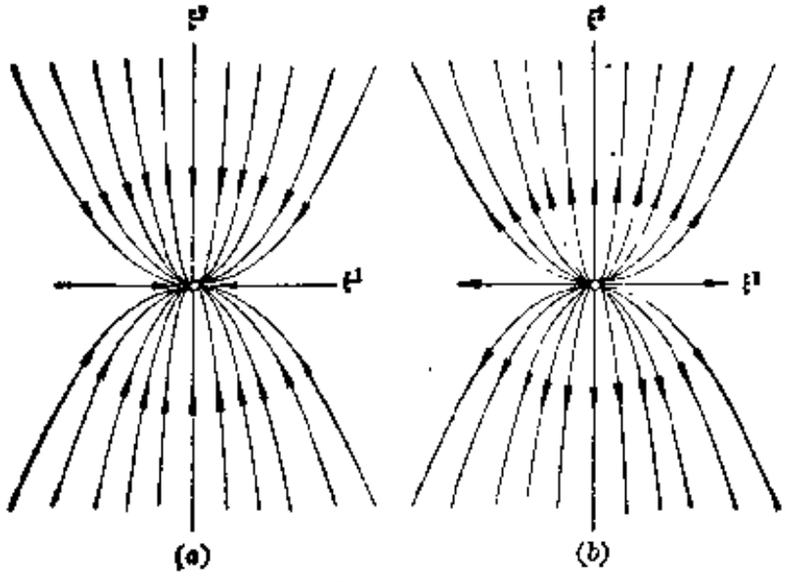


图 28

的情形。在这些假定下沿正半横軸的运动指向坐标原点，沿正半纵軸的运动也完全一样。其次，沿在第一象限內部的任意軌綫的运动，使点漸近于坐标原点，并且这时軌綫在原点切于横軸。当 $t$ 趋向于 $-\infty$ 时，点的横坐标和纵坐标皆无限增大，但是纵坐标的增长比横坐标增长快，就是运动在纵軸的方向进行。这种相图称为**稳定結点**（图 28 ($a$)）。如果除不等式(8)之外，滿足不等式

$$\lambda_1>0,\quad \lambda_2>0,$$

那末軌綫仍旧和前面的一样，但是运动沿着它指向相反的方向。我們有**不稳定結点**（图 28($b$)）。

**2) 鞍点** 假定数 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 有相反的符号。为了确定起見，設

$$\lambda_1<0<\lambda_2.$$

在这情形，沿正半横軸的运动走向坐标原点，而沿正半纵軸的运动离开坐标原点。落在第一象限內的軌綫按它們的形状应理解为双曲綫，而运动沿横軸的方向指向原点又沿纵軸的方向离开原点。这种相图称为**鞍点**（图 29）。

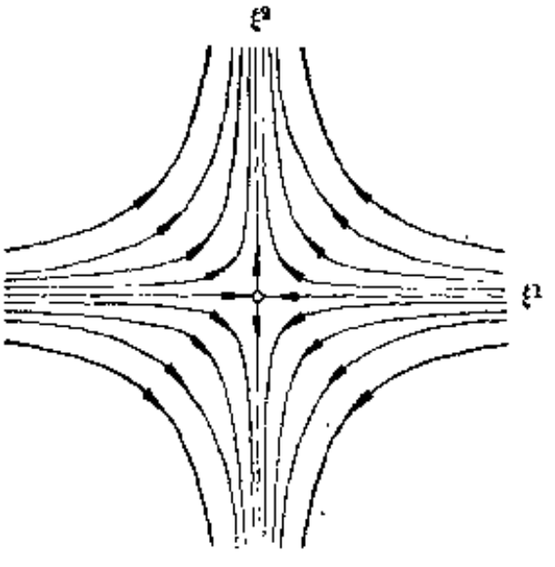

图 29

图 28($a$),($b$)以及图 29 給出在輔助相平面 $P^*$ 上軌綫的图形。在相平面 $P$ 上軌綫的分布可从这图形經过仿射变換而得到，而同特征向量的位置有关（参看例題，图 30 和 31）。

現在考察当綫性矩陣 $A$ 的特征值是复数的情形。在这情形它們是复数共軛的，可以記为 $\lambda=\mu+i\nu$ 和 $\bar{\lambda}=\mu-i\nu$，其中 $\nu\neq 0$，矩陣 $A$ 的特征向量能够取为共軛的，因此可以把它們記为 $\boldsymbol{h}$ 和 $\bar{\boldsymbol{h}}$，置

$$\boldsymbol{h}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{h}_1-i\boldsymbol{h}_2),$$

其中 $\boldsymbol{h}_1$ 和 $\boldsymbol{h}_2$ 是实向量。向量 $\boldsymbol{h}_1$ 和 $\boldsymbol{h}_2$ 是綫性独立的，因为在向量 $\boldsymbol{h}_1$ 和 $\boldsymbol{h}_2$ 为綫性相关时，$\boldsymbol{h}$ 和 $\bar{\boldsymbol{h}}$ 之間也有綫性关系，但这是不可能的。因此可以取向量 $\boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{h}_2$ 作为方程(2)的相平面 $P$ 上的基。

方程(2)的任意实解可以記为形状：

$$\boldsymbol{x}=c\boldsymbol{h}e^{\lambda t}+\bar{c}\bar{\boldsymbol{h}}e^{\bar{\lambda}t}, \tag{9}$$

其中 $c$ 是复值常数。設

$$\zeta=\xi^1+i\xi^2=ce^{\lambda t};$$

那末我們有

$$\boldsymbol{x}=\xi^1\boldsymbol{h}_1+\xi^2\boldsymbol{h}_2.$$

我們把相平面 $P$ 仿射地映照到复变量 $\zeta$ 的輔助平面 $P^*$ 上，使得向量 $\boldsymbol{h}_1$ 的端点变到 1 而向量 $\boldsymbol{h}_2$ 的端点变到 $i$；那末向量 $\xi^1\boldsymbol{h}_1+\xi^2\boldsymbol{h}_2$ 将对应于复数 $\zeta=\xi^1+i\xi^2$。經过这个映照，相軌綫(9)变到平面 $P^*$ 上由方程

$$\zeta=ce^{\lambda t} \tag{10}$$

所表示的相軌綫。

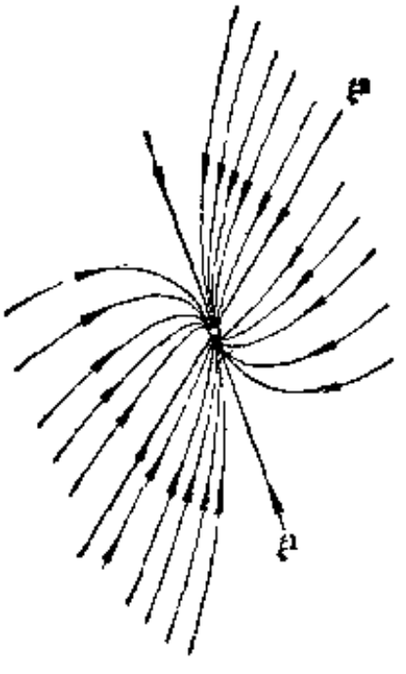


图 30

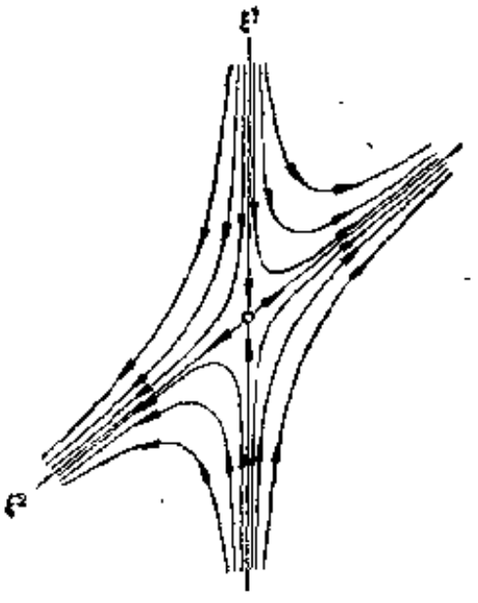


图 31

**3) 焦点和中心** 改写方程(10)为极坐标形式，置

$$\zeta=\rho e^{i\varphi},\quad c=Re^{i\alpha}.$$

因此，我們得到

$$\rho=Re^{\mu t},\quad \varphi=\nu t+\alpha;$$

这是在平面 $P^*$ 上点的运动方程。当 $\mu\neq 0$ 时，每条軌綫是对数螺綫。在平面 $P$ 上的坐标原点称为**焦点**。如果 $\mu<0$，那末点当 $t$ 增大时，沿对数螺綫渐近于坐标原点。这是**稳定焦点**(图 32($a$))。如果 $\mu>0$，那末点离开坐标原点而走向无穷远，我們就有**不稳定焦点**(图 32($b$))。如果数 $\mu$ 等于零，那末除了平衡位置 $(0,0)$ 面外，每条相軌綫是閉的，我們就有所謂**中心**(图 33)。

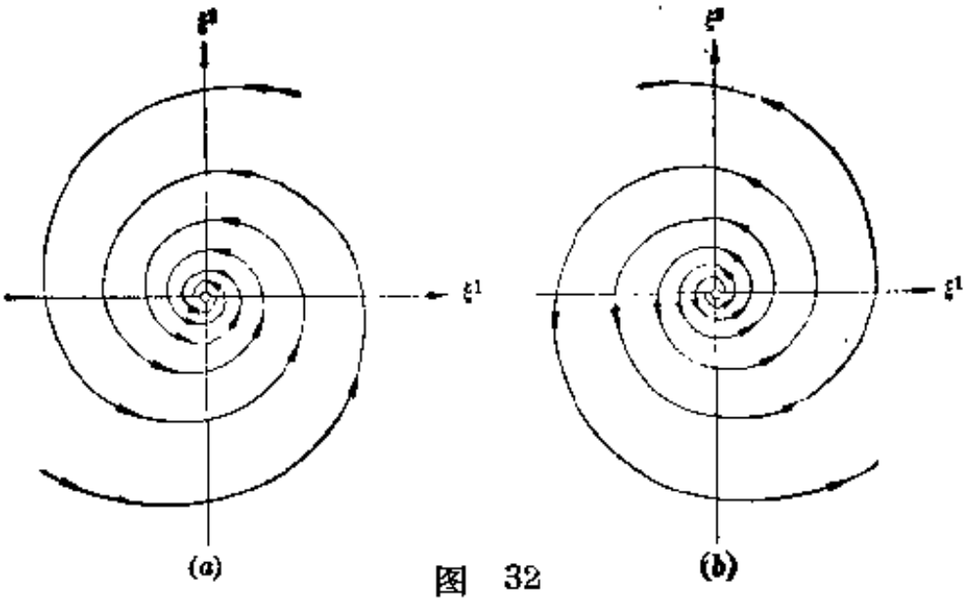


图 32

图 32 和 33 給出在輔助相平面上的图形；在平面 $P$ 上图形仿射地变斜了(例如，参看图 34 和 35)。

以上我們考察了所謂不退化情形：根 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 不相等且异于零。矩陣 $(a_j^i)$ 中元素的小的变动并不改变这些命題中相軌綫的一般性态。但中心的情形是例外：当矩陣 $(a_j^i)$ 有微小变动时，等式 $\mu=0$ 可能被破坏，而中心变成稳定的或不稳定的焦点。把这个退化情形(中心)也包括在本节的正文中，說明了它的重要性。其他的退化情形将在例題 1 和例題 3 中討論。

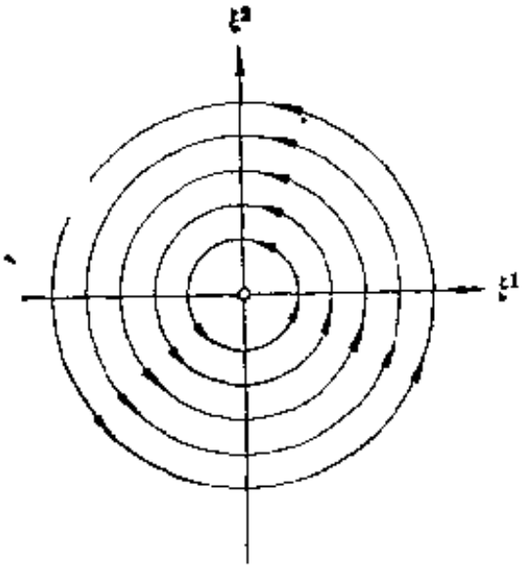


图 33

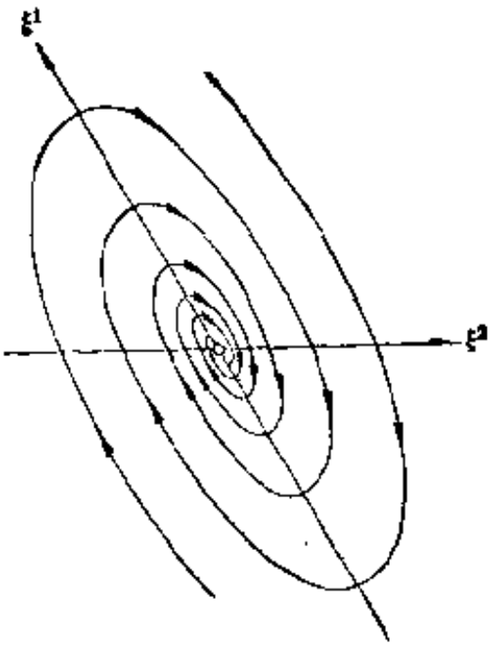


图 34

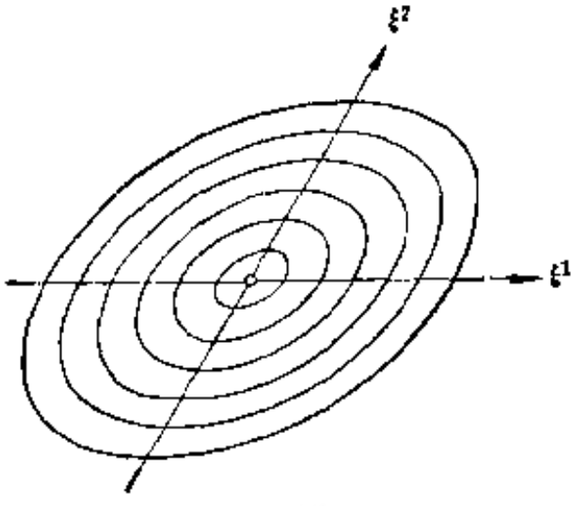


图 35

## 例　题

**例題 1.** **(退化結点)** 如果系統 (1) 的矩陣 $A$ 只有一个特征值 $\lambda$, 那末可能有两种不同的情形, 在敘述它們时, 我們要以 $\boldsymbol{A}$ 記对应于矩陣 $A$ 的变換。

[情形 I] 在平面 $P$ 上存在基 $\boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{h}_2$, 由变換 $\boldsymbol{A}$ 的两个特征向量构成:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}_1=\lambda\boldsymbol{h}_1,\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{h}_2=\lambda\boldsymbol{h}_2. \tag{11}$$

[情形 II] 在平面 $P$ 上存在基 $\boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{h}_2$, 而

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}_1=\lambda\boldsymbol{h}_1,\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{h}_2=\lambda\boldsymbol{h}_2+\boldsymbol{h}_1. \tag{12}$$

形状为 (11) 或 (12) 之一的基的存在性可以从定理 28 直接推出，可是我們在这里直接証明这个事实。設 $\boldsymbol{h}_1$ 是变换 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，而 $\boldsymbol{h}_2$ 是任意的和 $\boldsymbol{h}_1$ 不共綫的向量。那末我們有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}_1=\lambda\boldsymbol{h}_1,\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{h}_2=\alpha\boldsymbol{h}_1+\mu\boldsymbol{h}_2.$$

从此看出，变换 $\boldsymbol{A}$ 在基 $\boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{h}_2$ 之下有矩陣

$$\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ \alpha & \mu\end{pmatrix},$$

因而它的特征值为 $\lambda$ 和 $\mu$，所以 $\mu=\lambda$. 如果 $\alpha=0$，那末对于基 $\boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{h}_2$ 成立关系式 (11). 如果 $\alpha\neq 0$，那末把向量 $\boldsymbol{h}_1$ 換成和它共綫的向量 $\alpha\boldsymbol{h}_1$，我們就得到滿足条件 (12) 的基。

在情形 I 直接可以驗証方程 (2) 的通解能記为形式：

$$\boldsymbol{x}=c^1\boldsymbol{h}_1e^{\lambda t}+c^2\boldsymbol{h}_2e^{\lambda t}=\boldsymbol{x}_0e^{\lambda t}. \tag{13}$$

写出的解有初始值 $(0, \boldsymbol{x}_0)$. 当 $\lambda\neq 0$ 时，每个解描出出发自原点的半射綫。在 $\lambda<0$ 时，运动指向坐标原点 (图36(*a*))；在 $\lambda>0$ 时，运动离开坐标原点 (图 36(*b*))；关于 $\lambda=0$ 的情形，可参看例題 3.

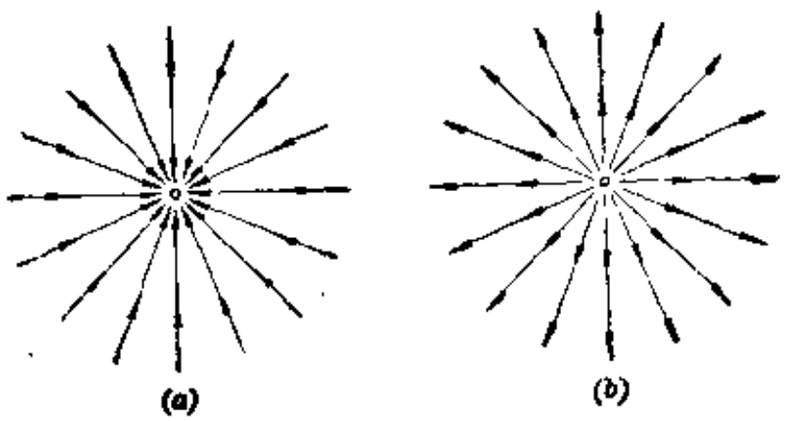


图 36

在情形 II 也能直接驗証方程 (2) 的任意解有形式：

$$\boldsymbol{x}=c^1\boldsymbol{h}_1e^{\lambda t}+c^2(\boldsymbol{h}_1t+\boldsymbol{h}_2)e^{\lambda t}.$$

关于基 $\boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{h}_2$ 展开这个解为形式 $\boldsymbol{x}=\xi^1\boldsymbol{h}_1+\xi^2\boldsymbol{h}_2$，就得到在平面 $P$ 上軌綫关于基 $\boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{h}_2$ 的方程：

$$\xi^1=(c^1+c^2t)e^{\lambda t},\quad \xi^2=c^2e^{\lambda t}. \tag{14}$$

取相平面 $P$ 到平面 $P^*$ 的仿射映照，把向量 $\boldsymbol{h}_1$ 和 $\boldsymbol{h}_2$ 变到平面 $P^*$ 上相互正交的沿坐标軸的单位向量；在这仿射映照之下，平面 $P$ 上的軌綫变为平面 $P^*$ 上的軌綫，在 $P^*$ 上方程(14)是在直角坐标之下給出軌綫的。

現在来分析 $\lambda\neq 0$ 的情形 ($\lambda=0$ 的情形在例題 3 中討論)。先假設 $\lambda<0$。考察在这情形充滿平面 $P^*$ 的軌綫。首先从方程 (14) 看出，如果同时改变 $c^1$ 和 $c^2$ 的符号，那末就得到平面 $P^*$ 上关于原点的对称变換，把軌綫变到軌綫。因此，只考察布滿在上半平面的軌綫就够了。当 $c^2=0$, $c^1\neq 0$ 时，得到两条軌綫：一条对应于 $c_1>0$，另一条对应于 $c_1<0$。第一条合于正半横軸，第二条合于負半横軸；运动沿着它們指向原点。其次考虑軌綫 $c_1=0$, $c_2>0$。我們有

$$\xi^1=c^2te^{\lambda t},\quad \xi^2=c^2e^{\lambda t}. \tag{15}$$

在 $t=0$ 时，我們得到纵軸上的点 $(0, c^2)$。当 $t$ 从零增大时，点开始向右运动，然后向左，所有时刻点皆向原点下垂，并沿軌綫接近于原点，面軌綫切于正横軸。当 $t$ 从零减少到 $-\infty$ 时，点向左运动，同时向上升起，但是向左快于向上，因此它运动的一般趋向是朝着負横軸的方向。如果在方程(15)中使常数 $c^2$ 有一切正值，那末这样画出的軌綫充滿了上半平面(图 37($a$))。我們这里有**稳定的退化結点**。如果 $\lambda>0$，那末軌綫从上述图形通过关于纵軸的鏡面反射而得到 (图 37($b$))，运动沿着它朝相反的方向进行，就是离开原点。这是**不稳定的退化結点**。在图 38($a$), ($b$) 中表示出平面 $P$ 上的相軌綫。

**例題 2.** 考察常系数二阶綫性齐次方程

$$\ddot{x}+a\dot{x}+bx=0. \tag{16}$$

按照 § 4 中所說方法，把这个方程变为标准方程組，得到

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=y,\\ \dot{y}&=-bx-ay,\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

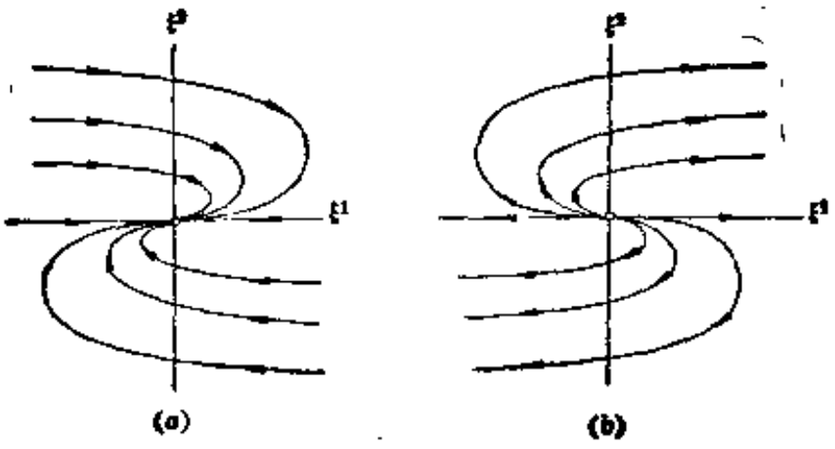


图 37

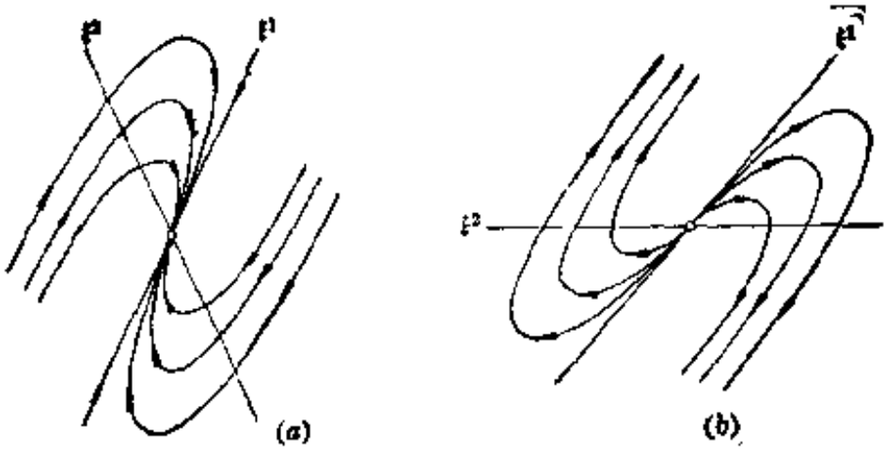


图 38

把系統 (17) 的相平面看成方程 (16) 的相平面。直接可驗証系統 (17) 的特征多項式合于方程 (16) 的特征多項式，就是等于

$$p^2+ap+b. \tag{18}$$

因此，如果多項式 (18) 的根是复数，那末方程 (16) 的相平面出現焦点或中心。我們討論多項式 (18) 的根是相异的、不等于零的实根情形。

設 $\lambda$ 是多項式 (18) 的根，且 $\boldsymbol{h}=(h^1, h^2)$ 是和它相应的特征向量。那末我們有（考慮到系統 (17) 的形状）

$$h^2=\lambda h^1,$$

因此，对应于特征値 $\lambda$ 的特征方向由方程为

$$y=\lambda x$$

的直綫确定；我們称它为特征直綫。

如果根 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 是負的，我們就有 **穩定結点** (参看 1))。在这情形，两条特征直綫經过第二和第四象限；临近坐标原点时，軌綫切于靠近横軸的那条特征直綫 (图 39)。

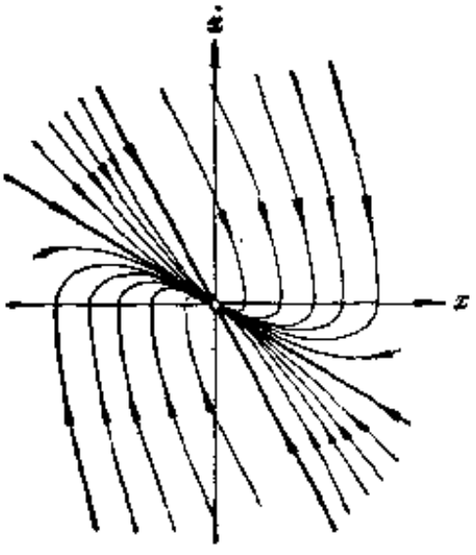


图 39

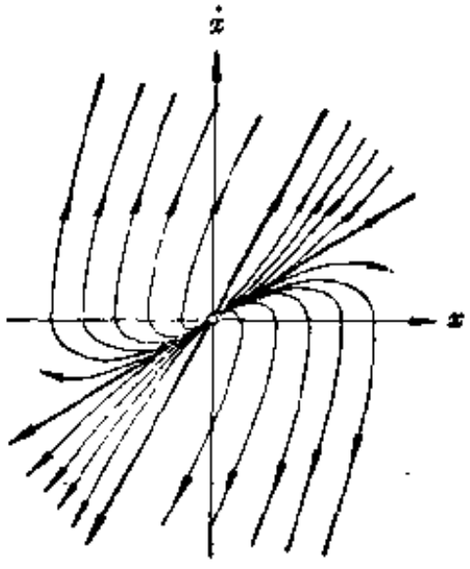


图 40

如果根 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 是正的，那末我們有 **不穩定結点** (参看 1))。两条特征直綫經过第一和第三象限；临近坐标原点时，軌綫切于靠近横軸的那条特征直綫 (图 40)。

如果根 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 有不同符号，我們就有 **鞍点**；一条特征直綫經过第二和第四象限，而另一条經过第一和第三象限。軌綫沿前一直綫的方向漸近于原点，而沿后一直綫的方向离开原点 (图 41)。

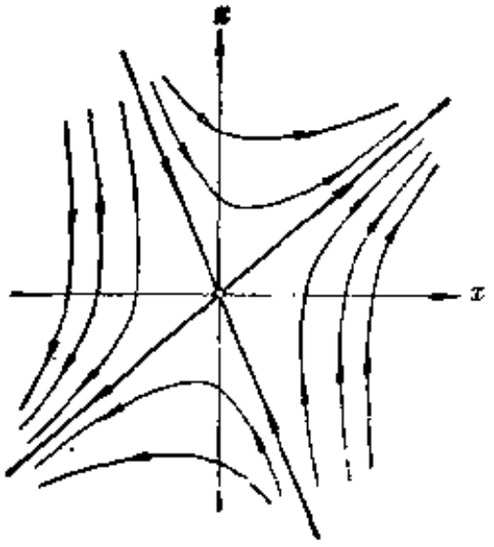


图 41

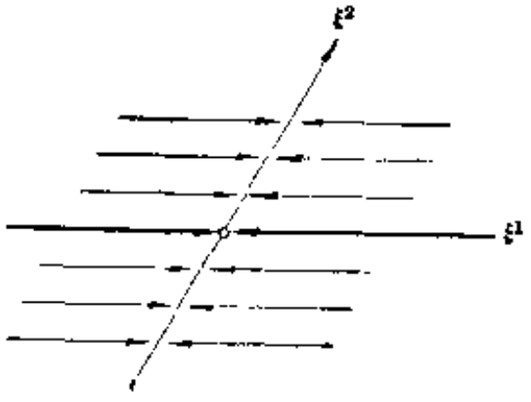


图 42

**例题 3.** 最后討論矩陣 $A$ 的特征值中至少有一个等于零的情形。

[情形 I] 只有一个特征值等于零:

$$\lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 = 0.$$

在这情形,解可以写成形状 (4),其中 $\xi^1$ 和 $\xi^2$ 由公式(5)給出。因为 $\lambda_2=0$,所以 $\xi^2=$常数,且沿直綫 $\xi^2=$常数 的运动,随着数 $\lambda_1$ 的符号不同而朝着直綫 $\xi^1=0$ 或背着直綫进行。直綫 $\xi^1=0$ 上的每一点是平衡位置 (图 42)。

如果只有唯一的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0$,那末可能有在例题 1 中考虑过的两种情形。

情形 I (参看(11), $\lambda=0$)。通解写为形式(参看(13)):

$$x = x_0.$$

这一情形只在系統(1)的所有系数等于零时发生;平面 $P$ 上的每一点是平衡位置。

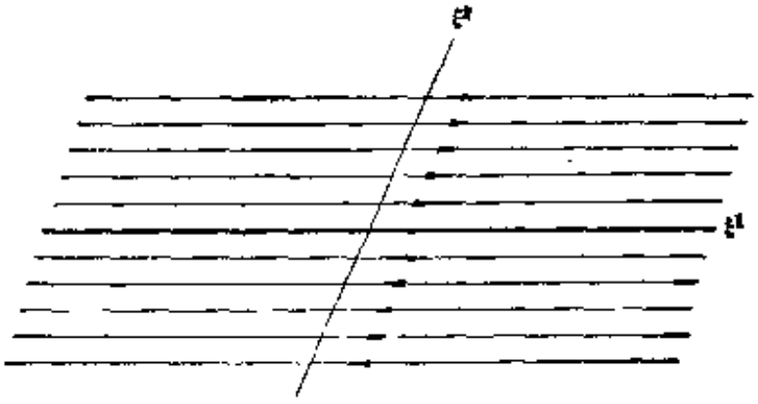


图 43

情形 II (参看(12), $\lambda=0$)。通解写成形式(参看(14)):

$$\xi^1 = c^1 + c^2 t, \quad \xi^2 = c^2.$$

运动沿着每条直綫 $\xi^2=$常数 均匀地进行(匀速)。直綫 $\xi^2=0$ 上的每一点都是平衡位置 (图 43)。

# 第三章

# 变系数綫性方程

在这一章要讲述綫性方程理論，先讲 $n$ 阶标准方程組的，然后讲一个 $n$ 阶方程的，几乎所有的关于一个方程的結論，皆可以从标准方程組相应的結論导出来。本章的第三节討論有周期系数的标准齐次方程組。这里的主要結果是关于經过变数的綫性周期变換能把有周期系数的标准方程組化为常系数的标准方程組的李雅普諾夫(Ляпунов)定理。以后，这个結論在稳定性理論上有重要的应用。它的証明很簡单，但要依靠不是很初等的矩陣函数理論。这一理論并不属于常微分方程理論的范圍，但为了讀者方便起見，将在本书的最后一章中讲述，而作为純代数学的补充。因此，在本章的第三节(§19)中，由于应用了矩陣分析，所以并不是初等的。显然，在教本中讲这样的內容还是第一次。

## §17. 标准綫性方程組

这里将考察变系数标准綫性方程組

$$\dot{x}^i=\sum_{j=1}^{n}a_j^i(t)x^j+b^i(t),\quad i=1,\cdots,n. \tag{1}$$

我們注意到，如果 $q_1<t<q_2$ 是方程組 (1) 的系数 $a_j^i(t)$ 和自由項 $b^i(t)$ 的存在和連續的区間，那末根据定理 3，方程組 (1) 的每个解的最大存在区間就是区間 $q_1<t<q_2$. 往后我們就假定所討論的每一个解給定在这区間上，并且所考虑的值 $t$ 也属于它。

### 基本解組

先討論齐次方程組

$$\dot{x}^i=\sum_{j=1}^{n}a^i_j(t)x^j,\quad i=1,\cdots,n, \tag{2}$$

或者在向量的記法下，是

$$\dot{x}=A(t)x. \tag{3}$$

**1）** 我們来建立方程(3)的一些最簡单的性质。

1° 如果 $x=\varphi(t)$ 是方程(3)的解，对某个值 $t_0$ 成为零：

$$\varphi(t_0)=0, \tag{4}$$

那末这个解恒等于零

$$\varphi(t)\equiv 0,\quad q_1<t<q_2.$$

2° 如果向量函数

$$\varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ \cdots,\ \varphi_r(t)$$

是方程(3)的解，那末向量函数

$$\varphi(t)=c^1\varphi_1(t)+\cdots+c^r\varphi_r(t)$$

也是方程(3)的解，其中 $c^1,\cdots,c^r$ 是常数。

性质 2° 可以直接驗証。性质 1° 从下面的事实推出：恒等于零的向量 $x=0$ 显然也是方程(3)的解，因此在 1° 中給定的解 $\varphi(t)$ 和这个解有公共的初始条件(4)，从而应当和它相合。

**2）** 設

$$\varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ \cdots,\ \varphi_r(t) \tag{5}$$

是方程(3)的一組解。如果存在不同时为零的常数 $c^1, c^2, \cdots, c^r$，使得

$$c^1\varphi_1(t)+c^2\varphi_2(t)+\cdots+c^r\varphi_r(t)\equiv 0.$$

那末称这組解是**綫性相关的**。在相反的情形，方程(3)的解組(5)称为**綫性独立的**。可以証明，只要对一个值 $t=t_0$，向量

$$\varphi_1(t_0),\ \varphi_2(t_0),\ \cdots,\ \varphi_r(t_0) \tag{6}$$

是綫性相关的，那末解(5)就綫性相关。換句話說，如果解組(5)綫

性独立，那末向量(5)不論对那个数值 $t$ 就不会是綫性相关的。

我們来証明这件事。假定說，向量(6)是綫性相关的，就是

$$c^1\varphi_1(t_0)+\cdots+c^r\varphi_r(t_0)=0,$$

其中数 $c^1, \cdots, c^r$ 不全为零。置

$$\varphi(t)=c^1\varphi_1(t)+\cdots+c^r\varphi_r(t).$$

由命題 1)，向量函数 $\varphi(t)$ 是方程(3)的解。由同一命題 1)，这函数恒等于零，因为它在点 $t=t_0$ 等于零。

現在来定义对齐次綫性方程組最重要的基本解組的概念。

**3)** 如果方程(3)的一組解

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_n(t) \tag{7}$$

是綫性独立的(这里的 $n$ 是方程組(2)的阶数)，就称它为**基本解組**(参看 2))。可以証明：1° 对方程(3)常存在基本解組，以及 2° 如果(7)是方程(3)的基本解組，那末方程(3)的每一个解 $\varphi(t)$ 可以表示为形式：

$$\varphi(t)=c^1\varphi_1(t)+c^2\varphi_2(t)+\cdots+c^n\varphi_n(t), \tag{8}$$

其中 $c^1, \cdots, c^n$ 是适当选取的常数(对于常系数綫性方程組的基本解組已在 § 14 中作出)。

先証明方程(3)的基本解組是存在的。設

$$a_1, a_2, \cdots, a_n$$

是任意的綫性独立的常向量組(这里 $n$ 是方程組(2)的阶数)。我們按初始条件

$$\varphi_i(t_0)=a_i, \quad i=1, \cdots, n$$

确定解(7)。其中 $t_0$ 是 $t$ 的某个值。因为按假定 $\varphi_1(t_0), \cdots, \varphi_n(t_0)$ 是綫性独立的，所以根据命題 2)，解(7)也是綫性独立的，就是說，它們构成基本解組。

我們来証明，每个解 $\varphi(t)$ 可以表示为形式(8)。設 $t_0$ 是时間 $t$ 的某个值；由于解(7)是綫性独立的，所以向量 $\varphi_1(t_0), \cdots, \varphi_n(t_0)$

是线性独立的(参看 2)),又因为它們的个数等于所讨論的向量空間的維数,所以它們构成这空間的基,因此向量 $\varphi(t_0)$ 可以写成形式:

$$\varphi(t_0)=c^1\varphi_1(t_0)+\cdots+c^n\varphi_n(t_0), \tag{9}$$

其中 $c^1, \cdots, c^n$ 是适当选取的数。解 $\varphi(t)$ 和 $c^1\varphi_1(t)+\cdots+c^n\varphi_n(t)$ 有共同的初始条件(参看 (9)),从而它們相合,因此等式(8)成立。

現在轉来用坐标方法記述所得到的事实,并建立一些其他結論。

**4)** 設

$$\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t) \tag{10}$$

是方程(3)的某組解。解 $\varphi_k(t)$ 在坐标形式下写为

$$\varphi_k(t)=(\varphi_k^1(t), \cdots, \varphi_k^n(t)).$$

作矩陣

$$\begin{pmatrix} \varphi_1^1(t) & \cdots & \varphi_k^1(t) & \cdots & \varphi_n^1(t) \\ \varphi_1^2(t) & \cdots & \varphi_k^2(t) & \cdots & \varphi_n^2(t) \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ \varphi_1^n(t) & \cdots & \varphi_k^n(t) & \cdots & \varphi_n^n(t) \end{pmatrix}, \tag{11}$$

它的第 $k$ 列是方程組(2)的解 $\varphi_k(t)$,或者精确地說是 $\varphi_k(t)$ 的坐标。这个矩陣的行列式記为 $W(t)$;称为解組(10)的**朗斯基**(Wronsky)**行列式**。显然,如果解(10)是綫性独立的,那末沒有一个 $t$ 值能使朗斯基行列式 $W(t)$ 成为零;在这情形,組 (10) 是基本解組。其次,如果組(10)是綫性相关的,那末朗斯基行列式恒等于零。在組(10)是基本的情形,我們就称矩陣(1)是**基本的**。

現在証明,任意給定的由变量 $t$ 的函数构成的 $n$ 阶方陣,在滿足一些很自然的条件时,对于某个形状(2)的方程組而言是基本的。

**5)** 假設矩陣 (11) 是任意給定的变量 $t$ 的函数矩陣,在区間

$q_1<t<q_2$ 上連續可微，而有在这区間上无一处成为零的行列式。可以証明，这个矩陣(11)对某个(唯一的)确定在区間 $q_1<t<q_2$ 上的方程(2)是基本的。

为了証明这个事实，我們把以下的設想用式子来表达：設想 $\varphi_k(t)$ 是以矩陣(11)的第 $k$ 列的元素作为坐标的向量，它是方程(3)的解。我們就有

$$\dot{\varphi}_k^i(t)=\sum_{j=1}^{n}a_j^i(t)\varphi_k^j(t),\quad i,k=1,\cdots,n. \tag{12}$$

如果在这关系式中把指标 $i$ 固定，只变动指标 $k$，那末所得到的一組关系式可以看成关于未知的 $a_1^i(t)$，…，$a_n^i(t)$ 的綫性代数方程組。这方程組是单值地可解的，因为它的矩陣是由矩陣(11)轉置而得到，因此它的行列式不等于零。这样，对每个固定的 $i$，从关系式(12)单值地确定函数 $a_j^i(t)$，并且它們是連續函数，因为函数 $\dot{\varphi}_k^i(t)$ 和 $\varphi_k^j(t)$ 都是連續的。

## 柳維尔 (Liouville) 公式

在証明命題 7) 时我們需要行列式的导微法則。現在在这里給出。

**6)** 設 $(\varphi_j^i(t))$ 是 $n$ 阶方陣，它的元素是变量 $t$ 的可微函数，又設 $W(t)$ 是这矩陣的行列式。这个行列式的导数 $\dot{W}(t)$ 可由以下公式計算：

$$\dot{W}(t)=W_1(t)+\cdots+W_n(t). \tag{13}$$

等式右边的第 $i$ 項 $W_i(t)$ 按以下方式确定。在矩陣 $(\varphi_j^i(t))$ 中关于 $t$ 导微第 $i$ 行的每一項，其余各行保持不变；所得到的矩陣的行列式就是 $W_i(t)$。显然，行与列的地位是可以交換的。

为了証明公式(13)，先把 $n$ 阶方陣 $(u_j^i)$ 的行列式 $U$ 看成是这个矩陣的所有元素 $u_j^i$，$i,j=1,\cdots,n$ 的函数，这些元素看为自变

量。計算函数 $U$ 关于变量 $u_s^r$ 的偏导数

$$\frac{\partial U}{\partial u_s^r};$$

这里 $r$ 和 $s$ 是固定的。用 $V_i^j$ 来記矩陣 $(u_j^i)$ 中元素 $u_j^i$ 的代数余因子，因而

$$U=\sum_{j=1}^{n}u_jV_r^j. \tag{14}$$

这公式給出行列式 $U$ 关于第 $r$ 行的展开式。代数余因子 $V_r^j$ 和变量 $u_s^r$ 无关，因此，关于 $u_s^r$ 导微等式(14)，得到

$$\frac{\partial U}{\partial u_s^r}=V_r^s. \tag{15}$$

如果置 $u_j^i=\varphi_j^i(t)$，我們就有 $U=W(t)$. 把 $W(t)$ 看为复合函数进行导微，由公式(15)我們得到

$$\dot{W}(t)=\sum_{i,j}\frac{\partial U}{\partial u_j^i}\dot{\varphi}_j^i(t)=\sum_{i,j}\dot{\varphi}_j^i(t)V_i^j=\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}\dot{\varphi}_j^i(t)V_i^j\Big).$$

因为显然有

$$\sum_{j=1}^{n}\dot{\varphi}_j^i(t)V_i^j=W_i(t),$$

所以公式(13)得証。

現在轉来証明所謂 **柳維尔公式**。

**7)** 設 $W(t)$ 是方程(2)的基本解組的朗斯基行列式；那末成立公式

$$W(t)=W(t_0)\,e^{\int_{t_0}^{t}\delta(\tau)d\tau}, \tag{16}$$

其中 $$\delta(t)=a_1^1(t)+a_2^2(t)+\cdots+a_n^n(t).$$

为了証明公式 (16)，我們来导出朗斯基行列式所滿足的微分方程。

利用公式 (13) 計算这个行列式的导数 $\dot{W}(t)$. 为了用更容易理解的方式来进行計算，我們把矩陣(11)的行看成向量，即置

$$\chi^i(t)=(\varphi_1^i(t),\cdots,\varphi_n^i(t)),\quad i=1,\cdots,n.$$

关系式(12)可以記为形式:

$$\dot{\chi}^i(t)=a_1^i(t)\chi^1(t)+\cdots+a_n^i(t)\chi^n(t). \tag{17}$$

这个关系式表明矩陣(11)的第 $i$ 行的导数是同一矩陣各行的綫性組合。因此,在計算行列式 $W_i(t)$ 时,我們应当把行列式 $W(t)$ 的第 $i$ 行換为这个行列式各行的綫性組合(17)。因为把其他几行的倍数加到确定的一行时,行列式不变,所以行列式 $W_i(t)$ 能从行列式 $W(t)$ 以 $a_i^i(t)$ 乘它的第 $i$ 行而得到,因此我們有

$$W_i(t)=a_i^i(t)W(t).$$

这样,由公式(13)得到

$$\dot{W}(t)=S(t)W(t).$$

这方程带初始条件

$$W(t)\mid_{t=t_0}=W(t_0)$$

的唯一的解是(16)。因此,柳維尔公式得証。

## 常数变易法

現在轉到非齐次方程組的研究。

設

$$\dot{y}=A(t)y+b(t) \tag{18}$$

是非齐次方程組(1)的向量記法,且設 $y=\psi(t)$ 是这方程的某个解。除了方程(18)以外,我們考察对应的齐次方程(3)。从§6中的命題立即推知,方程(18)的任一解可以記为形式:

$$y=\varphi(t)+\psi(t),$$

其中 $\varphi(t)$ 是方程(3)的任一解。

因此,解非齐次方程(18)归結为解齐次方程以及求非齐次方程的特解。我們要指出,在知道了齐次方程(3)的基本解組时,如何来(借助于求积)求出非齐次方程的特解。

**8)** (**常数变易法**) 設

$$\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t)$$

是齐次方程(3)的基本解組。我們来求方程(18)的形式为

$$y=c^1(t)\varphi_1(t)+\cdots+c^n(t)\varphi_n(t)$$

的解，其中系数是 $t$ 的未知函数。把 $y$ 代入方程(18)，得到

$$\dot{c}^1(t)\varphi_1(t)+\cdots+\dot{c}^n(t)\varphi_n(t)+c^1(t)\dot{\varphi}_1(t)+\cdots+c^n(t)\dot{\varphi}_n(t)$$
$$=A(t)\left(c^1(t)\varphi_1(t)+\cdots+c^n(t)\varphi_n(t)\right)+\tilde{b}(t),$$

从此，注意到 $\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t)$ 是方程(3)的解，就有

$$\dot{c}^1(t)\varphi_1(t)+\cdots+\dot{c}^n(t)\varphi_n(t)=\tilde{b}(t). \tag{19}$$

由于 $\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t)$ 对每一点 $t$ 是綫性独立的向量，所以从关系式(19)唯一确定了量 $\dot{c}^1(t), \cdots, \dot{c}^n(t)$，从而量 $c^1(t), \cdots, c^n(t)$ 可以通过求积得到。关于 $\dot{c}^1(t), \cdots, \dot{c}^n(t)$ 的方程(19)在写成坐标的形式时，有形状：

$$\sum_{j=1}^{n}\varphi_j^i(t)\dot{c}^j(t)=\tilde{b}^i(t), \quad i=1, \cdots, n.$$

## 綫性方程組的矩陣記法

在許多情形下把方程(3)写为矩陣形式較为方便，这时未知量是方程(3)的基本矩陣。这里我們給出这种写法。

**9)** 設(7)是方程(3)的基本解組；那末

$$\dot{\varphi}_j^i(t)=\sum_{\alpha=1}^{n}a_\alpha^i(t)\varphi_j^\alpha(t).$$

在矩陣形式下，这个关系式取形状：

$$\dot{\Phi}(t)=A(t)\Phi(t), \tag{20}$$

其中 $\dot{\Phi}(t)$ 是基本矩陣 $\Phi(t)=(\varphi_j^i(t))$ 关于时間 $t$ 的导数，即 $\dot{\Phi}(t)=(\dot{\varphi}_j^i(t))$. 因此，方程(3)的基本矩陣 $\Phi(t)$ 滿足矩陣方程(20)；并且，矩陣方程

$$\dot{X}(t)=A(t)X(t) \tag{21}$$

的每一个解 $X$，只要它的行列式异于零，就是方程(3)的基本矩陣，

这里 $X$ 是未知矩陣。今后方程 (21) 的解将只理解为滿足方程 (21) 且行列式异于零的那样的矩陣 $X$。显然，求矩陣方程(21)的一个解等价于求方程 (3) 的所有的解。应当注意，如果 $X=\Phi(t)$ 和 $X=\hat{\Phi}(t)$ 是矩陣方程(21)的两个解，那末就存在常数矩陣 $P$，使得

$$\hat{\Phi}(t)=\Phi(t)P. \tag{22}$$

我們来証明最后的关系式。設

$$\Phi(t)=(\varphi_j^i(t)),\quad \hat{\Phi}(t)=(\hat{\varphi}_j^i(t)),$$

$$\varphi_j(t)=(\varphi_j^1(t),\cdots,\varphi_j^n(t)),\quad \hat{\varphi}_j(t)=(\hat{\varphi}_j^1(t),\cdots,\hat{\varphi}_j^n(t));$$

那末

$$\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t) \tag{23}$$

是方程(3)的基本解組，而由于 $\hat{\varphi}_j(t)$ 也是方程(3)的解，所以它可以由基本組(23)来表示，这样我們就有

$$\hat{\varphi}_j(t)=\sum_{\alpha=1}^{n}p_j^\alpha\varphi_\alpha(t).$$

把这个关系式改写为标量形式，得到

$$\hat{\varphi}_j^i(t)=\sum_{\alpha=1}^{n}\varphi_\alpha^i(t)p_j^\alpha. \tag{24}$$

关系式(22)在 $P=(p_j^i)$ 时就是关系式(24)的矩陣記法。

**10)** 在方程(3)中借变換

$$y=S(t)x \tag{25}$$

引进新的向量的未知量 $y$，其中 $S(t)=(s_j^i(t))$ 是和 $t$ 有关的不退化矩陣。对于新的未知向量函数 $y$，方程有形式：

$$\dot{y}=(\dot{S}(t)+S(t)A(t))S^{-1}(t)y, \tag{26}$$

它仍然是形状 (3) 的方程。和向量变量的变換 (25) 相对应的是矩陣变量的变換(参看 9))：

$$Y=S(t)X. \tag{27}$$

先推导未知向量 $y$ 的方程(26)。我們有

$$\dot{\boldsymbol{y}}=\frac{d}{dt}(S(t)\boldsymbol{x})=\dot{S}(t)\boldsymbol{x}+S(t)\dot{\boldsymbol{x}}$$
$$=(\dot{S}(t)+S(t)A(t))\boldsymbol{x}=(\dot{S}(t)+S(t)A(t))S^{-1}(t)\boldsymbol{y}.$$

为了确定矩陣未知量的变換(27)是和向量未知量的变換(25)相对应的,我們改写变換(25)为标量形式:

$$y^i=\sum_{\alpha=1}^{n}s_\alpha^i(t)x^\alpha.$$

变換(25)使方程(3)的基本解組的向量 $\boldsymbol{\varphi}_j(t)=(\varphi_j^1(t),\cdots,\varphi_j^n(t))$ 按公式

$$\psi_j^i(t)=\sum_{\alpha=1}^{n}s_\alpha^i(t)\varphi_j^\alpha(t)$$

和向量 $\boldsymbol{\psi}_j(t)=(\psi_j^1(t),\cdots,\psi_j^n(t))$ 相对应。这样,方程(3)的基本矩陣 $\Phi(t)$ 和方程(26)的基本矩陣 $\Psi(t)$ 按公式

$$\Psi(t)=S(t)\Phi(t)$$

建立了对应,这表明矩陣的未知量按公式(27)来变換。

## 例 題

从命題3)看出,为了求出方程(3)的所有的解,求它的基本解組也就是 $n$ 个綫性独立的解就够了。我們来証明,知道了方程組(2)的一个非平凡解时,可以把方程組(2)降阶一次,就是把問題归結为解 $n-1$ 阶綫性方程組。

設 $$\boldsymbol{\varphi}(t)=(\varphi^1(t),\cdots,\varphi^n(t))$$

是方程(3)的解,或者同样地是方程組(2)的解。我們来求方程(3)的形状为

$$\boldsymbol{x}=u\boldsymbol{\varphi}(t)+\boldsymbol{y} \tag{28}$$

的解,其中 $u$ 是未知函数,而 $\boldsymbol{y}(t)$ 是未知向量,我們假定 $\boldsymbol{y}(t)$ 的第一个分量等于零:

$$\boldsymbol{y}=(0,y^2,\cdots,y^n).$$

把向量 $\boldsymbol{x}$ 按公式(28)代入方程(3),得到

$$\dot{u}\varphi(t)+u\dot{\varphi}(t)+\dot{y}=A(t)(u\varphi(t)+y).$$

注意到 $\varphi(t)$ 是方程(3)的解，从此得到

$$\dot{u}\varphi(t)+\dot{y}=A(t)y.$$

把这个方程写为坐标形式，同时在所得到的方程中把第一个分开来写：

$$\dot{u}\varphi^1(t)=\sum_{j=2}^{n}a_j^1(t)y^j, \tag{29}$$

$$\dot{y}^i=\sum_{j=2}^{n}a_j^i(t)y^j-\dot{u}\varphi^i(t), \quad i=2,\cdots,n. \tag{30}$$

从(29)确定 $\dot{u}$ 并把所得到的值代入关系式(30)，得到

$$\dot{y}^i=\sum_{j=2}^{n}b_j^i(t)y^j, \quad i=2,\cdots,n, \tag{31}$$

其中

$$b_j^i(t)=a_j^i(t)-\frac{\varphi^i(t)}{\varphi^1(t)}a_j^1(t).$$

应当注意，以(29)的 $\dot{u}$ 值代入(30)只是在函数 $\varphi^1(t)$ 不等于零的区间上是可能的。现在如果 $\tilde{\psi}(t)=\{\psi^2(t),\cdots,\psi^n(t)\}$ 是方程组(31)的任一解，那末，在从关系式

$$\dot{u}\varphi^1(t)=\sum_{j=2}^{n}a_j^1(t)\psi^j(t)$$

借助于求积确定了函数 $u$ 之后，就得到原来方程组(2)的形状为

$$x=u\varphi(t)+\psi(t)$$

的解(在最后等式中的 $\psi(t)=\{0,\psi^2(t),\cdots,\psi^n(t)\}$)。

## §18. n 阶线性方程

这里将考察 $n$ 阶线性方程：

$$y^{(n)}+a_1(t)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)y=b(t), \tag{1}$$

假设其中系数 $a_i(t)$ 和自由项 $b(t)$ 在区间 $q_1<t<q_2$ 上确定且連續。在这里对方程(1)的研究将按照 §4 中所說的通过把它化为标准线性方程组的方法来进行。

## 基本解組

**1)** 为了把方程 (1) 化为标准綫性方程組，引进新的未知函数

$$x^1=y,\quad x^2=\dot{y},\quad \cdots,\quad x^n=y^{(n-1)}.$$

这些新未知函数 $x^1,\cdots,x^n$ 满足綫性方程組(参看 § 4, 1)):

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{x}^1=x^2,\\
&\dot{x}^2=x^3,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&\dot{x}^{n-1}=x^n,\\
&\dot{x}^n=-a_n(t)x^1-a_{n-1}(t)x^2-\cdots-a_1(t)x^n+b(t).
\end{aligned}\right\}$$

把所得到的方程組写成向量形式：

$$\dot{\boldsymbol{x}}=A(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}(t), \tag{2}$$

其中矩陣 $A(t)$ 有形式：

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\
-a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \cdots & -a_1(t)
\end{pmatrix} \tag{3}$$

而向量 $\boldsymbol{b}(t)$ 按以下公式确定：

$$\boldsymbol{b}(t)=(0,0,\cdots,0,b(t)).$$

方程 (1) 和 (2) 是相互等价的；就是說，对应于方程 (1) 的每个解 $y=\psi(t)$，有方程組 (2) 的解

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{\varphi}(t)=(\psi(t),\dot{\psi}(t),\cdots,\psi^{(n-1)}(t)),$$

反之，对应于方程組 (2) 的每个解

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)=(\varphi^1(t),\varphi^2(t),\cdots,\varphi^n(t)),$$

有方程 (1) 的解

$$y=\varphi^1(t),$$

并且这个对应是互为单值的。如果方程 (1) 的解 $\psi(t)$ 和方程組 (2) 的解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 在所說的意义下相互对应，那末我們就記为

$$\psi(t) \rightleftarrows \varphi(t)$$

从方程(1)和(2)的等价性，特别可推出方程(1)的每个解的最大存在区間是整个区間 $q_1<t<q_2$（参看定理 3），因此，今后我們就假設所考察的方程(1)的每个解給定在这区間上，并且每个所考虑的值 $t$ 也属于它。

首先，我們研究齐次方程

$$y^{(n)}+a_1(t)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)y=0. \tag{4}$$

設

$$\dot{x}=A(t)x \tag{5}$$

是和它对应的方程組，它是在向量的記法下給出的，这里矩陣 $A(t)$ 按公式(3)确定。

**2)** 設

$$\psi_1(t), \psi_2(t), \cdots, \psi_r(t) \tag{6}$$

是方程(4)的某一組解。直接可以驗証，函数

$$\psi(t)=c^1\psi_1(t)+\cdots+c^r\psi_r(t)$$

也是方程(4)的解，其中 $c^1, \cdots, c^r$ 是常数。如果存在不全为零的常数 $c^1, \cdots, c^r$ 使得

$$c^1\psi_1(t)+\cdots+c^r\psi_r(t)=0 \tag{7}$$

成立，那末解組(6)就称为綫性相关的。可以証明，如果

$$\varphi_1(t), \cdots, \varphi_r(t) \tag{8}$$

是对应于解(6)的方程組(5)的解：

$$\psi_i(t) \rightleftarrows \varphi_i(t), \quad i=1, \cdots, r$$

(参看 1))，那末解(8)在且只在解(6)为綫性相关时，才是綫性相关的(参看 § 17, 2))。

我們来証明这件事。假定解(6)是綫性相关的，即成立关系(7)。写下关系式(7)以及从它导微而得到的一些关系式，有

$$\left.\begin{aligned} c^1\psi_1(t)+\cdots+c^r\psi_r(t)&=0,\\ c^1\dot{\psi}_1(t)+\cdots+c^r\dot{\psi}_r(t)&=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\\ c^1\psi_1^{(n-1)}(t)+\cdots+c^r\psi_r^{(n-1)}(t)&=0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

注意到

$$\varphi_i(t)=(\psi_i(t),\dot{\psi}_i(t),\cdots,\psi_i^{(n-1)}(t)),$$

我們看出,关系式(9)在向量的写法下有形式:

$$c^1\varphi_1(t)+\cdots+c^r\varphi_r(t)=0, \tag{10}$$

因此,在解(8)之間有綫性相关性。反之,假定解(8)是綫性相关的,即关系(10)成立。在关系式(10)中替代每个向量 $\varphi_i(t)$ 取它的第一个分量,就得到关系式(7),因此解(6)是綫性相关的。

3) 如果方程(4)的解組

$$\psi_1(t),\cdots,\psi_n(t) \tag{11}$$

是綫性独立的,就称它为**基本的**(預先假定組(11)中解的数目等于方程(4)的阶数)。可以証明,方程(4)的基本解組是存在的,并且如果解組(11)是基本的,那末方程(4)的每一个解可以記为形状:

$$\psi(t)=c^1\psi_1(t)+\cdots+c^n\psi_n(t),$$

其中 $c^1,\cdots,c^n$ 是常数。从所說的看出,为了求方程(4)的所有解,我們求出它的基本解組就够了。(对于常系数綫性齐次方程的基本解組已經在§7~8中作出。)

先証明方程(4)的基本解組存在。为此利用方程(5)的基本解組存在的事实(参看§17, 3))。設

$$\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t) \tag{12}$$

是方程(5)的基本解組,且設

$$\psi_1(t),\cdots,\psi_n(t) \tag{13}$$

是相应于解(12)的方程(4)的解:

$$\psi_i(t)\rightleftarrows\varphi_i(t),\quad i=1,\cdots,n$$

(参看 1))。因为解(12)是綫性独立的，所以根据 2)，解(13)也是綫性独立的，因此它构成基本解組。現在假定組(11)对于方程(4)是基本的，且設解(12)对应于解(11)。并且假定 $\psi(t)$ 是方程(4)的任意解，且 $\varphi(t)$ 是对应于它的方程(5)的解。由于假定組(11)是基本的，即为綫性独立的，所以对应于它的解(12)也是綫性独立的，也就是基本的。因此，由 § 17 的命題 3)，得到

$$\varphi(t)=c^1\varphi_1(t)+\cdots+c^n\varphi_n(t).$$

在这个关系式中把每个向量換为它的第一个分量，得到

$$\psi(t)=c^1\psi_1(t)+\cdots+c^n\psi_n(t).$$

这样，命題 3) 得証。

**4)** 行列式

$$W(t)=\begin{vmatrix} \psi_1(t) & \cdots & \psi_n(t) \\ \dot{\psi}_1(t) & \cdots & \dot{\psi}_n(t) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \psi_1^{(n-1)}(t) & \cdots & \psi_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} \tag{14}$$

称为方程(4)的解組(11)的**朗斯基行列式**。如果方程(5)的解(12)对应于解(11)(参看 1))，那末方程(5)的解組(12)的朗斯基行列式(参看§17, 4))和行列式(14)相同；这个事实可以直接看出。因此，对于組(12)的朗斯基行列式所成立的命題也对行列式(14)成立。从此由 § 17 的命題 4) 断定，行列式(14)或是在任一点均不等于零，或是恒等于零；为了解組(11)是綫性独立的，即为基本的，行列式(14)不等于零是必要而充分的。从 § 17 中命題 7) 推出对于行列式(14)的柳維尔公式：

$$W(t)=W(t_0)\,e^{-\int_{t_0}^{t}a_1(\tau)d\tau}. \tag{15}$$

它由 § 17 的公式(16)得到，只要注意到，矩陣(3)的迹即其在对角綫上各項之和等于 $-a_1(t)$。下面在例題 2 中将給出公式(15)的較簡单的直接証明。

**5)** 設

$$z^{(n)}+a_1(t)z^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)z=b(t) \tag{16}$$

是非齐次方程，且設

$$y^{(n)}+a_1(t)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)y=0 \tag{17}$$

是和它对应的齐次方程。从§6中的命題直接推知，如果 $x_0(t)$ 是方程(16)的特解，那末方程(16)的任意解有形式：

$$z=\psi(t)+x_0(t),$$

其中 $\psi(t)$ 是方程(17)的解。

## 常数变易法

**6)** 設

$$\psi_1(t),\ \cdots,\ \psi_n(t) \tag{18}$$

是方程(17)的任一基本解組，那末方程(16)的解可以在形式：

$$z=c^1(t)\psi_1(t)+\cdots+c^n(t)\psi_n(t) \tag{19}$$

下得出，其中函数

$$\dot{c}^1(t),\ \cdots,\ \dot{c}^n(t) \tag{20}$$

由解下面的代数方程組确定：

$$\left.\begin{aligned}
&\psi_1(t)\dot{c}^1(t)+\cdots+\psi_n(t)\dot{c}^n(t)=0,\\
&\dot{\psi}_1(t)\dot{c}^1(t)+\cdots+\dot{\psi}_n(t)\dot{c}^n(t)=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\psi_1^{(n-2)}(t)\dot{c}^1(t)+\cdots+\psi_n^{(n-2)}(t)\dot{c}^n(t)=0,\\
&\psi_1^{(n-1)}(t)\dot{c}^1(t)+\cdots+\psi_n^{(n-1)}(t)\dot{c}^n(t)=b(t).
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

因为方程組(21)关于未知量(20)的行列式是解組(18)的朗斯基行列式，所以按命題4)，它对每个 $t$ 的值都不等于零，因此从方程組(21)可以确定量(20)，再由它通过求积得到我們所需要的函数

$$c^1(t),\ \cdots,\ c^n(t).$$

命題6)的証明从§17中命題8)得出。但也可以直接驗証，如下：假設对于量(20)加上条件(21)，我們从公式(19)通过导微

得到以下的关系式：

$$z=c^1(t)\psi_1(t)+\cdots+c^n(t)\psi_n(t),$$
$$\dot{z}=c^1(t)\dot{\psi}_1(t)+\cdots+c^n(t)\dot{\psi}_n(t),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$z^{(n-1)}=c^1(t)\psi_1^{(n-1)}(t)+\cdots+c^n(t)\psi_n^{(n-1)}(t),$$
$$z^{(n)}=c^1(t)\psi_1^{(n)}(t)+\cdots+c^n(t)\psi_n^{(n)}(t)$$
$$+\dot{c}^1(t)\psi_1^{(n-1)}(t)+\cdots+\dot{c}^n(t)\psi_n^{(n-1)}(t)$$
$$=c^1(t)\psi_1^{(n)}(t)+\cdots+c^n(t)\psi_n^{(n)}(t)+b(t).$$

把这些表达式代入方程 (16)，得到恒等式。因此，如果函数 $c^1(t),\cdots,c^n(t)$ 满足关系式(21)，那末函数(19)是方程(16)的解。

## 例　题

**例题 1.** 如果知道方程(4)的非平凡解(不恒等于零的解) $\psi(t)$，那末这个方程的阶数可以降低一次，就是把問題归結为解 $n-1$ 阶方程。为此，作变换

$$y=\psi(t)v, \tag{22}$$

其中 $v$ 是新的未知函数。我們現在証明，把(22)代到方程(4)的左边后，就得出关于 $v$ 的方程

$$b_0(t)v^{(n)}+b_1(t)v^{(n-1)}+\cdots+b_{n-1}(t)\dot{v}+b_n(t)v=0, \tag{23}$$

其中

$$b_0(t)=\psi(t),\quad b_n(t)\equiv 0. \tag{24}$$

因为我們所有的研究是对首項系数为 1 的 $n$ 阶方程成立的，所以关系式 (23) 必須用 $b_0(t)=\psi(t)$ 来除，从而把方程 (4) 化为方程 (23) 只是在 $\psi(t)$ 不成为零的区間內进行的。置

$$\frac{b_i(t)}{\psi(t)}=l_i(t),$$

并把未知函数 $v$ 換为新的未知函数

$$w=\dot{v},$$

我們就得到 $n-1$ 阶方程

$$w^{(n-1)}+l_1(t)w^{(n-2)}+\cdots+l_{n-1}(t)w=0.$$

如果有了这个方程的解 $\chi(t)$，那末方程(23)的解 $v$ 从求积

$$v=\int\chi(t)dt$$

得到，而把求到的函数 $v$ 代入(22)就得出方程(4)的解。

我們来証明，代换(22)把方程(4)化为形状(23)，并且满足关系式(24)。导徵关系式(22)，得到

$$y^{(k)}=\psi(t)v^{(k)}+\cdots,$$

其中未写出的项含有 $v$ 的阶数低于 $k$ 的导数。从此推出，方程(4)取形状(23)，并且 $b_0(t)=\psi(t)$。由于 $\psi(t)$ 是方程(4)的解，所以 $v=1$ 是方程(23)的解。把解 $v=1$ 代入(23)，得到 $b_n(t)=0$。

因此，关系式(24)得証。

**例題 2.** 不依靠方程組的柳維尔公式(参看§17，公式(16))，来对一个 $n$ 阶方程的柳維尔公式进行証明。这时我們将利用在§17給出的行列式的导徵法則(参看§17，6))。根据这个导徵法則，我們从(14)得到

$$\dot{W}(t)=W_1(t)+\cdots+W_i(t)+\cdots+W_n(t),$$

其中 $W_i(t)$ 是朗斯基行列式 $W(t)$，但在其中第 $i$ 行已經导徵。如果 $i<n$，那末导徵第 $i$ 行的結果，得到一行，它和行列式 $W(t)$ 的第 $i+1$ 行一致，因而我們有

$$W_1(t)=W_2(t)=\cdots=W_{n-1}(t)=0.$$

导徵第 $n$ 行，我們得到一行

$$\psi_1^{(n)}(t),\ \cdots,\ \psi_n^{(n)}(t),$$

由方程(4)，它是行列式 $W(t)$ 各行的綫性組合，其中关于第 $n$ 行的系数是 $-a_1(t)$。由于在行列式 $W_i(t)$ 中出現了朗斯基行列式的第1行到第 $n-1$ 行，就可以把綫性組合中的这几行去掉，剩下的只是第 $n$ 行而有系数 $-a_1(t)$，因此，对朗斯基行列式得到微分方程

$$\dot{W}(t) = -a_1(t)W(t).$$

解出它，就得到柳維尔公式(15)。

## § 19. 周期系数的标准綫性齐次方程組

在变系数綫性方程中周期系数方程起特别重要的作用。这一节讲述周期系数的标准綫性齐次方程組的一些性质，这些性质中主要的是李雅普諾夫定理。这里对李雅普諾夫定理所进行的証明和本书以前所有的論述相比，不是很初等的。它依靠矩陣分析，其中的必要知識将在本书的最后一章中讲述。

設

$$\dot{X} = A(t)X \tag{1}$$

是記为矩陣形式的标准綫性齐次方程組(参看 § 17, 9))。我們假定这方程組的系数是 $t$ 的周期函数，周期为 $\tau$，就是矩陣 $A(t)$ 滿足条件：

$$A(t+\tau) = A(t).$$

1) 对于方程(1)的任一(矩陣的)解

$$X = \Phi(t) \quad \det \Phi \neq 0 \tag{2}$$

(参看 §17, 9))，可以找到这样的常数(不退化的)矩陣 $C$，使得

$$\Phi(t+\tau) = \Phi(t)C.$$

我們称矩陣 $C$ 对于解(2)是**根本的**。如果 $X = \hat{\Phi}(t)$ 是方程(1)的其他的解，而 $\hat{C}$ 是它的根本矩陣，那末我們有

$$\hat{C} = P^{-1}CP, \tag{3}$$

其中 $P$ 是某一不退化的常数矩陣。

为了証明矩陣 $C$ 的存在，注意到，除了解 (2) 以外，矩陣 $\Phi(t+\tau)$ 也是方程(1)的解。实际上，

$$\dot{\Phi}(t+\tau) = A(t+\tau)\Phi(t+\tau) = A(t)\Phi(t+\tau),$$

因此，由 § 17 中公式(22)有

$$\Phi(t+\tau) = \Phi(t)C,$$

其中 $C$ 是常数矩陣。

为了証明公式(3)，也应用 § 17 中公式(22)。因为 $\hat{\Phi}(t)$ 是方程(1)的解，所以根据所提到的公式有

$$\hat{\Phi}(t)=\Phi(t)P.$$

从此 $$\hat{\Phi}(t+\tau)=\Phi(t+\tau)P=\Phi(t)CP=\hat{\Phi}(t)P^{-1}CP,$$

这就給出关系式(3)。

**2)** 方程(1)和有(与 $A(t)$ 相同)周期 $\tau$ 的周期矩陣 $B(t)$ 的方程

$$\dot{Y}=B(t)Y \tag{4}$$

将称为等价的，如果存在（周期为 $\tau$ 的）周期矩陣 $S(t)$ 的綫性变换(参看 § 17, 10))。

$$Y=S(t)X,$$

把方程(1)变为方程(4)。可以証明，方程(1)和(4)当且只当这些方程存在相同的根本矩陣的解 $X=\Phi(t)$ 和 $Y=\Psi(t)$ 时，才是等价的。

我們来証明这个断言。先假定方程(1)和(4)是等价的。設 $X=\Phi(t)$ 是方程(1)的任一解，有根本矩陣 $C$；那末

$$Y=\Psi(t)=S(t)\Phi(t)$$

是方程(4)的解，并且我們有

$$\Psi(t+\tau)=S(t+\tau)\Phi(t+\tau)=S(t)\Phi(t+\tau)$$
$$=S(t)\Phi(t)C=\Psi(t)C.$$

因此，解 $\Phi(t)$ 的根本矩陣 $C$ 对于解 $\Psi(t)$ 也是根本的。

現在假定存在方程(1)与(4)的解 $X=\Phi(t)$ 及 $Y=\Psi(t)$ 具有相同的根本矩陣 $C$；那末我們有

$$\Phi(t+\tau)=\Phi(t)C,\quad \Psi(t+\tau)=\Psi(t)C.$$

用第一个关系式从右边来除第二个关系式，得到

$$\Psi(t+\tau)\Phi^{-1}(t+\tau)=\Psi(t)\Phi^{-1}(t).$$

因此，矩陣 $$S(t)=\Psi(t)\Phi^{-1}(t)$$

是有周期 $\tau$ 的周期矩陣，并且我們有

$$\Psi(t) = S(t)\Phi(t). \tag{5}$$

因为由每个解 $\Phi(t)$ 和 $\Psi(t)$ 唯一地确定各自的方程（参看 § 17, 5)），所以从(5)推知方程 (4) 是由方程 (1) 經过矩陣为 $S(t)$ 的变換得到的。

显然，从命題 1) 和 2) 知道，除了等价性不計外(参看 2))，对应于每个形状 (1) 的方程有矩陣 $C$，除了变位而外它是唯一确定的(参看(3))。不但如此，矩陣 $C$ 关于形状(3)的变換的不变量的总体构成了方程(1)的除等价性外而确定的**不变量的完全系。**

应当注意，命題 1) 和 2) 中所說到的一切，不論是只考虑实矩陣的情形或是考虑复矩陣的情形都是成立的。在以下重要的李雅普諾夫定理(定理 12) 中，我們将分开实的和复的情形。

**定理 12** 每一个方程(1)等价于(参看 2)) 方程

$$\dot{Y} = BY,$$

其中 $B$ 是常数矩陣(矩陣 $B$ 一般是复的)。如果在方程 (1) 中周期为 $\tau$ 的矩陣 $A(t)$ 是实的，那末这个方程，看成周期为 $2\tau$ 时，等价于方程

$$\dot{Y} = B_1 Y,$$

其中 $B_1$ 是实常数矩陣，并且把方程(1)变到方程 $\dot{Y} = B_1 Y$ 的变換矩陣 $S(t)$ 也是实的。

在証明定理 12 之前，先讲以下命題。

**3)** 設

$$\dot{Y} = BY \tag{6}$$

是常系数綫性齐次方程組，它以矩陣的形式給出。这里 $B$ 是常数矩陣。可以証明，矩陣

$$Y = e^{tB} \tag{7}$$

(参看 § 33, 4) 段)是方程(6)的解。

为了証明(7)是方程(6)的解，把函数 $e^{tB}$ 写为显式。我們有

$$e^{tB}=E+tB+\frac{t^2}{2!}B^2+\frac{t^3}{3!}B^3+\cdots.$$

从此对于导数 $\frac{d}{dt}e^{tB}$ 得到

$$\frac{d}{dt}e^{tB}=B\left(E+tB+\frac{t^2}{2!}B^2+\cdots\right)=Be^{tB}.$$

**定理 12 的証明** 設 $C$ 是方程(1)的某个解 $X=\Phi(t)$ 的根本矩陣。由 § 33 中命題 4)，存在矩陣 $B$，滿足条件

$$e^{\tau B}=C.$$

我們来証明，方程(1)和

$$\dot{Y}=BY \tag{8}$$

是等价的。事实上，由命題 3)，矩陣 $Y=e^{tB}$ 是方程 (8) 的解。因此，如果把方程 (8) 看成周期为 $\tau$ 的周期系数的方程，那末解 $Y=e^{tB}$ 的根本矩陣是 $C$，就是(参看 § 33，公式(20))

$$e^{(t+\tau)B}=e^{tB}\cdot e^{\tau B}=e^{tB}C.$$

由于所考虑的方程 (1) 和 (8) 的解的根本矩陣相同，所以这些方程是等价的(参看 2))。

因此，定理 12 的第一部分得証。

現在假設 $A(t)$ 是实矩陣，$\Phi(t)$ 是方程 (1) 的某一实解，且 $C$ 是这个解的根本矩陣，因此

$$\Phi(t+\tau)=\Phi(t)C. \tag{9}$$

由于 $\Phi(t)$ 是实矩陣，所以矩陣 $C$ 也是实的。从(9)推知，

$$\Phi(t+2\tau)=\Phi(t+\tau)C=\Phi(t)C^2. \tag{10}$$

根据 § 33 中命題 4)，存在实矩陣 $B_1$ 滿足条件

$$e^{2\tau B_1}=C^2.$$

現在証明，方程(1)和方程

$$\dot{Y}=B_1Y \tag{11}$$

在看成周期为 $2\tau$ 的方程时是等价的。事实上，矩陣 $e^{tB_1}$ 是方程

(11)的解。因此，如果方程(11)看成有周期为 $2\tau$ 的系数的方程，解 $Y=e^{tB_1}$ 就有根本矩陣 $C^2$. 由于方程 (1) 和 (11) 的所考虑的解的根本矩陣(参看(10))相同，所以这些方程是等价的。

这样，定理 12 得証。

**4)** 設 $C$ 是任意的 $n$ 阶方陣，它的所有的特征值的模小于某个正数 $\rho$. 矩陣 $C^m$ 的元素記为 ${}^mc_j^i$，其中 $m$ 为自然数，因而 $C^m=({}^mc_j^i)$. 那末存在与 $i$, $j$, $m$ 无关的正数 $r$，使得

$$|{}^mc_j^i|<r\rho^m. \tag{12}$$

从此特别推出，对于任意向量 $x$，成立不等式

$$|C^mx|\leqslant n^2r\rho^m|x|. \tag{13}$$

为了証明估計式(12)，考虑級数

$$f(z)=1+\frac{z}{\rho}+\frac{z^2}{\rho^2}+\cdots+\frac{z^m}{\rho^m}+\cdots,$$

它的收敛半徑显然等于 $\rho$. 从定理 27 (参看 § 33) 推知，矩陣級数

$$f(C)=E+\frac{C}{\rho}+\frac{C^2}{\rho^2}+\cdots+\frac{C^m}{\rho^m}+\cdots$$

收敛，特别是数項級数

$$\delta_j^i+\frac{{}^1c_j^i}{\rho}+\frac{{}^2c_j^i}{\rho^2}+\cdots+\frac{{}^mc_j^i}{\rho^m}+\cdots$$

收敛。因为这个級数收敛，所以它的所有的項不超过某个数 $r$，并且这个数 $r$ 可以对所有数偶 $(i, j)$ 取为公共的。这样，估計式(12)成立。

**5)** 設

$$\dot{x}=A(t)x \tag{14}$$

是矩陣方程(1)的向量記法，且 $C$ 是方程(1)的某个解 $\Phi(t)$ 的根本矩陣。矩陣 $C$ 的 $k$ 重特征值 $\lambda$ 称为方程(1)和方程 (14) 的 $k$ 重特征数。由于除了变位而外矩陣 $C$ 同选取方程(1)的解 $\Phi(t)$ 的偶然性无关(参看 1))，所以这里定义的方程(14)的特征数以及它們的

重数是不变量。如果 $\lambda$ 是方程(14)的 $k$ 重特征数，那末 $\frac{1}{\tau}\ln\lambda$ 称为方程(14)的 $k$ 重**特征指数**。假定方程(14)的特征指数的所有实部小于某个数 $\gamma$；那末存在正数 $R$，使得对于方程(14)的任一解 $\varphi(t)$ 成立估計式：

$$|\varphi(t)|<R|\varphi(0)|e^{\gamma t},\quad \text{当 } t\geqslant 0 \text{ 时。} \tag{15}$$

现在証明不等式(15)。設 $\Phi(t)$ 是方程(1)有初始条件 $\Phi(0)=E$ 的解；那末方程(14)的任意解 $\varphi(t)$ 記为形状：

$$\varphi(t)=\Phi(t)\varphi(0). \tag{16}$$

把向量(16)代入方程(14)就可驗証此式。其次，我們有

$$\Phi(t+\tau)=\Phi(t)C,\ \Phi(t+2\tau)$$
$$=\Phi(t)C^2,\ \cdots,\ \Phi(t+m\tau)=\Phi(t)C^m,\cdots. \tag{17}$$

因为在区間 $0\leqslant t_1\leqslant\tau$ 上矩陣 $\Phi(t_1)$ 的元素有界，所以存在正数 $\sigma$，使得

$$|\Phi(t_1)x|\leqslant\sigma|x|,\quad \text{当 } 0\leqslant t_1\leqslant\tau \text{ 时。} \tag{18}$$

由于矩陣 $C$ 的一切特征值按模小于数 $e^{\tau\gamma}$，所以由(13)对任何向量 $x$ 成立估計式

$$|C^m x|<n^2\tau e^{\tau m\gamma}|x|. \tag{19}$$

現在假設 $t$ 为任意正数；求非負整数 $m$，使得

$$t=m\tau+t_1,\quad 0\leqslant t_1\leqslant\tau.$$

由(16)和(17)，我們有

$$\varphi(t)=\Phi(m\tau+t_1)\varphi(0)=\Phi(t_1)C^m\varphi(0).$$

从此按照(18)和(19)得到

$$|\varphi(t)|<\sigma n^2\tau e^{\tau m\gamma}|\varphi(0)|.$$

由于数 $e^{t_1\gamma}$ 在 $0\leqslant t_1\leqslant\tau$ 上不小于某常数 $c>0$，所以最后的不等式可以写成形式：

$$|\varphi(t)|\leqslant\frac{\sigma n^2\tau}{c}e^{\gamma t}|\varphi(0)|.$$

这样，估計式(15)得証。

# 第四章

# 存在性定理

这里首先証明以前已經叙述过的存在性和唯一性定理1，2，3．其次，討論解对初始值和参数的連續依賴性問題，如果参数是在方程中出現的話。先分析有固定初始值的解对参数的相依性，然后通过一种簡单方法把初始值化为参数，因此，一切都归結为解对参数的依賴性問題。不論是初始值的情形或是参数的情形，都要証明解对于这些参量的連續依賴性和解关于它們的可微性。在每一种情形都应当区分**局部的**定理和**整体的**定理。前者断定解在时間的区間$|t-t_0|<r$上具有这些性质以及其他性质，这里的$r$是某个正数，一般說来，$r$是"小"的数。而后者假定对于固定的参数值或初始值，有确定在某个时間区間$r_1\leqslant t\leqslant r_2$上的解，这区間可以是很大的，这时断定对于接近于固定值的参数值和初始值，解在整个区間$r_1\leqslant t\leqslant r_2$上存在，对于变量的所有这些值是連續的，或者相应地，关于所有变量是可微的。

除了这些內容以外，在这一章还包括一节常微分方程組的首次积分以及同首次积分概念有联系的一阶綫性偏微分方程的研究。这一节的結論，以后并不要用。

## §20. 对于一个方程的存在性和唯一性定理的証明

本节要对§1中定理1所述关于一个一阶方程

$$\dot{x}=f(t,\ x) \tag{1}$$

的存在性和唯一性定理給以証明，方程的右边和它的偏导数$\frac{\partial f}{\partial x}$在变量$t,x$的平面的某区域$\Gamma$上有定义且連續。在下一节要推导

的定理 2 的証明比定理 1 的証明复杂得多，而包含后者作为特殊情形。在先对一个方程的情形証明时，要有目的地說明一下証明的基本思想，这种思想在一般情形由于次要的細节很多而显示不出来。本书用**逐次逼近法**来进行定理 1 和 2 的証明，这方法是属于毕卡(Picard)的，在分析中用它証明許多存在定理。同时，这个方法也是解的近似計算方法，因而有很大的实用意义。在某些情形，逐次逼近法可以解释为**压縮映象法**。这里将这样来进行証明；使得能够指出这两种方法的密切联系。这些方法的差别将在証明定理 3 时显示出来。

## 証明的基本思想

用逐次逼近法証明定理 1 的第一步，是把微分方程化为**积分方程**，我們把它单独列为一个命題来叙述。

**1)** 設 $x=\varphi(t)$ 是方程(1)的确定在区間 $r_1<t<r_2$ 上的某个解，因而成立恒等式

$$\dot{\varphi}(t)=f(t,\varphi(t)), \tag{2}$$

且設

$$\varphi(t_0)=x_0 \tag{3}$$

是这个解所滿足的某个初始条件。从而函数 $\varphi(t)$ 在整个区間 $r_1<t<r_2$ 內滿足积分恒等式

$$\varphi(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(\tau,\varphi(\tau))d\tau. \tag{4}$$

反之，如果对区間 $r_1<t<r_2$ 上的某个連續函数 $\varphi(t)$ 恒等地滿足(4)，那末函数 $x=\varphi(t)$ 可微而是方程 (1) 的解，且滿足初始条件(3)。簡单地說，积分方程(4)等价于带有初始条件(3)的微分方程(2)。

我們来証明这件事。首先假定关系 (4) 成立。在其中把 $t$ 換成 $t_0$，得到 $\varphi(t_0)=x_0$。因此，从(4)推出(3)，又恒等式(4)显然关

于 $t$ 是可微的，所以左边关于 $t$ 也可微。导微恒等式(4)就得到恒等式(2)。

现在假定关系(2)和(3)满足。从 $t_0$ 到 $t$ 积分关系(2)，得到

$$\varphi(t)-\varphi(t_0)=\int_{t_0}^{t} f(\tau,\varphi(\tau))\,d\tau.$$

由关系式(3)从最后等式得到(4)。

这样，命题 1) 得証。

现在引进一些記号，它們是下面証明定理 1 时要用的。

**2)** 設 $x=\varphi(t)$ 是这样的函数，确定在某个区間 $\tau_1\leqslant t\leqslant\tau_2$ 上，它的图形全部在区域 $\Gamma$ 内，而 $t_0$ 是区間 $\tau_1\leqslant t\leqslant\tau_2$ 上的某一点。那末利用恒等式(4)的右边可以建立函数 $\varphi(t)$ 和另一在区間 $\tau_1\leqslant t\leqslant\tau_2$ 上由以下等式确定的函数 $\varphi^*(t)$ 之間的对应：

$$\varphi^*(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(\tau,\varphi(\tau))\,d\tau, \tag{5}$$

(函数 $\varphi^*(t)$ 的图形当然可能不全在区域 $\Gamma$ 内)。这样，恒等式(4)的右边可以看为建立函数 $\varphi$ 与函数 $\varphi^*$ 的对应的**算子**。用字母 $A$ 来記这个算子，我們把关系(5)写成公式：

$$\varphi^*=A\varphi. \tag{6}$$

利用算子 $A$，积分方程(4)可写成形状：

$$\varphi=A\varphi. \tag{7}$$

**3)** 設 $\varphi(t)$ 是确定在区間 $\tau_1\leqslant t\leqslant\tau_2$ 上的某个連續函数。这函数的**范数**是指它的模的最大值

$$\|\varphi\|=\max_{\tau_1\leqslant t\leqslant\tau_2}|\varphi(t)|.$$

如果 $\psi(t)$ 和 $\chi(t)$ 是在区間 $\tau_1\leqslant t\leqslant\tau_2$ 上給定的两个連續函数，那末它們的差 $\psi(t)-\chi(t)$ 的范数 $\|\psi-\chi\|$ 是非負的数，它相当有力地估計这两函数之間的差异。如果数 $\|\psi-\chi\|$ 小，那末函数 $\psi$ 和 $\chi$ 就靠

得"近"。等式$\|\psi-\chi\|=0$当且只当函数$\psi$和$\chi$恒等时才成立。利用范数概念就很容易叙述在分析教程中的連續函数列的一致收敛性条件。設

$$\varphi_0(t),\ \varphi_1(t),\ \cdots,\ \varphi_i(t),\cdots \tag{8}$$

是給定在区間$r_1\leqslant t\leqslant r_2$上的連續函数列。設$\varphi(t)$是在同一区間$r_1\leqslant t\leqslant r_2$上确定的函数，如果

$$\lim_{i\to\infty}\|\varphi-\varphi_i\|=0,$$

序列(8)就一致收敛于函数$\varphi$. 为了序列(8)有一致收敛性，不等式

$$\|\varphi_{i+1}-\varphi_i\|\leqslant a_i$$

成立是充分的，其中数$a_0, a_1, \cdots, a_i, \cdots$組成收敛級数(即$\sum a_i$是收敛級数)。

在轉入詳細推导定理1的証明之前，簡略地說明一下用来解方程(7)的逐次逼近法的实质。作出确定在区間$r_1\leqslant t\leqslant r_2$上的連續函数列：

$$\varphi_0,\ \varphi_1,\ \cdots,\ \varphi_i,\ \cdots, \tag{9}$$

这区間含$t_0$在其內部。序列(9)中的每个函数由前面一个函数按等式

$$\varphi_{i+1}=A\varphi_i,\quad i=0,1,2,\cdots \tag{10}$$

确定。如果函数$\varphi_i$的图形在区域$\Gamma$內，那末函数$\varphi_{i+1}$就由等式(10)确定，可是为了能够确定下一个函数$\varphi_{i+2}$，还需要函数$\varphi_{i+1}$的图形在区域$\Gamma$內部。如同我們要証明的，取区間$r_1\leqslant t\leqslant r_2$充分小就能够做到这一点。并且依靠縮短区間$r_1\leqslant t\leqslant r_2$的长度也能做到使序列(9)滿足不等式

$$\|\varphi_{i+1}-\varphi_i\|\leqslant k\|\varphi_i-\varphi_{i-1}\|,\quad i=1,2,\cdots, \tag{11}$$

其中$0<k<1$. 从不等式(11)推出不等式

$$\|\varphi_{i+1}-\varphi_i\|\leqslant\|\varphi_1-\varphi_0\|\cdot k^i,\quad i=1,2,\cdots,$$

因此序列(9)一致收敛(参看3))。进一步就已容易确定序列(9)的

极限 $\varphi$ 满足方程(7)。

这种作法可以用另一种方式——压縮映象法的形式来叙述。选取某个在区間 $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$ (并且 $r_1 < t_0 < r_2$) 上給定的函数族 $\Omega$，使得这些函数的图形在区域 $\Gamma$ 内。还假定族 $\Omega$ 对于算子 $A$ 满足以下两个条件：1) 算子作用到族 $\Omega$ 中的任一函数仍然得到族 $\Omega$ 中的函数；2)存在数 $k$, $0<k<1$，使得对于族 $\Omega$ 中的任意两个函数 $\psi$ 和 $\chi$，适合不等式

$$\|A\psi - A\chi\| \leqslant k\|\psi - \chi\|.$$

在这个意义之下，映象 $A$ 是被压縮的(正确地应說为是"压縮的")。

容易看出，如果对于族 $\Omega$ 满足所述条件，那末从任意的函数 $\varphi_0$ 出发，我們按递推公式 (10) 得到无穷序列(9)，满足条件(11)，并且如同上面注意到的，它一致收敛于方程(7)的解 $\varphi$。

現在根据所說的設想来証明定理 1。

**定理 1 的証明。**

方程(1)的待求的解的初始值 $t_0$ 和 $x_0$ 是区域 $\Gamma$ 内一点 $(t_0, x_0)$ 的坐标。首先取以点 $(t_0, x_0)$ 为中心，边平行于坐标軸，連同境界整个落在区域 $\Gamma$ 内部的矩形 $\Pi$ (图 44)。矩形 $\Pi$ 的水平的 (平行于 $t$ 軸的) 边长記为 $2q$，垂直的边长記为 $2a$。因此，点 $(t, x)$ 当且只当满足不等式

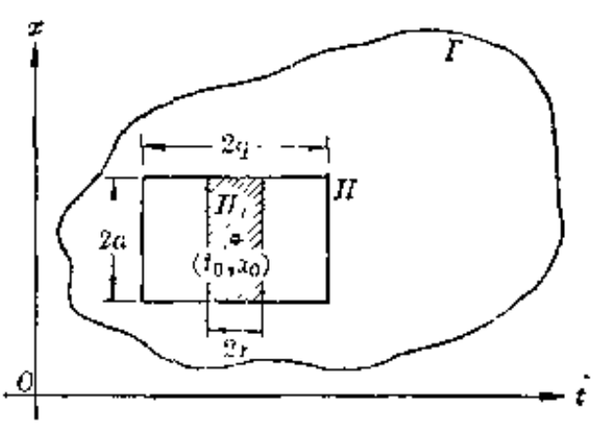


图 44

$$|t - t_0| \leqslant q, \quad |x - x_0| \leqslant a \tag{12}$$

时才属于矩形 $\Pi$。由于矩形 $\Pi$ 是含在区域 $\Gamma$ 内部的閉集，所以在它上面定义的連續函数 $f(t, x)$ 及 $\dfrac{\partial f(t, x)}{\partial x}$ 有界，因此，存在正数 $M$ 和 $K$，使得对于满足条件(12)的 $t$ 和 $x$ 成立不等式

$$|f(t, x)| \leqslant M, \quad \left|\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}\right| \leqslant K. \tag{13}$$

除了矩形 $\Pi$ 以外，还考虑較"狹"的矩形 $\Pi_r$，由不等式

$$|t-t_0| \leqslant r, \quad |x-x_0| \leqslant a$$

确定，其中

$$r \leqslant q \tag{14}$$

(参看图 44)。数 $r$ 以后还要更精确地确定。以 $\Omega_r$ 記所有在区間 $|t-t_0| \leqslant r$ 上給定而图形在矩形 $\Pi_r$ 內的連續函数族。因此，在区間 $|t-t_0| \leqslant r$ 上确定的連續函数 $\varphi$ 当且只当对这区間上的任何 $t$ 成立不等式

$$|\varphi(t) - x_0| \leqslant a \tag{15}$$

时才属于族 $\Omega_r$。

現在設法选取数 $r$ 使滿足以下两个条件：

1° 如果函数 $\varphi$ 属于族 $\Omega_r$，那末函数 $\varphi^* = A\varphi$ (参看(5)，(6)) 也属于族 $\Omega_r$。

2° 存在数 $k$，$0<k<1$，使得对于族 $\Omega_r$ 中的任意两个函数 $\psi$ 和 $\chi$ 成立不等式

$$\|A\psi - A\chi\| \leqslant k\|\psi - \chi\|. \tag{16}$$

我們考察条件 1°。为了函数 $\varphi^* = A\varphi$ 属于族 $\Omega_r$，当 $|t-t_0| \leqslant r$ 时成立不等式

$$|\varphi^*(t) - x_0| \leqslant a$$

是必要而充分的。根据(5)和(13)我們有

$$|\varphi^*(t) - x_0| = \left|\int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau\right| \leqslant Mr.$$

从此看出，当

$$r \leqslant \frac{a}{M} \tag{17}$$

时条件 1° 是滿足的。

現在考察条件 2°，我們有

$$\psi^*(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \psi(\tau))\,d\tau,$$

$$\chi^*(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \chi(\tau))\,d\tau.$$

从第一式减去第二式，得到

$$|\psi^*(t) - \chi^*(t)| = \left|\int_{t_0}^{t} (f(\tau, \psi(\tau)) - f(\tau, \chi(\tau)))\,d\tau\right|$$

$$\leqslant \left|\int_{t_0}^{t} |f(\tau, \psi(\tau)) - f(\tau, \chi(\tau))|\,d\tau\right|. \qquad (18)$$

现在估計最后的被积表达式，利用拉格朗日公式以及 (13) 中的第二个不等式，得到

$$|f(\tau, \psi(\tau)) - f(\tau, \chi(\tau))| = \left|\frac{\partial f(\tau, \theta)}{\partial x}(\psi(\tau) - \chi(\tau))\right|$$

$$\leqslant K \cdot |\psi(\tau) - \chi(\tau)|; \qquad (19)$$

这里的数 $\theta$ 介于 $\psi(\tau)$ 和 $\chi(\tau)$ 之間，因而适合不等式 $|\theta - x_0| \leqslant a$。从 (18) 和 (19) 推出

$$\|A\psi - A\chi\| = \|\psi^* - \chi^*\| \leqslant Kr\|\psi - \chi\|.$$

因此，如果数 $k = Kr$ 小于 1，也就是如果

$$r < \frac{1}{K}, \qquad (20)$$

条件 2°就满足。这样，如果数 $r$ 满足不等式 (14)，(17) 和 (20)，那末对于族 $\Omega_r$，条件 1° 和 2° 就满足。以后我們假定所取的数 $r$ 是满足不等式 (14)，(17) 和 (20) 的。

现在作确定在区間 $|t - t_0| \leqslant r$ 上的函数列

$$\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_i, \cdots, \qquad (21)$$

置

$$\varphi_0(t) \equiv x_0, \qquad (22)$$

$$\varphi_{i+1} = A\varphi_i, \quad i = 0, 1, 2, \cdots. \qquad (23)$$

因为函数 (22) 属于族 $\Omega_r$，所以序列 (21) 中的所有函数也属于同一族（参看条件 1°）。其次，我們有（参看 (15)）

$$\|\varphi_1-\varphi_0\|=\max_{|t-t_0|\leqslant r}|\varphi_1-x_0|\leqslant a.$$

由于(16),我們有

$$\|\varphi_{i+1}-\varphi_i\|=\|A\varphi_i-A\varphi_{i-1}\|\leqslant k\|\varphi_i-\varphi_{i-1}\|,$$

从此 $$\|\varphi_{i+1}-\varphi_i\|\leqslant ak^i,\quad i=0,1,2,\cdots.$$

因此,根据 3),序列 (21) 在区間 $|t-t_0|\leqslant r$ 上一致收斂于某个連續函数 $\varphi$. 由于序列(21)中所有的函数都属于族 $\Omega_r$, 因而函数 $\varphi$ 也属于它(参看(15)). 我們来証明,函数 $\varphi$ 滿足方程(7). 为此注意到序列

$$A\varphi_0, A\varphi_1, \cdots, A\varphi_i, \cdots$$

一致收斂于函数 $A\varphi$;事实上,我們有

$$\|A\varphi-A\varphi_i\|\leqslant k\|\varphi-\varphi_i\|.$$

当 $i\to\infty$ 时对关系式(23)取极限,我們得到

$$\varphi=A\varphi.$$

这样,方程(1)的滿足初始条件(3)的解 $x=\varphi(t)$ 的存在性証明了;同时确立了解 $x=\varphi(t)$ 在区間 $|t-t_0|<r$ 上有定义, 其中 $r$ 是适合不等式(14),(17)和(20)的任意正数。

現在轉到唯一性的証明。假設 $x=\psi(t)$ 和 $x=\chi(t)$ 是方程 (1) 的有公共初始值 $t_0$, $x_0$ 的两个解,而区間 $r_1<t<r_2$ 是解 $\psi$ 和 $\chi$ 的存在区間的交集;显然,$r_1<t_0<r_2$. 以 $N$ 記区間 $r_1<t<r_2$ 上使解 $\psi$ 和 $\chi$ 数值相同的所有点的总体。集 $N$ 是不空的,因为它含有点 $t_0$. 現在証明,集 $N$ 是开的,并且它在区間 $r_1<t<r_2$ 上也是閉的。

先証明集 $N$ 是开的。設 $t_1$ 是集 $N$ 的任意点; 由于解 $\psi(t)$ 和 $\chi(t)$ 在这一点相合,即 $\psi(t_1)=\chi(t_1)=x_1$, 因而 $(t_1, x_1)$ 可以取为两个解的共同的初始值。在这个意义上,点 $(t_1, x_1)$ 和点 $(t_0, x_0)$ 并无区别, 因此对于点 $(t_1, x_1)$ 仍保持記号 $(t_0, x_0)$: 这使我們能沿用以前的記号。 把微分方程(1)化为积分方程(4), 就得到关于两个函数 $\psi(t)$ 和 $\chi(t)$ 的积分等式,在算子的形式下, 它們可以写为形状:

$$\psi=A\psi,\quad \chi=A\chi. \tag{24}$$

現在和以前一样，在区域 $\Gamma$ 内取中心为 $(t_0, x_0)$ 的矩形 $\Pi$，然后取矩形 $\Pi_r$，使得 $r$ 除了满足不等式(14)，(17)，(20)以外，还满足条件：当 $|t-t_0|\leqslant r$ 时，函数 $\psi$ 和 $\chi$ 有定义且适合不等式

$$|\psi(t)-x_0|\leqslant a,\quad |\chi(t)-x_0|\leqslant a.$$

这是可能的，因为函数 $\psi(t)$ 和 $\chi(t)$ 是連續的。因此，作为区間 $|t-t_0|\leqslant r$ 上的函数 $\psi(t)$ 和 $\chi(t)$ 包含在族 $\Omega_r$ 中，从此根据不等式(16)和关系式(24)得到

$$\|\psi-\chi\|=\|A\psi-A\chi\|\leqslant k\|\psi-\chi\|,$$

这不等式只在 $\|\psi-\chi\|=0$ 时，就是当函数 $\psi$ 和 $\chi$ 在区間 $|t-t_0|\leqslant r$ 上相一致时，才能成立。从此推知，除了一点 $t_0$ 以外，还有以这点为中心的某个区間 $|t-t_0|<r$ 也属于集 $N$，所以 $N$ 是开集。

現在証明，集 $N$ 在区間 $r_1<t<r_2$ 上是閉的。就是說，如果集 $N$ 上的点列 $t_1, t_2, \cdots, t_i, \cdots$ 收敛于区間 $r_1<t<r_2$ 上的某一点 $\bar{t}$，那末点 $\bar{t}$ 也属于集 $N$。我們有

$$\psi(t_i)=\chi(t_i),\quad i=1, 2, \cdots.$$

因为函数 $\psi(t)$ 和 $\chi(t)$ 在点 $\bar{t}$ 有定义且为連續的，所以当 $i\to\infty$ 时对上式取极限，得到 $\psi(\bar{t})=\chi(\bar{t})$，从而点 $\bar{t}$ 也属于集 $N$。

在以下的命題 4) 中要証明，从非空的点集 $N$ 在某区間同时为开集和閉集的性质就推出它和这区間的一致性。这样，就确定了解 $\psi(t)$ 和 $\chi(t)$ 在整个区間 $r_1<t<r_2$ 上相一致。

这样，定理 1 得証。

**4)** 設 $r_1<t<r_2$ 是某个实数区間，而 $N$ 是它的不空子集，它在区間 $r_1<t<r_2$ 上是开集也是閉集；那末集 $N$ 和区間 $r_1<t<r_2$ 相合。

由于集 $N$ 不空，它至少含有一点 $t_0$。假定在区間 $r_1<t<r_2$ 上存在一点 $t_1$ 不属于集 $N$。为了确定起見，假設 $t_1>t_0$。以 $N_1$ 記集 $N$ 中适合不等式 $t\leqslant t_1$ 的点 $t$ 的总体，且設 $\bar{t}$ 是集 $N_1$ 的上确

界。因为容易看出，集 $N_1$ 在区间 $r_1<t<r_2$ 上是闭的，所以点 $\bar{t}$ 属于集 $N_1$，从而不可能合于 $t_1$，即 $\bar{t}<t_1$. 但是集 $N$ 是开的，所以除了点 $\bar{t}$ 以外还有含这一点的整个区间也属于集 $N$，因而点 $\bar{t}$ 不可能是集 $N_1$ 的上界。得到的矛盾証明了命题 4)。

## 例　题

对很簡单的方程

$$\dot{x}=x$$

用逐次逼近法求解。要求的解具有初始值

$$t_0=0, \quad x_0=1.$$

相应的积分方程写为形式：

$$\varphi(t)=1+\int_0^t \varphi(\tau)\,d\tau.$$

现在来作序列

$$\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_i, \cdots.$$

我们有

$$\varphi_0(t)\equiv 1,$$

$$\varphi_1(t)=1+\int_0^t d\tau=1+t,$$

$$\varphi_2(t)=1+\int_0^t (1+\tau)\,d\tau=1+t+\frac{t^2}{2!},$$

$$\varphi_3(t)=1+\int_0^t \left(1+\tau+\frac{1}{2!}\tau^2\right)d\tau=1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!},$$

.....

$$\varphi_n(t)=1+t+\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{3!}t^3+\cdots+\frac{1}{n!}t^n,$$

.....

函数 $\varphi(t)=e^t$ 是这序列的极限（在数軸的任意一段上是一致收敛的）。

## § 21. 标准方程組的存在性和唯一性定理的証明

这里要証明在 § 3 中叙述的标准方程組

$$\dot{x}^i = f^i(t, x^1, \cdots, x^n), \quad i = 1, \cdots, n \tag{1}$$

的存在性和唯一性定理 2，右边 $f^i(t, x^1, \cdots, x^n)$ 連同它們的偏导数 $\frac{\partial f^i(t, x^1, \cdots, x^n)}{\partial x^j}$，$i, j = 1, \cdots, n$ 在变量 $t, x^1, \cdots, x^n$ 的空間的某区域 $\Gamma$ 上定义和連續。置

$$\begin{gathered} \boldsymbol{x} = (x^1, \cdots, x^n), \\ \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) = (f^1(t, \boldsymbol{x}), f^2(t, \boldsymbol{x}), \cdots, f^n(t, \boldsymbol{x})), \end{gathered} \tag{2}$$

我們改写方程組(1)为向量形式(比較 § 14, 1))：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}). \tag{3}$$

証明将在向量形式下用逐次逼近法来进行，它几乎是前一节所作的定理 1 的証明的逐字重复。除了定理 2 的証明以外，这里还要用逐次逼近法給出定理 3 的証明，但是和定理 2 的証明相比要作些改变。

### 預 备 事 項

为了能够无拘束地运用向量記号，首先来作一些很自然的定义并建立一些关于向量函数的簡单的不等式。

如所熟知，向量(2)的 长度 或 模 $|\boldsymbol{x}|$ 按公式

$$|\boldsymbol{x}| = +\sqrt{(x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2}$$

确定。我們知道而且并无困难地就可証明：如果 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 是两个向量，那末成立不等式

$$|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leqslant |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|.$$

从这个不等式可推出对于任意个数向量 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_l$ 的类似的不等式，即

$$|\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_l| \leqslant |\boldsymbol{x}_1| + \cdots + |\boldsymbol{x}_l|, \tag{4}$$

設 $\varphi(t)=(\varphi^1(t),\cdots,\varphi^n(t))$ 是实变量 $t$ 的連續向量函数，即坐标为 $t$ 的連續函数的向量。如果函数 $\varphi(t)$ 在区間 $r_1<t<r_2$ 上給定，那末对于 $r_1<t_0<r_2$，在同样的区間上可以定义向量函数

$$\psi(t)=\int_{t_0}^{t}\varphi(\tau)d\tau,$$

向量 $\psi(t)$ 的支量 $\psi^1(t),\cdots,\psi^n(t)$ 由公式

$$\psi^i(t)=\int_{t_0}^{t}\varphi^i(\tau)d\tau$$

給出；同时成立不等式

$$\left|\int_{t_0}^{t}\varphi(\tau)d\tau\right|\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}|\varphi(\tau)|d\tau\right|. \tag{5}$$

为了証明这个不等式，分积分区間为 $m$ 等分，置

$$\Delta=\frac{t-t_0}{m};\ t_k=t_0+k\Delta,\quad k=1,\cdots,m$$

（数 $\Delta$ 在 $t>t_0$ 时是正的，在 $t<t_0$ 时是負的）。按照向量函数积分的定义并根据(4)，我們有

$$\left|\int_{t_0}^{t}\varphi(\tau)d\tau\right|=\left|\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\varphi(t_k)\Delta\right|\leqslant\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}|\varphi(t_k)|\cdot|\Delta|$$

$$=\left|\int_{t_0}^{t}|\varphi(\tau)|d\tau\right|.$$

还要建立一个关于向量变量 $x$ 的向量函数

$$g(x)=(g^1(x^1,\cdots,x^n),\cdots,g^n(x^1,\cdots,x^n))$$

的不等式，它是在变量 $x^1,\cdots,x^n$ 的空間中的凸集 $\Delta$ 上給定的。假設成立不等式

$$\left|\frac{\partial g^i(x^1,\cdots,x^n)}{\partial x^j}\right|\leqslant K,$$

其中 $K$ 为正数。那末可以証明，对于集 $\Delta$ 中的任意两点 $x$ 和 $y$，成立不等式

$$\sqrt{\ }\ |g(x)-g(y)|\leqslant n^2K|x-y|. \tag{6}$$

为了証明不等式(6)，考虑連接两点 $x$ 和 $y$ 的綫段，即置

$$z(s)=y+s(x-y),$$

当 $s$ 走遍数值 $0\leqslant s<1$ 时，点 $z(s)$ 走遍点 $x$ 和 $y$ 的連綫，由于集 $\Delta$ 是凸的，这些点始終在 $\Delta$ 内。应用拉格朗日公式得到

$$g^i(x)-g^i(y)=g^i(z(1))-g^i(z(0))=\frac{dg^i(z(s))}{ds}\Big|_{s=\theta}.$$

按复合函数的导微公式計算导数 $\frac{dg^i(z(s))}{ds}$，得到

$$\begin{aligned}\frac{dg^i(z(s))}{ds}&=\frac{dg^i(z^1(s),\cdots,z^n(s))}{ds}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g^i(z^1(s),\cdots,z^n(s))}{\partial x^k}\cdot\frac{dz^k(s)}{ds}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g^i(z^1(s),\cdots,z^n(s))}{\partial x^k}(x^k-y^k).\end{aligned}$$

因此，

$$|g^i(x)-g^i(y)|\leqslant\sum_{k=1}^{n}K|x^k-y^k|\leqslant\sum_{k=1}^{n}K|x-y|\leqslant nK|x-y|.$$

把这个不等式平方，并关于 $i$ 相加再开方，得到

$$|g(x)-g(y)|\leqslant n^{\frac{3}{2}}K|x-y|\leqslant n^2K|x-y|.$$

和定理 1 的証明一样，我們把微分方程(3)化为积分方程。

**1)** 設 $x=\varphi(t)$ 是微分方程(3)的某个解，因而成立恒等式

$$\dot{\varphi}(t)=f(t,\varphi(t)),\tag{7}$$

并設

$$\varphi(t_0)=x_0\tag{8}$$

是这个解所滿足的初始条件。可以証明，关系式(7)和(8)一起等价于一个关系式

$$\varphi(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(\tau,\varphi(\tau))d\tau.\tag{9}$$

我們来証明这件事。假設积分恒等式 (9) 成立。在其中令 $t=t_0$，就得到等式 (8)，而关于 $t$ 导微 (9)，就得到恒等式 (7)．現在假定关系式(7)和(8)成立。从 $t_0$ 到 $t$ 积分关系式(7)并考虑到

关系式(8)即得关系式(9)。

**2)** 利用恒等式(9)的右边，对于每一个图形在区域 $I$ 内的向量函数 $\varphi(t)$，以如下的函数 $\varphi^*(t)$ 同它对应：

$$\varphi^*(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))\,d\tau. \tag{10}$$

这个关系在算子形式下可简写为形状：

$$\varphi^* = A\varphi. \tag{11}$$

方程(9)现在可写为形式：

$$\varphi = A\varphi. \tag{12}$$

**3)** 設 $\varphi(t)$ 是給定在区間 $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$ 上的向量函数。我們定义这函数的 **范数** $\|\varphi\|$ 如下：

$$\|\varphi\| = \max_{r_1 \leqslant t \leqslant r_2} |\varphi(t)|.$$

利用范数概念可以叙述确定在区間 $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$ 上的向量函数列

$$\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_i, \cdots \tag{13}$$

的一致收敛性条件。如果

$$\lim_{i\to\infty} \|\varphi - \varphi_i\| = 0,$$

向量函数列 (13) 将一致收敛于給定在同一区間 $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$ 上的向量函数 $\varphi$。为了序列(13)一致收敛，不等式

$$\|\varphi_{i+1} - \varphi_i\| \leqslant a_i$$

的成立是充分的，其中数 $a_0, a_1, \cdots, a_i, \cdots$ 組成收敛級数。

現在轉到定理 2 的証明。

## 定理 2 的証明

因为点 $(t_0, x_0) = (t_0, x_0^1, \cdots, x_0^n)$ 属于区域 $\Gamma$，所以存在正数 $q$ 和 $a$，使得所有适合条件

$$|t - t_0| \leqslant q, \quad |x - x_0| \leqslant a \tag{14}$$

的点$(t, x)$在区域 $\Gamma$ 内。满足条件(14)的所有的点$(t, x)$构成的集 $\Pi$ 是有界閉集(图 45)，因此連續函数

$$|f(t, x)| \text{ 和 } \left|\frac{\partial f^i(t, x)}{\partial x^j}\right|, \quad i, j=1, \cdots, n$$

在它上面有界，即存在正数 $M$ 和 $K$，使得

$$|f(t, x)| \leqslant M, \ \left|\frac{\partial f^i(t, x)}{\partial x^j}\right| \leqslant K, \quad i, j=1, \cdots, n \quad (15)$$

在集 $\Pi$ 上成立。

除了集 $\Pi$ 而外，考虑含在 $\Pi$ 内而由不等式

$$|t-t_0| \leqslant r, \quad |x-x_0| \leqslant a$$

确定的集 $\Pi_r$，其中

$$r \leqslant q \quad (16)$$

(图 45)。以 $\Omega_r$ 記給定在区間 $|t-t_0| \leqslant r$ 上而图形在 $\Pi_r$ 内的連續向量函数族。因此，在区間 $|t-t_0| \leqslant r$ 上确定的函数 $\varphi$，当且只当对于这区間上的任意点 $t$ 成立不等式

$$|\varphi(t)-x_0| \leqslant a \quad (17)$$

时才属于族 $\Omega_r$。

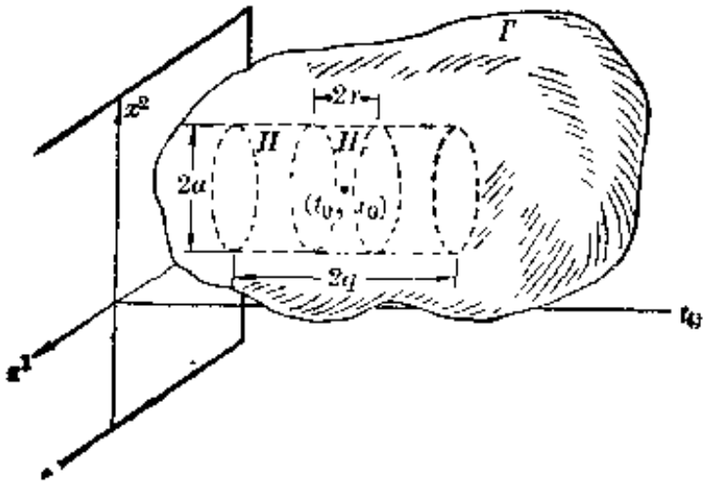


图 45

現在設法选取数 $r$ 使得以下两个条件满足：

1° 如果函数 $\varphi$ 属于族 $\Omega_r$，那末函数 $\varphi^*=A\varphi$ (参看 (10)，(11))也属于族 $\Omega_r$。

2° 存在数 $k$, $0<k<1$, 使得对于族 $\Omega_r$ 中的任意两个函数 $\psi$ 和 $\chi$, 成立不等式

$$\|A\psi-A\chi\|\leqslant k\|\psi-\chi\|. \tag{18}$$

考察条件1°. 为了使得函数 $\varphi^*=A\varphi$ 属于族 $\Omega_r$, 当 $|t-t_0|\leqslant r$ 时成立不等式

$$|\varphi^*(t)-x_0|\leqslant a$$

是必要而充分的。根据(10), (5)和(15), 我們有

$$\begin{aligned}|\varphi^*(t)-x_0| &= \left|\int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))d\tau\right| \\ &\leqslant \left|\int_{t_0}^{t} |f(\tau, \varphi(\tau))|d\tau\right| \leqslant Mr.\end{aligned}$$

从此看出, 当

$$r\leqslant \frac{a}{M} \tag{19}$$

时, 条件 1° 是满足的。

现在考察条件 2°. 我們有

$$\begin{aligned}|\psi^*(t)-\chi^*(t)| &= \left|\int_{t_0}^{t}(f(\tau, \psi(\tau))-f(\tau, \chi(\tau)))d\tau\right| \\ &\leqslant \left|\int_{t_0}^{t}|f(\tau, \psi(\tau))-f(\tau, \chi(\tau))|d\tau\right|. \end{aligned}\tag{20}$$

现在估計最后的被积表达式, 利用不等式(6)和(15):

$$|f(\tau, \psi(\tau))-f(\tau, \chi(\tau))|\leqslant n^2K|\psi(\tau)-\chi(\tau)|. \tag{21}$$

从(20)和(21)推出

$$\|A\psi-A\chi\|=\|\psi^*-\chi^*\|\leqslant n^2Kr\|\psi-\chi\|.$$

因此, 如果

$$r\leqslant \frac{k}{n^2K}, \tag{22}$$

而 $k<1$, 条件 2° 就满足。

这样, 只要数 $r$ 满足不等式 (16), (19), (22) (以后我們假定这些式子是满足的), 对于族 $\Omega_r$ 条件 1° 和 2° 就成立。

现在作确定在区間 $|t-t_0|\leqslant r$ 上的向量函数列

$$\varphi_0(t)\equiv x_0,\ \varphi_1(t),\ \cdots,\ \varphi_i(t),\ \cdots, \tag{23}$$

置

$$\varphi_{i+1}=A\varphi_i,\quad i=0,1,\cdots. \tag{24}$$

由于函数 $\varphi_0$ 属于族 $\Omega_r$，所以序列 (23) 中的所有函数属于同一族（参看条件 1°）。其次，我們有（参看(17)）

$$\|\varphi_1-\varphi_0\|=\max_{|t-t_0|<r}|\varphi_1(t)-x_0|\leqslant a.$$

由于(18)，得到

$$\|\varphi_{i+1}-\varphi_i\|=\|A\varphi_i-A\varphi_{i-1}\|\leqslant k\|\varphi_i-\varphi_{i-1}\|,$$

从而

$$\|\varphi_{i+2}-\varphi_i\|\leqslant ak^i. \tag{25}$$

因此，根据 3)，序列 (23) 一致收敛于族 $\Omega_r$ 中的某个連續函数 $\varphi$。我們来証明，函数 $\varphi$ 满足方程(12)。为此注意到，序列

$$A\varphi_0,\ A\varphi_1,\ \cdots,\ A\varphi_i,\ \cdots$$

一致收敛于函数 $A\varphi$；事实上，我們有（参看(18)）

$$\|A\varphi-A\varphi_i\|\leqslant k\|\varphi-\varphi_i\|.$$

对关系式(24)，令 $i\to\infty$ 而取极限，得到

$$\varphi=A\varphi.$$

这样，方程(3)的满足初始条件(8)的解 $x=\varphi(t)$ 的存在性証明了；并且确知解 $x=\varphi(t)$ 在区間 $|t-t_0|<r$ 上有定义，其中 $r$ 是适合不等式(16)，(19)，(22)的任意正数。

現在轉到唯一性的証明。設 $x=\psi(t)$ 和 $x=\chi(t)$ 是方程 (3) 的有公共初始条件 $t_0$，$x_0$ 的两个解，而区間 $r_1<t<r_2$ 是解 $\psi$ 和 $\chi$ 的存在区間的交集；显然有 $r_1<t_0<r_2$。以 $N$ 記区間 $r_1<t<r_2$ 上使解 $\psi$ 和 $\chi$ 相合的所有点的总体。由于集 $N$ 含有 $t_0$，因而不是空集。我們要証明集 $N$ 是开的并且它在区間 $r_1<t<r_2$ 上也是閉的。从此，根据 § 20 中命題 4) 推出，集 $N$ 和区間 $r_1<t<r_2$ 相合，就是說，解 $\psi$ 和 $\chi$ 在这整个区間上相一致。

首先証明集 $N$ 是开的。設 $t_1$ 是集 $N$ 中的任意一点；因为解

$\psi(t)$ 和 $\chi(t)$ 在这一点相合，即 $\psi(t_1)=\chi(t_1)=x_1$，因而 $(t_1, x_1)$ 可以取为两个解的共同的初始值。在这个意义上点 $(t_1, x_1)$ 和点 $(t_0, x_0)$ 并无区别，所以我們对于点仍保持記号 $(t_0, x_0)$：这使我們能沿用以前的記号。把微分方程(3)化为积分方程(9)，我們得到关于两个函数 $\psi(t)$ 和 $\chi(t)$ 的积分等式，在算子的形式下，它們可写为形式：

$$\psi=A\psi,\quad \chi=A\chi. \tag{26}$$

現在同以前一样，在区域 $\Gamma$ 内取以点 $(t_0, x_0)$ 为中心的集 $\Pi$（参看不等式 (14)），然后取集 $\Pi_r$，使得 $r$ 除了滿足不等式 (16)，(19)，(22) 以外，还滿足条件：当 $|t-t_0|\leqslant r$ 时，函数 $\psi$ 和 $\chi$ 有定义且适合不等式

$$|\psi(t)-x_0|\leqslant a,\quad |\chi(t)-x_0|\leqslant a.$$

这是可能的，因为函数 $\psi(t)$ 和 $\chi(t)$ 皆連續。因此，作为区間 $|t-t_0|\leqslant r$ 上的函数 $\psi(t)$ 和 $\chi(t)$ 包含在族 $\Omega_r$ 中，从此根据不等式(18)和关系式(26)，得到

$$\|\psi-\chi\|=\|A\psi-A\chi\|\leqslant k\|\psi-\chi\|,$$

这不等式只在 $\|\psi-\chi\|=0$ 时，就是当函数 $\psi$ 和 $\chi$ 在区間 $|t-t_0|\leqslant r$ 上相一致时才能成立。从此推知，除了一点 $t_0$ 以外，还有以这点为中心的某个区間 $|t-t_0|<r$ 也属于集 $N$，所以集 $N$ 是开的。

現在証明集 $N$ 在区間 $r_1<t<r_2$ 上是閉的。就是說，如果集 $N$ 上的点列 $t_1, t_2, \cdots, t_i, \cdots$ 收敛于区間 $r_1<t<r_2$ 上的一点 $\bar{t}$，那末点 $\bar{t}$ 也属于集 $N$。我們有

$$\psi(t_i)=\chi(t_i),\quad i=1, 2, \cdots.$$

因为函数 $\psi(t)$ 和 $\chi(t)$ 在点 $\bar{t}$ 有定义且为連續的，所以当 $i\to\infty$ 时对上式取极限，得到 $\psi(\bar{t})=\chi(\bar{t})$，从而点 $\bar{t}$ 也属于 $N$。

这样，定理 2 得証。

現在我們把在証明定理 2 时所确立的某些事实单独划为一个

命題，它們也是以后需要的。

**4)** 假定方程組(1)(或是在向量形式下的方程(3))的右边在区域 $\Gamma$ 上有定义，并且連同它們的偏导数 $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$ 在 $\Gamma$ 上連續。設 $(t_0, x_0)$ 是区域 $\Gamma$ 內的某一点，而 $q$ 和 $a$ 是这样的正数，使得由一切滿足不等式(14)的点所构成的点集 $\Pi$ 含在区域 $\Gamma$ 內。其次，假定 $M$ 和 $K$ 是这样的正数，使得对于滿足不等式(14)的所有点 $(t, x)$ 成立不等式 (15)。最后，假設 $r$ 是适合不等式 (16), (19), (22) 的任意正数。那末方程 (3) 的具有初始值 $(t_0, x_0)$ 的解在区間 $|t-t_0|<r$ 上有定义。并且这个解在区間 $|t-t_0|\leqslant r$ 上是作为函数列(23)的极限而得到的，序列中的函数由关系式(24)依次給定，同时这些函数滿足不等式(25)。

## 定理 3 的証明

我們轉到定理 3 的証明，这个定理断定：对于系数 $a_j^i(t)$ 和自由項 $b^i(t)$ 在区間 $q_1<t<q_2$ 上有定义且連續的标准綫性方程組

$$\dot{x}^i=\sum_{j=1}^{n}a_j^i(t)x^j+b^i(t)=f^i(t, x^1, \cdots, x^n), \quad i=1, \cdots, n, \quad (27)$$

存在确定在整个区間 $q_1<t<q_2$ 上而具有任意的初始值

$$t_0, x_0^1, \cdots, x_0^n, \quad q_1<t_0<q_2 \quad (28)$$

的解。我們来証明，在定理 2 的証明中用过的同一算子 $A$ 所引出的向量函数列

$$\varphi_0(t)\equiv x_0, \varphi_1(t), \cdots, \varphi_i(t), \cdots \quad (29)$$

在整个区間 $q_1<t<q_2$ 上是收斂的，并且在属于这区間內部的任意区間上是一致收斂的，但是算子 $A$ (参看 (10), (11)) 現在应由方程(27)的右边来确定。为了能够引用逐次逼近法，在这里需要更精确地估計数 $|\varphi_{i+1}-\varphi_i|$, $i=0, 1, 2, \cdots$。同时，将会看到

在所討論的情形，逐次逼近法并沒有加上压縮映象法的框子。

設 $A$ 是从微分方程組(27)以及初始值(28)出发而由关系式(10)和 (11) 所确定的算子。算子 $A$ 显然可以对确定在区間 $q_1<t<q_2$ 上的任何連續函数 $\varphi(t)$ 来运用。由命題 1) 推知，方程組 (27) 連同初始条件 (28) 等价于算子方程

$$\varphi = A\varphi, \tag{30}$$

我們对它来求确定在整个区間 $q_1<t<q_2$ 上的解。由递推公式

$$\varphi_{i+1} = A\varphi_i, \quad i=0, 1, 2, \cdots$$

給出的序列 (29) 中的函数是在区間 $q_1<t<q_2$ 上确定的。

設 $r_1\leqslant t\leqslant r_2$ 是含 $t_0$ 在內部而又在区間 $q_1<t<q_2$ 內的任一区間，因此，

$$q_1<r_1<t_0<r_2<q_2.$$

我們証明序列 (29) 在区間 $r_1\leqslant t\leqslant r_2$ 上一致收敛于方程 (30) 的解。对于方程 (27) 的右边，我們有

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j} = a^i_j(t),$$

所以，当 $r_1\leqslant t\leqslant r_2$ 时，成立不等式

$$\left|\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right|\leqslant K, \quad i, j=1, \cdots, n,$$

其中 $K$ 是某个正数。因为函数 $\varphi_1(t)$ 在区間 $r_1\leqslant t\leqslant r_2$ 上有界，所以在这区間上成立不等式

$$|\varphi_1(t)-\varphi_0(t)|\leqslant C,$$

其中 $C$ 是某个常数。并且，在同样的区間上我們依次得到 (参看 (5) 和 (6))

$$\begin{aligned}|\varphi_2(t)-\varphi_1(t)| &= \left|\int_{t_0}^{t}(\boldsymbol{f}(\tau, \varphi_1(\tau))-\boldsymbol{f}(\tau, \varphi_0(\tau)))d\tau\right| \\ &\leqslant \left|\int_{t_0}^{t}|\boldsymbol{f}(\tau, \varphi_1(\tau))-\boldsymbol{f}(\tau, \varphi_0(\tau))|d\tau\right| \\ &\leqslant n^2KC|t-t_0|;\end{aligned}$$

$$|\varphi_2(t)-\varphi_1(t)|=\left|\int_{t_0}^{t}(f(\tau,\varphi_2(\tau))-f(\tau,\varphi_1(\tau)))d\tau\right|$$
$$\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}|f(\tau,\varphi_2(\tau))-f(\tau,\varphi_1(\tau))|d\tau\right|$$
$$\leqslant\frac{(n^2K)^2C}{2!}|t-t_0|^2;$$

.....

$$|\varphi_{i+1}(t)-\varphi_i(t)|=\left|\int_{t_0}^{t}(f(\tau,\varphi_i(\tau))-f(\tau,\varphi_{i-1}(\tau)))d\tau\right|$$
$$\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}|f(\tau,\varphi_i(\tau))-f(\tau,\varphi_{i-1}(\tau))|d\tau\right|$$
$$\leqslant\frac{(n^2K)^iC}{i!}|t-t_0|^i.$$

从此得到

$$\|\varphi_{i+1}(t)-\varphi_i(t)\|\leqslant C\frac{(n^2K(r_2-r_1))^i}{i!}.$$

因为数$C\frac{(n^2K(r_2-r_1))^i}{i!}$組成收敛級数，所以序列 (29) 在区間 $r_1\leqslant t\leqslant r_2$ 上一致收敛于某个連續函数 $\varphi(t)$. 对于这个函数，我們有

$$\|A\varphi_i-A\varphi\|\leqslant\max_{r_1\leqslant t\leqslant r_2}\left|\int_{t_0}^{t}|f(\tau,\varphi_i(\tau))-f(\tau,\varphi(\tau))|d\tau\right|$$
$$\leqslant n^2K(r_2-r_1)\|\varphi_i-\varphi\|,$$

因而函数列　　$A\varphi_0, A\varphi_1, \cdots, A\varphi_i, \cdots$

在区間 $r_1\leqslant t\leqslant r_2$ 上一致收敛于函数 $A\varphi$. 对关系式 (31) 取极限，我們得到

$$\varphi=A\varphi.$$

由于 $r_1\leqslant t\leqslant r_2$ 是含 $t_0$ 在内而又含在区間 $q_1<t<q_2$ 内部的任意区間，所以序列(29)在区間 $q_1<t<q_2$ 内的每一点收敛，因此函数 $\varphi(t)$ 是在整个区間 $q_1<t<q_2$ 上确定的，并且在这区間上是方程 (30) 的解。

这样，定理 3 得証。

## §22. 解的連續性和可微性的局部的定理

在这里我們討論右边同某些参数有关的标准方程組，并証明在某些假定之下，这些方程組的取固定初始值的解是这些参数的連續可微函数，而在变动的初始值的情形，解是初始值的連續可微函数。将所討論的标准方程組写为形式：

$$\dot{x}^i = f^i(t, x^1, \cdots, x^n, \mu^1, \cdots, \mu^l), \quad i = 1, \cdots, n, \tag{1}$$

其中 $\mu^1, \cdots, \mu^l$ 是某些参数。往后到处假定这些方程的右边

$$f^i(t, x^1, \cdots, x^n, \mu^1, \cdots, \mu^l), \quad i = 1, \cdots, n \tag{2}$$

以及它們的偏导数

$$f^i_j(t, x^1, \cdots, x^n, \mu^1, \cdots, \mu^l) \quad \frac{\partial f^i(t, x^1, \cdots, x^n, \mu^1, \cdots, \mu^l)}{\partial x^j}, \quad i, j = 1, \cdots, n \tag{3}$$

在变量 $t, x^1, \cdots, x^n, \mu^1, \cdots, \mu^l$ 的空間的某个区域 $\tilde{I}$ 上有定义且連續。在向量的形式下，方程組(1)改写为形状：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}); \tag{4}$$

其中

$$\boldsymbol{x} = (x^1, \cdots, x^n), \quad \boldsymbol{\mu} = (\mu^1, \cdots, \mu^l), \quad \boldsymbol{f} = (f^1, \cdots, f^n)$$

是分别属于 $n$、$l$ 及 $n$ 維向量空間的向量。

### 解对参数的連續依賴性

下面的关于解对参数連續依賴性的定理 13 要通过簡单地重复定理 2 的証明的方法来証，这时我們将只利用定理 2 的証明中划为 §21 的命題 4)的那一部分。

**定理 13**. 設 $(t_0, x_0, \mu_0)$ 是区域 $\tilde{I}$ 中的任意点。那末存在正数 $r$ 和 $\rho$，使得当

$$|\mu - \mu_0| < \rho$$

时，方程(4)的滿足初始条件

$$\varphi(t_0, \mu) = x_0 \tag{5}$$

的解

$$x = \varphi(t, \mu)$$

在区間 $|t-t_0| < r$ 上确定，并且是它的所有变量 $t, \mu^1, \cdots, \mu^l$ 的連續函数。

**証明** 首先取正数 $q, a, \rho$ 使得所有满足不等式

$$|t-t_0| \leqslant q, \quad |x-x_0| \leqslant a, \quad |\mu-\mu_0| \leqslant \rho \tag{6}$$

的点 $(t, x, \mu)$ 的集合 $\widetilde{\Pi}$ 属于区域 $\widetilde{\Gamma}$. 因为函数(2)和(3)在区域 $\widetilde{\Gamma}$ 内連續，而集 $\widetilde{\Pi}$ 是閉的，所以存在正数 $M$ 和 $K$，使得对于集 $\widetilde{\Pi}$ 的每一点 $(t, x, \mu)$，成立不等式

$$|f(t, x, \mu)| \leqslant M, \quad |f_j^i(t, x, \mu)| \leqslant K.$$

現在取正数 $r$ 适合不等式（参看 § 21, 命題 4) 中提到的不等式 (16), (19), (22))

$$r \leqslant q, \quad r \leqslant \frac{a}{M}, \quad r < \frac{k}{n^2 K}, \quad k < 1.$$

对于每个满足不等式 (6) 的固定值 $\mu$，把微分方程 (4) 連同初始条件(5)換成积分方程

$$\varphi(t, \mu) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau, \mu), \mu) d\tau \tag{7}$$

(参看 §21, 1))。利用这个积分方程的右边来确定算子，它使函数 $\varphi(t, \mu)$ 同函数

$$\varphi^*(t, \mu) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau, \mu), \mu) d\tau$$

相对应，或是簡記为

$$\varphi^* = A_\mu \varphi .$$

其次，我們定义在集 $|t-t_0| \leqslant r$, $|\mu-\mu_0| \leqslant \rho$ 上給定的变量 $t, \mu$ 的向量函数 $\varphi(t, \mu)$ 的族 $\Omega_r$，而規定只要 $|t-t_0| \leqslant r$, $|\mu-\mu_0| \leqslant \rho$ 时，成立不等式

$$|\varphi(t, \mu) - x_0| \leqslant a,$$

函数 $\varphi(t, \mu)$ 就属于族 $\Omega_r$. 在 § 21 的命題 4) 中已經注意到，对于

$|\mu-\mu_0|\leqslant\rho$ 中每个固定的 $\mu$ 按递推关系

$$\varphi_{i+1}=A_\mu\varphi_i$$

确定的函数列

$$\varphi_0(t,\ \mu)\equiv x_0,\ \varphi_1(t,\ \mu),\ \cdots,\ \varphi_i(t,\ \mu),\ \cdots \tag{8}$$

在区间 $|t-t_0|\leqslant r$ 上有定义且一致收敛于方程 (7) 的解 $\varphi(t,\ \mu)$，同时成立不等式

$$\|\varphi_{i+1}-\varphi_i\|<ak^i.$$

这些不等式对于适合条件 $|t-t_0|\leqslant r$，$|\mu-\mu_0|\leqslant\rho$ 的变量 $t$，$\mu^1,\cdots,\mu^l$ 的任意值成立。从这些不等式推知，同变量 $t$，$\mu^1,\cdots,\mu^l$ 相关的連續函数列(8)关于这些变量的总体是一致收敛的，因此，它的极限函数 $\varphi(t,\ \mu)$ 是变量 $t$，$\mu^1,\cdots,\mu^l$ 的总体的連續函数。

这样，定理 13 得証。

## 解关于参数的可微性

現在轉到方程 (4) 的解 $\varphi(t,\ \mu)$ 关于参数 $\mu^1,\cdots,\mu^l$ 的可微性問題的討論。为此，先証明輔助命題 1)，通常称它为阿达馬 (Hadamard) **引理**。

**1)** 設 $g(t^1,\cdots,t^p,u^1,\cdots,u^q)$ 是 $p+q$ 个变量的函数，它是在这些变量的空間的区域 $\Delta$ 内确定的，$\Delta$ 关于变量 $u^1,\cdots,u^q$ 是凸区域。置

$$\boldsymbol{t}=(t^1,\cdots,t^p),\ \boldsymbol{u}=(u^1,\cdots,u^q),$$

我們可以把 $g$ 写成两个向量的函数 $g(\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{u})$。假定在函数 $g(\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{u})$ 的整个定义区域内，它和它的偏导数 $\dfrac{\partial g(\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{u})}{\partial u^j}$，$j=1,\cdots,q$ 是連續的。那末可以証明，对于区域 $\Delta$ 中任意一对有相同坐标 $\boldsymbol{t}$ 的点 $(\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{u}_1)$，$(\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{u}_2)$，成立关系

$$g(\boldsymbol{t},\ u_2)-g(\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{u}_1)=\sum_{j=1}^{q}h_j(\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2)\,(u_2^j-u_1^j), \tag{9}$$

其中函数 $h_j(t, u_1, u_2)$, $j=1, \cdots, q$ 对于变量 $t, u_1, u_2$ 的一切提到的值有定义且連續(特别,在 $u_1, u_2$ 相合时也如此)①。

为了証明命題 1),置

$$w(s) = u_1 + s(u_2 - u_1), \quad 0 \leqslant s \leqslant 1, \tag{10}$$

于是我們有

$$g(t, u_2) - g(t, u_1) = g(t, w(1)) - g(t, w(0))$$
$$= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} g(t, w(s))\, ds.$$

現在計算导数 $\frac{\partial}{\partial s} g(t, w(s))$;我們有

$$\frac{\partial}{\partial s} g(t, w(s)) = \frac{\partial}{\partial s} g(t, w^1(s), \cdots, w^q(s))$$
$$= \sum_{j=1}^{q} \frac{\partial g(t, w(s))}{\partial w^j} \cdot \frac{\partial w^j(s)}{\partial s}.$$

因为由(10)显然有

$$\frac{\partial w^j(s)}{\partial s} = u_2^j - u_1^j, \quad j=1, \cdots, q,$$

所以再令

$$h_j(t, u_1, u_2) = \int_0^1 \frac{\partial g(t, w(s))}{\partial w^j}\, ds,$$

我們就得到公式(9)。因为按假定,函数 $\frac{\partial g(t, u)}{\partial w^j}$ 是連續的,所以函数 $h_j(t, u_1, u_2)$ 也連續。

这样,命題 1)得証。

**定理 14**. 假定方程組(1)的右边的偏导数

$$e_k^i(t, x, \mu) = \frac{\partial}{\partial \mu^k} f^i(t, x, \mu), \quad i=1, \cdots, n;\ k=1, \cdots, l \tag{11}$$

---

① 可以証明, $h_j(t, u, u) = \frac{\partial g(t, u)}{\partial w^j}$. 事实上,取 $u_1 = u = (u^1, \cdots, u^j, \cdots, u^q)$, $u_2 = (u^1, \cdots, u^{j-1}, \bar{u}^j, u^{j+1}, \cdots, u^q)$, 于是 $g(t, u_2) - g(t, u) = h_j(t, u, u_2)(\bar{u}^j - u^j)$. 以 $\bar{u}^j - u^j$ 除这等式的两边并令 $\bar{u}^j \to u^j$,即得要証的結論。——譯者注

在区域 $\tilde{\Gamma}$ 内存在且連續。設 $(t_0, x_0, \mu_0)$ 是区域 $\tilde{\Gamma}$ 的某一点。那末存在正数 $r'$ 和 $\rho'$，使得当 $|t-t_0|<r'$，$|\mu-\mu_0|<\rho'$ 时，方程(4)的滿足初始条件

$$\varphi(t_0, \mu)=x_0 \tag{12}$$

的解具有連續偏导数

$$\frac{\partial\varphi(t, \mu)}{\partial\mu^k}, \tag{13}$$

又混合偏导数

$$\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial\mu^k}\varphi(t, \mu) \tag{14}$$

也是連續函数且同导微的順序无关。并且可以証明，偏导数(13)作为时間 $t$ 的函数滿足方程組

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi^i(t, \mu)}{\partial\mu^k}\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{n} f_j^i(t, \varphi(t, \mu), \mu)\,\frac{\partial\varphi^j(t, \mu)}{\partial\mu^k}+e_k^i(t, \varphi(t, \mu), \mu), \tag{15}$$

它所滿足的初始条件为

$$\frac{\partial\varphi^i(t_0, \mu)}{\partial\mu^k}=0. \tag{16}$$

方程組(15)称为方程組(1)的 **变分方程組**。

**証明** 为了簡化繁杂的記号，在証明中假設 $k=l$，并且把向量 $\mu=(\mu^1, \cdots, \mu^l)$ 分解为向量 $\lambda=(\mu^1, \cdots, \mu^{l-1})$ 和标量 $\nu=\mu^l$，因而有

$$\mu=(\lambda, \nu).$$

根据定理 13，解 $\varphi(t, \mu)=\varphi(t, \lambda, \nu)$ 对于

$$|t-t_0|<r, \quad |\mu-\mu_0|<\rho$$

有定义且連續；以后我們只取参数 $\lambda$，$\nu$ 的那些滿足第二个条件的值。

作出为了計算导数 $\dfrac{\partial\varphi^i(t, \lambda, \nu)}{\partial\nu}$ 的差商，就是置

$$\psi^i(t, \lambda, \nu_1, \nu_2) = \frac{1}{\nu_2 - \nu_1}(\varphi^i(t, \lambda, \nu_2) - \varphi^i(t, \lambda, \nu_1));$$

这差商当 $\nu_1 \neq \nu_2$ 时有定义。因为

$$\varphi^i(t, \lambda, \nu), \quad i = 1, \cdots, n$$

是方程組(1)的解，所以有

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\psi^i(t, \lambda, \nu_1, \nu_2) &= \frac{1}{\nu_2 - \nu_1}\left(\frac{\partial}{\partial t}\varphi^i(t, \lambda, \nu_2) - \frac{\partial}{\partial t}\varphi^i(t, \lambda, \nu_1)\right) \\ &= \frac{1}{\nu_2 - \nu_1}(f^i(t, \varphi(t, \lambda, \nu_2), \lambda, \nu_2) \\ &\qquad - f^i(t, \varphi(t, \lambda, \nu_1), \lambda, \nu_1)). \end{aligned} \tag{17}$$

对这个等式的右边应用阿达馬引理(参看 1))，这时置

$$\left.\begin{aligned} &t = (t, \lambda), \ u_1 = (\varphi(t, \lambda, \nu_1), \nu_1), \ u_2 = (\varphi(t, \lambda, \nu_2), \nu_2), \\ &g(t, u) = f^i(t, \varphi(t, \lambda, \nu), \lambda, \nu). \end{aligned}\right\}$$

根据 1)，我們得到

$$\begin{aligned} &f^i(t, \varphi(t, \lambda, \nu_2), \lambda, \nu_2) - f^i(t, \varphi(t, \lambda, \nu_1), \lambda, \nu_1) \\ &= \sum_{j=1}^{n} h_j^i(t, u_1, u_2)(\varphi^j(t, \lambda, \nu_2) - \varphi^j(t, \lambda, \nu_1)) \\ &\quad + h_{n+1}^i(t, u_1, u_2)(\nu_2 - \nu_1), \end{aligned}$$

其中函数 $h_j^i(t, u_1, u_2)$，$j = 1, \cdots, n+1$ 是它的所有变量的連續函数，归根到底是变量 $t, \lambda, \nu_1, \nu_2$ 的函数：

$$h_j^i(t, u_1, u_2) = \tilde{h}_j^i(t, \lambda, \nu_1, \nu_2).$$

因此，关系式(17)可以改写为形式：

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\psi^i(t, \lambda, \nu_1, \nu_2) &= \sum_{j=1}^{n} \tilde{h}_j^i(t, \lambda, \nu_1, \nu_2)\psi^j(t, \lambda, \nu_1, \nu_2) \\ &\quad + \tilde{h}_{n+1}^i(t, \lambda, \nu_1, \nu_2). \end{aligned} \tag{18}$$

最后的关系式是关于函数 $\psi^i(t, \lambda, \nu_1, \nu_2)$，$i = 1, \cdots, n$ 的綫性微分方程組，而这方程組的系数以及自由項不仅(連續地)依賴于 $t$，并且也依賴于 $\lambda, \nu_1, \nu_2$.

我們要讲明函数 $\psi^i(t, \lambda, \nu_1, \nu_2)$ 应当满足怎样的初始条件。由于(12)，我們有

$$\psi^i(t_0, \lambda, \nu_1, \nu_2) = \frac{i}{\nu_2 - \nu_1}(\varphi^i(t_0, \lambda, \nu_2) - \varphi^i(t_0, \lambda, \nu_1))$$

$$= \frac{1}{\nu_2 - \nu_1}(x_0^i - x_0^i) = 0.$$

因此，函数 $\psi^i(t, \lambda, \nu_1, \nu_2)$ 的初始条件有形状：

$$\psi^i(t_0, \lambda, \nu_1, \nu_2) = 0.$$

我們的目的是証明函数 $\psi^i(t, \lambda, \nu_1, \nu_2)$ 当 $\nu_2 \to \nu_1$ 时趋于确定的极限。为了确立这个事实，考察方程組

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi_*^i(t, \lambda, \nu_1, \nu_2) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{h}_j^i(t, \lambda, \nu_1, \nu_2)\psi_*^j(t, \lambda, \nu_1, \nu_2) + \tilde{h}_{n+1}^i(t, \lambda, \nu_1, \nu_2), \tag{19}$$

它是关于函数

$$\psi_*^i(t, \lambda, \nu_1, \nu_2), \quad i = 1, \cdots, n \tag{20}$$

的方程組，而适合初始条件

$$\psi_*^i(t_0, \lambda, \nu_1, \nu_2) = 0.$$

根据定理 13，函数(20)对于和常数 $t_0$，$\lambda_0 = (\mu_0^1, \cdots, \mu_0^{l-1})$，$\mu_0^l$，$\mu_0^l$ 的偏差充分小的那些值 $t$，$\lambda$，$\nu_1$，$\nu_2$ 有定义且为連續的。

函数 $\psi^i(t, \lambda, \nu_1, \nu_2)$ 和 $\psi_*^i(t, \lambda, \nu_1, \nu_2)$ 满足同样的方程組(18)，(19)，并且有相同的初始值；因此(根据定理 2) 它們相互一致：

$$\psi^i(t, \lambda, \nu_1, \nu_2) = \psi_*^i(t, \lambda, \nu_1, \nu_2).$$

这里的等式右边的函数当 $\nu_1 = \nu_2$ 时也有定义，而在等式左边的函数只在 $\nu_1 \neq \nu_2$ 时有定义。当 $\nu_2 \to \nu_1$ 而取极限时，我們断定

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\varphi^i(t, \lambda, \nu) = \psi_*^i(t, \lambda, \nu, \nu),$$

因此导数 $\frac{\partial}{\partial \nu}\varphi^i(t, \lambda, \nu)$ 存在，而是它的所有变量的連續函数，并且满足方程組：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \varphi^i(t, \boldsymbol{\lambda}, \nu)}{\partial \nu}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \tilde{h}_j^i(t, \boldsymbol{\lambda}, \nu, \nu) \frac{\partial \varphi^j(t, \boldsymbol{\lambda}, \nu)}{\partial \nu} + \tilde{h}_{n+1}^i(t, \boldsymbol{\lambda}, \nu, \nu). \quad (21)$$

从此看出，不仅导数

$$\frac{\partial \varphi^i(t, \boldsymbol{\lambda}, \nu)}{\partial \nu}$$

本身存在和連續，并且它們关于 $t$ 的导数

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \varphi^i(t, \boldsymbol{\lambda}, \nu)}{\partial \nu}\right) \quad (22)$$

也存在和連續。

这样結束了定理的第一部分的証明：确立了导数(14)存在和連續；可是导数(13)所满足的方程組(21)含有函数 $\tilde{h}_j^i(t, \boldsymbol{\lambda}, \nu, \nu)$，要借助于阿达馬引理从函数 $f^i$ 来确定它們还相当复杂[①]。

为了导出变分方程(15)，首先写出函数 $\varphi^i(t, \boldsymbol{\lambda}, \nu)$ 满足方程組(1)的事实。我們有

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi^i(t, \boldsymbol{\lambda}, \nu) = f^i(t, \varphi^1(t, \boldsymbol{\lambda}, \nu), \cdots, \varphi^n(t, \boldsymbol{\lambda}, \nu), \boldsymbol{\lambda}, \nu). \quad (23)$$

因为已經証明函数 $\varphi^i(t, \boldsymbol{\lambda}, \nu)$ 关于 $\nu$ 是可微的，所以能够关于 $\nu$ 导微关系式(23)的右边，因此，这个关系式的左边也可以关于 $\nu$ 导微。这样，我們得到(参看(3)，(11))

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{\partial}{\partial t}\varphi^i(t, \boldsymbol{\lambda}, \nu)\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} f_j^i(t, \varphi(t, \boldsymbol{\lambda}, \nu), \boldsymbol{\lambda}, \nu) \frac{\partial}{\partial \nu}\varphi^j(t, \boldsymbol{\lambda}, \nu)$$

$$+ e_i^i(t, \varphi(t, \boldsymbol{\lambda}, \nu), \boldsymbol{\lambda}, \nu). \quad (24)$$

从这个关系式看出，偏导数

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{\partial}{\partial t}\varphi^i(t, \boldsymbol{\lambda}, \nu)\right) \quad (25)$$

① 事实上，利用关于阿达馬引理下面的譯注，立即可从(21)得到变分方程(15)——譯者注

存在且連續。另一方面，由于偏导数(22)也連續，所以根据分析中熟知的定理，混合导数(22)和(25)是一致的。在方程(24)中交換关于 $t$ 和 $\nu$ 的导微順序，就得到当 $k=l$ 时的变分方程(15)。

关于 $\mu^k$ 导微初始条件(12)，就得到函数(13)的初始条件(16)。

这样，定理14完全証明。

現在从定理14引出一个簡单推論。

**2)** 如果方程組(1)的右边关于变量 $x^1, \cdots, x^n, \mu^1, \cdots, \mu^l$ 的直到 $m$ 阶为止的所有偏导数存在且連續，那末方程(1)的滿足初始条件(12)的解中的各个函数 $\varphi^i(t, \mu)$, $i=1, \cdots, n$, 关于参数 $\mu^1, \cdots, \mu^l$ 也有直到 $m$ 阶为止的連續偏导数。

命題2)用(关于数 $m$ 的)归納法証明，这时要用到变分方程(15)。对于 $m=1$，它已在定理14中証明了。現在假定命題对給定的数 $m$ 已成立，要証明它对于 $m+1$ 阶导数也成立。假設函数 $f^i(t, x, \mu)$ 关于变量 $x^1, \cdots, x^n, \mu^1, \cdots, \mu^l$ 的直到 $m+1$ 阶为止的偏导数是連續的。按归納法假設，函数 $\varphi^i(t, \mu)$ 关于变量 $\mu^1, \cdots, \mu^l$ 有直到 $m$ 阶为止的連續偏导数。因此，滿足方程組(15)的函数 $\dfrac{\partial \varphi^i(t, \mu)}{\partial \mu^k}$ 由于归納法的假設也有直到 $m$ 阶为止的連續偏导数，因为組(15)的右边关于它所綫性依賴的函数 $\dfrac{\partial \varphi^i(t, \mu)}{\partial \mu^k}$ 以及参数 $\mu^1, \cdots, \mu^l$ 皆有直到 $m$ 阶为止的偏导数。

这样，命題2)得証。

## 解对初始值的連續依賴性和可微性

現在研究方程(4)的解对于初始值 $t_0, x_0$ 的相依性；为了强調量 $t_0, x_0$ 是变的，現在把它們分别記为 $\tau, \xi$。方程(4)的具有初始值 $\tau, \xi$ 的解不仅和 $t$ 与 $\mu$ 有关、也和 $\tau$ 与 $\xi$ 有关，因此它应当写

成形式：

$$x=\varphi(t,\ \mu;\tau,\ \xi),\tag{26}$$

或是在坐标的形式下为

$$x^i=\varphi^i(t,\ \mu;\tau,\ \xi),\quad i=1,\ \cdots,\ n.$$

为了解决在变量 $t$, $\mu$, $\tau$, $\xi$ 的什么变化范圍內函数 (26) 才明显地有定义和連續，以及在什么条件下它也是可微的問題，我們应用变量代換把它归結为有定初始值的解的討論，而变动的初始值 $\tau$, $\xi$ 化为参数。这样，变量代換把关于解对初始条件相依性的全部問題化为解对参数相依性的相应的問題。这个变量代換在以下的命題 3) 中給出。

**3)** 設 $(\tau,\ \xi,\ \mu)$ 是区域 $\widetilde{\Gamma}$ 內的任意点。替代方程(4)中的自变量 $t$，按以下公式引进新自变量

$$t=\tau+s.\tag{27}$$

代替方程(4)中的未知向量函数 $x$，按公式

$$x=\xi+y\tag{28}$$

引进新未知向量函数 $y$. 在新变量之下，方程(4)写为

$$\frac{dy}{ds}=f(\tau+s,\ \xi+y,\ \mu).\tag{29}$$

因为变量 $t$, $x$, $\mu$ 的函数 $f(t,\ x,\ \mu)$ 确定在区域 $\widetilde{\Gamma}$ 內，所以变量 $s$, $y$, $\mu$, $\tau$, $\xi$ 的函数

$$g(s,\ y,\ \mu;\tau,\ \xi)=f(\tau+s,\ \xi+y,\ \mu)\tag{30}$$

在点 $(\tau+s,\ \xi+y,\ \mu)$ 属于区域 $\widetilde{\Gamma}$ 的条件之下定义。容易看出，这个条件在变量 $s$, $y$, $\mu$, $\tau$, $\xi$ 的空間中划分出某个区域 $\Gamma^*$，并且在这区域內向量函数(30)是連續的，而它的分量有关于变量 $y^1$, $\cdots$, $y^n$, $\xi^1$, $\cdots$, $\xi^n$ 的連續偏导数。設

$$y=\psi(s,\ \mu;\tau,\ \xi)\tag{31}$$

是方程(29)的解，滿足初始条件

$$\psi(0, \mu; \tau, \xi) = 0.$$

按公式(27)和(28)回到旧坐标，得到方程(4)的解

$$x = \varphi(t, \mu; \tau, \xi) = \xi + \psi(t-\tau, \mu; \tau, \xi), \tag{32}$$

显然它满足初始条件

$$\varphi(\tau, \mu; \tau, \xi) = \xi.$$

从命题 3) 中的作法，并根据定理 13 和 14(应用于方程(29))，容易得出解(32)关于所有变量 $t, \mu, \tau, \xi$ 的总体是連續的以及关于变量 $\xi^1, \cdots, \xi^n$ 是可微的結論。在函数 $f^i(t, x, \mu)$, $i=1, \cdots, n$, 关于 $t, \mu^1, \cdots, \mu^l$ 有連續偏导数的情形，解(32)关于 $\tau, \mu^1, \cdots, \mu^l$ 也是可微的。进一步的結論可以根据应用命题 2) 到方程(29)而得出。可是我們在这里只叙述并証明一些最主要的結論。

**定理 15.** 設

$$\dot{x}^i = f^i(t, x^1, \cdots, x^n), \quad i=1, \cdots, n \tag{33}$$

是标准的微分方程組，它的右边連同它們的偏导数

$$f^i_j(t, x) = \frac{\partial}{\partial x^j} f^i(t, x)$$

在变量 $t, x^1, \cdots, x^n$ 的空間的某区域 $\Gamma$ 上有定义且連續。并假設

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{34}$$

是这方程組的向量表示。如果 $(t_0, x_0)$ 是区域 $\Gamma$ 的任意点，那末存在正数 $\tau'$ 和 $\sigma'$，使得方程(34)的适合初始条件

$$\varphi(\tau; \tau, \xi) = \xi$$

的解

$$x = \varphi(t; \tau, \xi) \tag{35}$$

当

$$|t-\tau| < \tau', \quad |\tau - t_0| < \sigma', \quad |\xi - x_0| < \sigma' \tag{36}$$

时有定义且关于变量 $t, \tau, \xi$ 的总体是連續的，并且有关于变量 $\xi^1, \cdots, \xi^n$ 的連續偏导数，同时混合偏导数

$$\frac{\partial^2 \varphi^i(t;\tau,\xi)}{\partial t\,\partial \xi^j}$$

是連續的且同导微的順序无关。又偏导数

$$\varphi_k^i(t)=\frac{\partial}{\partial \xi^k}\,\varphi^i(t;t_0,\xi)\Big|_{\xi=x_0}$$

滿足方程組

$$\dot{\varphi}_k^i(t)=\sum_{j=1}^{n} f_j^i(t,\varphi(t;t_0,x_0))\,\varphi_k^j(t) \tag{37}$$

而有初始条件

$$\varphi_k^i(t_0)=\delta_k^i \tag{38}$$

($\delta_k^i$ 是克朗涅克尔記号)。方程組 (37) 称为关于初始值的**变分方程組**。

**証明** 利用在 3) 中提到的变量代換，把这代換应用到方程 (34)，就是假設在方程(4)中沒有参数 $\mu$。根据定理 13 和 14，存在正数 $r'$ 和 $\rho'$，使得解 $y=\psi(s;\tau,\xi)$ (参看(31)) 当

$$|s|<r',\ |\tau-t_0|^2+|\xi-x_0|^2<(\rho')^2 \tag{39}$$

时是确定的，且在这同样的区域內有关于变量 $\xi^1,\cdots,\xi^n$ 的連續偏导数，这是因为方程(29)的右边关于这些变量是可微的；此外，混合导数 $\frac{\partial^2\psi^i}{\partial s\,\partial \xi^j}$ 連續且和导微的順序无关。对于給定的数 $\rho'$，可以取充分小的数 $\sigma'$，使得从 (36) 中关于 $\tau$ 和 $\xi$ 的不等式可推出关于这些量的不等式(39)。从关系式(32)推知，在不等式(36)成立时，解(35)有定义，連續且关于变量 $\xi^1,\cdots,\xi^n$ 是可微的；此外，它有連續的混合导数 $\frac{\partial^2\varphi^i}{\partial t\,\partial \xi^j}$ 并且它們和导微的順序无关。

其次，把函数 $\varphi^1(t;\tau,\xi),\cdots,\varphi^n(t;\tau,\xi)$ 滿足方程組(33)的事实表示出来：

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\varphi^i(t;\tau,\xi)=f^i(t,\varphi^1(t;\tau,\xi),\cdots,\varphi^n(t;\tau,\xi)),$$

$$i=1,\cdots,n, \tag{40}$$

因为根据上面所証明的，函数 $\varphi^i(t;\tau,\xi)$ 关于 $\xi^1,\cdots,\xi^n$ 可微并且混合导数 $\frac{\partial^2\varphi^i(t;\tau,\xi)}{\partial t\partial\xi^k}$ 是連續的且与导微的順序无关，所以在把关系式(40)对 $\xi^k$ 导微并在其中置 $\tau=t_0$、$\xi=x_0$，就得到方程(37)。关于 $\xi^k$ 导微初始条件

$$\varphi^i(t_0;t_0,\xi)=\xi^i,$$

我們得到初始条件(38)。

这样，定理 15 得証。

应当注意，为了作变分方程組(37)，只需知道方程(34)的一个解 $\varphi(t)=\varphi(t,t_0,x_0)$，虽然在它知道时，并沒有給出計算导数 $\varphi_k^i(t)=\frac{\partial}{\partial\xi^k}\varphi^i(t,t_0,\xi)|_{\xi=x_0}$ 的可能性。因此，在知道一个解 $x=\varphi(t)$ 时，这些导数的計算就化为求解較簡单的綫性方程組(37)的問題。

## §23. 首次积分

在这里将給出首次积分概念并解决一阶綫性偏微分方程的边界問題。

### 首次积分

設

$$\dot{x}^i=f^i(x^1,\cdots,x^n),\quad i=1,\cdots,n \tag{1}$$

是标准自治方程組，它的右边連同它們的偏导数在变量 $x^1,\cdots,x^n$ 的空間的某一区域 $\Delta$ 內定义且連續，并設

$$\dot{x}=f(x) \tag{2}$$

是这方程組的向量写法。

**1)** 設函数

$$u(x^1,\cdots,x^n)=u(x)$$

連同它的偏导数在某个含在 $\Delta$ 内的区域 $G$ 上有定义且連續。如果以方程(2)的任意解 $x=\varphi(t)$ 代入函数 $u(x)$ 后，我們得到关于 $t$ 为不变的量，就是說，函数 $u(\varphi(t))$ 只同解 $\varphi(t)$ 的选取有关而同变量 $t$ 无关，就称函数 $u(x)$ 是方程組(1)的**首次积分**。可以証明，方程組(1)的任何首次积分 $u(x)$ 皆满足条件

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(x)}{\partial x^i} f^i(x) = 0, \tag{3}$$

相反的，每一个满足条件 (3) 的函数 $u(x)$ 是方程組 (1) 的首次积分。

我們証明方程組(1)的首次积分满足条件(3)。設 $\xi$ 是区域 $G$ 内的任意点，又 $x=\varphi(t, \xi)$ 是方程 (2) 的有初始值 0, $\xi$ 的解。我們有

$$0=\frac{d}{dt} u(\varphi(t, \xi))\Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi^i} f^i(\xi);$$

因为 $\xi$ 是区域 $G$ 中的任意点，所以关系式(3)在区域 $G$ 内成立。

現在假定函数 $u(x)$ 满足关系式(3)，并設 $x=\varphi(t)$ 是方程(2)的任一解。把 $x=\varphi(t)$ 代入函数 $u(x)$，我們得到某个函数

$$v(t)=u(\varphi(t)).$$

关于 $t$ 导徵这个函数，得到

$$\frac{dv(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(\varphi(t))}{\partial x^i} f^i(\varphi(t)) = 0.$$

因此，$u(\varphi(t))$ 同 $t$ 无关。

往后对于方程組(1)的首次积分的討論，将在区域 $\Delta$ 中一点 $a$ 的某邻域内純局部地进行，而点 $a$ 不是方程組(1)的平衡位置：

$$f(a) \neq 0. \tag{4}$$

**2)** 方程組(1)的确定在点 $a$ (参看(4))的某个邻域内的首次积分

$$u_1(x), \cdots, u_k(x)$$

将称为**在点 $a$ 是独立的**或簡称为**独立的**，如果函数矩陣

$$\left(\frac{\partial u_i(a)}{\partial x^j}\right), \quad i=1, \cdots, k;\ j=1, \cdots, n$$

的秩数为 $k$。可以証明，方程組(1)的独立的首次积分的个数不超过 $n-1$，并且如果

$$u_1(x), \cdots, u_{n-1}(x)$$

是独立的首次积分，那末任何其他的首次积分 $u(x)$ 可以写为形式：

$$u(x)=U(u_1(x), \cdots, u_{n-1}(x)), \tag{5}$$

其中 $U(u_1, \cdots, u_{n-1})$ 是某个含 $n-1$ 个变量的函数，而关系式(5)在点 $a$ 的某邻域内是关于 $x$ 的恒等式。

我們証明命題 2)。設

$$u_1(x), \cdots, u_n(x) \tag{6}$$

是方程組(1)的 $n$ 个首次积分。根据 1) 有

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_j(x)}{\partial x^i} f^i(x)=0, \quad j=1, \cdots, n.$$

由于向量 $f(x)$ 在 $a$ 点异于零，所以它也在 $a$ 点的某邻域内异于零，从而在这邻域内成立恒等式

$$\mathrm{Det}\left(\frac{\partial u_j(x)}{\partial x^i}\right)=0. \tag{7}$$

因此，$n$ 个首次积分不可能是独立的。現在假定首次积分組(6)中前面的 $n-1$ 个是独立的；那末由分析上熟知的定理，从恒等式(7)推知函数 $u_n(x)$ 可以用其他的函数 $u_1(x), \cdots, u_{n-1}(x)$ 表示，就是說，恒等式(5)对 $u(x)=u_n(x)$ 成立。这样，命題 2) 得証。

**3)** 在点 $a$（参看(4)）的某个邻域内存在方程組 (1) 的 $n-1$ 个独立的首次积分。

我們来証明这件事。因为向量 $f(a)$ 不是零向量，所以它的分量至少有一个不为零。我們假定

$$f^n(\boldsymbol{a}) \neq 0.$$

設 $\boldsymbol{\xi} = (\xi^1, \cdots, \xi^{n-1}, a^n)$ 是邻近于 $\boldsymbol{a}$ 的点，而 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\xi})$ 是方程 (2) 的具有初始值 0, $\boldsymbol{\xi}$ 的解。在坐标的形式下，这个解可以写成形状：

$$x^i = \varphi^i(t, \xi^1, \cdots, \xi^{n-1}), \quad i = 1, \cdots, n. \tag{8}$$

把这组关系式看成对未知量

$$\xi^1, \cdots, \xi^{n-1}, t \tag{9}$$

的方程組。当 $x^1 = a^1, \quad i = 1, \cdots, n$ 时，这方程組有明显解 $\xi^1 = a^1, \cdots, \xi^{n-1} = a^{n-1}, t = 0$，并且方程組(8)的函数行列式在这一点不等于零，因为

$$\frac{\partial \varphi^i(0, a^1, \cdots, a^{n-1})}{\partial \xi^j} = \delta^i_j, \quad i = 1, \cdots, n; j = 1, \cdots, n-1 \tag{10}$$

(参看 § 22，公式(38))以及

$$f^n(\boldsymbol{a}) \neq 0.$$

因此，存在 $\boldsymbol{a}$ 点的邻域 $G$，使得对属于 $G$ 的 $\boldsymbol{x}$，方程組(8)关于未知量(9)是可解的，而解可以表示为形式：

$$\xi^1 = u_1(\boldsymbol{x}), \cdots, \xi^{n-1} = u_{n-1}(\boldsymbol{x}), \quad t = v(\boldsymbol{x}). \tag{11}$$

我們来証明，出現在这些关系式中的函数

$$u_1(\boldsymbol{x}), \cdots, u_{n-1}(\boldsymbol{x}) \tag{12}$$

是方程組(1)的首次积分，并且在 $\boldsymbol{a}$ 点是独立的。方程組 (8) 的函数行列式已求到了(参看(10))；从此容易推知函数矩陣

$$\left(\frac{\partial u_i(\boldsymbol{a})}{\partial x^j}\right), \quad i, j = 1, \cdots, n-1$$

是单位矩陣，因此函数組(12)是独立的。現在証明，它們是方程組(1)的首次积分。因为方程組 (11) 是方程組 (8) 的逆，所以函数(12)滿足恒等式

$$u_i(\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\xi})) = \xi^i, \quad i = 1, \cdots, n-1. \tag{13}$$

現在假設 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ 是方程(2)的落在区域 $G$ 内的某个解。設

$t_0$, $x_0$ 是它的初始值，而 $x_0$ 属于 $G$. 因为方程组(8)在 $x=x_0$ 时是可解的，所以通过点 $x_0$ 有解 $x=\varphi(t, \xi_0)$，因此解 $\varphi(t)$ 可以写为形式：

$$\varphi(t)=\varphi(t+c, \xi_0),$$

其中 $c$ 是常数(参看 §15, 2))．这样，把 $x=\varphi(t)$ 代入函数 $u_i(x)$ 后，根据(13)得到

$$u_i(\varphi(t))=u_i(\varphi(t+c, \xi_0))=\xi_0^i, \quad i=1, \cdots, n-1.$$

因此，命题 3) 得証。

如果我們知道了方程組 (1) 的某些首次积分，那末解方程組(1)就方便些。这个情况在以下命题中确切地叙述。

**4)** 設

$$u_{k+1}(x), \cdots, u_n(x) \tag{14}$$

是自治系統(1)在点 $a$(参看 2))的 $n-k$ 个独立的首次积分。利用函数(14)可以把方程組(1)降低 $n-k$ 阶，就是把它变成 $k$ 阶的自治系統；特别，当有最大个数即 $n-1$ 个独立的首次积分时，自治系統(1)可以化为一阶的，因此 (参看 §2, 2))，可以通过求积来解。

我們証明命题 4)．因为首次积分(14)是独立的，所以在函数矩陣

$$\left(\frac{\partial u_i(a)}{\partial x^j}\right), \quad i=k+1, \cdots, n; \ j=1, \cdots, n$$

中有行列式不等于零的 $n-k$ 阶的方陣。为确定起見，假定矩陣

$$\left(\frac{\partial u_i(a)}{\partial x^j}\right), \quad i, j=k+1, \cdots, n$$

的行列式异于零。利用这个事实，在 $a$ 点的邻域内引进新坐标

$$y^1, \cdots, y^n \tag{15}$$

以代替原来坐标

$$x^1, \cdots, x^n,$$

即置

$$y^1=x^1,\ \cdots,\ y^k=x^k;\quad y^{k+1}=u_{k+1}(x),\ \cdots,\ y^n=u_n(x). \tag{16}$$

通过这些公式确实能引进新坐标 $y^1, \cdots, y^n$，因为关系式(16)的函数行列式在 $a$ 点的邻域内异于零。在新的变量组(15)之下，方程组(1)取形式：

$$\dot{y}^i=g^i(y^1,\ \cdots,\ y^n),\quad i=1,\ \cdots,\ n. \tag{17}$$

但是由于每个函数(14)满足条件(3)，所以我們有

$$g^{k+1}(y)=0,\ \cdots,\ g^n(y)=0.$$

因此，方程組(17)实际上是 $k$ 阶的自治系統。

## 一阶綫性偏微分方程

关系式(3)可以看成是关于变量 $x^1, \cdots, x^n$ 的未知函数 $u(x)$ 的**偏微分方程**。在命題 3) 和 2) 中确立了当 $f(a)\neq 0$ 时，在 $a$ 点的邻域内存在 $n-1$ 个这个方程的解，并且在有了 $n-1$ 个独立的解以后，通过公式(5)可以得到任何其他的解。在这种意义上可以认为方程(3)是解好了；就是証明了如果我們会解方程組(1)，也就会解方程(3)。但是也可以按别的观点来解方程(3)，就是对方程(3)或甚至比(3)更一般的方程可以提出并解决**边界問題**。

**5)** 假設

$$\sum_{i=1}^{n} f^i(x)\frac{\partial u}{\partial x^i}=F(x,\ u) \tag{18}$$

是关于未知函数 $u(x)$ 的偏微分方程，其中 $F(x, u)$ 是某个給定的函数，具有关于所有变量的連續一阶偏导数。其次，假設

$$x=\xi(t^1,\ \cdots,\ t^{n-1}) \tag{19}$$

是在向量形式下給定的当 $t^1=\cdots=t^{n-1}=0$ 时通过 $a$ 点的某个 $n-1$ 維曲面的参数表示，因而

$$\xi(0,\ \cdots,\ 0)=a.$$

我們將假定，曲面(19)是可微的，且在点 $a$ 不与向量 $f(a)$ 相切，就是向量組

$$\frac{\partial \xi(0, \cdots, 0)}{\partial t^1}, \cdots, \frac{\partial \xi(0, \cdots, 0)}{\partial t^{n-1}}, f(a) \tag{20}$$

是綫性独立的。最后，假設

$$u_0(t^1, \cdots, t^{n-1}) \tag{21}$$

是給定在曲面(19)上的某个函数。可以証明，在 $a$ 点的邻域內存在方程(18)的唯一的解 $u(x)$，它在曲面(19)上和給定的函数(21)一致，因而

$$u(\xi(t^1, \cdots, t^{n-1})) = u_0(t^1, \cdots, t^{n-1}).$$

为了求出解 $u(x)$，利用方程組(1)的从曲面(19)出发的軌綫。这些軌綫称为方程(18)的**特征綫**。

我們証明命題 5)。为此，在方程組(1)的相空間內 $a$ 点的邻域中引进新坐标以代替坐标 $x^1, \cdots, x^n$。設 $x = \varphi(t, t^1, \cdots, t^{n-1})$ 是方程(2)的从曲面(19)上的点 $\xi(t^1, \cdots, t^{n-1})$ 出发的解，就是有初始值0，$\xi(t^1, \cdots, t^{n-1})$ 的解。于是我們有一組关系式

$$x^i = \varphi^i(t, t^1, \cdots, t^{n-1}), \quad i = 1, \cdots, n. \tag{22}$$

如果在其中把变量

$$t, t^1, \cdots, t^{n-1} \tag{23}$$

当作未知量，那末这方程組当 $x = a$ 时有明显的解

$$t = t^1 = \cdots = t^{n-1} = 0,$$

并且它的函数行列式在这一点不为零，这从向量 (20) 的綫性独立性可以推出(参看 § 22，公式(38))。因此，关系式組(22)給出在点 $a$ 的某邻域內代替坐标 $x^1, \cdots, x^n$ 引进新坐标 (23) 的可能性。在这些新坐标之下，方程 (18) 写来特别簡单，并且容易解决命題 5) 中所提出的边界問題。設 $u(x)$ 是确定在 $a$ 点的邻域內的某个函数。在其中将变量 $x^1, \cdots, x^n$ 按公式(22)以变量(23)来代；于是我們得到函数

$$v(t, t^1, \cdots, t^{n-1}) = u(\varphi(t, t^1, \cdots, t^{n-1})).$$

我們有
$$\frac{\partial v(t, t^1, \cdots, t^{n-1})}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(x)}{\partial x^i} f^i(x),$$

其中 $x = \varphi(t, t^1, \cdots, t^{n-1})$。因此，在变量(23)之下，方程(18)取形式：

$$\frac{\partial v(t, t^1, \cdots, t^{n-1})}{\partial t} = F(\varphi(t, t^1, \cdots, t^{n-1}), v(t, t^1, \cdots, t^{n-1})). \tag{24}$$

因为曲面(19)在坐标(23)之下由方程 $t=0$ 給出，所以我們应当求方程 (24) 的解，它当 $t=0$ 时成为給定的函数 $u_0(t^1, \cdots, t^{n-1})$. 为了求出这个解，应当解方程(24)，把(24)看成是自变量 $t$ 的常微分方程，变量 $t^1, \cdots, t^{n-1}$ 看为参数。这时应当求有初始值

$$0, u_0(t^1, \cdots, t^{n-1})$$

的解。根据定理14，得到的函数 $v(t, t^1, \cdots, t^{n-1})$ 有关于所有变量的連續导数。

这样，命題 5) 中所提出的边界問題解决了。

**注** 設

$$\dot{x}^i = f^i(t, x^1, \cdots, x^n) \tag{25}$$

是非自治的微分方程組。为了引进这方程組的首次积分概念，我們在增添了輔助的未知函数

$$x^{n+1} = t$$

之后，就把方程組(25)化为自治系統。因而方程組(25)在补充了方程

$$\dot{x}^{n+1} = 1$$

以后，就成为自治的；这个自治系統的首次积分就当作系統(25)的首次积分。

## 例 題

設
$$H = H(x^1, \cdots, x^n; y^1, \cdots, y^n) = H(x, y) \tag{26}$$

是两組变量 $x^i$, $y^i$ 的函数。常微分方程組

$$\dot{x}^i=\frac{\partial}{\partial y^i}H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\ \dot{y}^i=-\frac{\partial}{\partial x^i}H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\quad i=1,\cdots,n \tag{27}$$

称为 汉密尔頓(Hamilton) 組，而函数 $H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 是这組的汉密尔頓函数。可以直接驗証函数(26)是方程組(27)的首次积分。

## §24. 軌綫在最大时間区間上的性态

在証明定理 2 时(参看 § 21)，对于給定的初始值 $t_0, x_0$ 曾找到这样的正数 $r$，使得具有这初始值的解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ 在区間 $|t-t_0|<r$ 内存在。实际上，解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ 的最大存在区間 $m_1<t<m_2$ (参看 §3, 1)) 可能比区間 $|t-t_0|<r$ 大，可是解的最大存在区間 $m_1<t<m_2$ 为什么能够在这一边或那一边有限或者甚至在两边都有限的問題，如果不把关于綫性方程的定理 3 算在内的話，直到現在几乎还沒有討論到。我們知道，定理 3 是解决得完全的。这一节将在某种意义上对于为什么最大存在区間可以在这一边或那一边为有限的問題給出回答。

**1)** 設

$$\dot{x}^i=f^i(t,x^1,\cdots,x^n),\quad i=1,\cdots,n$$

是标准微分方程組，右边連同它們的偏导数

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$$

在变量 $t, x^1, \cdots, x^n$ 的空間 $R$ 的某区域 $\Gamma$ 内有定义且連續，又

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}) \tag{1}$$

是这方程組的向量写法。其次，設 $E$ 是位于区域 $\Gamma$ 内的某个有界閉集，

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t) \tag{2}$$

是方程(1)的某个解，而有最大存在区間 $m_1<t<m_2$(参看 § 3, 1))，

可以証明，如果数 $m_2$ 异于 $+\infty$，那末存在正数 $\varepsilon_2$，使得当 $t>m_2-\varepsilon_2$ 时，点 $(t, \varphi(t))$ 在集 $E$ 的外部。完全同样地，如果数 $m_1$ 异于 $-\infty$，那末存在正数 $\varepsilon_1$，使得当 $t<m_1+\varepsilon_1$ 时，点 $(t, \varphi(t))$ 在集 $E$ 的外部。

在証明命題 1) 时，我們要利用 § 21 中命題 4) 的內容，就是在这命題中对数 $r$ 所給出的估計式。我們将只考察 $m_2<+\infty$ 的情形；对 $m_1>-\infty$ 的情形，可以完全类似地討論。在空間 $R$ 中引进欧几里德測度。因为集 $E$ 和 $\Gamma$ 的余集都是閉的，而集 $E$ 又有界，所以集 $E$ 和 $\Gamma$ 的余集之間的距离 $\rho$ 是正的。这說明，如果属于集 $E$ 的点 $(t_0, x_0)$ 和空間 $R$ 中的点 $(t, x)$ 的距离小于 $\rho$，那末点 $(t, x)$ 必然属于区域 $\Gamma$. 現在假定 $E^*$ 是空間 $R$ 中所有同集 $E$ 的距离不超过 $\frac{\rho}{2}$ 的点的集合。那末 $E^*$ 含在 $\Gamma$ 內，因此，方程組(1)的右边以及它們的偏导数在集 $E^*$ 上有定义。取两个正数 $q$ 和 $a$，使得

$$q^2+a^2<\left(\frac{\rho}{2}\right)^2. \tag{3}$$

設 $(t_0, x_0)$ 是集 $E$ 的某一点，且 $\Pi$ 是滿足不等式

$$|t-t_0|\leqslant q, \quad |x-x_0|\leqslant a$$

的所有点 $(t, x)$ 的集合。显然（参看(3)），集 $\Pi$ 含在集 $E^*$ 內。因为集 $E^*$ 是有界閉集，所以对于 $E^*$ 中的每一点 $(t, x)$ 成立不等式

$$|f(t, x)|\leqslant M, \left|\frac{\partial f^i(t, x)}{\partial x^j}\right|\leqslant K, \quad i, j=1, \cdots, n,$$

其中 $M$ 和 $K$ 是某些正数。因此，如果数 $r$ 滿足 § 21 中的不等式(16)，(19)，(22)，那末方程 (1) 的具初始值 $(t_0, x_0)$ 的解 $x=\varphi(t)$ 在区間 $|t-t_0|<r$ 上有定义。这里重要的只是找到的数 $r$ 对于集 $E$ 中所有的点 $(t_0, x_0)$ 是一样的。現在可以証明，能取 $r$ 作为数 $\varepsilon_2$.

假定与此相反，就是对某个 $t_0>m_2-r$，点 $(t_0, \varphi(t_0))$ 落在集

$E$ 內，那末我們可以取量 $t_0$ 和 $x_0=\varphi(t_0)$ 作为解(2)的初始值。由 §21 中命題 4) 給出的同样的估計，解 (2) 在区間 $|t-t_0|<r$ 上有定义，它明显地要越出区間 $m_1<t<m_2$ 的界限。但是这和 $m_1<t<m_2$ 是解(2)的最大存在区間相矛盾。

这样，命題 1) 得証。

**2)** 設

$$\dot{x}^i=f^i(t, x^1, \cdots, x^n), \quad i=1, \cdots, n \tag{4}$$

是标准方程組，右边連同它們的偏导数 $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$ 在变量 $t, x^1, \cdots, x^n$ 的空間 $R$ 的某区域 $\Gamma$ 上有定义且連續，并且区域 $\Gamma$ 有特殊形状，就是它由所有的形为 $(t, x^1, \cdots, x^n)$ 的点构成，其中 $t$ 是任意的数，而点 $(x^1, \cdots, x^n)$ 属于变量 $x^1, \cdots, x^n$ 的空間 $S$ 的某个确定的区域 $\Delta$。在系統(4)为自治的特殊情形，$\Delta$ 可以取为任意的区域，函数 $f^i$ 和 $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$ 在其中有定义且連續，并根据这个区域 $\Delta$ 作上述形状的区域 $\Gamma$。設

$$\dot{x}=f(t, x) \tag{5}$$

是方程組(4)的向量表示。其次，假設 $F$ 是位于区域 $\Delta$ 内的某个有界閉集，又 $x=\varphi(t)$ 是方程(5)的某个解而有最大存在区間 $m_1<t<m_2$。可以証明，如果数 $m_2$ 异于 $+\infty$，那末存在正数 $\varepsilon_2$，使得当 $t>m_2-\varepsilon_2$ 时，点 $\varphi(t)$ 在集 $F$ 的外部。完全同样地，如果数 $m_1$ 异于 $-\infty$，那末存在正数 $\varepsilon_1$，使得当 $t<m_1+\varepsilon_1$ 时，点 $\varphi(t)$ 在集 $F$ 的外部。

和証明命題 1) 时一样，我們限于 $m_2<+\infty$ 的情形。为了进行証明，把命題 2) 化到命題 1)，我們要以适当方式选出有界閉集 $E$。設 $m$ 是任一适合不等式 $m<m_2$ 的数；規定点集 $E$ 是所有点 $(t, x)$ 的总体，其中 $m\leqslant t\leqslant m_2$，而点 $x$ 属于集 $F$。根据命題 1)，存在正数 $\varepsilon_2$，使得当 $t>m_2-\varepsilon_2$ 时，点 $(t, \varphi(t))$ 不属于集 $E$。同时

我們可以假定 $\varepsilon_2<m_2-m$，即 $m_2-\varepsilon_2>m$. 因为对于适合不等式 $m_2-\varepsilon_2<t<m_2$ 的数 $t$，不等式 $m\leqslant t\leqslant m_2$ 成立，所以点 $(t,\ \varphi(t))$ 可以不属于集 $E$，而这只是由于点 $\varphi(t)$ 不属于集 $F$.

## 例　題

为了說明这一节的結論，我們考察一阶的自治方程：

$$\dot{x}=\frac{1}{f(x)}, \tag{6}$$

其中 $f(x)$ 是多項式，它所有的根是实单根。 設 $a_1$，…，$a_n$ 是按增加次序写出的根。方程(6)的相空間是直綫 $P$，对于它，区域 $\Delta$ 是直綫 $P$ 上除了 $a_1$，…，$a_n$ 以外的所有点的总体，因为在这些点方程(6)的右边成为无穷大。置

$$F(x)=\int_0^x f(\xi)\,d\xi.$$

于是方程(6)的解的全体由关系式

$$F(x)=-t+c$$

表示。因为在自治方程中时間移动一个常量并不改变軌綫，所以方程(6)的所有軌綫以及点 $x(t)$ 沿着軌綫所作的运动的总体由关系式

$$F(x)=t$$

給出。我們考察点 $x(t)$ 在区間 $a_1<x<a_2$ 內的运动。由于 $f(x)$ 在区間 $a_1<x<a_2$ 內保持定号，所以 $F(a_1)\neq F(a_2)$. 为了确定起見，假設

$$m_1=F(a_1)<m_2=F(a_2).$$

容易看出，当 $t$ 走遍区間 $m_1<t<m_2$ 时，点 $x(t)$ 走遍区間 $a_1<x<a_2$. 由此可見，$m_1<t<m_2$ 是相应的解的最大存在区間。这里，最大存在区間的两端是有限的；根据命題 2)，这說明了当 $t$ 走近时間区間 $m_1<t<m_2$ 的端点时，点 $x(t)$ 走近区域 $\Delta$ 的境界点。

## §25. 連續性和可微性的整体的定理①

在§22中已經証明了定理13, 14, 15, 这些定理确立了解的一些性质,就是关于参数和初始值的連續性和可微性,但是所有这些定理都带有局部性,就是同充分小的一段时間有关。在这一节要証明所謂解对参数和初始值的連續性和可微性的整体的定理。"整体的"一詞对于这里要証明的定理16, 17, 18是在这样的意义下使用的,即連續性和可微性是"整体地"确立的,就是說是在某个"大"的时間区間上确立的。

連續性的整体的定理(定理16)的証明同定理13的証明有很大差别,我們不来引用定理13而直接推导。可数性的整体的定理(定理17, 18)就同相应的局部的定理14, 15完全一样来証明,因此它們的証明就不詳細推导了。

我們討論标准方程組

$$\dot{x}^i = f^i(t, x^1, \cdots, x^n, \mu^1, \cdots, \mu^l), \quad i = 1, \cdots, n, \tag{1}$$

右边与参数 $\mu^1, \cdots, \mu^l$ 有关。在向量形式下,方程組写为形状:

$$\dot{x} = f(t, x, \mu). \tag{2}$$

以后我們将假定方程組(1)的右边連同它們的偏导数

$$\frac{\partial f^i(t, x, \mu)}{\partial x^j} = f^i_j(t, x, \mu) \tag{3}$$

在变量

$$t, x^1, \cdots, x^n, \mu^1, \cdots, \mu^l$$

的空間 $\tilde{R}$ 的某区域 $\tilde{\Gamma}$ 內有定义且連續。設

$$x = \varphi(t, \mu) \tag{4}$$

是方程(2)的有初始值 $t_0, x_0$ 的解。将証明,如果解 $x = \varphi(t, \mu_0)$

① 原文为"интегральная",它有一种解釋是"可积的",但本来就可以解釋为"整体的"。在原书中作者指出这里用这个术語和积分的运算毫无关系,所以不作"可积的"解釋。我們已取为一种解釋,譯成"整体的",因此把原书正文中的一些說明略去了。——譯者注

确定在区間 $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ 上，那末对于充分邻近于 $\mu_0$ 的 $\mu$，解(4)也在同一区間上有定义，并且函数(4)关于变量$(t, \mu)$的总体是連續的。其次，在偏导数 $\frac{\partial f^i}{\partial \mu^k}$ 在区域 $\tilde{\Gamma}$ 上存在且連續的假定下，要証明当 $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ 以及对于充分邻近于 $\mu_0$ 的 $\mu$，解 (4) 关于参数 $\mu^1, \cdots, \mu^l$ 是可微的。从这些定理借助于 §22, 3)中的作法，就推出相应的关于初始值的連續性和可微性的整体的定理。

从以上所說的可以看出，这一节的内容完全类似于 § 22 的内容。差别只在于假定了解 $\varphi(t, \mu_0)$ 給定在确定的区間 $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ 上，而解 $\varphi(t, \mu)$ (对充分邻近于 $\mu_0$ 的 $\mu$)的存在性，連續性和可微性确立在整个給定的区間 $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ 上。对于和初始条件相关的情形也一样成立。

## 解对参数的連續依賴性

首先我們証明以下命題，它在証明連續性的整体的定理时起輔助作用。

**1)** 設 $u(t)$ 是給定在区間 $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ 上变量 $t$ 的連續函数。如果所討論的函数在这区間上滿足积分不等式

$$u(t) \leqslant \int_{t_0}^{t} (\alpha u(\tau) + \beta) d\tau, \quad \alpha > 0, \beta > 0, \tag{5}$$

那末对它有估計式

$$u(t) \leqslant \frac{\beta}{\alpha} (e^{\alpha(t-t_0)} - 1). \tag{6}$$

为了証明(6)，我們置

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} (\alpha u(\tau) + \beta) d\tau; \tag{7}$$

那末就有

$$\dot{v}(t) = \alpha u(t) + \beta.$$

从这个等式得到

$$u(t)=\frac{1}{\alpha}(\dot{v}(t)-\beta).$$

因此,根据原来的不等式有

$$\frac{1}{\alpha}(\dot{v}(t)-\beta)\leqslant v(t),$$

或同样地,有

$$\dot{v}(t)-\alpha v(t)\leqslant\beta.$$

以 $e^{-\alpha t}$ 乘所得到的不等式,就有

$$\dot{v}(t)e^{-\alpha t}-v(t)\alpha e^{-\alpha t}=\frac{d}{dt}(v(t)e^{-\alpha t})\leqslant\beta e^{-\alpha t}.$$

从 $t_0$ 到 $t$ 积分最后的不等式,并注意到 $v(t_0)=0$ (参看(7)),我們得到

$$v(t)e^{-\alpha t}\leqslant\frac{\beta}{\alpha}(e^{-\alpha t_0}-e^{-\alpha t}),$$

或是

$$v(t)\leqslant\frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha(t-t_0)}-1). \tag{8}$$

从关系式(7)和不等式(5)及(8),就得到所求的不等式(6).

**定理 16.** 設 $(t_0, x_0, \mu_0)$ 是区域 $\tilde{\Gamma}$ 內的某一点,又

$$x=\varphi(t,\mu) \tag{9}$$

是方程(2)的满足初始条件

$$\varphi(t_0,\mu)=x_0$$

的解。如果解

$$x=\varphi(t,\mu_0)$$

确定在区間 $r_1\leqslant t\leqslant r_2$ 上,那末存在正数 $\rho$,使得当 $|\mu-\mu_0|<\rho$ 时,解(9)在同一区間 $r_1\leqslant t\leqslant r_2$ 上是确定的,而函数 $\varphi(t,\mu)$ 关于变量 $t,\mu$ 的总体在 $|\mu-\mu_0|<\rho$, $r_1\leqslant t\leqslant r_2$ 上是連續的。

**証明** 当数 $t$ 走遍区間 $r_1\leqslant t\leqslant r_2$ 时,点 $(t,\varphi(t,\mu_0),\mu_0)$ 在空間 $\tilde{R}$ 中描出某曲綫 $Q$. 我們作出曲綫 $Q$ 的某个閉邻域 $\tilde{\Pi}$. 設

$a$ 和 $b$ 是两个正数。以 $\widetilde{\Pi}$ 記空間 $\widetilde{R}$ 中所有滿足条件：$r_1 \leqslant t \leqslant r_2$，$|x-\varphi(t, \mu_0)| \leqslant a$，$|\mu-\mu_0| \leqslant b$ 的点 $(t, x, \mu)$ 的总体。从解 $\varphi(t, \mu_0)$ 是連續的以及在区域 $\widetilde{\Gamma}$ 之內的事实，推知存在正数 $a$，$b$，使得集 $\widetilde{\Pi}$ 含在 $\widetilde{\Gamma}$ 內。以后，我們假定数 $a$ 和 $b$ 滿足这个条件。因为导数 (3) 是連續的，所以它在集 $\widetilde{\Pi}$ 上按模不大于某个数 $K$，因此根据 § 21 中的不等式 (6)，对于集 $\widetilde{\Pi}$ 的任意两点 $(t, x_1, \mu)$，$(t, x_2, \mu)$ 成立关系式

$$|f(t, x_2, \mu)-f(t, x_1, \mu)| \leqslant n^2 K |x_2-x_1|. \qquad (10)$$

其次，从函数 $f(t, x, \mu)$ 在集 $\widetilde{\Pi}$ 上的一致連續性推知，存在正数 $\varepsilon$ 的单調正值函数 $\beta(\varepsilon)$，它和 $\varepsilon$ 一起趋向于零，使得对于集 $\widetilde{\Pi}$ 上任意两点 $(t, x, \mu_0)$ 和 $(t, x, \mu)$ 成立关系

$$|f(t, x, \mu)-f(t, x, \mu_0)| < \beta(|\mu-\mu_0|). \qquad (11)$$

現在假設 $x=\varphi(t, \mu)$，$|\mu-\mu_0| \leqslant b$，是方程 (2) 的具有初始值 $(t_0, x_0)$ 的解。假定說，这个解确定在区間 $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ 上，其中 $r_1 \leqslant t_1 < t_0 < t_2 \leqslant r_2$，并且对这区間解整个落在 $\widetilde{\Pi}$ 內，就是当 $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ 时，点 $(t, \varphi(t, \mu), \mu)$ 落在 $\widetilde{\Pi}$ 內。我們給出在这区間上差 $|\varphi(t, \mu)-\varphi(t, \mu_0)|$ 的估計式。我們只在区間 $t_0 \leqslant t \leqslant t_2$ 上进行計算；至于在区間 $t_1 \leqslant t \leqslant t_0$ 上可以类似地进行。

我們把对应于参数 $\mu$ 和 $\mu_0$ 的方程 (2) 写为积分的形式（参看 § 21, 1)），并从第一个积分关系式减去第二个；那末得到

$$\varphi(t, \mu)-\varphi(t, \mu_0) = \int_{t_0}^{t} (f(\tau, \varphi(\tau, \mu), \mu)-f(\tau, \varphi(\tau, \mu_0), \mu_0))\, d\tau, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_2.$$

現在来估計右边积分号下的差式。我們有

$$\begin{aligned} &|f(\tau, \varphi(\tau, \mu), \mu)-f(\tau, \varphi(\tau, \mu_0), \mu_0)| \\ &\quad \leqslant |f(\tau, \varphi(\tau, \mu), \mu)-f(\tau, \varphi(\tau, \mu_0), \mu)| \\ &\qquad + |f(\tau, \varphi(\tau, \mu_0), \mu)-f(\tau, \varphi(\tau, \mu_0), \mu_0)|. \end{aligned}$$

右边的第一項由不等式 (10) 估計，第二項由不等式 (11) 估計；合并

这些估計式,得到

$$|\varphi(t,\mu)-\varphi(t,\mu_0)|$$
$$\leqslant\int_{t_0}^{t}[n^2K\cdot|\varphi(\tau,\mu)-\varphi(\tau,\mu_0)|+\beta(|\mu-\mu_0|)]d\tau.$$

置 $u(t)=|\varphi(t,\mu)-\varphi(t,\mu_0)|$, 根据命題 1) 我們得到: 当 $t_0\leqslant t\leqslant t_2\leqslant\tau_2$ 时,成立估計式

$$|\varphi(t,\mu)-\varphi(t,\mu_0)|\leqslant\frac{\beta(|\mu-\mu_0|)}{n^2K}(e^{n^2K(t-t_0)}-1)$$
$$<\frac{\beta(|\mu-\mu_0|)}{n^2K}(e^{n^2K(\tau_2-\tau_1)}-1)$$
$$=C\beta(|\mu-\mu_0|).$$

在区間 $t_1\leqslant t\leqslant t_0$ 上作类似的估計,得到

$$|\varphi(t,\mu)-\varphi(t,\mu_0)|\leqslant C\beta(|\mu-\mu_0|). \tag{12}$$

因此,估計式(12)对整个区間 $t_1\leqslant t\leqslant t_2$ 成立。

設 $\rho$ 是滿足不等式

$$\rho\leqslant b,\ C\beta(\rho)<a \tag{13}$$

的正数,又 $\mu_1$ 是参数 $\mu$ 的确定值,对它成立

$$|\mu_1-\mu_0|\leqslant\rho.$$

我們来証明,解 $\varphi(t,\mu_1)$在全区間 $\tau_1\leqslant t\leqslant\tau_2$ 上有定义。

假設 $m_1<t<m_2$ 是解 $\varphi(t,\mu_1)$的最大存在区間(参看 §3, 1)). 我們証明 $m_2>\tau_2$;不等式 $m_1<\tau_1$ 可以类似地証明。为此,以 $E$ 記 $\widetilde{\Pi}$ 中所有的 $\mu=\mu_1$ 的点$(t,x,\mu)$的总体。假定 $m_2\leqslant\tau_2$. 那末根据 §24 中命題 1), 点 $(t,\varphi(t,\mu_1),\mu_1)$ 当 $t\to m_2$ 时必須离开閉集 $E$. 这只能在破坏了不等式 $|\varphi(t,\mu_1)-\varphi(t,\mu_0)|\leqslant a$ 时才发生,因为按假定不等式 $t\leqslant\tau_2$ 是滿足的。由于不等式 $|\varphi(t,\mu_1)-\varphi(t,\mu_0)|\leqslant a$ 在某个 $t$ 时要破坏,所以存在变量 $t$ 的值,記之为 $t_2$,使得

$$|\varphi(t_2,\mu_1)-\varphi(t_2,\mu_0)|=a,$$
$$|\varphi(t,\mu_1)-\varphi(t,\mu_0)|<a\quad 当\ t_0<t<t_2.$$

但是根据估計式(12)这是不可能的(参看(13))。

因此,当 $|\mu-\mu_0|\leqslant\rho$ 时,解 $\varphi(t,\mu)$ 确定在全区間 $\tau_1\leqslant t\leqslant\tau_2$ 上。这就証明了定理 16 的第一个論断;現在証明它的第二个論断,就是函数 $\varphi(t,\mu)$ 当 $\tau_1\leqslant t\leqslant\tau_2$, $|\mu-\mu_0|\leqslant\rho$ 时的連續性。我們来証明函数 $\varphi(t,\mu)$ 在点 $(t_0^*,\mu_0^*)$ 的連續性,其中 $\tau_1\leqslant t_0^*\leqslant\tau_2$, $|\mu_0^*-\mu_0|\leqslant\rho$。由于解 $\varphi(t,\mu_0^*)$ 满足定理 16 中的条件,所以根据已經証明的,对于它存在类似于 $\rho$ 的数 $\rho^*$ 以及类似于 $C\beta(\varepsilon)$ 的函数 $C^*\beta^*(\varepsilon)$。現在假定 $\mu$ 是满足条件 $|\mu-\mu_0^*|\leqslant\rho^*$ 的参数值,而 $t$ 是满足条件 $\tau_1\leqslant t\leqslant\tau_2$ 的数;估計差式 $\varphi(t,\mu)-\varphi(t_0^*,\mu_0^*)$。我們有

$$|\varphi(t,\mu)-\varphi(t_0^*,\mu_0^*)|$$
$$\leqslant|\varphi(t,\mu)-\varphi(t,\mu_0^*)|+|\varphi(t,\mu_0^*)-\varphi(t_0^*,\mu_0^*)|,$$

右边的第二項由于函数 $\varphi(t,\mu_0^*)$ 对 $t$ 的連續性,当 $t\to t_0^*$ 时趋于零,第一項由于存在函数 $C^*\beta^*(\varepsilon)$,当 $\mu\to\mu_0^*$ 时(关于 $t$ 一致地)趋向于零。

这样,定理 16 完全証明。

## 解关于参数的可微性

**定理 17.** 假設方程組(1)的右边的偏导数

$$e_k^i(t,x,\mu)=\frac{\partial}{\partial\mu^k}f^i(t,x,\mu),\quad i=1,\cdots,n;\ k=1,\cdots,l$$

在区域 $\tilde{\Gamma}$ 內存在且連續。設 $(t_0,x_0,\mu_0)$ 是区域 $\tilde{\Gamma}$ 的某一点,又

$$x=\varphi(t,\mu) \tag{14}$$

是方程(2)的适合初始条件

$$\varphi(t_0,\mu)=x_0 \tag{15}$$

的解。如果解

$$x=\varphi(t,\mu_0)$$

确定在区間 $\tau_1\leqslant t\leqslant\tau_2$ 上,那末存在正数 $\rho'$,使得当 $|\mu-\mu_0|<\rho'$

时，解(14)在区间 $\tau_1 \leqslant t \leqslant \tau_2$ 上确定而有連續偏导数

$$\frac{\partial \varphi(t, \mu)}{\partial \mu^k}; \tag{16}$$

混合导数

$$\frac{\partial^2 \varphi(t, \mu)}{\partial t \partial \mu^k}$$

也是連續的且同导微的順序无关。并且可以証明，偏导数 (16) 在区間 $\tau_1 \leqslant t \leqslant \tau_2$ 上滿足变分方程：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \varphi^i(t, \mu)}{\partial \mu^k}\right) = \sum_{j=1}^{n} f_j^i(t, \varphi(t, \mu), \mu) \frac{\partial \varphi^j(t, \mu)}{\partial \mu^k} + e_k^i(t, \varphi(t, \mu), \mu),$$

而有初始条件

$$\frac{\partial \varphi^i(t_0, \mu)}{\partial \mu^k} = 0.$$

**証明** 本定理的証明能够通过几乎是逐字重复定理 14 的証明加上以下的变动而得到。把引用定理 13 改为引用定理 16. 此外，把解 $\varphi(t, \mu)$ 看成是在全区間 $\tau_1 \leqslant t \leqslant \tau_2$ 上的，而不是在区間 $|t-t_0| < r$ 上；对于 § 22 中的函数 (20) 也如此看待。在証明以下的命題 2) 和定理 18 时应当作类似的变动。

現在从定理 17 引出一个簡单的推論。

**2)** 如果方程組(1)的右边关于变量 $x^1, \cdots, x^n, \mu^1, \cdots, \mu^l$ 的直到 $m$ 阶为止的所有偏导数存在且連續，那末作为方程組 (1) 的适合初始条件(15)的解的分量的那些函数 $\varphi^i(t, \mu)$, $i=1, \cdots, n$, 对于 $|\mu-\mu_0| < \rho'$, $\tau_1 \leqslant t \leqslant \tau_2$ (其中 $\rho'$ 是充分小的正数)也有关于参数 $\mu^1, \cdots, \mu^l$ 直到 $m$ 阶为止的連續偏导数。

(参看 § 22 中命題 2) 的証明。)

## 解对初始值的連續依賴性和可微性

借助于 § 22 中 2) 段的作法，从定理 16 和 17 可导出以下定

理。

**定理 18.** 設

$$\dot{x}^i = f^i(t, x^1, \cdots, x^n), \quad i = 1, \cdots, n$$

是标准微分方程組，它的右边連同它們的偏导数

$$f^i_j(t, x) = \frac{\partial}{\partial x^j} f^i(t, x)$$

在变量 $t, x^1, \cdots, x^n$ 的空間的某区域 $\Gamma$ 上定义且連續。并假設

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{17}$$

是这方程組的向量記法。如果 $(t_0, x_0)$ 是区域 $\Gamma$ 的任一点，而方程(17)的具有初始值 $t_0, x_0$ 的解

$$x = \varphi(t)$$

在区間 $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$ 上是确定的，那末存在正数 $\sigma'$，使得当

$$r_1 \leqslant t \leqslant r_2, \quad |\tau - t_0| < \sigma', \quad |\xi - x_0| < \sigma'$$

时，方程(17)的具有初始值 $\tau, \xi$ 的解

$$x = \varphi(t, \tau, \xi)$$

有定义，关于变量 $t, \tau, \xi$ 的总体是連續的，且有关于向量 $\xi$ 的坐标 $\xi^1, \cdots, \xi^n$ 的連續偏导数，同时混合偏导数

$$\frac{\partial^2 \varphi^i(t, \tau, \xi)}{\partial t \, \partial \xi^j}$$

是連續的且同导徵的順序无关。并且可以証明，函数

$$\varphi^i_k(t) = \frac{\partial}{\partial \xi^k} \varphi^i(t, t_0, \xi)\Big|_{\xi = x_0}$$

滿足綫性方程組(**变分方程**)

$$\dot{\varphi}^i_k(t) = \sum_{j=1}^{n} f^i_j(t, \varphi(t)) \varphi^j_k(t)$$

而带有初始条件

$$\varphi^i_k(t_0) = \delta^i_k.$$

(参看定理 15 的証明。)

**3)** 在定理 18 的条件滿足时，对任何正数 $\varepsilon$，可找到正数 $\delta$，

使得当 $|\tau-t_0|<\delta$, $|\xi-x_0|<\delta$ 时,对任意的属于区間 $\tau_1\leqslant t\leqslant\tau_2$ 的 $t$ 成立不等式

$$|\varphi(t,\tau,\xi)-\varphi(t,t_0,\xi_0)|<\varepsilon. \tag{18}$$

为了証明这不等式，我們注意到，当 $0<\sigma''<\sigma'$ 时，函数 $\varphi(t,\tau,\xi)$ 是連續函数(参看定理 18),在由不等式

$$|\tau-t_0|\leqslant\sigma'', \quad |\xi-x_0|\leqslant\sigma'', \quad \tau_1\leqslant t\leqslant\tau_2$$

所确定的閉集上是一致連續的。因此，对于每个正数 $\varepsilon$ 能找到正数 $\delta$, 使当 $|\tau-t_0|<\delta$, $|\xi-x_0|<\delta$, $|t_1-t_2|<\delta$ 时,成立不等式:

$$|\varphi(t_2,\tau,\xi)-\varphi(t_1,t_0,x_0)|<\varepsilon.$$

当 $t_1=t_2=t$ 时,从这个不等式就推出不等式(18)。

# 第五章

# 稳定性

很多机械的、电的以及其他类型的装置(机器、仪器等等)的工作是用常微分方程组来描写的。常微分方程组总是有无穷多个解,为了給出它的一个确定的解,需要指出它的初始值。然而实际运用的装置常常以完全确定的状态工作,驟然看来,在任何情形下不可能出現对应于方程組不同解的无穷多个工作状态。这可以如下說明:或者是在装置启动时以某一确定的方式选择了解的初始值,或者是仪器持續工作后初始值的影响消失了,而装置稳定于它的定常解;后面一种情形我們在討論电路时已經遇到过。再引进一个例子:挂钟的摆动。不論钟摆在启动时与垂直位置偏离大小,摆錘的摆动是完全确定的。如果摆錘启动时偏离不很大,那末經过不多次摆动以后它就会停止下来。如果偏离充分大,那末經过短时間以后,摆的振幅将成为完全确定的,而钟将以这个振幅一直走下去。因此,描写挂钟的工作的微分方程組有两个定常解;对应于钟不走的情形的平衡位置;以及对应于钟的正常情形的周期解。而这方程組的任何其他的解(无疑是无穷多的)很快趋于这两个定常解的一个,且在不长的时間后它們变得实际上沒有差别。在某种意义下,所指出的两个定常解的每一个都是稳定的。可見,如果我們选取的不是定常解,而是在开始时与定常解偏差不大的解,那末所取的非定常解趋于定常解。这就是解的稳定性定义的不十分精确的說法。就在这个例子中看出,描写钟工作的方程組的相空間分成两个吸引区域。如果取初始值在一个区域中,那末解将趋于平衡位置;而当初始值取在另一个区域中时,解就趋于周

期解。

从上述已可看出，为了完全了解某一装置的工作，希望在描写这装置工作的方程組的相空間中有很好的表示。这时最重要的是知道該方程組的稳定的解。

从解对初始值的連續依賴性的整体的定理（見 § 25），我們已經知道，如果給定了有限的时間区間，那末，当初始值的偏差充分小时，解的偏差在整个給定的时間区間中也是小的，但解的这个性质完全沒有表示稳定性。至于說到稳定性，只要初始值的偏差是小的，那末解的偏差在无限长的时間区間上也必須很小。

本章主要讲述平衡位置和周期解的稳定性問題。

其中也包括了在技术問題上的两个重要的应用：讲述維什涅格拉德斯基(Вышнеградский) 关于具瓦特調节器的蒸汽机工作的研究以及安德罗諾夫(Андронов)关于具不衰减电振蕩的电子管振蕩器工作的研究。其中第一个是自动調节理論，第二个是非綫性振动理論的奠基性研究。

在 § 30 中引向二阶自治系統平衡位置附近軌綫性态的研究，它不完全与稳定性問題有关。这一节按其困难的程度来說，多少超过了本书的一般水平。还有这一章的最后一节 (§ 31) 就其內容来說是更难的。

## § 26. 李雅普諾夫定理

这里将給出应用到自治系統 (§ 15) 平衡位置的李雅普諾夫意义下的稳定性概念以及稳定性的充分条件。

### 平衡位置的稳定性

設
$$\dot{x}^i = f^i(x^1, \cdots, x^n), \quad i=1, 2, \cdots, n \tag{1}$$
是标准的自治系統，它的向量表示是
$$\dot{x} = f(x). \tag{2}$$

我們假設函数

$$f^i(x^1, \cdots, x^n), \quad i=1, 2, \cdots, n \tag{3}$$

在变量 $x^1$, $\cdots$, $x^n$ 的空間中某一区域 $\Delta$ 上有定义且有連續的一阶偏导数。以后在建立稳定性判据时，关于可微性的要求更强：即要求函数(3)在区域 $\Delta$ 中有連續的二阶偏导数。

在未給出李雅普諾夫意义下的稳定性定义以前，先来說一下稳定性的思想。方程(2)的平衡位置 $a=(a^1, \cdots, a^n)$ 应认为是稳定的，只要方程(2)的解在 $t=0$ 时从充分靠近点 $a$ 的点出发，在以后(即 $t>0$ 时)就永远保持靠近点 $a$. 稳定性的物理意义是明显的。用方程(2)来描述其运动的物理对象(例如，某一机器)，仅当平衡位置 $a$ 是稳定的时候，才能处于平衡位置 $a$，否則由偶然扰动所引起的与平衡位置的微小偏差就可以招致对象远离平衡位置。

下面用 $\varphi(t, \xi)$ 表示方程(2)的以 $t=0$, $x=\xi$ 为初始值的解，因此 $\varphi(t, \xi)$ 是数量变量 $t$ 及向量变量 $\xi$ 的向量函数，且满足条件

$$\varphi(0, \xi)=\xi. \tag{4}$$

**定义** 方程(2)的平衡位置 $a$ 称为按**李雅普諾夫意义是稳定的**，如果：1)存在如此小的正数 $\rho$，使得当 $|\xi-a|<\rho$ 时，方程(2)的解 $\varphi(t, \xi)$ 对所有的正值 $t$ 都有定义；2)对于任何正数 $\varepsilon$，能找到这样的正数 $\delta<\rho$，使得当 $|\xi-a|<\delta$ 时，$|\varphi(t, \xi)-a|<\varepsilon$ 对所有的 $t>0$ 成立。方程(2)的按李雅普諾夫意义为稳定的平衡位置 $a$ 称为是**漸近稳定的**，如果 3) 存在如此小的正数 $\sigma<\rho$，使得当 $|\xi-a|<\sigma$ 时有

$$\lim_{t\to+\infty} |\varphi(t, \xi)-a|=0.$$

首先給出常系数綫性齐次方程組的平衡位置稳定性的充分条件。

**1)** 設

$$\dot{x}=Ax \tag{5}$$

是具常系数的綫性齐次方程組的向量表示。它的以 $0,\xi$ 为初始值的解記为 $\psi(t,\xi)$。如果矩陣 $A$ 的所有特征值都具有負实部，則存在这样的正数 $\alpha$ 和 $r$，使得不等式

$$|\psi(t,\xi)|\leqslant r|\xi|e^{-\alpha t},\quad t\geqslant 0 \tag{6}$$

成立。从不等式(6)直接推知，方程(5)的平衡位置 $x=0$ 是按李雅普諾夫意义稳定的，并且是漸近稳定的。

我們来証明不等式(6)。置

$$A=(a_j^i),\quad L(p)=(a_j^i-p\delta_j^i).$$

那末利用微分記号 $p$（見 § 7），可将方程(5)的数量形式写为方程組

$$\sum_{j=1}^{n}L_j^i(p)x^j=0,\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{7}$$

設 $M_i^k(p)$ 是矩陣 $L(p)$ 中元素 $L_j^i(p)$ 的取了适当符号的余子式，因此成立恒等式

$$\sum_{i=1}^{n}M_i^k(p)L_j^i(p)=\delta_j^kD(p),$$

这里 $D(p)$ 是矩陣 $L(p)$ 的行列式。以多項式 $M_i^k(p)$ 乘关系式(7)并将所得的关系式按 $i$ 相加，得到

$$0=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}M_i^k(p)L_j^i(p)x^j=\sum_{j=1}^{n}\delta_j^kD(p)x^j=D(p)x^k.$$

这样，如果

$$x=(x^1,\cdots,x^n)$$

是方程(5)的解，那末每一函数 $x^i$ 满足微分方程

$$D(p)x^i=0.$$

因为根据假設多項式 $D(p)$ 的所有根都具有負实部，所以（見 § 9，1））函数 $x^i$ 满足不等式

$$|x^i|\leqslant Re^{-\alpha t},\quad i=1,2,\cdots,n;\ t\geqslant 0,$$

这里 $R$ 和 $\alpha$ 是不依賴于 $i$ 的正数。从这不等式得到不等式

$$|x|\leqslant\sqrt{n}\,Re^{-\alpha t},\quad t\geqslant 0.$$

最后的不等式我們以前在較一般的假設下已經証明过（見 § 11，

2))；这里重新給予証明。

設 $e_i$ 是第 $i$ 个单位坐标向量，因此

$$e_i=(0,\cdots,1,\cdots,0),$$

这里 1 是在第 $i$ 个位置。再設，$\psi_i(t)$ 是方程(5)的以 $e_i$ 为初始值的解，因而

$$\psi_i(0)=e_i,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

这时方程(5)具初始值

$$\xi=(\xi^1,\cdots,\xi^n)$$

的解 $\psi(t,\xi)$ 显然可写为形式：

$$\psi(t,\xi)=\sum_{i=1}^{n}\xi^i\psi_i(t). \tag{8}$$

因为对于每一解 $\psi_i(t)$ 成立着不等式

$$|\psi_i(t)|\leqslant\sqrt{n}\,Re^{-\alpha t},\quad t\geqslant 0,$$

所以解 $\psi(t,\xi)$ 显然满足不等式(6)。

平衡位置 $x=0$ 的按李雅普諾夫的稳定性直接从不等式(6)得到。事实上，如果 $\varepsilon$ 是給定的正数，那末只要取 $\frac{\varepsilon}{r}$ 为 $\delta$ 就可以了。漸近稳定性也从不等式(6)导出。

## 李雅普諾夫函数

在建立非綫性系統(1)的平衡位置的稳定性判据时，利用了所謂**按方程組的导数**；它不只是在李雅普諾夫定理的証明时有用。

**2)** 設

$$F(x^1,\cdots,x^n)=F(x)$$

是某一确定在区域 $\Delta$ 上的变量 $x^1,\cdots,x^n$ 的可微函数。它按方程(1)关于 $t$ 在点 $x=(x^1,\cdots,x^n)$ 处的导数用下面的方法定义：設 $\varphi(t)$ 是方程(2)的解，在某一值 $t=t_0$ 时满足初始条件：

$$\varphi(t_0)=x.$$

按方程組(1)的导数

$$\dot{F}_{(1)}(x)$$

用公式 $$\dot{F}_{(1)}(x)=\frac{d}{dt}F(\varphi(t))\Big|_{t=t_0}$$

来定义，或者根据全导数的公式，

$$\dot{F}_{(1)}(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F(x)}{\partial x^i}f^i(x). \tag{9}$$

从公式(9)看出，导数 $\dot{F}_{(1)}(x)$ 与解 $\varphi(t)$ 无关，而由点 $x$ 单值地确定。

現在証明自治系統的一个性质。

**3)** 仍然用 $\varphi(t,\xi)$ 記自治方程(2)的以 $0,\xi$ 为初始值的解。可以証明，函数 $\varphi(t,\xi)$ 满足等式

$$\varphi(t,\varphi(s,\xi))=\varphi(s+t,\xi). \tag{10}$$

我們来証明公式(10)。置

$$\eta=\varphi(s,\xi), \tag{11}$$

这里 $s$ 是固定的数，且考虑方程(2)的解

$$\varphi_1(t)=\varphi(t,\eta).$$

因为 $\varphi(t,\xi)$ 是方程(2)的解，所以根据这方程的自治性（見 § 15, 1)），由关系式

$$\varphi_2(t)=\varphi(t+s,\xi)$$

决定的函数 $\varphi_2(t)$ 也是方程的解。这样，我們有方程(2)的两个解 $\varphi_1(t)$ 和 $\varphi_2(t)$。其次，由(4)，

$$\varphi_1(0)=\varphi(0,\eta)=\eta,$$

由(11)， $$\varphi_2(0)=\varphi(s,\xi)=\eta.$$

于是解 $\varphi_1(t)$ 与 $\varphi_2(t)$ 有共同的初始值，因而是一致的，所以(10)成立。

在李雅普諾夫定理的証明中起主要作用的是某个正定的二次型，它称为**李雅普諾夫函数**。我們先叙述正定二次型的某些性质

(見 4)),然后再作出李雅普諾夫函数(見 5))。

**4)** 設

$$x=(x^1, \cdots, x^n) \tag{12}$$

是 $n$ 維空間的变向量。由公式

$$W(x)=\sum_{i,j=1}^{n} w_{ij}x^i x^j$$

决定的函数称为向量 $x$ 的 **二次型**,这里的 $w_{ij}=w_{ji}$ 是实数。如果当 $x\neq 0$ 时有

$$W(x)>0,$$

那末二次型 $W(x)$ 称为 **正定的**。可以証明,对于任何正定的二次型 $W(x)$,常常可以找到两个正的常数 $\mu,\nu$,使得对于任何向量 $x$,有不等式

$$\mu|x|^2\leqslant W(x)\leqslant \nu|x|^2. \tag{13}$$

从这个不等式得到,对于任何 $x$(参看(12))有不等式

$$|x^i|\leqslant\sqrt{\frac{1}{\mu}W(x)}. \tag{14}$$

我們来証明数 $\mu$ 与 $\nu$ 的存在性。为此,考虑当 $\xi$ 在单位球面上变动时,即滿足条件

$$|\xi|=1 \tag{15}$$

时函数 $W(\xi)$ 的数值。因为球面(15)是有界閉集,而函数 $W(\xi)$ 是連續的,所以在球面(15)上它达到最小值 $\mu$ 和最大值 $\nu$。因为球面(15)上的所有向量不是零向量,所以数 $\mu$ 和 $\nu$ 是正的。設 $x$ 是任意向量;我們有 $x=\lambda\xi$,这里向量 $\xi$ 属于球面(15),因而对于向量 $\xi$ 有不等式

$$\mu\leqslant W(\xi)\leqslant\nu.$$

以 $\lambda^2$ 乘这不等式就得到不等式(13)。

現在轉来作李雅普諾夫函数。

5) 設

$$\dot{x}^i=\sum_{j=1}^{n}a_j^ix^j,\quad i=1,\cdots,n \tag{16}$$

是具有常系数的綫性齐次方程組，且矩陣 $A=(a_j^i)$ 所有的特征值具有負实部。这时存在正定的二次型 $W(x)$，它按方程組(16)(參看2))的导数滿足不等式

$$\dot{W}_{(16)}(x)\leqslant-\beta W(x), \tag{17}$$

这里 $x$ 是任意向量，$\beta$ 是与向量 $x$ 无关的正数。

我們来作出二次型 $W(x)$。設方程組(16)是向量方程(5)的数量写法。如同在命題1)中一样，把方程(5)的以0，$\xi$ 为初始值的解記为 $\psi(t,\xi)$；这时我們有(見(8))

$$\psi(t,\xi)=\sum_{i=1}^{n}\xi^i\psi_i(t). \tag{18}$$

現在置

$$W(\xi)=\int_0^\infty|\psi(\tau,\xi)|^2d\tau. \tag{19}$$

由于(18)，我們有

$$W(\xi)=\sum_{i,j=1}^{n}\xi^i\xi^j\int_0^\infty(\psi_i(\tau),\psi_j(\tau))d\tau. \tag{20}$$

因为每一函数 $\psi_i(t)$ 滿足不等式(6)，所以(20)右端的每一广义积分都是收敛的，因而 $W(\xi)$ 是关于向量 $\xi$ 的二次型。这二次型是正定的，因为当 $\xi\neq0$ 时，公式(19)中积分号下的表达式是正的，所以 $W(\xi)>0$。現在計算函数 $W(\xi)$ 按方程組(16)的导数 $\dot{W}_{(16)}(\xi)$。为此，根据命題2)，代入过点 $\xi$ 的解 $\psi(t,\xi)$，然后計算函数 $W(\psi(t,\xi))$ 在 $t=0$ 时的导数。預先注意到由于3)我們有

$$\psi(\tau,\psi(t,\xi))=\psi(\tau+t,\xi),$$

所以

$$W(\psi(t,\xi))=\int_0^\infty|\psi(\tau,\psi(t,\xi))|^2d\tau$$

$$=\int_0^\infty|\psi(t+\tau,\xi)|^2d\tau=\int_t^\infty|\psi(\tau,\xi)|^2d\tau.$$

从而有

$$\dot{W}_{(16)}(\xi)=\frac{d}{dt}W(\psi(t,\xi))\Big|_{t=0}=\frac{d}{dt}\int_t^\infty|\psi(\tau,\xi)|^2d\tau\Big|_{t=0}$$

$$=-|\psi(t,\xi)|^2\Big|_{t=0}=-|\xi|^2.$$

这样,我們得到等式

$$\dot{W}_{(16)}(\xi)=-|\xi|^2,$$

但据(13)的第二个不等式有

$$-|\xi|^2\leqslant-\frac{1}{\nu}W(\xi),$$

所以得到

$$\dot{W}_{(16)}(\xi)\leqslant-\frac{1}{\nu}W(\xi).$$

这就証明了不等式(17).

## 李雅普諾夫定理

最后轉向叙述并証明李雅普諾夫定理。

設

$$a=(a^1,\cdots,a^n)$$

是自治系統(1)的平衡位置。置

$$x^i=a^i+\Delta x^i,\quad i=1,\cdots,n,\tag{21}$$

且取新的未知函数为

$$\Delta x^1,\ \Delta x^2,\ \cdots,\ \Delta x^n.\tag{22}$$

把(21)代入方程組(1),且关于变量(22)把右端按泰勒公式展开,我們得到

$$\Delta\dot{x}^i=f^i(a)+\sum_{j=1}^n\frac{\partial f^i(a)}{\partial x^j}\Delta x^j+R^i,\quad i=1,\cdots,n,\tag{23}$$

这里 $R^i$ 是关于未知量(22)为二阶无穷小的項。因为 $a$ 是方程組(1)的平衡位置,所以

$$f^i(a)=0;$$

其次,設

$$a_j^i=\frac{\partial f^i(a)}{\partial x^j},\tag{24}$$

我們可以写(23)为形式:

$$\Delta\dot{x}^i=\sum_{j=1}^{n}a_j^i\Delta x^j+R^i,\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{25}$$

**定理 19**. 如果矩陣 $A=(a_j^i)$ (見 (24)) 的所有特征值具有負实部,那末方程組(1)的平衡位置 $\boldsymbol{a}$ 是漸近稳定的;更詳細地說,存在如此小的正数 $\sigma$, 使得当 $|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{a}|<\sigma$ 时,有不等式

$$|\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\xi})-\boldsymbol{a}|\leqslant r|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{a}|e^{-\alpha t}, \tag{26}$$

这里 $r$ 与 $\alpha$ 是与 $\boldsymbol{\xi}$ 无关的正数。

**証明** 可設方程組(1)的平衡位置 $\boldsymbol{a}$ 与坐标原点一致, 即 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$. 因为通过坐标的平行移动常常可以做到这一点;而矩陣 $A$ 并不改变。設 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$,我們有

$$\Delta x^i=x^i,$$

因而方程組(25)写为形式:

$$\dot{x}^i=\sum_{j=1}^{n}a_j^ix^j+R^i,\quad i=1,\cdots,n, \tag{27}$$

这里

$$R^i=\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2 f^i(\theta\boldsymbol{x})}{\partial x^j\partial x^k}x^jx^k.$$

將方程組(27)綫性化,即去掉項 $R^i$,得到綫性方程組

$$\dot{x}^i=\sum_{j=1}^{n}a_j^ix^j,\quad i=1,\cdots,n. \tag{28}$$

現在假設綫性方程組(28)的李雅普諾夫函数为 $W(\boldsymbol{x})$ (參看 5)). 計算函数 $W(\boldsymbol{x})$ 按方程組(27)的导数 $\dot{W}_{(27)}(\boldsymbol{x})$. 我們有

$$\dot{W}_{(27)}(\boldsymbol{x})=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial W(\boldsymbol{x})}{\partial x^i}a_j^ix^j+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial W(\boldsymbol{x})}{\partial x^i}R^i$$

$$=\dot{W}_{(28)}(\boldsymbol{x})+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial W(\boldsymbol{x})}{\partial x^i}R^i.$$

因为函数 $W(\boldsymbol{x})$ 滿足不等式(17),所以我們有

$$\dot{W}_{(27)}(\boldsymbol{x})\leqslant-\beta W(\boldsymbol{x})+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial W(\boldsymbol{x})}{\partial x^i}R^i.$$

現在选取充分小的正数 $b$, 使得当

$$W(\boldsymbol{x})\leqslant b \tag{29}$$

时，向量 $x$ 属于区域 $\Delta$（由于(13)，这样的数 $b$ 是存在的）。二阶导数 $\frac{\partial^2 f^i(\theta x)}{\partial x^j \partial x^k}$ 是連續函数，在椭球(29)中是有界的，所以在这椭球中有

$$|R^i| \leqslant k|x|^2 \leqslant \frac{k}{\mu} W(x),$$

这里 $k$ 是某一常数。其次，因为 $\frac{\partial W(x)}{\partial x^i}$ 是关于 $x^1, \cdots x^n$ 的綫性型，所以

$$\left|\frac{\partial W(x)}{\partial x^i}\right| \leqslant l \sqrt{W(x)},$$

这里 $l$ 是某一常数（見(14)）。这样，存在常数 $q$，使得当 $W(x) \leqslant b$ 时，成立

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial W(x)}{\partial x^i} R^i\right| \leqslant q W(x)^{\frac{3}{2}}.$$

現在选择正数 $c$，使得

$$c \leqslant b, \quad q\sqrt{c} \leqslant \frac{\beta}{2}.$$

那末只要不等式

$$W(x) \leqslant c \tag{30}$$

成立，我們就有

$$\dot{W}_{(27)}(x) \leqslant -\frac{\beta}{2} W(x).$$

設 $\alpha = \frac{\beta}{4}$，就得到不等式

$$\dot{W}_{(27)}(x) \leqslant -2\alpha W(x),$$

它是对于满足不等式(30)的 $x$ 成立的。

設 $\xi$ 是椭球(30)的内点，即满足不等式

$$W(\xi) < c \tag{31}$$

的点。同前面一样以 $\varphi(t, \xi)$ 記方程組(27)的以 0，$\xi$ 为初始值的解，且置

$$w(t) = W(\varphi(t, \xi)).$$

函数 $w(t)$ 对于使解 $\varphi(t, \xi)$ 有定义的所有值 $t \geqslant 0$ 都有定义，且从命题 2) 推知它满足条件

$$\dot{w}(t) \leqslant -2\alpha w(t), \tag{32}$$

只要它还满足不等式

$$w(t) < c. \tag{33}$$

如果解 $\varphi(t, \xi)$ 不是对所有正值 $t$ 存在，那末点 $x = \varphi(t, \xi)$ 当 $t$ 增加时应該走出椭球 (30) (見 § 24, 2))。設点 $x = \varphi(t, \xi)$ 离开了这个椭球，且設 $t' > 0$ 是它第一次达到其境界的 $t$ 的值。这时，在区間 $0 \leqslant t \leqslant t'$ 上点 $\varphi(t, \xi)$ 属于椭球 (30)，因而不等式 (32) 成立，所以 $\dot{w}(t)$ 是非正的。因而 $c = w(t') \leqslant w(0) < c$，这是矛盾的。

这样，函数 $\varphi(t, \xi)$，因而函数 $w(t)$ 对所有正值 $t$ 都有定义，且成立不等式 (32)。如果 $\xi \neq 0$，那末 $w(t) > 0$，且从不等式 (32) 可作下面的計算：

$$\frac{\dot{w}(t)}{w(t)} \leqslant -2\alpha; \quad \int_0^t \frac{\dot{w}(t)}{w(t)}\, dt \leqslant -2\alpha t \quad \text{当 } t \geqslant 0;$$

$$\lg w(t) - \lg w(0) \leqslant -2\alpha t.$$

最后的不等式給出

$$W(\varphi(t, \xi)) \leqslant W(\xi) e^{-2\alpha t}.$$

从此利用不等式 (13) 得到

$$|\varphi(t, \xi)|^2 \leqslant \frac{\nu}{\mu} |\xi|^2 e^{-2\alpha t}, \quad t \geqslant 0, \tag{34}$$

上式只要 $\xi$ 满足不等式 (31) 就成立。

由于不等式 (13) 中的第二式，从关系

$$|\xi| < \sigma = \sqrt{\frac{c}{\nu}} \tag{35}$$

推得不等式 (31)。因此，如果不等式 (35) 成立，那末不等式 (34) 是正确的。取它的平方根，就得到不等式

$$|\varphi(t, \xi)| \leqslant \sqrt{\frac{\nu}{\mu}} |\xi| e^{-\alpha t}, \quad t \geqslant 0,$$

它同不等式(26)一致，这时 $r=\sqrt{\frac{\nu}{\mu}}$，而 $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$. 这样証明了定理 19.

下面的命題 6)在某种意义下說明与定理 19 相反的情形。

6) 方程(2)的平衡位置 $\boldsymbol{a}$ 称为**完全不稳定的**，如果存在这样的正数 $\sigma$，使得以球 $|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{a}|<\sigma$ 上任一点 $\boldsymbol{\xi}\neq\boldsymbol{a}$ 为初始值的解 $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\xi})$ 永远跑出这个球而不再回来，也就是可以找到这样的正数 $T=T(\boldsymbol{\xi})$，使得当 $t=T$ 时解 $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\xi})$ 是有定义的，而对于所有 $t>T$，只要 $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\xi})$ 有定义，就有不等式 $|\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\xi})-\boldsymbol{a}|\geqslant\sigma$. 可以証明，如果矩陣 $\left(\frac{\partial f^i(\boldsymbol{a})}{\partial x^j}\right)$ 的所有特征值具有正实部，方程(2)的平衡位置 $\boldsymbol{a}$ 就是完全不稳定的。

为了証明命題 6)，我們利用在定理 19 的証明过程中所建立的某些結果；这时，和以前一样，假定 $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$. 对于方程(2)，按假設，矩陣 $\left(\frac{\partial f^i(\boldsymbol{a})}{\partial x^j}\right)$ 的所有特征值有正实部，在考虑方程(2)的同时，我們考虑方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}=-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \tag{36}$$

很明显，对于它点 $\mathbf{0}$ 是滿足定理 19 的条件的。根据定理 19 証明中的作法，对于方程(36)存在李雅普諾夫函数 $W(\boldsymbol{x})$，当条件(30)成立时，滿足不等式

$$\dot{W}_{(36)}(\boldsymbol{x})\leqslant-2\alpha W(\boldsymbol{x}).$$

把这不等式的左边用显式写出来(見(9))，就得到

$$\dot{W}_{(36)}(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial W(\boldsymbol{x})}{\partial x^i}(-f^i(\boldsymbol{x}))\leqslant-2\alpha W(\boldsymbol{x}),$$

換句話說，
$$\dot{W}_{(2)}(\boldsymbol{x})\geqslant 2\alpha W(\boldsymbol{x}).$$

当不等式(30)成立时，这个不等式显然是正确的。現設 $\boldsymbol{\xi}$ 是椭球(30)的某一內点(見(31))。置

$$w(t)=W(\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\xi})).$$

对于函数 $w(t)$，当不等式

$$w(t)\leqslant c$$

成立时，有不等式

$$\dot{w}(t)\geqslant 2\alpha w(t). \tag{37}$$

因为 $\xi\neq 0$，所以 $w(t)>0$，且从不等式(37)可作下面的計算：

$$\frac{\dot{w}(t)}{w(t)}\geqslant 2\alpha;\quad \int_0^t \frac{\dot{w}(t)}{w(t)}dt\geqslant 2\alpha t \quad 当\ t\geqslant 0;$$

$$w(t)\geqslant w(0)e^{2\alpha t};\quad W(\varphi(t,\xi))\geqslant W(\xi)e^{2\alpha t}.$$

从最后的不等式推知，当 $t$ 增长时，点 $x=\varphi(t,\xi)$ 一定跑出椭球(30)的境界，因而离开椭球的内部。我們来証明，以后它不能回到椭球(30)的内部。否則，就可找到这样的正值 $t'$，使得 $w(t')=c$，而对于所有的充分小的正值 $\Delta t$，成立不等式 $w(t'+\Delta t)<c$. 从最后两关系式得到 $\dot{w}(t')\leqslant 0$，而这和不等式(37)矛盾，(37)式因为当 $t=t'$ 时 $w(t')=c$，所以是成立的。

这样，就証明了当 $\xi\neq 0$ 位在椭球(30)中时，軌綫 $x=\varphi(t,\xi)$ 必离开椭球(30)且永远不再回来。根据不等式(13)中的第二式，从不等式(35)推出不等式(31)，因此球(35)含在椭球(30)内。从此得証命題6)是正确的。

## 例 題

作为对命題1)的补充，我們来証明：如果矩陣 $A$ 有特征值 $\lambda$，它的实部是正的，那末方程(5)的平衡位置 $x=0$ 按李雅普諾夫意义是不稳定的。事实上，由§14的命題1)，向量函数 $x=che^{\lambda t}$ 是方程(5)的解，这里 $c$ 是任意的实常数，$h$ 是 $A$ 的对应于特征值 $\lambda$ 的特征向量。如果 $\lambda$ 是实数，那末当 $c$ 充分小时，所說的解开始在任意靠近平衡位置 $x=0$ 的点 $ch$，但 $x=che^{\lambda t}$ 将按模逐渐无限增大。如果 $\lambda$ 是复数，那末方程(5)的解 $c(he^{\lambda t}+\bar{h}e^{\bar{\lambda}t})$ 具有同样的性质。

## § 27. 离心調速器

### (維什涅格拉德斯基的研究)

在近代技术中，由于大量运用自动控制仪器，**自动調节理論**有特别重要的作用。在設計自动調节器时，产生的最重要問題之一是关于机器——調节器系統工作的稳定性問題。这問題在許多場合下可以用李雅普諾夫定理(参看 § 26)来解决。

最早的自动調节系統是蒸汽机的系統——瓦特离心調速器。离心調速器在十八世紀末和十九世紀前半期就其担負的任务来說是完全成功的，到十九世紀中叶，由于它的构造上的变化，它就变得不可靠了。許多理論家和工程师寻求摆脫所产生的危机的出路。著名的俄国工程师、自动調节理論的奠基人維什涅格拉德斯基十分明确而簡单地解决了問題。維什涅格拉德斯基的論文"論直接作用調节器"(1876 年)开創了針对工业实际問題的机器調节理論。本节将扼要地讲解維什涅格拉德斯基的研究。

离心調速器(图 46)是一根可以繞自己垂直軸旋轉的纵立的樞軸 $S$，它的上端用鉸鏈与两根同样长度的杆 $L_1$ 和 $L_2$ 相連，$L_1$ 和 $L_2$ 的下端带有同样的負荷，杆 $L_1$ 和 $L_2$ 又用輔助杆絞連。所以它們与垂直方向有同样的偏角 $\varphi$，且位于纵立樞軸 $S$ 所在的同一垂直平面內。当杆 $L_1$ 和 $L_2$ 与垂直方向有偏角 $\varphi$ 时，它們通过鉸鏈带动了套在樞軸 $S$ 上的特制套管 $M$，因此

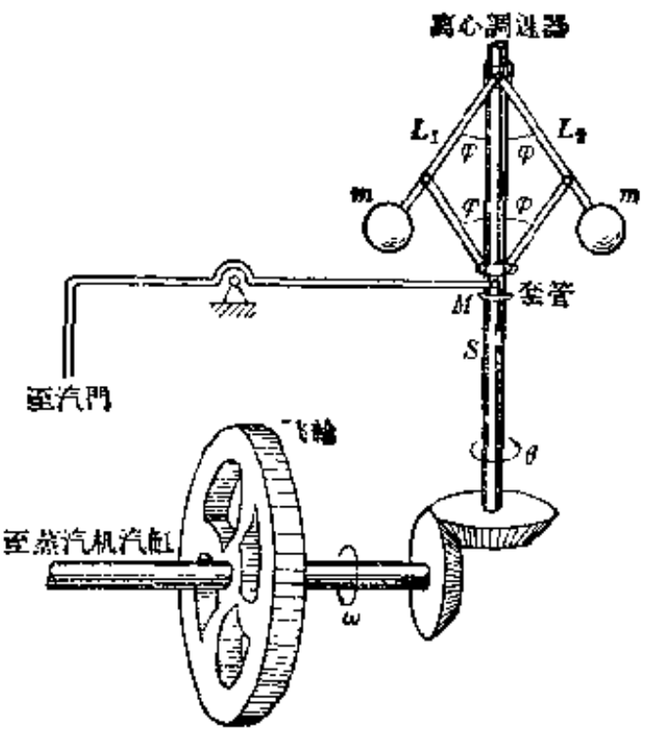


图 46

套管到軸 $S$ 頂端的距离与 $\cos\varphi$ 成正比。我們取杆 $L_1$ 和 $L_2$ 的长度作为单位长度，而联結于各杆端点的負荷的质量記为 $m$。如果軸 $S$ 的旋轉角速度为 $\theta$，而杆 $L_1$ 和 $L_2$ 与垂直方向的偏角为 $\varphi$，那末作用在每一負荷上的离心力是

$$m\theta^2 \sin\varphi, \tag{1}$$

同时还有大小等于

$$mg \tag{2}$$

的引力作用在每一負荷上。因为作用在負荷上的沿杆 $L_i$ 方向的力是与 $L_i$ 的反作用力相平衡的，所以为了計算作用在負荷上的力，应該把上述的两个力按杆的方向及杆的垂直方向分解，第二个方向的正方向为角 $\varphi$ 增加的方向。直接知道(图 47)，力(1)沿角 $\varphi$ 增加方向的分力等于

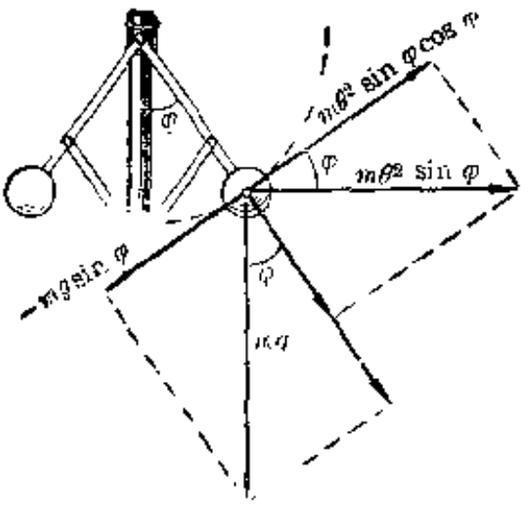

图 47

$$m\theta^2 \sin\varphi\cos\varphi, \tag{3}$$

而引力(2)沿同一方向的分力等于

$$-mg\sin\varphi. \tag{4}$$

因此，力(3)和(4)的合力为

$$m\theta^2 \sin\varphi\cos\varphi - mg\sin\varphi. \tag{5}$$

离心調速器工作的簡化了的描述是：当角速度 $\theta$ 給定后，杆 $L_1$ 和 $L_2$ 在力(1)，(2)作用下得到的偏角 $\varphi$ 由下式决定：

$$m\theta^2 \sin\varphi\cos\varphi - mg\sin\varphi = 0, \tag{6}$$

也就是使得力(5)等于零。关系(6)确定了角 $\varphi$ 是角速度 $\theta$ 的单調增加函数，因此瓦特調速器可以作为旋轉角速度的量測器，这就是所謂調节器的靜力学的考察。这里实际上是有动力学影响的。质量 $m$ 在力(5)的作用下发生用微分方程来描写的运动。当质量 $m$

运动时，作用在 $m$ 上的力除了力(5)以外还有鉸鏈的摩擦力。它以十分复杂的形式依賴于所发生的运动。为了从本质上簡化这里的复杂性，我們假設摩擦力与质量 $m$ 的运动速度 $\dot{\varphi}$ 成正比，而与之有相反的符号，即它的量是

$$-b\dot{\varphi},$$

这里 $b$ 是常数。这样，如果取 $\varphi$ 作为确定质量 $m$ 位置的坐标，那末我們得到关于 $\varphi$ 的微分方程

$$m\ddot{\varphi}=m\theta^2\sin\varphi\cos\varphi-mg\sin\varphi-b\dot{\varphi}. \tag{7}$$

(这里在引进的力(5)的計算中，假設了 $\theta$ 和 $\varphi$ 是常数。当 $\theta$ 和 $\varphi$ 变动时有附加的力产生，可是由于把杆固定在一个平面上，它們与杆及鉸鏈的反作用力平衡，因此，方程(7)是正确的。)

蒸汽机有一个慣性矩为 $J$ 的飞輪，它在旋轉时产生力偶，且能作有用的功，例如提升矿場的吊斗。因此，蒸汽机的微分方程可以写成形式：

$$J\dot{\omega}=P_1-P, \tag{8}$$

这里 $\omega$ 是飞輪的角速度，$P_1$ 是蒸汽的作用力矩，$P$ 是吊斗重量作用在飞輪上的力矩。蒸汽的作用力矩 $P_1$ 依賴于供給汽缸蒸汽的汽門的口徑，力矩 $P$ 依賴于吊斗負重的大小。

連結离心調速器于蒸汽机的目的是維持运轉的均衡性，它"測量"飞輪旋轉的速度，如果轉速太大就減小蒸汽的輸入量，如果轉速太小就增加蒸汽的輸入量。为实現这一目的，我們用傳动齿輪把蒸汽机的飞輪与調节器的纵立杆联系起来(图 46)，所以角速度 $\omega$ 与 $\theta$ 成比例

$$\theta=n\omega, \tag{9}$$

这里 $n$ 是所謂**轉換数**。机器对調节器的这种作用的結果，测量了飞輪的旋轉速度；另一方面，調节器的套管 $M$ 和供給蒸汽的汽門的联系是

$$P_1=F_1+k(\cos\varphi-\cos\varphi^*), \tag{10}$$

这里 $\varphi^*$ 是 $\varphi$ 的某一"平均"值，它靠近应当維持的調节量 $\varphi$ 的值，$F_1$ 是在 $\varphi=\varphi^*$ 时蒸汽作用力 $P_1$ 的值，而 $k>0$ 是比例常数。

由(10)看出，調节器对蒸汽机的反作用是这样实現的，即当角 $\varphi$ 增加时，蒸汽的輸入量(代替它的是蒸汽作用力矩 $P_1$)減小。看来，由于机器和調节器互相作用的結果，最后完全实現了我們前面所提出的問題，即当飞輪轉速減小时增加蒸汽的輸入量，当飞輪轉速增加时減小蒸汽的輸入量。因此，自然期望飞輪的轉速将是趋于定常的。这就出現了到十九世紀中叶所制造的蒸汽机。为了闡明在十九世紀中叶以后出現的調节器的工作違背原来目的的原因，必須精确地研究机器——調节器系統的动力学以及研究它的稳定性，这就是維什涅格拉德斯基所做的工作。

从关系(7)—(10)看出，机器-調节器系統的微分方程是

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{\varphi} &= mn^2\omega^2 \sin\varphi\cos\varphi - mg\sin\varphi - b\dot{\varphi},\\ J\dot{\omega} &= k\cos\varphi - F, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

其中 $F=P-F_1+k\cos\varphi^*$ 是与負荷有关的量。方程組(11)的第一个是二阶的，为了把它变到标准形，我們引进新变量 $\psi$：

$$\psi=\dot{\varphi}.$$

这时方程組(11)变成标准形：

$$\left.\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \psi,\\ \dot{\psi} &= n^2\omega^2\sin\varphi\cos\varphi - g\sin\varphi - \frac{b}{m}\psi,\\ \dot{\omega} &= \frac{k}{J}\cos\varphi - \frac{F}{J}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

蒸汽机的正常工作是它的飞輪的旋轉角速度 $\omega$ 在負荷 $P$ 不变即 $F$ 是常数时，保持为常数，而供給蒸汽的汽門是不动的。这表示角度 $\varphi$ 是不变的。这样，問題是寻求方程組的具有下面形式的解：

$$\varphi=\varphi_0, \quad \psi=0, \quad \omega=\omega_0,$$

即找該系統的平衡位置。找到系統(12)的平衡位置后，問題归結为

研究它的稳定性。

使关系式(12)的右端等于零，并解所得到的方程，就找到了平衡位置

$$\left.\begin{aligned}&\psi_0=0,\\&\cos\varphi_0=\frac{F}{k},\\&n^2\omega_0^2=\frac{g}{\cos\varphi_0}.\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

置 $\varphi=\varphi_0+\Delta\varphi$， $\psi=\psi_0+\Delta\psi$， $\omega=\omega_0+\Delta\omega$。

經过这样的变换并把方程(12)綫性化，其結果得到方程組

$$\Delta\dot{\varphi}=\Delta\psi,$$

$$\Delta\dot{\psi}=n^2\omega_0^2\cos 2\varphi_0\Delta\varphi+n^2\omega_0\sin 2\varphi_0\Delta\omega-g\cos\varphi_0\Delta\varphi-\frac{b}{m}\Delta\psi,$$

$$\Delta\dot{\omega}=-\frac{k}{J}\sin\varphi_0\Delta\varphi.$$

把(13)中量 $n^2\omega_0^2$ 的值代入上面的第二个方程，經过簡单計算得到

$$\Delta\dot{\psi}=-\frac{g\sin^2\varphi_0}{\cos\varphi_0}\Delta\varphi-\frac{b}{m}\Delta\psi+\frac{2g\sin\varphi_0}{\omega_0}\Delta\omega.$$

关于 $\Delta\varphi$, $\Delta\psi$, $\Delta\omega$ 的綫性方程的特征多項式等于

$$D(p)=\begin{vmatrix}-p & 1 & 0\\ -\dfrac{g\sin^2\varphi_0}{\cos\varphi_0} & -\dfrac{b}{m}-p & \dfrac{2g\sin\varphi_0}{\omega_0}\\ -\dfrac{k}{J}\sin\varphi_0 & 0 & -p\end{vmatrix},$$

或是在計算行列式并乘以 $-1$ 后，得到

$$-D(p)=p^3+\frac{b}{m}p^2+\frac{g\sin^2\varphi_0}{\cos\varphi_0}p+\frac{2kg\sin^2\varphi_0}{J\omega_0}.$$

这个多項式的所有系数是正的，所以它的稳定性的充分和必要条件是成立不等式(由于定理 6)：

$$\frac{b}{m}\cdot\frac{g\sin^2\varphi_0}{\cos\varphi_0}>1\cdot\frac{2kg\sin^2\varphi_0}{J\omega_0},$$

或者換一种写法，

$$\frac{bJ}{m}>\frac{2k\cos\varphi_0}{\omega_0}=\frac{2F}{\omega_0} \tag{14}$$

(參看(13))。根据李雅普諾夫定理(定理19)，关系(14)是机器-調节器系統的稳定性的充分条件。

为了闡明最后不等式右端的意义，我們引进在工程上起重要作用的蒸汽机的运轉不平衡性概念。从关系式(13)看到，当量 $F'=P-F_1+k\cos\varphi^*$ 变化(即負荷 $P$ 变化)时，定常速度 $\omega_0$ 也发生变化。量 $\frac{d\omega_0}{dP}$ 表征了在負荷 $P$ 变化时量 $\omega_0$ 变化的速度，它的絕对值 $\nu=\left|\frac{d\omega_0}{dP}\right|$ (如我們將看到的，导数 $\frac{d\omega_0}{dP}$ 是負的)称为蒸汽机的**运轉不平衡性**。根据(13)，有

$$F\omega_0^2-\text{常数},$$

导微得到

$$\frac{d\omega_0}{dF}=-\frac{\omega_0}{2F}.$$

于是

$$\nu=\frac{\omega_0}{2F},$$

而稳定性条件(14)是終写为形式：

$$\frac{bJ}{m}\cdot\nu>1. \tag{15}$$

維什涅格拉德斯基根据公式(15)得出下面的結論：

1° 重錘质量 $m$ 的增加有害于稳定性。

2° 減小摩擦系数 $b$ 有害于稳定性。

3° 減小飞輪的慣性矩 $J$ 有害于稳定性。

4° 減小不平衡性 $\nu$ 有害于稳定性。

为了作出对工程师是熟悉的結論并把注意引到最主要方面，維什涅格拉德斯基在他的論文的最后作出了著名的"提綱"：

**第一个論題** 緩冲(摩擦)是正常工作的灵敏調节器的非常重要的組成部分，簡言之，"沒有无緩冲的調节器"。

**第二个論題** 不定向調节器(即零不平衡性的調节器)即使有緩冲,大概也是不适用的,簡言之,"沒有无不平衡性的調节器"。

十九世紀中叶調节器不可靠的原因是由于技术的发展,出現在不等式(15)中的四个量都向着破坏稳定性的方面变化。由于汽門质量的增加(它与机器容积的增大相联系)而选取重量更大的球;零件表面加工的改善导致摩擦减小;提高机器的运轉速度必然要减小飞輪的慣量矩 $J$;最后,减小速度对負荷的依賴关系的意图导致运轉不平衡性的减小。

弄清楚了所有的上述事实的不良影响后,維什涅格拉德斯基建議人为地增加摩擦(利用特殊的緩冲装置)和增加运轉不平衡性(注意到数 $n$ 和 $k$ 的变化是与机器的結构有关的)。

## §28. 极 限 圈

这一节将給出法国数学家龐卡萊(Poincaré)所引进的极限圈概念的定义,并对它作一定的研究,还将給出一个判定极限圈存在的判据。应該指出,在現代,极限圈概念在常微分方程理論本身以及它在实际应用中起着极为重要的作用。

我們将討論标准的自治方程系統(見 § 15)

$$\dot{x}^i = f^i(x^1, \cdots, x^n), \quad i=1, \cdots, n, \tag{1}$$

它的右端在变量 $x^1, \cdots, x^n$ 的相空間 $R$ 的某一区域 $\Delta$ 中有定义且有連續的一阶偏导数。我們也将利用这个系統的向量写法

$$\dot{x} = f(x). \tag{2}$$

本节最主要的論述是关于情形 $n=2$ 的。为了强調二維性,我們将說方程組(1)的相平面 $P$,而不說它的相空間 $R$. 在相平面的研究中,具有极大直观性的几何解釋有极重要的作用。区域 $\Delta$ 与整个相平面 $P$ 相一致的情形絕不是不重要的,也为了簡单起見,我們可集中注意于这种情形。

## 极限圈及其附近軌綫的性态

方程(2) ($n=2$)的孤立的周期解称为这方程的**极限圈**。更完整地說：設 $x=\varphi(t)$ 是方程(2)的周期解，$K$ 是这个解在相平面 $P$ 上描出的閉曲綫。如果存在这样的正数 $\rho$，使得对平面 $P$ 上任一与 $K$ 的距离小于 $\rho$ 的点 $\xi$，方程(2)的过点 $\xi$ 的解不是周期的，我們就說 $x=\varphi(t)$(以及軌綫 $K$)是**孤立的**周期解，并称之为**极限圈**。

它的几何說法是，方程(2)在平面 $P$ 上的相图中，在閉軌 $K$ 附近沒有这方程的另外的閉軌。下面的定理解决了在极限圈 $K$ 附近，方程(2)的軌綫的走向問題。

**定理 20**. 設 $x=\varphi(t)$ 是方程(2) ($n=2$)的极限圈，$K$ 是这个解在平面 $P$ 上描出的閉軌綫。如所周知，閉曲綫把平面分为两个区域：**内域与外域**，且因为方程(2)的軌綫互不相交，所以每一不同于 $K$ 的軌綫关于軌綫 $K$ 而言或者在它的内部或者在它的外部。可以証明，对于在它的外部的軌綫，同样对于在它的内部的軌綫，靠近 $K$ 的性态有两种互相排斥的可能性，即，所有开始时靠近 $K$ 的位于内部的軌綫或者当 $t\to+\infty$ 时(图 48 $(a)$)或者当 $t\to-\infty$ 时(图 48 $(b)$)盘旋逼近于 $K$。对位于外部的軌綫也是同样的(图 48 $(a)$, $(b)$)。

如果所有开始时靠近 $K$ 的軌綫(内部的与外部的)当 $t\to+\infty$ 时捲向 $K$，那末极限圈称为**稳定的**(图 48 $(a)$)；如果所有开始时靠近 $K$ 的軌綫当 $t\to-\infty$ 时捲向 $K$，那末极限圈称为**不稳定的**(图 48 $(b)$)；在另外两种情形时(即，内軌綫当 $t\to-\infty$ 时捲向 $K$，而外軌綫当 $t\to+\infty$ 时捲向 $K$，或者是相反的情形)，极限圈称为**半稳定的** (图 48 $(c)$)。

在証明定理 20 之前先讲以下命題。

1) 設 $x=\varphi(t,\xi)$ 是方程(2) ($n=2$)的以 0, $\xi$ 为初始值的解，

$L$ 是由向量参数方程

$$x=\psi(u) \tag{3}$$

确定的平面 $P$ 上的曲綫，且参数 $u$ 的向量函数 $\psi(u)$ 有异于零的連續导数。如果軌綫 $x=\varphi(t, \xi_0)$ 与曲綫 $L$ 相交于点

$$\varphi(t_0, \xi_0)=\psi(u_0)=b, \tag{4}$$

且它們在这一点是互不相切的，即向量 $f(b)$ 和 $\psi'(u_0)$ 是綫性无关的，那末当 $|\xi-\xi_0|$ 充分小时，軌綫 $\varphi(t, \xi)$ 与曲綫 $L$ 相交于点

$$\varphi(t(\xi), \xi)=\psi(u(\xi)),$$

这里量 $t(\xi)-t_0$ 与 $u(\xi)-u_0$ 是小的，而函数 $t(\xi)$ 和 $u(\xi)$ 关于向量 $\xi$ 的分量有連續的导数。从此，特别推知，任何通过充分靠近 $b$ 的点的軌綫与綫 $L$ 相交。

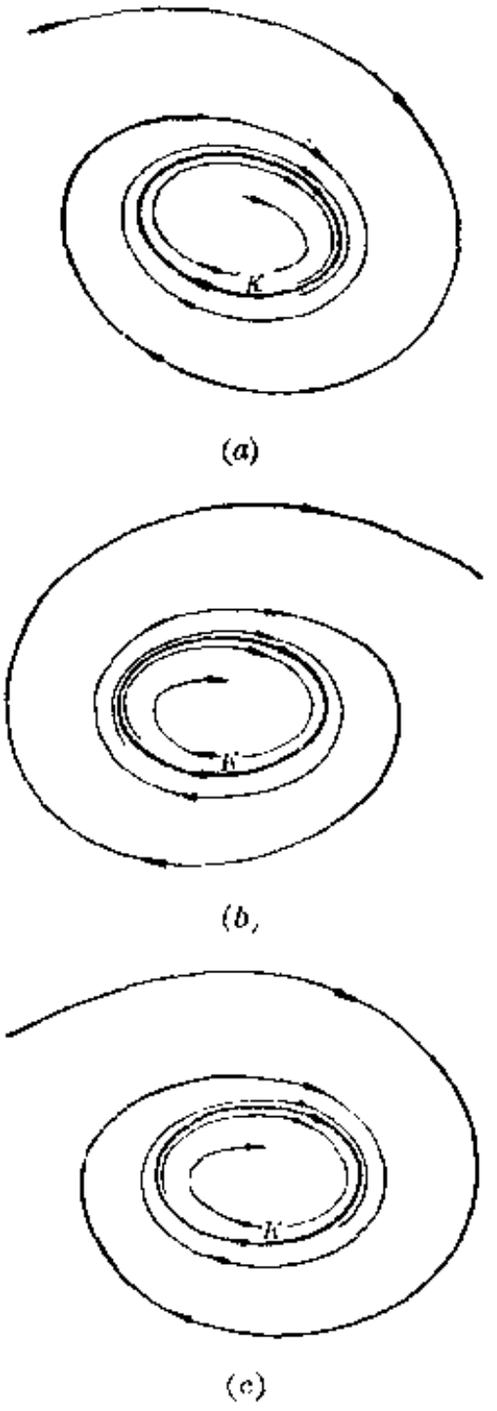

图 48

为了証明，考察向量方程

$$\varphi(t, \xi)-\psi(u)=0, \tag{5}$$

它确定了待求的交点，其中 $t$ 和 $u$ 是向量 $\xi$ 的未知函数。按假設，当 $\xi=\xi_0$ 时，方程(5)有解 $t=t_0$，$u=u_0$（見(4)）。为了証明方程(5)的解的存在性与可微性，把这方程写成数量形式：

$$\varphi^1(t, \xi)-\psi^1(u)=0,$$
$$\varphi^2(t, \xi)-\psi^2(u)=0.$$

这个方程組在 $t=t_0$，$u=u_0$，$\xi=\xi_0$ 时的函数行列式显然等于

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi^1}{\partial t} & \dfrac{\partial\varphi^2}{\partial t} \\ -\dfrac{d\psi^1}{du} & -\dfrac{d\psi^2}{du} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} f^1(\boldsymbol{b}) & f^2(\boldsymbol{b}) \\ \psi^{1\prime}(u_0) & \psi^{2\prime}(u_0) \end{vmatrix}.$$

由假設，向量 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})$ 与 $\psi'(u_0)$ 是綫性无关的，所以上述行列式不等于零。由此，根据熟知的隐函数定理及关于初始值可微性的定理 18 推得命題 1) 的正确性。

**定理 20 的証明** 要依靠对閉軌 $K$ 附近方程 (2) 的**后继函数**的研究。在作这个函数时仅須利用軌綫 $K$ 的封閉性，而沒有利用它是极限圈。以 $T$ 表示軌綫 $K$ 的周期。設 $L$ 是由方程 (3) 在平面 $P$ 上給出的曲綫，它与軌綫 $K$ 相交于唯一的点 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{\psi}(u_0)$，且在这点处不相切。例如，可以认为 $L$ 是以 $\boldsymbol{b}$ 为內点的直綫段。設 $\boldsymbol{p}$ 是曲綫 $L$ 的动点。因为当 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{b}$ 时軌綫 $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{p})$ 在 $t=T$ 时与 $L$ 相交于点 $\boldsymbol{b}$，所以由于命題 1)，当 $\boldsymbol{p}$ 靠近 $\boldsymbol{b}$ 时，軌綫 $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{p})$ 与 $L$ 在 $t$ 靠近 $T$ 时相交于点 $\boldsymbol{q}$，而点 $\boldsymbol{q}$ 是点 $\boldsymbol{p}$ 的**后继点**（图 49）。这表明，在軌綫 $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{p})$ 的弧段 $\boldsymbol{pq}$ 上与 $L$ 沒有 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 以外的交点（見定理 18）。如果

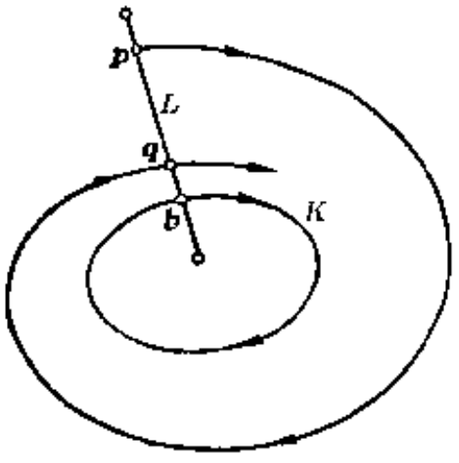

图 49

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{\psi}(u), \quad \boldsymbol{q}=\boldsymbol{\psi}(v),$$

那末由命題 1)，量 $v$ 是量 $u$ 的函数，即 $v=\chi(u)$，且函数 $\chi'(u)$ 是連續的。函数 $\chi(u)$ 就称为**后继函数**。很明显，

$$\chi(u_0)=u_0. \tag{6}$$

其次，因为当 $\boldsymbol{p}\neq\boldsymbol{b}$ 时軌綫 $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{p})$ 与 $K$ 不能相交，所以点 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 位在曲綫 $K$ 的同一侧，因此数

$$u-u_0, \quad \chi(u)-u_0 \tag{7}$$

有相同的符号。

現在証明点 $\boldsymbol{p}$ 的坐标 $u$ 是点 $\boldsymbol{q}$ 的坐标 $v$ 的单值可微函数，即

关系 $v=\chi(u)$ 是可逆的：$u=\chi^{-1}(v)$。为此，只要代替方程(2)考察方程

$$\dot{x}=-f(x), \tag{8}$$

它与方程(2)不同的地方只是右端的符号。从方程(8)的观点看，点 $p$ 是点 $q$ 的后继点，所以由前面所証 $u=\chi^{-1}(v)$，且 $\chi^{-1}(v)$ 是方程(8)的靠近它的周期軌綫 $K$ 的后继函数。

从量(7)有同一符号推知函数 $\chi(u)$ 在点 $u_0$ 处的导数是非負的(見(6))，而因为 $\chi(u)$ 有可微的反函数，所以等式 $\chi'(u_0)=0$ 不可能。这样，$\chi'(u_0)>0$，所以对于所有充分靠近 $u_0$ 的 $u$，

$$\chi'(u)>0.$$

从此得到，后继函数是**单調增加**的。

很明显，方程

$$\chi(u)=u \tag{9}$$

的每一解对应于方程(2)的周期解 $\varphi(t, \psi(u))$，但是因为 $K$ 是极限圈，所以存在正数 $\varepsilon$，使得在区間 $|u-u_0|<\varepsilon$ 中方程(9)仅有一个解 $u=u_0$(見(6))。我們将只在这区間中考察函数 $\chi(u)$。

当 $u<u_0$ 和 $u>u_0$ 时，点 $\psi(u)$ 位在曲綫 $K$ 的不同側；为确定起見，設当 $u>u_0$ 时它位在曲綫 $K$ 的外側，且依据函数 $\chi(u)$ 在区間 $u_0<u<u_0+\varepsilon$ 中的性质来研究外部軌綫的性态。因为方程(9)在这区間上沒有解，所以在这整个区間上，不等式

$$\chi(u)<u, \tag{10}$$

$$\chi(u)>u \tag{11}$$

有一个成立。第一个不等式表明，在 $K$ 的外面，点 $q$ 在曲綫 $L$ 上常比点 $p$ 靠近 $b$ (图 49)，第二个不等式表示相反的情形。很明显，不等式(11)等价于不等式

$$\chi^{-1}(v)<v. \tag{12}$$

我們来研究不等式(10)的情形。設 $u_1$ 是区間 $u_0<u<u_0+\varepsilon$ 中的任一点；置

$$u_{i+1}=\chi(u_i),\quad i=1,2,\cdots. \tag{13}$$

由于(10)，序列

$$u_1, u_2, \cdots, u_i, \cdots$$

是单調下降的，且它的每一項都大于 $u_0$。設 $u^*$ 是这序列的极限，我們要証 $u^*=u_0$。在等式(13)中当 $i\to\infty$ 取极限，得到 $u^*=\chi(u^*)$，而 $u=u_0$ 是方程(9)的唯一解，所以 $u^*=u_0$。点 $\psi(u_1)$，$\psi(u_2)$，$\cdots$，$\psi(u_i)$，$\cdots$ 是 $\varphi(t,\psi(u_1))$ 与綫 $L$ 的交点，由它們的收斂于 $b$ 可知，在 $\varepsilon$ 充分小时，这軌綫当 $t\to+\infty$ 时螺旋地趋向 $K$（見定理 18）。这对于任何以 $\psi(u_1)$，$u_0<u_1<u_0+\varepsilon$ 为始点的軌綫皆正确；因此，軌綫 $K$ 的整个外半邻域为所說形式的螺旋軌綫所充滿。

如果对方程(8)的后继函数，不等式(12)成立，那末应用已經証明的結論于方程(8)，就可断言軌道 $K$ 的整个外半邻域为方程(8)的螺旋軌綫所充滿，且当 $t\to+\infty$ 时捲向 $K$。因为方程(2)和(8)的軌綫在几何上是一致的，仅是走向相反，所以由对方程(8)所証明的事实推知（对于方程(2)），当不等式(11)成立时，軌綫 $K$ 的整个外邻域为 $t\to-\infty$ 时螺旋地捲向 $K$ 的軌綫所充滿。

内軌綫的性态可完全类似地研究。

这样，定理 20 得証。

注　为了把函数 $\chi(u)$ 在 $u_0$ 附近的状态与内外軌綫的状态的关系統一在一个公式里，我們考察不等式

$$\left.\begin{aligned}&|\chi(u)-u_0|<|u-u_0|,\\&|\chi(u)-u_0|>|u-u_0|.\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

如果在曲綫 $K$ 的半邻域中（外面的或者里面的）第一个不等式成立，那末点 $q$ 在曲綫 $L$ 上比点 $p$ 靠近 $b$ 点，因此在这半邻域中的軌綫当 $t\to+\infty$ 时螺旋地捲向 $K$。如果不等式(14)的第二个成立，那末在这半邻域中的軌綫当 $t\to-\infty$ 时螺旋地捲向 $K$。

对后继函数 $\chi(u)$ 作几何的研究是很有兴趣的。在变量 $u$，$v$ 的平面上，把函数 $\chi(u)$ 表示成方程

$$v=\chi(u) \tag{15}$$

的图形，为方便起見，假設 $u_0>0$. 为了研究方程(9)的解，除了曲綫 (15)，我們还考察第一象限的角平分綫(图 50)：

$$v=u. \tag{16}$$

为了求方程(9)的所有解，应該求曲綫(15)和(16)的所有交点。閉軌 $K$ 成为极限圈的必要和充分条件是：点 $(u_0, u_0)$ 为曲綫(15)和(16)的孤立交点。如果这两条曲綫在点 $(u_0, u_0)$ 处不相切，即如果 $\chi'(u_0)\neq 1$，那末点 $(u_0, u_0)$ 是孤立的，这时称軌綫 $K$ 为**粗的**极限圈。当 $\chi'(u_0)<1$ 时(图 50)，(14)的第一个不等式明显地在两个半邻域中都成立，因而极限圈 $K$ 是稳定的。当 $\chi'(u_0)>1$ 时(图 51)，(14)的第二个不等式成立，因而极限圈 $K$ 是完全不稳定的。

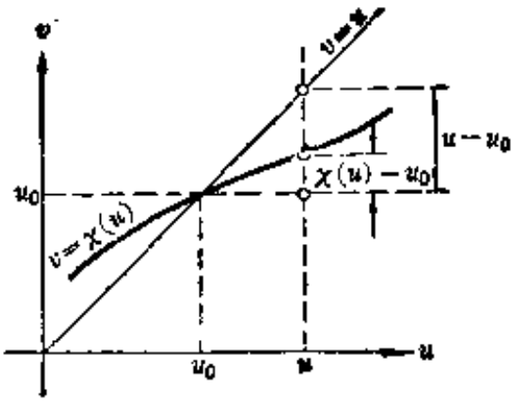


图 50

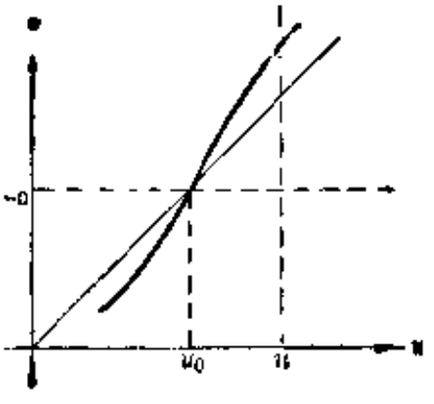


图 51

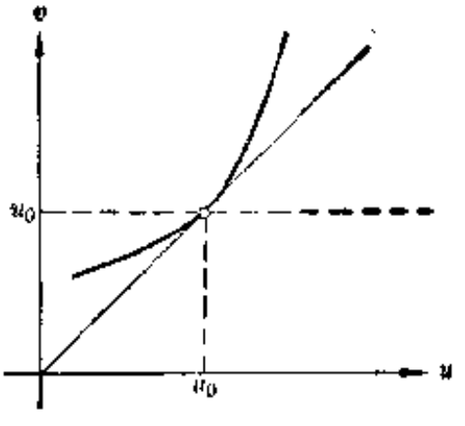


图 52

如果曲綫(15)和(16)在点 $(u_0, u_0)$ 处相切，而曲綫(15)从分角綫(16)的一侧穿到另一侧，那末极限圈或是稳定的或是完全不稳定的。如果曲綫(15)切于分角綫(16)，并且位在它的一侧(图 52)，那末对应的极限圈是半稳定的。

极限圈存在的判据

**2)** 設 $\varphi(t)$ 是方程(2)($n$ 是任意的)的某一解，它对 $t\geqslant t_0$ 的所有值有定义，且对这些 $t$ 的值，它位在 $\Delta$ 中的有界閉集 $F$ 內。空間 $R$ 的点 $p$ 称为解 $\varphi(t)$ 的 $\omega$-**极限点**，如果存在无限增加的序列(其值大于 $t_0$)

$$t_1, t_2, \cdots, t_k, \cdots; \quad \lim t_k=\infty,$$

使得

$$\lim_{k\to\infty}\varphi(t_k)=p.$$

解 $\varphi(t)$ 的所有 $\omega$-极限点的集合 $\Omega$ 称为 $\omega$-**极限集合**。可以証明，集合 $\Omega$ 是不空的、閉的、有界的且由整条軌綫組成；最后一点的意思是：如果点 $\xi$ 属于 $\Omega$，那末以 $(0, \xi)$ 为初始值的解 $\varphi(t, \xi)$ 对所有 $t$ 的值有定义，且整个軌綫 $\varphi(t,\xi)$ 位在集合 $\Omega$ 中。显然，軌綫 $\varphi(t,\xi)$ 的 $\omega$-极限集合完全含在 $\Omega$ 中。)

我們来証明命題 2)。从集合 $F$ 的封閉性和有界性推知集合 $\Omega$ (明显地含在 $F$ 中)是不空的和有界的。現在来証明它是閉的。設

$$p_1, p_2, \cdots, p_k, \cdots$$

是集合 $\Omega$ 中的某一点列，它收敛于集合 $F$ 中的点 $p$；現証 $p$ 属于 $\Omega$。設 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_k, \cdots$ 和 $s_1, s_2, \cdots, s_k, \cdots$ 是两个正数序列：

$$\lim_{k\to\infty}\varepsilon_k=0; \quad \lim_{k\to\infty}s_k=\infty.$$

因为点 $p_k$ 属于 $\Omega$，所以可找到这样的 $t_k\geqslant s_k$，使得点 $p_k$ 和 $\varphi(t_k)$ 的距离小于 $\varepsilon_k$。对于所选取的值

$$t_1, t_2, \cdots, t_k, \cdots; \quad \lim_{k\to\infty}t_k=\infty,$$

我們得到

$$\lim_{k\to\infty}\varphi(t_k)=p,$$

这表明点 $p$ 属于 $\Omega$。

現在証明集合 $\Omega$ 是由整条軌綫組成的。設 $\xi$ 是 $\Omega$ 中的任一点，$\varphi(t, \xi)$ 是以 $(0, \xi)$ 为初始值的解。其次假設 $T$ 是变量 $t$ 的这样的数值(它可能是負的)，对于它解 $\varphi(t, \xi)$ 有定义，因而 $\varphi(T, \xi)$ 存

在。因为点 $\xi$ 属于 $\Omega$，所以可找到这样的无限增加的序列

$$t_1, t_2, \cdots, t_k, \cdots; \lim_{k\to\infty} t_k = \infty,$$

使得

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(t_k) = \xi. \tag{17}$$

由于解 $\varphi(t)$ 对所有充分大的 $t$ 有定义，因此当 $T$ 給定时，从某个 $k$ 起，点

$$\varphi(t_k+T) = \varphi(T, \varphi(t_k))$$

是有定义的(見 § 26, 3))。根据定理 18，从公式(17)得到

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(t_k+T) = \lim_{k\to\infty} \varphi(T, \varphi(t_k)) = \varphi(T, \xi),$$

由此推知点 $\varphi(T, \xi)$ 属于集合 $\Omega$，因而属于 $F$。这样，不論 $t$ 增大还是減小，軌綫 $\varphi(t, \xi)$ 不能跑出集合 $F$，所以由 § 24 的命題 2) 得知它对所有的值 $t$ 有定义。

这样，命題 2) 得証。

我們来考察某些特殊的 $\omega$-极限集合。如果解 $\varphi(t)$ 是平衡位置(見 2))，即 $\varphi(t) \equiv x_0$，那末 $\varphi(t)$ 的 $\omega$-极限集合显然就是一点 $x_0$；如果 $\varphi(t)$ 是周期解，它描出閉軌 $K$，那末 $\varphi(t)$ 的 $\omega$-极限集合显然就是 $K$。最后，如果 $K$ 是周期解，而 $\varphi(t)$ 当 $t\to+\infty$ 时螺旋地捲向 $K$，那末 $K$ 是 $\varphi(t)$ 的 $\omega$-极限集合。

現在証明在某些情形能判断周期解存在的定理。在方程組 (1) ($n=2$) 的右端是解析的情形，一个周期解或者是极限圈或者包含在周期軌綫族之內(参看例 3)。

**定理 21.** 設 $\varphi(t)$ 是方程(2) ($n=2$) 的解，它对所有的 $t\geqslant t_0$ 有定义，且位在 $\Delta$ 中的有界閉集 $F$ 中，設 $\Omega$ 是 $\varphi(t)$ 的 $\omega$-极限集合。如果 $\Omega$ 不含有平衡位置，那末它是由一条閉軌 $K$ 組成的。这时有两种可能：1) $\varphi(t)$ 是周期解，$K$ 是它所描出的軌綫；2) 由解 $\varphi(t)$ 描出的軌綫当 $t\to+\infty$ 时螺旋地捲向 $K$。

**証明** 如果 $\varphi(t)$ 是周期解，那末集合 $\Omega$ 是由解 $\varphi(t)$ 描出的唯一的周期軌綫 $K$ 組成的，因而定理的結論是明显的(情形 1))。設

$\varphi(t)$不是周期解，且設点 $b$ 是集合 $\Omega$ 中的任一点。过点 $b$ 引一直綫段 $L$，它与点 $b$ 的相速度向量 $f(b)$不共綫（因为按假設集合 $\Omega$ 中的点 $b$ 不是平衡位置，所以 $f(b)\neq 0$），且选择这一段充分小，使得經过这綫段的所有軌綫与通过 $b$ 点的軌綫以同一方向穿过它（不相切）（图 53）。因为点 $b$ 是軌綫 $\varphi(t)$的 $\omega$-极限点，且 $\varphi(t)$不是閉的，所以这軌綫必与 $L$ 在无穷多个不同的点相交（見 1））。設 $a_1=\varphi(t_1)$ 和 $a_2=\varphi(t_2)$是軌綫 $\varphi(t)$ 与綫段 $L$ 的两个相继的交点 $(t_1<t_2)$，以 $M$ 表示軌綫 $\varphi(t)$在 $t_1\leqslant t\leqslant t_2$ 中的一段。它与綫段 $\overline{a_1a_2}$ 組成一条閉曲綫 $\Gamma$，$\Gamma$ 把平面分成两个区域 $G_1$ 与 $G_2$。設 $h$ 是小的正数。点 $\varphi(t_1-h)$与 $\varphi(t_2+h)$ 位在曲綫 $\Gamma$ 的两側在几何上是明显的（图 54）；我們設 $\varphi(t_1-h)$ 属于 $G_1$，$\varphi(t_2+h)$ 属于 $G_2$。通过綫段 $\overline{a_1a_2}$ 的所有軌綫是由 $G_1$ 到 $G_2$ 的，因此，沒有任何軌綫能通过这綫段从 $G_2$ 中走出。因为 $M$ 是軌綫且軌綫不能相交，所以沒有軌綫通过 $M$ 走进或走出区域 $G_2$。因为軌綫 $\varphi(t)$ 的一段 $M$ 仅在它的两端与綫段 $L$ 相交，所以綫段 $L$ 的端点位在曲綫 $\Gamma$ 的不同側，以 $a$ 記 $L$ 在区域 $G_2$ 中的端点。軌綫 $\varphi(t)$ 当 $t>t_2+h$ 时完全在区域 $G_2$ 中且不可能与綫段 $\overline{a_1a_2}$ 相交；所以点 $b$ 不属于綫段 $\overline{a_1a_2}$（見 1）），因而它应位在綫段 $\overline{aa_2}$ 上。现在，如果以 $a_3=\varphi(t_3)$記軌綫 $\varphi(t)$在 $a_2$ 后（在时間上）与綫段 $L$ 相交的点，

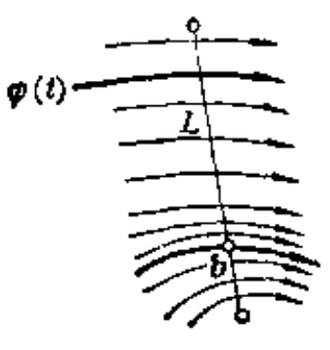


图 53

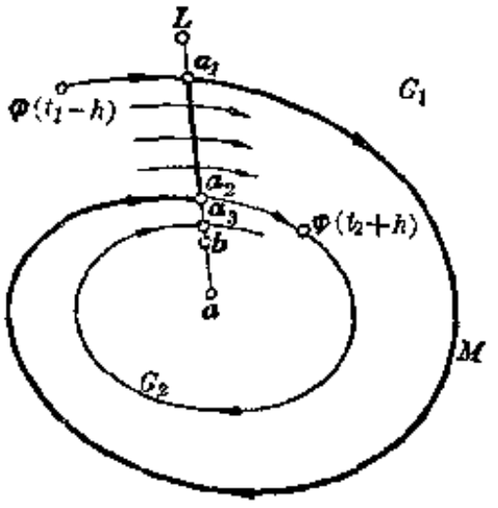


图 54

那末由类似的討論看到，它位在綫段 $\overline{ba_2}$ 上(图 54)。以

$$a_4=\varphi(t_4),\ \cdots,\ a_k=\varphi(t_k),\ \cdots$$

記軌綫 $\varphi(t)$ 与綫段 $L$ 相继(在时間上)的交点，我們确信它在 $L$ 上形成一个从 $a_1$ 到 $b$ 方向的单調点列。現証序列 $a_1,\ \cdots,\ a_k,\ \cdots$ 的极限 $b'$ 和 $b$ 是一致的。

为此，我們首先証明序列 $t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_k,\ \cdots$ 是无限增加的。假設 $\lim\limits_{k\to\infty} t_k=\tau<+\infty$。于是 $\varphi(\tau)=b'$，且 $f(b')=\varphi'(\tau)$ $=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{\varphi(\tau)-\varphi(t_k)}{\tau-t_k}$，但这是不可能的，因为向量 $\varphi(\tau)-\varphi(t_k)$ 的方向与綫段 $L$ 的方向一致，而向量 $f(b')$ 与它不共綫。这样，应有关系 $\lim\limits_{k\to\infty} t_k=+\infty$，所以当 $t\geqslant t_1$ 时軌綫 $\varphi(t)$ 与 $L$ 仅相交于点 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k,\ \cdots$。因而这軌綫在綫段 $L$ 上仅有一个 $\omega$-极限点 $b'$(見 1))，所以 $b'=b$。注意，在証明中仅用到点 $b$ 自身不是平衡位置。

現在証明，軌綫 $\varphi(t)$ 不能位于任何另外的軌綫 $\psi(t)$ 的 $\omega$-极限集合中。假定与此相反。那末 $\varphi(t)$ 的每一点是 $\psi(t)$ 的 $\omega$-极限点(見 2))；特别，点 $a_1$ 就是这样的。因为点 $a_1$ 不是平衡位置，所以由上面的証明，軌綫 $\psi(t)$ 与 $L$ 的交点序列

$$b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_k,\ \cdots$$

形成收斂于 $a_1$ 的单調序列，因而 $\psi(t)$ 在 $L$ 上沒有另外的 $\omega$-极限点，而这与 $a_2,\ a_3,\ \cdots$ 位在軌綫 $\varphi(t)$ 上，从而是軌綫 $\psi(t)$ 的 $\omega$-极限点相矛盾。

这样就証明了：在不閉軌綫的 $\omega$-极限点中，如果沒有平衡位置，那末这不閉軌綫本身不能由 $\omega$-极限点构成。

因为軌綫 $K$ 包含在軌綫 $\varphi(t)$ 的 $\omega$-极限集合 $\Omega$ 中，且集合 $\Omega$ 是閉的(見 2))，所以軌綫 $K$ 的 $\omega$-极限点含在 $\Omega$ 中，因此沒有平衡位置。这样，对于軌綫 $K$ 应用已經証得的命題，就推出軌綫 $K$ 应該是閉的。从整个的說明看到，軌綫 $\varphi(t)$ 螺旋地捲向 $K$，所以集合 $\Omega$ 仅由过 $b$ 点的閉軌綫 $K$ 組成。

于是定理 21 得証。

## 例 題

**例題 1.** 我們来給出形状为(1)的方程組($n=2$)的例題，使它具有各种类型的周期解，特别是有各种类型的极限圈。原来我們是在极坐标 $\varphi$, $\rho$ 之下給出方程的，后来我們就变到笛卡尔坐标 $x$, $y$。考虑到以后向笛卡尔坐标的变换，我們以下面的形式給出方程：

$$\dot{\varphi}=1, \quad \dot{\rho}=\rho g(\rho^2), \tag{18}$$

这里 $g(u)$ 是它的变量的連續可微函数，对变量所有非負的值有定义。在用极坐标討論时，我們将只用到 $\rho$ 是正值。

将所有满足 $g(\rho^2)=0$ 的正值 $\rho$ 的集合記为 $N$，它在正数集合中的余集記为 $D$。$N$ 的每一数 $u_0$，明显地对应有方程(18)的解：

$$\varphi=t, \quad \rho=u_0,$$

它所对应的軌綫 $K_{u_0}$ 是閉的：它是平面 $P$ 上以坐标原点为中心、$u_0$ 为半徑的圓周。因为集合 $N$ 在整个正数集合中是閉的，所以 $D$ 是开的，由有限个或者可数个互不相交的区間組成。設 $u_1<\rho<u_2$ 是有限区間中的一个，那末閉軌 $K_{u_1}$ 和 $K_{u_2}$ 在平面 $P$ 上界定一个环 $Q$，而对于所有区間 $u_1<\rho<u_2$ 中的数 $\rho$，函数 $g(\rho^2)$ 保持同符号，所以在整个区間中不等式

$$g(\rho^2)<0; \quad g(\rho^2)>0 \tag{19}$$

有一个成立。設

$$\varphi=t, \quad \rho=\rho(t, u) \tag{20}$$

是方程組(18)的以 $t=0$, $\varphi=0$, $\rho=u$ 为初始值的解，其中 $u_1<u<u_2$。根据 § 15 中例題 1 所証，函数 $\rho(t, u)$ 对所有 $t$ 有定义，且当 $t\to+\infty$ 时趋于区間 $u_1<\rho<u_2$ 的一个端点，而当 $t\to-\infty$ 时趋于另一个端点。从此推出，当 $t\to+\infty$ 和 $t\to-\infty$ 时軌綫(20)螺旋地捲向圓周 $K_{u_1}$, $K_{u_2}$。就是說，如果不等式(19)的第一式成立，那

末軌綫(20)当$t\to+\infty$时螺旋地捲向$K_{u_1}$，而当$t\to-\infty$时捲向$K_{u_2}$(图 55)．如果不等式(19)的第二式成立，那末解 (20) 当$t\to-\infty$时捲向$K_{u_2}$，当$t\to+\infty$时捲向$K_{u_1}$(图 56)．这样，环$Q$为一种类型的螺旋綫所充滿，螺旋綫的类型取决于在区間$u_1<\rho<u_2$內不等式(19)中的那一个成立。如果集合$N$是有界的，H. $u^*$是它的上界，那末在无穷区間$u^*<\rho<+\infty$中軌綫(20)的一半是捲向圓周$K_{u^*}$的，而另一半趋于无穷。

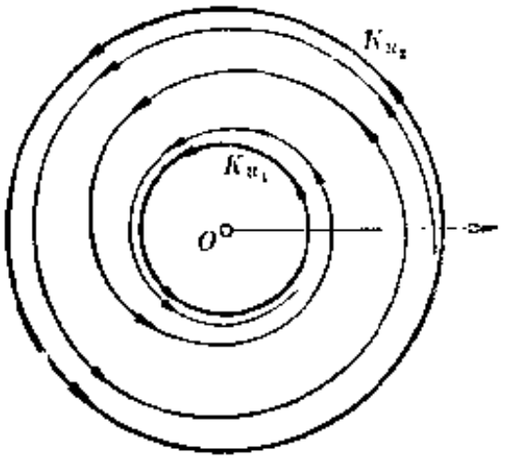


图 55

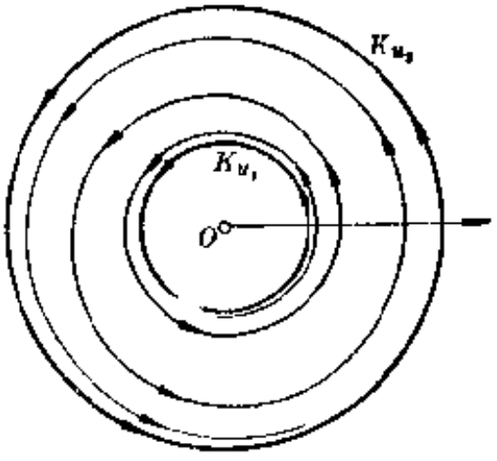


图 56

如果点$u_0$是集合$N$的孤立点，那末閉軌$K_{u_0}$是极限圈，它的类型取决于位在邻接$K_{u_0}$的环中螺旋綫的类型。如果点$u_0$不是集合$N$的孤立点，那末周期解$K_{u_0}$不是极限圈。如果这时集合$N$含有以$u_0$为中心的整个区間，那末周期解$K_{u_0}$含在某一个周期解族中，这周期解族是由以坐标原点为中心的同心圓周組成的。如果数$u_0$在一边邻接于集合$N$中的一个区間，另一边邻接于$D$中的区間，那末軌綫$K_{u_0}$是在一側邻近它的一族閉軌的境界綫，而在它的另一側，軌綫是螺旋地捲向它。可是邻接于周期解$K_{u_0}$的閉軌还可能有更复杂的情形。它們是容易出現的，例如，$N$可以是康安(Cantor)的完全点集。

現在置

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi,\tag{21}$$

把方程組(18)写成笛卡尔坐标的形式。导微关系式(21)得到

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=\dot{\rho}\cos\varphi-\rho\dot{\varphi}\sin\varphi=\rho g(\rho^2)\cdot\frac{x}{\rho}-\rho\cdot\frac{y}{\rho}=xg(x^2+y^2)-y,\\ \dot{y}&=\dot{\rho}\sin\varphi+\rho\dot{\varphi}\cos\varphi=\rho g(\rho^2)\cdot\frac{y}{\rho}+\rho\cdot\frac{x}{\rho}=yg(x^2+y^2)+x.\end{aligned}\right\}\tag{22}$$

因此,在笛卡尔坐标中,方程組(18)取形式:

$$\dot{x}=xg(x^2+y^2)-y,\quad \dot{y}=yg(x^2+y^2)+x.\tag{23}$$

(例如,这里的函数 $g$ 可以是任意的多項式。)坐标原点是方程組(23)的平衡位置。

**例題 2.** 設

$$\dot{x}^1=f^1(x^1,x^2,\mu),\quad \dot{x}^2=f^2(x^1,x^2,\mu)$$

是标准的二阶自治系統,它的右端依賴于数值参数 $\mu$,且关于变量 $x^1$, $x^2$, $\mu$ 有連續的一阶偏导数。其次假設,

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\mu)\tag{24}$$

是这方程組的向量写法。方程組(24)的以 0, $\boldsymbol{\xi}$ 为初始值的解記为 $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\xi},\mu)$;設 $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\xi}_0,\mu_0)$ 是方程(24)当 $\mu=\mu_0$ 时的周期解,它的周期为 $T$。我們来弄清楚当参数 $\mu$ 在 $\mu_0$ 附近变化时产生周期解的問題。

不論参数 $\mu$ 的数值如何,方程(24)的解都将表示在同一个平面 $P$ 上。設 $K$ 是对应于解 $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\xi}_0,\mu_0)$ 的閉軌,$L$ 是由参数的向量方程

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\psi}(u)$$

給定的光滑曲綫,它与軌綫 $K$ 相交于唯一的点

$$\boldsymbol{\xi}_0=\boldsymbol{\varphi}(0,\boldsymbol{\xi}_0,\mu_0)=\boldsymbol{\varphi}(T,\boldsymbol{\xi}_0,\mu_0)=\boldsymbol{\psi}(u_0),\tag{25}$$

且与 $K$ 不相切。我們来考察向量方程:

$$\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\psi}(u),\mu)-\boldsymbol{\psi}(v)=0,\tag{26}$$

其中 $\mu$, $u$ 是自变量,而 $t$ 和 $v$ 是未知函数。設自变量 $u$ 在 $u_0$ 附近,$\mu$ 在 $\mu_0$ 附近变化。所找的解将是 $t$ 在 $T$ 附近,$v$ 在 $u_0$ 附近

时的解。当 $u=u_0$, $\mu=\mu_0$ 时方程(26)有明显的解: $t=T$, $v=u_0$ (見(25)), 且因向量 $\boldsymbol{f}(\xi_0, \mu_0)$ 与 $\psi'(u_0)$ 是无关的, 所以相应方程組的函数行列式在这些值时不等于零。当 $\mu=\mu_0$ 时方程(26)确定了方程(24) ($\mu=\mu_0$)在闭軌 $K$ 附近的后继函数 $v=\chi(u, \mu_0)$. 当 $\mu$ 在 $\mu_0$ 附近时, 函数 $v=\chi(u, \mu)$ 也由方程(26)确定, 且可以认为是方程(24)在周期解 $K$ 附近的后继函数。可是方程(24)当 $\mu\neq\mu_0$ 时可能沒有周期解。为求方程(24)在 $\mu$ 靠近 $\mu_0$ 时的周期解, 我們討論关于变量 $\mu$ 的未知函数 $u(\mu)$ 的方程

$$\chi(u, \mu)-u=0. \tag{27}$$

如果方程(27)的左端关于变量 $u$ 的导数当 $\mu=\mu_0$, $u=u_0$ 时不等于零, 即

$$\frac{\partial}{\partial u}\chi(u_0, \mu_0)\neq 1, \tag{28}$$

那末方程(27)显然有可微解 $u(\mu)$, 这时方程(24)当 $\mu$ 靠近 $\mu_0$ 时有唯一的周期解, 它光滑地依賴于 $\mu$, 且当 $\mu=\mu_0$ 时变为 $K$. 条件(28)表示了圈 $K$ 的**粗性质**的假設。在所得到的結果中包含了使用术語"粗的"的理由。当方程組的右端作微小变化时粗的极限圈不消失(且仍是粗的), 它在变化时是"結实的"。

如果方程

$$v=\chi(u, \mu) \tag{29}$$

当 $\mu=\mu_0$ 时在变量 $u$, $v$ 平面上的图形在点 $(u_0, u_0)$ 处与角平分綫

$$v=u \tag{30}$$

相切, 且具有一阶切触(图 57($b$)), 那末曲綫(29)在 $\mu=\mu_0$ 时位在角平分綫(30)的一侧, 且极限圈 $K$ 是半稳定的(图 58($b$)). 当参数 $\mu$ 在 $\mu_0$ 附近变动时, 图形(29)的最自然的状态是: 当 $\mu$ 在 $\mu_0$ 的一侧时(29)和(30)的图形完全沒有交点(图 57($a$)), 而当 $\mu$ 在 $\mu_0$ 的另一侧时, 这些图形出現两个交点(图 57($c$)), 因此方程(24)在 $K$ 附近出現两个粗极限圈(图 58($c$)), 这样, 当参数 $\mu$ 通过 $\mu_0$

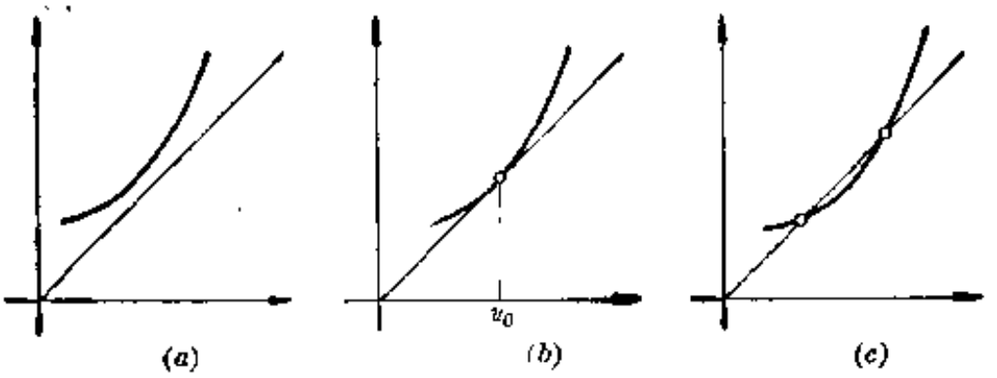


图 57

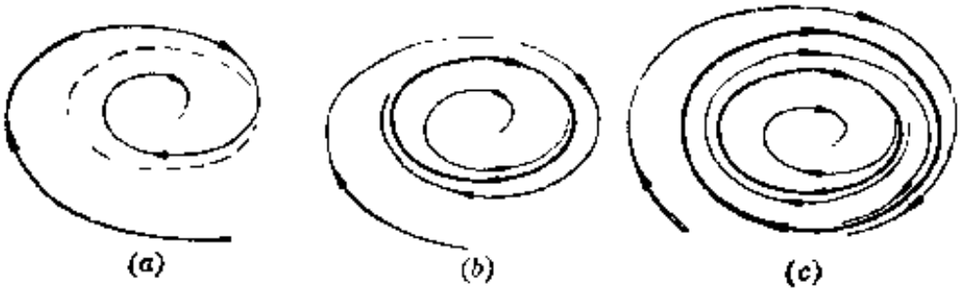


图 58

时，我們开始沒有极限圈(图 58(*a*))，然后当 $\mu=\mu_0$ 时出現一个半稳定的极限圈，在参数 $\mu$ 进一步变化时它分裂成为两个靠近 $K$ 的粗的极限圈。所描述的現象称为方程組右端变化时极限圈的"产生"。

**例題 3.** 我們来指出当方程 (2) 的右端是解析函数时周期解 $K$ 的一些十分重要的性质。这里我們要不加証明地利用这时方程 (2) 的解 $\varphi(t, \xi)$ 是变量 $t$, $\xi^1$, $\xi^2$ 的解析函数的事实。在作后继函数时，假定曲綫 $L$ 是由解析方程給出的。在这些假設下后继函数 $\chi(u)$ 是解析方程的解，因而是解析的。

因为函数 $\chi(u)-u$ 的零点对应于方程(2)的周期解，所以由函数 $\chi(u)$ 的解析性，仅有两种互相排斥的可能情形：1)当 $u_0$ 是 $\chi(u)-u$ 的孤立零点时，$K$ 是极限圈；2)当 $\chi(u)-u$ 恒等于零时，周期解位在周期解族的内部。如果任何另一条軌綫螺旋地捲向 $K$，那末 $K$ 不包括在周期解族的内部，因而是极限圈。这样，当方程有解析右端时，定理 21 的情形 2) 的周期解 $K$ 是极限圈。

## § 29. 电子管振蕩器

这里提綱式地描述一下周期的(不衰減)电振蕩器——最簡单的电子管振蕩器。描述电子管振蕩器工作的方程是非綫性的，它的极限圈对应于振蕩器所激发的周期振蕩。极限圈的数学概念与由电子管振蕩器激发的不衰減振蕩的物理概念的一致性，首先是由著名的苏联学者 A. A. 安德罗諾夫建立的。在安德罗諾夫的研究以前，人們企图用綫性微分方程来說明电子管振蕩器的工作，但不能給出振蕩器工作的正确的数学描述。

**1) 三极管**(电子管的一种) 是三端网絡 $aks$。三极管的記号表示如图 59。其中 $a$ 是阳极，$k$ 是阴极，$s$ 是栅极。在栅极 $s$ 和阴极 $k$ 之間加有电位差 $U_s$ (栅压)，可是在 $s$ 与 $k$ 之間沒有电流；从阳极 $a$ 到阴极 $k$ 通过电子管的电子流是 $I_a$ (阳极电流)。支配三极管工作的規律由公式

$$I_a=f(U_s) \tag{1}$$

来描述。函数 $f$ 称为三极管的特性函数，假設它是单調增加的正值函数，且滿足条件：

$$\lim_{U_s\to-\infty} f(U_s)=0,$$
$$\lim_{U_s\to+\infty} f(U_s)=I_N,$$

其中 $I_N$ 是三极管的飽和电流(图 60)。通常也假設函数 $f'(U_s)$ 在

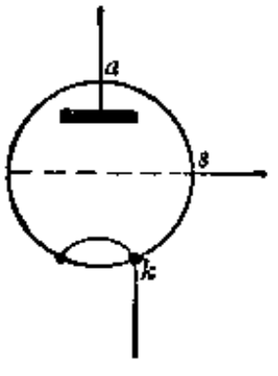


图 59

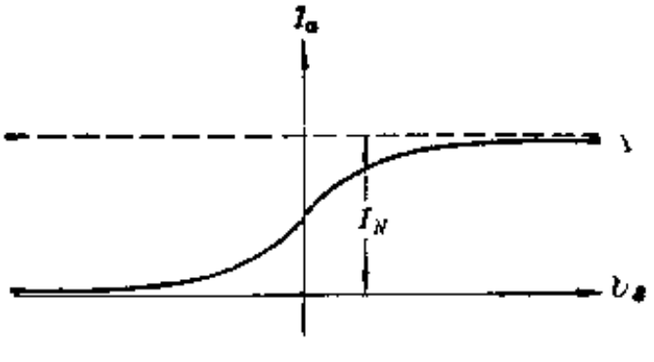


图 60 三极管的特性曲綫

$U_s=0$ 处达到最大值。

在 1) 中所指的三端网络的三极管，实际上除电子管外还包括阳极电池组、栅极偏压电池组及阴极灯丝电池组。

**2)** 以阳极回路为振荡回路的电子管振荡器具有下面的装置(图 61)：它有四个节点 $a, k, s, b$，由特性函数为 $f(U_s)$ 的三极管 $aks$，电容为 $C$ 的电容器 $ak$，量值为 $R$ 的电阻 $ab$，量值为 $L$ 的自感 $bk$ 以及没有量值的自感 $sk$ 组成。自感 $kb$ 和 $ks$ 之间以负的互感 $-M$ $(M>0)$ 相联系，它就是所謂电子管振荡器的負反饋。如果以 $J$ 表示通过电阻 $ba$ 或者通过自感 $kb$ 的电流强度，

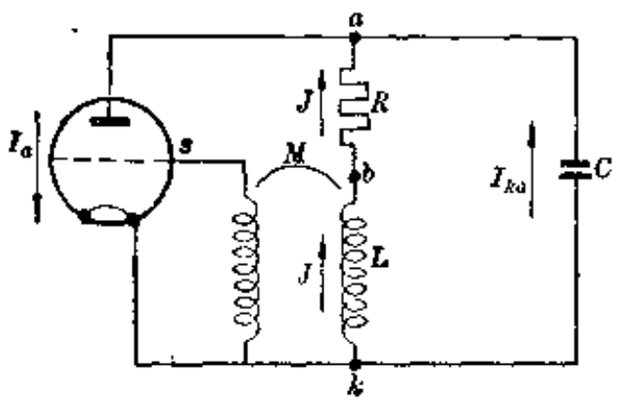

图 61

$$J=I_{ba}=I_{kb},$$

那末可以証明，$J$ 作为时間 $t$ 的函数满足下面的微分方程：

$$L\ddot{J}+R\dot{J}+\frac{J}{C}=\frac{1}{C}f(M\dot{J}). \tag{2}$$

現在推导方极(2)。根据克希荷夫第一定律，

$$J+I_{ka}=I_a, \tag{3}$$

其中 $I_{ka}$ 是通过电容器 $ka$ 的电流，此外，根据三极管的性质：

$$I_{sk}=0. \tag{4}$$

应用克希荷夫第二定律于振荡回路 $kbak$，得到

$$L\dot{I}_{kb}+RI_{ba}+\frac{1}{C}\int I_{ak}\,dt=0.$$

导微上式，得到

$$L\ddot{I}_{kb}+R\dot{I}_{ba}+\frac{1}{C}I_{ak}=0. \tag{5}$$

根据自感 $kb$ 和 $ks$ 之间的互感得到(参见(4)及§13, 2))

$$U_s = M\dot{I}_{kb}. \tag{6}$$

这样,由关系(1),(3),(5),(6)就推得(2)。

**3)** 方程(2)在变量 $J$, $\dot{J}$ 的相平面上具有唯一的平衡位置,其坐标为

$$J=f(0), \quad \dot{J}=0. \tag{7}$$

如果

$$R>\frac{M}{C}f'(0), \tag{8}$$

那末这个平衡位置是渐近稳定的;如果

$$R<\frac{M}{C}f'(0), \tag{9}$$

那末是完全不稳定的(参见§26, 6))。变量 $J$, $\dot{J}$ 平面上的无穷远点在所有情形下是不稳定的,这就是說,平面 $J$, $\dot{J}$ 上存在充分大的圆 $K$,使得方程(2)的任何軌綫从某一时刻进入 $K$ 之后,就不再跑出 $K$。当不等式(9)成立时,平衡位置(7)是完全不稳定的。因此,根据定理21(参见§28),任何异于平衡位置(7)的軌綫的 $\omega$-极限集合是閉軌,所以在不等式(9)成立时,电子管振荡器是周期的不衰减电振荡的源。

**注** 在特性函数 $f$ 的适当选择下,方程(2)有唯一的极限圈,方程(2)所有其余的軌綫,只要不是平衡位置(7),都螺旋地接近于它。在例題中将指出一个具有这种性质的特性函数。

为了証明命題 3),我們引进新的未知函数 $x$:

$$J=x+f(0), \tag{10}$$

这时,点(7)对应于 $x$, $\dot{x}$ 平面的坐标原点。

作变換(10),从方程(2)得到方程

$$\ddot{x}+\frac{R}{L}\dot{x}+\frac{1}{LC}x=-\frac{1}{LC}[f(M\dot{x})-f(0)]. \tag{11}$$

以 $g(\dot{x})$ 表示这个方程右端的变量 $\dot{x}$ 的函数。可以直接看出，函数 $g$ 是有界而单调增加的，且仅在变量等于零时变为零(图 62)。再置

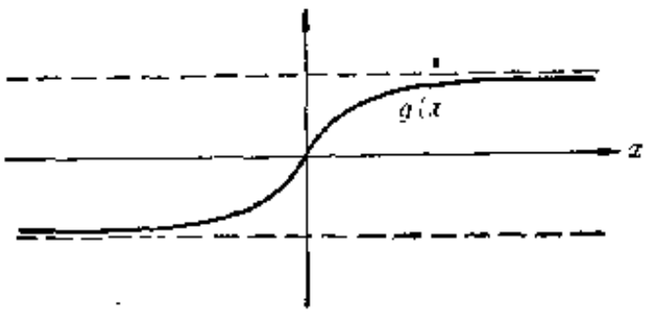

图 62

$$\frac{R}{L}=2\delta,\quad \frac{1}{LC}=\omega^2,$$

把方程(11)写为形式：

$$\ddot{x}+2\delta\dot{x}+\omega^2x=g(\dot{x}).$$

引进新的变量 $y=\dot{x}$，从这方程得到标准方程组：

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=y,\\ \dot{y}&=-\omega^2x-2\delta y+g(y).\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

为了找方程组(12)的平衡位置，使它的右端等于零：

$$\left.\begin{aligned}y&=0,\\ -\omega^2x-2\delta y+g(y)&=0.\end{aligned}\right\}$$

它有唯一的解

$$x=0,\quad y=0.$$

这样，坐标原点是方程组(12)的唯一的平衡位置，由此得到方程(2)的唯一的平衡位置是点(7)。

现在讲明方程组(12)的平衡位置(0,0)的稳定性。为此，在点(0, 0)把这方程组线性化，得到方程组

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=y,\\ \dot{y}&=-\omega^2x-2\delta y+g'(0)y.\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

简单的计算给出它的特征多项式是

$$\lambda^2+(2\delta-g'(0))\lambda+\omega^2.$$

在新的記号下，条件(8)和(9)取形式：$2\delta>g'(0)$，$2\delta<g'(0)$。因此，当条件(8)成立时，平衡位置(0, 0)是渐近稳定的(参見定理 19 及§9,2))，而当条件(9)成立时，它是完全不稳定的(参見§26,6))。

为了讲清楚方程组(12)的轨线在 $x,y$ 相平面的无穷远点处的

性态，我們考察綫性方程組：

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=y,\\ \dot{y}&=-\omega^2x-2\delta y,\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

它是由方程(12)丢掉在全平面上为有界的項 $g(y)$ 而得到的。容易計算，方程組(14)的特征多項式是

$$\lambda^2+2\delta\lambda+\omega^2; \tag{15}$$

因为数 $2\delta$ 和 $\omega^2$ 是正的，所以(15)的根皆具有負实部。于是，根据§26 命題 5)，对綫性方程組 (14) 存在李雅普諾夫函数 $W(x, y)$，滿足条件

$$\dot{W}_{(14)}(x, y)\leqslant-\beta W(x, y). \tag{16}$$

現在計算函数 $W(x, y)$ 按方程組(12)的导数 $\dot{W}_{(12)}(x, y)$：

$$\dot{W}_{(12)}(x, y)=\dot{W}_{(14)}(x, y)+\frac{\partial W(x, y)}{\partial y}\cdot g(y). \tag{17}$$

因为函数 $g(y)$ 是有界的，所以有不等式

$$\left|\frac{\partial W(x, y)}{\partial y}\cdot g(y)\right|\leqslant\gamma\sqrt{W(x, y)}, \tag{18}$$

(参見§26 的公式(14))，这里 $\gamma$ 是某一正的常数。

現在置 $$c=\frac{2\gamma}{\beta},\quad \alpha=\frac{\beta}{4},$$

从(16)，(17)和(18)得到不等式

$$\dot{W}_{(12)}(x, y)\leqslant-2\alpha W(x, y), \tag{19}$$

它当 $W(x, y)\geqslant c^2$ 时成立。方程

$$W(x, y)=c^2 \tag{20}$$

在 $x, y$ 平面上确定了一个椭圓。从不等式(19)立即推出，当点 $(x, y)$ 属于椭圓(20)时，函数 $W(x, y)$ 沿着方程組(12)过点 $(x, y)$ 的軌綫是下降的。因此，方程組(12)的所有与椭圓(20)相交的軌綫都走向这椭圓的內部。如果

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t) \tag{21}$$

是方程組(12)的解，它的初始点 $(\xi, \eta)$ 在椭圓(20)的外面，置

$$w(t)=W(\varphi(t),\psi(t)),$$

那末不等式

$$\dot{w}(t)\leqslant -2\alpha w(t) \tag{22}$$

当 $w(t)\geqslant c^2$ 时成立。积分出不等式(22)，得到

$$W(\varphi(t),\psi(t))\leqslant W(\xi,\eta)e^{-2\alpha t}.$$

从此推出轨綫(21)必须进到椭圓(20)的內部。这时，因为在它的境界点处，所有轨綫是向內的，所以任何轨綫都不能走出这椭圓。

現在設 $K$ 是 $x$, $y$ 平面上包含椭圓(20)的圓周。从所証明的推出，方程組(12)的任何异于平衡位置(0,0)的轨綫最后必进入圓周 $K$ 的內部，并且以后就不离开它。因为点(0, 0)是完全不稳定的，所以任一轨綫不能以原点为 $\omega$-极限点，根据定理21（参見§28），它或是螺旋地接近于周期解的螺旋綫，或是周期解。

这样，命題3)得証。

## 例 題

首先为电子管振蕩立出非綫性方程(2)的 A. A. 安德罗諾夫曾經考虑过这样的情形，即三极管的特性函数 $f$ 具有特别簡单的形式：当自变量取負值时它等于零，而在自变量取正值时它等于正的常数 $b$。假定 $f(0)=\frac{b}{2}$ 并引进变换(10)，我們导出方程(12)，其中函数 $g(y)$ 是由下式确定的：

$$g(y)=\begin{cases} -\omega^2 a & \text{当 } y<0 \text{ 时,} \\ \omega^2 a & \text{当 } y>0 \text{ 时,} \end{cases} \tag{23}$$

这里 $a=\frac{b}{2}$. 因此，带有上述間断函数 $g(y)$ 的方程組(12)当 $y>0$ 时，即在上半平面，可写成形式：

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}&=y, \\ \dot{y}&=-\omega^2 x-2\delta y+\omega^2 a, \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

而当 $y<0$ 时，即在下半平面，它可写成形式：

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=y,\\ \dot{y}&=-\omega^2x-2\delta y-\omega^3a.\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

我們將假設多項式(15)的根是复数，所以方程(14)的平衡位置(0,0)是稳定的焦点(参見§16,3))。方程組(24)和(25)是方程組(14)經过平移得到的，它們的平衡位置不再是坐标原点，而分别为$(a,0)$和$(-a,0)$。方程組(14)的螺旋綫是按順时針方向捲向平衡位置(0,0)的，且当走了螺旋綫的半圈后接近坐标原点，因此它到坐标原点原来的距离乘上了某一数$\lambda<1$，其中$\lambda$与开始点的位置无关(参見§16, 3))。

为了表出方程組(12)当$g(y)$由(23)定义时的相平面，需要把上半平面由方程組(24)的軌綫的半螺旋圈布滿；下半平面由(25)的軌綫的半螺旋圈布滿；面当通过直綫$y=0$时，应該是連續地从一条軌綫过渡到另一条軌綫。从方程組(12)的相图的这种描述出发(参見(23))，就可以求到它的閉軌。

我們来考察方程組(12)(参見(23))的以横軸上坐标$\xi>0$为始点的軌綫。因为方程組(12)的相点是按順时針方向运动，所以从开始点出发，軌綫应进入下半平面，从而受方程組(25)支配。在經历了下半平面的半个螺旋圈后，相点重新在坐标为

$$-(a+\lambda(a+\xi)) \tag{26}$$

的点达到横軸。这是因为經过半个螺旋圈后，相点与平衡位置$(-a,0)$的距离乘上了数$\lambda$。位在横軸上坐标为(26)的点，以后將按方程組(24)运动，且經过上半平面的半个螺旋面后，又在坐标为

$$a+\lambda(2a+\lambda(a+\xi)) \tag{27}$$

的点处落到横軸上。这样一来，从坐标为$\xi>0$的正半横軸上的点出发的軌綫，經过一圈后又达到正半横軸上的点，这个点的坐标是(27)。因而，我們得到了正半横軸到自身的映照$\chi$，它是由下式定义的：

$$\chi(\xi)=a+2\lambda a+\lambda^2a+\lambda^2\xi.$$

函数 $\chi(\xi)$ 是方程組 (12) 的后继函数 (参見 (23)). 只有一个值 $\xi$ 滿足条件

$$\chi(\xi)=\xi,$$

而这一个 $\xi$ 就对应于方程組 (12) 的极限圈，且因为 $\chi'(\xi)=\lambda^2<1$，所以它是粗的稳定极限圈 (参見 § 28).

## § 30. 二阶自治系統的平衡位置

这里要对二阶标准自治系統的不退化平衡位置进行分类并加以研究。設二阶标准的自治系統是

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=f(x,y),\\ \dot{y}&=g(x,y),\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

右端的函数假定是二阶連續可微的，但在定理 23 中我們假設它們是三阶連續可微的。

### 不退化的平衡位置

因为平衡位置常可取为坐标原点，所以我們假設所考虑的系統 (1) 的平衡位置是坐标原点。把系統 (1) 的右端关于 $x$ 和 $y$ 按泰勒公式展开，且去掉二阶項，就得到系統 (1) 的綫性化方程組：

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=a_1^1x+a_2^1y,\\ \dot{y}&=a_1^2x+a_2^2y.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

設 $\lambda$ 和 $\mu$ 是矩陣 $(a_j^i)$ 的特征值，如果数 $\lambda$ 和 $\mu$ 不相等，且它們的实数部分不为零，我們就說系統 (1) 的平衡位置 (0,0) 是**不退化的**。綫性系統 (2) 的軌綫的性态我們在 § 16 中曾詳細研究过。現在我們要証明：对于不退化的平衡位置，系統 (1) 的軌綫在平衡位置 (0, 0) 附近的性态与系統 (2) 的軌綫在平衡位置 (0, 0) 附近的性态实质上是一样的。

对于系統 (1) 的平衡位置 (0,0)，我們采用在 § 16 所給出的名称。如果数 $\lambda$ 和 $\mu$ 是两个負实数，就称平衡位置是**稳定的結点**。如

果 $\lambda$ 和 $\mu$ 是两个正实数，就称平衡位置是**不稳定的結点**。如果 $\lambda$ 和 $\mu$ 是复数共軛的，且它們的实部是負的，就称平衡位置是**稳定的焦点**。如果 $\lambda$ 和 $\mu$ 是复数共軛的，且它們的实部是正的，就称平衡位置是**不稳定的焦点**。最后，如果 $\lambda$ 和 $\mu$ 是实的且异号，就称平衡位置为**鞍点**。

在平衡位置附近，軌綫最簡单的性质可以直接由李雅普諾夫定理(定理 19)及§ 26 的命題 6)来建立。这样，我們得到以下命題。

**1)** 稳定的結点和稳定的焦点是漸近稳定的平衡位置。不稳定的結点和不稳定的焦点是完全不稳定的平衡位置。

这一命題已經在主要方面解决了結点和焦点附近軌綫性态的問題。事实上，如果給定的平衡位置是漸近稳定的，那末从应用的观点来看，軌綫用怎样的方式趋于平衡位置常常不是重要的。关于完全不稳定的平衡位置也有同样的看法。鞍点完全起另外的作用：知道了軌綫在它附近的性态后，可以提出关于軌綫在整个平面上的性态的有价值的意見。同时，証明軌綫在鞍点附近性态的定理要較証明关于結点和焦点的相应的定理更为困难。

現在在系統(1)的相平面上作坐标的綫性变換，使它变到最簡单的形式。

**2)** 把系統(1)的右端关于 $x$ 和 $y$ 按泰勒公式展开，且准确到二次項，我們得到

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=a_1^1x+a_2^1y+r(x,y),\\ \dot{y}&=a_1^2x+a_2^2y+s(x,y),\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

这里余項 $r(x,y)$ 和 $s(x,y)$ 以及它們关于 $x$ 和 $y$ 的一阶偏导数在点 $x=0$, $y=0$ 处等于零，并且可以写成形式：

$$\left.\begin{aligned}r(x,y)&=r_{11}x^2+2r_{12}xy+r_{22}y^2,\\ s(x,y)&=s_{11}x^2+2s_{12}xy+s_{22}y^2,\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

这些"二次型"的系数 $r_{ij}$ 和 $s_{ij}$ 是变量 $x$ 和 $y$ 的函数，在坐标原点附近是有界的。可以証明，施行变量 $x, y$ 到变量 $\xi, \eta$ 的实綫性变换可以把系統(3)化到最簡单的形式，这时要分别两种不同的情形：1° 如果矩陣 $(a_j^i)$ 的特征值 $\lambda, \mu$ 是实的且不相同，那末关于 $\xi$ 和 $\eta$ 的方程組可以写为形式：

$$\dot{\xi}=\lambda\xi+\rho(\xi,\eta),\quad \dot{\eta}=\mu\eta+\sigma(\xi,\eta). \tag{5}$$

2° 如果矩陣 $(a_j^i)$ 的特征值是复数共軛的，即有形式 $\mu+i\nu$ 及 $\mu-i\nu$ 时，那末关于 $\xi$ 和 $\eta$ 的方程組写为形式：

$$\dot{\xi}=\mu\xi-\nu\eta+\rho(\xi,\eta),\quad \dot{\eta}=\nu\xi+\mu\eta+\sigma(\xi,\eta). \tag{6}$$

在两种情形中，余項 $\rho(\xi,\eta)$ 和 $\sigma(\xi,\eta)$ 具有上述关于函数 $r(x,y)$ 及 $s(x,y)$ 的性质。如果取矩陣 $(a_j^i)$ 的特征向量的方向作为軸的方向，在第一种情形，方程組就取(5)的形式。

为了証明命題 2)，只要找坐标 $x, y$ 到坐标 $\xi, \eta$ 的綫性变换，使得綫性方程組(2)变为最簡单的形式就行了。这样的变换我們已經找到过了(参見 § 14, 6))。应用同样的变换到方程組(3)，我們就相应地得到方程組(5)或者方程組(6)。

## 鞍点附近軌綫的性态

**定理 22**. 設方程組(1)的平衡位置 $O=(0,0)$ 是鞍点。$P$ 是过原点 $O$ 的直綫，它的方向是矩陣 $(a_j^i)$ 的对应于負特征值的特征向量的方向，$Q$ 是另一直綫，它的方向是矩陣 $(a_j^i)$ 的对应于正特征值的特征向量的方向，那末恰恰存在方程組(1)的两条軌綫 $U_1$ 和 $U_2$，它們当 $t\to+\infty$ 时漸近地趋于点 $O$，且它們与原点 $O$ 組成一条連續的可微曲綫 $U$，$U$ 在原点 $O$ 处的切綫是 $P$。同样，恰有方程組(1)的两条軌綫 $V_1$ 和 $V_2$，它們当 $t\to-\infty$ 时漸近地趋于点 $O$，且它們与原点 $O$ 組成一条連續的可微曲綫 $V$，而 $V$ 在原点处的切綫是 $Q$。至于方程組(1)的其余的（过点 $O$ 附近点的）軌綫的性态大体上和綫性方程組的情形相同(参見 § 16)(图 63)。

軌綫 $U_1$ 和 $U_2$ 称为鞍点 $O$ 的**稳定须(分界线)**，$V_1$ 和 $V_2$ 称为鞍点 $O$ 的**不稳定须(分界线)**。

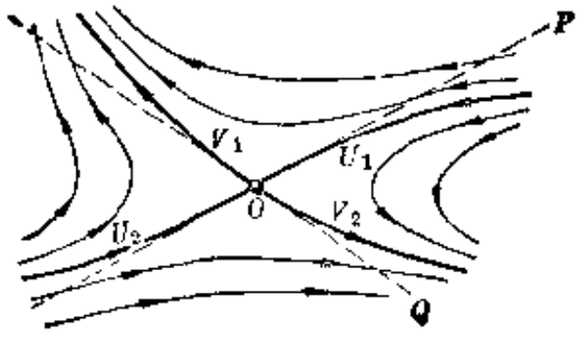

图 63

**証明** 我們取直綫 $P$ 作为横轴，直綫 $Q$ 作为纵轴；那末方程組 (1) 写为形式 (5)。再以 $x$ 和 $y$ 来代替 $\xi$ 和 $\eta$，得到方程組

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=f(x,\,y)=\lambda x+r(x,\,y),\\ \dot{y}&=g(x,\,y)=\mu y+s(x,\,y),\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

这里 $r(x,y)$ 和 $s(x,y)$ 有形式(4)；而 $\lambda<0$，$\mu>0$。在下面的証明中，我們只利用方程組(7)的右端的下面的性质：右端按 $x$ 和 $y$ 是連續可微的，函数 $r_{ij}$ 和 $s_{ij}$ 在坐标原点附近是有界的（参見(4)）。

証明分两步进行：1° 証明存在須 $U_1$ 过点 $O$，且当坐标 $x$ 下降时它沿横軸的正半部分与横軸相切；2° 証明它的唯一性。須 $U_2$ 的存在性和唯一性可同样証明。为了討論 $V_1$ 和 $V_2$，只要把时間 $t$ 变一个符号，这时稳定須变成不稳定須，不稳定須变成稳定須。

我們来証明須 $U_1$ 的存在性。为此，置

$$\omega(x,\,y)=y-\alpha x^2,\quad \alpha>0,$$

且討論由方程

$$\omega(x,\,y)=0\tag{8}$$

在 $x$，$y$ 平面上确定的抛物綫。抛物綫(8)把平面分为两部分：包含正纵軸的部分称为正号区域，另一部分称为負号区域。正号区域是抛物綫的內域。首先証明：如果 $\alpha$ 是充分大的正数，$x$ 充分小（$|x|\leqslant\varepsilon$），那末方程組(7)的所有与抛物綫(8)的一段 $|x|\leqslant\varepsilon$ 相交的軌綫（除去平衡位置 $O$）从負的一側穿向正的一側，即从外面向着里面（图 64）。为此，我們計算函数 $\omega(x,y)$ 的导数 $\dot{\omega}_{(7)}(x,y)$。由于方程組(7)，在抛物綫(8)的点上我們有

$$\dot{\omega}_{(7)}(x,\,\alpha x^2)=\dot{y}-2\alpha x\dot{x}=\alpha(\mu-2\lambda)x^2+s_{11}x^2+\cdots,$$

(这里沒有写出的含 $x$ 的項至少是三次的)。数 $\mu-2\lambda$ 是正的，而函数 $s_{11}$ 在坐标原点附近是有界的，所以可以选择充分大的数 $\alpha$，使得

$$\alpha(\mu-2\lambda)-|s_{11}|>\delta,\quad \delta>0.$$

$\dot{\omega}_{(7)}(x, \alpha x^2)$ 的表达式中未写出的項关于 $x$ 至少是三阶的无穷小，所以存在正数 $\varepsilon>0$，使得当 $|x|\leqslant\varepsilon$ 时，

$$\dot{\omega}_{(7)}(x, \alpha x^2)\geqslant 0,$$

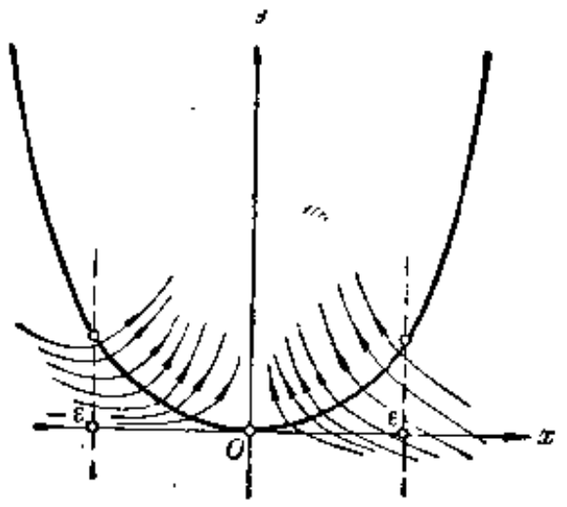

图 64

且等号只当 $x=0$，即在点 $O$ 时成立。从所証明的推知，方程組(1)的所有軌綫，除了平衡位置 $O$ 外，只要与抛物綫(8)的所考虑的一段相交，那末相交的方向必是函数 $\omega(x, y)$ 增加的方向，也就是从外向內的方向。

完全同样地可以証明：方程組(7)的軌綫只要与抛物綫

$$y+\alpha x^2=0 \tag{9}$$

相交于 $|x|\leqslant\varepsilon$ 的一段，而且它不是平衡位置，那末軌綫的方向是从外向內的(抛物綫(9)的內部是含有纵負半軸的区域，图65)。

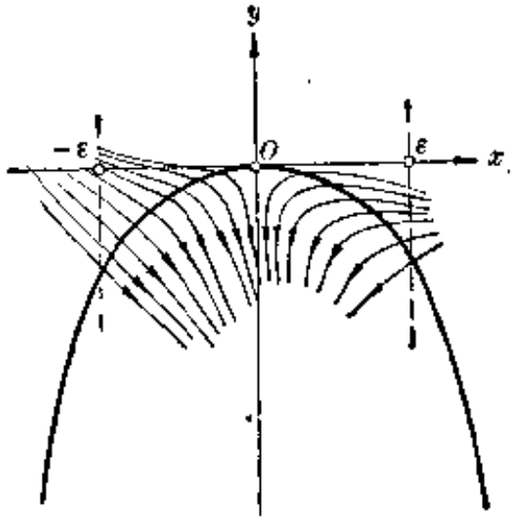

图 65

設 $a$ 和 $b$ 是直綫 $x=\varepsilon$ 与抛物綫(8)和(9)的交点。我們来考察三角形 $[O, a, b]$，它是由抛物綫(8)和(9)的一段及直綫段 $[a, b]$ 組成的。如果 $\varepsilon$ 充分小，那末方程組(1)的所有經过三角形 $[O, a, b]$ 的軌綫是从右向左走的(图66)，特别与綫段 $[a, b]$ 相交的軌綫是从右向左走进三角形 $[O, a, b]$ 中的。这从表达式

$$\dot{x}=\lambda x+r(x, y)$$

(見(7))当 $0<x\leqslant\varepsilon, |y|<\alpha x^2$ 时取負值可以推出，后者是由于 $\lambda<0$，且 $r(x, y)$ 是 $x$ 和 $y$ 的具有有界系数的"二次型"。

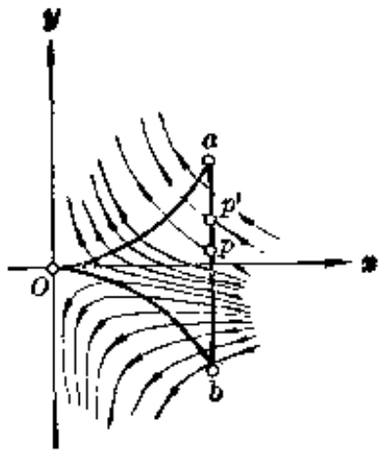

图 66

設 $\varphi(t, p)$ 是方程組(7)的軌綫，当 $t=0$ 时它是从区間 $(a, b)$ 中的点 $p$ 出发的，这条軌綫穿过边 $[a, b]$ 而进入三角形 $[O, a, b]$。当 $t$ 增加时，它或者經过抛物綫的弧 $Oa$, $Ob$ 走出三角形，或者完全不走出三角形。在后面一种情形，当 $t\to+\infty$ 时它漸近地趋于点 $O$。由几何图形明显看出，如果軌綫 $\varphi(t,p)$ 通过弧 $Oa$ 走出三角形，那末当 $p'\in(a,p)$ 时，軌綫 $\varphi(t,p')$ 也通过弧 $Oa$ 走出三角形(图 66)。其次，如果軌綫 $\varphi(t,p)$ 通过弧 $Oa$ 走出三角形，那末根据連續性的整体的定理(定理 16)，当 $p''$ 充分靠近 $p$ 时，軌綫 $\varphi(t, p'')$ 也通过弧 $Oa$ 走出三角形。这样，区間 $(a, b)$ 中所有使 $\varphi(t, p)$ 从弧 $Oa$ 走出三角形的点 $p$ 的集合是一开区間 $(a, a')$。(这个区間是不空的，即 $a'\neq a$，这是因为当初始点 $p$ 充分靠近 $a$ 时，軌綫显然是与弧 $Oa$ 相交的。) 同样，所有使 $\varphi(t,p)$ 經过弧 $Ob$ 走出三角形的点 $p$ 的集合組成开区間 $(b. b')$。区間 $(a, a')$ 和 $(b, b')$ 不可能相交，所以点 $a'$ 位于 $b'$ 的上面，或者在临界情形它們重合(事实上是重合的，但这还要求比較复杂的証明)。这样，閉区間 $[a', b']$ 至少含有一点，所以存在軌綫 $\varphi(t,p_0)$，它的初始点在閉区間 $[a', b']$ 上，且是漸近地趋于点 $O$ 的。

軌綫 $\varphi(t, p_0)$ 在点 $(x, y)$ 处的切綫的斜率是

$$k(x, y)=\frac{\mu y+s(x, y)}{\lambda x+r(x, y)}.$$

因为軌綫 $\varphi(t, p_0)$ 的点 $(x, y)$ 位在三角形 $[O, a, b]$ 中，所以

$$|y|<\alpha x^2, \quad 0<x\leqslant\varepsilon, \tag{10}$$

从此推出数 $k(x,y)$ 是有限的，且当 $x\to 0$ 时趋于零。另一方面，从点 $O$ 引向軌綫 $\varphi(t,p_0)$ 上点 $(x,y)$ 的射綫的斜率 $l(x,y)$ 等于 $\frac{y}{x}$，由不等式 (10)，当 $x\to 0$ 时 $l(x,y)\to 0$。因此，注入点 $O$ 的軌綫 $\varphi(t,p_0)$ 在点 $O$ 有連續的导数且与横軸相切。軌綫 $\varphi(t,p_0)$ 就是須 $U_1$。过点 $O$ 沿横軸的負方向的須 $U_2$ 也与横軸相切于点 $O$；这两根須組成曲綫 $U$，它的方程是

$$y=u(x), \tag{11}$$

这里 $u(x)$ 是变量 $x$ 的連續的且連續可微的函数，并且 $u'(0)=0$。

这样，証明了稳定須 $U_1$ 和 $U_2$ 的存在性，它們与点 $O$ 組成曲綫 $U$，它的方程是 (11)。現在来証明这些須的唯一性。为此，在 $x,y$ 平面的坐标原点的邻域中变換坐标系統，使得曲綫 (11) 成为横軸。代替未知函数 $y$，我們按公式

$$y=u(x)+z \tag{12}$$

引进新的未知函数 $z$，就可以达到这个目的。在方程組 (7) 中作变換 (12)，得到新的方程組

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=f(x,u(x)+z)=F(x,z),\\ \dot{z}&=g(x,u(x)+z)-u'(x)f(x,u(x)+z)=G(x,z),\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

这里未知函数是 $x$ 和 $z$。因为函数 $u(x)$ 有連續导数，所以函数 $F(x,z)$ 有关于 $x$ 与 $z$ 的連續偏导数，而函数 $G(x,z)$ 关于 $x$ 是連續的，关于 $z$ 有連續的导数。但是 $G(x,z)$ 关于 $x$ 的連續可微性还沒有确立。因此对于方程組 (13)，并沒有确定它滿足关于右端的通常的假設，即它关于作为未知函数的所有变量的可微性的假設。可是很明显，根据 (12)，方程組 (13) 的每一解对应有方程組 (7) 的解，且反过来也对。因此，可以按照方程組 (13) 的軌綫的性态来判断方程組 (7) 的軌綫的性态。

方程組 (7) 的稳定須 $U_1$ 和 $U_2$ 变为 $x$，$z$ 平面横軸的綫段，所以方程組 (13) 有解，其中函数 $z$ 恒等于零，而函数 $x$ 按某种方式单

調变化漸近地趋于零。从此推知

$$G(x, 0) \equiv 0.$$

下面(参看 3))要証明函数 $G(x,z)$ 可以写成形式:

$$G(x, z) = zH(x, z), \tag{14}$$

其中函数 $H(x, z)$ 是变量 $x$ 和 $z$ 的連續函数。从关系 (14) 根据 $H(x, z)$ 的連續性,我們得到

$$\left.\frac{\partial G(x, z)}{\partial z}\right|_{\substack{x=0\\z=0}} = \lim_{z\to 0} \frac{G(0,z) - G(0,0)}{z-0} = \lim_{z\to 0} \frac{G(0,z)}{z}$$

$$= \lim_{z\to 0} H(0, z) = H(0, 0).$$

而由于(7)和(13),我們有 $\left.\frac{\partial G(x, z)}{\partial z}\right|_{\substack{x=0\\z=0}} = \mu$, 所以

$$H(0, 0) = \mu.$$

这样,方程組(13)的第二个方程具有形式:

$$\dot{z} = z\,H(x, z),$$

其中 $H(x, z)$ 在坐标原点附近接近于 $\mu$, 因而是正的。从此推出,在坐标原点附近沿着每一不同于須 $U_1$ 和 $U_2$ 的軌綫,坐标 $z$ 保持符号,且当 $t$ 增加时,它的模增加。因此,在 $x$, $z$ 平面上除横軸外,沒有一条軌綫能漸近地趋于点 $O$, 因面証明了稳定須 $U_1$ 和 $U_2$ 的唯一性。

現在已証明了:在区間 $(a,b)$ 中只存在一点 $p_0$,使得方程組(7)的以它为初始点的軌綫当 $t\to+\infty$ 时漸近地趋于点 $O$,它是須 $U_1$, 如果点 $p$ 位在区間 $(a, p_0)$ 中,由 $p$ 出发的軌綫就与弧 $Oa$ 相交,如果点 $p$ 位在区間 $(b, p_0)$ 中,由 $p$ 出发的軌綫就与弧 $Ob$ 相交。

由抛物綫

$$x - \alpha y^2 = 0, \tag{15}$$

$$x + \alpha y^2 = 0 \tag{16}$$

及直綫

$$y = s$$

可以組成三角形 $[O, c, d]$ (图 67),它具有类似于三角形 $[O, a, b]$

的性质。在区間$(c, d)$中仅有一点$q_0$，使得从$q_0$出发的軌綫当$t$減小时漸近地趋于点$O$，且成为不稳定的須$V_1$．如果$q$位在区間$(c, q_0)$中，那末从$q$出发的軌綫当$t$減小时与弧$Oc$相交，而如果点$q$位在区間$(d, q_0)$中，从$q$出发的軌綫当$t$減小时就与弧$Od$相交。

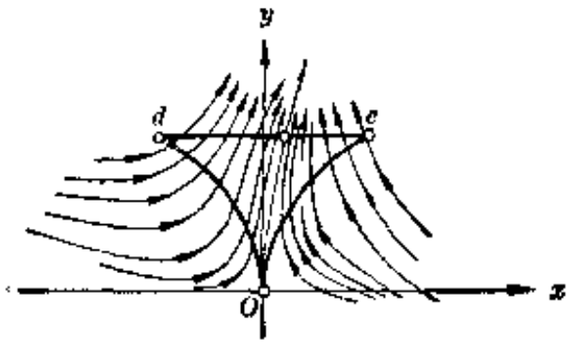


图 67

現在討論曲綫

$$f(x, y)=0 \qquad (17)$$

(参見(7))．容易看出它在点$O$处与纵軸相切。因为函数$f(x, y)$有二阶連續导数，所以曲綫(17)在点$O$处有确定的曲率半徑，因而数$\alpha$可以选得充分大，数$\varepsilon$充分小，使得在綫段$|y|\leqslant\varepsilon$上曲綫(17)位在抛物綫(15)和(16)之間(图68)．在曲綫(17)的右方，函数$f(x, y)$是負的，所以位在曲綫(17)右方的点的相速度向量的方向是向左的。从点$c$引垂直綫段$[ce]$，它的下端$e$位在須$U_1$上。設$p$是区間$(a, p_0)$的点，且充分靠近$p_0$，由連續性的整体的定理(参看§25，定理16)，从$p$走出的軌綫上的点要經过坐标原点的充分邻近，因而与綫段$[c, e]$相交。点进而一定和弧$Oc$相交，事实上，如果动点和曲綫(17)相交，那末它必須先与弧$Oc$相交。如果动点不与曲綫(17)相交，那末它在整个时間内是向左的，而从这点到綫(11)的垂直方向距离$z$是增长的；这样，軌綫与弧$Oc$相交。因此，所討論的軌綫进入三角形$[O, c, d]$．从此以后这条軌綫应当与区間$(c, q_0)$相交于某一点$q$．反之，如果从$(c, q_0)$的一点$q'$在$t$

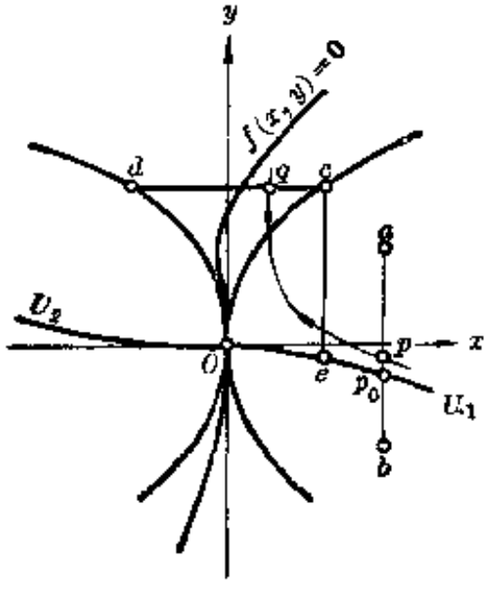


图 68

減小的方向引軌綫，当点 $q'$ 与 $q_0$ 充分靠近时，这軌綫走向区間 $(a, p_0)$ 的某一点 $p'$（图 69）。比較这两种情形，容易引向結論：当 $p\to p_0$ 时，$q\to q_0$。这就給出了鞍点附近軌綫性态的完整的定性表示。定理 22 得証。

現在証明函数 $G(x, z)$ 的性质 (14)。

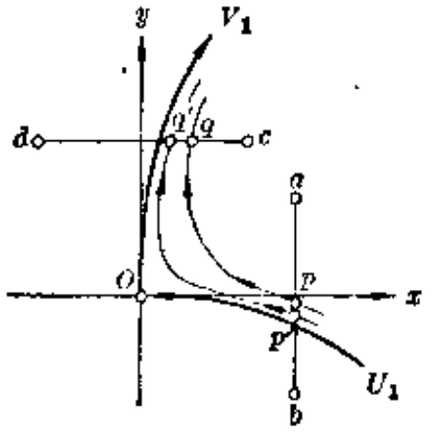


图 69

**3)** 設 $G(x, z)$ 是連續函数，在 $x=z=0$ 附近有定义，且具有連續导数 $\dfrac{\partial}{\partial z}G(x,z)$。如果

$$G(x, 0)\equiv 0,$$

那末

$$G(x, z)=zH(x, z),$$

其中 $H(x, z)$ 是連續函数[①]。

为了証明命題 3)，我們定义函数 $H(x, z)$ 如下：

$$\left.\begin{aligned} H(x, z)&=\frac{G(x, z)}{z} && \text{当 } z\neq 0,\\ H(x, z)&=\frac{\partial}{\partial z}G(x, z) && \text{当 } z=0,\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

而来証明这样定义的函数 $H(x, z)$ 是連續的。如果 $z\neq 0$，由关系 (18) 定义的函数显然是連續的。現在証明它在点 $(x_0, 0)$ 处連續。我們有

$$G(x, z)=G(x, z)-G(x, 0)=z\frac{\partial}{\partial z}G(x, \theta z),$$

其中 $0\leqslant\theta\leqslant 1$。因为函数 $\dfrac{\partial}{\partial z}G(x,z)$ 是連續的，所以当 $x\to x_0, z\to 0$ $(z\neq 0)$ 时，有 $\dfrac{G(x,z)}{z}=\dfrac{\partial}{\partial z}G(x, \theta z)\to\dfrac{\partial}{\partial z}G(x_0, 0)$。命題 3) 得証。

---

① 命題 3) 可以由 § 22 的阿达馬引理推出。事实上，$G(x,z)=G(x,z)-G(x,0)=zH(x, z)$，$H(x,z)$ 是連續函数。——譯者注

## 結点与焦点附近軌綫的性态

結点和焦点的研究比鞍点的研究簡单得多。这时只要討論稳定的情形，因为不稳定的結点与焦点可以从稳定的經过更改时間变化的方向来得到。在結点和焦点的研究中引进极坐标是基本的方法。

**定理 23.** 設 $O=(0,0)$ 是方程組(1)的稳定結点，特征值是 $\lambda$ 和 $\mu$，$\mu<\lambda<0$。在对应于特征值 $\lambda$ 的特征向量的方向引过 $O$ 的直綫 $P$，而在对应于特征值 $\mu$ 的特征向量的方向引过 $O$ 的直綫 $Q$。可以証明，每一在开始时充分靠近点 $O$ 的軌綫漸近地趋于 $O$，且在点 $O$ 处有切綫。这时仅有两条軌綫与直綫 $Q$ 相切，且以相反的方向趋向点 $O$，而其余的都同直綫 $P$ 相切。在不稳定結点的情形 $(0<\lambda<\mu)$，当 $t\to-\infty$ 时軌綫的性态是类似的。

**証明** 将在假設(1)的右端有三阶連續导数的情形下进行。由命題 2)，方程組(1)可以写成形式(5)；重新以 $x$ 和 $y$ 表示变量 $\xi$ 和 $\eta$，就得到方程組

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=f(x,y)=\lambda x+r(x,y),\\ \dot{y}&=g(x,y)=\mu y+s(x,y).\end{aligned}\right\}\tag{19}$$

这时，函数 $r(x,y)$ 和 $s(x,y)$ 是三阶連續可微的，并且这些函数本身以及它們关于 $x$ 和 $y$ 的一阶偏导数在点 $O$ 处等于零。

引进极坐标：

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi.\tag{20}$$

导微关系式(20)并把它們代入方程組(19)，得到

$$\left.\begin{aligned}\dot{\rho}\cos\varphi-\rho\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}&=\lambda\rho\cos\varphi+r(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi),\\ \dot{\rho}\sin\varphi+\rho\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}&=\mu\rho\sin\varphi+s(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi).\end{aligned}\right\}$$

从所得到的关系式解出 $\dot{\rho}$ 和 $\dot{\varphi}$，就有

$$\left.\begin{aligned}\dot{\rho}&=\rho(\lambda\cos^2\varphi+\mu\sin^2\varphi)+F(\rho,\varphi),\\ \rho\dot{\varphi}&=(\mu-\lambda)\rho\sin\varphi\cdot\cos\varphi+G(\rho,\varphi),\end{aligned}\right\}\tag{21}$$

其中函数

$$F(\rho,\varphi)=\cos\varphi\cdot r(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)+\sin\varphi\cdot s(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi),$$

$$G(\rho,\varphi)=-\sin\varphi\cdot r(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)+\cos\varphi\cdot s(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)$$

是 $\varphi$ 的以 $2\pi$ 为周期的周期函数，它們关于 $\rho$ 和 $\varphi$ 是三阶連續可微的，且当 $\rho=0$ 时，这些函数以及它們关于 $\rho$ 的一阶偏导数等于零：

$$F(0,\varphi)=G(0,\varphi)=\frac{\partial F(0,\varphi)}{\partial\rho}=\frac{\partial G(0,\varphi)}{\partial\rho}=0. \tag{22}$$

根据在下面要証明的命題 4)，函数 $G(\rho,\varphi)$ 可以写成形式：

$$G(\rho,\varphi)=\rho H(\rho,\varphi),$$

其中函数 $H(\rho,\varphi)$ 是关于 $\rho$ 和 $\varphi$ 的二阶連續可微函数，它当 $\rho=0$ 时(对任意的 $\varphi$)等于零(参看(31)及(22))：

$$H(0,\varphi)=0, \tag{23}$$

所以

$$\frac{\partial H(0,\varphi)}{\partial\varphi}=0. \tag{24}$$

用 $\rho$ 除关系式(21)的第二式的两端，我們得到方程組

$$\left.\begin{aligned}\dot\rho&=\rho(\lambda\cos^2\varphi+\mu\sin^2\varphi)+F(\rho,\varphi),\\ \dot\varphi&=(\mu-\lambda)\sin\varphi\cos\varphi+H(\rho,\varphi).\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

我們把 $\varphi$ 看作横坐标，$\rho$ 看作纵坐标，在变量 $\rho$ 与 $\varphi$ 的相平面上来討論方程組(25)。因为 $x,y$ 平面到 $\rho,\varphi$ 平面的变換(20)不是互相单值的，所以方程組(19)和(25)并不互相等价；然而从方程組(25)的軌綫性态可以作出方程組(19)的軌綫性态的結論。我們只在带域 $|\rho|<\varepsilon$ 中討論方程組(25)的軌綫性态。

首先找出方程組(25)的平衡位置。从(25)的第一个方程看到，当 $\rho\neq0$ 充分小时，$\dot\rho$ 不等于零(参看(22))，所以在带域 $|\rho|<\varepsilon$ 中平衡位置位在軸 $\rho=0$ 上。然后，由(25)的第二个方程找出所有的平衡位置(参考(23))：

$$\rho=0,\ \varphi=\frac{k\pi}{2},\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

把方程組(25)在点$\rho=0, \varphi=\frac{k\pi}{2}$处綫性化，得到(参看(22)和(24))：

$$\left.\begin{aligned}\Delta\dot{\rho}&=\mu_k\Delta\rho,\\ \Delta\dot{\varphi}&=(\mu-\lambda)(-1)^k\Delta\varphi+\alpha_k\Delta\rho,\end{aligned}\right\}$$

这里$\mu_k$(当$k$为偶数时等于$\lambda$，当$k$为奇数时等于$\mu$)是負数。这样，当$k$为偶数时点$\rho=0, \varphi=\frac{k\pi}{2}$是方程組(25)的稳定結点，而当$k$为奇数时是鞍点(图70)。这时鞍点的不稳定須是沿$\varphi$軸的方向而稳定須是沿从上面和下面趋于鞍点的曲綫(参看定理22)。

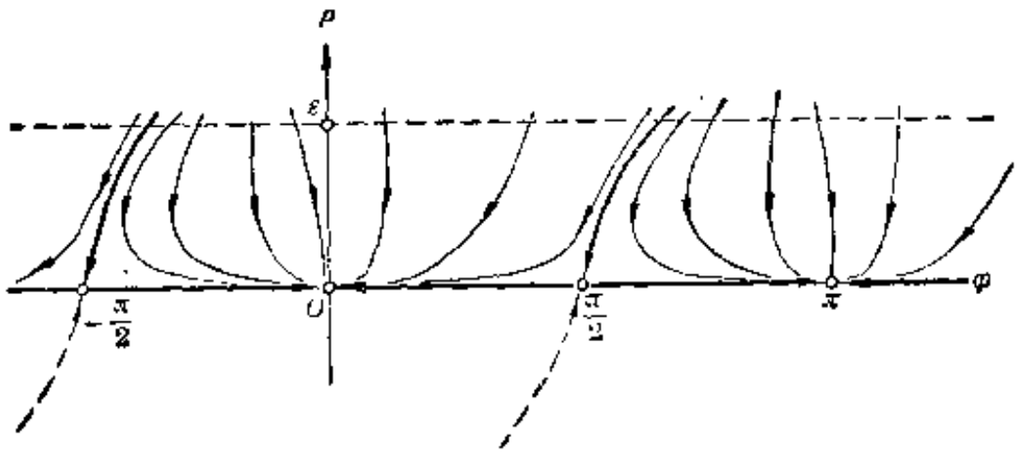


图 70

現在来証明，当正数$\varepsilon$充分小时，方程組(25)的每一从带域$|\rho|<\varepsilon$出发的解，或者是方程組(25)的一个鞍点的稳定須，或者是不走出带域$|\rho|<\varepsilon$，且漸近地趋于方程組(25)的一个結点。

对应于每一平衡位置$\rho=0, \varphi=\frac{k\pi}{2}$，按不等式$|\rho|<\delta$，$\left|\varphi-\frac{k\pi}{2}\right|<\delta$确定其邻域$U_k$，这里$\delta$是正数。如果$k$是偶数，所討論的平衡位置就是稳定的，由它的漸近稳定性，得知存在充分小的正数$\delta$，使得每一从邻域$U_k$出发的解漸近地趋于結点。如果$k$是奇数，对应的平衡位置就是鞍点，因而存在充分小的正数$\delta$，使得任何从$U_k$出发的解，只要不是平衡位置，就或者是鞍点的稳定須，或者要走出邻域$U_k$(参看定理(22))。因为方程組(25)的右端关于$\varphi$是

周期的，所以对所有 $U_k$ 可以选取共同的正数 $\delta$. 現在可选取充分小的正数 $\varepsilon\leqslant\delta$，使得在区域 $|\rho|<\varepsilon$ 中方程(25)的第一式右端的符号和 $\rho$ 的符号相反，因而对从这带域出发的每一解，量 $|\rho|$ 是減小的。其次，当 $\delta$ 固定时，可以选取正数 $\varepsilon$ 充分小，使得方程(25)的第二式的右端在矩形

$$|\rho|<\varepsilon,\quad \frac{k\pi}{2}+\delta\leqslant\varphi\leqslant\frac{(k+1)\pi}{2}-\delta$$

中保持符号，并且它的模超过某一正数 $\alpha$，所以，从这矩形出发的解經过不超过 $\frac{\pi}{2\alpha}$ 的时間就跑出这矩形，而进入邻域 $U_k$ 或 $U_{k-1}$ 中相应于稳定結点的那一个邻域。由方程組(25)关于 $\varphi$ 的周期性，可以对所討論类型的一切矩形取到共同的数 $\varepsilon$.

現在我們看到，对所选擇的 $\varepsilon$，每一从带域 $|\rho|<\varepsilon$ 出发的解或者是鞍点的稳定須，或者是漸近地趋于稳定結点。

方程組(19)的每一个从距离稳定結点 $O$ 小于 $\varepsilon$ 的点出发的解，对应有方程組(25)的从带域 $|\rho|<\varepsilon$ 出发的解。为了得到方程組(19)的所有这样的解，只要討論方程組(25)从 $0\leqslant\rho<\varepsilon$ 出发的解就可以了。因为方程組(25)及变換(20)关于 $\varphi$ 是周期的，对应于方程組(25)鞍点的稳定須 $\rho>0$，方程組(19)只存在两个解，它們漸近地趋于平衡位置 $O$，切于直綫 $Q$ 并从两个相反的方向趋向 $O$. 对应于方程(25)的趋于稳定結点的解，方程組(19)的解趋于平衡位置 $O$，且在趋向 $O$ 时与直綫 $P$ 相切。

这样，定理 23 得証。

**定理 24.** 設方程組(1)的坐标原点 $O$ 是焦点，即矩陣 $(a_j^i)$ 的特征值是一对共軛的复数

$$\lambda=\mu+i\nu,\quad \bar{\lambda}=\mu-i\nu,$$

且 $\mu\neq0$，$\nu\neq0$. 可以証明，如果 $\mu<0$，那末当 $t\to+\infty$ 时所有从点 $O$ 附近出发的軌綫螺旋式地趋于坐标原点 $O$，如果 $\mu>0$，那末当 $t\to-\infty$ 时所有从 $O$ 附近出发的軌綫螺旋式地趋于坐标原点 $O$.

**証明** 在証明中引用典則形式(6)，且把变量 $\xi$ 和 $\eta$ 写为 $x$ 和 $y$。所以我們应当研究方程組

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=f(x,y)=\mu x-\nu y+r(x,y),\\ \dot{y}&=g(x,y)=\nu x+\mu y+s(x,y),\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

引进极坐标：

$$\left.\begin{aligned}x&=\rho\cos\varphi,\\ y&=\rho\sin\varphi.\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

导徵关系式(27)，并把所得表达式代入方程組(26)有

$$\dot{\rho}\cos\varphi-\rho\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}=\mu\rho\cos\varphi-\nu\rho\sin\varphi+r(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi),$$

$$\dot{\rho}\sin\varphi+\rho\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}=\nu\rho\cos\varphi+\mu\rho\sin\varphi+s(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi).$$

由它解出 $\dot{\rho}$ 和 $\dot{\varphi}$，有

$$\left.\begin{aligned}\dot{\rho}&=\mu\rho+\rho^2p(\rho,\varphi),\\ \dot{\varphi}&=\nu+\rho q(\rho,\varphi),\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

这里 $p(\rho,\varphi)$ 和 $q(\rho,\varphi)$ 当 $\rho$ 充分小时是有界的，并且是 $\varphi$ 的周期为 $2\pi$ 的周期函数。为了确定起見，假設 $\mu<0$。我們来討論方程組(28)的从点 $(\rho_0,\varphi_0)$ 出发的軌綫，其中 $0<\rho_0<\varepsilon$，$\varepsilon$ 是充分小的正数。从方程(28)推得，这軌綫漸近地趋于軸 $\rho=0$，而 $\varphi$ 或是趋于 $+\infty$ 或是趋于 $-\infty$，其正負号根据数 $\nu$ 是正的还是負的而定。从此推知，在 $x,y$ 平面上的相应軌綫是盘旋趋向于坐标原点的。

这样，定理 24 証毕。下面的命題 4) 实质上是上面証明的命題 3) 的拓广，后者我們在定理 23 的証明中剛剛利用过。

**4)** 設 $G(\rho,\varphi)$ **在区域** $W$ **中有定义，** $W$ **由不等式** $|\rho|<\varepsilon$，$\beta_1<\varphi<\beta_2$ 确定，函数 $G(\rho,\varphi)$ 滿足条件

$$G(0,\varphi)=0, \tag{29}$$

函数

$$\frac{\partial G(\rho,\varphi)}{\partial\rho}$$

有直到 $r$ 阶的連續导数，那末在 $W$ 中可以把函数 $G(\rho,\varphi)$ 写成

$$G(\rho, \varphi) = \rho H(\rho, \varphi), \tag{30}$$

其中 $H(\rho, \varphi)$ 由下式定义：

$$\left.\begin{aligned} H(\rho, \varphi) &= \frac{G(\rho, \varphi)}{\rho} \quad \text{当 } \rho \neq 0 \text{ 时,} \\ H(0, \varphi) &= \frac{\partial G(0, \varphi)}{\partial \rho}, \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

并且在区域 $W$ 中有直到 $r$ 阶的連續偏导数。(当 $r=0$ 时所要証明的命題 4) 变为命題 3)。)①

为了証明命題 4)，我們考察函数

$$K(\rho, \varphi) = \frac{\partial^{r-s} G(\rho, \varphi)}{\partial \varphi^{r-s}}, \quad 0 \leqslant s \leqslant r. \tag{32}$$

这函数在 $W$ 內关于 $\rho$ 有直到 $s+1$ 阶的連續偏导数，且滿足条件

$$K(0, \varphi) = 0 \tag{33}$$

(参看 (29))。現在証明，当 $\rho \neq 0$ 时成立等式

$$\frac{\partial^k}{\partial \rho^k}\left(\frac{K(\rho, \varphi)}{\rho}\right) = \sum_{i=0}^{k} \gamma_i \frac{\partial^{k+1} K(\theta_i \rho, \varphi)}{\partial \rho^{k+1}}, \quad 0 \leqslant k \leqslant s, \tag{34}$$

其中数 $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_k$ 当每个 $k$ 固定时与函数 $G(\rho, \varphi)$ 无关，且滿足条件

$$\gamma_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_k = \frac{1}{k+1}, \tag{35}$$

而数 $\theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_k$ 滿足不等式

$$0 \leqslant \theta_i \leqslant 1, \quad i = 0, 1, \cdots, k. \tag{36}$$

按照萊布尼茲公式計算导数 $\frac{\partial^k}{\partial \rho^k}\left(\frac{K(\rho, \varphi)}{\rho}\right)$，得到

$$\frac{\partial^k}{\partial \rho^k}\left(\frac{K(\rho, \varphi)}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho^{k+1}} \sum_{i=0}^{k} a_i \rho^i \frac{\partial^i K(\rho, \varphi)}{\partial \rho^i}, \tag{37}$$

其中数 $a_0, a_1, \cdots, a_k$ 当 $k$ 固定时与函数 $G(\rho, \varphi)$ 无关。把每一个

① 命題 4) 可以用象 § 22 中証明阿达馬引理的同样方法进行証明。事实上，記 $w(s) = s\rho$, $G(\rho, \varphi) = G(\rho, \varphi) - G(0, \varphi) = \rho \int_0^1 \frac{\partial G(s\rho, \varphi)}{\partial w} ds$，依假定 $H(\rho, \varphi) = \int_0^1 \frac{\partial G(s\rho, \varphi)}{\partial w} ds$ 有形式(31)；如果在积分号下求导数，就得到命題中所述 $H(\rho, \varphi)$ 的性质。——譯者注

函数 $\frac{\partial^i K(\rho,\varphi)}{\partial\rho^i}$ 关于 $\rho$ 按泰勒公式展开，得到

$$\frac{\partial^i K(\rho,\varphi)}{\partial\rho^i}=\frac{\partial^i K(0,\varphi)}{\partial\rho^i}+\frac{\rho}{1!}\frac{\partial^{i+1}K(0,\varphi)}{\partial\rho^{i+1}}+\cdots$$
$$+\frac{\rho^{k-i}}{(k-i)!}\frac{\partial^k K(0,\varphi)}{\partial\rho^k}+\frac{\rho^{k-i+1}}{(k-i+1)!}\frac{\partial^{k+1}K(\theta_i\rho,\varphi)}{\partial\rho^{k+1}}. \tag{38}$$

其次，把表达式(38)代入(37)，由(33)我們得到

$$\frac{\partial^k}{\partial\rho^k}\left(\frac{K(\rho,\varphi)}{\rho}\right)$$
$$=\frac{1}{\rho^{k+1}}\left[\sum_{i=1}^{k}b_i\rho^i\frac{\partial^i K(0,\varphi)}{\partial\rho^i}+\sum_{j=0}^{k}\gamma_j\rho^{k+1}\frac{\partial^{k+1}K(\theta_j\rho,\varphi)}{\partial\rho^{k+1}}\right], \tag{39}$$

其中数 $b_i$ 和 $\gamma_j$ 是常数，当 $k$ 固定时它們与函数 $G(\rho,\varphi)$ 的选取无关。

为了証明关系式(34)，現在只要証明常数 $b_1,\cdots,b_k$ 等于零，而常数 $\gamma_0,\gamma_1,\cdots,\gamma_k$ 满足条件(35)就够了。因为上述常数与函数 $G(\rho,\varphi)$ 的选择无关，所以只要对特殊形式的函数 $G(\rho,\varphi)$ 来証明所指出的性质。考察 $G(\rho,\varphi)$ 是多項式的情形：

$$G(\rho,\varphi)=\frac{\varphi^{r-s}}{(r-s)!}\sum_{i=1}^{k+1}\frac{\alpha_i}{i!}\rho^i. \tag{40}$$

由(32)，得到

$$\frac{\partial^k}{\partial\rho^k}\left(\frac{K(\rho,\varphi)}{\rho}\right)=\frac{\alpha_{k+1}}{k+1}. \tag{41}$$

另一方面，对于多項式(40)，等式(39)具有形式：

$$\frac{\partial^k}{\partial\rho^k}\left(\frac{K(\rho,\varphi)}{\rho}\right)=\frac{1}{\rho^{k+1}}\left[\sum_{i=1}^{k}b_i\rho^i\alpha_i+\alpha_{k+1}\rho^{k+1}\sum_{j=0}^{k}\gamma_j\right]. \tag{42}$$

等式(41)和(42)的右端当 $|\rho|<\varepsilon$，$\rho\neq0$ 时应当相等，又因为数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{k+1}$ 是任意的，从此推知数 $b_1,\cdots,b_k$ 等于零并得到关系式(35)。

这样，就証明了公式(34)。

在討論中引进函数 $L_k(\rho,\varphi)$，$k=0,1,\cdots,s$，置

$$\left.\begin{aligned} L_k(\rho, \varphi) &= \frac{\partial^k}{\partial \rho^k}\left(\frac{K(\rho, \varphi)}{\rho}\right) \quad \text{当 } \rho \neq 0 \text{ 时,} \\ L_k(0, \varphi) &= \frac{1}{k+1}\,\frac{\partial^{k+1} K(0, \varphi)}{\partial \rho^{k+1}}. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

从等式(34)和(35)推知，$L_k(\rho, \varphi)$ 在区域 $W$ 中是变量 $\rho, \varphi$ 的連續函数。明显地，当 $\rho \neq 0$ 时成立等式：

$$L_{k+1}(\rho, \varphi) = \frac{\partial L_k(\rho, \varphi)}{\partial \rho}, \quad k = 0, 1, \cdots, s-1. \tag{44}$$

我們来証明这些等式当 $\rho = 0$ 时也成立。設 $0 < \rho_0 < \varepsilon$, $0 < \rho < \varepsilon$; 就有

$$L_k(\rho, \varphi) = L_k(\rho_0, \varphi) + \int_{\rho_0}^{\rho} L_{k+1}(\xi, \varphi)\, d\xi. \tag{45}$$

因为这等式左、右两端的函数都是連續的，所以它当 $\rho = 0$ 时也成立：

$$L_k(0, \varphi) = L_k(\rho_0, \varphi) + \int_{\rho_0}^{0} L_{k+1}(\xi, \varphi)\, d\xi. \tag{46}$$

从(45)式减去(46)且除以 $\rho$，得到

$$\frac{L_k(\rho, \varphi) - L_k(0, \varphi)}{\rho} = \frac{\int_0^{\rho} L_{k+1}(\xi, \varphi)\, d\xi}{\rho}, \quad \rho > 0.$$

当 $\rho \to 0$ 时取极限，我們看到 $L_k(\rho, \varphi)$ 在 $\rho = 0$ 处关于 $\rho$ 的右方导数是存在的，并且等于 $L_{k+1}(0, \varphi)$. 同样可以証明左方导数也等于 $L_{k+1}(0, \varphi)$. 这样，等式(44)在整个区域 $W$ 上成立。

关系式(43)，(32)当 $k = 0$, $s = r$ 时就是等式(30)，(31)，而由关系(44)及(32)推出，函数 $H(\rho, \varphi)$ 具有連續的导数

$$\frac{\partial^{r-s+k} H(\rho, \varphi)}{\partial \rho^k \partial \varphi^{r-s}}, \quad 0 \leqslant k \leqslant s, \ 0 \leqslant s \leqslant r.$$

这就是說，函数 $H(\rho, \varphi)$ 具有一切直到 $r$ 阶为止的連續偏导数。

因此，証明了命題 4)。

## § 31. 周期解的稳定性

在这一节討論自治系統以及具有周期右端的方程組的周期解

的穩定性。

## 穩定性的概念

在§26中曾給出了自治系統平衡位置的李雅普諾夫意义下的穩定性定义。現在，我們首先給出李雅普諾夫关于任意方程組解的穩定性的定义。

設

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}) \tag{1}$$

是$n$阶标准方程組的向量写法，它的右端以及它們的偏导数 $\frac{\partial f^i(t,\boldsymbol{x})}{\partial x^j}$ 在变量$t$, $\boldsymbol{x}$的空間的某一区域$\Gamma$上有意义且連續。方程(1)的以$\theta$, $\boldsymbol{\xi}$为初始值的解記为$\boldsymbol{\varphi}(t,\theta,\boldsymbol{\xi})$.

**定义** 方程(1)的以$t_0$, $\boldsymbol{x}_0$为初始值的解$\boldsymbol{\varphi}(t)$称为**按李雅普諾夫意义是穩定的**，如果滿足条件：1)存在正数$\rho$，使得当$|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0|<\rho$时，解$\boldsymbol{\varphi}(t,t_0,\boldsymbol{x}_1)$对于所有的值$t\geqslant t_0$有定义，特别，解$\boldsymbol{\varphi}(t)$对所有的值$t\geqslant t_0$有定义；2)对于任何正数$\varepsilon$，可以找到正数$\delta\leqslant\rho$，使得当$|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0|<\delta$时，$|\boldsymbol{\varphi}(t,t_0,\boldsymbol{x}_1)-\boldsymbol{\varphi}(t)|<\varepsilon$对所有的值$t\geqslant t_0$成立。方程(1)的以$t_0$,$\boldsymbol{x}_0$为初始值的穩定解(按李雅普諾夫意义)$\boldsymbol{\varphi}(t)$称为**漸近穩定的**，如果可以找到正数$\sigma\leqslant\rho$，使得当$|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0|<\sigma$时下式成立：

$$\lim_{t\to+\infty}|\boldsymbol{\varphi}(t,t_0,\boldsymbol{x}_1)-\boldsymbol{\varphi}(t)|=0.$$

这里引述的按李雅普諾夫意义的穩定性和漸近穩定性定义，关于解$\boldsymbol{\varphi}(t)$的初始值$t_0$, $\boldsymbol{x}_0$是不变的，这可以从定理18得到。

特别，当方程組(1)是自治的，解$\boldsymbol{\varphi}(t)$是平衡位置时，这里引述的穩定性定义与§26給出的定义是一样的。

下面我們将討論右端依賴于$t$的方程組(1)，而$\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$关于$t$是具有周期$\tau$的，即

$$\boldsymbol{f}(t+\tau,\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}), \tag{2}$$

也討論是自治的系統(1)，即

$$f(t, x) = f(x). \tag{3}$$

在这两种情形下，都要討論周期为 $\tau$ 的解 $\varphi(t)$ 的稳定性問題，所謂 $\varphi(t)$ 的周期为 $\tau$，是指它适合：

$$\varphi(t+\tau) = \varphi(t). \tag{4}$$

对于自治系統，我們假設它不是平衡位置。在周期系統(参看(2))的情形，我們給出了周期为 $\tau$ 的周期解(4)漸近稳定的充分条件。自治系統乃是周期系統的特殊情形，可能会期望这些条件也能用来討論自治系統的周期解。但是，可以証明对自治系統它是不滿足的(自治系統的周期解不可能是漸近稳定的)，从而关于自治系統周期解的李雅普諾夫稳定性要由另外較弱的条件給出。

1) 为了研究方程(1)的在解 $\varphi(t)$ 附近的解的性状，我們引进新的未知向量函数 $y$，置

$$x = \varphi(t) + y. \tag{5}$$

今后我們假定方程組(1)的右端在区域 $\Gamma$ 中有关于 $x^j$ 的二阶連續偏导数。在方程組(1)中引进变量变換(5)，且把它的右端关于 $y$ 展开，注意到 $\varphi(t)$ 是方程(1)的解，得到

$$\dot{y}^i = \sum_j \frac{\partial f^i(t, \varphi(t))}{\partial x^j} y^j + r^i(t, y). \tag{6}$$

綫性化这方程組，就是丢掉关于变量 $y$ 的二阶小量的項 $r^i$，我們得到綫性方程組

$$\dot{y} = A(t)y, \tag{7}$$

这里矩陣 $A(t)$ 的元素是

$$a_j^i(t) = \frac{\partial f^i(t, \varphi(t))}{\partial x^j}.$$

我們假定方程(1)的右端关于变量 $t$ 是周期的，其周期为 $\tau$ 的，而解 $\varphi(t)$ 的周期也是 $\tau$。在这些假設下，綫性方程組(7)是周期为 $\tau$ 的，即

$$a_j^i(t+\tau)=a_j^i(t), \quad i,j=1,\cdots,n, \quad /$$

所以能够談到它的特征数(参考§19, 5)). 可以証明,当系統(1)是自治的,且周期解 $\varphi(t)$ 不是平衡位置时,綫性方程組(7)必有等于一的特征数。

我們来証明上述結論。設 $\Psi(t)$ 是一矩陣,它滿足矩陣方程

$$\dot{\Psi}=A(t)\cdot\Psi,$$

它的初始条件是

$$\Psi(t_0)=E, \tag{8}$$

且設 $C$ 是解 $\Psi(t)$ 的根本矩陣(参考§19, 1)),就是

$$\Psi(t+\tau)=\Psi(t)C. \tag{9}$$

容易直接驗証向量方程(7)的任一解 $\psi(t)$ 可以写成形式:

$$\psi(t)=\Psi(t)\psi(t_0).$$

这样,由关系(8)与(9)得到

$$\psi(t_0+\tau)=C\psi(t_0). \tag{10}$$

注意到(1)是自治的,我們有

$$\dot{\varphi}(t)=f(\varphi(t));$$

关于 $t$ 导微这关系式,得到

$$\ddot{\varphi}(t)=A(t)\dot{\varphi}(t).$$

所以向量函数 $\dot{\varphi}(t)$ 滿足向量方程(7). 而向量函数 $\dot{\varphi}(t)$ 具有周期 $\tau$,由(10)得到

$$\dot{\varphi}(t_0)=\dot{\varphi}(t_0+\tau)=C\dot{\varphi}(t_0), \tag{11}$$

且因为 $\dot{\varphi}(t_0)\neq 0$(由于 $\varphi(t)$ 不是平衡位置),所以矩陣 $C$ 有一个特征値等于1, 从而方程(7)有一个特征数等于1.

## 李雅普諾夫定理及安德罗諾夫-維特定理

現在我們可以分别就方程組(1)是周期的和自治的,来建立周期解稳定性的充分条件。

**定理25.** 設方程(1)关于 $t$ 是周期的,周期为 $\tau$. 它的周期解

$\varphi(t)$的周期也是 $\tau$. 如果方程(7)的所有特征数(参看 § 19, 5))的模都小于一,那末解 $\varphi(t)$ 是漸近稳定的;并且存在正数 $\sigma$, 使得当 $|x_1-x_0|<\sigma$ 时有估計式

$$|\varphi(t, t_0, x_1)-\varphi(t)|<re^{-\alpha t}|x_1-x_0|, \quad t\geqslant t_0, \tag{12}$$

这里 $r$ 与 $\alpha$ 是两个与 $x_1$ 无关的正数。

**定理 26**. 設方程(1)是自治的,它的解 $\varphi(t)$的周期为 $\tau$,且不是平衡位置。如果方程(7)的特征数中,等于 1 的特征数的重数是一,而其余的特征数的模都小于 1,那末解 $\varphi(t)$ 是按李雅普諾夫意义稳定的。

定理 25 是李雅普諾夫証明的。定理 26 是安德罗諾夫和維特(Витт)証明的,而且是作为李雅普諾夫一个很精細的定理的簡单推論得到的。这里給出定理 26 的另外証明,是依李雅普諾夫方法来做的。

在証明定理 25 和 26 之前,讲一下对两种情况都需要的一些事項。

在 § 26 中曾定义了函数按自治系統的导数。現在对非自治系統給出它的定义。

**2)** 設

$$F(x)=F(x^1, \cdots, x^n)$$

是向量变量 $x$ 的数量函数,这函数按方程組(1)在点 $t_0$, $x_0$ 的导数 $\dot{F}_{(1)}(t_0, x_0)$ 是用下法定义的。設 $\varphi(t)$ 是方程組(1)的以 $t_0$, $x_0$ 为初始值的解,置

$$\dot{F}_{(1)}(t_0, x_0)=\frac{d}{dt}F(\varphi(t))\Big|_{t=t_0}.$$

在右端施行所說的导微运算,得到

$$\dot{F}_{(1)}(t, x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F(x)}{\partial x^i}f^i(t, x).$$

如果方程組(1)是自治的,那末函数 $F(x)$ 按方程組(1)在点 $t$, $x$

处的导数 $\dot{F}_{(1)}(t,x)$ 与 $t$ 无关。

3) 設

$$\dot{z}=Bz+p(t,z) \tag{13}$$

是标准微分方程組的向量写法，其中 $B=(b_j^i)$ 是常数矩陣，它的所有特征值具有負实部，而余項 $p(t,z)$ 对于 $t\geqslant t_0$，$|z|<c$，$c>0$ 有定义，且有估計式

$$|p(t,z)|\leqslant p|z|^2, \tag{14}$$

这里 $p$ 是正数。可以証明，方程(13)的解 $z=0$ 是漸近稳定的，并且，还有正数 $c_1<c$，使得对于以 $t_0$，$z_1$，$|z_1|<c_1<c$ 为初始值的解 $z=\chi(t,z_1)$ 有估計式

$$|\chi(t,z_1)|\leqslant r|z_1|\cdot e^{-\alpha t},\quad t\geqslant t_0, \tag{15}$$

这里 $r$ 和 $\alpha$ 是与 $z_1$ 无关的正数。

命題 3)的証明与 § 26 的李雅普諾夫定理的証明完全一样，因此进行証明时就不过于詳細了。

設 $W(z)$ 是常系数綫性方程組

$$\dot{z}=Bz \tag{16}$$

的李雅普諾夫函数(参考 § 26, 5))，它滿足不等式

$$\dot{W}_{(16)}(z)=\sum_{i,j}\frac{\partial W(z)}{\partial z^i}\,b_j^i z^j\leqslant -2\beta W(z),\quad \beta>0.$$

从此根据估計式(14)，就得到，当

$$W(z)\leqslant c_2$$

时，

$$\dot{W}_{(13)}(z)=\sum_{i,j}\frac{\partial W(z)}{\partial z^i}\,b_j^i z^j+\sum_i\frac{\partial W(z)}{\partial z^i}\,p^i(t,z)\leqslant -2\alpha W(z),$$

这里 $\alpha<\beta$ 和 $c_2$ 是某些正数。置

$$w(t)=W(\chi(t,z_1)),$$

其中 $W(z_1)<c_2$。那末只要有关系式

$$w(t)\leqslant c_2,$$

函数 $w(t)$ 当 $t\geqslant t_0$ 时就满足不等式

$$\dot{w}(t)\leqslant -2\alpha w(t). \tag{17}$$

从(17)推知，只要 $w(t)\leqslant c_2$，函数 $w(t)$ 就是下降的，精确地說是不增的，而当 $t=t_0$ 时有不等式 $w(t)<c_2$，所以点 $\chi(t,z_1)$ 不能跑出由不等式 $W(z)\leqslant c_2$ 所界定的闭集 $F$。所以对所有的 $t\geqslant t_0$，解 $\chi(t,z_1)$ 有定义(参看 § 24, 2))，且不等式(17)成立。现在假設 $z_1\neq 0$，我們可以作下面的計算：从不等式(17)

$$\frac{\dot{w}(t)}{w(t)}\leqslant -2\alpha$$

或是把它积分，得到

$$\ln w(t)-\ln w(t_0)\leqslant -2\alpha(t-t_0),$$

从此推知 $$w(t)\leqslant w(t_0)e^{-2\alpha(t-t_0)},$$

或 $$W(\chi(t,z_1))\leqslant W(z_1)e^{-2\alpha(t-t_0)}$$

从这个估計式可直接导出估計式(15)。

于是命題 3)得証。

## 定理 25 的証明

根据定理 12，存在变换

$$y=T(t)z, \tag{18}$$

其中矩陣 $T(t)$ 是实的，周期为 $2\tau$，它把方程(7)变为实常系数方程

$$\dot{z}=Bz.$$

矩陣 $e^{tB}$ 是这个方程的解，$e^{2\tau B}$ 是这个方程的根本方陣，因而 $e^{2\tau B}$ 是方程(7)的根本方陣。根据定理 25 的假設，矩陣 $e^{2\tau B}$ 的特征值的模小于一。設 $\lambda$ 是矩陣 $B$ 的特征值，根据定理 27 (参看 § 33)，$e^{2\tau\lambda}$ 是矩陣 $e^{2\tau B}$ 的特征值，所以 $|e^{2\tau\lambda}|<1$，由此矩陣 $B$ 的所有特征值具負实部。把变換(18)应用到方程(6)，(6)就变为形式(13)，它的解 $z=\chi(t,z_1)$ 有估計式(15)，从这估計式以及矩陣 $T(t)$ 的不退化性得到估計式(12)，

于是定理 25 得証。

## 定理 26 的証明

由假設，方程(7)有一个重数为一的特征数 1，而其余的特征数的模小于一，我們来証明存在变换(实矩陣 $T(t)$ 是周期为 $2\tau$ 的)

$$y = T(t)z, \tag{19}$$

把方程(7)变为有常数矩陣 $B$ 的方程

$$\dot{z} = Bz, \tag{20}$$

而矩陣 $B$ 具有形式：

$$B = \left(\begin{array}{c|c} B^* & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \tag{21}$$

其中 $B^*$ 是 $n-1$ 阶方陣，它的所有特征值具有負实部。

設 $C$ 是矩陣方程(参看(7))

$$\dot{Y} = A(t)Y \tag{22}$$

的某一解的根本方陣。因为 $C$ 有一个特征值是 1，并且是单重的，所以在某个基之下它有形式：

$$\left(\begin{array}{c|c} C^* & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right), \tag{23}$$

这里 $C^*$ 是 $n-1$ 阶的实方陣，它的所有特征值的模小于一(参看 § 32,7),8))。因为矩陣 $C$ 和(23)可以互相通过变位得到，所以矩陣(23)是方程(22)的某一解的根本方陣，我們今后假定 $C$ 和矩陣(23)一致。由 § 33 中的命題 4)，存在实矩陣 $B^*$，滿足条件：

$$e^{2\tau B^*} = C^*,$$

且由于定理 27，矩陣 $B^*$ 的所有特征值具有負实部。矩陣 $B$ (参看(21))显然滿足条件：

$$e^{2\tau B} = C$$

(参看(23))。这样(与定理 12 的証明比較)，存在变换(19)，把方程(7)变为方程(20)。

現在来讲明，把方程 (7) 变为方程 (20) 的变换中的矩陣 $T(t)$

应当满足怎样的条件。导微(19)式得到

$$\dot{\boldsymbol{y}}=\dot{T}(t)\boldsymbol{z}+T(t)\dot{\boldsymbol{z}}=\dot{T}(t)\boldsymbol{z}+T(t)B\boldsymbol{z}.$$

在这关系式中，按公式 $\boldsymbol{z}=T^{-1}(t)\boldsymbol{y}$ 改变 $\boldsymbol{z}$，得到

$$\dot{\boldsymbol{y}}=(\dot{T}(t)+T(t)B)T^{-1}(t)\boldsymbol{y}.$$

因为这个方程与方程(7)一致，所以

$$(\dot{T}(t)+T(t)B)T^{-1}(t)=A(t),$$

以矩陣 $T(t)$ 右乘这关系式的两端得到

$$\dot{T}(t)+T(t)B=A(t)T(t). \tag{24}$$

这个条件是变换(19)能把方程(7)变为方程(20)的充分和必要的条件。把矩陣 $T(t)$ 表示成形式：

$$T(t)=(T^*(t),\boldsymbol{t}(t)),$$

其中 $T^*(t)$ 是 $n$ 行 $n-1$ 列的矩陣，而 $\boldsymbol{t}(t)$ 是矩陣 $T(t)$ 的最后一列，它不是零向量。于是可把关系式(24)分成两个关系式：

$$\dot{T}^*(t)+T^*(t)B^*=A(t)T^*(t), \tag{25}$$

$$\dot{\boldsymbol{t}}(t)=A(t)\boldsymbol{t}(t). \tag{26}$$

由关系式(26)看出 $\boldsymbol{t}(t)$ 是方程(7)的以 $2\tau$ 为周期的周期解，所以满足条件(与(10)比較)

$$\boldsymbol{t}(t_0)=\boldsymbol{t}(t_0+2\tau)=C^2\boldsymbol{t}(t_0).$$

这样，向量 $\boldsymbol{t}(t_0)$ 是矩陣 $C^2$ 的特征向量，它所对应的特征值是 1。因为矩陣

$$C^2=\left(\begin{array}{c|c} C^{*2} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

有单重的特征值 1，并且已經知道矩陣 $C^2$ 的对应于这特征值的一个向量 $\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t_0)\neq 0$ (参看(11))，所以有

$$\boldsymbol{t}(t_0)=\gamma\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t_0),$$

又因为两个向量函数 $\boldsymbol{t}(t)$ 和 $\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t)$ 都是方程(7)的解，从此得到

$$\boldsymbol{t}(t)\equiv\gamma\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t).$$

由此看出，如果把矩陣 $T(t)$ 的最后一列 $\boldsymbol{t}(t)$ 換为 $\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t)$，那末得到

的矩陣$(T^*(t), \dot{\varphi}(t))$仍將滿足条件(25)和(26)。因此我們將假定

$$T(t) = (T^*(t), \dot{\varphi}(t)). \tag{27}$$

从所得的关系(25)和(27)出发，来作方程(1)在自治系統时的变換（参看(3)），把未知函数$x$变为新的未知量$z^*$, $s$，其中$z^* = (z^1, \cdots, z^{n-1})$是$n-1$維向量，今后我們假定它是单列矩陣；而$s$是新的数量变量。$x$和$z^*$, $s$之間的关系是

$$x = T^*(s)z^* + \varphi(s) = g(z^*, s). \tag{28}$$

这个变換关于$s$是周期的，周期为$2\tau$。当$|z^*|$充分小时，对于每一对$z^*$, $s$，关系(28)确定了与周期軌綫$K$（它是由解$x=\varphi(t)$确定的）上的点$\varphi(s)$相邻近的点$x$之間的对应。这个变換在点对$z^*=0$, $s=s_0$处的函数行列式等于$T(s_0)$（参看(27)），而$T(s_0)$是不等于零的，所以变換(28)在点对$z^*=0$, $s=s_0$附近是互相单値的。我們把点对$(z^*, s)$看为周期是$2\tau$的巡回坐标，即把点对$(z^*, s)$和$(z^*, s+2\tau)$看成一个点。因为点对$(0, s_0)$和$(0, s_0+\tau)$在变換(28)下变为軌綫$K$的同一点$\varphi(s_0)$，所以$(0, s_0)$和$(0, s_0+\tau)$的某些邻域变为綫$K$上的点$\varphi(s_0)$的同一邻域。这样，变換(28)把所有点对$(z^*, s)$（当$|z^*|$充分小时）的集合两重复盖曲綫$K$的某一邻域，而由所有点对$(0, s)$, $0 \leqslant s \leqslant 2\tau$所組成的閉曲綫两重复盖曲綫$K$。

現在用公式(28)来代替方程(1)（参看(3)）的未知向量$x$。代入左端有

$$\dot{x} = T^{*\prime}(s)z^*\dot{s} + T^*(s)\dot{z}^* + \varphi'(s)\dot{s}. \tag{29}$$

代入右端有

$$f(x) = f(\varphi(s)) + A(s)T^*(s)z^* + R(s, z^*), \tag{30}$$

其中余項$R(s, z^*)$关于$s$是周期为$2\tau$的，关于向量$z^*$是二阶无穷小。使(29)和(30)的右端相等，得到

$$T^*(s)\dot{z}^* + \varphi'(s)\dot{s} + T^{*\prime}(s)z^*\dot{s} = f(\varphi(s)) + A(s)T^*(s)z^* + R(s, z^*).$$

按公式(25)变换矩阵 $A(s)T'(s)$，且以 $\varphi'(s)$ 代替 $f(\varphi(s))$，得到

$$T^*(s)\dot{z}^*+\varphi'(s)\dot{s}+T^{*\prime}(s)z^*\dot{s}$$
$$=\varphi'(s)+(T^{*\prime}(s)+T^*(s)B^*)z^*+R(s,z^*),$$

从此

$$T^*(s)(\dot{z}^*-B^*z^*)+(\varphi'(s)+T^{*\prime}(s)z^*)(\dot{s}-1)=R(s,z^*). \quad (31)$$

现在在討論中引进新的輔助变量：向量 $u^*=(u^1,\cdots,u^{n-1})$ 及数量 $u^n$。在变量 $(u^*,u^n)=(u^1,\cdots,u^n)$ 的 $n$ 維空間中考慮綫性变换 $M$：

$$M(u^*,u^n)=T^*(s)u^*+(\varphi'(s)+T^{*\prime}(s)z^*)u^n,$$

它是与参数 $s$ 及 $z^*$ 有关的。当 $z^*=0$ 时，变换 $M$ 成为 $T(s)$，因而当 $z^*$ 接近零时，变换 $M$ 是不退化的。这样，方程

$$M(u^*,u^n)=R(s,z^*)$$

当 $z^*$ 接近零时关于 $u^*$ 和 $u^n$ 是单值可解的，它的解

$$u^*=q^*(s,z^*),$$
$$u^n=q(s,z^*)$$

关于 $s$ 的周期是 $2\tau$，关于 $z^*$ 是二阶无穷小。因为关系式 (31) 可以写为

$$M(\dot{z}^*-B^*z^*,\dot{s}-1)=R(s,z^*),$$

所以

$$\dot{z}^*-B^*z^*=q^*(s,z^*),\quad \dot{s}-1=q(s,z^*).$$

因此，方程(1)在变量 $z^*$，$s$ 的空間中写为形式：

$$\dot{z}^*=B^*z^*+q^*(s,z^*), \quad (32)$$

$$\dot{s}=1+q(s,z^*). \quad (33)$$

现在存在正数 $\varepsilon$，使得当 $|z^*|<\varepsilon$ 时，余项 $q(s,z^*)$ 满足不等式 $|q(s,z^*)|<1$。每当解 $z^*=z^*(t)$，$s=s(t)$ 满足这个不等式时，可以代替 $t$ 取 $s$ 作为自变量，而方程(32)和(33)写为形式：

$$\frac{dz^*}{ds}=\frac{B^*z^*+q^*(s,z^*)}{1+q(s,z^*)},$$
$$\frac{dt}{ds}=\frac{1}{1+q(s,z^*)},$$

或是另一个形式：

$$\frac{dz^*}{ds}=B^*z^*+k^*(s,z^*), \tag{34}$$

$$\frac{dt}{ds}=1+k(s,z^*), \tag{35}$$

其中余项 $k^*(s,z^*)$ 和 $k(s,z^*)$ 关于 $s$ 是周期为 $2\tau$ 的，关于 $z^*$ 是二阶无穷小。

在方程组(34)和(35)中，自变量是 $s$，未知函数是 $z^*$，$t$，它們是 $s$ 的函数。方程(34)不包含未知函数 $t$，因而它可以单独解。这样，为了找方程组(32)和(33)的以 $t_0$，$z_1^*$，$s_1$ 为初始值的解，应該先找方程(34)的以 $z_1^*$，$s_1$ 为初始值的解 $z^*(s,z_1^*,s_1)$，由命題3)，当 $|z_1^*|$ 充分小时，对所有值 $s\geqslant s_1$，它有定义，且有估計式

$$|z^*(s,z_1^*,s_1)|\leqslant r|z_1^*|e^{-\alpha s}. \tag{36}$$

然后，应找方程(35)以 $t_0$，$z_1^*$，$s_1$ 为初始值的解；这个解可由下面的明显公式給出：

$$\begin{aligned} t&=t_0+\int_{s_1}^{s}(1+k(s,z^*(s,z_1^*,s_1)))ds\\ &=t_0-s_1+s+\int_{s_1}^{s}k(s,z^*(s,z_1^*,s_1))ds. \end{aligned} \tag{37}$$

只要 $|z_1^*|$ 充分小，是后一个方程关于 $s$ 是可解的，所以

$$s=s(t,z_1^*,s_1). \tag{38}$$

把关于 $s$ 的这一表达式代入方程(34)的解 $z^*(s,z_1^*,s_1)$，得到

$$z^*(t)=z^*(s(t,z_1^*,s_1),z_1^*,s_1). \tag{39}$$

公式(38)和(39)給出了方程組(32)，(33)的以 $t_0$，$z_1^*$，$s_1$ 为初始值的解。由(37)推出，当 $t\geqslant t_0$ 时，我們有

$$|s(t,z_1^*,s_1)-t|\leqslant|s_1-t_0|+l|z_1^*|^2, \tag{40}$$

其中 $l$ 是某一正的常数。特别，当 $z_1^*=0$，$s_1=t_0$ 时，解(38)和(39)有形式：

$$z^*(t)=0,\ s(t)=t.$$

从估計式(36)和(40)推知，方程組(32)，(33)的这个解(即 $z^*(t)=0$，

$s(t)=t$) 是按李雅普諾夫意义稳定的。

把解(38), (39)代入变换(28)的公式，我們得到方程(1)的以 $t=t_0$, $x=x_1=g(z_1^*, s_1)$ 为初始值的解 $x=\varphi(t, x_1)$。因为变换(28)在 $z^*=0$, $s=t_0$ 的邻域中是互相单值的，所以方程(1)的以 $t_0$, $x_1$ 为初始值的解 $x=\varphi(t, x_1)$，当 $|x_1-x_0|$ 充分小时，可以从方程組(32), (33)的某个解(38), (39)得到。这时，解 $x=\varphi(t)$ 是从解 $z^*=0$, $s\equiv t$ 得到的。这样就从解 $z^*=0$, $s\equiv t$ 按李雅普諾夫意义的稳定性推得周期解 $x=\varphi(t)$ 按李雅普諾夫意义的稳定性(由于变换(28)的一致連續性)。

于是定理 26 得証。

把这里所得到的結果应用于极限圈的情形。

**4)** 我們假定自治系統(1)(参看(3))是二阶的：

$$\dot{x}^i=f^i(x^1, x^2)=f^i(x), \quad i=1, 2,$$

且設

$$x=\varphi(t)$$

是周期为 $\tau$ 的周期解。这时方程組(7)有形式：

$$\dot{y}^i=\frac{\partial f^i(\varphi(t))}{\partial x^1}y^1+\frac{\partial f^i(\varphi(t))}{\partial x^2}y^2, \quad i=1,2.$$

根据命題 1)，这个方程組有一个特征数等于 1，把第二个特征数記为 $\lambda$. 可以証明

$$\lambda=e^{\int_0^\tau\left(\frac{\partial f^1(\varphi(t))}{\partial x^1}+\frac{\partial f^2(\varphi(t))}{\partial x^2}\right)dt}. \tag{41}$$

因此，如果

$$\int_0^\tau\left(\frac{\partial f^1(\varphi(t))}{\partial x^1}+\frac{\partial f^2(\varphi(t))}{\partial x^2}\right)dt<0,$$

那末周期解 $x=\varphi(t)$ 按李雅普諾夫意义是稳定的。事实上(参看下面的例子)，存在周期解 $x=\varphi(t)$ 的后继函数 $\chi(u)$，使得

$$\chi'(u_0)=\lambda, \tag{42}$$

所以当 $\lambda\neq 1$ 时，周期解 $x=\varphi(t)$ 是粗极限圈。它当 $\lambda<1$ 时是稳

定的，当 $\lambda>1$ 时是不稳定的。

我們来証明等式(41)．方程 $\dot{Y}=A(t)Y$ 的有初始值 $\Psi(0)=E$ (参看 1))的解为 $Y=\Psi(t)$，它的根本矩陣 $C$ 由下式决定：

$$C=\Psi(\tau).$$

根据柳維尔公式，有

$$\operatorname{Det}\Psi(\tau)=\operatorname{Det}\Psi(0)\cdot e^{\int_0^\tau S(t)dt},$$

其中 $$S(t)=a_1^1(t)+a_2^2(t)=\frac{\partial f^1(\varphi(t))}{\partial x^1}+\frac{\partial f^2(\varphi(t))}{\partial x^2}$$

(参看 §17 的命題 7))．在我們的情形，矩陣 $C$ 是二阶的，有一个特征值等于 1，所以另一个等于 $\lambda$，我們有

$$\lambda=\operatorname{Det}C=e^{\int_0^\tau\left(\frac{\partial f^1(\varphi(t))}{\partial x^1}+\frac{\partial f^2(\varphi(t))}{\partial x^2}\right)dt}.$$

## 例 題

設 $\varphi(t)$ 是自治系統(1)(参看(3))的周期为 $\tau$ 的周期解，它的初始值是 $t_0$, $x_0$；記这方程組的以 $t_0$, $\xi$ 为初始值的解为 $\varphi(t,\xi)$．对解 $\varphi(t)$，我們来作类似的后继函数（参看 §28），它現在是变量 $u^1,\cdots,u^{n-1}$ 的 $n-1$ 維空間变到自身的变换。

設

$$x=g(u),\quad u=(u^1,\cdots,u^{n-1}) \tag{43}$$

是一曲面的方程，它与軌綫 $\varphi(t)$ 相交于唯一的点

$$x_0=\varphi(t_0,x_0)=g(u_0), \tag{44}$$

且在这一点与軌綫 $\varphi(t)$ 不相切，所以向量

$$\dot{\varphi}(t_0),\quad \frac{\partial g(u_0)}{\partial u^1},\cdots,\quad \frac{\partial g(u_0)}{\partial u^{n-1}} \tag{45}$$

是綫性无关的。当 $|u-u_0|$ 充分小时，我們求軌綫 $\varphi(t,g(u))$ 与曲面(43)当 $t$ 靠近 $t_0+\tau$ 时的交点。設 $g(v)$ 是这个交点，則有

$$\varphi(t,g(u))-g(v)=0. \tag{46}$$

当 $u=u_0$ 时，方程(46)明显地有解：

$$t=t_0+\tau,\quad v=u_0$$

(参看(4)及(44))。现在,我們把 $u$ 看作自变量, $t,v$ 看作未知量,根据(45)的綫性无关性,方程組(46)关于未知函数 $t$ 和 $v$ 的函数行列式当 $t=t_0+\tau$, $u=u_0$, $v=u_0$ 时不等于零,所以当 $|u-u_0|$ 充分小时方程組(46)有解

$$t=t(u),\quad v=\chi(u),$$

而 $|t(u)-(t_0+\tau)|$ 和 $|\chi(u)-u_0|$ 是小的。变量 $w^1,\cdots,w^{n-1}$ 的空間变为自身的变换 $\chi(u)$ 称为 **后继变换** (它对小的 $|u-u_0|$ 是有定义的)。方程

$$\chi(u)-u=0 \tag{47}$$

的每一解 $u=u_1$ 对应于自治系統 (1) 的一个周期解 $\varphi(t, g(u_1))$,它的周期是接近 $\tau$ 的; 特别,解 $u=u_0$ 对应于原来的周期解 $\varphi(t)=\varphi(t, g(u_0))$。如果函数矩陣

$$M=\left(\frac{\partial\chi^i(u_0)}{\partial w^j}\right),\quad i,j=1,\cdots,n-1$$

沒有等于 1 的特征值,那末方程(47)的解 $u=u_0$ 是孤立的。事实上,方程 (47) 的函数矩陣当 $u=u_0$ 时是

$$M-E^*,$$

这个矩陣的行列式不等于零的充分和必要条件是矩陣 $M$ 沒有等于 1 的特征值。

現在来讲明每一个邻近于由 $\varphi(t)$ 所描述的軌綫 $K$ 的周期軌綫 $K_1$,是否由解 $\varphi(t, g(u_1))$ 来描述的問題,这里 $u_1$ 是方程 (47) 的解。可以証明,当 $n\geqslant 3$ 时問題已不象 $n=2$ 的情形了。把 $\tau$ 看作解 $\varphi(t)$ 的最小周期,也就是等式

$$\varphi(t_0+t)=\varphi(t_0)$$

仅当 $t=k\tau$ 时成立,其中 $k$ 是整数(参看 § 15, 3))。如果軌綫 $K_1$ 靠近軌綫 $K$,那末当 $|u_1-u_0|$ 小时,它与曲面 (43) 相交于某一点 $g(u_1)$。置

$$u_2=\chi(u_1),\ u_3=\chi(u_2),\ \cdots,\ u_{i+1}=\chi(u_i),\ \cdots$$

因为轨线 $K_1$ 是閉的，所以在这序列中可以找到与点 $u_1$ 重合的点，設 $u_{k+1}$ 是第一个这样的点。这时，轨线 $K_1$ 是由解 $\varphi(t,g(u_1))$ 描述的，它的最小周期是接近于数 $k\tau$ 的；解 $\varphi(t,g(u_1))$ 仅当沿轨线 $\varphi(t)$ 进行 $k$ 次后才回到原来的位置。在平面情形，仅有 $k=1$。我們称 $k$ 是轨线 $K_1$ 的**重数**。为了找二重轨线，需要解的方程不是 (47) 而是

$$\chi(\chi(u))-u=0;$$

为找三重轨线，需要解方程

$$\chi[\chi(\chi(u))]-u=0$$

等等。函数 $\chi(\chi(u))$，$\chi[\chi(\chi(u))]$，… 称为函数 $\chi(u)$ 的**迭代**；記 $k$ 重迭代为 $\chi^k(u)$。这样，为了求靠近解 $\varphi(t)$ 的 $k$ 重軌綫，应解方程

$$\chi^k(u)-u=0, \tag{48}$$

但从方程 (48) 的所有解中，应当只取不是前面重数的方程的解；方程 (47) 的解 $u=u_0$ 是任何方程 (48) 的解。方程 (48) 的函数矩陣在 $u=u_0$ 时显然等于 $M^k-E^*$；因此，为了方程 (48) 只有一个靠近 $u_0$ 的解 $u=u_0$，只要矩陣 $M^k-E^*$ 的行列式不等于零，或是同样地，矩陣 $M^k$ 沒有等于 1 的特征值，或矩陣 $M$ 沒有特征值等于 $\sqrt[k]{1}$。因此，为了在軌綫 $K$ 的邻近不存在有給定重次 $k$ 的周期軌綫，只要矩陣 $M$ 沒有等于 $\sqrt[k]{1}$ 的特征值就行了。特别，如果 $M$ 的所有特征值的模皆小于 1，那末它就沒有这样的（即 $\sqrt[k]{1}$）特征值。

从上面看出，矩陣 $M$ 在研究方程 (1) 的靠近周期解 $\varphi(t)$ 的軌綫时有重要的作用。現在証明，如果方程 (7) 有一个特征数等于 1，且是单重的，那末在曲面 (43) 的某种选擇下，矩陣 $M$ 和矩陣 $C^*$（参看 (23)）是一致的。置

$$\psi_j^i(t)=\left.\frac{\partial\varphi^i(t,\xi)}{\partial\xi^j}\right|_{t=x_0};\quad \Psi(t)=(\psi_j^i(t)),$$

根据定理 15，我們有

$$\dot{\Psi}(t)=A(t)\Psi(t). \tag{49}$$

且满足初始条件：

$$\Psi(t_0)=E.$$

这样，矩陣 $\Psi(t)$ 是矩陣方程(49)的解。因为方程 (49) 是方程 (7) 的矩陣形式，所以

$$\Psi(t_0+\tau)=C.$$

因为矩陣 $C$ 有一个单重的特征值 1，所以可在向量 $y$ 的空間中选择基底(参看 1))，使得矩陣 $C$ 写成(23)的形式。置

$$x=\varphi(t_0)+y$$

后，选取向量 $y$ 的支量作为方程(1)(参看(3))的相空間的坐标(与(5)比較)。用这种方法得到的相空間的坐标仍記为 $x^1,\cdots,x^n$，而曲面(43)的方程为

$$x^1=u^1,\ \cdots,\ x^{n-1}=u^{n-1},\ x^n=0.$$

假設在关系(46)中 $t=t(u)$，$v=\chi(u)$ 是变量 $u^1,\cdots,u^{n-1}$ 的函数，关于 $u^1,\cdots,u^{n-1}$ 导微关系式(46)，且設 $u=0$，$t=t_0+\tau$，$v=0$，得到等式

$$C^*=M. \tag{50}$$

当 $n=2$ 时，矩陣 $C^*$ 是数量 $\lambda$，因而关系(50)給出等式(42)。

如果矩陣 $C^*$ 的所有特征值的模小于 1，那末在軌綫 $K$ 的附近沒有任何重数的周期解。这是从估計式(36)得到的。

# 第 六 章

# 綫性代数

这一章是本书基本内容的补充。本书最基本章节里所用到的綫性代数的一些結果，要在这一章討論。应該指出，§34 只依賴于 §32 的結論，完全沒有利用 §33 的結果。

## §32. 最小化零多項式

### 特征值与特征向量

**1**）每一个元素为实数或复数的 $n$ 阶方陣

$$A=(a_j^i),\quad i,j=1,\cdots,n,$$

对应有 $n$ 維向量坐标空間 $R$ 的一个綫性变換 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}$ 是这样的：对于空間 $R$ 的向量

$$\boldsymbol{x}=(x^1,\cdots,x^n),$$

用关系式

$$y^i=\sum_j a_j^i x^j$$

确定了相应的向量

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{y}=(y^1,\cdots,y^n).$$

零矩陣 0（它的所有元素等于零）对应的变換是零变換 **0**，这个变換把每一个向量变为零向量。单位矩陣

$$E=(\delta_j^i),\quad \delta_j^i=\begin{cases}0 & \text{当 } i\neq j \text{ 时},\\ 1 & \text{当 } i=j \text{ 时}\end{cases}$$

对应的变換是空間 $R$ 的单位变換或恒等变換 $\boldsymbol{E}$：

$$\boldsymbol{Ex}=\boldsymbol{x}.$$

如果在空間 $R$ 中引进新的坐标 $x'^1,\cdots,x'^n$，它們与原来坐标

$x^1, \cdots, x^n$ 的联系是

$$x'^i = \sum_i s_i^i x^i,$$

或者写成矩陣形式：

$$\boldsymbol{x}' = S\boldsymbol{x},$$

那末变換 $\boldsymbol{A}$ 在新坐标系下对应于矩陣

$$A' = SAS^{-1}. \tag{1}$$

我們来証明关系(1)。事实上，

$$\boldsymbol{y}' = S\boldsymbol{y} = S\,A\boldsymbol{x} = S\,AS^{-1}\boldsymbol{x}'.$$

**2)** 設 $\boldsymbol{A}$ 是一綫性变換，$A$ 是在某一坐标系下变換 $\boldsymbol{A}$ 所对应的矩陣。如果有不为零的向量 $\boldsymbol{h}$ 以及某一数 $\lambda$，满足关系式

$$\boldsymbol{Ah} = \lambda\boldsymbol{h}, \tag{2}$$

那末称向量 $\boldsymbol{h}$ 为变換 $\boldsymbol{A}$ 的**特征向量**，称数 $\lambda$ 为变換 $\boldsymbol{A}$ 的**特征值**。矩陣 $(a_j^i - z\delta_j^i)$ 的行列式：

$$D(z) = |a_j^i - z\delta_j^i| = |A - zE|$$

称为矩陣 $A$ 的**特征多項式**。可以証明，多項式 $D(z)$ 的系数与坐标系的选取无关，而完全由变換 $\boldsymbol{A}$ 所确定。所以也称多項式 $D(z)$ 为变換 $\boldsymbol{A}$ 的特征多項式。又数 $\lambda$ 当且仅当它是多項式 $D(z)$ 的根时，才是变換 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

我們来証明多項式 $D(z)$ 与坐标系选取的无关性。在新坐标系下，变換 $\boldsymbol{A}$ 所对应的矩陣是 $SAS^{-1}$，其中 $S$ 是某一不退化矩陣(参看(1))。根据

$$\begin{aligned} |SAS^{-1} - zE| &= |SAS^{-1} - zSES^{-1}| = |S(A - zE)S^{-1}| \\ &= |S| \cdot |A - zE| \cdot |S^{-1}| \\ &= |S| \cdot |A - zE| \cdot |S|^{-1} = |A - zE|, \end{aligned}$$

得到所要証的事实。

把等价于(2)的关系 $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{h} = 0$ 写成坐标形式：

$$\sum_{j=1}^{n} (a_j^i - \lambda\delta_j^i) h^j = 0, \quad i = 1, \cdots, n.$$

这个齐次方程組当且仅当它的行列式 $D(\lambda)$ 等于零时有非零解 $h^1, \cdots, h^n$. 所以多項式 $D(z)$ 的每一根 $\lambda$ 是变換 $A$ 的特征值，并且其逆也成立。

**3)** 如果变換 $A$ 的特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ 两两不相同，那末它們所对应的特征向量 $\boldsymbol{h}_1, \cdots, \boldsymbol{h}_k$ 是綫性无关的。

我們对于数 $k$ 应用归納法来証明。当 $k=1$ 时，这个結論是明显的。設它对 $k-1$ 个向量正确，而証明它对 $k$ 个向量也正确。事实上，如果 $a_1\boldsymbol{h}_1+\cdots+a_k\boldsymbol{h}_k=0$，对它应用变換 $A$，得到

$$a_1\lambda_1\boldsymbol{h}_1+\cdots+a_k\lambda_k\boldsymbol{h}_k=0,$$

另一方面，

$$\lambda_k(a_1\boldsymbol{h}_1+\cdots+a_k\boldsymbol{h}_k)=0.$$

两式相減得到

$$a_1(\lambda_1-\lambda_k)\boldsymbol{h}_1+\cdots+a_{k-1}(\lambda_{k-1}-\lambda_k)\boldsymbol{h}_{k-1}=0.$$

按归納法假設，得到 $a_1=\cdots=a_{k-1}=0$，所以 $a_k\boldsymbol{h}_k=0$，从而 $a_k=0$.

因此，如果特征多項式 $D(z)$ 的所有根是互不相同的，那末我們可以取变換 $A$ 的特征向量 $\boldsymbol{h}_1, \cdots, \boldsymbol{h}_n$ 作为空間 $R$ 的基。在这个基之下，变換 $A$ 所对应的矩陣是对角矩陣。在一般情形，把矩陣变到对角型是不可能的，因而有必要建立一些比較复杂的理論，叙述于下。

## 最小化零多項式

**4)** $n$ 阶方陣可以按熟知的規則相加，相乘，也可以与数相乘；矩陣的这些运算对应于变換的同样运算。因此，如果

$$f(z)=a_0z^m+a_1z^{m-1}+\cdots+a_m$$

是变量 $z$ 的实系数或复系数的多項式，在这个多項式中把 $z$ 換为矩陣 $A$，我們就得到矩陣 $A$ 的多項式

$$f(A)=a_0A^m+a_1A^{m-1}+\cdots+a_mE,$$

可以类似地定义变换 $A$ 的多項式 $f(A)$. (如果 $f(z)\neq 0$, 而矩陣 $f(A)$ 是零(在这情形下,变换 $f(A)$ 显然也是零变换),則称多項式 $f(z)$ 为矩陣 $A$ 和变换 $A$ 的**化零多項式**。)可以証明,矩陣 $A$ 的特征多項式 $D(z)$ 是矩陣 $A$ 的化零多項式:

$$D(A)=0.$$

为了証明,我們考虑以

$$e_1, \cdots, e_n$$

为基的 $n$ 維向量空間 $R$, 以及对应于这个基的坐标系,所以

$$e_j=(0, \cdots, 1, \cdots, 0),$$

其中坐标 1 位在第 $j$ 个位置。以 $A$ 記变换,它在所考虑的基之下对应的矩陣是 $A$。这时,

$$Ae_j=\sum_s a_j^s e_s,$$

或者

$$\sum_s (a_j^s E-\delta_j^s A)e_s=0. \tag{3}$$

置

$$L_j^s(z)=a_j^s-\delta_j^s z,$$

这里 $L_j^s(z)$ 是 $z$ 的零次或一次的多項式,而

$$(L_j^s(z))$$

是由多項式組成的矩陣。这个矩陣的元素 $L_j^s(z)$ 对应的代数余子式記为 $M_s^i(z)$, 那末有关系式

$$\sum M_i^j(z)L_j^s(z)=\delta_i^s D(z), \tag{4}$$

以多項式 $M_i^j(A)$ 左乘关系式(3), 然后按 $j$ 相加所得到的关系式,根据(4)得到

$$\sum_{s,j} M_i^j(A)(a_j^s E-\delta_j^s A)e_s$$
$$=\sum_{s,j} M_i^j(A)L_j^s(A)e_s=\sum_s \delta_i^s D(A)e_s=D(A)e_i=0.$$

这样,变换 $D(A)$ 把空間 $R$ 的所有基向量变为零,所以是零变换,它所对应的矩陣 $D(A)$ 也是零矩陣:

$$D(A)=0.$$

5) 在矩陣 $A$ (或变換 $A$) 的所有化零多項式的集合中，有一个次数最低的多項式 $\Delta(z)$，如果不計数值因子，就仅有一个；这个多項式 $\Delta(z)$ 是矩陣 $A$ 的所有其余的化零多項式的因子，称为矩陣 $A$ 的**最小化零多項式**。今后假設 $\Delta(z)$ 的最高次項的系数等于一。当矩陣 $A$ 是实的情形，多項式 $\Delta(z)$ 是实的。

为了証明命題 5)，注意到，如果 $f(z)$ 和 $g(z)$ 是两个任意的多項式，$d(z)$ 是它們的最大公因子，那末有恒等式

$$d(z)=p(z)f(z)+q(z)g(z), \tag{5}$$

其中 $p(z)$ 和 $q(z)$ 是用适当方法选取的多項式。恒等式(5)的証明是利用多項式的剩余除法。由关系(5)推出，如果 $f(z)$ 和 $g(z)$ 是 $A$ 的化零多項式，那末它們的最大公因子 $d(z)$ 也是矩陣 $A$ 的化零多項式。根据 4)，矩陣 $A$ 的化零多項式是存在的。現設 $\Delta(z)$ 是矩陣 $A$ 的次数是低的化零多項式，$f(z)$ 是 $A$ 的任一化零多項式。如果多項式 $\Delta(z)$ 不整除多項式 $f(z)$，那末 $f(z)$ 和 $\Delta(z)$ 的最大公因子的次数比多項式 $\Delta(z)$ 的次数低，并且是 $A$ 的化零多項式，由假設这是不可能的。現在假設矩陣 $A$ 是实的，这时

$$0=\overline{\Delta(\overline{A})}=\bar{\Delta}(\overline{A})=\bar{\Delta}(A),$$

所以多項式 $\bar{\Delta}(z)$ 也是矩陣 $A$ 的化零多項式，从而 $\Delta(z)$ 整除 $\bar{\Delta}(z)$，而这仅当 $\Delta(z)=\bar{\Delta}(z)$ 时才可能。因而証明了命題 5)。

6) 設 $\Delta(z)$ 是矩陣 $A$ 的最小化零多項式，那末数 $\lambda$ 当且仅当它是多項式 $\Delta(z)$ 的根时，才是矩陣 $A$ 的特征值。

以 $\boldsymbol{A}$ 表示矩陣 $A$ 所对应的 $n$ 維向量坐标空間的变換。注意到，如果 $f(z)$ 是任意的多項式，那末从

$$\boldsymbol{Ah}=\lambda\boldsymbol{h}$$

推得

$$f(\boldsymbol{A})\boldsymbol{h}=f(\lambda)\boldsymbol{h}. \tag{6}$$

事实上，我們有

$$\boldsymbol{E}\boldsymbol{h}=\boldsymbol{h},\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{h}=\lambda\boldsymbol{h},\ \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{h}=\boldsymbol{A}\lambda\boldsymbol{h}=\lambda^2\boldsymbol{h},\ \cdots,\ \boldsymbol{A}^m\boldsymbol{h}=\lambda^m\boldsymbol{h},$$

以 $f(z)$ 的系数乘这些关系式，再相加就得到关系式(6)。

設 $\lambda$ 是矩陣 $A$ 的特征值，那末存在向量 $\boldsymbol{h}\neq 0$，使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}=\lambda\boldsymbol{h}$，而由 (6) 得到 $\Delta(\boldsymbol{A})\boldsymbol{h}=\Delta(\lambda)\boldsymbol{h}$。因为 $\Delta(\boldsymbol{A})=0$，所以 $\Delta(\lambda)=0$。反之，如果 $\lambda$ 是多項式 $\Delta(z)$ 的根，那末 $\Delta(z)=(z-\lambda)\Gamma(z)$。因为 $\Delta(z)$ 是矩陣 $A$ 的最小化零多項式，所以 $\Gamma(z)$ 不是它的化零多項式，$\Gamma(A)$ 及变換 $\Gamma(\boldsymbol{A})$ 异于零。于是，存在向量 $\boldsymbol{x}$，使得 $\Gamma(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{h}'\neq 0$，我們有 $0=\Delta(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\Gamma(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{h}'$，因而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}'=\lambda\boldsymbol{h}'$，$\lambda$ 是矩陣 $A$ 的特征值。

于是命題 6) 得証。

按照需要，当向量仅取实的坐标时，可以把坐标向量空間 $R$ 看为实的；当向量取复的坐标时，把 $R$ 看为复空間。如果 $\boldsymbol{x}=(x^1,\cdots,x^n)$ 是复空間 $R$ 的向量，那末 $\bar{\boldsymbol{x}}=(\bar{x}^1,\cdots,\bar{x}^n)$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的复共軛向量；如果 $S$ 是复空間 $R$ 的子空間，那末由子空間 $S$ 的向量的共軛向量組成的子空間 $\bar{S}$ 是子空間 $S$ 的复共軛空間。

如果 $S_1$ 和 $S_2$ 是复(或者实)空間 $R$ 的子空間，$R$ 的每一向量 $\boldsymbol{x}$ 可以用唯一的方法写成和的形式：

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2,$$

其中向量 $\boldsymbol{x}_i$ 属于子空間 $S_i$，$i=1,2$，那末就称空間 $R$ 分解为子空間 $S_1$ 与 $S_2$ 的直接和。

**7)** 設矩陣 $A$ 的最小化零多項式分解为两个互质的多項式，$\Delta(z)=\Delta_1(z)\Delta_2(z)$，以 $S_i$，$i=1,2$ 記由 $R$ 中所有满足条件 $\Delta_i(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$ 的向量 $\boldsymbol{x}$ 組成的綫性子空間，这里 $\boldsymbol{A}$ 是具有矩陣 $A$ 的变換。可以証明，空間 $R$ 能被分解为子空間 $S_1$ 和 $S_2$ 的直接和。(如果矩陣 $A$ 是复的，那末这結論中的空間 $R$ 应认为是复的。) 現在假設矩陣 $A$ 是实的，这时应注意两种重要情形。1) 因子 $\Delta_1(z)$ 和 $\Delta_2(z)$ 是实的，这时空間 $R$ 以及它的子空間 $S_1$ 和 $S_2$ 可以认为

是实的。2) 因子 $\Delta_1(z)$ 和 $\Delta_2(z)$ 是相互复共軛的，这时应假定空間 $R$ 是复的，而它的子空間 $S_1$ 和 $S_2$ 是复共軛的。

我們来証明命題 7)。由于因子 $\Delta_1(z)$ 和 $\Delta_2(z)$ 是互质的，所以可适当选取多項式 $p_1(z)$ 和 $p_2(z)$，使得成立恒等式(参看(5))：

$$1=p_1(z)\Delta_1(z)+p_2(z)\Delta_2(z). \qquad (7)$$

注意到，如果 $\Delta_1(z)$ 和 $\Delta_2(z)$ 是实的，那末多項式 $p_1(z)$ 和 $p_2(z)$ 可取为实的，这是因为它們是由多項式 $\Delta_1(z)$ 和 $\Delta_2(z)$ 用剩余除法得到的。現設 $x$ 是空間 $R$ 的任意向量，根据(7)有

$$x=p_1(A)\Delta_1(A)x+p_2(A)\Delta_2(A)x.$$

設 $$x_1=p_2(A)\Delta_2(A)x, \quad x_2=p_1(A)\Delta_1(A)x,$$

我們得到分解式 $x=x_1+x_2$，并且

$$\Delta_1(A)x_1=\Delta_1(A)p_2(A)\Delta_2(A)x=p_2(A)\Delta(A)x=0,$$

$$\Delta_2(A)x_2=\Delta_2(A)p_1(A)\Delta_1(A)x=p_1(A)\Delta(A)x=0,$$

于是向量 $x_i$ 属于子空間 $S_i$。如果 $x=x_1'+x_2'$ 是向量任意的和式分解，其中 $x_i'$ 属于 $S_i$，$i=1, 2$，那末根据(7)有

$$x_1'=p_1(A)\Delta_1(A)x_1'+p_2(A)\Delta_2(A)x_1'$$

$$=p_2(A)\Delta_2(A)(x_1'+x_2')=x_1;$$

同样有 $x_2'=x_2$，这就証明了分解的唯一性。

如果矩陣 $A$ 是实的，因子 $\Delta_1(z)$ 和 $\Delta_2(z)$ 也是实的，那末从实向量 $x$ 出发，我們得到实向量 $x_1$ 和 $x_2$。如果矩陣 $A$ 是实的，而因子 $\Delta_1(z)$ 和 $\Delta_2(z)$ 是复共軛的，那末根据向量子空間 $S_1$ 和 $S_2$ 的定义，它們是复共軛的。

于是命題 7)得証。

8) 設 $A$ 是 $n$ 維空間 $R$ 的綫性变換，

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$$

是这个变換所有特征值的集合，

$$\Delta(z)=(z-\lambda_1)^{k_1}(z-\lambda_2)^{k_2}\cdots(z-\lambda_r)^{k_r}$$

是变换 $A$ 的最小化零多項式，

$$D(z)=(-1)^n(z-\lambda_1)^{q_1}(z-\lambda_2)^{q_2}\cdots(z-\lambda_r)^{q_r} \tag{8}$$

是变换 $A$ 的特征多項式。因为多項式 $\Delta(z)$ 整除多項式 $D(z)$，所以

$$q_i\geqslant k_i,\quad i=1,\cdots,r.$$

根据命題 7)，空間 $R$ 分解为子空間 $S_1$, $S_2$, …, $S_r$ 的直接和，这里 $S_i$ 是由滿足条件

$$(A-\lambda_iE)^{k_i}x=0$$

的所有向量 $x$ 組成的。可以証明，空間 $S_i$ 的維数等于 $q_i$. 数 $q_i$ 称为特征值 $\lambda_i$ 的**重数**。

我們来証明空間 $S_i$ 的維数等于 $q_i$。空間 $S_i$ 关于变换 $A$ 是**不变的**，即 $AS_i$ 含在 $S_i$ 中。这样，如果在空間 $S_i$ 中选取某一基，那末当把变换 $A$ 考虑为 $S_i$ 上的变换时，它所对应的矩陣 $A_i$ 是 $p_i$ 阶的，其中 $p_i$ 是子空間 $S_i$ 的維数。如果空間 $R$ 的基是由所有子空間 $S_i$ 的基組成的，那末在所得到的基之下，变换 $A$ 对应的矩陣 $A$ 是由矩陣 $A_1$, …, $A_r$ 組成的，$A_i$ 位在 $A$ 的对角綫上。由此看到，空間 $R$ 的变换 $A$ 的特征多項式等于乘积

$$D_1(z)\cdot D_2(z)\cdots D_r(z),$$

其中 $D_i(z)$ 是把变换 $A$ 看为子空間 $S_i$ 上的变换时的特征多項式。因为 $\Delta_i(z)=(z-\lambda_i)^{k_i}$ 是子空間 $S_i$ 上的变换 $A$ 的化零多項式，所以 $S_i$ 上的变换 $A$ 仅有一个特征值，又因为特征多項式 $D_i(z)$ 的次数等于矩陣 $A_i$ 的阶数——子空間 $S_i$ 的維数 $p_i$，所以 $D_i(z)$ 具有形式 $(-1)^{p_i}(z-\lambda_i)^{p_i}$。因此 $D(z)=(-1)^n(z-\lambda_1)^{p_1}\cdots(z-\lambda_r)^{p_r}$，从而 $p_i=q_i$（参看(8)）.

这样就証明了命題 8).

## § 33. 矩 陣 函 数

在这一节中我們对变换 $A$ 及其所对应的矩陣 $A$ 不加区别，这是因为坐标系并不改变。同时，在这一节中将用到复变函数論的

某些知識(例如可参考，И. И. 普里瓦洛夫著，复变函数引論，高等教育出版社)。

## 矩陣的冪級数

**1) 設**

$$\Delta(z)=(z-\lambda_1)^{k_1}(z-\lambda_2)^{k_2}\cdots(z-\lambda_r)^{k_r},$$
$$k_i>0,\ i=1,\ \cdots,\ r,\quad k_1+k_2+\cdots+k_r=k \tag{1}$$

是矩陣 $A$ 的最小化零多項式，数

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_r \tag{2}$$

是它的两两不同的根。根据 § 32 的命題 6)，(2) 是矩陣 $A$ 的所有特征值的集合。如果相应于矩陣 $A$ 的每一特征值 $\lambda_i$，給出了数列

$$W^{(0)}(\lambda_i),\ W^{(1)}(\lambda_i),\ \cdots,\ W^{(k_i-1)}(\lambda_i),\quad i=1,\ \cdots,\ r, \tag{3}$$

那末就說 **在矩陣 $A$ 的譜上給定了函数 $W$**. 如果 $W(z)$ 是复变量 $z$ 的某一函数，它在点 $\lambda_i$ 处是正則的，以数(3)作为它在点 $\lambda_i$ 处的函数值以及到 $k_i-1$ 阶的导数值，那末我們得到一个在矩陣 $A$ 的譜上給定的函数。如果对于复变量 $z$ 的两个函数，数值(3)相应地重合，那末說这两个函数在矩陣 $A$ 的譜上是一致的。可以証明，两个多項式 $f(z)$ 和 $g(z)$，当且仅当 $f(A)=g(A)$ 时，在矩陣 $A$ 的譜上是一致的。还可以証明，对于任意給定的数(3)，常存在唯一的次数 $\leqslant k-1$ 的多項式 $\varphi(z)$，使得它在矩陣 $A$ 的譜上与数(3)是一致的，即

$$\varphi^{(j)}(\lambda_i)=W^{(j)}(\lambda_i),\quad j=0,\ 1,\ \cdots,\ k_i-1;\ i=1,\ \cdots,\ r. \tag{4}$$

这时，多項式 $\varphi(z)$ 的系数是量(3)的綫性函数，因此連續地依賴于(3)。

我們来証明这个命題。置 $h(z)=f(z)-g(z)$. 如果 $f(A)=g(A)$，那末 $h(A)=0$. 其次，如果多項式 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在矩陣 $A$ 的譜上是一致的，那末函数 $h(z)$ 在矩陣 $A$ 的譜上变为零。这样，为了証明命題 1) 中关于多項式 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的部分，只要証明，当且

仅当 $h(z)$ 在矩陣 $A$ 的譜上是零时，多項式 $h(z)$ 是矩陣 $A$ 的化零多項式就够了。現在来証明它。設多項式 $h(z)$ 是 $A$ 的化零多項式，根据 § 32 的命題 5)，多項式 $\Delta(z)$ 整除 $h(z)$，所以 $h(z)$ 以数 $\lambda_i$ 为根，且其重数不小于 $k_i$（参看(1)），从此推知它在矩陣 $A$ 的譜上是零。如果多項式 $h(z)$ 在矩陣 $A$ 的譜上是零，那末它以数 $\lambda_i$ 为根，且其重数不小于 $k_i$，因而多項式 $\Delta(z)$ 整除 $h(z)$（参看 (1)），从此推知 $h(A)=0$。

現在証明命題 1) 中关于多項式 $\varphi(z)$ 的部分。关系式(4)的集合可以看作多項式 $\varphi(z)$ 的系数的綫性方程組，这个方程組有 $k$ 个方程和 $k$ 个未知数。为了証明命題 1)，只要确定这个方程組的行列式不为零，为此只要証明，当这个方程組的右端变为零时，只有零多項式 $\varphi(z)$ 滿足条件(4)就行了。当方程(4)的右端变为零时，多項式 $\varphi(z)$ 在矩陣 $A$ 的譜上变为零，而根据前面的証明，多項式 $\Delta(z)$ 整除它，但它的次数不高于 $k-1$，所以它恒等于零。

于是命題 1) 得証。

**2)** 設 $A$ 是实矩陣，这时它的最小化零多項式 $\Delta(z)$ 是实的（参看 § 32 的命題 5)），所以如果 $\lambda_i$ 是它的根，那末它有同样重数的复共軛根 $\bar{\lambda}_i$。可以証明，如果数組(3)滿足条件：

$$W^{(j)}(\bar{\lambda}_i)=\bar{W}^{(j)}(\lambda_i),\quad j=0,\cdots,k_i-1;\ i=1,\cdots,r, \tag{5}$$

那末由关系式(4)确定的多項式 $\varphi(z)$ 是实的，于是矩陣 $\varphi(A)$ 也是实的。

为了証明命題 2)，以 $\varphi^1,\cdots,\varphi^k$ 記多項式 $\varphi(z)$ 的系数。对于未知数 $\varphi^1,\cdots,\varphi^k$ 的方程組(4)，如果不去考察它的細节，总可以写成形式：

$$\sum_{\beta=1}^{k}c_\beta^\alpha\varphi^\beta=d^\alpha,\quad \alpha=1,\cdots,k. \tag{6}$$

根据条件(5)，这个方程組具有下面的性质：組中在有每一个方程的同时还有它的复共軛方程，就是方程

$$\sum_{\beta=1}^{k} \bar{c}_{\beta}^{\alpha}\varphi^{\beta}=\bar{d}^{\alpha}.$$

把等式(6)取共軛得到等式

$$\sum_{\beta=1}^{k} \bar{c}_{\beta}^{\alpha}\bar{\varphi}^{\beta}=\bar{d}^{\alpha}. \tag{7}$$

关系式 (7) 的集合是关于未知数 $\bar{\varphi}^1, \cdots, \bar{\varphi}^k$ 的方程。可是由于所叙述的性质，方程組(6)和(7)是一致的，如有不同，只能在方程排列的順序上。因为方程組(6)的行列式不等于零，所以它的两个解 $\varphi^1, \cdots, \varphi^k$ 和 $\bar{\varphi}^1, \cdots, \bar{\varphi}^k$ 是一致的：$\varphi^{\alpha}=\bar{\varphi}^{\alpha}$, $\alpha=1, \cdots, k$，这就表示数 $\varphi^1, \cdots, \varphi^k$ 是实数。于是証明了命題 2)。

設复变量 $z$ 的解析函数是由收敛半徑为 $\rho$ 的級数

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_mz^m+\cdots \tag{8}$$

定义的，于是，級数(8)当 $|z|<\rho$ 时是收敛的，当 $|z|>\rho$ 时是发散的。

要記住，由(8)逐項导微得到的級数

$$f'(z)=a_1+2a_2z+\cdots+ma_mz^{m-1}+\cdots$$

与級数(8)有同样的收敛半徑，并且在收敛圓的內部是收敛于函数 $f(z)$ 的导数 $f'(z)$ 的。

以矩陣 $A$ 代替級数 (8) 中的 $z$ 时，我們可能得到收敛的矩陣級数

$$f(A)=a_0E+a_1A+\cdots+a_mA^m+\cdots, \tag{9}$$

(如果位在第 $i$ 行第 $j$ 列的元素級成的数項級数对任意 $i, j=1, \cdots, n$ 是收敛的，那末称矩陣級数是收敛的。)这时我們說函数 $f(z)$ 在矩陣 $A$ 上有定义。

**定理 27**. 仍用命題 1) 的記号。如果矩陣 $A$ 的所有特征值位在級数(8)的收敛圓中，即

$$|\lambda_i|<\rho, \quad i=1, \cdots, r,$$

那末矩陣級数(9)是收敛的，于是矩陣 $f(A)$ 有定义。数

$$f(\lambda_i), \quad i=1, \cdots, r, \tag{10}$$

(其中可能有几个是一样的)組成矩陣 $f(A)$ 的所有特征值的集合。并且,如果矩陣 $A$ 的特征值 $\lambda_i$ 也位在定义某个函数 $g(z)$ 的級数的收敛圓內部,于是 $g(A)$ 有定义,那末矩陣 $f(A)$ 和 $g(A)$ 一致的必要和充分条件是:函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在矩陣 $A$ 的譜上是一致的。

**証明** 作級数(8)的部分和

$$f_m(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_mz^m,$$

当 $|z|<\rho$ 时,有

$$f^{(j)}(z)=\lim_{m\to\infty}f_m^{(j)}(z).$$

其次,設 $\varphi_m(z)$ 是次数 $\leqslant k-1$ 的多項式,它在 $A$ 的譜上与多項式 $f_m(z)$ 是一致的(参看1))。因为矩陣 $A$ 的特征值(2)滿足条件 $|\lambda_i|<\rho$, $i=1,\cdots,r$,所以我們有

$$\lim_{m\to\infty}\varphi_m^{(j)}(\lambda_i)=f^{(j)}(\lambda_i),\quad j=0,\cdots,k_i-1;\ i=1,\cdots,r.$$

从此由命題1)推知,多項式序列 $\varphi_m(z)$ 按系数收敛于某一次数 $\leqslant k-1$ 的多項式 $\varphi(z)$,并且多項式 $\varphi(z)$ 和函数 $f(z)$ 在矩陣 $A$ 的譜上是一致的。因为多項式 $\varphi_m(z)$ 和 $f_m(z)$ 在矩陣 $A$ 的譜上是一致的,所以

$$f_m(A)=\varphi_m(A);$$

当 $m\to\infty$ 时,右端趋于 $\varphi(A)$,这就表明左端当 $m\to\infty$ 时是收敛的。于是級数(9)收敛于矩陣 $f(A)=\varphi(A)$。

現在証明多項式

$$\Gamma(z)=[z-f(\lambda_1)]^{k_1}[z-f(\lambda_2)]^{k_2}\cdots[z-f(\lambda_r)]^{k_r}$$

是矩陣 $f(A)$ 的化零多項式。为此,考虑多項式

$$\Phi_m(z)=[\varphi_m(z)-\varphi_m(\lambda_1)]^{k_1}[\varphi_m(z)-\varphi_m(\lambda_2)]^{k_2}\cdots[\varphi_m(z)-\varphi_m(\lambda_r)]^{k_r},\qquad(11)$$

我們来証明它是矩陣 $A$ 的化零多項式。多項式 $\varphi_m(z)-\varphi_m(\lambda_i)$ 在 $z=\lambda_i$ 处变为零,所以它可以用二項式 $z-\lambda_i$ 整除,于是多項式(11)可以写成形式:

$$\Phi_m(z)=\Psi_m(z)\Delta(z),$$

所以多項式 $\Phi_m(z)$ 是 $A$ 的化零多項式，即

$$[\varphi_m(A)-\varphi_m(\lambda_1)E]^{k_1}[\varphi_m(A)-\varphi_m(\lambda_2)E]^{k_2}\cdots[\varphi_m(A)-\varphi_m(\lambda_r)E]^{k_r}=0.$$

在这关系式中令 $m\to\infty$，得到

$$[f(A)-f(\lambda_1)E]^{k_1}[f(A)-f(\lambda_2)E]^{k_2}\cdots[f(A)-f(\lambda_r)E]^{k_r}=0,$$

这就是說多項式 $\Gamma(z)$ 是矩陣 $f(A)$ 的化零多項式。

由所証，特別可以推知，矩陣 $f(A)$ 的所有特征值包含在数(10)中(參看 § 32, 6))。現在証明 (10) 中的每一数是矩陣 $f(A)$ 的特征值。設 $\boldsymbol{h}_i$ 是矩陣 $A$ 对应于特征值 $\lambda_i$ 的特征向量，于是

$$A\boldsymbol{h}_i=\lambda_i\boldsymbol{h}_i,$$

根据 § 32 的公式(6)得到

$$f_m(A)\boldsymbol{h}_i=f_m(\lambda_i)\boldsymbol{h}_i.$$

当 $m\to\infty$ 时，在这关系中取极限，得到

$$f(A)\boldsymbol{h}_i=f(\lambda_i)\boldsymbol{h}_i.$$

于是，数 $f(\lambda_i)$ 是矩陣 $f(A)$ 的特征值。

現在假設函数 $g(z)$ 的收斂圓也含有矩陣 $A$ 的所有特征值。根据已經証明的，矩陣 $g(A)$ 有定义，并且存在次数 $\leqslant k-1$ 的多項式 $\psi(z)$，它在矩陣 $A$ 的譜上与函数 $g(z)$ 是一致的，同时 $\psi(A)=g(A)$。現在如果 $f(A)=g(A)$，那末 $\varphi(A)=\psi(A)$，根据命題 1)，多項式 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 在矩陣 $A$ 的譜上是一致的。反之，如果函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在矩陣 $A$ 的譜上是一致的，那末多項式 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 在矩陣 $A$ 的譜上是一致的，于是根据命題 1)，$\varphi(A)=\psi(A)$，由此 $f(A)=g(A)$。这样就証明了定理 27。

## 矩陣的隱函数

設 $F(z, w)$ 是两个复变量的函数，它是由級数

$$F(z, w)=a+bz+cw+dz^2+ezw+fw^2+\cdots \tag{12}$$

給定的。在改变这級数各項因子的順序时（例如把乘积 $z^\alpha w^\beta$ 变为 $w^\beta z^\alpha$），函数 $F(z, w)$ 是不变的。所以，在級数(12)中以矩陣 $A$ 和 $B$ 代替它的变量 $z$ 和 $w$ 时，自然应限于矩陣 $A$ 和 $B$ 是可交換的情形。如果級数(12)对于变量 $z$ 和 $w$ 的任何値是收斂的，那末可以証明，在这級数用任何可交換的矩陣 $A$ 和 $B$ 代替 $z$ 和 $w$ 时，我們得到收斂的矩陣級数，它定义了某一矩陣，記之为 $F(A, B)$。可是，因为下面仅討論依賴于 $z$ 的項数是有限的那种特殊情形；因此实际上是討論一个复变量 $w$ 的收斂級数，所以我們不証明这个級数在一般情形下的收斂性。

**3**) 設函数 $F(z, w)$ 是由級数(12)确定的两个变量的解析函数，級数(12)对 $z$, $w$ 的所有値是收斂的，又 $A$ 是給定的矩陣。其次假設，对应于矩陣 $A$ 的每一特征値 $\lambda_i$，有数 $\mu_i$ 满足条件

$$F(\lambda_i, \mu_i)=0, \quad \frac{\partial}{\partial w}F(\lambda_i, \mu_i)\neq 0, \quad i=1, \cdots, r. \tag{13}$$

这时，存在与 $A$ 可交換的矩陣 $B$ 满足条件

$$F(A, B)=0. \tag{14}$$

同时，如果級数(12)的系数以及矩陣 $A$ 是实的，又对于矩陣 $A$ 的每一对复共軛的特征値 $\lambda_i$ 和 $\lambda_j=\bar{\lambda}_i$，相应的数 $\mu_i$ 和 $\mu_j$ 也是复共軛的：$\mu_i=\bar{\mu}_j$，那末存在与 $A$ 可交換的实矩陣 $B$ 满足条件(14)。

我們来証明命題 3)。根据复变量的隐函数定理，由关系(13)推知，对于任何 $i=1, \cdots, r$，存在对 $\lambda_i$ 附近的 $z$ 有定义的函数 $W(z)=W_i(z)$，满足条件

$$F(z, W(z))=0, \tag{15}$$

$$W(\lambda_i)=\mu_i, \quad i=1, \cdots, r. \tag{16}$$

为了求函数 $W(z)$ 在点 $z=\lambda_i$ 处的导数 $W^{(j)}(\lambda_i)$，应該关于 $z$ 依次导微关系式(15)，并且在其中代以 $z=\lambda_i$：

$$\frac{d^j}{dz^j}F(z, W(z))\Big|_{z=\lambda_i}=0 \tag{17}$$

由这些关系，順次确定出数

$$W^{(j)}(\lambda_i), \quad j=1, \cdots, k_i-1; \ i=1, \cdots, r. \tag{18}$$

从数(16)，(18)出发，确定满足条件(4)的多項式 $\varphi(z)$。我們来証明，矩陣 $B=\varphi(A)$（显然与 $A$ 可交換）满足条件(14)。

为此，在級数(12)中以 $w=\varphi(z)$ 代入。这时，我們得到变量 $z$ 的函数 $\Phi(z)=F(z, \varphi(z))$。为了証明等式(14)，只要証明函数 $\Phi(z)$ 在矩陣 $A$ 的譜上是零就可以了（参看定理 27）。因为多項式 $\varphi(z)$ 和函数 $W(z)$ 在点 $\lambda_i$ 处的 0 阶，1 阶，…，$k_i-1$ 阶导数是分别相等的，所以在計算函数 $\Phi(z)$ 的导数 $\Phi^{(j)}(\lambda_i)$，$j=0, \cdots, k_i-1$ 时，可以用函数 $W(z)$ 代替多項式 $\varphi(z)$。但在 $F(z, \varphi(z))$ 中用定义在 $\lambda_i$ 附近的函数 $W(z)$ 代替多項式 $\varphi(z)$ 时，我們得到它恒等于零（参看(15)）。因此，函数 $\Phi(z)$ 在矩陣 $A$ 的譜上等于零。

現在証明，如果級数(12)的系数以及矩陣 $A$ 是实的，又数 $\mu_i$ 满足共軛性条件，即

$$W(\bar{\lambda}_i)=\overline{W(\lambda_i)}, \quad i=1, \cdots, r;$$

那末多項式 $\varphi(z)$，因而矩陣 $B=\varphi(A)$ 是实的。事实上，在这些假設下，从条件(17)計算出的数 $W^{(j)}(\lambda_i)$ 满足条件(5)，于是多項式 $\varphi(z)$ 是实的（参看 2）。

这样証明了命題 3)。

**4)** 复变量 $z$ 的解析函数 $e^z$ 是用級数

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots \tag{19}$$

定义的，这个級数对变量 $z$ 的所有值是收斂的。如所知，由級数(19)的性质可导出，对于任何两个复数 $z$ 和 $w$，成立恒等式 $e^{z+w}=e^z \cdot e^w$。由此推出，对于任何两个可交換方陣 $A$ 和 $B$，成立着恒等式

$$e^{A+B}=e^A \cdot e^B. \tag{20}$$

可以証明，对于任何不退化矩陣 $A$，存在一个与 $A$ 可交換的矩陣 $B$，滿足条件

$$e^B = A. \tag{21}$$

同时可以証明，对于任何实的不退化矩陣 $A$，存在与 $A$ 可交換的实矩陣 $B_1$，滿足条件

$$e^{B_1} = A^2. \tag{22}$$

为了証明方程(21)关于 $B$ 的可解性，只要把命題 3) 应用到函数 $F(z, w) = e^w - z$ 即可。事实上，因为矩陣 $A$ 是不退化的，所以它的所有特征值 $\lambda_i$ 异于零，于是存在数 $\mu_i$ 滿足条件 $e^{\mu_i} - \lambda_i = 0$（参看关系式(13)的第一个），并且(13)的第二式明显地成立。

为了証明存在实的矩陣 $B_1$ 滿足条件(22)，只要对函数 $F(z, w) = e^w - z^2$ 应用命題 3)的第二部分。事实上，如果 $\lambda_i$ 是正的或負的实数，那末取对数的实分支，置 $\mu_i = \ln \lambda_i^2$；如果 $\lambda_i$ 是复数，那末取 $W(\lambda_i)$ 和 $W(\bar{\lambda}_i)$ 是互相共軛的复数。

因此，命題 4) 得証。

## § 34. 矩陣的若当型

**1)** 如果空間 $R$ 的向量序列

$$h_1, h_2, \cdots, h_m \tag{1}$$

滿足关系式

$$h_1 \neq 0,\ Ah_1 = \lambda h_1,\ Ah_2 = \lambda h_2 + h_1,\ \cdots,\ Ah_m = \lambda h_m + h_{m-1},$$

那末称 (1) 为关于变換 $A$ 的特征值 $\lambda$ 的**列**[①]。如果变換 $A$ 是实的，那末序列

$$\bar{h}_1, \cdots, \bar{h}_m \tag{2}$$

显然构成关于特征值 $\bar{\lambda}$ 的列。称列(1)和(2)是复共軛的。如果数 $\lambda$ 和向量(1)是实的，那末认为列是实的。

① 原文是 серия，兹譯为"列"。——譯者注

**定理 28.** 空間 $R$ 中存在由关于变换 $A$ 的一个或者几个列的所有向量組成的基。如果矩陣 $A$ 是实的，那末可以如此选取构成基的列，使得对应于实特征值的列是实的，而对应于复特征值的列是成对共軛的。

**証明** 設

$$\Delta(z)=(z-\lambda_1)^{k_1}\cdots(z-\lambda_r)^{k_r} \tag{3}$$

是矩陣 $A$ 的最小化零多項式，其中

$$\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_r$$

是矩陣 $A$ 的两两互异的特征根。根据 § 32 的命題 7)，空間 $R$ 可以分解为它的相应于因子(3)的子空間 $S_1,\ \cdots,\ S_r$ 的直接和，于是空間 $S_i$ 是由所有滿足条件 $(A-\lambda_iE)^{k_i}x=0$ 的向量 $x$ 組成的。这表明，把 $A$ 看为 $S_i$ 上的变換时，多項式 $(z-\lambda_i)^{k_i}$ 就是 $A$ 的化零多項式。容易知道，这个多項式是最小化零多項式。

設矩陣 $A$ 是实的。首先将(3)的所有具实数 $\lambda_i$ 的因子放在因子 $\Delta_1(z)$ 里，而其余的放在因子 $\Delta_2(z)$ 里。这时 $\Delta(z)=\Delta_1(z)\Delta_2(z)$ 分解为两个实的互质因子，而空間 $R$ 分解为 $R_1$ 和 $R_2$ 的直接和的相应分解可以假定是实的。現在将空間 $R_1$ 分解为对应于实特征值 $\lambda_i$ 的实子空間的直接和，我們今后在这些直接和的实的項中作出由实的列組成的基。将空間 $R_2$ 分解为对应于复共軛特征值的成对复共軛的子空間的直接和，我們今后在这些复共軛空間中作出由复共軛列組成的基；这时只要对其中一个复空間作出由列构成的基，而在另一个取复共軛的基就可以了。

因此，我們只要証明以下事实就行了。如果作用在向量空間 $S$ 上的綫性变換 $A$ 的最小化零多項式是 $(z-\lambda)^k$，那末在这空間中可以选取基，使得它是由变換 $A$ 的列組成的，并且，如果空間 $S$、矩陣 $A$ 以及数 $\lambda$ 是实的，那末基可以从实的列中选取。

我們来証明这个結論。为簡单計，置 $C=A-\lambda E$，以 $T_i$ 記 $S$ 中滿足条件

$$C^i x=0$$

的向量 $x$ 的集合。这时有

$$S=T_k\supset T_{k-1}\supset\cdots\supset T_1\supset T_0=0.$$

設 $$h_i^1,\ \cdots,\ h_i^r,\quad i=1,\ \cdots,\ k$$

是 $T_i$ 中的向量，关于空間 $T_{i-1}$ 是綫性无关的，就是說，向量

$$a_1h_i^1+\cdots+a_rh_i^r$$

仅当 $$a_1=\cdots=a_r=0$$

时才属于空間 $T_{i-1}$。現在証明，当 $i$ 和 $j$ 固定时，向量

$$h_{i-j}^\alpha=C^jh_i^\alpha,\quad j<i \tag{4}$$

属于空間 $T_{i-j}$，并且关于空間 $T_{i-j-1}$ 是綫性无关的。事实上，

$$C^{i-j}h_{i-j}^\alpha=C^ih_i^\alpha=0,\quad \alpha=1,\ \cdots,\ r,$$

因而向量(4)属于空間 $T_{i-j}$。現在假設向量

$$a_1h_{i-j}^1+\cdots+a_rh_{i-j}^r=x$$

属于空間 $T_{i-j-1}$，这时有

$$0=C^{i-j-1}x=C^{i-1}(a_1h_i^1+\cdots+a_rh_i^r),$$

可見向量 $a_1h_i^1+\cdots+a_rh_i^r$ 属于空間 $T_{i-1}$，因此 $a_1,\ \cdots,\ a_r$ 等于零。

現在在空間 $T_k$ 中选取关于空間 $T_{k-1}$ 綫性无关的最大的向量組

$$h_k^1,\ \cdots,\ h_k^{r_k}, \tag{5}$$

根据已經証明的事实，向量

$$h_{k-1}^\alpha=Ch_k^\alpha,\quad \alpha=1,\ \cdots,\ r_k \tag{6}$$

属于空間 $T_{k-1}$，并且关于空間 $T_{k-2}$ 是綫性无关的；这样，可以补充組(6)为

$$h_{k-1}^1,\ \cdots,\ h_{k-1}^{r_{k-1}},\quad r_{k-1}\geqslant r_k, \tag{7}$$

使它成为空間 $T_{k-1}$ 中关于空間 $T_{k-2}$ 綫性无关的最大向量組。重复这一过程，我們在空間 $T_i$，$i>0$ 中找到了最大的向量組

$$h_i^1,\ \cdots,\ h_i^{r_i}, \tag{8}$$

它关于空間 $T_{i-1}$ 是綫性无关的，并且滿足关系

$$\boldsymbol{h}_i^\alpha=\boldsymbol{C}\boldsymbol{h}_{i+1}^\alpha,\quad \alpha=1,\cdots,r_{i+1};\ r_i\geqslant r_{i+1}.$$

现在証明，組(8) 中 $i=j,\ j-1,\ \cdots,\ 1$ 的所有向量組成的集合 $\Sigma_j$ 构成空間 $T_j$ 的基。为此，对 $j$ 运用归納法。对于 $j=1$，組 $\Sigma_1$ 与組(8)当 $i=1$ 时重合，于是它是空間 $T_1$ 的基 $(T_0=0)$。假若我們的結論对于組 $\Sigma_j$ 成立，要証明它对于 $\Sigma_{j+1}$ 也成立。假設下列关系式成立：

$$a_1\boldsymbol{h}_{j+1}^1+\cdots+a_{r_{j+1}}\boldsymbol{h}_{j+1}^{r_{j+1}}+b_1\boldsymbol{h}_j^1+\cdots+b_{r_j}\boldsymbol{h}_j^{r_j}+\cdots=0. \tag{9}$$

对于关系式(9)应用变換 $\boldsymbol{C}^j$，得到

$$a_1\boldsymbol{h}_1^1+\cdots+a_{r_{j+1}}\boldsymbol{h}_1^{r_{j+1}}=0,$$

而它仅当 $a_1=\cdots=a_{r_{j+1}}=0$ 时才可能；所以在关系式(9)中仅出現組 $\Sigma_j$ 中的向量，根据归納法假設，关系式(9)是平凡的(即 $b_1=\cdots=b_{r_j}=0,\ \cdots$)。現設 $\boldsymbol{x}$ 是空間 $T_{j+1}$ 的任一向量，因为組(8)在 $i=j+1$ 时是关于 $T_j$ 綫性无关的最大向量組，所以存在这样的向量

$$\boldsymbol{y}=a_1\boldsymbol{h}_{j+1}^1+\cdots+a_{r_{j+1}}\boldsymbol{h}_{j+1}^{r_{j+1}},$$

使得向量 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ 属于空間 $T_j$，根据归納法假設，它可以用組 $\Sigma_j$ 中的向量綫性表出，可見，向量 $\boldsymbol{x}$ 可以用向量組 $\Sigma_{j+1}$ 綫性表出。

于是証明了 $\Sigma_k$ 是空間 $S=T_k$ 的基。

如果空間 $S$，矩陣 $A$ 以及数 $\lambda$ 是实的，那末，选取向量組(5)为实的，我們就得到实的向量組(6)，它可以补充为实的向量組(7)。重复这种方法，我們得到实的組 $\Sigma_k$。

現在証明組 $\Sigma_k$ 是由列組成的。也就是要証明，向量 $\boldsymbol{h}_1^\alpha,\boldsymbol{h}_2^\alpha,\cdots$ 构成关于特征值 $\lambda$ 的列。我們有

$$0=\boldsymbol{C}\boldsymbol{h}_1^\alpha=(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{h}_1^\alpha,$$

所以 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}_1^\alpha=\lambda\boldsymbol{h}_1^\alpha$；其次

$$\boldsymbol{h}_1^\alpha=\boldsymbol{C}\boldsymbol{h}_2^\alpha=(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{h}_2^\alpha,$$

所以 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}_2^\alpha=\lambda\boldsymbol{h}_2^\alpha+\boldsymbol{h}_1^\alpha$，等等。

于是定理 28 得証。

在按定理 28 所作出的基之下，对应于变換 $\boldsymbol{A}$ 的已不是原来

的矩陣 $A=(a_j^i)$，而是某一新的矩陣 $B=(b_j^i)$，它具有十分簡单的形式，称为**若当型**。所以，定理 28 是**把矩陣变为若当型的定理**。我們来詳細分析这一問題。

**2)** 由关系式

$$g_i^i=\lambda, \quad i=1, \cdots, m;$$
$$g_{i+1}^i=1, \quad i=1, \cdots, m-1;$$
$$g_j^i=0, \quad \text{当 } j-i<0 \text{ 和 } j-i>1 \text{ 时}$$

所确定的 $m$ 阶方陣 $(g_j^i)$，即矩陣

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

称为关于特征值 $\lambda$ 的 $m$ 阶若当块。可以証明，对于每一个 $n$ 阶方陣 $A$，可以选擇不退化的方陣 $S$，使从矩陣 $A$ 經过矩陣 $S$ 变換以后得到的方陣 $B=SAS^{-1}$ 是若当型，这就是一个矩陣，位在其主对角綫上的是一个或几个若当块，而所有不在若当块上的元素都等于零。

現在来証明这一点。設 $R$ 是 $n$ 維坐标向量空間，$\boldsymbol{A}$ 是（在某一坐标系下）对应于矩陣 $A$ 的綫性变換，$\boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_n$ 是空間 $R$ 由列組成的基（参看定理 28）。我們假設向量 $\boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_n$ 的順序是依次从一个列到另一个列的。以 $B=(b_j^i)$ 記变換 $\boldsymbol{A}$ 在基 $\boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_n$ 下的矩陣。設

$$\boldsymbol{h}_1=\boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{h}_m=\boldsymbol{f}_m$$

是出現在序列 $\boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_n$ 中的第一个列，$\lambda$ 是对应的特征值。这时，由列的定义直接得到

$$b_i^i=\lambda, \quad i=1, \cdots, m; \quad b_{i+1}^i=1, \quad i=1, \cdots, m-1;$$

$b'_{ij}=0$, 当 $i+1<j\leqslant m$ 和 $m\geqslant i>j$ 时。

这样，序列 $f_1, \cdots, f_n$ 的第一个列对应于矩阵 $B$ 的第一个若当块。完全同样地，基 $f_1, \cdots, f_n$ 的第二个列对应于矩阵 $B$ 的第二个若当块，等等。因为从矩阵 $A$ 到矩阵 $B$ 是由变位实现的(参考 § 32, 1))，所以 $B=SAS^{-1}$。

这样，命题 2) 得証。

# 索　引

(以笔画为序)


## 一　画

一阶方程……2
一阶齐次方程 ……10
一阶线性方程 ……11
一阶线性偏微分方程……191
ω-极限点 ……234
ω-极限集合 ……234, 235

## 二　画

二次型……213
二阶自治系统的平衡位置……250
二端网络 ……82
二端网络的算子阻抗 ……88
二端网络的算子导纳 ……88

## 三　画

三极电子管……243
三极管……243
三极管的阳极电流……243
三极管的特性函数……243

## 四　画

中心……122
无源的二端网络 ……84
化零多项式 ……284, 286, 287
反馈……244
方向場 ……4, 22
方程和方程组的解……2, 19, 26, 33, 34
方程组 ……18, 25, 26, 27, 39, 75, 95, 97, 99, 101, 106, 111, 129, 147, 250
方程组的降阶 ……138, 190
不变子空間……291
不退化的二阶自治系統的平衡位置…250
不稳定的平衡位置 ……114, 219, 220
不稳定极限圈 ……228, 233
不稳定結点 ……120, 127, 251, 260
不稳定焦点 ……122, 251
互感 ……84
互感系数 ……84

## 五　画

对应于矩陣特征值的向量列…98, 99, 299
汉密尔頓系統(方程組)……194
可分离变量的一阶方程 …… 9
可标准化的方程組 ……75
正定二次型……213
节点电压 ……87
节点电压法 ……87
电子管……243
电子管振蕩器……243
电压降 ……82
电压源 ……84
电阻 ……83
电极电流……243
电容 ……83
电容器的电量 ……83
电流源 ……84
电流强度 ……82
电路 …… 81, 85
电滤波器 ……94
半稳定的平衡位置……114
半稳定极限圈……228
平移公式 ……51
平衡位置……108
平衡位置稳定性 ……114, 209, 216, 251

## 六 画

安德罗諾夫 ……243, 248
安德罗諾夫-維特定理…… 270
存在性和唯一性定理 ……3, 18
自动調节理論……221
自治方程組 ……105, 110, 250
自治系統的相空間 ……105, 111
自治的标准方程組……106
自感 ……83
多項式的稳定性 ……57, 58, 59, 60
有周期系数的綫性齐次方程組……147
有源的二端网絡 ……84
在一点独立的首次积分……183
在矩陣的譜上給定的函数……292
共振 ……80
后继变換……281
后继函数 ……230, 232, 241, 279
向量 ……46
向量变量的向量函数……164
向量的坐标 ……46
向量的模……163
向量的綫性相关性 ……46
向量函数的导微(运算) ……96
向量函数的范数……166
回路电流 ……87
回路电流法 ……87
回路的固有頻率 ……91
任意解的稳定性 ……268, 271
压縮映象法 ……154, 172

## 七 画

过渡过程 ……79
完全不稳定的平衡位置 ……219, 251
克希荷夫第一定理 ……85
克希荷夫第二定理 ……86
克朗涅克尔記号 ……69
李雅普諾夫定理 ……149, 208, 215
李雅普諾夫函数 ……211, 212
李普希茨条件 ……19

## 八 画

拟多項式 ……68
拟多項式的阶数 ……66
固有振动 ……81
实向量 ……46
实基本解組 ……49, 56
变分方程 ……204, 205
变分方程組 ……178, 185
变压器 ……92
变压器系数 ……94
变系数綫性方程……135
变系数綫性方程組……135
欧拉公式 ……36
定态过程 ……79
定态解 ……79, 80
极限圈 ……227, 228, 234, 235, 242, 245, 250
极限圈的产生……242
极限圈的稳定性 ……228, 233
环面……116
放射性衰变 …… 5
周期……109
周期系数方程……147
周期系数方程的特征指数……152
周期系数方程的等价性……148
周期解 ……109, 267, 270, 281
周期解的稳定性 ……267, 279
函数的范数……155
函数的迭代……282
初始条件 ……4, 20
初始值 ……4, 20, 28, 34
初始值和初始条件 ……4, 20, 28, 34
阿法馬引理……178

## 九 画

相平面 ……117, 227
相速度……111
相軌綫 ……111, 117
首次积分 ……186, 187

若当块……303
若当型矩陣 ……299, 303
待定系数法……104
复向量 ……46
复共軛向量 ……46
复函数的导微(运算) ……33
复値解 ……33
复数振幅 ……78
复数振幅法……42, 77, 78
标准方程組……18, 95, 100, 129, 147
标准微分方程組 ……18
柳維尔公式……133, 134, 143, 146, 280
軌綫……107
按李雅普諾夫意义的稳定性 …209, 268, 271

## 十 画

退化結点 ……123, 125
根本矩陣……147
积分方程,等价于微分方程的积分方程 ……154, 165
积分不等式……199
积分曲綫……3, 4, 22
积分常数 ……44
消去法 ……68
离心調速器……221
特征向量和特征値 ……284, 285
特征多項式 ……43, 285
特征直綫……126
特征指数……152
特征値的重数……291
特征数……151
特征綫……192
特解 ……64
矩陣方程 ……136, 147
矩陣方程的解……137
矩陣分析……147
矩陣的化零多項式 ……287, 288
矩陣的若当型 ……299, 303
矩陣的最小化零多項式 ……286, 288
矩陣的幂級数……292
矩陣的隐函数……296
矩陣的譜……292
矩陣的譜上相一致的函数 ……292, 295
矩陣函数……291
矩陣級数 ……291, 294, 297
振动的頻率 ……30, 77
振蕩回路 ……89
振蕩回路的固有頻率 ……91

## 十一画

圈……109
組极限圈 ……237, 241
符号記法 ……42
逐次逼近法 ……154, 171
基本解矩陣 ……132, 137
基本解組 ……44, 49, 51, 56. 100, 129, 131, 136
常系数齐次綫性方程 ……42, 50, 51
常系数非齐次綫性方程 ……63, 64
常系数綫性方程……42, 50, 51
常系数綫性方程組的相平面……117
常数变易法 ……11, 135
朗斯基行列式……143
偏微分方程 ……1, 191
偏微分方程的边界問題……191
理想变压器 ……93
閉軌綫……109

## 十二画

焦点 ……122, 251, 260, 263
强迫振动 ……80
最小化零多項式 ……284, 286
最高阶导数解出的方程 ……27
最高阶导数解出的方程組 ……27
結点 ……119, 251, 260
給定的区域……3, 18, 26, 27, 174, 183, 199, 200, 201

1985 7 13




## 十三画

微分方程 ..... 1
微分方程的求积 ..... 6
微分方程組关于一个变量的阶 .....26
微分方程組的解 .....26
解对参数和初始值的依賴性 …176, 182, 203, 204
解的可微性.....25, 176, 182
解的定义区間 .....2, 19
解的根本矩陣.....147
解的基本矩陣 .....132, 137
解的連續性和可微性局部的定理.....174
解的連續性和可微性整体的定理.....198
解的最大存在区間 ……21, 22, 24, 141
解的綫性相关性 .....130, 141
数学擺 .....31

## 十四画

蒸汽机 .....223, 224
蒸汽机的运动不平衡性.....226
維什涅格拉德斯基 .....221, 226
維什涅拉格德基斯論題 .....226, 227
算子記法(算符法) .....42, 43
綫性方程 …11, 42, 50, 51, 63, 64, 139
綫性方程的实解 .....48, 55, 98, 100
綫性方程的降阶.....145
綫性方程組 .....39, 95, 129, 147
綫性非齐次方程的特解 .....64
綫性标准方程組 ……95, 100, 129, 147
綫段.....164
漸近稳定的……209, 216, 251, 268, 271
稳定多項式 .....57, 58, 59, 60
稳定的平衡位置 .....114, 208, 251
稳定极限閉 .....228, 233
稳定結点.....119, 125, 127, 250, 260
稳定焦点 .....250, 251
稳定解.....208

## 十五画

鞍点 .....120, 127, 251, 252
鞍点的不稳定須(分界綫).....253
鞍点的稳定須(分界綫).....253
鞍点的須(分界綫).....253

## 十六画

諧振动 .....30, 77
諧振动的初位相 .....30, 77
諧振动的振幅 .....30
諧振蕩方程 .....77, 80

## 十八画

轉換数.....228


006412