地信网论坛
BBS.3S001.COM

ZHANGLIANG HE LIANXUJIEZHILIXUE

张量和连续介质力学

戴天民 著

辽宁大学出版社

张量和连续介质力学

戴天民 著

辽宁大学出版社
一九八六年沈阳

责任编辑　张春光
封面设计　刘桂湘

张量和连续介质力学

戴天民　著

辽宁大学出版社出版
（沈阳市崇山西路三段四号）
辽宁省新华书店发行
沈阳市第二印刷厂印刷

开本：787×1092　1/32　印张：6.625
字数：140千　印数：1—2,000
1986年4月第1版　1986年4月第1次印刷

统一书号：13429·011　定价：1.45元

内 容 简 介

本书是一种阐述张量理论的基本知识及其在连续介质力学中应用的简明专著。它力图自成一个比较完整的体系并为读者进一步研究张量和近代连续介质力学打个基础。

本书的重点是应用非完整系物理标架统一地推导出弹性力学和流体力学基本方程组的全部具体表达形式。

本书可供理工科和师范高等院校力学、应用数学、物理和工程专业高年级学生和研究生学习及有关教师和科技工作者参考之用。

绪　言

随着科学技术的发展，知识更新一事是大家普遍关心的问题。例如，杆系结构力学的面貌在近二十年来有了显著的改观，其主要特征之一就是采用了矩阵理论这一有力的数学工具。矩阵理论既可以简洁地表达力学问题的计算形式，而且又便于电子计算机的应用。传统的结构力学已发展成为富有生命力的近代计算结构力学。同时应当指出的是，张量理论在连续介质力学中的作用和矩阵理论在杆系结构力学中的作用有其相似之处。连续介质力学研究各种物质对于各种外界条件的反响。它以张量理论为有力的数学工具统一地研究固体和流体的力学问题。完全可以说，如果对于张量理论没有一定的通晓，不要说是要进行近代连续介质力学的理论研究工作，就是想要阅读有关的新近文献都将会遇到很大困难。

本书是一本阐述有关张量理论（包括张量代数和张量分析）的基本识认及其在连续介质力学中应用的简明专著。它的特点是：

（1）力图以尽可能简短的篇幅阐述本书的内容，使之自成一个比较完整的体系，以便读者能在较短的时间内对张量理论的基本知识及其在弹性力学和流体力学中的应用得到一个概貌；

（2）力图以尽可能详细的推导阐述本书的内容，附加许多有关连续介质力学问题的示例并应用非完整系物理标架统一地推导出弹性力学和流体力学基本方程组的全部具体表达形

式，以便读者逐渐掌握张量的运算过程及其应用；

（3）力图以尽可能兼顾的形式阐述本书的内容，以便读者能逐渐熟悉如何从弹性力学和流体力学问题的常规写法写出张量的指标形式及其与坐标系选择无关的不变性记法和如何从张量的指标形式及其不变性记法写出问题的常规写法。

（4）为了达到上述目的，本书在内容上只好突出重点并割爱那些虽然重要但与书中提到的有关连续介质力学内容无直接关系的一些张量理论。但是，如果读者能够掌握本书的内容就可以进一步去研究更深的张量理论及其在力学、物理学以及其他学科中的应用。

推导各种介质的基本方程组是连续介质力学的基本内容之一。有关正交曲线坐标系下流体力学基本方程组的表达形式已有一些流体力学专著给出了具体结果。但是，在正交曲线坐标系下弹性力学基本方程组的具体表达形式十分复杂，所以在文献中我们还没有看到过它的全部推导过程。鉴于这种情况，本书应用非完整系物理标架统一地推导出正交曲线坐标系下弹性力学和流体力学基本方程组的全部具体表达形式，这便是本书专门开辟的第三章和第四章的内容。由于本书在处理曲线坐标系下的问题时采用非完整系物理标架，所以张量的协变分量和逆变分量的差别消失，而且都等于物理分量，这将对问题的讨论提供方便条件。

作者于1981年7月应山东工学院和应用数学和力学编委会联合邀请开设的“连续介质力学和广义连续介质力学”讲座上，于1982年8月应哈尔滨工业大学、哈尔滨市力学学会和应用数学和力学编委会联合邀请开设的“张量理论及其在力学中的应用”讲座上，于1983年3月应西北电讯工程学院邀请开设的“张量理论及其应用”讲座上和于1983年8月应辽宁省力学学会、沈阳机

电学院和辽宁大学联合邀请开设的“连续介质力学”讨论班上都讲授过本书的基本内容。后来，我校数学系刘凤丽、陈勉和我一起对原稿内容进行修改和补充。他们对出版本书作了很多工作，尤其陈勉还为整理和抄写本书原稿付出了辛勤的劳动。为此，我愿在这里向他们二位表示衷心的感谢。

我还愿借本书出版的机会向应用数学和力学编委会、辽宁大学、山东工学院、哈尔滨工业大学、哈尔滨市力学学会，西北电讯工程学院、辽宁省力学学会和沈阳机电学院对我讲学期间所给予的关心以及辽宁大学出版社对出版本书所给予的支持一并表示衷心的感谢。

本书初稿完成于1983年12月，后又稍加修改。由于作者水平有限，所以恳请读者能对本书不妥之处予以指正。

戴 天 民

1985年5月于辽宁大学

目　　录

绪言……1

第一章　张量代数……1

§1.1　指标记法……1

§1.2　克罗内克符号……5

§1.3　置换符号……9

§1.4　关于指标记法的运算……10

§1.5　张量的定义……14

§1.6　张量的分量……17

§1.7　张量的代数运算……21

§1.8　商法则……34

§1.9　恒等张量·转置张量·逆张量·正交张量……36

§1.10　对称张量·反对称张量·对偶矢量……43

§1.11　张量的特征值和特征矢量……49

§1.12　凯莱—哈密顿定理……58

第二章　张量分析……62

§2.1　标量的张量值函数的导数……62

§2.2　梯度……65

§2.3　散度……70

§2.4　旋度……73

§2.5　双重微分算子的运算……78

§2.6　张量函数的导数……81

§2.7　积分定理·广义积分定理……87

§2.8　曲线坐标·基矢量·度量张量……90

§2.9　克里斯托弗尔符号……99

§2.10 协变导数·逆变导数…… 101
§2.11 不变性微分算子…… 103
§2.12 内禀导数…… 103
§2.13 曲率张量…… 107
§2.14 问题形式的转换…… 109
§2.15 非完整系物理标架下的微分算子…… 112
§2.16 两点张量场…… 135
第三章 张量在弹性力学中的应用…… 137
§3.1 应变张量和应力张量…… 137
§3.2 应变和位移关系式…… 143
§3.3 运动方程·边界条件…… 148
§3.4 本构方程…… 153
§3.5 协调方程…… 162
§3.6 贝尔特拉密—米歇尔方程…… 174
§3.7 纳维—柯西方程…… 183
第四章 张量在流体力学中的应用…… 187
§4.1 连续性方程…… 187
§4.2 纳维—斯托克斯—杜姆方程…… 189
§4.3 能量方程…… 192
§4.4 本构方程…… 196
§4.5 状态方程…… 198
§4.6 其它…… 199
参考文献 …… 201

第一章　张量代数

本章的目的是要简略地介绍张量代数的基本知识并例举若干与连续介质力学问题有关的示例，以便使理论和应用结合，易于掌握要点。首先从指标记法开始，然后用坐标变换的方法引进张量的概念，接着讲述张量代数的基本知识。为使读者易于接受起见，这里讲述直角坐标系下的卡氏张量。

§1.1　指标记法

1.　求和约定·哑指标

考虑和式

$$S = a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n \tag{a}$$

我们可以用普通的求和符号把上式写成如下形式：

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_iX_i \tag{b}$$

当然，方程(b)也可以写成

$$S = \sum_{j=1}^{n} a_jX_j \tag{c}$$

$$S = \sum_{m=1}^{n} a_mX_m \tag{d}$$

等等。

方程(b)中的指标 i，方程(c)中的指标j 和方程(d)中的指标m，皆与求和无关，所用字母可以任意选取。

如果采用下列约定，还可以进一步简化方程(a)的写法：每逢某个指标在一项中重复一次，就表示对所该指标求和，指标取遍整数 1，2，……n。这样重复的指标，称为哑指标。这个约定就是有名的爱因斯坦 (Einstein) 求和约定。按照这个约定，和式(a)可以写成下列紧凑的形式：

$$S = a_i X_i \tag{e}$$

在此需要强调的是，诸如$a_i b_i X_i$ 这样表达式不在此约定范围之内。换言之，如果应用求和约定，指标重复不能多于一次。因此，对于下列的表达式必须保留它的求和符号：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i X_i$$

另外，如无特别声明，本书总取 n = 3，n 表示空间维数。例如

$$a_i X_i = a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3$$

$$a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

$$a_i \boldsymbol{e}_i = a_1 \boldsymbol{e}_1 + a_2 \boldsymbol{e}_2 + a_3 \boldsymbol{e}_3$$

显然，求和约定也可以用来表示双重和式，三重和式等等。例如

$$S = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_{ij} X_i X_j \tag{f}$$

用爱因斯坦求和约定可将上式简写成

$$S = a_{ij} X_i X_j \tag{g}$$

展开之，表达式(g)给出九项之和，即

$$S = a_{ij}X_iX_j$$
$$= a_{11}X_1X_1 + a_{12}X_1X_2 + a_{13}X_1X_3$$
$$+ a_{21}X_2X_1 + a_{22}X_2X_2 + a_{23}X_2X_3$$
$$+ a_{31}X_3X_1 + a_{32}X_3X_2 + a_{33}X_3X_3$$

对于初学者，可把上述展开分成两步进行，即首先对 i 求和，然后再对 j 求和（反之亦然），即

$$a_{ij}X_iX_j = a_{1j}X_1X_j + a_{2j}X_2X_j + a_{3j}X_3X_j$$

而

$$a_{1j}X_1X_j = a_{11}X_1X_1 + a_{12}X_1X_2 + a_{13}X_1X_3$$
$$a_{2j}X_2X_j = a_{21}X_2X_1 + a_{22}X_2X_2 + a_{23}X_2X_3$$
$$a_{3j}X_3X_j = a_{31}X_3X_1 + a_{32}X_3X_2 + a_{33}X_3X_3$$

类似地，可把三重和式

$$S = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} a_{ijk}X_iX_jX_k \qquad (h)$$

简写成为

$$S = a_{ijk}X_iX_jX_k \qquad (i)$$

显然，上述三重和式表示27项之和。

2. 自由指标

考察下列方程组

$$X'_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3$$
$$X'_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 \qquad (j)$$
$$X'_3 = a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3$$

对每个方程应用爱因斯坦求和约定，则上式可写成：

$$X'_1 = a_{1j}X_j$$
$$X'_2 = a_{2j}X_j$$
$$X'_3 = a_{3j}X_j$$

它们还可以简写成

$$X'_i = a_{ij}X_j, \quad i = 1,2,3 \tag{k}$$

方程（k）中的指标i，在各项中只出现一次。这种在方程的各项中只出现一次的指标称为自由指标。一个自由指标每次可取整数1，2……n，如同哑指标一样，若无特殊声明，亦取n = 3，它表示方程个数。这样一来，式(k)就是式（j）的指标记法。

再举一个例子。设$\mathbf{e}'_i$和$\mathbf{e}_j$表示矢量，则

$$\mathbf{e}'_i = A_{ij}\mathbf{e}_j, \quad i = 1,2,3 \tag{l}$$

表示

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}'_1 &= A_{11}\mathbf{e}_1 + A_{12}\mathbf{e}_2 + A_{13}\mathbf{e}_3 \\
\mathbf{e}'_2 &= A_{21}\mathbf{e}_1 + A_{22}\mathbf{e}_2 + A_{23}\mathbf{e}_3 \\
\mathbf{e}'_3 &= A_{31}\mathbf{e}_1 + A_{32}\mathbf{e}_2 + A_{33}\mathbf{e}_3
\end{aligned} \tag{m}$$

顺便指出，像 $X'_k = a_{ij}X_j$ 这样的表达式是无意义的。亦即，出现在方程的每项内的自由指标必须相同。

如果在方程中出现两个自由指标，例如

$$T_{ij} = A_{ik}A_{jk}, \quad i,j = 1,2,3 \tag{n}$$

则上列方程是九个方程的简写。写成展开式，则为

$$\begin{aligned}
T_{11} &= A_{1k}A_{1k} = A_{11}A_{11} + A_{12}A_{12} + A_{13}A_{13} \\
T_{12} &= A_{1k}A_{2k} = A_{11}A_{21} + A_{12}A_{22} + A_{13}A_{23} \\
&\vdots \\
T_{33} &= A_{3k}A_{3k} = A_{31}A_{31} + A_{32}A_{32} + A_{33}A_{33}
\end{aligned} \tag{o}$$

如果出现双重指标但不表示求和时，我们在指标下方打杠以示区别。例如

$$\begin{aligned}
C_1 &= A_1B_1 \\
C_2 &= A_2B_2 \\
C_3 &= A_3B_3
\end{aligned}$$

可简单地记为

$$C_i = A_i B_{\underline{i}} = A_{\underline{i}} B_i \qquad (p)$$

这里的i相当于一个自由指标，而$\underline{i}$只是在数值上等于i，并不与i求和。

又例如

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = \alpha_1\beta_1\gamma_1 + \alpha_2\beta_2\gamma_2 + \alpha_3\beta_3\gamma_3$$

可记为

$$\theta_i\theta_i = \alpha_i\beta_i\gamma_{\underline{i}} = \alpha_i\beta_{\underline{i}}\gamma_i = \alpha_{\underline{i}}\beta_i\gamma_i \qquad (g)$$

表示$\underline{i}$不参与求和，只是数值上等于i。

§1.2 克罗内克符号

在卡氏直角坐标系下，由δ_{ij}表示的克罗内克(Kronecker)符号定义为，

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如果} i = j \\ 0, & \text{如果} i \neq j \end{cases} \qquad (1\cdot 1a)$$

亦即

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{31} = \delta_{13} = \delta_{32} = \delta_{23} = 0$$

换言之，矩阵

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

是单位矩阵。

根据上述定义，可以推出下列关系：

(i) $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$ $\qquad (1\cdot 1b)$

(ii) $\delta_{1j}a_j = \delta_{11}a_1 + \delta_{12}a_2 + \delta_{13}a_3 = a_1$

$$\delta_{2j}a_j = \delta_{21}a_1 + \delta_{22}a_2 + \delta_{23}a_3 = a_2$$
$$\delta_{3j}a_j = \delta_{31}a_1 + \delta_{32}a_2 + \delta_{33}a_3 = a_3$$

或表示成

$$\delta_{ij}a_j = a_i \tag{1·1c}$$

(iii) $$\delta_{1k}T_{kj} = \delta_{11}T_{1j} + \delta_{12}T_{2j} + \delta_{13}T_{3j} = T_{1j}$$
$$\delta_{2k}T_{kj} = \delta_{21}T_{1j} + \delta_{22}T_{2j} + \delta_{23}T_{3j} = T_{2j}$$
$$\delta_{3k}T_{kj} = \delta_{31}T_{1j} + \delta_{32}T_{2j} + \delta_{33}T_{3j} = T_{3j}$$

或表示成

$$\delta_{ik}T_{kj} = T_{ij} \tag{1·1d}$$

特别地

$$\delta_{ik}\delta_{kj} = \delta_{ij} \tag{1·1e}$$
$$\delta_{ik}\delta_{kj}\delta_{jl} = \delta_{il}$$

等等。

(iv) 若$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$是互相垂直的单位矢量，则

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \tag{1·1f}$$

它表示两个基矢量的点积。

§1.3 置换符号

由e_{ijk}表示的置换符号定义为

$$e_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{当i,j,k为1, 2, 3的偶排列} \\ -1, & \text{当i,j,k为1, 2, 3的奇排列} \\ 0, & \text{当i,j,k不为1, 2, 3的排列} \end{cases} \tag{1·2a}$$

亦即，当i,j,k取数码1, 2, 3时，则

$$e_{123} = e_{231} = e_{312} = +1$$
$$e_{321} = e_{213} = e_{132} = -1 \tag{1·2b}$$
$$e_{111} = e_{121} = \cdots\cdots = 0$$

从上式可以看出

$$e_{ijk}=e_{jki}=e_{kij}$$
$$=-e_{jik}=-e_{ikj}=-e_{kji} \tag{1·2c}$$

上述的置换符号 e_{ijk} 也称为三维空间的排列符号。

若$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$是右手卡氏直角坐标系的单位基矢量，则利用置换符号可以将两单位基矢的叉积$\mathbf{e}_i\times\mathbf{e}_j$写成下式：

$$\mathbf{e}_i\times\mathbf{e}_j=e_{ijk}\mathbf{e}_k \tag{1.3}$$

下面我们来证明下列各恒等式：

$$\text{(i)}\quad e_{ijk}e_{lmn}=\begin{vmatrix}\delta_{il}&\delta_{im}&\delta_{in}\\ \delta_{jl}&\delta_{jm}&\delta_{jn}\\ \delta_{kl}&\delta_{km}&\delta_{kn}\end{vmatrix} \tag{1·4a}$$

$$\text{(ii)}\quad e_{ijk}e_{lmk}=\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl} \tag{1·4b}$$

$$\text{(iii)}\quad e_{ijk}e_{ijk}=2\delta_{jl} \tag{1·4c}$$

$$\text{(iv)}\quad e_{ijk}e_{ijk}=6=3! \tag{1·4d}$$

【证】 (i) 设元素为A_{ij}的$\mathbf{A}$的行列式为

$$\det\mathbf{A}=\begin{vmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\ A_{21}&A_{22}&A_{23}\\ A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{vmatrix}$$

对于行列式交换行或列，则符号发生变化，即

$$\begin{vmatrix}A_{21}&A_{22}&A_{23}\\ A_{11}&A_{12}&A_{13}\\ A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A_{12}&A_{11}&A_{13}\\ A_{22}&A_{21}&A_{23}\\ A_{32}&A_{31}&A_{33}\end{vmatrix}=-\det\mathbf{A}$$

综上所述，对于行列式交换行，则可用置换符号表示为

$$\begin{vmatrix}A_{i1}&A_{i2}&A_{i3}\\ A_{j1}&A_{j2}&A_{j3}\\ A_{k1}&A_{k2}&A_{k3}\end{vmatrix}=e_{ijk}\det\mathbf{A}$$

交换列，则

$$\begin{vmatrix} A_{j1} & A_{1m} & A_{jn} \\ A_{21} & A_{2m} & A_{2n} \\ A_{s1} & A_{3m} & A_{3n} \end{vmatrix} = e_{1mt}\det\mathbf{A}$$

如果同时交换行和列，则

$$\begin{vmatrix} A_{i1} & A_{im} & A_{in} \\ A_{j1} & A_{jm} & A_{jn} \\ A_{k1} & A_{km} & A_{kn} \end{vmatrix} = e_{ijk}e_{lmn}\det\mathbf{A}$$

若取$A_{ij}=\delta_{ij}$，则$\det\mathbf{A}=1$，于是式(1.4a)得证。

(ii) 因为

$$e_{ijk}e_{lmk} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{ik} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jk} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kk} \end{vmatrix}$$

即

$$\begin{aligned} e_{ijk}e_{lmk} &= \delta_{il}(\delta_{jm}\delta_{kk}-\delta_{jk}\delta_{km}) \\ &\quad -\delta_{jl}(\delta_{im}\delta_{kk}-\delta_{ik}\delta_{km})+\delta_{kl}(\delta_{im}\delta_{jk}-\delta_{ik}\delta_{jm}) \\ &= 3\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{il}\delta_{jm}-3\delta_{jl}\delta_{im} \\ &\quad +\delta_{jl}\delta_{im}+\delta_{jl}\delta_{im}-\delta_{il}\delta_{jm} \\ &= \delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{jl}\delta_{im} \end{aligned}$$

(iii) 将上式的m换成j，则

$$\begin{aligned} e_{ijk}e_{ljk} &= \delta_{jl}\delta_{jj}-\delta_{jl}\delta_{jj} \\ &= 3\delta_{il}-\delta_{il}=2\delta_{il} \end{aligned}$$

(iv) 将上式的l换成i，则

$$e_{ijk}e_{ijk}=2\delta_{ii}=6=3!$$

由此可以直接给出二维情况的结果。事实上，二维空间可以看作是三维空间的子空间，故可在二维空间外加上第三坐标x_3并使它的基矢量e_3垂直于二维空间的基矢量e_α ($\alpha=1,2$)，于是$e_\alpha\cdot e_3=0$，且$e_3\cdot e_3=1$。

在二维情况下，置换符号的每个不为零的分量 e_{ijk} 中，指标之一必为3。我们总可以通过循环置换使 $k=3$，于是 i 和 j 就限制在 1 和 2 之中，因此可引进二维置换符号如下：

$$e_{\alpha\beta}=e_{ij3}=e_{\alpha\beta3} \tag{1.4e}$$

其中，

$$e_{11}=e_{22}=0,\quad e_{12}=-e_{21}=1 \tag{1.4f}$$

此时，易知下列诸式成立：

$$e_{\alpha\beta}e_{\gamma\delta}=\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}-\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma} \tag{1.4g}$$

$$e_{\alpha\beta}e_{\alpha\delta}=\delta_{\beta\delta} \tag{1.4h}$$

$$e_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta}=2=2! \tag{1.4i}$$

上述这些结果，在运算中时常用到。例如，对于二维情况，我们有

$$\begin{aligned}e_{\gamma\delta}A_{\alpha\gamma}A_{\beta\delta}&=e_{12}A_{\alpha1}A_{\beta2}+e_{21}A_{\alpha2}A_{\beta1}\\&=A_{\alpha1}A_{\beta2}-A_{\alpha2}A_{\beta1}\\&=e_{\alpha\beta}(A_{11}A_{22}-A_{12}A_{21})\\&=e_{\alpha\beta}\begin{vmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{vmatrix}\\&=e_{\alpha\beta}\det\mathbf{A}\end{aligned}$$

在上式两边均乘以 $e_{\alpha\beta}$，则

$$e_{\alpha\beta}e_{\gamma\delta}A_{\alpha\gamma}A_{\beta\delta}=2!\ \det\mathbf{A}$$

故得行列式$\det\mathbf{A}$的表示式如下：

$$\det\mathbf{A}=\frac{1}{2!}e_{\alpha\beta}e_{\gamma\delta}A_{\alpha\gamma}A_{\beta\delta} \tag{1.4j}$$

$$=\frac{1}{2!}\begin{vmatrix}A_{\alpha\alpha}&A_{\alpha\beta}\\A_{\beta\alpha}&A_{\beta\beta}\end{vmatrix} \tag{1.4j}$$

类似地，可写出三维情况的结果为

$$\det A = \frac{1}{3!} e_{ijk} e_{rst} A_{ir} A_{js} A_{kt}$$

$$= \frac{1}{3!} \begin{vmatrix} A_{ii} & A_{ij} & A_{ik} \\ A_{ji} & A_{jj} & A_{jk} \\ A_{ki} & A_{kj} & A_{kk} \end{vmatrix} \qquad (1.4k)$$

§1.4 关于指标记法的运算

1. 代入

若有 $a_i = U_{im} b_m$ (a)

和

$$b_i = V_{im} c_m \qquad (b)$$

则为了把式(b)中的b_i代入式(a)中，则根据指标记法的规定，必须首先把式(b)中的自由指标 i 换成m，并把式(b)中的哑指标m换成某一其它字母，如n，即

$$b_m = V_{mn} c_n \qquad (c)$$

此时，把上式代入式(a)，则得

$$a_i = U_{im} V_{mn} c_n \qquad (d)$$

式(d)表示三个方程，每个方程在其右侧是具有九项的和式。

2. 乘积

若

$$p = a_m b_m \qquad (e)$$

$$q = c_m d_m \qquad (f)$$

则

$$pq = a_m b_m c_n d_n \qquad (g)$$

显然，$pq \neq a_m b_m c_m d_m$，因为这个表达式的右侧根本不符合求和约定，关于这点必须注意。

3. 因式分解

如果

$$T_{ij}n_i - \lambda n_i = 0 \tag{h}$$

则应用克罗内克符号，可写出

$$n_i = \delta_{ij} n_j \tag{i}$$

把上式代入式(h)，则

$$T_{ij}n_j - \lambda \delta_{ij} n_j = 0$$

即

$$(T_{ij} - \lambda \delta_{ij}) n_j = 0$$

4. 缩并

使两个指标相等并对它们求和的运算称为缩并。例如，令 T_{ij} 和 E_{ij} 以及 λ 和 μ 分别表示应力张量和应变张量以及拉梅常数，则各向同性弹性固体的应力应变关系具有下列形式：

$$T_{ij} = \lambda E_{kk} \delta_{ij} + 2\mu E_{ij}$$

对上式进行缩并运算，则

$$\begin{aligned} T_{ii} &= \lambda E_{kk} \delta_{ii} + 2\mu E_{ii} \\ &= 3\lambda E_{kk} + 2\mu E_{ii} \\ &= (3\lambda + 2\mu) E_{ii} \end{aligned}$$

5. 示例

在应用中，我们要能够熟练地把问题指标记法形式写成普通记法形式和把问题的普通记法形式写成指标记法形式。现举两例如下。

例1.1 试将下列直角坐标系下指标记法的不可压缩牛顿流体的连续性方程和纳维—斯托克斯(Navier－Stokes)方程写成普通记法的形式：

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i}=0 \tag{a}$$

$$\rho\left(\frac{\partial U_i}{\partial t}+U_j\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)=\rho b_i-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\mu^*\frac{\partial^2 U_j}{\partial x_j\partial x_j} \tag{b}$$

式中ρ为密度，U_i为速度分量，b_i为体力密度分量，p为静水压力和μ^*为粘性系数。

【解】 因为在式(a)中指标i为哑指示，而在式(b)中j为哑指标，i为自由指标，故按爱因斯坦求和约定，可将上列两式写成下列普通记法形式：

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_1}+\frac{\partial U_2}{\partial x_2}+\frac{\partial U_3}{\partial x_3}=0 \tag{a'}$$

$$\rho\left(\frac{\partial U_1}{\partial t}+U_1\frac{\partial U_1}{\partial x_1}+U_2\frac{\partial U_1}{\partial x_2}+U_3\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)$$

$$=\rho b_1-\frac{\partial p}{\partial x_1}+\mu^*\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)U_1 \tag{b'}_1$$

$$\rho\left(\frac{\partial U_2}{\partial t}+U_1\frac{\partial U_2}{\partial x_1}+U_2\frac{\partial U_2}{\partial x_2}+U_3\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)$$

$$=\rho b_2-\frac{\partial p}{\partial x_2}+\mu^*\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)U_2 \tag{b'}_2$$

$$\rho\left(\frac{\partial U_3}{\partial t}+U_1\frac{\partial U_3}{\partial x_1}+U_2\frac{\partial U_3}{\partial x_2}+U_3\frac{\partial U_3}{\partial x_3}\right)$$

$$=\rho b_3-\frac{\partial p}{\partial x_3}+\mu^*\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)U_3 \tag{b'}_3$$

通常把x_1,x_2,x_3和U_1,U_2,U_3分别写成x,y,z和U_x,U_y,U_z。

例1.2 试将下列直角坐标系下普通记法的弹性理论的平衡方程和力的边界条件写成指标记法形式：

$$\frac{\partial T_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial T_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial T_{xz}}{\partial z}+b_x=0 \qquad (c)_1$$

$$\frac{\partial T_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial T_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial T_{yz}}{\partial z}+b_y=0 \qquad (c)_2$$

$$\frac{\partial T_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial T_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial T_{zz}}{\partial z}+b_z=0 \qquad (c)_3$$

$$T_{xx}\cos(x,n)+T_{xy}\cos(y,n)+T_{xz}\cos(z,n)=\overline{p_x}(d)_1$$

$$T_{yx}\cos(x,n)+T_{yy}\cos(y,n)+T_{yz}\cos(z,n)=\overline{p_y}(d)_2$$

$$T_{zx}\cos(x,n)+T_{zy}\cos(y,n)+T_{zz}\cos(z,n)=\overline{p_z}(d)_3$$

式中$T_{xx},\cdots,T_{zz}$为应力张量分量，b_x,b_y,b_z和$\overline{p_x}$、$\overline{p_y}$、$\overline{p_z}$分别为体力矢量分量和给定外力矢量分量。

【解】 根据爱因斯坦求和约定，并将下标x、y、z分别用1、2、3代替和将坐标x、y、z分别用x_1、x_2、x_3代替、则平衡方程可写成下列指标记法形式：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial T_{1j}}{\partial x_j}+b_1=0\\&\frac{\partial T_{2j}}{\partial x_j}+b_2=0\\&\frac{\partial T_{3j}}{\partial x_j}+b_3=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}+b_i=0 \qquad (c')$$

面力的边界条件可写成下列指标记法形式：

$$\left.\begin{aligned}&T_{1j}\cos(x_j,n)=\overline{p_1}\\&T_{2j}\cos(x_j,n)=\overline{p_2}\\&T_{3j}\cos(x_j,n)=\overline{p_3}\end{aligned}\right\}\rightarrow T_{ij}\cos(x_j,n)=\overline{p_i}$$

或写成下列紧凑形式：

$$T_{ij}n_j==\overline{p_i} \qquad (d')$$

§1.5 张量的定义

关于标量和矢量，大家都是熟悉的。所谓标量，就是在选定的测量单位下，只用一个不依赖于坐标系的数字表征其性质的量。例如，数学上的无名数，物理学中的质量、密度、温度等都是标量。所谓矢量，就是在选定的测量单位下，用不依赖于坐标系的数字和方向表征其性质的量。例如，数学上的有向线段，物理学中的力、速度、加速度等都是矢量。

关于标量和矢量的定义，也可以从坐标变换的角度去研究。今后若无特别声明，我们提到的坐标系都为右手系。

设$Ox_1x_2x_3$是原有的卡氏坐标系（或称旧坐标系），其单位基矢量为$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$。$Ox_1'x_2'x_3'$是变换了的卡氏坐标系（或称新坐标系），其单位基矢量为$\{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\}$。从解析几何知它们之间的变换关系是：

新＼旧	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_1'$	$\alpha_{1'1}$	$\alpha_{1'2}$	$\alpha_{1'3}$
$\mathbf{e}_2'$	$\alpha_{2'1}$	$\alpha_{2'2}$	$\alpha_{2'3}$
$\mathbf{e}_3'$	$\alpha_{3'1}$	$\alpha_{3'2}$	$\alpha_{3'3}$

或写成

$$\mathbf{e}_{i'} = \alpha_{i'j}\mathbf{e}_j \tag{1.5a}$$

其中$\alpha_{i'j} = \mathbf{e}_{i'} \cdot \mathbf{e}_j$是新坐标基矢与旧坐标基矢夹角的方向余弦。显然，这种变换是正交变换。

设$\varphi(x_1, x_2, x_3)$和$\varphi'(x_{1'}, x_{1'}, x_{3'})$表示标量在新和旧坐标系下的数值。由于标量不依赖于坐标系，故有

$$\varphi(x_1,x_2,x_3)=\varphi'(x_1',x_2',x_3')$$

即对每一个卡氏直角坐标系$Ox_1x_2x_3$来说，有一个量φ，它在坐标系变换时满足上式，也就是说其值保持不变，则φ定义一个标量。

若设$\mathbf{a}$是一个任意矢量，它在新和旧坐标系中的分量分别是$\langle a_1',a_2',a_3'\rangle$和$\langle a_1,a_2,a_3\rangle$，则$\mathbf{a}$的分量之间显然有如下关系：

$$\begin{aligned}
a_1' &= \mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_1' \\
&= (a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2+a_3\mathbf{e}_3)\cdot\mathbf{e}_1' \\
&= \alpha_{1'1}a_1+\alpha_{1'2}a_2+\alpha_{1'3}a_3 \\
a_2' &= \mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_2' \\
&= (a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2+a_3\mathbf{e}_3)\cdot\mathbf{e}_2' \\
&= \alpha_{2'1}\alpha_1+a_{2'2}a_2+\alpha_{2'3}a_3 \\
a_3' &= \mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_3' \\
&= (a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2+a_3\mathbf{e}_3)\cdot\mathbf{e}_3' \\
&= \alpha_{3'1}a_1+\alpha_{3'2}a_2+\alpha_{3'3}a_3
\end{aligned}$$

若采用指标记法，则上列三式可以写成下列形式：

$$a_i'=\alpha_{i'i}a_i \tag{1.5b}$$

由于矢量$\mathbf{a}$的不变性，故可写出

$$\mathbf{a}=a_i\mathbf{e}_i=a_i'\mathbf{e}_i'=a_i'\alpha_{i'i}\mathbf{e}_i$$

所以

$$a_i=\alpha_{i'i}a_i' \tag{1.5c}$$

因为

$$\begin{aligned}
a_i &= \alpha_{i'i}a_i' \\
&= \alpha_{i'i}\alpha_{i'k}\mathbf{a}_k \\
&= \delta_{ik}a_k
\end{aligned}$$

故由$\mathbf{a}$的任意性得下列关系式：

$$\alpha_{i'i}\alpha_{i'k}=\delta_{ik} \tag{1.5d}$$

从上式可以看出，若对每一个直角坐标系$Ox_1x_2x_3$来说，三个量a_1, a_2, a_3根据式(1.5d)变换到另一个坐标系$Ox_1'x_2'x_3'$中的三个量a_1', a_2', a_3'，则此三个量定义一个矢量。

现将矢量的定义加以推广，即：若对某一直角坐标系$Ox_1x_2x_3$来说，具有两个指标的九个量T_{ij}按照下列关系式变换成$Ox_1'x_2'x_3'$中的$T_{i'j'}$：

$$T_{i'j'} = \alpha_{i'i}\alpha_{j'j}T_{ij} \tag{1.5e}$$

则此九个量定义一个二阶张量。我们可以像矢量不变性记法那样，把它写成$\mathbf{T}$。

事实上，这只是定义张量的一种方法。若只限于卡氏直角坐标系，并把沿着正的坐标方向的单位矢量做为基矢量，则可借助于它们的变换规律定义各阶张量的分量，即

$$\begin{aligned}
&\varphi' = \varphi && \text{零阶张量（即标量）}\\
&a_{i'} = \alpha_{i'i}a_i && \text{一阶张量（即矢量）}\\
&T_{i'j} = \alpha_{i'i}\alpha_{j'j}T_{ij} && \text{二阶张量}\\
&T_{i'j'k'} = \alpha_{i'i}\alpha_{j'j}\alpha_{k'k}T_{ijk} && \text{三阶张量}
\end{aligned} \tag{1.6}$$

依此下去，我们可以定义任意阶张量。

还可以用另一种方法定义二阶张量，即二阶张量$\mathbf{T}$是一个线性变换，它是把任意一个矢量变换成另一个矢量的线性变换，其表达式为

$$\mathbf{b} = \mathbf{T}\cdot\mathbf{a} \tag{1.7a}$$

而且$\mathbf{T}$具有下列线性性质：

加法

$$\mathbf{T}\cdot(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) = \mathbf{T}\cdot\mathbf{a}_1 + \mathbf{T}\cdot\mathbf{a}_2 \tag{1.7b}$$

标乘

$$\mathbf{T}\cdot(\alpha\mathbf{a}_1) = \alpha\mathbf{T}\cdot\mathbf{a}_1 \tag{1.7c}$$

其中α是任一标量，$\mathbf{a}_1$和$\mathbf{a}_2$是两个任意矢量。

§1.6 张量的分量

令 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ 分别为卡氏直角坐标系的 x_1,x_2,x_3 轴向单位基矢量，于是任意一个矢量**a**可以表示为

$$\mathbf{a}=a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2+a_3\mathbf{e}_3=a_i\mathbf{e}_i \tag{1.8a}$$

矢量**a**的分量由下式给出：

$$a_1=\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_1$$

$$a_2=\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_2$$

$$a_3=\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_3$$

亦即

$$a_i=\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_i \tag{1.8b}$$

对于一个二阶张量**T**，它可以将一个矢量**a**变换成另一个矢量**b**，于是由式(1.8a)可得矢量**b**即

$$\begin{aligned}\mathbf{b}&=\mathbf{T}\cdot\mathbf{a}\\&=\mathbf{T}\cdot(a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2+a_3\mathbf{e}_3)\\&=a_1\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_2+a_3\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_3\\&=a_i\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_i\end{aligned} \tag{1.9a}$$

矢量**b**的分量则由下式给出：

$$\begin{aligned}b_1&=\mathbf{b}\cdot\mathbf{e}_1=\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{b}\\&=\mathbf{e}_1\cdot(a_i\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_i)\\&=a_1\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_2+a_3\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_3\\b_2&=\mathbf{b}\cdot\mathbf{e}_2=\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{b}\\&=\mathbf{e}_2\cdot(a_i\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_i)\\&=a_1\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_2+a_3\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_3\\b_3&=\mathbf{b}\cdot\mathbf{e}_3=\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{b}=\mathbf{e}_3\cdot(a_i\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_i)\\&=a_1\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_2+a_3\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_3\end{aligned}$$

亦即

$$b_i = a_j(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_j) \tag{1.9b}$$

由矢量的分量定义可知，$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_i$是$\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_1$的$\mathbf{e}_i$分量，$\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_1$是$\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_1$的$\mathbf{e}_2$分量等等，即$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_j$是$\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_j$的$\mathbf{e}_i$分量。我们可以把这些分量写成$T_{11} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_1$，$T_{21} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_1$，$T_{12} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_2$等等，即

$$T_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_j \tag{1.10}$$

我们把T_{ij}称为二阶张量$\mathbf{T}$的分量。由此可把$\mathbf{b} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{a}$写成分量形式如下：

$$b_1 = T_{11}a_1 + T_{12}a_2 + T_{13}a_3$$
$$b_2 = T_{21}a_1 + T_{22}a_2 + T_{23}a_3$$
$$b_3 = T_{31}a_1 + T_{32}a_2 + T_{33}a_3$$

或

$$b_i = T_{ij}a_j \tag{1.11a}$$

为了计算上的方便，上述方程可以写成矩阵形式

$$\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \tag{1.11b}$$

矩阵

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

称为在单位基矢量组$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$下的张量$\mathbf{T}$的矩阵。从上列矩阵的组成可以看出：第一列的各元素刚好是矢量$\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_1$的各分量、第二列的元素刚好是矢量$\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_2$的各分量，而第三列的各元素则刚好是矢量$\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_3$的各分量，即二阶张量$\mathbf{T}$的各分量，在卡氏直角坐标基上表示为矢量$\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_1, \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_2, \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_3$在三个坐标轴上的

投影。反过来、我们也可以用其分量分别表示矢量 $\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_1$, $\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_2$, $\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_3$, 即

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_1 = T_{11}\mathbf{e}_1 + T_{21}\mathbf{e}_2 + T_{31}\mathbf{e}_3 = T_{j1}\mathbf{e}_j$$

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_2 = T_{12}\mathbf{e}_1 + T_{22}\mathbf{e}_2 + T_{32}\mathbf{e}_3 = T_{j2}\mathbf{e}_j$$

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_3 = T_{13}\mathbf{e}_1 + T_{23}\mathbf{e}_2 + T_{33}\mathbf{e}_3 = T_{j3}\mathbf{e}_j$$

亦即

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_i = T_{ji}\mathbf{e}_j \tag{1.12}$$

显然，二阶张量T的分量通过单位基矢量组 $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ 与坐标系相关，这恰和矢量的分量一样，分量与坐标系相关，但矢量本身和坐标系无关。类似地，尽管张量的分量与坐标系相关，但张量本身则和任何坐标系无关。因此，一个张量可以具有无穷多个矩阵，即对每一单位正交基矢量组都有一个矩阵。我们将对同一张量的不同矩阵采用下列符号，即对基矢量组 $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ 矩阵表示为

$[\mathbf{T}]$ 或 $[T_{ij}]$

而对于 $\{\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_2',\mathbf{e}_3'\}$ 矩阵表示成为

$[\mathbf{T}']$ 或 $[T_{i'j'}]$

例1.3 如果T把任意矢量变换成为对于固定平面的镜像，试求T的矩阵并证T是一个二阶张量。

【解】 令 $\mathbf{e}_1$ 垂直于镜平面、$\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ 在镜平面上，于是

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3$$

按式(1.12)则

$$[\mathbf{T}]^{\mathrm{T}}\{\mathbf{e}\} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{Bmatrix}$$

这里$[\mathbf{T}]^T$表示$[\mathbf{T}]$的转置矩阵。因此

$$[\mathbf{T}]=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

即为所求的矩阵。

下面再来证明$\mathbf{T}$是一个二阶张量，也就是说，只要证明$\mathbf{T}$是一个线性变换即可，亦即对任意两个矢量$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$及标量α，下列二式成立：

$$\mathbf{T}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\mathbf{T}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{T}\cdot\mathbf{b}$$

$$\mathbf{T}\cdot(\alpha\mathbf{a})=\alpha\mathbf{T}\cdot\mathbf{a}$$

由矩阵运算知

$$[\mathbf{T}]\{\mathbf{a}\}+[\mathbf{T}]\{\mathbf{b}\}$$

$$=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}-(a_1+b_1)\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{Bmatrix}$$

而

$$[\mathbf{T}]\{\mathbf{a}+\mathbf{b}\}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-(a_1+b_1)\\a_2+b_2\\a_3+b_2\end{Bmatrix}$$

以上两式右端相等，故

$$\mathbf{T}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\mathbf{T}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{T}\cdot\mathbf{b}$$

成立。同样可知

$$\mathbf{T}\cdot(\alpha\mathbf{a})=\alpha(\mathbf{T}\cdot\mathbf{a})$$

成立。

例1.4 如果**T**把所有矢量变换成固定方向内的单位矢量，试证**T**不是一个二阶张量。

【解】 令**n**是所有矢量在**T**下变换于其内的单位矢量，于是对任意矢量**a**和**b**，我们有

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{n},\quad \mathbf{T}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{n}$$

和 $$\mathbf{T}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\mathbf{n}$$

显然

$$\mathbf{T}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})\neq\mathbf{T}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{T}\cdot\mathbf{b}$$

故**T**不是一个二阶张量。

§1.7 张量的代数运算

矢量间的代数运算，大家是熟悉的；对于张量的代数运算来说，它是矢量代数运算的自然推广。

1. 张量的加法和减法运算

令**T**和**S**是两个二阶张量。用$(\mathbf{T}\pm\mathbf{S})$表示的**T**和**S**的和与差，则对任意矢量**a**有

$$(\mathbf{T}\pm\mathbf{S})\cdot\mathbf{a}=\mathbf{T}\cdot\mathbf{a}\pm\mathbf{S}\cdot\mathbf{a} \tag{1.13a}$$

显然，这样定义的$(\mathbf{T}\pm\mathbf{S})$仍是一个二阶张量，$(\mathbf{T}\pm\mathbf{S})$的分量是

$$\begin{aligned}(\mathbf{T}\pm\mathbf{S})_{ij}&=\mathbf{e}_i\cdot(\mathbf{T}\pm\mathbf{S})\cdot\mathbf{e}_j\\&=\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_j\pm\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{e}_j\\&=\mathbf{T}_{ij}\pm\mathbf{S}_{ij}\end{aligned}$$

写成便于计算的矩阵形式，则为

$$[\mathbf{T}\pm\mathbf{S}]=[\mathbf{T}]\pm[\mathbf{S}] \tag{1.13b}$$

2. 张量和标量的乘积

设**T**是一个二阶张量，α是一个标量，则$\overline{T}_{ij}$是张量**T**的分量T_{ij}与标量α的乘积，即

$$\overline{T}_{ij} = \alpha T_{ij} \tag{1.13c}$$

$\overline{T}_{ij}$仍是一个二阶张量的分量。因为T_{ij}是二阶张量**T**的分量，则由定义知

$$T_{i'j'} = \alpha_{i'i}\alpha_{j'j}T_{ij}$$

又因α是标量、则

$$\alpha' = \alpha$$

于是

$$\begin{aligned}\overline{T}_{i'j'} &= \alpha' T_{i'j'} = \alpha'\alpha_{i'i}\alpha_{j'j}T_{ij} \\ &= \alpha\alpha_{i'i}\alpha_{jj'}T_{ij} \\ &= \alpha_{i'i}\alpha_{j'j}\overline{T}_{ij}\end{aligned}$$

可见$\overline{T}_{ij}$仍是一个二阶张量。

3. 并矢积 · 并矢记法 · 基张量

矢量**a**和矢量**b**的并矢积**ab**定义为按下列规则变换任意矢量**c**的变换

$$(\mathbf{ab})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) \tag{1.14}$$

由上式所定义的矢量**a**和矢量**b**的并矢积**ab**是一个二阶张量。现证明如下：

对于任意矢量**c**和**d**，及标量α和β，由上述规则，则有

$$\begin{aligned}(\mathbf{ab})\cdot(\alpha\mathbf{c}+\beta\mathbf{d}) &= \mathbf{a}[\mathbf{b}\cdot(\alpha\mathbf{c}+\beta\mathbf{d})] \\ &= \mathbf{a}[\alpha(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})+\beta(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})] \\ &= \alpha\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})+\beta\mathbf{a}(\mathbf{d}\cdot\mathbf{d}) \\ &= \alpha(\mathbf{ab})\cdot\mathbf{c}+\beta(\mathbf{ab})\cdot\mathbf{d}\end{aligned}$$

因此，$\mathbf{ab}$满足张量定义($\mathbf{ab}$是一线性变换)，所以$\mathbf{ab}$是一个二阶张量。对于基矢量组$\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$，它的分量是

$$\begin{aligned}(\mathbf{ab})_{ij} &= \mathbf{e}_i\cdot(\mathbf{ab})\cdot\mathbf{e}_j\\ &= \mathbf{e}_i\cdot[\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{e}_j)]\\ &= \mathbf{e}_i\cdot(\mathbf{a}b_j) = (\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{a})b_j\\ &= a_ib_j\end{aligned}$$

亦即

$$(\mathbf{ab})_{ij} = a_ib_j \tag{1.15a}$$

有些文献常把并矢积$\mathbf{ab}$写成$\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$它的分量写成

$$(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})_{ij} = a_ib_j$$

并矢积的矩阵形式如下：

$$[\mathbf{ab}] = \begin{Bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3\\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3\\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3\end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} a_1\\ a_2\\ a_3\end{Bmatrix}[b_1b_2b_3] \tag{1.15b}$$

特别是对于基矢量$\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$，$\mathbf{e}_3$运用并矢积的概念、则有

$$[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1] = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad [\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2] = \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3] = \begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad [\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1] = \begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

等等。于是任意二阶张量$\mathbf{T}$可以表示成

$$\mathbf{T} = T_{11}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1) + T_{12}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) + \cdots\cdots + T_{33}(\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3)$$

亦即

$$\mathbf{T} = T_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j \tag{1.16a}$$

这种记法称作并矢记法。这种并矢记法可以推广到任意阶张量。例如，若$\mathbf{A}$为三阶张量，则它的并矢记法为

$$\mathbf{A} = A_{ijk}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k$$

我们采用基张量的概念[23]。这是对基矢量概念的扩展。

对于卡氏直角坐标系，任意阶张量的基张量为

$$\begin{aligned}
&\text{矢　　量} && \mathbf{e}_i \\
&\text{二阶张量} && \mathbf{e}_{ij} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j \\
&\quad\vdots && \quad\vdots \\
&\text{n 阶张量} && \mathbf{e}_{i_1\cdots i_n} = \mathbf{e}_{i_1}\cdots\mathbf{e}_{i_n}
\end{aligned} \tag{1.16b}$$

于是，对于任意阶张量的不变性记法和并矢记法可统一地写成

$$\begin{aligned}
&\text{矢　　量} && \mathbf{a} = a_i\mathbf{e}_i \\
&\text{二阶张量} && \mathbf{T} = T_{ij}\mathbf{e}_{ij} \\
&\quad\vdots && \quad\vdots \\
&\text{n 阶张量} && \mathbf{T} = T_{i_1\cdots i_n}\mathbf{e}_{i_1\cdots i_n}
\end{aligned} \tag{1.16c}$$

等号右边这种记法我们称为广义标量记法。

到此为止，我们已有四种张量记法。例如，对于二阶张量$\mathbf{T}$可写出下列四种记法：

（1）不变性（符号，抽象）记法　$\mathbf{T}$　(1.17a)

（2）分量（指标）记法　T_{ij}　(1.17b)

（3）并矢记法　$T_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$　(1.17c)

（4）广义标量记法　$T_{ij}\mathbf{e}_{ij}$　(1.17d)

4. 张量的并积

可以把两个任意矢量并矢积的概念推广为两个任意阶张量的并积。若$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$分别为m阶和n阶张量，则它们的并积为

$$\mathbf{AB} = (A_{i_1\cdots i_m}\mathbf{e}_{i_1\cdots i_m})(B_{i_{m+1}\cdots i_{m+n}}\mathbf{e}_{i_{m+1}\cdots i_{m+n}})$$

$$= C_{i_1\cdots i_{m-s}e_{i_1}\cdots i_{m+n}}$$
$$= C \tag{1.18}$$

其中$C_{i_1\cdots i_{m-s}} = A_{i_1\cdots i_m}B_{i_{m+1}\cdots i_{m+n}}$。这个结果张量**C**的阶数为**A**和**B**两个张量阶数之和。

5. 张量的点积

若**a**和**b**是两个矢量，则它们的点积定义为

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (a_i\mathbf{e}_i)\cdot(b_j\mathbf{e}_j)$$
$$= a_ib_j(\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j)$$
$$= a_ib_j\delta_{ij}$$
$$= a_ib_i \tag{1.19a}$$

若**T**和**S**是两个任意张量，为简单起见，设它们均为二阶张量，则其点积定义为

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{S} = (T_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j)\cdot(S_{mn}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n)$$
$$= T_{ij}S_{mn}\mathbf{e}_i(\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{e}_m)\mathbf{e}_n$$
$$= T_{ij}S_{mn}\delta_{jm}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_n$$
$$= (T\cdot\mathbf{S})_{in}\mathbf{e}_{in} \tag{1.19b}$$

其中

$$(\mathbf{T}\cdot\mathbf{S})_{in} = T_{im}S_{mn}$$

同样地

$$\mathbf{S}\cdot\mathbf{T} = (S_{mn}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n)\cdot(T_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j)$$
$$= S_{mn}T_{ij}\mathbf{e}_m(\mathbf{e}_n\cdot\mathbf{e}_j)\mathbf{e}_j$$
$$= S_{mn}T_{ij}\delta_{nj}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_j$$
$$= S_{mn}T_{nj}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_j$$
$$= (\mathbf{S}\cdot\mathbf{T})_{mj}\mathbf{e}_{mj} \tag{1.19c}$$

其中

$$(\mathbf{S}\cdot\mathbf{T})_{mj} = S_{mn}T_{nj}$$

显然两个二阶张量点积$\mathbf{T}\cdot\mathbf{S}$和$\mathbf{S}\cdot\mathbf{T}$的结果都是二阶张量。点积一次，结果张量降低二阶。

式(1.19b)和(1.19c)式也可以写成下列矩阵形式：

$$[\mathbf{T}\cdot\mathbf{S}]=[\mathbf{T}][\mathbf{S}]$$

$$[\mathbf{S}\cdot\mathbf{T}]=[\mathbf{S}][\mathbf{T}] \tag{1.19d}$$

此处需要强调的是、在一般情况下，$\mathbf{T}\cdot\mathbf{S}\neq\mathbf{S}\cdot\mathbf{T}$，亦即，在一般情况下，两个张量的点积是不可交换的。

如果$\mathbf{R},\mathbf{S}$和$\mathbf{T}$是三个二阶张量、则

$$\begin{aligned}(\mathbf{R}\cdot\mathbf{S})\cdot\mathbf{T}&=(R_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\cdot S_{mn}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n)\cdot(T_{lk}\mathbf{e}_l\mathbf{e}_k)\\&=(R_{im}S_{mn}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_n)\cdot(T_{lk}\mathbf{e}_l\mathbf{e}_k)\\&=R_{im}S_{mn}T_{nk}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k\\\mathbf{R}\cdot(\mathbf{S}\cdot\mathbf{T})&=R_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\cdot(S_{mn}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n\cdot T_{lk}\mathbf{e}_l\mathbf{e}_k)\\&=R_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\cdot S_{mn}T_{nk}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_k\\&=R_{im}S_{mn}T_{nk}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k\end{aligned}$$

可见。

$$(\mathbf{R}\cdot\mathbf{S})\cdot\mathbf{T}=\mathbf{R}\cdot(\mathbf{S}\cdot\mathbf{T})$$

这说明二阶张量的点积服从结合律。这个结果张量仍为二阶张量，故可不加区别地记为

$$\mathbf{R}\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{T}=(\mathbf{R}\cdot\mathbf{S})\cdot\mathbf{T}=\mathbf{R}\cdot(\mathbf{S}\cdot\mathbf{T})$$

同时这也说明，任意个二阶张量依次点积的结果张量仍为二阶张量，即

$$\mathbf{R}\cdot\mathbf{S}\cdot\cdots\cdot\mathbf{U}\cdot\mathbf{V}=R_{im}S_{mn}\cdots U_{pq}V_{qj}\mathbf{e}_{ij} \tag{1.20a}$$

于是、若$\mathbf{A}$为二阶张量，则$\mathbf{A}^n$可写成

$$\mathbf{A}^n=\underbrace{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\cdots\cdot\mathbf{A}}_{n\text{个}}=A_{im}A_{mn}\cdots A_{qj}\mathbf{e}_{ij} \tag{1.20b}$$

下面我们定义两个任意张量的双重点积。例如，若$\mathbf{A}$为三阶张量，$\mathbf{B}$为二阶张量，则它们双重点积的结果张量为一阶张

量，即

$$\mathbf{A}:\mathbf{B}=(A_{ijk}\mathbf{e}_{ijk}):(B_{mn}\mathbf{e}_{mn})$$
$$=A_{ijk}B_{mn}\mathbf{e}_i(\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{e}_m)(\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{e}_n)$$
$$=A_{ijk}B_{mn}\delta_{jm}\delta_{kn}\mathbf{e}_i$$
$$=A_{ijk}B_{jk}\mathbf{e}_i \tag{1.20c}$$

若$\mathbf{T}$和$\mathbf{S}$均为二阶张量，则它们的双重点积为

$$\mathbf{T}:\mathbf{S}=(T_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j):(S_{mn}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n)$$
$$=T_{ij}S_{mn}(\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_m)(\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{e}_n)$$
$$=T_{ij}S_{mn}\delta_{im}\delta_{jn}$$
$$=T_{ij}S_{ij} \tag{1.20d}$$

结果为一标量。显然$\mathbf{T}:\mathbf{S}=\mathbf{S}:\mathbf{T}$。类似地，可定义多重点积。

例1.5 设$\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$是一组卡氏直角坐标基矢量、若该坐标绕$\mathbf{e}_3$轴逆时针方向旋转180°，90°，45°，试求其转动矩阵。

【解】 设〔A〕为刚体转动180°的转动矩阵，则

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_1=-\mathbf{e}_1$$
$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_2=-\mathbf{e}_2$$
$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_3=\mathbf{e}_3$$

即

$$\begin{cases}A_{11}\mathbf{e}_1+A_{21}\mathbf{e}_2+A_{31}\mathbf{e}_3=-\mathbf{e}_1\\ A_{12}\mathbf{e}_1+A_{22}\mathbf{e}_2+A_{32}\mathbf{e}_3=-\mathbf{e}_2\\ A_{13}\mathbf{e}_1+A_{23}\mathbf{e}_2+A_{33}\mathbf{e}_3=\mathbf{e}_3\end{cases}$$

则

$$A_{11}=A_{22}=-1,\quad A_{33}=1,\quad A_{ij}=0(i\neq j)$$

写成矩阵形式，则为

$$〔\mathbf{A}〕=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

设〔**B**〕为刚体转动90°的转动矩阵，则

$$\begin{cases} \mathbf{B}\cdot\mathbf{e}_1=\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{B}\cdot\mathbf{e}_2=-\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{B}\cdot\mathbf{e}_3=\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} B_{11}\mathbf{e}_1+B_{21}\mathbf{e}_2+B_{31}\mathbf{e}_3=\mathbf{e}_2 \\ B_{12}\mathbf{e}_1+B_{22}\mathbf{e}_2+B_{32}\mathbf{e}_3=-\mathbf{e}_1 \\ B_{13}\mathbf{e}_1+B_{23}\mathbf{e}_2+B_{33}\mathbf{e}_3=\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

于是，得

$$B_{21}=1,\quad B_{12}=-1,\quad B_{33}=1$$

其它，$B_{ij}=0$

写成矩阵形式，则为

$$[\mathbf{B}]=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

设〔**C**〕为刚体转动45°的转动矩阵，则

$$\mathbf{C}\cdot\mathbf{e}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_1+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{C}\cdot\mathbf{e}_2=\frac{-1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_1+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{C}\cdot\mathbf{e}_3=\mathbf{e}_3$$

即

$$\begin{cases} C_{11}\mathbf{e}_1+C_{21}\mathbf{e}_2+C_{31}\mathbf{e}_3=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_2 \\ C_{12}\mathbf{e}_1+C_{22}\mathbf{e}_2+C_{32}\mathbf{e}_3=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_2 \\ C_{13}\mathbf{e}_1+C_{23}\mathbf{e}_2+C_{33}\mathbf{e}_3=\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

于是，得

$$C_{11}=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad C_{21}=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad C_{12}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$C_{22}=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad C_{33}=1\quad \text{其它}C_{ij}=0$$

写成矩阵形式、则为

$$[C]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{c}$$

6. 张量的叉积

最简单的情况是两个矢量**a**和**b**的叉积，即

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times\mathbf{b}&=(a_i\mathbf{e}_i)\times(b_j\mathbf{e}_j)\\&=a_ib_j\mathbf{e}_i\times\mathbf{e}_j\\&=a_ib_je_{ijk}\mathbf{e}_k\\&=e_{kij}a_ib_j\mathbf{e}_k\end{aligned} \tag{1.21a}$$

三个矢量**a**，b和**c**的叉积为

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}\times\mathbf{c}=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c} \tag{1.21b}$$

事实上，设$\mathbf{v}=\mathbf{b}\times\mathbf{c}$，则由式(1.21a)知

$$v_i=e_{ijk}b_jc_k$$

再令 $\mathbf{w}=\mathbf{a}\times\mathbf{v}$ 则

$$\begin{aligned}w_p&=e_{pqi}a_qv_i=e_{pqi}e_{ijk}a_qb_jc_k\\&=(\delta_{pj}\delta_{qk}-\delta_{pk}\delta_{qj})a_qb_jc_k\\&=a_qb_pc_q-a_qb_qc_p\\&=(a_qc_q)b_p-(a_qb_q)c_p\end{aligned}$$

即

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}\times\mathbf{c}=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$$

三个矢量**a**,**b**和**c**的混合积定义为

$$\begin{aligned}[\mathbf{abc}]&=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}\\&=(e_{ijk}a_ib_j\mathbf{e}_k)\cdot(c_m\mathbf{e}_m)\\&=e_{ijk}a_ib_jc_m\delta_{km}\\&=e_{ijk}a_ib_jc_k\end{aligned}\qquad(1.21c)$$

它表示棱边为**a**,**b**,**c**的棱柱体的有向体积。

在一般情况下，两个任意张量**A**和**B**的叉积定义为并积和两者末首两个基矢量的叉积的联合运算。例如

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\times\mathbf{B}&=(A_{ijkl}\mathbf{e}_{ijkl})\times(B_{pqrst}\mathbf{e}_{pqrst})\\&=A_{ijkl}B_{pqrst}\mathbf{e}_{ijk}(\mathbf{e}_l\times\mathbf{e}_p)\mathbf{e}_{qrst}\\&=A_{ijkl}B_{pqrst}e_{lpm}\mathbf{e}_{ijk}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_{qrst}\\&=C_{ijkmqrst}\mathbf{e}_{ijkmqrst}\\&=\mathbf{C}\end{aligned}\qquad(1.22a)$$

其中

$$C_{ijkmqrst}=A_{ijkl}B_{pqrst}e_{lpm}\qquad(1.22b)$$

可见，两个张量叉乘一次所得张量的阶数比原两张量阶数和少一阶。

7. 二阶张量的迹

设**a**和**b**为两个矢量，则关于并矢**ab**的迹**trab**定义为

$$\mathbf{trab}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\qquad(1.23a)$$

对于基矢量，则为

$$tr(\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j)=\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j=\delta_{ij}\qquad(1.23b)$$

下面定义任意二阶张量**T**的迹。由于

$$\mathbf{T}=T_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$$

所以张量**T**的迹可以写成

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\mathbf{T} &= \mathrm{tr}(T_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j)\\ &= T_{ij}\mathrm{tr}(\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j)\\ &= T_{ij}\delta_{ij}\\ &= \mathbf{T}_{ii}\end{aligned} \tag{1.23c}$$

二阶张量的迹具有下列一些性质。

设**A**和**B**为两个二阶张量，则

（1） $$\mathrm{tr}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathrm{tr}\mathbf{A} + \mathrm{tr}\mathbf{B} \tag{1.23d}$$

事实上

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) &= (A_{ij}+B_{ij})\mathrm{tr}(\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j)\\ &= (A_{ij}+B_{ij})\delta_{ij}\\ &= A_{ii}+B_{ii}\\ &= \mathrm{tr}\mathbf{A}+\mathrm{tr}\mathbf{B}\end{aligned}$$

（2） $$\mathrm{tr}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathrm{tr}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}) \tag{1.23e}$$

事实上，设$\mathbf{C}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$，显然**C**仍为一个二阶张量、其分量为

$$C_{ij} = A_{im}B_{mj}$$

于是有

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathrm{tr}\mathbf{C} = C_{ii} = A_{im}B_{mi}$$

同样地，设$\mathbf{D}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$，则

$$\mathrm{tr}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}) = \mathrm{tr}\mathbf{D} = D_{ii} = B_{im}A_{mi} = B_{mi}A_{im}$$

故有

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathrm{tr}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A})$$

（3） $$\mathrm{tr}\mathbf{A}^2 = A_{im}A_{mi} \tag{1.23f}$$

$$\mathrm{tr}\mathbf{A}^n = A_{im}A_{mn}\cdots A_{ki} \tag{1.23g}$$

上列两式分别称为张量**A**的二阶矩和n阶矩。

例1.6 试用迹的形式表示各向同性牛顿流体的本构方

程。

【解】在直角坐标系下，各向同性牛顿流体的本构方程具有下列形式：

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu^* D_{ij} + \lambda^* D_{kk}\delta_{ij} \qquad (1.24a)$$

式中 T_{ij} 和 D_{ij} 为应力张量和变形速率张量，p为静水压力，而 μ^* 和 λ^* 则为流体的粘性系数。若写成对于任何坐标系都适用的不变性形式，则有

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\mu^*\mathbf{D} + \lambda^*(\mathrm{tr}\mathbf{D})\mathbf{I} \qquad (1.24b)$$

对上式两边取迹，则

$$\mathrm{tr}\mathbf{T} = -p\,\mathrm{tr}\mathbf{I} + 2\mu^*\mathrm{tr}\mathbf{D} + \lambda^*(\mathrm{tr}\mathbf{D})\,\mathrm{tr}\mathbf{I}$$
$$= -3p + 2\mu^*\mathrm{tr}\mathbf{D} + 3\lambda^*(\mathrm{tr}\mathbf{D})$$

于是

$$\frac{1}{3}\mathrm{tr}\mathbf{T} = -p + \frac{1}{3}(2\mu^* + 3\lambda^*)(\mathrm{tr}\mathbf{D})$$
$$= -p + \alpha^*\mathrm{tr}\mathbf{D} \qquad (1.24c)$$

其中

$$\alpha^* = \frac{2}{3}\mu^* + \lambda^* \qquad (1.24d)$$

它称为体积粘性系数。式 (1.24c) 是平均法向应力的表达式。

引进$\mathbf{T}$和$\mathbf{D}$的偏张量$\mathbf{T}^{(P)}$和$\mathbf{D}^{(P)}$，即

$$\mathbf{T}^{(P)} = \mathbf{T} - \frac{1}{3}(\mathrm{tr}\mathbf{T})\mathbf{I} \qquad (1.24e)$$

$$\mathbf{D}^{(P)} = \mathbf{D} - \frac{1}{3}(\mathrm{tr}\mathbf{D})\mathbf{I} \qquad (1.24f)$$

则式(1.24b)可以写成下列形式：

$$\mathbf{T}^{(P)} + \frac{1}{3}(\mathrm{tr}\mathbf{T})\mathbf{I} = -p\mathbf{I} + 2\mu^*\left[\mathbf{D}^{(P)} + \frac{1}{3}(\mathrm{tr}\mathbf{D})\mathbf{I}\right]$$

$$+\lambda^*(\mathrm{tr}\mathbf{D})\mathbf{I}$$

$$=-p\mathbf{I}+\alpha^*(\mathrm{tr}\mathbf{D})\mathbf{I}+2\mu^*\mathbf{D}^{(P)} \quad (1.24g)$$

利用式(1.24c)，则式(1.24g)与下列两个方程等价：

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{tr}\mathbf{T}&=-3[p+\alpha^*(\mathrm{tr}\mathbf{D})]\\ \mathbf{T}^{(P)}&=2\mu^*\mathbf{D}^{(P)}\end{aligned}\right\} \quad (1.24h)$$

其中第一式和第二式分别表示考虑流体的体积效应和剪切效应的方程。

例1.7 设给定两个二阶张量的矩阵如下：

$$[\mathbf{A}]=\begin{bmatrix}0 & k & 0\\ -k & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad [\mathbf{B}]=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 2k^2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

其中K为一数值、试求下列不变量值：

$\mathrm{tr}\mathbf{A}^2$, $\mathrm{tr}\mathbf{A}^3$, $\mathrm{tr}\mathbf{B}^2$, $\mathrm{tr}\mathbf{B}^3$, $\mathrm{tr}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$, $\mathrm{tr}\mathbf{A}^2\cdot\mathbf{B}$, $\mathrm{tr}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^2$, $\mathrm{tr}\mathbf{A}^2\cdot\mathbf{B}^2$

【解】

$$[\mathbf{A}]=\begin{bmatrix}0 & k & 0\\ k & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad [\mathbf{A}]^2=\begin{bmatrix}k^2 & 0 & 0\\ 0 & k^2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{A}]^3=\begin{bmatrix}0 & k^3 & 0\\ k^3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad [\mathbf{B}]=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 2k^2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{B}]^2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 4k^4 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad [\mathbf{B}]^3=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 8k^6 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{A}][\mathbf{B}]=\begin{bmatrix}0 & 2k^3 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad [\mathbf{A}]^2[\mathbf{B}]=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 2k^4 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{A}][\mathbf{B}]^2=\begin{bmatrix}0 & 4k^5 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad [\mathbf{A}]^2[\mathbf{B}]^2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 4k^6 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

于是，

$\mathrm{tr}\mathbf{A}^2=2k^2$，　　$\mathrm{tr}\mathbf{A}^3=0$

$\mathrm{tr}\mathbf{B}^2=4k^4$，　　$\mathrm{tr}\mathbf{B}^3=8k^6$

$\mathrm{tr}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=0$，　　$\mathrm{tr}(\mathbf{A}^2\cdot\mathbf{B})=2k^4$

$\mathrm{tr}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^2)=0$，　　$\mathrm{tr}(\mathbf{A}^2\cdot\mathbf{B}^2)=4k^6$

在研究里夫林—埃里克森（Rivlin-Ericksen）流体时需要进行这类运算。

§1·8　商　法　则

若在某个卡氏直角坐标系中按某种规律给出三指标量 $X(ijk)$，且有关系式

$$X(ijk)T_k=Q_{ij}$$

其中T_k为与$X(ijk)$无关的任意一阶张量，而Q_{ij}为二阶张量，问$X(ijk)$是否为张量？

为了回答这个问题，现在来考察指标量 $X(ijk)$ 的坐标变换规律。

在新坐标系中

$$X(i'j'k')T_{k'}=Q_{i'j'} \qquad (a)$$

而$\mathbf{T}$和$\mathbf{Q}$是张量，故有

$$T_k=\alpha_{k'k}T_{k'} \qquad (b)$$

$$Q_{i'j'}=\alpha_{i'i}\alpha_{j'j}Q_{ij}$$

$$=\alpha_{i'i}\alpha_{j'j}X(ijk)\alpha_{k'k}T_{k'} \qquad (c)$$

由式(a)和式(c)，得

$$[X(i'j'k') - \alpha_{i'i}\alpha_{j'j}\alpha_{k'k}X(ijk)]T_{k'} = 0$$

由于$T_{k'}$的任意性，故有

$$X(i'j'k') = \alpha_{i'i}\alpha_{j'j}\alpha_{k'k}X(ijk)$$

可见$X(ijk)$是一个三阶张量。这种判别$X(ijk)$是否为张量的法则称为商法则。下面将此法推广到一般情况。

商法则 在任一卡氏直角坐标系中，若$T_{i_1\cdots i_p}$是任意p阶张量，它与q指标量$X(i_1\cdots i_q)(q\geqslant p)$连并为

$$X(i_1\cdots i_q)Ti_1\cdots i_p = Qi_{p+1}\cdots i_q \qquad (d)$$

其中$Qi_{p+1}\cdots i_q$是一个q-p阶张量，则$X(i_1\cdots i_q)$必为q阶张量。

【证】 在新坐标系中

$$X(i'_1\cdots i'_q)Ti'_1\cdots i'_p = Qi'_{p+1}\cdots i'_q \qquad (e)$$

因为**T**和**Q**是张量，故有

$$Ti_1\cdots i_p = \alpha i'_1 i_1\cdots\alpha i'_p i_p Ti'_1\cdots i'_p \qquad (f)$$

$$Qi'_{p+1}\cdots i'_q = \alpha i'_{p+1} i_{p+1}\cdots\alpha i'_q i_q Qi_{p+1}\cdots i_q \qquad (g)$$

把式(g)代入式(e)，则

$$\begin{aligned}
&X(i'_1\cdots i'_q)Ti'_1\cdots i'_p\\
&= \alpha_{i'_{p+1}i_{p+1}}\cdots\alpha_{i'_q i_q}Qi_{p+1}\cdots i_q\\
&= \alpha_{i'_{p+1}i_{p+1}}\cdots\alpha_{i'_q i_q}X(i_1\cdots i_q)Ti_1\cdots i_q\\
&= \alpha_{i'_1 i_1}\cdots\alpha_{i'_p i_p}\alpha_{i'_{p+1}i_{p+1}}\cdots\alpha_{i'_q i_p}X(i_1\cdots i_q)Ti'_1\cdots i'_p
\end{aligned}$$

即

$$[X(i'_1\cdots i'_q) - \alpha_{i'_1 i_1}\cdots\alpha_{i'_p i_p}\alpha_{i'_{p+1}i_{p+1}}\cdots\alpha_{i'_q i_q} X(i_1\cdots i_q)]\, Ti'_1\cdots i'_p = 0$$

由$Ti'_1\cdots i'_p$的任意性，可得

$$X(i_1\cdots i'_q) = \alpha_{i'_1 i_1}\cdots\alpha_{i'_p i_p}\alpha_{i'_{p+1}i_{p+1}}\cdots\alpha_{i'_q i_q}X(i_1\cdots i_q)$$

根据张量的定义知，$X(i_1\cdots i_q)$为q阶张量。

推论 在任意一个卡氏直角坐标系中，若a_j是任意矢量，

它与T_{ij}连并后为一矢量b_i，即 $T_{ij}a_j = b_i$，则T_{ij}必是一个二阶张量。

由此可知，§1.5中张量的两种定义方法的确是等价的。

例如作用在面积元素ds上的力df为

$$\mathbf{df} = \mathbf{T}\cdot\mathbf{ds}$$

由于已知df和ds均为一阶张量（即矢量），故T必为二阶张量，我们称它为应力张量。

又例如线性弹性固体的广义虎克(Hooke)定律为

$$\mathbf{T} = \mathbf{C}:\mathbf{E}$$

或 $$T_{ij} = C_{ijkl}E_{kl}$$

其中T_{ij}和E_{kl}分别为应力张量和应变张量，它们都是二阶张量。由商法则知，C_{ijkl}必为四阶张量，通常称它为弹性常数张量。

§1.9恒等张量·转置张量·逆张量·正交张量

在这一节中，我们着重讲四个特殊张量。

1. 恒等张量

所谓恒等张量，就是把每个张量变换成自身的线性变换。若用I表示这个变换，对于矢量a，则有

$$\mathbf{I}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{a} \qquad (1.25a)$$

这个变换I就是恒等变换，它称为恒等张量或单位张量。对于单位基矢量来说，上式可以写成

$$\mathbf{I}\cdot\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{I}\cdot\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{I}\cdot\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3$$

可是恒等张量的卡氏分量可以写成

$$\mathbf{I}_{ij}=\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{I}\cdot\mathbf{e}_j=\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\delta_{ij} \tag{1.25b}$$

故有

$$\mathbf{I}=\delta_{ij}\mathbf{e}_{ij} \tag{1.25c}$$

这是一个二阶张量。把它写成矩阵形式则有

$$[\mathbf{I}]=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \tag{1.25d}$$

对于任意张量，例如对于任意三阶张量$\mathbf{A}$，则

$$\begin{aligned}\mathbf{I}\cdot\mathbf{A}&=(\delta_{ij}\mathbf{e}_{ij})\cdot(\mathbf{A}_{klm}\mathbf{e}_{klm})\\&=\delta_{ij}\mathbf{A}_{klm}\delta_{jk}\mathbf{e}_{ilm}\\&=\mathbf{A}_{ilm}\mathbf{e}_{ilm}=\mathbf{A}\end{aligned} \tag{1.25e}$$

恒等张量与任意二阶张量$\mathbf{B}$的双重点积，即为$\mathbf{B}$的迹。事实上，

$$\begin{aligned}\mathbf{I}:\mathbf{B}&=(\delta_{ij}\mathbf{e}_{ij}):(\mathbf{B}_{kl}\mathbf{e}_{kl})\\&=\delta_{ij}\mathbf{B}_{kl}\delta_{ik}\delta_{jl}\\&=\mathbf{B}_{ij}=\mathrm{tr}\mathbf{B}\end{aligned} \tag{1.25f}$$

这些就是恒等张量的作用。

2. 转置张量

对于任意二阶张量$\mathbf{T}$的转置用$\mathbf{T}^{\mathrm{T}}$表示。所谓$\mathbf{T}^{\mathrm{T}}$是这样来定义的：$\mathbf{T}^{\mathrm{T}}$对所有矢量$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$满足恒等式

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{a} \tag{1.26a}$$

显然，$\mathbf{T}^{\mathrm{T}}$仍然是个二阶张量。张量$\mathbf{T}$的转置张量$\mathbf{T}^{\mathrm{T}}$有时也称为张量$\mathbf{T}$的共轭张量，记作$\mathbf{T}^{*}$。

从上述定义，我们有

$$\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_j=\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{e}_i \tag{1.26b}$$

因此

$$T_{ij} = (T_{ji})^T$$

亦即$\mathbf{T}^T$的矩阵是$\mathbf{T}$的矩阵的转置。写成并矢形式，则

$$\mathbf{T} = T_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j \tag{1.27a}$$

而

$$\mathbf{T}^T = (T_{ij})^T\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = T_{ji}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j \tag{1.27b}$$

关于转置张量具有下列一些性质。

（1）二阶张量$\mathbf{D}$的转置张量$\mathbf{D}^T$的转置即为原张量，即

$$(\mathbf{D}^T)^T = \mathbf{D} \tag{1.27c}$$

事实上，

$$(\mathbf{D}^T)^T = (D_{ji})^T\mathbf{e}_{ij} = D_{ij}\mathbf{e}_{ij} = \mathbf{D}$$

（2）转置张量$\mathbf{D}^T$的迹等于原张量$\mathbf{D}$的迹，即

$$\mathrm{tr}\mathbf{D}^T = \mathrm{tr}\mathbf{D} \tag{1.27d}$$

事实上，

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\mathbf{D}^T &= \mathrm{tr}(D_{ji}\mathbf{e}_{ij})\\ &= D_{ji}\mathrm{tr}\mathbf{e}_{ij} = D_{ji}\delta_{ij}\\ &= D_{ii} = \mathrm{tr}\mathbf{D}\end{aligned}$$

（3）设$\mathbf{a}$为矢量，$\mathbf{B}$为二阶张量，则有

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}^T\cdot\mathbf{a} \tag{1.27e}$$

事实上，

$$\begin{aligned}\mathbf{B}^T\cdot\mathbf{a} &= (B_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j)\cdot(a_k\mathbf{e}_k)\\ &= a_kB_{ij}\delta_{jk}\mathbf{e}_i\\ &= a_jB_{ij}\mathbf{e}_i = \mathbf{a}\cdot\mathbf{B}\end{aligned}$$

（4）设$\mathbf{b}$为另一矢量，则有

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{B}^T\cdot\mathbf{a} \tag{1.27f}$$

事实上，

$$\begin{aligned}\mathbf{b}\cdot\mathbf{B}^T\cdot\mathbf{a} &= (b_k\mathbf{e}_k)\cdot(a_iB_{ij}\mathbf{e}_j)\\ &= a_iB_{ij}b_k\delta_{kj}\end{aligned}$$

$$= a_i B_{ij} b_j = \mathbf{a} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{b}$$

（5）设$\mathbf{B}$和$\mathbf{D}$均为二阶张量，则有

$$(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D})^T = \mathbf{D}^T \cdot \mathbf{B}^T \tag{1.27g}$$

事实上，

$$(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D})^T = (B_{ij} D_{jl})^T \mathbf{e}_{il}$$
$$= D_{ji} B_{lj} \mathbf{e}_{il}$$
$$= (D_{jl})^T (B_{lj})^T \mathbf{e}_{il} = \mathbf{D}^T \cdot \mathbf{B}^T$$

类似地，可以推知，任意个二阶张量依次点积的转置具有下列结果：

$$(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D} \cdots\cdots \mathbf{G})^T = \mathbf{G}^T \cdots\cdots \mathbf{D}^T \cdot \mathbf{B}^T \tag{1.27h}$$

3. 逆张量

设$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$为二阶张量，$\mathbf{I}$为单位张量，若下式成立：

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I} \tag{1.28a}$$

则$\mathbf{A}$称为$\mathbf{B}$的逆张量，记为$\mathbf{B}^{-1}$或$\overset{-1}{\mathbf{B}}$，即

$$\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{I}$$

若$\mathbf{B}$和$\mathbf{D}$均为二阶张量，则

$$(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D})^{-1} = \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{B}^{-1} \tag{1.28b}$$

事实上，因为

$$(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D})^{-1} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) = \mathbf{I}$$

而且

$$(\mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{B}^{-1}) \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) = \mathbf{D}^{-1} \cdot (\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{D}$$
$$= \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{I}$$

比较上列两式可知

$$(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D})^{-1} = \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{B}^{-1}$$

对于任意多个二阶张量，则有

$$(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D} \cdots\cdots \mathbf{G})^{-1} = \mathbf{G}^{-1} \cdots\cdots \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{B}^{-1} \tag{1.28c}$$

4. 正交张量

二阶张量$\mathbf{Q}$是正交张量系指$\mathbf{Q}$是使被变换矢量保持其长度和夹角都不变的线性变换，即对任意矢量$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$，有

$$|\mathbf{Q}\cdot\mathbf{a}| = |\mathbf{a}|,\quad |\mathbf{Q}\cdot\mathbf{b}| = |\mathbf{b}|$$

$$\cos(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \cos(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{a},\mathbf{Q}\cdot\mathbf{b}) \tag{1.29}$$

按此定义，对任意矢量$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$

$$(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{a})\cdot(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$$

但由式（1.27e）知

$$(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{a})\cdot(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{b}\cdot\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\cdot(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{a})$$

故有

$$\mathbf{b}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{Q}\cdot\mathbf{a}$$

亦即

$$\mathbf{b}\cdot\mathbf{I}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{Q}\cdot\mathbf{a}$$

或

$$\mathbf{b}\cdot(\mathbf{I}-\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q})\cdot\mathbf{a} = 0$$

因为$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$是任意矢量，故

$$\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{Q} = \mathbf{I}$$

即正交张量与其转置张量的点积是一个单位张量。可以证明正交张量的转置也是一个正交张量，亦即

$$\mathbf{Q}\cdot\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \mathbf{I}$$

于是

$$\mathbf{Q}\cdot\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{Q} = \mathbf{I} \tag{1.30}$$

换言之，$\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$为$\mathbf{Q}$的逆，也可写成$\mathbf{Q}^{-1}$

上式在矩阵记法中记为

$$[\mathbf{Q}][\mathbf{Q}]^{\mathrm{T}} = [\mathbf{Q}]^{\mathrm{T}}[\mathbf{Q}] = [\mathbf{I}]$$

而在指标记法中，则记为

$$Q_{im}Q_{jm} = Q_{mi}Q_{mj} = \delta_{ij}$$

例1.8 若将例1.5中转动后的新坐标再转回到原来坐标的位置，问转动矩阵如何？

【解】 （1）由例1.5有

$$[A]\{e\} = \{e'\}$$

其中$\{e\}$为旧坐标基矢量组，$\{e'\}$为新坐标基矢量组。将上式中$\{e\}$，$\{e'\}$分别以e_k，e'_k代替，写成张量记法，则

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_K &= A_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{e}_k \\ &= A_{ij}\mathbf{e}_i\delta_{jk} = A_{ik}\mathbf{e}_i = \mathbf{e}'_k\end{aligned} \tag{a}$$

由此，对于任意矢量$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{a} &= (A_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j)\cdot(a_k\mathbf{e}_k) \\ &= a_k\mathbf{e}'_k\end{aligned} \tag{b}$$

则有

$$|\mathbf{A}\cdot\mathbf{a}| = |\mathbf{a}| \tag{c}$$

而

$$\begin{aligned}&(\mathbf{A}\cdot\mathbf{a})\cdot(\mathbf{A}\cdot\mathbf{b}) \\ &= (a_i\mathbf{e}'_i)\cdot(b_j\mathbf{e}'_j) \\ &= a_ib_i = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\end{aligned}$$

即

$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{a})\cdot(\mathbf{A}\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \tag{d}$$

可见$\mathbf{A}$为正交张量，故有

$$[A]^T = [A]^{-1}$$

于是

$$\{e'\} = [A]^{-1}\{e\} = [A]^T\{e\}$$

故

$$[A] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = [A]^T = [A]^{-1} \tag{1.31a}$$

即为所求矩阵。

同样地

（2）

$$[\mathbf{B}]^{-1}=[\mathbf{B}]^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} \tag{1.31b}$$

（3）

$$[\mathbf{C}]^{-1}=[\mathbf{C}]^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&0&1\end{pmatrix} \tag{1.31c}$$

下面给出一个综合性的例题。

例1.9 设$\mathbf{Q}$为正交张量，$\mathbf{A}$为二阶张量，则下列关系式成立：

$$\mathrm{tr}(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{Q}^{\mathrm{T}})=\mathrm{tr}\mathbf{A} \tag{1.31d}$$

$$\mathrm{tr}[(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{Q}^{\mathrm{T}})^2]=\mathrm{tr}\mathbf{A}^2 \tag{1.31e}$$

【解】 事实上，

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{Q}^{\mathrm{T}})&=\mathrm{tr}(Q_{ij}A_{jk}Q_{lk}\mathbf{e}_{il})\\&=Q_{ij}A_{jk}Q_{lk}\delta_{il}\\&=A_{jk}(Q_{ki})^{\mathrm{T}}Q_{ij}\\&=\mathrm{tr}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{Q})\\&=\mathrm{tr}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{I})\\&=\mathrm{tr}\mathbf{A}\end{aligned}$$

另外，因为

$$\begin{aligned}(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{Q}^{\mathrm{T}})^2&=(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{Q}^{\mathrm{T}})\cdot(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{Q}^{\mathrm{T}})\\&=\mathbf{Q}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{I}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

$$= \mathbf{Q}\cdot\mathbf{A}^2\cdot\mathbf{Q}^T$$

所以

$$\begin{aligned} tr[(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{Q}^T)^2] &= tr(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{A}^2\cdot\mathbf{Q}^T) \\ &= tr(\mathbf{A}^2\cdot\mathbf{Q}^T\cdot\mathbf{Q}) \\ &= tr\mathbf{A}^2 \end{aligned}$$

§1.10 对称张量·反称张量·对偶矢量

若二阶张量$\mathbf{T}$与其自身的转置张量$\mathbf{T}^T$相等，即$\mathbf{T}=\mathbf{T}^T$，则称$\mathbf{T}$为对称张量，其对应的分量为

$$T_{ij}=(T_{ij})^T=T_{ji} \tag{1.32a}$$

写成矩阵形式则为

$$[\mathbf{T}]=[\mathbf{T}^T]=\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{12} & T_{22} & T_{23} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{pmatrix} \tag{1.32b}$$

二阶对称张量只有六个独立分量。

若二阶张量$\mathbf{T}$具有性质

$$\mathbf{T}=-\mathbf{T}^T$$

则它称为反称张量，其对应的分量为

$$T_{ij}=-T_{ji} \tag{1.33a}$$

写成矩阵形式则为

$$[\mathbf{T}]=[-\mathbf{T}^T]=\begin{pmatrix} 0 & T_{12} & T_{13} \\ -T_{12} & 0 & T_{23} \\ -T_{13} & -T_{23} & 0 \end{pmatrix} \tag{1.33b}$$

可见二阶反称张量，只有三个不同的独立分量。它相当于一个矢量。因此，对于二阶反称张量还可以定义它的对偶矢量，即：对任意二阶反称张量$\mathbf{T}$，我们总可以找到一个矢量$\mathbf{t}^A$，使得

任一矢量$\mathbf{a}$在$\mathbf{T}$作用下变换成为$\mathbf{t}^{\wedge}\times\mathbf{a}$，亦即

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{t}^{\wedge}\times\mathbf{a} \tag{1.34}$$

我们称矢量$\mathbf{t}^{\wedge}$是二阶反称张量$\mathbf{T}$的对偶矢量。

对偶矢量$\mathbf{t}^{\wedge}$的分量可以用下列方法给出。

若把$\mathbf{a}$考虑成单位基矢量$\mathbf{e}_j$，则由定义知

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_j=\mathbf{t}^{\wedge}\times\mathbf{e}_j \tag{a}$$

又知

$$T_{ij}=\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_j \tag{b}$$

把式(a)代入式(b)，则

$$\begin{aligned}T_{ij}&=\mathbf{e}_i\cdot(\mathbf{t}^{\wedge}\times\mathbf{e}_j)=\mathbf{t}^{\wedge}\cdot(\mathbf{e}_j\times\mathbf{e}_i)\\&=-\mathbf{t}^{\wedge}\cdot(\mathbf{e}_i\times\mathbf{e}_j)\end{aligned} \tag{c}$$

而

$$\begin{aligned}T_{ji}&=\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_i=\mathbf{e}_j\cdot(\mathbf{t}^{\wedge}\times\mathbf{e}_i)\\&=\mathbf{t}^{\wedge}\cdot(\mathbf{e}_i\times\mathbf{e}_j)\end{aligned} \tag{d}$$

比较式(c)和式(d)，则有

$$T_{ij}=-T_{ji}$$

由此可见，二阶张量$\mathbf{T}$必须是反称的。于是

$$\begin{aligned}T_{32}&=-T_{23}=\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_2\\&=\mathbf{t}^{\wedge}\cdot(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)=\mathbf{t}^{\wedge}\cdot\mathbf{e}_1=t_1{}^{\wedge}\end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned}T_{13}&=-T_{31}=\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_3\\&=\mathbf{t}^{\wedge}\cdot(\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1)=\mathbf{t}^{\wedge}\cdot\mathbf{e}_2=t_2{}^{\wedge}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T_{21}&=-T_{12}=\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_1\\&=\mathbf{t}^{\wedge}\cdot(\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2)=\mathbf{t}^{\wedge}\cdot\mathbf{e}_3=t_3{}^{\wedge}\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\mathbf{t}^{\wedge}&=t_1{}^{\wedge}\mathbf{e}_1+t_2{}^{\wedge}\mathbf{e}_2+t_3{}^{\wedge}\mathbf{e}_3\\&=T_{32}\mathbf{e}_1+T_{13}\mathbf{e}_2+T_{21}\mathbf{e}_3\end{aligned}$$

$$= -(T_{23}\mathbf{e}_1 + T_{31}\mathbf{e}_2 + T_{12}\mathbf{e}_3) \tag{1.35a}$$

如果采用置换符号e_{ijk}，则可写成

$$2\mathbf{t}^A = -e_{ijk}T_{jk}\mathbf{e}_i \tag{1.35b}$$

或

$$2t_i{}^A\mathbf{e}_i = -e_{ijk}T_{jk}\mathbf{e}_i \tag{1.35c}$$

即

$$t^A{}_i = -\frac{1}{2}e_{ijk}T_{jk} \tag{1.35d}$$

在上式两边乘以e_{imn}，则有

$$e_{imn}t_i{}^A = -\frac{1}{2}e_{imn}e_{ijk}T_{jk}$$

$$= -\frac{1}{2}(\delta_{mj}\delta_{nk} - \delta_{mk}\delta_{nj})T_{jk}$$

$$= -\frac{1}{2}(T_{mn} - T_{nm})$$

$$= -T_{mn}$$

即

$$T_{mn} = -e_{imn}t_i{}^A \tag{1.35e}$$

任意一个二阶张量T总可以分解为一个对称张量和一个反称张量之和，即它可分解为下列形式：

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^S + \mathbf{T}^A \tag{1.35f}$$

这里

$$\mathbf{T}^S = \frac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{T}^T) \qquad (\mathbf{T}\text{的对称部分})$$

$$\mathbf{T}^A = \frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^T) \qquad (\mathbf{T}\text{的反称部分})$$

例1.10 若

$$[T_{ij}] = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

试将$[T_{ij}]$分解成对称和反称张量，并求反称张量的对偶矢量。

【例】 现把二阶张量 T 分解为对称张量 $\mathbf{T}^S$ 和反称张量 $\mathbf{T}^A$，即$\mathbf{T} = \mathbf{T}^S + \mathbf{T}^A$。写成矩阵形式就是

$$[T_{ij}] = [T_{ij}]^S + [T_{ij}]^A$$

其中

$$[T_{ij}]^S = \frac{[T_{ij}] + [T_{ij}]^T}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 3/2 & 1 \\ 3/2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

即$\mathbf{T}^S$是一个对称张量。

$$[T_{ij}]^A = \frac{[T_{ij}] - [T_{ij}]^T}{2}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

即$\mathbf{T}^A$是一个反称张量。

利用式（1.35a），我们可以求得$\mathbf{T}^A$的对偶矢量$\mathbf{t}^A$：

$$\mathbf{t}^A = -(T^A_{23}\mathbf{e}_1 + T^A_{31}\mathbf{e}_2 + T_{12}{}^A\mathbf{e}_3)$$

$$= -(\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{e}_3)$$

$$= -(e_1 + \frac{1}{2}e_3)$$

对于任意阶张量，若把它的任意两个指标置换后张量不变，则该张量称为对此两个指标对称；若张量只改变正负号，则称该张量对此两个指标反称。若对全部指标两两对称或反称，则该张量分别称为对称张量或反称张量。例如

$$S_{(ij)k} = S_{(ji)k}$$

$$A_{[ij]_k} = -A_{[ji]k}$$

$$Q_{ijk} = Q_{ikj} = Q_{kji}$$

和 $R_{[ij]k} = -R_{[ik]j} = -R_{[ji]k}$

则分别为对指标 i 和 j 对称的张量，对指标 i 和 j 为反称的张量，对称张量和反称张量。

张量的p个指标 $(i_1, \cdots, i_p)$ 总共有P!个置换，对应地得到P!个同分异构张量。把它们作算术平均的运算称为原张量对 $(i_1, \cdots, i_p)$ 的对称化。若将 $(i_1, \cdots, i_p)$ 的 1/2p! 个奇置换对应的同分异构张量改变符号，再与1/2p! 个偶置换对应的同分异构张量作算术平均，这种运算称为原张量对 $(i_1, \cdots, i_p)$ 的反称化。例如

$$T_{(ijk)} = \frac{1}{3!}(T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij} + T_{jik} + T_{kji} + T_{ikj})$$

$$A_{[ijk]} = \frac{1}{3!}(T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij} - T_{jik} + T_{kji} - T_{ikj})$$

式中角标圆括号和方括号分别表示其中的指标参与对称化和反称化的运算。

若圆括号（ ）或方括号〔 〕内的指标下面加一横扛，则表示该指标不参与对称化或反称化的运算。例如

$$B_{(i\underline{j}k)} = \frac{1}{2!}(B_{ijk} - B_{jik})$$

$$C_{(ijk)}=\frac{1}{2!}(C_{ijk}+C_{kji})$$

下面举一个弹性理论中的例子。表征线性弹性物质的本构方程，即广义虎克定律，具有下列形式：

$$T_{kl}=C_{klmn}E_{mn} \tag{a}$$

由此式可解出

$$E_{kl}=S_{klmn}T_{mn} \tag{b}$$

这里T_{kl}和E_{kl}以及C_{klmn}和S_{klmn}分别为应力张量和应变张量以及弹性常数张量和柔性常数张量。T_{kl}和E_{kl}都是对称张量，故可写成$T_{(kl)}$和$E_{(kl)}$，而

$$C_{klmn}=C_{lkmn}=C_{klnm}=C_{mnkl}$$

$$S_{klmn}=S_{lkmn}=S_{klnm}=S_{mnkl}$$

我们把式(b)代入式(a)，则有

$$T_{kl}=C_{klmn}S_{mnPr}T_{Pr}$$

考虑到上述对称条件，则知

$$C_{klmn}S_{mnPr}=\frac{1}{2}(\delta_{kP}\delta_{lr}+\delta_{kr}\delta_{lP}) \tag{1.36}$$

这便是弹性常数张量和柔性常数张量之间应当满足的关系式。

下面再举两个例子来结束这一节。

我们可以看出，若S_{ijk}关于i和j是对称的，而A_{ij}关于i和j是反称的，则有

$$S_{ijk}A_{ij}=0$$

事实上，由于对称和反称的性质可知

$$S_{ijk}A_{ij}=-S_{jik}A_{ji}=-S_{ijk}A_{ij}$$

所以

$$2S_{ijk}A_{ij}=0$$

即 $S_{ijk}A_{ij}=0$

又如，若e_{ijk}为置换符号，而S_{jk}为对称张量，则有

$$e_{ijk}S_{jk}=0$$

事实上，由于$e_{ijk}=-e_{ikj}$，$S_{jk}=S_{kj}$，故有

$$e_{ijk}S_{jk}=-e_{ikj}S_{kj}=-e_{ijk}S_{jk}$$

所以

$$2e_{ijk}S_{jk}=0$$

即 $$e_{ijk}S_{jk}=0$$

类似这样的结果在张量运算中常要用到。

§1.11 张量的特征值和特征矢量

考察一个二阶张量$\mathbf{T}$，若任意一个矢量$\mathbf{a}$在张量$\mathbf{T}$作用下变换成为一个平行于其自身的矢量，即

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{a}=\lambda\mathbf{a} \tag{1.37}$$

则称矢量$\mathbf{a}$是二阶张量$\mathbf{T}$的特征矢量，而λ称为相应的特征值。

如果$\mathbf{a}$是具有线性变换$\mathbf{T}$的相应特征值λ的特征矢量，则平行于$\mathbf{a}$的任一矢量（例如$\alpha\mathbf{a}$）也是具有同一特征值λ的特征矢量。这是因为

$$\mathbf{T}\cdot(\alpha\mathbf{a})=\alpha\mathbf{T}\cdot\mathbf{a}=\alpha(\lambda\mathbf{a})=\lambda(\alpha\mathbf{a})$$

因此，由式（1.37）定义的特征矢量具有任意长度。这样，为以下证明方便起见，我们可把特征矢量看作是具有单位长度。

一个张量可在许多不同方向内具有特征矢量。例如$\mathbf{I}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}$，任意矢量都是单位张量$\mathbf{I}$的特征矢量，而且特征值都等于1。对于张量$\alpha\mathbf{I}$同样正确，只要取所有特征值都等于$\alpha$。

此外，为了求得特征值和特征矢量，我们取单位矢量$\mathbf{n}$为特征矢量，则

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{n}=\lambda\mathbf{n}=\lambda\mathbf{I}\cdot\mathbf{n}$$

因此

$$(\mathbf{T}-\lambda\mathbf{I})\cdot\mathbf{n}=\mathbf{0} \tag{1.38a}$$

这里$\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}=1$。令$\mathbf{n}=\alpha_i\mathbf{e}_i$，则上式可写成下列分量形式：

$$(T_{ij}-\lambda\delta_{ij})\alpha_i=0$$

其中$\alpha_i\alpha_i=1$。写成展开形式，则有

$$\begin{aligned}&(T_{11}-\lambda)\alpha_1+T_{12}\alpha_2+T_{13}\alpha_3=0\\&T_{12}\alpha_1+(T_{22}-\lambda)\alpha_2+T_{23}\alpha_3=0\\&T_{31}\alpha_1+T_{32}\alpha_2+(T_{33}-\lambda)\alpha_3=0\end{aligned} \tag{1.38b}$$

以及

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1 \tag{1.38c}$$

方程(1.38b)是关于α_1、α_2、α_3的线性齐次方程，该方程关于诸α_i为非零解的充要条件是其系数行列式为零，即

$$\begin{vmatrix}T_{11}-\lambda & T_{12} & T_{13}\\ T_{21} & T_{22}-\lambda & T_{23}\\ T_{31} & T_{32} & T_{33}-\lambda\end{vmatrix}=0 \tag{1.39}$$

或

$$|\mathbf{T}-\lambda\mathbf{I}|=0$$

若$\mathbf{T}$给定，则其分量T_{ij}为已知，于是式（1.39）是一个关于λ的三次方程，我们称之为$\mathbf{T}$的特征方程。它的根是$\mathbf{T}$的特征值。

令$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$是式(1.39)的三个根，把诸$\lambda_i$代回式(1.38b)并与式（1.39）联立求出$\alpha_i$，再由$\mathbf{n}=\alpha_i\mathbf{e}_i$，即可确定特征矢量$\mathbf{n}$。下面举例说明求特征值和特征矢量的方法。

例1.11 对某个单位基矢量组$(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$，二阶张量$\mathbf{T}$的矩阵由下式给出：

$$[\mathbf{T}]=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

试求其特征值及其相应的特征矢量。

【解】 首先求特征值λ。由特征方程

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0$$

即

$$(1-\lambda)[(3-\lambda)^2-1]=0$$

解之，得特征值

$$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=4$$

其次分别求出与$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$对应的特征矢量。

对于$\lambda_1=1$，由方程组(1.38b)知

$$2\alpha_1-\alpha_2=0$$

$$-\alpha_1+2\alpha_2=0$$

$$0\alpha_3=0$$

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1$$

由第一个和第二个方程知$\alpha_1=\alpha_2=0$，故

$$\alpha_3=\pm 1$$

于是，由特征值$\lambda_1=1$所对应的特征矢量为$\mathbf{n}=\pm\mathbf{e}_3$；

同样，对于$\lambda_2=2$，有

$$\alpha_1-\alpha_2=0$$

$$-\alpha_1+\alpha_2=0$$

$$-\alpha_3=0$$

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1$$

故 $\alpha_3 = 0, \alpha_1 = \alpha_2 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以特征矢量为 $\mathbf{n} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$。

当$\lambda_3 = 4$时，$\alpha_3 = 0, \alpha_1 = -\alpha_2 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以特征矢量为 $\mathbf{n} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$

例1.12 试求绕$\mathbf{e}_3$轴转动90° 时转动张量$\mathbf{B}$的特征值和特征矢量。

【解】 由例1.5知张量$\mathbf{B}$的矩阵是

$$[\mathbf{B}] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

所以它的特征方程为

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & 0-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

即

$$(1-\lambda)(1+\lambda^2) = 0$$

因此，只有一个特征值是实根，即 $\lambda_1 = 1$， 其它两个是复根，故只有一个实特征矢量。于是我们只计算对应于 $\lambda_1 = 1$ 的特征矢量。由

$$-\alpha_1 - \alpha_2 = 0$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 0$$

$$0\alpha_3 = 0$$

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$$

可以解出$\alpha_1 = 1$，$\alpha_2 = 0$，$\alpha_3 = \pm 1$，亦即特征矢量 $\mathbf{n} = \pm\mathbf{e}_3$。显

然，它平行于转动轴。

任意二阶张量$\mathbf{T}$的特征方程(1.38b)是一个关于λ的三次方程，它可以写成

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0 \tag{1.40}$$

其中

$$I_1 = T_{11} + T_{22} + T_{33} = T_{ii} = \mathrm{tr}\mathbf{T}$$

$$= \frac{1}{1!}\delta_{ri}T_{ir} \tag{1.41c}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{13} \\ T_{31} & T_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ji})$$

$$= \frac{1}{2}[(\mathrm{tr}\mathbf{T})^2 - \mathrm{tr}\mathbf{T}^2]$$

$$= \frac{1}{2!}e_{ijk}e_{rst}T_{ir}T_{js}$$

$$= \mathbf{T}_{[ij}\mathbf{T}_{ij]} \tag{1.41b}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} = \det\mathbf{T}$$

$$= \frac{1}{3!}e_{ijk}e_{rst}T_{ir}T_{js}T_{kt}$$

$$= \mathbf{T}_{[ij}\mathbf{T}_{ij}\mathbf{T}_{kk]} \tag{1.41c}$$

这里I_1、I_2、I_3分别称为张量$\mathbf{T}$的第一、第二、第三主不变量或标量不变量。因为λ是$\mathbf{T}$的特征值，而特征值与基矢量($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$)的选择无关，所以三次方程的系数I_1, I_2, I_3对所有的基

矢量$(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$应当相同，故称它们为$\mathbf{T}$的标量不变量。

在连续介质力学中，我们常常遇到一些实的对称张量，例如应力张量，应变张量，变形变率张量等。任一实对称张量的特征值都是实的。对于实对称张量至少存在三个实特征矢量。我们称之为主方向，相应的特征值称之为主值。现在就来证明。

首先研究存在三个不等实根$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$的情况。令$\mathbf{n}_1$和$\mathbf{n}_2$是$\mathbf{T}$的特征值$\lambda_1$和$\lambda_2$所对应的两个特征矢量。于是由定义知

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{n}_1=\lambda_1\mathbf{n}_1 \tag{a}$$

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{n}_2=\lambda_2\mathbf{n}_2 \tag{b}$$

将式(a)及式(b)分别点乘以$\mathbf{n}_2$和$\mathbf{n}_1$，则有

$$\mathbf{n}_2\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{n}_1=\lambda_1\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2 \tag{c}$$

$$\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{n}_2=\lambda_2\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2 \tag{d}$$

由张量的转置定义知

$$\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{n}_2=\mathbf{n}_2\cdot(\mathbf{T}^T\cdot\mathbf{n}_1)=\mathbf{n}_2\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{n}_1$$

所以式(c)与式(d)相等，即

$$\lambda_1\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2=\lambda_2\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2 \tag{e}$$

亦即

$$(\lambda_1-\lambda_2)\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2=0$$

若$\lambda_1\neq\lambda_2$则$\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2=0$成立，故知$\mathbf{n}_1$与$\mathbf{n}_2$必互相垂直。

用类似的方法，可以证明$\mathbf{n}_1$和$\mathbf{n}_3$及$\mathbf{n}_2$和$\mathbf{n}_3$也必定互相垂直。于是，对于三个不等的特征值，证明了必定存在三个互相垂直的主方向。

其次证明有一个重根，亦即，特征矢量$\mathbf{n}_1$和$\mathbf{n}_2$具有同一特征值λ的情况，即$\lambda_1=\lambda_2=\lambda$。

由定义知

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{n}_1=\lambda\mathbf{n}_1$$

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{n}_2=\lambda\mathbf{n}_2$$

则对任意的标量α和β，有

$$\mathbf{T}\cdot(\alpha\mathbf{n}_1+\beta\mathbf{n}_2)=\lambda(\alpha\mathbf{n}_1+\beta\mathbf{n}_2)$$

也就是说，$\alpha\mathbf{n}_1+\beta\mathbf{n}_3$也是具有同一特征值λ的特征矢量。换言之，如果存在具有同一特征值的两个不同的特征矢量，则必具有同一特征值的无限多个特征矢量，它们组成一个平面。于是，若特征方程具有根$\lambda_1=\lambda_2=\lambda$，$\lambda_3\neq\lambda$，则$\mathbf{n}_3$垂直于λ所对应的任意特征矢量，亦即有无限多个特征矢量位于法线为$\mathbf{n}_3$的平面内。虽不唯一，但也总是存在三个互相垂直的主方向。

最后，在三重根的情况下，则

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{n}_1=\lambda\mathbf{n}_1$$

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{n}_2=\lambda\mathbf{n}_2$$

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{n}_3=\lambda\mathbf{n}_3$$

对任意标量α_1、α_2、α_3，有

$$\mathbf{T}\cdot(\alpha_1\mathbf{n}_1+\alpha_2\mathbf{n}_2+\alpha_3\mathbf{n}_3)=\lambda(\alpha_1\mathbf{n}_1+\alpha_2\mathbf{n}_2+\alpha_3\mathbf{n}_3)$$

因此任一矢量都是特征矢量。

总之，对每个实对称张量至少存在一组三个互相垂直的主方向。以后将会看到这个结论在连续介质力学中的应用。

既然已经证明了一个实对称张量总是存在一组互相垂直的主方向，那么，我们就可令$\mathbf{n}_1$，$\mathbf{n}_2$，$\mathbf{n}_3$是这些方向上的单位矢量。于是，若以$(\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2,\mathbf{n}_3)$为基矢量，则任一张量$\mathbf{T}$的分量可以写成

$$T_{ij}=\mathbf{n}_i\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{n}_j$$

即 $T_{11}=\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{n}_1=\mathbf{n}_1\cdot(\lambda_1\mathbf{n}_1)=\lambda_1$

$$T_{22}=\mathbf{n}_2\cdot\mathbf{T}\mathbf{n}_2=\mathbf{n}_2\cdot(\lambda_2\mathbf{n}_2)=\lambda_2$$

$$T_{33}=\mathbf{n}_3\cdot\mathbf{T}\mathbf{n}_3=\mathbf{n}_3\cdot(\lambda_3\mathbf{n}_3)=\lambda_3$$

$$T_{12}=T_{21}=\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{n}_2=\lambda_2\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2=0$$

$$T_{23}=T_{32}=\mathbf{n}_2\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{n}_3=\lambda_3\mathbf{n}_2\cdot\mathbf{n}_3=0$$

$$T_{31}=T_{13}=\mathbf{n}_3\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{n}_1=\lambda_1\mathbf{n}_3\cdot\mathbf{n}_1=0$$

写成矩阵形式就是

$$[\mathbf{T}]=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix} \tag{1.41d}$$

这是一个对角矩阵，其主对角线上元素是张量**T**的特征值，即主值。现在证明张量**T**的主值包括张量 **T** 的所有矩阵的对角线元素可能有的最大值和最小值。

首先，对任一单位矢量$\mathbf{e}'_1$，有

$$\mathbf{e}'_1=\alpha\mathbf{n}_1+\beta\mathbf{n}_2+\gamma\mathbf{n}_3$$

于是

$$T'_{11}=\mathbf{e}'_1\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}'_1$$

$$=[\alpha\ \beta\ \gamma]\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{Bmatrix}$$

$$=\lambda_1\alpha^2+\lambda_2\beta^2+\lambda_3\gamma^2$$

不失一般性，可设 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\lambda_3$，并注意到 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$，则

$$\lambda_1=\lambda_1(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$$

$$\geqslant\lambda_1\alpha^2+\lambda_2\beta^2+\lambda_3\gamma^2=T'_{11}$$

所以 $\lambda_1\geqslant T'_{11}$

类似地，可以证明$\lambda_1\geqslant T'_{22}$,$\lambda_2\geqslant T'_{33}$，亦即若$\lambda_1$是主值（最大的），则**T**的任一对角线元素都必小于λ_1。

同样地

$$\lambda_1\alpha^2+\lambda_2\beta^2+\lambda_3\gamma^2\geqslant\lambda_3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=\lambda_3$$

亦即

$$T'_{11}\geqslant\lambda_3$$

也就是说，任一[T]的主对角线元素都大于主值中的最小值。

因此T的主值的最大值和最小值一定分别大于等于和小于等于T的所有〔T〕的对角线元素的最大值和最小值。

借助于T的特征值式（1.41d），则诸标量不变量可以写成下列简单形式：

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ I_2 &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 \\ I_3 &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \end{aligned} \tag{1.41e}$$

例1.13 若

$$[T] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

试求其标量不变量及其特征值。

【解】 由式(1.41a)－(1.41c)知

$$I_1 = 2 + 3 - 3 = 2$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= -25$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -50$$

再将I_1、I_2和I_3的值代入式（1.40）中，则有

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 25\lambda + 50 = 0$$

亦即

$$(\lambda - 2)(\lambda - 5)(\lambda + 5) = 0$$

因此，特征值为$\lambda_1 = 2$，$\lambda_2 = 5$，$\lambda_3 = -5$。

§1.12 凯莱—哈密顿定理

若在式（1.40）中，用二阶张量**T**代替入，则得下式：

$$\mathbf{T}^3 - I_1\mathbf{T}^2 + I_2\mathbf{T} - I_3\mathbf{I} = \mathbf{0} \qquad (1.42a)$$

或写成分量形式如下：

$$T_{ij}T_{ik}T_{kl} - I_1T_{ik}T_{kl} + I_2T_{il} - I_3\delta_{il} = 0 \qquad (1.42b)$$

它表示张量T满足它自身的特征方程。这就是著名的凯莱—哈密顿(Cayley－Hamilton)定理。

关于凯莱—哈密顿定理有许多种证法。下面我们[23]给出一种比较简单的证法。

【证】 三次凯莱—哈密顿方程与下式等价：

$$T_{[il}T_{jj}T_{kk}\delta_{s]l} = 0 \qquad (1.42c)$$

实际上，这是对专著[1]证法的简化。现在对上式解放下标，则有

$$\begin{aligned} T_{[il}T_{jj}T_{kk}\delta_{s]l} &= \frac{1}{4}(T_{il}T_{jj}T_{kk}\delta_{sl} - T_{il}T_{jj}T_{kl}\delta_{sk} - \\ &\quad T_{il}T_{jl}T_{kk}\delta_{si} - T_{il}T_{jj}T_{kk}\delta_{si}) \\ &= \frac{1}{4}(T_{il}T_{jj}T_{kk}\delta_{sl} - 3T_{il}T_{jj}T_{kl}\delta_{sk}) \end{aligned} \qquad (a)$$

但是

$$T_{[il}T_{jj}T_{kl]} = \frac{1}{3}(T_{[il}T_{jj]}T_{kl} - 2T_{[il}T_{j]l}T_{kj}) \qquad (b)$$

而

$$T_{[il}T_{j]l} = \frac{1}{2}(T_{il}T_{jl} - T_{il}T_{jl}) \qquad (c)$$

把式（c）代入式（b），再把结果代入式（a），则可写出下

式：

$$T_{(ii}T_{jj}T_{kk}\delta_{sl)} = \frac{1}{4}(T_{(ii}T_{jj}T_{kk}\delta_{sl} - T_{(ii}T_{jj}T_{kl}\delta_{sk} + T_{ii}T_{j)}T_{kj}\delta_{sk} + T_{ii}T_{jj}T_{k)}\delta_{sk} + T_{ii}T_{jj}T_{kj}\delta_{sk}) = 0$$

考虑到式(1.41a)－(1.41c)，则上式可写成下列形式：

$$I_3\delta_{sl} - I_2T_{sl} + I_1T_{sj}T_{jl} - T_{sj}T_{jk}T_{kl} = 0$$

在连续介质力学中，时常要用到凯莱——哈密顿定理。在应用中有时需要改变一下原来凯莱——哈密顿方程的形式。

例如，若张量$\mathbf{T}$的逆，即$\mathbf{T}^{-1}$存在，则对式(1.42a)点乘以$\mathbf{T}^{-1}$后，则得

$$\mathbf{T}^2 = \mathbf{T}^3\cdot\mathbf{T}^{-1} = I_1\mathbf{T}^2\cdot\mathbf{T}^{-1} - I_2\mathbf{T}\cdot\mathbf{T}^{-1} + I_3\mathbf{I}\cdot\mathbf{T}^{-1}$$
$$= I_1\mathbf{T} - I_2\mathbf{I} + I_3\mathbf{T}^{-1} \qquad (1.42d)$$

应用凯莱－哈密顿定理，我们可以用$\mathbf{T}^2$，$\mathbf{T}$和$\mathbf{I}$的线性组合表示张量$\mathbf{T}$的任意正次幂$\mathbf{T}^n$，$n \geqslant 3$。例如

$$\mathbf{T}^4 = \mathbf{T}\cdot\mathbf{T}^3 = \mathbf{T}\cdot(I_1\mathbf{T}^2 - I_2\mathbf{T} + I_3\mathbf{I})$$
$$= I_1\mathbf{T}^3 - I_2\mathbf{T}^2 + I_3\mathbf{T}$$
$$= I_1(I_1\mathbf{T}^2 - I_2\mathbf{T} + I_3\mathbf{I}) - I_2\mathbf{T}^2 + I_3\mathbf{T}$$
$$= (I_1^2 - I_2)\mathbf{T}^2 + (I_3 - I_1I_2)\mathbf{T} + I_1I_3\mathbf{I} \qquad (1.42e)$$

例1.14 试述各向同性弹性固体的柯西(Cauchy)应力本构方程的形式。

【解】 各向同性弹性固体的柯西应力本构方程可写成下列形式：

$$\mathbf{t} = h_0\mathbf{I} + h_1\mathbf{C}^{-1} + h_2(\mathbf{C}^{-1})^2 \qquad (1.43a)$$

或

$$t_{ij} = h_0\delta_{ij} + h_1C^{-1}{}_{ij} + h_2C^{-1}{}_{im}C^{-1}{}_{mj} \qquad (1.43b)$$

式中$\mathbf{t}$和$\mathbf{C}^{-1}$分别为柯西应力张量和芬格(Finger)变形张量，而h_0，h_1和h_2为与$\mathbf{C}^{-1}$的主不变量相关的函数。

在式（1.42c）中，令$\mathbf{T}=\mathbf{C}^{-1}$，则有

$$(\mathbf{C}^{-1})^2=\mathbf{I}_1\mathbf{C}^{-1}-\mathbf{I}_2\mathbf{I}+\mathbf{I}_3\mathbf{C} \tag{1.44}$$

把式（1.44）代入式（1.43a），则得柯西应力本构方程的另一种形式，即

$$\mathbf{t}=(h_1+h_2I_1)\mathbf{C}^{-1}+(h_0-h_2I_2)\mathbf{I}+h_2I_3\mathbf{C} \tag{1.45a}$$

或写成分量形式如下：

$$t_{ij}=(h_1+h_2I_1)C^{-1}{}_{ij}+(h_0-h_2I_2)\delta_{ij}+h_3I_3C_{ij} \tag{1.45b}$$

下面我们再给出一个在微极连续介质力学中应用凯莱—哈密顿方程的例子。

例1.15 在微极连续介质力学中，微转动张量A_{ij}为二阶反称张量，它的对偶矢量a_i则为

$$a_i=-e_{ijk}A_{jk} \tag{a}$$

令转动角θ为

$$\theta=\sqrt{a_i\overline{a_i}} \tag{b}$$

于是

$$\exp\mathbf{A}=e^{\mathbf{A}}=\mathbf{I}+\frac{\sin\theta}{\theta}\mathbf{A}+\frac{(1-\cos\theta)}{\theta^2}\mathbf{A}^2 \tag{1.45c}$$

【解】 对于二阶张量$\mathbf{A}$的凯莱—哈密顿方程为

$$\mathbf{A}^3-\mathbf{I}_1\mathbf{A}^2+\mathbf{I}_2\mathbf{A}-\mathbf{I}_3\mathbf{I}=\mathbf{0} \tag{c}$$

其中

$$I_1=A_{ii} \tag{d}_1$$

$$I_2=\frac{1}{2}(A_{ii}A_{jj}-A_{ij}A_{ji}) \tag{d}_2$$

$$I_3=\det A_{ij} \tag{d}_3$$

由于A_{ij}为反称张量，故有

$$I_1=I_3=0 \tag{e}$$

$$I_2 = -\frac{1}{2}A_{ij}A_{ji} = -\frac{1}{2}(e_{ijk}e_{jil}a_k a_l)$$

$$= \frac{1}{2}e_{ijk}e_{jil}a_k a_l$$

$$= \frac{1}{2}(2\delta_{kl}a_K a_l) = a^2{}_k = \theta^2 \qquad (e)_2$$

于是由凯莱—哈密顿方程知

$$\mathbf{A}^3 = -I_2\mathbf{A} = -\theta^2\mathbf{A} \qquad (f)$$

从而有

$$\mathbf{A}^4 = \mathbf{A}^3\cdot\mathbf{A} = -\theta^2\mathbf{A}^2 \qquad (g)_1$$

$$\mathbf{A}^5 = \mathbf{A}^4\cdot\mathbf{A} = -\theta^2\mathbf{A}^3 = \theta^4\mathbf{A} \qquad (g)_2$$

$$\mathbf{A}^6 = \mathbf{A}^5\cdot\mathbf{A} = \theta^4\mathbf{A}^2 \qquad (g)_3$$

$$\mathbf{A}^7 = \mathbf{A}^6\cdot\mathbf{A} = \theta^4\mathbf{A}^3 = -\theta^6\mathbf{A} \qquad (g)_4$$

$$\vdots$$

于是

$$\exp\mathbf{A} = e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3 + \frac{1}{4!}\mathbf{A}^4 + \frac{1}{5!}\mathbf{A}^5 + \cdots$$

$$= \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 - \frac{\theta^2}{3!}\mathbf{A} - \frac{\theta^4}{4!}\mathbf{A}^2 + \frac{\theta^4}{5!}\mathbf{A} + \cdots$$

$$= \mathbf{I} + \mathbf{A}\left(1 - \frac{\theta^2}{3!} + \frac{\theta^4}{5!} - \cdots\right) + \mathbf{A}^2\left(\frac{1}{2!} - \frac{\theta^2}{4!} + \frac{\theta^4}{6!} - \cdots\right)$$

$$= \mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}}{\theta}\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right) + \frac{\mathbf{A}^2}{\theta^2}\left[1 - \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots\right)\right]$$

$$= \mathbf{I} + \frac{\sin\theta}{\theta}\mathbf{A} + \frac{(1-\cos\theta)}{\theta^2}\mathbf{A}^2$$

或写成分量形式：

$$\exp A_{ij} = e^{A_{ij}} = \delta_{ij} + \frac{\sin\theta}{\theta}A_{ij} + \frac{(1-\cos\theta)}{\theta^2}A_{ip}A_{pj}$$

第二章　张量分析

本章的目的是要简略地介绍张量分析的基本知识。首先讲述在直角坐标系下张量分析的部分主要内容，接着我们阐明在直角坐标系和曲线坐标系间问题形式的转换及与之相应的问题的不变性形式之间的关系。本章还附有若干与连续介质力学有关的应用示例，以便加深对张量分析理论的理解。另外专门开辟一节阐述非完整系物理标架下的微分算子，这是为本书第三章和第四章所作的理论准备。最后一节扼要地介绍一下两点张量场。

§2.1　标量的张量值函数的导数

设$\mathbf{T}=\mathbf{T}(t)$是标量t（例如时间）的张量值函数。$\mathbf{T}$对t的导数由下式定义：

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{T}(t+\Delta t)-\mathbf{T}(t)}{\Delta t} \tag{2.1}$$

设$\mathbf{S}$和$\mathbf{a}$分别为张量和矢量函数，则由上述的定义容易证明下列诸恒等式成立：

$$\frac{d(\mathbf{T}+\mathbf{S})}{dt}=\frac{d\mathbf{T}}{dt}+\frac{d\mathbf{S}}{dt} \tag{2.2}$$

$$\frac{d}{dt}(\alpha\mathbf{T})=\frac{d\alpha}{dt}\mathbf{T}+\alpha\frac{d\mathbf{T}}{dt} \tag{2.3}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{T}\cdot\mathbf{S})=\frac{d\mathbf{T}}{dt}\cdot\mathbf{S}+\mathbf{T}\cdot\frac{d\mathbf{S}}{dt} \tag{2.4}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{T}\cdot\mathbf{a})=\frac{d\mathbf{T}}{dt}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{T}\cdot\frac{d\mathbf{S}}{dt} \tag{2.5}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{T}^{T})=\left(\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right)^{T} \tag{2.6}$$

上述恒等式可由定义式(2.1)直接证明。这里只对式(2.5)加以证明。

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\mathbf{T}\cdot\mathbf{a})\\
&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{T}(t+\Delta t)\cdot\mathbf{a}(t+\Delta t)-\mathbf{T}(t)\cdot\mathbf{a}(t+\Delta t)}{\Delta t}+\\
&\qquad\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{T}(t)\cdot\mathbf{a}(t+\Delta t)-\mathbf{T}(t)\cdot\mathbf{a}(t)}{\Delta t}\\
&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{T}(t+\Delta t)-\mathbf{T}(t)}{\Delta t}\cdot\mathbf{a}(t+\Delta t)+\\
&\qquad\mathbf{T}(t)\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{a}(t+\Delta t)-\mathbf{a}(t)}{\Delta t}\\
&=\frac{d\mathbf{T}}{dt}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{T}\cdot\frac{d\mathbf{a}}{dt}
\end{aligned}$$

容易证明在直角坐标系中，$\frac{d\mathbf{T}}{dt}$ 的分量$\left(\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right)_{ij}$由 $\mathbf{T}$ 的分量的导数$\frac{dT_{ij}}{dt}$给出。

事实上，因为 $T_{ij}=\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_j$，又因$\frac{d\mathbf{e}_i}{dt}=\mathbf{o}$，故有

$$\frac{dT_{ij}}{dt}=\frac{d}{dt}(\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_j)$$

$$=\mathbf{e}_i\cdot\frac{d\mathbf{T}}{dt}\cdot\mathbf{e}_j$$

$$=\left(\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right)_{ij}$$

对于二阶正交张量$\mathbf{Q}=\mathbf{Q}(t)$，可证$\left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt}\right)\cdot\mathbf{Q}^T$是一个反称张量。

事实上，因为$\mathbf{Q}\cdot\mathbf{Q}^T=\mathbf{I}$，故有

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt}\cdot\mathbf{Q}^T+\mathbf{Q}\cdot\frac{d\mathbf{Q}^T}{dt}=\mathbf{O}$$

亦即

$$\mathbf{Q}\cdot\frac{d\mathbf{Q}^T}{dt}=-\frac{d\mathbf{Q}}{dt}\cdot\mathbf{Q}^T$$

又因

$$\frac{d\mathbf{Q}^T}{dt}=\left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt}\right)^T$$

所以

$$\mathbf{Q}\cdot\left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt}\right)^T=-\frac{d\mathbf{Q}}{dt}\cdot\mathbf{Q}^T$$

由式（1.27）知

$$\mathbf{Q}\cdot\left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt}\right)^T=\left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt}\cdot\mathbf{Q}^T\right)^T$$

于是

$$\left[\frac{d\mathbf{Q}}{dt}\cdot\mathbf{Q}^T\right]^T=-\frac{d\mathbf{Q}}{dt}\cdot\mathbf{Q}^T$$

所以 $\frac{dQ}{dt}\cdot Q^T$ 是一个反称张量。

§2.2 梯　　度

1. 标量场的梯度

设$f=f(\mathbf{P})$是位置矢量$\mathbf{P}$的标量值函数，亦即，对每个位置矢量$\mathbf{P}$，f给出一个标量值，例如在该点处的密度，温度等。引进哈密顿（Hamilton）算子

$$\nabla=\mathbf{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}=\mathbf{e}_i\partial_i \tag{2.7}$$

于是f的梯度gradf定义为

$$\mathrm{grad}f=\nabla f \tag{2.8a}$$

或写成下列形式：

$$\begin{aligned}\nabla f&=\frac{\partial f}{\partial x_i}\mathbf{e}_i\\&=\frac{\partial f}{\partial x_1}\mathbf{e}_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\mathbf{e}_2+\frac{\partial f}{\partial x_3}\mathbf{e}_3\\&=(\nabla f)_i\mathbf{e}_i\end{aligned} \tag{2.8b}$$

其中

$$(\nabla f)_i=\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

于是f的微分可写为

$$\begin{aligned}df&=f(\mathbf{P}+d\mathbf{P})-f(\mathbf{P})\\&=\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i\end{aligned}$$

$$= (dx_i \mathbf{e}_i) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \mathbf{e}_j \right)$$

$$= d\mathbf{P} \cdot \nabla f \qquad (2.8c)$$

如令$d\mathbf{P}$的大小$|d\mathbf{P}| = dr$，而$\mathbf{e}$是$d\mathbf{P}$方向内的单位矢量，则式(2.8c)可以写成

$$\left(\frac{df}{dr} \right)_{\mathbf{e}} = \frac{d\mathbf{P}}{dr} \cdot \nabla f$$

$$= \mathbf{e} \cdot \nabla f$$

亦即，在$\mathbf{e}$方向内∇f的分量给出f在该方向内的变化率。

梯度矢量具有简单的几何意义。在f的值为常数的任一曲面上，对切于曲面的任一$d\mathbf{P}$有$df = 0$，因此$d\mathbf{P} \cdot \nabla f = 0$，所以$\nabla f$垂直于常数$f$的曲面。

例2.1 如果$f = xy + z$，试求垂直于通过点(2, 1, 0)的常数f的曲面上的单位矢量$\mathbf{n}$。

【解】 因为

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_3$$

$$= y\mathbf{e}_1 + x\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$$

于是在点(2,1,0)处，有

$$\nabla f = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$$

因此

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{1}{\sqrt{6}} (\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$$

设f和g均为标量函数，则有

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f \qquad (2.9)$$

若$\mathbf{f}$和$\mathbf{g}$均为矢量函数，则有

$$\nabla(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}) = (\nabla\mathbf{f})^{T}\cdot\mathbf{g} + (\nabla\mathbf{g})^{T}\cdot\mathbf{f} \tag{2.10}$$

事实上，

$$\begin{aligned}\nabla(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}) &= \mathbf{e}_i\partial_i(f_jg_j)\\ &= (\mathbf{e}_i\partial_if_j)g_j + (\mathbf{e}_i\partial_ig_j)f_j\\ &= \mathbf{e}_j(\partial_jf_i)^{T}g_j + \mathbf{e}_j(\partial_jg_i)^{T}f_j\\ &= (\nabla\mathbf{f})^{T}\cdot\mathbf{g} + (\nabla\mathbf{g})^{T}\cdot\mathbf{f}\end{aligned}$$

由商法则可知，由于 ∇f 是一个一阶张量，而 f 是一个标量，故哈密顿算子∇ 是一个矢量算子，于是∇的并积作用使原张量升高一阶。

2. 矢量场的梯度

设$\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{P})$是关于位置的矢量值函数（例如速度场）。对于$\mathbf{a} = a_i\mathbf{e}_i$，我们可以定义它的左梯度grad**a**为

$$\mathrm{grad}\mathbf{a} = \nabla\mathbf{a} \tag{2.11a}$$

于是，在卡氏直角坐标系下，其分量形式为

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}\mathbf{a} &= \nabla\mathbf{a}\\ &= (\mathbf{e}_i\partial_i)(a_j\mathbf{e}_j)\\ &= \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\\ &= a_{j,i}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\\ &= (\nabla\mathbf{a})_{ji}\mathbf{e}_{ij}\end{aligned} \tag{2.11b}$$

其中

$$(\nabla\mathbf{a})_{ij} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$$

写成矩阵形式就是

$$[\nabla \mathbf{a}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{\partial a_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_3} & \frac{\partial a_2}{\partial x_3} & \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \tag{2.11c}$$

矢量**a**的微分可写为

$$\begin{aligned} d\mathbf{a} &= \mathbf{a}(\mathbf{P}+d\mathbf{P}) - \mathbf{a}\mathbf{P}) \\ &= \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_i} dx_i = \frac{\partial a_j}{\partial x_i} dx_i \mathbf{e}_j \\ &= (\mathbf{e}_k dx_k) \cdot \left(\frac{\partial a_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j\right) \\ &= d\mathbf{P} \cdot \nabla \mathbf{a} \end{aligned} \tag{2.12}$$

类似地，矢量**a**的右梯度 $\bar{\text{g}}\text{rad}\mathbf{a}$ 定义为

$$\bar{\text{g}}\text{rad}\mathbf{a} = \mathbf{a}\nabla \tag{2.13a}$$

在卡氏直角坐标系下

$$\begin{aligned} \bar{\text{g}}\text{rad}\mathbf{a} &= \mathbf{a}\nabla \\ &= (a_i \mathbf{e}_i)(\mathbf{e}_j \partial_j) \\ &= \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = a_{i,j} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \\ &= (\mathbf{a}\nabla)_{ij} \mathbf{e}_{ij} \end{aligned} \tag{2.13b}$$

其中

$$(\mathbf{a}\nabla)_{ij} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j}$$

写成矩阵形式就是

$$[\mathbf{a}\nabla) = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial a_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_3}{\partial x_1} & \frac{\partial a_3}{\partial x_2} & \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \tag{2.13c}$$

矢量**a**的微分可写成

$$d\mathbf{a} = (\mathbf{a}\nabla)\cdot d\mathbf{r}$$

可以证明

$$(\mathbf{a}\nabla)^T = \nabla\mathbf{a} \tag{2.14}$$

设φ为标量，**a**为矢量，则有

$$\nabla(\varphi\mathbf{a}) = \mathbf{a}\nabla\varphi + \varphi\nabla\mathbf{a} \tag{2.15}$$

事实上，

$$\begin{aligned}\nabla(\varphi\mathbf{a}) &= \mathbf{e}_i\partial_i(\varphi a_j\mathbf{e}_j) \\ &= (a_j\mathbf{e}_j)\mathbf{e}_i\partial_i\varphi + \varphi\mathbf{e}_i\partial_i(a_j\mathbf{e}_j) \\ &= \mathbf{a}\nabla\varphi + \varphi\nabla\mathbf{a}\end{aligned}$$

3. 张量场的梯度

设**T**为任意二阶张量，它的左梯度grad**T**定义为

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}\mathbf{T} &= \nabla\mathbf{T} \\ &= \mathbf{e}_i\partial_i(T_{jk}\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k) \\ &= \partial_i T_{jk}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k\end{aligned} \tag{2.16}$$

这是一个三阶张量。

T的右梯度$\overline{\mathrm{grad}}\mathbf{T}$定义为

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}\mathbf{T} &= \mathbf{T}\overleftarrow{\nabla} \\ &= (T_{jk}\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k)\mathbf{e}_i\partial_i \\ &= \partial_i T_{jk}\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k\mathbf{e}_i\end{aligned} \tag{2.17}$$

可以证明

$$\mathbf{dT}=\mathbf{dr}\cdot(\nabla\mathbf{T})=(\mathbf{T}\nabla)\cdot\mathbf{dr} \tag{2.18}$$

一般地

$$\nabla\mathbf{T}\neq\mathbf{T}\nabla$$

类似地，可以定义更高阶张量的梯度。

§2.3 散　　度

1. 矢量场的散度

设$\mathbf{a}=\mathbf{a}(\mathbf{P})$是一矢量场，则矢量场的左散度$\mathrm{div}\mathbf{a}$定义为

$$\mathrm{div}\mathbf{a}=\nabla\cdot\mathbf{a} \tag{2.19a}$$

在卡氏直角坐标下

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\mathbf{a}&=\nabla\cdot\mathbf{a}\\&=(\mathbf{e}_i\partial_i)\cdot(a_j\mathbf{e}_j)\\&=\delta_{ij}\frac{\partial a_j}{\partial x_i}=\frac{\partial a_i}{\partial x_i}\\&=\frac{\partial a_1}{\partial x_1}+\frac{\partial a_2}{\partial x_2}+\frac{\partial a_3}{\partial x_3}\end{aligned} \tag{2.19b}$$

类似地，矢量场$\mathbf{a}=\mathbf{a}(\mathbf{P})$的右散度$\bar{\mathrm{div}}\mathbf{a}$定义为

$$\bar{\mathrm{div}}\mathbf{a}=\mathbf{a}\cdot\nabla \tag{2.20a}$$

在卡氏直角坐标系下

$$\begin{aligned}\bar{\mathrm{div}}\mathbf{a}&=\mathbf{a}\cdot\nabla\\&=(a_i\mathbf{e}_i)\cdot(\mathbf{e}_j\partial_j)\\&=\delta_{ij}\frac{\partial a_j}{\partial x_j}=\frac{\partial a_i}{\partial x_i}=\partial_i a_i\end{aligned}$$

$$= \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \tag{2.20b}$$

显然

$$\mathrm{div}\mathbf{a} = \bar{\mathrm{div}}\mathbf{a} \tag{2.21}$$

因此，今后我们对于矢量场的左散度和右散度不加区别，统一地记为

$$\mathrm{div}\mathbf{a}$$

例2.2 若标量$\alpha = \alpha(\mathbf{P})$和矢量$\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{P})$试证

$$\mathrm{div}(\alpha\mathbf{a}) = \alpha\mathrm{div}\mathbf{a} + (\mathrm{grad}\alpha)\cdot\mathbf{a}$$

【证】 令$\mathbf{b} = \alpha\mathbf{a}$，即$b_i = \alpha a_i$，则

$$\mathrm{div}\mathbf{b} = \frac{\partial b_i}{\partial x_i} = \frac{\partial(\alpha a_i)}{\partial x_i}$$

$$= \alpha\frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}a_i$$

$$= \alpha\mathrm{div}\mathbf{a} + (\mathrm{grad}\alpha)\cdot\mathbf{a}$$

2. 张量的散度

关于二阶张量场$\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{P})$的左散度$\mathrm{div}\mathbf{T}$定义为

$$\mathrm{div}\mathbf{T} = \nabla\cdot\mathbf{T} \tag{2.22a}$$

张量场的散度是一个矢量场。

在卡氏直角坐标系下

$$\mathrm{div}\mathbf{T} = \nabla\cdot\mathbf{T}$$

$$= (\mathbf{e}_i\partial_i)\cdot(T_{jk}\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k)$$

$$= \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_i}\delta_{ij}\mathbf{e}_k$$

$$= \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i}\mathbf{e}_k \tag{2.22b}$$

所以$\mathrm{div}\mathbf{T}$的分量为

$$(\mathrm{div}\mathbf{T})_k = \partial_i T_{ik} = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i} = T_{ik,i} \tag{2.22c}$$

类似地，二阶张量场 $\mathbf{T}=\mathbf{T}(\mathbf{P})$ 的右散度$\bar{\mathrm{d}}\mathrm{iv}\mathbf{T}$定义为

$$\bar{\mathrm{d}}\mathrm{iv}\mathbf{T} = \mathbf{T}\cdot\nabla \tag{2.23a}$$

在卡氏直角坐标系下

$$\begin{aligned}\bar{\mathrm{d}}\mathrm{iv}\mathbf{T} = \mathbf{T}\cdot\nabla &= (T_{ki}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_i)\cdot({}_j\mathbf{e}\partial_j)\\ &= \delta_{ij}\frac{\partial T_{ki}}{\partial x_j}\mathbf{e}_k\\ &= \frac{\partial T_{ki}}{\partial x_i}\mathbf{e}_k\end{aligned} \tag{2.23b}$$

一般地

$$\mathrm{div}\mathbf{T} \neq \bar{\mathrm{d}}\mathrm{iv}\mathbf{T}$$

但在 $\mathbf{T}$ 为对称张量的情况下，$\mathrm{div}\mathbf{T} = \mathrm{div}\overline{\mathbf{T}}$，现证明如下：

$$\mathrm{div}\mathbf{T} = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i}\mathbf{e}_k$$

$$\bar{\mathrm{d}}\mathrm{iv}\mathbf{T} = \frac{\partial T_{ki}}{\partial x_i}\mathbf{e}_k$$

考虑到

$$T_{ik} = T_{ki}$$

则

$$\mathrm{div}\mathbf{T} = \bar{\mathrm{d}}\mathrm{iv}\mathbf{T}$$

即

$$\nabla\cdot\mathbf{T} = \mathbf{T}\cdot\nabla \tag{2.24}$$

§2.4 旋　　度

1. 矢量场的旋度

令$\mathbf{a}=\mathbf{a}(\mathbf{P})$是位置矢量$\mathbf{P}$的矢量值函数，于是$\mathbf{a}(\mathbf{P})$的左旋度curl$\mathbf{a}$定义为

$$\begin{aligned}\mathrm{curl}\mathbf{a}&=\nabla\times\mathbf{a}\\&=(\mathbf{e}_i\partial_i)\times(a_j\mathbf{e}_j)\\&=\mathbf{e}_i\times\mathbf{e}_j\frac{\partial a_j}{\partial x_i}\\&=e_{ijk}\frac{\partial a_j}{\partial x_i}\mathbf{e}_k\\&=e_{ijk}\partial_i a_j\mathbf{e}_k=(\nabla\times\mathbf{a})_k\mathbf{e}_k\end{aligned}\tag{2.25a}$$

其中

$$(\nabla\times\mathbf{a})_k=e_{ijk}\partial_i a_j=e_{ijk}a_{j,i}\tag{2.25b}$$

写成展开形式，则为

$$\begin{aligned}\nabla\times\mathbf{a}&=\left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2}-\frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right)\mathbf{e}_1+\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3}-\frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right)\mathbf{e}_2+\\&\quad\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}-\frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right)\mathbf{e}_3\\&=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x_1}&\dfrac{\partial}{\partial x_2}&\dfrac{\partial}{\partial x_3}\\a_1&a_2&a_3\\\mathbf{e}_1&\mathbf{e}_2&\mathbf{e}_3\end{vmatrix}\end{aligned}\tag{2.25c}$$

类似地，我们可以定义$\mathbf{a}=\mathbf{a}(\mathbf{P})$的右旋度$\overline{\mathrm{curl}}\mathbf{a}$为

$$\overline{\mathrm{curl}}\mathbf{a}=\mathbf{a}\times\nabla=(a_i\mathbf{e}_j)\times(\mathbf{e}_i\partial_i)$$

$$= \mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$$

$$= e_{jik} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_k$$

$$= -e_{ijk} \partial_i a_j \mathbf{e}_k = -\nabla \times \mathbf{a} \qquad (2.25d)$$

例2.3 若$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$为两个矢量，试证

$$\mathrm{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \mathrm{curl}\mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathrm{curl}\mathbf{b} \qquad (2.26)$$

【解】 事实上，由于$\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i$和$\mathbf{b} = b_j \mathbf{e}_j$，则

$$\mathrm{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

$$= (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_k) \cdot (a_i e_i \times b_j e_j)$$

$$= e_k \cdot e_i \times e_j \partial_k (a_i b_j)$$

$$= e_{ijk} a_i \partial_k b_j + e_{jik} b_j \partial_k a_i$$

$$= -a_i e_{ikj} \partial_k b_j + b_i e_{jki} \partial_k a_i$$

$$\therefore \quad \mathrm{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = -\mathbf{a} \cdot \mathrm{curl}\mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathrm{curl}\mathbf{a}$$

例2.4 试证下列等式

$$\mathrm{curl}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a}\mathrm{div}\mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{a} - \mathbf{b}\mathrm{div}\mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{b} \qquad (2.27)$$

【证】

$$\mathrm{curl}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

$$= \partial_i (a_j b_i - a_i b_j)$$

$$= b_i \partial_i a_j + a_j \partial_i b_i - a_i \partial_i b_j - b_j \partial_i a_i$$

$$= \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{a} + \mathbf{a}\mathrm{div}\mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{b} - \mathbf{b}\mathrm{div}\mathbf{a}$$

例2.5 证试下列等式：

$$\mathrm{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \mathrm{curl}\mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathrm{curl}\mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{a} \qquad (2.28)$$

【证】 因为利用三个矢量的叉积可知：

$$\mathbf{a} \times \mathrm{curl}\mathbf{b} = \mathbf{a} \times \nabla \times \overset{\downarrow}{\mathbf{b}} = \nabla(\mathbf{a} \cdot \overset{\downarrow}{\mathbf{b}}) - \mathbf{a} \cdot \nabla \overset{\downarrow}{\mathbf{b}} \qquad (a)$$

$$\mathbf{b}\times\mathrm{curl}\mathbf{a}=\mathbf{b}\times\nabla\times\overset{\downarrow}{\mathbf{a}}=\nabla(\mathbf{b}\cdot\overset{\downarrow}{\mathbf{a}})-\mathbf{b}\cdot\nabla\overset{\downarrow}{\mathbf{a}} \tag{b}$$

于是

$$\mathrm{grad}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=\nabla(\overset{\downarrow}{\mathbf{a}}\cdot\overset{\downarrow}{\mathbf{b}})=\nabla(\overset{\downarrow}{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{b})+\nabla(\mathbf{a}\cdot\overset{\downarrow}{\mathbf{b}}) \tag{c}$$

把式(a)和式(b)相加后，再代入式(c)，则得

$$\mathrm{grad}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=\mathbf{a}\times\mathbf{curl}\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\nabla\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathrm{curl}\mathbf{a}+\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{a}$$

此即式（2.28）

这里字母顶部标以箭头表示哈密顿算子所作用的矢量。

若在式（2.28）中，令$\mathbf{a}=\mathbf{b}$，则得

$$\mathrm{grad}\mathbf{a}^2=2\mathbf{a}\times\mathrm{curl}\mathbf{a}+2\mathbf{a}\cdot\nabla\mathbf{a}$$

或写成下列形式：

$$\mathbf{a}\cdot\nabla\mathbf{a}=\frac{1}{2}\mathrm{grad}\mathbf{a}^2-\mathbf{a}\times\mathrm{curl}\mathbf{a} \tag{2.29}$$

此即流体力学中的兰姆(Lamb)公式。

2. 张量场的旋度

设$\mathbf{T}$为任意二阶张量，则它的左旋度定义为

$$\begin{aligned}\mathrm{curl}\mathbf{T}&=\nabla\times\mathbf{T}\\&=(\mathbf{e}_i\partial_i)\times(T_{ik}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k)\\&=e_{ijp}\partial_jT_{ik}\mathbf{e}_p\mathbf{e}_k\\&=(\nabla\times\mathbf{T})_{pk}\mathbf{e}_p\mathbf{e}_k\end{aligned} \tag{2.30a}$$

其中

$$(\nabla\times\mathbf{T})_{pk}=e_{ijp}\partial_jT_{ik} \tag{2.30b}$$

类似地，它的右旋度定义为

$$\begin{aligned}\bar{\mathrm{curl}}\mathbf{T}&=\mathbf{T}\times\nabla\\&=(T_{ik}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k)\times(\mathbf{e}_l\partial_j)\\&=e_{klq}\partial_jT_{ik}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_q\end{aligned}$$

$$= (\mathbf{T} \times \nabla)_{iq}\mathbf{e}_{iq} \tag{2.31a}$$

其中

$$(\mathbf{T} \times \nabla)_{iq} = e_{kjq}\partial_j T_{ik} \tag{2.31b}$$

根据上述旋度的定义，我们可以导出下列几个有用的结果：

$$\begin{aligned}(\mathrm{i})\nabla \times \mathbf{T} \times \nabla &= \mathbf{e}_j\partial_j \times (T_{ik}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k) \times \mathbf{e}_l\partial_l \\ &= (e_{jip}\partial_j T_{ik}\mathbf{e}_p\mathbf{e}_k) \times \mathbf{e}_l\partial_l \\ &= e_{klq}e_{jip}\partial_l\partial_j T_{ik}\mathbf{e}_p\mathbf{e}_q \\ &= -e_{ijp}e_{klq}T_{ik,jl}\mathbf{e}_{pq} \\ &= (\nabla \times \mathbf{T} \times \nabla)_{pq}\mathbf{e}_{pq}\end{aligned} \tag{2.32a}$$

其中

$$\begin{aligned}(\nabla \times \mathbf{T} \times \nabla)_{pq} &= e_{klq}e_{jip}\partial_l\partial_j T_{ik} \\ &= e_{ijp}e_{klq}T_{iksjl}\end{aligned} \tag{2.32b}$$

若取m,s,p为三个互不相等的数码，n,t,q也为三个互不相等的数码，则

$$\begin{aligned}(\nabla \times \mathbf{T} \times \nabla)_{pq} &= e_{klq}e_{jip}\partial_l\partial_j T_{ik} \\ &= e_{klq}(e_{msp}\partial_l\partial_m T_{sk} + e_{smp}\partial_l\partial_s T_{mk}) \\ &= e_{ntq}(e_{msp}\partial_t\partial_m T_{sn} + e_{smp}\partial_t\partial_s T_{mn}) \\ &\quad + e_{tng}(e_{msp}\partial_n\partial_m T_{st} + e_{smp}\partial_n\partial_s T_{mt}) \\ &= e_{ntq}e_{msp}\partial_t\partial_m T_{sn} + e_{ntg}e_{smp}\partial_t\partial_s T_{mn} + \\ &\quad e_{tnq}e_{msp}\partial_n\partial_m T_{st} + e_{tnq}e_{smp}\partial_n\partial_s T_{mt}\end{aligned}$$

考虑到

$$e_{msp} = -e_{smp}\text{和}e_{ntq} = -e_{tnq}$$

则

$$(\nabla\times\mathbf{T}\times\nabla)_{pq}=e_{rtq}e_{msp}(\partial_r\partial_m T_{sn}+\partial_n\partial_s T_{mt}-\partial_t\partial_s T_{mn}-\partial_n\partial_m T_{st}) \tag{2.32c}$$

(ii) $(\nabla\times\mathbf{T})^T=-\mathbf{T}^T\times\nabla$ (2.33a)

【证】 由式（2.30）知

$$(\nabla\times\mathbf{T})^T=(\nabla\times\mathbf{T})_{kp}\mathbf{e}_p\mathbf{e}_k=e_{jik}\partial_j T_{ip}\mathbf{e}_p\mathbf{e}_k \tag{2.33b}$$

而由式（2.31）知

$$-\mathbf{T}^T\times\nabla=-e_{kjq}\partial_j T_{ki}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_q=e_{jkq}\partial_j T_{ki}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_q=e_{jik}\partial_j T_{ip}\mathbf{e}_p\mathbf{e}_k \tag{2.33c}$$

比较式(2.33b)和式(2.33c)知式(2.33a)成立。

若$\mathbf{T}$为对称的二阶张量，则

$$(\nabla\times\mathbf{T})^T=-\mathbf{T}\times\nabla \tag{2.33d}$$

(iii) 若把式（2.33b）写成展开形式，考虑到置换符号e_{ijk}的定义并令$\mathbf{M}=\nabla\times\mathbf{T}$，则有

$$\begin{aligned}(\nabla\times\mathbf{T})^T&=(\nabla\times\mathbf{T})^T{}_{pk}\mathbf{e}_{pk}=\mathbf{M}^T{}_{pk}\mathbf{e}_{pk}\\&=[e_{23p}(\partial_2T_{3k}-\partial_3T_{2k})+e_{31p}(\partial_3T_{1k}-\partial_1T_{3k})+e_{12p}(\partial_1T_{2k}-\partial_2T_{1k})]\mathbf{e}_{pk}\\&=\{(\partial_2T_{31}-\partial_3T_{21})\mathbf{e}_{11}+(\partial_2T_{32}-\partial_3T_{22})\mathbf{e}_{12}+(\partial_2T_{33}-\partial_3T_{23})\mathbf{e}_{13}\}+\{(\partial_3T_{11}-\partial_1T_{31})\mathbf{e}_{21}+(\partial_3T_{12}-\partial_1T_{32})\mathbf{e}_{22}+(\partial_3T_{13}-\partial_1T_{33})\mathbf{e}_{23}\}+\\&\quad\{(\partial_1T_{21}-\partial_2T_{11})\mathbf{e}_{31}+(\partial_1T_{22}-\partial_2T_{12})\mathbf{e}_{32}+(\partial_1T_{23}-\partial_2T_{13})\mathbf{e}_{33}\}\\&=\mathbf{M}^T{}_{11}\mathbf{e}_{11}+\mathbf{M}^T{}_{12}\mathbf{e}_{12}+\mathbf{M}^T{}_{13}\mathbf{e}_{13}+\mathbf{M}^T{}_{21}\mathbf{e}_{21}+\mathbf{M}^T{}_{22}\mathbf{e}_{22}+\mathbf{M}^T{}_{23}\mathbf{e}_{23}+\mathbf{M}^T{}_{31}\mathbf{e}_{31}+\mathbf{M}^T{}_{32}\mathbf{e}_{32}+\mathbf{M}^T{}_{33}\mathbf{e}_{33}\end{aligned} \tag{2.33e}$$

从上式我们可以观察到下述结果：若分别把$\mathbf{T}^T{}_{12}\mathbf{e}_{12}$和$\mathbf{M}^T{}_{23}\mathbf{e}_{23}$及

$\mathbf{M}^{T}_{31}\mathbf{e}_{31}$ 中 1 与 2 、 2 与 3 、 3 与 1 互换并冠以负号， 则可分别得到$\mathbf{M}^{T}_{21}\mathbf{e}_{21}$和$\mathbf{M}^{T}_{32}\mathbf{e}_{32}$及$\mathbf{M}^{T}_{13}\mathbf{e}_{13}$。

§2.5 双重微分算子的运算

在连续介质力学和晶格缺陷的弹性理论中常要用到一些双重微分算子的运算。

先作下列定义：

$$\nabla\nabla = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\partial_{ji}\partial_j \tag{2.34}$$

$$\nabla^2 = \nabla\cdot\nabla = \partial_i\partial_j = \text{divgrad}\ (\text{拉普拉斯算子}) \tag{2.35}$$

$$\nabla\nabla\cdot = \text{grad div} \tag{2.36}$$

下面证明一些有用的等式：

（1）设 f 为标量，则有

$$\text{curl gradf} = \mathbf{o} \tag{2.37}$$

事实上，

$$\text{curl gradf} = \nabla\times\nabla f = \text{of} = \mathbf{o}$$

（2）设 **a** 为矢量，则有

$$\text{div curl a} = \text{o} \tag{2.38}$$

事实上，

$$\begin{aligned}\text{div curl a} &= \nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{a})\\ &= \partial_i e_{ijk}\partial_j a_k\\ &= e_{ijk}\partial_i\partial_j a_k = \text{o}\end{aligned}$$

这是因为 e_{ijk} 对 i 和 j 反称，而 $\partial_i\partial_j = \partial_j\partial_i$ 的缘故。

（3）设 **a** 为矢量，则有

$$\text{curl curl a} = \text{grad diva} - \text{div grad a} \tag{2.39}$$

事实上，

$$\text{curl curl a} = \nabla\times\nabla\times\mathbf{a}$$

$$= e_{ijk}\partial_j e_{krs}\partial_r a_s \mathbf{e}_i$$
$$= e_{ijk}e_{krs}\partial_j\partial_r a_s \mathbf{e}_i$$
$$= (\delta_{ir}\delta_{js} - \delta_{is}\delta_{jr})\partial_j\partial_r a_s \mathbf{e}_i$$
$$= (\partial_j\partial_i a_j - \partial_j\partial_j a_i)\mathbf{e}_i$$
$$= \nabla(\nabla\cdot\mathbf{a}) - \nabla\cdot\nabla\mathbf{a}$$
$$= \text{grad div}\mathbf{a} - \text{div grad}\mathbf{a}$$

实际上，由于∇是矢量算子，故可直接给出结果。

（4）设 **a** 为矢量，而

$$\mathbf{D} = \nabla\mathbf{a} + \mathbf{a}\nabla$$

则
$$\text{div}\mathbf{D} = \nabla\cdot\mathbf{D} = \text{div grad}\mathbf{a} + \text{grad div}\mathbf{a} \qquad (2.40)$$

事实上，

$$\text{div}\mathbf{D} = \nabla\cdot\mathbf{D} = \nabla\cdot(\nabla\mathbf{a} + \mathbf{a}\nabla)$$
$$= \partial_i\partial_i a_j \mathbf{e}_j + \partial_i a_j \mathbf{e}_i\partial_j$$
$$= \text{div grad}\mathbf{a} + \text{grad div}\mathbf{a}$$

（5）设**A**为二阶张量，则

$$\text{div curl}\mathbf{A} = \mathbf{o} \qquad (2.41)$$

事实上，由式 (2.30) 可知

$$\text{div curl}\mathbf{A} = \mathbf{e}_m\partial_m\cdot(e_{jip}\partial_j D_{ik}\mathbf{e}_p\mathbf{e}_k)$$
$$= e_{jip}\partial_p\partial_j D_{ik}\mathbf{e}_k = \mathbf{o}$$

这是因为e_{jip}对指标j和p反称，而$\partial_p\partial_j = \partial_j\partial_p$的缘故。

（6）设 **a** 为矢量，**I** 为二阶单位张量，则有

$$\text{div}[(\text{div}\mathbf{a})\mathbf{I}] = \text{grad div}\mathbf{a} \qquad (2.42)$$

事实上，令 f 为标量，则

$$\text{div}(f\mathbf{I}) = \nabla\cdot(f\mathbf{I}) = \mathbf{e}_i\partial_i\cdot(f\delta_{kl}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l)$$
$$= \partial_i f\delta_{ik}\delta_{kl}\mathbf{e}_l$$
$$= \partial_i f\mathbf{e}_i = \text{grad}f$$

在上式中，令$f = \text{div}\mathbf{a}$，则

$$\mathrm{div}[(\mathrm{div}\mathbf{a})\mathbf{I}] = \mathrm{grad}\ \mathrm{div}\mathbf{a}$$

（7）1958年克雷诺（Kröner）把下式定义为二阶张量场**A**的非协调度：

$$\mathrm{inc}\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} \times \nabla = -e_{ijp}e_{klq}A_{ik,jl}\mathbf{e}_p\mathbf{e}_q \tag{2.43}$$

若令**A**为应变张量**E**，并且

$$\mathrm{inc}\mathbf{E} = \mathbf{O}$$

则上式即为线性弹性理论中的无限小应变的协调方程，这便是非协调度算子命名的由来。

下面我们来证明两个与非协调度有关的性质。

（i）若**A**为二阶张量，则

$$\mathrm{div}(\mathrm{inc}\mathbf{A}) = \mathbf{o} \tag{2.44}$$

事实上，由式（1.78）定义可知

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(\mathrm{inc}\mathbf{A}) &= -\mathbf{e}_m\partial_m\cdot(e_{ijp}e_{klq}A_{ik,jl}\ \mathbf{e}_p\mathbf{e}_q)\\ &= -e_{ijp}e_{klq}A_{ik,jlp}\mathbf{e}_q\\ &= \mathbf{o}\end{aligned}$$

这是因为$e_{ijp} = -e_{ipj}$，而$A_{ik,jlp} = A_{ik,plj}$的缘故。

（ii）设**u**为矢量，则grad**u**的对称部分记为

$$\mathrm{sym}\ \mathrm{grad}\mathbf{u} = u(i,k)\mathbf{e}_{ik}$$

于是

$$\mathrm{inc}\ (\mathrm{sym}\ \mathrm{grad}\mathbf{u}) = \mathbf{o} \tag{2.45}$$

事实上，由式（2.44）定义可知

$$\begin{aligned}\mathrm{inc}(\mathrm{sym}\ \mathrm{grad}\mathbf{u}) &= \mathrm{inc}(u_{i,k}\ \mathbf{e}_{ik})\\ &= -\frac{1}{2}[e_{ijp}e_{klq}(u_{i,klj} + u_{k,ijl})\mathbf{e}_p\mathbf{e}_q]\\ &= \mathbf{o}\end{aligned}$$

这是因为$e_{ijp} = -e_{jip}$，$e_{klq} = -e_{lkq}$，而$u_{k,ijl} = u_{k,jil}$，$u_{i,klj} = u_{i,lik}$的缘故。

§2.6 张量函数的导数

1. 张量函数的定义

所谓张量函数是指自变量是张量，而函数值是标量、矢量和张量的函数。例如

$$f = f(\mathbf{B}),\quad f = f(B_{ij}) \tag{2.46a}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{B}),\quad a_k = a_k(B_{ij}) \tag{2.46b}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}(\mathbf{B}),\quad C_{kl} = C_{kl}(B_{ij}) \tag{2.46c}$$

分别称作是二阶自变量张量**B**的标量值、矢量值和二阶张量值的张量函数。

一般说来，这些分量函数的形式在不同坐标系中是不同的。如果它们对所有的单位正交基是相同的，我们就称它们是各向同性张量函数。

2. 张量函数的梯度

现在考虑只有一个二阶自变量**B**的标量值张量函数f(**B**)。**B**的增量 d**B** 和 f 的微分 d**f** 仍然是二阶张量和标量。这时

$$df = \frac{\partial f}{\partial B_{ij}}\, dB_{ij} \tag{2.47a}$$

写成不变性形式，则有

$$df = \frac{df}{d\mathbf{B}} : d\mathbf{B} \tag{2.47b}$$

根据商法则可知$\frac{df}{d\mathbf{B}}$也是二阶张量，称之为 f 的梯度。

若**B**是二阶对称张量，则 f 是**B** 的六个独立分量的函数。这时在求 f 的梯度时，需先在 f 里用$\frac{1}{2}(B_{ij}+B_{ji})$代替$B_{ij}$，求

得扩充后的九个偏导数后再按$B_{ij}=B_{ji}$简化。例如

$$f(B)=(B_{12})^2=\frac{1}{4}(B_{12}+B_{21})^2$$

于是

$$\frac{\partial f}{\partial B_{12}}=\frac{1}{2}(B_{12}+B_{21})=B_{12}$$

$$\frac{\partial f}{\partial B_{21}}=B_{12}=\frac{\partial f}{\partial B_{12}}$$

这一点需要切记，否则，若对 $f(\mathbf{B})=(B_{12})^2$ 直接求导，就会导致$\frac{\partial f}{\partial B_{12}}=2B_{12}$的错误结果。

任意二阶张量B的三个主不变量也是张量函数。现求它们的梯度如下。

由式(1.41a)一式(1.41c)知

$$\mathbf{I}_1=\delta_{ri}\beta_{ir} \tag{a}$$

$$\mathbf{I}_2=\frac{1}{2}e_{ijk}e_{rst}B_{ir}B_{js} \tag{b}$$

$$\mathbf{I}_3=\frac{1}{6}e_{ijk}e_{rst}B_{ir}B_{js}B_{kt} \tag{c}$$

于是

$$\frac{\partial \mathbf{I}_1}{\partial B_{mn}}=\delta_{ri}\frac{\partial B_{ir}}{\partial B_{mn}}=\delta_{ri}\delta_{jm}\delta_{rn}=\delta_{mn} \tag{2.48a}$$

$$\frac{\partial \mathbf{I}_2}{\partial B_{mn}}=\frac{1}{2}e_{ijk}e_{rst}\frac{\partial(B_{ir}B_{js})}{\partial B_{mn}}$$

$$=\frac{1}{2}(\delta_{ir}\delta_{js}-\delta_{is}\delta_{rj})(\delta_{im}\delta_{rn}B_{js}+B_{ir}\delta_{jm}\delta_{sn})$$

$$= \frac{1}{2}[2(\delta_{mn}B_{jj} - B_{nm})]$$

$$= B_{jj}\delta_{mn} - (B_{mn})^T \tag{2.49a}$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial B_{mn}} = \frac{1}{6}e_{ijk}e_{rst}\frac{\partial (B_{ir}B_{js}B_{kt})}{\partial B_{mn}}$$

$$= \frac{1}{6}e_{ijk}e_{rst}(\delta_{im}\delta_{rn}B_{js}B_{kt} + B_{ir}\delta_{jm}\delta_{sn}B_{kt}$$

$$+ B_{ir}B_{js}\delta_{km}\delta_{tn})$$

$$= \frac{1}{2}e_{mjk}e_{nst}B_{js}B_{kt}$$

$$= \frac{1}{2}[\delta_{mn}(\delta_{js}\delta_{kt} - \delta_{jt}\delta_{ks}) - \delta_{ms}(\delta_{jn}\delta_{kt} - \delta_{kn}\delta_{jt})$$

$$+ \delta_{mt}(\delta_{jn}\delta_{ks} - \delta_{kn}\delta_{js})]B_{js}B_{kt}$$

$$= \frac{1}{2}[\delta_{mn}(B_{jj}B_{kk} - B_{tk}B_{kt}) - B_{nm}B_{kk} + B_{nt}B_{tm}$$

$$+ B_{rk}B_{km} - B_{jj}B_{mm}]$$

$$= \frac{1}{2}(B_{jj}B_{kk} - B_{tk}B_{kt})\delta_{mn} - B_{kk}(B_{mn})^T$$

$$+ (B^T{}_{mt}B^T{}_{tn}) \tag{2.50a}$$

把上列三式写成对任何坐标系都适用的不变性形式，则有

$$\frac{d\mathbf{I}_1}{d\mathbf{B}} = \mathbf{I} \tag{2.48b}$$

$$\frac{d\mathbf{I}_2}{d\mathbf{B}} = \mathbf{I}_1\mathbf{I} - \mathbf{B}^T \tag{2.49b}$$

$$\frac{d\mathbf{I}_3}{d\mathbf{B}} = \mathbf{I}_2\mathbf{I} - \mathbf{I}_1\mathbf{B}^T + (\mathbf{B}^T)^2 \tag{2.50b}$$

利用式(1.42d)凯莱—哈密顿定理，我们可将式 (2.50b) 写成

下列形式：

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{I}_3}{\mathrm{d}\mathbf{B}} = (\mathbf{B}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{I}_3 \tag{2.50c}$$

在实际应用中时常出现复合函数的情形，这时可以利用链式法则进行运算。

张量函数的导数在研究连续介质的本构理论中起着重要的作用。为了能够更好地掌握，下面我们举两个有关弹性物质本构理论的例子。

例2.6 试简述弹性物质的本构方程的形式。

【解】 由下列本构方程表征的物质称为弹性物质：

$$T_{kl} = j\frac{\partial\tilde{W}(\mathbf{F})}{\partial F_{ks}}F_{ls} \tag{2.51a}$$

或写成不变性形式

$$\mathbf{T} = j\frac{\mathrm{d}\tilde{W}(\mathbf{F})}{\mathrm{d}\mathbf{F}}\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \tag{2.51б}$$

式中$\mathbf{T}$为应力张量，j为变形前的和变形后的质量密度比，$\tilde{W}$为应变能密度，而$\mathbf{F}$为变形梯度。由式（2.51）可以推演出一些不同形式的应力本构方程。例如，考虑到阿尔曼希（Almansi）应变张量$\mathbf{E}$和变形梯度$\mathbf{F}$的下列关系：

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{F} - \mathbf{I}) \tag{2.52a}$$

或

$$E_{rs} = \frac{1}{2}(F_{ar}F_{as} - \delta_{rs}) \tag{2.52b}$$

则

$$\tilde{W}(\mathbf{F}) = W(\mathbf{E}) \tag{2.52c}$$

于是

$$\frac{\partial \widetilde{W}(\mathbf{F})}{\partial F_{kl}} = \frac{\partial W(\mathbf{E})}{\partial E_{rs}} \frac{\partial E_{rs}}{\partial F_{kl}}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial W(\mathbf{E})}{\partial E_{rs}} (F_{nr}\delta_{nk}\delta_{sl} + F_{ns}\delta_{nk}\delta_{rl})$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W(\mathbf{E})}{\partial E_{rl}} F_{kr} + \frac{\partial W(\mathbf{E})}{\partial E_{ls}} F_{ks} \right)$$

$$= F_{kr} \frac{\partial W(\mathbf{E})}{\partial E_{rl}} \tag{2.52d}$$

把上式代入式（2.51），则有

$$\mathbf{T}_{kl} = jF_{kr} \frac{\partial W(\mathbf{E})}{\partial E_{rs}} (F_{sl})^T \tag{2.53a}$$

或写成不变性形式如下：

$$\mathbf{T} = j\mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{W}(\mathbf{E})}{d\mathbf{E}} \cdot \mathbf{F}^T \tag{2.53b}$$

这里$W(\mathbf{E})$称为应变能函数。假定它是$\mathbf{E}$的解析函数，我们把它展成幂级数形式，即

$$W(\mathbf{E}) = \frac{1}{2!} C_{klmn} E_{kl} E_{mn} + \frac{1}{3!} C_{klmnrs} E_{kl} E_{mn} E_{rs} + \cdots\cdots \tag{2.54a}$$

或写成不变性形式：

$$W(\mathbf{E}) = \frac{1}{2!} (\mathbf{C}_2 : \mathbf{E}) : \mathbf{E} + \frac{1}{3!} [(\mathbf{C}_3 : \mathbf{E}) : \mathbf{E}] : \mathbf{E} + \cdots \tag{2.54b}$$

式中前两项在初始无应力状态下为零，故未写出。弹性常数张量可按下式给出：

$$C_{klmn}=\left.\frac{\partial^2 W(E)}{\partial E_{kl}\partial E_{mn}}\right|_{E=0} \tag{2.55a}$$

$$C_{klmnrs}=\left.\frac{\partial^3 W(E)}{\partial E_{kl}\partial E_{mn}\partial E_{rs}}\right|_{E=0} \tag{2.56a}$$

写成不变性形式则为

$$\mathbf{C}_2=\left.\frac{\mathrm{d}^2 W(\mathbf{E})}{\mathrm{d}\mathbf{E}\mathrm{d}\mathbf{E}}\right|_{E=0} \tag{2.55b}$$

$$\mathbf{C}_3=\left.\frac{\mathrm{d}^3 W(\mathbf{E})}{\mathrm{d}\mathbf{E}\mathrm{d}\mathbf{E}\mathrm{d}\mathbf{E}}\right|_{E=0} \tag{2.56b}$$

于是应变能函数$W(\mathbf{E})$的梯度可表示为

$$\frac{\partial W(\mathbf{E})}{\partial E_{kl}}=C_{klmn}E_{mn}+\frac{1}{2}C_{klmnrs}E_{mn}E_{rs}+\cdots \tag{2.57c}$$

或写成不变性形式为

$$\frac{\mathrm{d}W(\mathbf{E})}{\mathrm{d}\mathbf{E}}=\mathbf{C}_2:\mathbf{E}+\frac{1}{2}(\mathbf{C}_3:\mathbf{E}):\mathbf{E}+\cdots \tag{2.57b}$$

例2.7 若以格林(Green)应变张量 $\mathbf{C}$ 作为自变量，则有下列应力本构方程：

$$\mathbf{T}=2\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\mathbf{C}} \tag{2.58a}$$

对于各向同性弹性体，应变能密度 W 是应变张量的三个主不变量（例如$I_1(\mathbf{C}),I_2(\mathbf{C}),I_3(\mathbf{C})$）的函数。于是

$$\begin{aligned}\mathbf{T}&=2\left(\frac{\partial W}{\mathrm{d}I_1}\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}\mathbf{C}}+\frac{\partial W}{\partial I_2}\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}\mathbf{C}}+\frac{\partial W}{\partial I_3}\frac{\mathrm{d}I_3}{\mathrm{d}\mathbf{C}}\right)\\&=2\left[\frac{\partial W}{\partial I_1}\mathbf{I}+\frac{\partial W}{\partial I_2}(I_1\mathbf{I}-\mathbf{C})+\frac{\partial W}{\partial I_3}(I_3\mathbf{C}^{-1})\right]\\&=2\left[\left(\frac{\partial W}{\partial I_1}+I_1\frac{\partial W}{\partial I_2}\right)\mathbf{I}-\frac{\partial W}{\partial I_2}\mathbf{C}+I_3\frac{\partial W}{\partial I_3}\mathbf{C}^{-1}\right]\end{aligned} \tag{2.58b}$$

§2.7 积分定理·广义积分定理

1. 积分定理

专著〔8〕以下列J.A.斯克腾（Schouten）对N维直线坐标系所证明的著名公式

$$\int_{f_{q+1}} df^{ri\cdots j}\partial_r - oT^{k\cdots l} = \oint_{f_q} df^{i\cdots j} - oT^{k\cdots l} \tag{2.59}$$

为出发点对三维欧氏空间中由体积分变为面积分的格林变换和由面积分变为线积分的开尔文（Kelvin）变换进行了详尽的阐述并给出了格林变换和开尔文变换的不变性形式如下：

$$\int_v dv\nabla - oT = \oint_a da - oT \tag{2.60a}$$

$$\int_a da \times \nabla - oT = \oint_f df - oT \tag{2.61a}$$

在上列三式中，$df^{ri\cdots j}$和$df^{i\cdots j}$分别是 $q+1$ 维和q 维的格拉斯曼（Grassmann）容积元素；f_{q+1}是左边积分的积分区域，f_q是其边界；“$-o$”代表张量T和容积元素间的任意代数运算；v、a 和f分别表示体积、面积和线段。

当$-o$分别为并乘、点乘和叉乘时，则格林变换分别具有下列形式：

$$\int_v dv\nabla T = \oint_a daT = \int_v dvgradT \tag{2.60b}$$

$$\int_v dv\nabla \cdot T = \oint_a da \cdot T = \int_v dvdivT \tag{2.60c}$$

$$\int_v dv\nabla \times T = \oint da \times T = \int_v dacurlT \tag{2.60d}$$

若式(2.60c)中，取T为矢量b，则有

$$\int_v \mathrm{d}v\mathrm{div}\mathbf{b} = \oint_a \mathrm{d}a\mathbf{n}\cdot\mathbf{b} \tag{2.60e}$$

此即熟知的矢量散度定理，或称为格林—高斯(Gauss)定理，其中 $\mathbf{n}$ 为外单位法线矢量。

若在式(2.61a)中，取"--o"为点乘时，则有

$$\int_a \mathrm{d}\mathbf{a}\cdot\nabla\times\mathbf{T} = \oint_f \mathrm{d}\mathbf{f}\cdot\mathbf{T} = \int_a \mathrm{d}\mathbf{a}\cdot\mathrm{curl}\mathbf{T} \tag{2.61b}$$

在上式，取$\mathbf{T}$为矢量$\mathbf{b}$，则有

$$\int_a \mathrm{d}\mathbf{a}\cdot\mathrm{curl}\mathbf{b} = \oint_f \mathrm{d}\mathbf{f}\cdot\mathbf{b} \tag{2.61c}$$

此即熟悉的斯托克斯(Stokes)公式。

2. 广义积分定理

若在式(2.60a)和式(2.61a)中的体积v内和面积 a 上包含间断曲面 σ 和间断曲线 γ，越过它们张量$\mathbf{T}$发生跳变，我们可以参照专著〔1〕中所述方法证明下面两个广义积分定理，即广义格林变换定理和广义开尔文变换定理。

定理 1 （广义格林变换定理）

设在体积 v 内具有间断曲面 σ，$\mathbf{T}$为任意张量，则下式成立：

$$\int_{v-\gamma} \mathrm{d}v\nabla\text{-o}\mathbf{T} = \int_{a-\sigma} \mathrm{d}\mathbf{a}\text{n-o}\mathbf{T} - \int_\sigma \mathrm{d}\mathbf{a}\text{n-o}[\![\mathbf{T}]\!] \tag{2.62}$$

式中，$v-\sigma = v - v\cap\sigma$，$a-\sigma = a - a\cap\sigma$，$[\![\ \ ]\!]$，表示跳变，即

$$[\![\mathbf{T}]\!] = \mathbf{T}^+ - \mathbf{T}^-$$

这里$\mathbf{T}^+$和$\mathbf{T}^-$分别表示间断曲面两侧的$\mathbf{T}$值。

【证】 把式(2.60a) 分别应用于由 $a^+\cup\sigma^+$和$a^-\cup\sigma^-$ 所限界的间断曲面σ两侧的v 和v^-，则得

$$\int_{v^+} dv\nabla - oT = \int_{a^+} dan - oT + \int_{\sigma^+} n^+ da - oT^+ \qquad (a)$$

$$\int_{v^-} dv\nabla - oT = \int_{a^-} dan - oT + \int_{\sigma^-} n^- da - oT^- \qquad (b)$$

式中带有 + 和 − 标示的各量分别表示间断面σ 两侧相应的量。

把式(a)和式(b)相加，则得

$$\int_{v^+ + v^-} dv\nabla - oT = \int_{a^+ + a^-} dan - oT + \int_{\sigma^+} dan - oT^+ + \int_{\sigma^-} dan^- - oT^- \qquad (c)$$

令$\sigma^+ \to \sigma$，$\sigma^- \to \sigma$，则$v^+ + v^- = v - v \cap \sigma = v - \sigma$，$a^+ + a^- = a - a \cap \sigma = a - \sigma$；另外，考虑到 $n^+ = -n^- = -n$，则式 (c) 可写成下列形式：

$$\int_{v-\sigma} dv\nabla - oT = \int_{a-\sigma} dan - oT - \int_{\sigma} dan - o[T]$$

此即式 (2.62) 。我们把它称为广义格林变换定理。

若令$T = b$为矢量，并取−o为点乘，则式 (2.62)就变成为

$$\int_{v-\sigma} div\, b\, dv = \int_{a-\sigma} n \cdot b\, da - \int_{\sigma} n \cdot [b]\, da \qquad (2.63)$$

我们把此式称为广义格林—高斯公式。

定理 2 （广义开尔文变换定理）

设在面积 a 上具有间断曲线γ，T 为任意张量，则下式成立：

$$\int_{a-\gamma} da \times \nabla - oT = \int_{f-\gamma} df - oT - \int_{\gamma} df h - o[T] \qquad (2.64)$$

式中$a - \gamma = a - a \cap \gamma$，$f - \gamma = f - f \cap \gamma$。h为间断曲线上的切矢量。

【证】　把式(2.61a)分别应用于由$f^+ \cap \gamma^+$和$f^- \cup \gamma^-$所限

界的间断曲线γ两侧的a^+和a^-，则得

$$\int_{a^+} d\mathbf{a}\times\nabla\text{-o}\mathbf{T}=\int_{f^+} d\mathbf{f}\text{-o}\mathbf{T}+\int_{\gamma^+} d\mathbf{f}\mathbf{h}^+\text{-o}\mathbf{T}^+ \qquad \text{(d)}$$

$$\int_{a^-} d\mathbf{a}\times\nabla\text{-o}\mathbf{T}=\int_{f^-} d\mathbf{f}\text{-o}\mathbf{T}+\int_{\gamma^-} d\mathbf{f}\mathbf{h}^-\text{-o}\mathbf{T}^- \qquad \text{(e)}$$

式中带有+和−标示的各量分别表示间断曲线γ两侧相应的量。

把式(d)和式(e)相加

$$\int_{a^++a^-} d\mathbf{a}\times\nabla\text{-o}\mathbf{T}=\int_{f^++f^-} d\mathbf{f}\text{-o}\mathbf{T}+\int_{\gamma^+} d\mathbf{f}\mathbf{h}^+\text{-o}\mathbf{T}^+ +\int_{\gamma^-} d\mathbf{f}\mathbf{h}^-\text{-o}\mathbf{T}^- \qquad \text{(f)}$$

令$\gamma^+\to\gamma$，$\gamma^-\to\gamma$，则$a^++a^-=a-a\cap\gamma=a-\gamma$，$f^++f^-=f-f\cap\gamma=f-\gamma$；另外，考虑到$\mathbf{h}=-\mathbf{h}^-=\mathbf{h}$，则式(f)可写成下列形式：

$$\int_{a-\gamma} d\mathbf{a}\times\nabla\text{-o}\mathbf{T}=\int_{f-\gamma} d\mathbf{f}\text{-o}\mathbf{T}-\int_{\gamma} d\mathbf{f}\mathbf{h}\text{-o}[\mathbf{T}]$$

此即式（2.64）。我们把它称为广义开尔文变换定理。

若令$\mathbf{T}=\mathbf{b}$为矢量，并取-o为点乘，则式(2.64)就变成为

$$\int_{a-\gamma} d\mathbf{a}\times\nabla\cdot\mathbf{b}=\int_{a-\gamma} d\mathbf{a}\cdot\nabla\times\mathbf{b}=\int_{a-\gamma} d\mathbf{a}\cdot\mathrm{curl}\mathbf{b}$$

$$=\int_{f-\gamma} d\mathbf{f}\cdot\mathbf{b}-\int_{\gamma} d\mathbf{f}\mathbf{h}\cdot[\mathbf{b}] \qquad (2.65)$$

我们把此式称为广义斯托克斯公式。

§2.8 曲线坐标·基矢量·度量张量

到目前为止，我们只讲述了直角坐标系下的问题。从现在起，我们讲述曲线坐标系下的问题。

1. 曲线坐标

设空间中任一点P，其位置可用矢径**P**表示。在曲线坐标系中，指标可为上标或下标。

在斜角坐标系$\{x^i\}$中，**P**为x^i的函数，即$\mathbf{P}=\mathbf{P}(x^1,x^2,x^3)=\mathbf{P}(x^i)$。**P**也可以用另外三个变量$x^{1'}$、$x^{2'}$，$x^{3'}$来表示，即$\mathbf{P}=\mathbf{P}(x^{1'},x^{2'},x^{3'})=\mathbf{P}(x^{i'})$，这种坐标系记为$\{x^{i'}\}$。这两组变量$(x^1,x^2,x^3)$和$(x^{1'},x^{2'},x^{3'})$表示同一空间点的位置。两者由下列坐标变换联系起来：

$$x^i=x^i(x^{i'}),\quad i,i'=1,2,3 \tag{2.66a}$$

若x^i是$x^{i'}$的线性函数，则$x^{i'}$也是一个斜角坐标，而且坐标变换为

$$x^i=A^i_{i'}x^{i'},\quad x^{i'}=\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}x^{i'} \tag{2.66b}$$

这里$A^i_{i'}$为变换系数，它是常数。

若x^i不是$x^{i'}$的线性函数，则$\{x^{i'}\}$称为曲线坐标。

在曲线坐标系$\{x^{i'}\}$中，若雅可比(Jacobi)行列式J不为零，即

$$J=\det A^i_{i'}=\left|\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right|\neq 0 \tag{2.67}$$

则坐标变换(2.66a)具有逆变换，即有

$$x^{i'}=x^{i'}(x^i) \tag{2.68}$$

若在式(2.66a)中，令$x^{1'}$=常数，则由式(2.68)决定一组曲面，其中过P点的曲面称为$x^{1'}$坐标曲面。同样地，可决定$x^{2'}$和$x^{3'}$坐标曲面。$x^{2'}$坐标曲面和$x^{3'}$坐标曲面的交线上，$x^{2'}$和$x^{3'}$为常数，只$x^{1'}$变化，这条交线称为$x^{1'}$坐标曲线。同

样地，可得$x^{2'}$和$x^{3'}$坐标曲线。三条坐标曲线交于P点。由这些坐标曲面和坐标曲线所构成的坐标系称为曲线坐标系。斜角坐标系是一种固定的坐标系，它不随P点的改变而改变，但曲线坐标系则随P点的位置改变而改变。

直角坐标系是斜角坐标系的特殊情形。正交曲线坐标系是一般曲线坐标系的特殊情形。当然，一般曲线坐标系是最一般的。

在连续介质力学中最常用的正交曲线坐标系是柱面坐标系和球面坐标系。现叙述如下。

（1）柱面坐标系

设直角坐标系为$\{x^i:x^1,x^2,x^3\}$，曲线坐标系为$\{x^{i'}:x^{1'}=r,x^{2'}=\varphi,x^{3'}=z\}$；则式(2.66a)的具体形式取为

$$x^1=x^1(x^{i'})=r\cos\varphi \tag{2.69a}$$

$$x^2=x^2(x^{i'})=r\sin\varphi \tag{2.69b}$$

$$x^3=x^3(x^{i'})=z \tag{2.69c}$$

其中$r\geqslant 0,0\leqslant\varphi<2\pi,-\infty<z<\infty$。

由此可见，x^i不是$x^{i'}$的线性函数，故$\{x^{i'}\}$属于曲线坐标系。这种坐标变换的雅可比行列式为

$$J=\left|\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right|=\begin{vmatrix}\frac{\partial x^1}{\partial r}&\frac{\partial x^1}{\partial\varphi}&\frac{\partial x^1}{\partial z}\\ \frac{\partial x^2}{\partial r}&\frac{\partial x^2}{\partial\varphi}&\frac{\partial x^2}{\partial z}\\ \frac{\partial x^3}{\partial r}&\frac{\partial x^3}{\partial\varphi}&\frac{\partial x^3}{\partial z}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\cos\varphi&-r\sin\varphi&0\\ \sin\varphi&r\cos\varphi&0\\ 0&0&1\end{vmatrix}=r \tag{2.70}$$

除r＝0外，J≠0，故有逆变换（2.68）的具体形式如下：

$$x^{1'}=r=\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2} \tag{2.71a}$$

$$x^{2'}=\varphi=\mathrm{tg}^{-1}\frac{x^2}{x^1} \tag{2.71b}$$

$$x^{3'}=z \tag{2.71c}$$

由此可得坐标曲面：

(i) $x^{1'}=r=C_1$（常数）为以z轴为公共轴的圆柱面（当$C_1=0$时，即为z轴）；

(ii) $x^{2'}=\varphi=C_2$（常数）为通过z轴的平面；

(iii) $x^{3'}=z=C_3$（常数）为垂直于 z 轴的平面；

和坐标曲线：

(i) $x^{1'}=r=C_1$和$x^{2'}=\varphi=C_2$的交线（z线）是直线；

(ii) $x^{2'}=\varphi=C_2$和$x^{3'}=z=C_3$的交线（r线）是直线；

(iii) $x^{1'}=r=C_1$和$x^{3'}=z=C_3$的交线（φ线）是圆。

这种坐标系称为柱面坐标系。

（2）球面坐标系

设直角坐标系为 $\{x^i;x^1,x^2,x^3\}$，曲线坐标系为$\{x^{i'}:x^{1'}=r,x^{2'}=\vartheta,x^{3'}=\varphi\}$，则式(2.66a)的具体形式取为

$$x^1=r\sin\vartheta\cos\varphi \tag{2.72a}$$

$$x^2=r\sin\vartheta\sin\varphi \tag{2.72b}$$

$$x^3=r\cos\vartheta \tag{2.72c}$$

其中$r\geqslant 0,0\leqslant\varphi<2\pi,0\leqslant\vartheta<\pi$。

由此可见，x^i不是$x^{i'}$的线性函数，故$\{x^{i'}\}$属于曲线坐标系。这种坐标变换的雅可比行列式为

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial r} & \frac{\partial x^1}{\partial \vartheta} & \frac{\partial x^1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x^2}{\partial r} & \frac{\partial x^2}{\partial \vartheta} & \frac{\partial x^2}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x^3}{\partial r} & \frac{\partial x^3}{\partial \vartheta} & \frac{\partial x^3}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{vmatrix}$$

$$=r^2\sin\vartheta \qquad (2.73)$$

除$r=0,\vartheta=0,\pi,\cdots$外，$J\neq 0$，故有逆变换（2.68）的具体形式如下：

$$x^{1\prime}=r=\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2} \qquad (2.74a)$$

$$x^{2\prime}=\vartheta=\mathrm{tg}^{-1}\frac{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}}{x^3} \qquad (2.74b)$$

$$x^3=\varphi=\mathrm{tg}^{-1}\frac{x^2}{x^1} \qquad (2.74c)$$

由此可得坐标曲面：

(i)$x^{1\prime}=r=C_1$（常数）为中心在原点的球面（当$C_1=0$时即为原点）；

(ii)$x^{2\prime}=\vartheta=C_2$（常数）为以原点为顶点的圆锥（当$C_2=0$或$C_2=\pi$时为直线，当$C_2=\frac{\pi}{2}$时为$x^1x^2$面）；

(iii)$x^{3\prime}=\varphi=C_3$(常数)为通过x^3轴的平面；和坐标曲线：

(i) $r=C_1$和$\vartheta=C_2$的交线（φ线）是圆；

(ii) $\vartheta=C_2$和$\varphi=C_3$的交线（r线）是直线；

(iii) $r=C_1$和$\varphi=C_3$的交线（ϑ线）是半圆。

这种坐标系称为球面坐标系。

2. 基矢量·度量张量

给定曲线坐标之后，过空间任意一点沿每一族坐标曲线可以得到一个切矢量：

$$\mathbf{g} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x^{i'}} \tag{2.75a}$$

为书写简单起见，常取$\{x^{i'}\}$为$\{y^i\}$，于是上式可写成：

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial y^i} \tag{2.75b}$$

在斜角坐标系中，设其协变基矢量为$\mathbf{i}_i$，则

$$\mathbf{P} = x^i \mathbf{i}_i \tag{2.76}$$

注意，在曲线坐标系和斜角坐标系中爱因斯坦求和约定中两个重复的指标应为一个是上标，而另一个是下标。由于$\mathbf{i}_i$是常数，故有

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial x^j}{\partial y^i}\mathbf{i}_j = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial y^i} \tag{2.75c}$$

由雅可比行列式$J \neq 0$知，$\mathbf{g}_1$，$\mathbf{g}_2$，$\mathbf{g}_3$是线性独立的矢量组，我们称之为协变基矢量组，它们可以构成一个标架。因为对空间每一点都存在一个这样的标架，所以这些标架的全体在空间中构成一个标架场，称之为活动标架场。

对于一个矢量$\mathbf{a}$可有两种类型的分量a^i和a_i，设其对应的基矢量为$\mathbf{g}_i$和$\mathbf{g}^i$，则

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{g}_i = a_i \mathbf{g}^i$$

由e_{ijk}的定义可知，下列混合积等式成立：

$$[\mathbf{g}_i \mathbf{g}_j \mathbf{g}_k] = \mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_j \cdot \mathbf{g}_k = [\mathbf{g}_1 \mathbf{g}_2 \mathbf{g}_3] e_{ijk} \tag{2.76a}$$

$$[\mathbf{g}^i \mathbf{g}^j \mathbf{g}^k] = \mathbf{g}^i \times \mathbf{g}^j \cdot \mathbf{g}^k = [\mathbf{g}^1 \mathbf{g}^2 \mathbf{g}^3] e^{ijk} \tag{2.76b}$$

这两个量定义为爱丁顿（Eddinglon）张量并分别记为ϵ_{ijk}和

ϵ^{ijk}。由此定义可知

$$\epsilon_{123} = [\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2\mathbf{g}_3] \tag{2.76c}$$

$$\epsilon^{123} = [\mathbf{g}^1\mathbf{g}^2\mathbf{g}^3] \tag{2.76d}$$

对于矢量$\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$，则有

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} &= (a^i\mathbf{g}_i)\cdot(a^j\mathbf{g}_j) = a^ia^j(\mathbf{g}_i\cdot\mathbf{g}_j) \\ &= (a_i\mathbf{g}^i)\cdot(a_j\mathbf{g}^j) = a_ia_j(\mathbf{g}^i\cdot\mathbf{g}^j) \\ &= (a^i\mathbf{g}_i)\cdot(a_j\mathbf{g}^j) = a^ia_j(\mathbf{g}_i\cdot\mathbf{g}^j) \\ &= a^ia_i > 0 \end{aligned} \tag{2.77}$$

我们令

$$g_{ij} = \mathbf{g}_i\cdot\mathbf{g}_j \tag{2.78a}$$

$$g^{ij} = \mathbf{g}^i\cdot\mathbf{g}^j \tag{2.78b}$$

$$(\mathbf{g}^i{}_j = \mathbf{g}^i\cdot\mathbf{g}_j = \mathbf{g}_j\cdot\mathbf{g}^i \tag{2.78c}$$

它们分别称为协变度量张量、逆变度量张量和混合度量张量。前两者分别起着升标和降标的作用。考虑到矢量 a的任意性，故由式（2.77）可知

$$\mathbf{g}^i{}_j = \mathbf{g}_j\cdot\mathbf{g}^i = \delta_j^i \tag{2.79}$$

$$a_i = g_{ij}a^j \quad \therefore \quad \mathbf{g}_i = g_{ij}\mathbf{g}^j \tag{2.80}$$

$$a^i = g^{ij}a_j \quad \therefore \quad \mathbf{g}^i = g^{ij}\mathbf{g}_j \tag{2.81}$$

式（2.79）说明，基矢量$\mathbf{g}_i$与$\mathbf{g}^i$是正交的，它俩称为互逆基矢量，$\mathbf{g}_i$称为协变基矢量，而$\mathbf{g}^i$则称为逆变基矢量。

容易看出互逆基矢量间具有下列关系：

$$\mathbf{g}^1 = \frac{\mathbf{g}_2\times\mathbf{g}_3}{[\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2\mathbf{g}_3]} \tag{2.82a}$$

$$\mathbf{g}^2 = \frac{\mathbf{g}_3\times\mathbf{g}_1}{[\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2\mathbf{g}_3]} \tag{2.82b}$$

$$\mathbf{g}^3 = \frac{\mathbf{g}_1\times\mathbf{g}_2}{[\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2\mathbf{g}_3]} \tag{2.82c}$$

或

$$\mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_j = [\mathbf{g}_i \mathbf{g}_j \mathbf{g}_k]\mathbf{g}^k = \epsilon_{ijk}\mathbf{g}^k \tag{2.83}$$

$$\mathbf{g}^i \times \mathbf{g}^j = [\mathbf{g}^i \mathbf{g}^j \mathbf{g}^k]\mathbf{g}_k = \epsilon_{ijk}\mathbf{g}_k \tag{2.84}$$

由于

$$\begin{aligned} g^{ij} &= \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j = (g^{ik}\mathbf{g}_k)\cdot(g_{jl}\mathbf{g}^l) \\ &= g^{ik}g_{jl}\delta^l{}_k = g^{ik}g_{jk} \\ &= g^{ik}g_{ki} = \delta^i{}_j \end{aligned} \tag{2.85}$$

故知$[g^{ij}]$和$[g_{ij}]$互为逆阵。因为它们均为正定矩阵，故行列式

$$g = |g_{ij}| = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = g_{1i}g_{2j}g_{3k}e^{ijk} > 0 \tag{2.86a}$$

$$\frac{1}{g} = |g^{ij}| = \begin{vmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{vmatrix} = g^{1i}g^{2j}g^{3k}e_{ijk} > 0 \tag{2.86b}$$

下面来证明下列等式：

$$g = |g_{ij}| = [\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2\mathbf{g}_3]^2 \tag{2.86c}$$

事实上，

$$\begin{aligned} [\mathbf{g}^1\mathbf{g}^2\mathbf{g}^3] &= \frac{(\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3)\cdot(\mathbf{g}_3 \times \mathbf{g}_1)\times(\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2)}{[\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2\mathbf{g}_3]^3} \\ &= \frac{-(\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3)\cdot[\mathbf{g}_3\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2]\mathbf{g}_1}{[\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2\mathbf{g}_3]^3} \\ &= -\frac{1}{[\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2\mathbf{g}_3]} \end{aligned} \tag{a}$$

另外

$$\begin{aligned} [\mathbf{g}^1\ \mathbf{g}^2\ \mathbf{g}^3] &= [g^{1i}\mathbf{g}_i\ g^{2j}\mathbf{g}_j\ g^{3k}\mathbf{g}_k] \\ &= g^{1i}\ g^{2j}\ g^{3k}\ [\mathbf{g}_i\ \mathbf{g}_j\ \mathbf{g}_k] \\ &= g^{1i}\ g^{2j}\ g^{3k}\ e_{ijk}[\mathbf{g}_1\ \mathbf{g}_2\ \mathbf{g}_3] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{g}[\mathbf{g}_1\ \mathbf{g}_2\ \mathbf{g}_3] \qquad \text{(b)}$$

由式（a）和式（b）可得

$$g = [\mathbf{g}_1\ \mathbf{g}_2\ \mathbf{g}_3]^2 = \frac{1}{[\mathbf{g}^1\ \mathbf{g}^2\ \mathbf{g}^3]^2}$$

即

$$\sqrt{g} = [\mathbf{g}_1\ \mathbf{g}_2\ \mathbf{g}_3] = \frac{1}{[\mathbf{g}^1\ \mathbf{g}^2\ \mathbf{g}^3]}$$

于是爱丁顿张量可以写成下列形式：

$$\epsilon_{ijk} = [\mathbf{g}_i\ \mathbf{g}_j\ \mathbf{g}_k] = \sqrt{g}\, e_{ijk} \qquad (2.87a)$$

$$\epsilon^{ijk} = [\mathbf{g}^i\ \mathbf{g}^j\ \mathbf{g}^k] = \frac{1}{\sqrt{g}} e^{ijk} \qquad (2.87b)$$

写成不变性形式，则为

$$\epsilon = \epsilon_{ijk}\ \mathbf{g}^i\ \mathbf{g}^j\ \mathbf{g}^k = \epsilon^{ijk}\ \mathbf{g}_i\ \mathbf{g}_j\ \mathbf{g}_k \qquad (2.87c)$$

我们引用基张量的概念[23]，则上式可写成下列形式：

$$\epsilon = \epsilon_{ijk}\ \mathbf{g}^{ijk} = \epsilon^{ijk}\ \mathbf{g}_{ijk} \qquad (2.87d)$$

其中

$$\mathbf{g}^{ijk} = \mathbf{g}^i\ \mathbf{g}^j\ \mathbf{g}^k \qquad (2.88a)$$

$$\mathbf{g}_{ijk} = \mathbf{g}_i\ \mathbf{g}_j\ \mathbf{g}_k \qquad (2.88b)$$

为基张量。

在直角坐标系下，$g = 1$，故有

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon^{ijk} = e_{ijk} \qquad (2.87e)$$

在曲线坐标系中，任意张量，例如二阶逆变一阶协变张量可表示成下列四种记法：

（1）不变性记法　　$\mathbf{T}$　　(2.89a)

（2）分量记法　　$T^{ij}{}_k$　　(2.89b)

（3）并矢记法　　$T^{ij}{}_{k}\,\mathbf{g}_i\,\mathbf{g}_j\,\mathbf{g}^k$　　(2.89c)

（4）广义标量记法　　$T^{ij}{}_{k}\,\mathbf{g}_{ij}{}^{k}$　　(2.89d)

§2.9 克里斯托弗尔符号

在基矢量组$\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_2,\mathbf{g}_3$中可把$\partial_i\mathbf{g}_j$按下式分解

$$\partial_i\mathbf{g}_j=\Gamma_{ijP}\,\mathbf{g}^P \tag{2.90a}$$

$$\partial_i\mathbf{g}_j=\Gamma^P{}_{ij}\,\mathbf{g}_P \tag{2.90b}$$

这里分解系数Γ_{ijP}和$\Gamma_{ij}{}^P$分别称为第一类和第二类克里斯托弗尔(Christoffel)符号。在某些文献中，第一类和第二类克里斯托弗尔符号分别用$[ij,p]$和$\left\{{p \atop ij}\right\}$表示。

用$\mathbf{g}_k$和$\mathbf{g}^k$分别点乘式(2.90a)和式(2.90b)两边，则得

$$\Gamma_{ijP}\mathbf{g}^P\cdot\mathbf{g}_k=\Gamma_{ijP}\delta^P{}_k=\Gamma_{ijk}$$

$$=\partial_i\mathbf{g}_j\cdot\mathbf{g}_k \tag{2.91a}$$

$$\Gamma^k{}_{ij}=\partial_i\mathbf{g}_j\cdot\mathbf{g}^k \tag{2.91b}$$

现述克里斯托弗尔符号的性质如下。

（1）克里斯托弗尔符号不是张量。

现以Γ^k_{ij}为例加以说明。设两个坐标系$\{y^i\}$和$\{y^{i'}\}$间的变换系数为$A^i_{i'}$和$A^{i'}_i$，于是

$$\Gamma^{k'}_{i'j'}=\partial_{i'}\mathbf{g}_{j'}\cdot\mathbf{g}^{k'}=\partial_{i'}(A^j_{j'}\mathbf{g}_j)\cdot A^{k'}_k\mathbf{g}^k$$

$$=A^j_{j'}A^{k'}_k\partial_{i'}\mathbf{g}_j\cdot\mathbf{g}^k+(\partial_{i'}A^j_{j'})A^{k'}_k\mathbf{g}_j\cdot\mathbf{g}^k$$

$$=A^j_{j'}A^{k'}_kA^i_{i'}\partial_i\mathbf{g}_j\cdot\mathbf{g}^k+(\partial_{i'}A^j_{j'})A^{k'}_j$$

$$=A^i_{i'}A^j_{j'}A^{k'}_k\Gamma^k_{ij}+(\partial_{i'}A^j_{j'})A^{k'}_j \tag{2.92}$$

由于上式中右边第二项的存在，说明Γ^k_{ij}不是张量。同样，可

证Γ_{ijk}也不是张量。

（2）Γ_{ijk}和Γ_{ij}^{k}关于指标 i 和 j 对称。

事实上，由于

$$\Gamma_{ijk}=\partial_i\mathbf{g}_j\cdot\mathbf{g}_k=\partial_i(\mathbf{P}_{,j})\cdot\mathbf{g}_k=\mathbf{P}_{,ji}\cdot\mathbf{g}_k \tag{a}$$

和

$$\Gamma_{jik}=\mathbf{P}_{,ij}\cdot\mathbf{g}_k \tag{b}$$

根据偏导数的性质，$\mathbf{P}_{,ji}=\mathbf{P}_{,ij}$，故有$\Gamma_{ijk}=\Gamma_{jik}$。同样地，$\Gamma_{ij}^{k}=\Gamma_{ji}^{k}$。

（3）Γ_{ijk}和Γ_{ij}^{k}的指标可用度量张量升降。

事实上，

$$\Gamma_{ij}^{k}=\partial_i\mathbf{g}_j\cdot\mathbf{g}^k=\partial_i\mathbf{g}_j\cdot g^{kr}\mathbf{g}_r$$

$$=g^{kr}\partial_i\mathbf{g}_j\cdot\mathbf{g}_r=g^{kr}\Gamma_{ijr} \tag{c}$$

同样地，

$$\Gamma_{ijk}=g_{kr}\Gamma_{ij}^{r} \tag{d}$$

（4）在直线坐标系中，$\Gamma_{ijk}=0,\Gamma_{ij}^{k}=0$

事实上，因为在斜角和直角坐标系中基矢量$\mathbf{i}_i$和$\mathbf{e}_i$均为常量，故$\Gamma_{ijk}=0$和$\Gamma_{ij}^{k}=0$。

（5）克里斯托弗尔符号可用度量张量表示。

事实上，由于

$$g_{ij,k}=\partial_k(\mathbf{g}_i\cdot\mathbf{g}_j)=\partial_k\mathbf{g}_i\cdot\mathbf{g}_j+\mathbf{g}_i\cdot\partial_k\mathbf{g}_j=\Gamma_{kij}+\Gamma_{kji} \tag{e}$$

对指标进行轮换，则有

$$g_{jk,i}=\Gamma_{ijk}+\Gamma_{ikj} \tag{f}$$

$$g_{ki,j}=\Gamma_{jki}+\Gamma_{jik} \tag{g}$$

把式(f)和式(g)相加，再减去式(e)，则得

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}(g_{jk,i} + g_{ki,j} - g_{ij,k}) \tag{2.93a}$$

另外，

$$\Gamma^k_{ij} = g^{kr}\,\Gamma_{ijr} = \frac{1}{2}g^{kr}(g_{jr,i} + g_{ri,j} - g_{ij,r}) \tag{2.93b}$$

（6） $$\Gamma^r_{ir} = \partial_i(\log\sqrt{g}) \tag{2.94}$$

事实上，由式 (2.86c)知，$\sqrt{g} = [\mathbf{g}_1\ \mathbf{g}_2\ \mathbf{g}_3]$，故有

$$\begin{aligned}\partial_i\sqrt{g} &= \partial_i[\mathbf{g}_1\ \mathbf{g}_2\ \mathbf{g}_3]\\ &= [\partial_i\mathbf{g}_1\ \mathbf{g}_2\ \mathbf{g}_3] + [\mathbf{g}_1\ \partial_i\mathbf{g}_2\ \mathbf{g}_3] + [\mathbf{g}_1\ \mathbf{g}_2\ \partial_i\mathbf{g}_3]\\ &= \Gamma^r_{i1}[\mathbf{g}_r\ \mathbf{g}_2\ \mathbf{g}_3] + \Gamma^r_{i2}[\mathbf{g}_1\ \mathbf{g}_r\ \mathbf{g}_3] + \Gamma^r_{i3}[\mathbf{g}_1\ \mathbf{g}_2\ \mathbf{g}_r]\\ &= \Gamma^r_{ir}[\mathbf{g}_1\ \mathbf{g}_2\ \mathbf{g}_3]\\ &= \Gamma^r_{ir}\sqrt{g}\end{aligned}$$

由此可得

$$\Gamma^r_{ir} = \frac{\partial_i\sqrt{g}}{\sqrt{g}} = \partial_i(\log\sqrt{g})$$

（7）由于 $\delta^k_j = \mathbf{g}_j\cdot\mathbf{g}^k$，故有

$$\partial_i(\mathbf{g}_j\cdot\mathbf{g}^k) = \partial_i\mathbf{g}_j\cdot\mathbf{g}^k + \partial_i\mathbf{g}^k\cdot\mathbf{g}_j = 0$$

于是

$$\partial_i\mathbf{g}^k\cdot\mathbf{g}_j = -\Gamma^k_{ij} \tag{2.95}$$

$$\partial_i\mathbf{g}^j = -\Gamma^j_{ip}\mathbf{g}^p \tag{2.96}$$

§2.10 协变导数·逆变导数

在曲线坐标系下，哈密顿算子定义为

$$\nabla = \mathbf{g}^r\partial_r \tag{2.97}$$

1. 协变导数

设$\mathbf{T}$为任意张量，则$\nabla\mathbf{T}$构成新的张量，称为$\mathbf{T}$的梯度。为简单起见，现以$\mathbf{T}=T^{ij}{}_k\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}^k$为例给出它的梯度的并矢形式如下：

$$\begin{aligned}\nabla\mathbf{T}&=\mathbf{g}^t\partial_t(\overset{\downarrow}{T}{}^{ij}{}_k\,\overset{\downarrow}{\mathbf{g}}_i\overset{\downarrow}{\mathbf{g}}_j\overset{\downarrow}{\mathbf{g}}^k)\\&=\mathbf{g}^t\{\partial_t\overset{\downarrow}{T}{}^{ij}{}_k\,\mathbf{g}_i\,\mathbf{g}_j\,\mathbf{g}^k+T^{ij}{}_k(\partial_t\overset{\downarrow}{\mathbf{g}}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}^k+\mathbf{g}_i\partial_t\overset{\downarrow}{\mathbf{g}}_j\mathbf{g}^k\\&\quad+\mathbf{g}_i\,\mathbf{g}_j\,\partial_t\overset{\downarrow}{\mathbf{g}}{}^k)\}\\&=\mathbf{g}^t\{\partial_tT^{ij}{}_k\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}^k+T^{ij}{}_k(\Gamma^p{}_{ti}\mathbf{g}_p\mathbf{g}_j\mathbf{g}^k\\&\quad+\Gamma^p{}_{tj}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_p\mathbf{g}^k-\Gamma^k{}_{tp}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}^p)\}\\&=(\partial_tT^{ij}{}_k+\Gamma^i{}_{tp}T^{pj}{}_k+\Gamma^j{}_{tp}T^{ip}{}_k-\Gamma^p{}_{tk}T^{ij}{}_p)\mathbf{g}^t\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}^k\\&=\nabla_tT^{ij}{}_k\mathbf{g}^t\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}^k\end{aligned}\tag{2.98}$$

其中

$$\nabla_tT^{ij}{}_k=\partial_tT^{ij}{}_k+\Gamma^i{}_{tp}T^{pj}{}_k+\Gamma^j{}_{tp}T^{ip}{}_k-\Gamma^p{}_{tk}T^{ij}{}_p\tag{2.99}$$

称为张量T_{ijk}的协变导数。在某些文献中，有的把协变导数写成

$$\nabla_tT^{ij}{}_k=T^{ij}{}_k{}_{;t}\tag{2.100a}$$

或

$$\nabla_tT^{ij}{}_k=T^{ij}{}_k{}_{|t}\tag{2.100b}$$

不难证明下列结果：

$$\nabla_tg_{ij}=0,\quad\nabla_tg^{ij}=0,\quad\nabla_t\delta^i{}_j=0\tag{2.101}$$

$$\nabla_t\epsilon^{ijk}=0,\quad\nabla_t\epsilon_{ijk}=0\tag{2.102}$$

可见，度量张量和爱丁顿张量对于∇_t或∇^t有如常数可以移进或移出于其内或外。

对于矢量$\mathbf{a}$，这是特殊情形。此时，我们可写出

$$\nabla \mathbf{a} = \mathbf{g}^i \partial_i (\overset{\downarrow}{a}_k \overset{\downarrow}{\mathbf{g}}^k)$$
$$= \mathbf{g}^i (\partial_i a_k \mathbf{g}^k - a_k \Gamma^k{}_{ip} \mathbf{g}^p)$$
$$= (\partial_i a_k - a_p \Gamma^p{}_{ik}) \mathbf{g}^i \mathbf{g}^k$$
$$= \nabla_i a_k \mathbf{g}^i \mathbf{g}^k \tag{2.103a}$$

这里

$$\nabla_i a_k = a_{k;i} = a_k|_i = \partial_i a_k - a_p \Gamma^p{}_{ik} \tag{2.103b}$$

称为协变矢量a_k的协变导数。

另一方面，我们也可以写出

$$\nabla \mathbf{a} = \mathbf{g}^i \partial_i (\overset{\downarrow}{a}^k \overset{\downarrow}{\mathbf{g}}_k)$$
$$= \mathbf{g}^i (\partial_i a^k \mathbf{g}_k + a^k \Gamma^p{}_{ik} \mathbf{g}_p)$$
$$= (\partial_i a^k + a^p \Gamma^k{}_{ip}) \mathbf{g}^i \mathbf{g}_k$$
$$= \nabla_i a^k \mathbf{g}^i \mathbf{g}_k \tag{2.104a}$$

这里

$$\nabla_i a^k = a^k{}_{;i} = a^k|_i = \partial_i a^k + a^p \Gamma^k{}_{ip} \tag{2.104b}$$

称为逆变矢量a^k的协变导数。

2. 逆变导数

由于协变导数的指标是张量指标，故可应用逆变度量张量把它的指标升高而得到逆变导数如下：

$$\nabla^r T^{ij}{}_k = g^{rl} \nabla_l T^{ij}{}_k \tag{2.105}$$

§2.11 不变性微分算子

任意张量$\mathbf{T}$（为书写简单起见，以三阶混合张量为例）在曲线坐标系下的不变性微分算子定义如下。

1. 梯度

$$\mathrm{grad}\mathbf{T} = \nabla\mathbf{T} = \nabla_r T^{ij}{}_k \mathbf{g}^r{}_{ij}{}^k \tag{2.106}$$

2. 散度

$$\mathrm{div}\mathbf{T} = \nabla\cdot\mathbf{T} = \nabla_r T^{rj}{}_k \mathbf{g}_j{}^k \tag{2.106a}$$

若$\mathbf{T}$为矢量$\mathbf{a}$，则由式(2.104b)知

$$\nabla_r a^r = \partial_r a^r + a^p \Gamma_r{}^r{}_p$$

考虑到式（2.94），则有

$$\nabla_r a^r = a^r{}_{;r} = \partial_r a^r + \partial_p(\log\sqrt{g})a^p$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}}(\sqrt{g}\,a^r)_{,r} \tag{2.106b}$$

即

$$\mathrm{div}\mathbf{a} = \nabla\cdot\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{g}}(\sqrt{g}\,a^r)_{,r} \tag{2.106c}$$

3. 旋度

$$\mathrm{curl}\mathbf{T} = \nabla\times\mathbf{T} = \mathbf{g}^r\partial_r\times(T_{ij}{}^k\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j\mathbf{g}_k)$$

$$= \mathbf{g}^r\times\mathbf{g}^i\partial_r T_{ij}{}^k\mathbf{g}^j\mathbf{g}_k$$

$$= \epsilon^{sri}\nabla_r T_{ij}{}^k\mathbf{g}_s{}^j{}_k \tag{2.107a}$$

若$\mathbf{T}$为矢量$\mathbf{a}$，则有

$$\mathrm{curl}\mathbf{a} = \nabla\times\mathbf{a} = \epsilon^{sri}\nabla_r a_i\mathbf{g}_s$$

$$= \epsilon^{sri}a_{i;r}\mathbf{g}_s \tag{2.107b}$$

4. 拉普拉斯算子

$$\nabla^2\mathbf{T} = \nabla\cdot\nabla\mathbf{T} = \nabla^r\nabla_r T^{ij}{}_k\mathbf{g}_{ij}{}^k \tag{2.108a}$$

若 f 为标量，则有

$$\nabla^2 f = \nabla_i \nabla^i f = \nabla_i (g^{il} \nabla_l f)$$
$$= \nabla_i (g^{il} \partial_l f)$$
$$= g^{il} (f_{,l})_{;i}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial y^i} \left(\sqrt{g}\, g^{il} \frac{\partial f}{\partial y^l} \right) \qquad (2.108b)$$

§2.12 内禀导数

设区域内的曲线C定义为

$C: y^k = y^k(t), \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2$

其中t为一参数。若$\mathbf{a}(\mathbf{y})$是一个可微的矢量并且$y^k(t)$是属于C^1类的，则

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y^l} \frac{dy^l}{dt} = \frac{\partial (a^k \mathbf{g}_k)}{\partial y^l} \frac{dy^l}{dt}$$
$$= a^k{}_{;l} \frac{dy^l}{dt} \mathbf{g}_k = \frac{\delta a^k}{\delta t} \mathbf{g}_k \qquad (2.109a)$$

这里

$$\frac{\delta a^k}{\delta t} = a^k{}_{;l} \frac{dx^l}{dt} = (a^k{}_{;l} + \Gamma^k{}_{lm} a^m) \frac{dx^l}{dt} \qquad (2.109b)$$

称为a^k对t的内禀导数。

对于任意张量，例如，对于二阶混合张量$T^i{}_j(\mathbf{y})$而言，则有

$$\frac{\delta T^i{}_j}{\delta t} = \nabla_l T^i{}_j \frac{dx^l}{dt}$$
$$= (\partial_l T^i{}_j + \Gamma^i{}_{lk} T^k{}_j - \Gamma^m{}_{lj} T^i{}_m) \frac{dx^l}{dt}$$
$$= \frac{dT^i{}_j}{dt} + (\Gamma^i{}_{lk} T^k{}_j - \Gamma^m{}_{lj} \Gamma^i{}_m) \frac{dx^l}{dt} \qquad (2.110)$$

对于度量张量，由于

$$\frac{\delta g_{kl}}{\delta t}=(\nabla_i g_{kl})\frac{dx^i}{dt}=0 \tag{2.111a}$$

$$\frac{\delta g^{kl}}{\delta t}=(\nabla_i g^{kl})\frac{dx^i}{dt}=0 \tag{2.111b}$$

故度量张量可以移进或移出内禀导数记号之内或外。

若矢量 $\mathbf{a}$ 还和 t 显式相关，亦即

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}(y,t)$$

则有

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{a}}{dt}&=\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}\Big|_y+\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y^l}\Big|_t\frac{dy^l}{dt}\\&=\left(\frac{\partial a^k}{\partial t}+a^k{}_{;l}\frac{dy^l}{dt}\right)\mathbf{g}_k\\&=\frac{Da^k}{Dt}\mathbf{g}_k\end{aligned} \tag{2.112a}$$

这里

$$\frac{Da^k}{Dt}=\frac{\partial a^k}{\partial t}+a^k{}_{;l}\frac{dy^l}{dt} \tag{2.112b}$$

称为a^k的物质导数。这里$|_y$和$|_t$表示对y和t固定。

对于任意张量，例如，对于二阶混合张量$T^i{}_j(y,t)$而言，则其物质导数为

$$\frac{DT^i{}_j}{Dt}=\frac{\partial T^i{}_j}{\partial t}+T^i{}_{j;l}\frac{dy^l}{dt}=\frac{\partial T^i{}_j}{\partial t}+\frac{\delta T^i{}_j}{\delta t} \tag{2.113}$$

对于度量张量，由于g_{kl}和g^{kl}和t没有显式关系，所以

$$\frac{Dg_{kl}}{Dt}=0,\quad \frac{Dg^{kl}}{Dt}=0 \tag{2.114}$$

§2.13 曲率张量

1. 曲率张量的定义

我们知道，在满足连续性要求下，偏导数的次序是可以交换的。现在研究在什么条件下协变导数的次序可以交换。

现以矢量场$\mathbf{u}=u_i\mathbf{g}^i$为例加以说明。

由于

$$u_{i;j}=u_{i,j}-\Gamma^{\alpha}_{ij}u_{\alpha}$$

因此

$$\begin{aligned}u_{i;jk}&=(u_{i;j})_{;k}\\&=(u_{i;j})_{,k}-\Gamma^{\alpha}_{ik}u_{\alpha;j}-\Gamma^{\alpha}_{jk}u_{i;\alpha}\\&=(u_{i,j}-\Gamma^{\alpha}_{ij}u_{\alpha})_{,k}-\Gamma^{\alpha}_{ik}(u_{\alpha,j}-\Gamma^{\beta}_{\alpha j}u_{\beta})\\&\quad-\Gamma^{\alpha}_{jk}(u_{i,\alpha}-\Gamma^{\tau}_{i\alpha}u_{\tau})\\&=u_{i,jk}-\Gamma^{\alpha}_{ij,k}u_{\alpha}-\Gamma^{\alpha}_{ij}u_{\alpha,k}-\Gamma^{\alpha}_{ik}u_{\alpha,j}+\Gamma^{\alpha}_{ik}\Gamma^{\beta}_{\alpha j}u_{\beta}\\&\quad-\Gamma^{\alpha}_{jk}u_{i,\alpha}+\Gamma^{\alpha}_{jk}\Gamma^{\tau}_{i\alpha}u_{\tau}\end{aligned}\tag{2.115a}$$

在上式中，交换指标j和k，则得

$$\begin{aligned}u_{i;kj}&=u_{i,jk}-\Gamma^{\alpha}_{ik,j}u_{\alpha}-\Gamma^{\alpha}_{ik}u_{\alpha,j}-\Gamma^{\alpha}_{ij}u_{\alpha,k}\\&\quad+\Gamma^{\alpha}_{ij}\Gamma^{\beta}_{\alpha k}u_{\beta}-\Gamma^{\alpha}_{kj}u_{i,\alpha}+\Gamma^{\alpha}_{kj}\Gamma^{\tau}_{i\alpha}u_{\tau}\end{aligned}\tag{2.115b}$$

上列两式相减，则得

$$\begin{aligned}2u_{j;[jk]}&=u_{i;jk}-u_{i;kj}\\&=\Gamma^{\alpha}_{ik}\Gamma^{\beta}_{\alpha j}u_{\beta}-\Gamma^{\alpha}_{ij,k}u_{\alpha}-\Gamma^{\alpha}_{ij}\Gamma^{\beta}_{\alpha k}u_{\beta}+\Gamma^{\alpha}_{ik,j}u_{\alpha}\\&=(\Gamma^{\alpha}_{ik,j}-\Gamma^{\alpha}_{ij,k}+\Gamma^{\beta}_{ik}\Gamma^{\alpha}_{\beta j}-\Gamma^{\beta}_{ij}\Gamma^{\alpha}_{\beta k})u_{\alpha}\\&=R^{\alpha}_{ijk}u_{\alpha}\end{aligned}\tag{2.116}$$

式中

$$R^{\alpha}_{ijk}=\Gamma^{\alpha}_{ik,j}-\Gamma^{\alpha}_{ij,k}+\Gamma^{\beta}_{ik}\Gamma^{\alpha}_{\beta j}-\Gamma^{\beta}_{ij}\Gamma^{\alpha}_{\beta k}\tag{2.117a}$$

为便于记忆，我们可把上式写成下列形式：

$$R^i_{jkl}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y^k} & \dfrac{\partial}{\partial y^l} \\ \Gamma^i_{jk} & \Gamma^i_{jl} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \Gamma^i_{\alpha k} & \Gamma^i_{\alpha l} \\ \Gamma^\alpha_{jk} & \Gamma^\alpha_{jl} \end{vmatrix} \qquad (2.117c)$$

根据商法则，由式（2.116）知R^α_{ijk}为四阶混合张量，称为（混合）曲率张量，或称为第二类黎曼—克里斯托弗尔张量。

把(2.117a)写成不变性形式，则有

$$\mathbf{R}=R^\alpha_{ijk}\mathbf{g}_\alpha{}^{ijk} \qquad (2.117c)$$

现用协变度量张量把上标降下，则

$$R_{ijkl}=g_{i\alpha}R^\alpha_{jkl}$$

$$=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y^k} & \dfrac{\partial}{\partial y^l} \\ \Gamma_{jki} & \Gamma_{jli} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \Gamma^\alpha_{jk} & \Gamma^\alpha_{jl} \\ \Gamma_{ik\alpha} & \Gamma_{il\alpha} \end{vmatrix}$$

$$=\Gamma_{jli,k}-\Gamma_{jki,l}+\Gamma^\alpha_{jk}\Gamma_{il\alpha}-\Gamma^\alpha_{jl}\Gamma_{ik\alpha} \qquad (2.118a)$$

若把克里斯托弗尔符号用式（2.93）表示，则有

$$R_{ijkl}=\frac{1}{2}(g_{il,jk}+g_{jk,il}-g_{ik,jl}-g_{jl,ik})$$

$$+g^{\alpha\beta}(\Gamma_{il\alpha}\Gamma_{jk\beta}-\Gamma_{ik\alpha}\Gamma_{jl\beta}) \qquad (2.118b)$$

R_{ijkl}称为（协变）曲率张量，或第一类黎曼—克里斯托弗尔张量。

同样地，我们也可以从逆变矢量$\mathbf{u}^k$看手导出相应的曲率张量。

由于在直线坐标系中克里斯托弗尔符号为零，故$\overset{*}{u}_{i;jk}=u_{i,jk}$，而且$u_{i,jk}-u_{i,kj}=0$，于是$\overset{*}{u}_{i;(jk)}=0$，因而$\overset{*}{R}{}^\alpha_{ijk}=0$。因为曲率张量$\mathbf{R}$是张量，故在其它曲线坐标系中它也应为零，从而$u_{i;(jk)}=0$。这就是说，在三维欧氏空间中协变导数的次序

是可以交换的。这里符号上面“ ˜ ”表示有条件地成立。

2. 曲率张量的性质

由式（2.118）可以得出曲率张量的性质如下：

$$(1)\quad R_{ijkl} = -R_{jikl} \tag{2.119a}$$

$$(2)\quad R_{ijlk} = -R_{ijkl} \tag{2.119b}$$

$$(3)\quad R_{klij} = R_{ijkl} \tag{2.119c}$$

$$(4)\quad R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0 \tag{2.119d}$$

$$R^{i}_{jkl} + R^{i}_{klj} + R^{i}_{ljk} = 0 \tag{2.119e}$$

在连续介质力学中研究变形协调方程时要用到与曲率张量有关的知识。

§2.14 问题形式的转换

我们专门开辟这一节来阐述一下问题形式在直角坐标系和曲线坐标系间的相互转换问题。

前面我们曾分别介绍了直角坐标系下和一般曲线坐标系下的有关张量理论。在研究问题时，有时需要由曲线坐标系下的结果给出直角坐标系下的结果，有时需要反过来。前者比较容易，只要注意到两种坐标系间的差异即可作为特殊情形直接给出结果。后者比较难些，但在应用中这种情况却很重要，这是因为在直角坐标系中推导公式比曲线坐标系的情况简便的缘故。于是，有时为了方便常先在直角坐标系中推导公式，然后再把结果转换为所需要的曲线坐标系下的形式。对于比较简单的情况，根据两种坐标系间的差异即可写出所需的公式。在一般情况下，常是先在直角坐标系下推导公式，然后把它写成对任何坐标系都适用的不变性形式，最后再写出所需曲线坐标系

表 一

名　　称	不变性形式	直角坐标系	曲线坐标系
基矢量		$\mathbf{e}_i$	$\mathbf{g}_i$, $\mathbf{g}^i$
度量张量		δ_{ij}	g_{ij}, g^{ij}, $g^i{}_j$
度量张量行列式		1	g
克里斯托弗尔符号		0	Γ_{ijk}, $\Gamma^k{}_{ij}$
张　　量	$\mathbf{T}$	$T_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$	$T_{ij}\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j$, $T^{ij}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j$, $T^i{}_j\mathbf{g}_i\mathbf{g}^j$
单位张量	$\mathbf{I}$	$\delta_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$	$g_{ij}\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j$, $g^{ij}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j$, $g^i{}_j\mathbf{g}_i\mathbf{g}^j$
爱丁顿张量	ϵ	$e_{ijk}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k$	$\epsilon_{ijk}\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j\mathbf{g}^k$, $\epsilon^{ijk}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}_k$
哈密顿算子	∇	$\mathbf{e}_i\partial_i$	$\mathbf{g}^i\nabla_i$
导　　数		$\partial_i = (\ ),_i$	$\nabla_i = (\ );_i$
梯　　度	$\mathrm{grad}\mathbf{T} = \nabla\mathbf{T}$	$\partial_r T_{ij}\mathbf{e}_r\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$	$\nabla_r T^{ij}\mathbf{g}^r\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j$
散　　度	$\mathrm{div}\mathbf{T} = \nabla\cdot\mathbf{T}$	$\partial_r T_{ri}\mathbf{e}_i$	$\nabla_r T^{ri}\mathbf{g}_i$
旋　　度	$\mathrm{curl}\mathbf{T} = \nabla\times\mathbf{T}$	$e_{sri}\partial_r T_{ij}\mathbf{e}_s\mathbf{e}_j$	$\epsilon^{sri}\nabla_r T_{ij}\mathbf{g}_s\mathbf{g}^j$
拉普拉斯算子	$\nabla^2\mathbf{T} = \nabla\cdot\nabla\mathbf{T}$	$\partial_r\partial_r T_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$	$\nabla^r\nabla_r T^{ij}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j$
求和约定		$a_i b_i$	$a^i b_i$, $a_i b^i$

下的结果。

下面我们就把若干结果的不变性形式及其在直角坐标系和曲线坐标系下的形式汇集在表一内，以供比较之用。

下面举几个例子，加以说明。

例2.8 对于不可压缩势流，连续性方程具有下列形式：

（1）不变性形式为

$$\nabla^2\varphi = 0 \tag{2.120a}$$

这里 φ 为速度势。

（2）直角坐标系下的形式为

$$\partial_i\partial_i\varphi = 0 \text{或} \varphi_{,ii} = 0 \tag{2.120b}$$

（3）曲线坐标系下的形式为

$$\nabla^i\nabla_i\varphi = 0 \text{或} \varphi_{;ij} = 0 \tag{2.120c}$$

例2.9 广义格林—高斯公式具有下列形式：

（1）不变性形式为式（2.63），即

$$\int_{v-\sigma} \mathrm{div}\mathbf{b}\,dv = \int_{a-\sigma} \mathbf{n}\cdot\mathbf{b}da - \int_{\sigma} \mathbf{n}\cdot[\mathbf{b}]da$$

（2）曲线坐标系下的形式为

$$\int_{v-\sigma} b^k{}_{;k}dv = \int_{a-\sigma} b^k n_k da - \int_{\sigma} [b^k] n_k da \tag{2.121a}$$

考虑到式(2.106c)，则上式可写成下列形式：

$$\int_{v-\sigma} \frac{1}{\sqrt{g}}(\sqrt{g}\,b^k)_{,k}dv = \int_{a-\sigma} b^k n_k da - \int_{\sigma} [b^k] n_k da \tag{2.121b}$$

（3）直角坐标系下的形式为

$$\int_{v-\sigma} b_{k,k}\,dv = \int_{a-\sigma} b_k n_k\,da - \int_{\sigma} [b_k] n_k da \tag{2.121c}$$

例2.10 非极性固体的运动方程具有下列形式：

（1）不变性形式为

$$\mathrm{div}\mathbf{T}+\rho\mathbf{b}=\rho\mathbf{a} \tag{2.122a}$$

（2）直角坐标系下的形式为

$$T_{ij,j}+\rho b_i=\rho a_i \tag{2.122b}$$

（3）曲线坐标系下的形式为

$$T^{ij}{}_{;j}+\rho b^i=\rho a^i \tag{2.122c}$$

考虑到式（2.99），则

$$T^{ij}{}_{;j}=T^{ij}{}_{,j}+\Gamma^i{}_{jp}T^{pj}+\Gamma^j{}_{jp}T^{ip} \tag{a}$$

由式（2.94）知

$$\Gamma^i{}_{jp}=(\log\sqrt{g})_{,p}=\frac{1}{\sqrt{g}}(\sqrt{g})_{,p} \tag{b}$$

把式(b)代入式(a)，则

$$T^{ij}{}_{;j}=T^{ij}{}_{,j}+\frac{1}{\sqrt{g}}(\sqrt{g})_{,p}T^{ip}+\Gamma^i{}_{jp}T^{pj}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{g}}(\sqrt{g}T^{ij})_{,j}+\Gamma^i{}_{jp}T^{pj} \tag{c}$$

把式(c)代入式(2.122c)，则得

$$\frac{1}{\sqrt{g}}(\sqrt{g}T^{ij})_{,j}+\Gamma^i{}_{jp}T^{pj}+\rho b^i=\rho a^i \tag{2.122d}$$

在下面一节中比较详尽地阐述非完整系物理标架的微分算子，并且着重介绍正交曲线坐标系。

§2.15 非完整系物理标架下的微分算子

1. 非完整系物理标架

对于正交曲线坐标系，它满足下列条件：

$$\mathbf{g}_i\cdot\mathbf{g}_j=0,\quad \text{当}i\neq j \tag{2.123}$$

我们将基矢量$\mathbf{g}_i$的大小记作H_i，称为拉梅(Lamé)系数，即

$$H_i = |\mathbf{g}_i| = \left|\frac{\partial x_k}{\partial y_i}\mathbf{e}_k\right|$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial y_i}\right)^2} \tag{2.124}$$

在柱面坐标系中，拉梅系数为

$$H_1 = 1, \quad H_2 = r, \quad H_3 = 1 \tag{2.125a}$$

在球面坐标系中，拉梅系数为

$$H_1 = 1, \quad H_2 = r, \quad H_3 = r\sin\theta \tag{2.125b}$$

特别地，在卡氏直角坐标系中，拉梅系数为

$$H_1 = H_2 = H_3 = 1 \tag{2.125c}$$

如果我们取与$\mathbf{g}_i$同向的单位矢量$\overline{\mathbf{g}_i}$作为基矢量

$$\overline{\mathbf{g}_i} = \frac{1}{H_i}\mathbf{g}_i \tag{2.126}$$

则构成所谓非完整系物理标架（或称单位正交活动标架）。非完整系物理标架基矢量，具有如下性质：

$$\overline{\mathbf{g}_i}\cdot\overline{\mathbf{g}_j} = \delta_{ij} \tag{2.127}$$

采用非完整系物理标架，则协变分量和逆变分量的差别消失，这将为我们今后讨论问题提供便利条件。在这种标架下所有量都是物理分量。

2. 偏导数算子，克里斯托弗尔符号

非完整系物理标架下的偏导数算子$\overline{\partial_i}$定义为

$$\overline{\partial_i} = \frac{1}{H_i}\partial_i = \frac{1}{H_i}\frac{\partial}{\partial y_i} \tag{2.128}$$

它对标架每个矢量作用，仍是一个矢量。我们不妨记为

$$\partial_j\,\mathbf{g}_i = \overline{\Gamma}_{ij1}\overline{\mathbf{g}_1} + \overline{\Gamma}_{ij2}\,\overline{\mathbf{g}_2} + \overline{\Gamma}_{ij3}\overline{\mathbf{g}_3} = \overline{\Gamma}_{ijk}\overline{\mathbf{g}_k}$$

这里$\overline{\Gamma}_{ijk}$称为非完整系物理标架下的克里斯托弗尔符号。它表示$\overline{\partial_i}\,\overline{\mathbf{g}_j}$在$\overline{\mathbf{g}_k}$轴上的投影，即

$$\overline{\Gamma}_{ijk}=\overline{\mathbf{g}_k}\cdot\overline{\partial_i}\overline{\mathbf{g}_j} \tag{2.130}$$

由式（2.127），对其两端作用偏导数算子，则

$$\begin{aligned}0&=\overline{\partial_i}(\delta_{kj})=\overline{\partial_i}(\overline{\mathbf{g}_k}\cdot\overline{\mathbf{g}_j})\\&=(\overline{\partial_i}\,\overline{\mathbf{g}_k})\cdot\overline{\mathbf{g}_j}+\overline{\mathbf{g}_k}\cdot(\overline{\partial_i}\,\overline{\mathbf{g}_j})\\&=\overline{\Gamma}_{ikj}+\overline{\Gamma}_{ijk}\end{aligned}$$

即

$$\overline{\Gamma}_{ijk}=-\overline{\Gamma}_{ikj} \tag{2.131}$$

由此可见$\overline{\Gamma}_{ijk}$的后两指标具有反称性。

下面我们研究$\overline{\Gamma}_{ijk}$的具体表达式。

由定义

$$\begin{aligned}\overline{\Gamma}_{ijk}&=\overline{\mathbf{g}_k}\cdot\overline{\partial_i}\overline{\mathbf{g}_j}\\&=\frac{1}{H_{\underline{k}}}\mathbf{g}_k\cdot\frac{1}{H_{\underline{i}}}\partial_i\left(\frac{1}{H_j}\mathbf{g}_j\right)\\&=\frac{1}{H_k}\partial_k\mathbf{P}\cdot\frac{1}{H_{\underline{i}}}\partial_i\left(\frac{1}{H_{\underline{j}}}\partial_j\mathbf{r}\right)\\&=\frac{1}{H_{\underline{k}}H_{\underline{i}}}\partial_k\mathbf{P}\cdot\left(-\frac{1}{H_{\underline{j}}^2}\partial_jH_j\partial_j\mathbf{r}+\frac{1}{H_{\underline{j}}}\partial_i\partial_j\mathbf{r}\right)\\&=\frac{1}{H_{\underline{i}}}\left(-\frac{1}{H_{\underline{j}}}\overline{\mathbf{g}_k}\cdot\overline{\mathbf{g}_j}\partial_iH_j+\frac{1}{H_{\underline{i}}H_{\underline{k}}}\partial_k\mathbf{r}\cdot\partial_i\partial_j\mathbf{r}\right)\end{aligned} \tag{a}$$

但是，我们注意到

$$\partial_i\mathbf{P}\cdot\partial_j\mathbf{P}=H_{\underline{i}}\,\overline{\mathbf{g}_i}\cdot H_{\underline{j}}\overline{\mathbf{g}_j}=H_{\underline{i}}H_{\underline{j}}\delta_{ij} \tag{b}$$

及

$$\partial_k(H_iH_j)\delta_{ij}=\partial_k(\partial_i\mathbf{P}\cdot\partial_j\mathbf{P})$$

$$=\partial_k\partial_i\mathbf{P}\cdot\partial_j\mathbf{P}+\partial_i\mathbf{P}\cdot\partial_k\partial_j\mathbf{P} \tag{c}$$

将指标轮换i→j，j→k，k→i得

$$\partial_i(H_jH_k)\delta_{jk}=\partial_i\partial_j\mathbf{P}\cdot\partial_k\mathbf{P}+\partial_j\mathbf{P}\cdot\partial_i\partial_k\mathbf{P} \tag{d}$$

再轮换

$$\partial_j(H_iH_k)\delta_{ik}=\partial_i\partial_i\mathbf{P}\cdot\partial_k\mathbf{P}+\partial_i\mathbf{P}\cdot\partial_j\partial_k\mathbf{P} \tag{e}$$

式(d)＋式(e)－式(c)，则

$$2\partial_i\partial_j\mathbf{P}\cdot\partial_k\mathbf{P}=\partial_i(H_jH_k)\delta_{jk}+\partial_j(H_iH_k)\delta_{ik}-\partial_k(H_iH_j)\delta_{ij} \tag{f}$$

将式(f)代入式(a)，得

$$\overline{\Gamma}_{ijk}=\frac{1}{H_i}\left[-\frac{1}{H_i}\delta_{ik}\,\partial_iH_i+\frac{1}{2H_iH_k}(\partial_i(H_iH_k)\delta_{jk}\right.$$

$$\left.+\partial_j(H_iH_k)\delta_{ik}-\partial_k(H_iH_j)\delta_{ij})\right]$$

显然，在α、β、γ互不相等时

$$\overline{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma}=0$$

$$\overline{\Gamma}_{\alpha\alpha\alpha}=0$$

$$\overline{\Gamma}_{\alpha\beta\beta}=0$$

$$\overline{\Gamma}_{\alpha\alpha\gamma}=-\frac{1}{H_\alpha H_\gamma}\partial_\gamma H_\alpha=-\overline{\partial}_\gamma\ln H_\alpha$$

$$\overline{\Gamma}_{\alpha\gamma\alpha}=\frac{1}{H_\alpha H_\gamma}\partial_\gamma H_\alpha=-\overline{\partial}_\gamma\ln H_\alpha$$

总之，不为零的克里斯托弗尔符号只有

$$\overline{\Gamma}_{\alpha\gamma\alpha}=-\overline{\Gamma}_{\alpha\alpha\gamma}=\overline{\partial}_\gamma\ln H_\alpha \tag{2.132}$$

可以验证，在卡氏直角坐标系中

$$H_1 = H_2 = H_3 = 1$$

$$\overline{\partial_1} = \frac{\partial}{\partial x},\quad \overline{\partial_2} = \frac{\partial}{\partial y},\quad \overline{\partial_3} = \frac{\partial}{\partial z} \tag{2.133a}$$

$$\overline{\Gamma}_{ijk} = 0$$

在柱面坐标系中

$$H_1 = 1,\quad H_2 = r,\quad H_3 = 1$$

$$\overline{\partial_1} = \frac{\partial}{\partial r},\quad \overline{\partial_2} = \frac{1}{r}\ \frac{\partial}{\partial \theta},\quad \overline{\partial_3} = \frac{\partial}{\partial z} \tag{2.133b}$$

$$\overline{\Gamma}_{212} = -\overline{\Gamma}_{221} = \frac{1}{r}$$

其余的$\overline{\Gamma}_{ijk}$均为零。

在球面坐标系中

$$H_1 = 1,\quad H_2 = r,\quad H_3 = r\sin\theta$$

$$\overline{\partial_1} = \frac{\partial}{\partial r},\quad \overline{\partial_2} = \frac{1}{r}\ \frac{\partial}{\partial \theta},\quad \overline{\partial_3} = \frac{1}{r\sin\theta}\ \frac{1}{\partial \varphi}$$

$$\overline{\Gamma}_{212} = -\overline{\Gamma}_{221} = \overline{\Gamma}_{313} = -\overline{\Gamma}_{331} = \frac{1}{r} \tag{2.133c}$$

$$\overline{\Gamma}_{323} = -\overline{\Gamma}_{332} = \frac{\cot\theta}{r}$$

其余的$\overline{\Gamma}_{ijk}$均为零。

3. 梯度

（1）哈密顿算子

首先我们定义非完整系物理标架下的哈密顿算子$\overline{\nabla}$

$$\overline{\nabla} = \overline{\mathbf{g}}_i\,\overline{\partial}_i \tag{2.134}$$

特别地，在卡氏直角坐标系下($H_1 = H_2 = rH_3 = 1$)

$$\nabla = \mathbf{e}_i \partial_i$$

这和§2.2中关于卡氏直角坐标系中哈密顿算子的定义是一致的。

（2）标量函数的梯度

设标量函数 $f = f(\mathbf{P})$，则它在非完整系物理标架下的梯度 gradf 定义为一个矢量

$$\mathrm{gradf} = \overline{\nabla f} \tag{2.135a}$$

其并矢形式为

$$\mathrm{gradf} = \overline{\nabla f} = \overline{\mathbf{g}_i \partial_i} f = \frac{J}{H_1} \overline{\mathbf{g}_i} \partial_i f$$

$$= \frac{1}{H_1} \frac{\partial f}{\partial y_1} \overline{\mathbf{g}_1} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial f}{\partial y_2} \overline{\mathbf{g}_2} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial f}{\partial y_3} \overline{\mathbf{g}_3} \tag{2.135b}$$

这就是标量函数 f 的梯度在非完整系物理标架下的表达式。若把相应的拉梅系数代入上式，则得：

在柱面坐标系下

$$\mathrm{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial r} \overline{\mathbf{g}_r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \overline{\mathbf{g}_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z} \overline{\mathbf{g}_z} \tag{2.136a}$$

在球面坐标系下

$$\mathrm{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial r} \overline{\mathbf{g}_r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \overline{\mathbf{g}_\theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \overline{\mathbf{g}_\varphi} \tag{2.136b}$$

（3）矢量场的梯度

设矢量场 $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{P}) = a_i \overline{\mathbf{g}_i}$，则它在非完整系物理标架下的左梯度 grada 定义一个二阶张量

$$\mathrm{grada} = \overline{\nabla \mathbf{a}} \tag{2.137a}$$

它的并矢形式为

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}\mathbf{a} &= \overline{\nabla}\mathbf{a} = \overline{\mathbf{g}}_i\,\overline{\partial}_i(\mathbf{a}_j\overline{\mathbf{g}}_j)\\ &= \overline{\mathbf{g}}_i\,\overline{\mathbf{g}}_j\,\overline{\partial}_i\,\mathrm{a}_j + \mathrm{a}_j\,\overline{\mathbf{g}}_i\,\overline{\partial}_i\,\overline{\mathbf{g}}_j)\\ &= \overline{\mathbf{g}}_i\,\overline{\mathbf{g}}_j\,\overline{\partial}_i\,\mathrm{a}_j + \mathrm{a}_j\,\overline{\Gamma}_{ilk}\,\overline{\mathbf{g}}_i\,\overline{\mathbf{g}}_k\\ &= \overline{\mathbf{g}}_i\,\overline{\mathbf{g}}_j(\overline{\partial}_i\,\mathrm{a}_j + \overline{\Gamma}_{ikj}\,\mathrm{a}_k)\\ &= (\mathrm{grad}\mathbf{a})_{ij}\,\overline{\mathbf{g}}_{ij}\end{aligned} \tag{2.137b}$$

其中

$$(\mathrm{grad}\mathbf{a})_{ij} = \overline{\partial}_i\,\mathrm{a}_j + \overline{\Gamma}_{ikj}\mathrm{a}_k$$

类似地，我们还可以定义 $\mathbf{a}=\mathbf{a}(\mathbf{P})$ 的右梯度，$\overline{\mathrm{grad}}\mathbf{a} = \mathbf{a}\overline{\nabla}$，可以证明

$$\mathbf{a}\overline{\nabla} = (\overline{\nabla}\mathbf{a})^{\mathrm{T}} \tag{2.138}$$

（4）张量场的梯度

设二阶张量场$\mathbf{T}=\mathbf{T}(\mathbf{P})=\mathrm{T}_{ij}\,\overline{\mathbf{g}}_i\,\overline{\mathbf{g}}_j$，则它在非完整系物理标架下的左梯度$\mathrm{grad}\mathbf{T}$定义为一个三阶张量

$$\mathrm{grad}\mathbf{T} = \overline{\nabla}\mathbf{T} \tag{2.139a}$$

$$\begin{aligned}&= \mathbf{g}_i\,\overline{\partial}_i(\mathrm{T}_{jk}\overline{\mathbf{g}}_j\,\overline{\mathbf{g}}_k)\\ &= \overline{\partial}_i\mathrm{T}_{jk}\,\overline{\mathbf{g}}_i\,\overline{\mathbf{g}}_j\,\overline{\mathbf{g}}_k + \mathrm{T}_{jk}\,\overline{\Gamma}_{ilj}\,\overline{\mathbf{g}}_i\,\overline{\mathbf{g}}_l\,\overline{\mathbf{g}}_k + \mathbf{T}_{jk}\,\overline{\Gamma}_{ikl}\,\overline{\mathbf{g}}_i\,\overline{\mathbf{g}}_j\,\overline{\mathbf{g}}_l\\ &= \overline{\partial}_i\mathrm{T}_{jk}\,\overline{\mathbf{g}}_i\,\mathbf{g}_j\,\mathbf{g}_k + \mathrm{T}_{lk}\,\overline{\Gamma}_{ilj}\,\overline{\mathbf{g}}_i\,\overline{\mathbf{g}}_j\,\overline{\mathbf{g}}_k + \mathrm{T}_{jl}\,\overline{\Gamma}_{ilk}\,\overline{\mathbf{g}}_i\,\overline{\mathbf{g}}_j\,\overline{\mathbf{g}}_k\\ &= (\overline{\partial}_i\mathrm{T}_{jk} + \overline{\Gamma}_{ilj}\,\mathrm{T}_{lk} + \overline{\Gamma}_{ilk}\,\mathrm{T}_{jl})\,\mathbf{g}_i\,\mathbf{g}_j\,\mathbf{g}_k\\ &= (\overline{\nabla}\,\mathbf{T})_{ijk}\,\overline{\mathbf{g}}_{ijk}\end{aligned} \tag{2.139b}$$

其中

$$(\overline{\nabla}\,\mathbf{T})_{ijk} = \overline{\partial}_i\,\mathrm{T}_{jk} + \overline{\Gamma}_{ilj}\,\mathrm{T}_{lk} + \overline{\Gamma}_{ilk}\mathrm{T}_{jl}$$

这是gradT的分量形式。

$\mathbf{T}=\mathbf{T}(\mathbf{P})$ 的右梯度$\overline{\mathbf{g}}\mathbf{radT}$定义为

$$\overline{\mathbf{g}}\mathbf{radT}=\mathbf{T}\overline{\nabla} \tag{2.140}$$

一般情况下

$$\overline{\nabla}\mathbf{T}\neq\mathbf{T}\overline{\nabla}$$

4. 散度

（1）矢量场的散度

设矢量场$\mathbf{a}=\mathbf{a}(\mathbf{P})$，则它的散度div**a**定义为一个标量

$$\mathbf{diva}=\overline{\nabla}\cdot\mathbf{a} \tag{2.141a}$$

其展开形式为

$$\begin{aligned}\mathbf{diva}=\overline{\nabla}\cdot\mathbf{a}&=\overline{\mathbf{g}}_i\,\overline{\partial}_i\cdot(a_j\,\overline{\mathbf{g}}_j)\\&=\overline{\mathbf{g}}_i\cdot\overline{\mathbf{g}}_j\,\overline{\partial}_i a_j+a_j\,\overline{\mathbf{g}}_i\cdot\partial_i\,\overline{\mathbf{g}}_j\\&=\delta_{ij}\,\overline{\partial}_i a_j+\overline{\mathbf{g}}_i\cdot\mathbf{g}_k a_j\,\overline{\Gamma}_{ijk}\\&=\overline{\partial}_i a_i+\overline{\Gamma}_{iji}a_j\end{aligned} \tag{2.141b}$$

在卡氏直角坐标系中（$\overline{\Gamma}_{ijk}=0$）

$$\mathbf{diva}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z} \tag{2.141c}$$

在柱面坐标系中

$$\begin{aligned}\mathbf{diva}&=\overline{\partial}_1 a_1+\overline{\partial}_2 a_2+\overline{\partial}_3 a_3+a_1\,\overline{\Gamma}_{212}\\&=\frac{\partial a_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial a\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial a_z}{\partial z}+\frac{1}{r}a_r\end{aligned} \tag{2.141d}$$

在球面坐标系中

$$\mathbf{diva}=\overline{\partial}_1 a_1+\overline{\partial}_2 a_2+\overline{\partial}_3 a_3+a_1\,\overline{\Gamma}_{212}+a_1\,\overline{\Gamma}_{313}+a_2\,\overline{\Gamma}_{323}$$

$$= \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{z}{r}a_r + \frac{\cot\theta}{r}a_\theta$$

(2.141e)

（2）张量场的散度

设任意二阶张量$\mathbf{T} = \mathbf{T}(P) = T_{ij}\bar{\mathbf{g}}_i\bar{\mathbf{g}}_j$，则它的左散度$\mathbf{div}\mathbf{T}$定义为一个矢量

$$\mathrm{div}\mathbf{T} = \bar{\nabla}\cdot\mathbf{T} \tag{2.142a}$$

其并矢形式为

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\mathbf{T} &= \bar{\nabla}\cdot\mathbf{T}\\ &= \mathbf{g}_k\bar{\partial}_k\cdot(T_{ij}\bar{\mathbf{g}}_i\bar{\mathbf{g}}_j)\\ &= \mathbf{g}_k\cdot\mathbf{g}_i\,\mathbf{g}_j\,\partial_k T_{ij} + T_{ij}\bar{\mathbf{g}}_k\cdot\partial_k\bar{\mathbf{g}}_i\bar{\mathbf{g}}_j + T_{ij}\bar{\mathbf{g}}_k\cdot\mathbf{g}_i\bar{\partial}_k\bar{\mathbf{g}}\\ &= \delta_{ki}\bar{\partial}_k T_{ij}\bar{\mathbf{g}}_j + T_{ij}\bar{\Gamma}_{kik}\bar{\mathbf{g}}_j + \delta_{ki}T_{ij}\bar{\Gamma}_{kjl}\bar{\mathbf{g}}_l\\ &= \bar{\partial}_k T_{kj}\bar{\mathbf{g}}_j + T_{ij}\bar{\Gamma}_{kik}\bar{\mathbf{g}}_j + T_{kj}\bar{\Gamma}_{kjl}\bar{\mathbf{g}}_l\\ &= (\bar{\partial}_k T_{ki} + \bar{\Gamma}_{kjk}T_{ji} + \bar{\Gamma}_{kji}T_{kj})\bar{\mathbf{g}}_i\\ &= (\mathrm{div}\,\mathbf{T})_i\bar{\mathbf{g}}_i\end{aligned} \tag{2.142b}$$

其中

$$(\mathrm{div}\mathbf{T})_i = \bar{\partial}_k T_{ki} + \bar{\Gamma}_{kjk}T_{ji} + \bar{\Gamma}_{kji}T_{kj}$$

这就是$\mathrm{div}\mathbf{T}$的分量形式。

类似地，我们还可以定义$\mathbf{T} = \mathbf{T}(P)$的右散度$\bar{\mathrm{div}}\mathbf{T}$

$$\bar{\mathrm{div}}\mathbf{T} = \mathbf{T}\cdot\bar{\nabla} \tag{2.143}$$

5. 旋度

（1）矢量场的旋度

设任意矢量场$\mathbf{a}=\mathbf{a}(P)$，则它的左旋度curla定义为一个矢量

$$\mathrm{curl}\,\mathbf{a}=\bar{\nabla}\times\mathbf{a} \tag{2.144a}$$

其并矢形式为

$$\begin{aligned}\mathrm{curl}\,\mathbf{a}&=\bar{\nabla}\times\mathbf{a}\\&=\bar{\mathbf{g}}_k\,\bar{\partial}_k\times(a_j\,\bar{\mathbf{g}}_j)\\&=\bar{\mathbf{g}}_k\times\bar{\mathbf{g}}_j\,\bar{\partial}_k\,a_j+a_j\,\bar{\mathbf{g}}_k\times\bar{\partial}_k\,\bar{\mathbf{g}}_j\\&=\epsilon_{kji}\,\bar{\partial}_k\,a_j\,\bar{\mathbf{g}}_i+a_j\,\bar{\Gamma}_{kjl}\,\bar{\mathbf{g}}_k\times\bar{\mathbf{g}}_l\\&=\epsilon_{kji}\,\bar{\partial}_k\,a_j\,\bar{\mathbf{g}}_i+a_j\,\bar{\Gamma}_{kjl}\,\epsilon_{kli}\,\bar{\mathbf{g}}_i\\&=\epsilon_{kji}\,\bar{\partial}_k\,a_j\bar{\mathbf{g}}_i+a_l\bar{\Gamma}_{klj}\,\epsilon_{kji}\,\bar{\mathbf{g}}_i\\&=\epsilon_{kji}(\bar{\partial}_k\,a_j+\bar{\Gamma}_{klj}\,a_l)\bar{\mathbf{g}}_i\\&=\epsilon_{jlk}\,(\bar{\partial}_j\,a_k+\bar{\Gamma}_{kij}\,a_l)\bar{\mathbf{g}}_i\\&=(\mathrm{curla})_i\,\bar{\mathbf{g}}_i\end{aligned} \tag{2.144b}$$

其中

$$(\mathrm{curla})_i=\epsilon_{ijk}\,(\bar{\partial}_j\,a_k+\bar{\Gamma}_{klj}a_l)$$

在柱面坐标系下

$$\begin{aligned}(\mathrm{curla})_r&=\frac{1}{r}\,\frac{\partial a_z}{\partial\theta}-\frac{\partial a_\theta}{\partial z}\\(\mathrm{curla})_\theta&=\frac{\partial a_r}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial r}\\(\mathrm{curla})_z&=\frac{\partial a_\theta}{\partial r}-\frac{1}{r}\,\frac{\partial a_r}{\partial\theta}+\frac{1}{r}a_\theta\end{aligned} \tag{2.144c}$$

在球面坐标系下

$$(\mathrm{curl}\mathbf{a})_r = \frac{1}{r}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\theta}{\partial\varphi} + \frac{\cot\theta}{r}a_\varphi$$

$$(\mathrm{curl}\mathbf{a})_\theta = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r}a_\varphi \qquad (2.144\mathrm{d})$$

$$(\mathrm{curl}\mathbf{a})_\varphi = \frac{\partial a_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial\theta} + \frac{1}{r}a_\theta$$

类似地，我们还可以定义矢量$\mathbf{a}=\mathbf{a}(P)$的右旋度$\bar{\mathrm{curl}}\mathbf{a}$

$$\bar{\mathrm{curl}}\,\mathbf{a} = \mathbf{a}\times\bar{\nabla} \qquad (2.145\mathrm{a})$$

可以证明

$$\mathbf{a}\times\bar{\nabla} = -\bar{\nabla}\times\mathbf{a} \qquad (2.145\mathrm{b})$$

（2）张量场的旋度

设任意二阶张量场$\mathbf{T}=\mathbf{T}(P)$，则它的左旋度 curl$\mathbf{T}$ 定义为一个二阶张量

$$\mathrm{curl}\mathbf{T} = \bar{\nabla}\times\mathbf{T} \qquad (2.146\mathrm{a})$$

其并矢形式为

$$\begin{aligned}
\mathrm{curl}\mathbf{T} &= \bar{\nabla}\times\mathbf{T}\\
&= \bar{\mathbf{g}}_k\,\bar{\partial}_k\times T_{ij}\,\bar{\mathbf{g}}_i\,\bar{\mathbf{g}}_j\\
&= \bar{\partial}_k T_{ij}\bar{\mathbf{g}}_k\times\bar{\mathbf{g}}_i\,\bar{\mathbf{g}}_j + T_{ij}(\bar{\mathbf{g}}_k\times\bar{\partial}_k\bar{\mathbf{g}}_i)\,\bar{\mathbf{g}}_j\\
&\quad + T_{ij}(\bar{\mathbf{g}}_k\times\bar{\mathbf{g}}_i)\bar{\partial}_k\bar{\mathbf{g}}_j\\
&= \bar{\partial}_k T_{ij}\epsilon_{kil}\bar{\mathbf{g}}_l\,\bar{\mathbf{g}}_j + T_{ij}\bar{\Gamma}_{kil}\epsilon_{klm}\bar{\mathbf{g}}_m\,\bar{\mathbf{g}}_j\\
&\quad + T_{ij}\epsilon_{kil}\bar{\Gamma}_{klm}\bar{\mathbf{g}}_l\,\bar{\mathbf{g}}_m\\
&= \bar{\partial}_k T_{ij}\epsilon_{kli}\bar{\mathbf{g}}_i\,\bar{\mathbf{g}}_j + T_{mj}\bar{\Gamma}_{kml}\epsilon_{kli}\bar{\mathbf{g}}_i\,\bar{\mathbf{g}}_j\\
&\quad + T_{im}\epsilon_{kli}\bar{\Gamma}_{kml}\bar{\mathbf{g}}_i\,\bar{\mathbf{g}}_j
\end{aligned}$$

$$= \epsilon_{kli}\,(\bar{\partial}_k T_{lj} + \bar{\Gamma}_{kml} T_{mj} + \bar{\Gamma}_{kmj} T_{lm})\,\bar{\mathbf{g}}_i\,\bar{\mathbf{g}}_j$$

$$= (\bar{\nabla} \times \mathrm{T})_{ij}\,\bar{\mathbf{g}}_i\,\bar{\mathbf{g}}_j \qquad (2.146b)$$

其中

$$(\bar{\nabla} \times \mathbf{T})_{ij} = \epsilon_{kli}\,(\bar{\partial}_k T_{lj} + \bar{\Gamma}_{kml} T_{mj} + \bar{\Gamma}_{kmj} T_{lm}) \qquad (2.146c)$$

这就是curl**T**的分量形式。

类似地，我们还可以定义二阶张量 $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{P})$ 的右旋度 $\bar{\mathrm{curl}}\mathbf{T}$

$$\bar{\mathrm{curl}}\,\mathbf{T} = \mathbf{T} \times \bar{\nabla} \qquad (2.147)$$

6. 拉普拉斯算子

（1）作用于标量场的拉普拉斯算子

拉普拉斯(Laplace)算子∇^2定义为

$$\nabla^2 = \bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} \qquad (2.148)$$

当拉普拉斯算子作用于标量函数$\mathrm{f} = \mathrm{f}(\mathbf{P})$时，即

$$\nabla^2 \mathrm{f} = \bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} \mathrm{f}$$

$$= \bar{\mathbf{g}}_i\,\bar{\partial}_i \cdot \bar{\mathbf{g}}_j\,\bar{\partial}_j\,\mathrm{f}$$

$$= \delta_{ij}\,\bar{\partial}_i\,\bar{\partial}_j\,\mathrm{f} + \delta_{ik}\,\bar{\Gamma}_{ijk}\,\bar{\partial}_j\,\mathrm{f}$$

$$= (\bar{\partial}_i\,\bar{\partial}_i + \bar{\Gamma}_{iji}\,\bar{\partial}_j)\mathrm{f} \qquad (2.149)$$

在柱面坐标系下，考虑到式(2.133b)，则

$$\nabla^2 \mathrm{f} = (\bar{\partial}_i\,\bar{\partial}_i + \bar{\Gamma}_{iji}\,\bar{\partial}_j)\mathrm{f}$$

$$= (\bar{\partial}_1\,\bar{\partial}_1 + \bar{\partial}_2\,\bar{\partial}_2 + \bar{\partial}_3\,\bar{\partial}_3 + \bar{\Gamma}_{212}\,\bar{\partial}_1)\mathrm{f}$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{r}^2} + \frac{1}{\mathrm{r}^2}\,\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{z}^2} + \frac{1}{\mathrm{r}}\,\frac{\partial}{\partial \mathrm{r}}\right)\mathrm{f} \qquad (2.150a)$$

其中

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \tag{2.150b}$$

在球面坐标系下，考虑到式(2.133c)，则

$$\begin{aligned}\nabla^2 f &= (\bar{\partial}_i \bar{\partial}_i + \bar{\Gamma}_{ij_i}\bar{\partial}_j) f \\ &= [\bar{\partial}_1 \bar{\partial}_1 + \bar{\partial}_2 \bar{\partial}_2 + \bar{\partial}_3 \bar{\partial}_3 + (\bar{\Gamma}_{313} + \bar{\Gamma}_{212})\bar{\partial}_1 + \bar{\Gamma}_{323}] f \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{2\partial}{r\partial r}\right. \\ &\quad \left. + \frac{\cot\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) f \end{aligned} \tag{2.150c}$$

其中

$$\begin{aligned}\nabla^2 = &\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} \\ &+ \frac{\cot\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\end{aligned} \tag{2.150d}$$

（2）作用于矢量场的拉普拉斯算子

当拉普拉斯算子作用于矢量场$\mathbf{a} = \mathbf{a}(P)$时，则

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{a} &= \bar{\nabla}\cdot\bar{\nabla}\mathbf{a} \\ &= (\bar{\mathbf{g}}_k \bar{\partial}_k)\cdot \bar{\mathbf{g}}_j \bar{\mathbf{g}}_i (\bar{\partial}_j a_i + \bar{\Gamma}_{jmi} a_m) \\ &= [\bar{\partial}_l(\bar{\partial}_j a_l + \bar{\Gamma}_{jmf} a_m) + \bar{\Gamma}_{klk}(\bar{\partial}_j a_i + \bar{\Gamma}_{jmi} a_m) \\ &\quad + \bar{\Gamma}_{jki}(\bar{\partial}_j a_k + \bar{\Gamma}_{jmk} a_m)]\bar{\mathbf{g}}_i \\ &= [\nabla^2 a_i + 2\bar{\Gamma}_{jki}\bar{\partial}_j a_k + \bar{\Gamma}_{jki}\bar{\Gamma}_{jmk} a_m \\ &\quad + (\bar{\partial}_j \bar{\Gamma}_{jmi} + \bar{\Gamma}_{klk}\bar{\Gamma}_{jmi}) a_m]\bar{\mathbf{g}}_i \\ &= (\Delta^2 a)_i \bar{\mathbf{g}}_i \end{aligned} \tag{2.151a}$$

其中

$$(\nabla^2\mathbf{a})_i = \nabla^2 a_i + 2\bar{\Gamma}_{jki}\bar{\partial}_j a_k + \bar{\Gamma}_{jki}\bar{\Gamma}_{jmk}a_m + (\bar{\partial}_j\bar{\Gamma}_{jmi} + \bar{\Gamma}_{kjk}\bar{\Gamma}_{jmi})a_m \qquad (2.151b)$$

（3）作用于张量场的拉普拉斯算子

当拉普拉斯算子作用于二阶张量场$\mathbf{T}=\mathbf{T}(P)$时，即

$$\nabla^2\mathbf{T} = \bar{\nabla}\cdot\bar{\nabla}\mathbf{T}$$

$$= \bar{\mathbf{g}}_m\bar{\partial}_m(\bar{\partial}_k T_{ij} + \bar{\Gamma}_{kli}T_{lj} + \bar{\Gamma}_{klj}T_{il})\bar{\mathbf{g}}_k\bar{\mathbf{g}}_i\bar{\mathbf{g}}_j$$

$$= \bar{\partial}_m(\bar{\partial}_k T_{ij} + \bar{\Gamma}_{kli}T_{lj} + \bar{\Gamma}_{klj}T_{il})(\bar{\mathbf{g}}_m\cdot\bar{\mathbf{g}}_k)\bar{\mathbf{g}}_i\bar{\mathbf{g}}_j$$
$$+ (\bar{\partial}_k T_{ij} + \bar{\Gamma}_{kli}T_{lj} + \bar{\Gamma}_{klj}T_{il})(\bar{\mathbf{g}}_m\cdot\bar{\partial}_m\bar{\mathbf{g}}_k)\bar{\mathbf{g}}_i\bar{\mathbf{g}}_j$$
$$+ (\bar{\partial}_k T_{ij} + \bar{\Gamma}_{kli}T_{lj} + \bar{\Gamma}_{klj}T_{il})(\bar{\mathbf{g}}_m\cdot\bar{\mathbf{g}}_k)(\bar{\partial}_m\bar{\mathbf{g}}_i)\bar{\mathbf{g}}_j$$
$$+ (\bar{\partial}_k T_{ij} + \bar{\Gamma}_{kli}T_{lj} + \bar{\Gamma}_{klj}T_{il})(\bar{\mathbf{g}}_m\cdot\bar{\mathbf{g}}_k)\bar{\mathbf{g}}_i(\bar{\partial}_m\bar{\mathbf{g}}_j)$$

$$= \delta_{km}\bar{\partial}_m(\bar{\partial}_k T_{ij} + \bar{\Gamma}_{kli}T_{lj} + \bar{\Gamma}_{klj}T_{il})\bar{\mathbf{g}}_i\bar{\mathbf{g}}_j$$
$$+ \bar{\Gamma}_{mkn}\delta_{mn}(\bar{\partial}_k T_{ij} + \bar{\Gamma}_{kli}T_{lj} + \bar{\Gamma}_{klj}T_{il})\bar{\mathbf{g}}_i\bar{\mathbf{g}}_j$$
$$+ \bar{\Gamma}_{min}\delta_{mk}(\bar{\partial}_k T_{ij} + \bar{\Gamma}_{kli}T_{lj} + \bar{\Gamma}_{klj}T_{il})\bar{\mathbf{g}}_n\bar{\mathbf{g}}_j$$
$$+ \delta_{mk}\bar{\Gamma}_{min}(\bar{\partial}_k T_{ij} + \bar{\Gamma}_{kli}T_{lj} + \bar{\Gamma}_{klj}T_{il})\bar{\mathbf{g}}_i\bar{\mathbf{g}}_n$$

$$= \bar{\partial}_k(\bar{\partial}_k T_{ij} + \bar{\Gamma}_{kli}T_{lk} + \bar{\Gamma}_{klj}T_{il})\bar{\mathbf{g}}_i\bar{\mathbf{g}}_j$$
$$+ \bar{\Gamma}_{mkm}(\bar{\partial}_k T_{ij} + \bar{\Gamma}_{kli}T_{lj} + \bar{\Gamma}_{klj}T_{il})\bar{\mathbf{g}}_i\bar{\mathbf{g}}_j$$
$$+ \bar{\Gamma}_{kin}(\bar{\partial}_k T_{ij} + \bar{\Gamma}_{kli}T_{lj} + \bar{\Gamma}_{klj}T_{il})\bar{\mathbf{g}}_n\bar{\mathbf{g}}_j$$
$$+ \bar{\Gamma}_{kjn}(\bar{\partial}_k T_{ij} + \bar{\Gamma}_{kli}T_{li} + \bar{\Gamma}_{kli}T_{il})\bar{\mathbf{g}}_i\bar{\mathbf{g}}_n$$

$$= [\bar{\partial}_k(\bar{\partial}_k T_{ij} + \bar{\Gamma}_{kli}T_{lj} + \bar{\Gamma}_{klj}T_{il})$$
$$+ \bar{\Gamma}_{mkm}(\bar{\partial}_k T_{ij} + \bar{\Gamma}_{kli}T_{lj} + \bar{\Gamma}_{klj}T_{il})$$

$$+\overline{\Gamma}_{kal}\left(\overline{\partial}_k T_{aj}+\overline{\Gamma}_{klm} T_{mj}+\overline{\Gamma}_{klj} T_{al}\right)$$

$$+\overline{\Gamma}_{kaj}\left(\overline{\partial}_k T_{ia}+\overline{\Gamma}_{kli} T_{la}+\overline{\Gamma}_{klm} T_{al}\right)\Big]\overline{\mathbf{g}}_i\overline{\mathbf{g}}_l$$

$$=\Big[\nabla^2 T_{ij}+\overline{\partial}_k\left(\overline{\Gamma}_{kli} T_{lj}+\overline{\Gamma}_{klj} T_{il}\right)$$

$$+\overline{\Gamma}_{mkn}\left(\overline{\Gamma}_{kli} T_{lj}+\overline{\Gamma}_{klj} T_{il}\right)$$

$$+\overline{\Gamma}_{kni}\left(\overline{\partial}_k T_{nj}+\overline{\Gamma}_{klm} T_{lj}+\overline{\Gamma}_{klj} T_{nl}\right)$$

$$+\overline{\Gamma}_{kaj}\left(\overline{\partial}_k T_{ia}+\overline{\Gamma}_{kli} T_{la}+\overline{\Gamma}_{klm} T_{al}\right)\Big]\overline{\mathbf{g}}_i\overline{\mathbf{g}}_l$$

$$=(\nabla^2\mathbf{T})_{ij}\overline{\mathbf{g}}_i\overline{\mathbf{g}}_j \qquad (2.152a)$$

其中

$$(\nabla^2\mathbf{T})_{ij}=\nabla^2 T_{ij}+\overline{\partial}_k\left(\overline{\Gamma}_{kli} T_{lj}+\overline{\Gamma}_{klj} T_{jl}\right)$$

$$+\overline{\Gamma}_{mkn}\left(\overline{\Gamma}_{kli} T_{lj}+\overline{\Gamma}_{klj} T_{il}\right)$$

$$+\overline{\Gamma}_{kni}\left(\overline{\partial}_k T_{nj}+\overline{\Gamma}_{klm} T_{lj}+\overline{\Gamma}_{klj} T_{nl}\right)$$

$$+\overline{\Gamma}_{kaj}\left(\overline{\partial}_k T_{ia}+\overline{\Gamma}_{kli} T_{la}+\overline{\Gamma}_{klm} T_{al}\right) \qquad (2.152b)$$

这就是$\nabla^2\mathbf{T}$的分量形式。

7. 双重哈密顿算子

（1）作用于标量场的双重哈密顿算子

$\nabla\nabla$称为双重哈密顿算子。

设 f 为任一标量函数，双重哈密顿算子对 f 作用，则有

$$\nabla\nabla f=\overline{\mathbf{g}}_i\overline{\partial}_i\left(\overline{\mathbf{g}}_j\overline{\partial}_j f\right)$$

$$=\overline{\partial}_i\overline{\partial}_j f\overline{\mathbf{g}}_i\overline{\mathbf{g}}_j+\overline{\partial}_j f\overline{\mathbf{g}}_i\overline{\partial}_i\overline{\mathbf{g}}_j$$

$$=\overline{\partial}_i\overline{\partial}_j f\overline{\mathbf{g}}_i\overline{\mathbf{g}}_j+\overline{\Gamma}_{ijk}\overline{\partial}_i f\,\overline{\mathbf{g}}_k\overline{\mathbf{g}}_k$$

$$=\overline{\partial}_i\overline{\partial}_j f\overline{\mathbf{g}}_i\overline{\mathbf{g}}_j+\overline{\Gamma}_{ikl}\overline{\partial}_k f\overline{\mathbf{g}}_i\overline{\mathbf{g}}_j$$

$$= (\bar{\partial}_i \bar{\partial}_j f + \bar{\Gamma}_{ij} \bar{\partial}_k f) \bar{g}^i \bar{g}^j$$

$$= (\nabla\nabla f)_{ij} \bar{g}^i \bar{g}^j \qquad (2.153a)$$

其中

$$(\nabla\nabla f)_{ij} = (\bar{\partial}_i \bar{\partial}_j + \bar{\Gamma}_{ij} \bar{\partial}_k) f \qquad (2.153b)$$

（2）作用于矢量场的双重哈密顿算子

设$\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{P}) = a_k \bar{g}^k$为一个矢量场，双重哈密顿算子对$\mathbf{a}$的点积作用为

$$\nabla\nabla \cdot \mathbf{a} = \nabla (\bar{\partial}_k a_k + \bar{\Gamma}_{kjk} a_j)$$

$$= \bar{\partial}_i (\bar{\partial}_k a_k + \bar{\Gamma}_{kjk} a_j) \bar{g}^i$$

$$= (\nabla\nabla \cdot \mathbf{a})_i \bar{g}^i \qquad (2.154a)$$

其中

$$(\nabla\nabla \cdot \mathbf{a})_i = \bar{\partial}_i (\bar{\partial}_k a_k + \bar{\Gamma}_{kjk} a_j) \qquad (2.154b)$$

8. 物质导数

（1）标量函数的物质导数

设$f = f(t, \mathbf{P})$是关于标性变量t（例如时间）和位置矢量$\mathbf{P} = \mathbf{P}(t)$的标量值函数，则它的物质导数$\frac{Df}{Dt}$定义为

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \bar{\nabla} f \qquad (2.155a)$$

其中$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}$，如果$t$代表时间，则$\mathbf{v}$便是速度矢量。将物质导数写成分量形式，则

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \bar{\nabla} f$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} + v_i \vec{g}_i \cdot \vec{g}^j \vec{\partial}_j f$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} + v_i \delta_{ij} \vec{\partial}^j f$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} + v_i \vec{\partial}_i f \qquad (2.155b)$$

特别地，在卡氏直角坐标系下

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v_i \vec{\partial}_i f$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} + v_1 \partial_1 f + v_2 \partial_2 f + v_3 \partial_3 f$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} \qquad (2.156a)$$

在柱面坐标系下

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v_i \vec{\partial}_i f$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{H_1} v_1 \partial_1 f + \frac{1}{H_2} v_2 \partial_2 f + \frac{1}{H_3} v_3 \partial_3 f$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} + v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} \qquad (2.156b)$$

在球面坐标系下

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v_i \vec{\partial}_i f$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{H_1} v_1 \partial_1 f + \frac{1}{H_2} v_2 \partial_2 f + \frac{1}{H_3} v_3 \partial_3 f$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} + v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin\theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \qquad (2.156c)$$

（2）矢量函数的物质导数

对于矢量值函数$\mathbf{a}=\mathbf{a}(t,\mathbf{P})=a_i\bar{\mathbf{g}}_i$，它的物质导数$\frac{D\mathbf{a}}{Dt}$定义为

$$\frac{D\mathbf{a}}{Dt}=\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial r}+v\cdot\bar{\nabla}\mathbf{a} \tag{2.157a}$$

其并矢形式为

$$\begin{aligned}\frac{D\mathbf{a}}{Dt}&=\frac{\partial}{\partial t}(a_i\bar{\mathbf{g}}_i)+v_l\bar{\mathbf{g}}_l\cdot\bar{\mathbf{g}}_i\bar{\partial}_i(a_j\bar{\mathbf{g}}_j)\\&=\frac{\partial a_i}{\partial t}\bar{\mathbf{g}}_i+v_l\bar{\mathbf{g}}_l\cdot(\bar{\partial}_i a_j+a_k\bar{\Gamma}_{ikj})\bar{\mathbf{g}}_i\bar{\mathbf{g}}_j\\&=\frac{\partial a_i}{\partial t}\bar{\mathbf{g}}_i+v_l\,\delta_{li}(\bar{\partial}_i a_j+\bar{\Gamma}_{ikj}a_k)\bar{\mathbf{g}}_j\\&=\frac{\partial a_i}{\partial t}\bar{\partial}_i+v_l(\bar{\partial}_l a_j+\bar{\Gamma}_{lkj}a_k)\bar{\mathbf{g}}_j\\&=\left(\frac{\partial a_i}{\partial t}+v_l(\bar{\partial}_l a_i+\bar{\Gamma}_{lki}a_k)\right)\bar{\mathbf{g}}_i\\&=\left(\frac{Da_i}{Dt}+v_l\bar{\Gamma}_{lki}a_k\right)\bar{\mathbf{g}}_i\\&=\left(\frac{D\mathbf{a}}{Dt}\right)_i\bar{\mathbf{g}}_i\end{aligned} \tag{2.157b}$$

其中

$$\left(\frac{D\mathbf{a}}{Dt}\right)_i=\frac{Da_i}{Dt}+v_l\bar{\Gamma}_{lki}a_k \tag{2.157c}$$

这就是矢量函数 $\mathbf{a}$的物质导数的分量形式。

类似地，我们可以定义任意阶张量的物质导数。

例2.11 试求弧元平方的物质导数。

【解】 在直角坐标系下，设变形前弧元平方为

$$dS^2 = dX_k dX_k \tag{a}$$

而在变形后弧元的平方则为

$$ds^2 = dx_k dx_k \tag{b}$$

其中$x_k = x_k(X_k)$。于是

$$\frac{D(ds^2)}{Dt} = 2\frac{D(dx_k)}{Dt}dx_k$$

$$= 2\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial x_k}{\partial X_k}dX_k\right)dx_k$$

$$= 2\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{Dx_k}{Dt}\right)dX_k\, dx_k$$

$$= 2\frac{\partial v_k}{\partial x_l}\frac{\partial x_l}{\partial X_k}dX_k\, dx_k$$

$$= 2v_{k,l}dx_l dx_k$$

即弧元平方ds^2的物质导数为

$$\frac{D(ds^2)}{Dt} = 2v_{k,l}dx_k dx_l \tag{2.158}$$

在连续介质力学中常要用到上式，其中的$v_{k,l}$称为速度梯度。下面再举一例说明推导弧元平方ds^2的N阶物质导数过程，从中得到N阶Rivlin-Ericksen（里夫林—埃里克森）张量。

例2.12 试给出里夫林—埃里克森张量的递推公式。

【解】 在直角坐标系中，弧元平方ds^2的N阶物质导数为

$$\frac{D^N(ds^2)}{Dt^N} = A^N{}_{kl}dx_k dx_l \tag{2.159}$$

其中$A^N{}_{kl}$称为N阶里夫林—埃里克森张量。

由于

$$\frac{D^{N+1}(ds^2)}{Dt^{N+1}} = \frac{D}{Dt}\left\{\frac{D^N(ds^2)}{Dt^N}\right\} = \frac{D}{Dt}\left(A^{(N)}{}_{kl}dx_k dx_l\right)$$

$$= \frac{D}{Dt}[A^{N}_{kl}]dx_k dx_l + A^{(N)}_{kl}\frac{D(dx_k)}{Dt}dx_l$$

$$+ A^{(N)}_{kl}\frac{D(dx_l)}{Dt}dx_k$$

$$= \frac{D}{Dt}[A^{(N)}_{kl}]dx_k dx_l + A^{(N)}_{kl}v_{l,m}dx_m dx_l$$

$$+ A^{(N)}_{kl}v_{l,m}dx_m dx_k$$

$$= \{\frac{D}{Dt}[A^{(N)}_{kl}] + A^{(N)}_{ml}v_{m,k}$$

$$+ A^{(N)}_{km}v_{m,l}\}dx_k dx_l$$

$$= A^{(N+1)}_{kl}dx_k dx_l \qquad (2.160)$$

故得里夫林—埃里克森张量的递推公式如下：

$$A^{(N+1)}_{kl} = \frac{D}{Dt}[A^{(N)}_{kl}] + A^{(N)}_{ml}v_{m,k} + A^{(N)}_{km}v_{m,l} \qquad (2.161)$$

由定义知，当N = 0 时，有

$$ds^2 = A^{(0)}_{kl}dx_k dx_l$$

故有

$$A^{\circ}_{kl} = \delta_{kl} \qquad (2.162a)$$

于是由式（1.123）得

$$A^{(1)}_{kl} = \delta_{ml}v_{m,k} + \delta_{km}v_{m,l}$$

$$= v_{k,l} + v_{l,k}$$

$$= 2D_{kl} \qquad (2.162b)$$

其中D_{kl}称为应变率张量。

若令 $L_{ij} = v_{i,j}$ 并令“·”表示物质导数，则式(1.123)可写成

$$A^{(N+1)}_{kl} = \dot{A}^{(N)}_{kl} + (L_{k,m})^{T}A^{(N)}_{ml} + A^{(N)}_{km}L_{m,l} \qquad (2.163a)$$

于是对于任意坐标系都适用的里夫林—埃里克森张量的不变性形式为

$$\mathbf{A}^{(N+1)} = \mathbf{A}^{(N)} + \mathbf{L}^{T} \cdot \mathbf{A}^{(N)} + \mathbf{A}^{(N)} \cdot \mathbf{L} \qquad (2.163b)$$

在研究非牛顿流体力学时要用这个结果。

§2.16 两点张量场

本节对两点张量场问题作一扼要地介绍。

前面所讲的都是对某一坐标系本身考虑的。在连续介质力学中，有时需要采用两种不同的坐标系，因此需要研究所谓两点张量场的有关问题。

现考察三维欧氏空间的两个区域R和r,我们分别采用两个坐标系$\{X^K\}$和$\{x^k\}$。为易于区别起见，凡是用于R的$\{X^K\}$坐标系和r的$\{x^k\}$ 坐标系的量分别用大写和小写字母和指标加以标记。例如，两个坐标系的基矢量和度量张量分别用$\mathbf{G}^K$, $\mathbf{G}_K, G^{KL}, G_{KL}$和$\mathbf{g}^k, \mathbf{g}_k, g^{kl}, g_{kl}$表示。

1. 两点张量

在两组坐标x^k和X^K 变换时，对指标 k 和K都像张量那样变换的量称为两点张量。例如$A^k{}_K(\mathbf{x}, \mathbf{X})$就是一个两点张量。事实上，如果

$$x^{k'} = x^{k'}(\mathbf{x}), \quad X^{K'} = X^{K'}(\mathbf{X})$$

是可微的坐标变换，而且

$$A^{K'}{}_{k'}(\mathbf{x}', \mathbf{X}') = \frac{\partial x^{K'}}{\partial x^m} - \frac{\partial X^M}{\partial X^{K'}} A^m{}_M(\mathbf{x}, \mathbf{X}) \qquad (2.164a)$$

则$A^k{}_K(\mathbf{x}, \mathbf{X})$就是一个两点张量，这里对每个指标都像张量那样变换。若$\mathbf{g}_k$和$\mathbf{G}^K$是两个坐标系中的基矢量，而$\mathbf{g}^k$和$\mathbf{G}_K$是它们的互逆基矢量，则可写出下列张量的并矢形式：

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{X}) = A^k{}_K(\mathbf{x}, \mathbf{X}) \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) \mathbf{G}^K(\mathbf{X}) \qquad (2.164b)$$

类似地，可定义高阶两点张量。

2. 转移张量

转移张量（或移位子）定义如下：

$$\begin{aligned}
&\mathbf{g}^{k}{}_{K}(\mathbf{x},\mathbf{X}) = \mathbf{g}^{k}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{G}_{K}(\mathbf{X}) = g_{K}{}^{k}\\
&\mathbf{g}^{K}{}_{k}(\mathbf{x},\mathbf{X}) = \mathbf{G}^{K}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{g}_{k}(\mathbf{x}) = g^{K}{}_{k}\\
&\mathbf{g}^{Kk}(\mathbf{x},\mathbf{X}) = \mathbf{G}^{K}(\mathbf{X})\cdot\mathbf{g}^{k}(\mathbf{x}) = g^{kK}\\
&\mathbf{g}_{kK}(\mathbf{x},\mathbf{X}) = \mathbf{g}_{k}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{G}_{K}(\mathbf{X}) = g_{Kk}
\end{aligned} \tag{2.165}$$

转移张量起着在两个坐标系间有关量的相互转移的作用。

对于基矢量存在下列转移关系：

$$\begin{aligned}
&\mathbf{G}_{K} = g_{K}{}^{k}\mathbf{g}_{k}, \quad \mathbf{G}^{K} = g^{K}{}_{k}\mathbf{g}^{k}\\
&\mathbf{g}_{k} = g^{K}{}_{k}\mathbf{G}_{K}, \quad \mathbf{g}^{k} = g^{k}{}_{K}\mathbf{G}^{K}
\end{aligned} \tag{2.166}$$

转移张量应满足下列关系：

$$g_{L}{}^{k}g_{k}{}^{K} = \delta^{K}{}_{L} \tag{2.167a}$$

$$g^{k}{}_{K}g^{K}{}_{j} = \delta^{k}{}_{j} \tag{2.167b}$$

这里δ是克罗内克符号。

任一矢量$\mathbf{a}$，它在两个坐标系$\{X^{k}\}$和$\{x^{k}\}$中可分别写成下列形式：

$$\mathbf{a} = a^{K}\mathbf{G}_{K} \tag{a}$$

$$\mathbf{a} = a^{k}\mathbf{g}_{k} \tag{b}$$

若把上列两式分别点乘以$\mathbf{g}^{k}$和$\mathbf{G}^{K}$，则得

$$v^{k} = g^{k}{}_{K}v^{K} \tag{2.168a}$$

$$v^{K} = g^{K}{}_{k}v^{k} \tag{2.168b}$$

从此可见，转移张量$g^{k}{}_{K}$和$g^{K}{}_{k}$的作用是把R中某点的矢量v^{K}转移到r中相对应点而成为v^{k}和把r中某点的矢量v^{k}转移到R中相对应点而成为v^{K}。

若两个坐标系都是直角坐标系并设其基矢量分别为e_{K}和

e_k，则转移张量可写成下列形式：

$$\delta_{Kk} = e_K \cdot e_k = \delta_{kK} \tag{2.169}$$

这里，δ_{Kk} 并不是克罗内克符号。只有当这两个直角坐标系的坐标轴都平行时，它才是克罗内克符号。

3. 全协变导数

若$\mathbf{x}$和$\mathbf{X}$由映象$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X})$相关，则任意两点张量 $\mathbf{T} = T^{A\cdots}{}_{B\,C\cdots D}{}^{i\cdots j}{}_{k\cdots l}\mathbf{G}_A\cdots\mathbf{G}_B\mathbf{G}^C\cdots\mathbf{G}^D\mathbf{g}_i\cdots\mathbf{g}_j\mathbf{g}^k\cdots\mathbf{g}^l$ 的全协变导数定义为

$$\square_M T^{A\cdots B}{}_{C\cdots D}{}^{i\cdots j}{}_{k\cdots l} = T^{A\cdots B}{}_{C\cdots D}{}^{i\cdots j}{}_{k\cdots l;M}$$
$$= T^{A\cdots B}{}_{C\cdots D}{}^{i\cdots j}{}_{k\cdots l;M} + T^{A\cdots B}{}_{C\cdots D}{}^{i\cdots j}{}_{k\cdots l;\,r}X^r{}_{,M} \tag{2.170a}$$

和

$$\square_r T^{A\cdots B}{}_{C\cdots D}{}^{i\cdots j}{}_{k\cdots l} = T^{A\cdots B}{}_{C\cdots D}{}^{i\cdots j}{}_{k\cdots l;r}$$
$$= T^{A\cdots B}{}_{C\cdots D}{}^{i\cdots j}{}_{k\cdots l;M}X^M{}_{,r} + T^{A\cdots B}{}_{C\cdots D}{}^{i\cdots j}{}_{k\cdots l;r} \tag{2.170b}$$

例如，

$$A^k{}_{K;L} = A^k{}_{K;L} + A^k{}_{K;l}X^l{}_{,L} \tag{2.171a}$$

和

$$A^k{}_{K;l} = A^k{}_{K;L}X^L{}_{,l} + A^k{}_{K;l} \tag{2.171b}$$

请注意，这里“；”，“；”和“，”分别表示全协变导数，偏协变导数和偏导数。

在式（2.171）中，$A^k{}_{K;L}$表示当 $\mathbf{x}$ 固定时$A^k{}_K$对X^L的偏协变导数，而$A^k{}_{K;l}$则表示当$\mathbf{X}$固定时$A^k{}_{,K}$对x^l的偏协变导数，即

$$A^k{}_{K;L} = \frac{A^k{}_K}{\partial X^L} - \Gamma^M{}_{LK}A^k{}_M \tag{2.172a}$$

和

$$A^k{}_{K;l} = \frac{\partial A^k{}_K}{\partial x^l} + \Gamma^k{}_{lm} A^m{}_K \tag{2.172b}$$

把上列两式代入式(2.171a)和式(2.171b)，则有

$$\square_L A^k{}_K = A^k{}_{K;L} = \frac{\partial A^k{}_K}{\partial X_L} - \Gamma^M{}_{LK} A^k{}_M + \left(\frac{\partial A^k{}_K}{\partial x^l} + \Gamma^k{}_{lm} A^m{}_K\right) \frac{dx^l}{dX^L} \tag{2.173a}$$

和

$$\square_l A^k{}_K = A^k{}_{K;l} = \left(\frac{\partial A^k{}_K}{\partial X^L} - \Gamma^M{}_{LK} A^k{}_M\right) \frac{dX^L}{dx^l} + \left(\frac{\partial A^k{}_K}{\partial x^l} + \Gamma^k{}_{lm} A^m{}_k\right) \tag{2.173b}$$

写成不变性形式和并矢形式则为

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial X^L} = A^k{}_{K;L} \mathbf{g}_k \mathbf{G}^K \tag{2.174a}$$

和

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^l} = A^k{}_{K;l} \mathbf{g}_k G^K \tag{2.174b}$$

全协变导数的运算规则和偏协变导数的规则相同，例如：

$$(A^k{}_K + B^k{}_K)_{;M} = A^k_{K;M} + B^k_{K;M} \tag{2.175a}$$

$$(A^k{}_K B^L{}_l)_{;t} = A^k_{K;t} B^L{}_l + A^k{}_K B^L_{l;t} \tag{2.175b}$$

另外，关于转移张量的偏协变导数和全协变导数均为零。例如：

$$g^i{}_{A;j} = g^i{}_{A,j} + \Gamma^i{}_{jr} g^r{}_A = (\mathbf{g}^i(\mathbf{x}) \cdot G_A(\mathbf{X}))_{,j} + \Gamma^i{}_{jr}\ g^r{}_A = \mathbf{g}^i{}_{,j} \cdot \mathbf{G}_A + \Gamma^i{}_{js}\ g^r{}_A$$

$$= -\Gamma^{i}_{jr}\,\mathbf{g}^{r}\cdot\mathbf{G}_{A} + \Gamma^{i}_{jr}\,g^{r}_{A} = 0 \qquad (2.176a)$$

类似地，可以证明

$$g^{i}_{A;B} = 0$$

$$g^{A}_{i;j} = 0 \qquad (2.176b)$$

$$g^{A}_{i;B} = 0$$

考虑到上列式(2.175a)和式(2.175b)，则有

$$g^{i}_{A;B} = g^{i}_{A;B} + g^{i}_{A;r}\,x^{r}_{,B} = 0 \qquad (2.176c)$$

$$g^{i}_{A;j} = 0$$

$$g^{A}_{i;B} = 0$$

$$g^{A}_{i;j} = 0$$

由此可知，转移张量对于偏协变导数和全协变导数有如常数，可以移进或移出于其外或内。

在连续介质力学中，常要用到两点张量的知识。例如，变形梯度$\mathbf{F} = x^{i}_{,A}\mathbf{g}_{i}\mathbf{G}^{A}$和皮奥拉(Piola)应力张量$\tau = \tau^{iA}\mathbf{g}_{i}\mathbf{G}_{A}$都是二点张量。又如，布辛尼斯(Boussinesq)方程具有下列形式：

$$\tau^{iM}{}_{;M} + \rho_{0}b^{i} = \rho_{0}a^{i} \qquad (2.177)$$

式中第一项就是皮奥拉应力张量对X^{M}的全协变导数。

这一章我们介绍了有关张量理论的基本知识，并给出了若干有关连续介质力学方面的应用示例。

下面我们专门开辟两章分别阐述利用非完整系物理标架统一地推导弹性力学和流体力学基本方程组在正交曲线坐标系下的具体表达式的全过程。

第三章　张量在弹性力学中的应用

在弹性力学近代文献中越来越广泛地使用张量工具。本章将简略地阐述张量在弹性力学中的应用，而且着重阐述非完整系物理标架在推导正交曲线坐标系下弹性力学基本方程组的具体表达形式中的应用。我们的步骤是：首先把弹性力学中所有基本方程的常规写法化为张量的指标形式，然后把张量的指标形式改为张量的不变性记法，最后再根据张量的不变性记法写出正文曲线坐标系下的弹性力学基本方程组的具体表达形式。

§3.1　应变张量和应力张量

1.　应变张量·主应变

在卡氏直角坐标Oxyz下弹性固体中一点的形变状态可由下列九个量完全地表达出来

$$\begin{matrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{matrix}$$

为了把弹性力学中上述常规记法改为张量的指标形式，我们令

$$\varepsilon_{xx}=E_{11},\qquad \frac{1}{2}\gamma_{xy}=E_{12},\qquad \frac{1}{2}\gamma_{xz}=E_{13}$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{yx}=E_{21},\qquad \varepsilon_{yy}=E_{22},\qquad \frac{1}{2}\gamma_{yz}=E_{23}$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{zx}=E_{31},\qquad \frac{1}{2}\gamma_{zy}=E_{32},\qquad \varepsilon_{zz}=E_{33}$$

我们建立新的卡氏直角坐标 $Ox'y'z'$，它与原坐标系轴间方向余弦如下表

	x	y	z
x′	$\alpha_{1'1}$	$\alpha_{1'2}$	$\alpha_{1'3}$
y′	$\alpha_{2'1}$	$\alpha_{2'2}$	$\alpha_{2'2}$
z′	$\alpha_{3'1}$	$\alpha_{3'2}$	$\alpha_{3'3}$

变换后此点的变形状态由下列九个量完全地描述

$$\begin{array}{lll} E_{1'1'} & E_{1'2'} & E_{1'3'} \\ E_{2'1'} & E_{2'2'} & E_{2\,3'} \\ E_{3'1'} & E_{3'2'} & E_{3'3'} \end{array}$$

由弹性力学理论可知 $E_{i'j'}$ 与 E_{ij} 之间有如下关系：

$$\begin{aligned} E_{1'1'} &= \alpha_{1'1}\alpha_{1'1}E_{11}+\alpha_{1'1}\alpha_{1'2}E_{12}+\alpha_{1'1}\alpha_{1'3}E_{13} \\ &\quad +\alpha_{1'2}\alpha_{1'1}E_{21}+\alpha_{1'2}\alpha_{1'2}E_{22}+\alpha_{1'2}\alpha_{1'3}E_{23} \\ &\quad +\alpha_{1'3}\alpha_{1'1}E_{31}+\alpha_{1'3}\alpha_{1'2}E_{32}+\alpha_{1'3}\alpha_{1'3}E_{33} \\ &= \alpha_{1'i}\alpha_{1'j}E_{ij} \end{aligned}$$

类似地

$$E_{2'2'} = \alpha_{2'i}\alpha_{2'j}E_{ij}$$

$$E_{3'3} = \alpha_{3'i}\alpha_{3'j}E_{ij}$$

而

$$\begin{aligned}E_{1'2'} &= \alpha_{1'1}\alpha_{2'1}E_{11} + \alpha_{1'1}\alpha_{2'2}E_{12} + \alpha_{1'1}\alpha_{2'3}E_{13}\\ &\quad + \alpha_{1'2}\alpha_{2'1}E_{21} + \alpha_{1'2}\alpha_{2'2}E_{22} + \alpha_{1'2}\alpha_{2'3}E_{23}\\ &\quad + \alpha_{1'3}\alpha_{2'1}E_{31} + \alpha_{1'3}\alpha_{2'2}E_{32} + \alpha_{1'3}\alpha_{2'3}E_{33}\\ &= \alpha_{1'i}\alpha_{2'j}E_{ij}\end{aligned}$$

类似地

$$E_{2'3'} = \alpha_{2'i}\alpha_{3'j}E_{ij}$$

$$E_{3'1'} = \alpha_{3'i}\alpha_{1'j}E_{ij}$$

上列各式也可以用指标记法统一地记为

$$E_{i'j'} = \alpha_{i'i}\alpha_{j'j}E_{ij} \tag{3.1}$$

这恰好与张量定义相吻合，因此我们认定由 E_{ij} 表示的描述一点变形状态的量是一个二阶张量，我们称之为应变张量，记作 **E**，其矩阵形式如下：

$$[\mathbf{E}] = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

在卡氏直角坐标系$Ox_1x_2x_3$中，某一单位矢量**n** 可表为

$$\mathbf{n} = n_i\mathbf{e}_i$$

其中$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = n_in_i = 1$

沿**n** 方向的应变为

$$\begin{aligned}E_n &= n_1n_1E_{11} + n_1n_2E_{12} + n_1n_3E_{13}\\ &\quad + n_2n_1E_{21} + n_2n_2E_{22} + n_2n_3E_{23}\\ &\quad + n_3n_1E_{31} + n_3n_2E_{32} + n_3n_3E_{33}\\ &= n_iE_{ij}n_j = \mathbf{n}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\end{aligned}$$

即

$$E_n = \mathbf{n}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{n} \tag{3.3}$$

对于所有单位矢量 $\mathbf{n}$，E_n 取极值的方向称为应变的主方向，E_n 称为主应变。求主应变，实际上就是在

$$f(n_1, n_2, n_3) = n_i n_i - 1 = 0 \tag{3.4a}$$

条件下求 E_n 的条件极值问题。

由拉格朗日(Lagrange)乘子法，主应变 E_n 应满足

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n_k} = 0 \tag{3.4b}$$

其中 Φ 为拉格朗日函数

$$\Phi = E_n - \lambda f = n_i E_{ij} n_j - \lambda(n_i n_i - 1) \tag{3.4c}$$

显然

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n_k} = \delta_{ik} E_{ij} n_j + n_i E_{ij} \delta_{kj} - 2\lambda n_k = 0$$

由 E_{ij} 对称性，得

$$E_{ki} n_i = \lambda n_k$$

写成张量不变性形式则为

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{n} = \lambda \mathbf{n}$$

或

$$(\mathbf{E} - \lambda \mathbf{I})\cdot\mathbf{n} = \mathbf{o} \tag{3.5a}$$

其展开形式为

$$\begin{aligned}
&(E_{11} - \lambda) n_1 + E_{12} n_2 + E_{13} n_3 = 0 \\
&E_{21} n_1 + (E_{22} - \lambda) n_2 + E_{23} n_3 = 0 \\
&E_{31} n_1 + E_{32} n_2 + (E_{33} - \lambda) n_3 = 0
\end{aligned} \tag{3.5b}$$

这正是 §1.11 中讲过的张量特征值问题。因此有下列结论成立：

（i）对于应变张量 $\mathbf{E}$，总存在三个相互垂直的主方向 n_1, n_2, n_3

(ii) 由式(2.5b)的特征方程解得的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，即为主应变；

(iii) 存在应变张量$\mathbf{E}$的三个标量不变量：

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{E}_{ii} = \mathrm{tr}\mathbf{E}$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_{ii}\mathbf{E}_{jj} - \mathbf{E}_{ij}\mathbf{E}_{ij}) = \frac{1}{2}[(\mathrm{tr}\mathbf{E})^2 - \mathrm{tr}\mathbf{E}^2] \quad (3.6a)$$

$$\mathbf{I}_3 = \det\mathbf{E}$$

它们分别称为第一、第二、第三应变不变量。这些量在坐标变换下保持不变。

在三维空间中应变张量$\mathbf{E}$只有三个独立的不变量，也就是说，$\mathbf{E}$的所有其它不变量都可以看作是上述三个不变量的函数。例如，$\mathbf{E}$的下列三个不变量

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \mathrm{tr}\mathbf{E} = \mathbf{E}_{ii} \\ \mathbf{II} &= \mathrm{tr}\mathbf{E}^2 = \mathbf{E}_{ij}\mathbf{E}_{ji} \\ \mathbf{III} &= \mathrm{tr}\mathbf{E}^3 = \mathbf{E}_{ij}\mathbf{E}_{jk}\mathbf{E}_{ki} \end{aligned} \quad (3.6b)$$

可以表示成为

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{II} &= \mathbf{I}_1^2 - 2\mathbf{I}_2 \\ \mathbf{III} &= \mathbf{I}_1^3 - 3\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2 + 3\mathbf{I}_3 \end{aligned} \quad (3.6c)$$

同时，我们也可以写出下列关系式

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{I}^2 - \mathbf{II}) \quad (3.6b)$$

$$\mathbf{I}_3 = \frac{1}{3}\left(\mathbf{III} - \frac{3}{2}\mathbf{I}\,\mathbf{II} + \frac{1}{2}\mathbf{I}^3\right)$$

2. 应力张量·主应力

与应变一样，可以证明，描述一点应力状态的九个量

$$\sigma_{xx} \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz}$$
$$\tau_{yx} \quad \sigma_{yy} \quad \tau_{yz}$$
$$\tau_{zx} \quad \tau_{zy} \quad \sigma_{zz}$$

构成一个二阶张量，称为应力张量，记作$\mathbf{T}$。为了把弹性力学中上述常规记法改为张量的指标形式，我们令

$$\sigma_{xx}=T_{11},\ \tau_{xy}=T_{12},\ \tau_{xz}=T_{13}$$
$$\tau_{yx}=T_{21},\ \sigma_{yy}=T_{22},\ \tau_{yz}=T_{23}$$
$$\tau_{zx}=T_{31},\ \tau_{zy}=T_{32},\ \sigma_{zz}=T_{33}$$

写成矩阵形式则为

$$[\mathbf{T}]=\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

对于应力张量同样地也存在主应力λ和主方向$\mathbf{n}$，满足方程

$$(\mathbf{T}-\lambda\mathbf{I})\cdot\mathbf{n}=\mathbf{o} \tag{3.8}$$

因此有下列结论成立：

（i）对于应力张量$\mathbf{T}$，总存在三个互相垂直的主方向；

（ii）由式(2.8)的特征方程解得的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$即为主应力；

（iii）存在应力张量$\mathbf{T}$的三个标量不变量

$$I_1=T_{ii}=\mathrm{tr}\mathbf{T}$$

$$I_2=\frac{1}{2}(T_{ii}T_{jj}-T_{ij}T_{ij})=\frac{1}{2}[(\mathrm{tr}\mathbf{T})^2-\mathrm{tr}\mathbf{T}^2] \tag{3.9}$$

$$I_3=\det\mathbf{T}$$

§3.2 应变与位移关系式

1. 直角坐标系下的应变与位移关系式

由弹性力学的小变形理论我们知道，在卡氏直角坐标系下，弹性固体中一点的应变与位移具有下列关系：

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\varepsilon_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z} \tag{3.10a}$$

$$\gamma_{xy}=\gamma_{yx}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\gamma_{xz}=\gamma_{zx}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz}=\gamma_{zy}=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}$$

其中u,v,w分别为沿坐标轴x,y,z方向的位移。我们令$u=u_1, v=u_2, w=u_3; x=x_1, y=x_2, z=x_3$则式(3.10a)可改写为

$$E_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)$$

$$E_{22}=\frac{\partial u_2}{\partial x_2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)$$

$$E_{33}=\frac{\partial u_3}{\partial x_3}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) \tag{3.10b}$$

$$E_{12}=E_{21}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)$$

$$E_{23}=E_{32}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)$$

$$E_{31}=E_{13}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)$$

上式的规律性是显而易见的，它可以改写成下列张量的指标形式：

$$E_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{3.10c}$$

由上式可以写出张量的不变性形式

$$\mathbf{E}=\frac{1}{2}[\nabla\mathbf{u}+(\nabla\mathbf{u})^T]=\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}+\mathbf{u}\nabla) \tag{3.10d}$$

其中 $\mathbf{E}=E_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$，$\mathbf{u}=u_i\mathbf{e}_i$。这就是线性弹性力学中应变与位移关系式的张量形式。

2. 正交曲线坐标系下的应变与位移关系式

（1）一般形式

由于张量是与坐标系的选择无关的，因此式 (3.10d)在一般曲线坐标系下仍然成立。在非完整系物理标架下，应变与位移关系式的分量形式为

$$E_{ij}=\frac{1}{2}[(\bar{\nabla}\mathbf{u})_{ij}+(\bar{\nabla}\mathbf{u})_{ji}] \tag{3.11a}$$

利用式(2.137)，则由上式可写成下列一般形式：

$$E_{ij}=\frac{1}{2}[\bar{\partial}_i u_j+\bar{\partial}_j u_i+(\bar{\Gamma}_{ikj}+\bar{\Gamma}_{jki})u_k] \tag{3.11b}$$

（2）柱面坐标系

在柱面坐标系下，考虑到式(2.133b)，则由式(3.11b)可写出柱面坐标系下应变与位移关系式如下：

当i = j = 1时：

$$E_{11} = \frac{1}{2}\left[\bar{\partial}_1 u_1 + \bar{\partial}_1 u_1 + (\bar{\Gamma}_{1k1} + \bar{\Gamma}_{1k1})u_k\right]$$

$$= \bar{\partial}_1 u_1 + \bar{\Gamma}_{1k1} u_k$$

$$= \bar{\partial}_1 u + \bar{\Gamma}_{111} u_1 + \bar{\Gamma}_{121} u_2 + \bar{\Gamma}_{131} u_3$$

$$= \bar{\partial}_1 u_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

即

$$E_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \tag{3.12a}$$

当i = 1, j = 2时：

$$E_{12} = E_{21} = \frac{1}{2}\left[\bar{\partial}_1 u_2 + \bar{\partial}_2 u_1 + (\bar{\Gamma}_{1k2} + \bar{\Gamma}_{2k1})u_k\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\bar{\partial}_1 u_2 + \bar{\partial}_2 u_1 + (\bar{\Gamma}_{112} + \bar{\Gamma}_{211})u_1\right.$$

$$\left. + (\bar{\Gamma}_{122} + \bar{\Gamma}_{221})u_2 + (\bar{\Gamma}_{132} + \bar{\Gamma}_{231})u_3\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\bar{\partial}_1 u_2 + \bar{\partial}_2 u_1 + \bar{\Gamma}_{221} u_2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r}\right)$$

即

$$E_{r\theta} = E_{\theta r} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r}\right) \tag{3.12b}$$

同理可得

$$E_{\theta\theta} = E_{22} = \bar{\partial}_2 u_2 + \bar{\Gamma}_{212} u_1 = -\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r\right) \qquad (3.12c)$$

$$E_{zz} = E_{33} = \bar{\partial}_3 u_2 = \frac{\partial u_z}{\partial z} \qquad (3.12d)$$

$$E_{\theta z} = E_{z\theta} = E_{23} = E_{32} = \frac{1}{2}(\bar{\partial}_3 u_2 + \bar{\partial}_2 u_3)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}\right) \qquad (3.12e)$$

$$E_{rz} = E_{zr} = E_{31} = E_{13} = \frac{1}{2}(\bar{\partial}_3 u_1 + \bar{\partial}_1 u_3)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right) \qquad (3.12f)$$

（3）球面坐标系

在球面坐标系下，考虑到式(2.133c)，则由式 (3.11b)可写出球面坐标系下应变与位移关系如下：

当i = j = 1时：

$$E_{11} = \frac{1}{2}[\bar{\partial}_1 u_1 + \bar{\partial}_1 u_1 + (\bar{\Gamma}_{1k1} + \bar{\Gamma}_{1k1}) u_k]$$

$$= \bar{\partial}_1 u_1 + \bar{\Gamma}_{1k1} u_k$$

$$= \bar{\partial}_1 u_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

即

$$E_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \qquad (3.13a)$$

当i = 1, j = 2时：

$$E_{12}=E_{21}=\frac{1}{2}(\bar{\partial}_2 u_1+\bar{\partial}_1 u_2+(\bar{\Gamma}_{1k2}+\bar{\Gamma}_{2k1})u_k)$$

$$=-\frac{1}{2}(\bar{\partial}_2 u_1+\bar{\partial}_1 u_2+\bar{\Gamma}_{221}u_2)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r}\right)$$

即

$$E_{r\theta}=E_{\theta r}=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r}\right) \tag{3.13b}$$

同理可得

$$E_{\theta\theta}=E_{22}=\bar{\partial}_2 u_2+\bar{\Gamma}_{212}u_1$$

$$=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+u_r\right) \tag{3.13c}$$

$$E_{\varphi\varphi}=E_{33}=\bar{\partial}_3 u_3+\bar{\Gamma}_{313}u_1+\bar{\Gamma}_{323}u_2$$

$$=\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+u_r+\cot\theta u_\theta\right) \tag{3.13d}$$

$$E_{\theta\varphi}=E_{\varphi\theta}=E_{23}=E_{32}=\frac{1}{2}(\bar{\partial}_3 u_2+\bar{\partial}_2 u_3+\bar{\Gamma}_{332}u_3)$$

$$=\frac{1}{2r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta}-\cot\theta u_\varphi\right) \tag{3.13e}$$

$$E_{\theta r}=E_{r\theta}=E_{31}=E_{13}=\frac{1}{2}(\bar{\partial}_1 u_3+\bar{\partial}_3 u_1+\bar{\Gamma}_{331}u_3)$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}-\frac{u_\varphi}{r}\right) \tag{3.13f}$$

§3.3 运动方程·边界条件

1. 运动方程

（1）直角坐标系下的运动方程

在卡氏直角坐标系下，弹性力学中的运动方程具有下列形式：

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}+\rho b_x=\rho a_x\\
&\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}+\rho b_y=\rho a_y \qquad (3.14a)\\
&\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}+\rho b_z=\rho a_z
\end{aligned}$$

其中ρ是单位体积的质量；b_x, b_y, b_z 分别为沿 x,y,z 轴向的单位质量体力；a_x, a_y, a_z 分别为沿轴向的加速度矢量分量。在上式中可分别令x,y,z和u,v,w 为x_1, x_2, x_3和u_1, u_2, u_3并把指标x,y,z分别记为 1，2，3 则式(3.14a)可改写为

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial T_{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial T_{13}}{\partial x_3}+\rho b_1=\rho a_1\\
&\frac{\partial T_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial T_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial T_{23}}{\partial x_3}+\rho b_2=\rho a_2 \qquad (3.14b)\\
&\frac{\partial T_{31}}{\partial x_1}+\frac{\partial T_{32}}{\partial x_2}+\frac{\partial T_{33}}{\partial x_3}+\rho b_3=\rho a_3
\end{aligned}$$

按爱因斯坦求和约定，上式可写成

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}+\rho b_i=\rho a_i$$

$$\frac{\partial T_{2j}}{\partial x_j} + \rho b_2 = \rho a_2 \tag{3.14c}$$

$$\frac{\partial T_{3j}}{\partial x_j} + \rho b_3 = \rho a_3$$

于是运动方程的指标记法可写成下列形式：

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i = \rho a_i \tag{3.14d}$$

考虑到 T_{ij} 的对称性，将上式写成张量的不变性形式，则为

$$\mathrm{div}\mathbf{T} + \rho\mathbf{b} = \rho\mathbf{a} \tag{3.14e}$$

其中$\mathbf{T} = T_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$, $\mathbf{b} = b_i\mathbf{e}_i$, $\mathbf{a} = a_i\mathbf{e}_i$。

（2）正交曲线坐标系下的运动方程

（i）一般形式

由于张量与坐标系的选择无关，故式(3.14e) 对一般曲线坐标系也适用。于是在非完整系物理标架下运动方程的分量形式为

$$(\overline{\nabla\cdot}\mathbf{T})_i + \rho b_i = \rho a_i \tag{3.15}$$

考虑到式(2.142b)和(2.157)，则可把上式写成下列运动方程的一般形式：

$$\overline{\partial_k}T_{ki} + \overline{\Gamma}_{kjk}T_{ji} + \overline{\Gamma}_{kji}T_{kj} + \rho b_i = \rho a_i \tag{3.16a}$$

这里

$$a_i = \left(\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t}\right)_i = \frac{\mathrm{D}v_i}{\mathrm{D}t} + \overline{\Gamma}_{kji}v_k v_j \tag{3.16b}$$

其中v 为速度矢量。

(ii) 柱面坐标系

在柱面坐标系下，考虑到式(2.133b)和式 (2.157)，则式(3.16)可具体地写为

当i = 1时

$$\overline{\partial_k}T_{k1} + \overline{\Gamma}_{kjk}T_{j1} + \overline{\Gamma}_{kj1}T_{kj} + \rho b_1 - \rho a_1$$

$$= \overline{\partial T}_{11} + \overline{\partial_2}T_{21} + \overline{\partial_3}T_{31} + T_{11}\overline{\Gamma}_{k1k} + T_{21}\overline{\Gamma}_{k2k} + \Gamma_{31}\overline{\Gamma}_{k3k}$$
$$+ T_{k1}\overline{\Gamma}_{k11} + T_{k2}\overline{\Gamma}_{k21} + T_{k3}\overline{\Gamma}_{k31} + \rho b_1 - \rho a_1$$

$$= \overline{\partial_1}T_{11} + \overline{\partial_2}T_{21} + \overline{\partial_3}T_{31} + \overline{\Gamma}_{212}T_{11} + \overline{\Gamma}_{221}T_{22} + \rho b_1 - \rho a_1$$

$$= \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{xr}}{\partial z} + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r}$$

$$+ \rho b_r - \rho a_r = 0 \qquad (3.17a)$$

同理

当i = 2时

$$\overline{\partial_k}T_{k2} + \overline{\Gamma}_{212}(T_{12} + T_{21}) + \rho b_2 - \rho a_2$$

$$= \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{x\theta}}{\partial z}$$

$$+ \frac{T_{r\theta} + T_{\theta r}}{r} + \partial b_\theta - \rho a_\theta = 0 \qquad (3.17b)$$

当i = 3时：

$$\overline{\partial_k}T_{k3} + \overline{\Gamma}_{212}T_{13} + \rho b_3 - \rho a_3$$

$$= \frac{\partial T_{rx}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta x}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{xx}}{\partial z} + \frac{T_{rx}}{r}$$

$$+ \rho b_x - \rho a_x = 0 \qquad (3.17c)$$

其中

$$a_r = a_1 = \frac{Dv_1}{Dt} + \overline{\Gamma}_{k11}v_k v_1 = \frac{Dv_1}{Dt} + \overline{\Gamma}_{221}v_2^2$$

$$= \frac{Dv_r}{Dt} - \frac{v_\theta^2}{r} \qquad (3.18a)$$

$$a_\theta = a_2 = \frac{Dv_2}{Dt} + \overline{\Gamma}_{212} v_1 v_2 = \frac{Dv_\theta}{Dt} + \frac{v_r v_\theta}{r} \qquad (3.18b)$$

$$a_z = a_3 = \frac{Dv_3}{Dt} = \frac{Dv_z}{Dt} \qquad (3.18c)$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_k \overline{\partial_k} = \frac{\partial}{\partial t} + v_1 \overline{\partial_1} + v_2 \overline{\partial_2} + v_3 \overline{\partial_3}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \qquad (3.19)$$

(iii) 球面坐标系

在球面坐标系下，考虑到式(2.133c) 和式 (2.157) 则式(3.16)可具体地写为

当 i = 1时

$$\begin{aligned}
&\overline{\partial_k} T_{k1} + \overline{\Gamma}_{kjk} T_{j1} + \overline{\Gamma}_{kj1} T_{kj} + \rho b_1 - \rho a_1 \\
&= \overline{\partial_1} T_{11} + \overline{\partial_2} T_{21} + \overline{\partial_3} T_{31} + \overline{\Gamma}_{k1k} T_{11} + \overline{\Gamma}_{k2k} T_{21} + \overline{\Gamma}_{k3k} T_{31} \\
&\quad + \overline{\Gamma}_{k11} T_{K1} + \overline{\Gamma}_{k21} T_{k2} + \overline{\Gamma}_{k31} T_{k3} + \rho b_1 - \rho a_1 \\
&= \overline{\partial_1} T_{11} + \overline{\partial_2} T_{21} + \overline{\partial_3} T_{31} + (\overline{\Gamma}_{212} + \overline{\Gamma}_{313}) T_{11} + \overline{\Gamma}_{323} T_{21} \\
&\quad + \overline{\Gamma}_{221} T_{22} + \overline{\Gamma}_{331} T_{33} + \rho b_1 - \rho a_1 \\
&= \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial T_{\varphi r}}{\partial \varphi} \\
&\quad + \frac{1}{r}(2T_{rr} + \cot\theta T_{\theta r} - T_{\theta\theta} - T_{\varphi\varphi}) \\
&\quad + \rho b_r - \rho a_r = 0
\end{aligned} \qquad (3.20a)$$

同理

当 i = 2时

$$\begin{aligned}
&\overline{\partial_k} T_{k2} + (\overline{\Gamma}_{212} + \overline{\Gamma}_{313}) T_{12} + \overline{\Gamma}_{323} T_{22} + \overline{\Gamma}_{212} T_{21} \\
&+ \overline{\Gamma}_{332} T_{33} + \rho b_2 - \rho a_2
\end{aligned}$$

$$= \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T_{\theta\varphi}}{\partial \varphi}$$

$$+ \frac{1}{r}[2T_{r\theta} + T_{\theta r} + \cot\theta(T_{\theta\theta} - T_{\varphi\varphi})]$$

$$+ \rho b_\theta - \rho a_\theta = 0 \qquad (3.20b)$$

当 i = 3 时：

$$\overline{\partial_r} T_{k3} + (\overline{\Gamma}_{212} + \overline{\Gamma}_{313})T_{13} + \overline{\Gamma}_{323}(T_{23} + T_{32})$$

$$+ \overline{\Gamma}_{313}T_{13} + \rho b_3 - \rho a_3 = \frac{\partial T_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta\varphi}}{\partial \theta}$$

$$+ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}[2T_{r\varphi} + T\varphi_r +$$

$$+ \cot\theta(T_{\theta\varphi} + T_{\varphi\theta})] + \rho b_\varphi - \rho a_\varphi = 0 \qquad (3.20c)$$

其中

$$a_r = a_1 = \frac{Dv_1}{Dt} + \overline{\Gamma}_{k11}v_k v_1 = \frac{Dv_1}{Dt} + \overline{\Gamma}_{221}v_2^2$$

$$+ \overline{\Gamma}_{331}v^2{}_3 = \frac{Dv_r}{Dt} - \frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r} \qquad (3.21a)$$

$$a_\theta = a_2 = \frac{Dv_2}{Dt} + \overline{\Gamma}_{k12}v_k v_2 = \frac{Dv_2}{Dt} + \overline{\Gamma}_{212}v_1 v_2$$

$$+ \overline{\Gamma}_{332}v_3{}^2 = \frac{Dv_\theta}{Dt} + \frac{v_r v_\theta - \cot\theta v_\varphi^2}{r} \qquad (3.21b)$$

$$a_\varphi = a_3 = \frac{Dv_3}{Dt} + \overline{\Gamma}_{k13}v_k v_3 = \frac{Dv_3}{Dt} + \overline{\Gamma}_{313}v_1 v_3$$

$$+ \overline{\Gamma}_{323}v_2 v_3 = \frac{Dv_\varphi}{Dt} + \frac{(v_r + \cot\theta v_\theta)v_\varphi}{r} \qquad (3.21c)$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_k\overline{\partial_k} = \frac{\partial}{\partial t} + v_1\overline{\partial_1} + v_2\overline{\partial_2} + v_3\overline{\partial_3}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \qquad (3.22)$$

2. 边界条件

（1）力边界条件

弹性力学中力边界条件为

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}n_x + \tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z &= \overline{p_x} \\ \tau_{yx}n_x + \sigma_{yy}n_y + \tau_{yz}n_z &= \overline{p_y} \\ \tau_{zx}n_x + \tau_{zy}n_y + \sigma_{zz}n_z &= \overline{p_z} \end{aligned} \qquad (3.23a)$$

这里n_x, n_y和n_z以及$\overline{p_x}$, $\overline{p_y}$和$\overline{p_z}$分别为法线$\mathbf{n}$与坐标轴x, y和z的方向余弦以及给定的表面力矢量的分量。如例1.2所示，式(2.23a)可写成下列指标记法的形式：

$$T_{ij}n_j = \overline{p_i} \qquad (3.23b)$$

它的不变性形式为

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{n} = \overline{\mathbf{p}} \qquad (3.23c)$$

（2）位移边界条件

位移边界条件为

$$u_x = \overline{u_x},\ u_y = \overline{u_y},\ u_z = \overline{u_z} \qquad (3.24a)$$

写成指标记法则为

$$u_i = \overline{u_i} \qquad (3.24b)$$

它的不变性形式为

$$\mathbf{u} = \overline{\mathbf{u}} \qquad (3.24c)$$

§3.4 本构方程

1. 广义虎克定律

在均匀线性弹性固体的小变形理论中，应力与应变具有下

列关系：

$$\begin{aligned}
T_{11} &= C_{1111}E_{11} + C_{1112}E_{12} + C_{1113}E_{13} + \cdots\cdots + C_{1133}E_{33} \\
T_{12} &= C_{1211}E_{11} + C_{1212}E_{12} + C_{1213}E_{13} + \cdots\cdots + C_{1233}E_{33} \\
&\vdots \\
T_{33} &= C_{3311}E_{11} + C_{3312}E_{12} + C_{3313}E_{13} + \cdots\cdots + C_{3333}E_{33}
\end{aligned} \tag{3.25a}$$

这里共有九个方程，可以缩写成下列指标形式：

$$T_{ij} = C_{ijkl}E_{kl} \tag{3.25b}$$

它的不变性形式为

$$\mathbf{T} = \mathbf{C}:\mathbf{E} \tag{3.25c}$$

的弹性力学中常把式(3.25)称为广义虎克定律。

2. 弹性常数张量

在式(3.25b)中的T_{ij}和E_{kl}均为二阶张量，由商法则可知，C_{ijkl}必定是一个四阶张量，我们称之为弹性常数张量。

由于应力张量T_{ij}和应变张量E_{kl}均为二阶对称张量，即$T_{ij} = T_{ji}$，$E_{kl} = E_{lk}$于是利用

$$T_{ij} = C_{ijkl}E_{kl}$$

$$T_{ji} = C_{jikl}E_{kl}$$

则有

$$C_{ijkl}E_{kl} - C_{jikl}E_{kl} = (C_{ijkl} - C_{jikl})E_{kl} = 0$$

由于E_{kl}的任意性，得

$$C_{ijkl} = C_{jikl} \tag{3.26}$$

这说明弹性常数张量C_{ijkl}对前面指标i和j是对称的。同理可证弹性常数张量C_{ijkl}对后两指标k和l也是对称的，即

$$C_{ijkl} = C_{ijlk} \tag{3.27}$$

到此为止，可以肯定在弹性常数张量的$3^4 = 81$个分量中至多有$6 \times 6 = 36$个独立分量。

下面我们通过应变能，进一步研究均匀线性弹性固体的本构方程。应变能U具有下列表达式：

$$U = \frac{1}{2}(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}) = \frac{1}{2}(T_{11}E_{11} + T_{22}E_{22} + T_{33}E_{33} + 2T_{12}E_{12} + 2T_{23}E_{23} + 2T_{31}E_{31})$$

$$= \frac{1}{2}(T_{11}E_{11} + T_{12}E_{12} + T_{13}E_{13} + T_{21}E_{21} + T_{22}E_{22} + T_{23}E_{23} + T_{31}E_{31} + T_{32}E_{32} + T_{33}E_{33}) = \frac{1}{2}T_{ij}E_{ij} \tag{3.28a}$$

或写成不变性形式：

$$U = \frac{1}{2}\mathbf{T}:\mathbf{E} \tag{3.28b}$$

它表示每一应力分量在相应的应变分量上所做的功，其中因子$\frac{1}{2}$是因为这功是应力从零逐渐增加到它的终值 T_{ij} 时在应变 E_{ij} 上做出的。因此，对于应力和应变的微小增量来说，U的增量为

$$dU = T_{ij}dE_{ij} \tag{3.29}$$

另一方面，考虑到$U = U(T_{ij}, E_{ij})$

$$dU = \frac{\partial U}{\partial T_{ij}}dT_{ij} + \frac{\partial U}{\partial E_{ij}}dE_{ij} = \frac{\partial U}{\partial T_{ij}}\frac{\partial T_{ij}}{\partial E_{kl}}dE_{kl} + \frac{\partial U}{\partial E_{ij}}dE_{ij} = \frac{\partial U}{\partial T_{kl}}\frac{\partial T_{kl}}{\partial E_{ij}}dE_{ij}$$

$$+\frac{\partial U}{\partial E_{ij}}dE_{ij}=\left(\frac{\partial U}{\partial T_{kl}}\cdot\frac{\partial T_{kl}}{\partial E_{ij}}+\frac{\partial U}{\partial E_{ij}}\right)dE_{ij}$$

$$=\frac{1}{2}(E_{kl}C_{klij}+T_{ij})dE_{ij} \qquad (3.30)$$

由于$E_{ij}=E_{ji}$，所以九个E_{ij}不能全都任意选取，但总可以选取一对指标ij，使得$dE_{ij}=dE_{ji}\neq 0$，于是由式(3.29)和式(3.30)分别得到

$$2dU=T_{ij}dE_{ij}+T_{ji}dE_{ji}=(T_{ij}+T_{ji})dE_{ij}$$

和

$$2dU=\frac{1}{2}(E_{kl}C_{klij}+T_{ij})\,dE_{ij}+\frac{1}{2}(E_{kl}C_{klji}$$

$$+T_{ji})dE_{ji}=\frac{1}{2}\left[E_{kl}(C_{klij}+C_{klji})+T_{ij}\right.$$

$$\left.+T_{ji}\right]dE_{ij}$$

于是

$$T_{ij}+T_{ji}=\frac{1}{2}\left[E_{kl}(C_{klij}+C_{klji})+T_{ij}+T_{ji}\right]$$

考虑到$T_{ij}=T_{ji}$和$C_{klij}=C_{klji}$，可得

$$T_{ij}=C_{klij}E_{kl}$$

与式(3.25b)比较，则

$$C_{ijkl}=C_{klij} \qquad (3.31)$$

这就是说，弹性常数张量C_{ijkl}除对其前两指标ij和对其后两指标kl对称外，还允许把一对指标ij与另一对指标kl互换。因此弹性常数张量的独立分量数目从36个减少到21个。用矩阵表示则为

$$\begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ \cdot & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ \cdot & \cdot & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ \cdot & \cdot & \cdot & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & C_{1313} & C_{1312} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & C_{1212} \end{pmatrix} \tag{3.32}$$

这是一般性的结果，现在讨论几种特殊情形。

（1）设弹性常数张量C对某一方向，比如取作$\mathbf{e}_3$是各向同性的，则由$\mathbf{e}_1$和$\mathbf{e}_2$所确定的平面是C的对称面，以这个面作为镜面的反射变换：

$$C_{i'j'k'l'} = \alpha_{i'i}\alpha_{j'j}\alpha_{k'k}\alpha_{l'l}e_{ijkl} \tag{3.33}$$

这个表达式中C_{ijkl}取指标1，2的方向实际上不变，而取指标3的方向变为它的反方向，于是式(3.32)中C_{ijkl}带奇数个指标3的项要改变符号，故需使这些项为零时等式才成立，因此剩下不为零的弹性常数弹量的分量只有13个独立分量。写成矩阵形式则为

$$\begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & C_{1112} \\ & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & C_{2212} \\ \cdot & \cdot & C_{3333} & 0 & 0 & C_{3312} \\ 0 & 0 & 0 & C_{2323} & C_{2313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & C_{1313} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & C_{1212} \end{pmatrix} \tag{3.34}$$

（2）设对$\mathbf{e}_2$方向也是各向同性的，则在（3.34）中含奇数个指标2的弹性常数张量的分量为零。于是剩下不为零的弹性常数张量分量只有九个独立分量。写成矩阵形式则为

$$\begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ & \cdot & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212} \end{pmatrix} \tag{3.35}$$

（3）设沿e_1方向也是同性的，这时材料沿e_1, e_2, e_3方向都是同性的。这种材料称为正交各向异性材料。同(1),(2)一样地考虑，这时只剩下与式(2.35)相同的独立弹性常数张量分量。这时把正交各向异性弹性材料的应力和应变关系写成展开形式则为

$$\begin{aligned} E_{11} &= \frac{1}{E_1}[T_{11} - \nu_{12}T_{22} - \nu_{13}T_{33}] \\ E_{22} &= \frac{1}{E_2}[T_{22} - \nu_{21}T_{11} - \nu_{23}T_{33}] \\ E_{33} &= \frac{1}{E_3}[T_{33} - \nu_{31}T_{11} - \nu_{32}T_{33}] \\ E_{12} &= \frac{1}{G_{12}}T_{12} \\ E_{13} &= \frac{1}{G_{13}}T_{13} \\ E_{23} &= \frac{1}{G_{23}}T_{23} \end{aligned} \tag{3.36}$$

其中

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}, \quad \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3}, \quad \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3}$$

（4）设材料对$\mathbf{e}_3$轴是轴对称的，即材料中的每一点，对这轴作坐标旋转，其应力应变关系保持不变。显然，材料应当关于$\mathbf{e}_1$与$\mathbf{e}_2$和$\mathbf{e}_2$与$\mathbf{e}_3$的平面为对称，故至多只剩下式(3.35)所示的九个独立分量。而且当$\mathbf{e}_1$与$\mathbf{e}_2$互换时弹性常数张量分量保持不变，即

$$C_{1111}=C_{2222},\quad C_{1133}=C_{2233},\quad C_{1313}=C_{2323}$$

故只剩下六个独立分量。写成矩阵形式则为

$$\begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & C_{1111} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{1313} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212} \end{pmatrix} \tag{3.37}$$

最后，把坐标轴绕$\mathbf{e}_3$转45°，应力应变关系不变，还得到一个$C_{1111}, C_{1122}, C_{1212}$之间的关系，所以总起来只剩下下列五个独立分量：

$$C_{1111}, C_{1212}, C_{1313}, C_{1133}, C_{3333} \tag{3.38}$$

这种材料称为平面各向同性材料。

（5）设关于$\mathbf{e}_2$也是对称轴，故$C_{1111}=C_{3333}, C_{1111}, C_{1313}, C_{1133}$之间存在一关系，故只剩下下列三个独立常数：

$$C_{1111}, C_{1212}, C_{1313} \tag{3.39}$$

（6）再设关于$\mathbf{e}_1$也是对称轴，于是$C_{1212}=C_{1313}$，故只剩下下列两个独立常数：

$$C_{1111}, C_{1212} \tag{3.40}$$

在这种情况下，C_{ijkl}在空间的各个方向同性，简称各向同性。具有这种性质的物质称为各向同性弹性物质。

3. 各向同性弹性固体的本构方程

（1）应力应变关系式

可以证明，在各向同性的条件下，四阶张量的一般形式为

$$C_{ijkl}=\alpha\delta_{ij}\delta_{kl}+\beta\delta_{ik}\delta_{jl}+\gamma\delta_{il}\delta_{jk}$$

考虑到 E_{ij} 的对称性，则可写出下列各向同性弹性固体的本构方程：

$$\begin{aligned}T_{ij}&=C_{ijkl}E_{kl}\\&=(\alpha\delta_{ij}\delta_{kl}+\beta\delta_{ik}\delta_{jl}+\gamma\delta_{il}\delta_{jk})E_{kl}\\&=\alpha\delta_{ij}\delta_{kl}E_{kl}+\beta\delta_{ik}\delta_{jl}E_{kl}+\gamma\delta_{il}\delta_{jk}E_{kl}\\&=\alpha\delta_{ij}E_{kk}+\beta E_{ij}+\gamma E_{ji}\\&=\alpha\delta_{ij}E_{kk}+(\beta+\gamma)E_{ij}\\&=\lambda\theta\delta_{ij}+2\mu E_{ij}\end{aligned}\qquad(3.41a)$$

其中 $\theta=\mathrm{tr}\mathbf{E}=E_{kk}=E_{11}+E_{22}+E_{33}$ 是应变张量第一标量不变量，$\lambda=\alpha,2\mu=\beta+\gamma$ 这里λ和 μ 称为拉梅常数。把上式写成不变性形式，则为

$$\mathbf{T}=\lambda\theta\mathbf{I}+2\mu\mathbf{E}\qquad(3.41b)$$

式中 $\mathbf{I}$ 为二阶单位张量。

上式的分量形式为

$$\begin{aligned}T_{11}&=\lambda\theta+2\mu E_{11}\\T_{22}&=\lambda\theta+2\mu E_{22}\\T_{33}&=\lambda\theta+2\mu E_{33}\\T_{23}&=T_{32}=2\mu E_{23}\\T_{31}&=T_{13}=2\mu E_{31}\\T_{12}&=T_{21}=2\mu E_{12}\end{aligned}\qquad(3.41c)$$

（2）应变应力关系式

考虑到式（3.41a），则应力张量第一标量不变量 T_{kk} 与应

变张量第一标量不变量E_{kk}有如下关系：

$$\Theta = T_{kk} = \lambda 0\delta_{kk} + 2\mu E_{kk} = (3\lambda + 2\mu)\theta \tag{3.42}$$

从式(3.41a)中解出E_{ij}，即

$$E_{ij} = \frac{1}{2\mu}(T_{ij} - \lambda\theta\delta_{ij})$$

$$= \frac{1}{2\mu}\left(T_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}\Theta\delta_{ij}\right) \tag{3.43a}$$

把上式写成不变性形式，则为

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2\mu}\left(\mathbf{T} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}\Theta\mathbf{I}\right) \tag{3.43b}$$

式(3.43)是用拉梅常数λ和μ表示的应变应力关系式。

考虑到下列杨氏模量E和泊松(Poisson)比ν与拉梅常数λ和μ的关系：

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \tag{3.44a}$$

则得

$$\frac{1}{2\mu} = \frac{1 + \nu}{E}, \quad \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} = \frac{\nu}{E} \tag{3.44b}$$

把式(3.44b)代入式(3.43a)和式(3.43b)，则分别得到杨氏模量E和泊松比ν表示的应变应力关系式的指标形式和不变性形式如下

$$E_{ij} = \frac{1}{E}[(1 + \nu)T_{ij} - \nu\Theta\delta_{ij}] \tag{3.45a}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{E}[(1 + \nu)\mathbf{T} - \nu\Theta\mathbf{I}] \tag{3.45b}$$

上式的分量形式为

$$E_{11}=\frac{1}{E}[T_{11}-\nu(T_{22}+T_{33})]$$

$$E_{22}=\frac{1}{E}[T_{22}-\nu(T_{11}+T_{33})]$$

$$E_{33}=\frac{1}{E}[T_{33}-\nu(T_{22}+T_{11})] \qquad (3.45c)$$

$$E_{12}=E_{21}=\frac{1+\nu}{E}T_{12}$$

$$E_{23}=E_{32}=\frac{1+\nu}{E}T_{23}$$

$$E_{31}=E_{13}=\frac{1+\nu}{E}T_{31}$$

§3.5 协调方程

1. 直角坐标系下的协调方程

应变张量一共有六个独立的分量，它们可以由位移场的三个分量u_x, u_y, u_z的偏微商表示出来。由此可见，这些应变张量的分量是不能随便挑选的，它们之间受有一定限制，即它们之间要有一定的关系，表现应变分量间这种关系的方程我们称之为协调方程。

在卡氏直角坐标系下，协调方程为

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{xx}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_{yy}}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}$$

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{yy}}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_{zz}}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\gamma_{yz}}{\partial x\partial z}$$

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{zz}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_{xx}}{\partial z^2}=\frac{\partial^2\gamma_{zx}}{\partial z\partial x} \tag{3.46a}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right)=2\frac{\partial^2\varepsilon_{xx}}{\partial y\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right)=2\frac{\partial^2\varepsilon_{yy}}{\partial x\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right)=2\frac{\partial^2\varepsilon_{zz}}{\partial x\partial y}$$

按前述记法可把上式改写成下列形式：

$$\frac{\partial^2E_{11}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2E_{22}}{\partial x_1^2}=2\frac{\partial^2E_{12}}{\partial x_1\partial x_2}$$

$$\frac{\partial^2E_{22}}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2E_{33}}{\partial x_2^2}=2\frac{\partial^2E_{23}}{\partial x_2\partial x_3}$$

$$\frac{\partial^2E_{33}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2E_{11}}{\partial x_3^2}=2\frac{\partial^2E_{31}}{\partial x_3\partial x_1} \tag{3.46b}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(-\frac{\partial E_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial E_{31}}{\partial x_2}+\frac{\partial E_{12}}{\partial x_3}\right)=\frac{\partial^2E_{11}}{\partial x_2\partial x_3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(-\frac{\partial E_{31}}{\partial x_2}+\frac{\partial E_{12}}{\partial x_3}+\frac{\partial E_{23}}{\partial x_1}\right)=\frac{\partial^2E_{22}}{\partial x_2\partial x_1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(-\frac{\partial E_{12}}{\partial x_3}+\frac{\partial E_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial E_{31}}{\partial x_2}\right)=\frac{\partial^2E_{33}}{\partial x_1\partial x_2}$$

式(3.46b)中的前三式可写成下列指标形式：

$$\frac{\partial E_{ij}}{\partial x_i\partial x_j}+\frac{\partial^2E_{jj}}{\partial x_i\partial x_i}=2\frac{\partial^2E_{ij}}{\partial x_i\partial x_i},\ (i\neq j) \tag{3.47a}$$

或

$$\frac{\partial^2E_{ij}}{\partial x_i\partial x_j}+\frac{\partial^2E_{ij}}{\partial x_i\partial x_j}-\frac{\partial^2E_{jj}}{\partial x_i\partial x_i}-\frac{\partial^2E_{ii}}{\partial x_j\partial x_j}=0 \tag{3.47b}$$

而式(3.46b)中的后三式可写成下列指标形式：

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\frac{\partial E_{jk}}{\partial x_i}+\frac{\partial E_{ki}}{\partial x_j}+\frac{\partial E_{ij}}{\partial x_k}\right)$$

$$=\frac{\partial^2 E_{ii}}{\partial x_j \partial x_k},(i\neq j\neq k) \tag{3.48a}$$

或

$$\frac{\partial^2 E_{jk}}{\partial x_i \partial x_j}+\frac{\partial^2 E_{ij}}{\partial x_i \partial x_k}-\frac{\partial^2 E_{jk}}{\partial x_i \partial x_i}-\frac{\partial^2 E_{ii}}{\partial x_j \partial x_k}=0 \tag{3.48b}$$

式(3.472b)和式(3.48b)可以统一地写为

$$\frac{\partial^2 E_{jk}}{\partial x_l \partial x_j}+\frac{\partial^2 E_{lj}}{\partial x_j \partial x_k}-\frac{\partial^2 E_{jk}}{\partial x_l \partial x_j}-\frac{\partial^2 E_{lj}}{\partial x_j \partial x_k}=0 \tag{3.49}$$

其中 $i\neq j$，$k\neq l$。于是由式(2.32)可将式(3.49)改写为

$$\in_{klq}\in_{ijp}\frac{\partial^2 E_{jk}}{\partial x_j \partial x_l}=0 \tag{3.50a}$$

其不变性形式为

$$\nabla\times\mathbf{E}\times\nabla=0 \tag{3.50b}$$

或

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E})^{\mathrm{T}}=0 \tag{3.50c}$$

2. 正交曲线坐标系下的协调方程

（1）一般形式

上列（3.50c）这种不变性形式对任何曲线坐标系也都适用。下面我们就来推导非完整系物理标架下的协调方程的一般形式。

令$\mathbf{M}=\nabla\times\mathbf{E}$和$\mathbf{Q}=\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E})^{\mathrm{T}}$，则由式(2.146b)可写出

$$Q_{ij} = (\nabla \times \mathbf{M}^{\tau})_{ij}$$
$$= \in_{kij}(\overline{\partial}_k M^{\tau}_{ij} + \overline{\Gamma}_{kmi} M^{\tau}_{mj} + \overline{\Gamma}_{kmj} M^{\tau}_{im}) = 0 \qquad (3.51)$$

和

$$M^{\tau}_{ij} = M_{ji} = (\nabla \times \mathbf{E})^{\tau}_{ij}$$
$$= \in_{kij}(\overline{\partial}_k E_{ii} + \overline{\Gamma}_{kmi} E_{mi} + \overline{\Gamma}_{kmi} E_{im}) \qquad (3.52)$$

我们知道，在非完整系物理标架下不为零的克里斯托弗尔符号只有$\overline{\Gamma}_{iji} = -\overline{\Gamma}_{iij}$。另外，我们可以导出下列有用的关系式：

$$\overline{\partial}_i E_{jk} - E_{jk}\overline{\Gamma}_{iji} = \frac{1}{H_i}\partial_i E_{jk} + E_{jk}\frac{1}{H_i H_j}\partial_i H_j$$

$$= \frac{H_j}{H_i H_j}\partial_i E_{jk} + E_{jk}\frac{1}{H_i H_j}\partial_i H_j$$

$$= \frac{1}{H_i H_j}(H_j \partial_i E_{jk} + E_{jk}\partial_i H_j)$$

$$= \frac{1}{H_i H_j}\partial_i (E_{jk} H_j)$$

$$= \frac{1}{H_j}\overline{\partial}_i (E_{jk} H_j) \qquad (3.53)$$

于是我们就可写出式(3.52)的展开形式如下：

$$M^{\tau}_{11} = \in_{k11}(\overline{\partial}_k E_{11} + \overline{\Gamma}_{km1} E_{m1} + \overline{\Gamma}_{km1} E_{1m})$$
$$= \in_{231}(\overline{\partial}_2 E_{31} + \overline{\Gamma}_{2m3} E_{m1} + \overline{\Gamma}_{2m1} E_{3m})$$
$$+ \in_{321}(\overline{\partial}_3 E_{21} + \overline{\Gamma}_{3m2} E_{m1} + \overline{\Gamma}_{3m1} E_{2m})$$
$$= \in_{231}(\overline{\partial}_2 E_{31} + \overline{\Gamma}_{223} E_{21} + \overline{\Gamma}_{221} E_{32})$$
$$+ \in_{321}(\overline{\partial}_3 E_{21} + \overline{\Gamma}_{332} E_{31} + \overline{\Gamma}_{331} E_{23})$$
$$= (\overline{\partial}_2 E_{31} + \overline{\Gamma}_{223} E_{21} + \overline{\Gamma}_{221} E_{32})$$
$$- (\overline{\partial}_3 E_{21} + \overline{\Gamma}_{332} E_{31} + \overline{\Gamma}_{331} E_{23})$$

$$= (\overline{\partial_2}E_{31} - \overline{\Gamma}_{332}E_{31}) - (\overline{\partial_3}E_{21} - \overline{\Gamma}_{223}E_{21})$$
$$+ \overline{\Gamma}_{221}E_{32} - \overline{\Gamma}_{331}E_{23}$$
$$= -\frac{1}{H_3}\overline{\partial_2}(E_{31}H_3) - \frac{1}{H_2}\overline{\partial_3}(E_{21}H_2)$$
$$+ \overline{\Gamma}_{221}E_{32} - \overline{\Gamma}_{331}E_{23} \qquad (3.54a)$$

对上式中指标1，2，3进行轮换则得

$$M^T_{22} = \frac{1}{H_1}\overline{\partial_3}(E_{12}H_1) - \frac{1}{H_3}\overline{\partial_1}(E_{32}H_3)$$
$$+ \overline{\Gamma}_{332}E_{13} - \overline{\Gamma}_{112}E_{31} \qquad (3.54b)$$

再轮换，则得

$$M^T_{33} = \frac{1}{H_2}\overline{\partial_1}(E_{23}H_2) - \frac{1}{H_1}\overline{\partial_2}(E_{13}H_1)$$
$$+ \overline{\Gamma}_{113}E_{21} - \overline{\Gamma}_{223}E_{12} \qquad (3.54c)$$

与式(3.54a)同样地，由式(3.52)可写出

$$M^T_{21} = \frac{1}{H_3}\overline{\partial_2}(E_{32}H_3) - \frac{1}{H_2}\overline{\partial_3}(E_{22}H_2)$$
$$+ \overline{\Gamma}_{212}E_{31} + \overline{\Gamma}_{232}E_{33} - \overline{\Gamma}_{332}E_{23} \qquad (3.54d)$$

对上式中指标1，2，3进行轮换，则得

$$M^T_{32} = \frac{1}{H_1}\overline{\partial_3}(E_{13}H_1) - \frac{1}{H_3}\overline{\partial_1}(E_{33}H_3)$$
$$+ \overline{\Gamma}_{323}E_{12} + \overline{\Gamma}_{313}E_{11} - \overline{\Gamma}_{113}E_{31} \qquad (3.54e)$$

再轮换，则得

$$M^T_{13} = \frac{1}{H_2}\overline{\partial_1}(E_{21}H_2) - \frac{1}{H_1}\overline{\partial_2}(E_{11}H_1)$$
$$+ \overline{\Gamma}_{131}E_{23} + \overline{\Gamma}_{121}E_{22} - \overline{\Gamma}_{221}E_{12} \qquad (3.54f)$$

在式(3.54d)——式(3.54f)中分别对指标2和1，3和2以及1和3进行对换并冠以负号，则得

$$M^{T}_{12}=\frac{1}{H_1}\overline{\partial_3}(E_{11}H_1)-\frac{1}{H_3}\overline{\partial_1}(E_{21}H_3)$$

$$-\overline{\Gamma}_{121}E_{32}-\overline{\Gamma}_{131}E_{33}+\overline{\Gamma}_{331}E_{13} \tag{3.54g}$$

$$M^{T}_{23}=\frac{1}{H_2}\overline{\partial_1}(E_{22}H_2)-\frac{1}{H_1}\overline{\partial_2}(E_{12}H_1)$$

$$-\overline{\Gamma}_{232}E_{13}-\overline{\Gamma}_{212}E_{11}+\overline{\Gamma}_{112}E_{21} \tag{3.54h}$$

$$M^{T}_{31}=\frac{1}{H_3}\overline{\partial_2}(E_{33}H_3)-\frac{1}{H_2}\overline{\partial_3}(E_{23}H_2)$$

$$-\overline{\Gamma}_{313}E_{21}-\overline{\Gamma}_{323}E_{32}+\overline{\Gamma}_{223}E_{32} \tag{3.54i}$$

（2）柱面坐标系下的协调方程

在柱面坐标系下，考虑到式(2.133b)，则由式(3.54a)可写出

$$M^{T}_{11}=\frac{1}{H_3}\overline{\partial_2}(E_{31}H_3)-\frac{1}{H_2}\overline{\partial_3}(E_{21}H_2)$$

$$+\overline{\Gamma}_{221}E_{32}-\overline{\Gamma}_{331}E_{23}=\frac{1}{r}\frac{\partial E_{zr}}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial(rE_{\theta r})}{\partial z}$$

$$-\frac{1}{r}E_{r\theta}=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial E_{zr}}{\partial\theta}-\frac{\partial(rE_{\theta r})}{\partial z}-E_{r\theta}\right) \tag{3.55a}$$

同理，由式(3.54b)——式(3.54i)可分别写出

$$M^{T}_{22}=\frac{\partial E_{r\theta}}{\partial z}-\frac{\partial E_{z\theta}}{\partial r} \tag{3.55b}$$

$$M^{T}_{33}=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rE_{\theta z})}{\partial r}-\frac{\partial E_{rz}}{\partial\theta}\right) \tag{3.55c}$$

$$M^{T}_{21}=\frac{1}{r}\left[-\frac{\partial E_{z\theta}}{\partial\theta}-\frac{\partial(rE_{\theta\theta})}{\partial z}+E_{zr}\right] \tag{3.55d}$$

$$M^{T}_{32}=\frac{\partial E_{rz}}{\partial z}-\frac{\partial E_{zz}}{\partial r} \tag{3.55e}$$

$$M^{T}_{13}=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rE_{\theta r})}{\partial r}-\frac{\partial E_{rr}}{\partial\theta}+E_{r\theta}\right] \tag{3.55f}$$

$$M^{T}_{12}=\frac{\partial E_{rr}}{\partial z}-\frac{\partial E_{zr}}{\partial r} \tag{3.55g}$$

$$M^{T}_{23}=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rE_{\theta\theta})}{\partial r}-\frac{\partial E_{r\theta}}{\partial\theta}-E_{rr}\right] \tag{3.55h}$$

$$M^{T}_{31}=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial E_{zz}}{\partial\theta}-\frac{\partial(rE_{\theta z})}{\partial z}\right] \tag{3.55i}$$

将式(3.55)代入式(3.51)则得柱面坐标系下弹性力学的无限小应变协调方程如下：

$$\begin{aligned}
Q_{11}&=\in_{k11}(\overline{\partial_k}M^{T}_{11}+\overline{\Gamma}_{km1}M^{T}_{m1}+\overline{\Gamma}_{km1}M^{T}_{1m})\\
&=\in_{231}(\overline{\partial_2}M^{T}_{31}+\overline{\Gamma}_{2m3}M^{T}_{m1}+\overline{\Gamma}_{2m1}M^{T}_{3m})\\
&\quad+\in_{321}(\overline{\partial_3}M^{T}_{21}+\overline{\Gamma}_{3m2}M^{T}_{m1}+\overline{\Gamma}_{3m1}M^{T}_{2m})\\
&=\overline{\partial_2}M^{T}_{31}+\overline{\Gamma}_{221}M^{T}_{32}-\overline{\partial_3}M^{T}_{21}\\
&=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial M^{T}_{31}}{\partial\theta}-\frac{\partial(rM^{T}_{21})}{\partial z}-M^{T}_{32}\right)\\
&=\frac{1}{r}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\partial E_{zz}}{\partial\theta}-\frac{\partial(rE_{\theta z})}{\partial z}\right]-\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial E_{z\theta}}{\partial\theta}\right.\right.\\
&\quad\left.\left.-\frac{\partial(rE_{\theta\theta})}{\partial z}+E_{zr}\right]-\left[\frac{\partial E_{rz}}{\partial z}-\frac{\partial E_{zz}}{\partial r}\right]\right\}\\
&=\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2E_{zz}}{\partial\theta^2}-\frac{2}{r}\frac{\partial^2E_{\theta z}}{\partial\theta\partial z}+\frac{\partial^2E_{\theta\theta}}{\partial z^2}-\frac{2}{r}\frac{\partial E_{zr}}{\partial z}
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{r}\frac{\partial E_{zz}}{\partial r}=0 \tag{3.56a}$$

$$Q_{22}=\frac{\partial M^{T}_{12}}{\partial z}-\frac{\partial M^{T}_{32}}{\partial r}=\frac{\partial^2 E_{zz}}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 E_{rr}}{\partial z^2}$$

$$-2\frac{\partial^2 E_{zr}}{\partial z\partial r}=0 \tag{3.56b}$$

$$Q_{33}=\frac{1}{r}\left[-\frac{\partial(rM^{T}_{23})}{\partial r}-\frac{\partial M^{T}_{13}}{\partial\theta}\right]$$

$$=\frac{1}{r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial E_{\theta\theta}}{\partial r}\right)+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\partial}{\partial r}\right)E_{rr}-\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E_{r\theta}}{\partial\theta}\right)\right]=0 \tag{3.56c}$$

$$Q_{12}=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial M^{T}_{32}}{\partial\theta}-\frac{\partial(rM^{T}_{22})}{\partial z}+M^{T}_{31}\right]$$

$$=\frac{1}{r}\frac{\partial^2 E_{zr}}{\partial\theta\partial z}-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial E_{zz}}{\partial\theta}\right)+r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial E_{z\theta}}{\partial z}\right)$$

$$-\frac{\partial^2 E_{r\theta}}{\partial z^2}=0 \tag{3.56d}$$

$$Q_{23}=\frac{\partial M^{T}_{13}}{\partial z}-\frac{\partial M^{T}_{33}}{\partial r}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial E_{r\theta}}{\partial z}\right)$$

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial^2 E_{rr}}{\partial\theta\partial z}-\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(rE_{\theta z})}{\partial r}\right]$$

$$+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial E_{zr}}{\partial\theta}\right)=0 \tag{3.56e}$$

$$Q_{31}=-\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rM^{T}_{21})}{\partial r}-\frac{\partial M^{T}_{11}}{\partial\theta}+M^{T}_{12}\right]$$

$$= \frac{1}{r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E_{x\theta}}{\partial \theta}\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E_{\theta\theta}}{\partial z}\right)\right.$$

$$\left. - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 E_{xr}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 E_{\theta r}}{\partial \theta \partial z} + \frac{\partial E_{rr}}{\partial z}\right] = 0 \qquad (3.56f)$$

（3）球面坐标系下的协调方程

在球面坐标系下，考虑到式(2.133c)，则由式（3.54a)可写出

$$M_{11}^{T} = \frac{1}{H_3}\overline{\partial_2}(E_{31}H_3) - \frac{1}{H_2}\overline{\partial_3}(E_{21}H_2)$$

$$+ \overline{\Gamma}_{221}E_{32} - \overline{\Gamma}_{331}E_{23} = -\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(r\sin\theta E_{\varphi r})$$

$$- \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}(rE_{\theta r}) - \frac{1}{r}E_{\varphi\theta} + \frac{1}{r}E_{\theta\varphi}$$

$$= \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta E_{\varphi r})}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial E_{\theta r}}{\partial \varphi}\right] \qquad (3.57a)$$

同理，由式(3.54b) ——式(3.54i)可分别写出

$$M^{T}_{22} = \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial E_{r\theta}}{\partial \varphi}\right.$$

$$\left. - \frac{\partial(rE_{\varphi\theta})}{r\partial r} - \cot\theta E_{r\varphi}\right] \qquad (3.57b)$$

$$M^{T}_{33} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rE_{\theta\varphi})}{\partial r} - \frac{\partial E_{r\varphi}}{\partial \theta}\right] \qquad (3.57c)$$

$$M^{T}_{21} = \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta E_{\varphi\theta})}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial E_{\theta\theta}}{\partial \varphi}\right.$$

$$\left. + E_{\varphi r} + \cot\theta E_{\theta\varphi}\right] \qquad (3.57d)$$

$$M^{T}_{32}=\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial E_{r\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{\partial(rE_{\varphi\varphi})}{\partial r}+\cot\theta E_{r\theta}+E_{rr}\right] \tag{3.57e}$$

$$M^{T}_{13}=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rE_{\theta r})}{\partial r}-\frac{\partial E_{rr}}{\partial\theta}+E_{r\theta}\right] \tag{3.57f}$$

$$M^{T}_{12}=\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial E_{rr}}{\partial\varphi}-\frac{\partial(rE_{\varphi r})}{\partial r}-E_{r\varphi}\right] \tag{3.57g}$$

$$M^{T}_{23}=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rE_{\theta\theta})}{\partial r}-\frac{\partial E_{r\theta}}{\partial\theta}-E_{rr}\right] \tag{3.57h}$$

$$M^{T}_{31}=\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta E_{\varphi\varphi})}{\partial\theta}-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial E_{\theta\varphi}}{\partial\varphi}-E_{\theta r}-\cot\theta E_{\theta\theta}\right] \tag{3.57i}$$

将式(3.57)代入到式(3.51)中，则得球面坐标系下弹性力学的无限小应变协调方程如下：

$$\begin{aligned}
Q_{11}&=\in_{k11}(\overline{\partial_k}M^{T}_{l1}+\overline{\Gamma}_{km1}M^{T}_{m1}+\overline{\Gamma}_{km1}M^{T}_{1m})\\
&=\in_{231}(\overline{\partial_2}M^{T}_{31}+\overline{\Gamma}_{2m3}M^{T}_{m1}+\overline{\Gamma}_{2m1}M^{T}_{3m})\\
&\quad+\in_{321}(\overline{\partial_3}M^{T}_{21}+\overline{\Gamma}_{3m2}M^{T}_{m1}+\overline{\Gamma}_{3m1}M^{T}_{2m})\\
&=\overline{\partial_2}M^{T}_{31}+\overline{\Gamma}_{221}M^{T}_{32}-\overline{\partial_3}M^{T}_{21}-\overline{\Gamma}_{332}M^{T}_{31}-\overline{\Gamma}_{331}M^{T}_{23}\\
&=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial M^{T}_{31}}{\partial\theta}-\frac{1}{r}M^{T}_{32}-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial M^{T}_{21}}{\partial\varphi}+\frac{\cot\theta}{r}M^{T}_{31}+\frac{1}{r}M^{T}_{23}\\
&=\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta M^{T}_{31})}{\partial\theta}-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial M^{T}_{21}}{\partial\varphi}\right]
\end{aligned}$$

$$-(M^{T}_{32}-M^{T}_{23})\Big]$$

$$=\frac{1}{r}\Big\{\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big[\frac{\partial(\sin\theta E_{\varphi\varphi})}{\partial\theta}$$

$$-\frac{\partial E_{\theta\varphi}}{\partial\varphi}-\sin\theta E_{\theta r}-\cot\theta E_{\theta\theta}\Big]\Big\}$$

$$-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta E_{\varphi\theta})}{\partial\theta}$$

$$-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial E_{\theta\theta}}{\partial\varphi}+E_{\varphi r}+\cot\theta E_{\theta\varphi}\Big]$$

$$-\frac{1}{r}\Big[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial E_{r\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{\partial(rE_{\varphi\varphi})}{\partial r}$$

$$+\cot E_{r\theta}+E_{rr}\Big]+\frac{1}{r}\Big[\frac{\partial(rE_{\theta\theta})}{\partial r}$$

$$-\frac{\partial E_{r\theta}}{\partial\theta}-E_{rr}\Big]=\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\Big[\frac{\partial^2 E_{\theta\theta}}{\partial\varphi^2}$$

$$+\frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial(r^2E_{\theta\theta})}{\partial r}-\sin\theta\cos\theta\frac{\partial E_{\theta\theta}}{\partial\theta}\Big]$$

$$+\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin^2\theta\frac{\partial E_{\varphi\varphi}}{\partial\theta}\Big)+r\sin^2\theta\frac{\partial E_{\varphi\varphi}}{\partial r}$$

$$-2\frac{\partial^2(\sin\theta E_{\theta\varphi})}{\partial\theta\partial\varphi}-2\sin\theta\frac{\partial(\sin\theta E_{r\theta})}{\partial\theta}$$

$$-2\sin\theta\frac{\partial E_{r\varphi}}{\partial\varphi}-2\sin^2\theta E_{rr}\Big]=0 \qquad (3.58a)$$

$$Q_{22}=\frac{1}{r}\Big[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial M^{T}_{12}}{\partial\varphi}-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial(rM^{T}_{32})}{\partial r}$$

$$-\cot\theta M^{T}_{13}\Big\} = \frac{1}{r^2}\Big\{\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial E_{\varphi\varphi}}{\partial r}\Big)$$

$$+\frac{1}{\sin^2\theta}\Big(\frac{\partial^2 E_{rr}}{\partial\varphi^2} - r\frac{\partial E_{rr}}{\partial r} + \cot\theta\frac{\partial E_{rr}}{\partial\theta}$$

$$-\frac{2}{\sin\theta}\Big(\frac{\partial^2(rE_{r\varphi})}{\partial r\partial\varphi} - 2\cot\theta\frac{\partial(rE_{r\theta})}{\partial r}\Big)\Big\} = 0 \qquad (3.58b)$$

$$Q_{33} = \frac{1}{r}\Big\{\frac{\partial(rM^{T}_{23})}{\partial r} - \frac{\partial M^{T}_{13}}{\partial\theta}\Big\}$$

$$= \frac{1}{r^2}\Big\{\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial E_{\theta\theta}}{\partial r}\Big) - 2\frac{\partial^2(rE_{r\theta})}{\partial r\partial\theta}$$

$$+\frac{\partial^2 E_{rr}}{\partial\theta^2} - r\frac{\partial E_{rr}}{\partial r}\Big\} = 0 \qquad (3.58c)$$

$$Q_{12} = \frac{1}{r}\Big\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta M^{T}_{32})}{\partial\theta} - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial M^{T}_{22}}{\partial\varphi}$$

$$+M^{T}_{31} + \cot\theta\, M^{T}_{23}\Big\}$$

$$= -\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\Big\{r\sin\theta\frac{\partial^2(\sin\theta E_{\varphi\varphi})}{\partial r\partial\theta}$$

$$-r\sin\theta\frac{\partial^2 E_{\theta\varphi}}{\partial\varphi\partial r} - \frac{\partial^2(\sin\theta E_{r\varphi})}{\partial\varphi\partial\theta}$$

$$+\frac{\partial^2 E_{r\theta}}{\partial\varphi^2} + 2\sin^2\theta E_{r\theta} - \sin^2\theta\frac{\partial E_{rr}}{\partial\theta}$$

$$-r\sin\theta\cos\theta\frac{\partial E_{\theta\theta}}{\partial r}\Big\} = 0 \qquad (3.58d)$$

$$Q_{23} = \frac{1}{r}\Big\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial M^{T}_{12}}{\partial\varphi} - \frac{\partial(rM^{T}_{33})}{\partial r}$$

$$+\cot\theta M^{T}_{12}+M^{T}_{11}\Big\}=-\frac{1}{r^2}\Big\{\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial\theta}\Big(\frac{E_{rr}}{\sin\theta}\Big)$$

$$+\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial E_{\theta\varphi}}{\partial r}\Big)-\sin\theta\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial r}\Big(\frac{rE_{r\varphi}}{\sin\theta}\Big)$$

$$-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2(rE_{\theta r})}{\partial\varphi\partial r}\Big\}=0 \qquad (3.58e)$$

$$Q_{s1}=\frac{1}{r}\Big\{\frac{\partial(rM^{T}_{21})}{\partial r}-\frac{\partial M^{T}_{11}}{\partial\theta}+M^{T}_{12}\Big\}$$

$$=-\frac{1}{r^2\sin\theta}\Big\{r\frac{\partial^2 E_{\theta\varphi}}{\partial r\partial\varphi}-\frac{r}{\sin\theta}\frac{\partial^2(\sin^2\theta E_{\theta\varphi})}{\partial\theta\partial r}$$

$$+\frac{\partial^2(\sin\theta E_{r\varphi})}{\partial\theta^2}-\cot\theta\frac{\partial(\sin\theta E_{r\varphi})}{\partial\theta}$$

$$+2\sin\theta E_{r\varphi}-\sin\theta\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\varphi}\Big(\frac{E_{r\theta}}{\sin\theta}\Big)$$

$$-\frac{\partial E_{rr}}{\partial\varphi}\Big\}=0 \qquad (3.58f)$$

§3.6 贝尔特拉密—米歇尔方程

1. 直角坐标系下的贝尔特拉密—米歇尔方程

线性弹性力学中的贝尔特拉密—米歇尔(Beltrami—Michell)方程在卡氏直角坐标下的形式为

$$\nabla^2\sigma_x+\frac{1}{1+\gamma}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}+2\rho\frac{\partial b_x}{\partial x}+\frac{\gamma p}{1-\gamma}\Big(\frac{\partial b_x}{\partial x}$$

$$+\frac{\partial b_y}{\partial y}+\frac{\partial b_z}{\partial z}\Big)=0 \qquad (3.59a)$$

$$\nabla^2\sigma_y + \frac{1}{1+\gamma}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2} + 2\rho\frac{\partial b_y}{\partial y} + \frac{\gamma\rho}{1-\gamma}\left(\frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} + \frac{\partial b_z}{\partial z}\right) = 0 \tag{3.59b}$$

$$\nabla^2\sigma_z + \frac{1}{1+\gamma}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} + 2\rho\frac{\partial b_z}{\partial z} + \frac{\gamma\rho}{1-\gamma}\left(\frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} + \frac{\partial b_z}{\partial z}\right) = 0 \tag{3.59c}$$

$$\nabla^2\tau_{yz} + \frac{1}{1+\gamma}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y\partial z} + \rho\left(\frac{\partial b_y}{\partial z} + \frac{\partial b_z}{\partial y}\right) = 0 \tag{3.59d}$$

$$\nabla^2\tau_{zx} + \frac{1}{1+\gamma}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial z} + \rho\left(\frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_z}{\partial z}\right) = 0 \tag{3.50e}$$

$$\nabla^2\tau_{xy} + \frac{1}{1+\gamma}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial y} + \rho\left(\frac{\partial b_x}{\partial y} + \frac{\partial b_y}{\partial x}\right) = 0 \tag{3.56f}$$

这里所有符号的意义同前。

首先，我们按前述记法把上列各式改写成

$$\nabla^2 T_{11} + \frac{1}{1+\gamma}\partial^2{}_1\Theta + 2\rho\partial_1 b_1 + \frac{r\rho}{1-\gamma}(\partial_1 b_1 + \partial_2 b_2 + \partial_3 b_3) = 0 \tag{3.60a}$$

$$\nabla^2 T_{22} + \frac{1}{1+\gamma}\partial^2{}_2\Theta + 2\rho\partial_2 b_2 + \frac{\gamma\rho}{1-\gamma}(\partial_1 b_1 + \partial_2 b_2 + \partial_3 b_3) = 0 \tag{3.60b}$$

$$\nabla^2 T_{33} + \frac{1}{1+\gamma}\partial^2{}_3\Theta + 2\rho\partial_3 b_3 + \frac{\gamma\rho}{1-\gamma}(\partial_1 b_1 + \partial_2 b_2 + \partial_3 b_3) = 0 \tag{3.60c}$$

$$\nabla^2 T_{23} + \frac{1}{1+\gamma}\partial_2\partial_3\Theta + \rho(\partial_3 b_2 + \partial_2 b_3) = 0 \tag{3.60d}$$

$$\nabla^2 T_{31} + \frac{1}{1+\gamma}\partial_1\partial_3\Theta + \rho(\partial_1 b_3 + \partial_3 b_1) = 0 \qquad (3.60e)$$

$$\nabla^2 T_{12} + \frac{1}{1+\gamma}\partial_1\partial_2\Theta + \rho(\partial_2 b_1 + \partial_1 b_2) = 0 \qquad (3.60f)$$

按爱因斯坦求和约定，可把上列六式统一地写成下列指标形式：

$$\nabla^2 T_{ij} + \frac{1}{1+\gamma}\partial_i\partial_j\Theta + \rho(\partial_i b_j + \partial_j b_i) + \frac{\gamma\rho}{1-\gamma}\partial_k b_k \delta_{ij} = 0 \qquad (3.61)$$

上式的不变性形式为

$$\nabla^2 \mathbf{T} + \frac{1}{1+\gamma}\nabla\nabla\Theta + \rho(\nabla\mathbf{b} + \mathbf{b}\nabla) + \frac{\gamma\rho}{1-\gamma}\mathbf{I}\nabla\cdot\mathbf{b} = \mathbf{O} \qquad (3.62)$$

为了书写简单起见，我们略去体力的影响，于是上式变为

$$\nabla^2 \mathbf{T} + \frac{1}{1+\gamma}\nabla\nabla\Theta = \mathbf{O} \qquad (3.63)$$

2. 正交曲线坐标系下的贝尔特拉密—米歇尔方程

（1）一般形式

由上式不变性形式出发，考虑到式(2.152)和式(2.153)，则可写出一般曲线坐标系下的弹性力学的贝尔特拉密—米歇尔方程如下：

$$\begin{aligned}\nabla^2 T_{ij} &+ \overline{\partial_k}(\overline{\Gamma_{kli}}T_{lj} + \overline{\Gamma_{klj}}T_{il}) + \overline{\Gamma_{nka}}(\overline{\Gamma_{kli}}T_{lj} + \overline{\Gamma_{klj}}T_{il}) \\ &+ \overline{\Gamma_{kai}}(\overline{\partial_k}T_{aj} + \overline{\Gamma_{kla}}T_{lj} + \overline{\Gamma_{klj}}T_{al}) + \overline{\Gamma_{kaj}}(\overline{\partial_k}T_{ia} \\ &+ \overline{\Gamma_{kli}}T_{la} + \overline{\Gamma_{kla}}T_{il})\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{1+\gamma}(\bar{\partial}_i\bar{\partial}_j+\bar{\Gamma}_{ij1}\bar{\partial}_1)\Theta=0 \qquad (3.64)$$

下面我们就由上式写出柱面坐标和球面坐标系下贝尔特拉密—米歇尔方程的具体形式。

（2）柱面坐标系

在柱面坐标系下，考虑到式(2.133b)，则

$$\begin{aligned}
&\nabla^2T_{11}+\bar{\partial}_k(\Gamma_{k11}T_{11}+\bar{\Gamma}_{k11}T_{11})+\bar{\Gamma}_{mk1}(\bar{\Gamma}_{k11}T_{11}+\bar{\Gamma}_{k11}T_{11})\\
&\quad+\bar{\Gamma}_{k11}(\bar{\partial}_kT_{m1}+\bar{\Gamma}_{klm}T_{11}+\bar{\Gamma}_{k11}T_{m1})+\bar{\Gamma}_{km1}(\bar{\partial}_kT_{1m}\\
&\quad+\bar{\Gamma}_{k11}T_{1m}+\bar{\Gamma}_{klm}T_{11})+\frac{1}{1+\gamma}(\partial_1\partial_1+\bar{\Gamma}_{jk1}\partial_k)\Theta\\
&=\nabla^2T_{11}+2\bar{\partial}_2(\bar{\Gamma}_{221}T_{21})+2\bar{\Gamma}_{221}(\bar{\partial}_2T_{21}+\bar{\Gamma}_{212}T_{11}\\
&\quad+\bar{\Gamma}_{221}T_{22})+\frac{1}{1+\gamma}\bar{\partial}_1\bar{\partial}_1\Theta\\
&=\nabla^2T_{rr}-\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r}T_{\theta r}\right)-\frac{2}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial\theta}\right.\\
&\quad\left.+\frac{T_{rr}}{r}-\frac{1}{r}T_{\theta\theta}\right)+\frac{1}{1+\gamma}\frac{\partial^2\Theta}{\partial r^2}\\
&=\nabla^2T_{rr}-\frac{4}{r^2}\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{2(T_{\theta\theta}T_{rr})}{r^2}\\
&\quad+\frac{1}{1+\gamma}\frac{\partial^2\Theta}{\partial r^2}=0
\end{aligned} \qquad (3.65a)$$

$$\begin{aligned}
&\nabla^2T_{22}+2\bar{\partial}_2(\Gamma_{212}T_{21})+2\bar{\Gamma}_{212}(\bar{\partial}_2T_{12}+\bar{\Gamma}_{212}T_{11}+\bar{\Gamma}_{221}T_{22})\\
&\quad+\frac{1}{1+\gamma}(\bar{\partial}_2\bar{\partial}_2+\bar{\Gamma}_{212}\bar{\partial}_1)\Theta\\
&=\nabla^2T_{\theta\theta}+\frac{4}{r^2}\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial\theta}-\frac{2(T_{\theta\theta}-T_{rr})}{r^2}
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{1+\gamma}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\Theta=0 \qquad (3.65b)$$

$$\nabla^2 T_{33}+\frac{1}{1+\gamma}\bar{\partial}_3\bar{\partial}_3\Theta$$

$$=\nabla^2 T_{zz}+\frac{1}{1+\gamma}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}=0 \qquad (3.65c)$$

$$\nabla^2 T_{12}+\bar{\partial}_2(\bar{\Gamma}_{212}T_{11}+\bar{\Gamma}_{221}T_{22})+\bar{\Gamma}_{221}(\bar{\partial}_2 T_{22}+2\bar{\Gamma}_{212}T_{12})$$
$$+\Gamma_{212}(\bar{\partial}_2 T_{11}+2\Gamma_{221}T_{12})+\frac{1}{1+\gamma}\bar{\partial}_1\bar{\partial}_2\Theta$$

$$=\nabla^2 T_{r\theta}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial(T_{rr}-T_{\theta\theta})}{\partial\theta}-\frac{4T_{\theta r}}{r^2}$$

$$+\frac{1}{1+\gamma}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)=0 \qquad (3.65d)$$

$$\nabla^2 T_{23}+\bar{\partial}_2(\bar{\Gamma}_{212}T_{13})+\bar{\Gamma}_{212}(\bar{\partial}_2 T_{13}+\bar{\Gamma}_{221}T_{23})$$
$$+\frac{1}{1+\gamma}\bar{\partial}_2\bar{\partial}_3\Theta$$

$$=\nabla^2 T_{\theta z}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial T_{rz}}{\partial\theta}-\frac{T_{\theta z}}{r^2}$$

$$+\frac{1}{1+\gamma}\frac{1}{r}\frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta\partial z}=0 \qquad (3.65e)$$

$$\nabla^2 T_{31}+\bar{\partial}_2(\bar{\Gamma}_{221}T_{32})+\bar{\Gamma}_{221}(\bar{\partial}_2 T_{32}+\bar{\Gamma}_{212}T_{31})$$
$$+\frac{1}{1+\gamma}\bar{\partial}_3\bar{\partial}_1\Theta$$

$$=\nabla^2 T_{zr}-\frac{2}{r}\frac{\partial T_{z\theta}}{\partial\theta}-\frac{T_{\theta r}}{r^2}+\frac{1}{1+\gamma}\frac{\partial^2\Theta}{\partial r\partial z}=0$$

$$(3.65f)$$

（3）球面坐标系

在球面坐标系下，考虑到式(2.133c)，则

$$\nabla^2 T_{11} + \overline{\partial}_k(\overline{\Gamma}_{k1l}T_{l1} + \overline{\Gamma}_{k1l}T_{1l}) + \overline{\Gamma}_{nRn}(\overline{\Gamma}_{k1l}T_{l1} + \overline{\Gamma}_{k1l}T_{1l})$$

$$+ \overline{\Gamma}_{kn1}(\overline{\partial}_k T_{n1} + \overline{\Gamma}_{k1n}T_{11} + \overline{\Gamma}_{k11}T_{n1})$$

$$+ \overline{\Gamma}_{kn1}(\overline{\partial}_k T_{1n} + \overline{\Gamma}_{k11}T_{1n} + \overline{\Gamma}_{k1n}T_{11})$$

$$+ -\frac{1}{1+\gamma}(\overline{\partial}_1\overline{\partial}_1 + \overline{\Gamma}_{1k1}\partial_k)\Theta$$

$$= \nabla^2 T_{11} + 2\overline{\partial}_2(\overline{\Gamma}_{221}T_{21}) + 2\overline{\partial}_3(\overline{\Gamma}_{331}T_{31})$$

$$+ 2\overline{\Gamma}_{323}\overline{\Gamma}_{221}T_{21} + 2\overline{\Gamma}_{221}(\overline{\partial}_2 T_{21} + \overline{\Gamma}_{212}T_{11} + \overline{\Gamma}_{211}T_{21})$$

$$+ 2\overline{\Gamma}_{331}(\partial_3 T_{31} + \Gamma_{313}T_{11} + \Gamma_{312}T_{31}) + \frac{1}{1+\gamma}\overline{\partial}_1\overline{\partial}_1\Theta$$

$$= \nabla^2 T_{11} + 2\overline{\partial}_2(\overline{\Gamma}_{221}T_{21}) + 2\overline{\partial}_3(\overline{\Gamma}_{331}T_{31})$$

$$+ 2\overline{\Gamma}_{323}\overline{\Gamma}_{221}T_{21} + 2\overline{\Gamma}_{221}(\overline{\partial}_2 T_{21} + \overline{\Gamma}_{212}T_{11} + \overline{\Gamma}_{221}T_{22})$$

$$+ 2\overline{\Gamma}_{331}(\overline{\partial}_3 T_{31} + \overline{\Gamma}_{323}T_{21} + \overline{\Gamma}_{313}T_{11} + \overline{\Gamma}_{331}T_{33})$$

$$+ \frac{1}{1+\gamma}\partial_1\partial_1\Theta$$

$$= \nabla^2 T_{rr} - \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r}T_{\theta r}\right)$$

$$- \frac{2}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{r}T_{\varphi r}\right) - \frac{2\cot\theta}{r^2}T_{\theta r}$$

$$- \frac{2}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial\theta} + \frac{1}{r}T_{rr} - \frac{1}{r}T_{\theta\theta}\right)$$

$$- \frac{2}{r}\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T_{\varphi r}}{\partial\varphi} + \frac{\cot\theta}{r}T_{\theta r}\right)$$

$$+\frac{1}{r}T_{rr}-\frac{1}{r}T_{\varphi\varphi}\Big)+\frac{1}{1+\gamma}\frac{\partial^2\Theta}{\partial r^2}$$

$$=\nabla^2T_{rr}-\frac{4}{r^2}\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial\theta}-\frac{4}{r^2\sin\theta}\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial\varphi}$$

$$+\frac{2(T_{\theta\theta}-2T_{rr}+T_{\varphi\varphi})}{r}-\frac{4\cot\theta T_{r\theta}}{r^2}$$

$$+\frac{1}{1+\gamma}\frac{\partial^2\Theta}{\partial r^2}=0 \qquad (3.66a)$$

$$\nabla^2T_{22}+2\bar{\partial}_2(\bar{\Gamma}_{212}T_{21})+2\bar{\partial}_3(\bar{\Gamma}_{332}T_{23})+2\bar{\Gamma}_{323}\bar{\Gamma}_{212}T_{21}$$

$$+2\bar{\Gamma}_{212}(\bar{\partial}_2T_{12}+\bar{\Gamma}_{212}T_{11}+\bar{\Gamma}_{221}T_{22})+2\bar{\Gamma}_{332}(\bar{\partial}_3T_{32}$$

$$+\bar{\Gamma}_{332}T_{33}+\bar{\Gamma}_{313}T_{12}+\bar{\Gamma}_{323}T_{22})+\frac{1}{1+\gamma}(\bar{\partial}_2\bar{\partial}_2$$

$$+\bar{\Gamma}_{212}\bar{\partial}_1)\Theta$$

$$=\nabla^2T_{\theta\theta}+\frac{4}{r^2}\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial\theta}-\frac{4\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial T_{\theta\varphi}}{\partial\varphi}$$

$$+\frac{2(\sin^2\theta T_{rr}-T_{\theta\theta}+\cos^2\theta T_{\varphi\varphi})}{r^2\sin^2\theta}$$

$$+\frac{1}{1+\gamma}\Big(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big)\Theta=0 \qquad (3.66b)$$

$$\nabla^2T_{33}+2\bar{\partial}_3(\bar{\Gamma}_{313}T_{31}+\bar{\Gamma}_{323}T_{32})+2\bar{\Gamma}_{313}(\bar{\partial}_3T_{13}$$

$$+\bar{\Gamma}_{313}T_{11}+\bar{\Gamma}_{323}T_{12}+\bar{\Gamma}_{331}T_{33})+2\bar{\Gamma}_{323}(\bar{\partial}_3T_{23}$$

$$+\bar{\Gamma}_{313}T_{21}+\bar{\Gamma}_{323}T_{22}+\bar{\Gamma}_{332}T_{33})+\frac{1}{1+\gamma}(\bar{\partial}_3\bar{\partial}_3$$

$$+\bar{\Gamma}_{313}\bar{\partial}_1+\bar{\Gamma}_{323}\bar{\partial}_2)\Theta$$

$$= \nabla^2 T_{\varphi\varphi} + \frac{4}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial T_{r\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{4\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial T_{\theta\varphi}}{\partial\varphi}$$

$$+ \frac{2(T_{rr}\sin^2\theta - T_{\varphi\varphi} + T_{\theta\theta}\cos^2\theta)}{r^2\sin^2\theta} + \frac{4\cot\theta T_{r\theta}}{r^2}$$

$$+ \frac{1}{1+\gamma}\left(\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right.$$

$$\left. + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\Theta = 0 \qquad (3.66c)$$

$$\nabla^2 T_{12} + \bar{\partial}_2(\bar{\Gamma}_{212}T_{11} + \bar{T}_{221}T_{22}) + \bar{\partial}_3(\bar{\Gamma}_{332}T_{13} + \bar{T}_{331}T_{32})$$

$$+ \bar{\Gamma}_{323}(\bar{\Gamma}_{212}T_{11} + \bar{\Gamma}_{221}T_{22}) + \bar{\Gamma}_{221}(\bar{\partial}_2 T_{22} + 2\bar{\Gamma}_{212}T_{21})$$

$$+ \bar{\Gamma}_{331}(\bar{\partial}_3 T_{32} + \bar{\Gamma}_{332}T_{33} + \bar{\Gamma}_{313}T_{12} + \bar{\Gamma}_{313}T_{22})$$

$$+ \bar{\Gamma}_{212}(\bar{\partial}_2 T_{11} + 2\bar{\Gamma}_{221}T_{12}) + \bar{\Gamma}_{332}(\bar{\partial}_3 T_{13} + \bar{\Gamma}_{313}T_{11}$$

$$+ \bar{\Gamma}_{323}T_{12} + \Gamma_{331}T_{33}) + \frac{1}{1+\gamma}\bar{\partial}_1\bar{\partial}_2\Theta$$

$$\approx \nabla^2 T_{r\theta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial(T_{rr} - T_{\theta\theta})}{\partial\theta} + \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial T_{r\varphi}}{\partial\varphi}$$

$$- \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial T_{\theta\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{2\cot\theta}{r^2}(T_{\theta\varphi} - T_{\theta\theta})$$

$$- \frac{1}{r^2}\left(4 + \frac{1}{\sin^2\theta}\right)T_{r\theta} + \frac{1}{1+\gamma}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)$$

$$= 0 \qquad (3.66d)$$

$$\nabla^2 T_{23} + \bar{\partial}_2(\bar{\Gamma}_{212}T_{13}) + \bar{\partial}_3(\bar{\Gamma}_{313}T_{21} + \bar{\Gamma}_{323}T_{22} + \bar{\Gamma}_{332}T_{33})$$

$$+ \bar{\Gamma}_{212}(\bar{\partial}_2 T_{13} + \bar{\Gamma}_{221}T_{23}) + \bar{\Gamma}_{332}(\bar{\partial}_3 T_{33} + 2\bar{\Gamma}_{323}T_{32}$$

$$+ 2\bar{\Gamma}_{313}T_{31}) + \bar{\Gamma}_{323}(\bar{\partial}_2 T_{22} + 2\bar{\Gamma}_{332}T_{23}) + \bar{\Gamma}_{313}(\bar{\partial}_3 T_{21}$$

$$+\overline{\Gamma}_{331}T_{23}+\overline{\Gamma}_{332}T_{31})+\overline{\Gamma}_{323}\overline{\Gamma}_{212}T_{13}+\frac{1}{1+\gamma}\partial_2\partial_3\Theta$$

$$=\nabla^2T_{\theta\varphi}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial T_{r\varphi}}{\partial\theta}+\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial\varphi}$$

$$+\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial(T_{\theta\theta}-T_{\varphi\varphi})}{\partial\varphi}$$

$$-\frac{2[\sin\theta\cos\theta T_{r\varphi}+(1+\cos^2\theta)T_{\theta\varphi}]}{r^2\sin\theta^2}$$

$$+\frac{1}{1+\gamma}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi}\right)=0 \qquad (3.66e)$$

$$\nabla^2T_{31}+\overline{\partial}_2(\overline{\Gamma}_{221}T_{32})+\overline{\partial}_3(\overline{\Gamma}_{331}T_{33}+\overline{\Gamma}_{313}T_{11}+\overline{\Gamma}_{123}T_{21})$$

$$+\Gamma_{323}\overline{\Gamma}_{221}T_{32}+\overline{\Gamma}_{313}[\overline{\partial}_3T_{11}+\overline{\Gamma}_{331}(T_{13}+T_{31})]$$

$$+\overline{\Gamma}_{323}(\overline{\partial}_3T_{21}+\overline{\Gamma}_{331}T_{23}+\overline{\Gamma}_{332}T_{31})+\overline{\Gamma}_{221}(\overline{\partial}_2T_{32}$$

$$+\overline{\Gamma}_{212}T_{31})+\overline{\Gamma}_{331}[\overline{\partial}_3T_{33}+\overline{\Gamma}_{313}(T_{31}+T_{13})$$

$$+\overline{\Gamma}_{323}(T_{32}+T_{23})]+\frac{1}{1+\gamma}(\overline{\partial}_3\overline{\partial}_1+\overline{\Gamma}_{331}\overline{\partial}_3)\Theta$$

$$=\nabla^2T_{r\varphi}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial T_{\theta\varphi}}{\partial\theta}-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial(T_{\theta\theta}-T_{rr})}{\partial\varphi}$$

$$+\frac{2\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial\varphi}-\frac{4\cos\theta T_{\theta\varphi}}{r^2}-\frac{1}{r^2}\left(4\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sin^2\theta}\right)T_{\varphi r}+\frac{1}{1+\gamma}\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial^2}{\partial\gamma\partial\varphi}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\Theta=0 \qquad (3.66f)$$

§3.7 纳维—柯西方程

1. 直角坐标系下的纳维—柯西方程

弹性力学中的纳维—柯西（Navier—Cauchy）方程在卡氏直角坐标系下的形式为

$$\mu\nabla^2 u+(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\rho b_x=0$$

$$\mu\nabla^2 v+(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\rho b_y=0 \quad (3.67a)$$

$$\mu\nabla^2 w+(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\rho b_z=0$$

这里λ和μ为拉梅常数。

上式可改写为

$$\mu\nabla^2 u_1+(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)+\rho b_1=0$$

$$\mu\nabla^2 u_2+(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)+\rho b_2=0$$

(3.67b)

$$\mu\nabla^2 u_3+(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)+\rho b_3=0$$

它可统一地记为

$$\mu\nabla^2 u_i+(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)+\rho b_i=0 \quad (3.67c)$$

写成不变性形式，即。

$$\mu\nabla^2\mathbf{u}+(\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}+\rho\mathbf{b}=\mathbf{0} \quad (3.67d)$$

2. 正交曲线坐标系下的纳维—柯西方程

（1）一般形式

考虑到式（2.151）和式（2.154），则可写出在一般正交曲线坐标系下的纳维—柯西方程如下：

$$\mu[\nabla^2 u_i + \overline{2\Gamma}_{jki}\overline{\partial}_j u_k + \overline{\Gamma}_{jki}\overline{\Gamma}_{jmk}u_m + (\overline{\partial}_j\overline{\Gamma}_{jmi} + \overline{\Gamma}_{kjk}\overline{\Gamma}_{jmi})u_m] + (\lambda+\mu)\overline{\partial}_i(\mathrm{div}\mathbf{u}) + \rho b_i = 0 \tag{3.68}$$

其中 $\mathrm{div}\mathbf{u} = \overline{\partial}_k u_k + \overline{\Gamma}_{kjk}u_j$

（2）柱面坐标系

在柱面坐标下，考虑到式(2.133b)，则由式（3.68）可写出弹性力学的纳维—柯西方程为

$$\begin{aligned}
&\mu[\nabla^2 u_1 + \overline{2\Gamma}_{jk1}\overline{\partial}_j u_k + \overline{\Gamma}_{jk1}\overline{\Gamma}_{jmk}u_m + (\overline{\partial}_j\overline{\Gamma}_{jm1} + \overline{\Gamma}_{kjk}\overline{\Gamma}_{jm1})u_m] \\
&\quad + (\lambda+\mu)\overline{\partial}_1(\mathrm{div}\mathbf{u}) + \rho b_1 \\
&= \mu[\nabla^2 u_1 + \overline{2\Gamma}_{221}\overline{\partial}_2 u_2 + \overline{\Gamma}_{221}\overline{\Gamma}_{212}u_1 + (\overline{\partial}_2\overline{\Gamma}_{221})u_2] \\
&\quad + (\lambda+\mu)\overline{\partial}_1\mathrm{div}\mathbf{u} + \rho b_1 \\
&= \mu\left[\nabla^2 u_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} - \frac{1}{r^2}u_r\right] \\
&\quad + (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial r}(\mathrm{div}\mathbf{u}) + \rho b_r = 0
\end{aligned} \tag{3.69a}$$

$$\begin{aligned}
&\mu(\nabla^2 u_2 + \overline{2\Gamma}_{212}\overline{\partial}_2 u_1 + \overline{\Gamma}_{221}\overline{\Gamma}_{212}u_2) + (\lambda+\upsilon)\overline{\partial}_2(\mathrm{div}\mathbf{u}) \\
&\quad + \rho b_2 \\
&= \mu\left(\nabla^2 u_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} - \frac{u_\theta}{r^2}\right) \\
&\quad + (\lambda+\mu)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\mathrm{div}\mathbf{u}) + \rho b_\theta = 0
\end{aligned} \tag{3.69b}$$

$$\mu\nabla^2 u_3 + (\lambda+\mu)\overline{\partial}_3(\mathrm{div}\mathbf{u}) + \rho b_3$$

$$= \mu\nabla^2 u_z + (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial z}(\mathrm{div}\mathbf{u}) + \rho b_z = 0 \qquad (3.69c)$$

这里

$$\nabla^2 = \overline{\partial}_i\overline{\partial}_i + \overline{\Gamma}_{ii}\overline{\partial}_i$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \qquad (3.70)$$

$$\mathrm{div}\mathbf{u} = \overline{\partial}_k u_k + \overline{\Gamma}_{kjk}u_j$$

$$= \overline{\partial}_1 u_1 + \overline{\partial}_2 u_2 + \overline{\partial}_3 u_3 + \Gamma_{212}u_1$$

$$= \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_r}{r} \qquad (3.71)$$

（3）球面坐标系

在球面坐标系下，考虑到式(2,133c)，则由式（3.68）可写出弹性力学的纳维—柯西方程可写为

$$\mu[\nabla^2 u_1 + 2\overline{\Gamma}_{jk1}\overline{\partial}_j u_k + \overline{\Gamma}_{jk1}\overline{\Gamma}_{jmk}u_m + (\overline{\partial}_i\overline{\Gamma}_{jmi}$$

$$+ \overline{\Gamma}_{kjk}\overline{\Gamma}_{jmi})u_m] + (\lambda+\mu)\overline{\partial}_1(\mathrm{div}\mathbf{u}) + \rho b_1$$

$$= \mu[\nabla^2 u_1 + 2\overline{\Gamma}_{331}\overline{\partial}_3 u_3 + 2\overline{\Gamma}_{221}\overline{\partial}_2 u_2 + \overline{\Gamma}_{331}(\overline{\Gamma}_{313}u_1$$

$$+ \overline{\Gamma}_{323}u_2) + \overline{\Gamma}_{221}\overline{\Gamma}_{221}u_1 + (\overline{\partial}_2\overline{\Gamma}_{221} + \overline{\Gamma}_{323}\overline{\Gamma}_{221})u_2$$

$$+ (\overline{\partial}_3\overline{\Gamma}_{331})u_3] + (\lambda+\mu)\overline{\partial}_1(\mathrm{div}\mathbf{u}) + \rho b_1$$

$$= \mu\left(\nabla^2 u_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} - \frac{2u_r}{r^2}\right.$$

$$\left. - \frac{2\cot\theta}{r_2}\right) + (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial r}(\mathrm{div}\mathbf{u}) + \rho b_r = 0 \qquad (3.72a)$$

$$\mu[\nabla^2 u_2 + 2\overline{\Gamma}_{212}\overline{\partial}_2 u_1 + 2\overline{\Gamma}_{332}\overline{\partial}_3 u_2 + \overline{\Gamma}_{313}\overline{\Gamma}_{332}u_1$$

$$+(\overline{\Gamma}_{221}\overline{\Gamma}_{212}+\overline{\Gamma}_{323}\overline{\Gamma}_{332})u_2]+(\lambda+\mu)\partial_2(\mathrm{div}\mathbf{u})+\rho b_2$$
$$=\mu\left(\nabla^2 u_\theta+\frac{2}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}-\frac{2\cos\theta}{r_2\sin^2\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}-\frac{u_\theta}{r^2\sin^2\theta}\right)$$
$$+(\lambda+\mu)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\mathrm{div}\mathbf{u})+\rho b_\theta=0 \qquad (3.72b)$$

$$\mu[\nabla^2 u_3+2(\overline{\Gamma}_{313}\overline{\partial}_3 u_1+\overline{\Gamma}_{323}\overline{\partial}_3 u_2)+(\overline{\Gamma}_{331}\overline{\Gamma}_{313}+\overline{\Gamma}_{332}\overline{\Gamma}_{323})u_3]$$
$$+(\lambda+\mu)\overline{\partial}_3(\mathrm{div}\mathbf{u})+\rho b_3$$
$$=\mu\left(\nabla^2 u_\varphi+\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}+\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}\right.$$
$$\left.-\frac{u_\varphi}{r^2\sin^2\varphi}\right)+(\lambda+\mu)\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\mathrm{div}\mathbf{u})+\rho b_\varphi$$
$$=0 \qquad (3.72c)$$

这里

$$\nabla^2=\overline{\partial}_i\overline{\partial}_i+\overline{\Gamma}_{ij}\overline{\partial}_j$$
$$=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}$$
$$+\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} \qquad (3.73)$$

$$\mathrm{div}\mathbf{u}=\overline{\partial}_k u_k+\overline{\Gamma}_{kjk}u_j$$
$$=\overline{\partial}_1 u_1+\overline{\partial}_2 u_2+\overline{\partial}_3 u_3+(\overline{\Gamma}_{212}+\overline{\Gamma}_{313})u_1+\overline{\Gamma}_{323}u_2$$
$$=\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{2u_r}{r}+\frac{\cot\theta u_\theta}{r}$$
$$(3.74)$$

第四章　张量在流体力学中的应用

在本章中我们将简略地阐述张量在流体力学中的应用。阐述的步骤和第三章相同。流体力学的基本方程组包括连续性方程、运动方程、能量方程、本构方程和状态方程。这里我们将直截了当地由流体力学基本方程组的常规写法改写成张量的指标记法及其不变性形式，再利用非完整系物理标架给出正交曲线坐标系下流体力学基本方程组的具体表达形式。

§4.1　连续性方程

1. 直角坐标系下的连续性方程

在卡氏直角坐标系下的连续性方程为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}=0 \qquad (4.1a)$$

其中v_x, v_y, v_z为沿x, y, z方向的速度分量，ρ为流体密度。

上式还可写为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_1)}{x_1}+\frac{\partial(\rho v_2)}{\partial x_2}+\frac{\partial(\rho v_3)}{\partial x_3}=0 \qquad (4.1b)$$

把它写成指标形式，则为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k}=0 \qquad (4.1c)$$

其不变性形式为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \tag{4.1d}$$

2. 正交曲线坐标系下的连续性方程

（1）一般形式

考虑到式（2.141b），则在一般曲线坐标系下流体力学的连续性方程的分量形式为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \overline{\partial_i}(\rho v_i) + \rho \overline{\Gamma_{ji}} v_j = 0 \tag{4.3}$$

（2）柱面坐标系

考虑到式（2.133b）则由式（4.2）可写出柱面坐标系下流体力学的连续性方程如下：

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + \overline{\partial_i}(\rho v_i) + \rho \overline{\Gamma_{ji}} v_j \\
&= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \overline{\partial_1}(\rho v_1) + \overline{\partial_2}(\rho v_2) + \overline{\partial_3}(\rho v_3) + \rho \overline{\Gamma_{212}} v_1 \\
&= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_r)}{\partial r} + \frac{\partial (\rho v_\theta)}{z \partial \theta} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} \\
&+ \frac{\rho v_r}{r} = 0
\end{aligned} \tag{4.3}$$

（3）球面坐标系

考虑到式（1.95c），则由式（3.2）可写出球面坐标系下的流体力学连续性方程如下：

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + \overline{\partial_i}(\rho v_i) + \rho \overline{\Gamma_{ji}} v_i \\
&= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \overline{\partial_1}(\rho v_1) + \overline{\partial_2}(\rho v_2) + \overline{\partial_3}(\rho v_3) + \rho(\overline{\Gamma_{313}}
\end{aligned}$$

$$+\overline{\Gamma}_{212})v_1+\rho\overline{\Gamma}_{323}v_2$$

$$=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_r)}{\partial r}+\frac{\partial(\rho v_\theta)}{r\,\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial\varphi}$$

$$+\frac{2\rho}{r}v_r+\frac{\rho\cot\theta}{r}v_\theta=0 \tag{4.4}$$

§4.2 纳维—斯托克斯—杜姆方程

1. 在直角坐标系下的纳维—斯托克斯—杜姆方程

在卡氏直角坐标系下可压缩粘性流体的纳维—斯托克斯—杜姆(Duhem)方程为

$$\mu^*\nabla^2\mu_x+(\lambda^*+\mu^*)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)+\rho b_x$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x}-\rho\frac{Dv_x}{Dt}=0 \tag{4.5a}$$

$$\mu^*\nabla^2 v_y+(\lambda^*+\mu^*)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\rho b_y$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y}-\rho\frac{Dv_y}{Dt}=0 \tag{4.5b}$$

$$\mu^*\nabla^2 v_z+(\lambda^*+\mu^*)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)+\rho b_z$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z}-\rho\frac{Dv_z}{Dt}=0 \tag{4.5c}$$

其中p为压力，λ^*和μ^*为流体的粘性系数。按前述记法可把上式改写为

$$\mu^*\nabla^2 v_1 + (\lambda^* + \mu^*)\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right) + \rho b_1$$

$$- \frac{\partial p}{\partial x_1} - \rho\frac{Dv_1}{Dt} = 0 \qquad (4.6a)$$

$$\mu^*\nabla^2 v_2 + (\lambda^* + \mu^*)\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right) + \rho b_2$$

$$- \frac{\partial p}{\partial x_2} - \rho\frac{Dv_2}{Dt} = 0 \qquad (4.6b)$$

$$\mu^*\nabla^2 v_3 + (\lambda^* + \mu^*)\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right) + \rho b_3$$

$$- \frac{\partial p}{\partial x_3} - \rho\frac{Dv_3}{Dt} = 0 \qquad (4.6c)$$

把上式写成指标形式就是

$$\mu^*\nabla^2 v_i + (\lambda^* + \mu^*)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right) + \rho b_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

$$- \rho\frac{Dv_i}{Dt} = 0 \qquad (4.7)$$

上式的不变性形式为

$$\mu^*\nabla^2 \mathbf{v} + (\lambda^* + \mu^*)\nabla\nabla\cdot\mathbf{v} + \rho\mathbf{b} - \nabla p - \rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{0} \qquad (4.8)$$

2. 柱面坐标系下的纳维—斯托克斯—杜姆方法

在柱面坐标系下考虑到式(2.133b),式(3.65),式(2.157b)可写出柱面坐标系下的纳维—斯托克斯—杜姆方程如下:

$$\mu^*\left(\nabla^2 v_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} - \frac{v_r}{r^2}\right) + (\lambda^* + \mu^*)\frac{\partial}{\partial r}(\mathrm{div}\,v)$$

$$+\rho b_r-\frac{\partial p}{\partial r}-\left(\frac{Dv_r}{Dt}-\frac{v_\theta^2}{r}\right)=0 \tag{4.9a}$$

$$\mu^*\left(\nabla^2 v_\theta+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}-\frac{v_\theta}{r^2}\right)+(\lambda^*+\mu^*)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\mathrm{div}\mathbf{v})$$

$$+\rho b\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}-\left(\frac{Dv_\theta}{Dt}+\frac{v_r v_\theta}{\gamma}\right)=0 \tag{4.9b}$$

$$\mu^*\nabla^2 v_z+(\lambda^*+\mu^*)\frac{\partial}{\partial z}(\mathrm{div}\mathbf{v})+\rho b_z-\frac{\partial p}{\partial z}$$

$$-\frac{Dv_z}{Dt}=0 \tag{4.9c}$$

这里算子$\frac{D}{Dt}$和∇^2分别由式(2.156b)和式(2.150b)给出，而

$$\mathrm{div}\mathbf{v}=\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial v_z}{\partial z}+\frac{v_r}{r} \tag{4.10}$$

3. 球面坐标系下的纳维—斯托克斯—杜姆方程

考虑到式(2.133c)，式(3.66)和式(2.157b)可写出球面坐标系下的纳维—斯托克斯—杜姆方程如下：

$$\mu^*\left(\nabla^2 v_r-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}-\frac{2v_r}{r^2}\right.$$

$$\left.-\frac{2\cot\theta v_\theta}{r^2}\right)+(\lambda^*+\mu^*)\frac{\partial}{\partial r}(\mathrm{div}\mathbf{v})+\rho b_r$$

$$-\frac{\partial p}{\partial r}-\left(\frac{Dv_r}{Dt}-\frac{v_\theta^2+v_z^2}{r}\right)=0 \tag{4.11a}$$

$$\mu^*\left(\nabla^2 v_\theta+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}-\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}-\frac{v_\theta}{r^2\sin^2\theta}\right)$$

$$+(\lambda^*+\mu^*)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\mathrm{div}\,v)+\rho b_\theta$$

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}-\left(\frac{Dv_\theta}{Dt}+\frac{v_r v_\theta-\cot\theta v^2_\varphi}{r}\right)=0$$

(4.11b)

$$\mu^*\left(\nabla^2 v_\varphi+\frac{2}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}+\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi}-\frac{v_\varphi}{r^2\sin^2\theta}\right)$$

$$+(\lambda^*+\mu^*)\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\mathrm{div}\,v)+\rho b_\varphi$$

$$-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial\varphi}-\left[\frac{Dv_\varphi}{Dt}+\frac{(v_r+\cot\theta v_\theta)v_\varphi}{r}\right]$$

$$=0 \qquad (4.11c)$$

这里算子$\frac{D}{Dt}$和∇^2分别由式(2.156c)和式(2.150d)给出，而

$$\mathrm{div}\,v=\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{2v_r}{r}+\frac{\cot\theta v_\theta}{r}$$

(4.12)

§4.3 能量方程

1. 直角坐标系下的能量方程

在卡氏直角坐标系下流体力学的能量方程为

$$\rho\frac{Dh}{Dt}=\frac{Dp}{Dt}+\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\Phi \qquad (4.13a)$$

这里h为热焓，p为压力，T为温度，k为热传导系数，而Φ为

耗散函数，即

$$\Phi=\lambda^{*}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2+2\mu^{*}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2\Bigg]+\mu^{*}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2+\mu^{*}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)^2+\mu^{*}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)^2 \tag{4.13b}$$

式（4.13）可改写为

$$\rho\frac{Dh}{Dt}=\frac{Dp}{Dt}+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_3}\right)+\Phi \tag{4.14a}$$

其中：

$$\Phi=\lambda^{*}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}+\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right)^2+2\mu^{*}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right)^2\Bigg]+\mu^{*}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}+\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right)^2+\mu^{*}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2}+\frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right)+\mu^{*}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}+\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) \tag{4.14b}$$

写成指标形式，即

$$\rho\frac{Dh}{Dt}=\frac{Dp}{Dt}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)+\Phi \tag{4.15a}$$

其中

$$\Phi=\lambda^{*}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\right)^2+2\mu^{*}D_{ij}D_{ij} \tag{4.15b}$$

$$D_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{4.15c}$$

其不变性形式为

$$\rho\frac{Dh}{Dt}=\frac{Dp}{Dt}+\nabla\cdot(k\nabla\mathbf{T})+\Phi \tag{4.16a}$$

这里

$$\Phi=\lambda^*(\mathrm{div}\,\mathbf{v})^2+2\mu^*\mathbf{D}:\mathbf{D} \tag{4.16b}$$

$$\mathbf{D}=\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v}+\mathbf{v}\nabla) \tag{4.16c}$$

D称为变形速率张量。

2. 正交曲线坐标系下的能量方程

（1）一般形式

在一般正交曲线坐标系下，由式(2.155b)，式(2.141b)和式(2.137b)，则得其分量形式为

$$\rho\frac{Dh}{Dt}=\frac{Dp}{Dt}+\overline{\partial_i}(k\overline{\partial_i}T)+\overline{\Gamma_{ji}}k\overline{\partial_j}T+\Phi \tag{4.17a}$$

$$D_{ij}=\frac{1}{2}[\overline{\partial_i}v_j+\overline{\partial_j}v_i+(\overline{\Gamma_{ikj}}+\overline{\Gamma_{jki}})v_k] \tag{4.17b}$$

（2）柱面坐标系

考虑到式(2.133b)，则由式（4.17）可写出柱面坐标系下的能量方程如下：

$$\rho\frac{Dh}{Dt}=\frac{Dp}{Dt}+\frac{\partial}{\partial r}\left(k\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(k\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\frac{k}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\lambda^*\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial v_z}{\partial z}+\frac{v_r}{r}\right)^2+2\mu^*\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)^2$$

$$+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+v_r\right)^2+\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}-\frac{v_\theta}{r}\right)^2+\left(\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)^2$$

$$\left.\left.+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta}+\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)^2\right\}\right] \qquad (4.18)$$

（3）球面坐标

在球面坐标下，考虑到式，(2.113c)，则由式（4.17）可写出球面坐标系下的能量方程如下：

$$\rho\frac{Dh}{Dt}=\frac{Dp}{Dt}+\frac{\partial}{\partial r}\left(k\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(k\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)$$

$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(k\frac{\partial T}{\partial\varphi}\right)+\frac{2k}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{\cot\theta}{r^2}k\frac{\partial T}{\partial\theta}$$

$$+\lambda^*\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{2v_r}{r}\right.$$

$$\left.+\frac{\cot\theta v_\theta}{r}\right)^2+2\mu^*\left\{\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+v_r\right)^2\right.$$

$$+\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}+\frac{v_r}{r}+\frac{\cot\theta v_\theta}{r}\right)^2+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right.\right.$$

$$+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}-\frac{v_\theta}{r}\left.\right)^2+\left(\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{v_z}{r}\right)^2$$

$$\left.\left.+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta}+\frac{\partial v_\theta}{\partial z}-\frac{\cot\theta v_z}{r}\right)^2\right\}\right] \qquad (4.18)$$

§4.4 本构方程

1. 直角坐标系下的本构方程

在卡氏直角坐标系下的牛顿粘性流体本构方程为

$$\sigma_{xx} = -p + \lambda\pi^*\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) + 2\mu^*\frac{\partial v_x}{\partial x} \tag{4.19a}$$

$$\sigma_{yy} = -p + \lambda^*\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) + 2\mu^*\frac{\partial v_y}{\partial y} \tag{4.19b}$$

$$\sigma_{zz} = -p + \lambda^*\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) + 2\mu^*\frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{4.19c}$$

$$\tau_{xy} = \mu^*\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \tag{4.19d}$$

$$\tau_{yz} = \mu^*\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) \tag{4.19e}$$

$$\tau_{zx} = \mu^*\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \tag{4.19f}$$

上列方程亦可改写为

$$T_{11} = -p + \lambda^*\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right) + 2\mu^*\frac{\partial v_1}{\partial x_1} \tag{4.20a}$$

$$T_{22} = -p + \lambda^*\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right) + 2\mu^*\frac{\partial v_2}{x_2} \tag{4.20b}$$

$$T_{33} = -p + \lambda^*\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right) + 2\mu^*\frac{\partial v_3}{\partial x_3} \tag{4.20c}$$

$$T_{12} = \mu^*\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) \tag{4.20d}$$

$$T_{23}=\mu^*\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2}+\frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right) \tag{4.20e}$$

$$T_{31}=\mu^*\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}+\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) \tag{4.20f}$$

写成指标形式，即

$$T_{ij}=-p\delta_{ij}+\lambda^*\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij}+\mu^*\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{4.21}$$

其不变性形式为

$$\mathbf{T}=-p\mathbf{I}+\lambda^*\mathbf{I}\mathrm{div}\boldsymbol{\upsilon}+2\mu^*\mathbf{D} \tag{4.22a}$$

这里

$$\mathbf{D}=\frac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{\upsilon}+\boldsymbol{\upsilon}\nabla) \tag{4.22b}$$

2. 正交曲线坐标系下的本构方程

（1）一般形式

在一般正交曲线坐标系下，式（4.22）的分量形式为

$$T_{ij}=-p\delta_{ij}+\lambda^*\delta_{ij}(\overline{\partial_m}v_m+\overline{\Gamma_{mnm}}v_n)$$
$$+\mu^*[\overline{\partial_i}v_j+\overline{\partial_j}v_i+(\overline{\Gamma_{ikj}}+\overline{\Gamma_{jki}})v_k] \tag{4.23}$$

（2）柱面坐标系

考虑到式(2,133b)，则由式（4.23）可写出柱面坐标系下的本构方程如下：

$$T_{rr}=-p+\lambda^*\mathrm{div}\boldsymbol{\upsilon}+2\mu^*\frac{\partial v_r}{\partial r} \tag{4.24a}$$

$$T_{\theta\theta}=-p+\lambda^*\mathrm{div}\boldsymbol{\upsilon}+2\mu^*\frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+v_r\right) \tag{4.24b}$$

$$T_{zz}=-p+\lambda^*\mathrm{div}\boldsymbol{\upsilon}+2\mu^*\frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{4.24c}$$

$$T_{r\theta}=T_{\theta r}=\mu^*\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}-\frac{v_\theta}{r}\right) \tag{4.24d}$$

$$T_{\theta z}=T_{z\theta}=\mu^*\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta}+\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right) \tag{4.24e}$$

$$T_{zr}=T_{rz}=\mu^*\left(\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{\partial v_r}{\partial z}\right) \tag{4.24f}$$

（3）球面坐标系

考虑到式(2.133c)，则由式（4.23）可写出球面坐标系下的本构方程如下：

$$T_{rr}=-p+\lambda^*\,\mathrm{div}v+2\mu^*\frac{\partial v_r}{\partial r} \tag{4.25a}$$

$$T_{\theta\theta}=-p+\lambda^*\mathrm{div}v+2\mu^*\frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+v_r\right) \tag{4.25b}$$

$$T_{zz}=-p+\lambda^*\mathrm{div}v+2\mu^*\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{v_\varphi}{\partial\varphi}+v_r+\cot\theta v_\theta\right) \tag{4.25c}$$

$$T_{r\theta}=T_{\theta r}=\mu^*\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial_r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}-\frac{v_\theta}{r}\right) \tag{4.25d}$$

$$T_{\theta\varphi}=T_{\varphi\theta}=\mu^*\frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi}-\cot\theta v_\varphi\right) \tag{4.25e}$$

$$T_{\varphi r}=T_{r\varphi}=\mu^*\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}-\frac{v_\varphi}{r}\right) \tag{4.25f}$$

§4.5 状态方程

可压缩粘性流体的状态方程为

$$p=f(\rho,T) \tag{4.26}$$

这里P为压力，T为温度

4.6 其　　它

1. 可压缩流体的纳维—斯托克斯方程

如果采取斯托克斯条件，即$\lambda^* = -\frac{2}{3}\mu^*$，则由式(4.7)给出下列可压缩流体的纳维—斯托克斯方程如下：

$$\mu^* \nabla^2 v_i + \frac{1}{3}\mu^* \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right) + \rho b_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho \frac{Dv_i}{Dt} = 0 \tag{4.27a}$$

它的不变性形式为

$$\mu^* \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{3}\mu^* \nabla \nabla \cdot \mathbf{v} + \rho \mathbf{b} - \nabla p - \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{0} \tag{4.27b}$$

2. 不可压缩流体的纳维—斯托克斯方程

当$\mathrm{div}\mathbf{v} = 0\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0,\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0\right)$，于是由式（4.7）和式（4.8）可分别写出不可压缩粘性流体的纳维—斯托克斯方程如下：

$$^*\mu \nabla^2 v_i + \rho b, - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho \frac{Dv_i}{Dt} = 0 \tag{4.28a}$$

$$\mu^* \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{b} - \nabla p - \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{O} \tag{4.28b}$$

3. 欧拉运动方程

若粘性系数λ^*和μ^*为零，则这种流体称为无粘性流体。

此时由式(4.27a)和式(4.27b)可得欧拉（Euler）运动方程如下：

$$\rho b_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho \frac{Dv_i}{Dt} = 0 \tag{4.29a}$$

或

$$\rho \mathbf{b} - \nabla p - \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{0} \tag{4.29b}$$

到此为止，我们已经利用非完整系物理标架统一地推导出正交曲线坐标系下弹性力学和流体力学基本方程组的全部具体表达形式。

参考文献

〔1〕爱林根著，钱伟长译：张量分析，江苏科学技术出版社，1981年。

〔2〕弗留盖著，白铮译：张量分析与连续介质力学，中国建筑工业出版社，1980年。

〔3〕A·A·基利契夫斯基著，郭乾荣译：张量计算及其在力学上的应用，高等教育出版社，1959年。

〔4〕J.A. Schouten, Tensor Analysis for Physicists, 1951.

〔5〕T.S.Sokolnikoff, Tensor Analysis, 1964.

〔6〕S.F.Borg, Matrix—Tensor Methods in Continuum Mechanics, 1963.

〔7〕L.A.Segel and G. H.Handelman, Mathematics Applied to Continuum Mechanics, 1977.

〔8〕郭仲衡著：非线性弹性理论，科学出版社，1980年。

〔9〕武际可、王敏中：弹性力学引论，北京大学出版社，1981年。

〔10〕钱伟长、叶开沅：弹性力学，科学出版社，1981年。

〔11〕А.И.Лурье, Пространственные Задачи Теории Упругости, 1955。

〔12〕瓦·扎，符拉索夫著，薛振东、朱世靖译：壳体的一般理论，人民教育出版社，1963年。

〔13〕钱学森著，徐华舫译：气体力学诸方程，科学出版社，1956年。

〔14〕吴望一编著：流体力学，上册，北京大学出版社，1982年。

〔15〕张仲寅、乔志德编著：粘性流体力学，国防工业出版社，1982年。

〔16〕Л.И.Седов, Введение в Механику Сплошной Среды, 1962。

〔17〕G.F. Mase, Theory and Problems of Continuum Mechanics, 1970.

〔18〕Y.C.Fung, A First Course in Continuum Mechanics,

1977.
〔19〕 W. M. Lai, D. Rubin and F. Krempl, An Introduction to Continuum Mechaics, 1978.
〔20〕 A.C.Eringen, Mechanics of Continua, 1980。
〔21〕 德冈辰雄著，赵镇、苗天德、程昌钧译：理性连续介质力学入门，科学出版社，1982年。
〔22〕 李灏、陈枚怪编译，连续体力学，华中工学院出版社，1982年。
〔23〕 郑泉水、戴天民，Cayley—Hamilton 定理的两种简单证法和两个表现定理，应用数学和力学，第5卷第1期，1984年。

Downloaded by: ivan.ivanov@pobeda-stadion.com