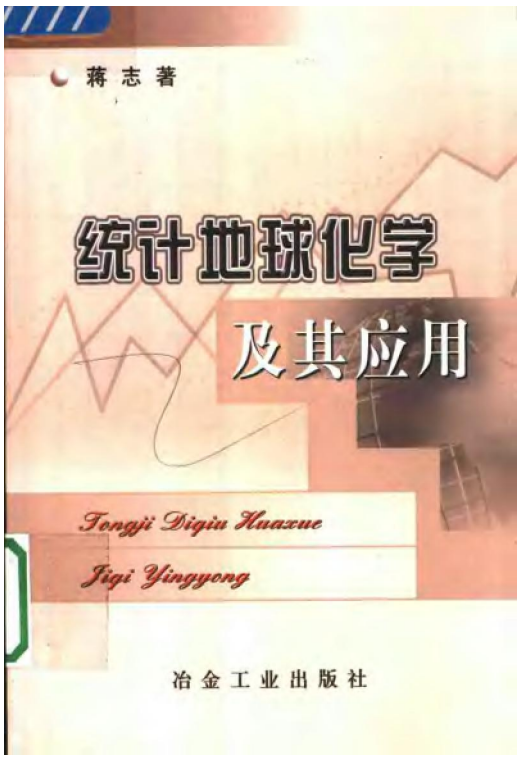

蒋志著
统计地球化学
及其应用
Tongji Diqiu Huaxue
Jiqi Yingyong
冶金工业出版社


Tongji Dizhi Huaxue
Jigi Yingyong
ISBN 7-5024-3909-9
9 787502 439095 >
ISBN 7-5024-3909-9
TD·400 定价 15.00 元

统计地球化学及其应用

蒋　志　著

北　京
冶 金 工 业 出 版 社
2006

内 容 简 介

本书基本上是对地球化学在新方向上的理论发展，其出发点是原子在地质体中的随机运动，从而建立起地质体中化学元素转移概率方程，给出元素的空间分布公式、元素含量分布公式和元素聚集量分布公式；同时引入发现原理，建立发现过程，从而使发现这个主客观耦合过程成为理论的一个有机组成部分。这些理论构成使得统计地球化学有了种种应用。

本书既可以供从事地球化学的研究者参考，也可供地球化学专业的研究生和高年级的本科生参考，更可供从事矿产勘查的地球化学工作者参考。

图书在版编目（CIP）数据

统计地球化学及其应用/蒋志著．　北京：冶金工业出版社，2006.2

ISBN 7-5024-3909-9

Ⅰ.统…　Ⅱ.蒋…　Ⅲ.地球化学：统计学--研究　Ⅳ.P59-32

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 002815 号

出版人　曹胜利（北京沙滩嵩祝院北巷 39 号，邮编 100009）
责任编辑　于之光　美术编辑　李　心
责任校对　白　迅　李文彦　责任印制　牛晓波
北京兴华印刷厂印刷；冶金工业出版社发行；各地新华书店经销
2006 年 2 月第 1 版，2006 年 2 月第 1 次印刷
850mm×1168mm　1/32；3.75 印张；100 千字；109 页；1　2000 册
15.00 元
冶金工业出版社发行部　电话：（010）64044283　传真：（010）64027893
冶金书店　地址：北京东四西大街 46 号（100711）　电话：（010）65289081
（本社图书如有印装质量问题，本社发行部负责退换）

前　言

2005年的春天，笔者先是在中国科学院研究生院为研究生们开了这门课，并且是世界上首次开这门课。然后笔者又应邀去吉林大学地球科学学院做了一周的同样内容的讲学，对象也是研究生。最近，中国科学院研究生院又通知我，要我继续讲授这一课程。因此，在黄金指挥部领导和黄金地质研究所的支持下，决定出版这本讲义，既便于教，也便于学，又便于理论上展开讨论。

作为一个新学科，本书是笔者约三分之一世纪的心血结晶。所以这样说，是因为本书最初的思想萌芽可以远推到笔者大学四年级第二学期的时候。那是1963年的初春，在中国科学技术大学地球化学系的一个自习室里，我们班级的一些同学出了一期墙报，专门讨论地球化学的未来。

学生自然是梦如春云，聚散不定，飘忽无踪，各说其是，杂言纷呈，主要是对地球化学现状的不满。起因大约有两个，一是无知，二是知之太多。

所谓无知，是由地球化学这门学科的特点决定的。课堂上可能只学到了它的一小部分内容，它的一大部分内容是要到野外的实际中去学。误把局部当全体，自然要自以为是地发许多无知的议论。

所谓知之太多，是由当时的学校环境决定的。当时的中国科学技术大学，有十几个系，专业分得很细，却都是当时的所谓尖端科学，地球化学当然也是当时的尖端科学。为我们授课的又大都是当时中国的顶尖科学家，国际上也很有名，如为我们讲授分析化学的就是当时的科学院学部委员（即今天的科学院院士）梁树权先生，当时国际原子量表中铁的原子量，就是用他的测定值。不要说给地球化学专业上分析化学课，就是给分析化学专业上分析化学课，他也是顶级的」

学了一知半解，就敢纵论天下，还以为识穷天下，实在有些不自量力。而我也滥竽其中，并且同样狂妄，写了一篇文章，想用一个方程描写地球中原子的运动。

谁知这样一次看似青春期躁动的活动，却产生了影响，25年后，在澳大利亚墨尔本的一次学术会上，一位女士向我走来，问我认识老同学不？我确实不认得，但怎敢当面说不认识老同学呢！就睁大了近视眼，看她会议证上的名字："啊！您是周家馨"。其实我是按拼音念出来的，周家馨是谁我也不知道。她大概也看出问题来了，就主动地说他们念一年级的时候，看到我们四年级出的墙报，纵论地球化学，印象深极了。

我当然记得，亏她还记得这样牢！

说实在的话，快毕业的四年级学生对入学不久的一年级学生，当时就不曾认得过，几十年后就更无从认起。可是，不久后在北京的一次学术会上，他们年级的孙宝田又跟我谈起了我们班的那次墙报。可见，那次墙报给人的印象是如何的深！

在一定意义上讲，本书也只不过是用一套方程描写地球中的原子运动。差别只在于，四十多年前，墙报上我的文章只是一种哲学猜想；四十多年后，本书则是一个已成熟的新问题，如此而已。

本书的最大特点是从运动学的角度理解地球化学过程，并毫不犹豫地使用数学方法。这里，想就这两点说几句话。

首先，本书侧重地球化学的运动学。

初一听，谁不知道地球化学讲地球中的原子运动，还用你来吹成一个新学科么！确实，世界上的确也没有不讲原子运动的地球化学工作。其实不然，我们的着眼点不在于讲不讲原子运动，而在于怎样讲原子运动、是原则地讲还是具体地讲原子运动。

从原则上讲原子的地球化学运动的文章非常多，但是，从具体上讲原子的地球化学运动的文章则非常稀少，就像凤毛麟角那样难逢难见。问题出在哪里呢？显然出在目前地球化学研究的理论基础和前提上。众所周知，地球化学的理论基础是热力学和物理化学。而热力学和物理化学过程是在坛坛罐罐中进行的，最讲究的是反应条件而不是反应路径。因为时间和空间已被坛坛罐罐

规定好了，变化的只是温度、压力、组分浓度、氧逸度、酸碱度和氧化还原电位等。这在岩石地球化学、化学地球动力学以及只管原子运动条件的那部分矿床地球化学研究中，自是举足轻重，成果丰富。但对勘查地球化学和环境地球化学的大量观测，以及关注原子运动路径的那部分矿床地球化学研究中，关于原子原则运动的论述就显得苍白无力，无足轻重了。而在这几个方面，却有着无与伦比丰富的观测资料，正等待着理论去挖掘！

其次，关于毫不犹豫地使用数学方法问题。

不仅是地球化学，几乎是所有的地学，以观察描述为主的传统太强烈了，以至于在这个领域中的工作者，虽大都具备了大学理工科本科的数学训练，却仍把在自己工作中应用数学方法视为畏途，更不要说毫不犹豫地使用数学方法了！

其实，任何一门学科都有两件事要做：一是形成概念，二是建立联系。近代辩证法大师黑格尔，专门研究了概念的形成和发展，形成了他自己的逻辑学，有人称其为辩证逻辑。古代哲学大师亚里士多德，专门研究了概念之间的联系，形成了现今通用的逻辑学，就是所说的形式逻辑。

概念的形成和变化，概念之间联系的形成，没有什么妙招，只有实践论中指出的在实践中形成的一条途径。但概念之间的联系方式却有两种。一是概念之间直接的形式逻辑联系，实际上是质的联系。二是概念之间形式逻辑联系的变形——数学联系，实际上是量上的联系。

前一种联系是任何认识都躲不开的，没有这种联系就形不成为认识。后一种联系有时却是可以躲开的，当然也就失去了联系的精确性。一门学问要想具有相当的精确性，就要尽可能地寻求概念之间的数学联系，除非所论的概念之间不可能有这种联系。已经有条件寻求这种联系而不去寻求，其实是一种懒汉，却搪塞说不可能有这种联系。

应当指出的是，科学家用的数学和数学家研究的数学是有区别的。

科学家是在他的研究中发现数学，提出并不一定能解决的数学问题。数学家用他的假设研究数学，提出并解决数学问题。例

如，牛顿作为物理学家，提出了质点运动的数学表述问题；作为数学家，他发现了微积分，解决了质点运动的数学表述问题。在数学家那里，有各种各样想像出来的微分方程等待解决或已经解决。在科学家那里，可能多年的工作才发现了一个方程，这个方程是真实过程的描写，不是头脑里的想像，既可能是数学家早已解决了的老问题，也可能是令数学家也挠头的新问题，更可能是数学家一时也解决不了的难题。

也就是说，科学家是在自己的工作中发现数学关系。如何处理这种数学关系，可以是自己的任务，自己变成数学家去想办法解决；也可以是数学家的任务，干脆提给数学家去想办法解决。这种问题有时甚至简单到只是查一查已有的数学表，因为数学家早已做了大量的想像中的工作，可以供我们应用。

所以，科学家面对的数学问题，不是处理数学问题的能力和技巧，而是在自己的工作中发现数学关系，或是用数学方法描述自己的科学发现。这个工作是数学家代替不了的，是在事实和数学之间寻求实在的关系，不是在数学关系之间进行繁复的推导。数学的难度不是很大，倒是要学会用数理的方式进行思维，特别是要善于发现事物之间的微分联系。因为微分联系比积分联系更具有广泛性。

最后，在这里感谢在本书形成和出版过程中所有给予帮助的朋友们！

作　者

2005 年 12 月

冶金工业出版社部分图书推荐

书　　名	定价（元）
海相火山岩与金属矿床	49.00
非金属矿加工技术与应用手册	119.00
岩石受力的红外辐射效应	19.00
无机与有机地球化学勘查技术方法研究与应用	49.00
金矿床成因、勘探与贵金属回收	32.00
锰的微生物地球化学	11.50
扬子地台周边锰矿	70.00
内生金属矿床聚矿研究	24.50
矿床无废开采的规划与评价	14.50
矿业经济学	15.00
矿物资源与西部大开发	38.00
成矿区带地球化学异常评价方法	9.80
胶东招莱地区花岗岩与金矿床	28.00
脉状金矿床深部大比例尺统计预测理论与应用	38.00
矿石学基础	32.00
矿山生态复垦与露天地下联合开采	20.00
岩石动力学特性与爆破理论	20.00
金属矿山尾矿综合利用与资源化	16.00
中国非金属矿开发与利用	49.00
选矿知识问答（第2版）	22.00
碎矿与磨矿	28.00
21世纪初期我国油气资源领域科技发展战略研究	30.00
国外伴生金银矿山	45.00
选矿概论	12.00
矿业权估价理论与方法	19.00

目　录

1　引论 …… 1

1.1　数理思维方式 …… 1
1.2　地球化学的能量背景 …… 2
1.3　地球化学的动力学背景 …… 4
1.3.1　相对论的推论 …… 4
1.3.2　统计力学新原理 …… 4
1.3.3　地球化学中的动力学背景 …… 5
1.4　地球化学的运动学背景 …… 5
1.4.1　地球化学中运动学问题的重要性 …… 5
1.4.2　粒子和光子的相互作用 …… 6
1.4.3　粒子和光子的布朗运动 …… 6
1.4.4　统计地球化学 …… 6

2　理论 …… 8

2.1　地质体中元素转移概率方程 …… 8
2.1.1　随机运动机制 …… 8
2.1.2　元素转移概率方程——柯尔莫戈罗夫方程 …… 11
2.2　地质体中元素空间分布公式 …… 18
2.3　地质体中元素含量分布公式 …… 19
2.3.1　地球化学测量中的不确定性关系 …… 20
2.3.2　地球化学采样模型 …… 21
2.3.3　样品元素含量分布 …… 23
2.4　资源量/储量分布公式 …… 29
2.5　矿床发现过程 …… 30

3　应用 …… 32

3.1　地质矿床研究 …… 32

3.1.1 同一地质体中元素空间分布…… 32
3.1.2 接触带上元素空间分布…… 32
3.1.3 脉状矿化元素空间分布…… 33
3.1.4 面状矿化元素空间分布…… 35
3.1.5 典型的元素空间分布…… 37
3.1.6 稳定的元素空间分布…… 37
3.1.7 成矿过程模型…… 39
3.1.8 吸积成矿模式…… 42
3.1.9 矿卷成矿模式…… 42
3.1.10 成矿元素比值关系 …… 44
3.1.11 比值的空间变化 …… 46
3.1.12 回归系数的空间变化 …… 48
3.1.13 原生晕的位置判别 …… 49
3.1.14 元素对含量比值的分布 …… 50
3.1.15 矿体长宽厚的分布 …… 51
3.2 矿产勘查布局…… 52
3.2.1 品位-吨位关系 …… 52
3.2.2 矿床规模的统计划分…… 53
3.2.3 区域矿化率公式…… 54
3.2.4 区域成矿率公式…… 55
3.2.5 勘查成本与成矿能力的关系…… 55
3.2.6 矿床发现时间阶段 …… 56
3.2.7 矿产地发现和资源量发现…… 56
3.3 异常判别和解释…… 59
3.3.1 异常下界…… 59
3.3.2 异常滤波…… 60
3.3.3 异常反演…… 61
3.3.4 根据负异常推测成矿规模…… 61
3.3.5 反射壁条件下的晕函数…… 62
3.3.6 吸收壁条件下的晕函数…… 63
3.3.7 吸收-反射壁条件下的晕函数 …… 63
3.3.8 矿化率填图方法…… 64

3.4 勘查工程选择…… 66
3.4.1 采样不确定关系…… 66
3.4.2 分样的切乔特公式…… 67
3.4.3 工程孔径公式…… 67
3.4.4 工程网度的判别…… 68
3.4.5 工程网度的预测…… 69
3.4.6 网度控矿率公式…… 71
3.5 资源量/储量估计 …… 73
3.5.1 品位平均值公式…… 73
3.5.2 品位变异度计算…… 74
3.5.3 理论变异函数…… 74
3.5.4 广义克立格方程…… 75
3.6 资源量/储量评价 …… 75
3.6.1 资源量/储量与边界品位关系的统计公式 …… 75
3.6.2 资源量/储量与边界品位关系的积分公式 …… 78
3.6.3 利润函数…… 80
3.6.4 工业指标优化方法…… 82
3.6.5 品位系数与矿物颗粒度的理论关系…… 83

4 结束语…… 85

4.1 方程参数问题…… 85
4.2 同位素分馏问题…… 85
4.3 环境地球化学问题…… 85

附 录 …… 86

附录 1 斯特林公式及其近似式 …… 86
附录 2 平均值计算与值的分布 …… 87
附录 3 2^n 统计格与正态分布反函数的应用 …… 93
附录 4 经验分布函数的统计离析 …… 95
附录 5 正态分布的中心距 …… 96
附录 6 对数正态分布的原点距 …… 97
附录 7 多项式系数和 …… 97

附录 8　概率积分 Φ（x）表 …… 98
附录 9　概率积分反函数 x（Φ）表 …… 101
附录 10　欧拉积分 $F(x)=\int_0^x r^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-r}\mathrm{d}r$ 表 …… 104
参考文献 …… 107

1 引　论

1.1 数理思维方式

类比思维方式在地学中居统治地位，原因是地学是在现在时空观测过去的时空陈迹，中间缺失了时空的连续性，也就缺失了严格的逻辑联系，不得不用类比。有严格逻辑联系的工作，能够包含时空缺失阶段的工作，如同位素等时线年龄公式，就又可以有严格的逻辑联系。因为其中含有时间积分，细节虽然不得而知，总效应却是显而易见的。

数理思维方式在数理科学中居统治地位，有严格的用数学表示的逻辑联系。原因是事件时空与观测时空基本上是重合的，即使是天文学，也因为由光信号联系，而基本上没有时空缺失。

数理科学中也不是没有类比思维，如陈念贻的量子力学隐参数，是人们对所面对的事物还不认识，或认识不深刻。

因此，要想在地学中用数理思维方式的关键是，找到像等时线法那样包含缺失时空的理论表述，或者说对现在现象的描述，应当含有对地质历史的累积。对地质历史累积的最简单表述，是对时间的积分。因此，在地学中应用数理思维方式的任务是，寻找在对地质现象描述中包含时间积分的表述。

实际上，我们观测到的地质现象，都是地质历史的累积。地质历史的累积，就是地质历史的时间积分。

由于观测都是具体的，必然包含环境特点、初始特点和边界特点。因此，要追求略去这些特点的一般表示——微分表示。

对应用来说，写出方程不是数学家的任务，是具体观测实验的科学家的任务，是观测和试验结果的数学表述，表述的是在不同变量之间所发现的数学关系。

具有数学思维素质，不一定具有数学技巧。爱因斯坦写出

了引力方程，却是别人给出了解；海森堡写出了矩阵方程，却不明白那就是矩阵方程；只有牛顿写出了又解出了力学方程。看你学谁？统计地球化学不是数学地质，譬如对热的观察，用数学方法处理数据是第一个阶段；根据经验关系建立热力学是第二个阶段；用统计力学解释热力学是第三个阶段。统计地球化学不是数学地质，对地质体中原子时空运动来讲，数据处理相当第一个阶段；数学模型相当第二个阶段；统计地球化学相当第三个阶段。

1.2 地球化学的能量背景

地球中的主要能量是引力能和热能。引力能随时间变化，要用到爱因斯坦方程或其近似——达朗伯方程。热能中随时间变化的部分，主要是放射性元素的核转变能。我们是用爱因斯坦方程的近似式——达朗伯方程描写地球，并将时间变量改写为放射能积累散逸的时间积分——波数。

第一个假设：引力位和密度有同样的波数变化。因此把达朗伯方程变为空间方程和波数方程。并从波数方程得到地球脉动解。

第二个假设：脉动频率因积存能变化而变化，应与地球的总辐射能成正比；而地球的总辐射能与地球温度的四次方成正比；地球温度又与地球积存能成正比；从而得到地球脉动频数公式。

应用地球脉动波数公式，解释了陆壳生长过程，建立了理论地质年表。

第三个假设：引力位和密度有同样的经度和纬度变化。则前述空间方程变为三个方程：径向方程、经向方程和纬向方程。用后两个方程可得到地球经纬方向上的球谐函数表示。

第四个假设：固体地球外的质量密度近似为0。得到地球表面引力位解，从而得到大地重力测量的基本公式。

第五个假设：根据地内密度特点，地心密度与引力位比值趋于无穷；地表以外密度与引力位比值趋于零，有地内密度与引力位比值与地心距成反比。从而得到地内引力位的如下解

答[1,2]：

$$U=\frac{GM}{r_0}\sum_{n=1}^{n_r}\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{m=0}^{l}\sum_{j=0}^{\infty}A_j\left(\frac{r}{r_0}\right)R_n^l(r)Y_l^m(\theta,\phi)\times$$
$$\exp\left[ij\left(\zeta(t)-\frac{2r_0}{na_0}\right)\right] \qquad (1\text{-}1)$$

式中，G 为引力常数；M 为地球质量；r_0 为地球既不膨胀也不收缩时的平均半径；θ 为地球的纬度；ϕ 为地球的经度；r 为地心距；t 为时间；a_0 为地球半径的十五分之一；Y_l^m（θ，ϕ）为通常的球谐函数；n 为正整数；i 为虚数单位；R_n^l（r）和 ζ（t）分别为如下径向引力位解和地球脉动波数：

$$R_n^l(r)=\left(\frac{2r_0}{na_0}\right)^l\left(\frac{r}{r_0}\right)^l\exp\left(-\frac{r-r_0}{na_0}\right)\sum_{i=0}^{n-l-1}\alpha_i\left(-\frac{2r}{na_0}\right)^i$$
$$\alpha_i=(-1)^i\frac{(n-l-1)!(2l+1)!}{i!(n-l-1-i)!(2l+1+i)!}\alpha_0 \qquad (1\text{-}2)$$

和

$$\zeta(t)=2\pi k_0\int_{t_0}^{t}\left[B\exp(-kt')-\sum_{i=1}^{4}\frac{\beta_i}{\lambda_i-k}\exp(-\lambda_i t')\right]^5 dt'+2\pi\eta_0 \qquad (1\text{-}3)$$

式（1-3）中的常数数值表如下：

序号 i	长寿期放射性同位素	衰变常数 λ_i Ga^{-1}	现在地球产能比率 β_i
1	^{235}U	0.984850	0.0137
2	^{238}U	0.155125	0.3977
3	^{232}Th	0.049475	0.4324
4	^{40}K	0.496200	0.1562

参数：$k_0=0.0002475\ Ga^{-6}$；$\eta_0=-5.02897$；$B=7.17617Ga$。

地球散能常数 $k=0.105134Ga^{-1}$。

地内引力位解的特点是，时间上为脉动解；经纬方向上为球谐函数解；径向上不同圈层有整数平方关系，并有不同的脉动位相。

解的地质意义：地球脉动和理论地质年表；圈层界限地心距

的整数平方减一定律；地史上地球自转公式；古温度变化公式；古陆生长和演化模式；核幔差异旋转与理论地磁极性年表；地震平均周期与地球高频脉动；地壳演化八重态模式；成矿幕和成矿域；中国的大地构造和成矿的主要特点[2]。

1.3 地球化学的动力学背景

1.3.1 相对论的推论

根据相对论，经典质量 m_0 可称为静质量，电磁质量 m_1 可称为动质量，质量 m 是这二者之和，即

$$m = m_0 + m_1,\ m_1 = m - m_0 \tag{1-4}$$

同时有

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}},\ \beta = \frac{u}{c} \tag{1-5}$$

以及

$$\begin{aligned} E &= E_0 + T,\ E = mc^2 \\ E_0 &= m_0c^2,\ T = m_1c^2 \end{aligned} \tag{1-6}$$

说明粒子运动能量 E 是两种能量之和：静能 E_0 和电磁能或动能 T 之和。或者说，粒子运动的本质是动质量负载静质量运动，或静质量搭乘动质量运动[3]。

这是个很重要的结论，特别是当普朗克的能量子说和爱因斯坦的光子说都被证实后，这个结论既蕴含着统计力学的新原理，也蕴含着粒子和光子的布朗运动[3]。

1.3.2 统计力学新原理

迄今为止的统计力学，其基本原理是所谓粒子的能级遍历原理。这个原理是说，粒子只有经历了所有的能级，才能占有应占

有的能级。这是个漏洞百出的原理，粒子为什么要经历了所有的能级后才能占有应占有的能级？

统计力学中还有一个并不明晰却广泛应用的概念——能源或无限大热源。其实所要用的概念只是无限大特性，以保证热力学过程在平衡或准平衡条件下进行。

换一个角度看问题[3]，既然光子负载粒子运动，那么，光子的能级分布就是能源的能级分布，粒子无非是搭乘某个能级上的光子而同时占有其热力学几率罢了。根据普朗克的发现或玻色的统计，供粒子搭载的光子具有各种各样的能级并以一定的几率存在。或者说，不是粒子的能级遍历，而是光子的能级遍在。这显然是一个统计力学新原理。

问题只剩下粒子搭乘光子的方式了。不搭乘或只能搭乘一个光子的粒子，是费米子，服从费米-狄拉克统计；不搭乘或能搭乘任意个光子的粒子，是玻色子，服从玻色-爱因斯坦统计；不搭乘或搭乘能级连续的任意个光子的粒子，是经典子，服从麦克斯韦-玻耳兹曼统计。

1.3.3 地球化学中的动力学背景

用统计力学可以写出热力学基本方程，从而给出热力学的一切结论，也就给出了目前地球化学研究的理论前提之一。

在这个前提指导下的研究，侧重在地球化学中的能量状态，如温度、压力、组分浓度、酸碱度、氧化-还原电位、氧逸度，等等，这其实研究的都是地球中粒子的动力学。由于这样的研究在目前地球化学理论研究中居于重要地位，因此我们认为这是地球化学研究中的动力学背景。

1.4 地球化学的运动学背景

1.4.1 地球化学中运动学问题的重要性

从热机、试管、烧杯和反应釜中发展出的热力学，侧重于动

力学研究是理所当然的。因为时间和空间都被规定好了，变化的只是能量状态。地球中的化学却不这样简单，以人做标尺，任何热机、试管、烧杯和反应釜的大小都不能和地球的大小相比较。因此，研究地球中的化学，除了要注意它的动力学方面外，还要注意它的时间-空间特性，也就是说要注意它的运动学问题。这不但是这门学科所要求的，还是矿产勘查所必需的。

1.4.2 粒子和光子的相互作用

既然光子负载粒子运动或粒子搭乘光子运动，就必然存在着如何负载或如何搭乘的问题。众所周知，粒子吸收光子而获得能量，发射光子而失去能量。显然，粒子吸收光子和发射光子的方向都是不确定的，粒子从吸收到发射光子的弛豫时间也是不确定的，粒子吸收和发射光子时产生的反冲也是不确定的，粒子吸收或发射光子的两次反冲之间的自由程更是不确定的。粒子和光子之间的作用与反作用，使得光子也具有了与粒子同样的运动特点[3]。

1.4.3 粒子和光子的布朗运动

粒子和光子相互作用所产生的运动，带有共同的特色：时间、方向、速度和自由程长短都不确定。这是一种与牛顿运动不同的布朗运动。对这种运动，虽然不能精确地描写其路径，却可以给出运动质点在不同时空部位出现的概率。描写这个过程所用的方程是柯尔莫戈罗夫方程，对于光子来说，是能量的扩散问题，这个方程就被称为热传导方程；对于粒子来说，是物质的扩散问题，这个方程又被称为物质扩散方程[3]。

1.4.4 统计地球化学

作为粒子运动的特例，地球中的化学元素运动也遵从柯尔莫戈罗夫方程。研究地球中的化学元素运动，是地球化学中早就确定的方向，并且在勘查地球化学和环境地球化学中有了大量的实

践，但在理论上认真描写其时空运动特点，还很少进行。统计地球化学就是想认真做这件事。统计二字，主要不表示数据处理方法，主要表示的是地球化学过程中的随机运动机制[4]，如果说统计力学表述的是动力学上的随机机制，那么，统计地球化学表述的则是运动学上的随机机制。柯尔莫戈罗夫方程也就变成了地质体中元素转移概率方程[3]。

2 理　论

2.1 地质体中元素转移概率方程

2.1.1 随机运动机制

物体中粒子的前述行为，使我们想起了布朗（Robert Brown，1773～1858）发现的水中花粉的运动。1827 年，布朗发现水中花粉不停地、无规则地作折线运动，50 年后才有人认为是花粉受介质中分子的不平衡碰撞引起的，78 年后爱因斯坦才从理论上给出了解释，并用来推定分子的大小。爱因斯坦的结果是粒子随机位移的方差与时间成正比：

$$\sqrt{\overline{\Delta x^2}} = \sqrt{t}\sqrt{\frac{RT}{N}\frac{1}{3\pi kP}} \tag{2-1}$$

式中，Δx 为粒子位移；R 为绝对气体常数；T 为绝对温度；N 为阿伏加德罗常数；P 为粒子半径；k 为粒子摩擦系数；t 为观测时间。以后是数学上对这个问题的探讨[5]：1921 年维纳（Norbert Wiener，1894～1964）提出维纳过程；1931 年柯尔莫戈罗夫（Андрей Николаевич Колмогоров，1903～?）发表柯尔莫戈罗夫方程；1946 年伊藤清建立随机微分方程和随机积分方程。

维纳过程又称为维纳的布朗运动，是个时间过程，用 $B(t)$ 表示时，它有两个基本性质：

$$\begin{aligned} &E[B(t)-B(t_0)]=0 \\ &E\{[B(t)-B(t_0)]^2\}=t-t_0,\ t>t_0 \end{aligned} \tag{2-2}$$

上式表明，维纳过程不同时间的差值的平均值为零；差值平方的平均值等于时间差。利用这个过程描写粒子的布朗运动时，可将微小位移写为下式：

$$\mathrm{d}x = a\mathrm{d}t + b\mathrm{d}B \tag{2-3}$$

式（2-3）中，a 为粒子的平均位移速度；b 的意义大体相当于单位时间内粒子位移的均方根差；dt 是微小时间差；dB 是上述维纳过程的微分表示。式（2-3）又被称为随机微分方程[5]。

从式（2-3）看，其右端第一项就是经典力学中的位移；第二项显示的是叠加在经典位移上的随机运动项。应指出的是，从式（2-2）看，第二项有如下特点：

$$E[\int b\mathrm{d}B] = 0$$
$$E[\int b\mathrm{d}B]^2 = \int b^2\mathrm{d}t \tag{2-4}$$

从式（2-3）出发，可得如下随机积分方程[5]

$$x = \{x_0\} + \int a\mathrm{d}t + \int b\mathrm{d}B \tag{2-5}$$

式中，$\{x_0\}$ 为粒子的初始位置集合。

用式（2-3）或式（2-5）描写粒子的随机运动行为是很直观的，但要用这两个公式具体描写粒子的随机运动行为又是不可能的。至多，只能给出一定时刻粒子在空间中的分布概率，并将涉及较复杂的数学工具。

下面我们先给出一个简单的直观模型[6,7]，以理解这个过程的物理意义。

在一维空间中，一个随机运动的粒子就像一个醉汉在毫无目的地前进和后退。设在一定的时间内，粒子共移动了 m 次：向前移动了 m_1 次，向后移动了 m_2 次，因此有

$$m = m_1 + m_2 \tag{2-6}$$

还可以用离开平均步数 $m/2$ 的步数 m_0 表示：

$$m_1 = \frac{m}{2} + m_0,\ m_2 = \frac{m}{2} - m_0 \tag{2-7}$$

由于运动是随机的，前进和后退的步数不确定，可能有的移动方式数 M 及其总数分别为下式：

$$M = \frac{m!}{m_1!m_2!} = \frac{m!}{(m/2+m_0)!(m/2-m_0)!}$$
$$\sum_{m_1=0}^{m} M = 2^m \tag{2-8}$$

则可能有的移动方式数占总数的比率 $f(m_0)$ 为

$$f(m_0)=\frac{M}{2^m} \tag{2-9}$$

考虑斯特林公式

$$s!\approx\sqrt{2\pi s}\left(\frac{s}{e}\right)^s \tag{2-10}$$

则有

$$f(m_0)=\sqrt{\frac{2}{\pi m}}\left(1-\frac{2m_0}{m}\right)^{-m/2+m_0+1/2}\left(1+\frac{2m_0}{m}\right)^{-m/2-m_0-1/2} \tag{2-11}$$

在 $m_0=0$ 附近展开，可得

$$f(m_0)\Delta m_0=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp\left(-\frac{2m_0^2}{m}\right)\frac{\Delta m_0}{\sqrt{m}} \tag{2-12}$$

设粒子每次向前位移 l_1，每次向后位移 l_2，则从 x_0 到 x_1 的 m 次位移离开原点的距离是

$$x-x_0=m_1l_1-m_2l_2=\frac{m}{2}(l_1-l_2)+m_0(l_1+l_2) \tag{2-13}$$

如果单位时间内粒子的位移次数为 k，即时刻 t_0 到时刻 t 的时间内位移次数 m 为

$$m=k(t-t_0) \tag{2-14}$$

因此，粒子的平均速度 a 和单位时间的方差增量 b^2 为下式

$$a=k\left(\frac{l_1-l_2}{2}\right),\ b^2=k\left(\frac{l_1+l_2}{2}\right)^2 \tag{2-15}$$

则由式（2-12）～式（2-15）可得

$$\begin{aligned}f&=f(t_0,x_0;t,x)\\&=\frac{1}{b\sqrt{2\pi(t-t_0)}}\exp\left\{-\frac{[x-x_0-a(t-t_0)]^2}{2b^2(t-t_0)}\right\}\end{aligned} \tag{2-16}$$

这就是时刻 t_0 位于 x_0 的粒子时刻 t 时随机运动到 x 的转移概率密度函数（图 2-1 和图 2-2）。这个转移概率密度函数不但在许多情形下成立，而且可以通过求偏导数的方法给出柯尔莫戈罗夫方程。当然，这不是严格的方法。

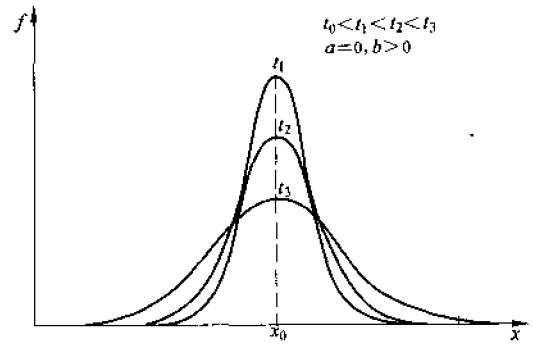


图 2-1　$a=0$ 的元素转移概率密度[7]

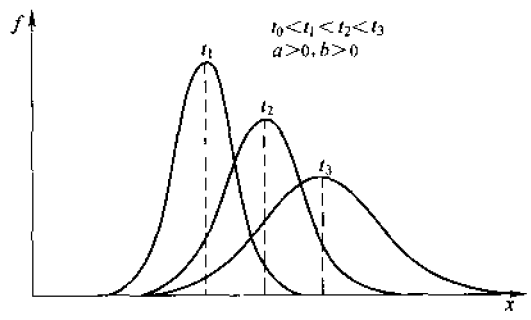


图 2-2　$a\neq 0$ 的元素转移概率密度[7]

2.1.2　元素转移概率方程——柯尔莫戈罗夫方程

可以证明，在所谓李卜西兹（Rudolph Otto Sigismund Lipschitz，1832～1903）条件下，式（2-3）和式（2-5）所描写的粒子运动其在时空上的分布概率密度 $f=f(t_0, x_0; t, x)$ 将遵从柯尔莫戈罗夫方程。至于李卜西兹条件，无非是对粒子随机运动的条件所做的抽象描写。如粒子没有记忆，其运动速度具有有限性，其分布函数具有连续性等。

现在，我们根据粒子随机运动的一般特点，给出柯尔莫戈罗夫方程。为了更易于理解，我们用的是柯尔莫戈罗夫最初的方

法[8,9]。

由于运动虽是随机的，却是连续的，时刻 t 时粒子的位置可以是空间的任何位置 x（t），则 t_0 时位于 x_0 的粒子在 t（$t>t_0$）时位于 x 以内的转移概率和转移概率密度分别为：

$$\begin{aligned} F &= F(t_0,x_0;t,x) = P\{x(t)<x \mid x(t_0)=x_0\} \\ f &= f(t_0,x_0;,t,x) = \frac{\partial}{\partial x}F(t_0,x_0;t,x) \end{aligned} \tag{2-17}$$

因此有，

$$F = F(t_0,x_0;t,x) = \int_{-\infty}^{x} f(t_0,x_0;t,x')\mathrm{d}x' \tag{2-18}$$

式（2-18）显然有两个重要性质：

$$\lim_{x\to\infty}F = 1,\ \lim_{x\to-\infty}F = 0 \tag{2-19}$$

由于粒子没有记忆，即存在着如下的马尔科夫性：

$$\begin{aligned} F(t_0,x_0;t,x) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(t',x';t,x)\mathrm{d}_{x'}F(t_0,x_0;t',x') \\ f(t_0,x_0;t,x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t',x';t,x)f(t_0,x_0;t',x')\mathrm{d}x' \end{aligned} \tag{2-20}$$

由于在有限的时间内，粒子都不会运动到无穷远。因此有如下连续性条件：

$$\lim_{t\to t_0+0}F = \lim_{t_0\to t-0}F = \begin{cases} 0, x<x_0 \\ 1, x>x_0 \end{cases} \tag{2-21}$$

或即

$$\begin{aligned} &\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{|x-x_0|\geqslant\delta}\mathrm{d}_x F(t_0,x_0;t_0+\Delta t,x) \\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{|x-x_0|\geqslant\delta}\mathrm{d}_x F(t-\Delta t,x_0;t,x) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2-22}$$

因此，可给出粒子随机运动的平均速度 a（t，x）和单位时间位移方差的增量 b^2（t，x）的公式

$$a = a(t,x) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|x - x_0| < \delta} (x - x_0) \mathrm{d}_x F(t_0, x_0; t_0 + \Delta t, x)$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|x - x_0| < \delta} (x - x_0) \mathrm{d}_x F(t - \Delta t, x_0; t, x) \tag{2-23}$$

$$b^2 = b^2(t,x) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|x - x_0| < \delta} (x - x_0)^2 \mathrm{d}_x F(t_0, x_0; t_0 + \Delta t, x)$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|x - x_0| < \delta} (x - x_0)^2 \mathrm{d}_x F(t - \Delta t, x_0; t, x)$$

此外，粒子的转移概率函数应是连续的，至少，它们的二阶及二阶以下偏导数是连续的。根据以上条件，我们来建立柯尔莫戈罗夫方程[24]：

首先是后顾方程。所谓后顾方程，就是求以 t_0，x_0 为变量的方程，因为这类变量是描写光子或粒子初始状态的。

根据式（2-20）得

$$F(t_0 - \Delta t_0, x_0; t, x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(t_0, x'; t, x) \mathrm{d}_{x'} F(t_0 - \Delta t_0, x_0; t_0, x') \tag{2-24}$$

类似有

$$F(t_0, x_0; t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t_0, x_0; t, x) \mathrm{d}_{x'} F(t_0 - \Delta t_0, x_0; t_0, x') \tag{2-25}$$

根据泰勒公式有

$$F(t_0, x'; t, x) - F(t_0, x_0; t, x)$$

$$= (x' - x_0) \frac{\partial F}{\partial x_0} + \frac{1}{2}(x' - x_0)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2} + o[(x' - x_0)^2] \tag{2-26}$$

根据式（2-24）～式（2-26）有

$$\frac{\partial F}{\partial t_0} = - \lim_{\Delta t_0 \to 0} \frac{1}{\Delta t_0} [F(t_0 - \Delta t_0, x_0; t, x) - F(t_0, x_0; t, x)]$$

$$
\begin{aligned}
=&-\lim_{\Delta t_0\to 0}\frac{1}{\Delta t_0}\int_{-\infty}^{\infty}[F(t_0,x';t,x)-F(t_0,x_0;t,x)]\\
&\mathrm{d}_{x'}F(t_0-\Delta t_0,x_0;t_0,x')\\
=&-\left[\lim_{\Delta t_0\to 0}\frac{1}{\Delta t_0}\int_{-\infty}^{\infty}(x'-x_0)\mathrm{d}_{x'}F(t_0-\Delta t_0,x_0;t_0,x')\right]\frac{\partial F}{\partial x_0}\\
&-\left[\lim_{\Delta t_0\to 0}\frac{1}{\Delta t_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x'-x_0)^2}{2}\mathrm{d}_{x'}F(t_0-\Delta t_0,x_0;t_0,x')\right]\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2}\\
&-\lim_{\Delta t_0\to 0}\frac{1}{\Delta t_0}\int_{-\infty}^{\infty}o[(x'-x_0)^2]\mathrm{d}_{x'}F(t_0-\Delta t_0,x_0;t_0,x')
\end{aligned}
\tag{2-27}
$$

把式（2-23）代入上式，并考虑上式第三项可做零看，则

$$
\frac{\partial F}{\partial t_0}=-a\frac{\partial F}{\partial x_0}-\frac{b^2}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2} \tag{2-28}
$$

这就是后顾方程。对上式两端求关于 x_0 的偏导数，并考虑式（2-17），则有

$$
\frac{\partial f}{\partial t_0}=-a\frac{\partial f}{\partial x_0}-\frac{b^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} \tag{2-29}
$$

这是后顾方程的另一种形式。

其次，我们来建立前瞻方程。

根据式（2-20）有，

$$
f(t_0,x_0;t+\Delta t,x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t_0,x_0;t,x')f(t,x';t+\Delta t,x)\mathrm{d}x' \tag{2-30}
$$

引进函数：

$R(x),R'(x),R''(x)$ 存在并连续；

$R(x),R'(x),R''(x)=0$，当 $x\leqslant x_1,x\geqslant x_2,x_1<x_2$ 时 (2-31)

并有泰勒展开式

$$
\begin{aligned}
R(x')=&R(x)+(x'-x)R'(x)+\\
&\frac{1}{2}(x'-x)^2R''(x)+o[(x'-x)^2]
\end{aligned}
\tag{2-32}
$$

据式（2-22）有

$$\int_{|x'-x|\geqslant\delta} f(t,x;t+\Delta t,x')R(x')\mathrm{d}x' = o(\Delta t)$$
$$\int_{|x'-x|<\delta} f(t,x;t+\Delta t,x')\mathrm{d}x' = 1+o(\Delta t) \tag{2-33}$$

根据式（2-31）有

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial t}R(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f}{\partial t}R(x)\mathrm{d}x \tag{2-34}$$

式（2-34）中，

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0,x_0;t+\Delta t,x)-f(t_0,x_0;t,x)}{\Delta t} \tag{2-35}$$

把式（2-30）代入式（2-35），得

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{-\infty}^{\infty} f(t_0,x_0;t,x')f(t,x';t+\Delta t,x)\mathrm{d}x' - f \tag{2-36}$$

把式（2-36）代入式（2-34），得

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial t}R(x)\mathrm{d}x = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{-\infty}^{\infty} f(t_0,x_0;t,x')\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t,x';t+\Delta t,x)R(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x' - \int_{-\infty}^{\infty} fR(x)\mathrm{d}x \tag{2-37}$$

由于存在如下关系

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t_0,x_0;t,x')\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t,x';t+\Delta t,x)R(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x'$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t_0,x_0;t,x)\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t,x;t+\Delta t,x')R(x')\mathrm{d}x'\right]\mathrm{d}x \tag{2-38}$$

把式（2-38）代入式（2-37）得

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial t}R(x)\mathrm{d}x=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{-\infty}^{\infty}f\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t,x;t+\Delta t,x')R(x')\mathrm{d}x'-R(x)\right]\mathrm{d}x \tag{2-39}$$

由式（2-19）可知，

$$R(x)=\int_{\infty}^{\infty}f(t,x;t+\Delta t,x')R(x)\mathrm{d}x' \tag{2-40}$$

由式（2-23）可知

$$\begin{aligned}&\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{|x'-x|<\delta}(x'-x)R'(x)f(t,x;t+\Delta t,x')\mathrm{d}x'\\&\qquad=a(t,x)R'(x)\\&\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{|x'-x|<\delta}(x'-x)^2R''(x)f(t,x;t+\Delta t,x')\mathrm{d}x'\\&\qquad=b^2(t,x)R''(x)\end{aligned} \tag{2-41}$$

考虑式（2-31）～式（2-33）和式（2-40）、式（2-41），则式（2-39）变为

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial t}R(x)\mathrm{d}x&=\int_{-\infty}^{\infty}f\left[a(t,x)R'(x)+\frac{1}{2}b^2(t,x)R''(x)\right]\mathrm{d}x\\&=\int_{|x'-x|<\delta}f\left[a(t,x)R'(x)+\frac{1}{2}b^2(t,x)R''(x)\right]\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{2-42}$$

根据式（2-31），有

$$\begin{aligned}&fa(t,x)R(x)\Big|_{x_1}^{x_2}=0,fb^2(t,x)R'(x)\Big|_{x_1}^{x_2}=0\\&\frac{\partial[fb^2(t,x)]}{\partial x}R(x)\Big|_{x_1}^{x_2}=0\end{aligned} \tag{2-43}$$

根据式（2-43），用分部积分法，可得如下关系

$$\int_{x_1}^{x_2} fa(t,x)R'(x)\mathrm{d}x = -\int_{x_1}^{x_2} R(x)\frac{\partial[a(t,x)f]}{\partial x}\mathrm{d}x$$
$$\int_{x_1}^{x_2} fb^2(t,x)R''(x)\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} R(x)\frac{\partial^2[b^2(t,x)f]}{\partial x^2}\mathrm{d}x \tag{2-44}$$

把式（2-44）代入式（2-42），得

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial t}R(x)\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2}\left\{-\frac{\partial[a(t,x)f]}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2[b^2(t,x)f]}{\partial x^2}\right\}R(x)\mathrm{d}x \tag{2-45}$$

由于R（x）为任意函数，则由式（2-45）可得

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial(af)}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2(b^2 f)}{\partial x^2} \tag{2-46}$$

式（2-46）就是柯尔莫戈罗夫前瞻方程。从式（2-46）还可求得另一形式的方程

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{\partial[aF]}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2[b^2 F]}{\partial x^2} \tag{2-47}$$

综合本节的讨论，用概率密度函数表示的柯尔莫戈罗夫方程如下[7,10,11]：

一维空间中

$$\frac{\partial f}{\partial t_0} = -a\frac{\partial f}{\partial x_0}-\frac{b^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial(af)}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2(b^2 f)}{\partial x^2} \tag{2-48}$$

三维空间中

$$\frac{\partial f}{\partial t_0} = -\sum_{i=1}^{3}a_i\frac{\partial f}{\partial x_{i0}}-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\rho_{ij}b_i b_j\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i0}\partial x_{j0}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial(a_i f)}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial^2(\rho_{ij}b_i b_j f)}{\partial x_i\partial x_j} \tag{2-49}$$

式中，ρ_{ij}为x_i和x_j方向之间粒子位移的相关系数，有如下特点

$$\rho_{ii}=1,\ \rho_{ij}=\rho_{ji} \tag{2-50}$$

并构成如下相关系数矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{Bmatrix}1, & \rho_{12}, & \rho_{13}\\ \rho_{21}, & 1, & \rho_{23}\\ \rho_{31}, & \rho_{32}, & 1\end{Bmatrix} \tag{2-51}$$

2.2 地质体中元素空间分布公式

地质体中的物质微粒运动是物理学研究的空白区域。不过，这个空白区并不是没有人研究，但不是在物理领域研究，而是在矿床学、地球化学的领域研究。

地质体中的微粒，不大不小，主要是指地质体中物质运动的最小单位，如原子、分子、胶体粒子、矿物颗粒、岩石碎屑等。虽然我们见到它们时，它们可能是静止的，甚至被固结着。但在亿万斯年的地质过程中，它们却是在不停地、杂乱无章地运动着，就像我们在微微秒的时段内观看水中花粉时，花粉也几乎是静止的；可在日常的观察中，花粉却在做无规则的折线运动。物理学的观察往往着眼于宏观物体的运动、远处物体如天体的运动、实验室中微观粒子如原子、电子、质子的运动。只是不大关心不大不小但广泛存在于我们周围的地质体中的粒子。作者有幸研究这个问题，所得的结果正是前面关于物体中粒子随机运动的方程。或者说地质体中粒子运动正与物体中粒子随机运动相同，都像水中的花粉。

由于地质体中无论什么样的微粒运动，都不外是以某种形式存在的化学元素运动，因此，统称其为地质体中化学元素的运动。并简称化学元素为元素。同时，称粒子的转移概率、初始空间分布、空间分布等为地质体中化学元素的转移概率、初始空间分布、空间分布等。

为了具体描写地质体中元素的运动，首先必须从前述方程中求出转移概率的解来。众所周知，方程式（2-48）的解中最典型的形式是：

$$f(t_0,x_0;t,x)=\frac{1}{b\sqrt{2\pi(t-t_0)}}e^{-\frac{[x-x_0-a(t-t_0)]^2}{2b^2(t-t_0)}} \tag{2-52}$$

式（2-52）中，a，b 为常数；如为时间的函数时，则有下式

$$f(t_0,x_0;t,x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\int_{t_0}^{t}b^2\mathrm{d}t}}\exp\left\{-\frac{\left[x-x_0-\int_{t_0}^{t}a\mathrm{d}t\right]^2}{2\int_{t_0}^{t}b^2\mathrm{d}t}\right\} \tag{2-53}$$

设地质体中粒子的初始分布为

$$c_0=c(t_0,x_0)=c(t_0,x_0,y_0,z_0) \tag{2-54}$$

则地质体中元素的空间分布可一般地写为[7,10,11]

$$c=c(t,x)=\int_{-\infty}^{\infty}c_0f(t_0,x_0;t,x)\mathrm{d}x_0 \tag{2-55}$$

或

$$\begin{aligned}c&=c(t,x,y,z)\\&=\iiint\limits_{-\infty<x_0,y_0,z_0<\infty}c_0f(t_0,x_0,y_0,z_0;t,x,y,z)\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0\mathrm{d}z_0\end{aligned} \tag{2-56}$$

这样，剩下的问题就是如何根据实际地质情况构造元素的初始分布了。

2.3 地质体中元素含量分布公式

实际上的元素空间分布，是从观测中得到的，这就引出一个问题：前面的讨论表明，元素空间分布是一种概率分布；而概率

描写的是一种可能性，观测把这种可能性变成了现实性；但可能性毕竟不是现实性，两者是不能等同的。因此，地球化学观测带有误差是不可避免的。

2.3.1 地球化学测量中的不确定性关系

从地球化学观察的实施过程看，观测偏差也是必然的。因为从式（2-23）看，粒子位移方差可写为下式：

$$\Delta x^2 = b^2 \Delta t \tag{2-57}$$

在上式两端乘以粒子的质量 m，可得

$$m \frac{\Delta x^2}{\Delta t} = mb^2 \tag{2-58}$$

根据相对论，粒子的动量 p 和能量 E 分别为下式：

$$p = \frac{m_0 u}{\sqrt{1-\beta^2}},\ E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}},\ \beta = \frac{u}{c} \tag{2-59}$$

可分别求得动量偏差和能量偏差的表达式：

$$\Delta p = \frac{m_0 \Delta u}{(1-\beta^2)^{3/2}},\ \Delta E = \frac{m_0 (\bar{u}\Delta u + \Delta u^2)}{(1-\beta^2)^{3/2}} \tag{2-60}$$

这表明动量偏差 Δp 和能量偏差 ΔE 都是由速度 u 的偏差 Δu 引起的，而速度偏差又是由时间 Δt 内的位移偏差 Δx 引起的，即

$$u = \bar{u} + \Delta u,\ \Delta u = \Delta x / \Delta t \tag{2-61}$$

因此，可以求得动量偏差的均方根值和能量偏差的平均值分别如下

$$\sqrt{\Delta p^2} = \frac{m_0}{(1-\beta^2)^{3/2}} \sqrt{\Delta u^2} = \frac{m_0}{(1-\beta^2)^{3/2}} \frac{\sqrt{\Delta x^2}}{\Delta t}$$

$$\overline{\Delta E} = \frac{m_0}{(1-\beta^2)^{3/2}}\ \overline{\Delta u^2} = \frac{m_0}{(1-\beta^2)^{3/2}} \frac{\overline{\Delta x^2}}{\Delta t^2} \tag{2-62}$$

以上两式最后结果的系数都是一样的，并可简写为

$$\Delta p = m\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$\Delta E = m\frac{\Delta x^2}{\Delta t^2} \qquad (2\text{-}63)$$

同时考虑观测时还有人为误差引人，则由式（2-58）和式（2-63）得

$$\Delta p \Delta x \geqslant mh^2,\ \Delta E \Delta t \geqslant mh^2 \qquad (2\text{-}64)$$

这就是随机运动粒子测量时的不确定性关系。由于上式右端大于零，因此，对粒子测量来说，我们既不能同时准确地测定其能量和时间，也不能同时准确地测量其动量和位置。

2.3.2 地球化学采样模型

由于每个样品都有一定的大小和一定的矿物组成；每种矿物都有一定的颗粒大小和化学组成。如果一般地看这个问题，这是个非常复杂、很难处理的问题。但在实际上，由于样品加工过程的存在，即每个样品都要经过破碎、磨细、缩分，化学分析时已是被实际上平均过了的样品。这样的样品，可以看作理想样品。

所谓理想样品，是指采样体积是一定的；目标矿物的颗粒体积也是一定的；如果非目标矿物的颗粒体积也用目标矿物的颗粒体积比拟，则样品中矿物颗粒的总数也是一定的；并且，目标矿物和非目标矿物中目标元素的含量也各自一定；不同的只是，目标矿物颗粒数与非目标矿物颗粒数呈互为消长变化，采样时是随机出现的。这些特点表明（图 2-3 和图 2-4），采样过程是个伯努利实验过程，相当在装满黑球和白球的箱中，随机取出一定数量的球，取到某个数目的黑球或白球的概率是多少。因此，我们可以用二项分布表示地质采样过程：

$$P = C_n^k p^k q^{n-k},\ q = 1 - p,\ p, q \geqslant 0 \qquad (2\text{-}65)$$

式中，n 为用目标矿物颗粒大小为单位的样品中的矿物颗粒数；k 为目标矿物颗粒数；C_n^k 为二项式系数；p 为目标矿物颗粒的存

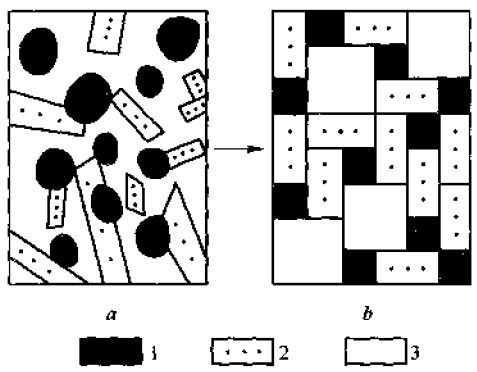


图 2-3　样品的采加化均化效应[7]

a－原始样品；*b*－采加化后的样品模式

1，2，3—分别为样品中的三种不同矿物

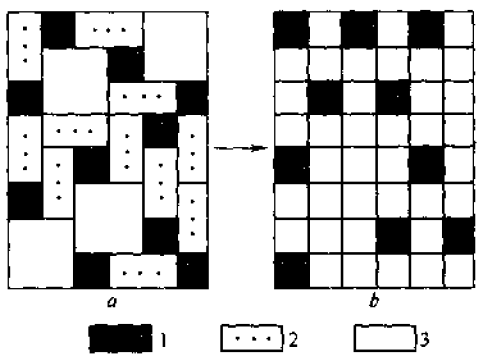


图 2-4　有效矿物与等效矿物构成的理想矿物模型[7]

a－经采加化均化后的样品；*b*－由有效矿物和等效矿物构成的样品

a 中 1，2，3 为三种不同矿物；*b* 中 1 为有效矿物，3 为等效矿物

在概率；q 为非目标矿物相应颗粒的存在概率；P 为样品中含有 k 颗目标矿物的概率（图 2-5 和图 2-6）。

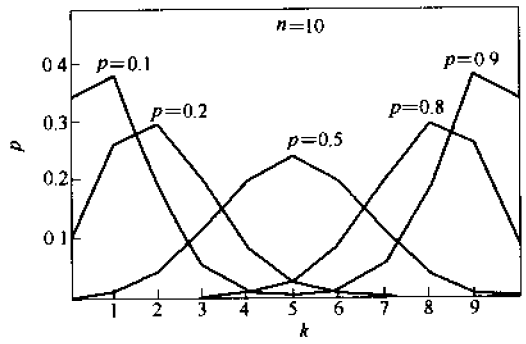


图 2-5　$n=10$ 的二项分布[7]

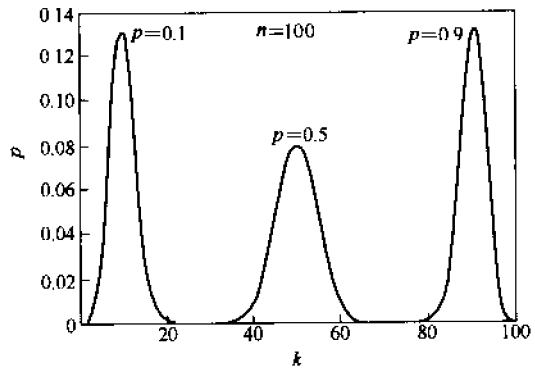


图 2-6　$n=100$ 的二项分布[7]

2.3.3　样品元素含量分布

根据斯特林公式，在样品很大或目标矿物颗粒很细时，有下式

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}\approx\frac{\sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\sqrt{2n\pi}\left(\frac{k}{e}\right)^k\sqrt{2(n-k)\pi}\left(\frac{n-k}{e}\right)^{n-k}} \tag{2-66}$$

令

$$\zeta = \frac{k}{n} \tag{2-67}$$

则由式（2-65）～式（2-67）得

$$f(\zeta) = \frac{n\Gamma(n+1)p^{n\zeta}q^{n(1-\zeta)}}{\Gamma(n\zeta+1)\Gamma[n(1-\zeta)+1]}$$

$$= \frac{np^{n\zeta}q^{n(1-\zeta)}}{(n+1)B[n\zeta+1,n(1-\zeta)+1]} \tag{2-68}$$

并应有相应的平均值和方差

$$E(\zeta) = p, E(\Delta\zeta^2) = \frac{pq}{n} \tag{2-69}$$

当样品元素含量、元素平均含量、目标矿物元素含量和非目标矿物元素含量分别表示为 ξ、C、C_1 和 C_0 时，有

$$\zeta = \frac{\xi - C_0}{C_1 - C_0},\ p = \frac{C - C_0}{C_1 - C_0} \tag{2-70}$$

把式（2-70）代入式（2-68）可得

$$f(\xi) = \frac{n}{n+1} \frac{\left(\frac{C-C_0}{C_1-C_0}\right)^{n\frac{\xi-C_0}{C_1-C_0}} \left(\frac{C_1-C}{C_1-C_0}\right)^{n\frac{C_1-\xi}{C_1-C_0}}}{(C_1-C_0)B\left(n\frac{\xi-C_0}{C_1-C_0}+1, n\frac{C_1-\xi}{C_1-C_0}+1\right)} \tag{2-71}$$

这就是我们求得的元素含量分布的一般公式（图 2-7～图 2-9 表示的是 $C_0=0$，$C_1=1$，$C=p$ 的情形）。

可以证明，式（2-71）有如下极限形式[7,11]

$$f(\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{(\xi-C_0)\sigma_0\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\dfrac{[\ln(\xi-C_0)-m_0]^2}{2\sigma_0^2}\right\}, & C \to C_0 \\ \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\dfrac{(\xi-m)^2}{2\sigma^2}\right], & C \to \dfrac{C_0+C_1}{2} \\ \dfrac{1}{(C_1-\xi)\sigma_1\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\dfrac{[\ln(C_1-\xi)-m_1]^2}{2\sigma_1^2}\right\}, & C \to C_1 \end{cases} \tag{2-72}$$

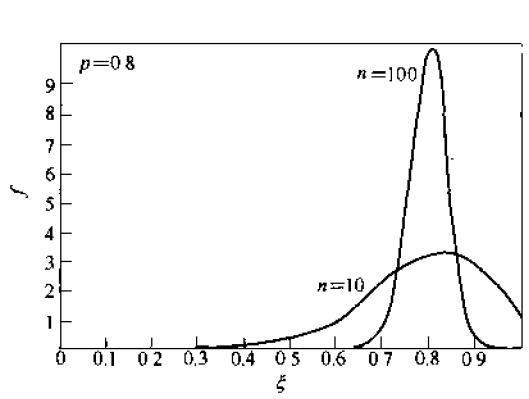


图 2-7　元素含量的理论分布（高量元素）[7]

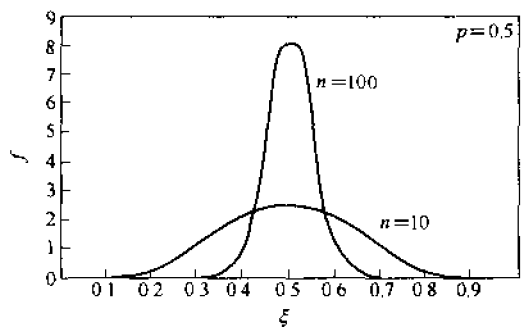


图 2-8　元素含量的理论分布（常量元素）[7]

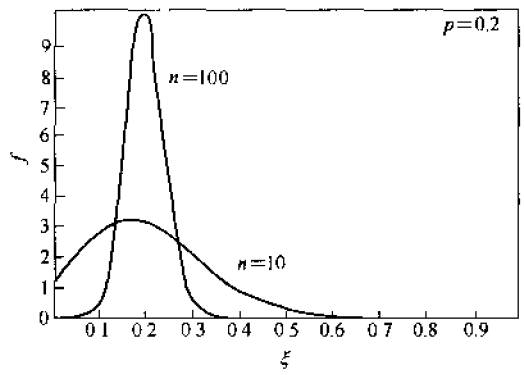


图 2-9　元素含量的理论分布（少量、微量元素）[7]

式（2-72）中

$$\sigma_0^2 = (C_1 - C_0)/(C - C_0)/n$$
$$m_0 = \ln(C - C_0) - \sigma_0^2/2$$
$$\sigma^2 = (C - C_0)(C_1 - C)/n$$
$$m = C$$
$$\sigma_1^2 = (C_1 - C_0)(C_1 - C)/n$$
$$m_1 = \ln(C_1 - C) - \sigma_1^2/2 \qquad (2\text{-}73)$$

式（2-72）最早是从经验上得到的，是最便于应用的形式[12~16]（图 2-10 ～ 图 2-14）。

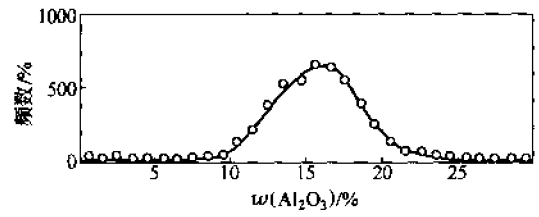


图 2-10　岩浆岩中 Al_2O_3 的含量分布[12]

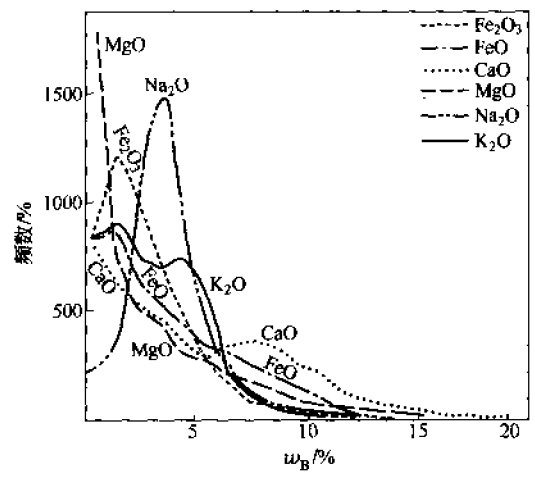


图 2-11　岩浆岩中几种主要氧化物的含量分布[12]

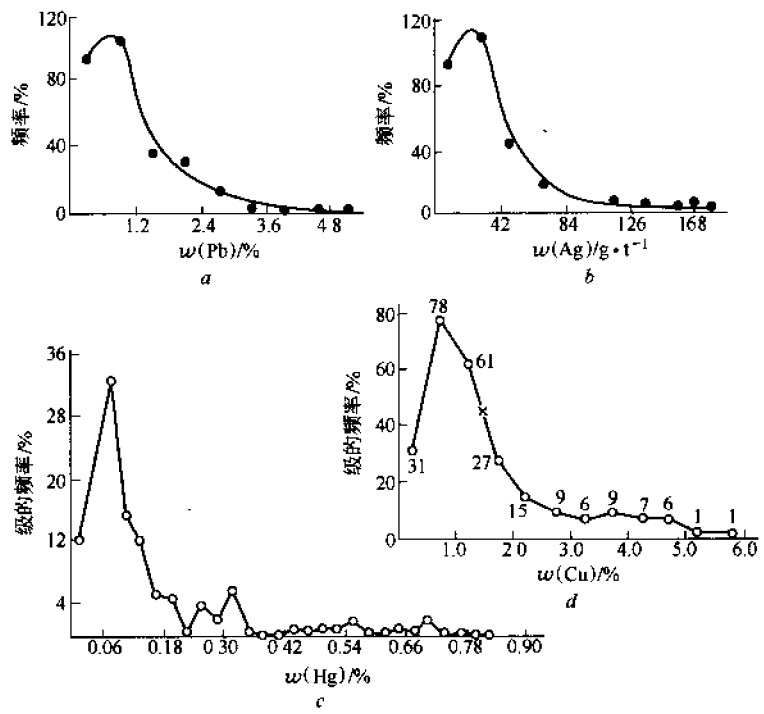


图 2-12　一些矿床中铅、银、汞、铜的含量分布[14,15]
a－某多金属矿床中一个地段的铅；*b*—某多金属矿床中一个地段的银；
c—某汞矿床中的汞；*d*—某铜矿床中的铜

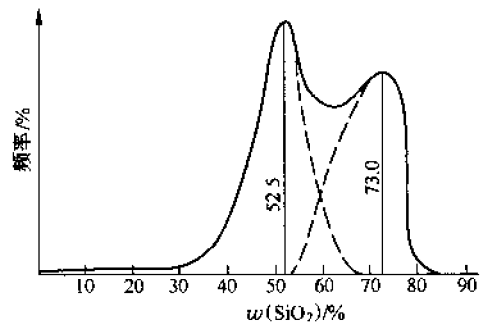


图 2-13　岩浆岩中 SiO_2 的含量分布[12]

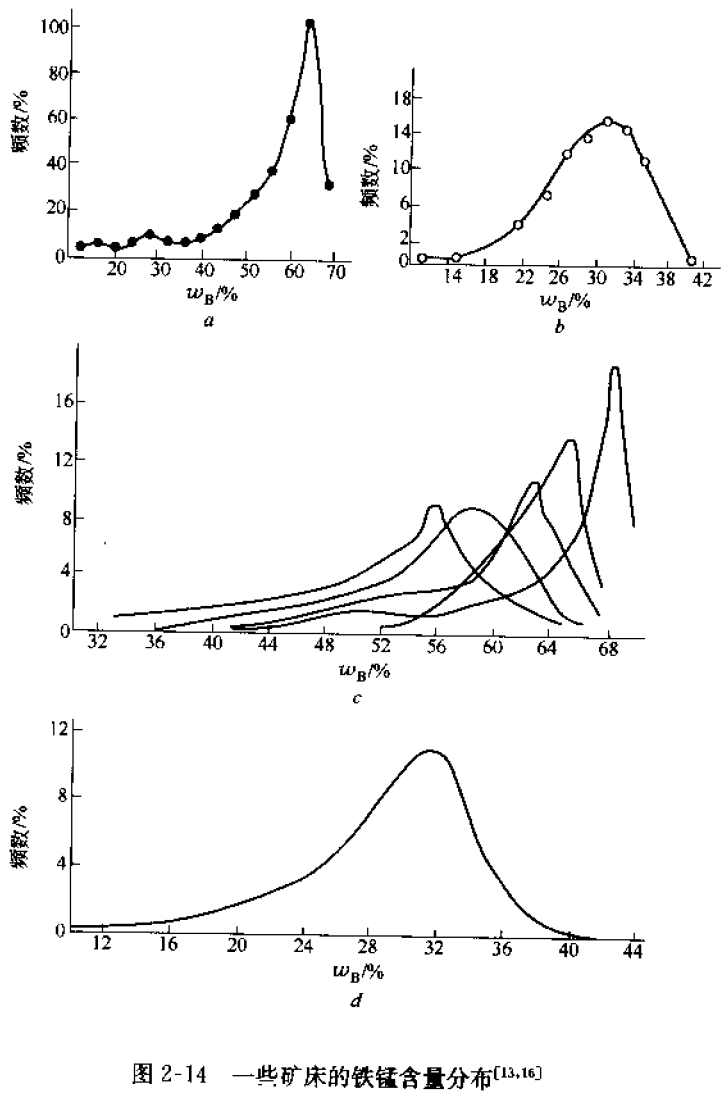


图 2-14　一些矿床的铁锰含量分布[13,16]

a—某铁矿床中铁的含量分布；*b*—某铁矿床中铁的含量分布；

c—某铁矿床中铁的含量分布；*d*—某锰矿床中锰的含量分布

当然，实际情况并非都那样理想，有时是这些分布的线性迭加：

$$f(\xi)=\sum_i \alpha_i f_i(\xi)$$

$$\alpha_i \geqslant 0,\ \sum_i \alpha_i = 1 \tag{2-74}$$

2.4 资源量/储量分布公式

从区域上看，矿床的平均品位 C 也应服从元素含量分布公式。假定我们把一个矿床的勘查看作是一次采样体积很大的采样，这样大体积的采样采到矿床这种“目标矿物”的可能性很小，概率只有 $10^{-4}\sim10^{-7}$。这样小的存在概率，看来只能用式（2-72）中的第一式来讨论。并可令 $C_0=0$，以及把平均品位 C 表示为矿床金属量 η 与矿床矿石量 Q 的比值，并用来代替这个“大样”的品位 ξ：

$$\xi \to C=\frac{\eta}{Q} \tag{2-75}$$

则由式（2-75）和式（2-72）第一式得

$$f(\xi)\to f(C)=\frac{1}{C\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(\ln C-m)^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$=\frac{Q}{\eta\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(\ln\eta-\ln Q-m)^2}{2\sigma^2}\right] \tag{2-76}$$

从式（2-76）看，矿床金属量和矿石量的分布都是式（2-76）的边缘分布[7,11,17]（图 2-15）：

$$f(\eta)=\frac{1}{\eta\sigma_\eta\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(\ln\eta-m_\eta)^2}{2\sigma_\eta^2}\right]$$

$$f(Q)=\frac{1}{Q\sigma_Q\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(\ln Q-m_Q)^2}{2\sigma_Q^2}\right] \tag{2-77}$$

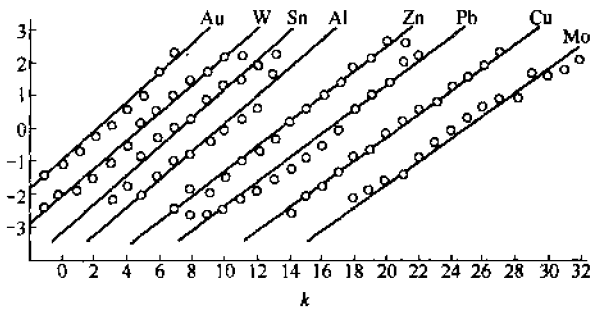


图 2-15　铜、铅、锌、钨、锡、钼、铝、金的矿床储量分布[7]（储量以 2^nt 表示）

Au—$n=k$；W—$n=k+8$；Sn—$n=k+6$；Al—$n=k+12$；Zn—$n=k+2$；Pb—$n=k-2$；Cu—$n=k-6$；Mo—$n=k$

2.5　矿床发现过程

在矿床发现过程中，一个重要的特点是：矿床发现数 m 越多，对矿床认识越深，越容易发现矿床；当然，待发现的矿床数 $M-m$ 越多，也越容易发现矿床，这是发现原理。根据发现原理，我们几乎可以立即写出关于总数为 M 的矿床发现的微分方程及其解[18,19]：

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=kMm(M-m) \tag{2-78}$$

和

$$m=\frac{M}{1+e^{-k(t-t_0)}}$$

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\frac{kM}{4}\mathrm{ch}^{-2}\left(\frac{k}{2}(t-t_0)\right) \tag{2-79}$$

这不但是一个在矿产勘查中发现的、符合矿床发现的公式，而且是个符合科学发现的公式（图 2-16 和图 2-17）。因此，科学不但有其客观的一面，还有人类作为主体参与的一面。

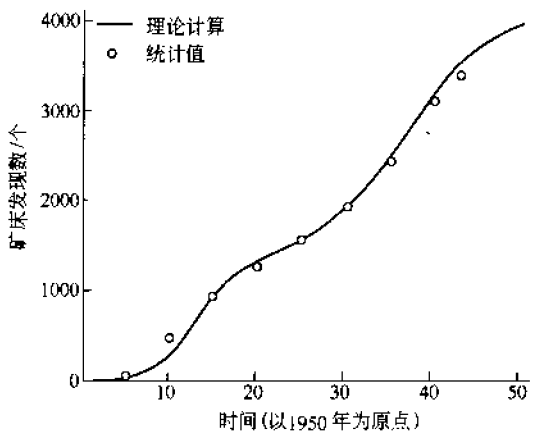


图 2-16　1950 年以来我国矿床的发现过程[19]

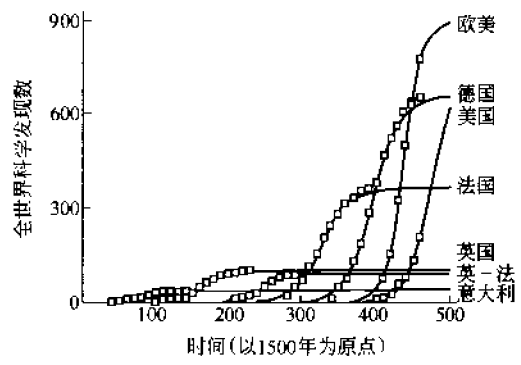


图 2-17　16 世纪以来全世界的科学发现过程[19]

3 应　　用

3.1 地质矿床研究

3.1.1 同一地质体中元素空间分布

同一地质体的最大特征是，元素的初始分布到处为常数。因此，由于元素转移概率密度函数的空间积分是归一的，因此有[7]

$$c(t,x) = \int c_0 f \mathrm{d}x_0 = c_0 \tag{3-1}$$

即同一地质体的元素分布到处为常数。

3.1.2 接触带上元素空间分布

不同地质体的接触是常见的地质现象，如花岗岩和碳酸盐岩的接触，初始接触时如 Ca 和 Si 的含量在空间上是突变的（图 3-1）。

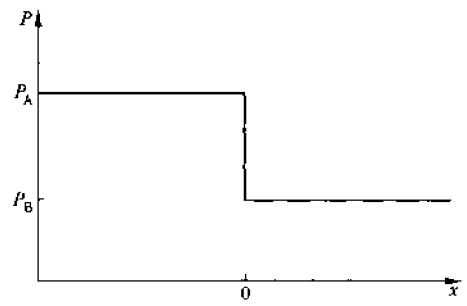


图 3-1　接触带上元素初始空间分布[7]

$P=c\ (t_0,\ x_0)$；$P_A=C_0$；$P_B=C_1$

$$c(t_0,x_0)=\begin{cases}C_0, x<x_1\\ C_1, x\geqslant x_1\end{cases}$$

$$f(t_0,x_0;t,x)=\frac{1}{b\sqrt{2\pi(t-t_0)}}\exp\left\{-\frac{[x-x_0-a(t-t_0)]^2}{2b^2(t-t_0)}\right\}$$

$$c(t,x)=\int_{-\infty}^{\infty}c(t_0,x_0)f(t_0,x_0;t,x)\mathrm{d}x_0$$

$$=C_0+(C_1-C_0)\Phi\left(\frac{x-x_1-a(t-t_0)}{b\sqrt{t-t_0}}\right) \tag{3-2}$$

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

元素分布表现为由低到高过渡（图 3-2 和图 3-3）。

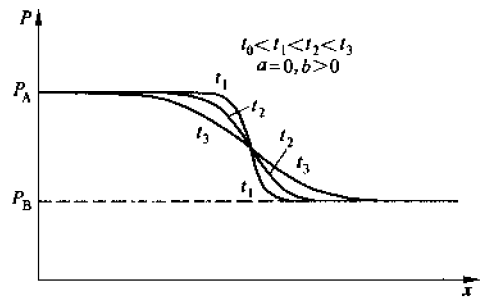


图 3-2　接触带上元素空间分布随时间的变化（$a=0$）[17]

$P=C(t, x)$；$P_A=C_0$；$P_B=C_1$

3.1.3　脉状矿化元素空间分布

元素初始分布可用集中在一点的分布表示，因此有：

$$c(t_0,x_0)=C_0+m\delta(x_0-x_1) \tag{3-3}$$

δ 函数的定义和性质如下：

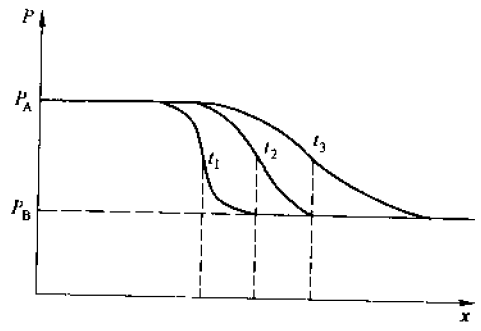


图 3-3　接触带上元素空间分布随
时间的变化（$a\neq0$）[7]

$$\delta(x_0-x_1)=\begin{cases}0, x_0\neq x_1\\ \infty, x_0=x_1\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{x_0}\delta(x_0'-x_1)\mathrm{d}x_0'=\begin{cases}0, x_0<x_1\\ 1, x_0\geqslant x_1\end{cases}\qquad(3\text{-}4)$$

$$\int_{-\infty}^{x_0}f(x_0')\delta(x_0'-x_1)\mathrm{d}x_0'=\begin{cases}0, x_0<x_1\\ f(x_1), x_0\geqslant x_1\end{cases}$$

则有（图 3-4 和图 3-5）

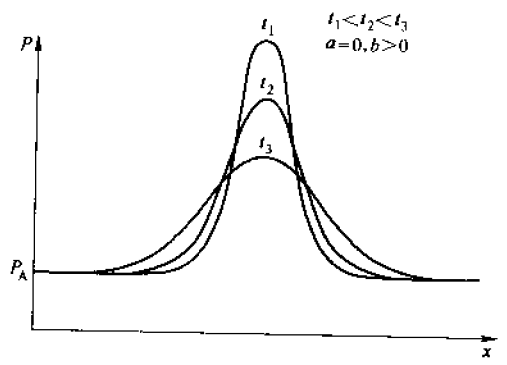


图 3-4　第一类矿化元素空间分布随
时间的变化（$a=0$）[7]

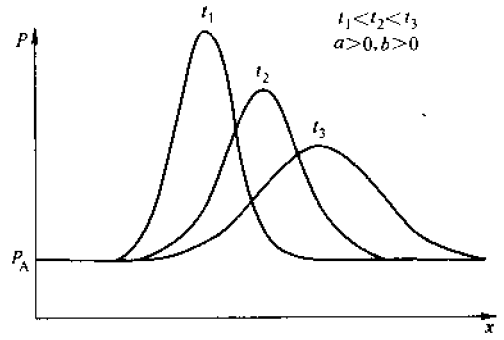


图 3-5　第一类矿化元素空间分布随
时间的变化（$a\neq0$）[7]

$$c(t,x)=C_0+\frac{m}{b\sqrt{2\pi(t-t_0)}}\exp\left(-\frac{[x-x_1-a(t-t_0)]^2}{2b^2(t-t_0)}\right) \tag{3-5}$$

3.1.4　面状矿化元素空间分布

元素初始分布可表示为（图 3-6）

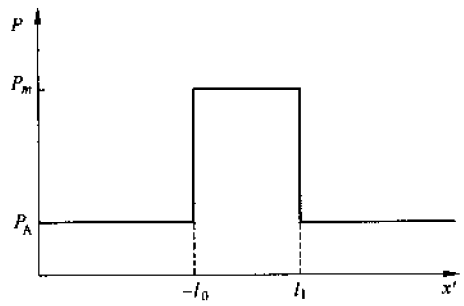


图 3-6　第二类矿化元素的初始空间分布[7]
$P=C\ (t_0,\ x_0)$；$P_A=C_0=C_1$；$P_m=C_m$

$$c(t_0,x_0)=\begin{cases}C_0, x_0<-l_0, x_0>l_1\\ C_m, -l_0\leqslant x_0\leqslant l_1\end{cases} \tag{3-6}$$

则有（图 3-7 和图 3-8）

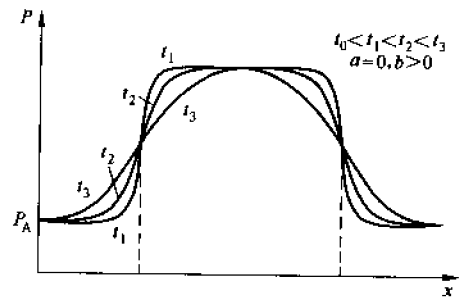


图 3-7　第二类矿化元素空间分布随时间的变化（$a=0$）[7]

$P=C\ (t,\ x)$；$P_A=C_0=C_1$

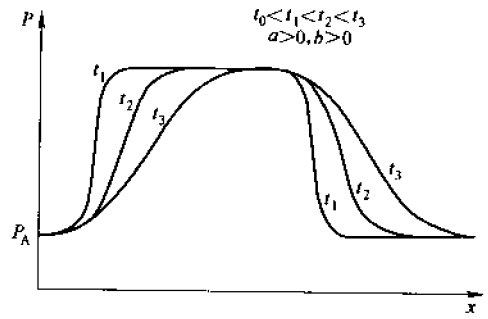


图 3-8　第二类矿化元素空间分布随时间的变化（$a\neq 0$）[7]

$$c(t,x)=C_0+(C_m-C_0)\left\{\Phi\left[\frac{x+l_0-a(t-t_0)}{b\sqrt{t-t_0}}\right]-\Phi\left[\frac{x-l_1-a(t-t_0)}{b\sqrt{t-t_0}}\right]\right\} \tag{3-7}$$

上式中，引用了如下概率积分（下同）：

$$\Phi(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y}\exp(-x^2/2)\mathrm{d}x \tag{3-8}$$

3.1.5 典型的元素空间分布

根据地质剖面上最常见的情况：两不同地质体接触带上化学元素富集成矿时，相当如下的初始分布

$$c_0(t_0,x_0)=\begin{cases}A, x_0<-l_0\\ C, -l_0\leqslant x_0\leqslant l_1\\ B, x_0>l_1\end{cases} \tag{3-9}$$

把式（3-9）代入式（2-55），可得剖面上元素空间分布的典型形式[7]

$$\begin{aligned}c(t,x)=&A+(B-A)\Phi\left[\frac{x-l_1-a(t-t_0)}{b\sqrt{t-t_0}}\right]\\&+(C-A)\left\{\Phi\left[\frac{x+l_0-a(t-t_0)}{b\sqrt{t-t_0}}\right]\right.\\&\left.-\Phi\left[\frac{x-l_1-a(t-t_0)}{b\sqrt{t-t_0}}\right]\right\}\end{aligned} \tag{3-10}$$

式（3-10）是式（3-1）、式（3-2）、式（3-5）、式（3-7）的一般表示。

3.1.6 稳定的元素空间分布

地质体中元素随机运动的条件之一，是其所在的地质环境。在前面的讨论中已告诉我们，元素的平均位移速度和单位时间产生的位移方差增量是时间、空间的函数，说明这两个参量是对环境条件的描写。本节将对这类环境条件的影响进行讨论。

从式（2-55）看，元素空间分布的稳定条件是

$$\frac{\mathrm{d}c(t,x)}{\mathrm{d}t}=0 \tag{3-11}$$

根据（2-48）第二式，由式（3-11）可得

$$\frac{\partial c}{\partial t}=\int_{-\infty}^{\infty}c_0\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}x_0=\int_{-\infty}^{\infty}c_0\left[-\frac{\partial(af)}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2(b^2f)}{\partial x^2}\right]\mathrm{d}x_0$$

$$=-\frac{\partial}{\partial x}\left[a\int_{-\infty}^{\infty}c_0f\mathrm{d}x_0\right]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[b^2\int_{-\infty}^{\infty}c_0f\mathrm{d}x_0\right]$$

$$=-\frac{\partial(ac)}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2(b^2c)}{\partial x^2}=0 \tag{3-12}$$

对式（3-12）最后结果进行积分，可得

$$-ac+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}[b^2c]}{\mathrm{d}x}=A \tag{3-13}$$

由于式（3-13）描写的是矿床中的元素含量分布，对无穷远处有如下条件：

$$\lim_{x\to\infty}c=0,\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}=0 \tag{3-14}$$

根据式（3-14），积分常数 A 应为零。因此，式（3-13）可变为

$$2ac=c\frac{\mathrm{d}b^2}{\mathrm{d}x}+b^2\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x} \tag{3-15}$$

由式（3-15）得

$$\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{b^2}\left[2a-\frac{\mathrm{d}b^2}{\mathrm{d}x}\right] \tag{3-16}$$

这就是元素稳定空间分布方程。并且，在一维空间中，当 a 和 b 仅为空间函数时，这是个一般性的方程。下面我们讨论几种具体情形。

如果取

$$\begin{aligned}a&=a_0+a_1x\\ b^2&=b_0+b_1x+b_2x^2\end{aligned} \tag{3-17}$$

并设

$$\alpha = \frac{b_1 - 2a_0}{2(a_1 - b_2)}$$

$$\beta_0 = \frac{b_0}{2(a_1 - b_2)} \tag{3-18}$$

$$\beta_1 = \frac{b_1}{2(a_1 - b_2)}$$

$$\beta_2 = \frac{b_2}{2(a_1 - b_2)}$$

则式（3-16）变为[7]

$$\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x} = \frac{x - \alpha}{\beta_0 + \beta_2 x + \beta_2 x^2} \tag{3-19}$$

式（3-19）是著名的庇尔生方程，是一系列庇尔生型分布所遵循的方程。如正态分布、Γ-分布、*B*-分布和 *t*-分布等，都是其中的类型。而矿体元素空间分布大都能用这一类型或那一类型的分布来表示。

以上的这个典型讨论说明，成矿的地质环境对矿床元素的空间分布影响很大。

3.1.7 成矿过程模型

根据吸收壁条件，可以建立成矿过程模型[7]。

在吸收壁的情况下，元素分布的转移概率密度和吸收壁吸收概率分别为下式：

$$f(t_0, x_0; t, x) = \frac{1}{b\sqrt{2\pi(t - t_0)}}\left\{\mathrm{e}^{-\frac{(x-x_0)^2}{2b^2(t-t_0)}} - \mathrm{e}^{-\frac{[2(x_2-x_0)-(x-x_0)]^2}{2b^2(t-t_0)}}\right\} \tag{3-20}$$

$$p_1 = \frac{2}{b\sqrt{2\pi(t - t_0)}}\int_{z_2}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x - x_0)^2}{2b^2(t - t_0)}\right]\mathrm{d}z$$

吸收壁两侧各向半个空间吸收地层中的元素时，对吸收壁左侧转移中的元素有如下计算

$$F' = \int_{-\infty}^{A} \frac{e^{\frac{(x-x_0)^2}{2b^2(t-t_0)}} - e^{-\frac{[2(A-x_0)^2-(x-x_0)]^2}{2b^2(t-t_0)}}}{b\sqrt{2\pi(t-t_0)}} dx_0 = 2\Phi\left(\frac{A-x}{b\sqrt{t-t_0}}\right) - 1 \tag{3-21}$$

类似的计算，可得吸收壁右侧的类似结果

$$F'' = 2\Phi\left(\frac{x-A}{b\sqrt{t-t_0}}\right) - 1 \tag{3-22}$$

式（3-21）、式（3-22）可以用如下一个公式代表

$$F = 2\Phi\left(\frac{|x-A|}{b\sqrt{t-t_0}}\right) - 1 \tag{3-23}$$

对干吸收概率来说，由于有下式

$$P = \int_{A}^{\infty} \frac{2e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2b^2(t-t_0)}}}{b\sqrt{2\pi(t-t_0)}} dx = 2\Phi\left(\frac{x_0-A}{b\sqrt{t-t_0}}\right) \tag{3-24}$$

则左侧的吸收总量应正比于下式

$$Q' = \int_{-\infty}^{A} P dx_0 = 2b\sqrt{t-t_0}\int_{-\infty}^{0} \Phi(y) dy \tag{3-25}$$

右侧吸收也有同样的结果。因此，从吸收壁两侧吸收的总量应正比于下式

$$Q = 4b\sqrt{t-t_0}\int_{-\infty}^{0} \Phi(y) dy \tag{3-26}$$

如用 m_1，α_1，b_1 和 m_0，α_0，b_0 分别表示地层中单位体积内矿质和非矿质的数量、转移率和单位时间的位移均方根差，即有与式（3-23）和式（3-26）对应的 F_1，Q_1 和 F_0，Q_0。此外，对矿质来说，单位时间的吸收量和外部来的数量可分别用下式表示

$$\begin{aligned} \sigma(t_1) &= \frac{\partial Q_1}{\partial t} = \frac{2b_1 m_1 \alpha_1}{\sqrt{t_1-t_0}}\int_{-\infty}^{0} \Phi(y) dy \\ \sigma'(t_1) &= m_1 \gamma(t_1) \end{aligned} \tag{3-27}$$

进一步假设被吸收的矿质在吸收壁上分布和转化为矿化态后

的转移概率密度函数分别为

$$c_{10}(t_1,x_1)=\delta(x_1-A)$$

$$f(t_1,x_1;t,x)=\frac{e^{-\frac{[x-x_1-a_2(t-t_1)]^2}{2b_2^2(t-t_1)}}}{b_2\sqrt{2\pi(t-t_1)}} \tag{3-28}$$

对非矿质来说，即使在吸收壁上吸收，也不留存。

这样，矿床成矿的元素含量空间变化可表示为

$$c(t,x)=\frac{m_1(1-\alpha_1+\alpha_1F_1+F_2)}{m_0(1-\alpha_0+\alpha_0F_0)} \tag{3-29}$$

式（3-29）中

$$F_2=\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{-\infty}^{\infty}[\sigma(t_1)+\sigma'(t_1)]\delta(t_1,x_1)f(t_1,x_1;t,x)\mathrm{d}x_1$$

式（3-29）包含了主要成矿类型：不成矿，残积成矿，来积成矿，吸积成矿等（图 3-9）。

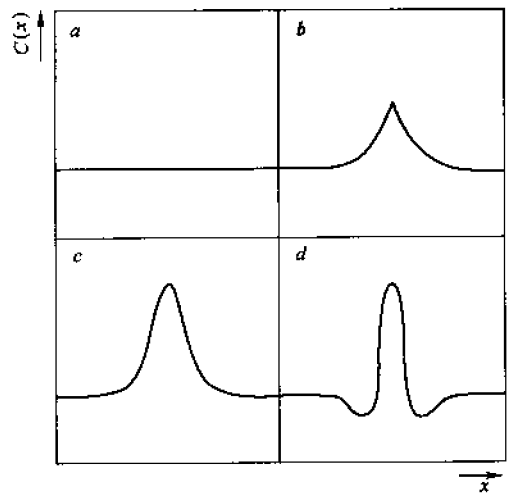


图 3-9　典型成矿模式[7]

a—无矿生成；*b*—残积成矿；*c*—来积成矿；*d*—吸积成矿

3.1.8 吸积成矿模式

我们曾用其中的吸积成矿模式

$$c(t,x)=[C_0+(C_m-C_0)F_1][F_2+F_3F_4]$$

$$F_1=\Phi\left(\frac{x+l_0}{b\sqrt{t-t_0}}\right)-\Phi\left(\frac{x-l_1}{b\sqrt{t-t_0}}\right)$$

$$F_2=2\Phi\left(\frac{|x|}{b_1\sqrt{t-t_0}}\right)-1 \qquad (3\text{-}30)$$

$$F_3=2b\int_{-\infty}^{0}\Phi(y)\mathrm{d}y$$

$$F_4=\frac{1}{b_1\sqrt{2\pi}}\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\sqrt{(t-t')(t'-t_0)}}\exp\left[-\frac{x^2}{b_1^2(t'-t_0)}\right]\mathrm{d}t'$$

模拟了某古老花岗岩中的铀成矿（图 3-10）。

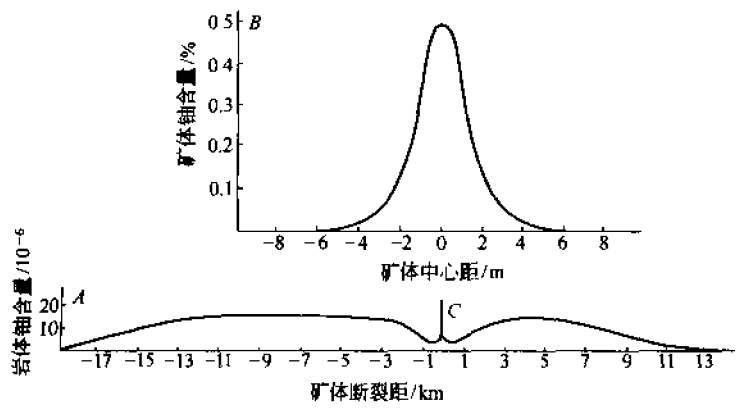


图 3-10 某古老花岗岩体中铀吸积成矿模式[7]

A—岩体铀矿化模式；*B*- *C* 的放大图，铀的空间分布类似第一类矿化情形；*C*—*C* 处断裂，铀发生矿化

3.1.9 矿卷成矿模式

有一种主要是与反射壁有关的重要成矿过程——层间氧化带

成矿过程，叙述如下。

这种成矿过程的主要特征是：两个致密不透水层如泥岩层夹持着一个透水性好的砂岩层；地下水从地表向地下通过砂岩层；地表附近的地下水富含氧和处于氧化态的矿质；在深度方向上，从地表到地下，依次出现氧化带、氧化-还原带和还原带。其成矿机制是：在垂直砂岩层的方向上，水中游离氧将遇到由泥岩构成的一左一右两个反射壁。在平行砂岩层的方向上，氧化态的矿质在氧化-还原带上被还原吸收成矿，即氧化-还原带是吸收壁。地下水中的氧也在这个吸收壁上被吸收。

对于双反射壁来说，其中粒子的分布密度函数如下：

$$f(y)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\Phi\left(\frac{y-(2n-1/2)l}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{y-(2n+1/2)l}{\sigma}\right)\right]$$
$$-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\Phi\left(\frac{-y-(2n-3/2)l}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{-y-(2n-1/2)l}{\sigma}\right)\right] \tag{3-31}$$

式中，l 为两反射壁的间距。上式显然与两泥岩层之间水中氧浓度成正比，如果氧化-还原带下移的速度与水中氧浓度成正比，则这个速度可写为：

$$a=k_0 f(y) \tag{3-32}$$

水中游离氧越多，氧化态矿质也越多，在氧化-还原带被吸收的矿质也越多。因此，矿质在氧化-还原带上沉淀的速度为

$$\gamma(t_1)=k_1 f(y) \tag{3-33}$$

沉淀矿质的初始分布和转移概率密度可写为

$$c_0(t_1,x_1,y)=\delta[x_1-k_0 f(y)(t-t_1)]$$
$$f(t_1,x_1;t,x)=\frac{1}{b\sqrt{2\pi(t-t_1)}}e^{-\frac{(x-x_1)^2}{2b^2(t-t_1)}} \tag{3-34}$$

则只考虑式（3-20）的第二式和式（3-22）中的积分项，可得

$$c(t,x,y)=\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\gamma(t_1)c_0(t_1,x_1,y)}{b\sqrt{2\pi(t-t_1)}}\mathrm{e}^{\frac{(x-x_1)^2}{2b^2(t-t_1)}}\mathrm{d}x_1$$

$$=k_1f(y)\int_{t_0}^{t}\frac{\exp\left\{-\dfrac{[x-k_0f(y)(t-t_1)]^2}{2b^2(t-t_1)}\right\}}{b\sqrt{2\pi(t-t_1)}}\mathrm{d}t \tag{3-35}$$

令矿床的边界品位为 U 时，则可根据上式用数值法解如下方程

$$c(t,x,y)=U \tag{3-36}$$

式（3-36）给出的矿体剖面形状是一新月形（图 3-11），其背部指向地下，即指向地下水向下流的方向。这类矿床最典型的代表是所谓的铀矿卷，品位虽低但资源量/储量非常大，容易冶炼，可以地浸，已成了目前最重要的铀矿类型。

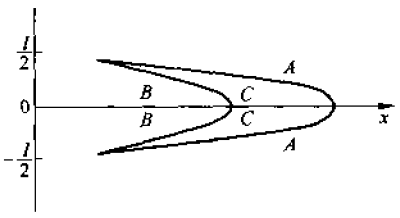


图 3-11　铀矿卷形成过程模式[7]

A—还原区；*B*—氧化区；*C*—氧化还原区、矿体

3.1.10　成矿元素比值关系

一个应用是，铀矿床中铀镭放射性平衡系数与铀含量的关系通常用高次多项式逼近。这是纯粹的数学方法。如用式（3-5）分别表示铀矿床中镭铀比值时，则有明显的物理意义，并可指示成矿元素迁移方向。当 $C_0=0$ 时，表示如下式

$$K_p = \frac{R}{U} = \frac{R_0}{U_0}\exp\left[\frac{x^2}{2b_U^2(t-t_0)} - \frac{x^2}{2b_R^2(t-t_0)}\right]$$

$$= \frac{R_0}{U_0}\exp\left[\frac{x^2}{2(t-t_0)}\frac{b_R^2 - b_U^2}{b_U^2 b_R^2}\right]$$

$$= \frac{R_0}{U_0}\exp\left[-\frac{b_R^2 - b_U^2}{b_R^2}\ln\frac{U}{U_0}\right]$$

$$= \frac{R_0}{U_0}\left(\frac{U}{U_0}\right)^{-\frac{b_R^2 - b_U^2}{b_R^2}} \tag{3-37}$$

由式（3-37）得[6]

$$\ln K_p = A - B\ln U \tag{3-38}$$

式（3-38）几乎可用于所有的铀矿床（图 3-12）。式中，A 和 B 是因矿床而异的常数。

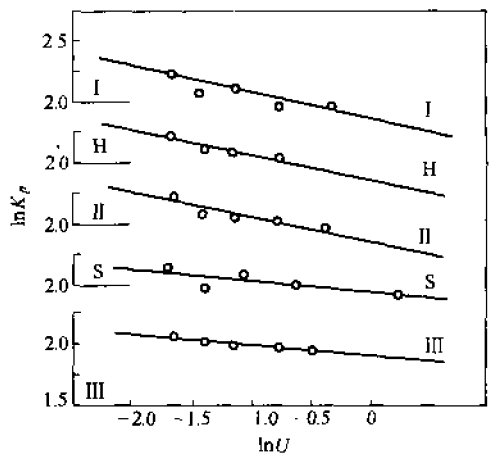


图 3-12　我国某铀矿床中放射性平衡系数与铀量之间关系[7,10]

Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ—勘探层编号；H—碳酸质矿石；S—硅铝质矿石；数据为按铀量分组平均的结果

3.1.11 比值的空间变化

共同成矿的两元素比值的空间变化同样可以指示成矿元素的迁移方向

$$B=\frac{c_1}{c_2}$$

$$=\frac{c_{10}}{c_{20}}\exp\left\{\frac{[x-a_2(t-t_0)]^2}{2b_2^2(t-t_0)}-\frac{[x-a_1(t-t_0)]^2}{2b_1^2(t-t_0)}\right\} \quad (3\text{-}39)$$

令 $a=a_1-\Delta=a_2+\Delta$，则由式（3-39）可得[6]

$$B=B_0\exp\left\{-\frac{\left[x-\left(a+\frac{b_2^2+b_1^2}{b_2^2-b_1^2}\Delta\right)(t-t_0)\right]^2}{2\frac{b_2^2b_1^2}{b_2^2-b_1^2}(t-t_0)}\right\} \quad (3\text{-}40)$$

从式（3-40）看，只有 $b_2^2>b_1^2$ 时，式（3-40）才会有峰值出现，才能用于成矿元素的迁移方向。当有峰值时，由于

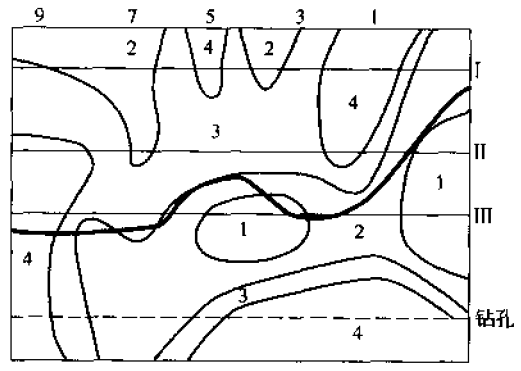


图 3-13　沿矿体倾向 K_p 等值图[7,10]

1—$K_p<90\%$；2 -$90\%\leqslant K_p<100\%$；3—$100\%\leqslant K_p<110\%$；4- $K_p\geqslant 110\%$；黑实线为硅化带下界；Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ—勘探层编号；1，3，5，7，9—勘探线编号；钻孔坐标为平均位置

$(b_2^2+b_1^2)/(b_2^2-b_1^2)\ll 1$，则当两成矿元素分布的峰值都在矿体内时，比值的峰值或在矿体一侧或在矿体另一侧。这样，可用矿体中比值判断成矿元素迁移方向。例如，当 $\Delta>0$ 时，比值上升是成矿元素的迁移方向；反之，则比值下降是成矿元素迁移的方向（图 3-13～图 3-15）[10,20]。

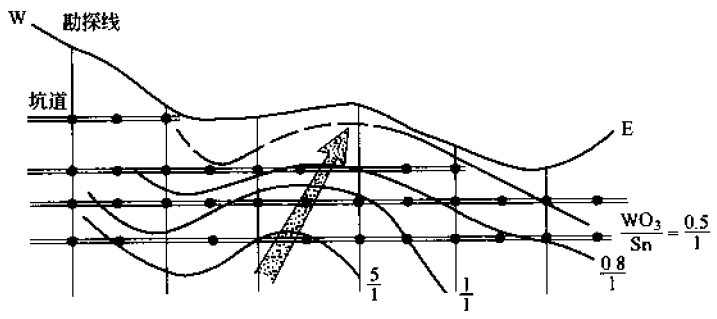


图 3-14　某矿床钨、锡等比值线图[20]

箭头示矿液运移的方向

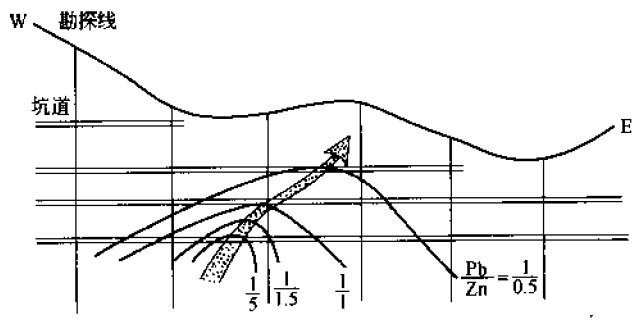


图 3-15　某矿床铅锌等比值线图[20]

箭头示矿液运移方向

3.1.12 回归系数的空间变化

用两成矿元素的相关斜率指示成矿元素迁移方向。此时有[10]

$$k=\frac{d\ln c_1/\mathrm{d}x}{d\ln c_2/\mathrm{d}x}=\frac{b_2^2[x-a_1(t-t_0)]}{b_1^2[x-a_2(t-t_0)]}$$

$$=\frac{b_2^2[x-a(t-t_0)-\Delta(t-t_0)]}{b_1^2[x-a(t-t_0)+\Delta(t-t_0)]} \tag{3-41}$$

式（3-41）表明，在矿体中，当第一种元素迁移能力强时，斜率上升的方向是成矿元素的迁移方向；反之则结论相反（图3-16和图3-17）。

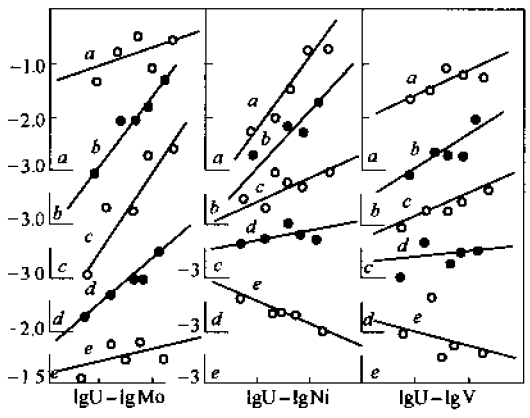


图3-16 某铀矿床中矿化元素与铀的相关直线变化[7,10]

a，*b*，*c*，*d*，*e*为由矿体上部向矿体下部顺序排列的矿石类型

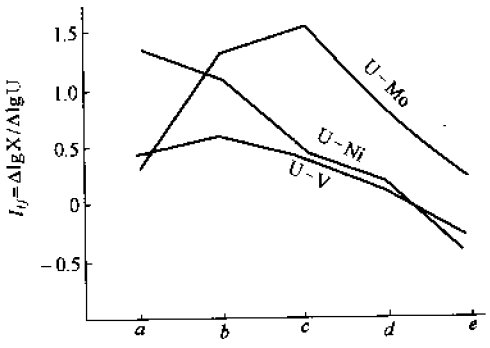


图 3-17　某铀矿床中矿化元素与铀的
对数相关斜率变化[7,10]
a，b，c，d，e 为铀矿体上部向矿体下部顺序
排列的矿石类型；X=Mo，Ni，V

3.1.13　原生晕的位置判别

应用式（3-5），在平面上可以给出一定边界品位下原生晕的形状是一个椭圆

$$\left(\frac{x-m_x}{A_x}\right)^2+\left(\frac{y-m_y}{A_y}\right)^2=1 \tag{3-42}$$

式中

$$A_x^2=2\sigma_x^2\ln\frac{C_m}{C_B-C_0}$$
$$A_y^2=2\sigma_y^2\ln\frac{C_m}{C_B-C_0} \tag{3-43}$$

不同矿化元素运动中的中心点和分散幅度不同，而表现为头晕、体晕和尾晕（图 3-18）。

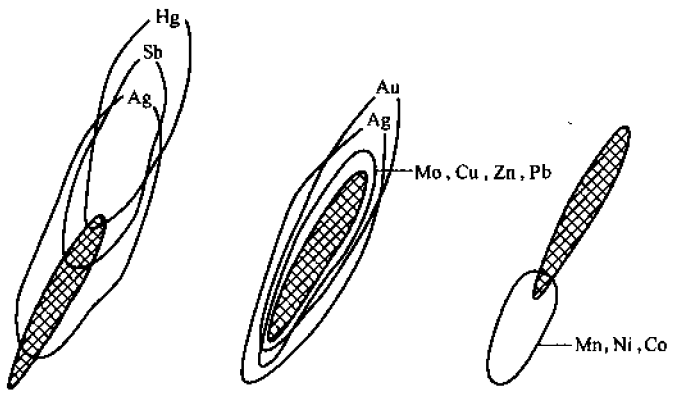


图 3-18　某金（银）矿原生晕分带概括模型垂直剖面[7]

3.1.14　元素对含量比值的分布

对大多数元素来说，都遵守式（2-72）的第一式。从而可求得元素对含量比值的分布（图 3-19）[7,21]：

$$f(\beta)=\frac{1}{\beta\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln\beta-m)^2}{2\sigma^2}} \tag{3-44}$$

式中　$$\beta=\frac{\xi_1}{\xi_2};m=\ln\frac{C_1}{C_2}-\frac{1}{2}\sigma^2;\sigma^2=\frac{C_1+C_2}{2nC_1C_2} \tag{3-45}$$

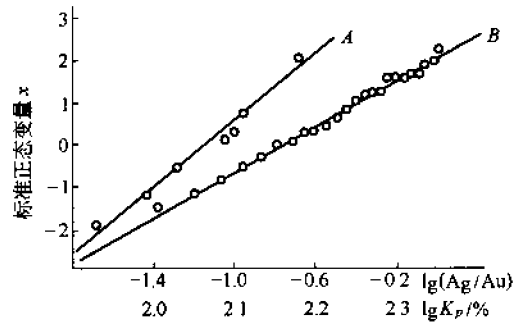


图 3-19　元素比值的概率分布[7]
A—某铀矿床放射性平衡系数 K_p（相当铀镭比 Ra/U）分布；*B*—自然金中银金比 Ag/Au 的分布；图中直线为计算值，圈为观测统计值

3.1.15 矿体长宽厚的分布

考虑统计平均情况下，矿体的矿石量可表示为如下椭球体

$$Q = \pi xyzD \tag{3-46}$$

把式（3-46）代入式（2-77），可得关于矿体长、宽、厚的边际分布：

$$f(x,y,z) = \frac{1}{xyz\sigma_x\sigma_y\sigma_z\sqrt{(2\pi)^3}} e^{-\frac{(\ln x-m_1)^2}{2\sigma_x^2}-\frac{(\ln y-m_2)^2}{2\sigma_y^2}-\frac{(\ln z-m_3)^2}{2\sigma_z^2}} \tag{3-47}$$

河南小秦岭含金石英脉的宽度和厚度分布服从上式（图3-20）[22]，希腊一个铬铁矿区中豆荚状矿体的长度和宽度也服从上式。

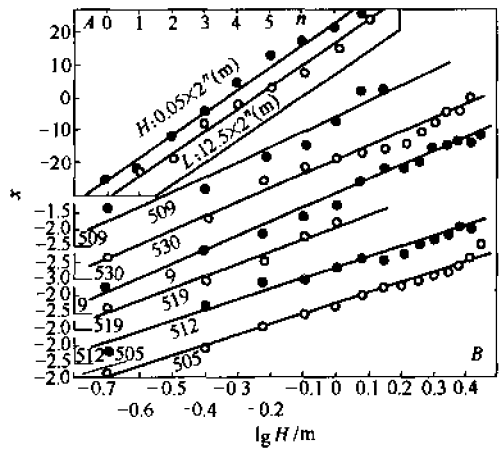


图 3-20　某金矿区含金石英脉的长度、厚度分布[7,22]

A—近 200 条含金石英脉的长度 L 和厚度 H 的概率分布；*B*- 6 条石英脉（数字为矿脉编号）厚度变化的概率分布；x—标准正态变量

3.2 矿产勘查布局

3.2.1 品位-吨位关系

在区域上，还可以根据元素含量分布建立品位-吨位关系。因为当区域总质量为 M 时，区域矿产总量可以表示为下式

$$Q = M\int_{\geqslant C} f(\xi)\mathrm{d}\xi,\ \eta = M\int_{\geqslant C} \xi f(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{3-48}$$

在式（2-72）的情况下，在 $\ln\xi = (\ln C - m_0)/\sigma$ 附近展开，对式（3-48）进行近似计算，最终会得到如下结果

$$\begin{aligned} Q &= AC^{-b} \\ \eta &= AC^{-b+1} \end{aligned} \tag{3-49}$$

式（3-49）第一式就是 1950 年发表的 Lasky 经验关系，第二式则纯粹是我们的理论结果（图 3-21 和图 3-22）[23,24]。

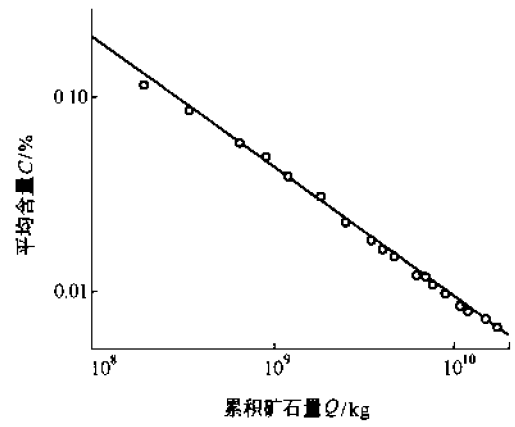


图 3-21 美国水银生产中累积矿石量 Q 和平均品位 C 之间的关系[23~25]（据 Corgill 等，1981）

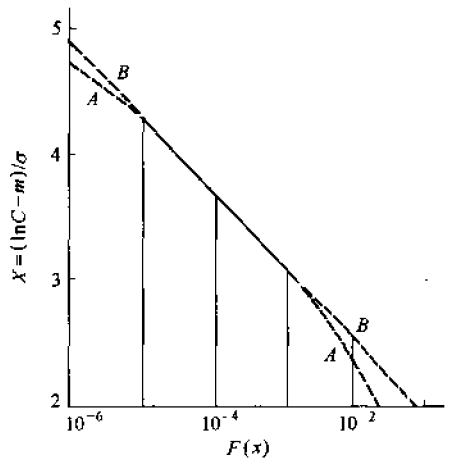


图 3-22　工业矿石比率 $F(x)$ 与元素含量 C 之间关系[23~25]
A—式（3-48）计算；B—式（3-49）计算；A 和 B 符合范围在 $10^{-3}\sim10^{-5}$ 成矿率上，包含了大多数矿种的成矿率

3.2.2　矿床规模的统计划分

通常的情况是，区域上矿床金属量服从单一的对数正态分布，即如式（2-77）第一式所示。对金属矿床来说，我们发现[26]，按下式划分矿床金属量规模时：

$$\eta(n)=\exp\left[m_\eta+\left(n-\frac{1}{2}\right)\sigma_\eta\right] \tag{3-50}$$

则按金属量划分的矿床规模与经验划分一致，具体划分如下：

小型$<\eta$（1）$\leqslant$中型$<\eta$（2）$\leqslant$大型$<\eta$（3）$\leqslant$超大型$<\eta$（4）$\leqslant$巨型

3.2.3 区域矿化率公式

如果对某类元素矿床有一个一般的下限品位 B，则其区域矿化率可表示为[27]

$$\varepsilon_0 = \frac{\int_{\xi \geqslant B} \xi f(\xi) \mathrm{d}\xi}{\int_{\xi \geqslant 0} \xi f(\xi) \mathrm{d}\xi} \tag{3-51}$$

式（3-51）不仅可用来估计区域矿化率，还可以用来填制区域矿化率图。从经验上看，对不同元素来说，矿化率的数量级约为万分之几到千万分之几，几何平均值约为百万分之八（图3-23和表 3-1）[27~30]。

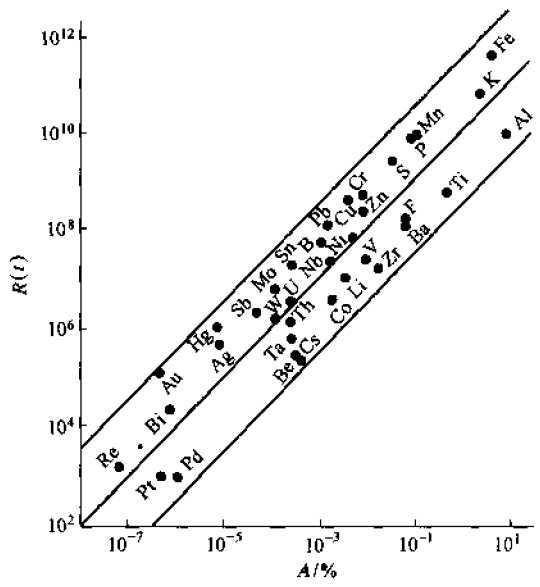


图 3-23　储量与丰度的线性关系[7]

表 3-1　一些元素的工业成矿率估值[27]

元　素	工业成矿率	元　素	工业成矿率	元　素	工业成矿率
Au	2.0×10^{-4}	B	3.4×10^{-5}	F	1.7×10^{-6}
Fe	8.5×10^{-5}	Sb	2.9×10^{-5}	V	1.7×10^{-6}
Hg	8.5×10^{-5}	Zn	2.0×10^{-5}	Ta	1.5×10^{-6}
Mn	6.3×10^{-5}	K	2.0×10^{-5}	Ba	1.4×10^{-6}
P	6.2×10^{-5}	Bi	1.3×10^{-5}	Co	1.4×10^{-6}
Sn	6.0×10^{-5}	Re	1.3×10^{-5}	Pt	1.3×10^{-6}
Cu	5.5×10^{-5}	U	8.5×10^{-6}	Al	1.1×10^{-6}
Pb	5.2×10^{-5}	W	7.8×10^{-6}	Ti	8.7×10^{-7}
S	5.1×10^{-5}	Nb	7.8×10^{-6}	Zr	6.3×10^{-7}
Ag	4.7×10^{-5}	Ni	7.1×10^{-6}	Be	4.9×10^{-7}
Cr	4.1×10^{-5}	Th	3.4×10^{-6}	Pd	4.2×10^{-7}
Mo	4.0×10^{-5}	Li	2.0×10^{-6}	Cs	2.7×10^{-7}

3.2.4　区域成矿率公式

众所周知，不是元素品位高的地段就可以开采，而是要有一定规模的元素聚集量才值得开采。可称元素可开采的最低聚集量为边界金属量 b，则结合式（3-51），可将成矿率写成下式[27,31]：

$$\varepsilon_1=\frac{\int_{\xi\geqslant B}\xi f(\xi)\mathrm{d}\xi\int_b^{\infty}\eta f(\eta)\mathrm{d}\eta}{\int_{\xi\geqslant 0}\xi f(\xi)\mathrm{d}\xi\int_0^{\infty}\eta f(\eta)\mathrm{d}\eta} \tag{3-52}$$

式（3-52）可以用来计算区域上的工业成矿率。

3.2.5　勘查成本与成矿能力的关系

单位区域质量的矿产勘查成本 ψ 大体上是一样的，而单位区域质量的成矿量应正比于该区元素丰度 A 和成矿率 ε，因此，单位储量的勘查成本 y 为下式（图 3-24）[27]：

$$y = \frac{\psi}{\epsilon A} \tag{3-53}$$

$$\ln y = \ln\psi - \ln(\epsilon A)$$

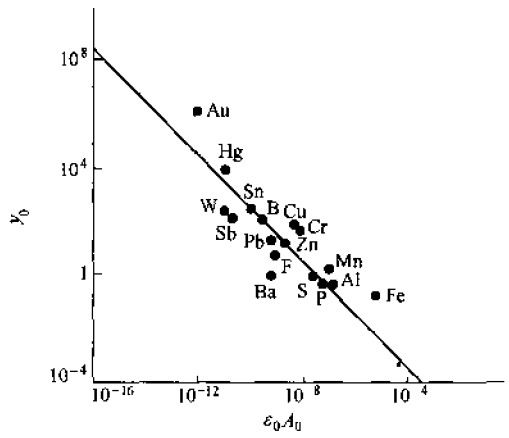


图 3-24　储量勘查成本与区域成矿能力的关系[25]

3.2.6　矿床发现时间阶段

根据发现函数并不是矿产越找越少，而是开始越找越多，到发现顶峰后，才是越找越少[19]。因此，以半发现时间 t_0 为比较点，矿产发现时间 t 有三个阶段：

$t \ll t_0$ 是越发现越多的阶段；

$t \sim t_0$ 是大量发现的阶段；

$t \gg t_0$ 是越发现越少的阶段。

3.2.7　矿产地发现和资源量发现

矿床的发现和资源量/储量的发现不完全是一回事，矿床的发现高峰在前，资源量/储量的发现高峰在后。我国的情况是，矿床的发现高潮早已过去，资源量/储量的发现目前还处在高潮上，这就很容易给人以假象，不知道矿产资源的危机已经到来，看不到寻找矿床已是迫在眉睫的任务。显然，矿床发现和资源量

发现都服从发现公式（图 3-25 和图 3-26），矿产品产量与这二者只差个基建时距（图 3-27）。

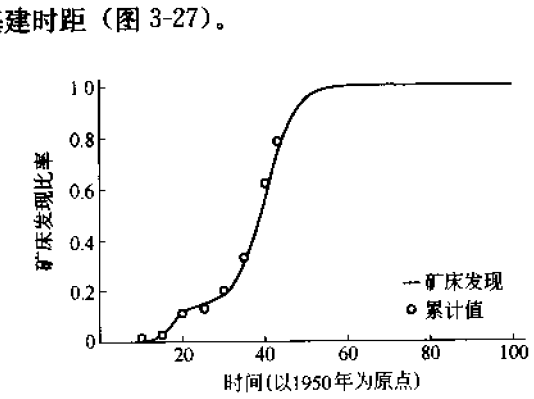


图 3-25　我国金矿床发现比率的时间变化

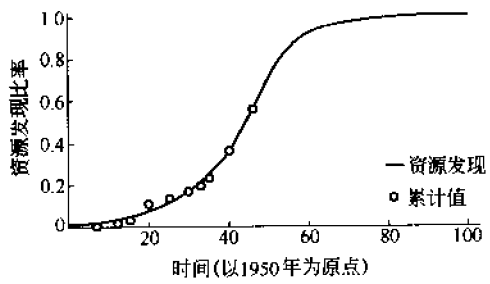


图 3-26　我国金矿资源发现趋势

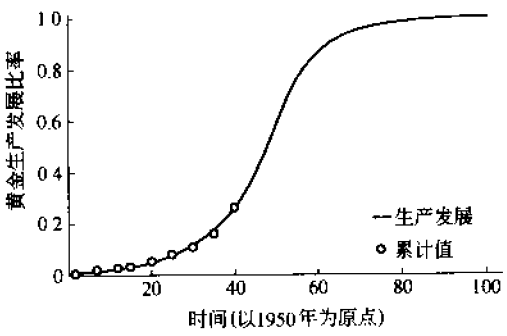


图 3-27　我国金产量累计增长趋势

因此，可得到净资源比率和矿产地与资源量发现的比率差（图 3-28 和图 3-29）。从图 3-28 看，如果没有新的资源发现高潮出现，净资源量终究会消耗殆尽。从图 3-29 看，矿产地的发现高潮之后是资源量的发现高潮；金矿矿产地的发现高潮已经过去，却正处于资源量的发现高潮中；金矿资源量的发现高潮也会过去。

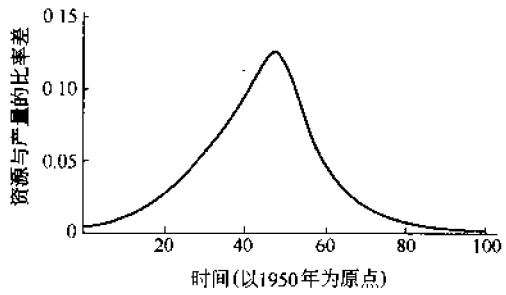


图 3-28　金矿净资源比率的时间变化

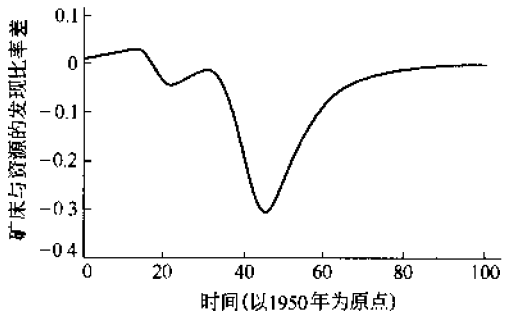


图 3-29　资源与矿床发现比率差的时间变化

由于矿产地的发现应主要是国家行为，资源量的发现应主要是企业的行为，因此，国家要未雨绸缪，现在就要掀起金矿产地的发现高潮，以备将来企业能进入金资源量的发现高潮。

3.3 异常判别和解释

3.3.1 异常下界

根据统计判决规则如贝叶斯（Thomas Bayes，1702～1761）规则、极大极小规则或诺意曼（Carl Gottried von Neumann，1832～1925）-庇尔生（Karl Pearson，1857～1936）规则[32]，可从地球化学测量中区分异常（图 3-30～图 3-32）[7,33]。

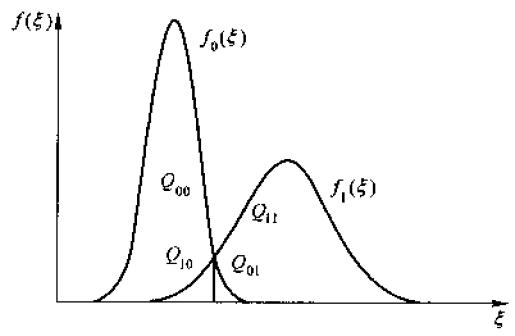


图 3-30　两类错误概率[7]

Q_{00}—把正常判别为正常；Q_{01}—把正常判别为异常；

Q_{10}—把异常判别为正常；Q_{11}—把异常判别为异常

由于发现概率和虚假概率有如下关系：

$$Q_d = 1 - Q_{01} \tag{3-54}$$

在元素含量分布呈对数正态时，根据诺意曼-庇尔生规则，可分别求得发现概率和虚假概率如下：

$$\begin{aligned} Q_d &= \Phi\left(\frac{(m_1 - m_0)\sqrt{n}}{\sigma} + A\right) \\ Q_{01} &= \Phi(A) \end{aligned} \tag{3-55}$$

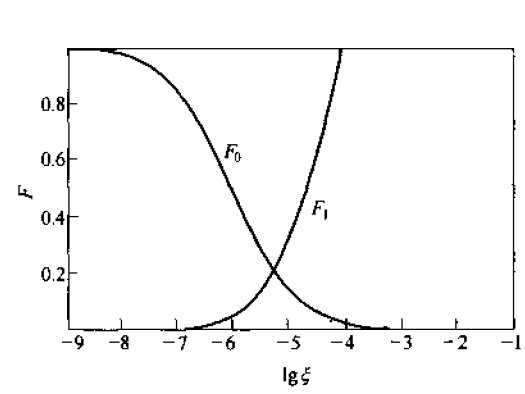


图 3-31　求极小极大策略的方法[7]
（对数正态分布情形）

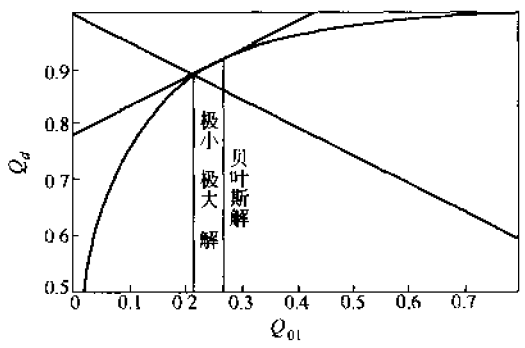


图 3-32　Q_{01}-Q_d 特性曲线的应用[7]

式中，m_0、m_1、n、σ^2 和 A 分别为正常场元素含量对数均值、异常场元素含量对数均值、样品数、元素含量对数方差和一个常数。

3.3.2　异常滤波

用式（3-5）作滤波函数，处理地球化学探矿资料以发现矿致弱异常。即用如下滤波函数：

$$f(x_1) = e^{-kx_1^2} \tag{3-56}$$

对化探观测 $\xi(x)$ 进行滤波：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi(x - x_1) f(x_1) dx_1 \tag{3-57}$$

以消除干扰，发现淹没在干扰中的弱异常[7]。

3.3.3 异常反演

强异常的发现是不成问题的，我们想利用强异常像物探那样推测地下矿体的位置，原则上用拉普拉斯变换可以做到。办法是[7]：

元素空间分布为：

$$c(x) = \int c(x_0) f(x_0, x) dx_0 \tag{3-58}$$

写成拉普拉斯变换：

$$\mathscr{L}c(x) = \mathscr{L}c(x_0) \times \mathscr{L}f(x_0, x) \tag{3-59}$$

因此，矿床的位置可估计如下：

$$c(x_0) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\mathscr{L}c(x)}{\mathscr{L}f(x_0, x)}\right] \tag{3-60}$$

3.3.4 根据负异常推测成矿规模

吸收壁对应着一种重要的异常类型。

在同一地质体中出现了吸收壁式的成矿条件，如出现断裂，则可把具有吸收地层元素作用的断裂看作吸收壁。则矿体附近要出现负异常，并可用式（3-23）表示。成矿元素的总量由式（3-26）表示，显然与负异常的规模成正比（图 3-33）。并且，随着时间的推移，周围的负异常越来越大，中间的元素富集成矿的规模也越来越大。因此，负异常是很好的找矿标志。

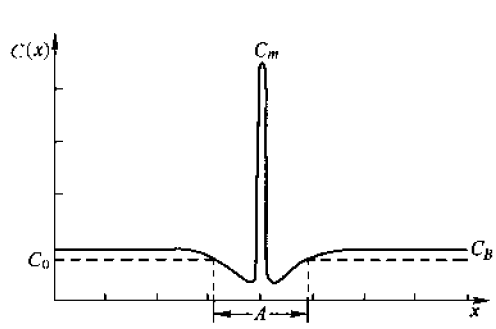


图 3-33　元素空间变化[7]

C_0—地层元素含量；C_B—负异常上限；C_m—矿体元素含量；A—负异常范围；x—空间距离

3.3.5　反射壁条件下的晕函数

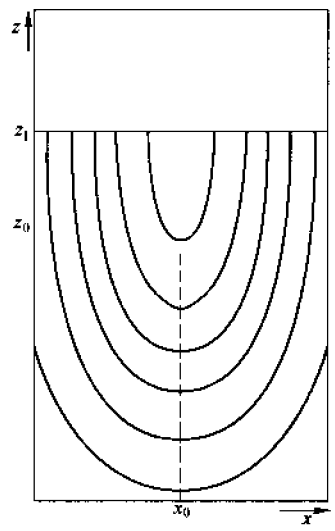


图 3-34　反射壁条件下的晕[7]

当地表面为反射壁时，地下点状矿床的成矿元素运动到地表又向地下运动，则垂直方向上元素转移概率密度函数为下式

$$f(t_0,z_0;t,z)=\frac{1}{b_3\sqrt{2\pi(t-t_0)}}\times \left\{e^{\frac{(z-z_0)^2}{2b_3^2(t-t_0)}}+e^{\frac{[2(z_2-z_0)-(z-z_0)]^2}{2b_3^2(t-t_0)}}\right\} \tag{3-61}$$

从式（3-61）看，地表的元素分布被叠加了。因此，在地表为反射壁的条件下，在地表发现的矿致异常是真异常（图3-34）。

3.3.6 吸收壁条件下的晕函数

在地表是吸收壁的情况下，只要把式（3-20）中的空间坐标理解为垂直方向，地下点状矿床元素分布的转移概率密度和地表吸收概率就可以分别用该式表示（图 3-35）。

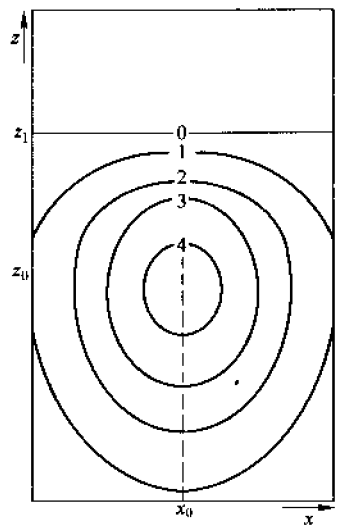


图 3-35 吸收壁条件下的晕[7]

如果地表吸收的元素被地表作用带走，使得地表的元素含量为零。因此，这是盲异常情形，即地表看不到异常。

3.3.7 吸收-反射壁条件下的晕函数

如果地表吸收的元素不被地表作用带走，聚集在地表，即式（3-20）中第一式虽为零、第二式的作用还存在，既可能形成迭加异常（图 3-36），也可能改变存在形态；既以地表为源，又以地表为反射壁，做不同的随机运动，并与地下矿床继续迁移来的元素一起，形成假异常（图 3-37）。

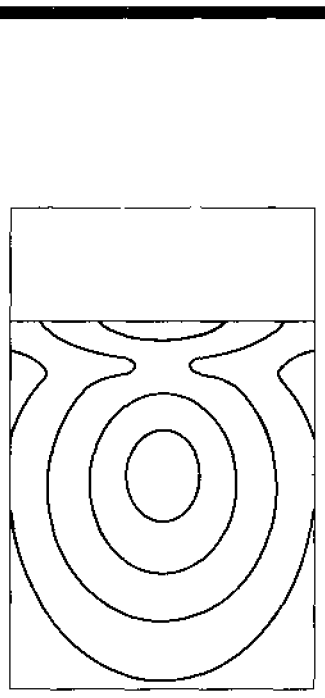


图 3-36　吸收转化壁条件下的迭加异常晕[7]

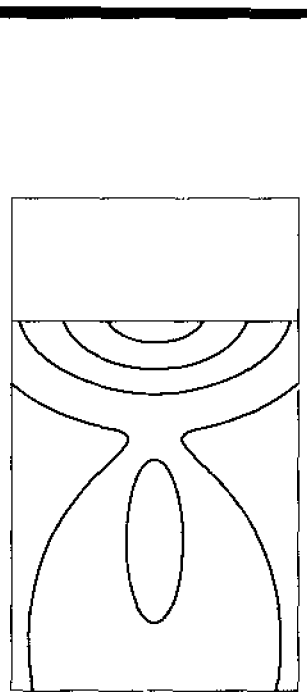


图 3-37　吸收转化壁条件下的假异常晕[7]

3.3.8　矿化率填图方法

元素含量呈对数正态分布时，矿化率为

$$\varepsilon_0 = \Phi\left(\frac{m+\sigma^2-\ln B}{\sigma}\right) \tag{3-62}$$

矿体边界品位 B 是个经验值，应由区域上过去的矿产勘查经验经概略经济分析确定。如地质出版社出版的《矿产工业要求参考手册》（全国储委办主编，1987）中关于矿床边界品位的要求，就可供参考。表 3-2 是我们据其给出的建议值。

计算成矿率实际上是计算元素品位对数的平均值、均方根差及其之间的比值关系，从地球化学测量的现实出发，这种计算只能是根据空间一点周围的测量值求这个空间点上的平均值和方差。这样的计算目前已有了不同的方法，如平均值法和地质统计学法等。

表 3-2　边界品位 B 的参考值

矿　种	边界品位 B	矿　种	边界品位 B	矿　种	边界品位 B
铁	20%～25%	钼	0.03%	铪	0.002%
锰	约 10%	铋	0.2%	锶	7%
铬	4%～5%	汞	0.04%	稀土	0.8%，0.04%
钛	0.6%	锑	0.7%	钪	0.001%
钒	0.3%	金	1×10^{-6}	锗	0.001%
铜	0.2%	银	40×10^{-6}	镓	0.001%
铅	0.3%	铂族	0.3×10^{-6}	铟	0.001%
锌	0.5%	锂	0.5%	铊	0.001%
铝	21%	铷	0.05%	铼	2×10^{-6}
镁	11%	铯	0.02%（?）	镉	0.01%
镍	0.2%	铍	0.02%	硒	0.001%
钴	0.02%	铌	0.007%	碲	0.001%
钨	0.06%	钽	0.008%	铀	0.03%
锡	0.1%	锆	0.2%	钍	0.08%

即矿化率中不仅含有元素含量对数平均值，还含有元素含量对数方差和矿床的一般边界品位，不但能把元素丰度高的地区圈入，还能把元素丰度低而方差大的地区圈入。例如，200 万分之一的地球化学填图，每 $4km^2$ 一个组合样，$1cm^2$ 的图面上将有 100 个组合样，采用同样面积的窗口进行滑动平均，可以填出精度很高的矿化率图。当然，实际填图时，不必进行矿化率计算，只须计算到标准正态变量，就可以据表 3-3 的对应值圈出等成矿率图[29,30]。

表 3-3　成矿率等值线所对应的标准正态变量值

成矿率 $\varepsilon=\Phi(x)$ 的等值线值	相应标准正态变量值 x	成矿率 $\varepsilon=\Phi(x)$ 的等值线值	相应标准正态变量值 x
0.0000005	−4.89168	0.001024	−3.08324
0.000001	−4.75761	0.002	−2.87813
0.000002	−4.61138	0.004	−2.65212
0.000004	−4.46524	0.008	−2.40892
0.000008	−4.31450	0.016	−2.14450
0.000016	−4.15873	0.032	−1.85222
0.000032	−3.99759	0.064	−1.52208
0.000064	−3.83027	0.128	−1.13571
0.000128	−3.65620	0.256	−0.65503
0.000256	−3.47442	0.512	0.03000
0.000512	−3.28387	1	∞

3.4 勘查工程选择

3.4.1 采样不确定关系

除了式（2-64）给出的粒子的位置、时刻、动量和能量都不确定外，根据式（2-73）以及 $n=V/v$，立即可得[34]

$$\sigma^2 = E(\Delta\xi^2) = \frac{v}{V}(C-C_0)(C_1-C) \qquad (3\text{-}63)$$

式（3-63）方差中考虑的只是客观因素如矿物颗粒大小 v、采样大小 V、元素平均含量 C、背景含量 C_0 和上限含量 C_1，其实还有许多人为因素如采样、碎样、缩分、化验等引起的偏差（图 3-38）。

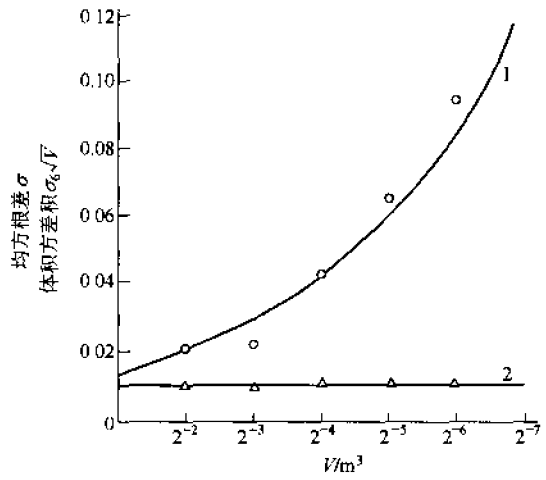


图 3-38 取样误差与取样体积的关系[7,34]

1—取样误差；2—取样体积与误差乘积

因此，式（3-63）的方差只是实际方差的下限，实际的方差公式应为下式

$$\sigma^2 \geqslant \frac{v}{V}(C-C_0)(C_1-C) \qquad (3\text{-}64)$$

这是地球化学观测中的一个非常重要的公式，不但在样品处理上，而且在工程选取上，都很重要。

3.4.2 分样的切乔特公式

在分析样品的处理中，有个限制缩分后一个样品最小质量的经验公式——切乔特公式

$$Q_{min} \geqslant Kd_{max}^2 \tag{3-65}$$

式中，Q_{min}、d_{max}和K分别为缩分后一个样品的最低质量（kg）、样品破碎后最大颗粒的直径（mm）和由样品均匀程度决定的缩分系数，取值在0.05～1.00之间。改写式（3-64），可得

$$V\rho \geqslant \frac{\upsilon(C-C_0)(C_1-C)\rho}{\sigma^2} \tag{3-66}$$

式中，ρ为样品的密度。从式（3-66）看，如用破碎后样品的最大颗粒表示矿物颗粒，并且当原来矿物颗粒体积是这种最大颗粒体积的n倍时，即

$$v' = \frac{v}{n} = \frac{\pi}{6}d_{max}^3 \tag{3-67}$$

综合考虑式（3-65）～式（3-67），可得

$$\begin{aligned} Q_{min} &= \rho V \\ &= Kd_{max}^2 \\ K &= \frac{(C-C_0)(C_1-C)}{\sigma^2}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{2/3}\left(\frac{\upsilon}{n}\right)^{1/3} \end{aligned} \tag{3-68}$$

式（3-68）缩分系数K中，σ^2是人们对样品分析误差的要求；υ反映了样品的不均匀程度，即原来样品中矿物颗粒越大，K值越大；n越大表示样品破碎得越细，K值可以越小；其余各量也影响缩分系数的取值。这些含义显然与经验上决定K值的要求一致，但我们有可能根据上式从理论上决定K值。

3.4.3 工程孔径公式

取样对样品的代表性影响更大。根据式（3-64），在一定的

误差要求下，采样体积应当满足下式的要求[7]

$$V \geqslant \frac{v(C-C_0)(C_1-C)}{\sigma^2} \tag{3-69}$$

以钻探为例，矿层厚度为 h、岩芯半径为 r 时，样品的体积为

$$V = \pi r^2 h \tag{3-70}$$

则根据式（3-63）和式（3-64），对钻孔岩芯有如下要求：

$$r^2 \geqslant \frac{v(C-C_0)(C_1-C)}{\pi h \sigma^2} \tag{3-71}$$

由式（3-71）可知，在一定分析方差要求下，岩芯半径是由矿物颗粒大小和矿层厚度决定的。

在矿床资源量/储量估计中，元素含量往往采用平均品位，参与平均的样品数也是待定的问题。由于 n 个样品平均值的方差与样品的方差有如下关系

$$\sigma_1^2 = \frac{\sigma^2}{n-1} \tag{3-72}$$

因此，样品的体积可以写为

$$V \geqslant \frac{v(C-C_0)(C_1-C)}{(n-1)\sigma_1^2} \tag{3-73}$$

3.4.4 工程网度的判别

探矿工程网度的判别可以有两个途径[35]，一是根据每个见矿孔周围的见矿情况判别（图 3-39 和表 3-4）；另一是根据总体见矿孔情况判别（图 3-40）。

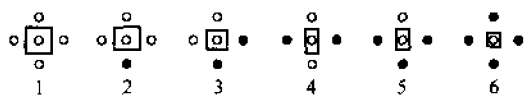


图 3-39 钻孔见矿的典型情况[7,35]

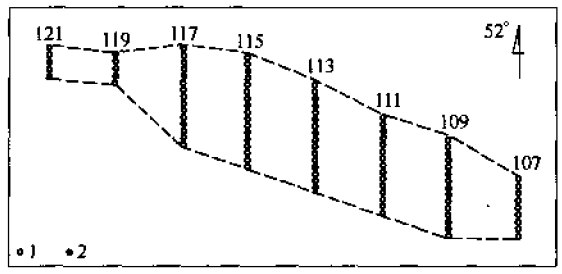


图 3-40　某砂金矿钻孔控制情况[7,35]

1 -对应见矿孔；2--无矿孔

表 3-4　不同对应见矿情况的面积系数

对应见矿情况	K	面积系数 λ_k
A	1	1
B	2	3/4=0.75
C	3	9/16=0.5625
D	4	1/2=0.5
E	5	3/8=0.375
F	6	1/4=0.25

如果用 m 表示矿体见矿的总孔数，用 n 表示矿体内部的见矿孔数，则勘查网的控矿程度可以表示如下[36]：

预查网度：$n=0$，$m\approx1$

普查网度：$n=0$，$m>1$

详查网度：$0<n/m<1/3$

勘探网度：$n/m\geqslant1/3$

3.4.5　工程网度的预测

对矿床的勘查控制程度进行判断和预测。由于矿体是用相同的边界品位圈定的，从元素空间分布公式看，理想情况下二维平面上矿体应是椭圆。并且，其长轴和短轴的控矿工程数分别为 a 和 b 时，则矿体工程控制程度 λ 应为：

$$\beta=\frac{(a-1)(b-1)}{ab}$$

$$\alpha = \frac{\text{矿体内见矿钻孔数}}{\text{矿体内钻孔数}} \tag{3-74}$$

$$\lambda = \frac{\alpha(4\beta+1)}{5}$$

我们用上式所给的比例和见矿孔数对矿床勘查控制程度进行分析，从而可以避免过去判断中过多的人为因素；并能对进一步勘查所能达到的控制程度进行预测（表 3-5～表 3-8）[7]。

表 3-5　λ 值与钻探网度的关系

λ 值	钻探网度	λ 值	钻探网度
1±	A	0.5±	D
0.75～1	A+B	0.375～0.5	D+E
0.75±	B	0.375±	E
0.5625～0.75	B+C	0.25～0.375	E+F
0.5625±	C	0.25±	F
0.5～0.5625	C+D		

表 3-6　某砂金矿区一个矿段的钻探网度判别

钻探网度 (λ)	钻孔数 n				
	1600×160	800×80	800×40	400×40	200×20
A (1)	0	0	0	1	11
B (0.75)	0	0	0	16	28
C (0.5625)	0	3	3	22	21
D (0.5)	1	0	31	14	6
E (0.375)	23	35	29	19	8
F (0.25)	52	38	13	4	2
λ 平均值	0.2911	0.3199	0.4120	0.5329	0.6620
判别网度	E+F	E+F	D+E	C+D	B+C
实际网度	地质	地质	D+E	C+D	B+C

表 3-7　m、n 和 β 值

钻探网度	1600×160	800×80	800×40	400×40	200×20
m	1	1.75	1.75	3.5	7
n	2	4	8	8	16
β	0	0.321	0.375	0.625	0.803

表 3-8　某砂金矿区一个矿段的钻探网度预测

钻探网度	1600×160	800×80	800×40	400×40	200×20
λ	0.1567	0.3579	0.3918	0.5485	0.6600
预测网度	F	E+F	D+E	C+D	B+C
实际网度	地质	地质	D+E	C+D	B+C

3.4.6　网度控矿率公式

通过观测，确定矿体长、宽、厚分布公式（3-47）

$$f_0 = f(x,y,z) \tag{3-75}$$

网度特性（图 3-41）公式

$$f_1 = \begin{cases} xy/ab, 0 \leqslant x < a; 0 \leqslant y < b; z \geqslant 0 \\ y/b, x \geqslant a; 0 \leqslant y < b; z \geqslant 0 \\ x/a, 0 \leqslant x < a; y \geqslant b; z \geqslant 0 \\ 1, x \geqslant a; y \geqslant b; z \geqslant 0 \end{cases} \tag{3-76}$$

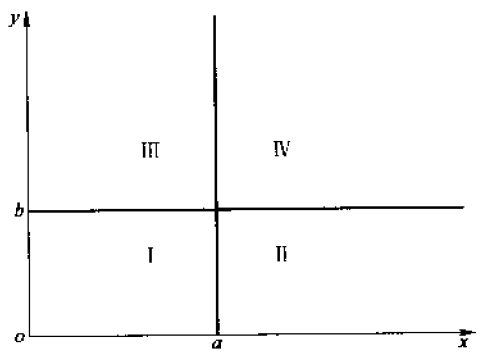


图 3-41　矿体长、宽与钻探网线距、孔距的坐标关系[7,37]

Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ- 钻探网分割的坐标区

体积公式和平均体积公式

$$V = \frac{\pi xyz}{6}$$

$$\overline{V} = \int_0^{\infty} V f_0 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{3-77}$$

工程见矿率公式

$$F_0 = \int_0^{\infty} f_0 f_1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{3-78}$$

工程控制矿量比率公式

$$F_1 = \frac{1}{\overline{V}} \int_0^{\infty} V f_0 f_1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{3-79}$$

对于希腊一个铬铁矿矿区（图 3-42），我们的计算（图 3-43 和图 3-44）和他们雇用中学生进行的 5000 次抛网实验的结果一致[37]。

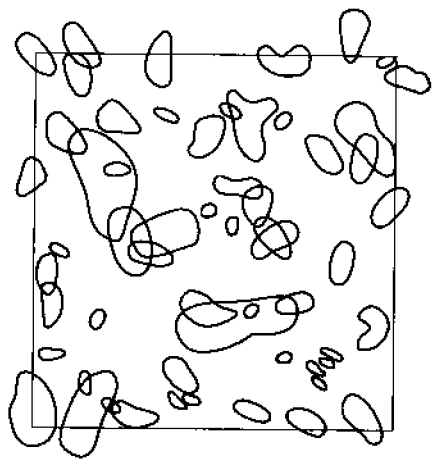


图 3-42　希腊 Tsangle 铬铁矿区中 100m×100m 范围内矿体投影[7,37]

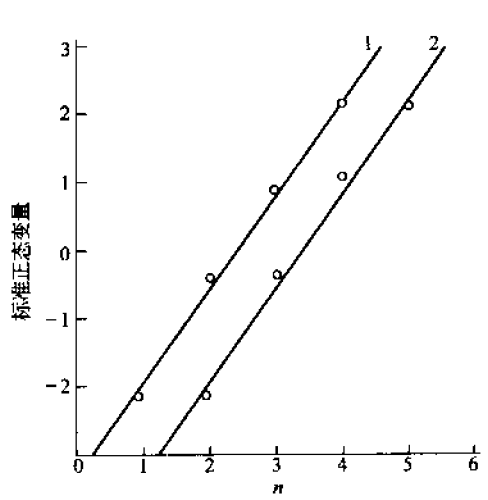


图 3-43　希腊 Tsangle 铬铁矿区矿体长、宽分布[7,37]

1—宽度（2^nm）；2　长度（2^nm）

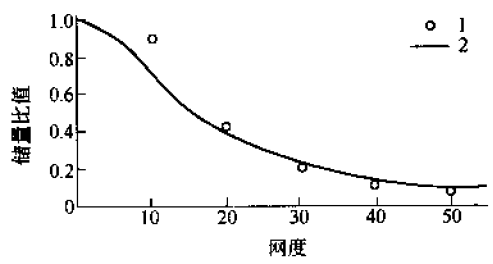


图 3-44　试验估计储量与实际储量比值[7,37]

1—据图 3-43 抛网实验结果；2—据图 3-43 和式（3-79）计算

3.5　资源量/储量估计

3.5.1　品位平均值公式

对于一般的平均值公式[38]

$$m_s = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)^{1/s} \tag{3-80}$$

人们通常认为方次 s 的取值是任意的。我们发现它与加权平均

$$m_\lambda = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\xi_i / \sum_{i=1}^{n}\lambda_i \tag{3-81}$$

的权 λ 有联系。可以证明（详见附录 2），当权与随机变量相关时，即

$$\ln\lambda_i = a + b\ln\xi_i \tag{3-82}$$

有

$$s = 2b + 1 \tag{3-83}$$

这表明，当 b=1、0.5、0、−0.5、−1 时，即 s=3、2、1、0、−1 时，是一些典型的平均值：立方平均、平方平均、算术平均、几何平均、调和平均。

3.5.2 品位变异度计算

不同类型的矿床，人们对其评价的可靠程度是不同的。我们选择了铁矿床、铅锌矿床和金矿床作为例子，研究了这个问题。所谓品位变异度，指的是某种平均品位所可能有的平均变化范围。我们所选择的三种矿床，品位变异度依次增大。为了在同一变异度下看矿床的工程控制程度，人们往往是相应依次增加勘探网的密度。但在多数情况下，还是做不到。譬如金矿床，无论怎样的工程密度，都达不到铁矿床的工程控制程度。莫如承认现实，改变变异度要求的对象。

如果我们希望所要求的品位变异度在 7.5%～15%之间，至多不得超过 30%，这对铁矿床来说，要求的是工程品位或块段品位；对铅锌矿床来说，要求的是块段品位或矿体品位；对金矿床来说，要求的是矿体品位或矿床品位。

3.5.3 理论变异函数

矿床资源量/储量估计[39]中的克立格方法已提出半个世

纪[40,41]，但所用的变异函数一直没有理论表示。根据变异函数的定义和前面关于元素空间分布和转移概率的讨论，我们得到了变异函数的具体理论表示[42]：

$$\gamma(x,h)=S^2+c(t,x)c(t,x+h)-\varphi(x,h)c^2(t,x')$$

$$\varphi(x,h)=\frac{c_0^2(t_0,x_0)f(t_0,x_0;t,x)f(t_0,x_0;t,x+h)}{c_0^2(t_0,x_0')f^2(t_0,x_0';t,x')} \tag{3-84}$$

并且，弱平稳条件下变异函数的理论表示是

$$\gamma(h)=S^2+m^2[1-\varphi(h)]$$

$$\varphi(h)=\frac{f(t_0,x_0;t,x)f(t_0,x_0;t,x+h)}{f^2(t_0,x_0';t,x')} \tag{3-85}$$

根据式（3-85）可得常用的高斯型和指数型的变异函数，面这两种函数过去都是从经验中模拟来的。

3.5.4 广义克立格方程

以上讨论表明，内蕴平稳假设是很难达到的。为此，我们建立了广义克立格方法，也就是说，对观测数据需要经过平稳变换、消偏变换、消畸变换、求优变换、非负变换和求简变换，以满足平稳要求。从而给出了如下广义克立格方程：

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{Y} & \boldsymbol{M}'\\ \boldsymbol{M} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\lambda}\\ \boldsymbol{\mu}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{Y}_0\\ \boldsymbol{M}_0\end{pmatrix} \tag{3-86}$$

式（3-86）中各量又都是矩阵套矩阵、由观测数据变换来的复杂数表[43]。

3.6 资源量/储量评价

3.6.1 资源量/储量与边界品位关系的统计公式

应用元素含量分布公式，也可以给出矿床资源量/储量的估值：

$$Q = A + K\int_{\xi \geqslant B} D\mu_1(\xi, B, \alpha_0) f(\xi)\mathrm{d}\xi$$
$$\eta = a + k\int_{\xi \geqslant B} D\xi\mu_1(\xi, B, \alpha_0) f(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{3-87}$$

式中，除有关常数外，D、α_0、$\mu_1(\xi, B, \alpha_0)$分别为矿石体重、临界品位和如下品位的矿床隶属函数（图 3-45）[7,25,39]。

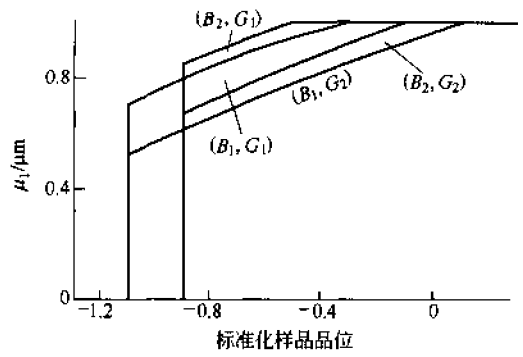


图 3-45　品位的矿床隶属函数与边界品位和工业品位的关系[7,25,39]

$$\mu_1(\xi, B, \alpha_0) = \begin{cases} 0, \xi < B \\ \dfrac{1 - \int_0^{2\alpha_0 - \xi} f(\xi')\mathrm{d}\xi'}{1 - \int_0^{B} f(\xi)\mathrm{d}\xi}, B \leqslant \xi \leqslant 2\alpha_0 - B \\ 1, \xi > 2\alpha_0 - B \end{cases} \tag{3-88}$$

当然，式（3-88）是针对中国用双指标估计资源量/储量而言；就国际上许多国家的情况看，式（3-88）中的第二式将退化为 1。

当已知元素含量分布（图 3-46）时[44]，就可以给出矿石量和金属量的表示（图 3-47 和图 3-48）。

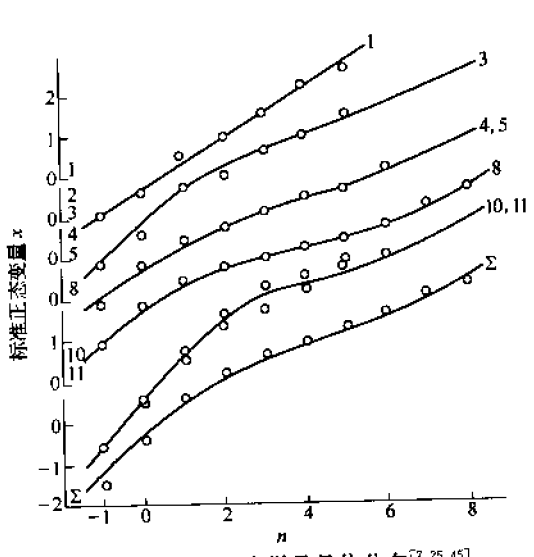


图 3-46　某金矿床样品品位分布[7,25,45]

n -品位指数，即品位为 $\xi_0 \cdot 2^n$；

1、2、3、4、5、8、10、11- 矿体代号；Σ—矿床代号

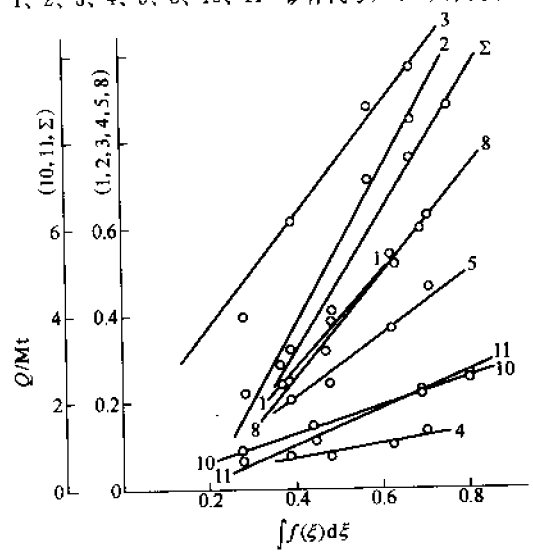


图 3-47　矿床矿石量与边界品位的统计关系[7,25]

1～5，8，10，11- 矿体代号；Σ—矿床代号

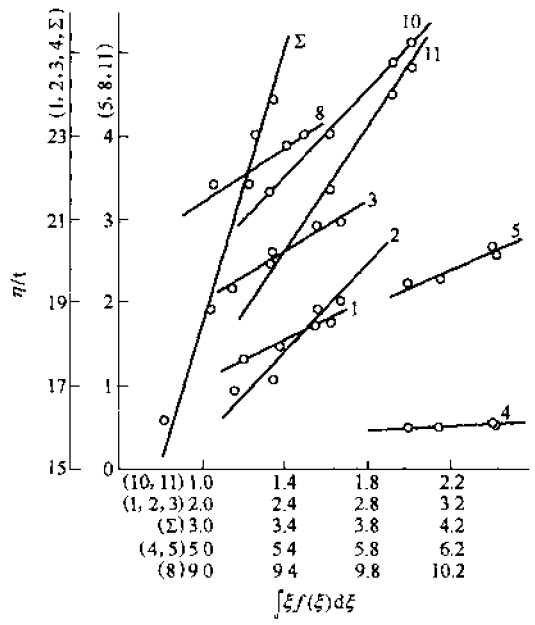


图 3-48　矿床金属量与边界品位的统计关系[7,25]

1~5，8，10，11 -矿体代号；Σ -矿床代号

3.6.2　资源量/储量与边界品位关系的积分公式

根据前面的理论，在三维空间中，矿体元素空间分布公式可简写为

$$c = c_m \exp\left(-\frac{x_1^2}{2\sigma_1^2} - \frac{x_2^2}{2\sigma_2^2} - \frac{x_3^2}{2\sigma_3^2}\right) \tag{3-89}$$

在矿床边界品位为 B 时，由上式我们求得矿床的边界方程

$$\frac{x_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{x_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{x_3^2}{\sigma_3^2} = 2\ln\frac{c_m}{B} \tag{3-90}$$

式（3-90）表明，理论上矿体形状是个椭球体。因此，矿石量和金属量应分别为对其所在的体积 V 进行如下的空间积分[25]

$$Q=\iiint_V D\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3=(A-K\ln B)^{3/2}$$

$$\eta=\iiint_V Dc(x_1,x_2,x_3)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3=a+k\int_0^{A/K-\ln B}\sqrt{r}\,\mathrm{e}^{-r}\mathrm{d}r \tag{3-91}$$

式（3-91）虽然是首先从理论上获得的，却与所见的、形状复杂程度不一的各种固体矿床的观测一致（图 3-49 和图 3-50）。为与后面的对应公式区别，特称其为矿床资源量/储量的积分公式。

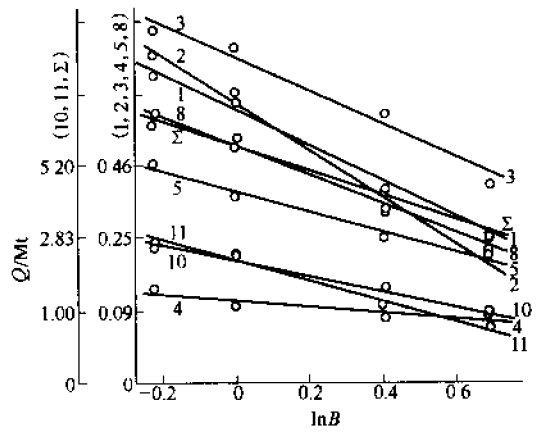


图 3-49　矿床矿石量（Q）与边界品位（B）的积分关系[7,25]

1～5，8，10，11—矿体代号；Σ　全部矿石量代号

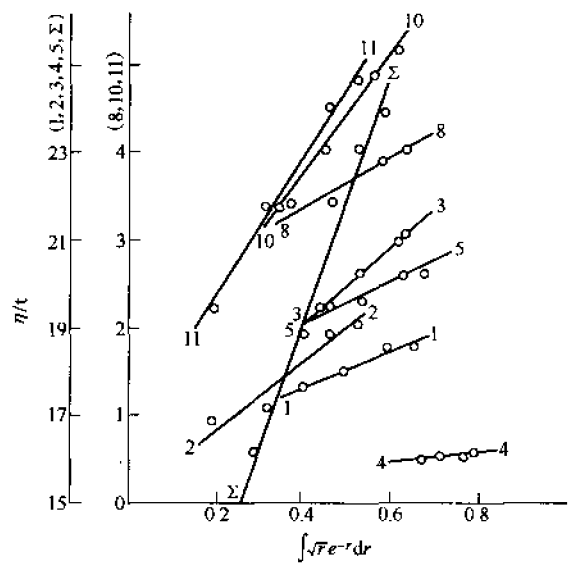


图 3-50　矿床金属量（η）与边界品位的积分关系[7,25]

1～5，8，10，11—矿体代号；Σ- 全部矿石量代号

3.6.3　利润函数

如果我们根据矿床的特点和当地环境条件计算出矿床开采的临界品位 α_0，我们就可以写出矿床的利润函数[25,46]。

因为矿床金属量应与开采时的产出成正比；矿床矿石量与临界品位的乘积应与开采时的投入成正比；两者之差应与开采时的利润成正比。因此，矿床开发的利润函数可以不必通过更多的经济计算而直接得到

$$R = \eta - \alpha_0 Q \tag{3-92}$$

把关于矿床资源量/储量的积分公式(3-91) 或统计公式(3-87)代入式 (3-92)，即可求得具体的利润函数。并且，这样求得的利润函数有极大值（图 3-51 和图 3-52)。

极大值所对应的边界品位，无论用积分公式求，还是用统计公式求，结果都一样，相对偏差不超过 0.003（表 3-9)。

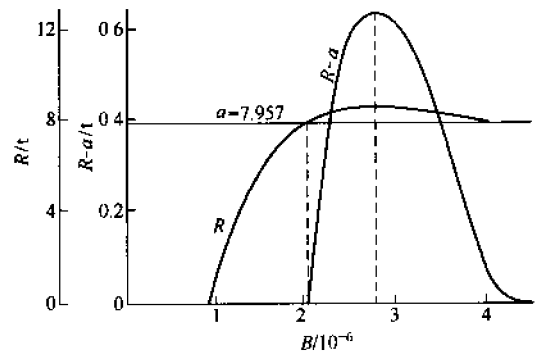


图 3-51　积分情形下利润函数随边界品位的变化[7,25]

R—利润函数；*B*—边界品位

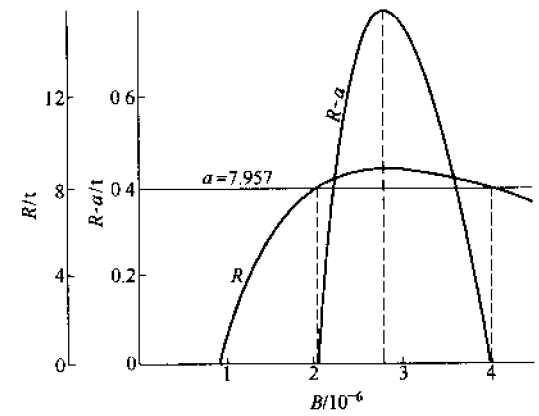


图 3-52　统计情形下利润函数与边界品位关系[7,25]

R—利润函数；*B*—边界品位

表 3-9　不同计算方法所得结果比较

矿体代号	积分结果/统计结果	矿体代号	积分结果/统计结果
1	0.9999	8	0.9999
2	1.0000	10	1.0001
3	0.9997	11	0.9999
4	0.9972	Σ	1.0003
5	1.0000		

以上这一点很重要，因为我们由此发展出了一种确定矿床边界的理论方法。

3.6.4 工业指标优化方法

我们认为，所谓矿床工业指标优化，本质上就是在充分利用资源的前提下，尽可能获得更多的矿床开发利润。或者说，就是要寻求利润函数的极大化条件[47]。

积分情形下，矿床最大利润条件下的边界品位是

$$B_{\max} = \alpha_0 \frac{3}{2} \frac{K^{3/2}}{k} e^{\lambda_1 K} \tag{3-93}$$

统计情形下，矿床最大利润条件下的边界品位是

$$B_{\max} = \alpha_0 \frac{K}{k} \tag{3-94}$$

用最大利润条件下的边界品位，圈定矿体，计算矿石量和金属量，区分资源量，然后才是逐个对矿体进行经济评价。

在实际工作中，不同类型矿床经济研究的界限不是十分明确，必须加以界定。为此，我们把工程网度和采选冶条件的观测和试验联系起来，提出矿床经济研究分类，见表 3-10。

表 3-10 矿床经济研究分类

网 度	详查采选冶条件观测和试验	勘探应做的采选冶条件观测和试验	经济研究分类
任何网度	不要求做或未做		概略研究
详查网度	已 做	—	预可行性研究
勘探网度		要求做而未做	
		要求做并已做	可行性研究
		不要求做而未做	

对已估算资源量的矿体进行经济评价，主要是计算其内部收益率 ρ 及其变化 Δ，然后与行业平均内部收益率 ρ_1 比较。为了把开发风险[48]考虑在内，我们做如下分类[36]：

经济的：$\rho-\Delta\geqslant\rho_1$；

边际经济的：$\rho_1>\rho-\Delta\geqslant 0$；　　(3-95)

次边际经济的：$\rho-\Delta<0$；

内蕴经济的：从概略研究中得出，经济效益不清楚。

这样，我们就可以从矿床的控制资源量（332）中区分出预可采储量（122）、基础储量（122b，2M22）和资源量（2S22），从矿床的探明资源量（331）中区分出可采储量（111）、预可采储量（121）、基础储量（111b，121b；2M11，2M21）和资源量（2S11，2S21）。如果勘查和评估与时俱进，则经济效果最好，控制的资源量将只是 2S22；探明的资源量将只是 2S11 和 2S21。

3.6.5　品位系数与矿物颗粒度的理论关系

还有一个有趣的问题，那就是矿床的勘查品位与开采品位对比问题。这个问题与矿物颗粒大小和采样大小有关。前者是客观的，无论勘查还是开采，都不变。后者是人为的，勘查和开采的差别很大：勘查相当小体积采样，开采相当大体积采样。并且，概率最大的情况，是最容易通过采样发现的情况。

首先，以式（2-72）第一式为例，其最大概率条件是

$$\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}=0 \tag{3-96}$$

由式（3-96）和式（2-72）第一式得

$$\xi=e^{m_0-\sigma_0^2} \tag{3-97}$$

从式（2-73）看，如果目标矿物颗粒平均体积为 v，而样品体积为 V 时，则有下式

$$n=\frac{V}{v},\sigma^2=\frac{v(C_1-C_0)}{V(C-C_0)} \tag{3-98}$$

根据式（3-98）和式（3-97），可得开采品位与勘查品位的比值：

$$\frac{\xi_1}{\xi_0}=(1-\rho)e^{\sigma_{01}^2-\sigma_{00}^2}=(1-\rho)\exp\left[\frac{C_1-C_0}{C-C_0}\frac{V_1-V_0}{V_0V_1}v\right] \tag{3-99}$$

这是品位比与矿物颗粒大小的一般公式。式中，ρ 为开采贫化率。

令

$$k=\frac{C_1-C_0}{C-C_0}\frac{V_1-V_0}{V_0V_1} \tag{3-100}$$

则由式（3-100）和式（3-99）可得

$$\frac{\xi_1}{\xi_0}=(1-\rho)e^{kv}\cong(1-\rho)(1+kv) \tag{3-101}$$

这就是已在砂金矿勘查和开采对比中发现的品位系数和粒度系数的关系[49]（图 3-53）。

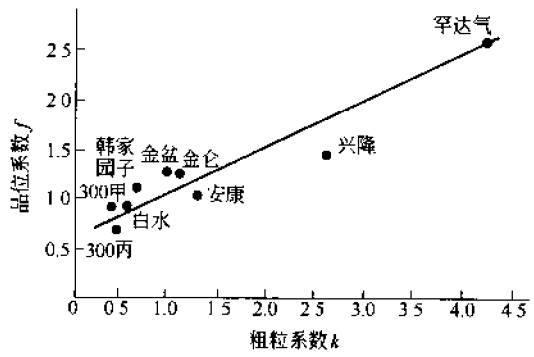


图 3-53　品位系数与粗粒系数相关图[49]

4 结 束 语

4.1 方程参数问题

地质体中元素随机运动的最重要参数是单位时间方差增量的时间积分

$$\sigma^2 = \int_{t_0}^{t} b^2(t')\,\mathrm{d}t' \tag{4-1}$$

例如，小秦岭石英脉中金元素这个参量的经验值是 $\sigma=90\mathrm{m}$，从爱因斯坦给出的表示看，

$$\sigma^2 = \frac{RT}{N}\,\frac{t-t_0}{3\pi kP} \tag{4-2}$$

我们似乎可以从地球化学的动力学研究中寻求理论表示。因为，这也是地球化学的运动学背景和动力学背景之间的联系。

4.2 同位素分馏问题

地质体中普遍存在着同位素分馏问题，应用我们的理论，有可能研究其空间变化特点。如朱炳泉关于急变带上和矿体中同位素的空间变化工作。

4.3 环境地球化学问题

人类生存环境是地质体的一个组成部分，其中的元素运动遵从同样的规律。有益还是有害，是人从自身的角度得出的观点。“有益”元素的随机运动规律，用来勘查矿产和研究矿产；“有害”元素的随机运动规律，用来调查环境和研究环境。都是人在应用元素随机运动的同一规律。所以，统计地球化学应用到环境地球化学中，就像统计地球化学应用到勘查地球化学中一样，只是个用不用和什么时候用的问题，而不是能不能用的问题。

附　录

附录 1　斯特林公式及其近似式

斯特林公式是阶乘计算的如下展开式

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+\frac{1}{12n}+o(1/n)\right)$$
$$o(1/n) = \frac{1}{288n^2}-\frac{139}{51840n^3}-\frac{571}{2488320n^4}+\cdots \tag{1}$$

由于有如下近似关系

$$1+\frac{1}{12n}+o(1/n)\cong\begin{cases}1\\ \sqrt{1+1/(2n\pi)}\\ \sqrt{1+1/(6n)}\end{cases} \tag{2}$$

由式（2）可得如下 3 个近似式

$$\begin{aligned} n! &\cong S_0 = \sqrt{2n\pi}(n/e)^n \\ n! &\cong S_1 = \sqrt{2n\pi}\left(1+\frac{1}{4n\pi}\right)\left(\frac{n}{e}\right)^n \\ &\cong \sqrt{2n\pi+1}(n/e)^n \\ n! &\cong S_{\pi/3} = \sqrt{2n\pi}\left(1+\frac{1}{12n}\right)\left(\frac{n}{e}\right)^n \\ &\cong \sqrt{2n\pi+\pi/3}(n/e)^n \end{aligned} \tag{3}$$

附表 1　阶乘值：近似计算与直接计算比较

n	$S_0/n!$	$S_1/n!$	$S_{\pi/3}/n!$
0	0	1	1.047198
1	0.922137	0.992810	0.996022
2	0.959502	0.996149	0.998682
3	0.972702	0.998170	0.999356
4	0.979424	0.998719	0.999620
5	0.983493	0.999023	0.999750
10	0.991704	0.999565	0.999934
20	0.995842	0.999797	0.999983
40	0.992919	0.999902	0.999996
60	0.998612	0.999936	0.999998
80	0.998959	0.999952	0.999999
100	0.999167	0.999962	0.999999

从附表 1 可以看出，这些近似式与直接计算的阶乘值非常接近。并且，在大多数情况下，第三式的计算值是最接近直接计算的。

附录 2　平均值计算与值的分布

在进行数据处理时，笔者发现了一个新的关系：当 n 个随机变量 ξ 及其权 λ 为已知时，如果下式成立，

$$\ln\lambda_i = a + b\ln\xi_i \tag{4}$$

则其加权平均值可表示如下

$$\sum_{i-1}^{n}\lambda_i\xi_i / \sum_{i-1}^{n}\lambda_i = m_s, s = 2b+1 \tag{5}$$

这里，m_s 是平均值的如下通用公式[4]

$$m_s = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)^{1/s} \tag{6}$$

证明如下：

由于 m_s 是平均值，其差分应为零，即

$$\Delta m_{2b+1} = 0 \tag{7}$$

由式（6）看

$$\Delta m_{2b+1} = \frac{2b+1}{n} m_{2b+1}^{-2b}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^{2b}\Delta\xi_i \tag{8}$$

因此

$$\sum_{i=1}^{n}\xi_i^{2b}\Delta\xi_i = 0 \tag{9}$$

由于

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^{2b}\Delta\xi_i &= \sum_{i-1}^{n}(m_{2b+1}+\Delta\xi_i)^{2b}\Delta\xi_i \\ &= \sum_{i=1}^{n}(m_{2b+1}^2 + 2m_{2b+1}\Delta\xi_i + \Delta\xi_i^2)^b\Delta\xi_i \qquad (10)\\ &= m_{2b+1}^2\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{2\Delta\xi_i}{m_{2b+1}}+\frac{\Delta\xi_i^2}{m_{2b+1}^2}\right)^b\Delta\xi_i\end{aligned}$$

和

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\xi_i^b\xi_j^b\Delta\xi_i=\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(m_{2b+1}+\Delta\xi_i)^b(m_{2b+1}+\Delta\xi_j)^b\Delta\xi_i$$

$$=m_{2b+1}^{2b}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\left(1+\frac{\Delta\xi_i+\Delta\xi_j}{m_{2b+1}}+\frac{\Delta\xi_i\Delta\xi_j}{m_{2b+1}^2}\right)^b\Delta\xi_i \tag{11}$$

并且 $\Delta\xi_i$ 和 $\Delta\xi_j$ 是围绕零值的随机变量。考虑式（9），比较式（10）和式（11），可近似有

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\xi_i^b\xi_j^b\Delta\xi_i\cong\sum_{i=1}^{n}\xi_i^{2b}\Delta\xi_i=0 \tag{12}$$

根据式(4)、式(5)和式(12)，可得 ξ_i 的加权平均值如下

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\xi_i/\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}e^a\xi_i^{b+1}/\Sigma e^a\xi_i^b$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^{b+1}/\sum_{i=1}^{n}\xi_i^b$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^{b+1}\sum_{j=1}^{n}\xi_j^b/\sum_{i=1}^{n}\xi_i^b\sum_{j=1}^{n}\xi_j^b$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^b(m_{2b+1}+\Delta\xi_i)\sum_{j=1}^{n}\xi_j^b}{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^b\sum_{j=1}^{n}\xi_j^b}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^b m_{2b+1}\sum_{j=1}^{n}\xi_j^b}{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^b\sum_{j=1}^{n}\xi_j^b}+\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^b\Delta\xi_i\sum_{j=1}^{n}\xi_j^b}{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^b\sum_{j=1}^{n}\xi_j^b}$$

$$=m_{2b+1}+\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^{2b}\Delta\xi_i+\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\xi_i^b\xi_j^b\Delta\xi_i}{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^b\sum_{j=1}^{n}\xi_j^b}=m_{2b+1}=m_s \tag{13}$$

这就是我们对所发现的式（4）～式（6）的证明。式（4）～式（6）表明，平均方法并不是可以随便使用的，而是要由权与随机数的对数回归系数决定。几种重要的平均方法见附表 2。

附表 2　几种重要的平均方法

回归系数 b	$S=2b+1$	相应的平均方法
-1	-1	调和平均 $m_{-1}=(\Sigma\xi^{-1}/n)^{-1}$
-0.5	0	几何平均 $m_0=\exp(\Sigma\ln\xi/n)$
0	1	算术平均 $m_1=\Sigma\xi/n$
0.5	2	平方平均 $m_2=(\Sigma\xi^2/n)^{1/2}$
1	3	立方平均 $m_3=(\Sigma\xi^3/n)^{1/3}$

实际上，只有三种平均方法：算术平均、几何平均和指数平均。因为调和平均、平方平均和立方平均只是指数平均的特例。甚至算术平均和几何平均也是指数平均的特例，其相应的指数分别是 1 和 0。

下面我们来证明指数为 0 的指数平均是几何平均：

由于，

$$\begin{aligned}\xi_i &= \exp(s\ln\xi_i)\\ &= 1+s\ln\xi_i+o(s\ln\xi_i)\end{aligned} \tag{14}$$

则当 s 非常小的时候应有：

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i &= 1+\frac{s}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\xi_i+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}o(s\ln\xi_i)\\ &\cong 1+\frac{s}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\xi_i\end{aligned} \tag{15}$$

而当 s 非常小的时候还有：

$$1+\frac{s}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\xi_i \cong \exp\left(\frac{s}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\xi_i\right) \tag{16}$$

因此，当 s 趋于零时有：

$$m_{s\to 0}=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)^{1/s}_{s\to 0}$$

$$=\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\xi_i\right) \tag{17}$$

这就证明了指数为零的指数平均为几何平均。

这些讨论还表明，尽管所讨论的随机变量可能不是正态随机变量，但其 $s=2b+1$ 次方却可能是正态随机变量。因为这个方次已代替了权，而消除了非正态畸变。正如对数正态变量那样，一经取对数，就是正态变量。或者说，我们可以假定 ξ^s 是正态随机变量，即有如下概率分布函数：

$$F(\xi^s)=\Phi\left(\frac{\xi^s-m_s^s}{\sigma_s^s}\right) \tag{18}$$

即标准正态变量 t 是随机变量 ξ 的如下指数函数：

$$\begin{aligned} t &= B\xi^s - A \\ B &= 1/\sigma_s^s, A = Bm_s^s \end{aligned} \tag{19}$$

式（18）的密度函数是：

$$f(\xi)=\frac{s\xi^{s-1}}{\sqrt{2\pi}\sigma_s^s}\exp\left[-\frac{(\xi^s-m_s^s)^2}{2\sigma_s^{2s}}\right] \tag{20}$$

由式（19）可有如下差分公式

$$\Delta t = sB\xi^{s-1}\Delta\xi \tag{21}$$

则有

$$\ln(\Delta t)=\ln(sB\Delta\xi)+(s-1)\ln\xi \tag{22}$$

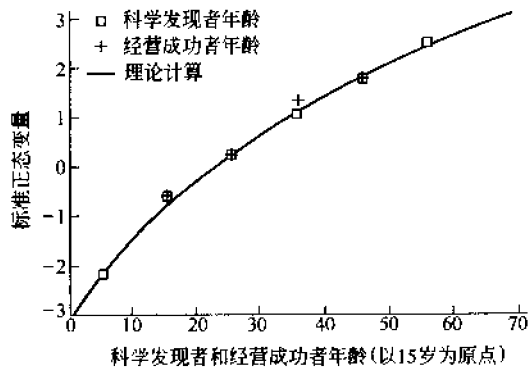
因此用最小二乘法可以求得回归系数 $s-1$ 的值，即求得 s 的值。计算 ξ^s 的值，再根据式（19）用最小二乘法求得 A 和 B 的值，进而求出 m_s 和 σ_s 的值。

随机数分布大都可以用这种方法处理，如成功年龄分布和寿命分布（附图 1 和附图 2）。

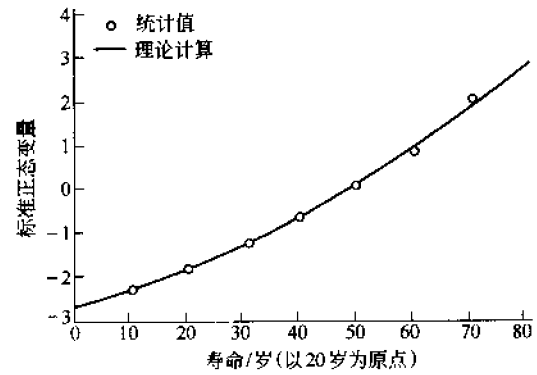
如根据成功年龄分布数据，可以求得标准正态变量 t 与成功年龄 τ_0 的关系是（附图 1）

$$t=13.7985\tau_0^{0.1524}-23.9356 \tag{23}$$

又如根据科学家寿命分布数据，可以求得标准正态变量 t 与寿命 τ_1 的关系是（附图 2）：



附图 1　科学发现者和经营成功的年龄分布



附图 2　科学家的寿命分布

$$t=0.001748\tau^{1.7622}-3.0115 \tag{24}$$

在通常的应用中，对均值和方差比较感兴趣。根据式 (20) 可以给出均值和方差的表达式。

均值的公式是：

$$\bar{\xi}=\int \xi f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\xi\exp\left[-\frac{(\xi-m_s^s)^2}{2\sigma_s^{2s}}\right]\mathrm{d}\left(\frac{\xi-m_s^s}{\sigma_s^s}\right)$$
$$=\frac{m_s}{\sqrt{2\pi}}\int\left(1+\frac{\sigma_s^s}{m_s^s}y\right)^{1/s}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}y \tag{25}$$

根据如下关系

$$(1+x)^n=1+\begin{cases}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}x^k, n>0\\ \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\dfrac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!}x^k, n<0\end{cases} \tag{26}$$

以及

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int y^k\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}y$$
$$=(2\mid k/2\mid-k+1)\prod_{l=1}^{k}(2l-1) \tag{27}$$

令

$$\Theta(k,s^{-1})=\begin{cases}(-1)^k\dfrac{s^{-1}(s^{-1}+1)\cdots(s^{-1}+k-1)}{k!}, s<0\\ \dfrac{s^{-1}(s^{-1}-1)\cdots(s^{-1}-k+1)}{k!}, s>0\end{cases}$$

$$\Theta(k)=(2\mid k/2\mid-k+1)\prod_{l-1}^{k}(2l-1) \tag{28}$$
$$\Theta(k=0,s^{-1})=\Theta(k=0)=1$$
$$\gamma_s=\sigma_s/m_s$$

这 4 个表示中，前两个是纯数计算，第四个是指数平均的变异系数。因此有

$$\bar{\xi}=m_s\sum_{k=0}^{\infty}\Theta(k)\Theta(k,s^{-1})\gamma_s^k \tag{29}$$

类似的步骤，可求得变量平方的平均值

$$\overline{\xi^2}=m_s^2\sum_{k=0}^{\infty}\Theta(k)\Theta(k,2s^{-1})\gamma_s^{2k} \tag{30}$$

则变量的方差可一般地表示如下

$$\overline{\Delta\xi^2} = \overline{\xi^2} - \bar{\xi}^2 \tag{31}$$

令

$$\Delta\Theta(k) = \Theta(k)\Theta(k,2s^{-1}) - \sum_{l=0}^{k}\Theta(l)\Theta(k-l)\Theta(l,s^{-1})\Theta(k-l,s^{-1}) \tag{32}$$

也是纯数计算。则有

$$\overline{\Delta\xi^2} = m_s^2\sum_{k=1}^{\infty}\Delta\Theta(k)\gamma_s^{2k} \tag{33}$$

式中，k 的最小值取 1。是因为当 $k=0$ 时，$\Delta\Theta(k)=0$。从式（29）和式（33）看，均值和方差都只与指数平均值和指数平均的变异系数有关。

附录 3　2^n 统计格与正态分布反函数的应用

地质体中元素含量大多数服从对数正态分布或叠加的对数正态分布，在统计样品品位时往往在对数坐标上或直接在对数概率纸上进行，但统计格大小的划分上仍是个问题，各人有各人的经验。作者在多年的工作中发现，采用 2^n 统计格是个好办法。首先，统计格大小合适，通常的样品含量范围相当 6～10 个统计格；其次，不必对样品含量进行对数运算，而是倍数间隔，即 1，2，4，8，…；第三，与标准正态分布联用，可求得较精确的统计参数，如平均值、方差等。举例说明如下。

（1）数据统计见附表 3。

附表 3　某金矿体样品金含量统计

统计格 n	样品金含量 2^n	样品频数 m	样品累计数 Σm	累计概率 $\Phi=\Sigma m/M$	标准正太变量 x
0	1×10^{-6}	1	1	0.01	−2.326
1	2×10^{-6}	1	2	0.02	−2.054
2	4×10^{-6}	5	7	0.07	−1.476
3	8×10^{-6}	11	18	0.18	−0.915
4	16×10^{-6}	19	37	0.37	−0.332

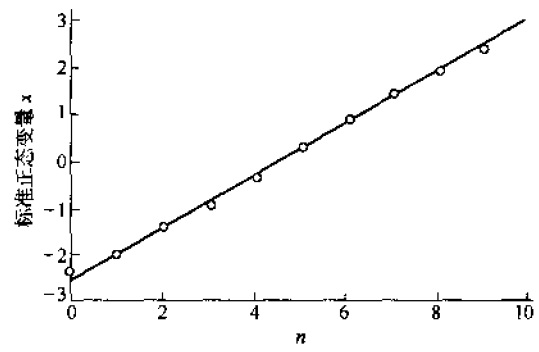
续附表 3

统计格 n	样品金含量 2^n	样品频数 m	样品累计数 Σm	累计概率 $\Phi=\Sigma m/M$	标准正太变量 x
5	32×10^{-6}	26	63	0.63	0.332
6	64×10^{-6}	19	82	0.82	0.915
7	128×10^{-6}	11	93	0.93	1.475
8	256×10^{-6}	4	97	0.97	1.881
9	512×10^{-6}	2	99	0.99	2.326
10	1024×10^{-6}	1	100	1.00	∞

注：表内 M 为全部样品数；x 为根据累计概率 Φ 由附录 9 查得。

(2) 作图。

以附表 3 中 x 为纵坐标，n 为横坐标作图，如果样品含量服从单一的对数正态分布，则 $n\sim x$ 为一直线，直线的斜率是元素含量对数方差平方根的倒数；直线上 $x=0$ 对应的 n 值 n_0 相当元素含量对数的平均值。这两个参数都可以用最小二乘法求出。根据表上的数据，可做成附图 3。



附图 3　元素含量分布的 n-x 曲线[28]

由附图 3 可得含量对数的均值 m 和均方根差 σ 如下

$$m=n_0 \quad \ln 2=4.54 \quad \ln 2=3.147$$

$$\sigma=(\Delta n/\Delta x) \quad \ln 2=1.766 \quad \ln 2=1.224$$

则该矿体金含量 ξ 分布的密度函数为

$$f(\xi)=\frac{1}{\xi\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(\ln\xi-m)^2}{2\sigma^2}\right]$$

附录 4　经验分布函数的统计离析

矿床中元素含量分布往往不是单峰分布，而是数个单峰分布叠加。如何分开，成了实际工作中的难题。作者在工作中摸索出一种经验方法，虽不严密，却非常有效。并且，数据处理速度较快，特称其为经验分布函数的统计离析。方法是：

首先做统计直方图，大致判断直方图中单峰分布的数目。然后，对每个统计格中的样品数进行离析，即把每个统计格中的样品数分配给每个单峰分布。分配的原则是，统计格中的总样品数不变；一个单峰分布所得的样品数可以是零，但不能为负数；一个统计格中的样品数是按照各个单峰分布在该统计格中的可能变化趋势分配的，当单峰分布趋于正态时，样品数应大致成正态分布形状。具体见附表 4。

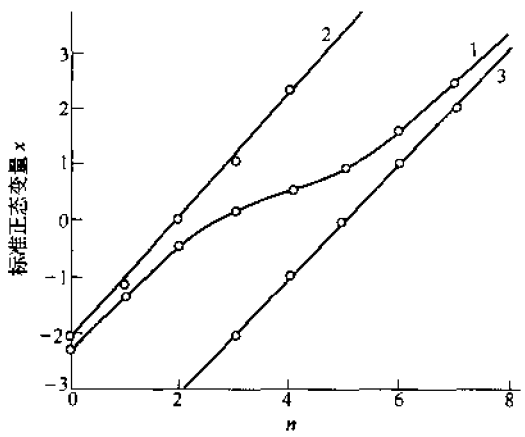
附表 4　某金矿体样品元素含量统计表

统计格 n	含量 2^n	原始统计				经验分解第一成分				经验分解第二成分			
		m	Σm	$\Sigma m/M$	x	m	Σm	$\Sigma m/M_1$	x	m	Σm	$\Sigma m/M_2$	x
0	1×10^{-6}	2	2	0.013	−2.227	2	2	0.020	−2.054				
1	2×10^{-6}	12	14	0.093	−1.323	12	14	0.141	−1.076				
2	4×10^{-6}	36	50	0.333	−0.432	36	50	0.505	0.013				
3	8×10^{-6}	35	85	0.567	0.169	34	84	0.848	1.028	1	1	0.020	−2.054
4	16×10^{-6}	21	106	0.707	0.545	14	98	0.990	2.326	7	8	0.157	−1.007
5	32×10^{-6}	18	124	0.827	0.943	1	99	1.000	∞	17	25	0.490	−0.025
6	64×10^{-6}	18	142	0.947	1.617					18	43	0.843	1.007
7	128×10^{-6}	7	149	0.993	2.457					7	50	0.980	2.054
8	256×10^{-6}	1	150	1.000	∞					1	51	1.000	∞

注：表中 M 为全部样品数；x 为根据累计概率 Φ 由附录 9 查得；$M=150$；$M_1=99$；$M_2=51$。

对已离析的每个单峰分布的样品数据，进行如附录 3 的统计处理，得到相应的参数：$m_1=1.275$；$\sigma_1=0.651$；$m_2=3.431$；$\sigma_2=0.677$；$\rho_1=0.66$；$\rho_2=0.34$。并得到如附图 4 所示的下式

$$F(\xi)=\sum_{i=1}^{2}\rho_i\Phi\left(\frac{\ln\xi-m_i}{\sigma_i}\right)$$



附图 4　元素含量分布的 n-x 曲线[28]

1—原始数据和叠加公式计算；2—第一个单峰数据与公式计算；3—第二个单峰数据与公式计算

附录 5　正态分布的中心距

正态随机变量 ξ 的 n 阶中心距 μ_n 为下式

$$\mu_n=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\xi-m)^n\exp\left[-\frac{(\xi-m)^2}{2\sigma^2}\right]\mathrm{d}\xi$$

$$=\frac{\sigma^n}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x^n\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x$$

上式当 n 为奇数时为零；为偶数 $2k$ 时不为零，且可以表示为[50]

$$\mu_n=\frac{2^{k-1}\sigma^{2k}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}y^{k-1/2}e^{-y}\mathrm{d}y=\frac{2^{k-1}\sigma^{2k}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(k+1/2)$$

$$=1\times3\times5\times7\cdots(2k-1)\sigma^{2k}$$

$$=1\times3\times5\times7\cdots(n-1)\sigma^n$$

附录 6　对数正态分布的原点距

对数正态随机变量 ξ 的 n 阶原点距 M_n 为下式

$$\begin{aligned}M_n &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}\xi^n\exp\left[-\frac{(\ln\xi-m)^2}{2\sigma^2}\right]\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}\\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}\exp\left[n\ln\xi-\frac{(\ln\xi-m)^2}{2\sigma^2}\right]\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}\\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\exp\left[-\frac{(\ln\xi-m-n\sigma^2)}{2\sigma^2}+nm+\frac{n^2\sigma^2}{2}\right]\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}\\ &= \mathrm{e}^{nm+n^2\sigma^2/2}\end{aligned}$$

则 n 次方平均值 m_n 为

$$m_n=\sqrt[n]{M_n}=\mathrm{e}^{m+n\sigma^2/2}$$

附录 7　多项式系数和

仿照二项式系数和的论证，论证多项式系数和如下：

当 K 和 N 为正整数时，

$$\begin{aligned}K^N &= (K-1+1)^N\\ &= \Sigma C_N^{N_1}(K-1)^{N_1}\\ &= \Sigma C_N^{N_1}(K-2+1)^{N_1}\\ &= \Sigma C_N^{N_1}\Sigma C_{N_1}^{N_2}(K-2)^{N_2}\\ &\cdots\\ &= \Sigma C_N^{N_1}\Sigma C_{N_1}^{N_2}\cdots\Sigma C_{N_{K-2}}^{N_{K-1}}\Sigma C_{N_{K-1}}^{N_K}\cdots\times 1\\ &= \Sigma\Sigma\cdots\Sigma\Sigma\frac{N!}{n_0!n_1!\cdots n_{K-1}!n_K!}\end{aligned}$$

式中

$$n_0=N-N_1;\ n_1=N_1-N_2;\ \cdots;$$
$$n_{K-1}=N_{K-1}-N_K;\ n_K=N_K$$
$$n_i\geqslant 0;\ \sum_{i=0}^{K}n_i=N$$

附录 8　概率积分 $\Phi(x)$表

$\Phi(x)$值

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7086	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8345	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91324	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670

续前表

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.9^20097	0.9^20358	0.9^20613	0.9^20863	0.9^21106	0.9^21344	0.9^21576
2.4	0.9^21802	0.9^22024	0.9^22240	0.9^22451	0.9^22656	0.9^22857	0.9^23053	0.9^23244	0.9^23431	0.9^23613
2.5	0.9^23790	0.9^23963	0.9^24132	0.9^24297	0.9^24457	0.9^24614	0.9^24766	0.9^24915	0.9^25060	0.9^25201
2.6	0.9^25339	0.9^25473	0.9^25604	0.9^25731	0.9^25855	0.9^25975	0.9^26093	0.9^26207	0.9^26319	0.9^26427
2.7	0.9^26533	0.9^26636	0.9^26736	0.9^26833	0.9^26928	0.9^27020	0.9^27110	0.9^27197	0.9^27282	0.9^27365
2.8	0.9^27445	0.9^27523	0.9^27599	0.9^27673	0.9^27744	0.9^27814	0.9^27882	0.9^27948	0.9^28012	0.9^28074
2.9	0.9^28134	0.9^28193	0.9^28250	0.9^28305	0.9^28359	0.9^28411	0.9^28462	0.9^28511	0.9^28559	0.9^28605
3.0	0.9^28650	0.9^28694	0.9^28736	0.9^28777	0.9^28817	0.9^28856	0.9^28893	0.9^28930	0.9^28965	0.9^28999
3.1	0.9^30324	0.9^30646	0.9^30957	0.9^31260	0.9^31553	0.9^31836	0.9^32112	0.9^32378	0.9^32636	0.9^32886
3.2	0.9^33129	0.9^33363	0.9^33590	0.9^33810	0.9^34024	0.9^34230	0.9^34429	0.9^34623	0.9^34810	0.9^34991
3.3	0.9^35166	0.9^35335	0.9^35499	0.9^35658	0.9^35811	0.9^35959	0.9^36103	0.9^36242	0.9^36376	0.9^36505
3.4	0.9^36631	0.9^36752	0.9^36869	0.9^36982	0.9^37091	0.9^37197	0.9^37299	0.9^37398	0.9^37493	0.9^37585

续前表

c	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
3.5	0.937674	0.937759	0.937842	0.937922	0.937999	0.938074	0.938146	0.938215	0.938282	0.938347
3.6	0.938409	0.938469	0.938527	0.938583	0.938637	0.938689	0.938739	0.938787	0.938834	0.938879
3.7	0.938922	0.939864	0.940039	0.940426	0.940799	0.941158	0.941504	0.941838	0.942159	0.942468
3.8	0.942766	0.943052	0.943327	0.943593	0.943848	0.944094	0.944331	0.944558	0.944777	0.944988
3.9	0.945190	0.945385	0.945573	0.945753	0.945926	0.946092	0.946253	0.946406	0.946554	0.946696
4.0	0.946833	0.946964	0.947090	0.947211	0.947324	0.947439	0.947546	0.947649	0.947748	0.947843
4.1	0.947934	0.948022	0.948106	0.948186	0.948263	0.948338	0.948409	0.948477	0.948542	0.948605
4.2	0.948665	0.948723	0.948778	0.948832	0.948882	0.948931	0.948978	0.949022	0.949065	0.949106
4.3	0.949160	0.949137	0.949199	0.949245	0.949276	0.949293	0.949297	0.949288	0.949266	0.949232
4.4	0.949587	0.949831	0.950065	0.950288	0.950502	0.950706	0.950902	0.951089	0.951268	0.951439
4.5	0.950602	0.950759	0.950908	0.951051	0.951187	0.951318	0.951442	0.951561	0.951675	0.951784
4.6	0.951888	0.951987	0.952081	0.952172	0.952258	0.952340	0.952419	0.952494	0.952566	0.952634
4.7	0.952899	0.953761	0.953821	0.953877	0.953931	0.953983	0.954032	0.954078	0.954123	0.954166
4.8	0.954207	0.954253	0.954282	0.954311	0.954338	0.954364	0.954389	0.954413	0.954436	0.954458
4.9	0.954708	0.954446	0.954673	0.954889	0.955094	0.955289	0.955475	0.955652	0.955821	0.955981
5.0	0.957132									

附录 9　概率积分反函数 $x(\Phi)$表

$\Phi(-x)$	$x(\Phi)$值										从右查取正值	
	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009		
0.00	∞	3.090	2.878	2.748	2.652	2.576	2.512	2.457	2.409	2.366	2.326	0.99
0.01	2.326	2.291	2.258	2.227	2.198	2.170	2.145	2.121	2.088	2.075	2.054	0.98
0.02	2.054	2.034	2.015	1.996	1.978	1.960	1.944	1.927	1.912	1.896	1.881	0.97
0.03	1.881	1.867	1.853	1.839	1.826	1.812	1.800	1.787	1.775	1.763	1.751	0.96
0.04	1.751	1.740	1.728	1.717	1.706	1.695	1.685	1.675	1.665	1.655	1.645	0.95
0.05	1.645	1.636	1.626	1.617	1.608	1.598	1.590	1.581	1.572	1.564	1.555	0.94
0.06	1.555	1.547	1.539	1.530	1.522	1.514	1.507	1.499	1.491	1.484	1.476	0.93
0.07	1.476	1.469	1.461	1.454	1.447	1.440	1.433	1.426	1.419	1.412	1.405	0.92
0.08	1.405	1.399	1.392	1.385	1.379	1.372	1.366	1.360	1.353	1.347	1.341	0.91
0.09	1.341	1.335	1.329	1.323	1.317	1.311	1.305	1.299	1.293	1.288	1.282	0.90
0.10	1.282	1.276	1.271	1.265	1.259	1.254	1.248	1.243	1.237	1.232	1.227	0.89
0.11	1.227	1.221	1.216	1.211	1.206	1.200	1.195	1.190	1.185	1.180	1.175	0.88
0.12	1.175	1.170	1.165	1.160	1.155	1.150	1.146	1.141	1.136	1.131	1.126	0.87
0.13	1.126	1.122	1.117	1.113	1.108	1.103	1.099	1.094	1.090	1.085	1.080	0.86
0.14	1.080	1.076	1.072	1.067	1.063	1.058	1.054	1.050	1.945	1.041	1.036	0.85

续前表

$\Phi(-x)$	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	从右查取正值	
0.15	1.036	1.032	1.028	1.024	1.020	1.015	1.011	1.007	1.003	0.999	0.994	0.84
0.16	0.994	0.991	0.986	0.982	0.978	0.974	0.970	0.966	0.962	0.958	0.954	0.83
0.17	0.954	0.950	0.946	0.943	0.939	0.935	0.931	0.927	0.923	0.919	0.915	0.82
0.18	0.915	0.912	0.908	0.904	0.900	0.896	0.893	0.889	0.885	0.882	0.878	0.81
0.19	0.878	0.874	0.871	0.867	0.863	0.860	0.856	0.853	0.849	0.845	0.842	0.80
0.20	0.842	0.838	0.835	0.831	0.828	0.824	0.821	0.817	0.814	0.810	0.806	0.79
0.21	0.806	0.803	0.800	0.796	0.793	0.789	0.786	0.783	0.779	0.776	0.772	0.78
0.22	0.772	0.769	0.766	0.762	0.759	0.755	0.752	0.749	0.746	0.742	0.739	0.77
0.23	0.739	0.736	0.732	0.729	0.726	0.722	0.719	0.716	0.713	0.710	0.706	0.76
0.24	0.706	0.703	0.700	0.697	0.694	0.690	0.687	0.684	0.681	0.678	0.674	0.75
0.25	0.674	0.671	0.668	0.665	0.662	0.659	0.656	0.653	0.650	0.647	0.643	0.74
0.26	0.643	0.640	0.637	0.634	0.631	0.628	0.625	0.622	0.619	0.616	0.613	0.73
0.27	0.613	0.610	0.607	0.604	0.601	0.598	0.595	0.592	0.589	0.586	0.583	0.72
0.28	0.583	0.580	0.577	0.574	0.571	0.568	0.565	0.562	0.559	0.556	0.553	0.71
0.29	0.553	0.551	0.548	0.545	0.542	0.539	0.536	0.533	0.530	0.527	0.524	0.70
0.30	0.524	0.522	0.519	0.516	0.513	0.510	0.507	0.505	0.502	0.499	0.496	0.69
0.31	0.496	0.493	0.490	0.488	0.485	0.482	0.479	0.476	0.473	0.471	0.468	0.68
0.32	0.468	0.465	0.462	0.459	0.457	0.454	0.451	0.448	0.446	0.443	0.440	0.67
0.33	0.440	0.437	0.435	0.432	0.429	0.426	0.424	0.421	0.418	0.415	0.412	0.66
0.34	0.412	0.410	0.407	0.404	0.402	0.399	0.396	0.394	0.391	0.388	0.385	0.65

续前表

$\Phi(-x)$	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	从右查取正值	
0.35	0.385	0.383	0.380	0.377	0.375	0.372	0.369	0.367	0.364	0.361	0.358	0.64
0.36	0.358	0.356	0.353	0.351	0.348	0.345	0.343	0.340	0.337	0.335	0.332	0.63
0.37	0.332	0.329	0.327	0.324	0.321	0.319	0.316	0.314	0.311	0.308	0.305	0.62
0.38	0.305	0.303	0.300	0.298	0.295	0.292	0.290	0.287	0.285	0.282	0.279	0.61
0.39	0.279	0.277	0.274	0.272	0.269	0.266	0.264	0.261	0.259	0.256	0.253	0.60
0.40	0.253	0.251	0.248	0.246	0.243	0.240	0.238	0.235	0.233	0.230	0.228	0.59
0.41	0.228	0.225	0.223	0.220	0.217	0.215	0.212	0.210	0.207	0.205	0.202	0.58
0.42	0.202	0.199	0.197	0.194	0.192	0.189	0.187	0.184	0.182	0.179	0.176	0.57
0.43	0.176	0.174	0.171	0.169	0.166	0.164	0.161	0.159	0.156	0.154	0.151	0.56
0.44	0.151	0.149	0.146	0.143	0.141	0.138	0.136	0.133	0.131	0.128	0.126	0.55
0.45	0.126	0.123	0.121	0.118	0.116	0.113	0.111	0.108	0.106	0.103	0.100	0.54
0.46	0.100	0.098	0.096	0.093	0.090	0.088	0.085	0.083	0.080	0.078	0.075	0.53
0.47	0.075	0.073	0.070	0.068	0.065	0.063	0.060	0.058	0.055	0.053	0.050	0.52
0.48	0.050	0.048	0.045	0.043	0.040	0.038	0.035	0.033	0.030	0.028	0.025	0.51
0.49	0.025	0.023	0.020	0.018	0.015	0.013	0.010	0.008	0.005	0.003	0.000	0.50
从左查取负值		0.009	0.008	0.007	0.006	0.005	0.004	0.003	0.002	0.001	0.000	$\Phi(x)$

附录 10　欧拉积分 $F(x)=\int_0^x r^{1/2}e^{-r}dr$ 表

	$F(x)$值									
x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0	0.0^37060	0.0^21926	0.0^23480	0.0^25297	0.0^27334	0.0^29562	0.01196	0.01451	0.01719
0.1	0.02000	0.02292	0.02595	0.02907	0.03229	0.03558	0.03896	0.04241	0.04592	0.04950
0.2	0.05314	0.05683	0.06057	0.06436	0.06819	0.07207	0.07598	0.07993	0.08392	0.08794
0.3	0.09198	0.09605	0.1001	0.1043	0.1084	0.1126	0.1168	0.1209	0.1252	0.1294
0.4	0.1336	0.1379	0.1421	0.1464	0.1506	0.1549	0.1592	0.1635	0.1678	0.1721
0.5	0.1763	0.1806	0.1849	0.1892	0.1935	0.1978	0.2020	0.2063	0.2106	0.2148
0.6	0.2191	0.2233	0.2276	0.2318	0.2360	0.2403	0.2445	0.2487	0.2528	0.2570
0.7	0.2612	0.2653	0.2694	0.2736	0.2777	0.2818	0.2859	0.2899	0.2940	0.2980
0.8	0.3021	0.3061	0.3101	0.3140	0.3180	0.3219	0.3259	0.3298	0.3337	0.3376
0.9	0.3414	0.3453	0.3491	0.3529	0.3567	0.3605	0.3643	0.3680	0.3717	0.3754
1.0	0.3791	0.3828	0.3864	0.3901	0.3937	0.3973	0.4009	0.4044	0.4079	0.4115
1.1	0.4150	0.4184	0.4219	0.4254	0.4288	0.4322	0.4356	0.4389	0.4423	0.4456
1.2	0.4489	0.5220	0.4555	0.4587	0.4620	0.4652	0.4684	0.4715	0.4747	0.4778
1.3	0.4809	0.4840	0.4871	0.4902	0.4932	0.4962	0.4992	0.5022	0.5052	0.5081
1.4	0.5110	0.5140	0.5168	0.5197	0.5226	0.5254	0.5282	0.5310	0.5338	0.5365

续前表

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.5	0.5393	0.5420	0.5447	0.5474	0.5501	0.5527	0.5554	0.5580	0.5606	0.5631
1.6	0.5657	0.5683	0.5708	0.5733	0.5758	0.5783	0.5807	0.5832	0.5856	0.5880
1.7	0.5904	0.5927	0.5951	0.5974	0.5998	0.6021	0.6044	0.6066	0.6089	0.6111
1.8	0.6134	0.6156	0.6178	0.6199	0.6221	0.6242	0.6264	0.6285	0.6306	0.6327
1.9	0.6347	0.6368	0.6388	0.6409	0.6429	0.6449	0.6468	0.6488	0.6507	0.6527
2.0	0.6546	0.6565	0.6584	0.6603	0.6621	0.6640	0.6658	0.6676	0.6695	0.6712
2.1	0.6730	0.6748	0.6765	0.6783	0.6800	0.6817	0.6834	0.6851	0.6868	0.6885
2.2	0.6901	0.6917	0.6934	0.6950	0.6966	0.6982	0.6997	0.7013	0.7028	0.7044
2.3	0.7059	0.7074	0.7089	0.7104	0.7119	0.7134	0.7148	0.7163	0.7177	0.7191
2.4	0.7205	0.7219	0.7233	0.7247	0.7261	0.7274	0.7288	0.7301	0.7314	0.7327
2.5	0.7340	0.7353	0.7366	0.7379	0.7391	0.7404	0.7416	0.7429	0.7441	0.7453
2.6	0.7465	0.7477	0.7489	0.7500	0.7512	0.7524	0.7535	0.7546	0.7558	0.7569
2.7	0.7580	0.7591	0.7602	0.7613	0.7623	0.7634	0.7645	0.7655	0.7665	0.7676
2.8	0.7686	0.7696	0.7706	0.7716	0.7726	0.7736	0.7746	0.7755	0.7765	0.7774
2.9	0.7784	0.7793	0.7802	0.7811	0.7820	0.7830	0.7838	0.7847	0.7856	0.7865
3.0	0.7874	0.7882	0.7891	0.7899	0.7907	0.7916	0.7924	0.7932	0.7940	0.7948
3.1	0.7956	0.7964	0.7972	0.7980	0.7987	0.7995	0.8003	0.8010	0.8018	0.8025
3.2	0.8032	0.8040	0.8047	0.8054	0.8061	0.8068	0.8075	0.8082	0.8089	0.8095
3.3	0.8102	0.8109	0.8115	0.8122	0.8128	0.8135	0.8141	0.8148	0.8154	0.8160
3.4	0.8166	0.8172	0.8179	0.8185	0.8191	0.8196	0.8202	0.8208	0.8214	0.8220

续前表

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
3.5	0.8225	0.8231	0.8237	0.8242	0.8248	0.8253	0.8258	0.8264	0.8269	0.8274
3.6	0.8279	0.8285	0.8290	0.8295	0.8300	0.8305	0.8310	0.8315	0.8319	0.8324
3.7	0.8329	0.8334	0.8338	0.8343	0.8348	0.8352	0.8357	0.8361	0.8366	0.8370
3.8	0.8375	0.8379	0.8383	0.8388	0.8392	0.8396	0.8400	0.8404	0.8408	0.8412
3.9	0.8416	0.8420	0.8424	0.8428	0.8432	0.8436	0.8440	0.8443	0.8447	0.8451
4.0	0.8455	0.8458	0.8462	0.8465	0.8469	0.8473	0.8476	0.8479	0.8483	0.8486
4.1	0.8490	0.8493	0.8496	0.8500	0.8503	0.8506	0.8509	0.8512	0.8516	0.8519
4.2	0.8522	0.8525	0.8528	0.8531	0.8534	0.8537	0.8540	0.8543	0.8546	0.8548
4.3	0.8551	0.8554	0.8557	0.8560	0.8562	0.8565	0.8568	0.8570	0.8573	0.8576
4.4	0.8578	0.8580	0.8583	0.8586	0.8588	0.8591	0.8593	0.8596	0.8598	0.8600
4.5	0.8603	0.8605	0.8607	0.8610	0.8612	0.8614	0.8617	0.8619	0.8621	0.8623
4.6	0.8625	0.8627	0.8630	0.8632	0.8634	0.8636	0.8638	0.8640	0.8642	0.8644
4.7	0.8646	0.8648	0.8650	0.8652	0.8654	0.8656	0.8657	0.8659	0.8661	0.8663
4.8	0.8665	0.8667	0.8668	0.8670	0.8672	0.8674	0.8675	0.8677	0.8679	0.8680
4.9	0.8682	0.8684	0.8685	0.8687	0.8688	0.8690	0.8692	0.8693	0.8695	0.8696
5.0	0.8698									

参 考 文 献

1 JIANG Zhi (蒋志). 2000. Pulsation Solution to the Equation of Earth's Gravitational Field (Main Outcome), ACTA GEOLGICA SINICA, Vol. 74 (2000)

2 蒋志. 2001. 引力、核能与地球脉动. 北京：地震出版社

3 蒋志. 2003. 物理学的新视角——质量、能量、真空和地球. 北京：地震出版社

4 蒋志，张燕石. 1994. 地球化学的新分支——统计地球化学. 中国矿物岩石地球化学新进展（欧阳自远主编），甘肃：兰州大学出版社，209～210

5 伊藤清著. 1964. 概率论. 刘璋温译. 北京：科学出版社，318～343

6 Квятковский Е М. 1981. 岩石化学找矿法. 张国荣等译. 北京：地质出版社，23

7 蒋志. 1995. 地质体运动理论及其应用，第二部分. 北京：科学出版社

8 Kolmogoroff A. 1931. über die andlytischen methoden in der wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Ann. 104, pp. 415～458

9 Bharucha-Reid, A T. 1979. 马尔科夫过程论初步及其应用. 杨纪珂等译. 上海：上海科学技术出版社，133～146

10 蒋志. 1981. 地质体中微粒的随机运动与三七三铀矿床中矿化元素的迁移方向. 放射性地质，(3)：208～215

11 蒋志. 1987. 统计地球化学若干理论问题. 地质与勘探，(2)：55～68

12 Mason B. 1963. 地球化学原理. 陈浩琉等译. 北京：中国工业出版社，92～93

13 Залата Л Ф. 1963. Об Определении Средних Содержаний Полезных Компонентов в Руде, Разведка и Охрана Недр, Вып. Стр. 22～26

14 Разумовский Н К. 1940. Характер Распределения Содержания Металлов Рудных Месторождениях. Докл. АН СССР. Т. XXVIII, Вып. 9

15 Рыжов П А, и Гудков В М. 1961. Некоторые Особенностй Расиределения Металлов в Рудных Месторождениях. Изв. Выш. Учебн. Завед. Горный Журнал Вып 10, Стр. 74～77

16 Четвериков Л И. 1964. Заков Распределения Частот Содержания Минерального Компонента в теле Полезного Ископаемого. Советская Геология Вып. 7, Стр. 92～102

17 蒋志，孙书山. 1984，我国银矿床的主要成矿特征. 矿山地质，(3)：59～65

18 蒋志. 1989. 金矿资源发展趋势预测问题. 地质与勘探，(2)：20～21

19 蒋志. 2001. 发现：主观和客观的耦合——以科学发现和矿床发现为例. 北京：地震出版社

20 曾庆丰，杨柏林. 1966. 矿液运移通道和方向的探讨（以某锡钨矿床为例）. 地质科学，(2)：108～115

21 Cramer H. 1966. 统计学数学方法，魏宗舒等译．上海：上海科学技术出版社，283～284
22 蒋志．1982. 小秦岭东部含金石英脉的统计特征及地质意义．黄金地质参考资料，(1)：7～17
23 蒋志．1995. Lasky 关系的统计地球化学背景．地质与勘探，(2)：46～50
24 Lasky S G. 1950. How tonnage and grade relations help predict ore reserves, Eng. Mining J. pp. 151
25 蒋志．1995. 矿床效益估计的理论和方法．北京：地质出版社
26 蒋志．1997. 矿床储量规模的统计划分．地质与勘探，(3)
27 蒋志．1991. 工业成矿率及其应用．地质与勘探，(1)：30～35
28 Erickson R L. 1973. Crustal abundance of elements, mineral reserves and resources, U. S. Geol. Surv. Profess. Paper, No. 820, pp. 21～25
29 JIANG Zhi（蒋志）. 1988. Theoretical method of evaluation of abundance for gold ore resource . BICENTENNIAL GOLD 88-programme, Vol. 2, Melbourne, pp. 584；
30 JIANG Zhi（蒋志）. 1993. A Tentative Idea on Compilation Sheet for Regional Metallization Rate of Element, 16th IGES/5th CEGS Abstracts, 35～36
31 蒋志．1992. 地质勘查效益理论．北京：冶金工业出版社
32 Helstrom C W. 1965. 信号检测的统计理论．陈宗骐等译．上海：上海科学技术出版社，54～72
33 蒋志．1984. 元素背景值计算的几个问题．地质与勘探，(12)：63～65
34 蒋志．1989. 采样测不准关系．地质与勘探，(7)：48～50
35 蒋志．1983. 钻探网度判别与预测的数学方法．黄金地质参考资料，(4)：26～30
36 蒋志．2002. 矿产勘查与评估的统计地球化学方法．地质与勘探，(1)：1～4
37 蒋志．1992. 矿体大小分布与勘探见矿率．地质与勘探，(12)：30～33
38 哈代 G H 等．1965. 不等式，越民义译．北京：科学出版社，11～12
39 蒋志．1989. 不同储量计算方法之间的关系．地质与勘探，(12)：30～33
40 Krige D G. 1951. A statistical approach to some basic mine valuation problems on the Witwatersrand, J. Chem. Mat. Min. Soc. South Africa, Vol. 52, No. 6, pp. 119～139
41 Matheron G. 1963. Principles of geostatistics, Economic Geology, Vol. 58, pp. 1240～1246
42 蒋志．1994. 理论变异函数．中国数学地质·5. 北京：地质出版社，29～32
43 蒋志．1994. 广义克立格方法．中国数学地质·5. 北京：地质出版社，33～49
44 蒋志．1984. 金厂金镍矿形成的地球化学过程．地质与勘探，(1)：6～13

45 蒋志．1983. 矿体平均品位、矿石量和金属量与边界品位之间关系．地质与勘探，(9)：37～40
46 蒋志．1991. 矿床储量勘查成本理论探讨．中国地质经济，(4)：18～26
47 蒋志．1986. 矿床边界品位的超额利润条件．地质与勘探，(7)：41～43
48 蒋志．1994. 矿床开发风险的一种预测方法．中国地质矿产经济，(1)：23～26
49 陈稚堃．1989. 砂金勘探地质品位贫化原因浅析．地质与勘探，(2)：30～35
50 费史 M. 1962. 概率论及数理统计．上海：上海科学技术出版社，136