

# 目 录

第一章 流体力学基本原理	1
1.1 流体运动学基础	1
1.1.1 描述流体运动的基本方法	1
1.1.2 流场结构的几何描述	2
1.1.3 质点加速度、质点导数	3
1.1.4 流体微团运动分析	5
1.1.5 散度与旋度、速度位与流函数	8
1.1.6 旋涡运动学	11
1.2 流体动力学基本方程	13
1.2.1 应力张量的本构方程	13
1.2.2 流体动力学的积分型方程	21
1.2.3 流体动力学的微分型方程	26
1.2.4 微分方程的封闭性讨论	30
1.3 N-S方程的特殊形式	35
1.3.1 动量方程的其他形式与应用	35
1.3.2 能量方程的其他形式——内能方程、温度方程、焓方程与熵方程	42
1.3.3 非惯性坐标系中的方程	44
1.3.4 直角坐标系和柱坐标系中微分方程的分量形式	48
参考文献	50
第二章 流体力学方程的计算形式与封闭模型	52
2.1 欧拉方程与N-S方程的计算形式	52
2.1.1 物理坐标系下的N-S方程	52
2.1.2 计算坐标系下的方程	55
2.1.3 N-S方程的展开形式	57
2.1.4 方程的基本变量形式与对角化	62
2.2 多尺度问题方程的封闭与模型化处理	67
2.2.1 多尺度问题的特征	67
2.2.2 结构多尺度问题:湍流模拟	69
2.2.3 相位多尺度问题:多相流运动模拟	77
2.2.4 特征多尺度问题:高低速问题统一处理	83
2.2.5 影响多尺度问题:无量纲化处理	87

参考文献 .....	89
<b>第三章 流体力学方程的基本理论 .....</b>	<b>91</b>
3.1 非线性守恒系统与欧拉方程 .....	91
3.2 双曲性与适定性 .....	96
3.2.1 双曲性 .....	96
3.2.2 适定性 .....	97
3.3 特征线与黎曼不变量 .....	100
3.3.1 特征矢量与矩阵的对角化 .....	100
3.3.2 特征线与古典黎曼不变量 .....	101
3.3.3 Lax 黎曼不变量, 简单波 .....	103
3.4 弱解与黎曼问题 .....	104
3.4.1 伯格方程的弱解 .....	104
3.4.2 一般系统弱解的定义 .....	107
3.4.3 黎曼问题 .....	108
3.5 熵条件 .....	112
3.6 边界条件 .....	114
3.6.1 构造边界条件的基本原则 .....	114
3.6.2 欧拉方程的边界条件 .....	117
3.7 高维问题 .....	118
附录 A 几个基本定义 .....	120
附录 B 总结性习题及其解答 .....	121
B.1 问题 .....	121
B.2 解题要领 .....	122
B.3 解答 .....	123
参考文献 .....	126
<b>第四章 构造计算方法的基本原理 .....</b>	<b>128</b>
4.1 基本概念 .....	128
4.2 有限差分法 .....	130
4.2.1 有限差分的定义 .....	130
4.2.2 差分构造的一般方法 .....	131
4.2.3 运输方程的简单差分格式 .....	136
4.2.4 高阶微分的差分 .....	137
4.3 非线性守恒系统的数值方法 .....	139
4.3.1 守恒格式及几种表现形式 .....	139
4.3.2 中心格式 .....	141
4.3.3 迎风格式 .....	144
4.3.4 高分辨率格式基本思想 .....	149
4.4 边界条件 .....	155

4.4.1 外边界处理 .....	155
4.4.2 分区内边界条件 .....	158
4.5 时间积分 .....	163
4.5.1 时空独立处理法 .....	163
4.5.2 泰勒展开法 .....	167
4.5.3 混合方法 .....	168
4.5.4 源项处理 .....	171
附录 简单数值试验问题 .....	173
参考文献 .....	175
<b>第五章 计算方法的分析理论</b> .....	<b>177</b>
5.1 计算方法的基本特性:相容性、稳定性与收敛性 .....	177
5.1.1 基本概念 .....	177
5.1.2 相容性 .....	178
5.1.3 稳定性 .....	178
5.1.4 收敛性 .....	179
5.1.5 等价性定理 .....	180
5.2 稳定性理论 .....	180
5.2.1 柯西问题的稳定性理论 .....	180
5.2.2 混合初边值问题的稳定性理论 .....	185
5.3 误差分析 .....	191
5.3.1 傅里叶分析 .....	191
5.3.2 当地误差与整体误差 .....	193
5.4 守恒理论 .....	197
5.4.1 守恒格式 .....	197
5.4.2 守恒处理的重要性 .....	198
5.4.3 守恒格式的其他形式 .....	199
5.4.4 守恒格式的特性 .....	200
5.5 定常解 .....	203
5.5.1 收敛到定常解的速度 .....	203
5.5.2 定常解的唯一性 .....	206
5.6 分区计算的理论分析 .....	206
5.6.1 分析方法 .....	207
5.6.2 覆盖分区两类处理的稳定性分析 .....	208
5.6.3 趣味理论分析一:覆盖分区计算守恒问题 .....	211
5.6.4 趣味理论分析二:覆盖分区计算稳定性、收敛性与解的唯一性 .....	213
参考文献 .....	216
<b>第六章 实用化基础</b> .....	<b>218</b>
6.1 网格系统 .....	218

6.1.1 物理坐标系中的网格 .....	218
6.1.2 分区结构网格 .....	220
6.2 高维问题计算方法 .....	222
6.2.1 有限差分定义 .....	223
6.2.2 有限差分法 .....	223
6.2.3 有限体积法 .....	227
6.2.4 高维问题时间积分 .....	232
6.2.5 N-S方程的几种具体格式 .....	235
6.2.6 条件化预处理方程的离散 .....	242
6.3 高维问题初始条件与边界处理 .....	243
6.3.1 初始条件与边界条件 .....	243
6.3.2 远场边界条件 .....	244
6.3.3 固体壁面边界条件 .....	247
6.3.4 其他边界条件 .....	249
6.3.5 条件化预处理特征边界条件 .....	250
6.3.6 边界条件的隐式化处理 .....	251
6.3.7 分区计算的耦合条件 .....	252
6.4 并行计算 .....	256
6.4.1 并行计算机结构 .....	256
6.4.2 并行计算机编程 .....	257
6.4.3 并行性能参数 .....	258
6.4.4 分区并行处理 .....	260
6.5 实际计算的某些经验 .....	264
6.5.1 定常问题收敛剖析 .....	265
6.5.2 计算不稳定的表现形式、诊断与解决方法 .....	266
6.5.3 结果可靠的必然因素与偶然因素,物理涡与数值涡 .....	267
附录 计算流体力学的作用与地位 .....	268
参考文献 .....	270
索引 .....	272
编后语 .....	280

# 第一章 流体力学基本原理

流体力学基本原理是计算流体力学的基础. 这里简要介绍连续介质力学假设下流体力学最基本的原理, 包括流体运动学基础、流体动力学基础和基本方程的一些特殊形式. 内容的取舍和安排部分地考虑了计算流体力学的需要.

## 1.1 流体运动学基础

### 1.1.1 描述流体运动的基本方法

在连续介质力学假设前提下, 流体力学描述流体微团集合的运动状态. 流体微团属于充满流体介质的空间中的微观上足够大(远远大于分子运动平均自由程)而宏观上足够小(远远小于所感兴趣的流体运动空间尺度)的一团流体. 在宏观上把流体微团看成一个质点. 有了流体微团这一定性认识后, 在实用中不必再去关心微团有多大.

描述流体运动的方法有两种: 欧拉方法(E), 拉格朗日方法(L). 有时也会看到所谓的欧拉-拉格朗日混合方法. 这些方法主要描述流体微团集合的运动状态, 即流动参数  $\phi$  的变化. 流动参数包括运动特征量(如流体微团的速度  $\mathbf{V}$ )和热力学状态特征量即物性参数(如流体微团的压力  $p$ , 密度  $\rho$ , 温度  $T$ ). 流动参数的变化是针对时间  $t$  甚至空间(坐标为  $\mathbf{x}$ )的变化. 相应地, 流动参数称为未知数或因变量, 而时间甚至空间坐标称为自变量(空间坐标是否为自变量取决于是否采用欧拉描述法).

**欧拉方法** 在任意指定时刻, 描述流动参数的空间分布. 以时空坐标  $(\mathbf{x}, t)$  为自变量, 将流动参数(主要有速度、密度、压力和温度以及它们的组合)表示为时空坐标的函数(流动参数分布; 也称参数场, 如速度场和温度场)

$$\phi = \phi(\mathbf{x}, t) = \phi_E(\mathbf{x}, t).$$

**拉格朗日方法** 从某时刻开始跟踪每一流体质点, 记录对应质点流动参数的变化. 以初始时刻坐标  $\mathbf{A}$  和时间  $t$  为自变量, 将流动参数(主要有质点位移  $\mathbf{x}$ 、密度、压力和温度等)表示为

$$\phi = \phi(\mathbf{A}, t) = \phi_L(\mathbf{A}, t).$$

质点位移函数  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{A}, t)$  (质点轨迹)也是因变量, 它与初始坐标  $\mathbf{A}$  成一一对应关系, 即:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(\mathbf{A}, 0) = \mathbf{A}, \\ \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{A}, t) \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t). \end{cases}$$

两种方法可以按下面方式进行转换:

$$\begin{aligned} \text{L-E 变换} \quad & \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{A}, t) \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t), \\ & \phi = \phi_L(\mathbf{A}, t) = \phi_L[\mathbf{A}(\mathbf{x}, t), t] = \phi_E(\mathbf{x}, t), \\ & \mathbf{V} = \left[ \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{A}, t)}{\partial t} \right]_{\mathbf{A}} = \mathbf{V}_L(\mathbf{A}, t) = \mathbf{V}_L[\mathbf{A}(\mathbf{x}, t), t] = \mathbf{V}_E(\mathbf{x}, t). \\ \text{E-L 变换} \quad & \mathbf{V} = \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right)_{\mathbf{A}} = \mathbf{V}_E(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}(\mathbf{A}, 0) = \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{A}, t), \\ & \phi = \phi_E(\mathbf{x}, t) = \phi_E[\mathbf{x}(\mathbf{A}, t), t] = \phi_L(\mathbf{A}, t). \end{aligned}$$

欧拉描述法中的流动参数如果与时间无关, 即  $\phi = \phi(\mathbf{x})$ , 那么相应的流动称为定常流动, 否则称为非定常流动. 一般很难存在严格意义上的定常流动, 但如果流动参数随时间的变化与所关心的平均值相比小得可以忽略不计, 而且这种变化引起的宏观效应可以忽略不计, 则一般可以按定常流动处理. 实际的定常流动或计算出的定常流动往往是由非定常流动经过一段时间的变化过渡来的. 如果采用拉格朗日法, 则区别定常与非定常流动不那么直观<sup>①</sup>.

如果流动参数只与坐标的一个(如  $x$ )、两个(如  $x, y$ )、或三个分量有关, 则相应的流动称为一维、二维或三维流动. 以后会看到, 二维流动中还有所谓的平面二维流动和轴对称二维流动. 这种分类属于物理分类, 还有工程或数学上的人为分类(主要是为了处理方便), 读者阅读某些流体力学书籍时会遇到零维流动、准一维流动等概念. 还有一种特殊方法, 将时间、几何空间、参数空间(包括速度、温度、密度, 等等)看成统一的自变量即统一空间来研究流体质点在统一空间某点出现的概率. 统一空间(也称为状态空间)的维数可能超过十维. 这种描述方法称为 PDF 方法.

### 1.1.2 流场结构的几何描述

流线为固定时刻空间曲线(速度场矢量线), 曲线上任意点的切向矢量与当地的速度矢量重合, 属于欧拉场描述法. 取  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_E$  (速度为欧拉场速度), 确定参数形式的流线  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$  的方程为

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{ds} \times \mathbf{V} &= 0 \quad (\text{基本定义}), \\ \frac{dx_1}{V_1} &= \frac{dx_2}{V_2} = \frac{dx_3}{V_3} = ds \quad (\text{等价形式 1}), \\ \frac{d\mathbf{x}}{ds} &= \mathbf{V} \quad (\text{等价形式 2}). \end{aligned}$$

流线具有如下性质:

<sup>①</sup> 可以证明, 对于拉格朗日法, 定常流动条件可以表示为:

$$\frac{\partial \phi_L}{\partial t} - \frac{\partial \phi_L}{\partial \mathbf{A}} \left( \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial \mathbf{A}} \right)^T \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial t} = 0.$$

1) 除奇点 ( $V=0, V=\infty$ ) 外, 同一时刻流场中的不同流线不相交 (因空间每点只有一个速度方向, 所以除奇点 (速度为 0 点, 速度为  $\infty$ ) 外, 流线不会以有限角相交, 但可以相切);

2) 对于非定常流动, 不同时刻通过同一点的流线可以不重合;

3) 对于定常流动和直线流动, 不同时刻通过同一点的流线重合.

流面为某时刻过给定曲线 (非流线) 上每点做流线组成的面, 从而在流面上  $V \cdot n = 0$ , 这里  $n$  为曲面的单位法向矢量.

流管为某时刻过给定闭曲线 (非流线) 上每点做流线组成的管状面, 从而在流管壁上  $V \cdot n = 0$ . 根据物质不生不灭原理, 流管不能在流体中间中断, 否则流体在中断处不见了. 流管是由流线组成的, 因流管不能中断, 所以流线也不能在流体中断. 流管和流线或形成闭环、或终止于边界、或终止于奇点.

将反映主要流动特征的流线画出得流线谱 (画出所有过奇点的流线, 画出与过奇点流线渐近的流线, 画出边界线). 流线谱用于显示流动规律, 已经存在可以画流线谱的标准软件.

迹线为给定流体质点的运动轨迹, 方程为

$$x = x_L(A, t) \text{ (拉格朗日法),}$$

$$\left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)_A = V_E(x, t) \text{ (欧拉法).}$$

流线和迹线的区别在于:

1) 流线是由同一时刻、不同质点连起来的速度矢量场即为瞬间速度场状态; 迹线是同一质点在不同时刻的位移曲线 (即指定质点的运动过程). 因此对于非定常流场流线迹线一般不重合, 除非所有质点的流动都沿一个方向.

2) 对于定常流场, 通过同一点的流线不随时间变化, 且任意时刻通过同一空间点的迹线与流线重合. 这是因为, 两条线的切线都与当地速度方向一致, 对于定常问题流线不随时间变化. 因任意点只有一个速度方向, 所以经过同一点的迹线与流线不可能在某点分开, 否则在分开点出现两个速度方向. 也可以从定常流动时确定它们的方程的等价性看出:

$$\frac{dx}{ds} = V(x), x(s=0) = A \text{ 流线,}$$

$$\left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)_A = V(x), x(t=0) = A \text{ 迹线.}$$

### 1.1.3 质点加速度、质点导数

考虑时刻  $t$  处于坐标  $x$  的流体质点. 对应欧拉描述法该流体质点速度为  $V(x, t)$ . 在时刻  $t + \delta t$ , 该流体质点运动到  $x + \delta x = x + V\delta t$ . 在时刻  $t + \delta t$  处于坐标  $x + \delta x$  的流体质点的速度为  $V(x + \delta x, t + \delta t) = V(x + V\delta t, t + \delta t)$ . 所以, 质点加速度为

$$\begin{aligned}
 a &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{\mathbf{V}(\mathbf{x} + \mathbf{V}\delta t, t + \delta t) - \mathbf{V}(\mathbf{x}, t)}{\delta t} \right] \\
 &= \mathbf{V}_t + V_j V_{x_j},
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

即

$$\mathbf{a} = \mathbf{V}_t + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}.$$

这里  $\mathbf{V}_t$  为当地加速度, 由流场的非定常效应产生;  $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = V_s \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial s}$  为迁移加速度, 沿流场速度方向 ( $s = \mathbf{V}/|\mathbf{V}|$ ), 由速度场的空间非均匀性产生.

对于拉格朗日方法, 质点加速度按下式计算:

$$\mathbf{a} = \left( \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t^2} \right)_A (\mathbf{x} = \mathbf{x}_L(A, t)).$$

利用上式和  $\left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right)_A = \mathbf{V}_E(\mathbf{x}, t)$  将质点位移导数转换为欧拉描述法中的速度, 即

$$\mathbf{a} = \left( \frac{\partial \mathbf{V}_E(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right)_A = \left( \frac{\partial \mathbf{V}_E(\mathbf{x}(A, t), t)}{\partial t} \right)_A,$$

则同样可以得到方程(1.1).

质点携带的物理量随时间的变化率称为质点导数(有时称物质导数或随体导数). 这一定义的特殊性在于, 我们按拉格朗日方法来定义变化率, 但又要使用欧拉方法中的变量. 质点导数与前面加速度的定义(1.1)完全类似. 加速度属于速度的质点导数. 按质点加速度同样的定义方式, 得某物理量  $\phi(\mathbf{x}, t)$  的质点导数的数学定义

$$\begin{aligned}
 \frac{D\phi(\mathbf{x}, t)}{Dt} &= \lim_{\delta t \rightarrow 0, \delta \mathbf{x} \rightarrow 0, \frac{\delta \mathbf{x}}{\delta t} = \mathbf{V}} \left[ \frac{\phi(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}, t + \delta t) - \phi(\mathbf{x}, t)}{\delta t} \right] \\
 &= \phi_t + \mathbf{V} \cdot \nabla \phi
 \end{aligned}$$

因此, 质点导数  $\frac{D\phi(\mathbf{x}, t)}{Dt}$  等于局部导数  $\phi_t = \frac{\partial \phi}{\partial t}$  与对流导数  $\mathbf{V} \cdot \nabla \phi$  的和. 习惯上, 我们说局部导数是由流动的非定常变化引起的效应, 对流导数是通过对流(即流动)把周围流动参数的不同值给带过来引起的效应. 或者说, 流体质点所携带的物理量随时间的变化, 如果以欧拉方法来衡量, 来源于流动参数本身的非定常性和空间分布的非均匀性. 因此流动参数不变可以有多种解释.

例如, 不可压缩流体指的是密度的质点导数处处为零即质点的密度不随时间变化. 但密度的质点导数为零并不意味着密度不随时间变化或者密度不随空间坐标变化. 例如, 考虑密度沿垂直方向( $z$ )均匀变化的不可压缩液体, 即密度分布为  $\rho = \rho(z)$ . 现在让这种液体以恒速度  $w$  上升. 现在考虑固定空间点  $z$  密度的变化, 在任意时刻  $t$ , 固定空间点流体质点显然来自初始时刻处于  $z_0 = z - wt$  的流体质点. 因此, 在时刻  $t$ , 位于空间点  $z$  的流体质点的密度为  $\rho(z - wt)$ . 虽然任意流体质点是不可压缩的即  $\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = \rho'(z - wt)(-w + w) = 0$ , 但在任意点密度是随时间变化的, 而且空间分布也不均匀.



## 1.1.4 流体微团运动分析

用泰勒展开,并保留低阶项,得距离为  $\delta \mathbf{x}$  的相邻两流体质点的速度差所满足的关系式

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{V} &= \nabla \mathbf{V} \cdot \delta \mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T) \cdot \delta \mathbf{x} + \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{V} - \nabla \mathbf{V}^T) \cdot \delta \mathbf{x} \\ &= \mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{x} + \mathbf{A} \cdot \delta \mathbf{x}.\end{aligned}$$

这里,  $\nabla \mathbf{V}$  为速度梯度张量( $\nabla \mathbf{V}^T$  为  $\nabla \mathbf{V}$  的转置),它可以分解为如下的对称张量和反对称张量

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T) = (s_{ij}), \mathbf{A} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{V} - \nabla \mathbf{V}^T) = (a_{ij}).$$

进一步有

$$\begin{aligned}s_{ij} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right), \\ s_{ij} &= s'_{ij} + \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \delta_{ij}, \\ s_{ij} &= s_{ij} - \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \delta_{ij}, \\ a_{ij} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right),\end{aligned}$$

因此

$$\delta V_i = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \delta_{ij} \delta x_j + s'_{ij} \delta x_j + a_{ij} \delta x_j. \quad (1.2)$$

可以证明,  $\frac{\partial V_i}{\partial x_j} \delta_{ij} \delta x_j$  表示各向同性的体积膨胀率即线变形率;  $s'_{ij} \delta x_j$  表示体积不变的纯变形率即角变形率;  $a_{ij} \delta x_j$  表示旋转运动(准刚体运动). 因此,一点邻域内的相对运动可以分解为各向同性的体积膨胀运动(拉伸运动)、体积不变的纯变形运动和旋转运动(准刚体运动). 称  $\mathbf{S}$  应变率张量(包含线变形与角变形),  $\mathbf{A}$  为旋转张量.

针对二维问题,用几何方法对上面的速度分解进行进一步说明.

考虑矩形流体微团,顶点按逆时针顺序分别为 A, B, C, D, 矩形的边长为  $\delta x, \delta y$ , 设 A 点的速度分量为  $u, v$ . 于是忽略高阶项后各点的速度分量为(图 1.1)

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{l} (u + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x, v + \frac{\partial v}{\partial x} \delta x) \\ D(\delta x, \delta y) \end{array} & & \begin{array}{l} (u + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y, v + \frac{\partial v}{\partial x} \delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y) \\ C(\delta x, \delta y) \end{array} \\ \begin{array}{l} (u, v) \\ A(0, 0) \end{array} & \begin{array}{c} \text{矩形微团} \end{array} & \begin{array}{l} (u + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x, v + \frac{\partial v}{\partial x} \delta x) \\ B(\delta x, 0) \end{array} \end{array}$$

图 1.1 初始时刻的矩形及角点速度值

$$\begin{aligned}
 A: & u, & v; \\
 B: & u + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x, & v + \frac{\partial v}{\partial x} \delta x; \\
 C: & u + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y, & v + \frac{\partial v}{\partial x} \delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y; \\
 D: & u + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y, & v + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y.
 \end{aligned}$$

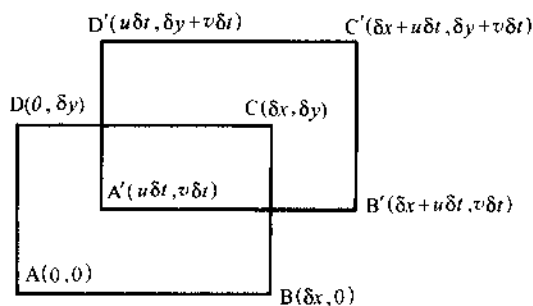


图 1.2 矩形的平动

平动既不改变矩形的大小,也不改变矩形的形状.

拉伸运动或线变形(图 1.3)

$$\begin{aligned}
 A: & 0, & 0; \\
 B: & \frac{\partial u}{\partial x} \delta x, & 0; \\
 C: & \frac{\partial u}{\partial x} \delta x, & \frac{\partial v}{\partial y} \delta y; \\
 D: & 0, & \frac{\partial v}{\partial y} \delta y.
 \end{aligned}$$

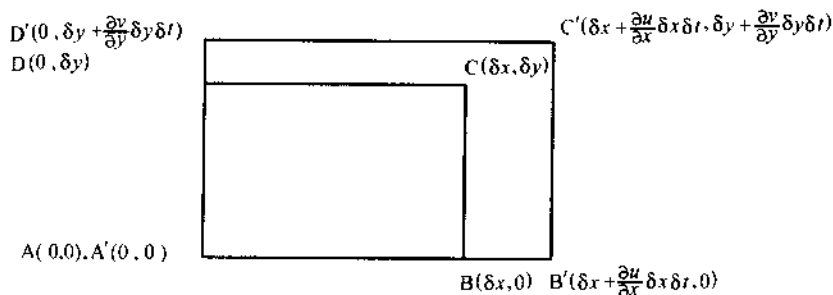


图 1.3 矩形的拉伸运动

拉伸运动虽不改变矩形的形状,但改变矩形的大小.在初始时刻矩形的面积为  $S = \delta x \delta y$ . 在时刻  $\delta t$ , 矩形的面积为  $S + \delta S = \left( \delta x + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x \delta t \right) \left( \delta y + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y \delta t \right)$ .

于是,面积的变化率为  $\frac{\delta S}{S \delta t} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ .

因上述速度的各部分之间只是一种线性叠加,所以可以进行分解.最简单、最符合逻辑的分解如下:

平动(图 1.2)

$$\begin{aligned}
 A: & u, v; \\
 B: & u, v; \\
 C: & u, v; \\
 D: & u, v.
 \end{aligned}$$

旋转运动(图 1.4)

$$\begin{aligned} A: & 0, \quad 0; \\ B: & 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} \delta x; \\ C: & \frac{\partial u}{\partial y} \delta y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} \delta x; \\ D: & \frac{\partial u}{\partial y} \delta y, \quad 0. \end{aligned}$$

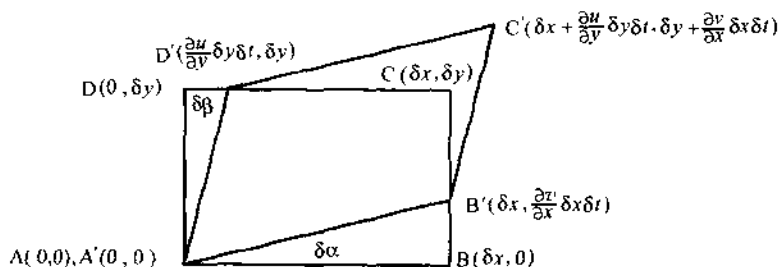


图 1.4 矩形的旋转运动

在  $\delta t$  时刻, AB 轴(逆时针为正)转动的角度为

$$\delta \alpha \approx \tan \delta \alpha = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} \delta x \delta t}{\delta x} = \frac{\partial v}{\partial x} \delta t.$$

所以, AB 轴的转动角速度为  $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}$ .

在  $\delta t$  时刻, AD 轴(逆时针为正)转动的角度为

$$\delta \beta \approx \tan \delta \beta = \frac{-\frac{\partial u}{\partial y} \delta y \delta t}{\delta y} = -\frac{\partial u}{\partial y} \delta t.$$

所以, AD 轴的转动角速度为  $\frac{d\beta}{dt} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ .

一般情况下, AB 与 AD 轴的转动角速度不一样, 即存在角变形. 此时, 把它们的平均值定义为流体微团的转动角速度  $\epsilon_z$ ; 把它们之差除以 2 定义成角变形率  $\gamma_z$ . 即

$$\epsilon_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right), \gamma_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

与二维问题类似, 对于一般的三维问题, 速度可以按如下方式进行几何分解:

A) 体积变化率

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

B) 绕  $x, y, z$  轴的转动角速度

$$\epsilon_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \epsilon_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \epsilon_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

C) 绕  $x, y, z$  轴的角变形率

$$\gamma_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \gamma_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \gamma_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

事实上, 可以将方程(1.2)写成下面的矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \delta u \\ \delta v \\ \delta w \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix}.$$

这里

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = Q_{\text{sym}} + Q_{\text{anti}},$$

其中

$$Q_{\text{sym}} = \frac{1}{2}(Q + Q') = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \gamma_z & \gamma_y \\ \gamma_z & 0 & \gamma_x \\ \gamma_y & \gamma_x & 0 \end{bmatrix},$$

$$Q_{\text{anti}} = \frac{1}{2}(Q - Q') = \begin{bmatrix} 0 & -\epsilon_z & \epsilon_y \\ \epsilon_z & 0 & -\epsilon_x \\ -\epsilon_y & \epsilon_x & 0 \end{bmatrix}.$$

这里  $Q'$  为  $Q$  的转置矩阵. 显然,  $Q_{\text{sym}}$  为对称矩阵,  $Q_{\text{anti}}$  为反对称矩阵. 于是, 流体微团的线变形对应矩阵  $Q$  对称部分的对角线元素, 流体微团的角变形对应矩阵  $Q$  对称部分的非对角线元素, 流体微团的旋转运动对应矩阵  $Q$  反对称部分. 于是证明了 Cauchy - Helmholtz 速度分解定理: 流体微团上任意点的运动 = 参考点的移动 + 体积膨胀运动 + 角变形运动 + 旋转运动.

### 1.1.5 散度与旋度、速度位与流函数

速度的散度定义为

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

考虑流体微团  $\Omega$ , 其边界为  $\Sigma$ . 在运动过程中, 以速度  $\mathbf{V}$  运动的边界元  $d\mathbf{\Sigma}$  在单位时间扫过的体积为  $\mathbf{V} \cdot d\mathbf{\Sigma}$ , 因此  $\Omega$  的体积变化为

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} d\Omega = \int_{\Sigma} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{\Sigma}.$$

由高斯定理得

$$\frac{d\Omega}{dt} = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{V} d\sigma \rightarrow \Omega \nabla \cdot \mathbf{V},$$

所以,

$$\frac{1}{\Omega} \frac{d\Omega}{dt} \Big|_{\Omega \rightarrow 0} = \nabla \cdot \mathbf{V}.$$

因此,散度为标度流体微团在运动过程中的体积变化率.显然,不可压缩流体也可以等价地定义为速度的散度处处为零.

旋度定义为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{V} &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{pmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z \\ &= 2\epsilon_x \mathbf{e}_x + 2\epsilon_y \mathbf{e}_y + 2\epsilon_z \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

如果旋度处处为0,流动称为无旋运动;如果不是处处为0,则称为有旋运动.

在无旋运动假设下,有

$$\left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z = 0,$$

即速度满足如下柯西-黎曼关系式

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

根据全微分存在定理,存在 $\phi$ ,使得 $d\phi = u dx + v dy + w dz$ .称 $\phi$ 为速度位(位函数、势函数).由 $d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz$ 得

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z}.$$

对于二维问题, $\phi = \text{const}$ 定义的曲线称为等位线;对于三维问题, $\phi = \text{const}$ 定义的曲面称为等位面.显然, $\nabla \cdot \phi$ 与速度平行,所以等位面必与流线正交.

考虑二维不可压缩流体.对于不可压缩流体,速度散度为零,即

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (1.3)$$

如果流体无旋,即存在位函数 $\phi$ ,使得: $u = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ ,  $v = \frac{\partial \phi}{\partial y}$ .代入(1.3)得位函数所满足的拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0.$$

除了用位函数描述流动外,还可以用所谓的流函数描述二维不可压缩流动<sup>①</sup>.为了引进流函数概念,先考察穿越直线段(在垂直于二维平面的方向取单位长度)

<sup>①</sup> 下面有关流函数的定义不能推广到三维流动和可压缩流动.

$$d\mathbf{s} = dx\mathbf{e}_x + dy\mathbf{e}_y$$

的流量

$$d\psi = udy - vdx.$$

记

$$d\psi = A dx + B dy, \quad A = -v, \quad B = u.$$

下面看  $d\psi$  是否为全微分, 即是否有下面的柯西-黎曼条件

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}.$$

上式等价于

$$\frac{\partial(-v)}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x},$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

这便是散度为零的条件, 等价于不可压缩流动的定义.

因此, 在不可压假设下, 表达式

$$d\psi = u dy - v dx,$$

确实定义了一全微分, 即存在函数  $\psi$ , 满足

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u.$$

如果取  $\psi$  为常数, 即  $d\psi = 0$ , 则有

$$u dy - v dx = 0 \Rightarrow \frac{u}{dx} = \frac{v}{dy},$$

即  $\psi$  为常数的线为流线.

因此, 称由

$$\psi = \int u dy - v dx, \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

定义的  $\psi$  为流函数.

将  $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$  代入旋度为零的条件

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

得无旋流场中  $\psi$  所满足的方程

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0.$$

因此, 流函数也满足拉普拉斯方程. 另外由

$$\nabla \psi \cdot \nabla \psi = (u, v) \cdot (-v, u) = 0,$$

所以流线和等位线是正交的.

采用流函数的好处在于, 一旦获得流函数, 那么由流函数等于常数就直接确定了流线. 给定速度场后, 可以用成熟的商业软件画流线. 但千万要注意, 某些画流线的软件基

流函数概念. 而流函数是针对二维不可压缩流动定义的. 这类基于流函数的软件不能随意用来画三维流动某个横截面或者二维可压缩流动的流线. 读者在使用商业软件时必须先确认软件的适应范围.

### 1.1.6 旋涡运动学

在分析流体微团的变形时, 已经知道速度梯度张量  $\nabla \mathbf{V}$  可以分解为表示纯变形的部分  $\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T)$  (对称张量) 和表示旋转运动的部分  $\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{V} - \nabla \mathbf{V}^T)$  (反对称张量). 由于二阶反对称张量只有三个独立分量, 所以必然与某矢量形成一一对应关系. 根据速度分解定理中反对称矩阵  $\mathbf{Q}'$  的表达式,  $\mathbf{A}$  必与旋度  $\boldsymbol{\omega}$  成一一对应关系. 可以验证:

$$A_{jk} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \omega_i, \quad \mathbf{A} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}.$$

这里  $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\epsilon_{ijk} = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k)\}$  为置换张量.

因此可以用旋度来唯一表示流体微团的旋转运动. 为了明确  $\boldsymbol{\omega}$  的物理意义, 考虑刚体在空间的一般运动. 由理论力学知道, 对于速度为  $\mathbf{V}_0$  的任意基准点, 矢径为  $\mathbf{x}$  处质点的速度为

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}.$$

这里  $\boldsymbol{\Omega}$  为刚体的瞬时角速度矢量 (最多是时间的函数). 对上式取旋度运算得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \nabla \times \mathbf{V} = \nabla \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) \\ &= \boldsymbol{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{x} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \mathbf{x} \\ &= 3\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{I} = 2\boldsymbol{\Omega}, \end{aligned}$$

因此,

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{V} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}.$$

即  $\boldsymbol{\omega}$  等价于刚体运动中的角速度向量的两倍. 因此可以称流体微团的旋转运动为准刚体运动.

过流场中任一点有一条曲线, 该曲线上任一点与旋度矢量方向相切, 这种线称为涡线. 描述涡线的方程为

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}. \quad (1.4)$$

由定义可知, 涡线上任一点的流体微团绕涡线的切线方向旋转.

在旋涡场取一非涡线的曲线  $C$ , 过该曲线的任意点做涡线, 这些涡线组成的曲面称为涡面.

在旋涡场取一非涡线的封闭曲线  $C$ , 过该曲线的任意点做涡线, 这些涡线组成的管状曲面称为涡管. 称该涡管由闭曲线  $C$  张成的涡管.

如果涡管截面面积无限小, 则称该涡管为涡管元; 如果一涡管的外面流场的旋度均 0, 则该涡管称为孤立涡管.

流场中如果至少存在一部分区域使得  $\boldsymbol{\omega} \neq 0$ , 则流体运动称为有旋运动; 如果在整个

区域中有  $\omega = 0$ , 则称流体运动为无旋运动.

根据所考察的流体团的几何尺度的不同, 有旋运动存在两种不同的力学意义.

如果考虑宏观上无限小, 微观上无限大的流体微团, 则  $\omega$  完整地表示了旋转运动, 因此  $\omega$  也称为涡量 (vorticity), 它是表示流体微团旋转状态的量. 因  $\nabla \cdot \omega = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) = 0$ , 所以涡量场是管式场. 特别注意的是,  $\omega \neq 0$  并不表示流体质点在做宏观上的旋转运动. 例如, 对于剪切流动  $u = y, v = w = 0$ , 有  $\omega = \nabla \times \mathbf{V} = e_3 \neq 0$ , 即旋度不为 0. 但流体质点是在做水平直线运动. 反过来, 如果流体质点做整体旋转运动, 并不表示一定有  $\omega \neq 0$ .

例如, 在柱坐标系  $(r, \theta, z)$  中考虑速度场  $V_r = 0, V_\theta = \frac{1}{r}, V_z = 0$ . 此时对所有  $r \neq 0$ ,

$$\omega = \nabla \times \mathbf{V} = \left( \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \right) e_z = 0,$$

而该速度场明显表示流体质点在做围绕原点的整体旋转运动. 因此涡量反映的是局部运动, 而非整体运动.

如果考虑有限大小的几何尺度的流体团, 涡是一种具有强烈旋转倾向的有限质量流体的集合, 往往是一种有组织的流体结构, 此时这种结构称为有限大小的涡 (vortex), 简称涡. 它可以理解为涡量高度集中的区域, 如涡管、涡丝. 上面考虑的第二个例子就是这样一种涡, 涡量集中在原点. 自然界中的龙卷风、船只航行时或摇动桨叶时水面出现的涡旋、烟圈、浴盆放水时空气柱体周围的旋转流动等都是这种涡的例子.

对于某些流动, 存在各种尺度的涡, 它们相互叠加在一起并进行相互作用, 使得流场从某种观察角度看表现出强烈的无序性. 例如, 烟囱冒出的烟在靠近烟囱口是直的, 离开一段距离后便出现摇摆, 最终散乱开, 观察者看来运动表现出极其不规则.

涡的研究具有重要工程意义. 例如汽车在行驶时, 尾部会拖出涡来 (路面尘上较厚时很明显), 这种涡增加汽车所受的空气阻力, 造成不必要的能耗, 因此需要控制涡的出现.

飞机也有类似情况. 有时涡运动又能产生正面作用, 最常见的例子就是洗衣机, 利用旋转运动使脏物快速与水混合以达到洗净衣服之目的.

取空间任意截面, 截面积为  $A$ . 定义  $I = \int_A \omega \cdot \mathbf{n} dA$  为通过  $A$  的涡通量. 若  $A$  为涡管上的截面, 则涡通量也称涡管强度.

设  $C$  为封闭曲线, 线积分  $\Gamma_C = \int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}$  称为速度环量. 这里,  $d\mathbf{s}$  为封闭曲线的弧元素矢量.

设空间中有任意有界曲面  $A$ , 曲面足够光滑. 曲面的边界线为  $C$ . 由曲面有界的假设, 边界线  $C$  必为封闭曲线. 称曲面  $A$  为由曲线  $C$  张成的曲面, 显然任意封闭曲线  $C$  可以张成无数个曲面. 如果曲面  $A$  是单连通的, 那么  $C$  为一条封闭曲线; 如果  $A$  是双连通的, 那么  $C$  为两条封闭曲线. 因此这里考虑的封闭曲线可以是几条独立的封闭曲线的集合. 对任意矢量  $\mathbf{R}$  成立下面的斯托克斯定理.

$$\int_C \mathbf{R} \cdot d\mathbf{s} = \int_A (\nabla \times \mathbf{R}) \cdot \mathbf{n} dA.$$

**速度环量定理** 沿封闭曲线  $C$  的速度环量等于张在该曲面上任意涡管的涡通量 (直接由斯托克斯定理得到), 因此, 速度环量与涡通量之间是紧密联系的, 二者都可用来衡量



旋涡强度. 由于速度环量只用到线积分和速度本身(无微分), 所以在一般情况下用速度环量研究旋涡运动更方便.

**旋涡运动学性质 1(涡通量守恒定理)** 在任意时刻, 涡管中任意截面的涡通量与该截面的位置无关.

证明思路是这样的: 在涡管上取任意两个横截面 A 和 B, 横截面 A 和 B 的边界曲线为  $C_1$  和  $C_2$ . 考虑两截面 A 和 B 所界定的涡管壁 S(其边界由闭曲线  $C_1$  和  $C_2$  组成), 在该管壁上使用斯托克斯定理. 由于在涡管上旋度与管壁外法线垂直, 所以  $\int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS = 0$ . 于是有  $\int_{C_1} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} - \int_{C_2} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} = 0$ , 而  $\int_{C_1} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}$  与  $\int_{C_2} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}$  恰好等于两个截面上的涡通量, 所以任意两个截面上的涡通量相等.

**旋涡运动学性质 2** 涡线与涡管不能在流体中产生或消失, 只能在流体边界(含自由边界、无限远)上中断或形成闭合环.

涡管只可能在两种情形下产生或消失: 一是涡管的截面积在流体中趋于 0, 此时涡管强度必趋于无限大, 这是不可能的; 另一种情形是涡管或涡线在流体内部突然中断. 设中断面为 S, 在中断面邻域取两个面 A 与 B, 大小与 S 相等, 一个在涡管内, 一个在涡管外. 按性质 1 类似的方法, 可知通过 A 的涡通量与通过 B 的涡通量必然相等, 也就是说涡管终止于 S 处不可能.

## 1.2 流体动力学基本方程

### 1.2.1 应力张量的本构方程

#### 1.2.1.1 应力张量与应变率张量

本构关系研究的是流体微团表面力(面积力)与流体微团的变形运动之间的关系, 即(表面)应力  $\mathbf{P}$  与应变率  $\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T) = (s_{ij})$  之间的关系.

考虑一直角四面体流体微团(图 1.5), 四面体的三个面  $\delta A_1, \delta A_2, \delta A_3$  分别与直角坐标系  $(x_1, x_2, x_3)$  的三个坐标面重合, 从而它们的外法线方向分别为  $-\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3$ . 第四个面  $\delta A_n$  外法线方向为  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ . 各面上的面积力强度(单位面积上的力)分别为  $\mathbf{P}_{-\mathbf{e}_1}, \mathbf{P}_{-\mathbf{e}_2}, \mathbf{P}_{-\mathbf{e}_3}, \mathbf{P}_{\mathbf{n}}$ . 根据作用力与反作用力定律, 有

$$\mathbf{P}_{-\mathbf{e}_1} = -\mathbf{P}_{\mathbf{e}_1},$$

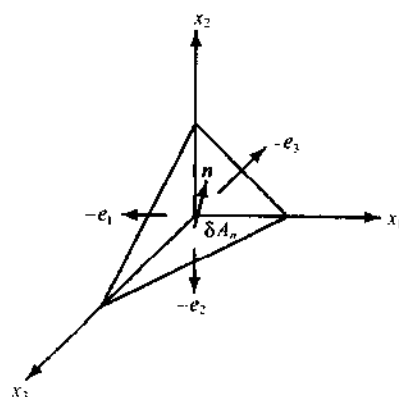


图 1.5 直角四面体流体微团的应力分析

$$\mathbf{P}_{e_2} = -\mathbf{P}_{e_2},$$

$$\mathbf{P}_{-e_3} = -\mathbf{P}_{e_3},$$

$$\mathbf{P}_{-n} = -\mathbf{P}_n.$$

设流体微团体积为  $\delta\Omega$ , 微团加速度为  $\alpha$ , 流体密度为  $\rho$ , 则根据牛顿定律, 有

$$\rho\delta\Omega\alpha = \rho\delta\Omega f + \mathbf{P}_n\delta A_n + \mathbf{P}_{-e_i}\delta A_i.$$

这里  $\rho\delta\Omega f$  为流体微团所受的体积力, 利用明显关系式

$$n_i = \frac{\delta A_i}{\delta A_n}, \lim_{\delta A_n \rightarrow 0} \frac{\delta\Omega}{\delta A_n} = 0,$$

牛顿定律可以简化为

$$\mathbf{P}_n = -\mathbf{P}_{-e_i}n_i = \mathbf{P}_{e_i}n_i.$$

将力矢量做分解

$$\mathbf{P}_{e_i} = P_{ij}\mathbf{e}_j,$$

得力平衡关系式

$$\mathbf{P}_n = P_{ij}n_ie_j.$$

因此, 由

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{P}_n,$$

可以定义张量  $\mathbf{P}$ , 称为应力张量, 其分量为  $P_{ij}$ . 有了应力张量, 那么方向为  $\mathbf{n}$  的任意面上的力可以按  $\mathbf{P}_n = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$  确定. 因此一般情况下面积力与面积的方向有关. 很容易证明, 应力张量是对称张量, 因而只有六个独立分量. 对于某些特殊流体, 有一些特殊力在起作用, 从而应力张量不对称. 这里不考虑这种情况. 对称性可以通过构造角动量守恒方程证明, 也可以用反证法. 例如考虑正立方体微元, 各边分别与某坐标轴平行. 假定  $P_{12} \neq P_{21}$ , 则绕  $z$  轴的力矩平衡得不到满足.

### 1.2.1.2 简单实验观察

以气体为例, 实验观察到, 一般气体中是存在压力的, 它与密度和温度成正比关系, 压力即是一种应力(表面力), 与所考虑的表面垂直面且大小与方向无关. 也可以从分子运动论来阐述压力的存在(即气体分子相互碰撞的宏观表现). 如果上下两层气体作相对滑动, 即存在剪切变形时, 则因微观上的分子运动, 使得运动快的那层(设上层)气体部分分子跑到慢的那层(下层)气体里, 把更高的动能带入下层, 再经进一步分子碰撞使得下层气体运动加快. 同理下层也使上层运动变慢. 这种相互抵抗一直持续到出现某种平衡为止, 宏观上表现为某种剪切力, 阻止两层气体的无限变形. 显然这种抵抗力与变形率大小有关, 变形率越大, 抵抗力就越大, 这样才能阻止变形. 因此剪切应力与剪切变形率之间存在一定的关系, 流体的这种性质称为黏性. 液体中也因分子之间的吸附作用存在上述类似性质.

牛顿在 1687 年通过实验建立了切向应力和剪切变形率之间的关系, 他用相互平行的分别处于  $y=0$  和  $y=h$  的两块长(可以近似认为无限长)平板之间的流动做实验, 下平板

固定不动,上平板以速度  $U$  向右运动(图 1.6). 实验发现,速度分布规律为

$$u(y) = U \frac{y}{h}.$$

实验表明,必须在上平板与运动相同的方向上施加一个切向力  $F$ ,以抵消流体作用在上平板上的黏性力. 单位面积的切向力满足如下关系式

$$\tau = \mu \frac{U}{h}.$$

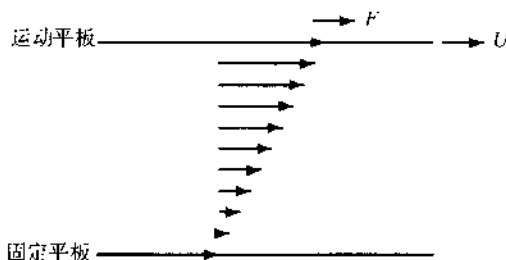


图 1.6 牛顿实验装置

由于  $\frac{U}{h} = \frac{du}{dy}$ , 所以上式可以写成

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}.$$

这里  $\tau$  为切应力,  $\frac{du}{dy}$  为剪切变形率,  $\mu$  只是与流体物理特性有关的常数,称为动力学黏性系数,简称黏性系数,单位为  $\text{kg/m} \cdot \text{s}$ . 有时也用运动黏性系数  $\nu = \mu/\rho$ , 单位为  $\text{m}^2/\text{s}$ .

在常温下,空气的黏性系数为  $\mu = 1.85 \times 10^{-5} \text{kg/m} \cdot \text{s}$ , 水的黏性系数为  $\mu = 10^{-4} \text{kg/m} \cdot \text{s}$ . 黏性系数与压力基本无关,但与温度的关系十分密切.

对于气体,黏性系数随温度增加而增加,这是因为气体黏性作用是由于分子运动(分子扩散)引起的,温度增加,分子运动加快,黏性作用就越大.

对于液体,黏性系数随温度增加而减小,这是因为液体黏性主要是由于分子之间的吸附力引起的,温度增加,吸附力减弱,黏性作用就越小.

气体的黏性系数与温度的关系可以从分子运动论导出. 对于空气,存在如下的 Sutherland 公式

$$\mu(T) = \text{const} \frac{T^{\frac{3}{2}}}{T + C}, C \approx 110.4 \text{K}.$$

上述公式对于  $T < 2000 \text{K}$  是基本成立的.

### 1.2.1.3 构造本构方程的基本原则

上面的牛顿公式是从简单剪切流动获得的,它表明黏性应力与应变率之间的关系,称为本构关系. 对于更复杂的流动,有更一般的本构关系,需要从理性力学或其他方法导出.

根据理性力学原理,本构方程应该符合下述基本原则.

1) 可表性原则. 应力和应变率张量都是张量,所以本构方程也应该是张量方程. 又知应力张量是对称张量,而应变率张量  $\mathbf{S}$  也可以分解成对称  $s_{ij}$  与反对称  $a_{ij}$  两部分,因此应力张量只应该是  $s_{ij}$  的函数.

2) 客观性原则. 本构方程反映的是流体的物理特性,因此必须与坐标系无关,即不同观察者得到的本构方程必须相同.

记  $\mathbf{x}' = x'_i \mathbf{e}'_i, \mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$ . 考虑直角坐标系, 当  $\mathbf{e}'_i$  相对  $\mathbf{e}_i$  作转动时, 坐标基之间有关系式

$$\mathbf{e}_i = \alpha_{ij} \mathbf{e}'_j, \mathbf{e}'_i = \alpha_{ij} \mathbf{e}_j.$$

由于  $\delta_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \alpha_{il} \mathbf{e}'_l \cdot \alpha_{jm} \mathbf{e}'_m = \alpha_{il} \alpha_{jm} \delta_{lm} = \alpha_{il} \alpha_{ij}$ , 所以  $\alpha_{il} \alpha_{ij} = \delta_{ij}$ . 同理  $\alpha_{im} \alpha_{jm} = \delta_{ij}$ .

从解析几何知道, 两坐标系中的位置向量  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{x}'$  有如下变换关系式

$$x_i = \alpha_{ij} x'_j, x'_i = \alpha_{ij} x_j.$$

考虑两个作相对运动的坐标系  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{x}'$ , 且满足关系式

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}_0(t) + \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{x}. \quad (1.5)$$

这里  $\mathbf{x}_0$  表示平动,  $\mathbf{Q}$  表示  $\mathbf{x}'$  相对  $\mathbf{x}$  的转动. 称  $\mathbf{Q} = \mathbf{e}'_i Q_{ij} \mathbf{e}_j$  为坐标架的转动张量. 有  $Q_{ij} = \alpha_{ij}$ ,  $Q_{il} Q_{lj} = \delta_{ij}$ ,  $Q_{im} Q_{jm} = \delta_{ij}$ . 特别强调的是, 这里的坐标系  $\mathbf{x}$  属于一般的非惯性坐标系.

A) 称标量  $\phi$  满足客观性原则, 如果在变换(1.5)下成立:

$$\phi(\mathbf{x}', t) = \phi(\mathbf{x}, t). \quad (1.6)$$

B) 称矢量  $\mathbf{A}$  满足客观性原则, 如果在变换(1.5)下成立:

$$\mathbf{A}'(\mathbf{x}', t) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t), A'_i(\mathbf{x}', t) = Q_{ij} A_j(\mathbf{x}, t). \quad (1.7)$$

C) 称张量  $\mathbf{P}$  满足客观性原则, 如果在变换(1.5)下成立:

$$\mathbf{P}'(\mathbf{x}', t) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{Q}^t, P'_{ij}(\mathbf{x}', t) = Q_{il} P_{lm}(\mathbf{x}, t) Q_{jm}. \quad (1.8)$$

关系式(1.6)至(1.8)对于静止坐标变换是本来成立的, 反映了标量、矢量和张量在静止坐标变换下的不变性, 属于标量、矢量和张量的基本定义. 客观性原则进一步要求, 所考虑的标量、矢量和张量的这些不变性对运动坐标变换也是成立的, 也就是说, 构造本构关系所使用的标量、矢量和张量在运动坐标变换(1.5)下, 也要满足不变性条件(客观性原则)(1.6)至(1.8).

另外根据本构关系必须是张量关系式, 所以也应该满足不变性条件(1.8).

假设剪切应力张量  $\tau_{ij}$  满足关系式

$$\tau_{ij} = f_{ij}(\phi, A_i, P_{mn}, \dots),$$

这里  $f_{ij}$  为二阶张量,  $\phi$  为标量,  $A_i$  为矢量,  $P_{mn}$  为二阶张量. 在运动参照系中, 本构关系具有形式

$$\tau'_{ij} = f'_{ij}(\phi', A'_i, P'_{mn}, \dots).$$

根据客观性要求,  $\phi$  必须满足(1.6),  $A_i$  必须满足(1.7),  $P_{mn}$ ,  $f_{ij}$  和  $\tau_{ij}$  必须满足(1.8).

流体的物性参数如黏性系数属于标量, 满足客观性要求(1.6).

流体的速度矢量  $V_i$  却不满足(1.7), 因此不能单独在本构关系式中出现. 原来

$$V'_i = \frac{dx'_i}{dt} = \frac{dx_{0i}(t)}{dt} + Q_{ij}(t) \frac{dx_j}{dt} + \frac{dQ_{ij}}{dt} x_j = V_{0i}(t) + Q_{ij} V_j + \frac{dQ_{ij}}{dt} x_j,$$

因  $V_{0i}$  和  $\frac{dQ_{ij}}{dt} x_j$  对于运动坐标系不恒为零, 所以关系式(1.7)不满足.

已经知道, 应变率张量  $s_{ij}$  满足客观性原则, 即  $s'_{ij} = Q_{ik} s_{kl} Q_{jl}$ , 因此它满足客观性原则, 可以出现在本构关系中. 事实上, 由

$$V'_i = V_{0i}(t) + Q_{ik} V_k + \frac{dQ_{ik}}{dt} x_k,$$

得

$$\begin{aligned}\frac{\partial V'_l}{\partial x_j} &= Q_{ik} \frac{\partial V_k}{\partial x_j} + \frac{dQ_{ik}}{dt} \frac{\partial x_k}{\partial x_j} \\ &= Q_{ik} \frac{\partial V_k}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial x_j} + \frac{dQ_{ik}}{dt} \frac{\partial x_k}{\partial x_j} \\ &= Q_{ik} \frac{\partial V_k}{\partial x_l} Q_{jl} + \frac{dQ_{ik}}{dt} Q_{jk}, \\ \frac{\partial V'_j}{\partial x_i} &= Q_{ik} \frac{\partial V_l}{\partial x_i} Q_{jl} + \frac{dQ_{ik}}{dt} Q_{ik},\end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned}s'_{ij} &= Q_{ik} s_{kl} Q_{jl} + \frac{dQ_{ik}}{dt} Q_{jk} + \frac{dQ_{ik}}{dt} Q_{ik} = Q_{ik} s_{kl} Q_{jl} + \frac{dQ_{ik}}{dt} Q_{jk} \\ &= Q_{ik} s_{kl} Q_{jl} + \frac{d\delta_{ij}}{dt} = Q_{ik} s_{kl} Q_{jl}.\end{aligned}$$

如果令  $f_{ij}$  为标量函数, 则显然

$$\tau_{ij} = f(\mu, s_{ij})$$

满足客观性原则.

#### 1.2.1.4 牛顿型流体的本构关系

有了可表性原则和客观性原则, 便可大大减小构造本构关系的盲目性. 但这些原则还不能用以给出本构关系的具体表达式, 还必须补充实验与假设条件. 最常见的流体是牛顿型流体, 它是一种相对简单的非记忆性流体.

##### 1. 基本假设的分解与本构关系的导出

牛顿型流体的定义可以分解为如下几个基本假设:

1) 运动流体的应力张量在运动停止后应趋于静止流体的应力张量  $-p\delta_{ij}$  ( $p$  为热力学压强). 为此将应力张量  $P_{ij}$  分解为  $-p\delta_{ij}$  和  $\tau_{ij}$  两部分, 即

$$P_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}.$$

这里  $\tau_{ij}$  为偏应力张量, 运动停止时  $\tau_{ij} \equiv 0$ . 偏应力张量也为对称张量.

2) 偏应力张量  $\tau_{ij}$  的各分量是局部速度梯度张量  $\frac{\partial V_k}{\partial x_l}$  的线性齐次函数

$$\tau_{ij} = c_{ijkl} \frac{\partial V_k}{\partial x_l}.$$

这里  $c_{ijkl}$  表示流体黏性, 是常数. 例如, 当  $\frac{\partial V_l}{\partial x_2} \neq 0$ , 而其他  $\frac{\partial V_k}{\partial x_l} = 0$  时,  $c_{1212} = \mu$  (黏性系

数). 由于  $\frac{\partial V_k}{\partial x_l} = s_{kl} + a_{kl}$ , 其中应变率张量  $s_{kl}$  为对称张量, 而旋转运动张量  $a_{kl}$  为反对称张量. 由于  $\tau_{ij}$  是对称张量, 所以必有  $c_{ijkl} a_{kl} = 0$ , 从而

$$\tau_{ij} = c_{ijkl} s_{kl}.$$

3) 流体是各向同性的, 即流体的性质不依赖于方向和坐标系的转换. 因此  $c_{ijkl}$  必然是四阶各向同性张量, 其每一分量在旋转坐标变换下不变, 即

$$c'_{ijkl} = c_{ijkl}.$$

各向同性张量的特点是, 将  $c_{ijkl}$  的各下标值作递增值相同的循环置换 (如对  $c_{1234}$ , 作  $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 1$ , 得  $c_{2341}$ ), 得另一分量, 此分量值与原分量值相同, 如  $c_{2341} = c_{1234}$ ,  $c_{4123} = c_{3412}$ . 由此不难证明, 四阶各向同性张量可以表示为

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \alpha \delta_{ik} \delta_{jl} + \beta \delta_{il} \delta_{jk},$$

其中  $\lambda, \alpha, \beta$  均为标量. 因此, 四阶各向同性张量只有三个独立分量.

将下标  $i, j$  对调得

$$c_{jikl} = \lambda \delta_{ji} \delta_{kl} + \alpha \delta_{jk} \delta_{il} + \beta \delta_{jl} \delta_{ik},$$

因此有

$$c_{jikl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \beta \delta_{ik} \delta_{jl} + \alpha \delta_{il} \delta_{jk}.$$

由于  $\tau_{ij}, s_{ij}$  都是对称张量, 所以  $c_{ijkl}$  必然关于  $i, j$  对称, 即  $c_{ijkl} = c_{jikl}$ . 于是

$$c_{ijkl} = \frac{1}{2}(c_{ijkl} + c_{jikl}) = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}).$$

这里  $\mu = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ .

于是  $\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} s_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) s_{kl}$ , 即

$$\tau_{ij} = \lambda s_{kk} \delta_{ij} + 2\mu s_{ij}.$$

因此牛顿流体应力张量的表达式为

$$P_{ij} = (-p + \lambda s_{kk}) \delta_{ij} + 2\mu s_{ij}. \quad (1.9)$$

如果记

$$\mu' = \lambda + \frac{2}{3}\mu,$$

上式也可以写成

$$P_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu \left( s_{ij} - \frac{1}{3} s_{kk} \delta_{ij} \right) + \mu' s_{kk} \delta_{ij}. \quad (1.10)$$

这就是广义牛顿定律, 也称为牛顿流体的本构方程.

## 2. 系数 $\mu, \mu'$ 的物理意义

考虑简单剪切运动  $u = u(y), v = w = 0$ . 此时本构方程退化为

$$P_{12} = \mu \frac{du}{dy},$$

因此  $\mu$  为前面提到的黏性系数.

考虑以点  $M$  为中心以  $r \rightarrow 0$  为半径的无限小球面  $S$  上法应力  $P_n = P \cdot n$  的平均值 (对所有方向进行平均)

$$\begin{aligned}
\bar{P} &= \frac{1}{4\pi r^2} \int_S \mathbf{P}_n \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{4\pi r^2} \int_S P_{ij} n_i n_j dS \\
&\stackrel{r \rightarrow 0}{=} \frac{P_{ij}}{4\pi r^2} \int_S n_i n_j dS \\
&= \frac{P_{ij}}{4\pi r^2} \oint_S \frac{x_i}{r} n_j dS = \frac{P_{ij}}{4\pi r^3} \oint_S x_i n_j dS \\
&= \frac{P_{ij}}{4\pi r^3} \oint_S x_j \delta_{ij} n_j dS = \frac{P_{ij}}{4\pi r^3} \oint_S x_k \delta_{ik} n_k \delta_{kj} dS \\
&= \frac{P_{ij}}{4\pi r^3} \oint_S (\delta_{ik} \delta_{kj} x_k) n_k dS \\
&= \frac{P_{ij}}{4\pi r^3} \int_V \frac{\partial(\delta_{ik} \delta_{kj} x_k)}{\partial x_k} dV \\
&= \frac{P_{ij}}{4\pi r^3} \int_V \delta_{ik} \delta_{jk} dV \\
&= \frac{1}{3} P_{ij} \delta_{ik} \delta_{jk} = \frac{1}{3} (P_{11} + P_{22} + P_{33}),
\end{aligned}$$

这里,  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$  为球的体积. 因此  $M$  点处所有方向上的法应力平均值等于  $x_1, x_2, x_3$  三个方向上的法应力平均值, 是一个不随坐标变化的量. 进一步将广义牛顿定律代入上式得

$$\bar{P} = -p + \mu' \nabla \cdot \mathbf{V}.$$

如果  $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ , 则由上式得  $\bar{P} = -p$ , 即不可压缩流体一点的法应力平均值等于其热力学压强.

如果  $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ , 那么上式表明, 流体微团在运动过程中发生体积变化引起平均正应力值发生  $\mu' \nabla \cdot \mathbf{V}$  的变化, 因此也称  $\mu'$  膨胀黏性系数或第二黏性系数. 它反映了气体因膨胀或收缩发生体积变化时, 从一个状态过渡到另一个状态所对应的不可逆(非平衡)过程引起的内耗. 失去平衡后再恢复到新的平衡所需要的时间(弛豫时间)如果比宏观运动状态改变所需时间短许多, 则可以忽略第二黏性系数. 事实上, 除高温和高频声波等极端情况外, 对于一般气体分子运动可取第二黏性系数为 0. 早期斯托克斯假设  $\mu' = 0$ , 因此习惯上称  $\mu' = 0$  为斯托克斯假设. 在斯托克斯假设下, 本构方程中的压力就是平均正应力, 它与热力学中的压力具有不同含义, 不能证明它们相等. 但实际计算表明, 在斯托克斯假设下, 可以认为本构关系中的压力等于热力学压力.

在斯托克斯假设下, 广义牛顿定律可以写成

$$P_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu \left( s_{ij} - \frac{1}{3} s_{kk} \delta_{ij} \right). \quad (1.11)$$

### 3. 本构关系在不同坐标系中的表达式

为了求得应力张量在各坐标系中的分量形式, 将本构关系写成矢量形式

$$\mathbf{P} = -p\mathbf{I} + 2\mu \left( \mathbf{S} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{V} \mathbf{I} \right) + \mu' \nabla \cdot \mathbf{V} \mathbf{I},$$

这里  $\mathbf{I}$  为单位张量, 然后将矢量形式针对所考虑的坐标系进行分量分解. 先求  $\nabla \cdot \mathbf{V}$ , 再取

转置得 $(\nabla \mathbf{V})^t$ .

在直角坐标系下,有关系式

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= V_x \mathbf{e}_x + V_y \mathbf{e}_y + V_z \mathbf{e}_z; \\ s_{xx} &= \frac{\partial V_x}{\partial x}, s_{yy} = \frac{\partial V_y}{\partial y}, s_{zz} = \frac{\partial V_z}{\partial z}; \\ s_{xy} &= s_{yx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right); \\ s_{yz} &= s_{zy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right); \\ s_{zx} &= s_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right).\end{aligned}$$

因此应力各分量的表达式为

$$\begin{aligned}P_{xx} &= -p + 2\mu s_{xx} + \left( \mu' - \frac{2}{3}\mu \right) (s_{xx} + s_{yy} + s_{zz}); \\ P_{yy} &= -p + 2\mu s_{yy} + \left( \mu' - \frac{2}{3}\mu \right) (s_{xx} + s_{yy} + s_{zz}); \\ P_{zz} &= -p + 2\mu s_{zz} + \left( \mu' - \frac{2}{3}\mu \right) (s_{xx} + s_{yy} + s_{zz}); \\ P_{xy} &= P_{yx} = 2\mu s_{xy}; \\ P_{yz} &= P_{zy} = 2\mu s_{yz}; \\ P_{zx} &= P_{xz} = 2\mu s_{zx}.\end{aligned}$$

在柱坐标系下,有关系式

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= V_r \mathbf{e}_r + V_\theta \mathbf{e}_\theta + V_z \mathbf{e}_z; \\ \nabla &= \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}; \\ \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} &= 0, \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial r} = 0, \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial r} = 0; \\ \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} &= \mathbf{e}_\theta, \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{e}_r, \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial \theta} = 0; \\ \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial z} &= 0, \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial z} = 0, \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial z} = 0.\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}s_{rr} &= \frac{\partial V_r}{\partial r}, s_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r}, s_{zz} = \frac{\partial V_z}{\partial z}; \\ s_{r\theta} &= s_{\theta r} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \frac{V_\theta}{r} \right); \\ s_{\theta z} &= s_{z\theta} = \frac{1}{2} \left( r \frac{\partial}{\partial z} \frac{V_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} \right); \\ s_{zr} &= s_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \right).\end{aligned}$$



因此应力各分量的表达式为

$$\begin{aligned} P_{rr} &= -p + 2\mu s_{rr} + \left(\mu' - \frac{2}{3}\mu\right)(s_{rr} + s_{\theta\theta} + s_{zz}); \\ P_{\theta\theta} &= -p + 2\mu s_{\theta\theta} + \left(\mu' - \frac{2}{3}\mu\right)(s_{rr} + s_{\theta\theta} + s_{zz}); \\ P_{zz} &= -p + 2\mu s_{zz} + \left(\mu' - \frac{2}{3}\mu\right)(s_{rr} + s_{\theta\theta} + s_{zz}); \\ P_{r\theta} &= P_{\theta r} = 2\mu s_{r\theta}; \\ P_{\theta z} &= P_{z\theta} = 2\mu s_{\theta z}; \\ P_{zr} &= P_{rz} = 2\mu s_{zr}. \end{aligned}$$

## 1.2.2 流体动力学的积分型方程

### 1.2.2.1 基本原理

在流场中选定具有代表性的一个静止或运动的体积(称为有限体或有限体积,也称为控制体),针对该体积构造反映质量、动量与能量守恒的流体力学基本积分型方程,这就是构造流体力学基本方程的基本原理。

主要考虑两种类型的有限体:静止几何体(简称几何体)与运动物质体(简称物质体)。这种称呼完全是人为的,不同书上可以有不同的称呼。有限体的这种分类只是本节内容介绍上的需要,不代表最基本的概念。它们之间的区别类似于前面的欧拉法与拉格朗日方法的区别。

几何体是相对于某参照坐标系不随时间变化的封闭曲面  $\Sigma$  所包含的区域  $\Omega$ ,如发动机中的气缸、进气道等。几何体属于开放系统,几何外形与体积不变,其边界上可以有质量交换,有力的相互作用和能量交换。

物质体是流体中封闭流体(物质)面  $\Sigma^*(t)$  所包含的流体,如液滴、气泡等,物质体所占据的几何区域  $\Omega^*$  是随时间变化的。物质体属于封闭系统,随流体质点一起运动(从而边界速度等于流体速度),其边界上没有质量交换,但有力的相互作用和能量交换。

流体力学主要有三个基本方程:

(1)质量守恒方程。它反映的是物质不生不灭这一最自然的物理定律。它用以描述流体密度  $\rho$  的变化规律。它不需要补充任何其他关系式,也就是说,质量守恒方程是物质不生不灭的最直观的体现,方程的形式十分简单。质量守恒方程也称连续性方程。

(2)动量守恒方程。它反映的是牛顿定律,即物体在力的作用下做加速运动。具体说,物质体所受的合力等于其质量与加速度的积,也可以理解为流体微团所受的力等于其动量变化率。因此,只要能求出合力,便可以得到动量守恒方程。合力包括体积力  $\rho f$  和面积力  $P_n$ 。体积力可以是多相物质的相互作用力、远程力(如重力与电磁力)和惯性力,以后将逐步介绍。面积力主要是压力和黏性应力,这在前一节已经详细介绍了。

(3)能量守恒方程。能量守恒属于经典的热力学定律。流体微团单位质量的能量即总

能  $E$  包括内能  $e$  与动能  $\frac{1}{2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}$ . 合力所做的功、热传导(由化学反应等引起的)生成热都引起总能的变化. 功等于力矢量与速度矢量的点积. 热传导引起的热流密度  $\mathbf{q}$  是一矢量, 对于各向同性流体有如下的傅里叶定律

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T.$$

这里  $\kappa$  为热传导系数. 因此, 热传导是由温度不均匀引起的. 傅里叶定律表明, 热量由温度高的地方传给温度低的地方, 热流量正比于温度梯度. 沿方向  $\mathbf{n}$  在单位时间通过单位面积的热量为

$$q_n = -\kappa \nabla T \cdot \mathbf{n} = -\kappa \frac{\partial T}{\partial n}.$$

生成热的产生在本书中不考虑(读者可以使用尽人皆知的软件 CHEMKIN).

通过某种线性的或非线性的组合, 还可以导出一些组合量的方程. 这些组合量所满足的方程虽然不属于最基本的方程, 但可以更直观地揭示一些特殊的物理现象.

### 1.2.2.2 有限体上积分的导数

考虑由流体质点组成的物质线  $L^*$ 、物质面  $\Sigma^*$  和物质体  $\Omega^*$ , 往往需要以它们作为积分域来考虑某些物理量的变化. 如:

A) 物质线上的速度环量  $\oint_{L^*} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{L}^*$ ;

B) 物质面上的涡通量  $\int_{\Sigma^*} \boldsymbol{\Omega} \cdot d\boldsymbol{\Sigma}^*$ ;

C) 物质体上的质量  $\int_{\Omega^*} \rho d\Omega^*$ , 动能  $\int_{\Omega^*} \rho \mathbf{V} d\Omega^*$ , 总能  $\int_{\Omega^*} \rho E d\Omega^*$ , 等等.

这些物质积分及其变化在构造积分型运动方程和研究旋涡动力学性质等方面具有重要应用价值.

物质积分随时间的变化率称为物质积分的随体导数. 这种变化显然来自两个方面:

A) 物理量本身随时间的变化;

B) 物质线、物质面或物质体的形状和大小随时间的变化.

先将物质线  $L^*$ 、物质面  $\Sigma^*$  和物质体  $\Omega^*$  看成线段元  $\delta L^*$ 、面积元  $\delta \Sigma^*$  和体积元  $\delta \Omega^*$  的集合, 先看线段元、面积元和体积元的随体导数.

设  $\delta L^*$  为流体质点  $\mathbf{x}_A$  到其相邻质点  $\mathbf{x}_B$  的矢径, 于是物质线元积分的随体导数为

$$\frac{D}{Dt} \delta L^* = \frac{D}{Dt} (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A) = \mathbf{V}_B - \mathbf{V}_A = \delta \mathbf{V} = \nabla \mathbf{V} \cdot \delta \mathbf{L}^*. \quad (1.12)$$

利用散度的定义得物质体积分的随体导数

$$\frac{D}{Dt} \delta \Omega^* = \delta \Omega^* \frac{1}{\delta \Omega^*} \frac{D \Omega^*}{Dt} = \nabla \cdot \mathbf{V} \delta \Omega^*. \quad (1.13)$$

为了确定物质面积分的随体导数, 我们利用物质线和物质体上的随体导数. 给定物质面  $\delta \Sigma^*$ , 任选不与  $\delta \Sigma^*$  法向垂直的物质线  $\delta L^*$  为母线, 组成体积为  $\delta \Omega^* = \delta L^* \cdot \delta \Sigma^*$  的柱体(物质体), 于是有

$$\frac{D}{Dt}\delta\Omega^* = \frac{D}{Dt}\delta\mathbf{L}^* \cdot \delta\boldsymbol{\Sigma}^* + \delta\mathbf{L}^* \cdot \frac{D}{Dt}\boldsymbol{\Sigma}^*.$$

将(1.12)和(1.13)以及  $\delta\Omega^* = \delta\mathbf{L}^* \cdot \delta\boldsymbol{\Sigma}^*$  代入上式并提出公因子  $\delta\mathbf{L}^*$ , 得

$$\delta\mathbf{L}^* \cdot \left[ \frac{D}{Dt}\delta\boldsymbol{\Sigma}^* + \nabla \mathbf{V} \cdot \delta\boldsymbol{\Sigma}^* - (\nabla \cdot \mathbf{V})\delta\boldsymbol{\Sigma}^* \right] = 0.$$

因  $\delta\mathbf{L}^*$  任意, 所以必有

$$\frac{D}{Dt}\delta\boldsymbol{\Sigma}^* = -\nabla \mathbf{V} \cdot \delta\boldsymbol{\Sigma}^* + (\nabla \cdot \mathbf{V})\delta\boldsymbol{\Sigma}^*. \quad (1.14)$$

考虑物质积分  $\int_{\tau} \boldsymbol{\Phi} * \delta\boldsymbol{\tau}^*$  的随体导数, 这里  $\boldsymbol{\Phi}$  可以是任意矢量和标量,  $\delta\boldsymbol{\tau}^*$  可以代表物质线元、物质面元和物质体元, 乘号  $*$  可以是任意合理的标量乘和矢量乘 (包括点乘和叉乘). 则有如下关系式

$$\frac{D}{Dt} \int_{\tau} \boldsymbol{\Phi} * \delta\boldsymbol{\tau}^* = \int_{\tau} \frac{D}{Dt} (\boldsymbol{\Phi} * \delta\boldsymbol{\tau}^*) = \int_{\tau} \frac{D\boldsymbol{\Phi}}{Dt} * \delta\boldsymbol{\tau}^* + \int_{\tau} \boldsymbol{\Phi} * \frac{D\delta\boldsymbol{\tau}^*}{Dt}.$$

利用关系式(1.12), (1.13)和(1.14), 很容易求得如下随体导数:

A) 速度环量的随体导数

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \oint_L \mathbf{V} \cdot \delta\mathbf{L}^* &= \oint_L \frac{D\mathbf{V}}{Dt} \cdot \delta\mathbf{L}^* + \oint_L \mathbf{V} \cdot \frac{D\delta\mathbf{L}^*}{Dt} \\ &= \oint_L \frac{D\mathbf{V}}{Dt} \cdot \delta\mathbf{L}^* + \oint_L \mathbf{V} \cdot \delta\mathbf{V} \\ &= \oint_L \frac{D\mathbf{V}}{Dt} \cdot \delta\mathbf{L}^* + \oint_L \frac{1}{2} \delta V^2 \\ &= \oint_L \frac{D\mathbf{V}}{Dt} \cdot \delta\mathbf{L}^*. \end{aligned}$$

B) 涡旋矢量物质积分的随体导数

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{\Sigma} \boldsymbol{\Omega} \cdot \delta\boldsymbol{\Sigma}^* &= \int_{\Sigma} \frac{D\boldsymbol{\Omega}}{Dt} \cdot \delta\boldsymbol{\Sigma}^* + \int_{\Sigma} \boldsymbol{\Omega} \cdot \frac{D\delta\boldsymbol{\Sigma}^*}{Dt} \\ &= \int_{\Sigma} \left[ \frac{D\boldsymbol{\Omega}}{Dt} + (\nabla \cdot \mathbf{V})\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} \cdot (\nabla \mathbf{V}) \right] \cdot \delta\boldsymbol{\Sigma}^*. \end{aligned}$$

C) 任意物理量的物质体积分的随体导数

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \phi \delta\Omega^* &= \int_{\Omega} \frac{D\phi}{Dt} \delta\Omega^* + \int_{\Omega} \phi \frac{D}{Dt} \delta\Omega^* \\ &= \int_{\Omega} \left( \frac{D\phi}{Dt} + \phi \nabla \cdot \mathbf{V} \right) \delta\Omega^* \\ &= \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \mathbf{V}) \right] \delta\Omega^*. \end{aligned}$$

几何体内某物理量  $\phi$  总和随时间的增长率

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \phi d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial t} d\Omega,$$

称为局部导数.

随体导数则为物质体内某物理量  $\phi$  总和随时间的增长率. 利用物质体积分随体导数

的定义

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega^*(t)} \phi d\Omega = \int_{\Omega^*(t)} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \mathbf{V}) \right] d\Omega^*,$$

和高斯定理得

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega^*(t)} \phi d\Omega = \int_{\Omega^*(t)} \frac{\partial \phi}{\partial t} d\Omega + \oint_{\Sigma^*(t)} \phi \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\Sigma. \quad (1.15)$$

这里  $\oint_{\Sigma^*(t)} \phi \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\Sigma$  是边界处因流体流动使物质体体积扩张所增加的量,称为控制面上的运输量.因此,随体导数等于局部导数加控制面上的运输量.

除了考虑上面的静止几何体和运动物质体外,有时也考虑任意运动控制体(简称为任意体)  $\Omega(t)$ ,其边界  $\Sigma(t)$  的运动速度为  $\mathbf{V}_\Sigma$ .如果  $\mathbf{V}_\Sigma = 0$ ,则任意体蜕化为静止几何体;如果  $\mathbf{V}_\Sigma = \mathbf{V}$ ,则任意体蜕化为物质体.任意体内某物理量  $\phi$  的总和随时间的变化为

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{\Omega(t)} \phi d\Omega &= \int_{\Omega(t)} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \mathbf{V}_\Sigma) \right] d\Omega \\ &= \int_{\Omega(t)} \frac{\partial \phi}{\partial t} d\Omega + \oint_{\Sigma(t)} \phi \mathbf{V}_\Sigma \cdot \mathbf{n} d\Sigma. \end{aligned}$$

原则上,利用静止几何体、物质体或任意体和力学、热力学定律,就可以构造积分型动力学方程.

### 1.2.2.3 物质体上的动力学方程

**质量守恒方程:**根据物质不生不灭定律,物质体内流体的质量保持不变,所以质量守恒方程为

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega^*(t)} \rho d\Omega = 0.$$

**动量守恒方程<sup>①</sup>:**根据牛顿定律,物质体内动量增长率等于作用在物质体上的体积力和面上的表面力之和,所以动量守恒方程为

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega^*(t)} \rho \mathbf{V} d\Omega = \int_{\Omega^*(t)} \rho \mathbf{f}_v d\Omega + \oint_{\Sigma^*} \mathbf{P}_n d\Sigma.$$

**能量守恒方程:**根据能量定律,物质体内总能量增长率等于作用在物质体上的体积力做功( $\mathbf{f}_v \cdot \mathbf{V}$ )、面上的表面力做功( $\mathbf{P}_n \cdot \mathbf{V}$ )、物质体内的生成热和边界面上因热传导输入的热量  $\kappa \nabla T$  之和

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega^*(t)} \rho E d\Omega = \int_{\Omega^*(t)} \rho \mathbf{f}_v \cdot \mathbf{V} d\Omega + \oint_{\Sigma^*} \mathbf{P}_n \cdot \mathbf{V} d\Sigma$$

<sup>①</sup> 也可以建立动量矩守恒方程.由物质体内动量矩增长率等于作用在物质体上的体积力矩和面上的表面力矩之和,得

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega^*(t)} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{V} d\Omega = \int_{\Omega^*(t)} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{f}_v d\Omega + \oint_{\Sigma^*} \mathbf{r} \times \mathbf{P}_n d\Sigma.$$

$$+ \int_{\Omega^*(t)} \rho \dot{q} d\Omega + \oint_{\Sigma^*(t)} \kappa \nabla T \cdot \mathbf{n} d\Sigma.$$

这里  $E = e + \frac{1}{2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}$  为总能(内能加动能),  $q$  为流体微团单位质量单位时间的生成热.

#### 1.2.2.4 静止几何体和任意体上的动力学方程

利用随体导数定义(1.15)

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega^*(t)} \phi d\Omega = \int_{\Omega^*(t)} \frac{\partial \phi}{\partial t} d\Omega + \oint_{\Sigma^*(t)} \phi \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\Sigma,$$

并取  $\Sigma = \Sigma^*(t)$ ,  $\Omega = \Omega^*(t)$ , 便可将物质体上方程的随体导数转换为局部导数和边界运输量得几何体上的守恒方程.

质量守恒方程为

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega + \oint_{\Sigma} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\Sigma = 0.$$

动量守恒方程为

$$\int_{\Omega} \frac{\partial(\rho \mathbf{V})}{\partial t} d\Omega + \oint_{\Sigma} \rho \mathbf{V} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\Sigma = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f}_v d\Omega + \oint_{\Sigma} \mathbf{P}_n d\Sigma.$$

能量守恒方程为

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} d\Omega + \oint_{\Sigma} \rho E \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\Sigma &= \int_{\Omega} \rho \mathbf{f}_v \cdot \mathbf{V} d\Omega + \oint_{\Sigma} \mathbf{P}_n \cdot \mathbf{V} d\Sigma \\ &+ \int_{\Omega} \rho \dot{q} d\Omega + \oint_{\Sigma} \kappa \nabla T \cdot \mathbf{n} d\Sigma. \end{aligned}$$

其实,上述方程也可以直接从几何体分析获得.以质量守恒方程为例,几何体内的变化由两个原因引起:(1)通过表面流体流进流出,单位时间内流进的流体和流出的流体的总和为  $\oint_{\Sigma} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\Sigma$ ; (2)由于密度本身随时间的变化引起的质量增加  $\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega$ . 根据质量守恒原理,必有

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega + \oint_{\Sigma} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\Sigma = 0.$$

守恒方程的各项均有明确的物理意义,以动量方程为例:

- 1) 左端第一项代表控制体内动量变化率;
- 2) 左端第二项为边界上因对流流动对上述变化的贡献;
- 3) 右端第一项为体积力对上述变化的贡献;
- 4) 右端第二项为面积力对上述变化的贡献.

也可以用类似方法构造任意体上的守恒方程.所得的守恒方程为

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega + \oint_{\Sigma(t)} \rho (\mathbf{V} - \mathbf{V}_{\Sigma}) \cdot \mathbf{n} d\Sigma &= 0, \\ \int_{\Omega(t)} \frac{\partial(\rho \mathbf{V})}{\partial t} d\Omega + \oint_{\Sigma(t)} \rho \mathbf{V} (\mathbf{V} - \mathbf{V}_{\Sigma}) \cdot \mathbf{n} d\Sigma &= \int_{\Omega(t)} \rho \mathbf{f}_v d\Omega + \oint_{\Sigma(t)} \mathbf{P}_n d\Sigma \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$= \int_{\Omega(t)} \rho f_v d\Omega + \oint_{\Sigma(t)} \mathbf{P}_n d\Sigma, \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(t)} \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} d\Omega + \oint_{\Sigma(t)} \rho E (\mathbf{V} - \mathbf{V}_\Sigma) \cdot \mathbf{n} d\Sigma &= \int_{\Omega(t)} \rho \mathbf{f}_v \cdot \mathbf{V} d\Omega \\ &+ \oint_{\Sigma} \mathbf{P}_n \cdot \mathbf{V} d\Sigma + \int_{\Omega(t)} \rho Q d\Omega + \oint_{\Sigma(t)} \kappa \nabla T \cdot \mathbf{n} d\Sigma. \end{aligned} \quad (1.18)$$

### 1.2.2.5 动量定理

流动参数所满足的基本方程是非线性的,一般情况下求解十分困难.但动量方程的积分形式在许多情况下能简单给出意想不到的好结果.

设固定在空间的区域为  $\Omega$ , 区域的外边界为  $\Sigma$  (外边界处一般忽略黏性力作用而只考虑压力). 区域的内部可以包含另一个物体<sup>①</sup>, 设物体给流体的作用力为  $-\mathbf{F}_e$  (包含压力和黏性力). 于是积分形式的动量方程为

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{V} d\Omega + \int_{\Sigma} \rho \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\Sigma = -\mathbf{F}_e - \int_{\Sigma} p \mathbf{n} dS + \int_{\Omega} \mathbf{F}_v d\Omega. \quad (1.19)$$

这里,

左边第一项表示区域  $\Omega$  内动量的变化率,

第二项表示通过区域边界  $\Sigma$  的动量通量,

右边第一项为流体内物体给流体的作用力,

第二项为流体(外)边界上压力给流体的作用力,

最后一项为体积力给流体的作用力(在非惯性系中应该考虑惯性力).

在计算流体力学中,计算出空间流动参数分布后,利用动量定理将物体所受的气动力积分出来,精度要大大高于直接对物而受力(压力与黏性力)进行积分所得的合力.

## 1.2.3 流体动力学的微分型方程

前面介绍的积分型方程几乎总是成立的. 本节介绍的微分型方程需要假定流动参数是可微的.

### 1.2.3.1 由积分方程导出微分方程

采用控制体上的积分方程,将所有面积分通过高斯定理化为体积分,由积分区域的任意性,被积函数必然与原积分满足同样的方程,由此便得相应的微分方程.

用高斯定理将面积分化成体积分后,任意控制体  $\Omega$  上的积分方程可以写成

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \right] d\Omega = 0,$$

<sup>①</sup> 如果该物体的部分或全部边界与正好与所选的控制体部分边界重合,那么积分边界  $\Sigma$  不包含重合部分.

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \rho \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \mathbf{V}) - \rho \mathbf{f}_v - \nabla \cdot (\mathbf{P}) \right] d\Omega = 0,$$

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} E) - \rho \mathbf{f}_v \cdot \mathbf{V} - \nabla \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{V}) - \rho q - \nabla \cdot (\kappa \nabla T) \right] d\Omega = 0.$$

由于积分区域的任意性,所以上面方程中左端被积函数必须恒等于零,由此得如下形式的微分方程(质量守恒方程、动量守恒方程、能量守恒方程)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \mathbf{V}) = \rho \mathbf{f}_v + \nabla \cdot (\mathbf{P}), \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} E) = \rho \mathbf{f}_v \cdot \mathbf{V} + \nabla \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{V}) + \rho q + \nabla \cdot (\kappa \nabla T). \quad (1.22)$$

质量守恒方程习惯上也称为连续性方程。

### 1.2.3.2 由流体微团分析导出微分方程

这里以连续性方程为例,说明推导它的其他两种方法。

第一种方法为拉格朗日方法.考虑物质体积元(流体微团) $\delta\Omega^*$ ,根据物质不生不灭原理和质点导数的定义,有

$$\begin{aligned} \frac{D\rho\delta\Omega^*}{Dt} &= 0, \\ \Rightarrow \frac{D\rho}{Dt}\delta\Omega^* + \rho \frac{D\delta\Omega^*}{Dt} &= 0, \\ \Rightarrow \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{1}{\delta\Omega^*} \frac{D\delta\Omega^*}{Dt} &= 0, \\ \frac{1}{\delta\Omega^*} \frac{D\delta\Omega^*}{Dt} &= \nabla \cdot \mathbf{V} \\ \Rightarrow \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} &= 0. \end{aligned}$$

将

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \rho,$$

代入上式得

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0.$$

连续性方程可以写成

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{V}.$$

上式表明,质点密度的相对变化率,等于负的体积相对变化率.因此连续性方程充分反映了流体微团的密度变化是由体积变化引起的这一物理事实。

质点密度不变的流体称为不可压缩流体,即不可压缩流体的严格定义为

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0.$$

由连续性方程知

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{V} = 0.$$

因此,不可压缩流体可以等价地定义为

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0.$$

第二种方法为欧拉方法.在直角坐标系中取固定的长方体(图 1.7),棱边  $dx, dy, dz$  分别平行于  $x, y, z$  轴,中心坐标为  $(x, y, z)$ . 首先分析通过各表面单位时间流进流出的质量.

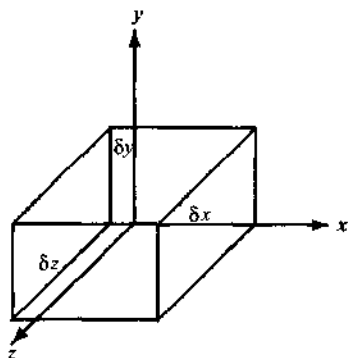


图 1.7 长方体几何体

先考虑  $x$  轴方向.单位时间通过位于  $x - \frac{1}{2}dx$  和  $x + \frac{1}{2}dx$  的两个表面流进和流出的质量分别为

$$\left(\rho u - \frac{1}{2}dx \frac{\partial \rho u}{\partial x}\right)dydz, \left(\rho u + \frac{1}{2}dx \frac{\partial \rho u}{\partial x}\right)dydz.$$

所以,在  $x$  轴方向,通过与该轴垂直的两个表面单位时间流出的净质量为

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} dx dy dz.$$

同理,通过与  $y$  轴和  $z$  轴垂直的表面流出的净质量分别为

$$\frac{\partial \rho v}{\partial y} dx dy dz, \frac{\partial \rho w}{\partial z} dx dy dz.$$

于是,通过各表面流出的总质量为

$$\left[\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}\right] dx dy dz.$$

由于密度随时间变化,长方体内单位时间流体质量的减少为

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz.$$

根据质量守恒原理,通过表面流出的质量等于长方体内质量的减少

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz = \left[\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}\right] dx dy dz.$$

由此得

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0.$$

### 1.2.3.3 Navier-Stokes 方程与 Euler 方程

将广义牛顿定律(1.11)代入(1.20)至(1.22),便得如下的 Navier-Stokes(纳维-斯托克斯)方程(简称 N-S 方程)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (1.23)$$



$$\frac{\partial \rho \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \mathbf{V}) = \rho \mathbf{f}_v - \nabla p + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau}), \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} E) = \rho \mathbf{f}_v \cdot \mathbf{V} - \nabla \cdot (p \mathbf{V}) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{V}) + \rho q + \nabla \cdot (\kappa \nabla T). \quad (1.25)$$

对于牛顿流体,在斯托克斯假设下

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu \left( \mathbf{S} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{V} \mathbf{I} \right).$$

如果假设黏性系数为常数,便有

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = 2\mu \nabla \cdot \mathbf{S} - \frac{2\mu}{3} \nabla \cdot [(\nabla \cdot \mathbf{V}) \mathbf{I}].$$

考虑到

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{S} &= \frac{1}{2} [\nabla \cdot (\nabla \mathbf{V}) + \nabla \cdot (\nabla \mathbf{V})^t] \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i \right) + \frac{1}{2} \mathbf{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \right)^t \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \delta_{jk} \mathbf{e}_i \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \delta_{jk} \mathbf{e}_j \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j^2} \mathbf{e}_i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j \partial x_i} \mathbf{e}_i \\ &= \frac{1}{2} \Delta \mathbf{V} + \frac{1}{2} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}), \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [(\nabla \cdot \mathbf{V}) \mathbf{I}] &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \mathbf{e}_j \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \mathbf{e}_i \right) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}). \end{aligned}$$

因此,如果黏性系数为常数,黏性项可以简写成

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \mu \Delta \mathbf{V} + \frac{1}{3} \mu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}).$$

习惯上,只有动量方程(1.24)才称为 N-S 方程.在黏性系数为常数的情况下,该方程由 C. L. Navier(1827)和 G. G. Stokes(1845)建立.但对于计算流体力学,把连续性方程、动量守恒方程和能量守恒方程统称为 N-S 方程.

对于理想流体,忽略黏性应力和热传导,得如下的 Euler(欧拉)方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (1.26)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \mathbf{V}) = \rho \mathbf{f}_v - \nabla p, \quad (1.27)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} E) = \rho \mathbf{f}_v \cdot \mathbf{V} - \nabla \cdot (p \mathbf{V}) + \rho q. \quad (1.28)$$

但没有理由表明,欧拉方程的解等于 N-S 方程的解在黏性系数趋于零的极限.

在第二章中我们会介绍 Navier - Stokes 方程与 Euler 方程便于计算的更方便形式。

### 1.2.4 微分方程的封闭性讨论

这里讨论的封闭性类似于数学物理方程中的定解问题。一个定解问题应该包括泛定方程和相应的定解条件。这里考虑的泛定方程就是前面的 Navier - Stokes 方程或 Euler 方程。定解条件包括初始条件和边界条件。注意定解问题不一定是适定(解存在、唯一并且稳定)问题。欧拉方程的适定性将在第三章讨论。另外,流体力学基本方程的求解还涉及一些未知项的模拟(即用已知条件来近似计算一些未知项)。模拟问题将在第二章中部分介绍。

#### 1.2.4.1 泛定方程的封闭性,状态方程

对于偏微分方程问题,方程的个数应该等于未知数的个数。如果方程的个数少于未知数个数,则称为欠定问题,解一般不唯一;如果方程的个数大于未知数的个数,则称为超定问题,此时一般无解;如果方程的个数恰好等于未知数的个数,则称为确定问题,如果进一步满足某些条件(如各方程线性无关),那么可能具有唯一的解。前面谈到的流体力学基本方程的个数少于未知数的个数,为了使问题确定,必须补充其他方程。补充的方程往往是代数方程。特别需要指出的是,可压缩流体和不可压缩流体的处理有重大区别。

流体力学的基本方程用到密度  $\rho$ , 压力  $p$  和温度  $T$  等流动参数。

对于可压缩流体,将本构关系式代入方程后,未知数有  $\rho, \mathbf{V} = (V_1, V_2, V_3), T, p$  等 7 个,而方程只有 5 个(1 个质量方程、3 个动量方程和 1 个能量方程)。此时必须补充两个方程或代数关系式。考虑简单可压缩流体,流体的密度  $\rho$ 、压力  $p$  和温度  $T$  属于状态参数,根据经典热力学状态公理得出只有两个独立参数的结论。有了状态参数中的任意两个便可以得出另一个,确定它们之间关系式的代数方程称为状态方程,一般写成

$$f(\rho, p, T) = 0.$$

对于完全气体(分子间作用力和分子所占据的体积可以忽略的气体),状态方程可以简单写成

$$p = r\rho T \text{ (Clapeyron 方程)}.$$

其中  $r = 8314/M$  为气体常数,  $M$  为气体的分子量。对于空气有  $M = 29$ , 从而  $r \approx 287 [\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})]$ 。

另外,完全气体的内能可以写成

$$e = \int c_v dT.$$

这里  $c_v = c_v(T) [\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})]$  为定容比热,即在气体容积不变的情况下单位质量的气体每提高一度温度所需要的热量。如果记  $c_p$  为定压比热,即在气体压力不变的情况下单位质量的气体每提高一度温度所需要的热量,那么有关系式

$$c_p = c_v + R.$$

经常采用比热比  $\gamma = c_p/c_v$ 。对于常温下的空气  $\gamma = 1.4$ 。对于燃烧过的气体一般有  $1 < \gamma$

<1.4.

如果气体温度不太高(如低于 1000K),那么定容比热和定压比热都可以看成常数,从而内能表达式为  $e = c_v T$ .

对于高度压缩的气体,分子间作用力和分子所占据的体积不能忽略,此时得采用如下的状态方程

$$(p + \alpha \rho^2) \left( \frac{1}{\rho} - \beta \right) = rT \quad (\text{Van der Waals 方程}).$$

这里  $\alpha \rho^2$  代表分子间作用力,  $\beta$  代表单位质量的分子的体积. 对于空气有  $\alpha = 3 \times 10^{-3} p_0 / \rho_0^2$  和  $\beta = 3 \times 10^{-3} / \rho_0$ . 这里  $\rho_0 = 1.225 \text{ kg/m}^3$ ,  $p_0 = 101380 \text{ N/m}^2$  (标准状态值).

对于几百个大气压以上的水,也可以按可压缩流体处理,并可采用下面的状态方程

$$\frac{p+B}{1+B} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^n \quad (\text{Cole 方程}).$$

这里  $\rho_0 = 10^3 \text{ kg/m}^3$  为一个大气压下水的密度. 如果取  $n = 7$  和  $B = 3000$  (大气压),则上面的公式误差小于百分之十.

因此,对于可压缩流体,求出  $\rho, \rho \mathbf{V}, \rho E$  后,按

$$E = e + \frac{1}{2} |\mathbf{V}|^2,$$

便可求得  $e$ , 再由  $e = e(T, \rho)$  便可求得  $T$ . 再由  $p = p(T, \rho)$  便可求得  $p$ .

对于不可压缩流体,方程退化为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \rho = 0,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = \mathbf{F} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{P},$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla E = \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{V} + \kappa \nabla T).$$

因此,连续性方程一分为二,比可压缩流体多了一个方程. 未知数仍为  $\rho, \mathbf{V} = (V_1, V_2, V_3), T, p$ , 共 7 个,而方程有 6 个. 可以补充温度与能量之间的关系式

$$E = e(T, \rho) + \frac{1}{2} |\mathbf{V}|^2.$$

那么方程的个数便正好等于未知数个数. 注意上面的第二个方程 ( $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ ) 与其他方程不同,它只与速度对坐标的偏导数有关,属于一种对速度的约束条件. 首先由动量方程似乎可以确定速度,而速度又必须满足散度等于零的约束条件,因此似乎对速度的约束条件多了;而对于压力又没有具体方程去求它,似乎属于欠定问题. 这正是不可压缩流动方程的特点所在. 事实上,应按下面方式来求上述方程:首先由动量方程似乎可以确定速度,而速度又必须满足散度为 0 的约束条件,这只有通过合理选取压力才能得以实现. 因此上面的第二个方程与其说是速度的约束条件,不如说是确定压力的方程. 计算流体力学中如何通过散度为 0 的条件来确定压力,是不可压流计算的关键. 对于许多简单流动问题,可以通过定义某种新的变量使散度为 0 的条件自动满足,同时使压力项消去.

## 1.2.4.2 初始条件和边界条件

流动是从某时刻开始的,所以必须给定起始时刻的流动条件,称为初始条件,可以写成

$$\rho(\mathbf{x}, 0) = \rho_0(\mathbf{x}), \mathbf{V}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{V}_0(\mathbf{x}), p(\mathbf{x}, 0) = p_0(\mathbf{x}).$$

初始条件一般由物理问题给定.例如,如果研究静止流体中圆柱突然以恒速度  $U_0$  运动时周围的流动,则可以将坐标系固定在运动圆柱上,初始条件为

$$\rho(\mathbf{x}, 0) = \rho_0, \mathbf{V}(\mathbf{x}, 0) = -\mathbf{U}_0, p(\mathbf{x}, 0) = p_0.$$

流体区域中一般存在几种边界,如固体壁面、无穷远边界、自由表面、互不掺混流体的界面.这些都是确定的物理边界.有时必须使用有限区域进行计算机求解,此时有限区域是从无限区域人为划定的,人为划定线称为人工边界.无论是物理边界还是人工边界,都要给适当的边界条件.人工边界的处理属于以后章节讨论的问题.这里只讨论物理边界的边界条件.

1) 无穷远边界.流体与物体相互作用产生的扰动传播到无穷远时趋于0,所以无穷远处的边界条件可以写成

$$\rho(\infty, t) = \rho_\infty, \mathbf{V}(\infty, t) = \mathbf{V}_\infty, p(\infty, t) = p_\infty,$$

这里  $\rho_\infty, \mathbf{V}_\infty, p_\infty$  均为常数.

2) 介质界面.两介质的界面可以是气、液、固三相中任意两个不同相的界面(如水-空气界面、液滴表面、气泡表面、海面、固体壁面等),也可以是同一项中不同组成的界面(如水-石油界面).用上标(1)和(2)区别两种介质,用  $\mathbf{n}$  表示界面法向单位矢量,由介质(2)指向介质(1).用  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  表示界面切平面内的两个相互正交的单位矢量,  $(\mathbf{n}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$  构成右手系.如果两介质互不掺混,则法向速度分量相等

$$V_n^{(1)} = V_n^{(2)}.$$

此时,如果设界面由方程  $\phi(\mathbf{x}, t) = 0$  定义,则由

$$\phi(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}, t + \delta t) = 0 \left( \frac{\delta\mathbf{x}}{\delta t} = \mathbf{V} \right),$$

$$\phi(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}, t + \delta t) = \phi(\mathbf{x}, t) + \phi_t \delta t + \phi_{x_j} \delta x_j + O[\delta t^2, \delta x^2],$$

得界面运动学方程为

$$\phi_t + \phi_{x_j} V_j = 0 (\phi_t + \mathbf{V} \cdot \nabla \phi = 0).$$

下面考虑动力学边界条件.

对于满足连续介质力学的黏性流体,切向速度分量要连续(否则因梯度无限大、黏性力无限大面出现非平衡)

$$V_a^{(1)} = V_a^{(2)}, V_b^{(1)} = V_b^{(2)}.$$

同理,温度也必须连续

$$T^{(1)} = T^{(2)}.$$

但不同介质的密度可以不连续.

由于界面宏观上无限薄,所以必须满足力的平衡条件.介质界面两侧除受压力和黏性力作用外,还存在所谓的表面张力.界面任意点所受的表面张力位于界面的切平面内,它的作用使界面尽量绷紧,从而使界面面积最小(如液滴呈球形).考虑界面的任意条切割线,表面张力与切割线垂直,大小与切割线长度成正比.单位长度的切割线所受的表面张力  $\sigma$  (N/m) 称为表面张力系数.界面两侧的表面应力之差沿界面法向的投影可以写成

$$\Delta F = [\mathbf{P}^{(1)} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{P}^{(2)} \cdot \mathbf{n}] \cdot \mathbf{n}.$$

考虑面积为  $ds$  的界面元在力的作用下沿其法向产生任意小位移  $\delta n$ . 为了方便,考虑界面元中心处界面的主曲率半径  $R_1$  和  $R_2$  (如果曲率中心在  $\mathbf{n}$  指向的那边,则曲率半径取正值). 界面元沿两条主切割线的投影分别为  $dl_1$  和  $dl_2$ , 从而  $ds = dl_1 dl_2$ . 长度  $dl_1$  和  $dl_2$  可以看成半径分别为  $R_1$  和  $R_2$  的圆的弧元素. 因此,经位移  $\delta n$  后,长度  $dl_1$  和  $dl_2$  分别增加  $(\delta n/R_1)dl_1$  和  $(\delta n/R_2)dl_2$ , 从而界面元面积增加

$$\delta s = dl_1 \left(1 + \frac{\delta n}{R_1}\right) dl_2 \left(1 + \frac{\delta n}{R_2}\right) - dl_1 dl_2 \approx dl_1 dl_2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \delta n,$$

引起这一位移表面应力和表面张力所做的功为

$$\begin{aligned} \delta W &= - \int (\Delta F ds \delta n + \sigma \delta s) \\ &= - \int \left( \Delta F + \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right) ds \delta n. \end{aligned}$$

由热力学平衡条件(或虚功原理),必有  $\delta W = 0$ , 从而得力的平衡条件为(不考虑黏性力时称为拉普拉斯公式)

$$\mathbf{P}^{(1)} \cdot (-\mathbf{n}) - \mathbf{P}^{(2)} \cdot (-\mathbf{n}) = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \mathbf{n}.$$

因

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= -p\mathbf{I} + 2\mu \left( \mathbf{S} - \frac{1}{3} s_{kk} \mathbf{I} \right), \\ P_{ij} &= -p\delta_{ij} + 2\mu \left( s_{ij} - \frac{1}{3} s_{kk} \delta_{ij} \right), \end{aligned}$$

所以力的平衡条件在切向和法向的分量形式为

$$\begin{aligned} \mu^{(1)} s_{ij}^{(1)} n_j a_i &= \mu^{(2)} s_{ij}^{(2)} n_j a_i, \\ \mu^{(1)} s_{ij}^{(1)} n_j b_i &= \mu^{(2)} s_{ij}^{(2)} n_j b_i, \\ p^{(1)} - 2\mu^{(1)} \left( s_{ij}^{(1)} n_j n_i - \frac{1}{3} s_{kk}^{(1)} \right) &= p^{(2)} - 2\mu^{(2)} \left( s_{ij}^{(2)} n_j n_i - \frac{1}{3} s_{kk}^{(2)} \right) + \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \end{aligned}$$

同理,热的平衡条件可以表示为

$$\left( \kappa \frac{\partial T}{\partial n} \right)^{(1)} = \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial n} \right)^{(2)}.$$

因此,对于连续介质假设下的黏性流体,界面条件为

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^{(1)} &= \mathbf{V}^{(2)}, \\ \mu^{(1)} s_{ij}^{(1)} n_j a_i &= \mu^{(2)} s_{ij}^{(2)} n_j a_i, \\ \mu^{(1)} s_{ij}^{(1)} n_j b_i &= \mu^{(2)} s_{ij}^{(2)} n_j b_i, \end{aligned}$$

$$p^{(1)} - 2\mu^{(1)} \left( s_{ij}^{(1)} n_j n_i - \frac{1}{3} s_{kk}^{(1)} \right) = p^{(2)} - 2\mu^{(2)} \left( s_{ij}^{(2)} n_j n_i - \frac{1}{3} s_{kk}^{(2)} \right) + \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

$$T^{(1)} = T^{(2)}, \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial n} \right)^{(1)} = \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial n} \right)^{(2)}.$$

对于理想流体,黏性作用和热传导作用不存在,所以上述条件退化为

$$V_n^{(1)} = V_n^{(2)},$$

$$p^{(1)} = p^{(2)} + \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (\text{Laplace 方程}).$$

3) 固体壁面(固体一侧的值用上标  $w$  表示). 对于固体壁面,不关心固壁那一侧的变化,只关心流体一侧的变化,所以(黏性)边界条件简化为

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}^{(w)}, T = T^{(w)}, \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial n} \right) = \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial n} \right)^{(w)}.$$

对于静止固壁  $\mathbf{V}^{(w)} = 0$ . 上式中,  $\mathbf{V} = \mathbf{V}^{(w)}$  称为黏性无滑移边界条件. 对于理想流体,无滑移条件用滑移条件  $V_n = V_n^{(w)}$  代替. 理想流体的边界条件可以写成

$$V_n = V_n^{(w)}.$$

将该条件代入法向动量方程(即动量方程在法向的投影)后,可以得一压力关系式

$$\frac{\partial p}{\partial n} = - \frac{\rho V_\tau^2}{R}.$$

这里  $V_\tau$  为速度在壁面上的投影(设方向为  $\tau$ ),  $R$  为壁面法向  $\mathbf{n}$  矢量(指向流体一侧)和切向矢量  $\tau$  构成的平面与固壁的切线的曲率半径(如果曲率中心指向固体一侧,则曲率半径取正值).

4) 自由界面. 对于气-液界面问题,如果气相运动不太强于液相运动,则由于气体密度和黏性系数远远小于液体的,所以惯性力、黏性力引起的压力及应力变化和液体的相比可以忽略,于是流体一侧界面条件简化为

$$s_{ij} n_j a_i = 0, \quad s_{ij} n_j b_i = 0;$$

$$p - 2\mu \left( s_{ij} n_j n_i - \frac{1}{3} s_{kk} \right) = p_0.$$

这里  $p_0$  表示气体的压力(如大气压力). 对于理想流体,上面的条件可以进一步简化为

$$p = p_0.$$

上面考虑的边界条件属于物理上自然满足的条件. 但作为数学问题,不一定能使用所有的边界条件. 以固体壁面为例,我们不能同时给定壁面温度和温度梯度,即不能同时使用下面的两个边界条件

$$T = T^{(w)}, \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial n} \right) = \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial n} \right)^{(w)}. \quad (1.29)$$

温度条件的正确给定还依赖于问题的性质即面体那一侧的性质.

如果固体是绝热的(习惯上称绝热壁),那么法向温度梯度为零,从而只能采用下面的所谓绝热条件

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0.$$

此时固体壁面温度完全由流体内部的温度决定,也就是说,壁面温度如同内部流动参数一样,属于未知数.有了绝热条件和其他针对速度的条件,流体内部的参数都可以求出来,有了流体内部的温度,壁面温度按条件  $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$  就等于靠近壁面的内部流体温度.如果同时又给定壁面温度,那么问题变成超定的.

如果固体表面温度是给定不变的(习惯上称等温壁),那么只能采用下面的条件

$$T = T^{(w)}.$$

如果固体属于绝热材料,那么一般可以采用绝热条件,如果固体导热性能特别好,则可以采用等温条件.实际上对于许多工程问题我们感兴趣的是速度和压力分布,流场变化与壁面温度关系不太大,此时采用等温条件和绝热条件均可.

如果需要确切考虑温度条件,那么必须将描述流体运动的基本方程与固体中的热传导方程联立求解.此时必须同时使用(1.29)中的两个条件.本书其他部分还会详细讨论在计算流体力学中如何正确地使用边界条件.

### 1.3 N-S 方程的特殊形式

#### 1.3.1 动量方程的其他形式与应用

将连续性方程(1.20)两端乘以速度矢量,将动量方程(1.21)与由此所得的方程相减得

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \rho(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \rho \mathbf{f}_v + \nabla \cdot \mathbf{P}. \quad (1.30)$$

即

$$\rho \frac{\partial V_i}{\partial t} + \rho V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \rho f_{vi} + \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j}.$$

从场论得知

$$\nabla \frac{V^2}{2} = (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V}).$$

将上式代入(1.30),两边同除以密度,并考虑到旋度定义  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{V}$ ,得如下动量方程的兰姆-葛罗米柯形式

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \frac{V^2}{2} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} = \mathbf{f}_v + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{P}, \quad (1.31)$$

利用该方程很容易在某些特殊情况下将动量方程积分出来.

##### 1.3.1.1 旋涡的动力学性质

对于理想(无黏)、正压(即密度只是压力的函数)、而且外力有势(即外力等于某标量函数的梯度)流体,旋涡有一些特殊动力学性质,可以通过动量方程来研究.对于理想流

体,动量方程(1.30)可以写为

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{f}_v.$$

又根据正压流体假设和外力有势,得如下关系式

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho}\nabla p &= \nabla \Pi, \quad \Pi = \int \frac{dp}{\rho}, \\ \mathbf{f}_v &= \nabla \Phi.\end{aligned}$$

因此动量方程可以进一步简化为

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \nabla(\Phi - \Pi). \quad (1.32)$$

### 1. 开尔文(Kelvin)定理

沿任意封闭物质线的速度环量(从而通过任意物质面的涡通量)在运动过程中不变,即  $\frac{D\Gamma}{Dt} = 0$ .

前面已经知道,物质线速度环量(速度物质线积分)的随体导数有如下表达式

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \frac{D}{Dt} \oint_{L^*} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{L}^* = \oint_{L^*} \frac{D\mathbf{V}}{Dt} \cdot d\mathbf{L}^*.$$

将动量方程(1.32)代入得

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_{L^*} \nabla(\Phi - \Pi) \cdot d\mathbf{L}^*.$$

假设  $A$  为由物质线  $L^*$  张成的任意连续曲面,则由斯托克斯定理得

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_{L^*} \nabla(\Phi - \Pi) \cdot d\mathbf{L}^* = \int_A \nabla \times [\nabla(\Phi - \Pi)] \cdot \mathbf{n} dA.$$

从矢量分析知,任意梯度的旋度为 0,即  $\nabla \times [\nabla(\Phi - \Pi)] = 0$ . 从而

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0.$$

于是定理得证.

### 2. 拉格朗日定理(旋涡不生不灭定理)

如果在某时刻某部分流体无旋(或有旋),则在其他时刻这部分流体仍保持无旋(或有旋).

假设在某时刻某部分流动(部分理解为流体微团集合,而非空间固定区域)是无旋的. 在该部分流体中任取一连续物质曲面  $A$ , 它的边界  $L^*$  为物质线(即所考虑的物质曲面是由这条封闭物质线张成的). 由速度环量定义  $\Gamma = \oint_{L^*} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{L}^*$ 、涡通量定义  $I = \int_A \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dA$  和斯托克斯定理得

$$I = \Gamma.$$

再由开尔文定理知,  $\Gamma$  不随时间变化. 因此  $I$  也不随时间变化. 由于初始时刻有  $I = \int_A \boldsymbol{\omega} \cdot$



$\boldsymbol{n} dA \stackrel{\omega=0}{=} 0$ , 因此对于任意时刻都有  $I=0$ . 又由所选曲面的任意性, 所以对于任意时刻, 恒有  $\omega=0$ .

上面的证明没有考虑时间的方向性, 因此所说的任意时刻也包括以前的时刻. 假设对于某部分流体在某时刻是无旋的, 则该部分流体在以前的时刻也无旋, 因此有旋流体到了以后的时刻不可能变得无旋.

### 3. Helmholtz 第一定理(涡线、涡面、涡管保持定理)

在某时刻组成涡线(涡面、涡管)的流体质点在其他任意时刻也永远组成涡线(涡面、涡管).

证明思路是这样的. 考虑任意涡面  $\Sigma$ , 涡面上任一点的旋度在涡面法向上的投影  $\omega_n = 0$  (这是涡面的定义). 到了新的时刻, 该涡面运动到  $\Sigma'$ . 根据开尔文定理, 有

$$\int_{\Sigma'} \omega_n d\Sigma' = \int_{\Sigma} \omega_n d\Sigma = 0.$$

因涡面  $\Sigma$  是任取的, 所以  $\Sigma'$  也是任意的. 所以在  $\Sigma'$  上必有  $\omega_n = 0$ , 即  $\Sigma'$  也是涡面. 这就证明了涡面保持定理. 由于涡管是涡面的特例, 所以由涡面保持定理证明了涡管保持定理. 对于涡线, 可以看成是两个涡面的交线, 由涡面保持定理, 构成该交线的流体质点在其他时刻仍在两涡面上, 即仍为新时刻两涡面的交线, 从而仍为涡线. 因此涡线保持定理得证.

### 4. Helmholtz 第二定理(涡管强度保持定理)

涡管强度在运动过程中保持不变.

这是因为, 涡管强度等于通过涡管任一横截面的涡通量. 根据上面定理, 该涡管在任意时刻仍由同样的流体质点组成. 根据开尔文定理, 对于由同一组质点组成的曲面涡通量不随时间变化, 因此涡管强度也不随时间变化.

上面给出了理想正压且外力有势流体旋涡随体(质点)变化的三个主要定理, 即旋涡不生不灭定理, 涡线保持定理, 涡管强度保持定理. 从上可以看出, 流体运动的旋涡性是永远保持的, 即无旋则永远无旋, 有旋则永远有旋. 对于有旋运动, 组成涡线、涡管的质点永远组成涡线、涡管. 好像流体质点冻结在涡线上随涡线一起运动. 同时在运动过程中涡管强度也保持不变. 因此, 旋涡随体变化的最主要性质是保持性或冻结性. 但这些特性是在许多假设下成立的, 千万不要推广到黏性流体、斜压流体或外力无势的流体中去. 正压流体(如等温流体或绝热流体或不可压缩流体)和外力有势(如重力场中)的情况较常出现. 但任何流体都是有黏性的, 所以不存在真正的理想流体. 此时前面定理在黏性影响与涡量强度相比较小的情况下还是有意义的.

#### 1.3.1.2 动量方程的积分

考虑理想、正压、外力有势的流动. 首先, 写出理想流体的兰姆-柯罗米柯形式的运动方程

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \cdot \frac{1}{2} |\mathbf{V}|^2 + (\nabla \times \mathbf{V}) \times \mathbf{V} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (1.33)$$

由外力有势得

$$\mathbf{F} = \nabla \Phi. \quad (1.34)$$

由正压流体假设( $\rho = \rho(p)$ )得

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla \Pi. \quad (1.35)$$

这里  $\Pi = \int \frac{dp}{\rho(p)}$ .

将式(1.34)至(1.35)代入动量方程(1.33)便得如下理想、正压、外力有势的动量方程

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{1}{2} |\mathbf{V}|^2 + \Pi + \Phi \right) + (\nabla \times \mathbf{V}) \times \mathbf{V} = 0. \quad (1.36)$$

对于有旋流动,  $\nabla \times \mathbf{V} \neq 0$ . 考虑定常流动. 于是动量方程(1.36)可以写成如下形式

$$\nabla \left( \frac{1}{2} |\mathbf{V}|^2 + \Pi + \Phi \right) + (\nabla \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{V} = 0.$$

为了消去与旋度有关的项, 考虑沿流线的积分. 将上式两边点乘流线的切线单位向量  $\mathbf{s} = \frac{\mathbf{V}}{|\mathbf{V}|}$ , 得

$$\mathbf{s} \cdot \nabla \left( \frac{1}{2} |\mathbf{V}|^2 + \Pi + \Phi \right) + \mathbf{s} \cdot (\nabla \times \mathbf{V} \times \mathbf{V}) = 0.$$

因  $\nabla \times \mathbf{V} \times \mathbf{V}$  与  $\mathbf{V}$  垂直, 所以  $\mathbf{V} \cdot (\nabla \times \mathbf{V} \times \mathbf{V}) = 0$ , 所以必有

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{2} |\mathbf{V}|^2 + \Pi + \Phi \right) = 0.$$

将上式积分后便得伯努利积分

$$\frac{1}{2} |\mathbf{V}|^2 + \Pi + \Phi = C(\phi). \quad (1.37)$$

这里  $C$  为积分常数, 它沿同一条流线取同一常数值, 在不同流线上可以取不同的值. 对于不可压缩流体  $\left( \Pi = \int \frac{dp}{\rho} = \frac{p}{\rho} \right)$ , 如果忽略重力, 则伯努利积分简化为

$$\frac{1}{2} |\mathbf{V}|^2 + \frac{p}{\rho} = C(\phi).$$

因此, 流速大时压力小, 流速小时压力大. 低速飞机的机翼采用向上弯曲的剖面, 使得流过上表面的气流比下表面的快, 从而上表面压力小, 下表面压力大, 产生静升力. 这就是伯努利方程在近代航空史上的基本应用.

对于无旋流动,  $\nabla \times \mathbf{V} = 0$ , 并且存在速度位  $\phi$ , 满足  $\mathbf{V} = \nabla \phi$ , 于是动量方程(1.36)可以写成如下形式

$$\nabla \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\mathbf{V}|^2 + \Pi + \Phi \right) = 0.$$

于是, 括号内的函数与空间坐标无关, 最多只是时间的函数, 因此得下面的拉格朗日积分

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\mathbf{V}|^2 + \Pi + \Phi = f(t). \quad (1.38)$$

这里  $f(t)$  为时间的任意函数. 对于定常流动, 上式可进一步简化成下面的伯努利-拉格朗日积分

$$\frac{|\mathbf{V}|^2}{2} + \Pi + \Phi = C. \quad (1.39)$$

这里  $C$  为常数.

如果流体密度处处为常数且外力为重力场, 则上式简化成

$$\frac{|\mathbf{V}|^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = C.$$

这里  $g$  为重力加速度.

### 1.3.1.3 涡动力学基本方程

对兰姆-葛罗米柯方程(1.31)取旋度, 利用向量公式

$$\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}) = (\mathbf{V} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} (\nabla \cdot \mathbf{V}) - \mathbf{V} (\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}),$$

和对任意标量  $\phi$  和任意矢量  $\mathbf{a}$  成立的恒等式

$$\nabla \times (\nabla \phi) \equiv 0, \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) \equiv 0,$$

便得旋度所满足的方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{V} - \boldsymbol{\omega} \nabla \cdot \mathbf{V} + \nabla \times \mathbf{F}_v + \nabla \times \left( \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{P} \right). \quad (1.40)$$

将上式右边第二项移到左边和原左边第一项合并, 得

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} \mathbf{V}) = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{V} + \nabla \times \mathbf{F}_v + \nabla \times \left( \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{P} \right). \quad (1.41)$$

这就是涡动力学的基本方程.

对于牛顿流体, 在斯托克斯假设和黏性系数为常数的情况下

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{V} + \frac{1}{3} \mu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}).$$

并且有

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\rho} \nabla p \right) = \nabla \frac{1}{\rho} \times \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \times (\nabla p) = \nabla \frac{1}{\rho} \times \nabla p = -\frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p.$$

因此涡动力学方程简化为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} \mathbf{V}) &= \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{V} + \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p + \nabla \times \mathbf{F}_v \\ &\quad + \nabla \times \left[ \nu \Delta \mathbf{V} + \frac{1}{3} \nu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) \right]. \end{aligned} \quad (1.42)$$

进一步如果密度为常数, 则

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p &= 0, \\ \nabla \times (\nu \Delta \mathbf{V}) &\stackrel{\nu = \text{const}}{=} \nu \Delta \boldsymbol{\omega}, \\ \nabla \times (\nu \nabla \cdot \mathbf{V}) &\stackrel{\nu = \text{const}}{=} \nu \nabla \times (\nabla \cdot \mathbf{V}) = 0. \end{aligned}$$

因此对于不可压缩密度均匀分布流体, 涡动力学方程为

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} \mathbf{V}) = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{V} + \nabla \times \mathbf{F}_v + \nu \Delta \boldsymbol{\omega}. \quad (1.43)$$

对于理想正压可压缩流体, 如果外力有势, 则

$$\begin{aligned} \mu &= 0, \\ \mathbf{F}_v &= -\Delta \Phi \Rightarrow \nabla \times \mathbf{F}_v = 0, \\ p &= p(\rho) \Rightarrow \nabla \rho \times \nabla p = 0. \end{aligned}$$

相应的涡动力学方程称为亥姆霍兹方程, 可写为

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} \mathbf{V}) = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{V}.$$

考虑黏性系数为常数的情况, 将动量方程写成下面形式

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{F} + \nu \Delta \mathbf{V} + \frac{1}{3} \nu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}). \quad (1.44)$$

于是对于由封闭物质线  $L^*$  定义的速度环量, 有

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_{L^*} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L}^* - \oint_{L^*} \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\mathbf{L}^* + \oint_{L^*} \nu \left[ \Delta \mathbf{V} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) \right] \cdot d\mathbf{L}^*. \quad (1.45)$$

上式也是涡动力学方程的某种形式.

下面以方程(1.42)为例考察各种因素对涡运动的影响.

1) 左端第二项表示因对流对涡量变化的影响.

2) 右端第一项表示因流体的变形引起的涡量变化. 这种变形包括纯变形和旋转运动. 拉伸或压缩变形运动使得想象的涡管变细或变粗, 从而使得涡量强度增加或减小. 旋转运动使得想象的涡管改变方向.

3) 右端第二项表示斜压流体因密度和压力梯度方向不一致的影响. 对于密度分层的大气, 如果压力梯度方向与分层方向不垂直, 则有涡的产生. 赤道国家贸易风就是这种机理产生的. 由于太阳照射强度不同, 在同一高度, 赤道温度比北极温度高, 从而赤道密度比北极低. 另外, 在同一地点, 高度越大, 空气越稀薄, 所以既存在由赤道向北极的密度增加, 又存在由高空向地面的密度增加, 于是密度梯度由上朝下由赤道指向北极. 而同一高度压力相等, 高度增加压力减小, 所以压力梯度指向地心. 于是密度梯度和压力梯度均在同一平面内, 并且有:  $\nabla \rho \times \nabla p = c\mathbf{n}$ ,  $c > 0$ . 这里  $\mathbf{n}$  指向西方. 进一步分析表明, 在地球北半球表面, 贸易风应该自东北向西南吹.

4) 右端第三项为有旋质量力场影响. 例如旋转参照系中的柯氏力能使流体微团旋转, 产生涡量. 如果质量力有势, 如重力场, 则不产生涡量. 事实上, 由于地球自转, 自转角速度与上面介绍的(地球表面)贸易风相互作用产生的柯氏力将进一步影响贸易风. 现在将坐标取在地球上, 速度  $\mathbf{V}_r$  为相对地球表面固定点的速度. 此时体积力改写为(见1.33).

$$\mathbf{F} = \mathbf{g} - \mathbf{a}_e - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r.$$

这里  $\mathbf{g}$  为重力加速度,  $\mathbf{a}_e$  为牵连加速度,  $\boldsymbol{\omega}$  为地球自转角速度. 由于不考虑坐标原点和角速度随时间的变化, 所以

$$a_r = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = -\omega^2 \mathbf{r} = -\nabla \left( \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \right).$$

即牵连加速度对应的惯性力有势, 这里  $r$  为从地心到流场某点的距离, 另外

$$\mathbf{g} = -\nabla(gr),$$

所以

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \int_A \frac{1}{\rho^2} (\nabla \rho \times \nabla p) \cdot \mathbf{n} dA - 2 \oint (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_r) \cdot d\mathbf{L}^*.$$

上式右端第一项影响已经考虑了, 下面考虑第二项影响, 为此, 将此单独影响写成方程

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = -2 \oint (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_r) \cdot d\mathbf{L}^* = 2 \oint (\mathbf{V}_r \times \boldsymbol{\omega}) \cdot d\mathbf{L}^*.$$

我们知道  $\boldsymbol{\omega}$  由南极指向北极, 而因贸易风引起的  $\mathbf{V}_r$  在地球表面上指向南方, 所以  $\mathbf{V}_r \times \boldsymbol{\omega}$  必然由东指向西方, 因此如果  $L^*$  为垂直于地球自转轴线的圆, 走向为自东向西, 则

$$\frac{D\Gamma}{Dt} > 0.$$

因此, 风速有一个自东向西的分量.

5) 右端第四项表示因黏性和涡量分布不均匀引起的涡量扩散, 它类似于热的扩散, 考虑孤立涡丝, 其周围的速度分布为

$$V_\theta(r, \theta, t=0) = \frac{\Gamma}{2\pi r}, V_r(r, \theta, t=0) = 0.$$

由于初始场的对称性, 流场在任意时刻都满足如下条件

$$V_r = V_z = \omega_r = \omega_\theta = 0.$$

相应的涡动力学方程可以简化为

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} = \nu \left( \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega_z}{\partial r} \right).$$

除外  $r=0$ , 上述方程的解为

$$\omega_z = \frac{\Gamma}{2\pi\nu t} \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right), V_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right) \right].$$

显然当  $t \rightarrow \infty$ , 有  $\omega_z \rightarrow 0$ .

根据前面的分析, 如果流体没有黏性而且流场首先没有涡的存在, 那么只有可能在斜压流体中或者存在无势的体积力时才有可能产生涡.

其实还可以定义一些新的物理量来研究涡运动, 例如可以定义拟涡能  $\omega = \frac{1}{2} \omega_i \omega_i$ , 将涡动力学方程点乘旋度, 便得拟涡能的方程, 例如, 将亥姆霍兹方程点乘旋度后写为

$$\begin{aligned} \omega_i \frac{\partial \omega_i}{\partial t} + \omega_i V_j \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} &= \omega_i \omega_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \nu \omega_i \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_i \partial x_j}, \\ \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} \omega_i \omega_i \right) &= \omega_i \omega_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left( \frac{1}{2} \omega_i \omega_i \right) - \nu \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (1.46)$$

上式右端各项按顺序分别表示涡的生成、扩散与耗散.

还可以定义螺旋度  $H(t)$  和螺旋度密度  $h(t)$ :  $h(t) = \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\omega}$ ,  $H(t) = \int_D \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\omega} dV$ , 涡

管是否能破裂或在空间打结,从而改变拓扑结构,可以通过螺旋度的变化来研究.这是因为,涡量沿着涡管的轴线方向,旋度与速度的点积反映了涡管对运动流体的跟随性.可以证明,在无限空间中,对于两个互不连接的涡环,螺旋度为0;对于两个相互连接的涡环,螺旋度不为0.因此,螺旋度是涡的拓扑结构的衡量.如果螺旋度不随时间变化,则表示涡结构的拓扑性质不变.可以构造螺旋度的方程,证明对于理想、正压和外力有势时,螺旋度不随时间变化,因此拓扑结构不变.

### 1.3.2 能量方程的其他形式——内能方程、温度方程、焓方程与熵方程

将连续性方程(1.20)两端乘以速度矢量,将动量方程的守恒形式(1.21)与由此所得的方程相减得

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \mathbf{f}_v + \nabla \cdot \mathbf{P}.$$

两边点乘  $\mathbf{V}$  得动能所满足的方程

$$\rho \frac{D}{Dt} \frac{V^2}{2} = \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{f}_v + \mathbf{V} \cdot \nabla \cdot \mathbf{P}. \quad (1.47)$$

将连续性方程(1.20)两端乘以总能,将能量方程的守恒形式(1.22)与由此所得的方程相减得

$$\rho \frac{DE}{Dt} = \rho \mathbf{f}_v \cdot \mathbf{V} + \nabla \cdot (\mathbf{V} \cdot \mathbf{P}) + \rho \dot{q} + \nabla \cdot (\kappa \nabla T). \quad (1.48)$$

用(1.48)减去(1.47),并利用关系式  $E = e + \frac{1}{2} V^2$ , 使得内能所满足的方程

$$\rho \frac{De}{Dt} = \nabla \cdot (\mathbf{V} \cdot \mathbf{P}) - \mathbf{V} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{P}) + \rho \dot{q} + \nabla \cdot (\kappa \nabla T).$$

由张量关系式

$$\nabla \cdot (\mathbf{V} \cdot \mathbf{P}) = \nabla \mathbf{V} : \mathbf{P} + \mathbf{V} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{P}),$$

所以上式也可以写成

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \mathbf{V} \cdot \nabla e = \nabla \mathbf{V} : \mathbf{P} + \rho \dot{q} + \nabla \cdot (\kappa \nabla T).$$

这里

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{V} : \mathbf{P} &= \frac{\partial V_i}{\partial x_j} P_{ij} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) P_{ij} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) P_{ij} \\ &= s_{ij} P_{ij} + a_{ij} P_{ij}. \end{aligned}$$

由于  $a_{ij}$  是反对称张量,  $P_{ij}$  是对称张量, 所以  $a_{ij} P_{ij} = 0$ . 从而

$$\nabla \mathbf{V} : \mathbf{P} = \mathbf{S} : \mathbf{P}, \quad \mathbf{S} = (s_{ij}).$$

因此,内能所满足的方程可以简写成

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \mathbf{V} \cdot \nabla e = \mathbf{S} : \mathbf{P} + p\mathbf{q} + \nabla \cdot (\kappa \nabla T). \quad (1.49)$$

利用连续性方程,上式也可以写成

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} e) = \mathbf{S} : \mathbf{P} + p\mathbf{q} + \nabla \cdot (\kappa \nabla T). \quad (1.50)$$

可以证明

$$\mathbf{S} : \mathbf{P} = -p \nabla \cdot \mathbf{V} + \mu' (\nabla \cdot \mathbf{V})^2 + \Phi.$$

这里

$$\Phi = -\frac{2}{3}\mu (\nabla \cdot \mathbf{V})^2 + 2\mu \mathbf{S} : \mathbf{S}.$$

为黏性耗散所损失的机械能,全部转换为热能,因此称为耗散函数.一般情况下忽略第二黏性系数影响.不难求得耗散函数的如下表达式

$$\begin{aligned} \Phi = & \mu \left[ \left( \frac{\partial V_2}{\partial x_3} + \frac{\partial V_3}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_3}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial x_3} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \right)^2 \right] \\ & + \frac{2}{3}\mu \left[ \left( \frac{\partial V_1}{\partial x_1} - \frac{\partial V_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_2}{\partial x_2} - \frac{\partial V_3}{\partial x_3} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_3}{\partial x_3} - \frac{\partial V_1}{\partial x_1} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

显然,如果黏性系数为正,那么耗散函数为零或为正.

在常温下,内能可以与温度按  $e = c_V T$  联系起来,因此从内能方程也可以得温度方程.传热专业习惯使用温度所满足的能量方程.对于传热问题,压力所做的功和黏性耗散作用与热传导作用相比往往可以忽略,从而能量方程经常写成

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T = \frac{1}{c_V} \mathbf{q} + \frac{1}{\rho c_V} \nabla \cdot (\kappa \nabla T). \quad (1.51)$$

燃烧专业则更习惯使用焓  $h = e + p/\rho$  所满足的能量方程,并且因黏性耗散作用与其他作用(如热传导、化学反应)相比较小而常被忽略.利用(1.50)和焓的定义得

$$\frac{\partial \rho h}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} h) = \frac{Dp}{Dt} + p\mathbf{q} + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \Phi. \quad (1.52)$$

这里  $\Phi$  与燃烧和对流换热相比往往可以忽略.

考虑单位质量的气体,传给该流体一定的热量  $\delta Q$ ,则引起流体的内能增加  $de$  并引起流体的体积增加  $d\frac{1}{\rho}$ .流体因膨胀对外界做的功为  $p d\left(\frac{1}{\rho}\right)$ .根据热力学第一定律有

$$\delta Q = de + p d\frac{1}{\rho}.$$

用关系式  $\delta Q = T dS$  定义流体的熵  $S$ .再根据热力学第一定律使得

$$dS = \frac{de}{T} + \frac{p}{T} d\frac{1}{\rho}. \quad (1.53)$$

对于完全气体,有

$$S = \int \frac{c_V}{T} dT - \frac{p}{T\rho^2} d\rho = \int c_V d\ln T - R \ln \rho.$$

进一步如果  $c_V$  为常数,有

$$S = c_V \ln \frac{p}{\rho^\gamma} + C.$$

这里  $C$  为常数,一般令  $C=0$ .

利用散度定义  $\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{D}{Dt} \frac{1}{\rho}$  和关系式(1.53),得

$$\rho T \frac{DS}{Dt} = \rho \frac{De}{Dt} + p \frac{D}{Dt} \frac{1}{\rho} = \rho \frac{De}{Dt} + p \nabla \cdot \mathbf{v}.$$

再将内能方程(1.49)代入上式便得熵方程

$$\rho T \frac{DS}{Dt} = \Phi + \rho q + \nabla \cdot (\kappa \nabla T). \quad (1.54)$$

根据热力学第二定律,孤立系统的熵不能减少.现在考虑一物质体,体积和边界分别为  $\Omega^*$  和  $\Sigma^*$ .忽略生成热(它为正因而也使熵增加,从而不改变下面的结论),由关系式(1.54)得

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^*} \rho \frac{DS}{Dt} d\Omega^* &= \int_{\Omega^*} \left( \frac{\Phi}{T} + \frac{\nabla \cdot (\kappa \nabla T)}{T} \right) d\Omega^* \\ &= \int_{\Omega^*} \left( \frac{\Phi}{T} + \frac{\kappa (\nabla T)^2}{T^2} \right) d\Omega^* + \int_{\Omega^*} \nabla \cdot \left( \frac{\kappa \nabla T}{T} \right) d\Omega^* \\ &= \int_{\Omega^*} \left( \frac{\Phi}{T} + \frac{\kappa (\nabla T)^2}{T^2} \right) d\Omega^* + \int_{\Sigma^*} \left( \frac{\kappa \nabla T}{T} \right) \cdot \mathbf{n} d\Sigma^*. \end{aligned}$$

由于考虑的是孤立系统即考虑绝热边界,所以上式最右端的通过边界的热流量应该为零.因此有

$$\int_{\Omega^*} \rho \frac{DS}{Dt} d\Omega^* = \int_{\Omega^*} \left( \frac{\Phi}{T} + \frac{\kappa (\nabla T)^2}{T^2} \right) d\Omega^*.$$

由熵增原理得

$$\int_{\Omega^*} \rho \frac{DS}{Dt} d\Omega^* > 0.$$

因此必然有  $\kappa > 0$  和  $\mu > 0$ .于是黏性系数和热传导系数为正是热力学第二定律的必然结果.正因为这些耗散系数为正,才使得流体力学的基本过程属于不可逆过程.

熵必须增加或为零这一条件在计算流体力学的理论中有重要应用(见第三章).有趣的是,计算流体力学基本理论中用的熵与这里的熵反了一个符号,从而计算流体力学的理论工作者会说,熵应该减小而不能增加.

### 1.3.3 非惯性坐标系中的方程

对于某些问题,将坐标系固定在某运动物体中更方便.特别地,在静止坐标系中的非定常运动,可能相对某运动坐标系属于定常运动,因此将坐标系固定在运动物体上更简单.研究绕飞行器的流动,可能将坐标系固定在飞行器上更自然.研究绕地面的流动时,将坐标系固定在地球上随地球一起转动更恰当.



## 1.3.3.1 加速度分解

运动坐标系  $x_r$  与绝对坐标系  $x$  之间存在相对运动(平动  $x_0(t)$  和转动  $Q(t)$ )

$$x_{ri} = x_{0i}(t) + Q_{ij}x_j,$$

一般属于非惯性坐标系,因此在偏微分方程中体积力应该包含惯性力  $-a$ ,  $a$  为质点相对绝对坐标系的牵连加速度与哥氏加速度之和.

质点的(相对于绝对坐标系)绝对速度  $V_a$  和(相对于运动坐标系的)相对速度  $V_r$  之间存在关系式

$$V_a = V_r + V_e.$$

这里  $V_e$  为牵连速度. 设  $V_O$  为运动坐标系原点  $O$ (相对绝对坐标系)的平动速度,  $\Omega$  为该运动坐标系以其原点  $O$  为中心(相对绝对坐标系)的转动角速度,则有

$$V_e = V_O + \Omega \times r.$$

这里,  $r$  为质点相对运动坐标系原点的矢径.

质点的绝对加速度(即在绝对坐标系中的加速度)  $a_a$  与相对加速度(即在相对坐标系中的加速度)  $a_r$  之间存在如下关系式

$$a_a = a_r + a_e + a_c = a_r + a,$$

$$a = a_e + a_c.$$

这里  $a_e$  为迁移加速度,  $a_c$  为加哥氏加速度:

$$a_e = \dot{V}_O(t) + \frac{d\Omega}{dt} \times r + \Omega \times (\Omega \times r),$$

$$a_c = 2\Omega \times V_r.$$

这里

$$\Omega = \frac{d\Omega}{dt} \text{ 为角加速度,}$$

$$\dot{V}_O(t) = \frac{dV_O(t)}{dt} \text{ 为运动坐标系原点加速度,}$$

$$\Omega(t) \times r \text{ 为切向加速度,}$$

$$\Omega \times (\Omega \times r) \text{ 为向心加速度,}$$

$$2\Omega \times V \text{ 为哥氏加速度.}$$

## 1.3.3.2 流动参数及其微分运算的基本变换关系式

对满足客观不变原则的标量  $\phi = \phi(x, t)$  (如密度、内能、压力、温度)、对速度矢量  $V = V(x, t)$  和应力张量  $P = P(x, t)$ , 在运动坐标系中分别记为  $\phi_r = \phi_r(x_r, t)$ 、 $V_r = V_r(x_r, t)$  和  $P_r = P_r(x_r, t)$ . 这里, 对流动参数的下标  $r$  和对微分算子的上标  $r$  表示是相对运动坐标系(这是为了这里的区别, 不用区别时可以省略下标). 例如,  $\frac{D^{(r)}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V_r \cdot$

$\nabla^{(r)}, \nabla^{(r)} = \mathbf{e}_k^{(r)} \frac{\partial}{\partial x_{rk}}$  表示在运动坐标系中的微分, 于是质点的绝对加速度  $\mathbf{a}_a$  为  $\frac{D\mathbf{V}}{Dt}$ , 相

对加速度  $\mathbf{a}_r$  为  $\frac{D^{(r)}\mathbf{V}_r}{Dt}$ .

考虑坐标变换:

$$x_{ri} = x_{0i} + Q_{ij}x_j = x_{ri}(x_j, t),$$

$$t_r = t = t_r(t),$$

$$\mathbf{e}_k^{(r)} = Q_{ki}\mathbf{e}_i,$$

对于应力张量, 根据客观不变性原则, 有

$$P_{rij} = Q_{il}P_{lm}Q_{jm}.$$

将两端同时乘以  $\mathbf{e}_i^{(r)}\mathbf{e}_j^{(r)}$ , 得

$$\mathbf{e}_i^{(r)}P_{rij}\mathbf{e}_j^{(r)} = Q_{il}\mathbf{e}_i^{(r)}P_{lm}Q_{jm}\mathbf{e}_j^{(r)}.$$

从坐标变换有

$$\mathbf{e}_l = Q_{il}\mathbf{e}_i^{(r)}, \mathbf{e}_m = Q_{jm}\mathbf{e}_j^{(r)}.$$

因此

$$\mathbf{e}_i^{(r)}P_{rij}\mathbf{e}_j^{(r)} = \mathbf{e}_lP_{lm}\mathbf{e}_m.$$

即在两个坐标系中(按各自基矢量定义的)应力张量相等

$$\mathbf{P}_r = \mathbf{P}.$$

对于任意标量  $\phi$ , 有

$$\begin{aligned}\nabla\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\mathbf{e}_i = \frac{\partial\phi}{\partial x_{rk}}\frac{\partial x_{rk}}{\partial x_i}\mathbf{e}_i + \frac{\partial\phi}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial x_i}\mathbf{e}_i \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial x_{rk}}Q_{ki}\mathbf{e}_i \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial x_{rk}}\mathbf{e}_k^{(r)} = \nabla^{(r)}\phi.\end{aligned}$$

对于满足客观性原则的标量  $\phi = \phi_r$ :

$$\nabla\phi = \nabla^{(r)}\phi_r.$$

对于速度有

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{V} &= \nabla \cdot (\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_0 + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \\ &= \nabla \cdot (\mathbf{V}_r + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \\ &\stackrel{\nabla \times \mathbf{r} = 0}{=} \nabla \cdot \mathbf{V}_r = \nabla^{(r)} \cdot \mathbf{V}_r.\end{aligned}$$

对于满足客观性原则标量的质点导数, 有

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \phi_r(x_r(\mathbf{x}, t), t_r(t)),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial x_j} &= \frac{\partial\phi_r}{\partial x_{ri}}Q_{ij}, \\ \frac{\partial\phi}{\partial t} &= \frac{\partial\phi_r}{\partial x_{ri}}\frac{\partial x_{ri}}{\partial t_r} + \frac{\partial\phi_r}{\partial t_r},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{D\phi}{Dt} &= \frac{\partial\phi}{\partial t} + V_j \frac{\partial\phi}{\partial x_j} \\
 &= \frac{\partial\phi_r}{\partial t_r} + \frac{\partial\phi_r}{\partial x_{ri}} \left( \frac{\partial x_{ri}}{\partial t_r} + Q_{ij} V_j \right) \\
 &= \frac{\partial\phi_r}{\partial t_r} + \frac{\partial\phi_r}{\partial x_{ri}} V_{ri} = \frac{D^{(r)}\phi_r}{Dt_r} = \frac{D^{(r)}\phi_r}{Dt}.
 \end{aligned}$$

于是得到了下面的几个基本变换公式

- 对于任意标量  $\phi$  和应力张量  $\mathbf{P}$ , 我们有

$$\nabla^{(r)}\phi = \nabla\phi,$$

$$\mathbf{P}_r = \mathbf{P}.$$

- 对于速度矢量和满足坐标不变原理的标量  $\phi$  和张量  $\mathbf{P}$ , 有

$$\nabla^{(r)}\phi_r = \nabla\phi,$$

$$\nabla_r \cdot \mathbf{V}_r = \nabla \cdot \mathbf{V}, \nabla_r \mathbf{V}_r = \nabla \mathbf{V},$$

$$\nabla_r \cdot \mathbf{P}_r = \nabla \cdot \mathbf{P},$$

$$\frac{D^{(r)}\phi_r}{Dt} = \frac{D\phi}{Dt}.$$

### 1.3.3.3 非惯性坐标系中方程的推导

推导非惯性坐标系中的方程有两种方法:直接法与间接法.

A) 直接法就是直接在非惯性坐标系中构造方程. 与惯性坐标系相比, 多了惯性力强度

$$-\mathbf{a} = -(\mathbf{a}_e + \mathbf{a}_c).$$

因此, 静止坐标系中的所有推导仍成立. 由此得的方程与静止坐标系中的完全一致, 只是把体积力强度项  $\mathbf{f}_v$  换成  $\mathbf{F} = \mathbf{f}_v - \mathbf{a} = \mathbf{f}_v - \mathbf{a}_e - \mathbf{a}_c$ . 并把所有的坐标与速度都改成相对运动坐标系的坐标与速度. 即运动方程可以写成

$$\frac{D^{(r)}\rho_r}{Dt} + \rho_r \nabla^{(r)} \cdot \mathbf{V}_r = 0,$$

$$\rho_r \frac{D^{(r)}\mathbf{V}_r}{Dt} = \rho_r \mathbf{F} + \nabla^{(r)} \cdot \mathbf{P}_r,$$

$$\rho_r \frac{D^{(r)}E_r}{Dt} = \rho_r \mathbf{F} \cdot \mathbf{V}_r + \nabla^{(r)} \cdot (\mathbf{V}_r \cdot \mathbf{P}_r) + \rho_r \dot{Q} + \nabla^{(r)} \cdot (\kappa \nabla^{(r)} \mathbf{T}_r).$$

B) 间接法就是先在静止坐标系中写出方程. 然后利用坐标变换将方程推广到运动坐标系中.

先将静止坐标系中的动量方程写成

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \mathbf{f}_v + \nabla \cdot \mathbf{P}.$$

这里  $\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \mathbf{a}_a$  为绝对加速度. 将  $\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_c$  代入上式, 并利用  $\nabla \cdot \mathbf{P} = \nabla^{(r)} \cdot \mathbf{P}_r$ , 得

$$\rho_r \frac{D^{(r)} \mathbf{V}_r}{Dt} = \rho_r \mathbf{F} + \nabla^{(r)} \cdot \mathbf{P}_r. \quad (1.55)$$

这里

$$\mathbf{F} = \mathbf{f}_v - \mathbf{a} = \mathbf{f}_v - \mathbf{a}_e - \mathbf{a}_c.$$

利用基本变换公式,可以很容易地从静止坐标系中的质量守恒方程推得运动坐标系中的方程

$$\frac{D^{(r)} \rho_r}{Dt} + \rho_r \nabla^{(r)} \cdot \mathbf{V}_r = 0. \quad (1.56)$$

能量方程的推导也不复杂.首先必须注意到总能作为标量并不满足客观性原则,它在不同坐标系中是变化的.为了解决这一困难,将  $\frac{D^{(r)} E_r}{Dt}$  写成

$$\frac{D^{(r)} E_r}{Dt} = \frac{D^{(r)} e_r}{Dt} + \frac{D \left( \frac{1}{2} \mathbf{V}_r \cdot \mathbf{V}_r \right)}{Dt}. \quad (1.57)$$

考虑到密度  $\rho$  和内能  $e$  是客观不变量 ( $e_r = e, \rho_r = \rho$ ), 所以

$$\frac{D^{(r)} \rho_r e_r}{Dt} = \frac{D \rho e}{Dt}.$$

另外,将动量方程(1.55)左右两端点乘相对速度  $\mathbf{V}_r$ , 得

$$\rho_r \frac{D^{(r)}}{Dt} \left( \frac{1}{2} \mathbf{V}_r \cdot \mathbf{V}_r \right) = \rho_r \mathbf{F} \cdot \mathbf{V}_r + (\nabla^{(r)} \cdot \mathbf{P}_r) \cdot \mathbf{V}_r. \quad (1.58)$$

另外,由前面推导的内能方程

$$\rho \frac{De}{Dt} = \nabla \mathbf{V} : \mathbf{P} + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \rho \dot{q}.$$

加上基本变换公式得

$$\rho_r \frac{D^{(r)} e_r}{Dt} = \nabla^{(r)} \mathbf{V}_r : \mathbf{P}_r + \nabla^{(r)} \cdot (\kappa \nabla^{(r)} T_r) + \rho_r \dot{q}. \quad (1.59)$$

将方程(1.59)与(1.58)相加,并注意到(1.57),便得能量方程

$$\rho_r \frac{D^{(r)} E_r}{Dt} = \rho_r \mathbf{F} \cdot \mathbf{V}_r + \nabla^{(r)} \cdot (\mathbf{V}_r \cdot \mathbf{P}_r) + \rho_r \dot{q} + \nabla^{(r)} \cdot (\kappa \nabla^{(r)} T).$$

### 1.3.4 直角坐标系和柱坐标系中微分方程的分量形式

将流体力学方程写成如下的向量形式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (1.60)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \mathbf{V}) = \rho \mathbf{F} + \nabla \cdot \mathbf{P}, \quad (1.61)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} E) = \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} + \nabla \cdot (\mathbf{V} \cdot \mathbf{P}) + \rho \dot{q} + \nabla \cdot (\kappa \nabla T). \quad (1.62)$$

如果是运动坐标系,则上述方程中的体积力包含惯性力项.

上面的方程形式与坐标系无关.将速度分量、散度等展开成分量形式时,需要用到具

体坐标系中的分量与散度表达式.

1) 直角(笛卡尔)坐标系  $(x, y, z)$ . 此时速度的三个分量记为  $(u, v, w)$ . 任意向量  $\phi$  的散度为

$$\nabla \cdot \phi = \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \phi_3}{\partial z}.$$

于是方程的分量形式可以写成

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0, \quad (1.63)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u u}{\partial x} + \frac{\partial \rho u v}{\partial y} + \frac{\partial \rho u w}{\partial z} = \rho F_1 + \frac{\partial P_{11}}{\partial x} + \frac{\partial P_{12}}{\partial y} + \frac{\partial P_{13}}{\partial z}, \quad (1.64)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho u v}{\partial x} + \frac{\partial \rho v v}{\partial y} + \frac{\partial \rho v w}{\partial z} = \rho F_2 + \frac{\partial P_{21}}{\partial x} + \frac{\partial P_{22}}{\partial y} + \frac{\partial P_{23}}{\partial z}, \quad (1.65)$$

$$\frac{\partial \rho w}{\partial t} + \frac{\partial \rho u w}{\partial x} + \frac{\partial \rho v w}{\partial y} + \frac{\partial \rho w w}{\partial z} = \rho F_3 + \frac{\partial P_{31}}{\partial x} + \frac{\partial P_{32}}{\partial y} + \frac{\partial P_{33}}{\partial z}, \quad (1.66)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial \rho u E}{\partial x} + \frac{\partial \rho v E}{\partial y} + \frac{\partial \rho w E}{\partial z} = & \rho(u F_1 + v F_2 + w F_3) + \rho q \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left( u P_{11} + v P_{12} + w P_{13} + \kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left( u P_{21} + v P_{22} + w P_{23} + \kappa \frac{\partial T}{\partial y} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left( u P_{31} + v P_{32} + w P_{33} + \kappa \frac{\partial T}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (1.67)$$

2) 柱坐标系  $(r, \theta, z)$ . 此时速度的三个分量记为  $(V_r, V_\theta, V_z)$ . 任意向量  $\phi$  和张量  $Q$  ( $= P, \rho V V$ ) 的散度分别为

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \phi &= \frac{1}{r} \frac{\partial r \phi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi_3}{\partial z}, \\ \nabla \cdot Q &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial r Q_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial Q_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial Q_{rz}}{\partial z} - \frac{Q_{\theta\theta}}{r} \right) e_r \\ &+ \left( \frac{1}{r} \frac{\partial r Q_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial Q_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial Q_{\theta z}}{\partial z} + \frac{Q_{\theta r}}{r} \right) e_\theta \\ &+ \left( \frac{1}{r} \frac{\partial r Q_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial Q_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial Q_{zz}}{\partial z} \right) e_z. \end{aligned}$$

于是方程的分量形式可以写成

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \rho V_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \rho V_z}{\partial z} = 0, \quad (1.68)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho V_r}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \rho V_r V_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho V_\theta V_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \rho V_z V_r}{\partial z} \\ &= \frac{\rho V_\theta^2}{r} + \rho F_r + \frac{1}{r} \frac{\partial r P_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial P_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial P_{rz}}{\partial z} - \frac{P_{\theta\theta}}{r}, \\ & \frac{\partial \rho V_\theta}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \rho V_r V_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho V_\theta V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \rho V_z V_\theta}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.69)$$

$$= -\frac{\rho V_r V_\theta}{r} + \rho F_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial r P_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial P_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} + \frac{P_{r\theta}}{r}, \quad (1.70)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho V_z}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \rho V_r V_z}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho V_\theta V_z}{\partial \theta} + \frac{\partial \rho V_z V_z}{\partial z} \\ &= \rho F_z + \frac{1}{r} \frac{\partial r P_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial P_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial P_{zz}}{\partial z}, \end{aligned} \quad (1.71)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \rho V_r E}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho V_\theta E}{\partial \theta} + \frac{\partial \rho V_z E}{\partial z} \\ &= \rho (V_r F_r + V_\theta F_\theta + V_z F_z) + \rho q \\ & \quad + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( V_r P_{rr} + V_\theta P_{r\theta} + V_z P_{rz} + \kappa \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right] \\ & \quad + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ V_r P_{\theta r} + V_\theta P_{\theta\theta} + V_z T_{\theta z} + \kappa_r \frac{\partial T}{\partial \theta} \right] \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial z} \left( V_r P_{rz} + V_\theta P_{z\theta} + V_z P_{zz} + \kappa \frac{\partial T}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (1.72)$$

在柱坐标系下,有一种特殊的流动,称为轴对称流动,即所有物理量对  $\theta$  的偏导数为 0. 进一步如果  $V_\theta = 0$ , 则称为二维轴对称流动,相应的方程为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \rho V_r}{\partial r} + \frac{\partial \rho V_z}{\partial z} = 0, \quad (1.73)$$

$$\frac{\partial \rho V_r}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \rho V_r V_r}{\partial r} + \frac{\partial \rho V_z V_r}{\partial z} = \rho F_r + \frac{1}{r} \frac{\partial r P_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial P_{rz}}{\partial z}, \quad (1.74)$$

$$\frac{\partial \rho V_z}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \rho V_r V_z}{\partial r} + \frac{\partial \rho V_z V_z}{\partial z} = \rho F_z + \frac{1}{r} \frac{\partial r P_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial P_{zz}}{\partial z}, \quad (1.75)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \rho V_r E}{\partial r} + \frac{\partial \rho V_z E}{\partial z} = \rho (V_r F_r + V_z F_z) + \rho q \quad (1.76)$$

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( V_r P_{rr} + V_z P_{rz} + \kappa \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left( V_r P_{rz} + V_z P_{zz} + \kappa \frac{\partial T}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (1.77)$$

利用同样道理,读者不难将球坐标系中的方程写出来.

计算用的方程需要用到计算坐标系,它可以是任意曲线坐标系,而且坐标可以随时间变化. 计算坐标系中的方程将在第二章介绍,在第三章分析.

## 参 考 文 献

- [1] G. K. Batchelor, An introduction to Fluid Dynamics, Cambridge University Press, 1967; G. K. 巴切勒, 流体动力学引论, 沈青、贾复译, 科学出版社, 1997.
- [2] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Fluid Mechanics (2nd edition), Butterworth and Heinemann, 1987 (also available from Beijing World Publishing Corporation, 1999).
- [3] B. K. Shivamoggi, Theoretical Fluid Dynamics, John Wiley & Sons, Inc., 1998.
- [4] 吴介之、马晖扬、周明德, 涡动力学引论, 高等教育出版社, 1993.

- 
- [5] 吴介之,流体力学的基本过程,北京大学出版社,1999.
- [6] 吴望一,流体力学,北京大学出版社,1983.
- [7] 杨本洛,流体运动的经典分析,科学出版社,1996.
- [8] 张兆顺、崔桂香,流体力学,清华大学出版社,1998.

## 第二章 流体力学方程的计算形式与封闭模型

流体力学基本方程需要写成一些特殊形式才方便构造算法、进行分析和计算,并可能需要补充一些方程或修改方程后才能求解.在连续介质力学范围内,总是存在各种尺度的影响,补充或修改方程的目的就是模拟各种尺度的影响.本章主要介绍 N-S 方程包括 Euler 方程便于求解的各种形式和对方程进行封闭(即构造补充或修正方程)的基本原理.

### 2.1 欧拉方程与 N-S 方程的计算形式

第一章已经推导了 N-S 方程和欧拉方程.这里从计算流体力学角度来进一步介绍.

#### 2.1.1 物理坐标系下的 N-S 方程

令  $\rho$  为密度,  $u, v, w$  为速度  $\mathbf{V}$  的三个分量(有时也记为  $V_1, V_2, V_3$ , 相应地  $x, y, z$  坐标也记为  $x_1, x_2, x_3$ ),  $E$  为总能,  $p$  为静压,  $e$  为内能,  $\gamma$  为比热比, 对于完全气体,

$$p = (\gamma - 1) \rho e, e = E - \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2).$$

以下只考虑完全气体情况.

考虑空间中大小和形状都随时间变化的控制体积  $\Omega(t)$ , 其以速度  $\mathbf{V}_\Sigma$  运动的边界  $\Sigma(t)$  的单位外法向矢量记为  $\mathbf{n}$ .

考虑任一流动参数  $\phi = \phi(x, y, z, t)$  (密度、动量各分量、能量等), 它的积分为

$$Q = \int_{\Omega} \phi d\Omega.$$

下面的定理读者一般已经很熟悉:

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= \int_{\Omega} \phi_t d\Omega + \oint_{\Sigma} \phi \mathbf{V}_\Sigma \cdot \mathbf{n} d\Sigma \quad (\text{运输定理}), \\ \int_{\Omega} \nabla \cdot (\phi \mathbf{V}_\Sigma) d\Omega &= \oint_{\Sigma} \phi \mathbf{V}_\Sigma \cdot \mathbf{n} d\Sigma \quad (\text{高斯定理}). \end{aligned}$$

N-S 方程包括质量守恒方程、动量守恒方程与能量守恒方程.

质量守恒定律可以表述为:控制体积中质量的变化率等于通过控制体边界流入的质量流量.写成方程形式为

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho d\Omega \\ \text{质量变化率} \end{array} \right. = \oint_{\Sigma} \rho (\mathbf{V}_\Sigma - \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n} d\Sigma \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{质量流量} \end{array} \right. \quad (2.1)$$



动量守恒定律可以表述为:控制体积中动量的变化率等于通过控制体积边界流入的动量流量,加上由体积力  $\mathbf{F}$  (重力与惯性力) 和表面力  $\mathbf{P}$  (压力  $-p\mathbf{I}$  与黏性应力  $\boldsymbol{\tau}$ ) 引起的变化. 写成方程形式为

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{V} d\Omega \\ \text{动量变化率} \end{array} \right. = \underbrace{\oint_{\Sigma} \rho \mathbf{V} (\mathbf{V}_{\Sigma} - \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n} d\Sigma}_{\text{动量流量}} + \underbrace{\int_{\Omega} \rho \mathbf{F} d\Omega}_{\text{体积力}} + \underbrace{\oint_{\Sigma} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} d\Sigma}_{\text{面积力}}. \quad (2.2)$$

能量守恒定律可以表述为:控制体积中能量的变化率等于通过控制体积边界流入的能量流量,加上由体积力  $\mathbf{F}$  和表面力  $\mathbf{P}$  做的功,再加上因热传导引起的变化. 写成方程形式为

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho E d\Omega \\ \text{能量变化率} \end{array} \right. = \underbrace{I_1}_{\text{能量流量}} + \underbrace{I_2}_{\text{体积力功}} + \underbrace{I_3}_{\text{面积力功}} + \underbrace{I_4}_{\text{热扩散}}. \quad (2.3)$$

这里

$$I_1 = \oint_{\Sigma} \rho E (\mathbf{V}_{\Sigma} - \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n} d\Sigma,$$

$$I_2 = \int_{\Omega} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{F} d\Omega,$$

$$I_3 = \oint_{\Sigma} \mathbf{V} \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}) d\Sigma,$$

$$I_4 = - \oint_{\Sigma} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\Sigma.$$

体积力  $\mathbf{F}$  一般指的是重力,即  $\mathbf{F} = \mathbf{g}$ . 对于许多问题重力一般可以忽略不计. 在运动坐标系中还可能包含惯性力(第一章). 表面力可以写成

$$P_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}.$$

这里  $p$  为压力,  $\tau_{ij}$  为黏性应力.

对于牛顿流体,黏性应力与当地应变率  $s_{ij}$  成正比,即

$$\tau_{ij} = 2\mu s_{ij} + \lambda \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{V}, \quad s_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right).$$

这里  $\mu$  为黏性系数,  $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$  (斯托克斯假设).

最后,由热传导引起的热流量满足傅里叶关系式

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T.$$

这里  $\kappa$  为热传导系数,  $T$  为温度. 如果定义  $P_r = \frac{c_P \mu}{\kappa}$  (称普朗特数,对于常温下的空气  $P_r = 0.71$ ), 则

$$\mathbf{q} = -\frac{\mu c_P}{P_r} \nabla T.$$

进一步如果假定定容比热  $c_V$  为常数, 则

$$\mathbf{q} = -\frac{\gamma \mu}{P_r} \nabla e.$$

通过令控制体积趋于 0, 并使用运输定理与高斯定理得可压缩流体 N-S 方程的微分形式

$$W_i + F_i^{(E)} + G_y^{(E)} + H_z^{(E)} = F_x^{(V)} + G_y^{(V)} + H_z^{(V)} + F. \quad (2.4)$$

这里  $F^{(E)}, G^{(E)}, H^{(E)}$  为无黏通量,  $F^{(V)}, G^{(V)}, H^{(V)}$  为黏性通量. 将牛顿本构关系代入 N-S 方程, 得

$$W = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{pmatrix}, F^{(E)} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ \rho u(E + \frac{p}{\rho}) \end{pmatrix},$$

$$G^{(E)} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ \rho v(E + \frac{p}{\rho}) \end{pmatrix}, H^{(E)} = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho vw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ \rho w(E + \frac{p}{\rho}) \end{pmatrix},$$

$$F^{(V)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} - q_x \end{pmatrix},$$

$$G^{(V)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} - q_y \end{pmatrix},$$

$$H^{(V)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \tau_{zz} \\ u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\tau_{zz} - q_z \end{pmatrix}.$$

这里

$$\tau_{xx} = \lambda(u_x + v_y + w_z) + 2\mu u_x,$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu(u_y + v_x),$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu(u_z + w_x),$$

$$\tau_{yy} = \lambda(u_x + v_y + w_z) + 2\mu v_y,$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \mu(v_z + w_y), \\
 \tau_{zz} &= \lambda(u_x + v_y + w_z) + 2\mu w_z, \\
 q_x &= -\kappa T_x, \\
 q_y &= -\kappa T_y, \\
 q_z &= -\kappa T_z.
 \end{aligned}$$

如果定容比热为常数,则

$$\begin{aligned}
 q_x &= -\frac{\gamma\mu}{P_r}e_x, \\
 q_y &= -\frac{\gamma\mu}{P_r}e_y, \\
 q_z &= -\frac{\gamma\mu}{P_r}e_z.
 \end{aligned}$$

在 N-S 方程中令  $\mu=0$  和  $\kappa=0$ , 则相应的方程称为欧拉方程

$$W_t + F_x^{(E)} + G_y^{(E)} + H_z^{(E)} = F. \quad (2.5)$$

这里  $F^{(E)}, G^{(E)}, H^{(E)}$  为通量函数

$$\begin{aligned}
 W &= \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{pmatrix}, F^{(E)} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ \rho u(E + \frac{p}{\rho}) \end{pmatrix}, \\
 G^{(E)} &= \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ \rho v(E + \frac{p}{\rho}) \end{pmatrix}, H^{(E)} = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ \rho w(E + \frac{p}{\rho}) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

### 2.1.2 计算坐标系下的方程

在计算过程中,经常采用计算坐标系 $(\tau, \xi, \eta, \zeta)$ . 计算坐标系 $(\tau, \xi, \eta, \zeta)$ 与直角坐标系 $(t, x, y, z)$ 之间的对应关系为

$$\begin{aligned}
 \tau &= t, \\
 \xi &= \xi(t, x, y, z), \\
 \eta &= \eta(t, x, y, z), \\
 \zeta &= \zeta(t, x, y, z).
 \end{aligned}$$

显然有如下微分关系式

$$x_x = x_\xi \xi_x + x_\eta \eta_x + x_\zeta \zeta_x = 1,$$

$$\begin{aligned}
y_x &= y_\xi \xi_x + y_\eta \eta_x + y_\zeta \zeta_x = 0, \\
z_x &= z_\xi \xi_x + z_\eta \eta_x + z_\zeta \zeta_x = 0, \\
x_y &= x_\xi \xi_y + x_\eta \eta_y + x_\zeta \zeta_y = 0, \\
y_y &= y_\xi \xi_y + y_\eta \eta_y + y_\zeta \zeta_y = 1, \\
z_y &= z_\xi \xi_y + z_\eta \eta_y + z_\zeta \zeta_y = 0, \\
x_z &= x_\xi \xi_z + x_\eta \eta_z + x_\zeta \zeta_z = 0, \\
y_z &= y_\xi \xi_z + y_\eta \eta_z + y_\zeta \zeta_z = 0, \\
z_z &= z_\xi \xi_z + z_\eta \eta_z + z_\zeta \zeta_z = 1.
\end{aligned}$$

令  $J$  为坐标变换的雅可比, 即

$$J = \det\left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)}\right) = x_\xi(y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta) + x_\eta(y_\zeta z_\xi - y_\xi z_\zeta) + x_\zeta(y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi).$$

则解上面的微分关系式得

$$\begin{aligned}
\xi_x &= J^{-1}(y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta), \\
\xi_y &= J^{-1}(z_\eta x_\zeta - z_\zeta x_\eta), \\
\xi_z &= J^{-1}(x_\eta y_\zeta - x_\zeta y_\eta), \\
\eta_x &= J^{-1}(y_\zeta z_\xi - y_\xi z_\zeta), \\
\eta_y &= J^{-1}(z_\zeta x_\xi - z_\xi x_\zeta), \\
\eta_z &= J^{-1}(x_\zeta y_\xi - x_\xi y_\zeta), \\
\zeta_x &= J^{-1}(y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi), \\
\zeta_y &= J^{-1}(z_\xi x_\eta - z_\eta x_\xi), \\
\zeta_z &= J^{-1}(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi), \\
\xi_t &= -\xi_x x_t - \xi_y y_t - \xi_z z_t, \\
\eta_t &= -\eta_x x_t - \eta_y y_t - \eta_z z_t, \\
\zeta_t &= -\zeta_x x_t - \zeta_y y_t - \zeta_z z_t.
\end{aligned}$$

设直角坐标系  $(t, x, y, z)$  下的方程为

$$W_t + F_x^{(E)} + G_y^{(E)} + H_z^{(E)} = F_x^{(V)} + G_y^{(V)} + H_z^{(V)} + F. \quad (2.6)$$

则在计算坐标系下, 方程可以写成如下守恒形式 (Viviand, 1974)

$$\overline{W}_t + \overline{F}_\xi^{(E)} + \overline{G}_\eta^{(E)} + \overline{H}_\zeta^{(E)} = \overline{F}_\xi^{(V)} + \overline{G}_\eta^{(V)} + \overline{H}_\zeta^{(V)} + JF. \quad (2.7)$$

这里

$$\begin{aligned}
\overline{W} &= JW, \\
\overline{F}^{(E)} &= J(\xi_t W + \xi_x F^{(E)} + \xi_y G^{(E)} + \xi_z H^{(E)}), \\
\overline{G}^{(E)} &= J(\eta_t W + \eta_x F^{(E)} + \eta_y G^{(E)} + \eta_z H^{(E)}), \\
\overline{H}^{(E)} &= J(\zeta_t W + \zeta_x F^{(E)} + \zeta_y G^{(E)} + \zeta_z H^{(E)}), \\
\overline{F}^{(V)} &= J(\xi_x F^{(V)} + \xi_y G^{(V)} + \xi_z H^{(V)}), \\
\overline{G}^{(V)} &= J(\eta_x F^{(V)} + \eta_y G^{(V)} + \eta_z H^{(V)}),
\end{aligned}$$

$$\overline{H}^{(V)} = J(\xi_x F^{(V)} + \xi_y G^{(V)} + \xi_z H^{(V)}).$$

为了方便,定义下面的混合雅可比矩阵

$$N_1 = \frac{d\overline{F}}{d\overline{W}} = \xi_x I + \xi_y A + \xi_z B + \xi_z C,$$

$$N_2 = \frac{d\overline{G}}{d\overline{W}} = \eta_x I + \eta_y A + \eta_z B + \eta_z C,$$

$$N_3 = \frac{d\overline{H}}{d\overline{W}} = \zeta_x I + \zeta_y A + \zeta_z B + \zeta_z C.$$

这里  $I$  为单位矩阵. 黏性通量  $F^{(V)}, G^{(V)}, H^{(V)}$  所含偏微分可按下面方式计算:

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x + u_\zeta \zeta_x,$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y + u_\zeta \zeta_y,$$

$$u_z = u_\xi \xi_z + u_\eta \eta_z + u_\zeta \zeta_z,$$

$$v_x = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x + v_\zeta \zeta_x,$$

$$\vdots$$

注意,在曲面  $\xi = \text{const.}$  上,法线方向由  $(\xi_x, \xi_y, \xi_z)$  给出;在曲面  $\eta = \text{const.}$  上,法线方向由  $(\eta_x, \eta_y, \eta_z)$  给出;在曲面  $\zeta = \text{const.}$  上,法线方向由  $(\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z)$  给出.

Viviani 采用的是试探法来获得上述守恒形式的. 其实也可以从其他思路证明. 例如,可以将偏微分方程写成积分形式,利用积分形式的方程便可以推导任意坐标系下的守恒方程.

设所求方程的微分形式为

$$W_t + \nabla \cdot \Phi = F. \quad (2.8)$$

这里

$$\nabla \cdot \Phi = \frac{\partial(F^{(E)} - F^{(V)})}{\partial x} + \frac{\partial(G^{(E)} - G^{(V)})}{\partial y} + \frac{\partial(H^{(E)} - H^{(V)})}{\partial z}.$$

考虑封闭区域  $\Omega$ . 它可以是任意四边形或六面体. 对偏微分方程(2.8)进行积分得

$$\int_{\Omega} W_t d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot \Phi d\Omega = \int_{\Omega} F d\Omega. \quad (2.9)$$

使用高斯定理,式(2.9)变为

$$\int_{\Omega} W_t d\Omega + \oint_{\Sigma} \Phi \cdot n d\Sigma = \int_{\Omega} F d\Omega. \quad (2.10)$$

这里  $\Sigma$  为  $\Omega$  的边界. 如果  $\Omega$  随时间变化,其边界  $\Sigma$  速度为  $V_{\Sigma}$ ,则(2.10)可以写成

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} W d\Omega + \oint_{\Sigma(t)} \Phi^* \cdot n d\Sigma = \int_{\Omega(t)} F dV. \quad (2.11)$$

这里  $\Phi^* = \Phi - W V_{\Sigma}$ .

然后对上面积分方程中的每一项进行坐标变换. 在新的坐标系下将积分方程转化为微分方程,便得所需要的守恒形式.

### 2.1.3 N-S 方程的展开形式

在计算流体力学方法构造和理论分析中,经常需要用到 N-S 方程的展开形式. 为

此,定义雅可比矩阵  $A = \frac{dF^{(E)}}{dW}$ ,  $B = \frac{dG^{(E)}}{dW}$ ,  $C = \frac{dH^{(E)}}{dW}$ ,  $A_x^{(v)} = \frac{dF^{(V)}}{dW_x}$ ,  $A_y^{(v)} = \frac{dF^{(V)}}{dW_y}$ ,  $A_z^{(v)} = \frac{dF^{(V)}}{dW_z}$ ,  $B_x^{(v)} = \frac{dG^{(V)}}{dW_x}$ ,  $B_y^{(v)} = \frac{dG^{(V)}}{dW_y}$ ,  $B_z^{(v)} = \frac{dG^{(V)}}{dW_z}$ ,  $C_x^{(v)} = \frac{dH^{(V)}}{dW_x}$ ,  $C_y^{(v)} = \frac{dH^{(V)}}{dW_y}$ ,  $C_z^{(v)} = \frac{dH^{(V)}}{dW_z}$ . 于是 N-S 方程的展开形式为

$$\begin{aligned} W_t + AW_x + BW_y + CW_z = & (A_x^{(v)}W_x + A_y^{(v)}W_y + A_z^{(v)}W_z)_x \\ & + (B_x^{(v)}W_x + B_y^{(v)}W_y + B_z^{(v)}W_z)_y \\ & + (C_x^{(v)}W_x + C_y^{(v)}W_y + C_z^{(v)}W_z)_z \\ & + F. \end{aligned}$$

为了求雅可比矩阵,把  $m^{(1)} = \rho$ ,  $m^{(2)} = \rho u$ ,  $m^{(3)} = \rho v$ ,  $m^{(4)} = \rho w$  和  $m^{(5)} = \rho E$  看成独立变量,则下面的关系式

$$W = \begin{bmatrix} m^{(1)} \\ m^{(2)} \\ m^{(3)} \\ m^{(4)} \\ m^{(5)} \end{bmatrix},$$

$$p = (\gamma - 1) \left[ m^{(5)} - \frac{1}{2m^{(1)}} (m^{(2)}m^{(2)} + m^{(3)}m^{(3)} + m^{(4)}m^{(4)}) \right],$$

$$F^{(E)} = \begin{bmatrix} m^{(2)} \\ \frac{1}{m^{(1)}} m^{(2)}m^{(2)} + p \\ \frac{1}{m^{(1)}} m^{(2)}m^{(3)} \\ \frac{1}{m^{(1)}} m^{(2)}m^{(4)} \\ \frac{1}{m^{(1)}} m^{(2)}m^{(5)} + \frac{1}{m^{(1)}} m^{(2)}p \end{bmatrix},$$

$$G^{(E)} = \begin{bmatrix} m^{(3)} \\ \frac{1}{m^{(1)}} m^{(3)}m^{(2)} \\ \frac{1}{m^{(1)}} m^{(3)}m^{(3)} + p \\ \frac{1}{m^{(1)}} m^{(3)}m^{(4)} \\ \frac{1}{m^{(1)}} m^{(3)}m^{(5)} + \frac{1}{m^{(1)}} m^{(3)}p \end{bmatrix},$$

$$H^{(E)} = \begin{pmatrix} m^{(4)} \\ \frac{1}{m^{(1)}} m^{(4)} m^{(2)} \\ \frac{1}{m^{(1)}} m^{(4)} m^{(3)} + p \\ \frac{1}{m^{(1)}} m^{(4)} m^{(4)} \\ \frac{1}{m^{(1)}} m^{(4)} m^{(5)} + \frac{1}{m^{(1)}} m^{(4)} p \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \frac{\lambda}{\rho} (m_x^{(2)} + m_y^{(3)} + m_z^{(4)}) + 2\nu m_x^{(2)} \\ &\quad - \frac{\lambda}{\rho} (um_x^{(1)} + vm_y^{(1)} + wm_z^{(1)}) - 2\nu um_x^{(1)}, \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \nu (m_y^{(2)} + m_x^{(3)}) - \nu (um_y^{(1)} + vm_x^{(1)}), \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} = \nu (m_z^{(2)} + m_x^{(4)}) - \nu (um_z^{(1)} + wm_x^{(1)}), \\ \tau_{yy} &= \frac{\lambda}{\rho} (m_x^{(2)} + m_y^{(3)} + m_z^{(4)}) + 2\nu m_y^{(3)} \\ &\quad - \frac{\lambda}{\rho} (um_x^{(1)} + vm_y^{(1)} + wm_z^{(1)}) - 2\nu vm_y^{(1)}, \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \nu (m_z^{(3)} + m_y^{(4)}) - \nu (vm_z^{(1)} + wm_y^{(1)}), \\ \tau_{zz} &= \frac{\lambda}{\rho} (m_x^{(2)} + m_y^{(3)} + m_z^{(4)}) + 2\nu m_z^{(4)} \\ &\quad - \frac{\lambda}{\rho} (um_x^{(1)} + vm_y^{(1)} + wm_z^{(1)}) - 2\nu wm_z^{(1)}, \\ q_x &= -\frac{\gamma\nu}{P_r} (-Em_x^{(1)} - um_x^{(2)} - vm_x^{(3)} - wm_x^{(4)} + m_x^{(5)} + |\mathbf{V}|^2 m_x^{(1)}), \\ q_y &= -\frac{\gamma\nu}{P_r} (-Em_y^{(1)} - um_y^{(2)} - vm_y^{(3)} - wm_y^{(4)} + m_y^{(5)} + |\mathbf{V}|^2 m_y^{(1)}), \\ q_z &= -\frac{\gamma\nu}{P_r} (-Em_z^{(1)} - um_z^{(2)} - vm_z^{(3)} - wm_z^{(4)} + m_z^{(5)} + |\mathbf{V}|^2 m_z^{(1)}). \end{aligned}$$

矩阵  $A = \frac{dF^{(E)}}{dW} = (A_{ij})$  和  $A_x^{(v)} = \frac{dF^{(V)}}{dW_x} = ((A_x^{(v)})_{ij})$  按下面方式求:

$$A_{ij} = \frac{\partial F_i^{(E)}}{\partial m^{(j)}}, \quad (A_x^{(v)})_{ij} = \frac{\partial F_i^{(V)}}{\partial m_x^{(j)}}.$$

其他矩阵用同样方式求. 由此得雅可比矩阵的详细表达式(记  $\bar{\gamma} = \gamma - 1$ ):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -u^2 + \frac{\bar{\gamma}}{2} V^2 & (3 - \gamma)u & -\bar{\gamma}v & -\bar{\gamma}w & \bar{\gamma} \\ -uv & v & u & 0 & 0 \\ -uw & w & 0 & u & 0 \\ -u[\gamma E - \bar{\gamma} V^2] & \gamma E - \frac{\bar{\gamma}}{2}(V^2 + 2u^2) & -\bar{\gamma}uv & -\bar{\gamma}uw & \gamma u \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
B &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -vu & v & u & 0 & 0 \\ -v^2 + \frac{\bar{\gamma}}{2} V^2 & -\bar{\gamma}u & (3-\gamma)v & -\bar{\gamma}w & \bar{\gamma} \\ -vw & 0 & w & v & 0 \\ -v[\gamma E - \bar{\gamma}V^2] & -\bar{\gamma}uv & \gamma E - \frac{\bar{\gamma}}{2}(V^2 + 2v^2) & -\bar{\gamma}vw & \gamma v \end{pmatrix}, \\
C &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -uv & w & 0 & u & 0 \\ -vw & 0 & w & v & 0 \\ -w^2 + \frac{\bar{\gamma}}{2} V^2 & -\bar{\gamma}u & -\bar{\gamma}v & (3-\gamma)w & \bar{\gamma} \\ -w[\gamma E - \bar{\gamma}V^2] & -\bar{\gamma}uw & -\bar{\gamma}vw & \gamma E - \frac{\bar{\gamma}}{2}(V^2 + 2w^2) & \gamma w \end{pmatrix}, \\
A_r^{(v)} &= \frac{\mu}{\rho} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3}u & \frac{4}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -v & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -w & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \Theta_a & \alpha_u u & \alpha_v v & \alpha_w w & \frac{\gamma}{Pr} \end{pmatrix}, \\
A_y^{(v)} &= \frac{\mu}{\rho} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3}v & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -u & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3}uv & v & -\frac{2}{3}u & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
A_z^{(v)} &= \frac{\mu}{\rho} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3}w & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3}uw & w & 0 & -\frac{2}{3}u & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$



$$B_x^{(v)} = \frac{\mu}{\rho} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -v & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3}u & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3}vu & -\frac{2}{3}v & u & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_y^{(v)} = \frac{\mu}{\rho} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3}v & 0 & \frac{4}{3} & 0 & 0 \\ -w & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \Theta_b & \beta_u u & \beta_v v & \beta_w w & \frac{\gamma}{Pr} \end{pmatrix},$$

$$B_z^{(v)} = \frac{\mu}{\rho} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3}w & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ -v & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3}vw & 0 & w & -\frac{2}{3}v & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_x^{(v)} = \frac{\mu}{\rho} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -w & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3}u & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3}wu & -\frac{2}{3}w & 0 & u & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_y^{(v)} = \frac{\mu}{\rho} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -w & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3}v & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3}wv & 0 & -\frac{2}{3}w & v & 0 \end{pmatrix},$$

$$C^{(c)} = \frac{\mu}{\rho} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3}w & 0 & 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ \Theta_c & \gamma_u u & \gamma_v v & \gamma_w w & \frac{\gamma}{Pr} \end{pmatrix}.$$

这里

$$\Theta_a = -\frac{\gamma}{Pr} E - \alpha_u u^2 - \alpha_v v^2 - \alpha_w w^2;$$

$$\Theta_b = -\frac{\gamma}{Pr} E - \beta_u u^2 - \beta_v v^2 - \beta_w w^2;$$

$$\Theta_c = -\frac{\gamma}{Pr} E - \gamma_u u^2 - \gamma_v v^2 - \gamma_w w^2;$$

$$\alpha_u = \frac{4}{3} - \frac{\gamma}{Pr}, \alpha_v = 1 - \frac{\gamma}{Pr}, \alpha_w = 1 - \frac{\gamma}{Pr};$$

$$\beta_u = 1 - \frac{\gamma}{Pr}, \beta_v = \frac{4}{3} - \frac{\gamma}{Pr}, \beta_w = 1 - \frac{\gamma}{Pr};$$

$$\gamma_u = 1 - \frac{\gamma}{Pr}, \gamma_v = 1 - \frac{\gamma}{Pr}, \gamma_w = \frac{4}{3} - \frac{\gamma}{Pr}.$$

#### 2.1.4 方程的基本变量形式与对角化

前面介绍的 N-S 方程以  $W = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E)^T$  作为因变量. 因针对  $W$  构造的方程称为守恒方程, 所以  $W$  也称为守恒变量. 对于可压缩流体力学问题, 标准的计算流体力学方法一般以守恒变量作为未知数. 但以守恒变量定义的雅可比矩阵特别复杂, 不容易求特征值和将方程对角化. 而雅可比矩阵的特征值和对角化在计算流体力学中具有重要作用(第三章、第四章). 为了简化需要用到其他变量定义的 N-S 方程.

最方便的变量是基本变量

$$U = (\rho, u, v, w, T)^T, V = (\rho, u, v, w, S)^T.$$

为了方程或矩阵之间的变换, 需要用到如下的变量变换关系

$$\frac{dU}{dW} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{u}{\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v}{\rho} & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ -\frac{w}{\rho} & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ -\frac{1}{\rho c_V}(q^2 - E) & \frac{1}{\rho c_V}u & \frac{1}{\rho c_V}v & \frac{1}{\rho c_V}w & \frac{1}{\rho c_V} \end{pmatrix}.$$

$$\frac{dU}{dV} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\bar{\gamma}}{\gamma} \frac{T}{p} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} \frac{T}{p} \end{bmatrix},$$

$$A_V = \frac{dW}{dV} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{a^2} \\ \frac{u}{a^2} & \rho & 0 & 0 & -\frac{u}{a^2} \\ \frac{v}{a^2} & 0 & \rho & 0 & -\frac{v}{a^2} \\ \frac{w}{a^2} & 0 & 0 & \rho & -\frac{w}{a^2} \\ \frac{1}{\gamma} + \frac{M^2}{2} & \rho u & \rho v & \rho w & -\frac{M^2}{2} \end{bmatrix},$$

$$A_V^{-1} = \frac{dV}{dW} = \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{2} q^2 & (1-\gamma)u & (1-\gamma)v & (1-\gamma)w & \bar{\gamma} \\ -\frac{u}{\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v}{\rho} & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ -\frac{w}{\rho} & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ \frac{\gamma}{2} q^2 - a^2 & (1-\gamma)u & (1-\gamma)v & (1-\gamma)w & \gamma \end{bmatrix}.$$

这里  $\bar{\gamma} = \gamma - 1$ ,  $q^2 = u^2 + v^2 + w^2$ ,  $a = \sqrt{\gamma p / \rho}$  为音速.

由第一章熵方程可以写成

$$\rho T \frac{DS}{Dt} = \phi + \nabla \cdot (\kappa \nabla T).$$

为了得到压力方程,将质量守恒方程写成

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0.$$

由熵的定义 ( $S = c_V \ln \frac{p}{\rho^\gamma}$ ) 得

$$\frac{Dp}{Dt} = a^2 \frac{D\rho}{Dt} + \frac{p}{c_V} \frac{DS}{Dt}.$$

因此,压力方程为

$$\frac{Dp}{Dt} = -\rho a^2 \nabla \cdot \mathbf{V} + (\gamma - 1) [\phi + \nabla \cdot (\kappa \nabla T)].$$

用第一章介绍的动量方程和温度方程(1.51),可以将以  $U$  为因变量的方程写成(令

黏性系数、热传导系数与比热为常数)

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} + \rho a^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \rho a^2 \frac{\partial v}{\partial y} + \rho a^2 \frac{\partial w}{\partial z} \\ = (\gamma - 1)[\Phi + \nabla \cdot (k \nabla T)], \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}, \quad (2.13)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \rho w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}, \quad (2.14)$$

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho v \frac{\partial w}{\partial y} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}, \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial T}{\partial t} + \rho u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T}{\partial y} + \rho w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\kappa}{\rho c_V} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\kappa}{\rho c_V} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\kappa}{\rho c_V} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \\ - \frac{1}{\rho c_V} p \nabla \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{\rho c_V} \Phi. \end{aligned} \quad (2.16)$$

这里  $\Phi$  为耗散函数

$$\begin{aligned} \Phi = \mu \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \\ + \frac{2}{3} \mu \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

为了获得对角化矩阵的统一形式,定义投影到某方向  $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$  的通量函数

$$F_n = F^{(E)} n_x + G^{(E)} n_y + H^{(E)} n_z.$$

相应的雅可比矩阵的投影为

$$N = \frac{dF_n}{dW} = A n_x + B n_y + C n_z.$$

下面求对角化矩阵  $P^{-1}$  和  $P$ , 使  $P^{-1}NP$  成为对角矩阵. 为此只需考虑欧拉方程. 对应的压力和熵方程可以分别写成

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} + \rho a^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \rho a^2 \frac{\partial v}{\partial y} + \rho a^2 \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \\ \rho \frac{\partial S}{\partial t} + \rho u \frac{\partial S}{\partial x} + \rho v \frac{\partial S}{\partial y} + \rho w \frac{\partial S}{\partial z} = 0. \end{aligned}$$

因此,以  $V$  为因变量的方程为

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} + \rho a^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \rho a^2 \frac{\partial v}{\partial y} + \rho a^2 \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2.17)$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (2.18)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \rho w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (2.19)$$

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho v \frac{\partial w}{\partial y} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad (2.20)$$