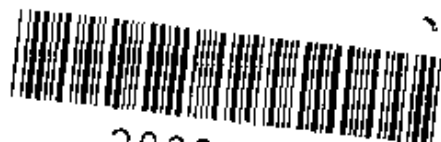


# 地震勘探数字技术问答

石油化学工业部石油地球物理勘探局数字处理会战指挥部译

石油化学工业出版社



200398462

868

# 地震勘探数字技术问答

石油化学工业部石油地球物理勘探局  
数字处理会战指挥部译

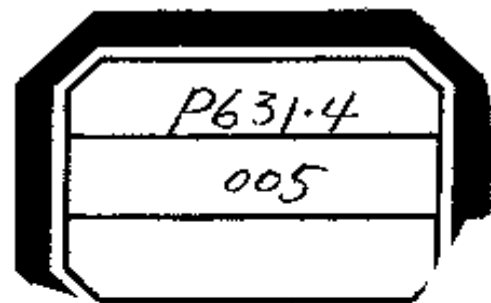


00298308

5964128



石油化学工业出版社



本书译自美国1966年版《**APICTORIAL DIGITAL ATLAS**》一书 中译本定名为《地震勘探数字技术问答》。

书中以问答形式介绍了地震勘探数字技术有关问题的基本概念。主要内容包地地震勘探数字记录的离散采样、编码、信号的恢复及富氏变换、各种滤波算子的设计和自相关分析等。

本书的特点是每个问题都举例说明并附有相对应的定性说明图,文字简练、通俗易懂,可供初从事地震勘探数字技术的工人、技术干部参考。

United Geophysical Corporation  
**A PICTORIAL DIGITAL ATLAS**  
(1966 Edition)

**地震勘探数字技术问答**

石油化学工业部石油地球物理勘探局  
数字处理会战指挥部译

\*

石油化学工业出版社出版

(北京和平里七区十六号楼)

石油化学工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

\*

开本 $787 \times 1092^{1/32}$  印张 $17/8$  字数 41千字 印数 1—6,400

1977年10月北京第1版 1977年10月北京第1次印刷

书号15063·油123 定价0.17元

**限国内发行**

## 目 录

1. 地震数据的离散采样和量化.....	1
2. 采样值的编码.....	3
3. 二进制增益控制放大器.....	5
4. 地震信号的恢复.....	9
5. 信号的近似恢复.....	11
6. 频率折叠和假频.....	14
7. 频率分析.....	19
8. 富氏变换.....	22
9. 余弦变换对.....	24
10. 简单函数的富氏变换.....	26
11. 截尾函数的富氏变换.....	29
12. 时移信号的富氏变换.....	31
13. 时间域滤波.....	34
14. 频率域滤波.....	37
15. 逆富氏变换.....	39
16. 数字低通滤波算子的设计.....	42
17. 数字高通和带通滤波算子的设计.....	45
18. 数字带阻滤波算子的设计.....	47
19. 自相关分析.....	49
20. 功率谱.....	51
21. 振幅谱和相位谱之间的关系.....	54
22. 最小相位函数和最大相位函数.....	57

## 1. 地震数据的离散采样和量化

问：在磁带上，地震数据的数字记录与通常的模拟方法记录有什么不同？

答：根本的差别是：在模拟方法中，是把地震放大器输出电压连续地记录在磁带上；而在数字方式中，只把离散时间间隔内（例如每隔 0.001 或 0.002 秒）测量到的地震放大器输出电压不连续地记录在磁带上，在采样点之间的时间上，信号电压值是不记录的。

问：离散样是怎样记录下来的？

答：利用高速电子开关装置将“采样和保持”放大器同放大器的输出端作瞬时地接触，从而对放大器的输出电压采样。采样时间是非常短的，大约是十分之一微秒。然后，把储存在采样和保持放大器中的电压在模数转换器中与以阶梯状变化的参考电压相比较。由此查明信号是落在那个电压区间或“基本数量”之内，并由模数转换器按编码形式传送到磁带记录系统。这个过程要在离散的时间间隔内依次不断地重复进行。

问：这个过程是否可以唯一地确定被采样的信号，并且以后还能从磁带记录上精确地再现出来？

答：不能。因为用离散数据来表示连续信号只能是近似的。近似到什么程度，要看信号的振幅和振幅的基本单位（即基本数量）的大小关系。图 1 中表示了正弦波的一个周期，频率为 62.5 周/秒，峰值为  $\pm 2.9$  个基本数量单位，每 2 毫秒采样一次。采样和量化的过程用矩形来表示。在此情况下，该讯号这些采样矩形不能完全固定。

信号可以在图中用阴影表示的面积内活动；振幅大些或小些，向左右上下都可以移动，这样就可以有无穷多个信号都能穿过这些采样矩形，以后它们都可以相等地恢复成同样的信号。这个含糊或不肯定的阴影区，好像是围绕着测定信号时出现的统计误差分布范围。

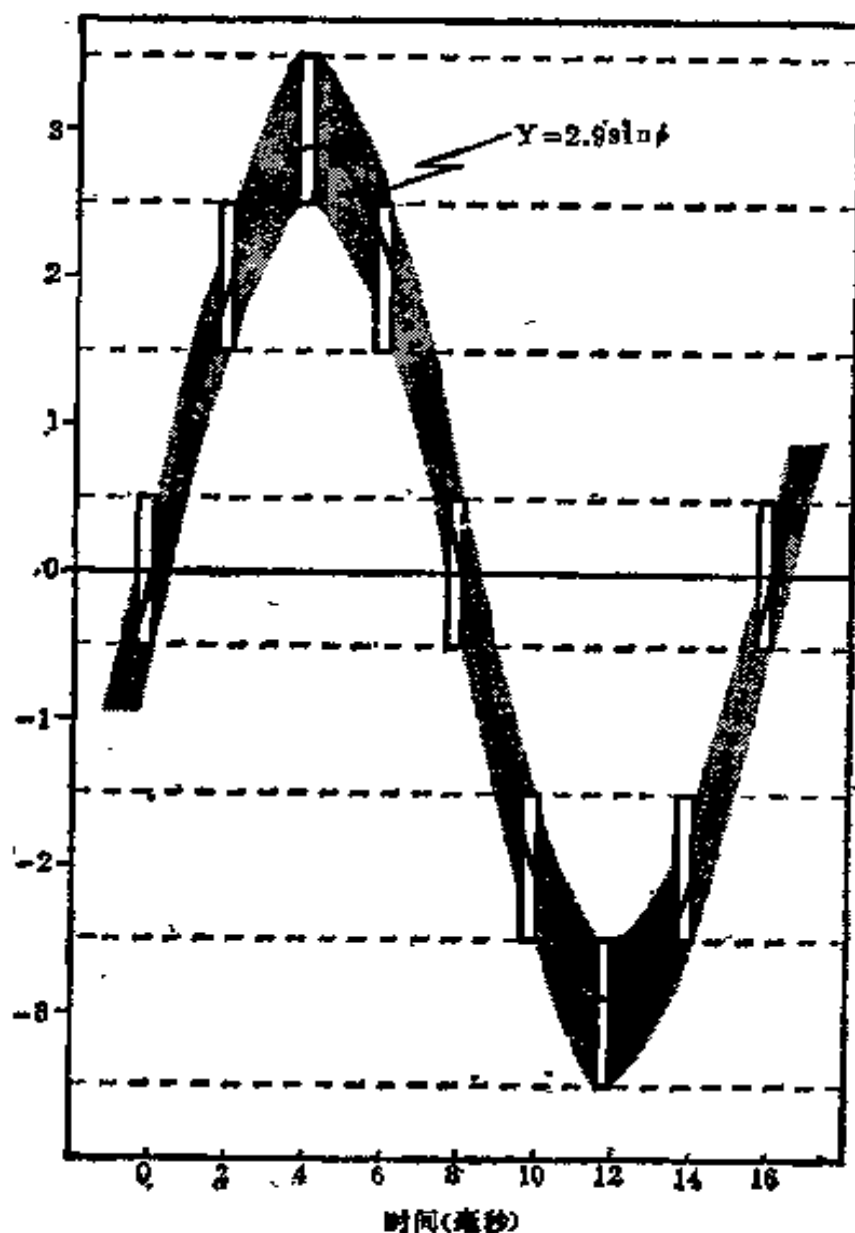


图1 采样和量化过程

## 2. 采样值的编码

问：一定有好几种数字代码可以用来表示量化了的采样值。你能以图 1 中的信号为例来做个说明吗？

答：图 2 上表示了四种不同的二进制代码。在这个特定的例子中，量化了的值是用三个二进制数  $2^0$ ,  $2^1$ ,  $2^2$  (即 1, 2, 4) 和一个符号位 (通常指最高有效位) 的各种组合来表示的。在偏置二进制代码中，零用 + 8 来表示，正数和负数就以 + 8 为基础，而不是以零为基础。

问：这些代码可以由一种转换成另一种吗？

答：可以。这种转换在数字计算机中由程序控制很容易实现。如果还希望更高的速度的话，可以在计算机里附加一个特殊线路来进行这种转换。

问：你举的例子是以四位二进制来说明的，在实践中用的是多少位的字？

答：通常用 13 位到 15 位二进制数来表示地震采样的振幅。

问：与此相应的分辨率或精度怎样？

答：举例来说，考虑一个 14 位大小 (13 位加符号位)，用反码表示的负值。从 0 到满刻度值  $\pm 8191$  之间所有的整数值，都可以用这种代码表达。信号电平量化成整数，实际信号值与这个整数的差值不会超过  $1/2$  个基本数量。因此，对于满刻度值来说，相应的标定分辨率为：

(a) 16382 分之一或近似于  $2^{-14}$

(b) 0.0061%

(c) -84.3 分贝

实际上能否取得这样的分辨率，决定于模数转换设备的

性能、整个地震记录系统的特性和没有干扰噪声。实际上，诸如地震放大器和仪器其他部分的畸变或互馈等因素，比起采样量化产生的误差或不肯定性来，对整个系统的总精度的限制要更严重些。

时间(毫秒)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	
振幅	0	21	29	21	0	-21	-29	-21	0	位值
量化振幅	0	2	3	2	0	-2	-3	-2	0	

反码	0	0	0	0	0	1	1	1	0	S	±
	0	0	0	0	0	1	1	1	0	2 <sup>2</sup>	4
	0	1	1	1	0	0	0	0	0	2 <sup>1</sup>	2
	0	0	1	0	0	1	0	1	0	2 <sup>0</sup>	1

补码	0	0	0	0	0	1	1	1	0	S	±
	0	0	0	0	0	1	1	1	0	2 <sup>2</sup>	4
	0	1	1	1	0	1	0	1	0	2 <sup>1</sup>	2
	0	0	1	0	0	0	1	0	0	2 <sup>0</sup>	1

符号和数值代码	0	0	0	0	0	1	1	1	0	S	±
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2 <sup>2</sup>	4
	0	1	1	1	0	1	1	1	0	2 <sup>1</sup>	2
	0	0	1	0	0	0	1	0	0	2 <sup>0</sup>	1

偏置二进制代码	1	1	1	1	1	0	0	0	1	2 <sup>3</sup>	8
	0	0	0	0	0	1	1	1	0	2 <sup>2</sup>	4
	0	1	1	1	0	1	0	1	0	2 <sup>1</sup>	2
	0	0	1	0	0	0	1	0	0	2 <sup>0</sup>	1

图2 二进制代码



### 3. 二进制增益控制放大器

问：你能描述一下二进制增益控制放大器工作的特点，并说明一下在这种情况下采样值是如何编码的吗？

答：二进制增益控制放大器本质上是这样的一种自动增益控制放大器：在这种放大器中，增益是精确地按二比一的梯级突变的，而不象通常的自动增益控制放大器那样增益缓慢、连续地变化（有些类型中可以向上或向下变化）。在两次突变之间，增益保持固定。放大器增益对时间关系的图形好似楼梯。图 3 以稍微理想化的形式来说明工作的方式。图中横比例尺代表时间。纵比例尺代表放大器输入或输出信号的电压或振幅，用二进制对数比例分度（即与以 2 为底数的对数成正比）。纵比例尺最左一列标的是近似的电压值，第二列标的是以  $2^n$  形式计数法的指数。假定放大器的输入是一个振幅逐渐减小的正弦信号，其振幅曲线如图 3 中虚线所示。规定这个信号从开始时的大约 0.8 伏（均方根值）到  $t_1$  时刻衰减到 0.1 微伏均方根值。又假定，我们是在放大器中这样一个点上测量输出电压的，即时间小于  $T_1$  时整个增益为 1。输出信号的均方根值在图中以实线绘出。这个放大器设计成这样：假若输入信号衰减到 0.1 伏均方根值，则放大器的增益（在采样瞬时之间）突然按准确的 2:1 的倍数增加。此时输出电压的相应增加用时间  $T_1$  标出。此后，输入和输出电压继续衰减，直到输入信号达到 0.05 伏均方根值（以  $2^{19}$  标出），放大器的增益再次急剧地增加一倍，而输出电压也相应地按两倍突然增加。当输入

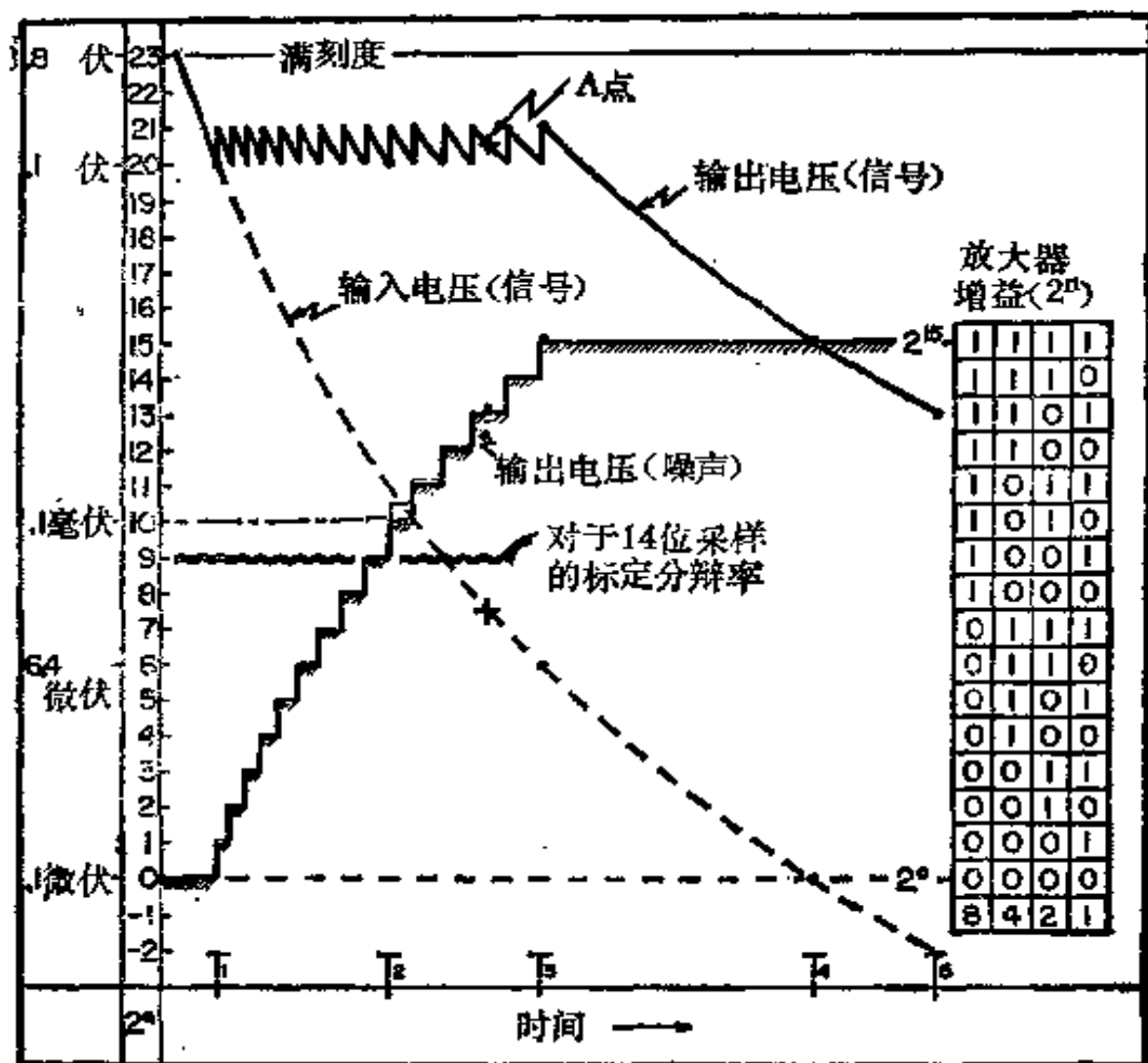


图 3 二进制增益控制放大器的工作特性

信号继续衰减，又重复同样的过程，增益总共增加 15 个两倍。在时间  $T_3$ ，放大器已达到最大增益，以后输出电压的衰减速度正好与输入信号一样。总的结果是，从时间  $T_1$  到时间  $T_8$ ，输出信号近似地保持在相同水平上。这种锯齿形的变化被放到以后的数字计算机处理中去考虑。假如放大器在增益变化单元前面的各级中，电噪声水平保持在 0.1 微伏均方根值（相当于输入的大

小)的常量上,则放大器输出的相应噪声可用带有斜阴影的线表示。可以想象出来,这一条曲线也就是放大器的相对增益状态(是时间的函数)曲线。16个固定增益级(每级被2的因子分离)用阶梯形曲线表示。假如在放大器输出级还存在噪声(比例中取0.1毫伏),则总的输出噪声水平将如长短虚线曲线所示。

**问:**以数字形式在磁带上记录放大器的瞬时输出电压时,也记录放大器的增益状态吗?

**答:**是的。在每个采样瞬时,线路也同时读取了增益状态,其结果用4位二进制数表达,与输出信号的瞬时振幅的二进制码一起记录下来。在图3的右侧列出了可能的增益码。以A点为例,假定在这个特定的采样瞬间,输出电压的瞬时值相应于十进制数1511(满刻度为8191),而放大器增益状态为 $2^{13}$ ,则输入信号的相应瞬时值为 $+1511 \times 2^{-18}$ 基本数量单位。这个样的二进制码可以写成

1 1 0 1	0 0 0 1 0 1 1 1 1 0 0 1 1 1
---------	-----------------------------

当然,用于处理的数字计算机必须有适应于处理这种编码数据的程序。

**问:**如果输出电压数字化用的是14位采样字(13位加符号位),那么图3上表示的放大器系统的动态范围是多大?

**答:**假如模数转换器的满刻度值是置于图示的 $2^{23}$ 水平上,那么标定分辨率的限度(对输出信号而言)在 $2^9$ 水平上,在图中用横波纹线表示。对于小于 $T_2$ 的时间,这条波纹线指出了有意义输出信号的下限。当接近这个下

限时，小信号成分就要受亏损，如前面 1 中叙述过的那样。例如，假设有一个接近于满刻度的某个频率的输出信号与一个低电平（譬如说  $2^{-9}$ ）的不同频率的信号成分同时存在。这时，只有 +3 到 -3 范围内的整数值能用来表示这个低电平信号成分。假如信号成分的电平还要更低些，譬如说  $2^{-10}$ ，那么，只有 +1, 0, -1 三个整数值能用来表示它。对于输出信号为  $2^9$  的电平，已经不能表示成有意义的数了。这样，我们在回答这个问题时可以说：动态范围（对于输出信号而言）稍小于 84 分贝。若要求更全面回答，则要有完善的统计分析。至于对  $T_0$  和更大的时间，动态范围（对于输出信号）接近于 48 分贝。对于放大器的输入信号来说，动态范围还要加上 90 分贝。因此，对于输入信号的总动态范围近似为 138 分贝。

## 4. 地震信号的恢复

**问：**上面我们已经讨论了信号的采样、量化和编码。那么，把这个过程反过来，由离散非连续的采样值恢复成平滑的连续信号的过程又是怎样的呢？

**答：**关于这个极为复杂的课题，已经写了大量的著作。然而，对其近似性做一个适当的简单解释，还是有可能的。假定原始连续信号已被每隔 2 毫秒采样，再假定在采样之前已对整个信号进行了滤波，使所有超过 250 周/秒的信号频率成分基本上已被滤去。如图 4 中 a 用竖线表示采样序列的 5 个相邻值。采样定理的基本说明为：给定了上述条件后，可以将采样序列数据以任何希望的精度来恢复滤波后的原始信号。恢复的方法是将每一采样线条用等于其峰值高度的“内插函数”来代替（如图 4-b 所示）。内插函数是  $\sin x/x$  形式的“sinc”函数。这个函数可以在 0.002 秒采样点之间按我们所要求的点数来规定它的值。在图中，各中间点的间隔是 0.0005 秒。将所有内插函数的作用加在一起，就组成了要恢复的信号，如图 4-c 的曲线所示。

**问：**到底能不能达到“完全恢复”的目的呢？

**答：**不能。理由是：内插函数在理论上是无限长的。所以，恢复的每个点都包含无限远的、在时间上有早有晚的采样值的影响。此外，在图 4 中，内插点距离为 0.0005 秒，然而，它是可以内插到任何适当的希望的精度的。当然，处理的费用是个限制。同原先量化误差有关的“统计亏损”（第 1 中），在恢复信号中还仍然保留着，成

为有意义精度的上限。

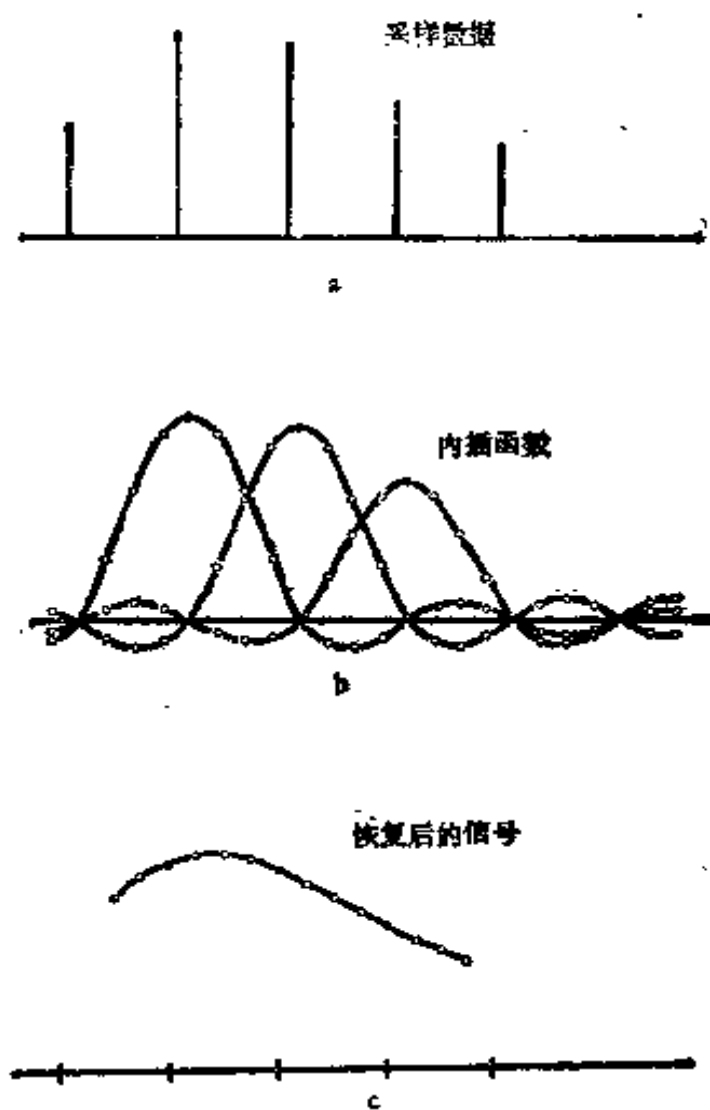


图4 用内插法恢复信号

## 5. 信号的近似恢复

问：有没有既经济又能高速度恢复信号的方法？

答：有。通常是用象“零阶数据保持”设备那样工作的数模转换器来完成的。每个采样值通过电子线路保持一个采样间隔的时间，然后电压迅速地与下一个新的采样值接通（见图 5-a 中的左半部）。结果就得到一个阶梯形的电压输出，它由两个部分组成：一个平滑信号加上一个剩余波纹。图 5-a 中用虚线表示的原始信号，是振幅为 1.00 的 62.5 周/秒的正弦波，每 2 毫秒采样一次，产生阶梯形的数模输出信号。阶梯形信号由两部分组成：一个振幅为原始信号 97% 的 62.5 周/秒的正弦波，和由高次谐波（3 次，5 次，7 次……，频率为 187.5，312.5，437.5 周/秒……，）组成的波纹成分。如果波纹成分可以用理想的高截（低通）电滤波器完全滤掉，那么恢复后的信号成为振幅为原始信号 97% 的正弦波。对于 500 周/秒的分谐波，即  $166\frac{2}{3}$ ，125，100， $83\frac{1}{3}$ ， $71\frac{3}{7}$ ， $62\frac{1}{2}$ ， $55\frac{5}{9}$ ，50 周/秒等频率的正弦信号，情况都相似。代表恢复后信号基频分量的振幅的各个点，是沿着一条“sinc”曲线分布的，如图 5-b 右半部中虚线所示。然而，波纹滤波器通常不能完全消除所有的谐波。因此，这样恢复出来的信号可以小于或大于虚线所示的峰值振幅。

问：一个 250 周/秒的信号，每周只有 2 个采样点，会发生什么情况呢？

答：这个情况表明在图 5-b 左半部图上。若在波峰和波谷上

采样和“保持”，得到的方波信号如图中上面一道波形图所模拟。如果此信号通过一个对 750, 1250, 1750 周/秒等“波纹”频率有剧烈衰减作用的滤波器，那么，滤波器输出的 250 周/秒信号，实际上要超过原始峰值 27%。但若在 250 周/秒信号的零点上采样，则输出值为零。

问：整个加起来，总的结果是什么？

答：结果是恢复后的信号振幅（相对于原始信号振幅）有一个逐渐增大的模糊或不确切区域。这个区域在图 5-b 右半部图中以阴影区表示。从统计角度讲，恢复后的振幅可以落在这个区域中的任何位置（以不同的概率），它依赖于采样“梳”与原始信号间随机的相位关系。恢复后的信号振幅在模糊区上下限之间来回摆动。对于用小圆圈标出的分谐波频率，这种摆动被“冻结”。在阴影区内的某个值上，振幅保持常数。这个值是由于碰巧，并决定于信号和采样“梳”之间碰巧的相位关系。阴影区的精确界限决定于所用的波纹滤波器的特性。整个问题的实际解决方法为：在采样之前，先对原始信号剧烈地滤去 125~135 周/秒以上的信号频率；对恢复后的信号，用一个类似的滤波器滤去波纹。



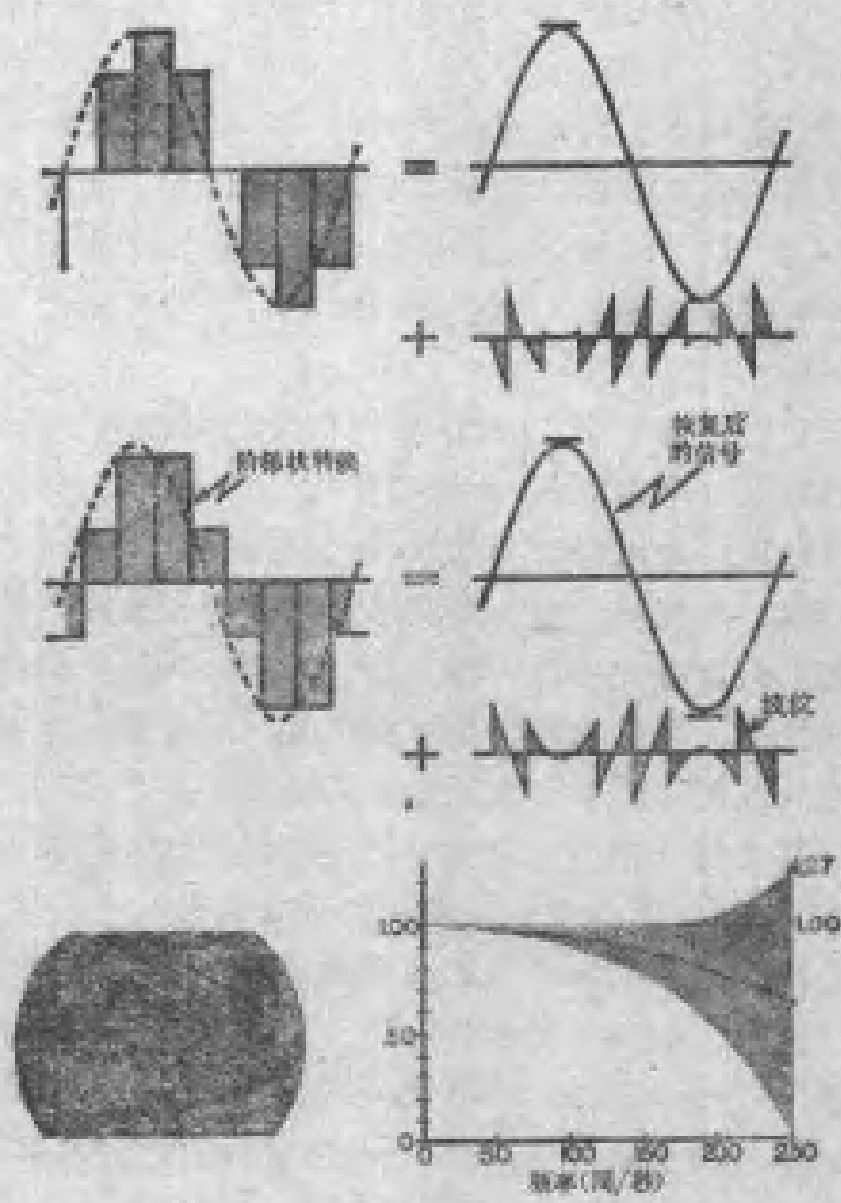


图5 信号的近似恢复

## 6. 频率折迭和假频

问：如果一个信号以每周少于两个点采样，会发生什么情况呢？

答：这个效应多少类似频闪光照射一个高速旋转轮子时所观察到的效应，照射的速率与轮辐通过某一参考点的速率不同，这个轮子好象以不同于真速率的速度在旋转。

问：假定采样间隔是 0.002 秒，你能为这种特定情况说明一下吗？

答：让我们考虑一个 500 周/秒的信号，每秒采样 500 次，得到的是一个常数值（处处都在 -1, 0 和 +1 之间）。我们可以说，采过样的 500 周/秒信号具有“零频率”信号的外貌。拿旋转的轮子来类比，其频闪光的速率使轮子看起来好象静止不动一样。当然，“零频率”的概念是个数学抽象，不是物理学上可实现的，因为要证实状态确实是静止的，需要一个无限长的观察时间。

问：在这个例子中，一个 500 周/秒的信号表现为一个“零频率”信号，这是由于子采样过程造成的吗？

答：说得对。我们再来考虑一个频率 417 周/秒的原始正弦波信号，如图 6 所示（ $P$  点）。以 2 毫秒间隔采样的结果，产生的信号具有 83 周/秒信号（ $P'$  点）的外貌。换句话说，由于采样的结果，原始（输入）信号（在 250 周/秒以上）呈现假象。这个临界频率（在此例中是 250 周/秒）通常称为乃古氏频率或半采样频率，这种现象称为“假频”。

问：频率超过 500 周/秒的信号又怎样呢？

答：仍以频闪光来做类比，其情况相应于轮子表现为倒转的情况。在 500 到 750 周/秒之间的频率表现为在 0 到 -250 周/秒的假频。整个情况用图 6 中的下图表示，并称之为“频率折迭”。在图中，对于原始频率高于 250 周/秒的情形，其假频率用手风琴式折迭的实线表示。折迭线的第二段，如果希望的话，可在零频率轴下面画成负频率。

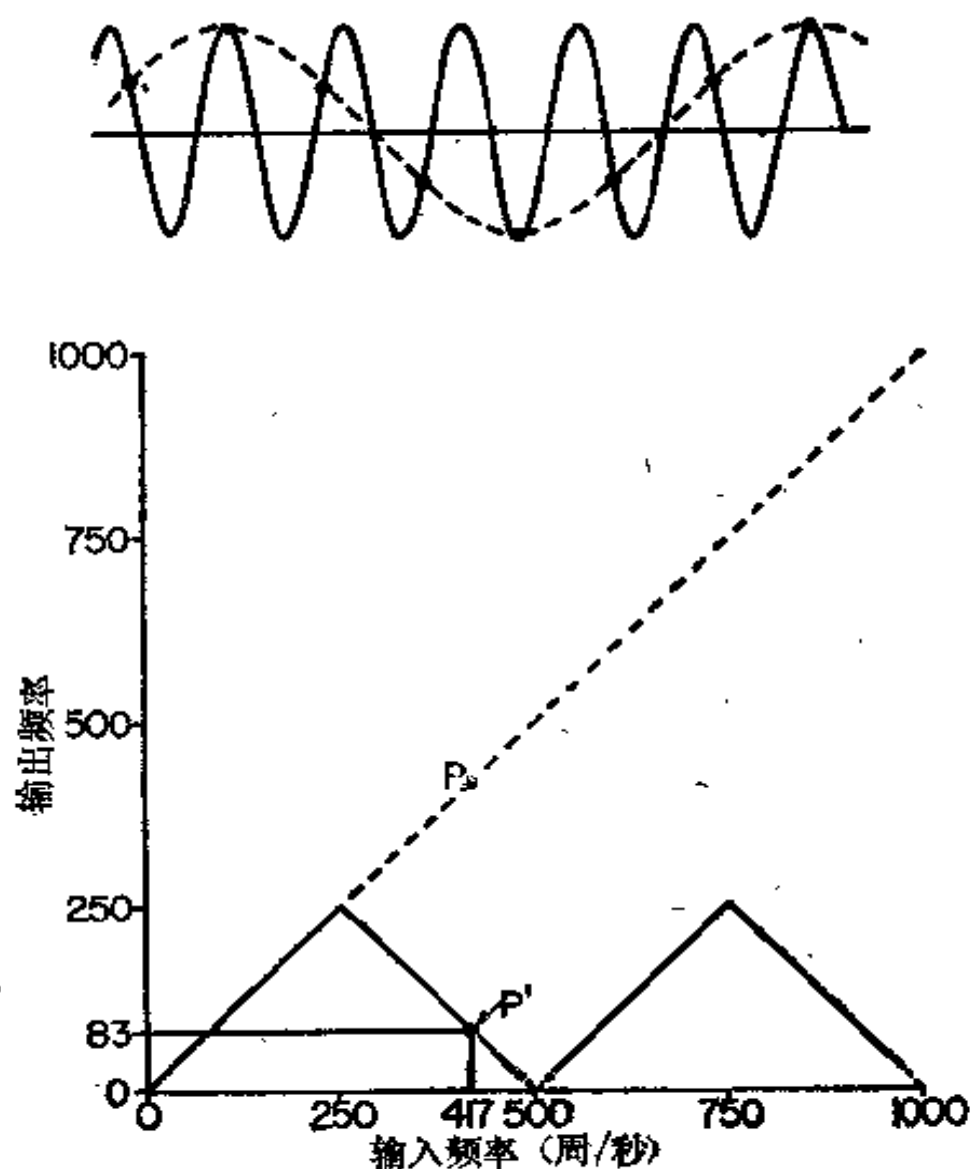


图6 频率折迭

问：也许你碰巧有一张说明这些不同现象的图表？

答：很巧，有这样的图。在图 7 上显示出一个采过样的咽喉



信号的恢复情况，调频信号的频率是随时间从0到4.9秒的增加而呈线性增加的。由数字计算机计算(发生)每

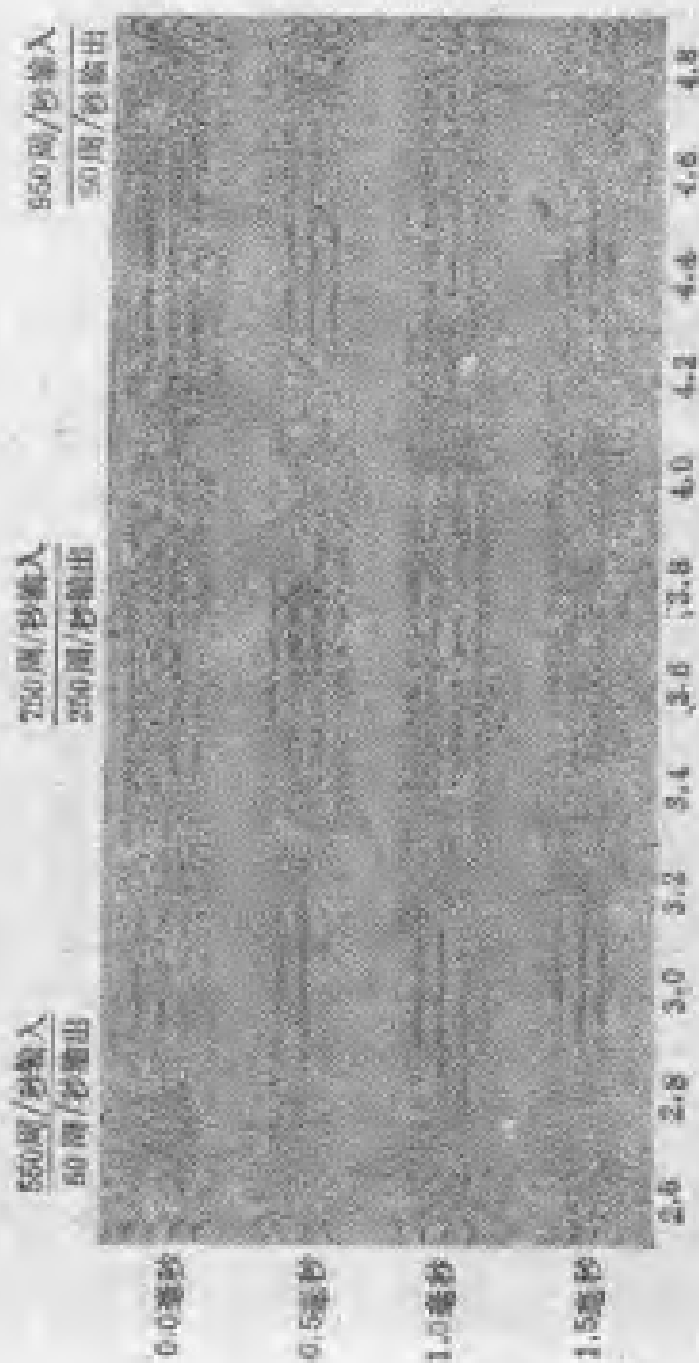


图7 调频信号的恢复

2 毫秒的样值，来摹仿对信号的采样。我们没有进行消除假频的滤波。发生的样值系列通过一个数模转换器来传递，并用一个模拟系统以照相方式记录下来。这个系统的频率响应，在 250 周/秒处大约衰减 8 分贝，在高于 400 周/秒处急剧下降。起始样点用了四种情况，即取在 0.0, 0.5, 1.0, 1.5 毫秒处。每一种情况都画了相同的四道作为一组。当输入频率自 0 增加到 250 周/秒时，输出频率也相应地增加。

问：在时间从 0.0 到 0.2 秒附近，信号的特点是什么？

答：在这段时间里，频率由 0 依次扫到约 41 周/秒。当然，在这样短的时间里，它不可能“装满”这一个频率范围。（从概念上说，要表示“零频率”分量需要无限长的时间）。

问：从这一点一直到 250 周/秒，输出频率是按照输入频率增加的啰？

答：是的。然而，可以看到，在超过大约 0.5 秒处有明显的“中心线移动”，而当频率接近 250 周/秒时，输出有一种逐渐加大的“挤压和膨胀”现象。这种“摆动”是由于输入信号和采样“梳”之间的相位关系连续变化所引起，如 5 中所描述过的那样。这个图解也证明，由采样数据恢复信号时，在接近乃古氏频率处出现的模糊和不肯定性。

问：在 250 周/秒以上，输出频率是“向下”折迭的吗？

答：是的。当输入频率从 250 增加到 500 周/秒时，输出信号频率从 250 减少到 0 周/秒。在（假频）“零频率”附近出现前面指出过的限度。在 500, 750, 1000 周/秒等地方，再次发生折迭。前面已指出，在实际处理中，在采样以前要用一个“假频滤波器”使高于 125~135 周/秒的输入频率剧烈衰减。图 7 的例子仅仅是为说明之用。

## 7. 频率分析

**问：**术语“时间域”和“频率域”是什么意思？

**答：**以上我们一直讨论的是“时间域”中的运算，例如，对一个随时间变化的量（即是时间的函数）在离散的时间间隔内采样。但是，为了讨论的目的，即使在这里我们也显然已经一再提出过理想正弦信号的“频率”的概念。现在，让我们把这个概念推广到更复杂的信号上去，例如一个反射地震记录道的半秒长的一段。在图 8-a 中画了一个例子。我们进而假定，这个信号在采样前已经过滤波，实质上已滤去了所有高于 250 周/秒的“频率分量”，并且滤波后的信号已被按 2 毫秒间隔采了样。富氏频率分析的基本前提是：这个信号可以看作是由 -250 到 +250 周/秒范围内的频率分量的连续谱建立起来的（这里我们不考虑信号段两端个别的陡截尾效应）。

**问：**频率分析是如何进行的？

**答：**第一步是计算信号段的余弦“变换”和正弦“变换”。这个过程描述可以看图 8-b 22 周/秒的余弦波。原点取在 0.5 秒信号“时窗”的中心。沿着信号每 2 毫秒把对应的信号波和余弦波的振幅采样值相乘，求得乘积之和，并将这个值“规格化”为某一任意值（本例中是 40），在图 8-c 中画成  $P$  点。这一过程对自 2 至 100 周/秒的所有频率，都以 2 周/秒为间隔重复进行（本例中较高的频率分量都可忽略不计）。得到的余弦变换表示在图 8-c 中，如用正弦波也照这个过程做，可以取得正弦变换，如图 8-d 所示。图 8-e 是正弦变换和余弦变换平方和的平方

根图形(规格化为任一最大值 40)。这个图称为 富氏 振幅谱, 描述了滤波后的原始信号中各种频率 分 量 的 分 布。虽然我们只按 2 周/秒间隔计算了它的值, 实际上振幅谱是频率的连续函数。用 4 中描述过的方法, 可以平滑内插出连续振幅谱的值。用这个处理过程并没有增加什么新的信息, 因为原始信号限定为 0.5 秒长, 所以频谱分析的分辨率限于 2 周/秒左右。

问: 相位谱是怎样得出来的?

答: 任一频率的相位角的正切值, 等于此点的正弦变换值与余弦变换值之比。对应的相位角画在图 8- $f$  上。



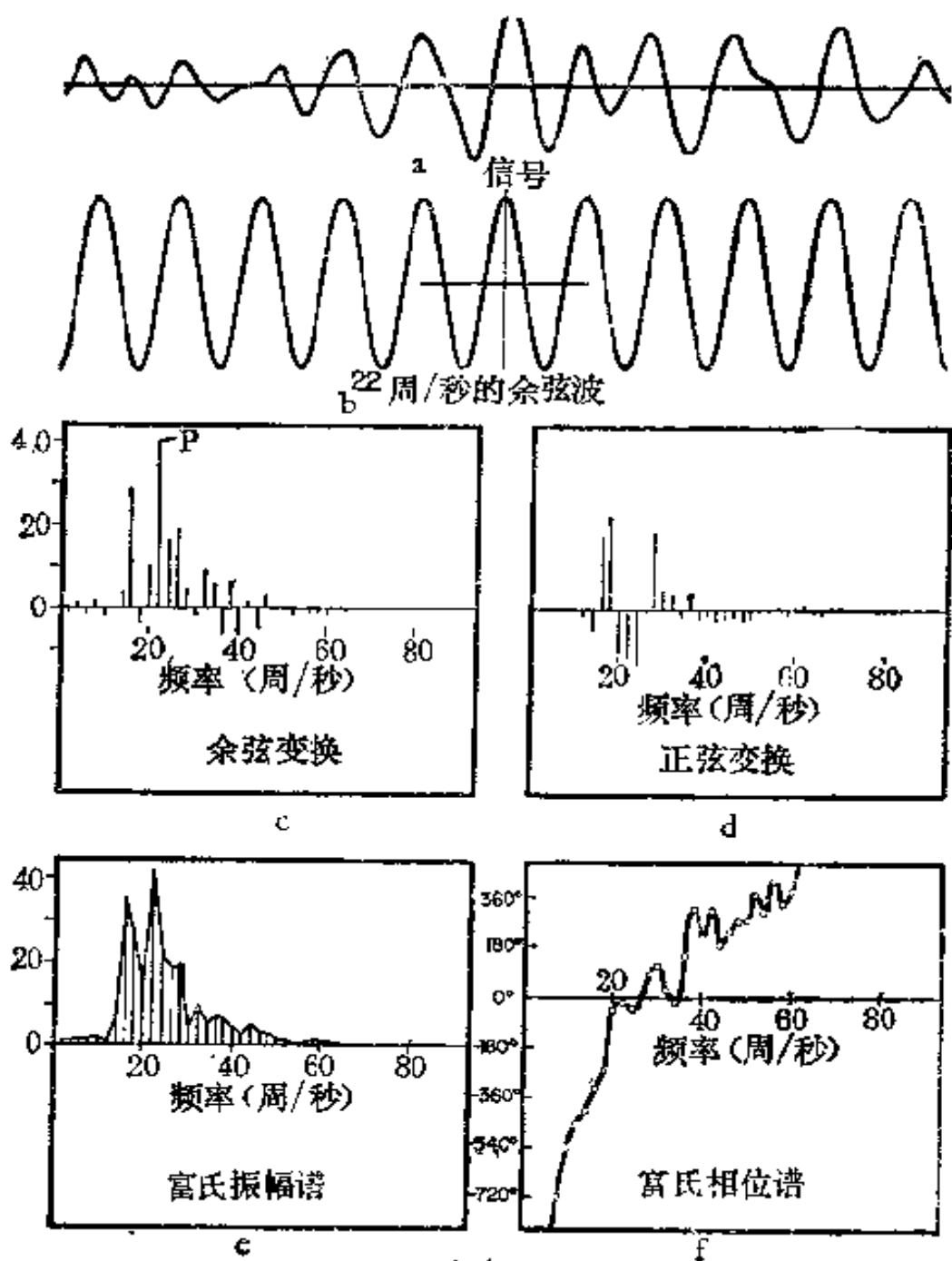


图8 富氏频率分析

## 8. 富氏变换

问：你已提到了富氏振幅谱和富氏相位谱，什么是富氏变换呢？

答：两种谱结合起来是表示富氏变换的一种方式。还有其他方式。这个例子的原信号(图 9-a)可看做是一个二维“向量”。这个向量有两个分量，即时间座标和振幅座标。向量的端点描绘出了信号的波形，如我们在二维平面上所看到的图那样。这个信号向量的富氏变换是三维向量。这个向量的三个分量是一个频率座标和两个互相垂直的座标，其长度分别与特定频率的余弦变换值和正弦变换值成比例。这个向量的端点描绘出了三维空间的盘旋曲线。本例所举有限频率范围内的透视图，见图 9-c。它的象一个小尾巴卷曲的低频部分，在图中已被简化为一个圆锥面。

问：负频率的情况怎么样？

答：在富氏积分的数学运算中，频率积分的范围从负无限延伸到正无限。因此，图 9 上富氏变换的完整图形，还应包括原点左边沿负频率轴的反方向盘旋曲线。图中表示的曲线，是向通常所谓的反时针方向盘旋的。如果把反方向部分的曲线也画出来，它将向相反方向盘旋，也就是通常所谓的顺时针方向。这是由于余弦变换分量对原点对称的，而正弦变换是反对称的。

问：三维曲线能用另外的方式表示吗？

答：图 9-b 表示富氏变换的一个极坐标图。相应于沿频率轴方向看图 9-c 得到的侧视图。这条空间曲线被压成一个

二维图。频率座标注在曲线上，径向分量以对数比例尺而不是线性比例尺重画了。

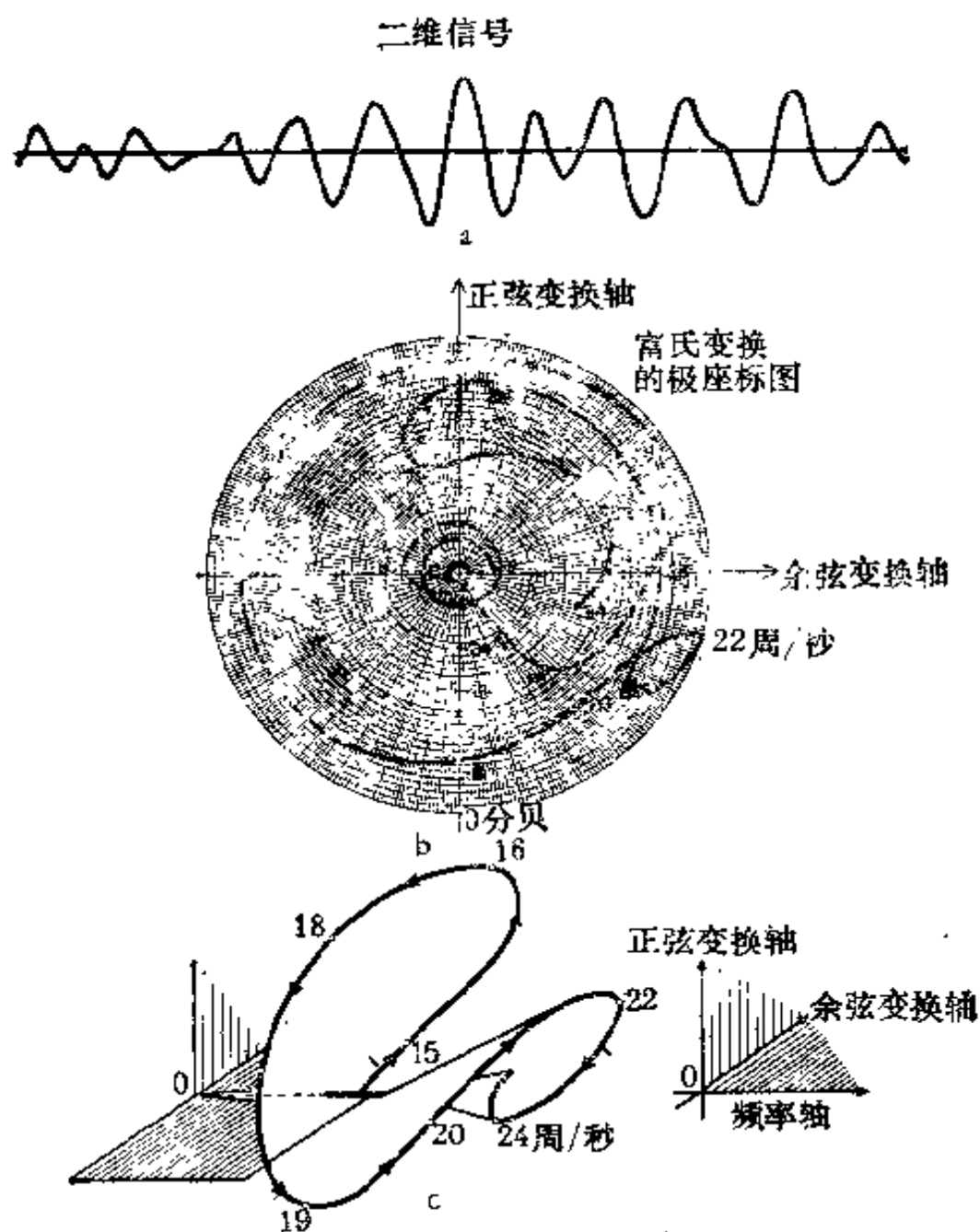


图9 富氏变换的三维图

## 9. 余弦变换对

问：刚才举的例子中三维富氏变换显得太复杂了。有没有关系不那么复杂的情况？

答：确实有这样的情况。特别是在原始信号对称于零轴（即为“偶”函数）的情况下，正弦变换总是零。因此，信号的富氏变换可以完全在一个平面内用余弦变换表示；所有频率的相角都是零。以图 10 中的方波  $E$  为例，其余弦变换（在此例中也就是富氏变换）由一条曲线  $F$  表示。曲线  $F$  是大家熟悉的“sinc”函数，其形式为  $\sin x/x$ （完整的函数由负无限延伸到正无限，此处只画出了有限的一段）。

问：你已在“ $A$ ”域里画了曲线  $E$ ，相应地在“ $B$ ”域里画了曲线  $F$ ，是不是  $A$  就代表时间， $B$  就代表频率？

答：是的，要是这样选择的话。然而， $A$  同样也能表示频率， $B$  也能表示时间。在其他应用中， $A$  可表示几何距离， $B$  可表示“空间频率”（即波数）。主要的一点是：如果  $E$  的余弦变换是  $F$ ，那么  $F$  的余弦变换就是  $E$ 。 $E$  和  $F$  称为余弦变换对。

问：换句话说，如果做两次余弦变换，就能返回到原始函数了吧？

答：是啊！第一次是  $E$  变换成  $F$ ，然后  $F$  变换成  $E$ 。但是，应该指出，只有在余弦波是从负无限延伸到正无限的情形下，这一点才是严格正确的。在这两个域中，信号长度的截尾效应我们将在后面讨论。

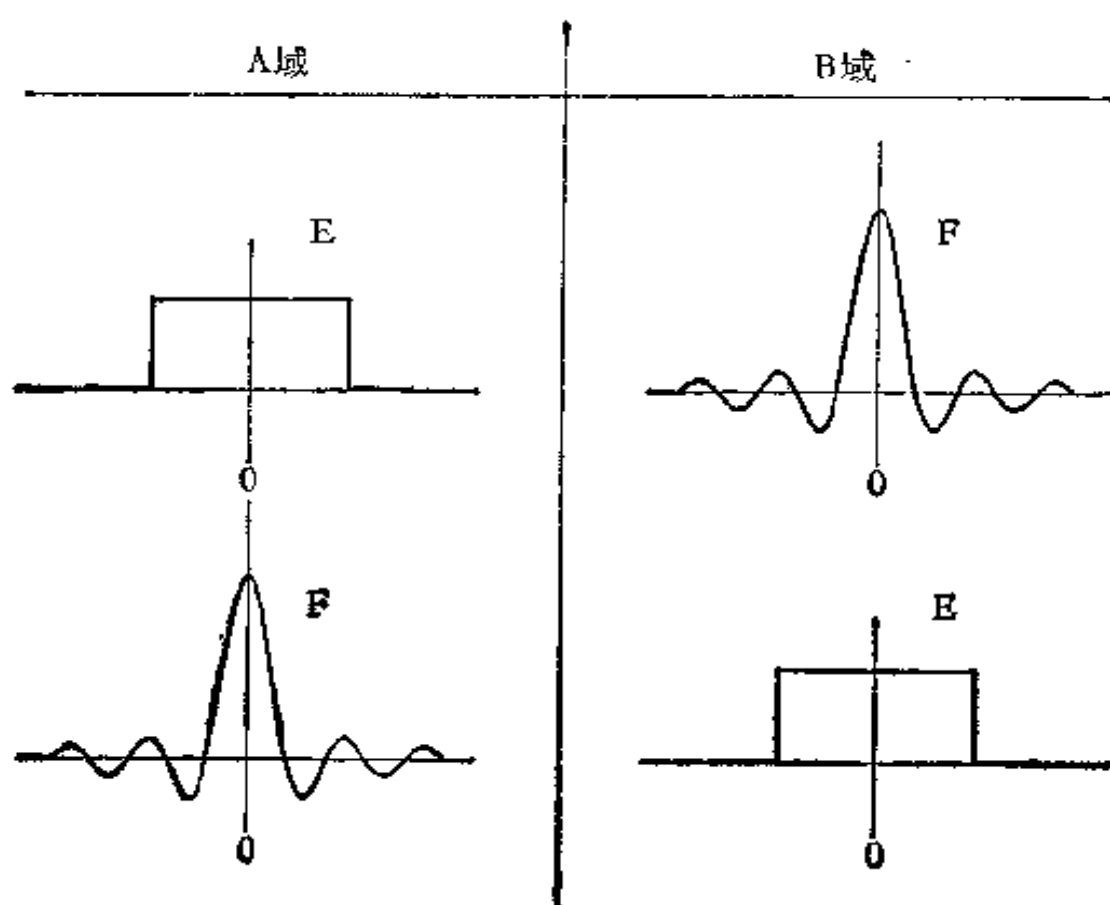
问：若原始函数  $E$  不是对称于坐标原点，而是“反对称”

于坐标原点，情况又怎样呢？

答：在反对称函数（通称为“奇”函数）情形下，余弦变换总是零。所以富氏变换完全可由正弦变换（也是“奇”函数）来表示，不过要引入一个  $90^\circ$  的相角。若用同样方式连续进行两次正弦变换，就要引入  $180^\circ$  总相角。只要记住这一点，也可以在反对称信号情况下讲正弦变换对。

问：更复杂信号情况下的富氏变换对怎么样？

答：用同样的考虑方法，但是“成对”关系就变得更复杂了。



若A域是时间，则B域是频率  
若A域是频率，则B域是时间

图10 余弦变换对

## 10. 简单函数的富氏变换

**问：**你能不能通过地震数据处理中可能用到的某些简单函数的富氏变换，来进一步说明富氏变换对之间的关系？

**答：**由正弦（余弦）波、尖峰波、方波、阶跃函数、三角形波等结合起来，我们能“建造”出许多信号和它们的谱。我们选择了其中几个以说明其变换特点。为简单起见，我们把大部分函数对称于零轴，这样在叙述中就不涉及相位函数。

在图 11 上表示的尖峰函数(a)的变换，是一个由正无限延伸到负无限的恒幅波。若尖峰是一个时间信号（例如电脉冲），其谱称为“白”谱（即在所有频率上，不论是正频率还是负频率，都有相同的值）。方波(b)的变换称为“sinc”函数，具有  $\sin x/x$  的形式。方波宽度“ $d$ ”越大，其变换的中心峰值的宽度就越小。如“ $d$ ”趋近于零，则 sinc 函数变成无限宽，变换接近于尖峰函数(a)的变换。若我们有一系列宽度为“ $D$ ”的方波，彼此相隔距离为“ $d$ ”。在正负两个方向都延伸到无限，则其变换包含一系列均匀分布的尖峰，它们由一个 sinc 函数来调幅，sinc 函数的形状与方波宽度“ $D$ ”有关。这个宽度越小，调幅函数就变得越宽。这种情形如图中(d)行所示。

在(e)中表示的余弦函数，其变换是由对称于零的两个尖峰波组成，两尖峰波的间隔与原始波的周期成反比。假如我们从时间域中的余弦函数出发，则其频谱由两个频率上的尖峰所组成，各频率值与波的周期成反比，一个频率为正值，一个为负值。

时间域内的正弦波 ( $f$ )，其富氏变换也由两个尖峰波组成，但在正频率上尖峰是正值，在负频率上尖峰是负值。另外，变换位于与纸面成  $90^\circ$  的平面内。这个例子说明的是一个正弦变换对，不象所有其他例子中说明的是余弦变换对。

三角形波 ( $g$ ) 的富氏变换是方波变换的平方，这里所说的方波宽度为三角形底边宽度的一半。

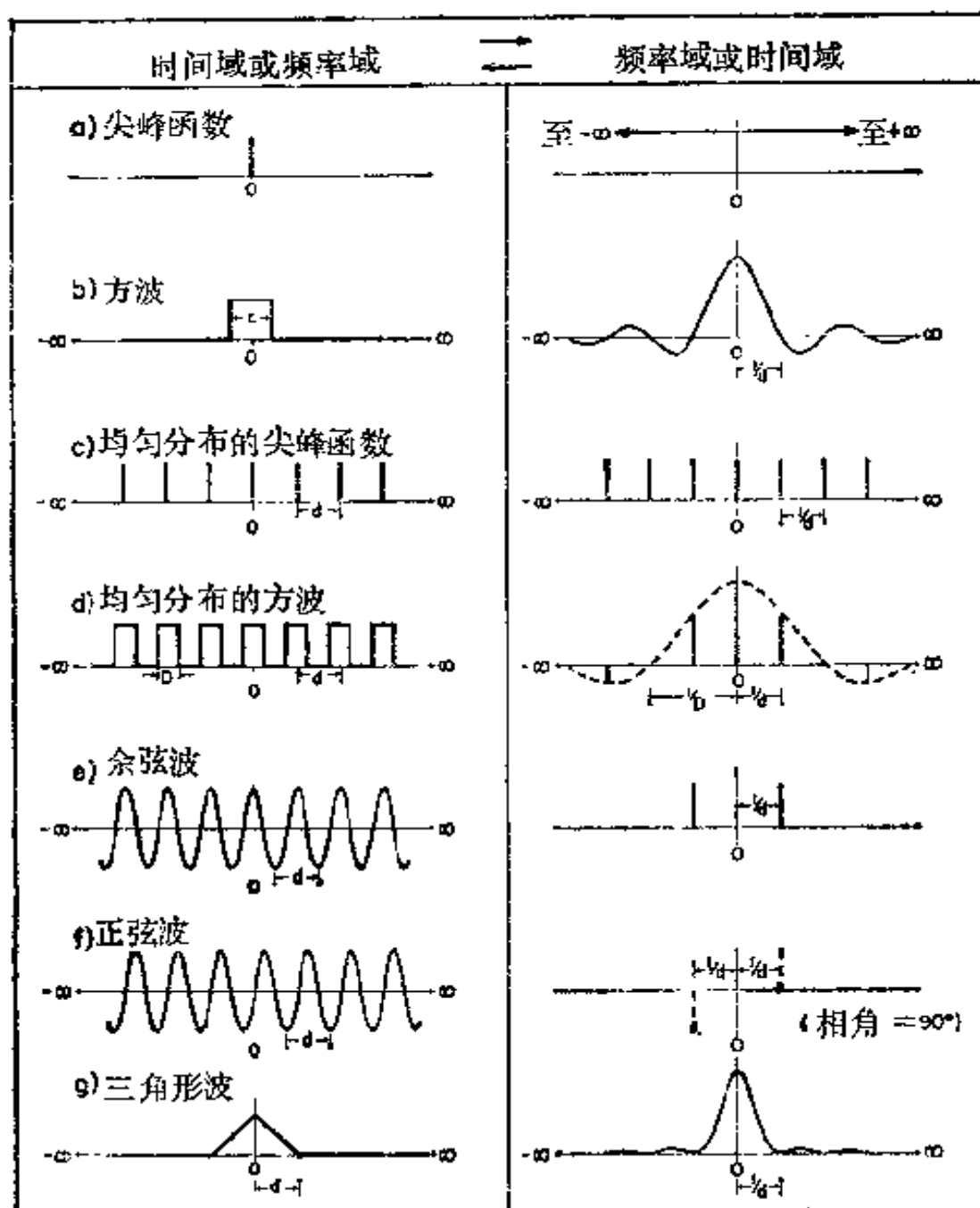


图11 典型信号的富氏变换对



## 11. 截尾函数的富氏变换

问：我推测，到目前为止，我们都假定余弦变换对的例子有无限的长度，即在时间范围或频率范围内都从负无限延伸到正无限。如果我们想讨论不是无限长的函数，那会怎么样呢？

答：作为例子，在图 12-a 中画了五个等间隔的尖峰波。首先我们讨论一个无限长的等间隔尖峰波序列，其富氏变换也是一个无限长的、有相应间隔的周期性尖峰波序列。然后，我们用一个“时窗函数”来截取原始函数。在此例中，我们选择的时窗是宽度为五个尖峰波间隔的方波，在此时窗内处处为一，在此时窗外处处为零。“时窗函数”的富氏变换为  $\text{sinc}$  函数，表示在图 12-b 中。截尾的结果就是五个尖峰波，示于图 12-a 的第三行。

问：那我们怎样求得它的富氏变换呢？

答：这个过程在图 12-b 中说明。时窗函数的变换（ $\text{sinc}$  函数）与尖峰波序列相“褶积”。这个用符号  $*$  表示的褶积过程将在本书后面说明。这里只说以下这一点就够了：所得的结果是由负无限延伸到正无限的周期性脉冲序列，如图 12-b 中下面一行所示。这就是五个尖峰波的变换。因为尖峰波是对称分布的，所以相位谱为零。

问：若用方波来代替尖峰波，情况又怎样呢？

答：其结果示于图 12-c、d 中。

问：给定频率的截尾余弦波的变换或者谱是什么样？

答：见图 12-e、f，其谱由一对  $\text{sinc}$  函数脉冲组成，它们的中心位于相适应的正频率和负频率位置上。我们会看

到，截尾的结果是在主频率值两侧形成“边带”。后面会指出，通过选择一个“衰减”的时窗函数来代替陡边的方波时窗函数，就能大大地缩小这些边带。

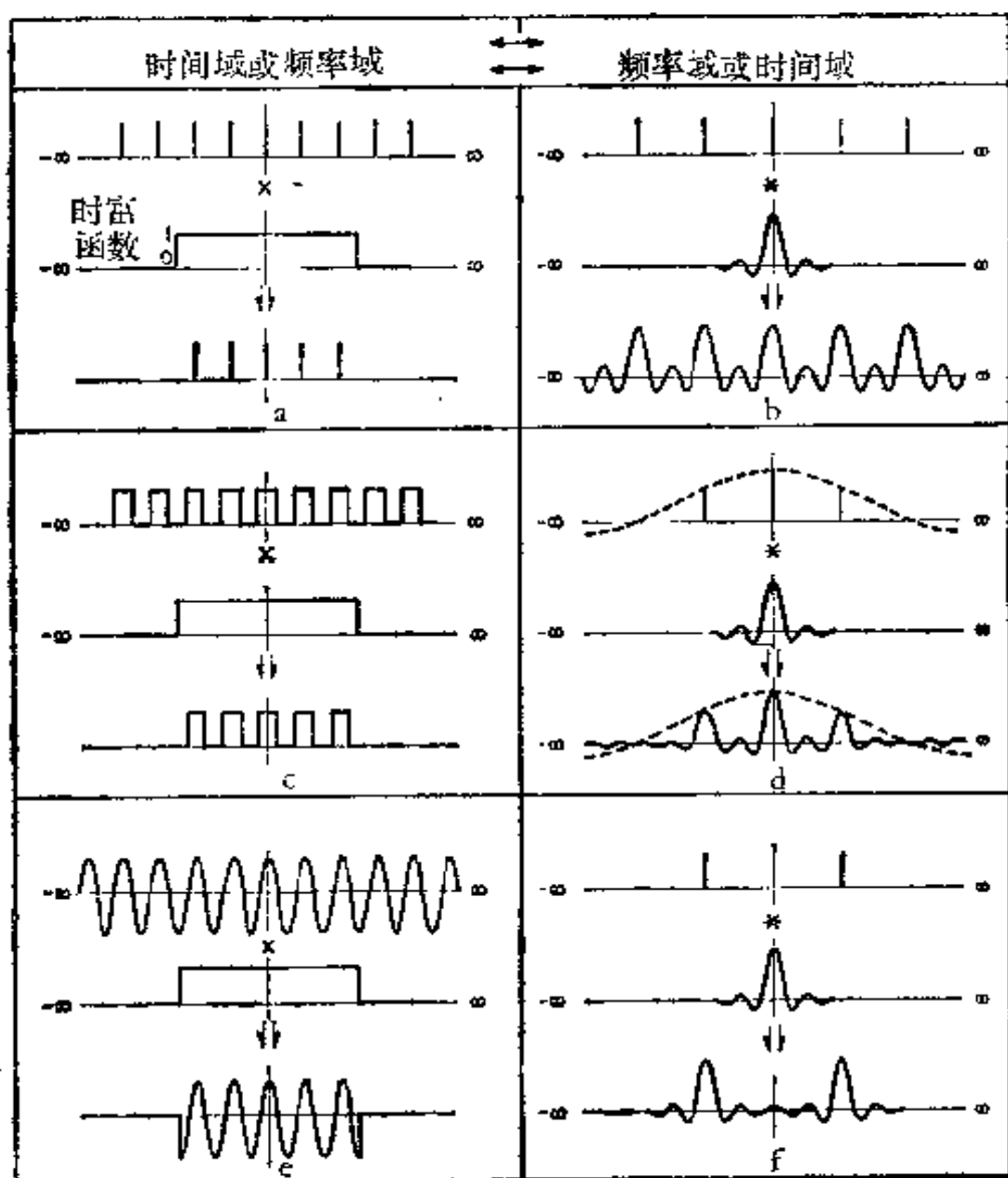


图12 截尾函数的富氏变换

## 12. 时移信号的富氏变换

问：在上面所举的大多数变换对例子中，原始信号是对称的，只需要余弦变换。若信号不对称于零点，又怎样来表示富氏变换呢？

答：如前所述，我们可以在下面几种中选择：

1. 分别绘制的余弦变换和正弦变换相组合。
2. 分别绘制的振幅谱和相位谱相组合。
3. 一个连续的三维曲线，其座标为频率（或时间）、以及给定频率的余弦变换值和正弦变换值。
4. 一个二维曲线，它代表上述三维曲线沿频率轴方向的投影图。若用线性径向比例尺，此图形称为轨迹图。若改用对数径向比例尺，此图形称为极坐标图。

问：能给我们看几个简单函数的例子吗？

答：当然可以！作为例子，我们来考虑一个时间域内的尖峰信号（见图 13-a），它是由零时间位置向右移动了的。其在频率域内的振幅谱  $A(\omega)$  和相位谱  $\phi(\omega)$  示于图 13-b 中 ( $\omega = 2\pi f$ )。所有频率的振幅谱值都是常量。相位谱是一条通过座标原点的斜率为常量的直线。随着正频率增大，相位滞后也线性增大。在负频率上，相位是“超前”的。其轨迹图见图 13-c。此曲线由一旋转向量的端点所构成，此向量的长度等于每个频率的振幅谱值，此向量与纵轴的夹角等于相应的相角。由于所有频率的振幅谱值是常量，因而轨迹图是一个圆。

问：时移方波的振幅谱和相位谱的形状怎样？

答：其振幅谱是  $\text{sinc}$  函数，它与同一方波中心位于零时间轴

情形下的余弦变换相同。其相位谱是一条通过坐标原点的直线，相角随频率线性增加。如果原始时间函数是自原点向右移的（图 13-*d*），则相位滞后随着正频率增大而线性增大（图 13-*e*）；如果原始函数是自原点向左移动的（图 13-*g*），则相位滞后变成相位超前（图 13-*h*）。其相应的轨迹图示于图 13-*j*、*i*。

问：时移“阶跃波”（图 13-*j*）的情况怎样？

答：其结果绘于图 13-*k*中。若振幅谱在所有频率上都绘成正值，则相角在零频率上由  $+90^\circ$  突变至  $-90^\circ$ 。在准确的零频率那点上，相角为零，振幅谱有一个大尖峰。其轨迹图用放大的比例尺示于图 13-*l*。

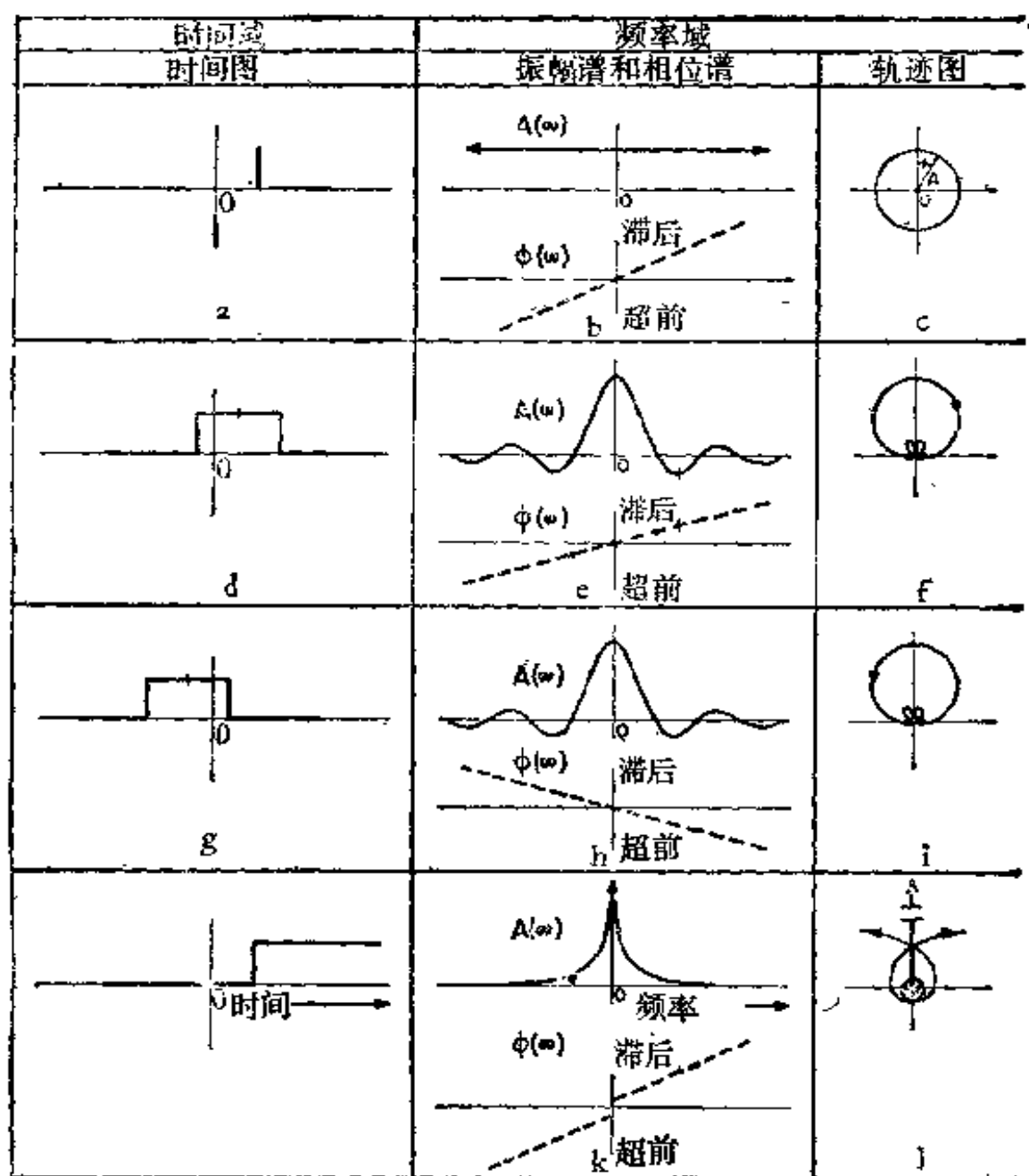


图13 时移函数

## 13. 时间域滤波

问：“时间域滤波”的含义是什么？

答：滤波器的响应特性既可以用时间来描述，也可以用频率来描述。前一种情况在图 14-a 中说明。假定在滤波器的输入端引入一个延续时间非常短的脉冲。此输入既可以用一个窄脉冲信号来表示，也可以用一个尖峰波来表示。尖峰波上方的数字表示脉冲的相对大小或强度。在实际滤波器中，此数字为(延续时间非常短的)输入脉冲波形下面面积的大小。若“滤波器”方框表示数字计算机中完成的滤波运算，则各个尖峰波上方的数字表示在离散时间系列中信号的连续振幅值。若输入信号为一个尖峰波单位，则输出信号就叫做滤波器的“脉冲响应”或“记忆函数”。在数字计算机中利用这种时间函数的滤波运算，叫做“时间域滤波”。

问：你能用一个具体的例子来说明吗？

答：为了用一个数字例子来说明这个问题，让我们谈一下“记忆函数”为(4,2,1)的一个数字滤波运算。就是说，一个单位(即等于 1)的输入脉冲送到滤波器的方框内，就产生一个等时间间隔(例如说 4 毫秒)的三个尖峰波输出信号(4,2,1)。(我们含蓄地给滤波器方框以某个量的“增益”)然后，再假定输入到滤波器方框的信号也是 4 毫秒间隔的六个尖峰波(1, 1, 1, 2, 2, 2) (见图 14-b)。这样，滤波器的输出信号可以认为是每个输入尖峰波的响应的总和或迭加，这些响应分别有适当的“权”和时延。图 14-b 的数字计算表明，输出信号是时间系列(4,6,7,

11,13,14,6,2)。

**问：**我猜想，在迭加计算中所包含的乘法和加法序列，也可以用其他的计算方案来实现。

**答：**在图 14-c 中表示了另一种计算方法。输入信号为排在一水平线上的时间序列(0,0,1,1,1,2,2,2,0,0)。紧接着下面，“记忆函数”排成反向时间序列(1,2,4)。对应项乘积之和(用值 4 标明)绘在同一水平线的右端。然后“记忆函数”向右移动一个时间位置，其新乘积之和( $b$ )也右移一个位置。位移过程一直到“记忆函数”完全穿过输入信号为止。输入信号与时间反转脉冲响应(或滤波器的“记忆函数”)的“互相关”这一整个过程叫做褶积，这个过程相当于输入信号的“移动加权平均”过程。其结果就是在时间域内进行的滤波运算。这里举的是单道信号的例子，其概念也可以推广到多道(二维)信号。





## 14. 频率域滤波

问：用刚才举的例子，怎样在频率域中而不是在时间域中进行同样的滤波运算呢？

答：这个过程在图 15 中说明。第一步是计算输入信号  $(1, 1, 1, 2, 2, 2)$  的富氏振幅谱和富氏相位谱。这两条曲线  $A_1(\omega)$  和  $\phi_1(\omega)$  画在图 15 的右上部。图中只画了大约自  $-250$  至  $+250$  周/秒的频率范围。实际上振幅谱在由负无限到正无限的频率范围内每 250 周/秒重复一次，每 125 周/秒“折迭”一次。

问：这为什么？

答：输入信号尖峰的延续时间无限短，在频率域中表示就要求无限的频率范围；输入信号的离散性产生周期性的谱。现在回到滤波运算上来，第二步是计算滤波器“记忆函数”的富氏振幅谱和相位谱  $A_2(\omega)$  和  $\phi_2(\omega)$ ，画在图 15 的右中部。

问：现在我们能频率域内完成等效于褶积的步骤了吧？

答：不错。需要的步骤为：

1.  $A_1(\omega)$  乘  $A_2(\omega)$ ，得出  $A_3(\omega)$

2.  $\phi_1(\omega)$  加  $\phi_2(\omega)$ ，得出  $\phi_3(\omega)$

$A_3(\omega)$  和  $\phi_3(\omega)$  代表滤波器输出信号的富氏振幅谱和相位谱，画在图 15 的右下部。最后一步就是计算  $A_3(\omega)$  和  $\phi_3(\omega)$  的逆富氏变换，得出时间系列  $(4, 6, 7, 11, 13, 14, 6, 2)$ 。

问：整个运算比时间域中的褶积似乎要复杂些。

答：对，特别是就数字计算来说。然而，这个例子给褶积定

理提供了一个说明，褶积定理通常说，时间域中的褶积等效于频率域中的乘法；相反，频率域中的褶积等效于时间域中的乘法或调幅。

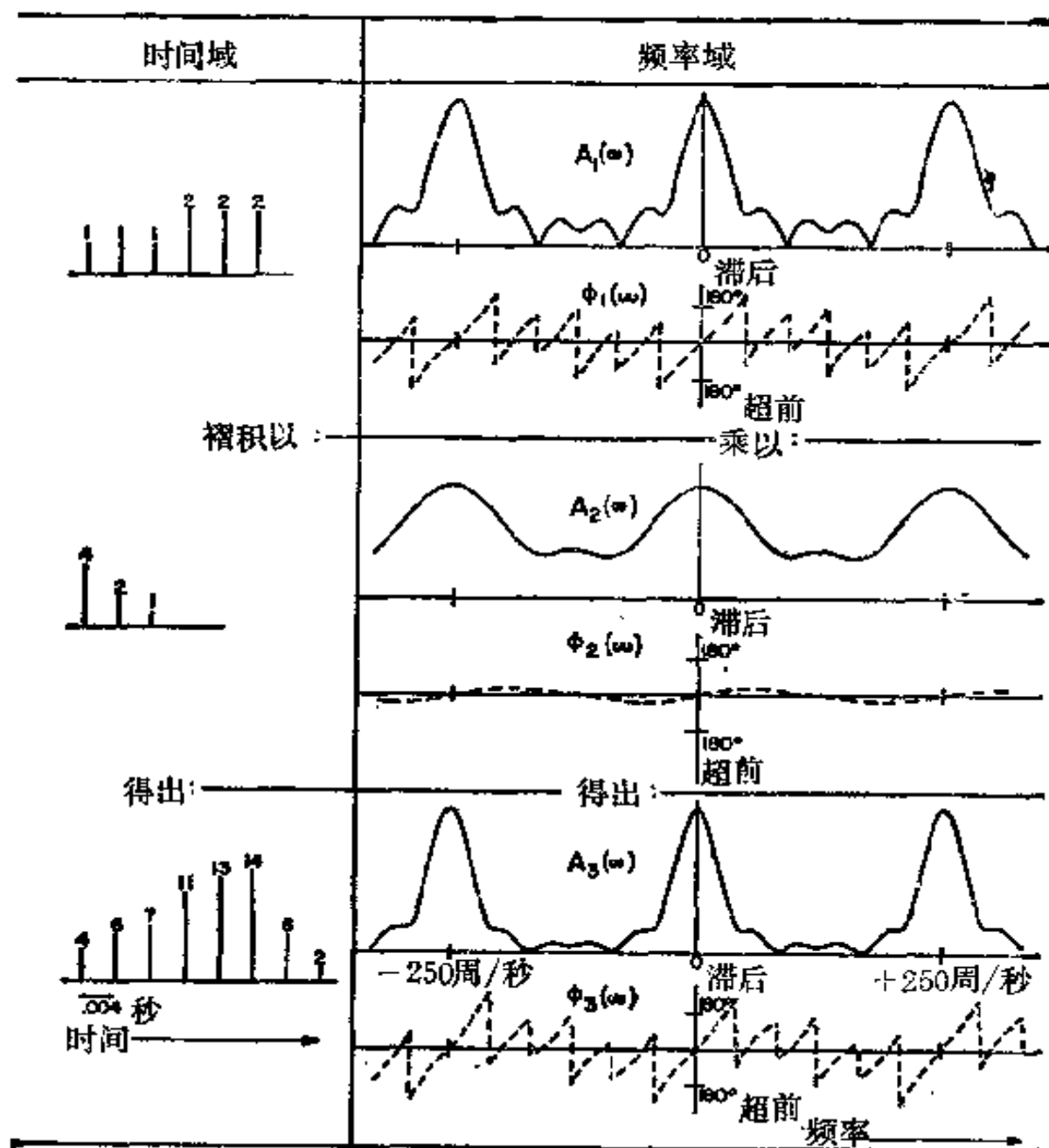


图15 时间域滤波和频率域滤波

## 15. 逆富氏变换

问：在富氏变换中所用的术语“逆”的含义是什么？

答：按照惯例，正富氏变换通常指自时间域变换到频率域，而逆富氏变换通常指自频率域变换到时间域。前面讨论中指出过，如果正弦变换以同样方式连续应用两次，就要引入  $180^\circ$  (等于  $90^\circ$  加  $90^\circ$ ) 的相移。为了补偿这一点，在逆富氏变换中，正弦变换成分的代数符号要反过来。还要用振幅因子  $1/2\pi$  来补偿使用符号  $\omega = 2\pi f$  的影响。

问：在 14 中你指出过，表示尖峰信号要求无限的频率范围。这个问题你是如何处理的？

答：显然，我们在数字计算机中不能处理无限数目的计算。实际上，我们把要分析的函数截尾到可以处理的长度。以 14 中的例子为例，我们已将最下一行的图重新画在图 16 的上部，将频率域画在左边，时间域画在右边。如前面所指出的那样，假如我们从负无限到正无限进行变换积分(或相关)，我们就得到时间函数 (4, 6, 7, 11, 13, 14, 6, 2)。但如果我们不这样做，而是用一个左中图所示的斜坡时窗函数  $A_4(\omega)$  在负和正 250 周/秒处截尾频谱。其结果，截尾(并调幅)后的振幅谱由曲线  $A_5(\omega)$  示于左下部。相位谱  $\phi_3(\omega)$  不变，但是在从负到正 250 周/秒范围以外的值，现在已没有意义了。

问：截尾的结果在时间域里是怎样表达的？

答：特殊的时窗函数  $A_4(\omega)$  的富氏变换是一个脉冲，表示在右中部。这个脉冲基本上限制在  $\pm 0.004$  秒的时间界限内。在这个界限外面有“边带”振荡，但其振幅小于中心

振幅的 0.7%。在用这个比例尺的线性图中，它们小到看不见，通常可以忽略。右上图的时间函数与这个脉冲褶积的结果是画在右下图中的曲线。这一曲线代表  $A_s(\omega)$ ,  $\phi_s(\omega)$  频谱对的逆富氏变换。此情况下谱的宽度已不足以保存尖峰的特性。

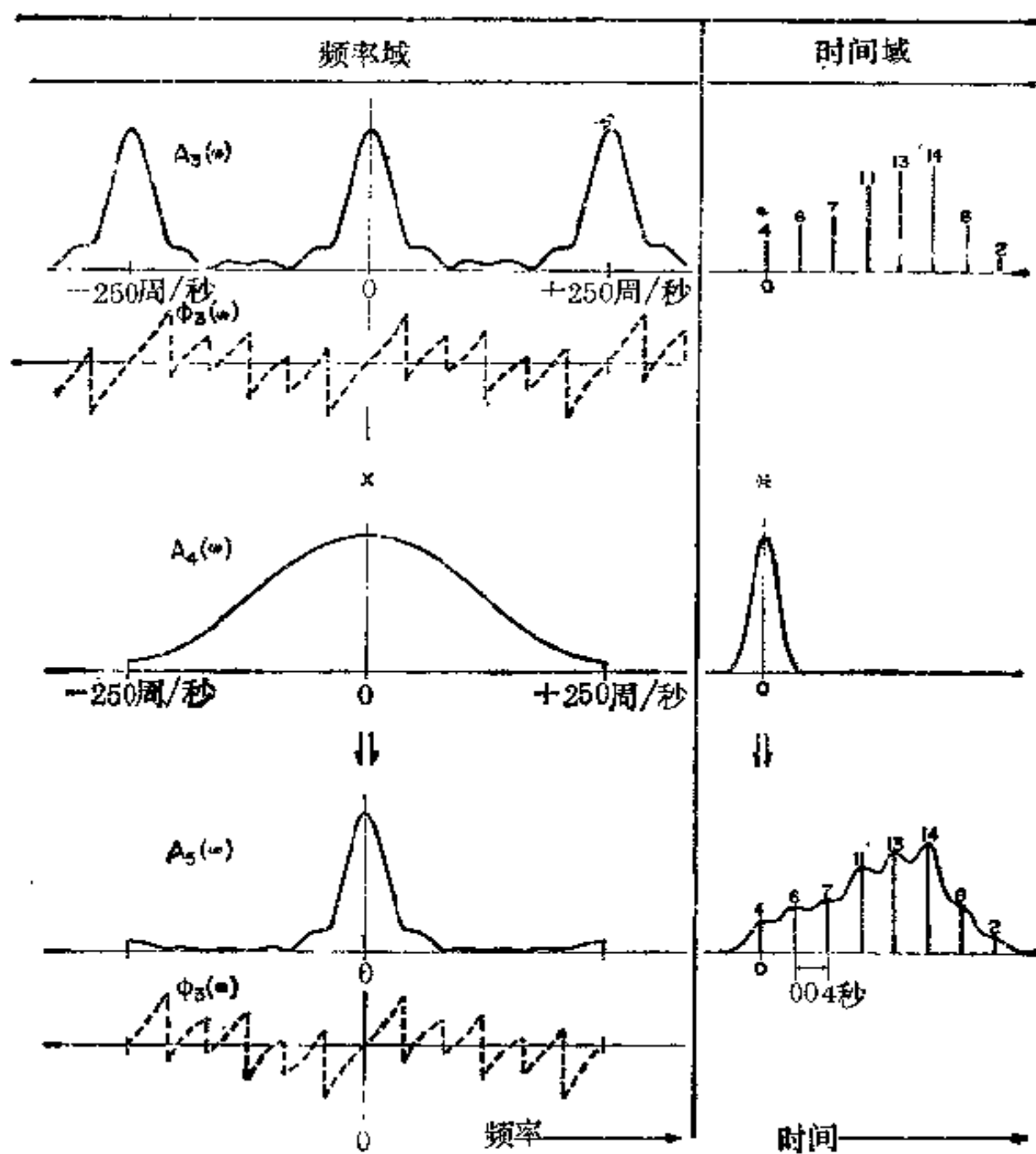


图16 逆富氏变换

## 16. 数字低通滤波算子的设计

问：如何着手设计数字滤波算子？

答：对于低通、高通、带通和带阻滤波器的设计过程是比较简单的，特别是在规定了“零相位”特性的情况下，首先我们来考虑低通滤波器的设计。假设我们希望让 40 周/秒以下的频率通过，而不让 40 周/秒以上的频率通过。第一步，我们在频率域中画出以 40 周/秒截止的理想滤波器特性，如图 17 的中上图所示。在时间域内，其变换就是大家熟悉的无限延续的“sinc”函数，如图 17 的左上图所示。第二步，我们在时间域中截尾这个函数。我们不是将这个 sinc 函数急骤地截尾，而是用一个“时窗函数”，这个时窗函数不仅按我们的要求来截尾时间函数，并且还向时窗边缘逐渐衰减。这个特定的时窗函数画在 sinc 函数的下方，称为“海明窗”。它由稍为抬高了一些的一个余弦波周期组成。为了叙述方便，我们任意选择了一个 0.25 秒的时间延续度。其富氏变换的线性图形和对数图形示于右边两列。

问：下一步是什么？

答：我们在时间域中相乘，并在频率域中相褶积（用前面描述过的褶积定理）。所得结果画在图 17 的第三行中。左边是希望的滤波因子，它是一个延续 0.25 秒的衰减了的 sinc 函数。中间和右边是所得到的滤波器特性的线性图形和对数图形。可以看到，用 0.25 秒的算子可在频率 40 周/秒以上处得到非常尖锐的截止斜率。截止的陡度（在对数图中度量）正比于滤波算子的时间延续度，也

正比于(注：原文误为反比于)截止频率。一个 0.50 秒长的算子产生两倍陡度的截止斜率。而仅有 20 周/秒截止频率的 0.25 秒延续度的相似滤波算子，只有上面例子中截止斜率的一半陡度。

**问：**滤波算子怎样使用？

**答：**滤波算子先在时间域内采样，比如说用 0.002 秒间隔，然后，采样后的算子在计算机里与要滤波的信号褶积。

**问：**相位移动和时间延迟怎么样？

**答：**没有。由于滤波算子是对称的，其正弦变换是零，因而滤波器的相位特性处处为零。因此，用这种滤波器不会引入时间延迟。前提是：在滤波运算中将滤波算子的中点作为时间参考点。

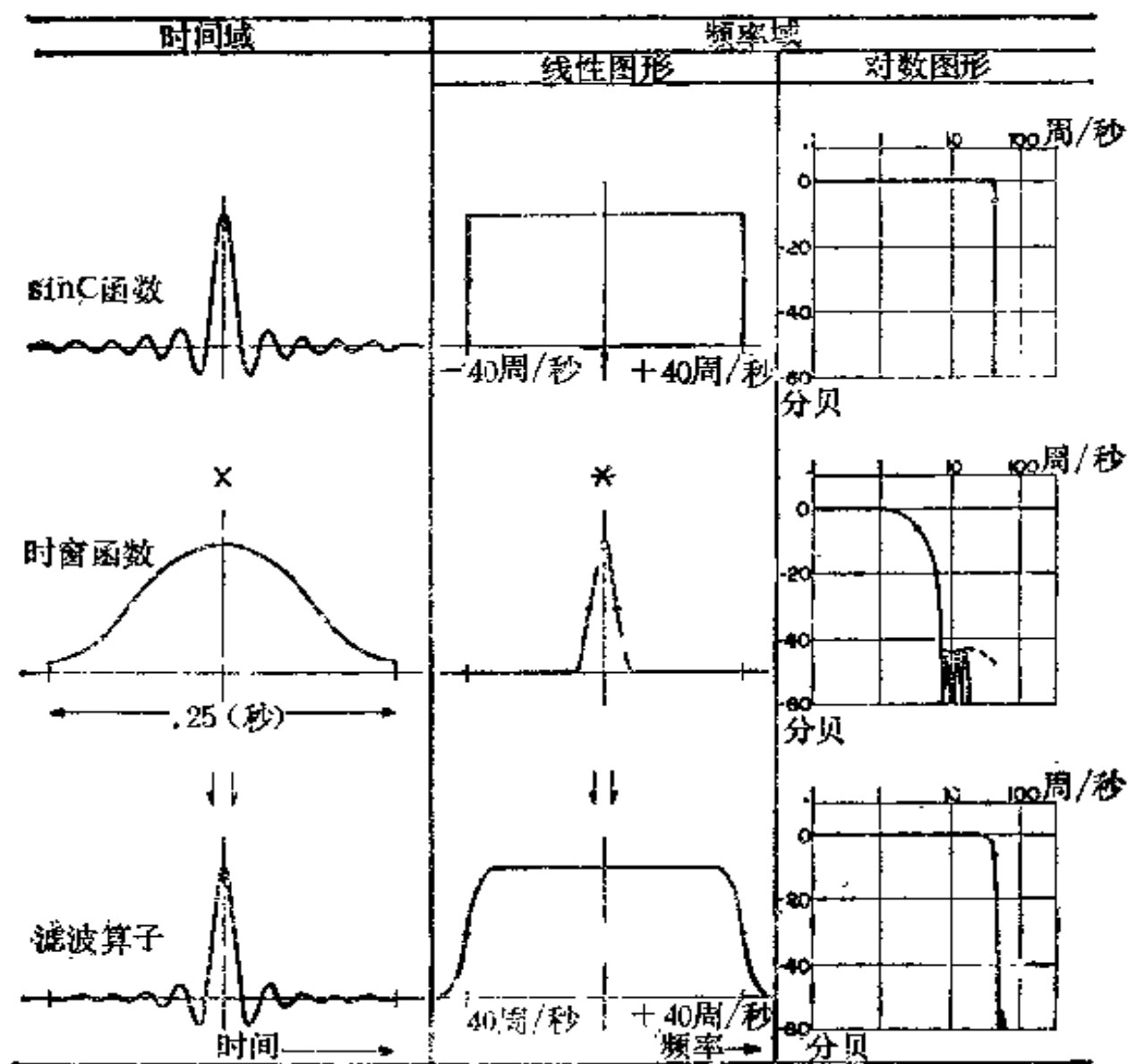


图17 数字低通滤波算子的设计.



## 17. 数字高通和带通滤波算子的设计

问：设计高通滤波器也用相似的步骤吗？

答：是的。假定我们希望让 20 周/秒以上的频率通过，而让低于 20 周/秒的频率急剧衰减。第一步是设计一个 20 周/秒截止频率的低通滤波算子，如图 18 最上边一行所示。为得到陡的截止斜率，选了一个 0.50 秒长的滤波算子。第二步设计一个全通滤波算子。它为零时间上的一个尖峰波。然后自全通滤波算子减去低通滤波算子。其结果即为所希望的高通滤波器，表示在图 18 的第三行。滤波算子中心峰值的振幅，必须剪裁得和时间域中的采样间隔相匹配。

问：怎样设计带通滤波器呢？

答：假设我们希望让 20 到 40 周/秒之间的频率通过，而使这个通带以外的频率急剧衰减。首先我们从 16 描述过的 0.25 秒长的低通滤波算子出发。然后，自这个算子减去图 19 顶部所示的 0.50 秒长的 20 周/秒低通滤波算子。结果就是 20~40 周/秒的带通滤波器，如图 18 的底部所示。

问：我注意到在对数图形上，高频边界和低频边界的截止斜率是相同的。这总是对的吗？

答：不。在这个例子中，我们选择的低通滤波算子长度与低通滤波器截止频率成反比，这样才得到这个结果。选择不同的算子长度，就造成不同的截止斜率。

问：有必要用象 0.50 秒那样长的滤波算子吗？

答：要是希望滤波器截止斜率象举例中那么陡的话，在这种

情形下回答是肯定的。如果用较短的算子，就会得到较缓的滤波器截止斜率。

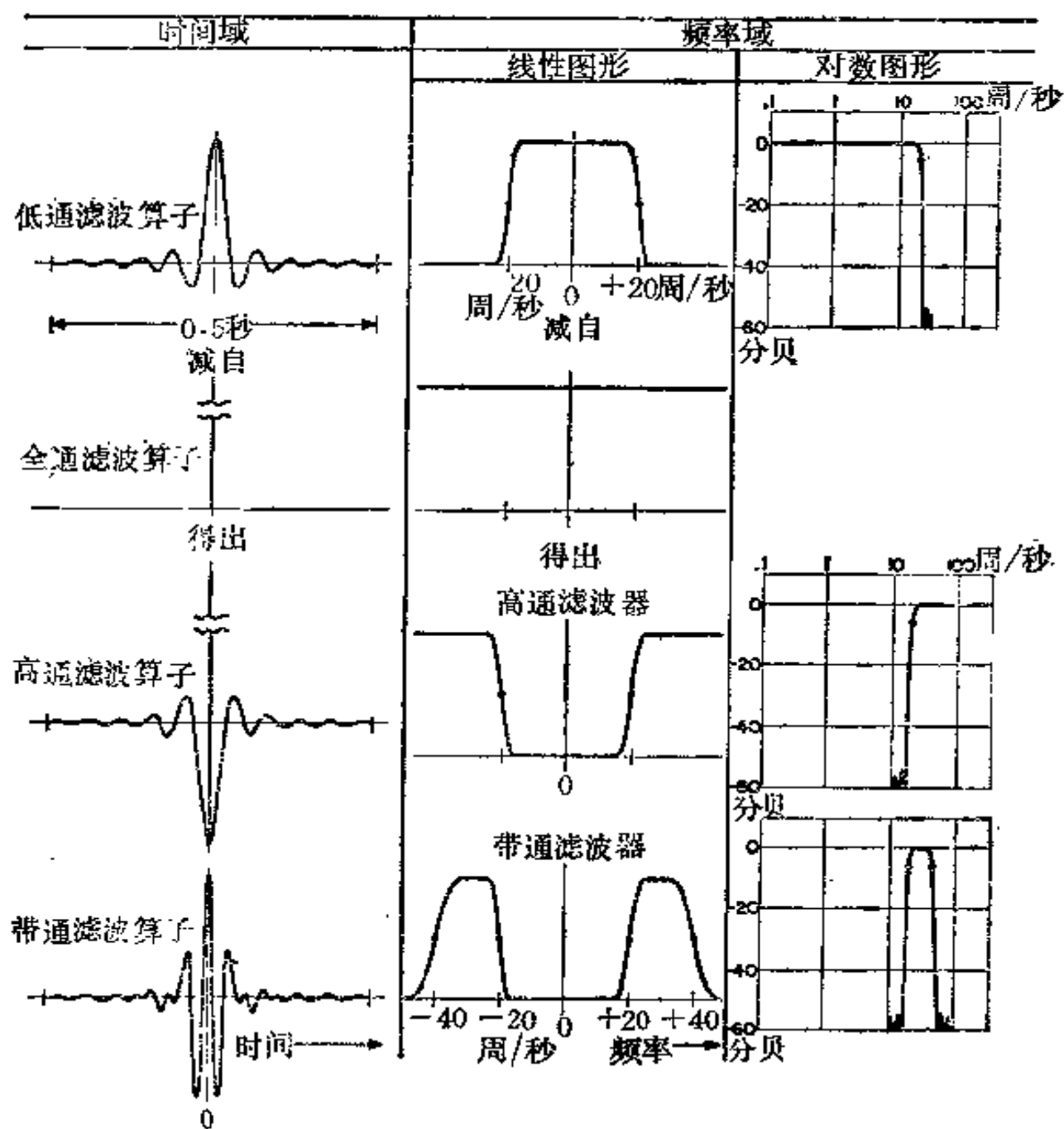


图18 数字高通和带通滤波算子的设计

## 18. 数字带阻滤波算子的设计

问：你能说明一下数字带阻滤波算子的设计吗？

答：假定我们希望设计一个 60 周/秒频率的带阻滤波器。让我们从一个无限延续的余弦波出发，如图 19 中时间域列的上部所示。这个波的谱由正、负 60 周/秒上的两个尖峰代表，如图 19 频率域栏中线性图形顶部所示。接着，我们用一个延续度 0.10 秒的“海明”窗来截尾这个余弦波。结果为波衰减和截尾了的余弦波，如图 19 第三行所示。这就是从频率 60 周/秒为中心的带通滤波器的滤波算子。对这个特定的例子来说，在半幅点处的频带宽度是 18 周/秒。接着，由图 19 第四行所示的全通滤波器减去这个滤波器，所得结果就是希望的滤波算子，如图 19 底行所示。同前面一样，算子的中心尖峰必须剪裁得与时间域中的采样间隔相匹配。

问：怎样能将带阻滤波器做得窄些？

答：办法是选择较长的算子。例如，若第二行中所示的“海明”窗有 0.50 秒长，得出的滤波器阻带宽度在半幅点上只有 3.6 周/秒，而在刚才所举的例子中是 18 周/秒。

问：换句话说，要得到窄的滤波器阻带，或者陡的高通和低频滤波器截止斜率，就得取长的滤波算子啰？

答：这是事实。是由于时间域和频率域的倒数性质决定的。时间域中的长间隔相应于频率域中的短间隔，反之亦然。

问：在所有已描述过的滤波器例子中，在时间域中采样的效应是什么？

答：其结果是频率域中的周期性重复。在0.002秒采样的情况下，在频率域中的完整图形将在乃古氏频率的倍数（即250，500，750，1000周/秒等）处显示折迭。

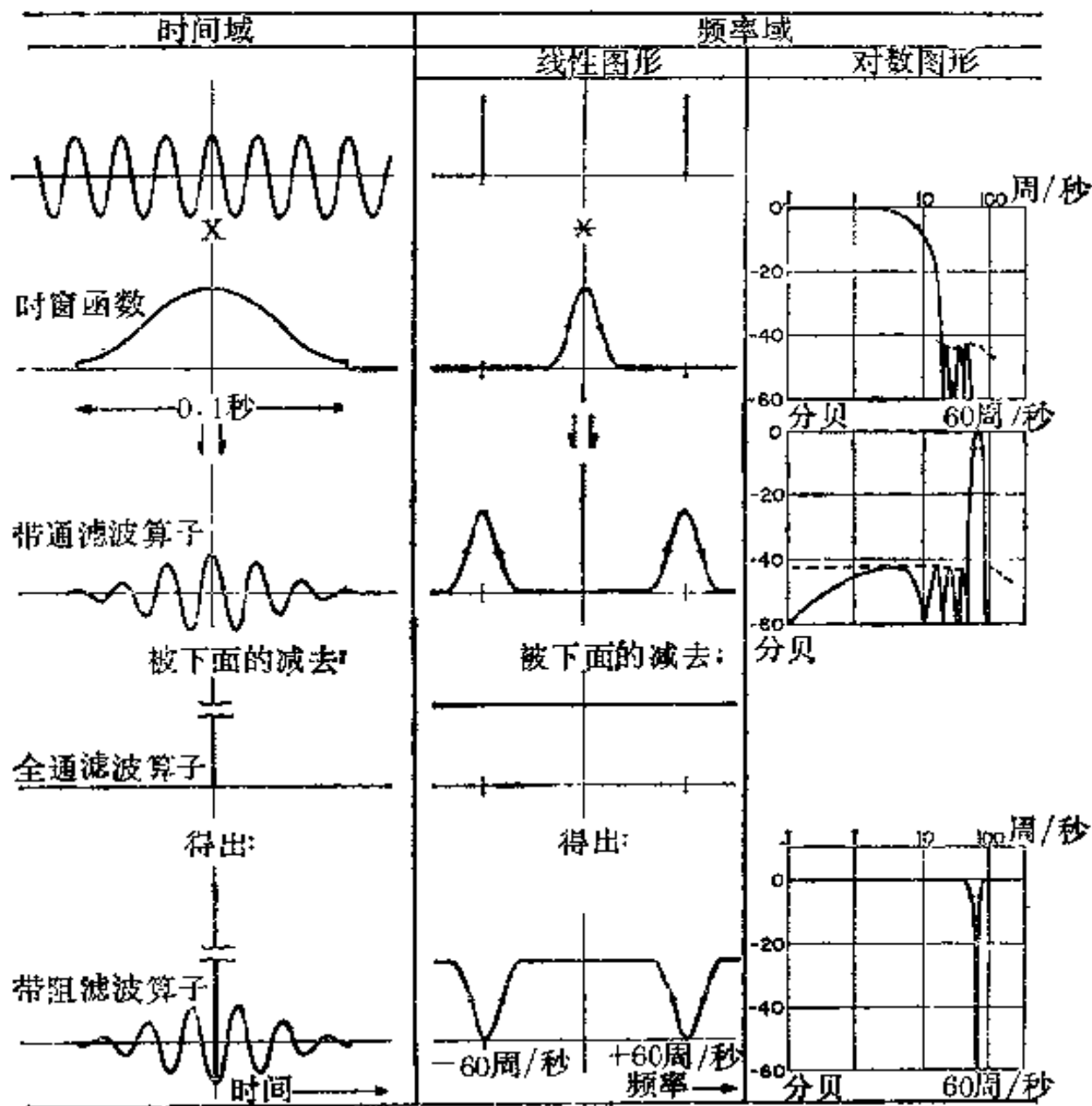


图 19 数字带阻滤波算子的设计

## 19. 自相关分析

**问：**除了富氏分析之外，能用其他方法来研究地震信号的频率成分吗？

**答：**图 20 上表示了自相关方法。顶部的曲线表示图 8 和图 9 上地震信号的自相关函数。这条曲线是从计算地震信号和具有不同时移量（时间滞后）的该信号复制品间的相关程度中得到的。上面一对信号说明零时间滞后的情况。计算相关程度就是将每隔两毫秒采样的对应振幅值相乘然后求和。其结果绘在自相关曲线的  $O$  点上。为说明方便，第二对信号画了时间滞后  $OA$ ，复制品极性反转了。其相关程度绘在自相关曲线的  $A$  点上。对 0.000 和 0.250 秒间所有的时间滞后每隔 0.002 秒进行一次相似的计算。图中也包括时间滞后  $OB$  和  $OC$ 。

**问：**自相关曲线对称于零滞后点吗？

**答：**是的。0.5 秒信号的整个自相关函数的长度为 1.0 秒。然而，通常只利用完整曲线的一半就足够了。

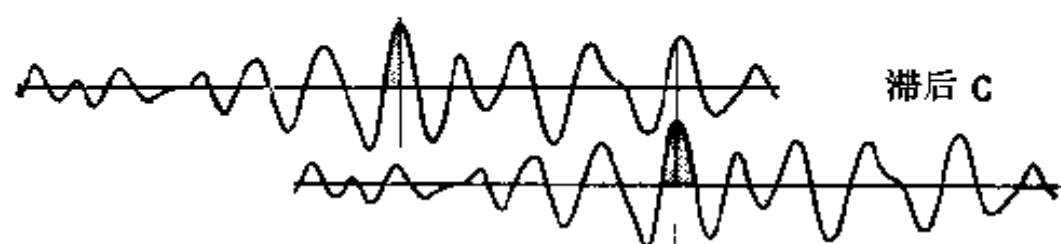
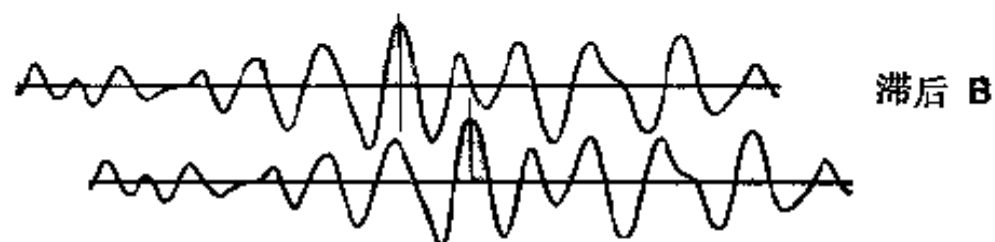
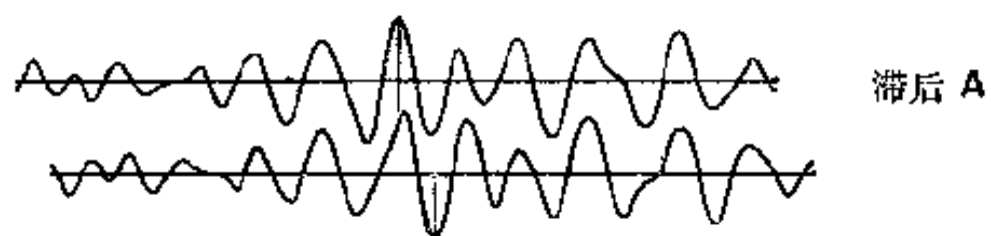
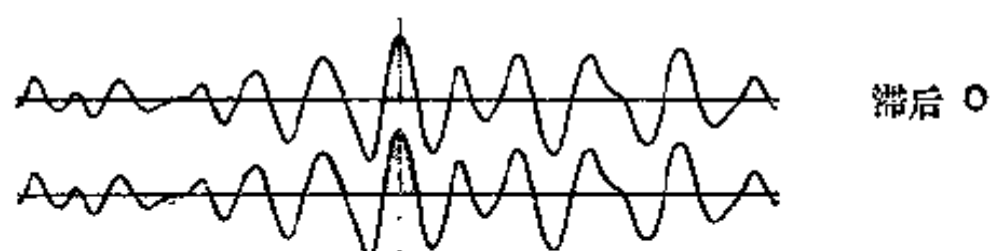
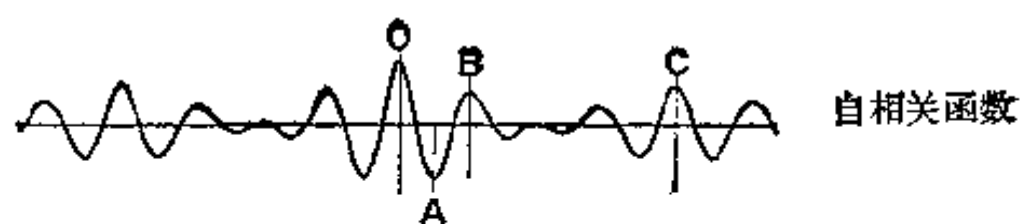


图20 相关对时间滞后的关系

## 20. 功率谱

问：从自相关函数求得的频率信息是怎样的？

答：通过计算自相关曲线的富氏变换，就得到“原始谱的功率密度估量”。因为这个曲线是对称的，只需计算余弦变换，如7中所描述的那样。本例所得的结果绘在图21的左上角A方格中。

问：用这种方法求得的谱与信号的功率密度谱近似吗？

答：非常近似。在7中我们求得了信号的富氏振幅谱。振幅谱值的平方图形绘在图21的右上角B格中。这个曲线与信号的功率密度谱有非常好的近似性（这里有一个不可捉摸的困难：虽然原始信号经过滤波，滤去了250周/秒以上的所有频率成分，但由于截成至0.5秒长的截尾作用，又引入了一些250周/秒以上的频率成分。因此，在采样过程中，产生了某些假频误差。一个频率成分严格地限制在-250和+250周/秒之间的信号，在概念上有无限的长度）。谱A和谱B之间的差别对低频成分最为显著。A中的正负振荡是由于原始信号的截尾效应造成的。

问：能用某种方法使振荡减到最小吗？

答：在计算富氏变换之前，先用一个 $1/2(1 + \cos Kr)$ 形式的“包络线”使自相关函数“衰减”，这样得到的结果示于C格，是一个平滑的曲线C。然而，衰减和平滑也造成了分辨率的损失，如图中所示，尤其是在18和20周/秒附近。这个现象反映了自相关函数经过衰减包络处理后其“有效”长度缩短。举一个类似的例子，对原始信号一

个短段 (0.2 秒长) 做富氏变换, 得出的功率谱示于  $D$  格。同样可看出分辨率的损失。

**问:** 如何能避免这些困难?

**答:** 如果条件许可, 答案就是用较长的原始信号段。例如, 要是可以利用 2.5 秒的原始信号段, 完整的自相关曲线就有 5 秒长。如果经过衰减后, 这个函数的中心部分有 1.0 秒或更大的长度, 功率密度谱估算会好得多。假如在某些频率上得到负的功率谱, 最好是在应用中人为地加上一个“基值”, 使谱处处为正。



自相关函数



22周/秒余弦波

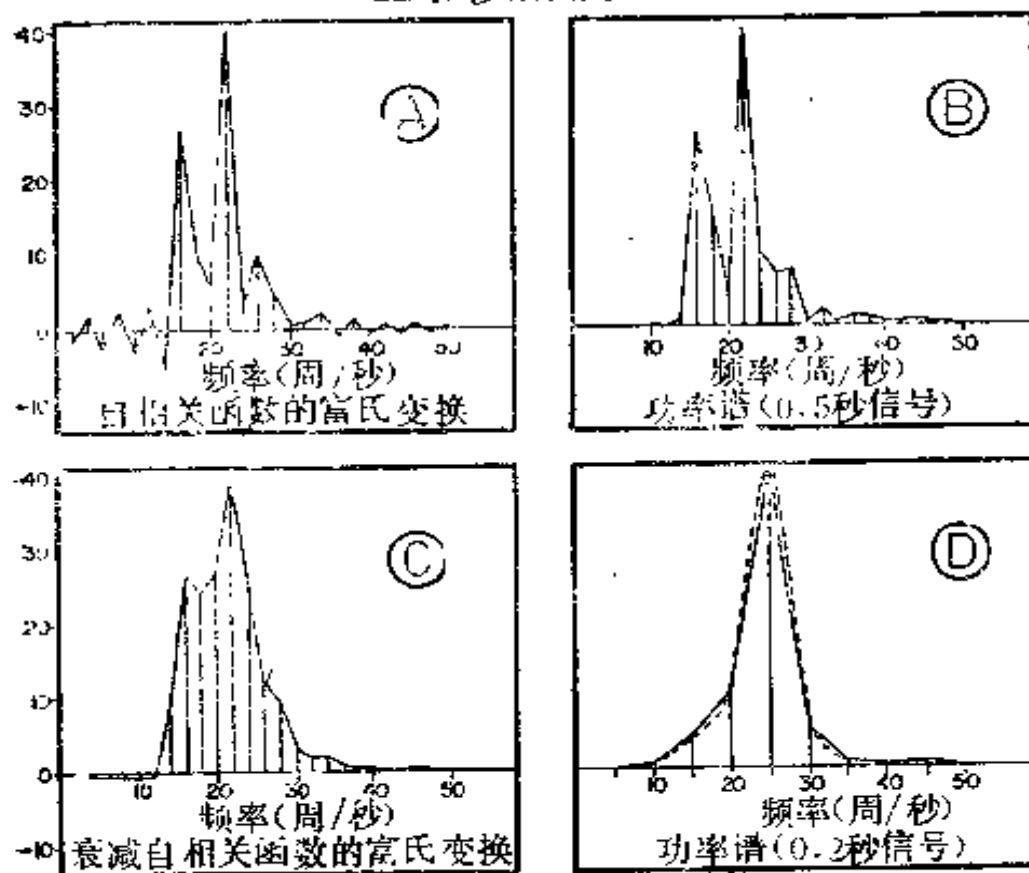


图 21 功率谱

## 21. 振幅谱和相位谱之间的关系

问：我推想，在用自相关方法计算功率谱的过程中，损失了关于相位的全部信息。这种推想对么？

答：对的。的确可以有許多不同的函数，具有許多不同的相位谱，但它们的自相关函数却是相同的。在这个意义上说，相位情况确实是不清楚的。然而，让我们来看一种特殊情形。我们从一个对称时间函数出发，假定我们有理由规定它是一个“最小相位”函数的自相关函数。此刻，让我们接受“最小相位”这一术语而不作进一步的定义。这种情形下，我们可以恢复相位谱，并确定出唯一的原始信号的形状。

问：你能用一个特定例子来说明么？

答：假定已给我们一个时间函数  $(2, 5, 2)$ ，并规定它是唯一的最小相位函数的自相关。问题可以说是——“求这个函数”。第一步，我们计算  $(2, 5, 2)$  的余弦变换。假定这些尖峰的间隔是 0.004 秒，我们得到图 22 的右上图所示的功率谱  $P(\omega)$ 。这个谱以 250 周/秒的间隔周期性重复，其频率范围从负无限延伸到正无限。第二步，我们确定了这个谱永不为负，即总大于零（在实际应用中，为适应这一要求，可能需要对功率谱任意加上一个小的正“基数”）。下一步，我们来计算  $1/2 \ln P(\omega)$  曲线，如频率域栏第二行所示。

问：你上面讲的我都明白了，下一步是什么呢？

答：下一步是将  $1/2 \ln P(\omega)$  与画在图 22 右中部的频率函数

$-1/\pi\omega$  褶积。其结果就是紧接着画在下面的  $\phi(\omega)$  曲线。这就是所希望的最小相位函数的相位谱。振幅谱通过取功率谱  $P(\omega)$  的平方根来计算。其结果是画成曲线的  $\sqrt{P(\omega)}$ 。再下一步是计算  $\phi(\omega)$  和  $\sqrt{P(\omega)}$  的逆富氏变换，得到时间函数  $(2,1)$ 。这就是我们需要的函数。为核对起见，我们要注意它的自相关函数就是  $(2,5,2,)$ 。

问：具有自相关函数  $(2,5,2)$  的还有其他函数吗？

答：有的。在这种情况下还有另一个离散时间函数，即  $(1,2)$ ，也具有同样的自相关函数  $(2,5,2)$ 。这里称它为最大相位函数。

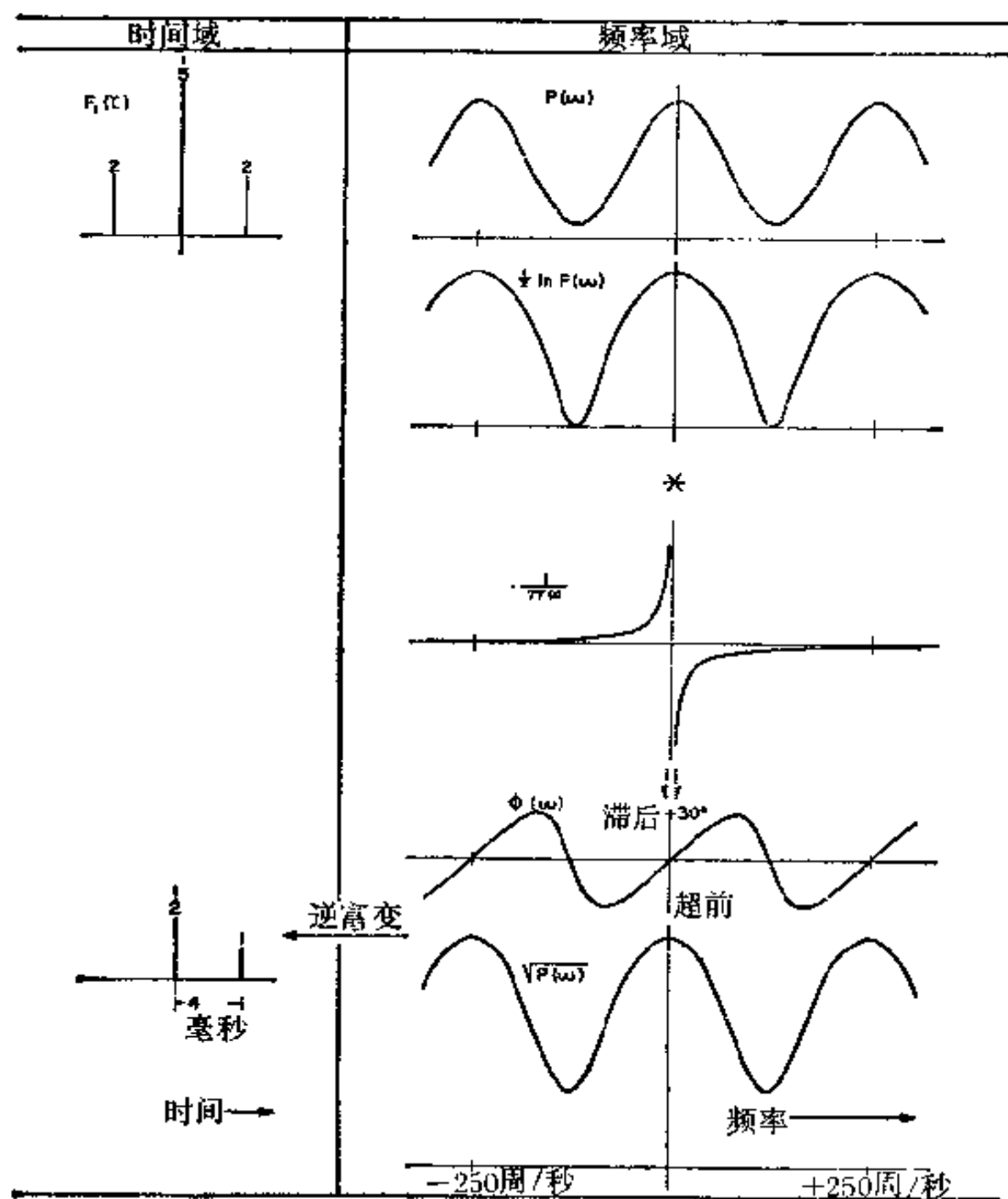


图22振幅谱和相位谱的关系

## 22. 最小相位函数和最大相位函数

问：关于最小相位和最大相位这个题目，你能再稍微多说些吗？

答：好。充分讨论要牵涉很多，但可以用刚才举的例子来说明。首先取时间函数  $(1, 2)$ 。其正弦变换和余弦变换绘在图 23 的富氏变换栏内。由这些数据我们能很容易地画出相应的轨迹图。示于次一栏内。它就是标有  $ABCDEA$  的圆。由于随着频率增加， $P$  点就扫过圆周，因而它定义了旋转向量  $OP$ 。向量的长度定义了函数  $(1, 2)$  的振幅谱（此处未画出），它是频率的函数。向量与铅垂线的夹角  $AOP$  定义了函数  $(1, 2)$  的相位谱  $\phi(\omega)$ 。这个相位谱示于右部标题为相位图的栏内。相位滞后总的趋势是随频率增加而增加，但有些“摆动”，这是由于原点位置不在圆心的缘故。轨迹图和相位图上对应的点用字母  $A, B, C$  等标出。

问：函数  $(2, 1)$  的表现怎样？

答：其轨迹图和相位图绘在图 23 的下部。在这里，轨迹图是一个圆，但半径为前例的一半。由于这个圆全部位在原点上方，所以向量  $OP$  并不连续地“旋转”，象上面的情形那样相角一直增加，而代之以相角在极限角  $AOB$  和  $AOE$  之间振荡。因而相位图在  $+30^\circ$  和  $-30^\circ$  之间“摆动”，有如右下图所示。显然，术语“最小相位”和“最大相位”是描写了这两个例子中的相位表现。注意一下时间函数  $(2, 2)$  的情形也是很有意义的，其相位图表明一种状态向另一种状态过渡。在这种情况下，轨迹

图的圆与横轴相切。因此当  $P$  点自  $C$  点经过原点到  $D$  点时，其相角既可认为是突然增加  $180^\circ$ ，也可认为是突然减小  $180^\circ$ 。用两种方法绘制的相应的相位谱示于图 23 的右中部。

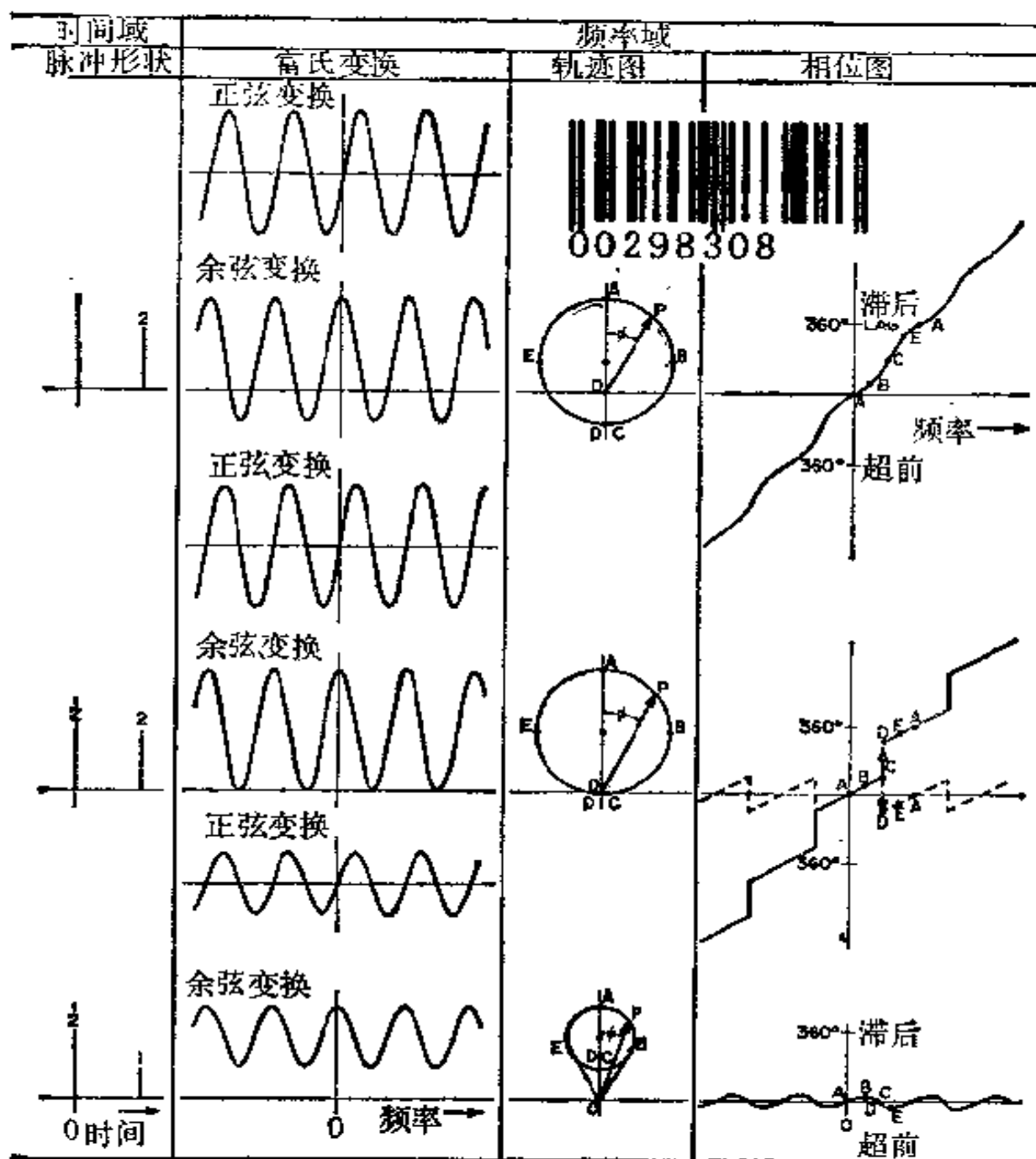


图 23 最小相位函数和最大相位函数

