§18. 运用目标达到法求解多目标规划

用目标达到法求解多目标规划的计算过程，可以通过调用 Matlab 软件系统优化工具箱中的 fgoalattain 函数实现。

在 Matlab 的优化工具箱中，fgoalattain 函数用于解决此类问题。其数学模型形式为：

$$\min \gamma$$

$$F(x)\text{-weight}\cdot\gamma \le goal$$

$$c(x) \le 0$$

$$ceq(x)=0$$

$$A\,x \le b$$

$$Aeq\,x=beq$$

$$lb \le x \le ub$$

其中，x，weight，goal，b，beq，lb 和 ub 为向量；A 和 Aeq 为矩阵；c(x)，ceq(x)和 F(x)为函数。

调用格式：

x=fgoalattain(F,x0,goal,weight)

x=fgoalattain(F,x0,goal,weight,A,b)

x=fgoalattain(F,x0,goal,weight,A,b,Aeq,beq)

x=fgoalattain(F,x0,goal,weight,A,b,Aeq,beq,lb,ub)

x=fgoalattain(F,x0,goal,weight,A,b,Aeq,beq,lb,ub,nonlcon)

x=fgoalattain(F,x0,goal,weight,A,b,Aeq,beq,lb,ub,nonlcon,options)

x=fgoalattain(F,x0,goal,weight,A,b,Aeq,beq,lb,ub,nonlcon,options,P1,P2)

[x,fval]=fgoalattain(…)

[x,fval,attainfactor]=fgoalattain(…)

[x,fval,attainfactor,exitflag,output]=fgoalattain(…)

[x,fval,attainfactor,exitflag,output,lambda]=fgoalattain(…)

说明：F 为目标函数；x0 为初值；goal 为 F 达到的指定目标；weight 为参数指定权重；A、b 为线性不等式约束的矩阵与向量；Aeq、beq 为等式约束的矩阵与向量；lb、ub 为变量 x 的上、下界向量；nonlcon 为定义非线性不等式约束函数 c(x)和等式约束函数 ceq(x)；options 中设置优化参数。

x 返回最优解；fval 返回解 x 处的目标函数值；attainfactor 返回解 x 处的目标达到因子；exitflag 描述计算的退出条件；output 返回包含优化信息的输出参数；lambda 返回包含拉格朗日乘子的参数。

例 1：教材第 6 章第 4 节第二小节，即生产计划问题：

某企业拟生产 A 和 B 两种产品，其生产投资费用分别为 2100 元/t 和 4800 元/t。A、B 两种产品的利润分别为 3600 元/t 和 6500 元/t。A、B 产品每月的最大生产能力分别为 5t 和 8t；市场对这两种产品总量的需求每月不少于 9t。试问该企业应该如何安排生产计划，才能既能满足市场需求，又节约投资，而且使生产利润达到最大最。

该问题是一个线性多目标规划问题。如果计划决策变量用 x_1 和 x_2 表示，它们分别代表 A、B 产品每月的生产量（单位：t）；$f_1(x_1,x_2)$ 表示生产 A、B 两种产品的总投资费用（单位：元）；$f_2(x_1,x_2)$ 表示生产 A、B 两种产品获得的总利润（单位：元）。那么，该多目标规划问题就是：求 x_1 和 x_2，使：

$$\min f_1(x_1,x_2)=2100x_1+4800x_2$$

$$\max f_2(x_1,x_2)=3600x_1+6500x_2$$

而且满足：

$$\begin{cases} x_1 \le 5 \\ x_2 \le 8 \\ x_1+x_2 \ge 9 \\ x_1,x_2 \ge 0 \end{cases}$$

求解程序如下：

① 编辑目标函数 M 文件 ff12.m

```
function f=ff12(x)
f(1)=2100*x(1)+4800*x(2);
f(2)=-3600*x(1)–6500*x(2);
```

② 按给定目标取：

```
goal=[30000,-45000];
weight=[30000,-45000];
```

③ 给出：

```
x0=[2,2];
A=[1 0; 0 1;-1 -1];
b=[5,8,-9];
lb=zeros(2,1);
```

④ 调用 fgoalattain 函数：

```
[x,fval,attainfactor,exitflag]=fgoalattain(@ff12,x0,goal,weight,A,b,[],[],lb,[])
```

运行后，输出结果为：

```
x =
     5     4
fval =
       29700        -44000
attainfactor =
   -0.0100
exitflag =
     1
```

例 2：教材第 6 章第 4 节第三小节，即投资问题：

某企业拟用 1000 万元投资于 A、B 两个项目的技术改造。设 x_1、 x_2 分别表示分配给 A、B 项目的投资（万元）。据估计，投资项目 A、B 的年收益分别为投资的 60%和 70%；但投资风险损失，与总投资和单项投资均有关系：$0.001x_1^2 + 0.002x_2^2 + 0.001x_1x_2$。据市场调查显示， A 项目的投资前景好于 B 项目，因此希望 A 项目的投资额不小 B 项目。试问应该如何在 A、B 两个项目之间分配投资，才能既使年利润最大，又使风险损失为最小？

该问题是一个非线性多目标规划问题，将它用数学语言描述出来，就是：求 x_1、 x_2，使：

$$\max f_1(x_1, x_2) = 0.60x_1 + 0.70x_2$$

$$\min f_2(x_1, x_2) = 0.001x_1^2 + 0.002x_2^2 + 0.001x_1x_2$$

而且满足：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1000 \\ -x_1 + x_2 \le 0 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

求解程序如下：

① 首先编辑目标函数 M 文件 ff13.m

```
function f=ff13(x)
f(1)=-0.6*x(1)-0.7*x(2);
f(2)=0.001*x(1)^2+0.002*x(2)^2+0.001*x(1)*x(2);
```

② 按给定目标取：

```
goal=[-625,875];
weight=[-625,875];
```

③ 给出：

```
x0=[200,200];
A=[-1,1];
b=0;
Aeq=[1,1];
beq=1000;
lb=zeros(2,1);
```

④ 调用 fgoalattain 函数：

```
[x,fval,attainfactor,exitflag]=fgoalattain(@ff13,x0,goal,weight,A,b,Aeq,beq,lb,[])
```

运行后，输出结果为：

```
x =
  750.0000   250.0000

fval =
 -625.0000   875.0000

attainfactor =
 -5.4254e-016

exitflag =
     1
```