6. 多目标规划

- 多目标规划建模——引例
- 多目标规划模型
- 多目标规划的示意图
- 多目标规划的性质
- 多目标规划重要算法
- 用MATLAB解无约束规划

引例1： 投资问题

某公司在一段时间内有a(亿元)的资金可用于建厂投资。若可供选择的项目记为1，2，…，m。而且一旦对第i个项目投资，就用去a_i亿元；而这段时间内可得收益c_i亿元。问如何如确定最佳的投资方案？

$$x_i=\begin{cases}1 & \text{对第}i\text{个项目投资}\\ 0 & \text{不对第}i\text{个项目投资}\end{cases}$$

约束条件为：$\begin{cases}\sum_{i=1}^{m}a_i x_i\le a\\ x_i(1-x_i)=0, i=1,2,\cdots,m\end{cases}$ 双目标规划

最佳的投资方案——投资最少、收益最大

投资最少：$\min f_1(x_1,x_2,\cdots,x_m)=\sum_{i=1}^{m}a_i x_i$

收益最大 $\max f_2(x_1,x_2,\cdots,x_m)=\sum_{i=1}^{m}c_i x_i$

引例2： 生产问题

某工厂生产两种产品，产品A每单位利润为10元，而产品B每单位利润为8元，产品A每单位需3小时装配时间而B为2小时，每周总装配有效时间为120小时。工厂允许加班，但加班生产出来的产品利润的减去1元，根据最近的合同，厂商每周最少得向用户提供两种产品各30单位。要求:1) 必须遵守合同；2)尽可能少加班；3)利润最大. 问怎样安排生产？

每周正常时间生产得A产品数量——x_1

每周加班时间生产得A产品数量——x_2

每周正常时间生产得B产品数量——x_3

每周加班时间生产得B产品数量——x_4

约束条件为：

$$\begin{cases}x_1+x_2\ge 30\\ x_3+x_4\ge 30\\ 3x_1+2x_3\le 120\\ x_i\ge 0\end{cases}$$

加班最少 $\min 3x_2+2x_4$

利润最大 $\max 10x_1+9x_2+8x_3+7x_4$

多目标规划的模型

一般形式:

$$V\text{-}\min_{X\in R^n}\{f_1(X), f_2(X),\cdots, f_p(X)\}$$

$$s.t.\begin{cases}g_j(X)\le 0 & j=1,2,\ldots,m;\\ h_k(X)=0 & k=1,2,\ldots,l.\end{cases}$$

函数f_i, g_j, h_k满足

$f_i: R^n\to R,\quad g_j: R^n\to R,\quad h_k: R^n\to R,\ p\ge 2$

求目标函数的最大值或约束条件为小于等于零的情况，都可通过取其相反数化为上述一般形式.

定义1 把满足问题中约束条件的解$X\in R^n$称为可行解(或可行点)，所有可行点的集合称为可行集(或可行域)．记为D．即:

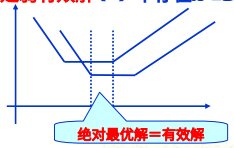
$$D=\{X\mid g_j(X)\le 0, h_k(X)=0,\ X\in R^n\}$$

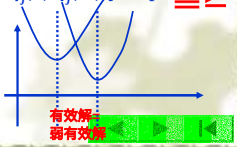
原问题可简记为 $V\text{-}\min_{X\in D}\{f_1(X), f_2(X),\cdots, f_p(X)\}$

定义2 x^*是绝对最优解←→$f_j(X)\ge f_j(x^*)$, 任意$X\in D$, $j=1\sim p$

x^*是有效解(Pareto解) ←→不存在$X\in D$，使得$f_j(X)\le f_j(x^*)$, $j=1\sim p$

x^*是弱有效解←→ 不存在$X\in D$，使得$f_j(X)<f_j(x^*)$, $j=1\sim p$ $\not\ge$

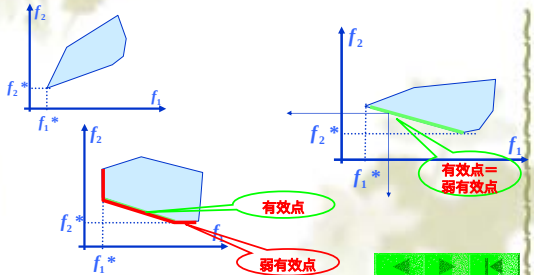




定义3 像集$F(R)=\{F(x)|x\in R\}$←→约束集R在映像F之下的值域

F^*是有效点 ←→不存在$F\in F(R)$, 使得$F\le F^*$；

F^*是弱有效点←→ 不存在$F\in F(R)$, 使得$F<F^*$；



多目标规划的基本解法

基本思想——转换为单目标规划问题

(1)约束法　　(2)分层序列法

(3)功效系数法　　(4)评价函数法

$$V\text{-}\min_{X\in D}\{f_1(X), f_2(X),\cdots, f_p(X)\}$$

1. 约束法——在多个目标中选定一个主要目标，而对其他目标设定一个期望值，在要求结果不比此期望值坏的条件下，求主要目标的最优值。

$$V\text{-}\min_{X\in D}\{f_1(X), f_2(X),\cdots, f_p(X)\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \min\limits_{X\in D} f_1(X) \\ f_2(X)\le f_2^0,\cdots, f_p(X)\le f_p^0, \end{cases}$$

多目标规划的基本解法

2. 分层序列法——把多个目标按其重要程度排序，先求出第一个目标的最优解，再在达到此目标的条件下求第二个目标的最优解，依此类推直到最后一个求解结束即得到最优解。

$$V\text{-}\min_{X\in D}\{f_1(X), f_2(X),\cdots, f_p(X)\}$$

$$\Rightarrow (1): f_1^* = \min_{X\in D} f_1(X)$$

$$(2)\ f_2^* = \min_{X\in D\cap\{x\mid f_1(X)\le f_1^*\}} f_2(X)$$

$$\cdots$$

$$(p)\ f_p^* = \min_{X\in D\cap\{x\mid f_{p-1}(X)\le f_{p-1}^*\}} f_p(X)$$

缺点：当前面的问题最优解唯一时，后面的求解失去意义！

改进——宽容分层序列法：给前面的最优值设定一定的宽容值 ε >0, 即此目标值再差 ε 也是可接受的!

多目标规划的基本解法

3. 功效系数法——对不同类型的目标函数统一量纲，分别得到一个功效系数函数，然后求所有功效系数乘积的最优解。例如：

$$V\text{-}\min_{X\in D}\{f_1(X), f_2(X),\cdots, f_p(X)\}\Rightarrow$$

$$f_{j\min} = \min_{X\in D} f_j(X)$$

$$f_{j\max} = \max_{X\in D} f_j(X)$$

$$\Rightarrow d_j(X) = \frac{f_{j\max} - f_j(X)}{f_{j\max} - f_{j\min}} \in [0,1]$$

$$j = 1,2,\cdots, p$$

$$\Rightarrow \max_{X\in D}\prod_{j=1}^{p} d_j(X) \quad \text{或} \max_{X\in D}\sum_{j=1}^{p} d_j(X)$$

线性型功效系数法，还有其它类型的方法，如指数型方法

多目标规划的基本解法

4. 评价函数法——这是一种最常见的方法，就是用一个评价函数来集中反映各不同目标的重要性等因素，并极小化此评价函数，得到问题的最优解。常见的以下几种方法：

4.1 理想点法：

$$V\text{-}\min_{X\in D}\{f_1(X), f_2(X),\cdots, f_p(X)\}\Rightarrow$$

$$f_j^* = \min_{X\in D} f_j(X)\ \ j = 1,2,\cdots, p$$

定义评价函数：

$$h(F(X)) = h(f_1,\cdots, f_p) = \sqrt{\sum_{j=1}^{p}\left(f_j(X) - f_j^*\right)^2}$$

求解非线性规划问题：　$\min\limits_{X\in D} h(F(X))$

原理：距理想点最近的点作为最优解!

4.2 平方和加权法：

$$V\text{-}\min_{X\in D}\{f_1(X), f_2(X),\cdots, f_p(X)\}\Rightarrow$$

先设定单目标规划的下界(想象中的最好值)，即

$$f_j^0 \le \min_{X\in D} f_j(X)\quad j = 1,2,\cdots, p$$

定义评价函数：

$$h(F(X)) = \sum_{j=1}^{p}\lambda_j\left(f_j(X) - f_j^0\right)^2$$

其中 λ_j 为事先给定的一组权系数，满足：

$$\lambda_j > 0, j = 1,2,\cdots, p; \sum_{j=1}^{p}\lambda_j = 1$$

求解非线性规划问题：　$\min\limits_{X\in D} h(F(X))$

原理：平方和加权法体现了通常的"自报公议"原则——那些强调各自目标重要者预先给出一个尽可能好的估计，然后"公议"给出一组表明各目标性的权系数，最后求解非线性规划给出解答。

$$h(F(X)) = \left\{\sum_{j=1}^{p}\left(\left(f_j(X) - f_j^0\right)/f_j^0\right)^2\right\}^{1/2}$$

虚拟目标法

多目标规划的基本解法

4.3 线性加权法：

$$V\text{-}\min_{X\in D}\{f_1(X), f_2(X),\cdots, f_p(X)\}\Rightarrow$$

事先按目标函数$f_1(X)$、...、$f_p(X)$的重要程度给出一组权系数 λ_j，满足：

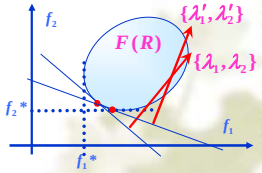
$$\lambda_j \ge 0, j = 1,2,\cdots, p; \sum_{j=1}^{p}\lambda_j = 1$$

再定义评价函数：

$$h(F(X)) = \sum_{j=1}^{p}\lambda_j f_j(X)$$

求解非线性规划问题：

$$\min_{X\in D} h(F(X))$$



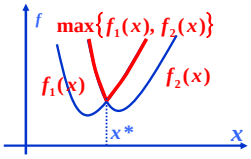
多目标规划的基本解法

4.4 “min-max”法(极小极大法)

$$V\text{-}\min_{X\in D}\{f_1(X), f_2(X),\cdots, f_p(X)\}$$

定义评价函数： $h(F(X))=\max_{1\le j\le p}\{f_j(X)\}$

求解非线性规划问题： $\min_{X\in D} h(F(X))=\min_{X\in D}\{\max_{1\le j\le p} f_j(X)\}$



原理：在最不利的情况下找出一个最有利的策略!——悲观主义决策

多目标规划的基本解法

4.4 “min-max”法(极小极大法)

此非线性规划问题目标函数不可微，不能直接用基于梯度的算法：

$$\min_{X\in D} h(F(X))=\min_{X\in D}\{\max_{1\le j\le p} f_j(X)\}$$

但可方便转化为一个简单非线性规划问题！

令 $t=\max_{1\le j\le p} f_j(X)$ 则该规划问题可等价为：

$$\begin{cases}\min\limits_{X,t} t\\ f_j(X)\le t,\ j=1,2,\cdots,p\\ X\in D\end{cases}$$

该技巧非常有用，将一个不可微的规划问题转化为可微的约束规划！

多目标规划的基本解法

4.5 乘除法

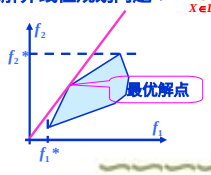
考虑两个目标的规划问题： $f_1(X)\to\min$

$f_2(X)\to\max$

且 $f_1(X)>0,\ f_2(X)>0, X\in D$

则定义评价函数： $h(F(X))=f_2(X)/f_1(X)$

求解非线性规划问题： $\max_{X\in D} h(F(X))=\max_{X\in D} f_2(X)/f_1(X)$



如 $f_1(x)$ 为投资总金额，而 $f_2(x)$ 为投资后的总收益，则最优结果应是单位投资的总收入最大！

多目标规划的基本解法

理论性结果

以上所有方法所得到的最优解都是有效解(线性加权法当有权系数为零时得到的是弱有效解)!

权系数的确定方法：

专家打分法：多个专家对不同目标打分, 然后计算平均值, 计算各人给分的偏差, 让偏差大的专家发表意见, 并通过充分讨论最终达成共识等等. (而在理论分析时往往选取不同的权系数, 观察结果, 给用户提供方便决策!)

α方法：

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{p}\lambda_j f_j^{\,i}=\beta, j=1,2,\cdots,p\\ \sum_{j=1}^{p}\lambda_j=1\end{cases}$$