

煤炭科学研究总院出版基金 资助出版
煤炭科学研究总院西安分院

地下水系统 随机模拟与管理

DIXIASHUI XITONG SUIJI MONI YU GUANLI

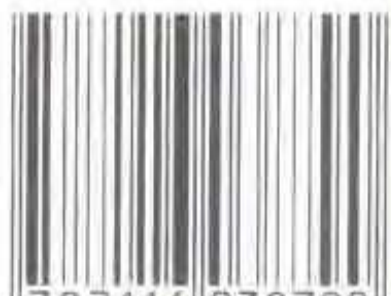
虎维岳 李竞生 著

地质出版社



张继良 男，汉族，1963年生，甘肃镇原县人。1985年毕业于武汉地质学院水文地质专业，1988年和1999年分别在煤炭科学研究总院获得工学硕士学位和工学博士学位，现为研究员，博士研究生导师，国家“百千万人才工程”煤炭行业专业技术拔尖人才，陕西省“三五”技术创新人才，陕西省科工委系统优秀共产党员，陕西省劳动模范，全国地质青年科技银锤奖获得者。主要从事水文地质与工程地质科研、教学和技术服务工作，先后有4项科研成果获国家及省部级科技进步奖，出版书、译作品两部，公开发表学术论文40余篇。目前兼任西安市水资源学会常务副理事长，全国煤矿水害防治专业委员会常委，中国地质学会岩溶地质专业委员会委员，中国地质灾害学会滑坡专业委员会委员。

ISBN 7-116-03879-5



9 787116 038790 >

ISBN 7-116-03879-5

P·2391 定价：20.00 元

地下水系统随机模拟与管理

虎维岳 李竞生 著

地质出版社

· 北 京 ·

内 容 提 要

本书较全面系统地介绍和论述了地下水系统随机模拟与管理的基本理论和应用技术。第1章介绍了随机问题的基本理论,第2章介绍了常见的随机问题分析与模拟方法,第3章介绍了随机规划理论,第4章介绍了地下水系统确定性模拟与管理的基本理论,第5章介绍了地下水系统随机模拟与管理的基本理论,第6章介绍了地下水系统随机模拟与管理模型的求解方法,第7章通过两个假设实例和一个实际工程介绍了地下水系统随机模拟与管理理论的应用。

图书在版编目(CIP)数据

地下水系统随机模拟与管理/虎维岳,李竞生著.-北京:地质出版社,2003.9
ISBN 7-116-03879-5

I.地… II.①虎… ②李… III.地下水-水流模拟 IV.1641.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第060168号

责任编辑 赵俊磊 陈军申
责任校对 田建茹
出版发行 地质出版社
社址邮编 北京海淀区学院路31号,100083
电 话:(010) 82324508(邮购部)
网 址:<http://www.gph.com.cn>
电子邮箱:zbs@gph.com.cn
传 真:(010) 82310759
印 刷 北京中科印刷有限公司
开 本 787 mm×1092 mm^{1/16}
印 张 6.125
字 数 140千字
印 数 1—800册
版 次 2003年9月北京第一版·第一次印刷
定 价 20.00元

ISBN 7-116-03879-5/P·2391

(凡购买地质出版社的图书,如有缺页、倒页、脱页者,本社发行处负责调换)

前 言

地下水系统模拟与管理作为水文地质学研究的一个重要分支,其研究的对象、内容和技术方法都经历了一个萌芽、发展和完善的过程。这一变化过程都与其研究对象的复杂性和客观要求的准确性密切相关。由于人们对水资源在人类社会可持续发展中重要位置认识的提高以及地下水系统与人类社会活动、环境等因素的密切联系,使得对地下水系统的研究迅速地由对含水层系统行为规律的认识转向对这一系统的科学模拟、管理和调控。同时,由于地下水系统的复杂性、非线性、多尺度性、突变性和随机性等本质属性的存在,使得对地下水系统模拟与管理问题的研究变得十分复杂。

地下水系统模拟与管理问题就是在充分掌握和预知地下水系统的空间结构、埋藏条件以及各种影响和控制其行为规律的自然和人为因素的前提下,进而对其进行科学的、定量的模拟预测、管理和调控,使其向着人们所期望的目标发展和演化。地下水系统的行为规律又取决于与其相关联的外部环境和系统内部参数的时、空变化情况。这些外部环境因素和内部参数场则具有极强的随机性和不确定性。影响地下水系统的不确定性因素基本上可分为两大类:固有的不确定性和信息的不确定性。所谓固有的不确定性是指来自于一定自然性质和自然过程的不确定性(如大气降水等)。信息的不确定性主要是一种“噪声”,或者是对反映地下水系统性质的信息的不完全了解所带来的不确定性。这种不确定性是可以通过多种策略予以减少的。正是由于这些不确定性因素的存在,人们常常将对这类系统的计算机模拟形容为“垃圾输入,垃圾输出”。意思是指模型参数或输入数据的不确定性和误差将导致输出结果的不确定性和误差。前者的不确定性和误差又不可避免地来自于多个方面。首先,表现为模型的概化,由于概念模型是水文地质实体的概化,这一概化过程必将导致一些信息的丢失和忽视。其次,是含水层参数的不确定性和误差。由于描述含水层特征的主要参数(如渗透系数、储水系数、水动力弥散系数等)无法直接测量,而需要通过解译相关的勘探试验资料求取,且含水层一般都是非均质的,用有限的试验资料所求取的参数只能代表整个系统的局部参数值。再次,是输入数据的误差。在地下水系统模拟研究中,所需的多种输入数据(如边界性质和位置、初始条件、激发条件等)都不可避免地带有不确定性和误差。最后,是数值方法本身所具有的区域参数特征化误差、截断误差、数值波动误差等。由此可见,研究对象的客观随机性和不确定性决定了地下水系统模拟与管理模型的随机属性。

对于随机问题的研究主要出现于20世纪60年代中期,其主要原因就是当时摄动方法的兴起和概率论思想的普及。Song和Bogdanoff关于无规则线性链索的研究^[1],采用了传递矩阵技术与摄动展开思想的结合,并给出了考虑随机参数的频率解答。Boyce和Goodwin(1964)研究了具有随机参数的弦和梁的特征值问题^[2],在他们的研究中考虑了参数的随机因素并使用了摄动逼近思想。到了20世纪70年代,许多学者将已有的研究成果与有限元技术相结合,形成了后来人们称之为随机有限元法(或概率有限元法)的基本思想,随

之以 Shinozuka 和 Ienoe 的研究成果为代表^[3~7]，人们开始采用随机模拟的方法对具有随机参数的系统进行研究，进而形成了解决随机问题的又一主导方法——随机模拟方法。到了 20 世纪 80 年代，以 Nakagiri 和 Hisada 为代表，对摄动有限元方法及其应用进行系列研究，其研究的热点是形函数不确定性问题^[8~10]。随后，在泛函分析思想的框架下发展形成了次序正交分解方法^[11~13]、反应量正交展开方法和混沌正交多项式等^[14,15]分析和求解随机问题的理论和方法。

随着研究随机系统理论和方法的不断发展和完善，加之水文地质学所研究对象的固有随机性特点，使得随机水文地质学理论和方法也得到了迅速发展和应用，并形成了全分布分析和一阶、二阶矩分析。所谓全分布分析方法就是产生形成地下水系统中不确定性输入或参数的概率分布场并以此产生具体的地下水流概率分布场。一、二阶矩分析方法则是假设随机变量或函数的一、二阶矩完全可以刻画其随机分布特性并基于这一假设，只考虑水头或流量的均值与方差的分析方法。两种最主要的全分布技术就是衍生分布和蒙特卡罗 (Monte-Carlo) 模拟。衍生分布是一种为获得随机参数 (函数) 概率分布的分析技术，研究这一问题的代表人物有 Sagar 和 Kisiels T. 及 Eagleson's。蒙特卡罗方法则是一种应用更为广泛的方法，它主要是根据每组随机变量的分布特征产生一组随机分布的伪随机参数作为输入来模拟地下水系统的行为。并对模拟结果进行合成分析，形成水流或水头的估计分布特征。

Michael D 等提出了一阶和二阶矩序列分析，即利用一阶泰勒展开式分析随机变量的均值和方差、利用二阶泰勒展开式分析随机变量的均值、方差及协方差等特征指标。Sergio E. Serrano Soblev 空间探讨了求解地下水流问题的随机偏微分方程的理论和方法^[17]。ShuGuang Li 等研究了求解地下水流问题的非平稳随机谱分析方法，并讨论了基于传统 Fourier 变换和数值模拟技术相结合的混合随机问题求解方法^[18]。姚磊华博士在其博士学位论文中较系统地分析和讨论了地下水运动和溶质运移问题的随机数值模拟技术。对蒙特卡罗随机有限元法在地下水系统随机数值模拟中的应用问题进行了探讨，并根据蒙特卡罗法的特点，将 Neumann 展开式引入地下水系统的蒙特卡罗有限元模拟中，解决了矩阵求逆的效率问题，同时也讨论了摄动有限元法、Taylor 展开法等技术随机地下水流模拟及溶质运移问题中的应用方法。

随着人们对地下水系统不确定性和随机性认识的不断深入以及地下水系统随机模拟技术的日趋完善，为随机地下水系统管理模型的建立和求解奠定了良好的基础，使得随机地下水管理模型的建立和求解技术开始引起人们的广泛重视。地下水管理模型的广泛研究出现于 20 世纪 70 年代，其代表人物有 Chaudhry et al. (1974)，Bredehoeft (1973)……Taylor 和 Luckey (1974)，Bockstock 等 (1977)^[20~26]。其研究成果主要集中于简单的确定性水力管理模型和策略评价模型。在水力管理模型中形成至今仍被广泛应用的“嵌入法”模型和“响应矩阵法”模型。“嵌入法”和“响应矩阵法”两种方法各有优缺点，它们在具体应用中往往根据具体条件而加以选择。对于“嵌入法”，剖分后的整个地下水流方程都包含于规划管理模型中作为约束条件，使模拟模型作为管理模型的一部分进行求解。整个模拟区及各个模拟阶段的所有节点水头都将作为约束条件，其他条件作为附加约束条件加入到管理模型之中。该方法可以产生大量的关于含水层系统的信息量。许多地下水管理模型本身并不要求知道含水层的所有信息。因此，许多决策变量和约束条件无须加入到地下水系统

的规划与管理模型之中。为了减少计算工作量和提高模型效率,“嵌入法”较适合于小范围的稳定流管理问题。“响应矩阵法”是将水流模拟模型的一部分作为管理模型的约束条件。该方法只把管理模型所需要的信息量从模拟模型中耦合进来,因而其计算量小,方法简单,能有效地处理大规模的非稳定流含水层系统的管理问题。

进入 20 世纪 80 年代,地下水管理模型迅速地发展为动态规划、多级规划、多目标规划、整数规划等。Gorelick 等首先研究了地下水流与溶质运移问题相结合的非线性最优化问题^[27]。1992 年,Chang 等应用有约束最优化控制算法形成了时变地下水质控制与净化策略。1994 年,Wang 和 Alfeld 以井位作为显式决策变量探讨了疏干孔群的优化设计问题^[28]。

到了 20 世纪 90 年代后期,地下水管理模型的建模技术和求解方法有了质的飞跃,人们将研究工作的重点越来越多地集中于带有随机变量的随机地下水管理模型和具非线性约束与目标函数的非线性地下水管理模型的建模和求解技术。对于传统的地下水系统控制与管理问题,在求解过程中总希望目标函数和约束方程有明确的数学表示,并强烈地依赖于梯度求解过程。对于许多问题,求解梯度总是一件比较困难的事情,当以井位作为决策变量时,求导的函数在求解域内是非连续的,这一切都使得求导运算变得非常困难,甚至不可能。对于越来越多的非线性模型,随机模型和模糊模型,基于求导运算的优化算法很难保证其解收敛到全局最优点。因此,在地下水管理模型及求解技术方面人们正在借助于其他学科的研究成果寻求新的理论和方法。借助于遗传算法的研究成果,Dougherty 和 Marryott 采用模拟退火技术求解了地下水污染净化和控制的优化问题。他们在二维非均质各向异性含水层中利用模拟退火技术优化在预先指定的孔位中抽水强度的分配问题。Mc Kinney 和 Lin 利用人工遗传算法求解了稳态地下水管理模型的全局最优解^[29]。Brian J. Ritzel 和 J. Wayland 将人工遗传算法与人工神经网络算法相结合求解了具有线性目标函数的含水层系统水质管理问题,并将该方法与基于梯度函数的传统 Newton's 算法进行了比较^[42]。

正是基于对水资源进行科学预测、模拟、管理和调配研究重要性的认识,并能够深刻把握地下水系统及其相关环境因素具有随机性和不确定性这一本质特点,本书较全面系统地介绍和论述了地下水系统随机模拟与管理的基本理论和应用技术。其中第 1 章介绍了随机问题的基本理论。第 2 章介绍了常见的随机问题分析与模拟方法。第 3 章介绍了随机规划理论。第 4 章介绍了地下水系统确定性模拟与管理的基本理论,该部分内容作为地下水系统随机模拟与管理的基础,本书引用了卢文喜、姚磊华等的研究成果。第 5 章介绍了地下水系统随机模拟与管理的基本理论。第 6 章介绍了地下水系统随机模拟与管理模型的求解方法。第 7 章通过两个假设实例和一个实际工程介绍了地下水系统随机模拟与管理理论的应用技术。

本书在编写过程中得到了姚磊华博士指教,张壮路、赵杨工程师、闫兰英高级工程师等为全书的制图、打印等做了大量的工作,在此一并表示诚挚的谢意。

限于作者的学识与水平,书中错漏之处难免,恳请读者指教。

作 者

2002 年于煤炭科学研究总院西安分院

第 1 章 随机问题的基本理论

对于一个客观的物理过程、物理现象,建立其行为规律的数学模型以进行定量分析和定量预测是现代工程分析与模拟的主要方法。无论是模拟问题、预测问题或是优化问题,数学模型的建立总是在一定的假定条件下来建立影响事物发生、发展和变化的某些因素之间的因果关系,进而通过一定的已知信息来获得事物发生、发展和变化的内在规律,以实现认识事物、预见事物和控制事物。

在工程设计和工程实践中,不管我们获取资料的手段如何,不管我们所获得的信息量有多大,总不能完全准确而毫无遗漏地反映事物的全部。对于地下水系统而言,由于其复杂性、时变性和不可完全揭示性,使得这种不确定性和信息的不完整性显得尤为突出。我们的预测和决策显然都是在不确定性条件下所进行,因而预测和决策的结果就不能完全置信。这种不确定性除了根据相似条件下的观测和模型实验的结果所推导出的数据具有某种程度的不完善以外,许多与工程行为本身密切相关的自然因素本身就具有随机的性质,当然是属于不确定性因素,这就决定了处理问题方法和观点是不确定性的,而不是确定性的。

影响事物因素的不确定性和处理问题方法的不完善性对生产、设计与决策带来的影响往往是不可忽视的。在工程设计、系统行为预测及工程决策过程中要对不确定性因素进行定量计算和评估就必须用到基于概率论的随机方法。同样,其设计与预测、决策的结果只能是概率意义上的不确定性结论而不是确定性结论,正像天气预报工作一样,预报者只能告诉我们未来天气降水的概率有多大,而不能简单地采用“是”或“非”来回答未来天气的降水情况。

1.1 水文地质中常见的不确定性问题

1.1.1 来自随机性的不确定性

在研究一个水文地质问题时,总会遇到大量的和我们所研究问题密切相关的随机性因素,即事物实际发生的结果(在一定程度上)具有不可预见性。事物的发生具有不可重复性,每次观测结果存在着一个范围,在这一范围内事物每次发生的结果不尽相同,如某地区每月的降水强度在不同年份中的变化情况(图 1.1 至图 1.3)虽在一定的范围内遵循大致相同的变化规律,但不完全相同。

某河流流量及其水位标高的变化情况(图 1.4 至图 1.5)。

1.1.2 来自量测误差的不确定性

一定的信息总是来自特定的量测仪器和量测方法,不同的量测仪器和量测方法往往会获得对同一物理量的不同量测结果。这种来自量测误差的不确定性在实际工程中屡见不鲜。如某矿井在放水试验时来自不同量测方法所获得的放水量结果(图 1.6)。

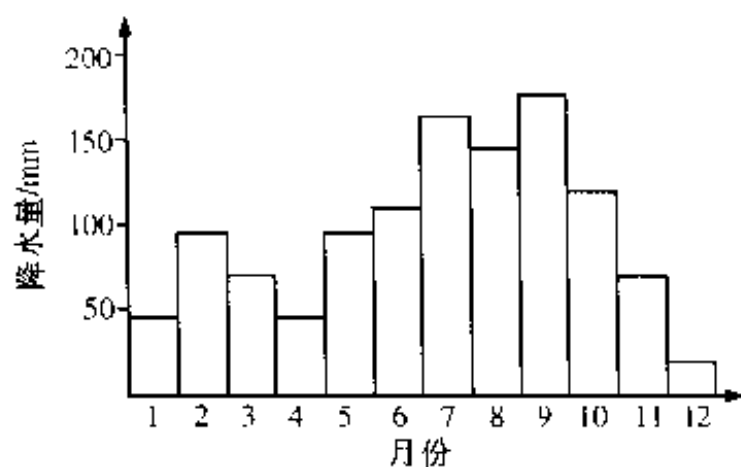


图 1.1 1990 年月平均降水量

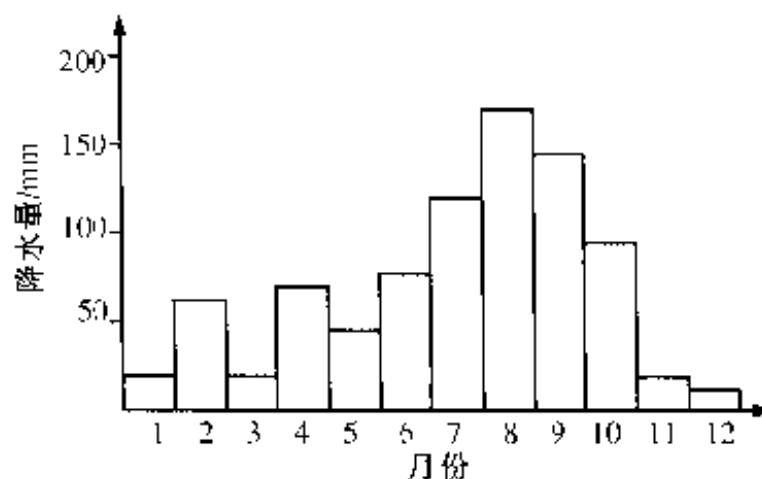


图 1.2 1992 年月平均降水量

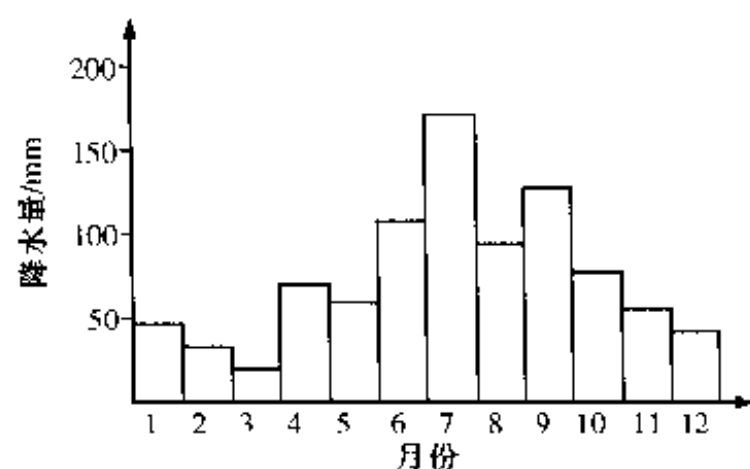


图 1.3 1995 年月平均降水量

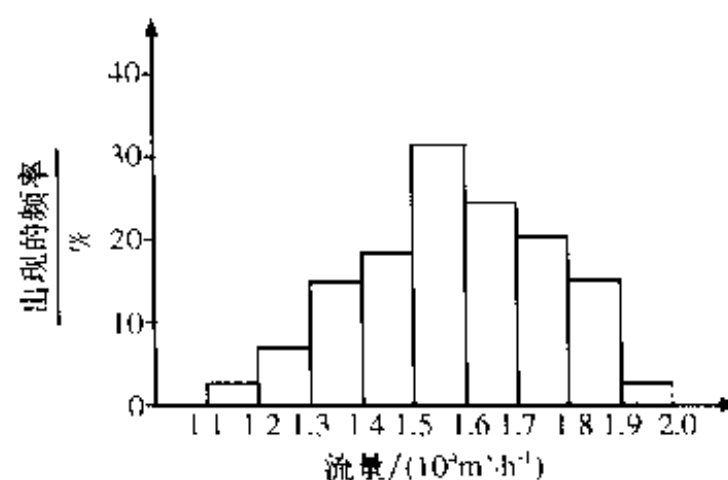


图 1.4 某河流 6 月份流量频率分布图

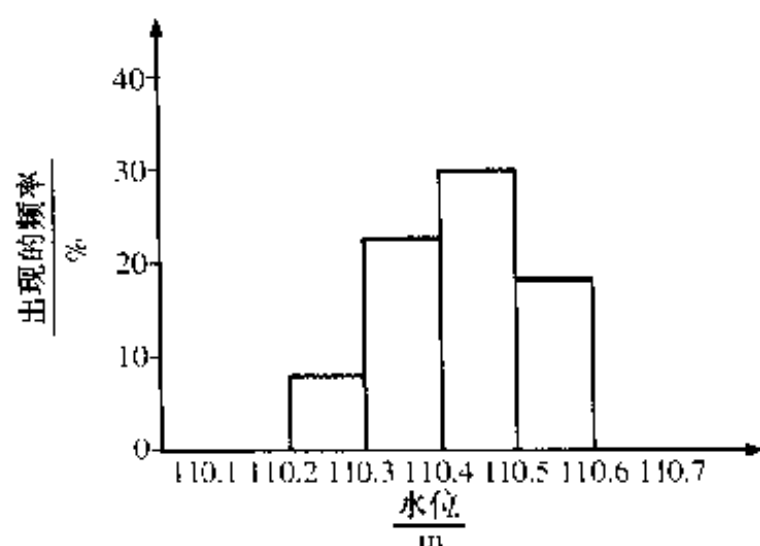


图 1.5 某河流 6 月份水位标高频率分布图

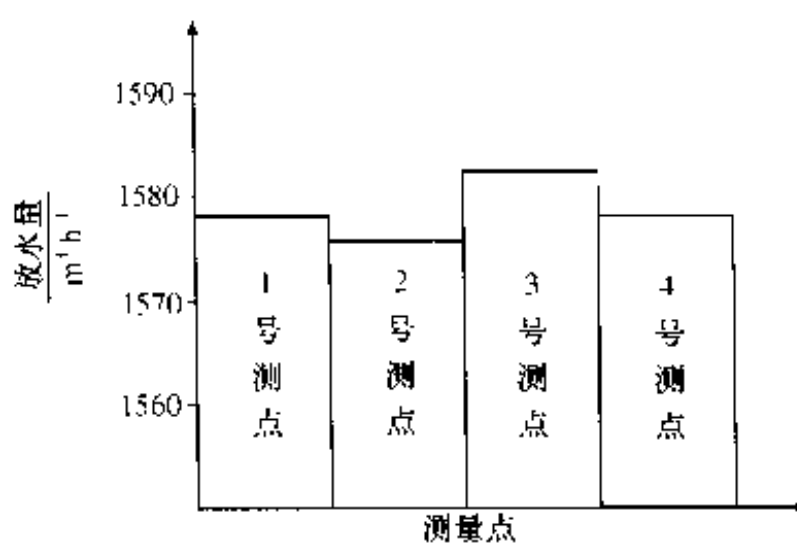


图 1.6 不同测点水量测量结果直方图

1.1.3 模型不完善性带来的估计误差不确定性

工程实际问题中的不确定性,并不完全由前述的不确定性引起,即观测中基本变量的可变性所引起,特别是像水文地质中常用的数学模拟、参数识别、预测预报、管理与决策之类的工程问题,往往使某些变量的值取决于具有不确定性的观测数据,这样误差就不可避免(尤其在数据有限的情况下),基于不同次的观测资料所获的参数结果自然会不相同,如表 1.1 所示某水源地利用不同年份观测资料所获的水文地质参数相差极大(计算方法完全相同)。

表 1.1 依不同年份资料所获的水文地质参数反演结果表

参数	参数 分区号	1991 年 资料	1992 年 资料	1993 年 资料	1994 年 资料	1995 年 资料	μ_{λ_i}	$D(\cdot) = \delta^2$
A_x	1	463.093	486.954	507.046	487.259	460.473	480.965	1495.029
	2	53.915	56.693	59.032	56.729	53.610	55.996	20.264
	3	301.348	316.874	329.949	317.073	299.642	312.977	633.064
	4	374.518	393.815	410.064	394.062	372.399	388.972	977.818
	5	97.240	102.250	106.469	102.314	96.690	100.993	65.918
	6	46.213	48.594	50.599	48.625	45.952	47.997	14.888
	7	347.561	365.468	380.548	365.697	345.594	360.974	842.120
	8	462.131	485.941	505.992	486.246	459.516	479.965	1488.819
	9	74.133	77.953	61.170	78.002	73.714	76.994	38.312
	10	253.209	266.255	277.241	266.422	251.776	262.981	446.962
	11	463.093	486.954	507.046	487.259	460.473	480.965	1395.029
	12	465.017	488.979	809.154	489.285	462.387	480.965	1507.487
	13	462.131	485.941	505.992	486.246	459.516	479.965	1488.819
	14	405.327	426.211	443.797	426.478	403.033	420.969	1145.313
	15	459.242	482.904	502.830	483.207	456.644	476.965	1470.267
K_y	1	466.944	491.003	511.263	491.311	464.302	484.965	1519.998
	2	378.369	397.865	414.281	398.114	376.149	392.971	998.001
	3	336.045	352.308	366.844	352.528	333.149	347.975	782.560
	4	296.662	417.100	434.310	417.361	394.417	411.970	1096.868
	5	117.458	123.510	128.606	123.587	116.794	121.991	96.179
	6	48.139	50.619	52.708	50.651	47.866	49.996	16.155
	7	48.139	50.619	52.708	50.651	47.866	49.996	16.155
	8	69.320	72.891	75.899	72.937	68.927	71.995	33.498
	9	347.561	365.468	380.548	365.697	345.594	360.974	842.120
	10	464.056	487.966	508.100	488.272	461.430	481.965	1501.252
	11	401.176	422.162	439.581	422.426	399.204	416.970	1123.652
	12	165.619	488.979	509.154	489.285	462.387	482.965	1507.487
	13	460.205	483.917	503.884	484.220	457.601	477.965	1476.437
	14	462.131	485.941	505.992	486.246	459.516	479.965	1488.819
	15	98.203	103.263	107.523	103.327	97.647	101.993	67.229
μ	1	0.077	0.081	0.084	0.081	0.077	0.080	0.000
	2	0.077	0.081	0.084	0.081	0.077	0.080	0.000
	3	0.087	0.091	0.095	0.091	0.086	0.090	0.000
	4	0.087	0.091	0.095	0.233	0.086	0.090	0.000
	5	0.221	0.233	0.242	0.274	0.220	0.230	0.000
	6	0.260	0.273	0.285	0.284	0.258	0.270	0.000
	7	0.270	0.283	0.295	0.284	0.268	0.280	0.001
	8	0.270	0.283	0.295	0.294	0.268	0.280	0.001
	9	0.279	0.294	0.306	0.284	0.276	0.290	0.001
	10	0.270	0.283	0.295	0.284	0.268	0.280	0.001
	11	0.270	0.283	0.295	0.182	0.268	0.280	0.001
	12	0.173	0.182	0.190	0.284	0.172	0.180	0.001
	13	0.270	0.283	0.295	0.284	0.268	0.280	0.001
	14	0.270	0.283	0.295	0.284	0.268	0.280	0.001
	15	0.270	0.283	0.295	0.284	0.268	0.280	0.001

注: μ_{λ_i} 为参数均值; $D(\cdot) = \delta^2$ 为参数方差。

同时,为了简化处理一些问题而建立的物理模型或数学模型(如公式、方程、算法、计算模拟程序等),甚至一些模型实验都是实际问题的某种理想化代表,因此总会存在某种程度的不准确性或信息不完善性。这也是构成问题不确定性的的重要因素之一。诸如上述种种原因所造成的不确定性问题都需要采用基于概率论与随机理论的方法来处理。

1.2 概率与数理统计理论的基本概念

当讨论到不确定性问题时,总会涉及概率的概念,即某一事件相对于其他事件发生的可能性,也就是说某事件至少有一种以上发生的可能性,否则,问题将变成确定性问题。概率即是某一事件的发生相对于一切其他事件的发生的量的度量。因此,构成概率问题的先决条件是必须明确问题发生的所有可能性,即所谓可能性空间以及该空间的事件。

1.2.1 随机事件与样本空间

不确定性事件发生的所有可能性结果的集合构成了随机事件发生的样本空间,而样本空间中的每一个具体结果叫做该样本空间的随机事件。要深刻理解概率的概念,必须先知道频率的有关性质。一般地,设随机事件 A 在 n 次试验或观测中出现的次数为 n_A ,则称

$$f_n(A) = n_A/n \tag{1.1}$$

为事件 A 在这 n 次试验或观测过程中出现的频率。事件 A 在多次观测中出现的频率虽为一个变数,但对多种物理现象的观测表明,当试验或观测的次数 n 逐渐增多时, $f_n(A)$ 在一个常数附近摆动,且逐渐稳定于这个常数,也就是说频率具有稳定性的性质。频率的稳定性质对于我们认识随机现象的内在规律性,预测事物和控制事物具有重要意义。

对于样本空间 S 中的随机事件 A , n 次试验中的频率具有下列性质。

(1) $0 \leq f_n(A) \leq 1$

(2) $f_n(S) = 1$

基于对频率概念的理解,假设 E 是一次随机试验, S 是试验的所有样本空间,对于试验的每个具体事件 A 赋予一个实数 $P(A)$,则称 $P(A)$ 为事件 A 发生的概率,如果满足下列条件:

(1) $0 \leq P(A) \leq 1$

(2) $P(S) = 1$

(3) 对于两两不相容的事件 $A_k (k = 1, 2, \dots)$ 有:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_n) + \dots$$

则称概率具有可列可加性。有关概率的运算法则参见文献[53]。

1.2.2 随机变量

为了全面研究随机事件和分析随机问题的内在规律性,揭示客观世界存在的不确定性或随机性问题的统计规律性,有必要了解随机变量的基本概念。

设 E 为随机试验,它的样本空间是 $S = \{e\}$ 。如果对于样本空间中的某个具体随机事件 $e \in S$ 有一个实数 $X(e)$ 与之对应,这样,对于空间 S 中的每一个 e 总有一个实值单值函数 $X(e)$,也就是产生了 S 与 $X(e)$ 之间的函数对应关系,称 $X(e)$ 为随机变量。

设 X 为 $X(e)$ 所有可能取值的全体, 则有下列示意图关系(图 1.7):

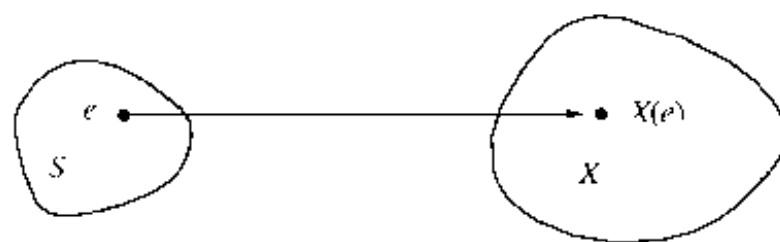


图 1.7

由于随机变量是随机事件的函数, 随机事件的发生具有一定的概率。于是, 随机变量的取值也有一定的概率, 这一性质显示了随机变量与普通函数之间有着本质的差异, 且普通函数

是定义在实数轴上而随机变量则是定义在样本空间上的(样本空间元素不一定是实数)。

在样本空间 $S = \{e\}$ 上定义一个实值函数以便形成一个随机变量是分析随机问题常见的事情。如表 1.1 所示的水文地质参数就是一组随机变量, 它是实现一次水文地质数据观测(一个随机事件), 根据一定的函数关系便可得到一组水文地质参数(随机变量)。随机变量的引入, 主要是为了帮助我们利用数学分析的方法来分析和研究随机问题。

随机变量可分为离散型随机变量和连续型随机变量两种。所谓离散型随机变量是指其全部可能取到的值是有限多个或是可列无限多个。

一般地, 设离散型随机变量 X 所有可能取的值为 $x_k (k = 1, 2, \dots)$, X 取每个可能值的概率为:

$$P\{X = x_k\} = P_k \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

则 P_k 应满足下列两个条件:

$$(1) P_k \geq 0 \quad k = 1, 2, \dots$$

$$(2) \sum_{k=1}^{\infty} P_k = 1$$

式 $P\{X = x_k\} = P_k$ 称为离散型随机变量的概率分布或分布律, 常见的离散型随机变量的概率分布有如下几种。

(1) (0-1)分布。对于一个随机事件可能发生的结果只有两种, 即其样本空间只包含有两个元素 $S = \{e_1, e_2\}$, 我们定义随机变量

$$X = x(e) = \begin{cases} 1, & \text{当 } e = e_1 \\ 0, & \text{当 } e = e_2 \end{cases} \quad (1.3)$$

来描述和刻画这类随机问题, 称其为(0-1)分布。

(2) 二项分布。设随机事件只有两种可能的结果, $S = \{e_1, e_2\}$, 如事件 e_1 发生的概率为 p , 则事件 e_2 发生的概率为 $1-p$, 即有 $P\{x = e_1\} = p$

$$P\{x = e_2\} = 1 - p = q \quad (1.4)$$

如果将上述随机问题做 n 次贝努利试验, 则事件 e_1 可能发生 $0, 1, 2, \dots, n$ 次。通过计算不难发现事件 e_1 恰好发生 $k (0 \leq k \leq n)$ 次的概率为:

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k} \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (1.5)$$

注意到 $\binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}$ 刚好是二项式 $(p + q)^n$ 的展开式中的第 $k + 1$ 项, 故我们称随机变量 X 服从参数 n, p 的二项分布, 记为 $X \sim B(n, p)$ 。

(3) 泊松分布。设随机变量 X 所有可能取的值为 $0, 1, 2, \dots$ 且取第 k 个值的概率为 $P\{x = k\} = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ 其中 $\lambda > 0$ 是常数, 则称 X 服从参数为 λ 的泊松分布。记

为 $X \sim \pi(\lambda)$ 。 (1.6)

连续型随机变量及其概率密度: 设有随机变量 X , 它的分布函数为 $F(X)$, 如存在有非负的函数 $f(x)$, 使对于任意实数有:

$$F(X) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad (1.7)$$

则称 X 为连续型随机变量, $f(x)$ 称为 X 的概率密度函数。可简称为概率密度。 $F(X)$ 称为 X 的分布函数。连续型随机变量的分布函数也是连续函数。

概率密度函数反映了样本空间中个别具体随机事件发生的相对概率大小, 而随机变量的分布函数则反映了随机事件在某一特定的区域或时间域中出现的概率大小情况, 概率密度函数 $f(x)$ 具有下列基本性质。

(1) $f(x) \geq 0$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

(3) $P\{x_1 \leq X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$

图 1.8 至图 1.11 反映了随机变量的概率密度函数与概率分布函数的基本意义。

几种常见的重要连续型随机变量分布有以下几种。

(1) 均匀分布。如果连续型随机变量 X 在某一特定区间 (a, b) 内取值, 且其概率密度函数为:

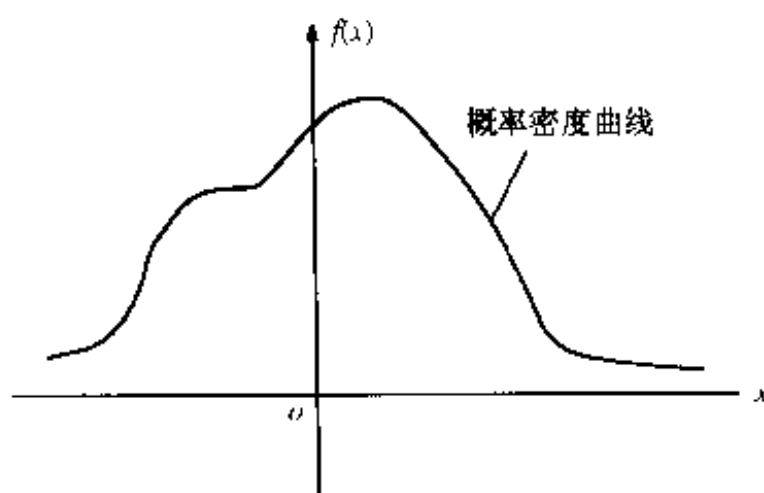


图 1.8

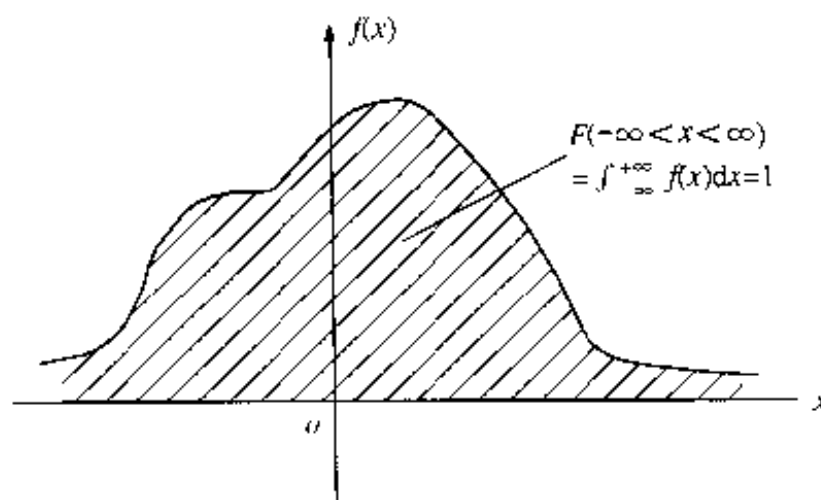


图 1.9

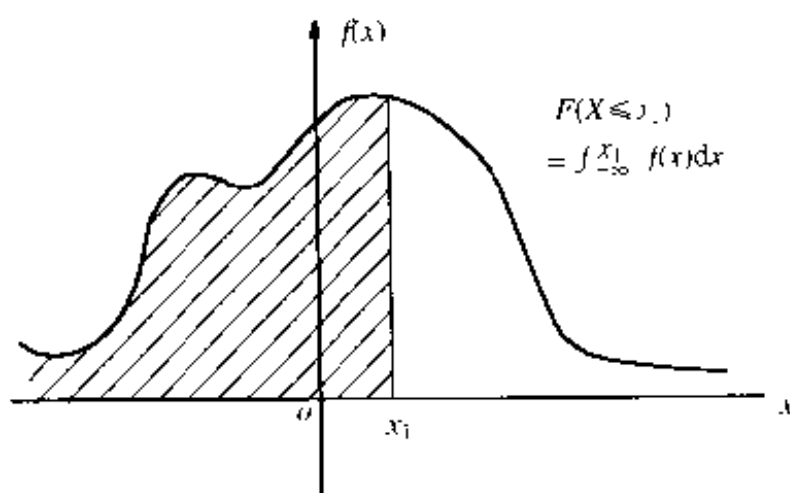


图 1.10

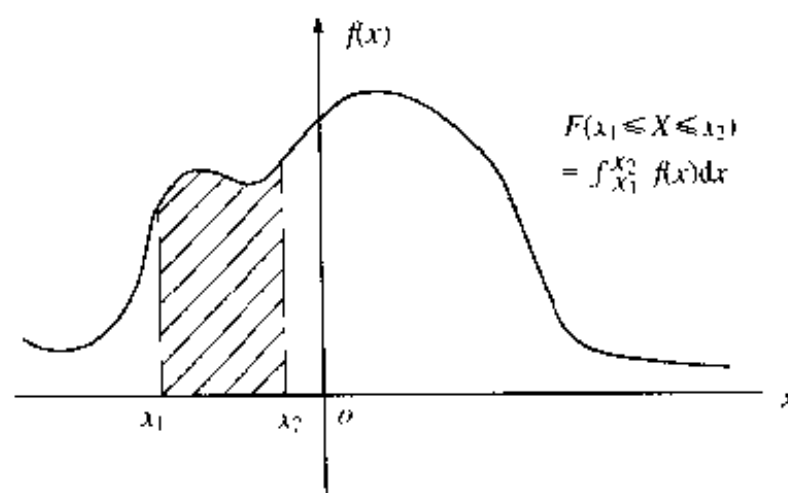


图 1.11

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (1.8)$$

则称 X 在 (a, b) 上服从均匀分布, 其分布函数为:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases} \quad (1.9)$$

(2) 正态分布。如果连续型随机变量 X 的概率密度为:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < +\infty \quad (1.10)$$

式中: μ, σ ——常数。 X ——服从参数为 μ, σ 的正态分布。具正态分布的随机变量的密度函数和分布函数典型示意图如图 1.12 与图 1.13。

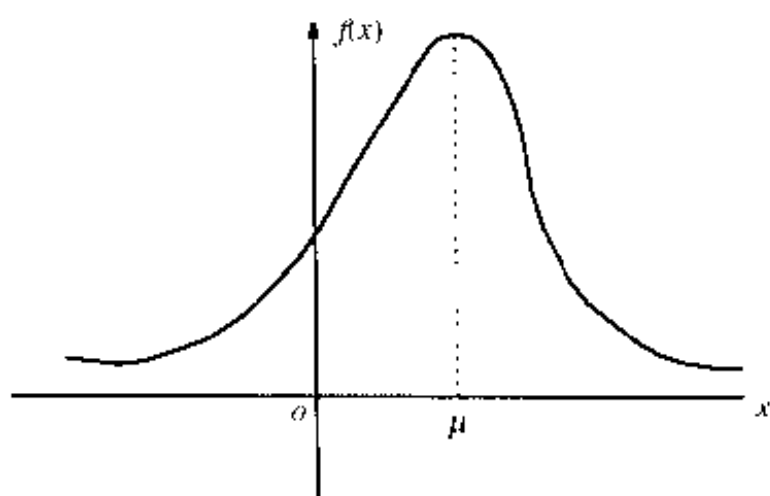


图 1.12

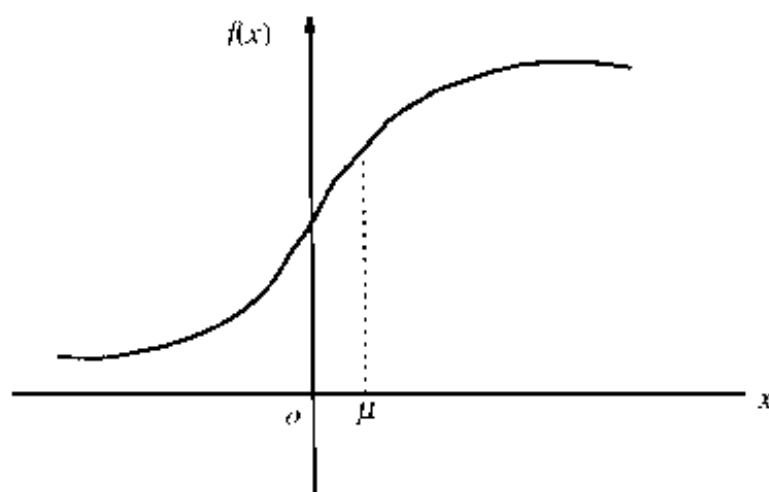


图 1.13

由式(1.10)与图 1.12 可知, μ 和 σ 是刻画正态分布随机变量的重要参数, μ 反映了随机变量在 $(-\infty, +\infty)$ 上出现的最大概率位置, 而 σ 则反映了随机变量在 $(-\infty, +\infty)$ 上围绕以 μ 为中心的位置出现的集中程度, 当 $\mu = 0, \sigma = 1$ 时, 称 X 服从标准正态分布, 其概率密度和分布函数可分别表示为:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (1.11)$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (1.12)$$

1.2.3 随机变量的数字特征

虽然一个随机变量的概率密度函数或分布函数能很好地描述和刻画随机变量的基本特征, 但对于生产实践中所遇到的随机变量往往很难知道其具体的分布函数式, 然而通过对随机变量的统计分析, 会得到一些反映随机变量性质的重要的数字特征, 如数学期望、方差、矩等。

若离散型随机变量 X 的分布律为:

$$P\{X = x_k\} = P_k \quad k = 1, 2, \dots$$

且 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k P_k$ 绝对收敛, 则称 $E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k P_k$ 为该随机变量的数学期望。

若 X 为连续型随机变量, 其概率密度函数为 $f(x)$ 且积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} Xf(x)dx \text{ 绝对收敛, 则称}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} Xf(x)dx \text{ 为随机变量 } X \text{ 的数学期望。}$$

由上述随机变量数学期望的定义可见, 其物理意义相当于加权平均值。对于随机变量的函数的数学期望定义与随机变量的数学期望类同, 随机变量的数学期望具有下列重要性质:

- (1) 设 C 为常数, 则 $E(C) = C$
- (2) 设 X 为随机变量, C 为常数, 则 $E(CX) = C \cdot E(X)$
- (3) 设 X, Y 为任意两个随机变量, 则 $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- (4) 设 X, Y 是两个相互独立的随机变量, 则有: $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$

随机变量的均值只反映了随机变量的平均水平, 但对随机变量的每一个具体个体偏离平均水平的程度难以刻画, 为了研究和分析随机变量偏离其均值的程度, 需要引入随机变量方差的概念。

设 X 是一个随机变量, 若 $E\{[X - E(X)]^2\}$ 存在, 则称 $E\{[X - E(X)]^2\}$ 为 X 的方差, 记为 $D(X)$ 或 $\text{var}(X)$ 即:

$$D(X) = \text{var}(X) = E\{[X - E(X)]^2\}$$

由上述公式不难看出方差实际上是平方差的概念, 如果对方差开平方根, 便可得到均方差或标准差, 记为 $\sigma(X)$ 即:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

关于随机变量方差的计算有下列重要公式:

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \quad (1.13)$$

随机变量的方差具有下列重要性质:

- (1) 设 C 为常数, 则 $D(C) = 0$
- (2) 设 X 为一随机变量, C 为常数, 则 $D(CX) = C^2 D(X)$
- (3) 设 X, Y 为两个相互独立的随机变量, 则有 $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$

几种常见分布的随机变量的数字特征如表 1.2。

1.2.4 协方差与相关系数

前节介绍了一个随机变量的有关数字特征, 但在实际工程中, 往往是两个甚至两个以上的随机变量共存, 且不同随机变量之间具有某种不同程度的关联性。为了研究不同随机变量之间的相互关系, 需要了解协方差和相关系数的概念。

设 X, Y 为随机变量, 则 X, Y 之间的协方差为:

$$\text{cov}(X, Y) = E\{[X - E(X)] \cdot [Y - E(Y)]\} \quad (1.14)$$

而

$$\rho_{XY} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)} \cdot \sqrt{D(Y)}} \quad (1.15)$$

表 1.2

分布形式	分布律或概率密度	数学期望	方差
(0-1)分布	$P\{X=k\} = p^k \cdot q^{1-k},$ $k=0,1 \quad 0 < p < 1 \quad p+q=1$	p	$p \cdot q$
二项分布	$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k},$ $k=1,2,\dots,n \quad 0 < p < 1 \quad p+q=1$	np	npq
泊松分布	$P\{X=k\} = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$ $k=0,1,2,\dots \lambda > 0$	λ	λ
均匀分布	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
正态分布	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $-\infty < x < +\infty, \sigma > 1$	μ	σ^2
威布尔分布	$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta-1} \cdot e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta} & x > 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$	$\eta \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)$	$\eta^2 \left\{ \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) - \left[\Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \right]^2 \right\}$

为 X, Y 的相关系数或标准协方差, 协方差还有下列计算公式

$$\text{cov}(X, Y) = E(X, Y) - E(X) \cdot E(Y) \quad (1.16)$$

协方差具有下列性质:

- (1) $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$
- (2) $\text{cov}(aX, bY) = ab \cdot \text{cov}(X, Y)$
- (3) $\text{cov}(X_1, X_2, Y) = \text{cov}(X_1, Y) + \text{cov}(X_2, Y)$

同样, 对于随机变量 X, Y , 若有 $E(X^k), k=1, 2, \dots$ 存在, 则称其为 X 的 k 阶原点矩。若有 $E[(X - E(X))^k], k=1, 2, \dots$ 存在, 则称其为 X 的 k 阶中心矩。若有 $E(X^k, Y^l), k, l=1, 2, \dots$ 存在, 则称其为 X 和 Y 的 $k+l$ 阶中心混合矩。上述关于随机变量的矩的概念的引入, 不难看出随机变量 X 的数学期望 $E(X)$ 就是 X 的一阶原点矩, 而其方差就是二阶中心矩, 协方差是随机变量的二阶中心混合矩。

二维随机变量的有关性质可以直接推广至 n 维随机变量, 其中最常用的有 n 维随机变量的协方差阵:

设 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为 n 维随机变量, 其两两变量间的二阶中心矩为:

$$C_{ij} = \text{cov}(X_i, X_j) = E[(X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))]$$

则称矩阵:

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & & & \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

为 n 维随机变量的协方差矩阵。由随机变量协方差的性质 $C_{ji} = C_{ij}$ 知, 矩阵 C 为一个对称矩阵。

1.3 随机过程的基本概念

在客观世界中有些随机现象表示的是事物随机变化的过程, 不能用随机变量或随机矢量来描述, 而需要用一族无限多个随机变量来描绘, 这就是随机过程。

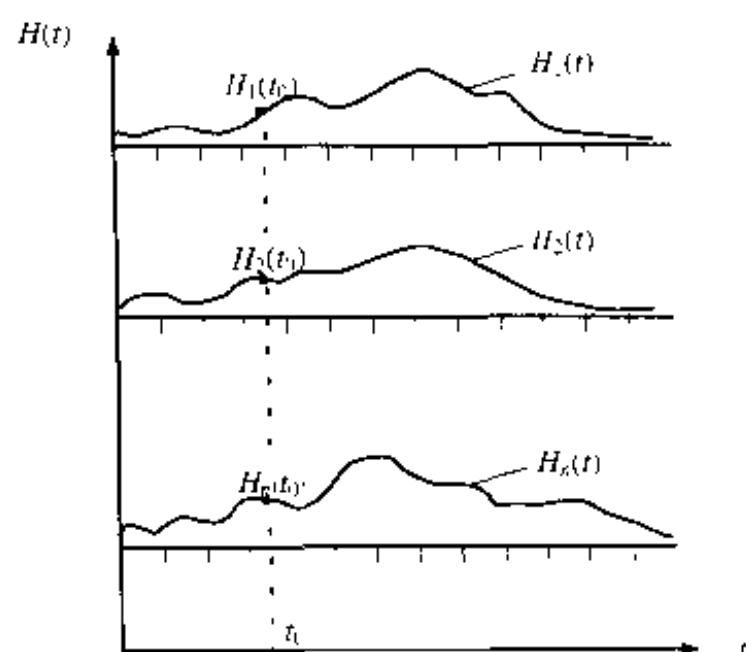


图 1.14

随机变量是指在同一条件下, 事件每次发生的结果是随机的、不确定的, 而随机过程是指在同样条件下, 事物发生的某一过程是随机的、不可准确预知的。一个过程可能是由无限多个随机变量构成, 而随机过程是由一族过程(随机出现的)构成的。如对某一个钻孔的水位进行连续观测, 以 $H_0(t)$ 来表示水位, 在第一个水文年观测到的水位曲线为 $H_1(t)$, $\cdots$, 在第 n 个水文年里观测到的水位为 $H_n(t)$, 每个水文年里所得到的样本曲线都是随机的(图 1.14)。 $\{H(t), t \in (0, \infty)\}$, 怎样理解为由一族随机变量构成的呢? 我们固定某一观测时间 t_0 , 考察 $H(t)$ 在每年 t_0 时刻的水位值 $H_1(t_0), H_2(t_0), \cdots, H_n(t_0)$, 显然

$H(t_0)$ 是一个随机变量, 而当 t 变化时, $H(t)$ 是一族随机变量。因此, $H(t)$ 是一个随机过程。

同样的道理, 一个地区大气降水的过程, 某条河流的流量或河水位变化过程都可看成是一个随机过程。由此可见, 设 $\{X(t), t \in T\}$ 为一随机过程, 一次过程的观测可以视为随机过程的一个样本函数 $X_1(t)$, 第 i 次过程的观测可视为随机过程的第 i 个样本函数 $X_i(t)$ 。 n 次试验观测的结果可得样本函数 $X_1(t), X_2(t), \cdots, X_n(t)$ 。对于随机过程 $X(t)$, 当 t 固定时, 为一个随机变量, 即随机过程在 t 时刻的状态。随机变量 $X(t), t \in T$ (t 固定) 的所有可能取的值构成一个实数集, 称为随机过程的状态空间或值域, 而每一个可能取的值称为一个状态。

随机过程可根据参数集 T 和状态空间的情况进行分类, 一般地随机过程可分为下列四类:

- (1) 离散参数、离散状态随机过程。
- (2) 离散参数、连续状态随机过程。
- (3) 连续参数、离散状态随机过程。

(4) 连续参数、连续状态随机过程。

1.3.1 有限维分布族

随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 在每一时刻 t 的状态是一维随机变量,在任意两个时刻的状态是二维随机变量。随机过程的统计特征可用其不同固定时刻的不同维随机变量(矢量)的分布的全体来表示。

对任意固定的 $t \in T$,

$$F(x, t) = P\{X(t) \leq x\}$$

称为随机过程 $X(t)$ 在 t 时刻的一维分布函数。

对于任意两个固定的 $t_1, t_2 \in T$

$$F(x_1, x_2, t_1, t_2) = P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2\}$$

称为随机过程 $X(t)$ 的二维分布函数。

一般地,对于任意固定的 $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$,

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n) = P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_n) \leq x_n\}$$

称为随机过程 $X(t)$ 的 n 维分布函数。

随机过程 $X(t)$ 的一维分布函数,二维分布函数, $\dots$, n 维分布函数的全体称为随机过程的有限维分布函数族。

1.3.2 随机过程的数字特征

随机过程的数字特征是通过随机过程的有限维分布函数的数字特征来刻画,由于随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 在每一个 $t \in T$ 的状态是一个随机变量,有其对应的数字特征。随 t 的不同取值,随机变量的数字特征是可以不同的,它的数学期望和方差是依赖于参数 t 的函数,我们称这一函数为随机过程的数字特征。设随机过程 $X(t), t \in T$ 的数学期望用 $m_X(t)$ 表示,则有:

$$m_X(t) = EX(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x, t) \quad t \in T \quad (1.17)$$

式中: $F(x, t)$ ——随机过程的一维分布函数。

若 $F(x, t)$ 为连续函数,则有:

$$m_X(t) = EX(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x, t) dx \quad t \in T \quad (1.18)$$

式中: $f(x, t)$ ——一维分布密度函数。

如图 1.15 所示,当样本曲线数增加到一定数量后, $m_X(t)$ 基本为一条固定曲线,而样本曲线围绕其上下波动。

设随机过程 $X(t), t \in T$ 的方差用 $D_X(t)$ 表示,则有:

$$D_X(t) = E[X(t) - m_X(t)]^2 \quad t \in T \quad (1.19)$$

而 $\sigma_X(t) = \sqrt{D_X(t)}$ 称为随机过程的标准差。

随机过程的方差也是过程 t 的函数,它反映了每一个样本曲线对均值曲线 $m_X(t)$ 的偏离程度。

在分析实际工程问题时,随机过程的均方值具有物理意义,随机过程的均方值用 $\Psi_X(t)$

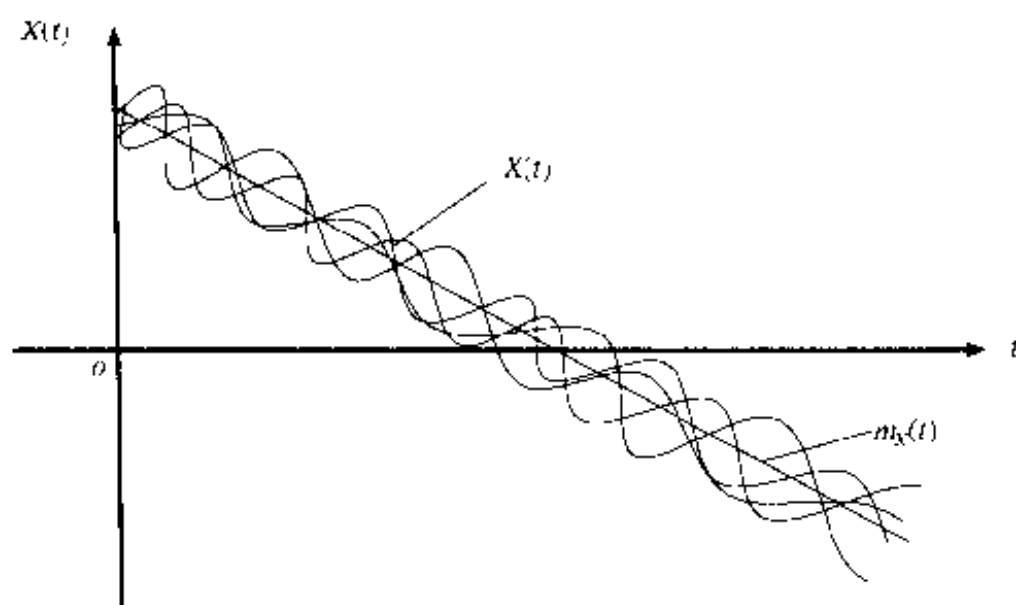


图 1.15

表示,则有:

$$\Psi_X(t) = EX^2(t) \quad (1.20)$$

从而有:

$$D_X(t) = EX^2(t) - [EX(t)]^2 \quad (1.21)$$

$$D_X(t) = \Psi_X(t) - m_X^2(t) \quad (1.22)$$

随机过程的均值函数和方差函数只考虑了随机过程在任一时刻状态的数字特征,但对随机过程在不同时刻状态之间的相关关系的分析,必须有随机过程协方差函数和相关函数的概念。

随机过程 $X(t)$ 在任意两个时刻 $t_1, t_2 \in T$, $X(t_1)$ 和 $X(t_2)$ 是两个随机变量,它们之间线性联系的密切程度可用相关函数:

$$\rho_X(t_1, t_2) = \frac{\text{cov}(X(t_1), X(t_2))}{\sqrt{DX(t_1) \cdot DX(t_2)}} \quad t_1, t_2 \in T \quad (1.23)$$

描绘:

$X(t_1)$ 与 $X(t_2)$ 的协方差称为随机过程 $X(t)$ 的(自)协方差函数,记为 $C_X(t_1, t_2)$,即:

$$\begin{aligned} C_X(t_1, t_2) &= \text{cov}(X(t_1), X(t_2)) \\ &= E[X(t_1) - m_X(t_1)] \cdot [X(t_2) - m_X(t_2)] \quad t_1, t_2 \in T \end{aligned} \quad (1.24)$$

如果两个随机过程的方差相同,可以用协方差函数绝对值的大小比较两个过程在时刻 t_1, t_2 状态的线性联系密切程度。如图 1.16(a) 和 (b) 所示的两个随机过程的数学期望和方差相同,但 (a) 过程在不同时刻的线性联系程度要小于 (b) 过程。

协方差函数还可以表示为:

$$C_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] - EX(t_1)EX(t_2) \quad (1.25)$$

相关函数可以表示为:

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] \quad t_1, t_2 \in T \quad (1.26)$$

随机过程 $X(t)$ 的协方差函数和相关函数的关系为:

$$C_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2) \quad (1.27)$$

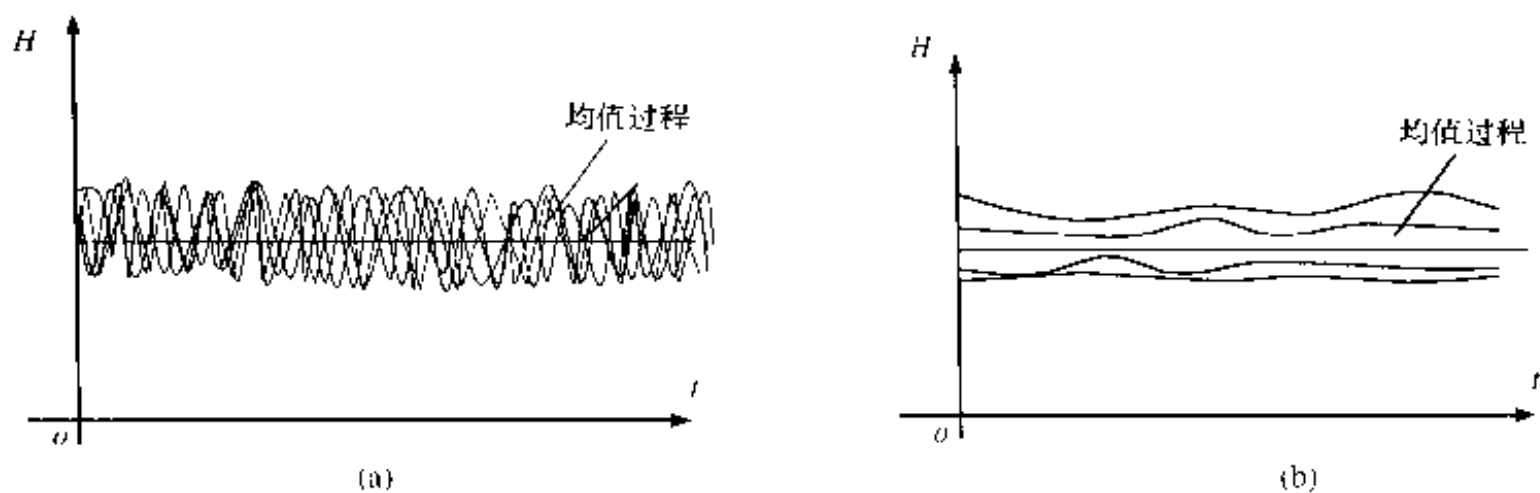


图 1.16

当随机过程的 $m_X(t) = 0$ 时,

$$C_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2)$$

当 $t_1 = t_2$ 时,

$$C_X(t_1, t_2) = E[X(t) - m_X(t)]^2 = D_X(t)$$

不难看出,数学期望和相关函数是随机过程两个最基本的数字特征,协方差函数和方差可从它们中获得。

在众多类型的随机过程中,正态(随机)过程(高斯过程)在工程中十分常见,也十分重要和有用。

如果随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的有限维概率分布是一维或多维正态分布;即对 $n \geq 1$,任意的 $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$,有:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |C|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x - m_X)^T C^{-1}(x - m_X)\right\}$$

式中: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$

$$m_X = (m_X(t_1), m_X(t_2), \dots, m_X(t_n))^T$$

$$C = \begin{bmatrix} C_X(t_1, t_1) & C_X(t_1, t_2) & \dots & C_X(t_1, t_n) \\ C_X(t_2, t_1) & C_X(t_2, t_2) & \dots & C_X(t_2, t_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_X(t_n, t_1) & C_X(t_n, t_2) & \dots & C_X(t_n, t_n) \end{bmatrix}$$

则称 $X(t)$ 是正态(随机)过程或 Gauss 过程。

1.3.3 两个随机过程的联合分布

在工程技术中,经常需要同时考虑两个或两个以上随机过程的统计特性,如对于一个地下水系统而言,大气降水的补给量 $P(t)$ 是一个随机过程,对应的地下水系统响应(如泉流量或水位动态)也是一个随机过程。我们经常要研究地下水系统输入随机过程与响应(输出)随机过程之间的关系,从而涉及研究两个随机过程的情形。

设 $X(t), Y(t) (t \in T)$ 是两个随机过程,则称 $\{(X(t), Y(t))^T, t \in T\}$ 为二维随机过程。

对于任意的 $m \geq 1$, 有 $t_1, t_2, \dots, t_m \in T, t'_1, t'_2, \dots, t'_n \in T$, 作 $m + n$ 维随机矢量

$(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_m)), (Y(t_1'), Y(t_2'), \dots, Y(t_n'))^T$ 的联合分布函数:

$$\begin{aligned} & F(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n, t_1, t_2, \dots, t_m, t_1', t_2', \dots, t_n') \\ &= P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_m) \leq x_m, Y(t_1') \leq y_1, \\ & \quad Y(t_2') \leq y_2, \dots, Y(t_n') \leq y_n\} \end{aligned}$$

称为二维随机过程 $(X(t), Y(t))^T$ 的 $m+n$ 维(联合)分布函数。

对于随机过程 $X(t), Y(t), t \in T$, 固定 $t_1, t_2 \in T$, 则:

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E[X(t_1)Y(t_2)] \quad t_1, t_2 \in T$$

为随机过程 $X(t), Y(t)$ 的互相关函数。

1.4 随机场的基本概念

对于工程技术中常见问题的研究总是基于时间尺度与空间尺度两个方面,而水文地质研究中所遇到的问题也更是集中于对水文地质条件和地下水运动规律的时空变化规律的研究。前面所讨论的随机过程是基于时间参量 t 对随机问题的研究,而随机场是随机过程概念在空间域(场域)上的自然推广。所不同的是,对于随机过程,基本参数是时间变量 t ,对于随机场,基本参数是空间变量 $S = \{x, y, z\}$ 。因此,可以把随机场视为定义在一个场域参数集上的随机变量系,在此参数集上的每一点 S_i 处都对应于一个随机变量。在理论上,随机场的参数集可以同时包括时间变量和空间变量,但在实际应用中,大多都只考虑以空间变量为基本参数的随机场,并记为 $\{X(S); S \in D \subset \mathbf{R}^n\}$, 这里 D 为 $X(S)$ 的定义域(场域), $\mathbf{R}^n$ 为 n 维欧几里得空间,点 S 的坐标可以是一维的、二维的和三维的,相应地, $X(S)$ 也分为一维、二维和三维随机场。

类似于随机过程的分析方法,也可以用有限维分布函数族来刻画随机场的概率结构。

随机场 n 维分布函数可以表示为:

$$\begin{aligned} & F(x_1, x_2, \dots, x_n, S_1, S_2, \dots, S_n) \\ &= P\{X(s_1) \leq x_1, X(s_2) \leq x_2, \dots, X(s_n) \leq x_n\} \end{aligned} \quad (1.28)$$

由于随机场有限维分布函数族结构的复杂性,使得其在实际应用中几乎不可能。因此,对于刻画随机场数字特征的研究则显得十分重要。

随机场 $X(S)$ 的数学期望定义为:

$$m(S) = E[X(S)] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot dF(x, s) \quad (1.29)$$

与随机过程相类似, $m(S)$ 反映了 $X(S)$ 的样本函数集合的平均中心点组成的场域曲面。

随机场 $X(S)$ 的自相关函数定义为:

$$\begin{aligned} & R_X(S_1, S_2) = E[X(S_1)X(S_2)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 P(x_1, s_1, x_2, s_2) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (1.30)$$

式中: s_1, s_2 ——空间场中任意两个点;

x_1, x_2 ——两个点的随机变量。

随机场 $X(S)$ 的自协方差函数定义为:

$$C_X(S_1, S_2) = E[(X(S_1) - m_X(S_1)) \cdot (X(S_2) - m_X(S_2))] \quad (1.31)$$

同样,协方差函数与相关函数之间存在着下列关系:

$$C_X(S_1, S_2) = R_X(S_1, S_2) - m_X(S_1) \cdot m_X(S_2)$$

与随机过程的平稳性相对应,在随机场中有所谓均匀性的概念,一个随机场,若在空间坐标的任一平移下,其有限维分布函数保持不变,则称该随机场是均匀的。一个随机场可以是一维均匀、二维均匀或三维均匀,实际上,对于一个随机场,若能满足条件:

$$m_X(S) = \text{Constant}$$

$$R_X(S_1, S_2) = R_X(r)$$

则称该随机场是广义均匀的,式中 r 是指空间点 S_1, S_2 之间的距离,也就是说随机场相关系数只受空间点距的影响,而与点的具体位置无关。

由于水文地质学研究的对象往往是针对一个独立的含水系统而言,在我们的研究中经常要了解含水系统地下水位面的变化规律和分布规律,含水层露头区不同位置大气降水补给强度问题,单个含水层水文地质参数的分布规律等都属于典型的二维随机场问题。而对于含水层边界中一类边界(如河流等)在不同位置的水位分布,二类边界在不同位置的水交替量分布等问题属典型的一维随机场问题。借助于水文地质研究的基本概念,不难知道,随机场也有各向同性和各向异性的概念。

1.4.1 随机场的相关结构性

对于随机场研究的实际应用而言,确定随机场的相关函数或协方差函数往往是问题开始解决的第一步。而对于均匀随机场 $\{X(S); S \in D \subset \mathbf{R}^n\}$,由于其均值函数为一常量,因此,可将其表示为如下形式:

$$X(S) = X_0(S) + X_r(S) \quad (1.32)$$

式中: $X_0(S)$ ——随机场的均值函数;

$X_r(S)$ ——零均值随机场。

对 $X_r(S)$ 而言,因 $m_X(S) = 0$,所以 $R_X(S_1, S_2) = C_X(S_1, S_2)$,即协方差函数与相关函数相同。实际上 $X_r(S)$ 反映了随机场每个样本函数对均值场域的离散程度。

对于均匀随机场 $X(S)$ 的研究,可通过对 $X_r(S)$ 的研究进行。随机场的相关结构一般是指 $X_r(S)$ 的协方差函数或相关函数,常见的均匀随机场相关结构类型有如下几种(用归一化协方差函数表示)。

(1) 三角型相关结构:

$$\rho_X(S_1, S_2) = \begin{cases} 1 - \frac{|S_1 - S_2|}{a} & |S_1 - S_2| < a \\ 0 & |S_1 - S_2| \geq a \end{cases} \quad (1.33)$$

(2) 指数型相关结构:

$$\rho_X(S_1, S_2) = \exp\left(-\frac{|S_1 - S_2|}{a}\right) \quad (1.34)$$

(3) 高斯型相关结构:

$$\rho_X(S_1, S_2) = \exp\left(-\frac{|S_1 - S_2|^2}{a^2}\right) \quad (1.35)$$

式中: a ——相关尺度函数;

$$\rho_X = \frac{C_X(S_1, S_2)}{\sigma_X(S_1) \cdot \sigma_X(S_2)} \text{——归一化协方差函数}$$

对于非均匀随机场 $X(S)$ 的相关结构则较为复杂,有兴趣的读者可参阅文献[37]。

1.4.2 随机场的离散化问题

类似于对于其他场域问题的研究方法,对于定义的随机场域,也可通过空间区域划分的方法,将连续的随机场转化为离散的随机变量的集合,对于离散化后的每一个单体单元,可将其视为一个随机变量,从而将对随机场的研究转换为对有限多个互相关联的随机变量的研究。将连续的随机场转化为离散的随机变量的集合。这种单元的划分有些类似于有限单元法中的有限元划分。不过,对于有限元划分,要求划分后的单元可以合成为原连续体,一般要求位移连续、水位连续、物质守恒等原则。而对于随机场的离散化,考虑问题的重点在于离散后随机变量的数字特征(主要为二阶数字特征)。按照离散后随机变量与离散单元随机场的关系,随机场离散化的主要方法有 midpoint 法、形函数法(节点法)与局部平均法,以二维随机场为例说明这三种离散化方法的基本思想。

图 1.17 所示为一个随机场的离散化剖分示意图。

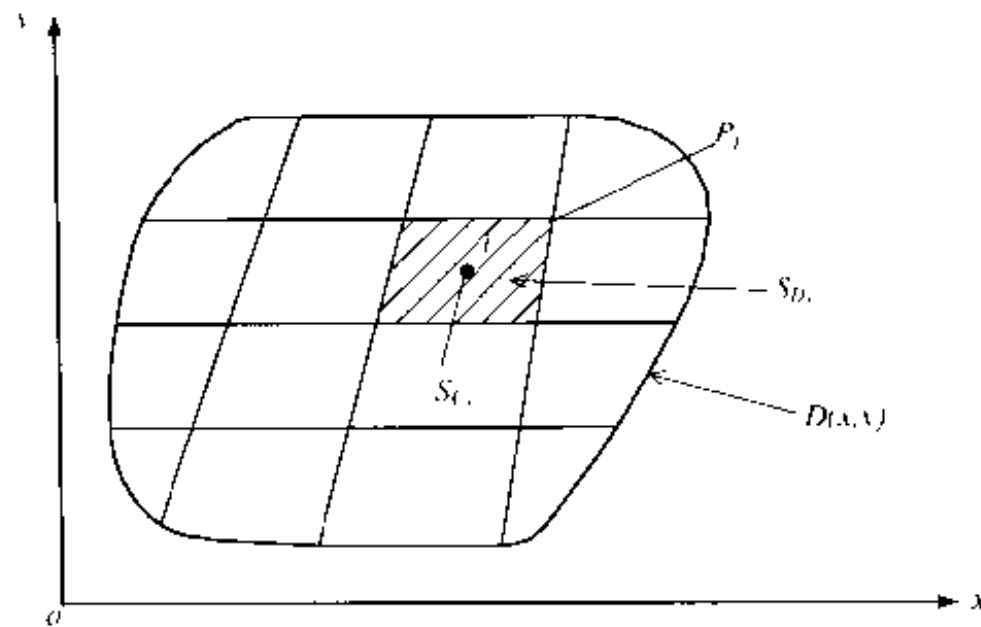


图 1.17 随机场剖分示意图

$D(x, y)$ —随机场域; S_{D_i} —单元 i 的面积; S_{C_i} —单元 i 的几何形心点; P_i —单元的节点编号,总单元数为 n ,总节点数为 m ; S_{D_i} — S_{D_i} 中任一点

用中点法进行随机场离散是指以单元几何形心点上定义的随机变量 $X(S_{C_i})$ 代替单元随机场 $\{X(S); S \in D\}$, 即取:

$$X(S_{D_i}) = X(S_{C_i})$$

在此基本原则下,原随机场离散为随机变量集合 $\{U_i = X(S_{C_i}), i = 1, 2, \dots, n\}$, 各变量的数字特征及变量间相关特征由其几何形心点随机变量 U_i 的值来决定。如:

$$E(U_i) = E[X(S_{C_i})]$$

$$\sigma^2(U_i) = \sigma^2[X(S_{C_i})]$$

$$C_{ij} = \text{cov}(V_i, V_j) = \text{cov}[X(S_{C_i}), X(S_{C_j})]$$

很明显,利用中心点法进行随机场离散,只有当单元划分的很小或随机场随坐标的不同变异程度较小时才能取得较好的精度。

为了改变中点法的精度,另一种途径是利用单元节点随机变量的集合代替(近似)整个随机场,通过节点间形函数的插值来逼近原单元内随机场。换句话说,就是单元随机场由场在节点上的随机变量通过形函数的插值得到,即:

$$X(S_D) = \sum_{j=1}^q N_j(S_D) \cdot X(S_{p_j}) \quad S_D \in D_i$$

式中: q ——单元节点个数;

$N_j(S_D)$ ——插值形函数,一般取多项式形式。

在这种剖分原则下,原随机场离散为随机变量的集合。

$\{V_j = X(S_{p_j}), j = 1, 2, \dots, m\}$ 。各变量的数字特征及变量间相关特征由节点随机变量的相应值确定。

单元随机场数字特征与节点随机变量数字特征之间关系为:

$$E[X(S_D)] = \sum_{j=1}^q N_j(S_D) \cdot E[X(S_{p_j})] \quad S_D \in D_i$$

对于局部平均法,则采用各离散单元的局部平均随机变量来代表单元随机场,即:

$$X(S_D) = \frac{1}{S_{D_i}} \int_{S_{D_i}} X(S_D) dS_D = V_i \quad S_D \in D_i$$

于是,原随机场离散为随机变量的集合 $\{V_i, i = 1, 2, \dots, n\}$, 随机变量 V_i 的均值(如图 1.18)为:

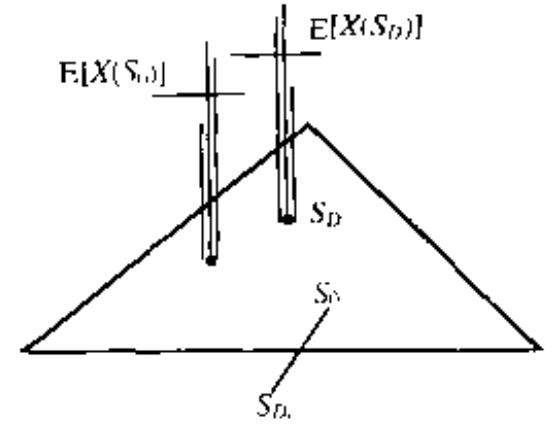


图 1.18

$$E[V_i] = \frac{1}{S_{D_i}} \int_{S_{D_i}} E[X(S_D)] dS_D \quad S_D \in D_i$$

V_i 的方差为:

$$\sigma^2[V_i] = \frac{1}{S_{D_i}^2} \int_{S_{D_i}} \int_{S_{D_i}} \sigma^2[X(S_D)] dS_D dS_D$$

V_i 与 V_j 的协方差定义为:

$$C_{ij} = \text{cov}(V_i, V_j) = \frac{1}{S_{D_i}^2} \cdot \frac{1}{S_{D_j}^2} \int_{S_{D_i}} \int_{S_{D_j}} \text{cov}(X(S_D), X(S_{D'})) dS_D dS_{D'} \quad S_D \in S_{D_i} \quad S'_{D'} \in S_{D_j}$$

第2章 随机分析与随机模拟方法

2.1 蒙特卡罗方法

蒙特卡罗方法(Monte Carlo method)是一种通过随机变量的数字模拟和统计分析来求取数学物理、工程技术问题近似解的数值方法,利用这种方法求解问题的过程可以归纳为下列三个基本步骤:

(1) 随机变量的抽样试验。按基本随机变量(输入随机变量)的已知概率分布进行随机抽样(数字模拟)。

(2) 样本反应求解。对每个抽取的样本,按问题的性质采用确定性的控制数学、物理方程求取样本反应。

(3) 计算反应量的统计量估计。对所有样本反应,按所求解答的类型分别求取输出随机变量的均值、方差或概率分布。

当求解确定性问题时,首先,要根据所提出的问题构造一个简单、适用的概率模型,使问题的解对应于该模型中随机变量的某些数字特征(如概率、数学期望、方差等);然后,在高速运行的计算机上生成随机数,并对随机数进行统计分析试验;最后,利用试验所获结果求出统计特征的估计值作为问题的近似解。总结以上思想,可以得出利用蒙特卡罗方法求解确定性问题的基本步骤为:

(1) 根据所要求解的实际问题来构造概型,并使概型的某些统计特征恰好相当于所要求的问题的解。

(2) 根据所建立的概率模型,设计、使用一些加速收敛的方法,以求加速收敛并提高计算精度。

(3) 给出在计算机上产生概型中各种不同分布随机变量的方法。

(4) 统计处理模拟结果,给出问题的近似解并做解的精度估计。

蒙特卡罗方法虽然可以求解许多确定性工程技术问题,但其独到之处还应该在于求解随机性问题。用蒙特卡罗方法求解随机性问题时,一般首先,根据问题的物理性质建立随机模型;然后,再根据模型中各个随机变量的分布,在计算机上产生随机数,进行大量的统计试验,以取得所求问题的大量试验值;最后,根据这些试验结果求它的统计特征量,从而获得所求问题的解。由此可见,用蒙特卡罗方法求解随机问题的步骤与求解确定性问题的步骤基本一致。

总之,蒙特卡罗方法的理论基础是概率论中的大数定律。设在 N 次独立试验中, n 为事件 A 出现的次数,而 $P(A)$ 为事件 A 在每次试验中出现的概率,贝努利大数定律指出,对于任意 $\varepsilon > 0$, 当 $N \rightarrow \infty$ 时,事件 A 出现的频率 $\frac{n}{N}$ 的概率收敛于事件的概率。即

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{n}{N} - P(A)\right| < \varepsilon\right\} = 1 \quad (2.1)$$

当随机变量满足独立分布时,若随机变量序列 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ 的分布相同, ξ_i 具有有限的数学期望 $E(\xi_i) = a, i = 1, 2, \dots, N$, 则根据利欠莫哥洛夫大数定律, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 当 $N \rightarrow \infty$ 时, 变量 $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i$ 将以概率 1 收敛于期望值 a , 即

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i - a\right| < \varepsilon\right\} = 1 \quad (2.2)$$

在蒙特卡罗方法中, 采用简单抽样方法进行随机变量的数字模拟, 因此其所抽取的子样为具有同分布性质的独立随机变量, 当抽取的样本个数足够大时, 样本均值将以概率 1 收敛于分布均值, 而事件 A 出现的频率 $\frac{n}{N}$ 则以概率收敛于事件 A 出现的概率, 这样就保证了蒙特卡罗方法的概率收敛性。

2.1.1 均匀分布随机数的生成

根据所求解问题性质的不同, 其基本随机变量可能属于不同的概率分布, 为了产生不同分布类型的随机变量的抽样值 (随机数), 一般需先产生一个在 $[0, 1]$ 上均匀分布的随机变量的抽样值, 然后按照给定的概率分布类型将其转化为所需随机变量的抽样值。因此, 均匀分布随机变量随机数的生成是蒙特卡罗方法实现的基础。利用数值法产生的均匀随机变量的抽样值称之为伪随机数, 这是因为数值方法的基础是某一数学递推公式, 按这类递推公式产生的抽样与 $[0, 1]$ 均匀分布中的抽样在统计性质上不可能完全相同。

数学递推公式的一般形式是:

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}) \quad (2.3)$$

式中: $f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k})$ ——某一给定的函数形式。根据这一函数式, 当给定一组初值, $x_0, x_{-1}, \dots, x_{-k}$ 后, 便可依次求出 $x_1, x_2, \dots, x_m$ 。最常用的 $(0, 1)$ 均匀分布随机数生成的递推公式有:

(1) 乘同余法。用以产生 $(0, 1)$ 均匀分布随机数的递推公式为:

$$x_i = \lambda x_{i-1} (\text{mod } M) \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

式中: λ, M 和 x_0 ——预先给定的常数。

式(2.4)的意义是指以 M 除以 λx_{i-1} 后得到的余数记为 x_i 。由于是余数, 所以 $|x_i| \leq |M|$, 即有:

$$r_i = \frac{|x_i|}{|M|} \leq 1 \quad i = 1, 2, \dots$$

如此所得的随机数序列 $r_1, r_2, \dots, r_i$ 为具有 $(0, 1)$ 均匀分布的随机数。

由式 (2.4) 不难看出, 不同的 x_i 最多只能有 M 个, 相应地不同的随机数 r_i 也最多只能有 M 个。所以当产生的随机数 r_i 个数多于 M 个时, 就会出现循环数, 这样, 便再不能看成是随机数。为了使所产生的随机数能经得住数理统计中的独立性和均匀性检验, 需要合理选择随机数生成参数 x_0, λ 及 M 。表 2.1 所列为几个经过检验的参数, 以供参考。

表 2.1

M	λ	x_0
2^{32}	5^{13}	1
2^{36}	5^{13}	1
2^{42}	5^{17}	1

(2) 混合同余法。混合同余法的递推公式为：

$$\begin{cases} x_i = (\lambda x_{i-1} + C) \pmod{M} \\ r_i = \frac{x_i}{M} \end{cases} \quad (2.5)$$

通过适当地选取参数,可以改变伪随机数的统计性质。其他有关伪随机数的生成技术读者可参阅文献[32,41]。

2.1.2 任意分布随机数的生成

任意分布随机数的生成是以(0,1)均匀分布随机数为基础,通过适当的数学变换来形成,可以证明有下列任意分布随机数生成公式。

(1) (a, b) 上均匀分布随机数的生成公式为：

$$X_i = a + (b - a)r_i \quad (2.6)$$

(2) 具有指数分布概率密度 $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} (x \geq 0)$ 的随机数生成公式为：

$$x_i = -\frac{1}{\lambda} \ln r_i \quad (2.7)$$

(3) 正态分布 $N(0,1)$ 随机数生成公式为：

$$x_i = \frac{\left(\sum_{i=1}^n r_i - \frac{n}{2} \right)}{\sqrt{\frac{n}{12}}} \quad (2.8)$$

(4) 正态分布 $N(\mu, \sigma)$ 随机数生成公式为：

将式(2.8)的 x_i 代入式：

$$y_i = \mu + \sigma x_i \quad (2.9)$$

即可得 $N(\mu, \sigma)$ 分布随机数。

上述各式中的 r_i 为(0,1)均匀分布随机数。

2.1.3 随机数的统计检验

为了进一步了解所生成的随机数是否具有我们所需要的随机数特性,往往需要对所生成的随机数进行参数检验,均匀性检验和独立性检验。参数检验主要是为了检验随机数的子样均值和理论均值的差异是否显著,(0,1)上均匀分布的随机变量 R 的期望值和方差分别为：

$$E(R) = \int_0^1 r dr = \frac{1}{2}$$

$$E(R^2) = \int_0^1 r^2 dr = \frac{1}{3}$$

$$D(R) = E(R^2) - [E(R)]^2 = \frac{1}{12}$$

设随机变数 R 共有 n 个观测值 $r_1, r_2, \dots, r_n$, 则由中心极限定理得知:

$$U = \frac{\bar{r} - \frac{1}{2}}{\sqrt{D(R)}/\sqrt{n}} = \sqrt{12n} \left(\bar{r} - \frac{1}{2} \right) \quad (2.10)$$

式中:

$$\bar{r} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i$$

渐近服从标准正态分布 $N(0,1)$, 可以进行 U 检验。当给定显著性水平后, 即可根据正态分布表确定临界值, 据此判断 $\bar{r}$ 与其期望值 $E(R)$ 之差异是否显著, 从而决定能否把 $r_1, r_2, \dots, r_n$ 看做是 $(0,1)$ 均匀分布随机变量 R 的 n 个独立取值。

均匀性检验又称频率检验, 它检验随机数的经验频率与理论频率的差异是否显著。把 $(0,1)$ 区间分成 k 等份, 以 $\left(\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right) (i=1, 2, \dots, k)$ 表示第 i 个小区间, 如 r_s 是 $(0,1)$ 上均匀分布的随机变量 R 的一个取样值, 则它落在任一小区间的概率 P_i 均匀等于这些小区间的长度 $\frac{1}{k}$, 故 n 个值落在任一个小区间的平均数为 $m_i = nP_i = n/k$, 设 n 个 r_s 值落入第 i 个小区间有 n_i 个, 则统计量:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - m_i)^2}{m_i} = \frac{k}{n} \sum_{i=1}^k \left(n_i - \frac{n}{k} \right)^2 \quad (2.11)$$

渐近地服从 $\chi^2(k-1)$ 分布。据此可进行显著性检验。

独立性检验主要是检验随机数 $r_1, r_2, \dots$, 中前后各数的统计相关性是否显著。两个随机变数的相关系数反映它们之间的线性相关程度, 若两个随机变数相互独立, 则它们的相关系数 $\rho_K = 0$, 故可通过相关系数来检验随机数的独立性。

设给定 n 个随机数 $r_1, r_2, \dots, r_n$, 前后距离为 k 的样本相关系数的计算公式为:

$$\hat{\rho}_k = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n-k} r_i r_{k+i} - (\bar{r})^2 / S^2 \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.12)$$

式中:

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (r_i - \bar{r})^2$$

当独立性假设 ($\rho = 0$) 成立时, 则当 n 充分大 (如 $n > 50 + k$) 时, 统计量 $U = \hat{\rho}_k \sqrt{n-k}$ 渐近地服从标准正态分布 $N(0,1)$, 故可进行 U 检验。

2.2 随机模拟方法

2.2.1 随机模拟的直接算法

对随机问题 (带有场域随机性或时域随机性) 分析的直接模拟方法的基本步骤是:

- (1) 建立描述和刻画系统行为功能的确定性分析模型, 并确定其求解方法。
- (2) 分析和确认基本的随机变量 (随机场) 及其分布函数。采用蒙特卡罗方法产生随机

数(随机样本)。

(3) 根据所产生的随机样本,按确定性分析方法求解所模拟问题的输出量(系统反应)。

(4) 计算分析系统反应量的样本反应估计值,如样本反应均值,样本反应方差及样本反应谱密度估计等。

2.2.2 Neumann 展开算法

对许多工程问题的分析计算最终都归结为计算求解下列形式的线性方程组:

$$KH = F \quad (2.13)$$

式中: K ——受随机变量影响的系统结构整体刚度矩阵;

F ——由边界和系统外部条件确定的列向量;

H ——系统状态反应列向量。

由于矩阵 K 一般具有对称正定性,所以可用 Cholesky 分解法求解上述方程,即取:

$$K = LL^T \quad (2.14)$$

而 H 可由下列两步求解过程给出:

$$LX = F \quad (2.15)$$

$$L^T H = X \quad (2.16)$$

在随机模拟的直接算法中,每产生一次随机样本结构,就要进行一次(2.14)式的分解运算,而为了获得更加精确的随机样本的统计量,必然会有大量的随机样本产生,所以其计算工作量非常之大,而利用 Neumann 展开思想,可以在全部模拟计算过程中只进行 Cholesky 分解,从而使计算工作量大大降低。为此设:

$$K = K_0 + \Delta K \quad (2.17)$$

式中: K_0 ——均值参数结构所对应的系统整体结构矩阵;

ΔK ——样本结构关于均值参数结构的偏差部分。

显然:

$$\Delta K = K - K_0 \quad (2.18)$$

由式(2.13)及式(2.17)有:

$$H = K^{-1}F = (K_0 + \Delta K)^{-1}F = (I + K_0^{-2}\Delta K)^{-1}K_0^{-1}F \quad (2.19)$$

令:

$$P = K_0^{-2}\Delta K \quad (2.20)$$

则由 Neuman 展开公式有:

$$(I + K_0^{-2}\Delta K)^{-1} = I - P + P^2 - P^3 + \cdots \quad (2.21)$$

将式(2.21)代入式(2.19)有:

$$\begin{aligned} H &= (I - P + P^2 - P^3 + \cdots)K_0^{-1}F \\ &= H_0 - PH_0 + P^2H_0 - P^3H_0 + \cdots \\ &= H_0 - H_1 + H_2 - H_3 + \cdots \end{aligned} \quad (2.22)$$

显然可得下列递推公式:

$$PH_{i-1} = H_i \quad (i = 1, 2, \cdots) \quad (2.23)$$

将式(2.20)代入式(2.23)并稍作变换即有:

$$K_0 H_i = \Delta K H_{i-1} \quad (i = 1, 2, \cdots) \quad (2.24)$$

于是,一旦由 $K_0 H_0 = F$ (2.25)

求出 H_0 ,即可用递推公式依此求得 $H_1, H_2, \dots, H_n$ 。代入(2.22)使得样本反应量 H 。

原则上,Neumann 展开算法只是随机模拟算法实施过程中为节省运算工作量而采取的一项技术措施,而对于随机模拟的思想则未做任何改进。

2.2.3 摄动算法

对于确定性物理问题的控制方程可以表示为带有小参数的方程。

$$L(H, X, \epsilon) = 0 \quad (2.26)$$

式中: L ——一般的线性算子;

H ——所研究物理问题的解, H 一般可表示为 $H = H(X, \epsilon)$;

X ——控制自变量;

ϵ ——小参数。

一般地说,方程(2.26)所描述的问题往往不能精确地解出,但根据 H 为 X 和 ϵ 的函数且 ϵ 是小参数的特点,可以用 ϵ 的一个渐近展开式来表示 H ,即:

$$H(x, \epsilon) = H_0(x) + \epsilon H_1(x) + \dots + \epsilon^n H_n(x) \quad (2.27)$$

式中 $H_i(x)$ 与 ϵ 无关。

将式(2.27)代入式(2.26),并将 ϵ 的同次幂系数合并起来可得:

$$(L_0 H_0 - h) + (L_0 H_1 + L_1 H_0)\epsilon + (L_0 H_2 + L_1 H_1 + L_2 H_0)\epsilon^2 + \dots = 0 \quad (2.28)$$

式中: $L_0, L_1, L_2, \dots$ ——空间 H 中的线性算子;

h ——关于 x 的实函数,可根据具体情况给出它们的形式。

由于方程(2.28)对所有的 ϵ 都必须成立,又因为 ϵ 的序列是线性无关的,故 ϵ 各次幂前面的系数项必须自动为零,即有:

$$\left. \begin{aligned} L_0 H_0 &= h \\ L_0 H_1 &= -L_1 H_0 \\ L_0 H_2 &= -L_1 H_1 - L_2 H_0 \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

式(2.29)构成了关于 $H_i(x)$ 的递推方程组。

根据边初值条件可依次求得序列 $H_0, H_1, H_2, \dots$ 从而代入式(2.27)可得 $H(x, \epsilon)$ 的近似解。

将上述关于确定性物理问题的摄动求解思想推广到带有随机参数的问题中来,就构成了随机参数摄动问题,为此,设所考虑问题的随机微分算子方程为:

$$L(y, x, \xi) = 0 \quad (2.30)$$

式中: L ——算子符号;

x ——自变量;

ξ ——某一给定分布的随机变量;

Y ——随机函数,可表示为 $Y = Y(x, \xi)$ 。

随机变量 ξ 可转化为用标准随机变量表示的形式:

$$\xi = \xi_0 + \xi_r b = \Psi(b) \quad (2.31)$$

式中: ξ_0 ——随机变量 ξ 的均值;

ξ_r ——随机变量 ξ 的均方差;

b ——均值为零, 方差为 1 的标准化随机变量。

将式(2.31)代入式(2.30)有:

$$L[y, x, \Psi(b)] = 0 \quad (2.32)$$

利用随机函数的幂级数展开式可将解 $Y(x, \xi)$ 展开为关于随机变量 b 的级数:

$$\begin{aligned} y(x, \xi) &= y[x, \Psi(b)] \\ &= y_0[x, \Psi(\bar{b})] + \left. \frac{dy}{db} \right|_{b=0} (b - \bar{b}) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 y}{db^2} \right|_{b=0} (b - \bar{b})^2 + \dots \end{aligned}$$

由于 $b = 0$, 故上式可表示为:

$$y(x, \xi) = y_0[x, \Psi(b)] + \left. \frac{dy}{db} \right|_{b=0} b + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 y}{db^2} \right|_{b=0} b^2 + \dots \quad (2.33)$$

由于 y 未知, 所以系数式 $\left. \frac{dy}{db} \right|_{b=0}$ 等也是未知的, 但可将上式等价地写为:

$$y(x, \xi) = U_0(x) + bU_1(x) + b^2U_2(x) + \dots \quad (2.34)$$

显然, 上式中的系数 $U_i(x)$ 与 b 无关, 为一确定性函数。

将式(2.34)代入式(2.32)并经适当的运算后将 b 的不同次幂系数项合并起来, 可得:

$$(L_0 U_0 - h) + (L_0 U_1 + L_1 U_0)b + (L_0 U_2 + L_1 U_1 + L_2 U_0)b^2 + \dots = 0 \quad (2.35)$$

式中: $L_0, L_1, L_2, \dots, L_n$ ——确定性算子;

h ——关于 x 的实函数。

由于随机变量 b 具有任意性, 因此, 式(2.35)成立的充分条件是各系数项皆为零, 由此可得:

$$\left. \begin{aligned} L_0 U_0 &= h \\ L_0 U_1 &= -L_1 U_0 \\ L_0 U_2 &= -L_1 U_1 - L_2 U_0 \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (2.36)$$

上述方程组为一组确定性算子方程, 当给定边界条件和初值条件以后, 便可依次求出解 $U_0, U_1, U_2, \dots$ 回代方程(2.13)后即可得到 $y(x, \xi)$ 的形式解答, 而解答的均值与方差分别为:

$$E[Y(X, \xi)] = U_0(x) + U_1(x) + \dots \quad (2.37)$$

$$D[y(x, \xi)] = U_1^2(x) + U_2^2(x) + \dots \quad (2.38)$$

第3章 随机规划的基本理论

随机规划是指含有随机变量的数学规划问题。它是20世纪50年代以后兴起的一门新兴学科,是随着数学规划的应用日趋深入和电子计算机的广泛应用而逐步发展起来的。在许多实际工程和物理问题中,由于随机因素的影响,规划的目标函数或约束条件中不可避免地带有随机变量。因此,在管理科学、运筹学、经济学、最优控制等学科和实际工程中,随机规划模型显得越来越重要。本章在论述随机规划理论与基本概念时,认为读者已具备有数学规划理论方面的基本知识。

随机规划实际上是一种不确定性规划,在现实世界中,人们在制定决策时会碰到种种不确定性现象,其中随机现象是最常见的不确定性现象之一。一个复杂的决策系统通常具有多维性、多样性、多功能性和多准则性,并带有多种随机参数。对于随机规划问题中所出现的随机变量,出于不同的管理目标和技术要求,所采用的处理方法也不尽相同。首先,一个最自然的方法就是取这些随机变量所对应的函数的概率平均值(数学期望),从而把随机规划问题转化为一个确定性的数学规划问题。这种在期望值约束条件下,使目标函数的概率期望值达到最优的模型通常称之为期望值模型。第二种方法是机会约束规划,由 Charns 和 (Cooper)提出^[46],主要针对约束条件中含有随机变量,且必须在观测到随机变量的实现之前做出决策的问题。考虑到所做的决策在不利的情况发生时可能不满足约束条件,从而采用一种原则:即允许所做决策在一定程度上不满足约束条件,但该决策应是约束条件成立的概率不小于某一置信水平 α 。对于一些特殊情况,机会约束规划问题可以转化为等价的确定性数学规划问题,但对较为复杂的机会约束规划问题,通常很难做到这一点。因此,寻求新的求解方法就显得尤为重要,如遗传算法是人们正在探索和尝试的算法之一。

在解决实际问题时,根据问题中所含随机变量的性质不同以及随机变量的预先可观测性条件不同,可以采用不同的处理方法,从而导致不同的数学规划模型。

数学规划问题中含有随机变量的情况经常发生。例如,要设计和开发一个水源地,除水源地的供水保障外,往往还要求地下水位要控制和规划在一定的形态条件下,而影响这些状态的因素有大气降水、地面蒸发、河流流量、水源地区农田灌溉等,这些因素又都带有随机性,在规划之前,我们并不知道这些因素在规划期间的实际发生情况,但可知道这些量可能取值的概率分布。在这些受随机因素影响的约束条件下,如何设计水源地的开采量及开采方式才能既保障供水又不破坏约束条件,这就构成了一个随机规划问题。

3.1 均值模型

当数学规划问题中出现随机变量时,处理这些随机变量的一个很自然的方法是利用这些随机变量的概率平均值(数学期望)来替代随机变量本身,从而形成一个确定性的数学规划问题,这种方法简单实用,但并不是在所有条件下都合适,在很多情况下,利用随机变量均

值所做的决策往往会破坏约束条件。下列规划模型就是一例：

例：设 (a, b) 是矩形 $\{1 \leq a \leq 4, 1/3 \leq b \leq 1\}$ 内均匀分布的随机向量，求解下列线性规划问题：

$$\text{LP} \begin{cases} \min x_0 = x_1 + x_2 \\ \text{s.t. } ax_1 + x_2 \geq 7 \\ bx_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

容易求出 a, b 的数学期望值分别为 $E(a) = \frac{5}{2}, E(b) = \frac{2}{3}$ ，如用 $E(a), E(b)$ 分别代替原规划模型中的 a, b ，则形成下列确定性线性规划问题：

$$\overline{\text{LP}} \begin{cases} \min x_0 = x_1 + x_2 \\ \text{s.t. } \frac{1}{2}x_1 + x_2 \geq 7 \\ \frac{2}{3}x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

利用单纯形法容易得知上述线性规划问题有最优解：

$$x_1^* = \frac{18}{11}, \quad x_2^* = \frac{32}{11}$$

若设

$$x^* = \left(\frac{18}{11}, \frac{32}{11} \right)$$

$$D = \{(x_1, x_2) | (ax_1 + x_2 \geq 7, bx_1 + x_2 \geq 4)\}$$

则有：

$$\begin{aligned} P\{x^* \in D\} &= P\left\{\frac{18}{11}a + \frac{32}{11} \geq 7, \frac{18}{11}b + \frac{32}{11} \geq 4\right\} \\ &= P\left\{a \geq \frac{5}{2}, b \geq \frac{2}{3}\right\} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

它说明该规划问题的最优解 x^* 位于可行域 D 的概率仅为 0.25。显然这一随机规划问题的最优解失去了它的使用意义。于是，就出现了新的处理规划问题中随机变量的方法，其中最常见的一种方法就是等待观察到随机变量的实现以后，解出相应的规划问题。另一种则是在观察到随机变量的实现之前便做出决策，但应事先要求做出的决策是不可能解的概率不超过某一个给定的数。

3.2 分布规划模型

分布规划模型是等待观察到随机变量的实现后再做决策的一种随机规划模型。假设某一数学规划问题的各项系数中含有随机变量，在观测到这些随机变量的实现以后，这些系数将变为已知的确定数，从而得到相应的确定性规划问题。对应于不同的观察值，便可得到不同的确定性规划问题，从而有不同的最优解和最优值。这时，我们除了要解决各个确定性规划问题本身以外，还要知道这些最优解，最优值的概率分布情况，从而形成了分布问题随机线性规划模型。也就是根据随机变量的概率分布而求得最优解的概率分布。

分布问题随机线性规划模型一般可表示为:

$$\begin{cases} X = \max C(t)X \\ \text{s.t. } A(t)X \leq b(t) \\ X \geq 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

式中: $t = (t_1, t_2, \dots, t_r)^T$ 是概率空间中的 r 个随机向量。

$$\begin{aligned} C(t) &= (C_1(t), C_2(t), \dots, C_n(t))^T \\ &= \begin{bmatrix} C_{10} + C_1(t_1, t_2, \dots, t_r) \\ C_{20} + C_2(t_1, t_2, \dots, t_r) \\ \vdots \\ C_{n0} + C_n(t_1, t_2, \dots, t_r) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

是受随机向量 t 影响的价格系数, 即价格系数是随机向量的函数。

$$\begin{aligned} b(t) &= (b_1(t), b_2(t), \dots, b_m(t))^T \\ &= \begin{bmatrix} b_{10} + b_1(t_1, t_2, \dots, t_r) \\ b_{20} + b_2(t_1, t_2, \dots, t_r) \\ \vdots \\ b_{m0} + b_m(t_1, t_2, \dots, t_r) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

是受随机向量影响的规划模型的右端项。

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t_1, t_2, \dots, t_r) & a_{12}(t_1, t_2, \dots, t_r) & \cdots & a_{1n}(t_1, t_2, \dots, t_r) \\ a_{21}(t_1, t_2, \dots, t_r) & a_{22}(t_1, t_2, \dots, t_r) & \cdots & a_{2n}(t_1, t_2, \dots, t_r) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}(t_1, t_2, \dots, t_r) & a_{m2}(t_1, t_2, \dots, t_r) & \cdots & a_{mn}(t_1, t_2, \dots, t_r) \end{bmatrix}$$

是受随机向量影响的规划模型的系数矩阵。

$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为决策变量向量。

已知 t 的联合概率分布, 且随机变量 t 在其定义域 T 内取值, T 是 t 的样本空间。若记:

$$r(t) = \max \{ C(t)X \mid A(t)X \leq b(t), X \geq 0 \} \quad (3.2)$$

当随机变量 t 在 T 上变化时, 显然 $r(t)$ 也随之变化, 在一定条件下, 当 t 随机地变化时, 可以证明 $r(t)$ 是一随机变量。对于任一给定的点 $X \geq 0$, 可能有一些 t 使得它可行, 而另一些 t 则使它不可行。分布规划模型就是要求得 $r(t)$ 的分布函数 $F(X)$, 从而获得问题的解。这就是分布问题规划模型的基本思路。从理论上讲, 只要找出随机规划问题的各个可行区域, 便可计算出在不同可行域上 $r(t)$ 的分布函数。有关 $r(t)$ 的分布函数及求解方法参阅文献[54]。

例: 求解下列随机线性规划问题:

$$\begin{cases} r(t) = \max [(t-2)x_2 + 3x_3 - 2tx_5] \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 7 \\ \text{s.t. } -2x_2 + 4x_3 + x_4 = 12 \\ -4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 = 0 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, 6 \end{cases}$$

式中: t ——在 $[0, 2]$ 上均匀分布的随机变量。

3.3 概率约束规划模型

概率约束规划模型是指在观察到随机变量的实现之前便做决策的随机规划模型。当约束条件中含有随机变量, 且必须在观察到随机变量的实现之前做出决策时, 会导致一类叫概率约束的规划问题。这是由于当所做决策可能造成约束条件不满足时, 而采取的另一种原则, 这种原则就是允许所做决策在一定程度上(以不大于某一数的概率)不满足约束条件。

设某一系统的极值问题可归结为下列含有随机变量 t 的非线性规划问题。

$$\begin{cases} \min f(X) \\ \text{s.t. } g_i(X, t) \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (3.3)$$

若决策者必须在观察到随机变量 t 的实现以前做出决策 X , 则很有可能对于某些 t , (3.3) 式中的约束条件不能成立。为此, 在某些情况下, 可以允许约束条件受到某种程度的破坏, 即只要求使约束条件得到满足的概率不小于某一事先给定的常数即可。对于 (3.3) 式中的每一个约束条件有一指定的数 $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, m, 1 \geq \alpha_i \geq 0$, 使得:

$$P\{g_i(X, t) \geq 0\} \geq \alpha_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

这时 (3.3) 式将变为概率约束规划问题:

$$\begin{cases} \min f(X) \\ \text{s.t. } P\{g_i(X, t) \geq 0\} \geq \alpha_i \quad i = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (3.4)$$

例如, 决策者要设计一个供水水源地, 这一水源地要求在开发过程中地下水位下降最小, 对环境的影响最小, 并使其供能力最大, 造价最低。给定的约束条件通常包括在给定的地点、给定的时间区段内地下水位不低于某一数值, 地下水位影响漏斗不超过某一设计边界范围等。但由于影响和控制地下水位漏斗的诸多因素(如大气降水、附近河水流量、工农业生产用水等)都是有随机性的, 若要求水源地在任何情况下都能满足其给定的限制条件, 显然不合理, 也是很困难的。所以, 较为合理的要求是水源地的设计者以较大的概率来满足约束条件即可。采用概率约束随机规划模型是求解该类问题的有效手段。

概率约束随机线性规划模型一般可表示为:

$$\begin{cases} \max f(X, \xi) \\ \text{s.t. } g_j(X, \xi) \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, p \end{cases} \quad (3.5)$$

式中: X —— n 维决策向量;

ξ ——随机向量;

$f(x, \xi)$ ——目标函数;

$g_j(x, \xi)$ ——随机约束函数。

(3.5) 式是一个典型的带有随机参数的数学规划模型, 由于随机变量 ξ 的存在, 使得该数学规划模型没有明确的定义。一种有意义的关于带随机参变量的数学规划问题应是如下的概率约束规划模型:

$$\begin{cases} \max \bar{f} \\ \text{s.t. } P\{f(X, \xi) \geq \bar{f}\} \geq \beta \\ P\{g_i(X, \xi) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, p\} \geq \alpha \end{cases} \quad (3.6)$$

式中: $P\{\cdot\}$ 表示 $\{\cdot\}$ 中事件成立的概率;

α 和 β ——事先根据实际条件给定的约束条件和目标函数的置信水平、

一个点 X 是可行解的条件是当且仅当事件 $\{\xi | g_i(X, \xi) \leq 0, i = 1, 2, \dots, p\}$ 的概率测度不小于 α , 即违反约束条件的概率小于 $(1 - \alpha)$ 。

无论是何种随机参数 ξ 和何种函数形式 f , 对于每一个给定的决策 X , $f(X, \xi)$ 是一个随机变量, 其概率密度可用函数 $\Phi_f(X, \xi)(f)$ 来表示。这样可能有多个 f 使得 $P\{f(X, \xi) \geq \bar{f}\} \geq \beta$ 成立。极大化的目标值 $\bar{f}$ 应该是目标函数 $f(X, \xi)$ 在保证置信度水平至少是 β 时所取得的最大值。即:

$$\bar{f} = \max\{f | P\{f(X, \xi) \geq f\} \geq \beta\} \quad (3.7)$$

如图 3.1 所示:

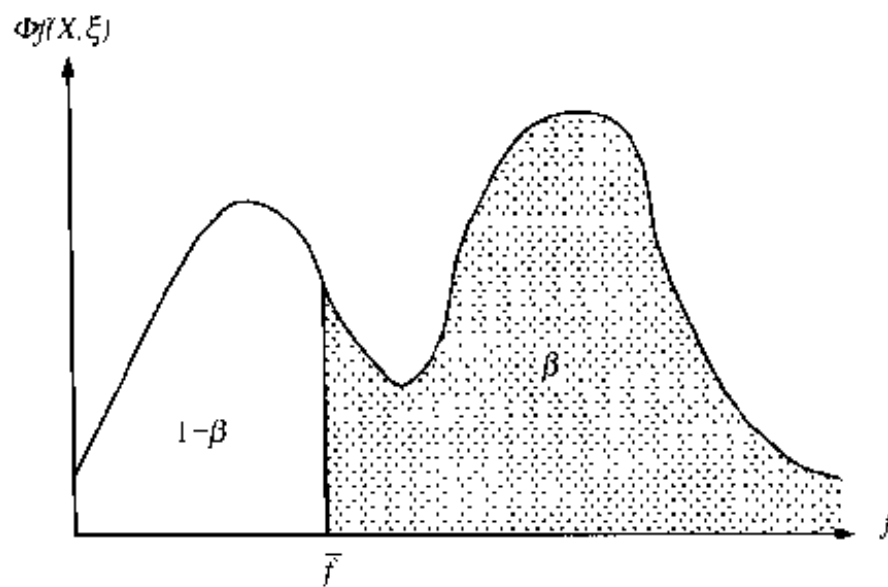


图 3.1 概率密度函数 $\Phi_{f(X, \xi)}(f)$ 和目标值 $\bar{f}$

有时候, 根据所研究问题的性质、阶段的不同, 给定的约束置信水平对于不同的限制条件可以是不同的。即(3.6)中的约束条件可以表示为:

$$\begin{cases} P\{g_j(X, \xi) \leq 0 & j = 1, 2, \dots, k_1\} \geq \alpha_1 \\ P\{g_j(X, \xi) \leq 0 & j = k+1, k+2, \dots, k_2\} \geq \alpha_2 \\ \dots\dots\dots \\ P\{g_j(X, \xi) \leq 0 & j = k_i+1, k_i+2, \dots, p\} \geq \alpha_p \end{cases} \quad (3.8)$$

同样道理, 对于极小化问题, 有:

$$\begin{cases} \min f \\ \text{s.t. } P\{f(X, \xi) \leq \bar{f}\} \geq \beta \\ P\{g_i(X, \xi) \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, p\} \geq \alpha \end{cases} \quad (3.9)$$

作为单目标问题的推广, 多目标概率约束规划问题可表示为:

$$\begin{cases} \min [f_1, f_2, \dots, f_m] \\ \text{s.t. } P\{f_i(X, \xi) \geq \bar{f}_i\} \geq \beta_i \quad i = 1, 2, \dots, m \\ P\{g_i(X, \xi) \leq 0\} \geq \alpha_j \quad j = 1, 2, \dots, p \end{cases} \quad (3.10)$$

第4章 地下水流系统确定性模拟与管理

4.1 地下水流确定性数值模拟

地下水流系统模拟模型就是描述和刻画地下水流系统行为和功能的各种模型。一个好的地下水流系统模拟模型,应是所研究的地下水流系统的复制品,对于相同的系统输入,模拟模型的输出响应与实际系统的输出响应应充分逼近,这样就可以用模拟模型来预测地下水系统的行为和功能,了解地下水流系统行为功能与多种自然因素和人为因素的相互关系。同样,地下水系统模拟模型是建立地下水系统管理模型的前提和基础。无论是以“嵌入法”或以“响应矩阵法”为基础的地下水流系统管理模型都以正确的模拟模型作为基本条件。因为地下水模拟模型可以通过求解控制地下水流的一组偏微分方程以了解地下水水质或水流场的分布特征。而多种形式的地下水管理模型则是不同类型地下水模拟模型与其他约束条件及目标函数的有机结合。

地下水流定解问题的数学模拟模型按时空参数的不同可划分为多种类型。按空间变量特征可分为一维、二维和三维模型。按与时间有无关系可分为稳定流模型和非稳定流模型。按所研究含水层的特征可分为承压水流模型、潜水流模型和饱和-非饱和带水流模型。按反映含水系统状态变量及其影响参数的性质和与可知程度可分为确定性模型、模糊模型和随机模型等。本书介绍了最具代表性的地下水承压二维非稳定水流模拟模型及其求解过程,其他类型的地下水流系统模拟模型读者可参阅文献[40]。由于建立模型的质量守恒定律、能量守恒定律和 Darcy 地下水运动定律具有普遍意义,因此,其研究结果对其他类型的模拟模型具有适用性。

二维承压地下水非稳定流定解问题可表示如下:

$$\begin{cases} S \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(T_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_y \frac{\partial H}{\partial y} \right) + Q \\ H(x, y, 0) = H_0(x, y) \\ H(x, y, t) \Big|_{\Gamma_1} = H_b(x, y, t) \\ T_n \frac{\partial H}{\partial n} + rH \Big|_{\Gamma_2} = \beta \end{cases} \quad (4.1)$$

式中: S ——储水系数(量纲一);

H ——水位(L);

T_x, T_y —— x, y 方向导水系数($L^2 \cdot T^{-1}$);

Q ——源、汇项。(源为正,汇为负)($L \cdot T^{-1}$);

Γ_1 ——一类边界;

Γ_2 ——二类边界;

T_n ——边界法向导水系数($L^2 \cdot T^{-1}$);

$\frac{\partial H}{\partial n}$ —— H 的外法线方向导数(量纲 -);

H_b, H_0, r, β ——均为已知值。

在实际问题中,根据具体的水文地质条件,其描述地下水流定解方程(4.1)中的某些项可以不存在或增加某些项。

求解地下水流定解问题的数值方法常用的有有限单元法,有限差分法,边界元法和有限分析法等。以 Galerkin 有限单元法为例求解上述二维承压非稳定水流问题的基本步骤为:

4.1.1 化边值问题为变分问题

若固定 t , 并引入基函数 $\eta(x, y) \in H_E$, 则有:

$$\iint_D \left[S \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(T_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(T_y \frac{\partial H}{\partial y} \right) - Q \right] \cdot \eta(x, y) dx dy = 0 \quad (4.2)$$

利用格林公式并结合边界条件可得:

$$\begin{aligned} \iint_D \left[T_x \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + T_y \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right] dx dy + \iint_D (-Q) \cdot \eta dx dy + \int_{\Gamma_2} (\beta - rH) \eta dx dy \\ = \iint_D S \frac{\partial H}{\partial t} \cdot \eta dx dy \end{aligned} \quad (4.3)$$

式中: $\eta(x, y)$ ——每个单元上的基函数;

D ——渗流区域;

其他符号同前。

方程(4.3)称为承压二维非稳定水流的 Galerkin 方程。

4.1.2 剖分求解区域

在区域 D 的边界 $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ 上,取有限个点依次联成一闭多边形 Γ_D ,并以此近似代替 Γ ,以 Γ_D 围成的多边形区域 D_D 近似代替 D 。然后将 D_D 剖分为 N_e 个三角形区域之和。三角形的顶点称为节点,其编号依次为 $i = 1, 2, \dots, N_p$,第 i 号节点的坐标记为 (x_i, y_i) ,三角形单元用 $\Delta\beta$ ($\beta = 1, 2, \dots, N_e$) 表示。

4.1.3 构造基函数和线性形函数

对顶点为 i, j, k 的三角形 $\Delta\beta$ 上的任意点 $P(x, y)$ 的面积坐标定义为:

$$\begin{cases} L_i(x, y) = a_i + b_i x + d_i y = \frac{\Delta i}{\Delta\beta} \\ L_j(x, y) = a_j + b_j x + d_j y = \frac{\Delta j}{\Delta\beta} \\ L_k(x, y) = a_k + b_k x + d_k y = \frac{\Delta k}{\Delta\beta} \end{cases} \quad (4.4)$$

式中: $\Delta\beta$ ——三角形 ijk 的面积;

Δi ——三角形 kjP 的面积;

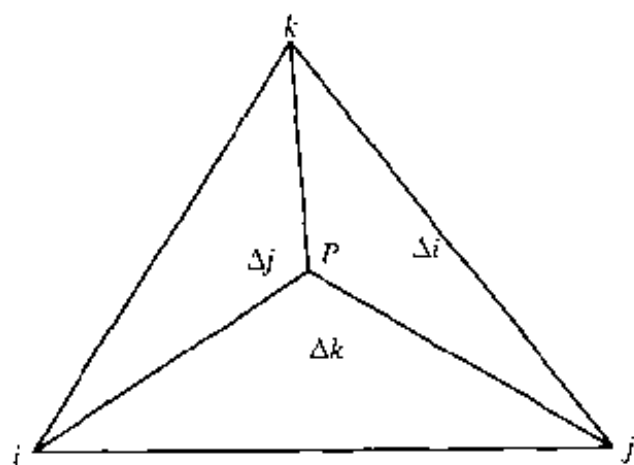


图 4.1

Δj ——三角形 Pki 的面积;

Δk ——三角形 Pij 的面积。

见图(4.1)。

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{x_j y_k - x_k y_j}{2\Delta\beta} & b_i &= \frac{y_i - y_k}{2\Delta\beta} & d_i &= \frac{x_k - x_j}{2\Delta\beta} \\ a_j &= \frac{x_k y_i - x_i y_k}{2\Delta\beta} & b_j &= \frac{y_k - y_i}{2\Delta\beta} & d_j &= \frac{x_i - x_k}{2\Delta\beta} \\ a_k &= \frac{x_i y_j - x_j y_i}{2\Delta\beta} & b_k &= \frac{y_i - y_j}{2\Delta\beta} & d_k &= \frac{x_j - x_i}{2\Delta\beta} \end{aligned} \quad (4.5)$$

节点 i 的基函数定义为:

$$\phi_i(i, j) = \begin{cases} L_i(x, y) & (x, y) \in |\Delta\beta_i| \\ 0 & (x, y) \notin |\Delta\beta_i| \end{cases} \quad (4.6)$$

式中: $|\Delta\beta_i|$ ——以 i 节点为公共节点的三角形单元的集合。

如取形函数为线性元,则在节点 i 上的线性函数可表示为:

$$H(x, y, t) = \sum_{i=1}^{N_p} H_i(t) \cdot \phi_i(x, y) \quad (4.7)$$

4.1.4 建立有限元方程

将式(4.7)及其他边界条件代入式(4.3)得有限元方程:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_p} D_{ij} \frac{dH_i(t)}{dt} + A_{ij} H_i(t) &= G_j - F_j \quad (j = 1, 2, \dots, N_u) \\ H_i(t) \Big|_{t=0} &= H_0(x_i, y_i) \quad (i = 1, 2, \dots, N_p) \end{aligned} \quad (4.8)$$

式中: N_u ——内部节点与第二类边界节点数总和。

$$D_{ij} = \begin{cases} \sum_{\beta=1}^{N_t} S_{\beta} \frac{\Delta\beta}{12} & i \neq j (i, j) \in \Delta\beta \\ \sum_{\beta=1}^{N_t} S_{\beta} \frac{\Delta\beta}{6} & i = j (i, j) \in \Delta\beta \end{cases}$$

$$A_{ij} = \sum_{\beta=1}^{N_t} T_{\beta} (b_i b_j + d_i d_j) \quad (i, j) \in \Delta\beta$$

$$G_j = \sum_{\beta=1}^{N_t} \frac{q_{\beta} l_{\beta j}}{2} \quad (i, j) \in \Delta\beta \cap \Gamma_2$$

$$F_j = Q_j \quad j \in \Delta\beta$$

式中: N_t ——以 j 为公共节点的单元个数;

Q_j ——第 j 节点处的源、汇水量。

用全隐式法求解常微分方程(4.8)可得隐格式:

$$\sum_{i=1}^{N_u} \left(\frac{D_{ij}}{\Delta t} + A_{ij} \right) H_i^{(n+1)} = K_j + \sum_{i=1}^{N_p} \left(\frac{D_{ij}}{\Delta t} \right) H_i^n - \sum_{i=N_u+1}^{N_p} \left(\frac{D_{ij}}{\Delta t} \right) H_i^{(n+1)} \quad (j = 1, 2, \dots, N_u) \quad (4.9)$$

式中:

$$H_i^{(n)} = H(x_i, y_i, t_n)$$

$$\Delta t = t_{n+1} - t_n$$

$$k_j = G_j - F_j$$

上述步骤构成了地下水流模拟模型及其求解的基本过程,书中仅以二维承压水非稳定流为例进行了分析。该方法对于其他类型的地下水流模拟模型具有普遍适应性。

4.2 地下水流确定性管理

地下水流系统的优化管理模型是地下水系统模拟模型与优化技术通过特定的技术方法耦合而构成的。最常用的地下水系统优化管理模型依地下水流系统模拟模型与优化模型的不同结合分为响应矩阵法模型和嵌入法模型。

4.2.1 响应矩阵法的基本原理

响应矩阵法首先运用地下水系统的模拟预测模型来确定系统的输出(水位或水位降深)对系统的输入(抽水量或回灌量)的响应关系——单位脉冲响应函数,并形成其函数的集合——响应矩阵。这种输入-输出的函数响应关系反映了所研究的地下水系统本身所具有的物理规律,主要是水均衡原理和能量转化及守恒原理,具体表现为系统的状态变量(水位或水位降深)与可控输入变量(抽水量或回灌量)间的数量关系。然后将这种数量关系应用在优化模型中,用可控输入变量(决策变量)将需要加以控制的状态变量表达出来。在此基础上,综合考虑其他因素,完成优化管理模型的构建。

运用响应矩阵法构建地下水系统的优化管理模型,可以显著地减少优化模型中决策变量和约束方程(或不等式)的个数。原因在于:①状态变量在优化模型中不以决策变量的形式出现。②运用单位脉冲响应函数,状态变量能够用可控输入变量予以表达。③只需将在优化模型中需要加以控制的那部分状态变量用可控输入变量表达出来,而其余的状态变量在优化模型中并不出现。但响应矩阵法只适用于线性地下水流系统,对于非线性地下水流系统该方法具有局限性。

4.2.1.1 线性系统

如果系统的输入为 $x_1(t)$ 时,相应的输出为 $y_1(t)$;输入为 $x_2(t)$ 时,相应的输出为 $y_2(t)$,而当输入为 $x_1(t) + x_2(t)$ 时,相应的输出为 $y_1(t) + y_2(t)$,则表示该系统遵循叠加原理。

如果系统的输入为 $x(t)$ 时,相应的输出为 $y(t)$,而当输入为 $\alpha x(t)$ 时,相应的输出为 $\alpha y(t)$, α 为任意常数,则表示该系统遵循倍比原理。

既遵循叠加原理又遵循倍比原理的系统,称为线性系统。但需要注意的是不能简单地根据输入与输出有线性关系的数学表达式,就认为它是线性系统。事实上,例如 $y(t) = ax(t) + b$, a, b 为任意常数,显然输入 $x(t)$ 与输出 $y(t)$ 具有线性关系的数学表达式,然而它却不属于线性系统。因为当输入分别为 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 时,相应的输出分别为 $y_1(t) = ax_1(t) + b$ 和 $y_2(t) = ax_2(t) + b$,而当输入为 $x_1(t) + x_2(t)$ 时,输出为 $a[x_1(t) + x_2(t)] + b \neq y_1(t) + y_2(t)$,说明该系统不遵循叠加原理,所以不属于线性系统。

线性系统又可分为线性时变系统和线性时不变系统。若线性系统的参数随时间变化,

则称为线性时变系统。若线性系统的参数不随时间变化,则称为线性时不变系统。

线性系统遵循的叠加原理的性质具有重要的应用价值。当需求解由多项输入引起的综合响应时,可分别求解由各单项输入引起的响应,然后将这些响应叠加起来,即可作为由多项输入引起的综合响应。

由偏微分方程及其定解条件构成的地下水流系统模拟模型,一般均属非线性系统,但可从中分离出来一个属于线性系统的一个子模型。为了能够阐明问题,我们以二维承压各向同性地下水系统的模拟模型为例加以说明,其模型为:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial h}{\partial y} \right) + p(x, y, t) + \varepsilon(x, y, t) = \mu^* \frac{\partial h}{\partial t} & (x, y) \in D, t \geq 0 \\ h(x, y, t) \Big|_{t=0} = h_0(x, y) & (x, y) \in D \\ h(x, y, t) \Big|_{\Gamma_1=0} = h_1(x, y) & (x, y) \in \Gamma_1, t \geq 0 \\ T \frac{\partial h}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = -q(x, y, t) & (x, y) \in \Gamma_2, t \geq 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

式中: D ——地下水系统的模拟渗流区域;

(x, y) ——平面坐标;

t ——时间;

h ——地下水头;

T ——导水系数;

μ^* ——储水系数;

Γ_1 和 Γ_2 ——分别为一类和二类边界;

$\bar{n}$ ——边界的内法线方向;

$q(x, y, t)$ ——在边界 Γ_2 法线方向上的单宽流量,补给时为正,排泄时为负;

$p(x, y, t)$ ——可控输入变量(如抽水、回灌等);

$\varepsilon(x, y, t)$ ——不可控输入变量。

显然,式(4.10)表示了一种自然——人工复合流场。

若把可控输入 $p(x, y, t)$ 作为该地下水系统的输入信号,将水位作为系统的输出响应,当定解条件(包括初始条件和边界条件)或不可控输入 $\varepsilon(x, y, t)$ 不为零时,则该预测模型属于非线性系统(许涓铭、邵景力,1988)。

为了能够从该预测模型中分离出来一个线性系统的子模型,可将预测模型(4.10)式分解成如下两个子模型:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \varepsilon(x, y, t) = \mu^* \frac{\partial H}{\partial t} & (x, y) \in D, t \geq 0 \\ H(x, y, t) \Big|_{t=0} = h_0(x, y) & (x, y) \in D \\ H(x, y, t) \Big|_{\Gamma_1=0} = h_1(x, y) & (x, y) \in \Gamma_1, t \geq 0 \\ T \frac{\partial H}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = -q(x, y, t) & (x, y) \in \Gamma_2, t \geq 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial S}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial S}{\partial y} \right) + p(x, y, t) = \mu^* \frac{\partial S}{\partial t} & (x, y) \in D, t \geq 0 \\ S(x, y, t) \Big|_{t=0} = 0 & (x, y) \in D \\ S(x, y, t) \Big|_{\Gamma_1=0} = 0 & (x, y) \in \Gamma_1, t \geq 0 \\ T \frac{\partial S}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = 0 & (x, y) \in \Gamma_2, t \geq 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

其中子模型式(4.11)描述的是没有可控输入,仅由初始条件、边界条件和不可控输入影响下形成的自然水位及相应的自然流场。子模型式(4.12)描述的是仅由人工可控输入作用而产生的降深 S 及相应的人工流场。由这两个子模型所描述的流场的叠加,即为由模型式(4.10)所描述的自然-人工复合流场,其中 $h = H + S$,即两个子模型的解的代数和与模型式(4.10)的解相等。容易证明子模型式(4.11)仍属非线性系统,而子模型式(4.12)则属于线性系统。在后面我们将阐明,如何运用属于线性系统的子模型式(4.12)计算单位脉冲响应函数值。

4.2.1.2 单位脉冲响应函数

对于一个线性时不变系统,当给系统输入一个单位量的瞬时脉冲 $\delta(t)$ (当 $t=0, \delta(t)=1$; 当 $t \neq 0, \delta(t)=0$) 时,系统所产生的输出响应称为单位脉冲响应,用函数 $\mu(t)$ 来表示, $\mu(t)$ 即为单位脉冲响应函数。

对于一般的线性系统而言,如果在 τ 时刻给系统输入一个单位量,系统在 t 时刻产生的输出响应记为 $\mu(t-\tau)$ 称为单位脉冲响应函数,其中 $t-\tau$ 表示时间间隔。当在 τ 时刻给系统的输入量为 $x(\tau)$ 时,按倍比原理,则系统在 t 时刻产生的输出响应为 $x(\tau) \cdot \mu(t-\tau)$ 。当系统的输入在 $0 \sim t$ 之间连续进行时,按叠加原理,系统在 t 时刻产生的累计输出响应记为 $y(t)$,它等于输入函数 $x(\tau)$ 与单位脉冲响应函数的卷积:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) \cdot \mu(t-\tau) d\tau \quad (4.13)$$

式中: $x(\tau)$ ——系统的输入;

$\mu(t-\tau)$ ——单位脉冲响应函数;

$y(t)$ ——系统在 t 时刻的输出响应。

在解决实际问题时,常常将连续的时间过程划分为若干个离散的时段,与式(4.13)对应的离散形式为:

$$y(n) = \sum_{k=1}^n x(k) \cdot \mu(n-k+1)$$

式中: n ——总时段数;

$t = n \cdot \Delta t$;

k ——第 k 个时段;

$t_k = k \cdot \Delta t, k = 1, 2, \dots, n$ 。

4.2.1.3 地下水系统的单位脉冲响应函数和响应矩阵

前面已经说明,模型式(4.12)是一个线性系统。我们把描述其输入与输出关系的单位脉冲响应函数记为 $\beta(d_i, d_j, t-\tau)$, 它的物理意义是,在 τ 时刻在 d_j 点以单位流量抽水,在 t

时刻在 d_i 点所产生的降深响应。 $t - \tau$ 为时间间隔。当在 d_j 点以流量 $Q(d_j, \tau)$ 在 $0-t$ 之间连续抽水时, d_i 点在 t 时刻产生的累计降深响应则为:

$$s(d_i, d_j, t) = \int Q(d_j, \tau) \cdot \beta(d_i, d_j, t - \tau) d\tau$$

经离散处理后,单位脉冲响应函数的离散形式为 $\beta(i, j, n - k + 1)$, 表示第 j 个结点在第 k 个时刻以单位流量抽水, 第 i 结点在第 n 个时刻末所产生的降深响应。当在第 j 个结点上以流量 $Q(j, k)$ 在 $k = 1, 2, \dots, n$ 各时段连续抽水时, 第 i 个结点在第 n 个时段末所产生的累计降深响应为:

$$s(i, j, n) = \sum_{k=1}^n Q(j, k) \cdot \beta(i, j, n - k + 1)$$

若同时有 m 个井同时抽水时, 则它们所产生的综合累计降深响应为:

$$s(i, n) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n Q(j, k) \cdot \beta(i, j, n - k + 1)$$

如果一个地下水系统有 m 个抽水井, 时间过程划分为 n 个时段, 计算它们对于一个水位控制点的单位脉冲响应就得到了 $m \times n$ 个单位脉冲响应函数值, 它们构成了一个二维数值矩阵 ($m \times n$), 称为响应矩阵。如果水位控制点共有 l 个, 则形成了一个三维响应矩阵 ($m \times n \times l$)。

对于稳定流问题, 与时间无关, 如果有 m 个抽水井, l 个水位控制点, 则形成一个二维响应矩阵 ($m \times l$)。

必须注意, 在地下水系统单位脉冲响应函数的两种写法中, 即 $\beta(i, j, n - k + 1)$ 和 $\beta(i, j, r)$, 括号内的第三项指标都表示输入时刻与计算输出时刻之间的时间间隔。它们之间的对应关系为:

$$\begin{aligned} \beta(i, j, r) &= \beta(i, j, n - k + 1) \\ \begin{cases} r &= 1, 2, \dots, n \\ k &= n, n - 1, \dots, 1 \end{cases} \end{aligned}$$

在 $\beta(i, j, n - k + 1)$ 中, 当 $k = 1$ 时相当于 $\beta(i, j, r)$ 中, $r = n$ 。在 $\beta(i, j, n - k + 1)$ 中, 当 $k = n$ 时, 相当于在 $\beta(i, j, r)$ 中, $r = 1$ 。

地下水系统的单位脉冲响应函数表达了地下水系统状态输出对于可控输入的响应关系, 其中蕴含了地下水系统本身所固有的物理规律, 是水均衡原理和能量守恒及转化原理的反映。并且当单位脉冲响应函数为已知时, 就能够用可控输入变量 (如抽水量) 把状态变量 (如水位或水位降深) 表示出来。

由以上分析可知, 当单位流量确定后, 单位脉冲响应函数值仅与地下水系统本身的特征有关。取决于含水介质的类型, 水文地质参数, 地下水系统几何形状等。对于非稳定流问题, 还与时间有关。在求算单位脉冲响应函数时, 抽水的单位流量可任意选定, 一般以能使整个地下水系统内的各水位控制点处都有明显的响应值且又不至于在系统边界处产生较大的影响为依据来确定其大小。

根据地下水系统的预测模型, 运用数值法求解单位脉冲响应函数乃至响应矩阵的具体操作过程如下:

首先从预测模型中分解出来一个属于线性系统的子模型, 如模型式 (4.12)。然后利用

该子模型进行计算。

对于稳定流问题,在第 j 个结点以单位流量抽水,计算在第 i 个结点上产生的降深,即为单位脉冲响应函数在 $\beta(i,j)$ 的函数值。当 $j=1,2,\dots,m; i=1,2,\dots,l$ 时,重复上述过程,就得到了单位脉冲响应函数值的一个集合——二维响应矩阵($m \times l$),其中 m 为输入点(开采井)总数, l 为水位控制点数。

对于非稳定流问题,可以通过以下两种途径中的任意一种来求算。

(1) 在第一个时段内在第 j 个结点以单位流量抽水,以后各时段不抽水,对应于时段 $r=1,2,\dots,n$, n 为总时段数,计算第 i 个结点处的剩余降深,这便是单位脉冲响应函数 $\beta(i,j,r)$ 的值。对应于 $j=1,2,\dots,m; r=1,2,\dots,n; i=1,2,\dots,l$,就形成了一个三维响应矩阵($m \times n \times l$)。

(2) 在第 j 个结点以单位流量在各个时段持续抽水,计算在第 i 个结点处第 r 时段末与第 $r-1$ 时段末所产生的累计降深的差值,即为单位脉冲响应函数 $\beta(i,j,r)$ 的值。对应于 $j=1,2,\dots,m; r=1,2,\dots,n; i=1,2,\dots,l$,同样形成了一个三维响应矩阵($m \times n \times l$)。

对于响应系数以至于响应系数矩阵的确定方法除了上述的数值计算方法以外,也可直接利用抽水试验方法或解析计算方法获得。例如对于选定的水源地,在水源地勘探阶段可在计划的取水点以水量 Q 进行抽水,在拟进行水位控制的点进行水位观测,假设在 t 时刻在第 i 点观测到的水位降深为 s_i ,其响应系数为 $U = s_i/Q$ 。同样的方法通过连续观测可获得不同点在不同时间的响应系数。

应该注意的是响应矩阵法完全建立在线性系统的倍比原理基础上,对于非线性地下水系统,响应矩阵法具有很大的局限性,有必要引入其他方法构建的地下水管理模型。

4.2.2 嵌入法的基本原理

嵌入法是把地下水系统预测模型的转换形式——代数方程组嵌入到优化模型中,作为等式约束,连同有关地下水管理的其他约束条件和目标函数一起,构成地下水系统优化管理模型。其结构组成如下:

$$\begin{array}{l} \text{地下水系统} \\ \text{优化管理模型} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{目标函数} \\ \text{约束条件} \left\{ \begin{array}{l} \text{预测模型转换形式——代数方程组(作为等式约束条件)} \\ \text{其他约束条件} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

其中作为等式约束的代数方程组反映了地下水系统本身所固有的物理规律,主要包括水均衡原理和能量转化及守恒原理,具体表现为水位与抽水量间的数量关系。这些规律必须自始至终得到严格遵循,因此必须反映在优化模型之中。其他约束条件包括水力状态约束、供需水量约束、生态环境约束及社会经济约束等。

下面以运用嵌入法构建地下水系统分布参数优化管理模型的过程为例对嵌入法予以说明。若描述地下水系统定解问题中的偏微分方程是线性的,那么由该定解问题所构成的预测模型经离散化处理后,总可以得到一个线性代数方程组:

$$[A] \cdot [H] + [B] \cdot [P] = [F] \quad (4.14)$$

式中: $[\quad]$ ——矩阵;

$[\quad]$ ——列向量;

$[A]$ 、 $[B]$ ——分别为线性代数方程组的系数矩阵, $[A]$ 取决于地下水系统的参数和离

散化单元的大小、形状等因素,「 B 」为对角矩阵;

「 H 」——状态变量的列向量,表示各结点、各剖分结点(或单元)、各时段的抽水量、人工回灌量等;

「 F 」——已知的右端列向量,反映了系统的初始条件和边界条件。

假若以线性规划作为优化模型,那么只要将线性代数方程组(4.14)式嵌入到线性规划的模型中,作为等式约束条件,连同其他约束条件和目标函数一起,就构成了一个线性规划优化管理模型,其向量形式的表达式为:

$$\text{目标函数} \quad \max(\min) z = |C_1|^T |P| + |C_2|^T |H| \quad (4.15)$$

$$\text{约束条件} \quad \begin{cases} [A]|H| + [B]|P| = |F| \end{cases} \quad (4.16)$$

$$\begin{cases} [D]|H| + [E]|P| = (\text{或} \geq, \leq) |G| \end{cases} \quad (4.17)$$

$$\begin{cases} |P| \geq 0, |H| \geq 0 \end{cases} \quad (4.18)$$

式中:「 C_1 」^T、「 C_2 」^T——价值系数的行向量;

「 D 」、「 E 」——约束条件中的系数矩阵;

「 G 」——约束条件中的右端列向量;

其余符号的意义与式(4.14)相同。

式(4.15)为目标函数,把预测模型中的状态变量「 H 」和可控制输入变量「 P 」均作为优化模型中的决策变量。如果以获得最大的抽水量为目标,则价值系数「 C_1 」^T = (1, 1, ..., 1)而「 C_2 」^T = (0, 0, ..., 0);如果以各结点的水位总和最大为目标,则「 C_1 」^T = (0, 0, ..., 0),而「 C_2 」^T = (1, 1, ..., 1),模型中的约束条件可分为三类;式(4.16)为地下水系统预测模型的转换形式,说明了预测模型是优化管理模型的基础。式(4.17)为其他约束条件,包括了水力状态约束、供需水量约束、生态环境约束及社会经济约束等。式(4.18)为非负约束。

上述线性规划模型就是运用嵌入法将地下水系统的预测模型与优化模型耦合在一起而构建的一种地下水系统优化管理模型。

第5章 地下水流系统随机模拟与管理

5.1 地下水流模型的随机性分析

地下水流系统的行为规律往往是和人类活动、生态环境演变及气象变化等各种因素紧密相关的。因此地下水资源的管理通常是在大量的确定性和不确定性因素的环境中进行的。从描述地下水运动规律的偏微分方程及定解条件中不难看出,控制地下水流的主要参数和变量几乎都具有随机性和不确定性。

(1) 控制地下水流和储存的主要介质场参数 M, K, S , 即含水层厚度、渗透系数及储水系数都是通过有限的勘探试验资料直接或间接获得的, 所以, 这些参数的真实性和代表性总要受到勘探试验工程在时空分布上的局限性的限制。对于同一含水系统, 利用不同时间、不同空间的资料很可能获得不同的水文地质参数, 这时很难说明利用何组参数来刻画和预测含水层系统的行为更为客观和真实。因此, 含水层参数的不确定性和随机性是客观存在的, 这也决定了更为客观的地下水流系统的模拟和管理模型应为随机模型。

(2) 含水层系统的边界性质、边界位置等都很难采用某一确定的数据来刻画, 我们经常视为定水头边界的河流、湖泊等水位值常受大气降水、地表引流取水等许多随机因素的影响。因此, 准确地说, 这类边界的水位值是随机变量的函数, 我们只能说其在一定的均值附近按照特定的随机分布变化着, 而很难将其视为某一确定不变值。

(3) 地下水流模型中包含的汇、源项, 不管是人工取水或是大气降水入渗, 都具有极强的不确定性和随机性。

(4) 由于地质及水文地质条件的复杂性, 我们所建立的模型都是客观条件的一种近似和概化, 而在这种近似和概化过程中, 一些信息量的丢失和失真是一定存在的, 这种处理会给模型带来随机误差。影响模型的可靠性。

(5) 在我们对各种资料的处理过程中, 由于处理方法、剖分近似、舍入误差和计算过程的波动等因素也会给最终结果带来一定程度的随机误差。

由此可见, 描述地下水运动规律定解条件中的关键参数及处理手段都具有不确定的随机性和误差。而地下水流系统模拟与管理模型又是和这些不确定性和随机因素紧密相关的, 特别是水力管理模型往往以水量或水位作为状态变量或决策变量。这些量又是随机变量 ($K, M, H_0, H_b, \dots$) 的函数, 所以它们也必然具有随机性。这决定了地下水模拟与管理模型也必然是随机的。其模拟与管理结果也不是可以用简单的“是”或“非”能够回答的。正如受多种随机因素影响的“气象”预报一样, 只能根据与其相关的随机因素的随机特征及其不确定性水平给出某种模拟与管理结果出现的概率分布。同样, 模拟与管理结果的置信水平也会受到有意义的足够数量的质量可靠的实验和观测数据的影响。Bathala 等研究认为用有限的资料计算模拟和管理含水系统时, 除了要充分重视地下水流系统内在的各种随机因

素外,关于系统外围有关资料及其随机性也应给以认真考虑。前面的分析告诉我们,影响和控制地下水运动的多种因素是随机的和不确定的,因此,正确刻画地下水运动规律的模拟模型应是随机模型。而地下水系统管理和决策模型又以模拟模型为基础,模拟模型往往构成管理模型的约束条件,因此,符合客观实际的管理模型也应是随机约束管理模型。

5.2 地下水流模型的随机数值模拟

由于地下水流模型的随机特性,决定了求解水流模型的方法必然具有随机性特点。本书充分考虑了已经非常成熟的有限元技术和处理随机问题的相关技术,并将其有机地结合起来,重点分析和讨论了 Monte-Carlo 随机有限元技术和 Taylor 展开随机有限元技术。

5.2.1 Monte-Carlo 随机有限元法

Monte-Carlo 随机有限元法是 Monte-Carlo 随机数生成技术与有限元技术相结合的产物。Monte-Carlo 技术是研究和解决随机问题的最有效方法之一, Monte-Carlo 随机有限元技术是把 Monte-Carlo 随机模拟方法与有限单元方法有机结合起来而形成的随机数值模拟计算方法,该计算方法在求解水文地质问题时的基本步骤为:

- (1) 建立随机水文地质变量的概率模型。
- (2) 将各随机变量的均值代入有限元方程,求出均值条件下的解。
- (3) 对特定的概率模型用 Monte-Carlo 技术生成一组随机水文地质参数。
- (4) 用步骤(3)产生的水文地质参数代入有限元方程求解地下水流状态变量的分布规律。
- (5) 对有限 N 次模拟结果进行统计计算,以获得解的一阶、二阶矩和解在某区间的概率分布。

图 5.1 所示为 Monte-Carlo 随机有限元法的基本计算步骤。

5.2.2 Taylor 展开随机有限元技术

Taylor 展开随机有限元方法是将有限元方程中的控制变量在随机变量的均值点处进行 Taylor 级数展开(一次或二次),再经过适当的数学处理得出所需要的计算格式。本书从 Taylor 展开式入手,推导了在进行有限元计算时不同节点水头的均值、方差和协方差的表达式。

5.2.2.1 Taylor 级数展开与随机分析

设 x 为随机变量, $f(x)$ 为随机变量 x 的函数, $\bar{x}$ 为 x 均值,则可得 $f(x)$ 在 $\bar{x}$ 处的 Taylor 级数展开式为:

$$f(x) = f(\bar{x}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}} (x - \bar{x}) + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{x=\bar{x}} (x - \bar{x})^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} \left. \frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}} \right|_{x=\bar{x}} (x - \bar{x})^{n-1} + R_n(x) \quad (5.1)$$

如果将高于一次的各项忽略,则可得 Taylor 一次展开式为:

$$f(x) = f(\bar{x}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}} \cdot (x - \bar{x}) \quad (5.2)$$

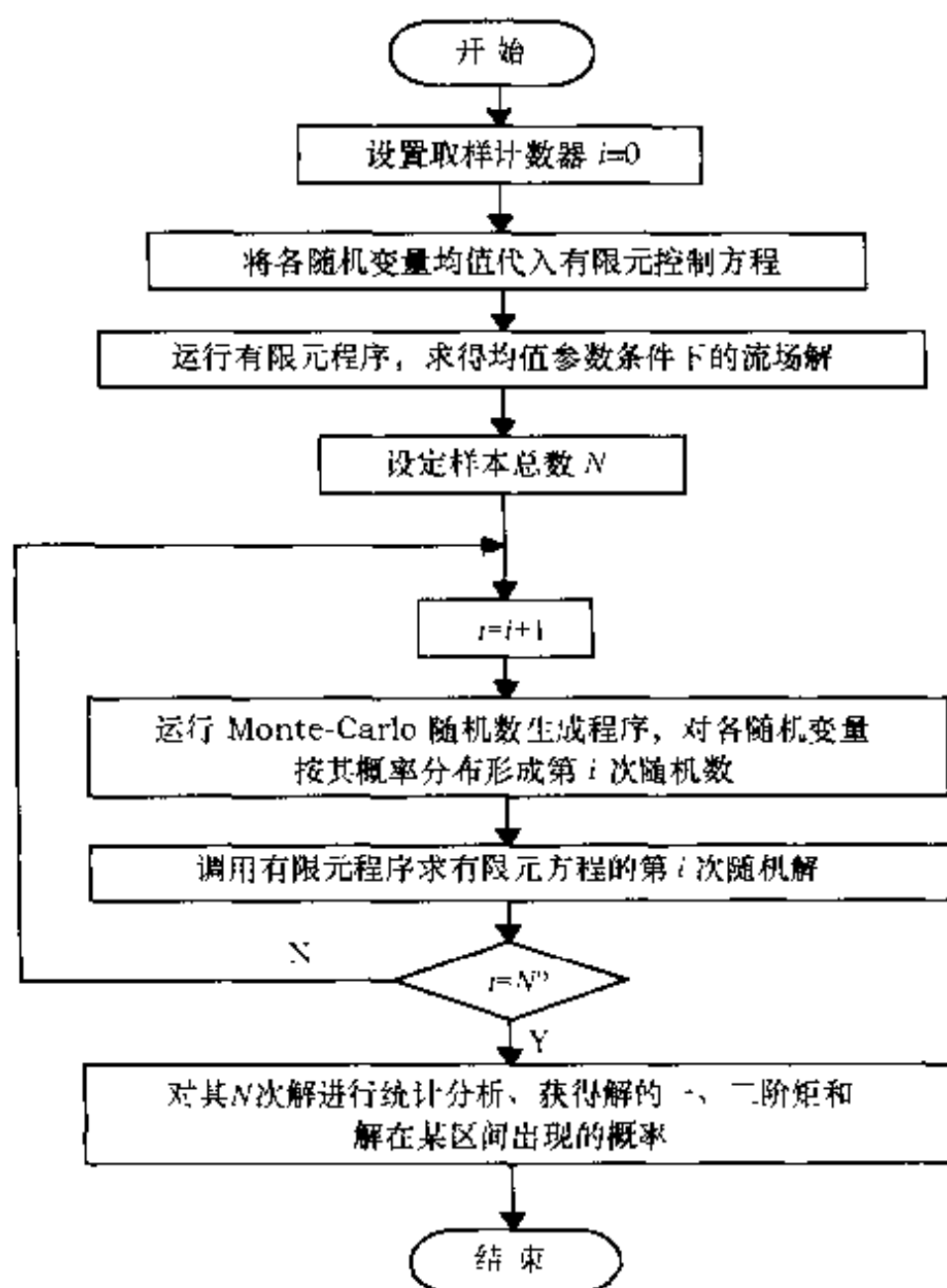


图 5.1 蒙特卡罗随机有限元计算流程图

对(5.2)式取均值得：

$$E[f(x)] = f(\bar{x}) \quad (5.3)$$

(5.2)式的方差可表示为：

$$\begin{aligned} \text{var}[f(x)] &= E[f^2(x)] - \{E[f(x)]\}^2 = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=\bar{x}} \right]^2 \cdot \\ E[(x - \bar{x})^2] &= \left[\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=\bar{x}} \right]^2 \cdot \sigma_x^2 \end{aligned} \quad (5.4)$$

式中：E——数学期望值算子；

var——方差算子；

$$\sigma_x = \sqrt{E[(x - \bar{x})^2]}。$$

如果同时考虑 Taylor 级数的一次和二次项，则可得二次展开式为：

$$f(x) = f(\bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=\bar{x}} \cdot (x - \bar{x}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x=\bar{x}} \cdot (x - \bar{x})^2 \quad (5.5)$$

对(5.5)式取均值得：

$$E[f(x)] = f(\bar{x}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x=\bar{x}} \cdot \sigma_x^2 \quad (5.6)$$

(5.5)式的方差可表示为:

$$\text{var}[f(x)] = E[f^2(x)] - \{E[f(x)]\}^2 = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right]_{x=\bar{x}}^2 \cdot \sigma_x^2 \quad (5.7)$$

在前面的讨论中我们知道控制和影响地下水流系统的随机变量并非是单一的,而是由多种随机变量共同作用的。因此,我们需要了解的地下水系统状态变量是多个随机变量的函数。对于 n 个随机变量的函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 设 $\bar{x}_i$ 为 x_i 的均值, 则 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在均值处的一次 Taylor 展开式为:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)} \cdot (x_i - \bar{x}_i) \quad (5.8)$$

对(5.8)式取均值得:

$$E[f(x_1, x_2, \dots, x_n)] = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \quad (5.9)$$

如对 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在 x_i 的均值处进行二次 Taylor 展开, 则可得:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)} \cdot (x_i - \bar{x}_i) + \\ & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)} \cdot (x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j) \end{aligned} \quad (5.10)$$

对(5.10)式取均值得:

$$E[f(x_1, x_2, \dots, x_n)] = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n R_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)} \cdot \sigma_i \sigma_j \quad (5.11)$$

式中: R_{ij} ——随机变量 x_i 和 x_j 的相关系数。

$$\sigma_i = \sqrt{E[(x_i - \bar{x}_i)]^2}$$

$$\sigma_j = \sqrt{E[(x_j - \bar{x}_j)]^2}$$

通过推导运算易得 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的方差表达式为:

$$\begin{aligned} \text{var}[f(x_1, x_2, \dots, x_n)] = & E \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n R_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)} \cdot (x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j) \right]^2 \\ = & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n R_{ij} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} \right] \Big|_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)} \cdot \sigma_i \sigma_j \end{aligned} \quad (5.12)$$

5.2.2.2 地下水流问题的 Taylor 展开随机有限元法

对于地下水流问题,其实质是求解随机水文地质参数及定解条件所控制的随机函数的有关特征值问题,以二维承压地下水流为例,设其水文地质参数分区数为 N_f , 即 T, S 均有 N_f 个值。设 $(H_1^{(n)}, H_2^{(n)}, \dots, H_{N_f}^{(n)})$ 为 t_n 时刻的水头随机变量, $(b_1, b_2, \dots, b_{N_b})$ 为边界条件的随机变量, 包括一类边界和二类边界。 $(T_1, T_2, \dots, T_{N_f})$ 为含水层导水系数随机变量, $(S_1, S_2, \dots, S_{N_f})$ 为含水层储水系数随机变量, 则 t_{n+1} 时刻水头随机变量的一次 Taylor 展开式为:

$$\begin{aligned} H_i^{(n+1)} = & (H_i^{(n+1)})_E + \sum_{j=1}^{N_f} \left(\frac{\partial H_i^{(n+1)}}{\partial T_j} \right)_E (T_j - \bar{T}_j) + \sum_{j=1}^{N_f} \left(\frac{\partial H_i^{(n+1)}}{\partial S_j} \right)_E (S_j - \bar{S}_j) \\ & + \sum_{j=1}^{N_b} \left(\frac{\partial H_i^{(n+1)}}{\partial b_j} \right)_E (b_j - \bar{b}_j) \end{aligned} \quad (5.13)$$

式中:有上划线的随机量——表示随机量的均值;

$(\cdot)_E$ ——表示括号内的函数在均值变量处的值。

为了分析和表达问题的方便,我们将上述诸随机变量 $T_1, T_2, \dots, T_{N_f}, \dots, S_1, S_2, \dots, S_{N_f}, H_1^{(n)}, H_2^{(n)}, \dots, H_{N_p}^{(n)}, b_1, b_2, \dots, b_{N_b}$ 用统一的符号记为 $x_1, x_2, \dots, x_N$ 。其中下标 $N = 2N_f + N_p + N_b$ 为所有随机变量的总和。即:

$$(x_1, x_2, \dots, x_N) = (T_1, T_2, \dots, T_{N_f}, S_1, S_2, \dots, S_{N_f}, H_1^{(n)}, H_2^{(n)}, \dots, H_{N_p}^{(n)}, b_1, b_2, \dots, b_{N_b})。$$

这时式(5.13)可表示为:

$$H_i^{(n+1)} = (H_i^{(n+1)})_E + \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial H_i^{(n+1)}}{\partial x_j} \right)_E (x_j - \bar{x}_j) \quad (5.14)$$

$H_i^{(n+1)}$ 的二次 Taylor 展开式为:

$$\begin{aligned} H_i^{(n+1)} &= (H_i^{(n+1)})_E + \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial H_i^{(n+1)}}{\partial x_j} \right)_E (x_j - \bar{x}_j) + \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial^2 H_i^{(n+1)}}{\partial x_j \partial x_k} \right)_E (x_j - \bar{x}_j)(x_k - \bar{x}_k) \end{aligned} \quad (5.15)$$

$H_i^{(n+1)}$ 的一次和二次 Taylor 展开式的均值和方差分别为:

$$E[H_i^{(n+1)}]_1 = (H_i^{(n+1)})_E \quad (5.16)$$

$$E[H_i^{(n+1)}]_2 = (H_i^{(n+1)})_E + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial^2 H_i^{(n+1)}}{\partial x_j \partial x_k} \right)_E \text{cov}(x_j, x_k) \quad (5.17)$$

$$\text{var}[H_i^{(n+1)}] = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial H_i^{(n+1)}}{\partial x_j} \right)_E \cdot \left(\frac{\partial H_i^{(n+1)}}{\partial x_k} \right)_E \text{cov}(x_j, x_k) \quad (5.18)$$

$H_i^{(n+1)}$ 和 $H_l^{(n+1)}$ 的协方差为:

$$\text{cov}[H_i^{(n+1)}, H_l^{(n+1)}] = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial H_i^{(n+1)}}{\partial x_j} \right)_E \cdot \left(\frac{\partial H_l^{(n+1)}}{\partial x_k} \right)_E \text{cov}(x_j, x_k) \quad (5.19)$$

由此可见,利用 Taylor 展开随机有限元法求解地下水流时,为了获得反映地下水流场的各种特征量,主要涉及 $(H_i^{(n+1)})_E$, $\left(\frac{\partial H_i^{(n+1)}}{\partial x_j} \right)_E$, 及 $\left(\frac{\partial^2 H_i^{(n+1)}}{\partial x_j \partial x_k} \right)_E$ 的计算问题。为此,有必要对这些量的计算问题进行讨论。

(1) $(H_i^{(n+1)})_E$ 的计算。

将影响和控制地下水流的确定性变量,各种随机变量的均值 $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_N)$ 代入有限元方程计算出的解即为各节点水头的均值 $(H_i^{(n+1)})_E$ 。

(2) $\left(\frac{\partial H_i^{(n+1)}}{\partial x_j} \right)_E$ 的计算。

$\left(\frac{\partial H_i^{(n+1)}}{\partial x_j} \right)_E$ 反映了自变量 x_j 的变化对水头 $H_i^{(n+1)}$ 的影响敏感性情况,通常称之为灵敏

敏度系数。李竞生研究员等曾对灵敏度系数的求解方法进行过专门的研究和讨论^[55]。常用的灵敏度系数计算方法有影响系数法、灵敏度方程法和变分法。本书仅就影响系数法作简要讨论。

影响系数法是利用扰动原理和差分格式来进行计算的,其向前差分格式为:

$$\left(\frac{\partial H_i^{(n+1)}}{\partial x_j}\right)_E = \frac{H_i^{(n+1)}(\bar{x}_1, x_2, \dots, x_j + \Delta x_j, \dots, \bar{x}_N) - H_i^{(n+1)}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, x_j, \dots, x_N)}{\Delta x_j} \quad (5.20)$$

式中的 $H_i^{(n+1)}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_j + \Delta x_j, \dots, x_N)$ 和 $H_i^{(n+1)}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_j, \dots, \bar{x}_N)$ 都可通过求解地下水有限元方程求得。关键问题是 Δx_j 的选择。Bard(1974)建议:

$$\Delta x_j = \alpha \bar{x}_j \quad 10^{-5} \leq \alpha \leq 10^{-2} \quad (5.21)$$

在实际计算过程中可通过对具体变量的性质分析而加以确定。

(3) $\left(\frac{\partial^2 H_i^{(n+1)}}{\partial x_j \partial x_k}\right)_E$ 的计算。

$\left(\frac{\partial^2 H_i^{(n+1)}}{\partial x_j \partial x_k}\right)_E$ 的计算实际上是求取一个函数的二阶导数的问题。因此,可利用最常用的差分格式进行近似计算:

$$\left(\frac{\partial^2 H_i^{(n+1)}}{\partial x_j^2}\right)_E = [H_i^{(n+1)}(x_1, x_2, \dots, x_j + \Delta x_j, \dots, x_N) - 2H_i^{(n+1)}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_j, \dots, \bar{x}_N) + H_i^{(n+1)}(x_1, x_2, \dots, x_j - \Delta x_j, \dots, \bar{x}_N)] / \Delta x_j^2 \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 H_i^{(n+1)}}{\partial x_j \partial x_k}\right)_E &= [H_i^{(n+1)}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_j + \Delta x_j, \dots, x_k + \Delta x_k, \dots, x_N) - \\ &H_i^{(n+1)}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, x_j - \Delta x_j, \dots, \bar{x}_k + \Delta x_k, \dots, \bar{x}_N) \\ &H_i^{(n+1)}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, x_j + \Delta x_j, \dots, \bar{x}_k - \Delta x_k, \dots, \bar{x}_N) + \\ &H_i^{(n+1)}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_j - \Delta x_j, \dots, \bar{x}_k - \Delta x_k, \dots, \bar{x}_N)] / 4\Delta x_j \Delta x_k \end{aligned} \quad (5.23)$$

式(5.22)和式(5.23)中各分项 $H_i^{(n+1)}(\cdot)$ 都可通过将相应的变量均值及 Δx_j 代入有限元方程计算求得。

5.3 地下水系统的随机管理

由于地下水系统管理模型与模拟模型的紧密相关性,上一章重点讨论了随机地下水模拟模型的建立和求解技术。地下水系统管理模型的数学表达式一般由两部分组成,即目标函数和约束条件^[33]:

$$\text{目标函数} \quad \max(\min) [Z_k(x_j)] \quad (5.24)$$

$$\text{约束条件} \quad A_i(x_j) = b_i \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (5.25)$$

地下水系统管理模型根据不同的分类依据可以划分为多种类型。根据所管理的地下水系统中参数的分布形式可划分为集中参数系统管理模型和分布参数系统管理模型。根据地下水的状态和时间的关系划分为稳态地下水管理模型和非稳态地下水管理模型。根据管理的目标可划分为水力管理模型、水质管理模型、经济管理模型等。根据管理问题的目标数量可划分为单目标地下水管理模型和多目标地下水管理模型。根据影响地下水系统的相关参数性质划分为确定性地下水管理模型、模糊地下水管理模型和随机地下水管理模型。随机地下水管理模型只是近年来才引起人们的广泛关注,也是本章重点讨论和研究的地下水管理模型。

5.3.1 期望值模型

对于随机问题,虽然我们不知道何种具体事件即将发生和出现,但我们总可以通过对大量的随机事件的分析和研究而掌握随机事件发生的规律和特征指标。而对于更多的随机问题,我们并不关心某个具体事件,更多关心的是随机变量的统计特征(如均值和方差等)。显然,所谓期望值模型就是在期望值约束条件下,使目标函数的概率期望达到最优的模型。单目标期望值模型一般可表示为:

$$\begin{cases} \max(\min) E[f(X, \xi)] \\ \text{s.t. } E[g_j(X, \xi)] \leq 0, j = 1, 2, \dots, P \\ E[h_k(X, \xi)] = 0, k = 1, 2, \dots, q \end{cases} \quad (5.26)$$

式中: X ——一个 n 维决策向量;

ξ ——一个 t 维随机向量;

$g_j(X, \xi)$ —— P 个随机不等式约束函数;

$f(X, \xi)$ ——目标函数;

$h_k(X, \xi)$ —— q 个随机等式约束条件

E ——表示期望值算子。

如设随机向量 ξ 的概率密度函数为 $\phi(\xi)$, 则有:

$$\begin{cases} E[f(X, \xi)] = \int_{R^t} f(X, \xi) \cdot \phi(\xi) d\xi \\ E[g_j(X, \xi)] = \int_{R^t} g_j(X, \xi) \cdot \phi(\xi) d\xi \\ E[h_k(X, \xi)] = \int_{R^t} h_k(X, \xi) \cdot \phi(\xi) d\xi \end{cases} \quad (5.27)$$

若 ξ 为离散型随机变量且其分布函数为 $P_r(\xi = \xi_i) = \theta_i$, 则有:

$$\begin{cases} E[f(X, \xi)] = \sum_{i \in I} \theta_i f(X, \xi_i) \\ E[g_j(X, \xi)] = \sum_{i \in I} \theta_i g_j(X, \xi_i) \quad j = 1, 2, \dots, P \\ E[h_k(X, \xi)] = \sum_{i \in I} \theta_i h_k(X, \xi_i) \quad k = 1, 2, \dots, q \end{cases} \quad (5.28)$$

式中: I ——序号集。

作为单目标期望值模型的推广,多目标期望值模型可写成如下形式:

$$\begin{cases} \max(\min) \{E[f_1(X, \xi)], E[f_2(X, \xi)], \dots, E[f_m(X, \xi)]\} \\ \text{s.t. } E[g_j(X, \xi)] \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, P \\ E[h_k(X, \xi)] = 0 \quad k = 1, 2, \dots, q \end{cases} \quad (5.29)$$

式中: m ——目标函数的个数。

5.3.2 随机地下水管理的期望值模型

为不同目标而设计的地下水管理模型有所不同,本书以常见的以水量为决策变量以水位为状态变量的水力管理模型为例进行了分析。这类模型的典型例子之一是地下水的优化

疏干问题,即在矿山建设和许多其他地下工程活动过程中,需要在一定范围内对地下水进行疏干或降压,并希望以最小的疏水量来满足工程要求(约束条件),这种问题的线性规划模型可表示为:

$$\begin{cases} \min Z = [C] \cdot [Q] \\ \text{s.t. } [A] \cdot [Q] \geq [S] \\ [Q] \geq 0 \end{cases} \quad (5.30)$$

式中: $[C] = [C_1, C_2, \dots, C_n]$ 为目标函数的价格系数向量。

$$[A] = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \cdots & \beta_{mn} \end{bmatrix}$$

为约束条件的响应系数矩阵。

$$[Q] = [Q_1, Q_2, \dots, Q_n]^T$$

为决策变量向量。

$$[S] = [S_1, S_2, \dots, S_m]^T$$

为 m 个控制点水头约束要求条件向量。

如果以总疏水量最小为目标函数,以控制点水位降深为约束条件,这时管理模型的价格系数向量为 $[1, 1, \dots, 1]$, 管理模型式(5.30)可用另外一种形式表示为:

$$\begin{cases} \min Z = \sum_{i=1}^n Q_i \\ \beta_{11}Q_1 + \beta_{12}Q_2 + \cdots + \beta_{1n}Q_n \geq S_1 \\ \beta_{21}Q_1 + \beta_{22}Q_2 + \cdots + \beta_{2n}Q_n \geq S_2 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \beta_{m1}Q_1 + \beta_{m2}Q_2 + \cdots + \beta_{mn}Q_n \geq S_m \\ Q_i \geq 0 \quad \quad \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \quad (5.31)$$

由于(5.31)式中的 $\beta_{ij} (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$ 为管理模型的响应系数,它来自于地下水随机模拟模型,所以它是影响地下水系统行为的随机变量的函数,故, $\beta_{ij} (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$ 亦为随机变量。随着随机变量 $x_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 的不同实现, β_{ij} 也将随机地出现不同的值。因此,取 β_{ij} 的任何一组值代入(5.31)式求解管理模型似乎都欠合理。一个很自然的想法就是取 β_{ij} 多次实现的期望值作为管理模型的响应系数,从而形成随机地下水管理模型的期望值模型。

$$\begin{cases} \min Z = E[f(Q, X)] = E\left[\sum_{i=1}^n Q_i\right] \\ E[\beta_{11}]Q_1 + E[\beta_{12}]Q_2 + \cdots + E[\beta_{1n}]Q_n \geq S_1 \\ E[\beta_{21}]Q_1 + E[\beta_{22}]Q_2 + \cdots + E[\beta_{2n}]Q_n \geq S_2 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ E[\beta_{m1}]Q_1 + E[\beta_{m2}]Q_2 + \cdots + E[\beta_{mn}]Q_n \geq S_m \\ Q_i \geq 0 \quad \quad \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \quad (5.32)$$

期望值模型简单明确,但它无法反映随机变量的方差问题,无法反映方差与管理结果之间的关系问题,从而给所得优化结果的风险评价带来了困难。

5.3.3 机会约束随机管理模型

机会约束随机规划和管理模型最早由 Charnes 和 Cooper^[46]提出,主要是针对约束条件中含有随机变量,且必须在观测到随机变量的实现之前做出决策的情况。考虑到所作决策在不利情况发生时(小概率事件发生时)可能不满足约束条件而采取的一种原则:即允许所作决策在一定程度上不满足约束条件,但该决策应使约束条件成立的概率不小于某一置信水平 α 。

带有随机参数的机会约束管理模型一般可表示为:

$$\begin{cases} \min Z = f(X, \xi) \\ P_r \{ g_1(X, \xi) \leq b_1 \} \geq \alpha_1 \\ P_r \{ g_2(X, \xi) \leq b_2 \} \geq \alpha_2 \\ \vdots \\ P_r \{ g_m(X, \xi) \leq b_m \} \geq \alpha_m \end{cases} \quad (5.33)$$

式中: X —— n 维决策向量;

ξ —— t 维随机向量;

$f(X, \xi)$ ——目标函数;

$\alpha_i (i = 1, 2, \dots, m)$ ——事先给定的随机约束条件的置信水平;

$P_r \{ \cdot \}$ ——表示 $\{ \cdot \}$ 中事件成立的概率;

$g_j(X, \xi)$ ——约束方程左端函数式($j = 1, 2, \dots, m$)。

对于不同的管理和规划问题, $g(X, \xi)$ 的表达式是多种多样的。其中最常见的表达式为:

$$g(X, \xi) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \quad (5.34)$$

将(5.34)式代入(5.33)式得具有多个约束方程的机会约束优化管理模型:

$$\begin{cases} \min Z = f(X, \xi) \\ P_r \{ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \} \geq \alpha_1 \\ P_r \{ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \} \geq \alpha_2 \\ \vdots \\ P_r \{ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \} \geq \alpha_m \end{cases} \quad (5.35)$$

令:
$$Y_k(X) = \sum_{i=1}^n a_{ki}x_i - b_k \quad k = 1, 2, \dots, m$$

则有:

$$E[Y_k(X)] = \sum_{i=1}^n E(a_{ki})x_i - E(b_k) \quad (5.36)$$

$$\text{var}[Y_k(X)] = \sum_{i=1}^n \text{var}(a_{ki})x_i^2 + \text{var}(b_k) \quad (5.37)$$

式中: $E(\cdot)$ ——期望值算子;

$\text{var}(\cdot)$ ——方差算子。

注意到变量：

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_{ki}x_i - b_k - \left[\sum_{i=1}^n E(a_{ki})x_i - E(b_k) \right]}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \text{var}(a_{ki})x_i^2 + \text{var}(b_k)}}$$

服从标准正态分布 $N(0,1)$, 且不等式：

$$\sum_{i=1}^n a_{ki}x_i \leq b_k \quad k = 1, 2, \dots, m$$

等价于

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^n a_{ki}x_i - b_k \right) - \left[\sum_{i=1}^n E(a_{ki})x_i - E(b_k) \right]}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \text{var}(a_{ki})x_i^2 + \text{var}(b_k)}} \leq - \frac{\sum_{i=1}^n E(a_{ki})x_i - \sum_{i=1}^n E(b_k)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \text{var}(a_{ki})x_i^2 + \text{var}(b_k)}} \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (5.38)$$

因此, 约束条件 $P_r \left\{ \sum_{i=1}^n a_{ki}x_i \leq b_k \right\} \geq \alpha_k \quad k = 1, 2, \dots, m$ 等价于：

$$P_r \left\{ \eta \leq - \frac{\sum_{i=1}^n E(a_{ki})x_i - E(b_k)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \text{var}(a_{ki})x_i^2 + \text{var}(b_k)}} \right\} \geq \alpha_k \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (5.39)$$

式中： η 服从标准正态分布。

若要式(5.39)成立, 则必有下列式成立：

$$\Phi^{-1}(\alpha_k) \leq - \frac{\sum_{i=1}^n E(a_{ki})x_i - E(b_k)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \text{var}(a_{ki})x_i^2 + \text{var}(b_k)}} \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (5.40)$$

也必有下列式成立：

$$\sum_{i=1}^n E(a_{ki})x_i + \Phi^{-1}(\alpha_k) \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n \text{var}(a_{ki})x_i^2 + \text{var}(b_k)} \leq E(b_k) \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (5.41)$$

至此, 我们便可得到机会约束优化管理模型：

$$\begin{cases} \min Z = f(X, \xi) \\ \sum_{i=1}^n E(a_{1i})x_i + \Phi^{-1}(\alpha_1) \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n \text{var}(a_{1i})x_i^2 + \text{var}(b_1)} \leq E(b_1) \\ \sum_{i=1}^n E(a_{2i})x_i + \Phi^{-1}(\alpha_2) \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n \text{var}(a_{2i})x_i^2 + \text{var}(b_2)} \leq E(b_2) \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \sum_{i=1}^n E(a_{mi})x_i + \Phi^{-1}(\alpha_m) \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n \text{var}(a_{mi})x_i^2 + \text{var}(b_m)} \leq E(b_m) \end{cases} \quad (5.42)$$

上述规划管理模型显然反映了有关随机变量的均值、方差及对约束条件满足的置信水平等

因素。

5.3.4 机会约束随机地下水流管理模型

对于一个分 n 个疏干阶段的有约束地下水疏干优化确定性管理模型一般可表示为:

$$\begin{cases} \min Z = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n Q(i, k) \\ \text{s.t.} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \beta(i, j, k) \cdot Q(i, n - k + 1) \geq S(j, k) \quad (j = 1, 2, \dots, P) \\ Q(i, n - k + 1) \geq 0 \end{cases} \quad (5.43)$$

式中: Z ——目标函数(总疏水量最小);

$\beta(i, j, k)$ ——第 i 口井在第 k 时段末对水位约束点 j 所产生的单位脉冲降深响应;

$Q(i, n - k + 1)$ ——第 i 口井在 $n - k + 1$ 时段的疏水量;

$S(j, k)$ —— k 时段末对控制点 j 的疏干要求。

如果考虑水文地质条件的随机性特点,则上述有 m 口疏水井,分 n 个疏干阶段的地下水疏干随机机会约束管理模型可表示为:

$$\begin{cases} \min Z = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n Q(i, k) \\ \text{s.t.} P_r \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \beta(i, j, k) \cdot Q(i, n - k + 1) \geq S(j, k) \right\} \geq \alpha(j, k) \quad j = 1, 2, \dots, P \\ Q(i, n - k + 1) \geq 0, i = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (5.44)$$

经过类似于方程(5.44)的推导后,可得到相应的机会约束随机地下水管理模型如下:

$$\begin{cases} \min Z = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n Q(i, k) \\ \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \{ E[\beta(i, j, k)] + \Phi^{-1}[\alpha(j, k)] \cdot \sqrt{\text{var}[S(j, k)]} \} \cdot Q(i, n - k + 1) \geq S(j, k) \\ Q(i, n - k + 1) \geq 0, i = 1, 2, \dots, P \end{cases} \quad (5.45)$$

式中: $\text{var}[S(j, k)] = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n r^2(i, j, k) \cdot Q^2(i, n - k + 1), j = 1, 2, \dots, P$

$r(i, j, k)$ ——方差响应函数。对这一量的物理含义可从下列推导中较清楚地反映出来。

5.3.5 $r(i, j, k)$ 的推导及物理意义

由泰斯井函数可得:

$$S = \frac{Q}{4\pi T} W(u)$$

$$u = \frac{r^2 \mu}{4Tt}$$

当水文地质参数 T 和 μ 存在随机误差时,可将其表示为:

$$T = \bar{T} + \Delta T$$

$$\mu = \bar{\mu} + \Delta\mu$$

式中: T ——导水系数;

$\bar{T}$ ——导水系数均值;

μ ——储水系数;

$\bar{\mu}$ ——储水系数均值;

ΔT ——导水系数偏离均值的差量;

$\Delta\mu$ ——储水系数偏离均值的差量。

对 S 在均值参数处进行一次 Taylor 展开可得:

$$S = \frac{Q}{4\pi\bar{T}} W\left(\frac{r^2\mu}{4\bar{T}t}\right) + \left.\frac{\partial S}{\partial T}\right|_{\substack{T=\bar{T} \\ \mu=\bar{\mu}}}(T - \bar{T}) + \left.\frac{\partial S}{\partial \mu}\right|_{\substack{\mu=\bar{\mu} \\ T=\bar{T}}}(\mu - \bar{\mu})$$

令:

$$S = \frac{Q}{4\pi T} W\left(\frac{r^2\mu}{4Tt}\right)$$

则:

$$\Delta S = S - S = \left.\frac{\partial S}{\partial T}\right|_{\substack{T=\bar{T} \\ \mu=\bar{\mu}}}(T - \bar{T}) + \left.\frac{\partial S}{\partial \mu}\right|_{\substack{\mu=\bar{\mu} \\ T=\bar{T}}}(\mu - \bar{\mu})$$

令 Q 为单位量时的 $\Delta S = r$, 则对于任意的 Q , ΔS 为 $r \cdot Q$ (因为 ΔS 是 Q 的线性函数)。对于由 m 口抽水井在 n 个时段对控制点 j 的单位脉冲降深方差为:

$$\text{var}[S(j, k)] = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n (S_i - S_i)^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n r^2(i, j, k)$$

若第 i 口井在时段 $n - k + 1$ 的抽水量为 $Q(i, n - k + 1)$, 则降深的总方差为:

$$\text{var}[S(j, k)] = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n r^2(i, j, k) \cdot Q^2(i, n - k + 1)$$

前面所讨论的随机地下水模拟与管理模型中所涉及的随机变量均假设为相互独立的随机变量,但在实际工程应用过程中,我们会遇到大量的具有相关性的随机变量共存,且具有相关性的多个随机变量共存的地下水随机模拟与管理模型的求解比较复杂,本书未作专门分析,读者在应用时应注意这一问题。

第6章 随机地下水管理模型求解技术

基于不同方法所建立的随机地下水管理模型求解方法有所不同。对于确定性线性规划模型而言,修正单纯形法无疑是最成熟、最被广泛使用的求解方法。对于随机地下水管理模型,如能通过有效的变换,使其表达形式与确定性线性规划模型一致,那么,具体求解的问题当然可以利用修正单纯形法。本书除就上述求解方法进行分析推导外,还探讨了利用人工遗传方法直接求解地下水管理模型的技术方法。

6.1 随机地下水管理模型的 Taylor 展开解法

对于随机地下水管理的期望值模型而言,求解的方法比较简单,只需要将有关随机参数的均值代入有限元模拟模型,求得响应系数的期望值(均值)。然后利用修正单纯形或其他方法直接求解管理模型,便可获得在均值参数条件下的优化解。而对于机会约束管理模型来说,由式(5.45)可见,管理模型的约束条件中,由于响应系数方差项 $\sqrt{\text{var}[S(j,k)]}$ 的存在,使得约束方程具有非线性性。所以直接利用线性规划模型的求解技术是不可行的。

$$\text{由式} \quad \sqrt{\text{var}[S(j,k)]} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n r^2(i,j,k) \cdot Q^2(i,n-k+1)}$$

可得,一旦求得了方差响应系数 $r(i,j,k)$,则 $\sqrt{\text{var}[S(j,k)]}$ 是 Q 的函数。因此,不妨令:

$$f(Q) = \sqrt{\text{var}[S(j,k)]} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n r^2(i,j,k) \cdot Q^2(i,n-k+1)} \quad (6.1)$$

对式(6.1)在给定的流量 $Q_0(i,n-k+1)$ 处对 $f(Q)$ 进行一阶 Taylor 展开得:

$$\begin{aligned} f(Q) &= f(Q_0) + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \frac{\partial \sqrt{r^2(i,j,k) \cdot Q^2(i,n-k+1)}}{\partial Q(i,n-k+1)} \bigg|_{Q=Q_0} \cdot [Q(i,n-k+1) - Q_0(i,n-k+1)] \\ &= f(Q_0) + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \frac{\partial \sqrt{\text{var}[S(j,k)]}}{\partial Q(i,n-k+1)} \bigg|_{Q=Q_0} \cdot [Q(i,n-k+1) - Q_0(i,n-k+1)] \\ &= f(Q_0) + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \text{var}[S(j,k)]^{-\frac{1}{2}} \bigg|_{Q=Q_0} \cdot [2r^2(i,j,k) \cdot Q_0(i,n-k+1)] \\ &\quad \cdot [Q(i,n-k+1) - Q_0(i,n-k+1)] \end{aligned}$$

因为:

$$\text{var}[S(j,k)]^{-\frac{1}{2}} \bigg|_{Q=Q_0} = \frac{1}{f(Q_0)}$$

故有

$$f(Q) = f(Q_0) + \frac{1}{f(Q_0)} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n [r^2(i, j, k) \cdot Q_0(i, n - k + 1)] \cdot Q(i, n - k + 1) \\ - \frac{1}{f(Q_0)} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n [r^2(i, j, k) \cdot Q_0^2(i, n - k + 1)]$$

又因:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \{ [r^2(i, j, k)] \cdot [Q_0^2(i, n - k + 1)] \} = f^2(Q_0)$$

所以

$$f(Q) = \sqrt{\text{var}[S(j, k)]} \\ = \frac{1}{f(Q_0)} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n [r^2(i, j, k) \cdot Q_0(i, n - k + 1) \cdot Q(i, n - k + 1)] \quad (6.2)$$

将式(6.2)代入式(5.45)可得线性约束条件:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{f(Q_0)} r^2(i, j, k) \cdot Q_0(i, n - k + 1) \cdot \Phi^{-1}[\alpha(j, k)] + E[\beta(i, j, k)] \right\} \\ \cdot Q(i, n - k + 1) \geq S(j, k) \quad j = 1, 2, \dots, P \quad (6.3)$$

为简明起见,令:

$$A(i, j, k) = \left\{ \frac{1}{f(Q_0)} r^2(i, j, k) \cdot Q_0(i, n - k + 1) \cdot \Phi^{-1}[\alpha(j, k)] + E[\beta(i, j, k)] \right\} \quad (6.4)$$

并将(6.3)式和(6.4)式代入(5.45)式得新的机会约束地下水疏干管理模型:

$$\begin{cases} Z = \min \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n Q(i, k) \\ \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n A(i, j, k) \cdot Q(i, n - k + 1) \geq S(j, k) \quad j = 1, 2, \dots, P \\ Q(i, n - k + 1) \geq 0, \end{cases} \quad (6.5)$$

比较式(5.43)和式(6.5),不难看出,转化后的机会约束随机地下水管理模型与确定性地下水管理模型具有完全相同的表达形式。所不同的是 $A(i, j, k)$ 和 $\beta(i, j, k)$ 的内在含义。模型(6.5)式很容易用常见的修正单纯形法进行求解。关于修正单纯形法的具体计算方法见参考文献[52]。

6.2 随机地下水管理模型的随机人工遗传解法

遗传算法是一种通过模拟自然进化过程来搜索最优解的方法。近年来,人工遗传算法在解决复杂的全局最优化问题、非线性约束优化问题及离散决策变量优化问题方面取得了成功的应用,并受到了人们的广泛关注。在优化问题中,如果目标函数是多峰的,或者搜索空间不规则,就需要所使用的算法必须有高度的鲁棒性,以避免在局部最优解附近徘徊。遗传算法本身并不要求对优化问题的性质作深入的数学分析,所以,对非线性问题,离散问题等也可避开其数学处理上的难点。从而对不太熟悉数学理论和算法的使用者来说,无疑是

非常方便的算法之一。

大家知道生物的进化总是遵循适者生存,优胜劣汰的原则。所谓适者就是能够满足其生存环境及其他生存条件的物种,所谓优者就是指能满足生存条件和环境的最优物种。这不难使人想到这里的环境与生存条件就是约束条件,适者就是满足约束条件的可行解。而优者就是满足约束条件的最优解。从而将生物遗传进化的思想引入求解有约束最优化问题无疑是一个全新的思路。

众所周知,生物遗传物质的主要载体是染色体,在遗传算法中,染色体通常是一串数据(或数组),用来作为优化问题的解的代码。遗传算法一般要经过这样几个过程:首先,随机产生一定数目的初始染色体,这些随机产生的染色体组成一个种群。种群中染色体的数目称为种群的大小或种群的规模。然后,用评价函数来评价每一个染色体的优劣,即染色体对环境和生存条件的适应程度(称之为适应度),用来作为以后遗传操作的依据。其次,就是进行选择的过程。选择过程的目的就是从当前种群中选出优良的染色体,使它们成为新一代的染色体。判断染色体优良与否的准则就是各自的适应度,即染色体的适应度越高,其被选择的机会就越多。通过选择计算,产生一个新的种群,然后对这个新的种群进行交叉操作,交叉操作是遗传算法中主要遗传操作之一。接着进行变异操作,变异操作的目的是挖掘种群中个体的多样性,克服有可能陷入局部解的弊病。这样,经过上述算法产生的染色体称之为后代。然后对新的种群(即后代)重复进行选择、交叉和变异操作,经过给定次数的迭代处理后,把最好的染色体作为优化问题的最优解。

用遗传算法求解式(5.43)所示的随机地下水管理模型时,无须对其中的每个非线性约束条件进行线性化处理,而是按照遗传算法的基本步骤随机地产生一组染色体(一组随机解),然后代入每个约束条件进行检验计算。若满足所有的约束条件,则认为其为一组可行解,作为初始解群体中的一个体;如果不能满足所有的约束条件,则认为其不可行,废除该解个体。如此不断重复地产生随机解个体并进行对约束条件的满足性检验,直到产生够预先设定的群体规模 n 。这样所产生的 n 个解个体便形成了初始化的随机解群体 $(V_1, V_2, \dots, V_n)$ 。然后以目标函数为基础,并结合其他因素构造适应度函数(评价函数)。根据约束条件、适应度函数及初始化的解群体便可进行遗传运算和遗传进化,直至达到进化的结束标准。

遗传算法的基本解题步骤如图 6.1 所示。

在遗传计算中,为了一些基本遗传运算的方便,决策变量值常用二进制数串表示。多个变量的二进制数串可连在一起形成更长的二值数串(或称之为一个染色体)来表示整体优化解或优化设计。假设有一个优化问题,其决策变量为 $x_i (i = 1, 2, \dots, k)$ 。且每个决策变量的可能取值范围为 $[a_i, b_i] (i = 1, 2, \dots, k)$ 。其中 a_i 和 b_i 均为实数,不同的 $[a_i, b_i]$ 之间允许互相重叠,即允许有 $[a_i, b_i] \cap [a_j, b_j] \neq \Phi (i \neq j)$ 。每个决策变量可译码成长度为 M_i 的二进制数串(又称二值树串)。二值数串的长度取决于对决策变量的表示精度。图 6.2 为 k 个决策变量的二值数串译码表示形式。

对于一个具体问题进行遗传运算成败的关键在于对遗传运算关键参数的设计。这些关键参数主要有:群体大小(n),遗传代数(m),适应度函数构造形式 $f(x)$,交叉运算概率 P_c ,变异运算概率 P_m 等。根据不同问题,上述参数的取值是不同的。但一个较好的遗传算法要求有较高的交叉概率和较低的变异概率。解群体的大小要适中。陈国良、云庆夏^[35,36]等

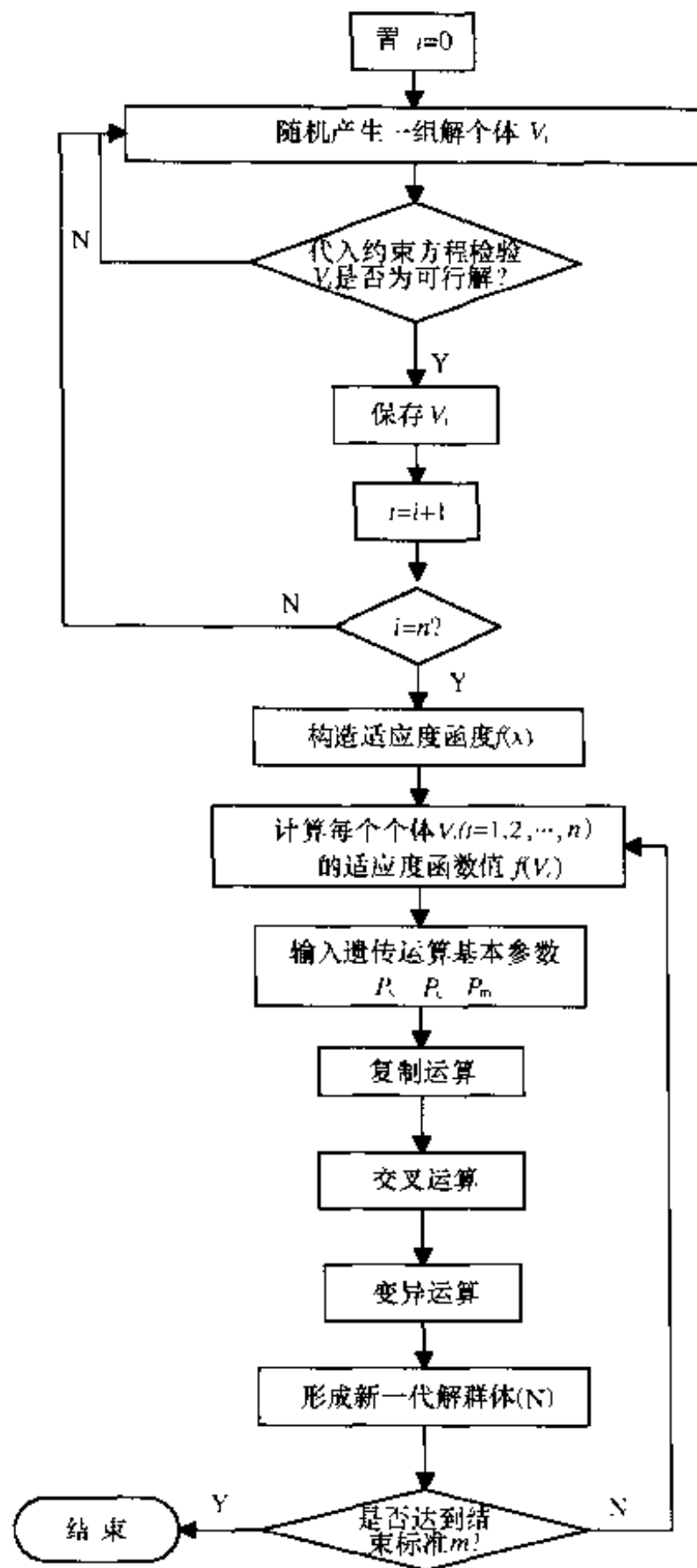


图 6.1 遗传算法求解地下水管理问题流程图

n —解群体规模数(个体数目); $f(x)$ —适应度函数; V_i —第 i 个解个体($i=1,2,\dots,n$); P_c —复制概率;
 P_m —变异概率; P_c —交叉概率; m —进化代数

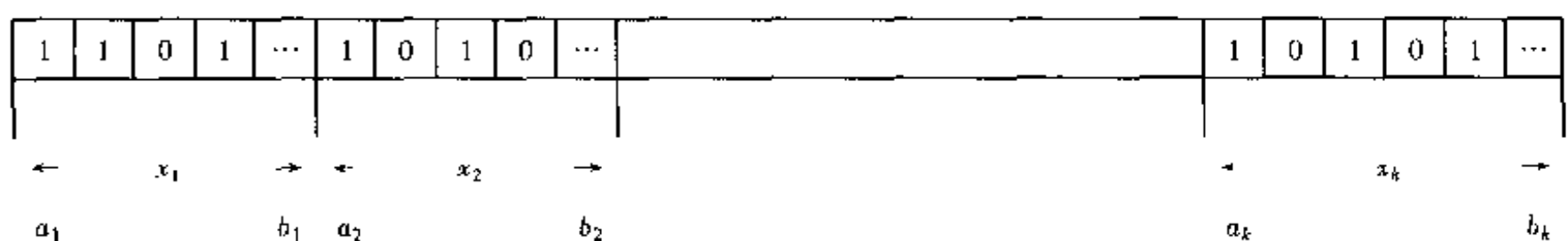


图 6.2 多变量二值数串表示形式示意图

研究认为上述参数的一般取值范围为：

$$n \in (30, 100)$$

$$m \in (10, 30)$$

$$P_c \in (0.6, 0.8)$$

$$P_m \in (0.1, 0.3)$$

对于如式(2.3)表示的有约束最优化问题的适应度函数一般为：

$$f(X) = f(x) \pm r_i \sum_{i=1}^m h_i^2(x)$$

式中： $f(x)$ ——目标函数表达式；

r_i ——惩罚因子；

$h_i^2(x)$ ——对 i 个约束条件偏差的平方；

m ——约束方程的个数。

当然,对于为不同目的而进行的优化问题,不同的变量可以有不同的物理含义。且适应度函数的构造方法与结构形式亦是多种多样的。

第 7 章 模型应用技术

7.1 模型应用一

考虑一个承压含水层盆地,其中有 5 个水压观测和控制点,3 个抽水井。3 个抽水井和 5 个观测点的位置如图 7.1 所示。

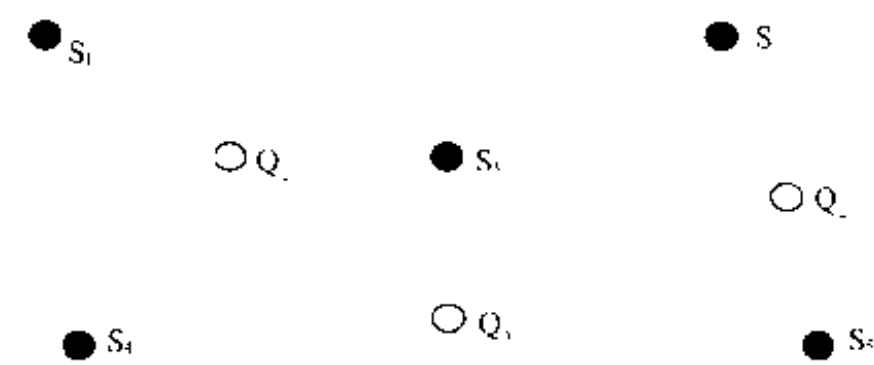


图 7.1 抽水井和观测井位置图

从平面图中可见,抽水井和观测孔之间的距离是可测得的,其具体距离见表 7.1。盆地中含水层的平均导水系数和储水系数分别为 $465\text{ m}^2/\text{d}$ 和 0.002 。要求解的问题就是在 3 个以 50 天为时段的阶段中如何分配 3 个抽水井的水量才能使得总水量最大,并使 5 个水位控制点的水位在给定的可靠性要求下不超过允许值。每个

观测点在每个阶段的最大允许水位降如表 7.2 所示。目标函数是在给定可靠度水平和条件下(允许值下)总抽水量达最大。

表 7.1 不同抽水井与水位控制点之间的相互距离 (m)

抽水井	水位控制点				
	1	2	3	4	5
1	158	381	158	255	430
2	515	255	292	474	158
3	447	447	200	200	200

表 7.2 每个观测点在每个阶段的最大允许水位降 (m)

时段	1	2	3	4	5
1	5	5	8	5	5
2	8	8	10	8	8
3	10	10	15	10	10

根据所研究问题的要求与性质,建立了下列多阶段随机地下水管理模型:

$$\begin{cases} \max Z = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n Q(i,k) \\ \text{s.t. } P_r\left\{\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \beta(i,j,k) \cdot Q(i,n-k+1) \leq S(j,k)\right\} \geq \alpha(j,k) \quad (j=1,2,\cdots,P) \\ Q(i,n-k+1) \geq 0 \end{cases} \tag{7.1}$$

为了检查不确定性水平和含水层性质的不确定性对优化解的影响,在不同的可靠度要求和不同程度的参数不确定水平下(如导水系数和储水系数)采用 Taylor 展开法对(7.1)方程问题进行了求解,其计算结果见图 7.2 至图 7.5。利用协方差系数(Cov)来刻画含水层参数的不确定性水平。正如所希望的那样,最大抽水(供水)量随着对供水保障程度要求的提高而随之减少,在相同的可靠度要求条件下,抽水量随着参数不确定水平的提高而减少。由图可见,在给定的可靠度要求和导水系数不确定因素下,储水系数的不确定性水平对总抽水供水量影响很小(不敏感),就是说:储水系数不确定性的贡献对整个降深的影响意义不大。这意味着储水系数可处理成一恒定值。但导水系数的不确定性不能忽视和不计。

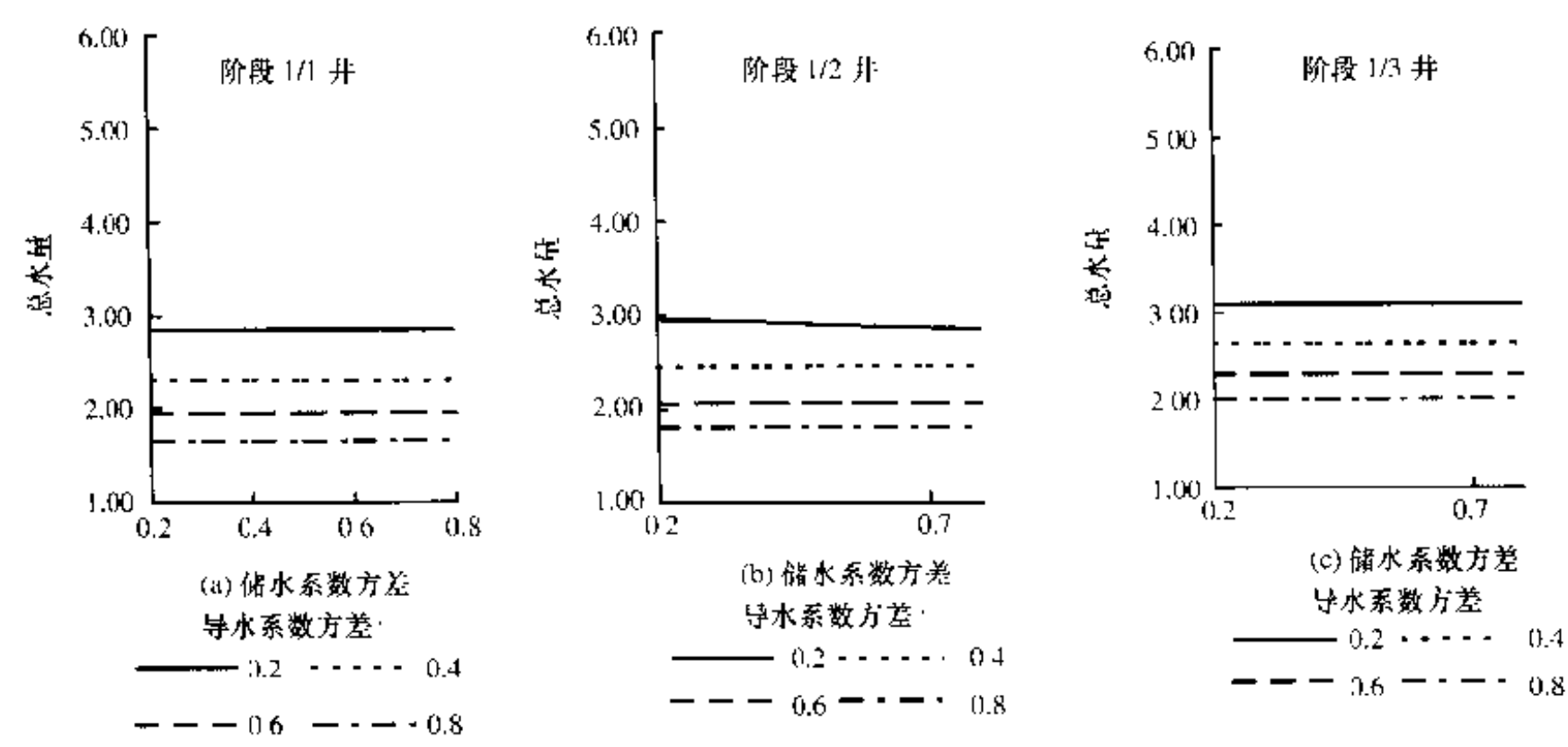


图 7.2 第一阶段总允许抽水量与不同置信度水平关系图
(a)置信度水平 = 0.975; (b)置信度水平 = 0.950; (c)置信度水平 = 0.900

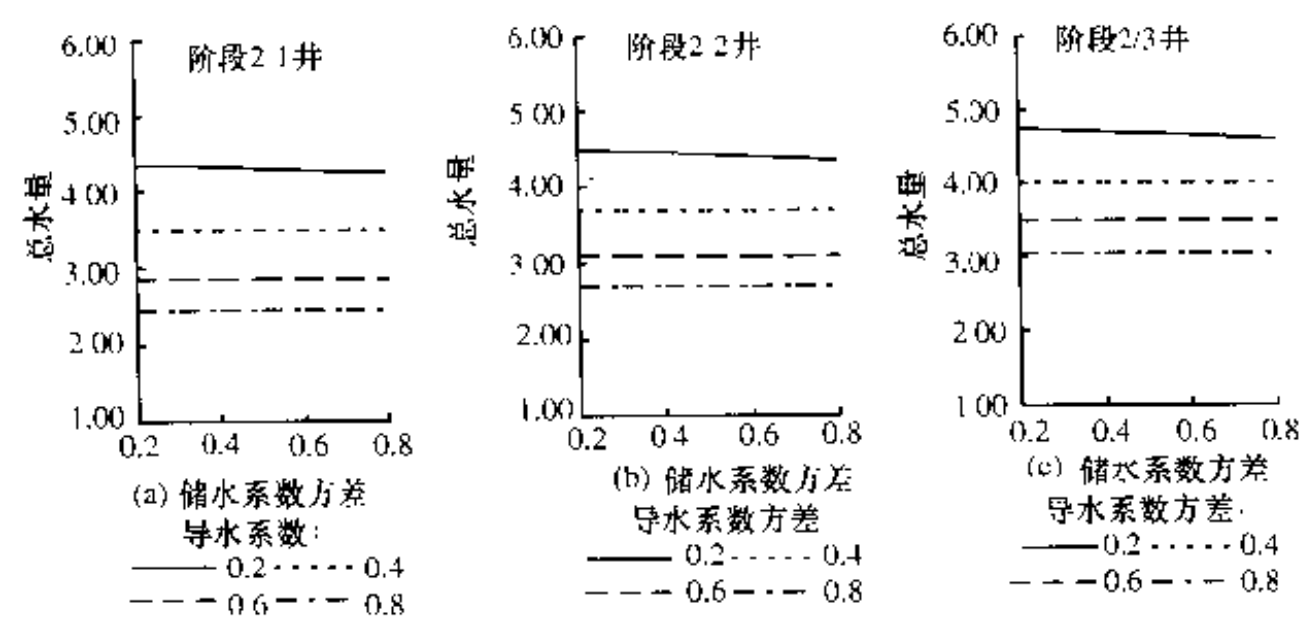


图 7.3 第二阶段总允许抽水量与不同置信度水平关系图
(a)置信度水平 = 0.975; (b)置信度水平 = 0.950; (c)置信度水平 = 0.900

在把最初的随机控制方程向确定性方程转化过程中,在每个阶段,每个控制点随机降深的密度函数假设为具有正态分布。本实例所提出的最优模拟研究是为了检验在不同阶段,

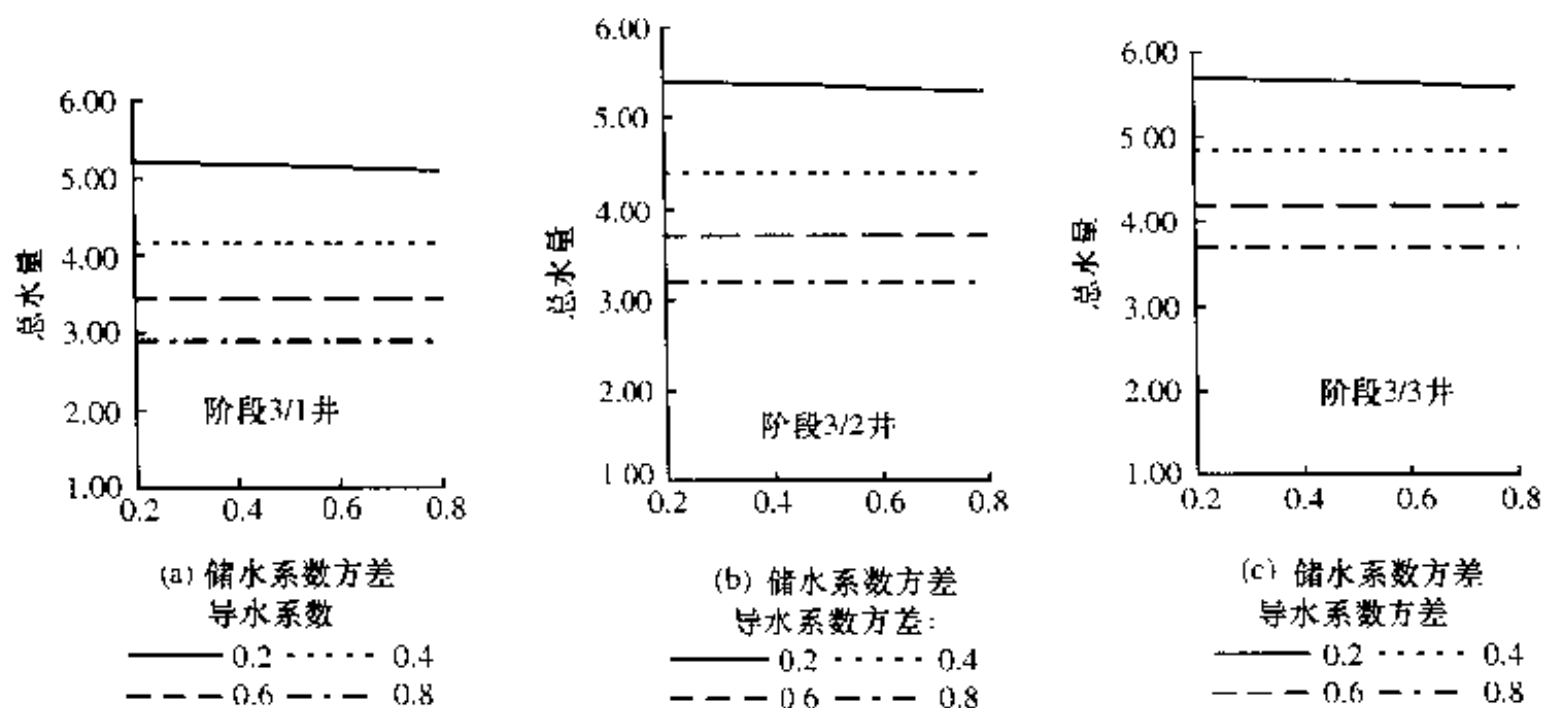


图 7.4 第三阶段总允许抽水量与不同置信度水平关系图
 (a)置信度水平 = 0.975; (b)置信度水平 = 0.950; (c) 置信度水平 = 0.900

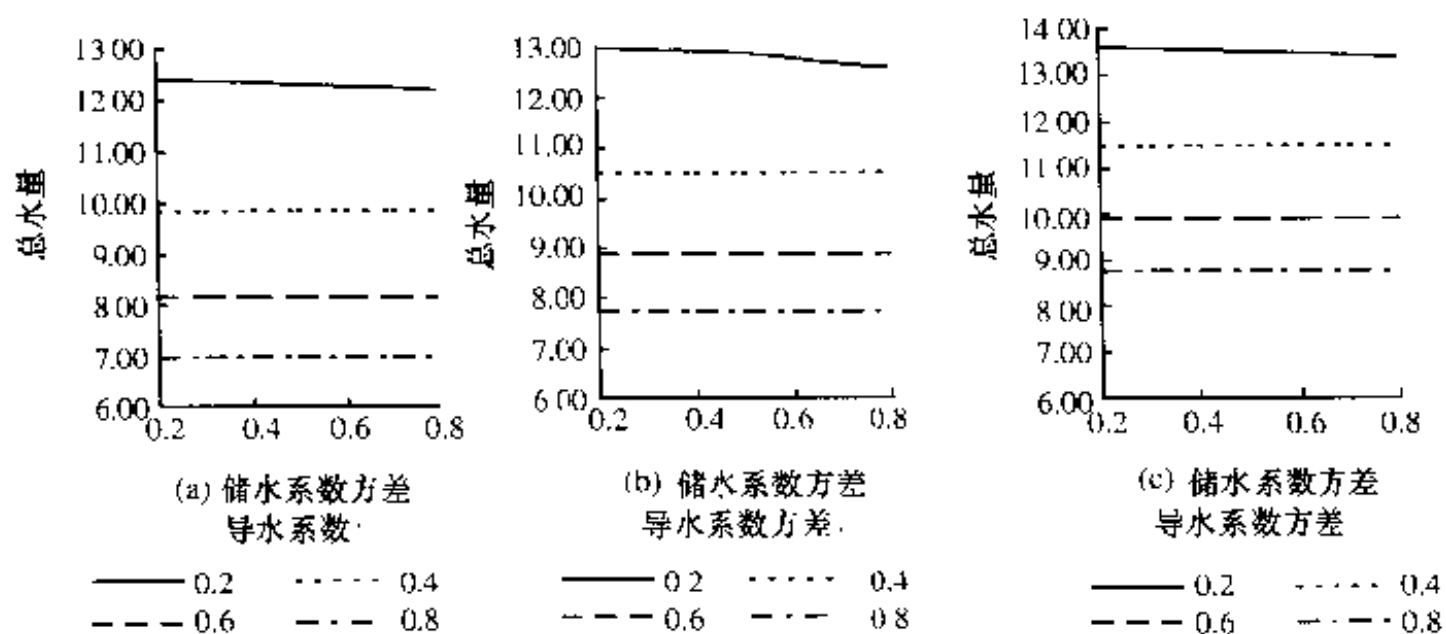


图 7.5 三个阶段总允许抽水量与不同置信度水平关系图
 (a)置信度水平 = 0.975; (b)置信度水平 = 0.950; (c)置信度水平 = 0.900

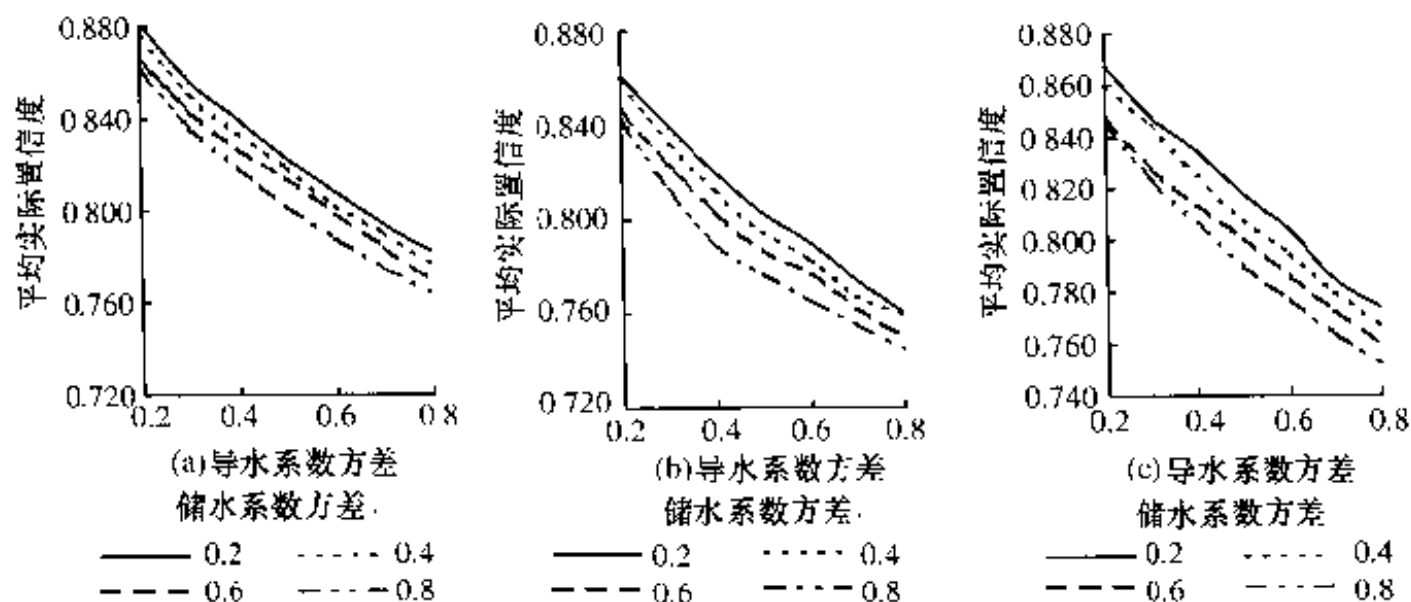


图 7.6 在模型可靠性要求为90%时不同参数不确定性水平下的实际平均可靠性
 (a)第一阶段; (b)第二阶段; (c)第三阶段

每个观测控制点条件下,模拟结果与可靠性要求之间关系的密切程度。根据在假设模型中不同点 1000 个相互独立的服从对数正态分布函数中采样数据(K, μ)。根据不同的不确定性水平和可靠度要求用随机模型计算了总抽水量。在各种不同可靠度要求和参数不确定水平下,实际的可靠性在 5 个控制点的平均值,在不同阶段的计算结果见图 7.6 至图 7.8。

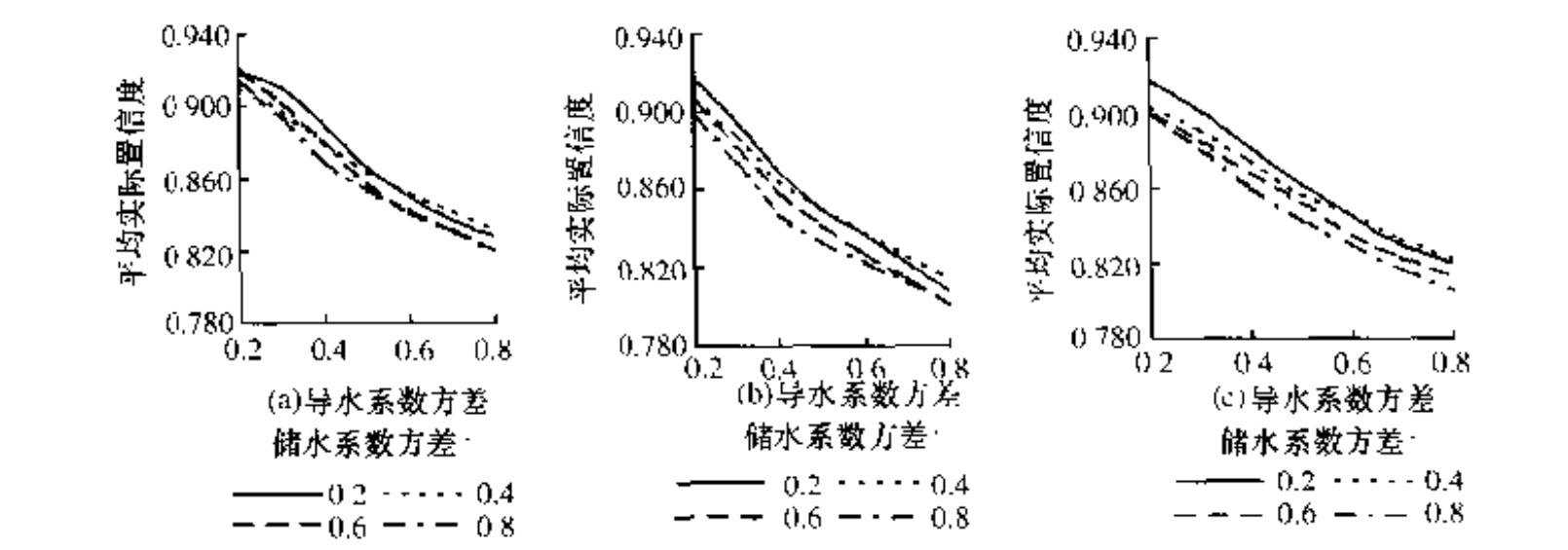


图 7.7 在模型可靠性要求为 95% 时不同参数不确定性水平下的实际平均可靠性
(a)第一阶段;(b)第二阶段;(c)第三阶段

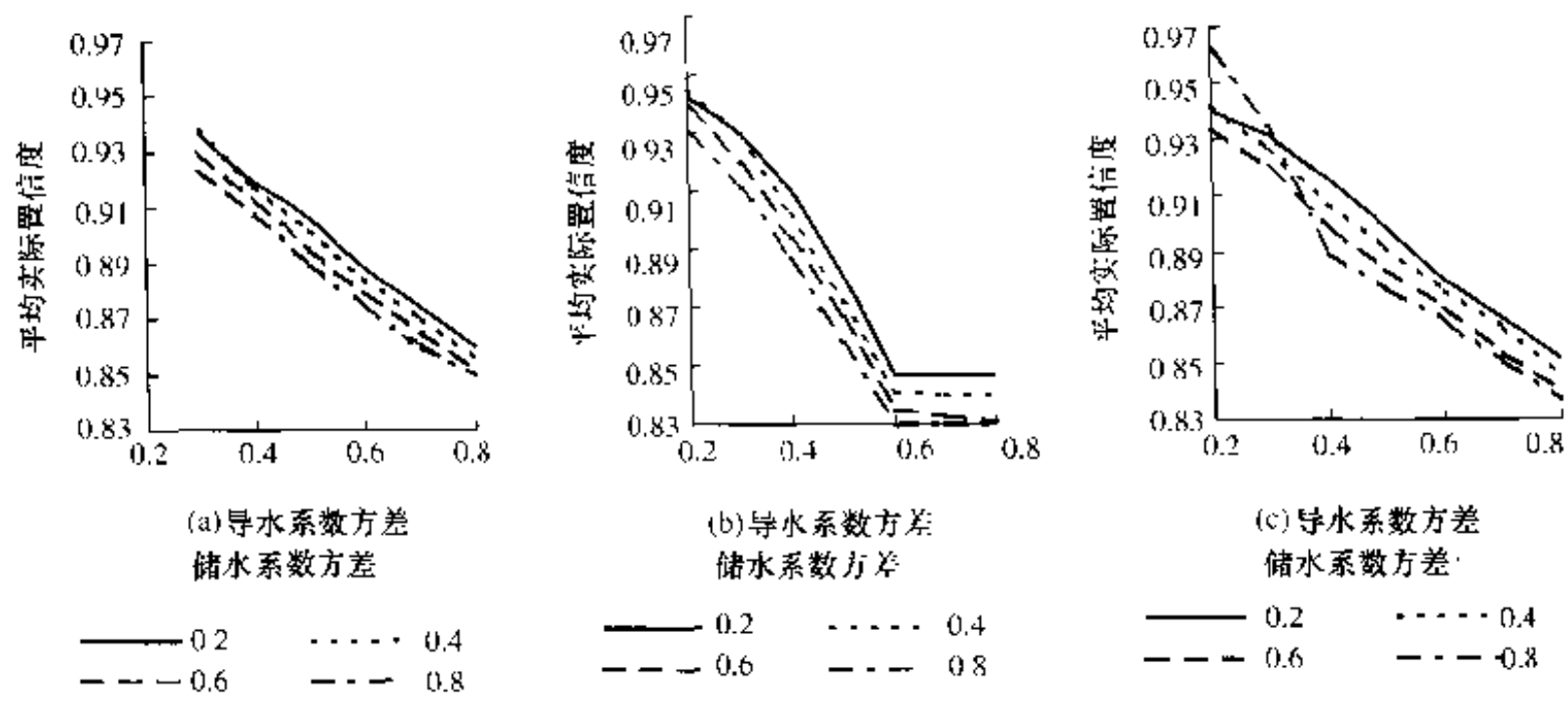


图 7.8 在模型可靠性要求为 97.5% 时不同参数不确定性水平下的实际平均可靠性
(a)第一阶段;(b)第二阶段;(c)第三阶段

7.2 模型应用二

为了便于计算和分析,书中采用了如图 7.9 所示的均质、各向同性承压二维地下水流作为计算的假设水文地质模型。模拟区长 110 m,宽 110 m,形状为正方形。含水层水平,如图 7.10 所示,底板标高为 0 m。顶板标高为 30 m。含水层左右边界为隔水边界,上下边界为定水头边界,边界水位标高均值为 100 m,初始水位标高均值为 100 m。

根据工程要求,需要对该含水层的中心位置节点 1、2、3、4、5、6、7、8、9 所围成的正方形区域进行疏水降压,且水位降低值要 ≥ 10 m。优化设计的目标是如何设计疏干孔和配置疏干水量才能在满足疏干条件下而使最终的稳定疏干总水量最小,该问题用最优化管理模型可表示为:

$$\begin{cases} \min Z = \sum_{i=1}^n Q_i \\ [A] \cdot [Q] \geq [S] \\ [Q] \geq 0 \end{cases} \quad (7.2)$$

式中:[A]——响应系数矩阵;
 [Q]——水量决策列向量;
 [S]——水位疏降约束要求列向量;

对该地下水管理模型采用分布参数地下水管理模型,并利用有限单元法计算响应系数。计算剖分网格如图 7.9 所示。剖分总节点为 157 个,总单元数为 268 个。

根据上述剖分情况及管理问题的要求,设水位控制点为节点 1、2、3、4、5、6、7、8、9。即 1~9 号节点水位疏降值 ≥ 10 m。并假设节点 10、11、12、13、14、15、16、17、18,为可供选择的疏干井位。这样地下水管理模型(7.2)可具体地表示为:

$$\begin{cases} \min Z = \sum_{i=1}^9 Q_i \\ \beta_{11}Q_1 + \beta_{12}Q_2 + \cdots + \beta_{19}Q_9 \geq 10 \\ \beta_{21}Q_1 + \beta_{22}Q_2 + \cdots + \beta_{29}Q_9 \geq 10 \\ \cdots \quad \cdots \\ \beta_{91}Q_1 + \beta_{92}Q_2 + \cdots + \beta_{99}Q_9 \geq 10 \\ Q_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \cdots, 9 \end{cases} \quad (7.3)$$

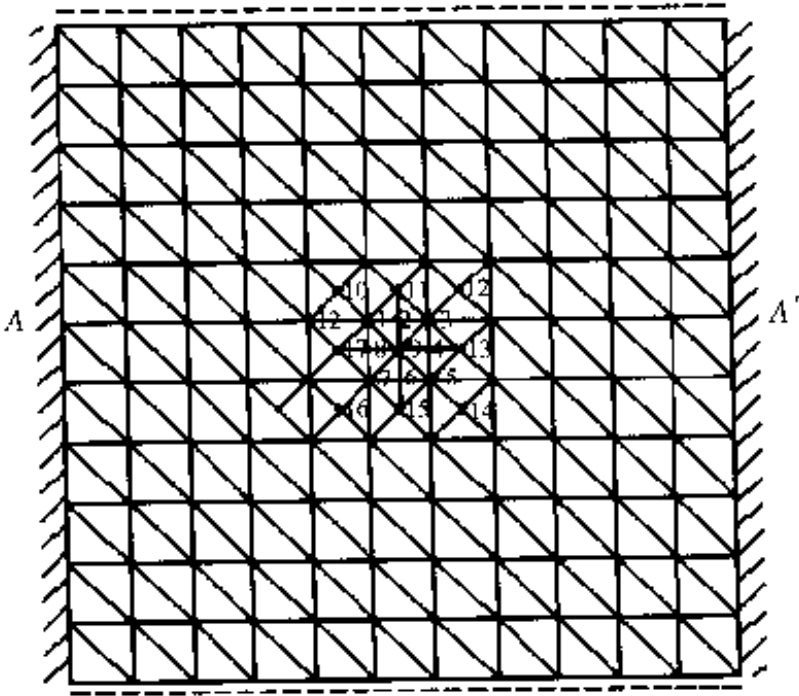


图 7.9 计算模型及剖分图

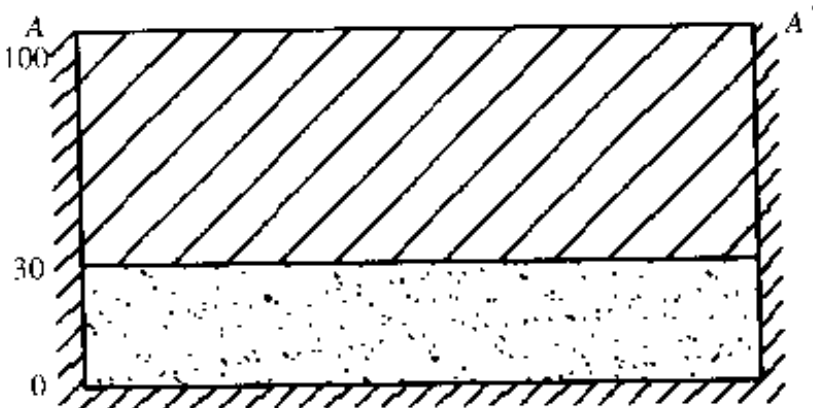


图 7.10 计算模型 A—A' 剖面图

7.2.1 假设模型的随机性计算讨论

为了讨论不同水文地质参数,不同的约束条件置信度水平要求对管理结果的影响,本实例就假设问题的机会约束规划模型分别利用泰勒展开解法和人工遗传算法进行了计算分析。

7.2.1.1 Taylor 展开求解方法

(1) 假设模型中渗透系数为服从均匀分布的随机变量,且渗透系数的均值为 $K_x = \bar{K}_y = 5 \text{ m/d}$,其他水文地质参数为确定性变量,即 $\mu = 5 \times 10^{-4}$, $H_0(x, y, 0) = 100 \text{ m}$, $H_b(x, y, t) |_{t_1} = 100 \text{ m}$,渗透系数的方差 $\text{var}(K)$ 分别为 1.333, 0.750, 0.333 和 0.083。在每种方差条件下,又分别考虑约束条件的置信水平为 $\alpha = 1.0, \alpha = 0.95, \alpha = 0.9, \alpha = 0.85$ 和 $\alpha = 0.8$ 5 种情况。通过 20 种方案的计算讨论,可得渗透系数 K 的方差 $\text{var}(K)$ 、约束条件的置信度水平 α 、总疏水量及其分配之间的相互关系如表 7.3 所示。表 7.3 的计算结果如图 7.11 所示。由图 7.11 明显可见:在相同的约束条件置信度水平 α 下,随着 $\text{var}(K)$ 的增加,其总疏水量呈增加趋势;当 $\text{var}(K)$ 一定时,随置信度水平 α 的增加,总疏水量亦呈增大趋势。

表 7.3 Taylor 展开法对渗透系数(K)的随机性计算结果表

节点 水量 var, α ($10^2 \text{ m}^3 \cdot \text{d}^{-1}$)										ΣQ
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
var = 1.333										
$\alpha = 100\%$	0	5.434	0	20.202	0	5.434	0	20.203	0	51.271
$\alpha = 95.9\%$	0	5.333	0	18.599	0	5.333	0	18.599	0	47.865
$\alpha = 90\%$	0	5.310	0	18.371	0	5.310	0	18.371	0	47.364
$\alpha = 85\%$	0	5.294	0	18.273	0	5.294	0	18.273	0	47.035
$\alpha = 80\%$	0	5.278	0	18.078	0	5.278	0	18.078	0	46.711
var = 0.75										
$\alpha = 100\%$	0	5.401	0	19.471	0	5.401	0	19.471	0	49.745
$\alpha = 95\%$	0	5.307	0	18.341	0	5.307	0	18.341	0	47.295
$\alpha = 80\%$	0	5.288	0	18.175	0	5.288	0	18.175	0	46.927
$\alpha = 85\%$	0	5.305	0	18.035	0	5.305	0	18.035	0	46.680
$\alpha = 80\%$	0	5.264	0	17.958	0	5.264	0	17.958	0	46.445
var = 0.333										
$\alpha = 100\%$	0	5.250	0	18.444	0	5.250	0	18.444	0	47.388
$\alpha = 95\%$	0	5.279	0	18.089	0	5.279	0	18.089	0	46.737
$\alpha = 90\%$	0	5.267	0	17.982	0	5.267	0	17.982	0	46.498
$\alpha = 85\%$	0	5.258	0	17.912	0	5.258	0	17.719	0	46.339
$\alpha = 80\%$	0	5.249	0	17.841	0	5.249	0	17.841	0	46.181
var = 0.083										
$\alpha = 100\%$	0	5.289	0	18.182	0	5.289	0	18.182	0	46.944
$\alpha = 95\%$	0	5.250	0	17.846	0	5.250	0	17.846	0	46.194
$\alpha = 90\%$	0	5.243	0	17.795	0	5.243	0	17.795	0	46.076
$\alpha = 85\%$	0	5.239	0	17.759	0	5.239	0	17.759	0	45.998
$\alpha = 80\%$	0	5.234	0	17.725	0	5.234	0	17.725	0	45.920

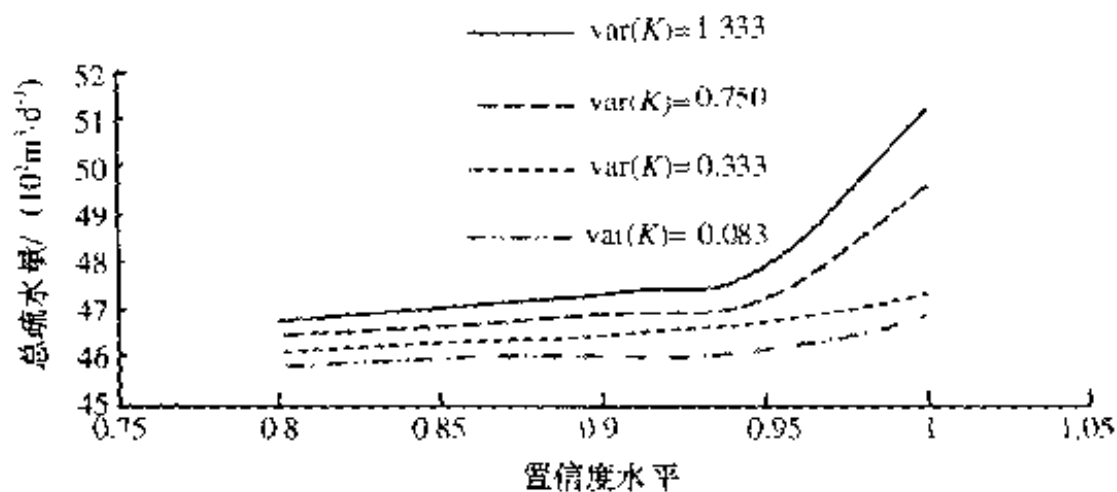


图 7.11 渗透系数不确定信水平、模型可靠性及总疏水量关系图

(2) 假设模型中的弹性给水度为服从均匀分布的随机变量, 且其均值为 5×10^{-4} , 其他水文地质参数均为确定性变量, 即 $K_x = K_y = 5 \text{ m/d}$, $H_0(x, y, 0) = 100 \text{ m}$, $H_b(x, y, t) \big|_{\Gamma_1} = 100 \text{ m}$ 。分别就弹性给水度的方差 $\text{var}(\mu)$ 为 0.533×10^{-7} , 0.3×10^{-7} , 0.133×10^{-7} , 0.33×10^{-8} , 约束条件的置信度水平分别为 1.0, 0.95, 0.90, 0.85, 0.80 讨论计算了弹性给水度随机性与管理结果之间的关系。表 7.4 为 $\text{var}(\mu)$ 、 α 、总疏水量及配置之间的关系。图 7.12 为表 7.4 中计算结果的图形表示。由图 7.12 可见: 在相同的约束条件置信度水平 α 下, 随着弹性给水度方差 $\text{var}(\mu)$ 增加, 总疏水量呈增大趋势, 但其增加的幅度非常小。在同样的 $\text{var}(\mu)$ 条件下, 随着约束条件置信度水平 α 的增加, 总疏水量亦呈增加趋势, 且这种增加的幅度亦非常小。

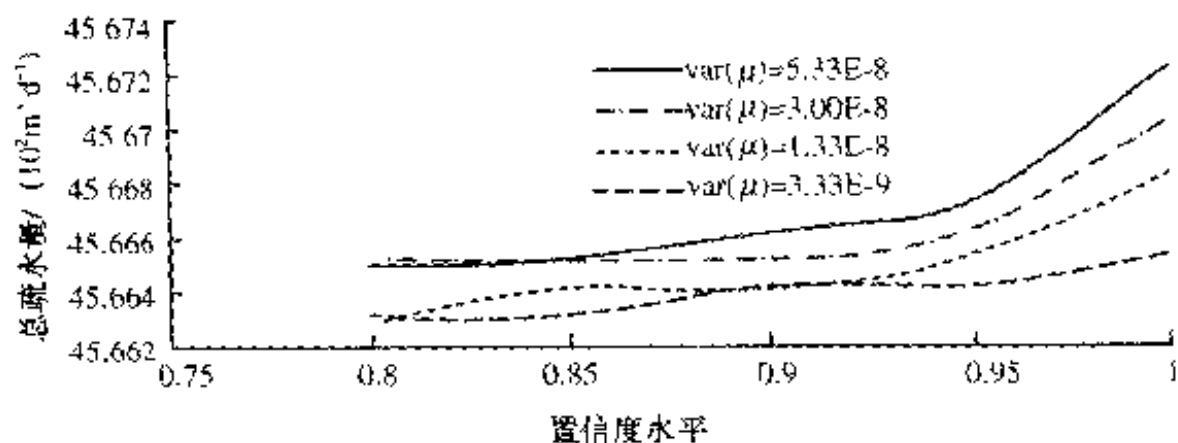


图 7.12 给水度不确定信水平、模型可靠性及总疏水量关系图

(3) 假设一类边界条件 $H_b(x, y, t) \big|_{\Gamma_1}$ 上的水位为服从均匀分布的随机变量, 且其均值为 100 m, 其他水文地质参数均为确定量, 即 $K_x = K_y = 5 \text{ m/d}$, $\mu = 5 \times 10^{-4}$, $H_0(x, y, 0) = 100 \text{ m}$ 。分别就一类边界水位 $H_b(x, y, t) \big|_{\Gamma_1}$ 的方差 $\text{var}(H_b) = 0.0833, 0.0533, 0.030, 0.0133$, 约束条件的置信度水平要求为 1.0, 0.95, 0.90, 0.85, 0.80 进行了随机管理模型的计算讨论, 表 7.5 为各种组合条件下的计算结果。图 7.13 为其计算结果的图形表示。由图 7.13 可见, 在相同的置信度 α 下, 随着方差 $\text{var}(H_b)$ 的增加, 总疏水量呈明显增加趋势。当 $\text{var}(H_b)$ 一定时, 随着约束条件置信度水平的提高, 其总疏水量亦呈明显的增加趋势。且在方差值不大的情况下, 总疏水量总体的变化幅度较大。

表 7.4 Taylor 展开法对弹性给水度(μ)的随机性计算结果表

节点 水量 var, α ($10^2 \text{m}^3 \cdot \text{d}^{-1}$)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	ΣQ
$\text{var} = 0.533 \times 10^{-7}$	0	5.221	0	17.615	0	5.221	0	17.615	0	45.672
$\alpha = 100\%$	0	5.221	0	17.615	0	5.221	0	17.615	0	45.672
$\alpha = 95\%$	0	5.221	0	17.613	0	5.221	0	17.613	0	45.667
$\alpha = 90\%$	0	5.220	0	17.613	0	5.220	0	17.613	0	45.666
$\alpha = 85\%$	0	5.220	0	17.613	0	5.220	0	17.613	0	45.666
$\alpha = 80\%$	0	5.220	0	17.612	0	5.220	0	17.612	0	45.665
$\text{var} = 0.3 \times 10^{-7}$										
$\alpha = 100\%$	0	5.221	0	17.614	0	5.221	0	17.614	0	45.670
$\alpha = 95\%$	0	5.220	0	17.612	0	5.220	0	17.612	0	45.666
$\alpha = 90\%$	0	5.220	0	17.612	0	5.220	0	17.612	0	45.665
$\alpha = 85\%$	0	5.220	0	17.612	0	5.220	0	17.612	0	45.665
$\alpha = 80\%$	0	5.220	0	17.612	0	5.220	0	17.612	0	45.665
$\text{var} = 0.1333 \times 10^{-7}$										
$\alpha = 100\%$	0	5.220	0	17.613	0	5.220	0	17.613	0	45.668
$\alpha = 95\%$	0	5.220	0	17.613	0	5.220	0	17.613	0	45.667
$\alpha = 90\%$	0	5.220	0	17.612	0	5.220	0	17.612	0	45.666
$\alpha = 85\%$	0	5.220	0	17.612	0	5.220	0	17.612	0	45.664
$\alpha = 80\%$	0	5.220	0	17.612	0	5.220	0	17.612	0	45.664
$\text{var} = 0.3 \times 10^{-8}$										
$\alpha = 100\%$	0	5.220	0	17.612	0	5.220	0	17.613	0	45.665
$\alpha = 95\%$	0	5.220	0	17.612	0	5.220	0	17.612	0	45.664
$\alpha = 90\%$	0	5.220	0	17.612	0	5.220	0	17.612	0	45.664
$\alpha = 85\%$	0	5.220	0	17.612	0	5.220	0	17.612	0	45.664
$\alpha = 80\%$	0	5.219	0	17.612	0	5.220	0	17.612	0	45.663

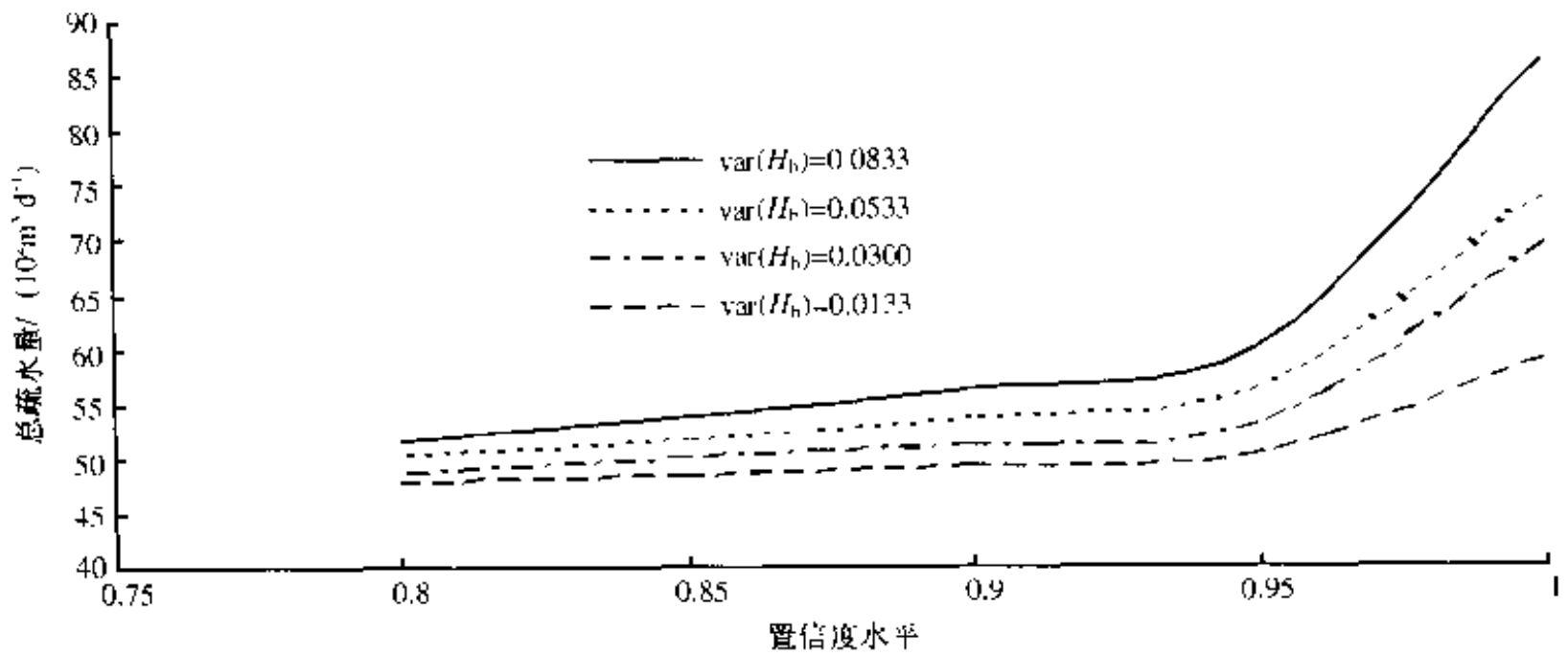


图 7.13 一类边界水位不确定信水平、模型可靠性及总疏水量关系图

表 7.5 Taylor 展开法对一类边界水位 (H_b) 的随机性计算结果表

节点 水量 var, α ($10^2 \text{m}^3 \cdot \text{d}^{-1}$)										ΣQ
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
$\text{var} = 0.833$	0		0		0		0		0	
$\alpha = 100\%$	0	12.174	0	41.072	0	12.174	0	41.072	0	86.994
$\alpha = 95\%$	0	6.870	0	23.179	0	6.870	0	23.179	0	60.099
$\alpha = 90\%$	0	6.424	0	21.675	0	6.424	0	21.675	0	56.199
$\alpha = 85\%$	0	6.158	0	20.776	0	6.158	0	20.776	0	53.869
$\alpha = 80\%$	0	5.912	0	19.949	0	5.912	0	19.949	0	51.724
$\text{var} = 0.0533$										
$\alpha = 100\%$	0	9.612	0	32.429	0	9.612	0	32.429	0	74.082
$\alpha = 95\%$	0	6.461	0	21.801	0	6.461	0	21.801	0	56.524
$\alpha = 90\%$	0	6.141	0	20.718	0	6.141	0	20.718	0	53.719
$\alpha = 85\%$	0	5.944	0	20.055	0	5.944	0	20.055	0	51.999
$\alpha = 80\%$	0	5.760	0	19.433	0	5.760	0	19.433	0	50.386
$\text{var} = 0.03$										
$\alpha = 100\%$	0	7.942	0	26.798	0	7.942	0	26.798	0	69.481
$\alpha = 95\%$	0	6.099	0	20.578	0	6.099	0	20.578	0	53.354
$\alpha = 90\%$	0	5.882	0	19.844	0	5.882	0	19.844	0	51.452
$\alpha = 85\%$	0	5.745	0	19.384	0	5.745	0	19.384	0	50.257
$\alpha = 80\%$	0	5.459	0	19.000	0	5.459	0	19.000	0	48.919
$\text{var} = 0.0133$										
$\alpha = 100\%$	0	6.763	0	22.820	0	6.763	0	22.820	0	59.168
$\alpha = 95\%$	0	5.774	0	19.481	0	5.774	0	19.481	0	50.511
$\alpha = 90\%$	0	5.642	0	19.037	0	5.642	0	19.037	0	49.361
$\alpha = 85\%$	0	5.558	0	18.753	0	5.558	0	18.753	0	48.623
$\alpha = 80\%$	0	5.477	0	18.476	0	5.477	0	18.476	0	47.906

(4) 假设初始水位 $H_0(x, y, 0)$ 为服从均匀分布的随机变量, 且其均值为 100 m, 而其他水文地质参数均为确定性变量, 即 $K_x = K_y = 5 \text{ m/d}$, $\mu = 5 \times 10^{-4}$, $H_b(x, y, t)|_{r_1} = 100 \text{ m}$ 。文中分别就初始水头的方差 $\text{var}(H_0)$ 为 8.33, 5.33, 3.00 和 1.333, 约束条件的置信度水平为 1.0, 0.95, 0.90, 0.85, 0.8 进行了随机管理模型计算讨论, 表 7.6 为多种组合条件下的计算结果。图 7.14 为计算结果的图形表示。由表 7.6 和图 7.14 可见初始水头的方差并不影响总疏干水量。因此, 初始水位的高低并不影响最后稳定的疏干水量。

7.2.1.2 人工遗传算法

对于同样的假设模型和问题, 与 Taylor 展开法同样的计算假设条件, 采用人工遗传算法进行了管理模型的优化求解。为了减少遗传算法的工作量, 初始解群体由 1000 个随机解个体中依其适应度函数值的优劣性选出; 并设基本进化运算参数为:

表 7.6 Taylor 展开法对初始水头 (H_0) 的随机性计算结果表

节点 水 鼠 var, α ($10^2 \text{m}^3 \cdot \text{d}^{-1}$)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	ΣQ
$\text{var} = 8.333$	0		0		0		0		0	
$\alpha = 100\%$	0	4.813	0	18.012	0	4.813	0	18.012	0	45.650
$\alpha = 95\%$	0	4.813	0	18.012	0	4.813	0	18.012	0	45.650
$\alpha = 90\%$	0	4.813	0	18.012	0	4.813	0	18.012	0	45.650
$\alpha = 85\%$	0	4.813	0	18.012	0	4.813	0	18.012	0	45.650
$\alpha = 80\%$	0	4.813	0	18.012	0	4.813	0	18.012	0	45.650
$\text{var} = 5.333$										
$\alpha = 100\%$	0	4.813	0	18.012	0	4.813	0	18.012	0	45.650
$\alpha = 95\%$	0	4.813	0	18.012	0	4.813	0	18.012	0	45.650
$\alpha = 90\%$	0	4.813	0	18.012	0	4.813	0	18.012	0	45.650
$\alpha = 85\%$	0	4.813	0	18.012	0	4.813	0	18.012	0	45.650
$\alpha = 80\%$	0	4.813	0	18.012	0	4.813	0	18.012	0	45.650
$\text{var} = 3.0$										
$\alpha = 100\%$	0	4.813	0	18.012	0	4.813	0	18.012	0	45.650
$\alpha = 95\%$	0	4.813	0	18.012	0	4.813	0	18.012	0	45.650
$\alpha = 90\%$	0	4.813	0	18.012	0	4.813	0	18.012	0	45.650
$\alpha = 85\%$	0	4.813	0	18.012	0	4.813	0	18.012	0	45.650
$\alpha = 80\%$	0	4.813	0	18.012	0	4.813	0	18.012	0	45.650
$\text{var} = 1.333$										
$\alpha = 100\%$	0	4.813	0	18.012	0	4.813	0	18.012	0	45.650
$\alpha = 95\%$	0	4.813	0	18.012	0	4.813	0	18.012	0	45.650
$\alpha = 90\%$	0	4.813	0	18.012	0	4.813	0	18.012	0	45.650
$\alpha = 85\%$	0	4.813	0	18.012	0	4.813	0	18.012	0	45.650
$\alpha = 80\%$	0	4.813	0	18.012	0	4.813	0	18.012	0	45.650

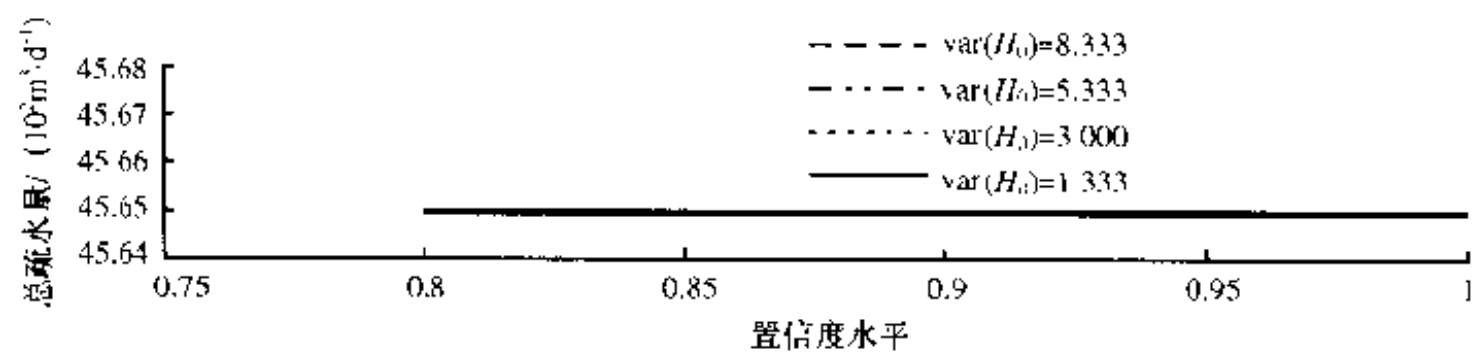


图 7.14 初始水位不确定信水平、模型可靠性及总疏水量关系图

群体规模 $m = 30$

交叉计算概率 $P_c = 0.7$

变异计算概率 $P_m = 0.1$

进化代数 $n = 60$

其计算结果见表 7.7 至表 7.10 及图 7.15 至图 7.18.

表 7.7 人工遗传算法对渗透系数(K)的随机性计算结果

节点 水量 var, α ($10^2 m^3 \cdot d^{-1}$)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	ΣQ
$var = 1.333$	6	8	4	14	3	7	1	13	0	56
$\alpha = 100\%$	6	8	4	14	3	7	1	13	0	56
$\alpha = 95\%$	5	9	2	12	1	7	1	12	0	49
$\alpha = 90\%$	5	9	2	12	1	7	1	12	0	49
$\alpha = 85\%$	4	8	4	12	2	7	1	9	0	47
$\alpha = 80\%$	3	9	3	12	2	7	1	11	0	48
$var = 0.75$										
$\alpha = 100\%$	6	8	3	14	3	7	1	12	0	54
$\alpha = 95\%$	7	9	2	12	1	8	0	11	0	50
$\alpha = 90\%$	4	8	4	12	2	7	1	9	0	47
$\alpha = 85\%$	4	8	4	12	2	7	1	9	0	47
$\alpha = 80\%$	3	9	2	12	2	6	1	11	0	46
$var = 0.333$										
$\alpha = 100\%$	6	8	3	14	2	7	1	11	0	52
$\alpha = 95\%$	4	8	4	12	2	7	1	9	0	47
$\alpha = 90\%$	2	8	2	11	2	7	2	11	1	46
$\alpha = 85\%$	3	8	3	12	2	6	2	10	0	46
$\alpha = 80\%$	3	8	3	12	2	6	2	10	0	46
$var = 0.083$										
$\alpha = 100\%$	6	8	2	11	2	7	1	10	1	49
$\alpha = 95\%$	4	8	2	11	2	8	1	11	1	48
$\alpha = 90\%$	4	9	2	12	1	7	0	12	0	47
$\alpha = 85\%$	3	8	3	12	2	6	2	9	1	46
$\alpha = 80\%$	3	8	3	12	2	6	2	9	1	46

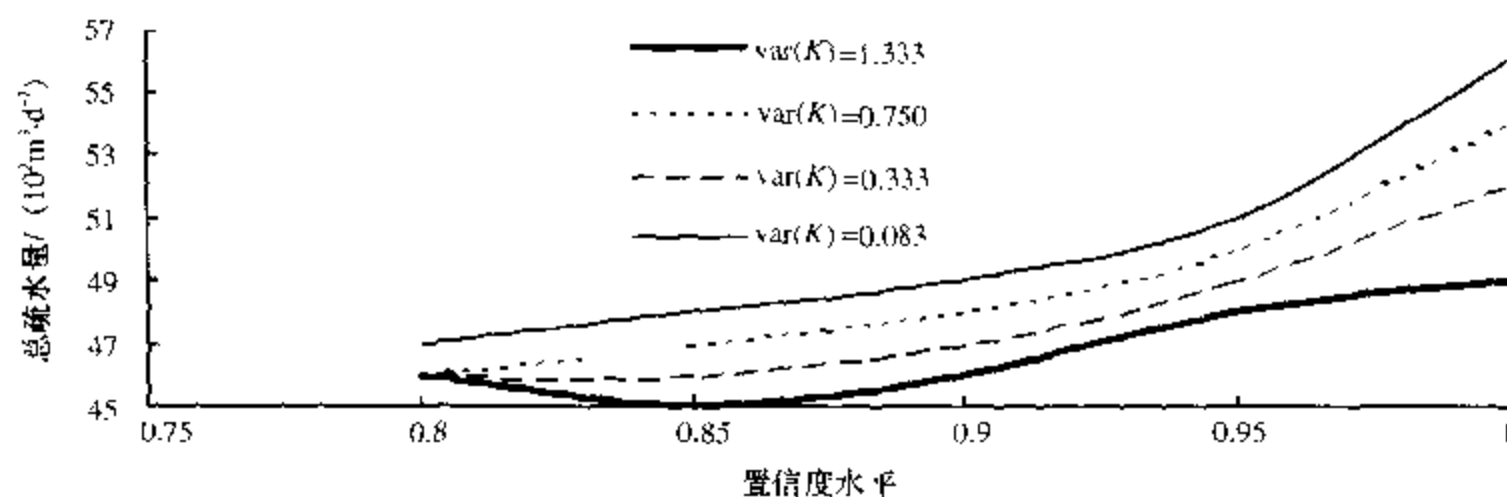


图 7.15 渗透系数不确定信水平、模型可靠性及总疏水量关系图

表 7.8 人工遗传算法对弹性给水度(μ)的随机性计算结果

节点 水 量 var, α ($10^2\text{m}^3\cdot\text{d}^{-1}$)										$\sum Q$
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
var = 0.533										
$\alpha = 100\%$	6	8	2	11	2	7	1	10	1	48
$\alpha = 95\%$	6	8	2	11	2	7	1	10	1	48
$\alpha = 90\%$	6	8	2	11	2	7	1	10	1	48
$\alpha = 85\%$	6	8	2	11	2	7	1	10	1	48
$\alpha = 80\%$	6	8	2	11	2	7	1	10	1	48
var = 0.3										
$\alpha = 100\%$	6	8	2	11	2	7	1	10	1	48
$\alpha = 95\%$	6	8	2	11	2	7	1	10	1	48
$\alpha = 90\%$	6	8	2	11	2	7	1	10	1	48
$\alpha = 85\%$	6	8	2	11	2	7	1	10	1	48
$\alpha = 80\%$	6	8	2	11	2	7	1	10	1	48
var = 0.1333										
$\alpha = 100\%$	6	8	2	11	2	7	1	10	1	48
$\alpha = 95\%$	6	8	2	11	2	7	1	10	1	48
$\alpha = 90\%$	6	8	2	11	2	7	1	10	1	48
$\alpha = 85\%$	6	8	2	11	2	7	1	10	1	48
$\alpha = 80\%$	6	8	2	11	2	7	1	10	1	48
var = 0.0832										
$\alpha = 100\%$	6	8	2	11	2	7	1	10	1	48
$\alpha = 95\%$	6	8	2							
$\alpha = 90\%$	6	8	2	11	2	7	1	10	1	48
$\alpha = 85\%$	6	8	2	11	2	7	1	10	1	48
$\alpha = 80\%$	6	8	2	11	2	7	1	10	1	48

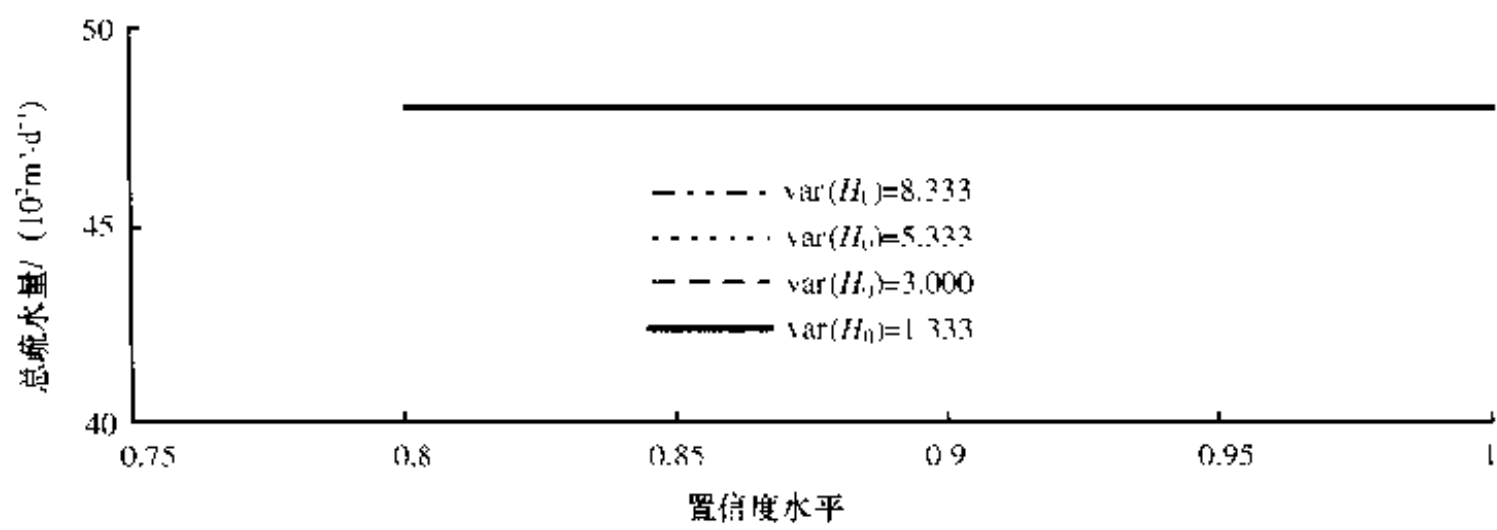


图 7.16 给水度不确定信水平、模型可靠性及总疏水量关系图

表 7.9 人工遗传算法对一类边界条件(H_0)的随机性计算结果

节点 水量 var, α ($10^2 m^3 \cdot d^{-1}$)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\sum Q$
$var = 0.833$										
$\alpha = 100\%$	13	17	12	18	11	17	3	17	0	98
$\alpha = 95\%$	8	11	4	16	3	8	2	12	1	65
$\alpha = 90\%$	5	7	5	18	4	7	2	12	1	61
$\alpha = 85\%$	3	11	3	16	2	9	2	12	0	58
$\alpha = 80\%$	7	9	4	11	3	7	3	10	0	54
$var = 0.533$										
$\alpha = 100\%$	10	15	7	18	6	11	5	18	2	82
$\alpha = 95\%$	7	10	4	13	3	8	1	13	1	60
$\alpha = 90\%$	6	9	5	17	3	7	2	10	0	59
$\alpha = 85\%$	7	9	4	14	4	7	1	11	0	57
$\alpha = 80\%$	5	7	5	16	4	6	1	11	1	53
$var = 0.3$										
$\alpha = 100\%$	8	11	7	15	4	9	4	14	1	73
$\alpha = 95\%$	7	9	4	12	4	9	1	11	0	57
$\alpha = 90\%$	4	7	4	13	3	7	3	18	1	55
$\alpha = 85\%$	7	9	4	11	3	7	1	11	0	53
$\alpha = 80\%$	7	9	4	11	3	7	1	10	0	52
$var = 0.1333$										
$\alpha = 100\%$	8	9	6	12	4	9	1	11	1	61
$\alpha = 95\%$	7	9	4	11	3	7	1	10	0	52
$\alpha = 90\%$	7	9	4	11	3	7	1	10	0	52
$\alpha = 85\%$	5	9	4	11	3	7	1	11	0	51
$\alpha = 80\%$	6	9	6	11	3	6	0	10	0	50

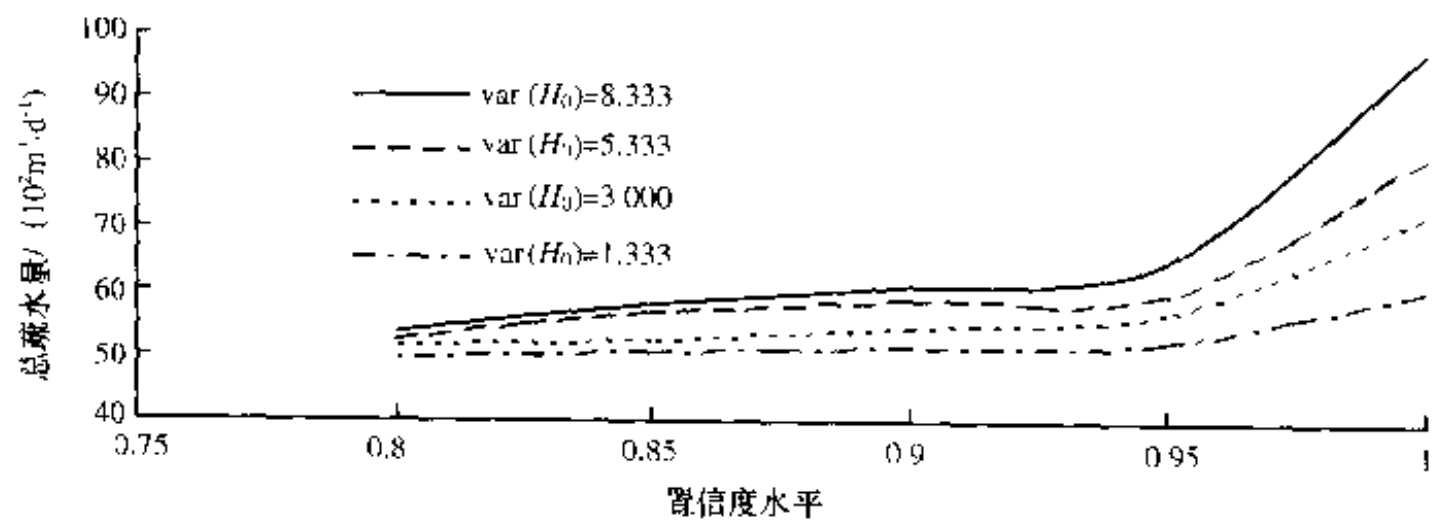


图 7.17 一类边界水位不确定信水平、模型可靠性及总疏水量关系图

表 7.10 人工遗传算法对初始水头 (H_0) 的随机性计算结果表

节点 水量 var, α ($10^2\text{m}^3\cdot\text{d}^{-1}$)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\sum Q$
var = 8.333										
$\alpha = 100\%$	6	8	2	11	2	7	1	10	1	48
$\alpha = 95\%$	6	8	2	11	2	7	1	10	1	48
$\alpha = 90\%$	6	8	2	11	2	7	1	10	1	48
$\alpha = 85\%$	6	8	2	11	2	7	1	10	1	48
$\alpha = 80\%$	6	8	2	11	2	7	1	10	1	48
var = 5.333										
$\alpha = 100\%$	6	8	2	11	2	7	1	10	1	48
$\alpha = 95\%$	6	8	2	11	2	7	1	10	1	48
$\alpha = 90\%$	6	8	2	11	2	7	1	10	1	48
$\alpha = 85\%$	6	8	2	11	2	7	1	10	1	48
$\alpha = 80\%$	6	8	2	11	2	7	1	10	1	48
var = 3.0										
$\alpha = 100\%$	6	8	2	11	2	7	1	10	1	48
$\alpha = 95\%$	6	8	2	11	2	7	1	10	1	48
$\alpha = 90\%$	6	8	2	11	2	7	1	10	1	48
$\alpha = 85\%$	6	8	2	11	2	7	1	10	1	48
$\alpha = 80\%$	6	8	2	11	2	7	1	10	1	48
var = 1.333										
$\alpha = 100\%$	6	8	2	11	2	7	1	10	1	48
$\alpha = 95\%$	6	8	2	11	2	7	1	10	1	48
$\alpha = 90\%$	6	8	2	11	2	7	1	10	1	48
$\alpha = 85\%$	6	8	2	11	2	7	1	10	1	48
$\alpha = 80\%$	6	8	2	11	2	7	1	10	1	48

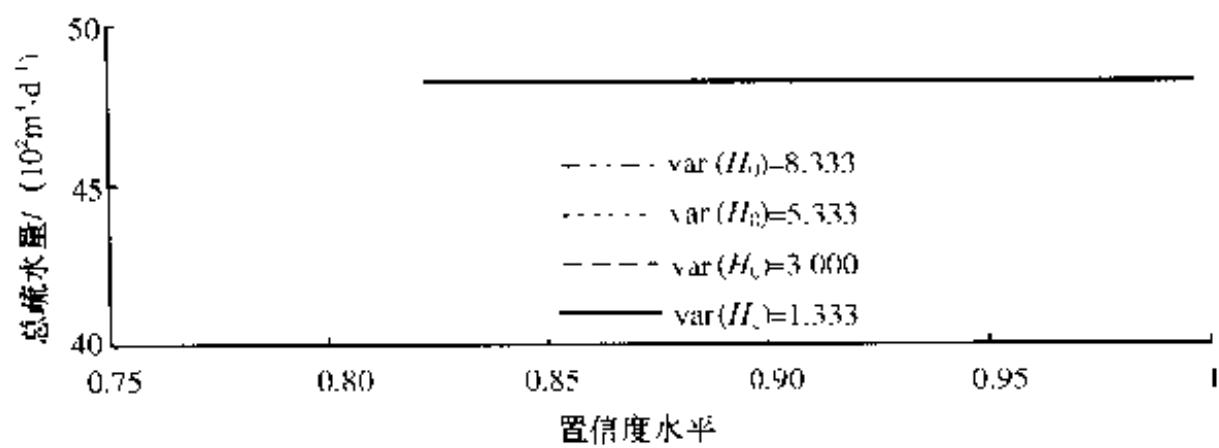


图 7.18 初始水位不确定信水平、模型可靠性及总疏水量关系图

7.2.1.3 随机变量联合分布的 Monte-Carlo 计算方法

前面分别利用 Taylor 展开方法和人工遗传方法就单个随机水文地质参数的情况进行了计算讨论。但我们知道我们所遇到的实际问题往往是多个随机变量并存,且不同随机变量的方差也不尽相同,其随机变量的随机分布概型也各不相同。本节分别就含水层的渗透系数(K),弹性给水度(μ),初始水头分布(H_0)及一类边界水头值(H_b)为服从均匀分布的随机变量和正态分布的随机变量进行了联合分布计算讨论,并假设不同随机变量之间相互独立。随机管理模型的响应系数均值和方差利用 Monte-carlo 随机有限元法求解。经过计算分析,选择的随机参数样本数为 300。

(1) 各个参数服从均匀分布的联合分布计算

假设各随机水文地质参数服从均匀分布,且不同水文地质参数之间相互独立。各随机参数的均值分别为:

$$\begin{aligned} K_x &= K_y = 5 \text{ m/d} \\ \mu &= 5 \times 10^{-4} \\ H_0 &= 100 \text{ m} \\ \bar{H}_b &= 100 \text{ m} \end{aligned}$$

在上述均值条件下,分别就各随机参数的不同方差和同一方差条件下的不同约束条件置信度水平进行了计算。

当计算方差为:

$$\begin{aligned} \text{var}(K) &= 0.333 \\ \text{var}(\mu) &= 0.333 \times 10^{-8} \\ \text{var}(H_0) &= 0.333 \\ \text{var}(H_b) &= 0.333 \end{aligned}$$

计算结果见表 7.11 和图 7.19。

表 7.11 独立均匀分布参数联合分布计算结果表

节点 水量/ $\alpha / \% (10^8 \text{ m}^3 \cdot \text{d}^{-1})$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	ΣQ
100		5.606		20.250		5.470		18.591		49.923
95		4.656		17.763		5.00		16.165		43.590
90		4.547		17.390		4.975		15.815		42.727
85		4.476		17.150		4.956		15.590		42.171
80		4.407		16.915		4.907		15.370		41.628

当计算方差为:

$$\begin{aligned} \text{var}(K) &= 1.333 \\ \text{var}(\mu) &= 8.333 \times 10^{-8} \\ \text{var}(H_0) &= 8.333 \\ \text{var}(H_b) &= 8.333 \end{aligned}$$

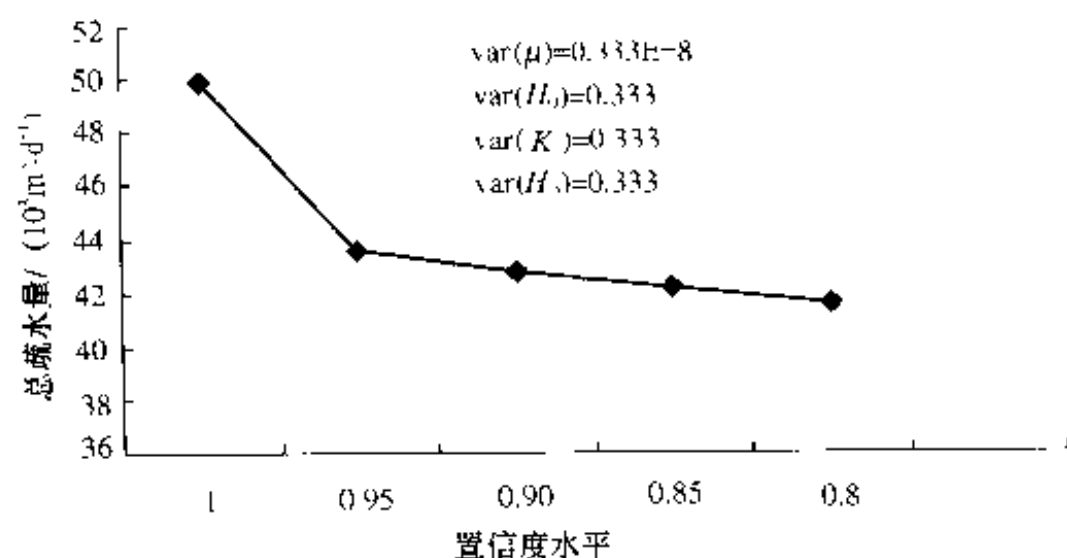


图 7.19 总疏水量与约束置信度水平相关曲线

计算结果见表 7.12 和图 7.20。

表 7.12 独立均匀分布参数联合分布计算结果

节点 水量/ $\alpha / \%$ ($10^3 \text{ m}^3 \cdot \text{d}^{-1}$)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\sum Q$
100		8.721		34.824		6.941		22.358		72.824
95		2.871		17.530		4.070		11.035		35.514
90		2.572		16.116		4.079		10.110		32.837
85		2.392		15.286		4.020		9.568		31.266
80		2.229		14.532		4.00		9.075		29.839

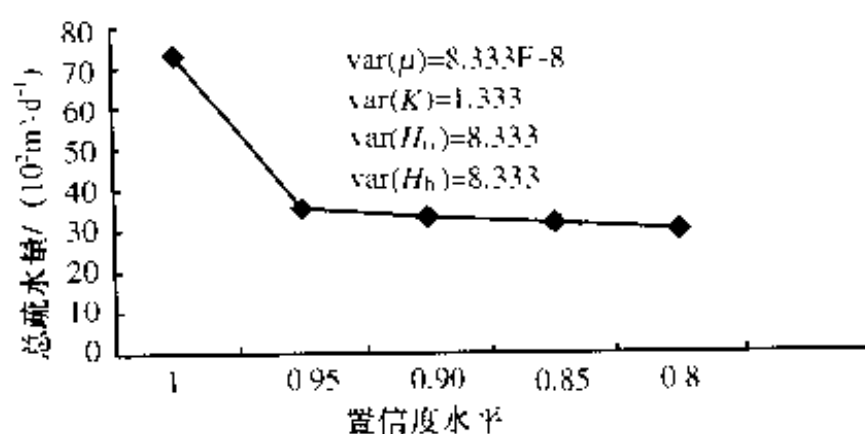


图 7.20 总疏水量与约束置信度水平相关曲线

当计算方差为：

$$\begin{aligned} \text{var}(K) &= 0.0833 \\ \text{var}(\mu) &= 0.333 \times 10^{-8} \\ \text{var}(H_0) &= 0.0833 \\ \text{var}(H_b) &= 0.0833 \end{aligned}$$

计算结果见表 7.13 和图 7.21。

表 7.13 独立均匀分布参数联合分布计算结果

节点 水量/ $\alpha / \%$ ($10^2 \text{ m}^3 \cdot \text{d}^{-1}$)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	ΣQ
100		5.393		18.942		5.372		18.139		47.847
95		4.945		17.742		5.141		16.191		44.748
90		4.886		17.551		5.122		16.733		44.292
85		4.848		17.426		5.109		6.610		43.993
80		4.809		17.302		5.096		16.490		43.697

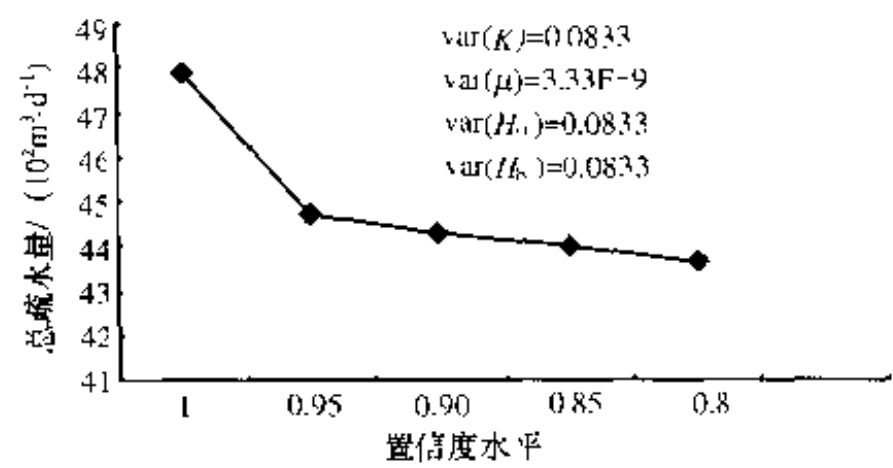


图 7.21 总疏水量与约束置信度水平相关曲线

当计算方差为：

$$\begin{aligned} \text{var}(K) &= 0.0833 \\ \text{var}(\mu) &= 0.333 \times 10^{-9} \\ \text{var}(H_0) &= 0.333 \\ \text{var}(H_b) &= 0.333 \end{aligned}$$

计算结果见表 7.14 和图 7.22。

表 7.14 独立均匀分布参数联合分布计算结果

节点 水量/ $\alpha / \%$ ($10^2 \text{ m}^3 \cdot \text{d}^{-1}$)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	ΣQ
100		5.714		20.076		5.516		18.254		49.560
95		4.667		17.688		4.980		16.034		43.369
90		4.551		17.309		4.950		15.704		42.524
85		4.476		17.080		4.931		15.491		41.979
80		4.404		16.847		4.914		15.282		41.447

(2) 各个随机变量服从 $N(\mu, \sigma^2)$ 正态分布的联合分布计算

为了研究随机变量的不同分布形式对随机地下水管理模型结果的影响,在计算了随机变量服从均匀联合分布条件后,书中又假设每个随机变量为服从 $N(\mu, \sigma^2)$ 正态分布情况,并假设其均值分别为:

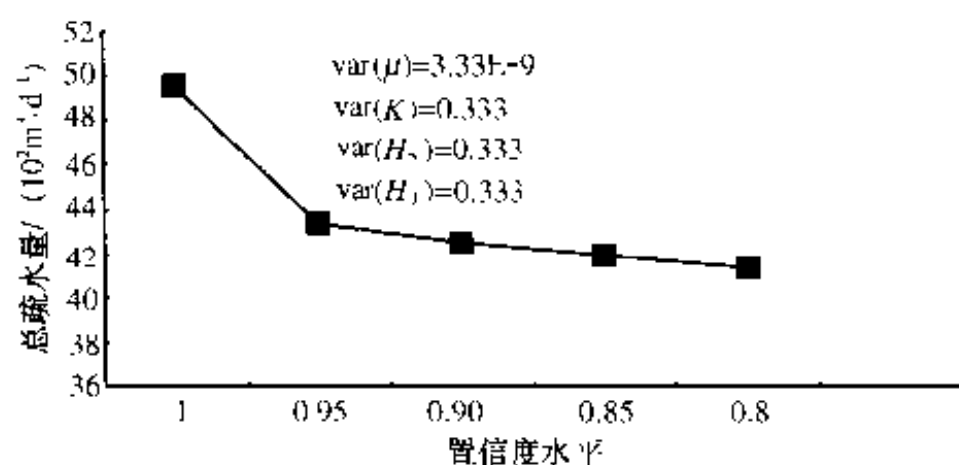


图 7.22 总疏水量与约束置信度水平相关曲线

$$\bar{K}_x = \bar{K}_y = 5 \text{ m/d}$$

$$\bar{\mu} = 5 \times 10^{-4}$$

$$H_0 = 100 \text{ m}$$

$$H_b = 100 \text{ m}$$

并就不同参数方差 σ^2 和不同约束条件置信度水平 α 进行了计算。表 7.15 至表 7.18 为不同方差和 α 组合条件下的计算成果表。

表 7.15 计算的随机参数分布为：

$$K = N(\mu, \delta^2) = N(5, 0.577^2)$$

$$\mu = N(\mu, \delta^2) = N(5 \times 10^{-4}, (0.154 \times 10^{-4})^2)$$

$$H_0 = N(u, \delta^2) = N(100, 1.154^2)$$

$$H_b = N(u, \delta^2) = N(100, 2.88^2)$$

计算结果如下：

表 7.15 独立正态联合分布计算结果表

节点 水量/ $\alpha / \%$ (10 ³ m ³ ·d ⁻¹)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	ΣQ
100		5.92		24.05		8.50		22.86		61.34
95		5.06		19.86		6.94		19.23		51.11
90		4.95		19.32		6.74		18.76		49.78
85		4.88		18.98		6.61		18.46		48.94
80		4.81		18.64		6.49		18.17		48.12

表 7.16 计算的随机参数分布为：

$$K = N(5, 1.154^2)$$

$$\mu = N(5 \times 10^{-4}, (1.154 \times 10^{-4})^2)$$

$$H_0 = N(100, 2.880^2)$$

$$H_b = N(100, 2.880^2)$$

计算结果如下：

表 7.16 独立正态联合分布计算结果表

节点 水量/ $\alpha / \%$ ($10^2 \text{ m}^3 \cdot \text{d}^{-1}$)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\sum Q$
100										
95		4.06		38.72		22.16		33.41		98.36
90		3.38		30.82		17.41		26.90		78.53
85		3.07		27.12		15.19		23.85		69.22
80		2.81		24.19		13.43		21.44		61.89

表 7.17 计算的随机参数分布为:

$$K = N(5, 1.154^2)$$
$$\mu = N(5 \times 10^{-4}, (1.154 \times 10^{-4})^2)$$
$$H_0 = N(100, 1.154^2)$$
$$H_b = N(100, 1.154^2)$$

计算结果如下:

表 7.17 独立正态联合分布计算结果表

节点 水量/ $\alpha / \%$ ($10^2 \text{ m}^3 \cdot \text{d}^{-1}$)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\sum Q$
100		7.02		35.91		14.43		32.13		89.69
95		4.73		22.02		8.75		20.64		56.14
90		4.51		20.72		8.21		19.54		52.98
85		4.38		19.91		7.89		18.87		51.07
80		4.26		19.19		7.59		18.24		49.28

表 7.18 计算的随机参数分布为:

$$K = N(5, 0.288^2)$$
$$\mu = N(5 \times 10^{-4}, (0.577 \times 10^{-4})^2)$$
$$H_0 = N(100, 0.288^2)$$
$$H_b = N(100, 0.288^2)$$

计算结果如下:

表 7.18 独立正态联合分布计算结果表

节点 水量/ $\alpha / \%$ ($10^2 \text{ m}^3 \cdot \text{d}^{-1}$)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\sum Q$
100		5.54		20.45		6.67		19.95		52.62
95		5.16		18.74		6.67		18.45		48.43
90		5.11		18.50		5.98		18.23		47.82
85		5.07		18.34		5.92		18.09		47.43
80		5.03		18.18		5.87		17.95		47.03

由以上表中计算结果可知,随机变量为正态分布时,优化模型的计算结果与随机变量为均匀分布时所呈现的规律完全相似。因此,影响管理结果的主要因素是随机变量的种类和方差的大小,而与其具体分布形式的关系并不很大。

7.2.2 计算结果的讨论与分析

由前述各节计算结果可见由于水文地质参数的随机性,使得地下水管理模型的管理结果变化很大,且不同的水文地质参数,不同的参数不确定性水平(方差),不同的管理结果可靠性要求对管理结果的影响是不同的。总体来看,参数的随机性与管理结果之间有如下关系。

(1) 随着随机参数不确定性水平的增加,在相同疏干约束条件下,总疏干水量呈增大规律。

(2) 渗透系数 K 和一类边界条件 H_0 的随机性对管理结果的影响最明显。弹性给水度的随机性对管理结果的影响很小。

(3) 含水层的初始水位只影响疏干时间,而对最终的稳定疏干水量没有影响。

(4) 如果随机参数的方差越大,要达到同样的疏干水平和疏干置信度所需的疏干水量增大。

(5) 对于同样的参数不确定性水平(即同样的 $\text{var}(\cdot)$),则随着对疏干可靠程度(约束条件成立的置信度水平 α)要求的增加,疏干水量明显增加。而且这种增加并非与 α 成线性关系。尤其要使约束条件成立的概率为 100% 时,其总疏干水量增加幅度很大。

从下面的分析中可见,我们可以得知这些变化规律完全服从地下水运动的基本规律。由达西公式得经过断面 ω 的流量公式为:

$$Q = K \cdot J \cdot \omega = K \cdot \frac{H_0 - H_w}{d} \cdot \omega$$

式中: Q ——抽水量;

K ——含水层渗透系数;

H_0 ——边界水位标高;

H_w ——井中水位标高;

d ——疏水井到边界距离;

ω ——过水断面积。

由该式可见,当 d 、 ω 和 H_w (由疏干约束条件所定) 固定时,对 Q 影响最大的变量就是 H_0 和 K , 即边界水位和渗透系数。这与本文计算结果所反映的规律完全一致。

由地下水随机管理模型的约束条件表达式

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \left\{ \left[\frac{1}{f(Q)} r^2(i, j, k) \cdot Q_n(i, n - k - 1) \cdot \Phi^{-1}[\alpha(j, k)] + E[\beta(i, j, k)] \right] \right\} \\ Q(i, n - k + 1) \geq S(j, k)$$

可知,如果水文地质参数的方差增加,必然导致管理模型中响应系数方差 $r^2(i, j, k)$ 的增加,要使约束条件中不等式成立,必然要求决策变量 Q 的增加(因 $\Phi^{-1}[\alpha(j, k)] < 0$)。这也说明,随着随机参数不确定性水平(方差)的增加,要保证同样的疏干深度,必然引起总疏水量的增加。由上式同样可知,在其他参数一定的条件下,随着约束条件满足的置信度水平 α 的提高,则小概率事件发生的概率 $1 - \alpha$ 变小,从而使 $\Phi^{-1}(\alpha)$ 的减小,要使不等式成立,定会产生疏水量 Q 的增加。这里要注意 $\Phi^{-1}(\alpha)$ 与 α 之间的关系。由此可见,分析结论与计

算结果所反映的规律完全一致。

对随机地下水管理模型及其计算结果的分析表明:当存在随机水文地质参数时,管理模型的决策结果与参数的不确定性水平(方差大小)及对管理结果的可靠性要求水平(α)之间存在着密切关系。这对制定风险决策具有重要意义。

为了进一步分析假设模型计算结果,我们将不同条件下的决策结果代入地下水疏干模型进行了不同随机参数的疏干效果检验。计算结果见表 7.19 至表 7.22。

表 7.19 考虑渗透系数服从 [3,7] 均匀分布, $\text{var} = 1.333, E(K) = 5 \text{ m/d}$ 约束条件
置信水平 $\alpha = 0.9$ 条件下疏干计算结果

约束	结点号	$K = 3 \text{ m/d}$	$K = 5 \text{ m/d}$	$K = 7 \text{ m/d}$	要求水位降深/m
LP 算法	1	13.19	10.47	8.73	≥ 10.00
	2	13.18	10.47	8.72	≥ 10.00
	3	13.19	10.47	8.73	≥ 10.00
	4	14.03	11.22	9.35	≥ 10.00
	5	13.19	10.47	8.73	≥ 10.00
	6	13.19	10.47	8.72	≥ 10.00
	7	13.19	10.47	8.73	≥ 10.00
	8	14.03	11.22	9.35	≥ 10.00
	9	13.56	10.84	9.03	≥ 10.00
GA 算法	1	13.54	10.83	7.73	≥ 10.00
	2	13.55	10.84	7.74	≥ 10.00
	3	13.19	10.55	7.54	≥ 10.00
	4	13.48	10.79	7.71	≥ 10.00
	5	12.73	10.19	7.28	≥ 10.00
	6	12.97	10.38	7.41	≥ 10.00
	7	12.85	10.28	7.34	≥ 10.00
	8	13.73	11.94	7.81	≥ 10.00
	9	13.42	10.74	7.67	≥ 10.00

表 7.20 考虑第一类边界条件为服从 [99.5,100.5] 均匀分布, $\text{var} = 0.0833, E(H_b) = 100$,
约束条件置信水平 $\alpha = 0.9$ 条件下疏干计算结果

约束	节点号	$H_b = 99.5$	$H_b = 100$	$H_b = 100.5$	要求水位降深/m
LP 算法	1	15.31	12.31	9.31	≥ 10.00
	2	15.31	12.31	9.31	≥ 10.00
	3	15.31	12.31	9.31	≥ 10.00
	4	16.12	13.18	10.18	≥ 10.00
	5	15.31	12.31	9.31	≥ 10.00
	6	15.31	12.31	9.31	≥ 10.00
	7	15.31	12.31	9.31	≥ 10.00
	8	16.12	13.11	10.18	≥ 10.00
	9	15.74	12.74	9.74	≥ 10.00
GA 算法	1	17.75	12.75	7.75	≥ 10.00
	2	18.00	13.00	8.00	≥ 10.00
	3	19.75	13.24	8.24	≥ 10.00
	4	19.06	13.75	8.75	≥ 10.00
	5	17.79	13.06	8.06	≥ 10.00
	6	17.42	12.79	7.79	≥ 10.00
	7	18.03	12.42	7.42	≥ 10.00
	8	18.14	13.03	8.03	≥ 10.00
	9				

表 7.21 考虑给水度服从 $[1 \times 10^{-4}, 1 \times 10^{-5}]$ 均匀分布, $\text{var} = 0.533 \times 10^{-7}$, $\bar{E}(\mu) = 5 \times 10^{-4}$, 约束条件
置信水平 $\alpha = 0.9$ 条件下的疏干计算结果

约束	节点号	$\mu = 1 \times 10^{-4}$	$\mu = 5 \times 10^{-4}$	$\mu = 1 \times 10^{-5}$	要求水位降深/m
L P 算法	1	10.00	10.00	10.00	≤ 10.00
	2	10.00	10.00	10.00	≤ 10.00
	3	10.00	10.00	10.00	≤ 10.00
	4	10.71	11.71	11.71	≤ 10.00
	5	10.00	10.00	10.00	≤ 10.00
	6	10.00	10.00	10.00	≤ 10.00
	7	10.00	10.00	10.00	≤ 10.00
	8	10.71	11.71	11.71	≤ 10.00
	9	10.35	10.35	10.35	≤ 10.00
C A 算法	1	10.50	10.50	10.50	≥ 10.00
	2	10.46	10.46	10.46	≥ 10.00
	3	10.18	10.18	10.18	≥ 10.00
	4	10.68	10.68	10.68	≥ 10.00
	5	9.95	9.95	9.95	≥ 10.00
	6	10.10	10.10	10.10	≥ 10.00
	7	9.95	9.95	9.95	≥ 10.00
	8	10.54	10.54	10.54	≥ 10.00
	9	10.38	10.38	10.38	≥ 10.00

表 7.22 考虑初始水位为服从 $[95, 105]$ 均匀分布, $E(H_0) = 100$, $\text{var}(H_0) 8.33$, 约束条件
置信水平 $\alpha = 0.9$ 条件下疏干计算结果

约束	节点号	$H_0 = 95$	$H_0 = 100$	$H_0 = 105$	要求水位降深/m
L P 算法	1	10.00	10.00	10.00	≥ 10.00
	2	9.98	9.98	9.98	≥ 10.00
	3	10.00	10.00	10.00	≥ 10.00
	4	10.73	10.73	10.73	≥ 10.00
	5	10.00	10.00	10.00	≥ 10.00
	6	9.98	9.98	9.98	≥ 10.00
	7	10.00	10.00	10.00	≥ 10.00
	8	10.73	10.73	10.73	≥ 10.00
	9	10.35	10.35	10.35	≥ 10.00
C A 算法	1	10.50	10.50	10.50	≥ 10.00
	2	10.40	10.40	10.40	≥ 10.00
	3	10.18	10.18	10.18	≥ 10.00
	4	10.44	10.44	10.44	≥ 10.00
	5	9.95	9.95	9.95	≥ 10.00
	6	10.10	10.10	10.10	≥ 10.00
	7	9.95	9.95	9.95	≥ 10.00
	8	10.54	10.54	10.54	≥ 10.00
	9	10.38	10.38	10.38	≥ 10.00

由疏干模拟计算结果可见:疏干结果较好地反映了客观情况,在约束条件置信度水平要求为0.9时,当随机参数出现极为不利于疏干的小概率事件时,实际疏干降深一般都不能满足疏干要求。当随机参数出现在其均值附近时,实际疏干降深基本能够满足疏干要求。当随机参数出现最有利于疏干的小概率事件时,实际疏干降深都大于疏干要求。

7.3 模型应用三

以元宝山露天矿区地下水疏干井群优化设计为例

元宝山露天煤矿于1954年发现,经过勘探,1987年由沈阳煤矿设计院完成露天矿初步设计,并于1990年10月15日正式开工建设。元宝山露天矿区,在历史上没有开采记载,其西南部有元宝山一、二、三、四井,东北部为老公营子和小风水沟井田,露天矿西南部现有两座地方小煤窑沿七煤露头向井田内开采。露天矿现已建成西、南两个排土场,一、二采区也正在建设中。采掘场南部边界形成于元宝山脚下,东部边界以F₁断层为界;而西部边界则是沿着六煤层底板形成的。开采用一、二采区同时拉沟的方法,由南向北推进,北帮为工作帮。露天矿设计最终开采面积12.32 km²。露天开采储量54289万t, A+B级储量53265万t,设计规模为年产原煤500万t。

从1954年以来,地质、煤炭、水电等部门先后在该地区进行了大量的卓有成效的工作,取得了丰富的资料。1954~1955年,平庄矿务局地质队及东煤地质局107队在该地区进行了煤田地质普查工作;东煤地质局104队于1973年提交了“元宝山露天精查地质报告”,于1982年提交了“元宝山露天水文地质、工程地质(剥离物强度)勘察报告”;水电部东北电力设计院于1975年提交了“元宝山电厂新建工程供水水文地质勘察报告”,水电部南京水利科学研究院于1987年提交了“元宝山露天煤矿受英金河渗漏影响计算”;煤炭科学研究总院西安分院于1993年提交了“元宝山露天煤矿帷幕工程初步设计说明书”,“元宝山露天煤矿帷幕截流工程地质勘察报告”等成果。前人的工作积累了本区丰富的地质及水文地质资料,为今后的工作奠定了良好的基础。

但就在露天坑剥离建设过程中,丰富的第四系松散沉积含水层中的地下水给露天剥离带来了巨大的困难。目前正在剥离区外围大面积区高强度疏干地下水。自从1990年以来,先后施工疏干孔近120个,每天总排水量达40~50万m³左右。露天坑及其附近第四系含水层地下水位下降约8~20m,采区内最大水位降深为27m左右。区域内第四系含水层地下水流场已基本趋于稳定。但目前的地下水流场还远不能满足已经开挖的剥离区(一采区和二采区)的剥离要求,特别是二采区安全剥离的水位降深值应为20~50m左右。因此,如要二采区安全出煤,还需对本区第四系地下水位疏降10~30m左右。因此,目前的疏干方案、疏干工程和疏干水量都远不能满足矿山建设和生产的需要。选择最优秀的疏干工程以最小的总疏干水量达到疏干要求成为目前矿山建设急需解决的问题。

7.3.1 地下水系统及水文地质模型

7.3.1.1 研究区概况

(1) 地理与交通

元宝山露天煤矿位于内蒙古自治区赤峰市东35 km,属赤峰市元宝山区建昌营子乡所

籍。其地理坐标为东经 $119^{\circ}17'55'' \sim 119^{\circ}19'55''$; 北纬 $42^{\circ}19'13'' \sim 42^{\circ}22'21''$ 。

矿区南部有专用铁路,在元宝山车站与叶赤线(叶柏寿—赤峰)接轨,矿区与赤峰及邻近旗、县均有三级公路联结,交通十分便利。

(2) 地形与地貌

元宝山露天煤矿位于英金河河谷平原,英金河从矿区中部穿过,把矿区分为南、北两大部分。露天矿南部地处英金河右岸一级阶地,阶地宽 $500 \sim 4000 \text{ m}$,地面坡度为 $1\text{‰} \sim 1.5\text{‰}$,地面高程为 $472 \sim 482 \text{ m}$ 。露天矿北部位于英金河左岸一、二级阶地,地面坡度 $1\text{‰} \sim 2\text{‰}$,阶地宽 $500 \sim 5000 \text{ m}$,地面高程 $482 \sim 490 \text{ m}$,阶地表面有现代风积沙,沙丘呈波状分布。

总体来看,矿区为四周被低山丘陵所环绕的河流冲、洪积平原。周围丘陵高程一般在 $500 \sim 600 \text{ m}$ 。冲、洪积层形成本区极其富水的含水层,而丰富的巨厚层煤炭资源就隐伏在第四系含水层之下。

(3) 气象与水文

该区为半干旱大陆性气候。其特征是:冬季长而干冷,夏季雨量集中,春秋少雨雪多大风。

据赤峰市气象台资料,元宝山地区多年最高气温为 42.5°C ,最低气温为 -31.4°C 。冻结期一般为 11 月中旬至翌年 3 月末(平均气温 -10.8°C ,最低气温 -27°C ,最高气温 7.6°C),最大冻结深度 2.01 m 。

本区多年平均相对湿度为 49% ,平均蒸发量为 1867.1 mm ,年平均降水量为 372.34 mm (据 1950~1994 年资料),全年降水多集中在夏季 6~8 月,约占全年的 68.55% 。

英金河自西北向东南流经矿区,于东八家汇入老哈河,为老哈河左岸最大的支流。英金河发源于河北围场北部山区(七老头山)。流长 194.6 km ,流域面积 10598 km^2 。历年最大洪峰流量 $2650 \text{ m}^3/\text{s}$,最小流量为 $0.5 \text{ m}^3/\text{s}$,多年平均流量为 $12.8 \text{ m}^3/\text{s}$ 。河床宽度变化较大,在 $200 \sim 900 \text{ m}$ 之间。主流摆动对两岸侧蚀较强,洪水期常造成河岸坍塌。近年来由于上游水库蓄水和农业灌溉的发展,位于下游的露天矿区一带春秋冬季常常断流。该河枯水期、平水期、丰水期的流量分布与降水量的分布规律相同。在元宝山露天矿区以垂直渗透形式补给地下水。

老哈河由西南向东北流经河谷平原南部,距露天矿区 3 km 。该河发源于河北省平泉县七老头山脉的光头山,于昭乌达盟大兴乡海里吐附近与西拉木伦河汇合成西辽河。全长 421.8 km 。流域面积 33076 km^2 。历年最大洪峰流量为 $9840 \text{ m}^3/\text{s}$,最小流量为 $0 \text{ m}^3/\text{s}$,多年平均流量为 $13.6 \text{ m}^3/\text{s}$ 。研究区内河床宽度在 $500 \sim 1000 \text{ m}$ 之间。河床及河漫滩主要由沙、沙土及砾石组成,该河枯水期、平水期、丰水期的流量分布亦与降水量的分布规律相同。在元宝山露天矿区以垂直渗透形式补给地下水。

7.3.1.2 地质与水文地质条件

(1) 矿区主要地层

A. 上侏罗统杏园组:以灰白色中细砂岩为主,夹紫红色砂岩和泥岩,厚度大于 100 m 。中部为灰、灰绿色砂岩和砂砾岩夹黑色泥岩,厚度 $60 \sim 230 \text{ m}$ 。上部为灰绿、灰褐色厚层泥岩夹灰白色砂岩,厚度在 200 m 左右。分布于 F_1 断层以东的断块中。

B. 上侏罗统元宝山组:以灰白色中细砂岩为主,夹粗砂岩、泥岩和煤层,一般厚约 340 m ,含 12 个可采煤层,累计可采煤层平均厚度 84.29 m ,以五、六煤组为主要可采煤层。

C. 第三系上新统(N_2):底部为紫红色砂岩、泥砾岩和泥岩,不整合于元宝山含煤组地层之上,厚0~115 m,仅在露天矿南部的穹窿背斜处分布。上部为玄武岩、红土和砂砾石层,仅出现在矿区北部或覆盖于露天矿的南部紫红色砂砾岩之上。

D. 第四系(Q):以现代冲积、洪积和冰水堆积物为主,由安山岩、玄武岩等砾石成分构成的圆砾、泥砾、卵石和砂组成。厚度14~85 m,一般为55 m,在整个元宝山盆地内均有分布。在矿区附近,厚度一般为14~60 m,自西向东由薄变厚。

(2) 矿区主要地质构造特征

元宝山煤田为一断陷含煤盆地,受燕山构造变动的控制呈NNE—NE向狭长带展布,含煤盆地为一宽缓的复式向斜构造,由三个向斜和两个背斜组成,自东南向西北依次是:风水沟短轴向斜、五家背斜、南荒向斜、龙头山背斜和老窑短轴向斜。在向斜构造内赋存有可采煤层,向斜轴向NNE,地层倾角 $3^{\circ}\sim 5^{\circ}$ 。

总体而言,本区第四系下伏煤系地层比较平缓,主采煤层厚60 m左右,煤层产状及其赋存条件非常有利于煤炭资源的露天开采。

(3) 矿区水文地质条件

第四系孔隙潜水含水层由冲积、洪积和冰水堆积的圆砾、砂砾、卵砾石、泥砾等组成,粒径为5~60 mm的占50%以上,大于60 mm的占20%,个别地段见漂石。砾石成分以安山岩、花岗岩为主,磨圆度较好,球度差。从西南往东北厚度增大,但变化趋势比较平缓,仅在基岩面的两阶地之间的阶坎处厚度变化比较大。

第四系地层由于成因不同,上部和下部地层渗透性有一定的差异,据以往勘探试验资料,上部渗透系数较大,约为256~710 m/d,下部较小约为16~146 m/d,但二者有密切的水力联系。水质属重碳酸钙镁型水,pH值大部分在7~8之间,固形物含量240~400 mg/L,钙镁总含量为260~365 mg/L,水温为8~11℃。

侏罗系孔隙裂隙弱含水层,由砂岩、砂砾岩、粉砂岩及煤层组成,在煤层中有少量的裂隙。一般厚度为50~150 m,平均厚度为113.9 m,根据抽水试验资料渗透系数为0.001~0.38 m/d。

由此可见,第四纪松散沉积潜水含水层是本区惟一的主要含水层。而其他基岩裂隙水可以忽略不计。

在天然条件下,本区地下水的流向和地表水流向一致,即由盆地的北西,南西向东南径流。水力梯度平缓(见图7.23)。近年来,随建昌营电厂水源地抽水及露天矿剥离疏干排水,使得第四系地下水位形成了以露天矿剥离区为中心的降落漏斗。地下水形成了从四周向漏斗中心汇流的新的径流条件。

第四系地下水的补给主要来自盆地内部季节性大气降水、流经盆地内部的英金河和老哈河的渗漏和来自北西、南西的上游侧向径流。特别应该注意的是目前地下水位降落漏斗已经越过英金河和老哈河向外扩展,所以河流对地下水的补给以渗入式为主,而不是注入式补给。由上述分析可见,研究区第四系地下水目前的主要补、径、排关系如图7.24所示。

(4) 第四系地下水疏干现状

从1990年8月15日疏干工程开始至今,共投入运行13排,计121个疏干钻孔,有部分孔报废,部分孔停运。平均排水量达40万~50万 m^3/d (见表7.23)。采区内的漏斗中心在观5孔位置附近,水位标高在(438 m $\pm$ 1 m)变动。主要疏干钻孔见图7.25。

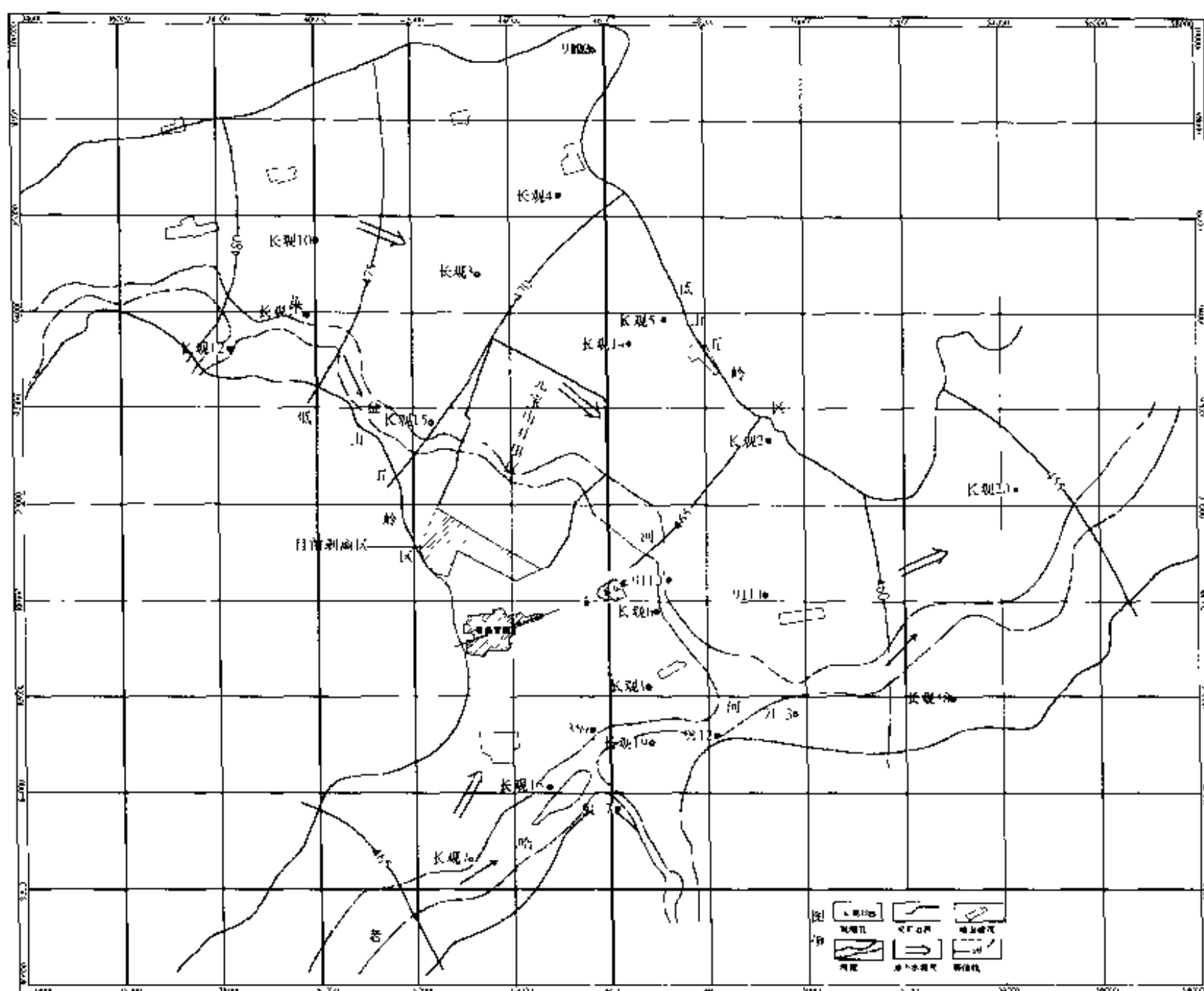


图 7.23 矿区第四系地下水天然流场图

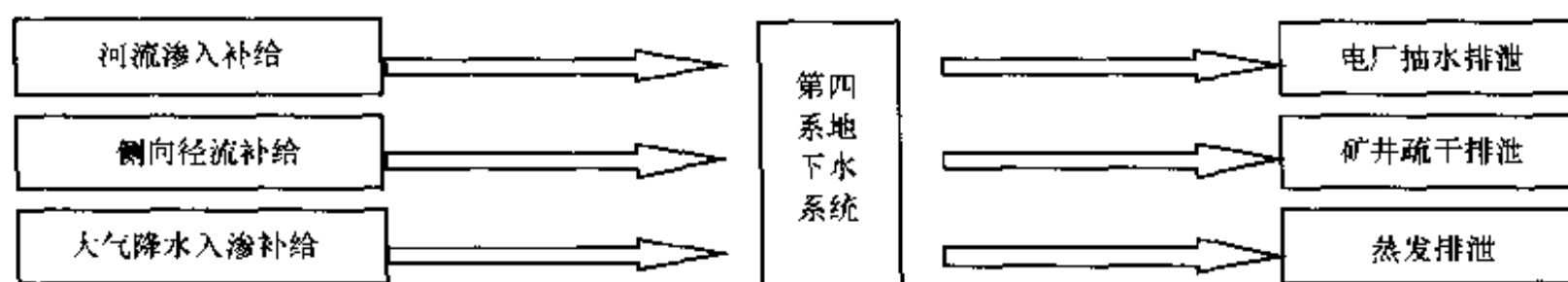


图 7.24 元宝山矿区第四系地下水补、排关系示意图

与露天矿相邻的建昌营电厂采用群孔集中抽取第四系地下水作为电厂供水水源,其日抽水量在 10 万 m^3 左右。由于两个水源地的长期抽水,区域地下水流场近几年基本趋于稳定,疏干排水结果使矿区水文地质条件发生了较大的变化。主要表现在:①沿英金河方向地下径流水基本被疏干截夺;②地下水水位低于英金河和老哈河的河水位,使二河成为“悬河”;③地下水从英金河和老哈河获得渗透补给。

(5) 元宝山露天矿区第四系地下水流数学模型

根据前述元宝山露天煤矿水文地质条件,所选择模拟计算的主要含水层为位于英金河

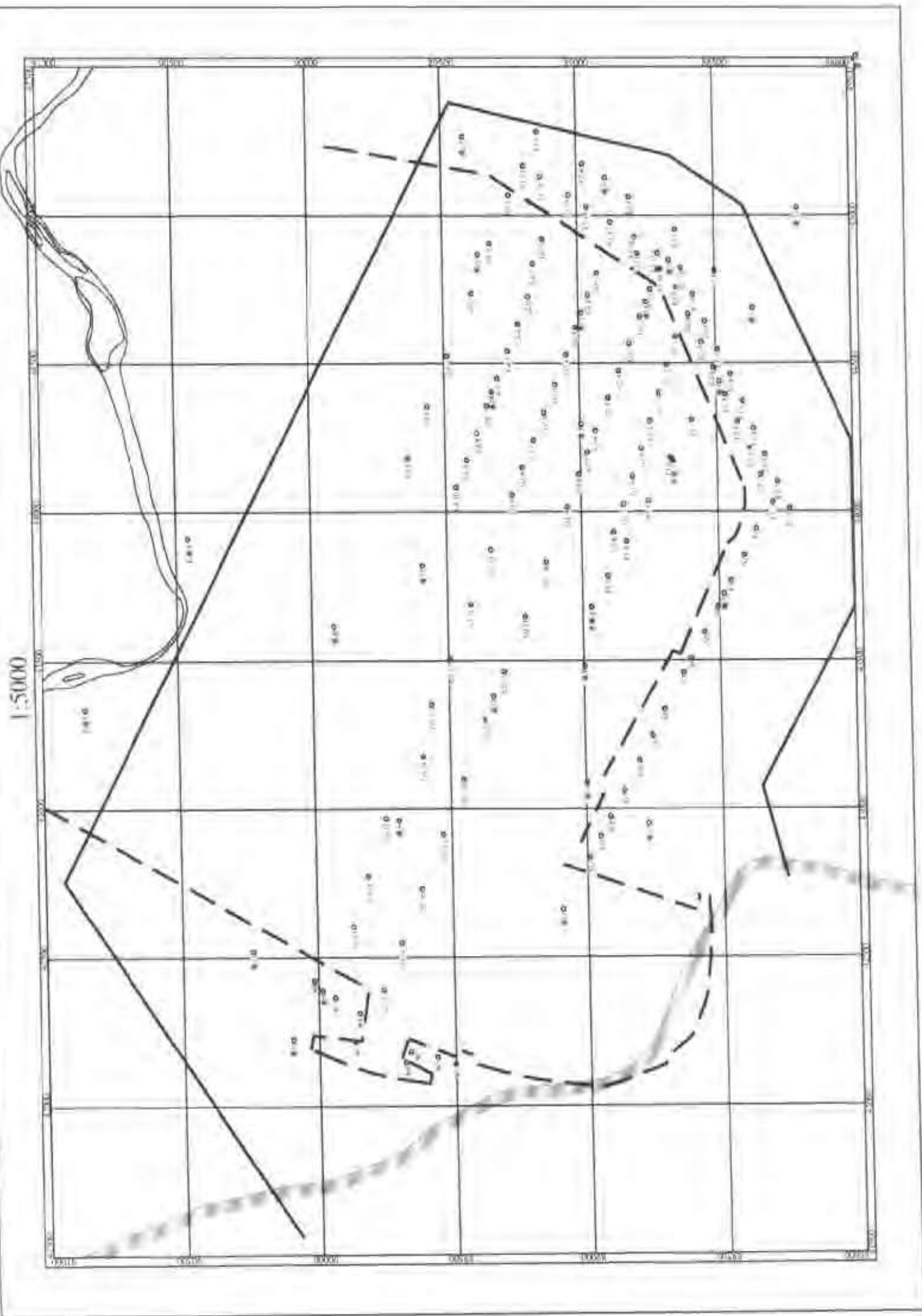


图 7.25 矿区目前主要疏干井群分布图

表 7.23 1990 ~ 1995 年疏干排水量统计表(万 m³/mon)

年份 月份	1990	1991	1992	1993	1994	1995
1		1402.54	1745.13	1493.52	1405.13	1524.12
2		1256.49	1592.74	1306.55	1321.86	1376.95
3		1374.48	1667.68	1421.71	1450.49	1494.27
4		1325.05	1519.91	1355.42	1381.19	1352.29
5		1318.41	1521.85	1363.14	1342.33	1359.62
6		1157.97	1476.88	1418.03	1331.34	1307.11
7		1236.47	1676.56	1446.67	1342.51	1539.57
8		1224.09	1624.56	1470.80	1494.24	1438.13
9	1273.01	1199.99	1432.38	1427.37	1641.29	1346.71
10	1359.88	1387.91	1276.81	1379.59	1686.04	1461.71
11	1424.90	1595.74	1319.49	1298.69	1567.51	1478.15
12	1410.78	1641.76	1418.64	1345.79	1475.04	1494.16

和老哈河冲积平原范围内的第四系潜水流含水层,面积约为 210 km²。西北边界、南西边界和东南边界,一般离疏干区较远,可作为定水头边界处理,其余边界作为隔水边界。

将第四系含水层视为一个非均质,各向异性含水层,尽管第四系底板有一定的起伏,但地下水流仍可视作潜水二维非稳定流动。英金河和老哈河对潜水含水层以渗入方式补给。

根据元宝山矿区第四系潜水地下水特征及边界条件,文中建立了元宝山露天煤矿区第四系地下水流二维非均质,非稳定各向异性地下水运动数学模型。

$$\begin{aligned}
 \mu \frac{\partial h}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[K_{xx} \cdot (h - z) \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K_{yy} (h - z) \frac{\partial h}{\partial y} \right] + \varepsilon - W & (x, y) \in \Omega \\
 h(x, y, 0) &= h_0(x, y) \\
 h(x, y, t) \Big|_{\Gamma_1} &= h_1(x, y, t) \\
 T \cdot \frac{\partial h}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} &= 0
 \end{aligned} \tag{7.4}$$

式中: h ——潜水地下水水位[L];

μ ——给水度(量纲 -);

K_{xx}, K_{yy} ——第四系含水层 x, y 方向主渗透系数;

t ——时间;

(x, y) ——笛卡儿坐标;

Ω ——地下水渗流区域;

Γ_1 ——第一类边界条件;

Γ_2 ——第二类边界条件;

$h_0(x, y, t)$ ——初始水头分布;

ε ——单位面积上的入渗补给强度 [L³/(T·L²)], 主要包括大气降水补给、河流入渗补

给等;

W ——源、汇项,本模型中主要反映了露天疏干和电厂取水等抽水量;

Z ——含水层底板标高(L)。

对模型(7.3)采用迦辽金有限元方法进行求解,采用三角形单元剖分。平面上共剖分为1788个三角形单元,952个计算节点。见图7.26和图7.27。由于计算区域较大,所以图7.27是对露天剥离及井群疏干区域的放大。



图7.26 矿区地下水有限元计算剖分图

7.3.2 水文地质参数随机性及参数识别

研究区的水文地质条件和其他地下水系统类似,控制地下水流的主要参数亦具有极强的随机性和不确定性。就含水层介质结构而言,由于受其成因条件的限制,不管在垂向上或平面上,其沉积物性质变化较大,往往是砂、砾石及粉砂质黄土互为透镜体状产出。这种介质性质在空间上分布的随机性决定了含水层主要水文地质参数(K_x, K_y, μ)的随机性。其次,含水层的补给条件(河流入渗、大气降水及侧向径流)强烈地受到本区降水规律的影响。由于大气降水因素的随机性也决定了本区地下水的补给条件具有随机性。最后,地下水的主要排泄条件(电厂供水、露天坑疏水、农业用水等)都受到设备、用水量等多种人为因素的干扰和影响,所以排泄条件亦可视为随机因素。由此可见,影响本区地下水补给、径流和排

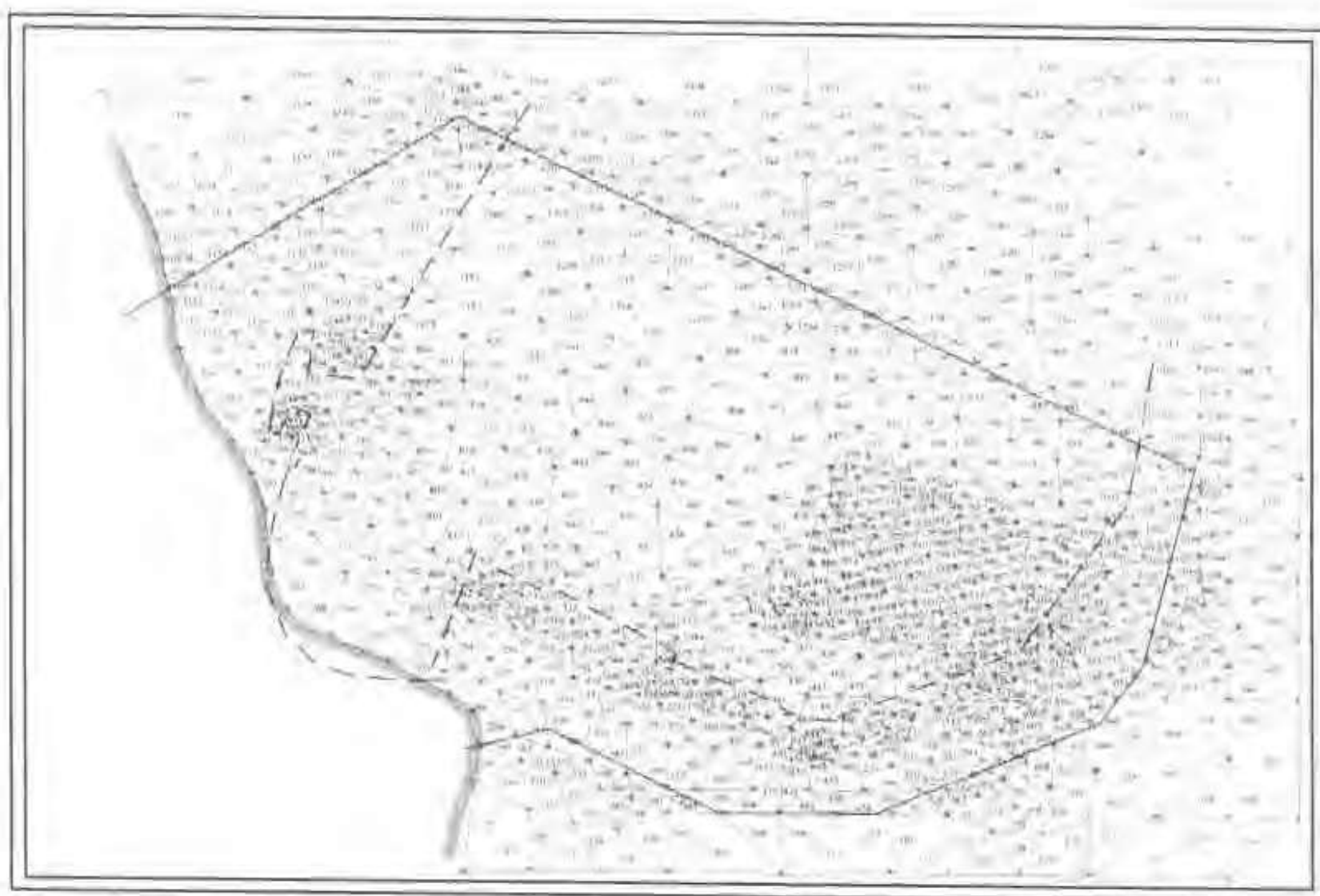


图 7.27 矿区地下水有限元计算剖分图

泄的多种因素都具有随机性和不确定性。用任何一组确定的参数去刻画本区地下水系统的行为都欠准确。所以,引入随机理论和统计概念来研究该含水层系统的性质和对其进行规划管理则更具有实际意义。

根据上述分析,采用研究区 1991~1995 年的水文地质资料(抽水资料、降水资料、地下水动态资料)分别求得了 5 组水文地质参数。调参过程采用了试估-校正法。即首先根据已有资料给出参数初值,运算地下水数学模型,求解地下水水位值,将所求结果与实测结果不断进行比较,修正参数,直到达到要求的拟合精度。并在假设检验的基础上,分别统计计算了每个参数的均值、方差及其概率分布形式。表 1.1 为 15 个参数区水文地质参数 K_1 、 K_2 及 μ 的反演值、均值和方差。通过假设检验, K_1 、 K_2 及 μ 均服从 $[a, b]$ 均匀分布。

在参数反演过程中,对下列问题进行了专门处理:

(1) 初始流场。以每个模拟年份 1 月 10 日区域观测水位为基础,采用 Kriging 插值方法,插出每个节点的水位值,作为该年份模拟计算的初始流场。利用每年 1~6 月份水位观测资料作为调参拟合水位。

(2) 降水量。模拟过程中的降水量采用赤峰气象站的实际观测资料。在疏干预测过程中采用 1950~1995 年月平均降水量资料。降水入渗系数取 0.3。

(3) 河流入渗补给。根据实际观测资料,英金河和老哈河的最大渗透量分别为 $4.12 \times 10^4 \text{ m}^3/\text{s}$ 和 $1.6 \times 10^4 \text{ m}^3/\text{s}$ 。计算时用其总渗透量除以两河在计算区的面积得出单位面积的渗透量,加入到相应的面积单元中。农业取水和灌溉回渗因缺乏资料,在本模型中未进行专门考虑。

(4) 由于潜水流为非线性偏微分方程,文中在利用响应系数法建立管理模型时,利用 Boussinesq 方程进行了近似线性处理,将其近似为线性问题考虑。

正如前面有关章节所述,元宝山露天矿目前生产和建设所遇到的最大问题就是第四系地下水的控制与管理问题。就这一问题前人已经做过大量的研究工作,并提出了建造防渗帷幕墙、疏干与回灌相结合等多种技术方案,其核心目标就是希望在保证矿山安全生产的同时,尽可能保护地下水资源,减少地下水位的大面积下降。但因经济、社会等多方面的原因,这些方案都未能付诸实施。目前仍以大面积井群疏干为主要防治水技术措施,且现有的疏干工程和设计能力无法满足生产要求。因此,基于现有工程状况提出新的既能满足矿井建设与生产的要求,又能确保矿井总疏水量最小的矿井疏干井群设计方案及孔位布置原则显得尤为必要和迫切。正是本着这一目的,以矿井剥离区四周水位降至设计标准为约束条件,以稳定总疏水量最小为目标函数,以疏干水量为决策变量建立和求解了随机地下水控制与管理模型。提出了在不同的约束条件置信度水平下总疏干水量及其疏干孔位优化设计的原则。

7.3.3 机会约束地下水管理模型建立

根据元宝山露天矿区第四系地下水疏干管理的约束条件,目标函数及决策变量,建立矿区第四系地下水疏水量优化设计的机会约束随机管理模型为:

$$\begin{cases} Z = \min \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n Q(i, k) \\ P_r \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n A(i, j, k) \cdot Q(i, n - k + 1) \geq S(j, k) \right\} \geq \alpha(j, k) \\ Q_i \geq 0 \end{cases} \quad (7.5)$$

式中符号意义同前,其中: $n=1$,即考虑了一个疏干阶段。 $m=96$,即选择沿剥离区外围两排节点(总计 96 个)为疏干井的候选位置(决策变量),见图 7.28。 $j=35$,即沿剥离区边沿一周的节点(总计 35 个)为水位约束控制点。

将有关参数代入模型(7.4)式,并进行适当转换后,得下列管理模型:

$$\begin{cases} Z = \min \sum_{i=1}^{96} Q(i) \\ \sum_{i=1}^{96} \{ E[\beta(i, j) + \Phi^{-1}[\alpha(j)] \cdot \sqrt{V[S(j)]}] \} \cdot Q(i) \geq S(j) \\ Q_i \geq 0 \end{cases}$$

式中: $S(j) = H_0(j) - ZL(j) - 5$;

$i = 1, 2, \dots, 96$;

$j = 1, 2, \dots, 35$ 。

7.3.4 模型求解

将本区第四系含水层随机水文地质参数的反演结果、随机分布形式及其他参数代入随机有限元模型,并采用 Monte-carlo 随机有限元求解技术解得随机管理模型的响应系数均值 $E[\beta(i, j)]$ 和方差 $r^2(i, j)$ 。采用 Taylor 展开随机地下水管理模型求解技术解得在不同随机

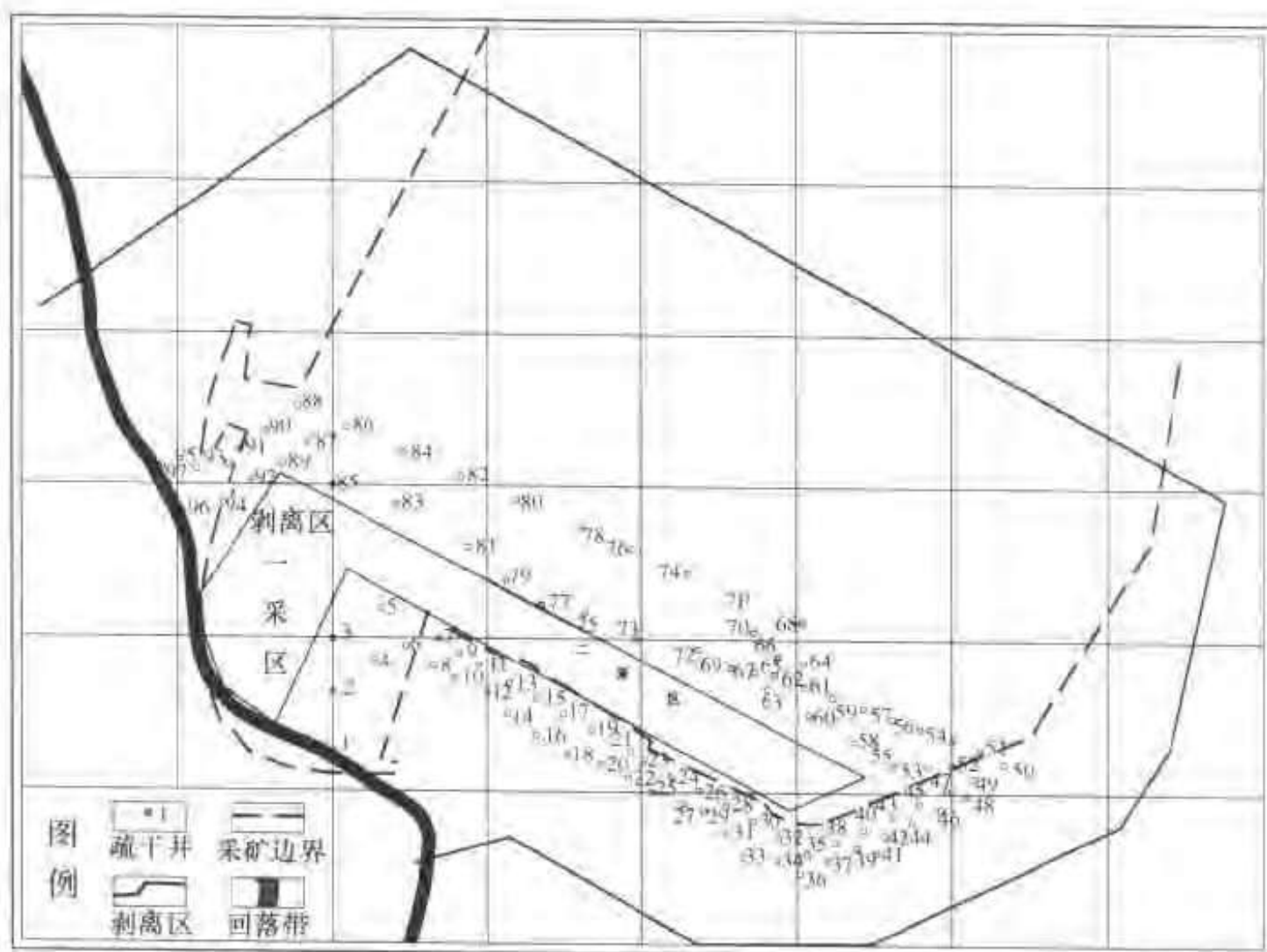


图 7.28 可供选择的疏干井位分布图

约束置信度水平下的地下水总疏干水量及其疏干位置分布。计算结果见表 7.24。总疏干水量与约束置信度水平之间的关系见图 7.29。

表 7.24 考虑目前开挖区范围条件下计算结果表

$\alpha/\%$	100	95	90	85	80
分布点编号	40	40	40	40	40
	63	63	63	63	63
单点水量 $10^2 \text{ m}^3 \cdot \text{d}^{-1}$	425.62	324.06	312.19	304.75	297.66
	528.41	402.32	387.58	378.35	369.54
总疏干水量 $10^3 \text{ m}^3 \cdot \text{d}^{-1}$	954.03	726.37	699.77	683.10	667.20

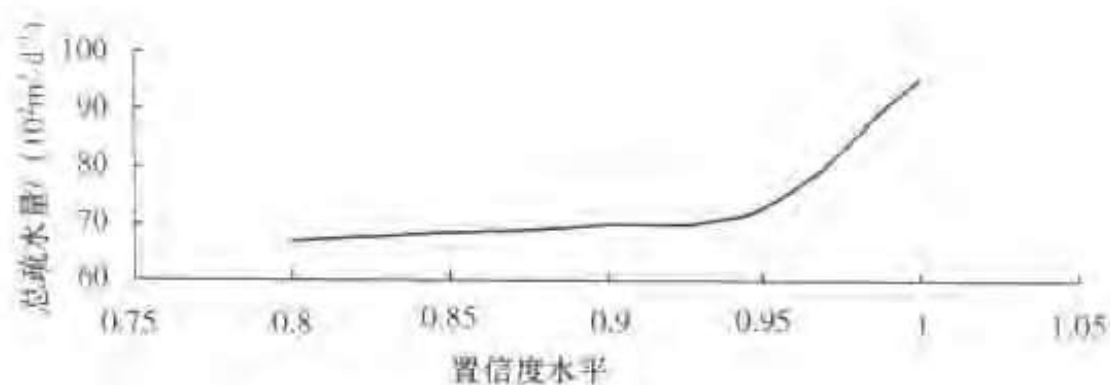


图 7.29 总疏水量与置信度水平关系图

7.3.5 计算结果讨论

(1) 从计算结果可知,由于水文地质参数的随机性,要达到疏干要求,其总疏水量与对约束条件满足的置信度水平有密切关系。随着约束条件置信度水平的降低,其总疏水量明显下降。而随约束条件置信度水平的提高,其总疏水量迅速增大。说明若要保证在水文地质参数出现不利于疏干进行的小概率事件时,仍能满足疏干要求,则总疏水量必然增加,这与理论分析及实际情况相一致。

(2) 目前所具备的 40 万 ~ 45 万 m^3/d 的疏干能力显然太小,即使 80% 的约束置信度也不能满足。所以,总疏水量的增加是不可避免的。

(3) 从疏干井的分布来说,主要集中于当前剥离区的东北和东南(第四系厚度较大区)。这也与水文地质条件分析结果一致。因为疏干区含水层基底总趋势是西高东低。若要保证整个疏干区地下水位的疏干,只要东部区能达到疏干要求,西部区水位自然可降至疏干要求(因含水层渗透性很好,地下水位将非常平缓)。因此,若将疏干孔布置在西部区必然是浪费和不必要的。

(4) 为了检验管理结果的优越性和正确性,以目前的疏干水位降为约束条件代入管理模型进行了求解。如果考虑参数的方差为零(即为确定性模型),其计算结果如表 7.25。如果考虑参数的方差及约束的置信度水平,则计算结果如表 7.26 所示。表中结果说明,对于确定性参数,如果按优化的疏干井群进行疏干,则总疏水量可比目前实际疏水量减少 10 万 m^3/d 左右。如果按随机参数模型考虑,则目前的疏水量恰相当于约束条件置信度为 (95% ~ 100%) 之间的计算水量。由此可见,管理模型的计算结果是符合实际情况的。

表 7.25 元宝山露天矿疏干条件确定性模型优化水量及分配计算结果

疏干孔位置编号	13	17	23	30	32	38	40	63	94
分点水量/($10^3 \text{ m}^3 \cdot \text{d}^{-1}$)	2.09	7.21	71.35	30.64	42.06	27.95	83.01	54.20	4.908
总水量	322.395								

表 7.26 当前疏干条件优化计算结果表

置信水平 $\alpha/\%$	疏干孔位置编号	分点水量/($10^3 \text{ m}^3 \cdot \text{d}^{-1}$)	总水量/($10^3 \text{ m}^3 \cdot \text{d}^{-1}$)	备 注
100	13	4.03	619.63	
	17	13.85		
	23	137.15		
	30	58.91		
	32	80.82		
	38	53.72		
	40	159.53		
	63	104.16		
	94	7.445		

续表

置信水平 $\alpha/\%$	疏干孔位置编号	分点水量/ $(10^3 \text{ m}^3 \cdot \text{d}^{-1})$	总水量/ $(10^3 \text{ m}^3 \cdot \text{d}^{-1})$	备 注
95	13	2.63	403.86	
	17	9.03		
	23	89.39		
	30	38.39		
	32	52.68		
	38	35.02		
	40	103.98		
	63	67.89		
	94	4.85		
90	13	2.488	382.64	
	17	8.557		
	23	84.69		
	30	36.37		
	32	49.91		
	38	33.17		
	40	98.51		
	63	64.33		
	94	4.60		
85	13	2.404	369.68	
	17	8.267		
	23	81.82		
	30	35.14		
	32	48.22		
	38	32.05		
	40	95.17		
	63	62.15		
	94	4.44		
85	13	9.93	351.438	
	17	42.77		
	23	57.15		
	30	67.3		
	32	3.17		
	38	29.50		
	40	90.25		
	63	52.89		

(5) 为了进一步检验管理结果的正确性,我们将管理结果代入地下水模拟预测模型,进行了地下水疏干流场的模拟预测,预测的流场形态较好地反映了在不同约束条件置信度水平下对疏干要求的满足性。

主要参考文献

- [1] Song T T, Bogdanoff J. On the natural frequencies of a disordered linear chain of n degree of freedom, *Int. J. Mech. Sci.*, 1963, 5: 237 ~ 1265
- [2] Boyce E W, Goodwin B E. Random transverse vibration of elastic beams, *SIAM Journal*, 1964, 12(3): 613 ~ 629
- [3] Shinozuka M, Jan C M. Digital simulation of random processes and its applications, *Journal of Sound and Vibration*, 1972, 25: 111 ~ 128
- [4] Shinozuka M. Probabilistic modelling of concrete Structures, *Journal of the Eng. Mech.*, ASCE, 1972, 8: 1433 ~ 1451
- [5] Shinozuka M. Monte Carlo solution of structural dynamics, *Int. J. Comput. And Struct.*, 1972, 2: 855 ~ 874
- [6] Shinozuka M, Astill J. Random eigenvalue problems structural mechanics, *AIAA J.*, 1972, 10(4): 456 ~ 462
- [7] Shinozuka M, Wen Y K. Monte Carlo Solution of nonlinear Vibrations, *AIAA J.* 1972, 10(1): 37 ~ 40
- [8] Hisada T, Nakagiri S. Stochastic element method developed for structural safety and reliability, *Proc. 3rd Int. Conf. On Structural Safety and Reliability*, 1981, 395
- [9] Hisada T, Nakagiri S. Stochastic finite element analysis of uncertain structural systems, *Proc. 4th Int. Conf. In Australia on Finite Element Methods*, Melbourne, 1982, 133
- [10] Hisada T, Nakagiri S. A note on stochastic finite element method (part 2)-Variation of stress and strain caused by fluctuations of material properties and geometrical boundary condition, *Seisan-Kenkyu* (monthly report of Inst. Industrial Sci. Univ. Of Tokyo), 1980, 35(5): 262 ~ 265
- [11] 李杰. 随机结构动力分析的扩阶系统方法. *工程力学*, 1996, 13(1)
- [12] 李杰. 随机结构动力分析的扩阶系统方法, (I) 扩阶系统方程. *地震工程与工程震动*, 1995, 15(3)
- [13] 李杰. 随机结构动力分析的扩阶系统方法, (II) 结构动力分析. *地震工程与工程震动*, 1995, 15(4)
- [14] Iwan W D, Jensen H. On the dynamic response of continuous systems including model uncertainty, *J. Of Applied Mechanics*, 1993, 60: 484 ~ 490
- [15] Jensen H, Iwan W D. Response variability in structural dynamics, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1991, 20: 949 ~ 959
- [16] Hisada T, Nakagiri S. Role of the stochastic finite element method in structural safety and reliability, *4th Int. Conf. On Structural Safety and Reliability*, Kobe, Japan. 1985
- [17] Sergio E Serrano, Unny T E. Stochastic partial differential equations in hydrology, *Stochastic Hydrology*, 1987
- [18] Shu-Guang Li, Dennis McLaughlin. A Nonstationary spectral method for solving stochastic groundwater problems: Unconditional analysis, *Water Resources Research*, 1991, 27(7): 1589 ~ 1605
- [19] Hisada T, Nakagiri S. A note on stochastic finite element method (part 3)——An extension of the methodology to nonlinear problems, *Seisan-Kenkyn.*, 1980, 32(12): 572 ~ 575
- [20] Chaudhry M T, Labadie J W, Hall W A, Albertson M L., Optimal conjunctive use for Indus basin, *J. Hydraul. Div. Am. Soc. Civ. Eng.*, 100(HY5), 1974, 667 ~ 687
- [21] Cooper H, Jr. The equation of groundwater flow in fixed and deforming coordinates, *J. Geophys. Res.*, 1996, 71(20): 4785 ~ 4790
- [22] Taylor O J, Luckey R. R. Water-management studies of a stream-aquifer system, Arkansas River Valley, Colorado, *Ground Water*, 1974, 12(1): 22 ~ 38
- [23] Bockstock C A, Simpson E. S, Roefs T. G., Minimizing costs in well field design in relation to aquifer models, *Water Resour. Res.* 1977, 13(2): 420 ~ 426
- [24] Bredehoeft J D, Pinder G. F. Mass transport in flowing groundwater. *Water Resour. Res.*, 1973, 9(1): 194 ~ 210
- [25] Bredehoeft J D, Young R A. The temporal allocation of groundwater; A simulation approach, *Water Resour. Res.* 1970, 6(1): 3 ~ 21
- [26] Bredehoeft J D, Young R A. Conjunctive use of ground water and surface water for irrigated agriculture; Risk aversion, *Water Resour. Res.*, in press, 1983

- [27] Gorelick S M. Numerical management models of groundwater pollution, Ph.D. dissertation, Stanford Univ., 1980
- [28] Alfeld, Wang. Optimal Groundwater Remediation with well location as a decision Variable, Model Development. W. R. R. 1994, 2
- [29] Mc Kinney, Lin. Genetic algorithms Solution of groundwater management models. W. R. R. 1994, 2
- [30] Galerkin finite Element procedure for analysis flow through random media, W. R. R. 1978, 14(6)
- [31] Genetic algorithms in search, optimization and machine learning. W. R. R. 1989
- [32] 姚磊华. 非平稳随机地下水流模拟. 煤炭学报, 2000 年增刊
- [33] 林学钰等. 地下水管理. 北京: 地质出版社, 1995
- [34] 李维静, 郭耀煌. 运筹学. 北京: 清华大学出版社, 1985
- [35] 云庆夏等. 遗传算法和遗传规划. 北京: 冶金工业出版社, 1997
- [36] 陈国良等. 遗传算法及其应用. 北京: 人民邮电出版社, 1996
- [37] 李杰著. 随机结构系统. 北京: 科学出版社, 1996
- [38] 刘宝琰等. 随机规划与模糊规划. 北京: 清华大学出版社, 1998
- [39] 汪荣鑫. 随机过程. 西安: 西安交通大学出版社, 1987
- [40] 薛禹群. 地下水动力学原理. 北京: 地质出版社, 1986
- [41] 黄克中等. 随机方法与模糊数学应用. 上海: 同济大学出版社, 1987
- [42] Brian J Ritzel, Wayland Eheart J. Using genetic algorithms to solve a multiple objective groundwater pollution containment problem. W. R. R. 1994, 30(5)
- [43] Chaanglin Huang. Pump-and-treat optimization using well locations and pumping rates as decision variables. W. R. R. 1977, 33(5)
- [44] April L James, Curtis M. Oldenburg, Linear and Monte Carlo uncertainty analysis for subsurface contaminant transport simulation. W. R. R. 1997, 33(11)
- [45] Pascal Storek. A method for the optimal location of monitoring wells for detection of groundwater contamination in three-dimensional heterogenous aquifers. W. R. R. 1997, 33(9)
- [46] Charns A, Cooper W W. Chance-constrained programming. Management Science, 1989
- [47] 虎维岳. 地下水疏干井群优化设计的遗传算法. 煤田地质与勘探, 1999(1)
- [48] 虎维岳. 修正单纯形法及其在矿井疏干井群优化设计中的应用. 工程勘察, 1999(2)
- [49] 虎维岳, 李竞生, 李玉林. 地下水随机规划模型的 Taylor 展开解法. 西安工程学院学报, 1999(2)
- [50] 虎维岳. 地下水管理模型中的参数随机性问题. 煤炭学报, 2000(6)
- [51] 虎维岳. 论机会约束地下水管理模型. 工程勘察, 2001(5)
- [52] 卢文喜. 地下水系统的模拟预测和优化管理. 北京: 科学出版社, 1999
- [53] 浙江大学. 概率论与数理统计. 北京: 高等教育出版社, 1979
- [54] 郑汉鼎等. 数学规划. 济南: 山东教育出版社, 1997
- [55] Li J, N.-Z. sun, W. W.-G. Yeh, A comparative study of sensitivity coefficient calculation method in groundwater flow, in proceedings of the 6th international conference in Finite Elements in water resources, Lishon, Portage, 1986

[G e n e r a l I n f o r m a t i o n]

书名=地下水系统随机模拟与管理

作者=

页数= 9 1

S S 号= 0

出版日期=

封面
书名
版权
前言
正文