地信网论坛 BBS.3500I.COM

目　录

第一章　具有一个自由度的系统…… 1
1.1 自由谐和振动…… 1
1.2 旋转振动…… 8
1.3 能量法…… 14
1.4 瑞利法…… 19
1.5 具有多个质量的梁和轴…… 26
1.6 强迫振动：稳态…… 30
1.7 强迫振动：瞬态…… 36
1.8 具有粘滞阻尼的自由振动…… 40
1.9 具有粘滞阻尼的强迫振动…… 46
1.10 等效粘滞阻尼…… 51
1.11 一般周期干扰力…… 55
1.12 任意干扰力…… 62
1.13 任意支承运动…… 70
1.14 反应谱…… 76
1.15 反应的数值解…… 82
第二章　具有非线性特征的系统…… 94
2.1 非线性系统的例子…… 94
2.2 速度和周期的直接积分…… 103
2.3 自由振动的近似方法…… 109
2.4 强迫非线性振动…… 115
2.5 分段线性系统…… 121
2.6 非线性系统的数值解…… 133
第三章　具有两个自由度的系统…… 145
3.1 两个自由度系统的例子…… 145
3.2 作用力方程：刚度系数…… 149
3.3 位移方程：柔度系数…… 152
3.4 惯性的与重力的耦合…… 158
3.5 无阻尼自由振动…… 163
3.6 无阻尼强迫振动…… 171
3.7 具有粘滞阻尼的自由振动…… 177
3.8 具有粘滞阻尼的强迫振动…… 180
第四章　具有多个自由度的系统…… 186
4.1 引言…… 186
4.2 无阻尼系统的频率和振型形状…… 186

地信网论坛 BBS.3500I.COM

4.3 主坐标与正规坐标……197
4.4 对初始条件的正规型反应……202
4.5 对施加作用力的正规型反应……207
4.6 对支承运动的正规型反应……213
4.7 频率和振型形状的迭代法……220
4.8 多个自由度系统中的阻尼……230
4.9 对周期性激发的阻尼反应……233
4.10 阻尼系统的瞬变反应……236
4.11 瞬变反应的数值解……239
第五章 弹性体的振动……245
5.1 引言……245
5.2 棱柱形杆的自由纵向振动……245
5.3 棱柱形杆的强迫纵向反应……251
5.4 棱柱形杆的正规型法……256
5.5 端点带有一个质量或一个弹簧的棱柱形杆……262
5.6 承受纵向支承运动的杆……267
5.7 圆轴的扭转振动……271
5.8 张拉着的钢丝的横向振动……277
5.9 棱柱形梁的横向振动……281
5.10 简单梁的横向振动……285
5.11 具有其它端点条件的梁的振动……287
5.12 旋转惯量的效应和剪切变形的效应……293
5.13 简单梁的强迫反应……295
5.14 具有其它端点条件的梁的强迫反应……299
5.15 承受支承运动的梁……301
5.16 运动荷载通过的梁……304
5.17 轴向力对梁的振动的效应……308
5.18 弹性支承上的梁或弹性地基上的梁……309
5.19 计算频率的里兹法……312
5.20 非棱柱形梁的振动……315
5.21 梁的弯曲和扭转的联合振动……320
5.22 圆环的振动……323
5.23 薄膜的横向振动……327
5.24 板的横向振动……334
附录 计算机程序……341
A.1 引言……341
A.2 线性系统的数值解……341
A.3 非线性系统的数值解……341
A.4 本征值和本征向量的迭代法……342
A.5 多个自由度系统的数值解……342

地信网论坛 BBS.3500L.COM

第一章　具有一个自由度的系统

1.1　自由谐和振动

如果静态受载的弹性系统，例如一根梁或一根推进器的轴，以某种方式从其平衡位置受到扰动，那么其变形状态下的内力和内力矩不再与外载相平衡，而将发生振动。一般来说，一个弹性系统可能产生不同图式或方式的振动。例如拉紧的钢丝，由于划分其长度的结点的数目不同，可能按各种形状振动。在最简单的情况下，任一瞬间振动系统的形态可以借一个坐标来确定，这样的情况称为具有一个自由度的系统。

让我们考虑图1.1*a*中所示的情况，表示一块重量为W(或者更恰当地说其质量为W/g)的块体，用一根线性弹性螺旋弹簧悬挂于一支承处。如果该装置只能使重量W产生竖直位移，而且弹簧的质量与块体的质量相比非常小，那么该系统可以认为具有一个自由度。该系统的形态，可以完全借块体距其平衡位置的平动x来确定。

当该重量起初加到弹簧上时，产生静变位：

$$\delta_{st}=\frac{W}{k} \qquad (a)$$

式中k代表弹簧的长度产生单位变化所需要的力，称为弹簧常数。如果重量以磅计，弹簧的伸长量以英寸计，那么弹簧常数则以磅/英寸为单位来表示。对于由平均线圈直径为D，钢丝直径为d的n个封闭绕缠线圈组成的螺旋弹簧，其弹簧常数可表达为*：

$$k=\frac{Gd^4}{8nD^3} \qquad (b)$$

式中G代表钢丝的弹性剪切模量。

现在使块体自其平衡位置产生位移并放松，从而发生振动。这种仅借弹簧内的弹性力来维持的振动，称为自由振动或固有振动。如果位移x顺向下方向考虑为正，那么相应于块体任一位置处弹簧中的力则为$W+kx$，如图1.1*b*所示。已知块体的质量为W/g，并以$\ddot{x}$表示其加速度d^2x/dt^2，我们可以应用牛顿第二运动定律得到

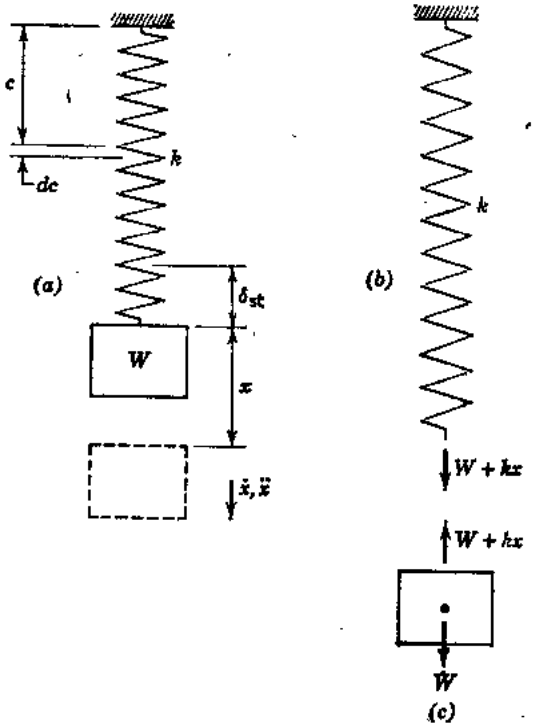


图　1.1

$$\frac{W}{g}\ddot{x}=W-(W+kx) \qquad (c)$$

*见S.Timoshenko和D.H.Young著Elements of Strength of Materials，第5版，Van Nostrand, Princeton, N.J., 1968，第80页。

地信网论坛 BBS.3500L.COM

作用于块体上的诸不平衡力示于图1.1c 中。方程（c）的右边，重量W消去了，说明该系统自由振动的运动微分方程与重力场无关。重要的是要记住在上面讨论中位移x是从静平衡位置度量的并考虑顺向下方向为正。

引进下列符号

$$p^2=\frac{kg}{W}=\frac{g}{\delta_{st}} \tag{d}$$

我们可以用下列形式表示方程（c）：

$$\ddot{x}+p^2x=0 \tag{1.1}$$

如果我们取$x=C_1\cos pt$或$x=C_2\sin pt$，这里C_1和C_2为任意常数，那么此方程将得到满足。将这些解加起来，我们得到方程（1.1）的通解为：

$$x=C_1\cos pt+C_2\sin pt \tag{1.2}$$

可以看到，重量W的竖直运动具有振动的性质，因为$\cos pt$和$\sin pt$均为周期函数，这些函数在时间间隔τ之后它们自身重复，因而

$$p(\tau+t)-pt=2\pi \tag{e}$$

这种时间间隔称为振动的周期。它的大小，从方程（e），为：

$$\tau=\frac{2\pi}{p} \tag{f}$$

或应用式（d）

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{W}{kg}}=2\pi\sqrt{\frac{\delta_{st}}{g}} \tag{1.3}$$

可以看到，振动的周期仅取决于重量W的大小和弹簧常数k，而与位移量无关。我们也可以说悬挂着的重量W的振动周期与长度等于静变位δ_{st}的单摆的振动周期相同。如果此变位由理论确定了或由实验确定了，那么周期τ可从方程（1.3）来求算出。

每一单位时间内往返的次数（例如每秒的周数）称为振动的频率。以f表示频率，我们得到

$$f=\frac{1}{\tau}=\frac{p}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{kg}{W}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}} \tag{1.4}$$

方程（1.2）所表达的振动称为简谐运动。为了确定积分常数C_1和C_2，我们必须考虑初始条件。假设在初始瞬间（$t=0$）重量W距其平衡位置的位移为x_0，并假设其初始速度为$\dot{x}_0$。将$t=0$代入方程（1.2），我们得到：

$$C_1=x_0 \tag{g}$$

将方程（1.2）对时间取导数，并代入$t=0$，我们得到：

$$C_2=\frac{\dot{x}_0}{p} \tag{h}$$

将（g）和（h）中的常数值代入方程（1.2），得到重量W的振动表达式：

$$x=x_0\cos pt+\frac{\dot{x}_0}{p}\sin pt \tag{1.5}$$

可以看到，在此情况下，振动由两部分组成：一部分与$\cos pt$成比例，且取决于初始位移x_0，另一部分与$\sin pt$成比例，取决于初始速度$\dot{x}_0$。这每一部分可以如图1.2a和1.2b用位

地信网论坛 BBS.35001.COM

移对时间绘成曲线以图解表示。振动着的重量W，在任一时刻t处的总位移x，可以从该时刻两曲线的纵坐标加到一起来得到，如图1.2c的曲线所示。

表示振动的另一种方法是借助于转动向量。想像大小为x_0的向量$\overrightarrow{OP}$（见图1.3），以等角速度p绕固定点O转动。此速度称为振动的角频率或圆周频率。如果在初始瞬间（$t=0$）时，向量$\overrightarrow{OP}$与x轴相吻合，那么在任一其它时间t时，它与该轴所成的角等于pt。此向量在x轴上的投影等于$x_0\cos pt$，代表（1.5）式的第一项。取另一大小为$\dot{x}_0/p$且垂直于向量$\overrightarrow{OP}$的向量$\overrightarrow{OQ}$，我们看到它在x轴上的投影给出（1.5）式的第二项。振动重量的总位移x，借将两个互相垂直以角速度p转动的向量$\overrightarrow{OP}$和$\overrightarrow{OQ}$在x轴上的投影加起来得到。

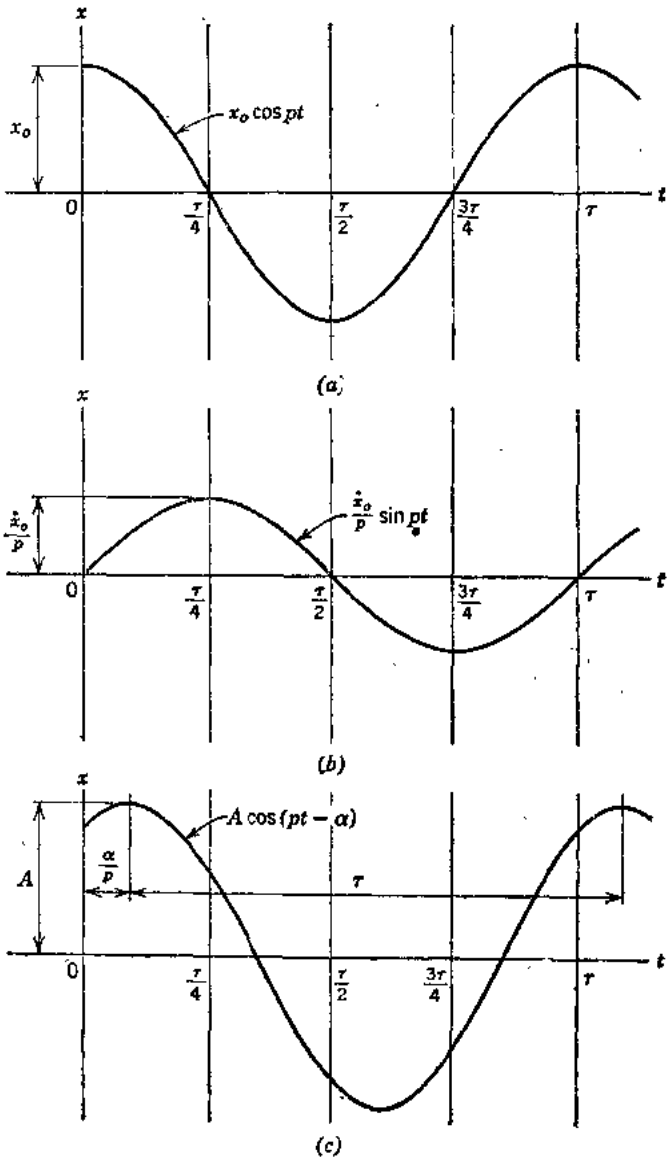


图 1.2

如果我们考虑等于向量$\overrightarrow{OP}$和$\overrightarrow{OQ}$的向量之和的向量$\overrightarrow{OR}$代替这两个向量，并取合成向量在x轴上的投影，则得到相同的结果。此向量的大小为A，从图1.3得到：

$$A=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{\dot{x}_0}{p}\right)^2} \qquad (i)$$

与x轴形成的角为$pt-\alpha$，其中

$$\alpha=\tan^{-1}\frac{\dot{x}_0}{px_0} \qquad (j)$$

从上面讨论，显然方程（1.5）可以用下面等效形式来表达：

$$x=A\cos(pt-\alpha) \qquad (1.6)$$

式中用表达式（i）和（j）代表的A和α为取决于运动初始条件的新常数。可以看到，一个与$\cos pt$成比例，另一个与$\sin pt$成比例的两个简谐运动相加，又为一个与$\cos(pt-\alpha)$成比例的简谐运动，如图1.2c中的图解所表示。此曲线的最大纵坐标A等于图1.3中向量$\overrightarrow{OR}$的大小，代表振动着的物体距其平衡位置的最大位移，称为振幅。

由于两个转动向量$\overrightarrow{OP}$和$\overrightarrow{OR}$之间的角为α，所以图1.2c中曲线的最大纵坐标对图1.2a中曲线的最大纵坐标移动α/p值。在这种情况下，可以说，借图1.2c中曲线所代表的

地信网论坛 BBS.3500I.COM

总的振动，迟于图 1.2 a 中曲线所给的运动分量，其角 α 称为这两种振动的相差或相角。图 1.3 中坐标 x，$\dot{x}/p$ 定义为相平面，在该平面内，运动按转动向量处理。

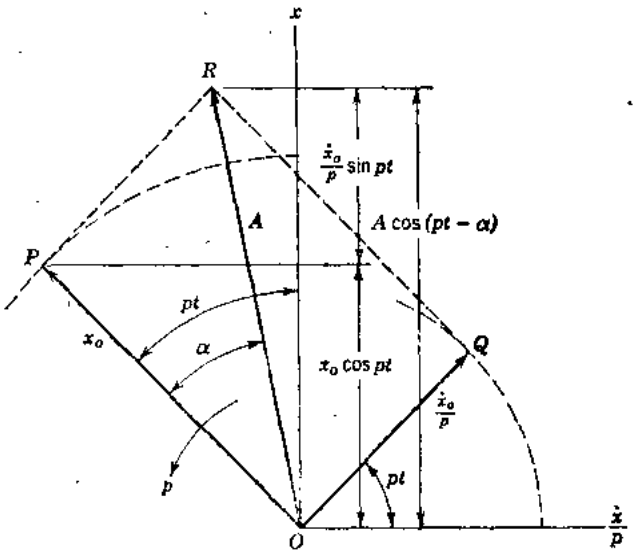


图 1.3

例题 1 一根长度 $l=10$英尺、弯曲刚度 $EI=20\times10^6$ 磅-英寸^2 的简支钢梁，有一重量 $W=200$ 磅的块体从高度 $h=\frac{1}{2}$英寸处落到跨中上，如图 1.4 所示。略去梁的分布质量，并假设在初始接触后，块体与梁不分开，试求接着发生的自由振动的频率和振幅。

解：在静止于梁中央处的荷载 W 的作用下，其静力挠度为：

$$\delta_{st}=\frac{Wl^3}{48EI}=\frac{(200)(120)^3}{(48)(20\times10^6)}=0.36\text{英寸}$$

因而，从方程（1.4），自由振动的频率为：

$$f=\frac{p}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{386}{0.36}}=\frac{32.8}{6.28}=5.21\text{周/秒}$$

在求算振幅中，我们注意，当下落重量最初打击梁的初始时刻（$t=0$），初始位移为：

$$x_0=-\delta_{st}$$

初始速度为：

$$\dot{x}_0=\sqrt{2gh}$$

因而，借方程（i），其振幅为：

$$A=\sqrt{(-\delta_{st})^2+2h\delta_{st}}=\sqrt{0.13-0.36}=\sqrt{0.49}=0.70\text{英寸}$$

因为此振幅是从静力平衡位置起度量，所以应看到，由于下落重量所产生的总挠度为 $A+\delta_{st}=1.06$英寸。

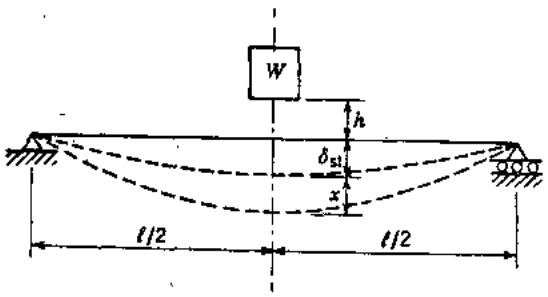


图 1.4

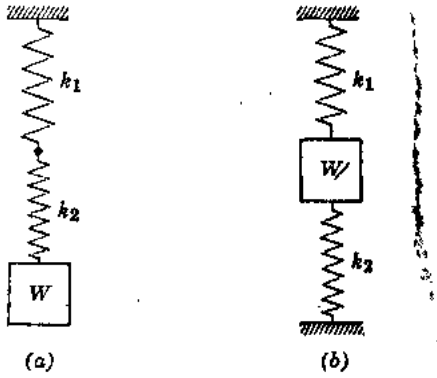


图 1.5

地信网论坛 BBS.35001.COM

例题 2 图1.5a中，重量为W的块体借两个串联的弹簧（它们的弹簧常数为k_1和k_2）吊挂着。图 1.5b 中，同一块体借两个所谓并联的弹簧（其常数为k_1和k_2）支承着。试对每一种情况求出其系统的等效弹簧常数k。

解：对于图1.5a中的情况，每一弹簧承受相同的拉力W，它们每一个的伸长量为$\delta_1=W/k_1$和$\delta_2=W/k_2$。因此，该重量的总的静力变位为：

$$\delta_{st}=\delta_1+\delta_2=\frac{W}{k_1}+\frac{W}{k_2}$$

该系统的等效弹簧常数为$k=W/\delta_{st}$，于是从方程（a），写成为：

$$k=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2} \qquad (k)$$

将此k值用于方程（1.3）中，我们可以求算自由振动的周期。

对于图1.5b中的情况，令S_1为上面弹簧中由于重量W静力作用所引起的拉力，S_2为下面弹簧所引起的压力。因为每一弹簧必定具有相同的长度变化，所以我们得到：

$$\delta_{st}=\frac{S_1}{k_1}=\frac{S_2}{k_2}=\frac{W}{k} \qquad (l)$$

另外，该重量的单位变位产生的恢复力为：

$$k=k_1+k_2 \qquad (m)$$

它为该系统的等效弹簧常数。亦即，对于并联的弹簧，只需要将各别弹簧常数加起来，便得到等效常数。各别弹簧中的力可从表达式（l）和（m）得到为：

$$S_1=\frac{k_1}{k_1+k_2}W \qquad S_2=\frac{k_2}{k_1+k_2}W \qquad (n)$$

例题 3 一个简单框架结构，由重量$W=38,600$磅，借四根刚性竖直柱支承着的刚性重型平台组成，它的每一侧面内用两根对角钢丝侧面拉住，如图 1.6a 所示。诸柱端点均为铰接，每一对角钢丝的横截面积为$1/\sqrt{2}$（英寸）^{2}，张拉到很高的应力。除平台外，略去所有的质量*，试求出该结构自由侧向振动的周期τ。

解：在平台的质量中心处顺x方向作用一力P，如图 1.6b 所示。由于此荷载，对角钢丝AC中拉力的变化将为$S=\sqrt{2}P/4$。该对角钢丝的相应伸长量为：

$$\Delta=\frac{Sl}{AE}=\frac{\sqrt{2}P\sqrt{2}h}{4AE}=\frac{Ph}{2AE}$$

对角钢丝BD缩短一个相等的量。由于对角钢丝的这些长度变化的结果，我们看到平台有一侧向变位$\delta=\sqrt{2}\Delta$。因此，该结构的弹簧常数成为：

$$k=\frac{P}{\delta}=\frac{\sqrt{2}AE}{h}=\frac{30\times10^6}{120}=250,000\text{磅/英寸}$$

将此k值代入方程（1.3），我们得到：

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{38,600}{(250,000)(386)}}=2\pi\sqrt{0.0004}=0.126\text{秒}$$

留给读者去说明在此例题中不一定需要顺x方向作用水平力P，如果P顺z方向或顺水平面内任何其它方向，将得到相同的结果。

---

*即略去诸柱和钢丝的质量。 ——译注

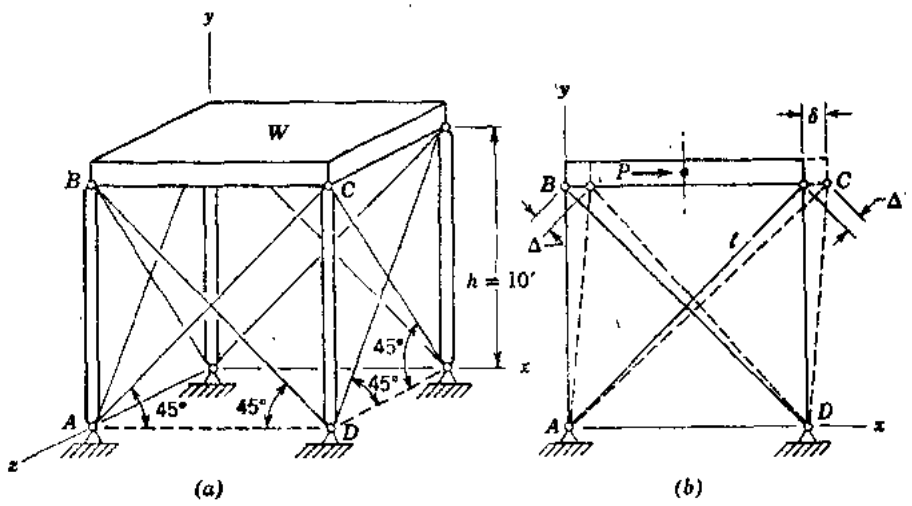


图 1.6

例题 4 假设图 1.7 中重量W代表一个以等速$\dot{x}_0$向下运动的升降机，还假设其弹簧由一钢索组成。试确定当运动过程中上端线盘突然卡住时钢索中的最大应力。令重量$W=10{,}000$磅，$l=60$英尺，钢索的横截面积$A=2.5$(英寸)^2，钢索的弹性模量$E=15\times10^6$磅/英寸^2，$\dot{x}_0=3$英尺/秒。钢索的重量略去不计。

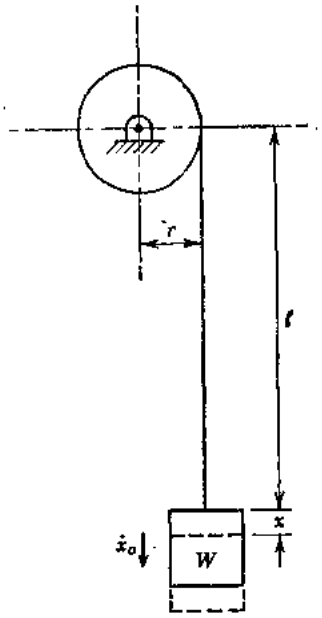


图 1.7

解：在升降机匀速运动过程中，钢索中的拉力等于$W=10{,}000$磅，当此事故发生的瞬间时钢索的伸长量为$\delta_{st}=Wl/AE=0.192$英寸。由于初始速度$\dot{x}_0$，升降机并不突然停止，而在钢索上振动。从事故发生的时刻起计算时间，我们看到，升降机在该时刻*距其平衡位置的距离为零，而速度为$\dot{x}_0$。从方程(1.5)，我们得出结论：振动的振幅等于$\dot{x}_0/p$，其中$p=\sqrt{g/\delta_{st}}=44.8$秒$^{-1}$，$\dot{x}_0=36$英寸/秒。因此，钢索的最大伸长量为$\delta_{max}=\delta_{st}+\dot{x}_0/p=0.192+36/44.8=0.192+0.803=0.995$英寸，最大应力$\sigma_{max}=(10{,}000/2.5)(0.995/0.192)=20{,}750$磅/英寸^{2}可以看出，由于线盘突然停止，钢索中应力增大约 4 倍。

习 题 组 1.1

1.1—1 图 1.1 中螺旋弹簧的平均线圈直径$D=1$英寸，钢丝直径$d=0.1$英寸，包括20个线圈。钢丝受剪的弹性模量$G=12\times10^6$磅/英寸^2，悬挂重量$W=30$磅。试求算自由振动的周期。

答：$\tau=0.64$秒。

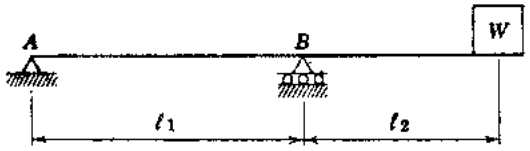
1.1—2 一根弯曲刚度$EI=12\times10^7$磅-英寸^{2}的简支梁，两支承之间的净跨$l_1=6$英尺，一端挑臂$l_2=3$英尺，如图所示。略去梁的分布质量，试求挑臂端点处重量为$W=600$

*指线盘突然卡住的事故发生的时刻。 ——译注

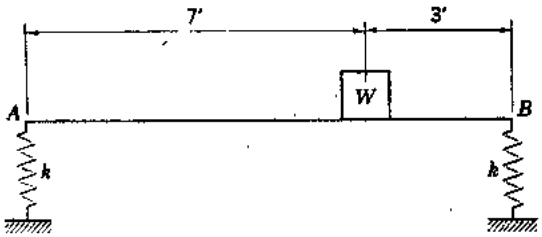
地信网论坛 BBS.3500L.COM

磅的块体自由振动的频率。

答：$f=6.48$周/秒。



习题 1.1—2



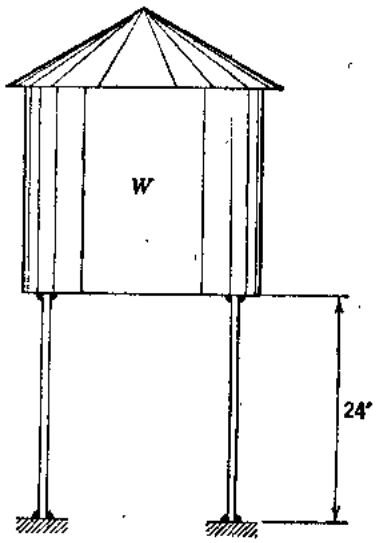
习题 1.1—3

1.1—3 一根弯曲刚度 $EI=30\times10^6$ 磅-英寸^2 的梁 AB，借弹簧支承于A点和B点处，每一弹簧系数 $k=300$磅/英寸，如图所示。略去梁的分布质量，试求算位于B点左边3英尺处，重量$W=1000$磅的块体自由振动的周期。

答：$\tau=0.533$秒。

1.1—4 一个重量 $W=150$ 千磅的水箱，借四根端点嵌固的竖直管柱支承着。每一柱的弯曲刚度 $EI=2\times10^9$ 磅-英寸^2。试求算该水箱顺水平方向自由振动的周期。略去诸柱的分布质量。

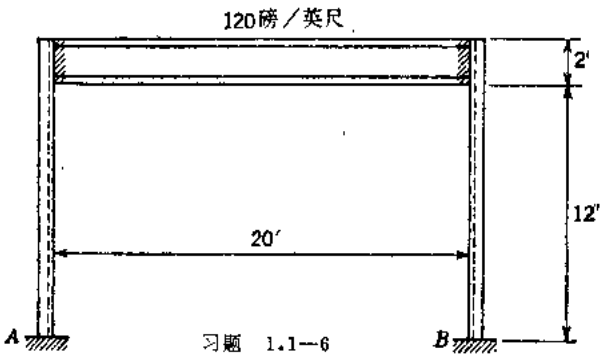
答：$\tau=1.95$秒。



习题 1.1—4

1.1—5 为了降低例题4条件下发生的最大动力应力，假设在钢索下端与升降机之间加一个弹簧常数 $k=2000$ 磅/英寸的短弹簧。试求算在此情况下，当钢索的上端突然停止时产生的最大应力。采用与例题4所给的相同数据。

答：$\sigma_{max}=7230$磅/英寸^2。



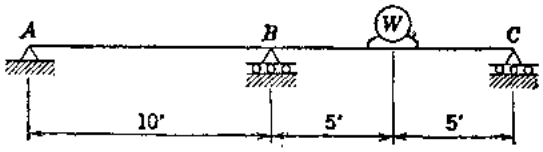
习题 1.1—6

1.1—6 有一门式框架，由一根20英尺长的24英寸重型工字梁，借与两根相对为柔性的柱焊接成刚性连接，如图所示。每一柱为一根横截面面积 $A=4.02$ (英寸)^2 的槽型钢，其最小回转半径 $r=0.62$英寸，$E=30\times10^6$磅/(英寸)^2。试求算在框架平面内侧向振动的固有周期：（a）假设A和B处完全固定，（b）假设A和B处均为铰。略去工字梁的弯曲和柱

的质量。

答：$\tau_1=0.813$秒，$\tau_2=1.62$秒。

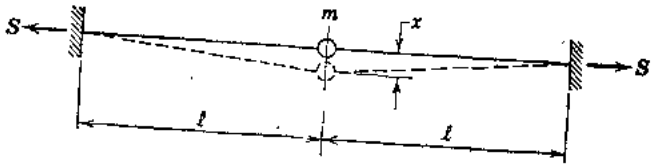
1.1—7　有一根由两个6英寸槽型钢，背靠背地组成两跨连续梁（$I=2\times17.4=34.8$英寸^4），在BC跨的中央处，承受一个重量$W=12$千磅的马达，如图所示。试求算该马达自由竖直振动的固有频率f，略去该梁的分布质量。



习题　1.1—7

答：$f=5.72$周/秒。

1.1—8　有一个质量为m的很小的球，置于长度为$2l$紧拉着的钢丝中点处，如图所示。钢丝不能抵抗弯曲，并承受了很高的初始拉力S。试建立该球微小侧向振动时的运动微分方程，并说明如果钢丝中的拉力可以假设保持为常数，那么该运动将为简谐运动。要问在此情况下振动的周期是多少？



习题　1.1—8

答：$\tau=2\pi\sqrt{ml/2S}$。

1.1—9　有一重量W，借类似于图1.5a中两个弹簧那样的方式串联连接着的三个弹簧k_1、k_2、k_3悬挂着。试说明该系统的等效弹簧常数为：

$$k=\frac{k_1k_2k_3}{k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3}$$

1.2　旋转振动

让我们在图1.8中考虑一根上端嵌固住，下端带有一个实体正圆盘的弹性轴，这样的系统称为扭摆。如果圆盘绕此轴的轴线转过一个微小的角ϕ，然后放松，那么将发生自由旋转振动。在这种振动过程中，因扭转轴对盘产生的力矩与扭转角ϕ成比例，并作用于盘转动的相反方向。因而，如果I表示盘绕该轴轴线的质量惯性矩，$\ddot{\phi}$为其角加速度，k_r为单位转角的扭矩（旋转弹簧常数），那么运动的微分方程成为：

$$I\ddot{\phi}=-k_r\phi \qquad (a)$$

引进符号

$$p^2=\frac{k_r}{I} \qquad (b)$$

我们可以将方程（a）写成

$$\ddot{\phi}+p^2\phi=0 \qquad (1.7)$$

此方程具有与前节中方程（1.1）相同的形式。

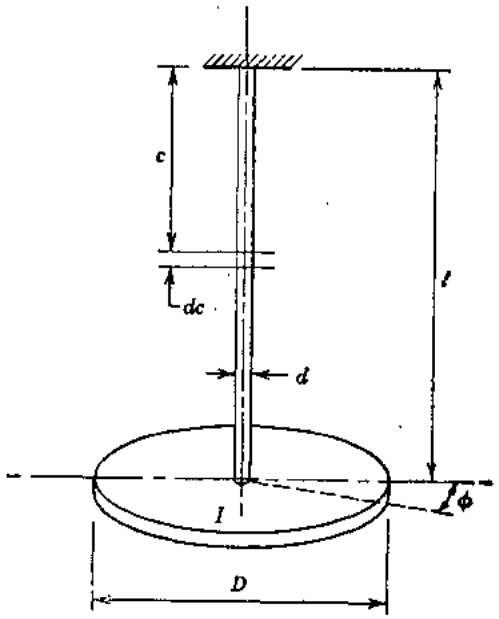


图　1.8

地信网论坛 BBS.3500L.COM

因此，其解具有与方程（1.5）相同的形式，我们得到：

$$\phi=\phi_0\cos pt+\frac{\dot{\phi}_0}{p}\sin pt \tag{1.8}$$

式中ϕ_0和$\dot{\phi}_0$分别为在初始时刻$t=0$该盘的角位移和角速度。如前节那样，我们从方程(1.8)得出结论：旋转振动的周期为：

$$\tau=\frac{2\pi}{p}=2\pi\sqrt{\frac{I}{k_r}} \tag{1.9}$$

其频率为：

$$f=\frac{1}{\tau}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_r}{I}} \tag{1.10}$$

在长度为l、直径为d的圆形横截面轴的情况下，其扭转弹簧常数可以用下列公式*来表达：

$$k_r=\frac{GJ}{l}=\frac{\pi d^4G}{32l} \tag{c}$$

式中G为材料的剪切弹性模量。方程（c）中符号J代表轴的横截面的扭转常数，当横截面为圆形时，它等于极惯性矩。通常扭转弹簧常数k_r以磅-英寸/弧度为单位。

另外，如果圆盘是均匀的，直径为D，重量为W，那么其质量惯性矩则为：

$$I=\frac{WD^2}{8g} \tag{d}$$

采用这些k_r值和I值，扭转振动的周期和频率可以从方程（1.9）和（1.10）求得。

在非圆形横截面轴或不规则形状物体这种较为一般的情况下，k_r和I两个量计算起来可能较为困难。然而，如果它们的求算没有公式可以利用的话，用实验一般是可以确定的。为了使振动为纯旋转振动，必须将轴的轴线与通过物体质量中心的主轴相吻合。否则，则需要引进约束（成轴承方式）阻止物体的其它运动。还应注意旋转振动可能在不涉及扭转变形的系统中发生（见本节末尾处的例题2）。

前面整个讨论中，假设图1.8中轴为直径d的均匀横截面，如果该轴由长度分别为l_1和l_2以及直径为d_1和d_2的两部分组成，那么各扭转弹簧常数k_{r1}和k_{r2}可以从方程（c）求算出来。于是，轴的两部分代表串联着的扭转弹簧，其等效弹簧常数可以从前节中的方程(k)来得到。

阶梯形轴的情况也可以另一方式来处理。如果由两部分组成的轴承受扭矩M，那么该轴的总扭角将为：

$$\phi=\frac{M}{k_{r1}}+\frac{M}{k_{r2}}=\frac{32Ml_1}{\pi d_1^4G}+\frac{32Ml_2}{\pi d_2^4G}=\frac{32M}{\pi d_1^4G}\left(l_1+l_2\frac{d_1^4}{d_2^4}\right)$$

可以看到，具有两个直径d_1和d_2的轴的扭角，与等直径为d_1并用下列方程给予修正长度为L_1的轴的扭角相同。

$$L_1=l_1+l_2\frac{d_1^4}{d_2^4} \tag{e}$$

长度为L_1、直径为d_1的轴与所给两个不同直径的轴，具有相同的弹簧常数，该轴是为此情况下的等效轴。

*见Timoshenko和Young著Elements of Strength of Materials，第5版，第72页

地信网论坛 BBS.3500U.COM

现在让我们考虑一根轴，支承于无摩擦的轴承中，且每一端处带有一个旋转物体的情况，如图 1.9 所示。这是实用中重要的情况，因为它可以考虑代表一端带有一个推进器，另一端带有一个轮机马达的推进器的轴*。如果两个盘按相反方向扭转，然后突然放松，那么将发生扭转振动。根据角动量的守恒原理得出：在这样一种振动过程中，这两个盘必定总按相反方向转动。因而，位于轴上 P 点的某一中间横截面（见图1.9）保持不动，该横截面称为结点截面。它的位置根据这两个物体具有相同的振动周期这一事实来求出，因为不是这样的话，那么它们总按相反方向转动的情况将不会得到实现。

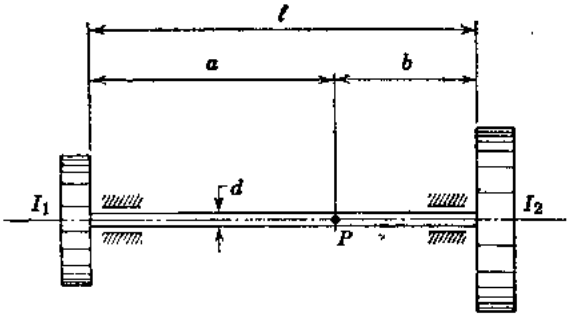


图 1.9

将方程（1.9）用于结点截面两侧两个分系统的每一分系统上，我们得到：

$$\sqrt{\frac{I_1}{k_{t1}}}=\sqrt{\frac{I_2}{k_{t2}}}\text{ 或 }\frac{k_{t1}}{k_{t2}}=\frac{I_1}{I_2} \qquad (f)$$

式中k_{t1}和k_{t2}分别为轴的左边部分和右边部分的弹簧常数。从方程（c）看到，这些量与该轴相应部分的长度成反比，所以从方程（f）得出：

$$\frac{a}{b}=\frac{I_2}{I_1}$$

于是，由于 $a+b=l$，我们求出：

$$a=\frac{lI_2}{I_1+I_2} \qquad b=\frac{lI_1}{I_1+I_2} \qquad (g)$$

将方程（1.9）和（1.10）用于该系统的左边部分，我们得到：

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{I_1}{k_{t1}}}=2\pi\sqrt{\frac{32lI_1I_2}{\pi d^4G(I_1+I_2)}} \qquad (1.11)$$

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi d^4G(I_1+I_2)}{32lI_1I_2}} \qquad (1.12)$$

从这些公式，只要轴的尺寸、模量G和诸端处物体的质量惯性矩均为已知，扭转振动的周期和频率就可以求算出来。在我们现在的讨论中，轴的质量略去不计，它对振动周期的影响将在后面第1.4节中讨论。

从方程（g）可以看到，如果转动的物体之一与另一个相比具有很大的质量惯性矩，那么结点横截面可以取于较大的物体处，而且带有两个物体的系统（图1.9），简化成仅带有一个物体的系统（图1.8）。

例题 1　参见图1.9，假设在轴的两端两个均匀盘具有重量$W_1=1000$磅和$W_2=2000$磅，直径$D_1=50$英寸和$D_2=75$英寸，而轴的长度$l=120$英寸，轴的直径$d=4$英寸，剪切模量$G=12\times10^6$磅/英寸^2。试求算该系统的自由扭转振动的频率。如果沿 64 英寸长度，轴的直径从 4 英寸增大为 8 英寸，试问，此频率按什么比例增大？

解：应用方程（d）中所给的数据，我们求算出诸盘的质量惯性矩为：

$$I_1=\frac{(1000)(50)^2}{(8)(386)}=809\text{磅-英寸-秒}^2$$

*这是工程师们发现需要作扭转振动研究的最早问题之一。

地信网论坛 BBS.3500L.COM

$$I_2=\frac{(2000)(75)^2}{(8)(386)}=3640\text{磅-英寸-秒}^2$$

将这些值连同所给轴的数据代入方程（1.12），我们得到：

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi(256)(12\times10^6)(809+3640)}{(32)(120)(809)(3640)}}=9.80\text{周/秒}$$

当在轴的长度的64英寸上，直径从4英寸增大为8英寸时，4英寸直径的等效长度，可从方程（e）求出如下：

$$L_1=56+(64)\frac{(256)}{(4096)}=56+4=60\text{英寸}$$

因为此长度为原来120英寸的一半，且频率与长度的平方根成反比（见方程1.12），所以得出，由于加强的结果频率按比例$\sqrt{2:1}$增大。

例题 2 一飞轮由重量为W、平均半径为R的大边圈，借四根柔性棱柱形辐条与中轴连接，如图1.10 a所示。如果该中轴固定住，试求该边圈绕其通过0点的中心轴线自由旋转振动的周期。略去诸辐条的质量，并假设每一辐条的长度为R，弯曲刚度为B。

解：令边圈从其平衡位置产生如图所示的一个微小转角ϕ，每一辐条表现为在中轴处嵌固，而另一端受约束与边圈一起运动的梁。一根辐条的外端处，作用着剪力Q和弯矩M，如图1.10b所示。应用已知梁的刚度公式，我们得到：

$$Q=\frac{12B\Delta}{R^3}-\frac{6B\phi}{R^2} \qquad (h)$$

$$M=\frac{6B\Delta}{R^2}-\frac{4B\phi}{R} \qquad (i)$$

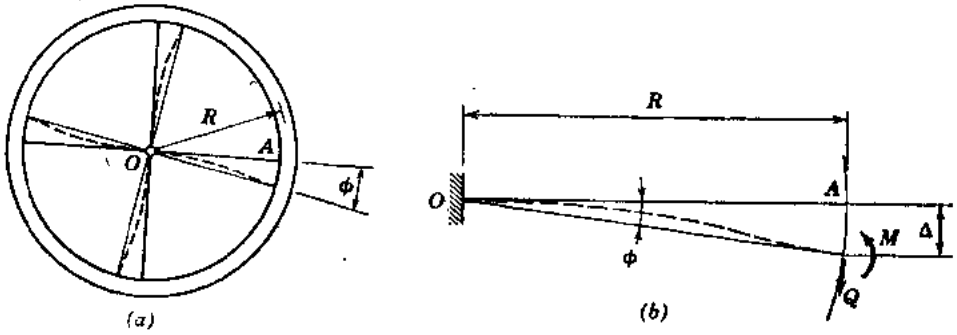


图 1.10

如果该边圈假设是刚性的，那么每一辐条外端处弹性线的切线必定是径向的。因而，剪力Q和弯矩M借几何条件$\Delta\approx R\phi$与转角联系起来。将此关系式代入方程（h）和（i），我们求出：

$$Q=\frac{6B\phi}{R^2} \qquad \text{和} \qquad M=\frac{2B\phi}{R} \qquad (j)$$

于是作用于边圈上的总力矩将为：

$$M_t=4QR-4M=\frac{16B\phi}{R} \qquad (k)$$

可以看到，在这种情况下，其旋转弹簧常数为：

$$k_r=\frac{M_t}{\phi}=\frac{16B}{R} \qquad (l)$$

地信网论坛 BBS.3500L.COM

将此k_t值代入方程（1.9），并考虑飞轮边圈的质量惯性矩$I \approx WR^2/g$，我们得到：

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{WR^3}{16gB}} \qquad (m)$$

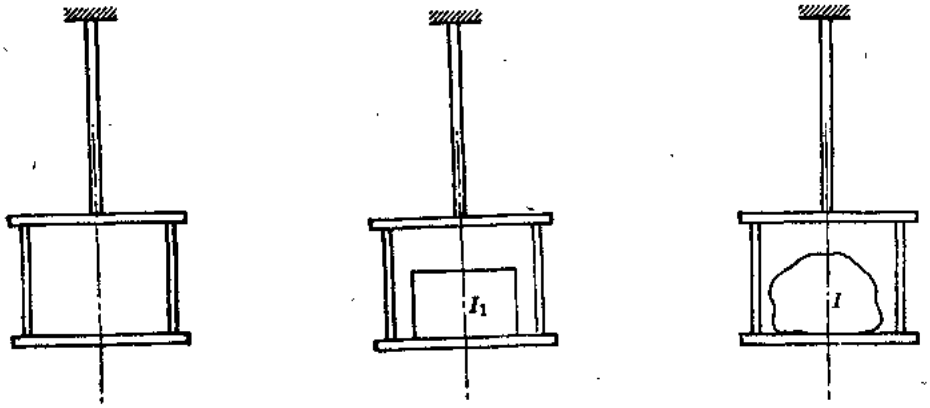
习 题 组 1.2

1.2—1 一根重量$W=4$磅、长度$a=2$英尺的水平杆AB，其中央点处悬挂于长度$l=2$英尺、直径$d=1/8$英寸的铅直钢丝上，试求其扭转振动的频率。假设该杆细长，但是是刚性的。略去钢丝的质量，并取其剪切模量为$G=12\times10^6$磅/英寸^2。

答：$f=0.781$周/秒。

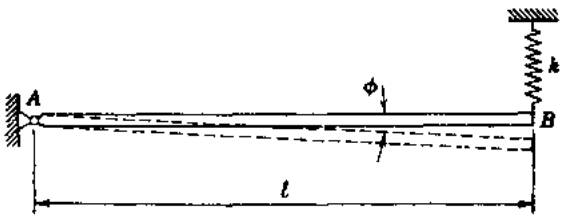
1.2—2 图中表示一种对于实验确定不规则形状物体的质量惯性矩极为有用的装置。它由两块平行板组成，该平行板的整个装配体如同附加于竖直轴上的刚体那样作用着，而且它的内部可以置放限于一定尺寸的任何物体。当它空着的时候（图a），此扭摆有一观察到的周期τ_0。当带着一个已知惯性矩为I_1的物体与它一起振动时（图b），该摆的周期为τ_1，而当带着未知惯性矩为I的物体时（图c），该摆以周期τ_2进行振动。试求出后一物体对旋转轴线（亦即该轴的轴线）的惯性矩I。

答：$I=I_1\dfrac{\tau_2^2-\tau_0^2}{\tau_1^2-\tau_0^2}$



习题 1.2—2

1.2—3 一根重量为W、长度为l的细长棱柱形杆AB，A处为一铰，B处借一常数为k的弹簧按水平状支承着，如图所示。试求该杆在竖直平面内有一个很小的角位移值ϕ时，其旋转振动的周期。略去弹簧的质量，并考虑杆是刚性的。



习题 1.2—3

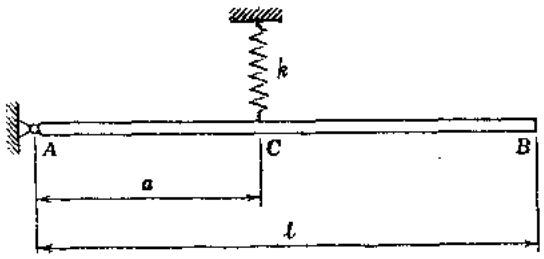
答：$\tau=2\pi\sqrt{\dfrac{W}{3kg}}$

1.2—4 一根重量为W、长度为l的细长刚性棱柱形杆AB，A处为铰接，借C处作用竖直弹簧支承成水平位置（见图）。试求算该杆在竖直平面内有一微小旋转振幅时的周期τ。

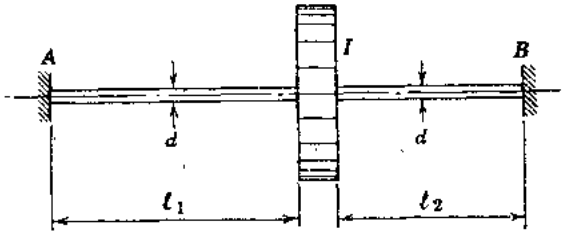
地信网论坛 BBS.35001.COM

假设弹簧常数为k，并略去质量不计。

答：　$\tau=2\pi\frac{l}{a}\sqrt{\frac{W}{3kg}}$



习题　1.2—4



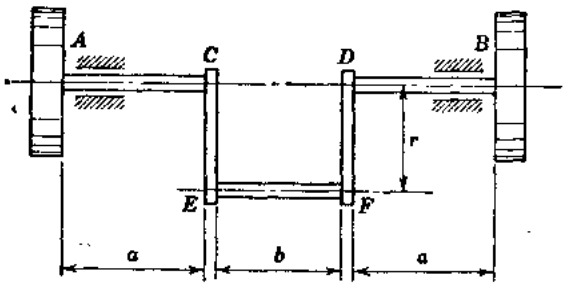
习题　1.2—5

1.2—5　试确定图中所示盘的扭转振动的频率。假设该轴的端点嵌固于A处和B处，轴的两部分具有相同的直径d，但长度不同，为l_1和l_2。该盘的惯性矩为I。

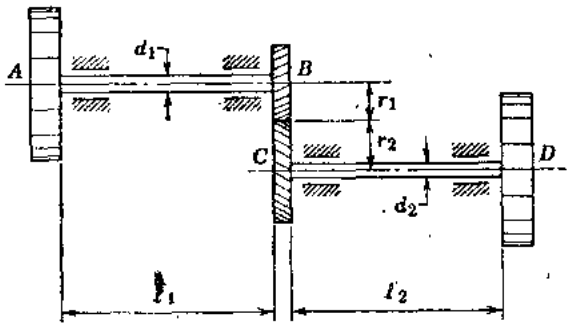
答：　$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi d^4G(l_1+l_2)}{32Il_1l_2}}$

1.2—6　试确定一根直形轴的等效长度L_1，该轴与图示曲柄轴的轴颈具有相同的扭转刚度C_1。曲柄连接板CE和DF的弯曲刚度为B。假设A和B处的轴承具有足够的空隙，允许曲柄轴扭转过程中C和D自由侧向位移。曲柄插杆EF的扭转刚度为C_2，摆幅半径为r。

答：　$L_1=2a+\frac{C_1}{C_2}b+2\frac{C_1}{B}r$



习题　1.2—6



习题　1.2—7

1.2—7　有两个平行轴AB和CD支承于轴承上，以齿轮衔接传动，如图所示。每一轴的外端带有一个很重的盘，该系统进行扭转振动。试求算在下列数据时的振动周期：$I_A=I_D=1000$磅-英寸-秒^2，$l_1=l_2=60$英寸，$d_1=d_2=3$英寸，$r_1/r_2=\frac{1}{2}$。略去两个齿轮和两根轴的惯量。假设每一轴的剪切模量$G=12\times10^6$磅/英寸^2。

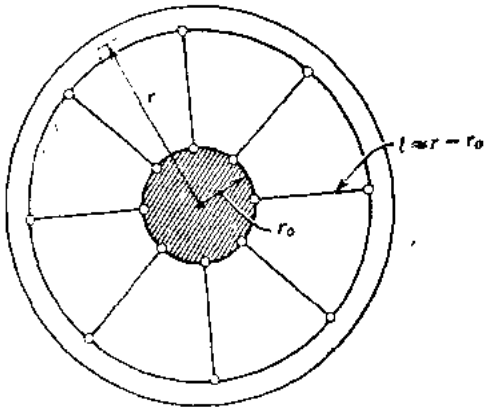
答：　$\tau=0.158$秒。

1.2—8　再参见习题1.2—7中的系统，试求出与盘A和D相联结、直径为d_1的单轴等效长度L_1的通式。

答：　$L_1=l_1+\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2l_2$

地信网论坛 BBS.3500L.COM

1.2—9 有一重量为W、平均半径为r的圆形钢边圈，借n根径向辐条附于一个固定住半径为r_0的中轴上，每一辐条受很高的初始拉力S_0（见图）。试确定该边圈旋转振动的周期。假设每一辐条中的拉力，在微小振幅时保持常数。诸辐条端点处均为铰接，不能经受弯曲。



习题 1.2—9

答： $\tau=2\pi\sqrt{\dfrac{Wr(r-r_0)}{ngS_0r_0}}$

1.2—10 在1.1节例题3中，支撑着的整个平台（见图1.6）上，均匀分布着重量W—38，600磅。试求算该系统绕通过其质量中心的竖直轴线的旋转振动周期。

答： $\tau=0.0724$秒。

1.3 能 量 法

对于能量无耗散的振动系统，应用能量守恒原理往往是有益的。采用这种方法，需要重导出一个自由度系统自由振动的运动方程，而且要建立在自由振动过程中最大动能和势能的等式。

为了在能量基础上进行分析，重新考虑图1.1a中的弹簧-质量系统。如像我们前面那样，略去弹簧的质量，那么该振动着的系统的动能为*：

$$KE=\frac{W}{g}\frac{\dot{x}^2}{2} \qquad (a)$$

在此情况下，该系统的势能由两部分组成：（a）由于重量W的位置低于作为基准面的平衡位置所引起重量W的势能，（b）因为位移x，弹簧中所储存的应变能。这两种能量中的第一种，简单地为**：

$$PE=-Wx \qquad (b)$$

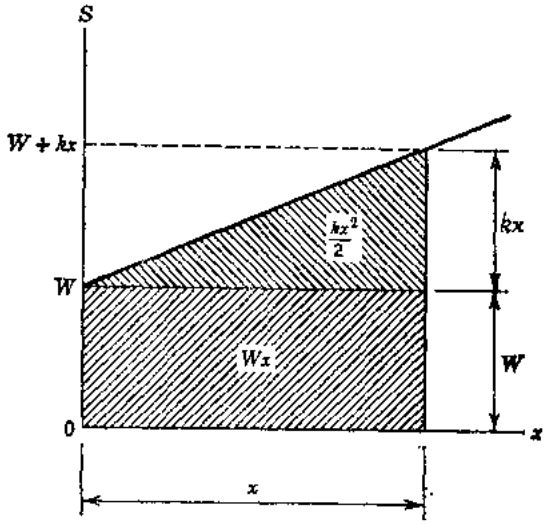


图 1.11

为了求算第二种能量，我们考虑图1.11中所示的图解，它是弹簧力S为位移x的函数的曲线图。在平衡位置处，弹簧中的力为W，而当位移为x时，该力为$W+kx$。因而，在产生位移x过程中，弹簧内所储存的应变能为：***

$$SE=Wx+\frac{kx^2}{2} \qquad (c)$$

*KE代表动能，为英语kinetic energy的缩写。——译注

**PE代表势能，为英语potential energy的缩写。——译注

***SE代表应变能，为英语strain energy的缩写。——译注

地信网论坛 BBS.3500I.COM

将能量（a）、（b）和（c）加起来，根据能量守恒定律看到它们之和必定为常数，我们得到：

$$\frac{W}{g}\frac{\dot{x}^2}{2}+\frac{kx^2}{2}=\text{常数} \qquad (d)$$

因为方程（d）中的表达式为常数，所以它对时间的变化率必定等于零。这样，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{W}{g}\frac{\dot{x}^2}{2}+\frac{kx^2}{2}\right)=0 \qquad (e)$$

求算方程（e）中的导数，并用 $\dot{x}$ 去除，得到前面第1.1节中的运动方程：

$$\frac{W}{g}\ddot{x}+kx=0 \qquad (f)$$

如果我们只关心求一振动系统的固有频率，那么完全不需要考虑运动方程。我们可以考虑图1.1a 中振动着的重量停止于其端点之一处，在该处的净势能为：

$$(PE)_{max}=\frac{kx^2_{max}}{2} \qquad (g)$$

而其动能为零。反之，当该重量以最大速度通过其平衡位置（在 $x=0$ 处）时，它的动能为：

$$(KE)_{max}=\frac{W}{g}\frac{\dot{x}_{max}}{2} \qquad (h)$$

而其势能为零。因为总能量保持为常数，所以最大动能必定等于最大势能。这样，

$$(KE)_{max}=(PE)_{max} \qquad (1.13)$$

这个简单的关系式，对于求算振动系统的固有频率或周期是有用的。对于图1.1a 中的系统，令表达式（g）与（h）相等，给出：

$$\frac{W}{g}\frac{\dot{x}_{max}}{2}=\frac{kx^2_{max}}{2} \qquad (i)$$

假设用方程（1.6）给出下列形式的谐和运动：

$$x=A\cos(pt-\alpha) \qquad \dot{x}=-Ap\sin(pt-\alpha)$$

我们看到：

$$\dot{x}_{max}=px_{max} \qquad (1.14)$$

将此 $\dot{x}_{max}$ 代入方程（i），我们得到：

$$p=\sqrt{\frac{kg}{W}}$$

振动周期为：

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{W}{kg}}$$

如同前面第1.1节中所得到的。如果不是图1.1a 中的简单系统，而是包括多个运动部分的较复杂系统，那么在计算周期或频率中应用方程（1.13）是特别有利的。这种情况在下面诸例题中说明。

例题1 一位移计，由封闭着重量W的盒子组成，该重量支承于弹簧 k_1 的上面，如图1.12所示。该重量相对于盒子运动时，使指针BOA动起来，这指针枢接于O 处，并借所示另一个弹簧k_2约束住。略去这两个弹簧的质量，试求算该系统的振动周期，假设它进行简谐运动。

解：令 $\dot{x}_m$为振动过程中重量W的最大速度。于是臂BOA 的相应角速度为 $\dot{x}_m/b$，如果

I 为此臂绕 O 点的质量惯性矩，那么该系统在其平衡状态时的总动能为：

$$(KE)_{max}=\frac{W}{g}\frac{\dot{x}_m^2}{2}+\frac{I}{b^2}\frac{\dot{x}_m^2}{2} \qquad (j)$$

当该系统在以重量 W 的竖直位移 x_m 定义的端点状态时，弹簧 k_2 将有一伸长量 cx_m/b，于是该系统的总势能为：

$$(PE)_{max}=\frac{1}{2}k_1x_m^2+\frac{1}{2}k_2\left(\frac{c}{b}\right)^2x_m^2 \qquad (k)$$

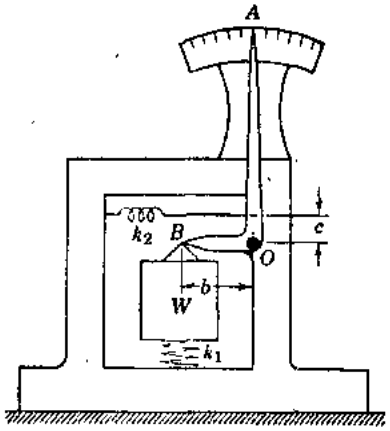


图 1.12

按照方程（1.13）令（j）式与（k）式相等，并从方程（1.14）应用简谐运动的关系式 $\dot{x}_m=px_m$，我们求出角频率为：

$$p=\sqrt{\frac{k_1+(c/b)^2k_2}{(W/g)+(I/b^2)}} \qquad (l)$$

于是振动的周期为（l）式去除 2π。

例题 2 有一个倒置着的摆，由一个位于长度为 l 的刚杆 OA 端点处重量为 W 的球组成，该刚杆铰接于 O 处，并借一柔性弹簧支承成竖直位置，如图1.13 a 所示。略去该弹簧和杆 OA 的质量，试确定摆在图平面内微小旋转振动时的稳定条件和角频率 p。

解：令 ϕ_m（见图1.13 b）为简谐运动的振幅。对此端点位置，弹簧具有近似为 $a\phi_m$ 的伸长量，而且重量 W 下降到平衡位置以下的下列距离处：

$$\Delta=l(1-\cos\phi_m)\approx\frac{1}{2}l\phi_m^2 \qquad (m)$$

因此，在端点位置处，该系统的势能近似地为：

$$(PE)_{max}=\frac{1}{2}ka^2\phi_m^2-\frac{1}{2}Wl\phi_m^2 \qquad (n)$$

在竖直位置处（图1.13 a），摆的角速度为 $\dot{\phi}_m$，动能简单地为 $\frac{1}{2}I\dot{\phi}_m^2$，其中 $I=Wl^2/g$ 代表重量 W 绕 O 点的惯性矩。这样，

$$(KE)_{max}=\frac{Wl^2}{2g}\dot{\phi}_m^2 \qquad (o)$$

令（n）式与（o）式相等，且从方程（1.14）应用关系式 $\dot{\phi}_m=p\phi_m$，我们求出角频率为：

$$p=\sqrt{\frac{g}{l}\left(\frac{ka^2}{Wl}-1\right)} \qquad (p)$$

从方程（p）看到，仅当：

$$ka^2>Wl \qquad (q)$$

我们得到实的 p 值。如果此条件不满足，那么摆的竖直平衡位置是不稳定的。

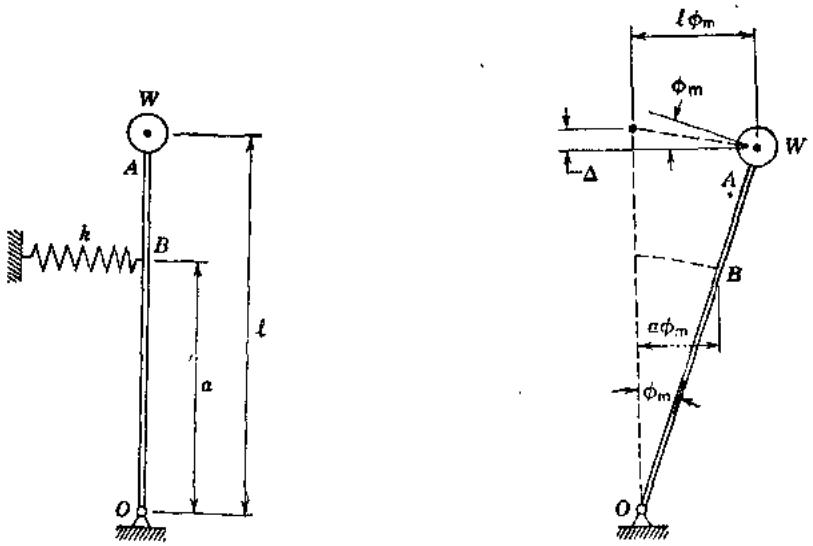


图 1.13

例题 3 有一个重量为W、半径为r的实心圆形柱体，在半径为a的圆柱形面上无滑动地滚动着，如图1.14所示。假设该滚动的圆柱体进行简谐运动，试求它绕平衡位置作微小位移幅度运动时的角频率p。

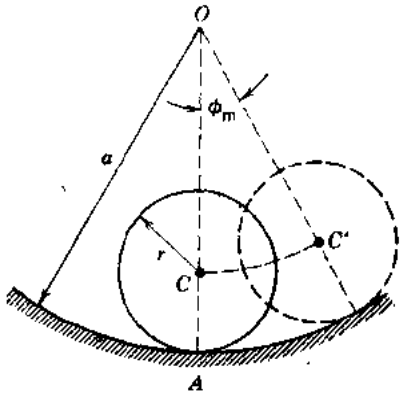


图 1.14

解：考虑圆柱位于借图1.14中角ϕ_m所定义的端点位置处。在此位置时，圆柱的重心已高出其平衡位置，上升了下列高度：

$$(a-r)(1-\cos\phi_m)\approx(a-r)\frac{\phi_m^2}{2} \qquad (r)$$

其势能为：

$$(PE)_{max}=\frac{1}{2}W(a-r)\phi_m^2 \qquad (s)$$

在中央位置时，接触点A为圆柱的瞬时旋转中心，由于无滑动这一条件，它绕此点的瞬时角速度为：

$$\dot{\theta}_m=\frac{a-r}{r}\dot{\phi}_m \qquad (t)$$

因此，动能为$\frac{1}{2}I_A\dot{\theta}_m^2$成为*：

$$(KE)_{max}=\frac{1}{2}\cdot\frac{W}{g}\cdot\frac{3r^2}{2}\cdot\frac{(a-r)^2}{r^2}\dot{\phi}_m^2 \qquad (u)$$

令（s）式与（u）式相等，并应用方程（1.14），我们求出角频率：

$$p=\sqrt{\frac{2g}{3(a-r)}} \qquad (v)$$

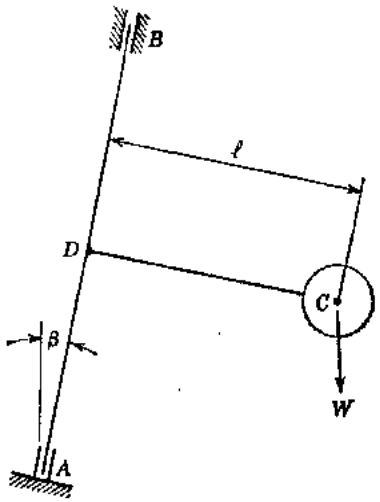
*从前面第1.2节中的（d）式知一圆柱绕其中心的质量惯性矩为$\frac{Wr^2}{2g}$，所以绕A点的I则为$I_A=\frac{Wr^2}{2g}+\frac{W}{g}r^2=\frac{3Wr^2}{2g}$。——译注

地信网论坛 BBS.3500L.COM

习 题 组 1.3

1.3—1 图中表示具有与竖直线成一微小β角的旋转轴的重摆。试确定仅考虑球的重量W时微小振动的频率，假设球的重量集中于其质心C处。略去诸轴承中的摩阻力。

答：$p=\sqrt{\beta g/l}$



习题 1.3—1

1.3—2 试按下列数据，求算图1.12中系统自由振动的固有频率：$W=5$磅，$k_1=2$磅/英寸，$k_2=10$磅/英寸，$b=4$英寸和$c=2$英寸。将臂BOA视作总重量为$W'=0.4$磅的均匀细长杆，并假设OA的长度为12英寸。

答：$f=2.72$周/秒。

1.3—3 当图1.13a中的系统，在竖直杆的顶端带有重量$W_1=2$磅时，所测得的频率为90周/分。当带有重量$W_2=4$磅时，测得的频率为45周/分。试问，恰使该系统成为不稳定平衡状态时顶端处的重量W_3是多少？略去杆的重量。

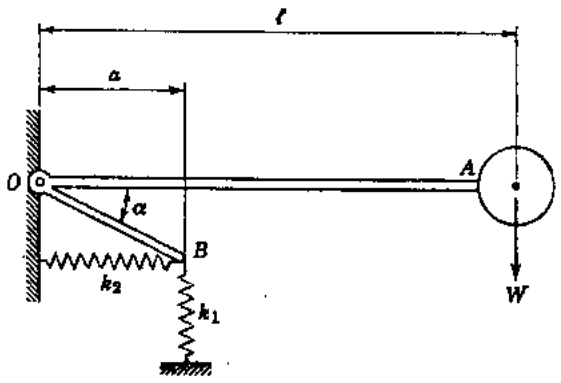
答：$W_3=6$磅。

1.3—4 如果图1.13a中的竖直杆，沿其长度均匀分布的总重量为Wl，试确定该系统的角频率p。

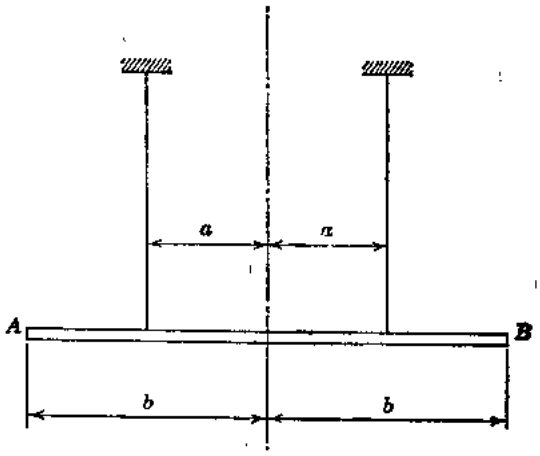
答：$p=\sqrt{\frac{g}{l}\left[\frac{3ka^2/l}{3W+wl}-\frac{3}{4}\left(\frac{4W+2wl}{3W+wl}\right)\right]}$

1.3—5 图中所示的仪器，是用来记录竖直振动的，图中带有重量W的刚性框架AOB，可以绕通过O垂直于图平面的轴线转动。试确定该重量在微小竖直振动时的角频率，略去框架和弹簧的质量。

答：$p=\sqrt{\frac{g[k_1a^2+k_2(a\tan\alpha)^2]}{Wl^2}}$。



习题 1.3—5



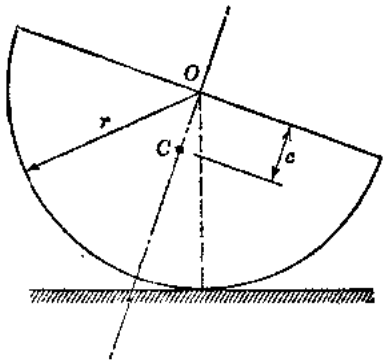
习题 1.3—6

1.3—6 有一重量为W的棱柱形杆AB，悬挂于两根相等的竖直钢丝上（见图），在水平平面内绕中心轴线进行微小的旋转振动。试确定这种振动的角频率。

地信网论坛 BBS.35001.COM

答：$p=\sqrt{\dfrac{3ga^2}{lb^2}}$

1.3—7 有一圆柱体的半圆部分，在一水平面上滚动而无滑动进行来回摆动（见图）。如果圆柱半径为 r，重心距为 c，绕形心轴线的回转半径的平方 $i^2=Ig/W$，试确定微小振动时的角频率。



习题 1.3—7

答：$p=\sqrt{\dfrac{cg}{i^2+(r-c)^2}}$

1.4 瑞 利 法

在前面考虑的所有情况下，其问题均借应用某些简化使之成为具有一个自由度系统振动的最简单情况。例如，图1.1中所示的装置，弹簧的质量与重量W的质量相比略去不计，图1.4中所示布置，梁的质量略去不计。还有在图1.8所示情况中，轴的质量惯性矩与盘相比略去不计。虽然这些简化在许多实际情况下是足够精确的，但是在一些专门问题中详细考虑这种近似简化的精确度却是必要的。为了确定这种简化对于振动频率的影响，现在将要讨论诺尔德·瑞利*提出的一种近似方法。在应用这种方法时，必须作有关振动过程中系统形态的某些假设。然后从系统的能量守恒考虑求得振动的频率。

我们取图 1.1 中所示并在第 1.1 节和第 1.3 节讨论了的情况作为一个应用瑞利法的简单例子。如果弹簧的质量与荷重W相比是非常小的，那么其振型不会显著地受到弹簧质量的影响。可以假设弹簧上任何距固定端距离为 c的一点处的位移x_c（见图1.1a）与无质量的弹簧的情况一样。这样，

$$x_c=\frac{cx}{l} \qquad (a)$$

式中 l 为处于平衡位置时弹簧的长度。

如果按上面所假设位移成线性变化，那么，该系统的势能则与无质量弹簧的情况相同，只需要重新考虑系统的动能。令W表示弹簧单位长度的重量。于是长度为 dc 的弹簧单元的质量为 wdc/g，其最大动能为：

$$\frac{wdc}{2g}\left(\frac{c\dot{x}_{max}}{l}\right)^2$$

弹簧的全部动能为：

$$\frac{w}{2g}\int_0^l\left(\frac{c\dot{x}_{max}}{l}\right)^2dc=\frac{\dot{x}^2_{max}}{2g}\left(\frac{wl}{3}\right) \qquad (b)$$

此量要与重量W的动能加起来，因此能量方程（1.13）成为：

$$\frac{\dot{x}^2_{max}}{2g}\left(W+\frac{wl}{3}\right)=\frac{kx^2_{max}}{2} \qquad (c)$$

将此式与前节中方程（i）相比较，我们可以得到结论，为了估算弹簧的质量对固有振

* J.W.S.Rayleigh, Theory of Sound, 2nd ed, Vol. 1, Macmillan, London, 1894, Sec.88(1945年该书是由Dover出版社重印于纽约)。

地信网论坛 BBS.3500I.COM

动周期的影响，只需要对重量W加上弹簧重量的三分之一。

在弹簧位移按线性变化的假设下得到的这个结论，即使在弹簧的重量与W的大小等级相同，也可以具有足够的精确度。例如：当$wl=0.5W$时，近似解的误差约为0.5%*。对于$wl=W$，其误差约为0.8%，对于$wl=2W$，误差约为3%。

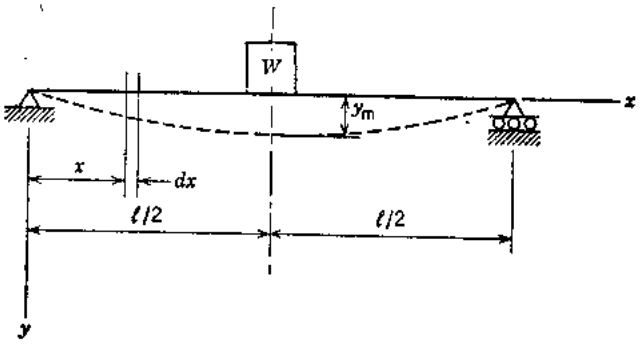


图 1.15

考虑一根均匀横截面的梁，在中央处承受重量为W的块体的振动情况作为第二个例子(见图1.15)。如果梁的重量wl与荷重W相比是很小的，那么假设振动过程中梁的挠度曲线与中央处有一集中荷载时的静力挠度曲线具有相同形状是足够精确的。因此，以y_m代表振动过程中梁中心处的最大位移，我们将位于距支承距离x处的任一单元的位移表达为：

$$y=y_m\left(\frac{3xl^2-4x^3}{l^3}\right) \qquad (d)$$

梁本身的最大动能则为：

$$2\int_0^{l/2}\frac{w}{2g}\left(\dot{y}_m\frac{3xl^2-4x^3}{l^3}\right)^2dx=\frac{17}{35}wl\,\frac{\dot{y}_m^2}{2g} \qquad (e)$$

这项振动着的梁的动能要与置于中央处集中荷载的能量$W\dot{y}_m^2/2g$相加起来，以估算梁的重量对振动周期的影响。在这种情况下，其振动周期将与中央处承受下列荷载的无质量梁相同：

$$W'=W+\frac{17}{35}wl$$

即使在极端的情况下，当$W=0$而等效重量$\left(\frac{17}{35}\right)wl$集中于梁的中央处，该近似方法的精确度对于实用来说也是足够精确的。

在该等效荷载作用于中央处时，梁的挠度为：

$$\delta_{11}=\frac{17}{35}wl\left(\frac{l^3}{48EI}\right)$$

将此值代入方程（1.3），我们发现其固有振动的周期为：

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{\delta_{11}}{g}}=0.632\sqrt{\frac{wl^4}{EIg}} \qquad (f)$$

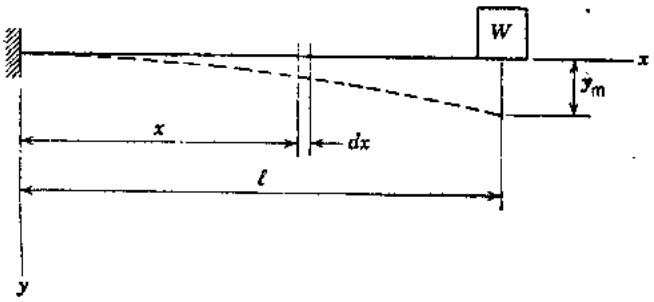


图 1.16

这种情况的精确解**为：

$$\tau=\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{wl^4}{EIg}}=0.637\sqrt{\frac{wl^4}{EIg}} \qquad (g)$$

---

* 此问题较详细的讨论给于第5.5节中。

** 见第5、10节。

地信网论坛 BBS.3500L.COM

可以看出，对于这种极端情况，其近似解的误差小于1%。

我们将考虑自由端处带有重量W的棱柱形悬臂梁作为第三个例题。假设在振动过程中，梁的挠度曲线的形状与在端点处平静地作用荷载所产生的相同。以y_m表示荷载W的最大位移，我们可以按下面计算梁的动能：

$$\int_0^l \frac{w}{2g}\left(\dot{y}_m \frac{3x^2l-x^3}{2l^3}\right)^2 dx = \frac{33}{140} wl \frac{\dot{y}_m^2}{2g} \qquad (h)$$

对于这种情况，振动的周期与端点处承受下列重量的无质量悬臂梁相同：

$$W' = W + \frac{33}{140} wl$$

即使在wl不太小的情况下，等效重量 $(33/140)wl$也可以应用。将该结果用于$W=0$的极端情况，我们得到：

$$\delta_{st} = \frac{33}{140} wl \left(\frac{l^3}{3EI}\right)$$

所得的振动周期则为：

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{\delta_{st}}{g}} = \frac{2\pi}{3.567}\sqrt{\frac{wl^4}{EIg}} \qquad (i)$$

同一情况的精确解*为：

$$\tau = \frac{2\pi}{3.515}\sqrt{\frac{wl^4}{EIg}} \qquad (j)$$

可以看到，近似解的误差约为1.5%。

在前面两种受载梁的横向振动**情况下，我们假设振动过程中，梁的形状和荷载静力作用所引起的挠度曲线相同。在无质量的梁的极端情况下，这是恰当的假定，但是，当梁具有某种分布荷载时，则仅为一近似值。一般来说，如果我们对梁的弹性曲线假设任一适当形状，那么，我们可以期望得到接近振动真实周期的近似值。自然，如果选得精确形状，那么我们就会得到精确的周期。为了说明这点，让我们重新考虑图1.15中无重量W时的简支梁。对于这种情况(见第5.10节)，已知在振动过程中其相对于平衡位置的弹性曲线的精确形状为：

$$y = y_m \sin\frac{\pi x}{l} \qquad (k)$$

如前面那样，方程（k）中符号y_m为梁中央处的最大挠度，y为位于距支承距离x处任一其它点的挠度。

处于平衡位置时整个梁的动能为：

$$(KE)_{max} = \int_0^l \frac{w}{2g}\left(\dot{y}_m \sin\frac{\pi x}{l}\right)^2 dx = \frac{wl}{2}\frac{\dot{y}_m^2}{2g} \qquad (l)$$

为了计算梁相对于平衡位置的最大势能，我们将应用下列挠曲应变能的表达式***：

$$(PE)_{max} = \frac{1}{2}\int_0^l EI\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx \qquad (m)$$

---

*见第5.11节。

**这里说的横向振动是指梁的上下振动。 ——译注

***见S.Timoshenko和D.H.Young合著Elements of Strength of Materials,第5版,Van Nostrand, Princeton, N.J., 1968, 第220页。

地信网论坛 BBS.3500L.COM

将（k）式的二次导数代入方程（m），并进行所示积分，我们得到：

$$(PE)_{max}=\frac{EI\pi^4}{4l^3}y_m^2 \qquad (n)$$

最后，按照方程（1.13），令（l）式与（n）式相等，并回想$\dot{y}_m=py_m$，我们求出：

$$p=\pi^2\sqrt{\frac{EIg}{wl^4}} \qquad (1.15)$$

相应的周期为$\tau=2\pi/p$，它得出如前面方程（g）所给的精确表达式。

如上所述，任何选择非精确形状的函数，将产生实际频率或周期的近似值。一个很好的振动梁形状函数的选择，是为其自身重量平静作用所引起的挠度曲线。为了说明这个概念，再次考虑一个未加载的简支梁的情况，并假设均布重量w平静地作用，产生下列挠曲形状：

$$y=y_m\frac{16}{5l^4}(x^4-2lx^3+l^3x) \qquad (o)$$

式中 $y_m=5wl^4/384EI$为中央处的挠度。

处于平衡位置时梁的动能为：

$$(KE)_{max}=\int_0^l\frac{w}{2g}\dot{y}^2dx=\frac{p^2}{2g}\int_0^l wy^2dx \qquad (1.16)$$

将（o）式代入方程（1.16），并积分，得到：

$$(KE)_{max}=0.252\frac{wl}{g}p^2y_m^2 \qquad (p)$$

梁相对于平衡位置的最大势能可借认为平静地作用分布重量所产生的外功等于梁中挠曲应变能这一事实来得到。这样，

$$(PE)_{max}=\int_0^l\frac{1}{2}wydx \qquad (1.17)$$

将方程（o）代入方程（1.17），并积分，得到：

$$(PE)_{max}=0.320wly_m=24.6\frac{EI}{l^3}y_m^2 \qquad (q)$$

令（p）式与（q）式相等，我们得到：

$$p=9.87\sqrt{\frac{EIg}{wl^4}} \qquad (r)$$

将此结果与借方程（1.15）所给的精确表达式比较，我们发现精确到三位有效数。

方程（1.16）和（1.17）可以代入能量方程（1.13），给出这类问题中p^2的一般表达式。这样：

$$p^2=\frac{g\int_0^l wydx}{\int_0^l wy^2dx} \qquad (1.18)$$

如果w沿梁的长度变化，那么方程（1.18）中诸积分内的w必须保留。然而，对于棱柱形梁，此项可以从该式中消掉。

必须注意，弹性梁代表具有无穷多个自由度的系统。它可如同一根弦一样进行各种振动。在应用瑞利法中，选定挠度曲线的一定形状，相当于引进了某些使该系统简化为具有一

地信网论坛 BBS.35001.COM

个自由度的附加约束。这种附加约束，只能增加系统的刚度，亦即增大振动的频率。因而，在上面所考虑的情况中，按瑞利法所得的频率的近似值，多少要高于它们的精确值*。

在扭转振动的情况下（见图1.8），可以应用相同的近似法求算轴的惯量对整个系统的频率的影响。令 i 表示轴的单位长度上的质量惯性矩。然后假设其振型与无质量轴的情况相同，距轴的固定端距离 c 处一横截面的转角为 $c\phi/l$，轴上一单元的最大动能将为：

$$\frac{i\,dc}{2}\left(\frac{c\dot{\phi}_{max}}{l}\right)^2.$$

整个轴的动能为：

$$\frac{i}{2}\int_0^l\left(\frac{c\dot{\phi}_{max}}{l}\right)^2 dc=\frac{\dot{\phi}_{max}^2}{2}\left(\frac{il}{3}\right) \qquad (s)$$

此动能必须与盘的动能加起来，以估算轴的质量对振动频率的影响。这样，其振动周期则与端点有一个质量惯性矩为 $I'=I+\frac{il}{3}$ 的物体的无质量轴相同。

没有附上物体的轴的扭转振动，可按类似于梁的横向振动的方式来研究。根据导出梁的方程（1.18）的相同步骤，我们建立轴的相似表达式。这样，

$$p^2=\frac{a\int_0^l i\phi\,dx}{\int_0^l i\phi^2\,dx} \qquad (1.19)$$

式中 ϕ 代表任一点处由于分布扭矩作用所引起的扭角，该分布扭矩，采取数值上等于单位轴长上 ai。符号 a 代表一角加速度（为了方便）可以取为1弧度/秒^2。

例题1 试确定，等截面梁 AB 支承荷重 W 的固有振动的频率（图1.17）：（a）假设梁的重量可以略去不计；（b）考虑梁的重量，并应用瑞利法。

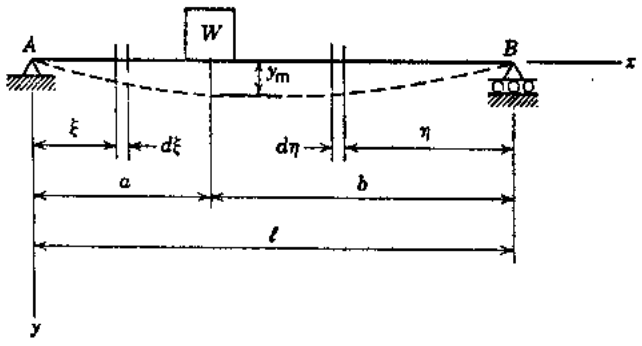


图 1.17

解：如果 a 和 b 为荷重距梁两端的距离，那么荷重下的静力挠度 $\delta_{st}=Wa^2b^2/3lEI$。弹簧常数取表达式 $k=3lEI/a^2b^2$，略去梁的质量，我们从下列方程求出振动的角频率：

$$p=\sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}=\sqrt{\frac{kg}{W}}=\sqrt{\frac{3lEIg}{Wa^2b^2}}$$

为了计入梁的质量，我们考虑荷重 W 静力作用下梁的挠度曲线。梁左部上任一点距支承 A 距离 ξ 处的挠度为：

$$y_1=\frac{Wb\xi}{6lEI}[a(l+b)-\xi^2]$$

荷重 W 右边任一点距支承 B 距离 η 处的挠度，我们得到为：

---

* 瑞利法的完整讨论可在下列书中找到：G.Temple和W.G.Bickley, Rayleigh's Principle, Oxford Iniv, Press, 1933；还见Collatz, Z. angew. Math. u. Mech, Vol. 19, 1939, p. 224.

地信网论坛 BBS.3500I.COM

$$y_2=\frac{Wa\eta}{6lEI}[b(l+a)-\eta^2]$$

应用瑞利法，并假设振动过程中，梁的左部任一点的最大速度，借下列方程给出：

$$\dot{y}_1=\dot{y}_m\ \frac{y_1}{\delta_{st}}=\dot{y}_m\ \frac{\xi}{2a^2b}[a(l+b)-\xi^2]$$

式中$\dot{y}_m$为荷重W的最大速度，我们求出该部分的最大动能为：

$$\frac{w\dot{y}_m^2}{2g}\int_0^a\left(\frac{y_1}{\delta_{st}}\right)^2 d\xi=\frac{w\dot{y}_m^2}{2g}\int_0^a\frac{\xi^2}{4a^4b^2}[a(l+b)-\xi^2]^2d\xi$$

$$=\dot{y}_m^2\ \frac{wa}{2g}\left[\frac{l^2}{3b^2}+\frac{23a^2}{105b^2}-\frac{8al}{15b^2}\right] \qquad (t)$$

按相同方式，考虑梁的右部，我们求出它的最大动能为：

$$\dot{y}_m^2\ \frac{wb}{2g}\left[\frac{(l+a)^2}{12a^2}+\frac{b^2}{28a^2}-\frac{b(l+a)}{10a^2}\right] \qquad (u)$$

因而，对此问题，能量方程（1.13）成为：

$$\frac{(W+\alpha wa+\beta wb)}{2g}\ \dot{y}_m^2=\frac{ky_m^2}{2}$$

式中α和β代表（t）式和（u）式括号中的量。应用关系式$\dot{y}_m=py_m$，我们得到下列振动角频率公式：

$$P=\sqrt{\frac{3lEIg}{(W+\alpha aw+\beta bw)a^2b^2}} \qquad (v)$$

例题 2　参见图1.16中棱柱形悬臂梁，并假设$W=0$，试借瑞利法求出自由横向振动*的近似周期。采取振动过程中梁的形状为梁的重量所引起的静力挠度曲线形状的假设。

解：对于梁上强度为w的均布荷重，在距固定端距离x处的静力挠度将为：

$$y=\frac{y_m}{3l^4}(x^4-4lx^3-6l^2x^2) \qquad (w)$$

其中$y_m=wl^4/8EI$为自由端处的挠度。将（w）式代入方程（1.16）和（1.17），并积分，我们求出：

$$(KE)_{max}=\frac{52wl}{405g}p^2y_m^2 \qquad (x)$$

和

$$(PE)_{max}=\frac{wl}{5}\ y_m=\frac{8EI}{5l^3}y_m^2 \qquad (y)$$

令（x）式与（y）式相等，得出：

$$p=3.530\sqrt{\frac{EIg}{wl^4}}$$

相应的振动周期为：

$$\tau=\frac{2\pi}{3.530}\sqrt{\frac{wl^4}{EIg}} \qquad (z)$$

这种情况下，基本周期的精确值借方程（j）得出，我们看到瑞利近似法的误差约为0.5%。

---

* 指上下振动。　——译注

地信网论坛 BBS.3500L.COM

习 题 组 1.4

1.4—1 参见图1.16中的悬臂梁，试用瑞利法求算$W=0$的极端情况下横向振动的周期，亦即求端点处没有荷重的均匀梁的横向振动周期。假设振动过程中梁的形状借下式给出：

$$y=y_m\left(1-\cos\frac{\pi x}{2l}\right)$$

式中y_m为自由端处的挠度。注意这种假设的形状函数给出的近似周期的误差约为4%。

答：$\tau=\frac{2\pi}{3.66}\sqrt{\frac{wl^4}{EIg}}$

1.4—2 如果图1.15中梁的两端为嵌固，而不是简支，试问在计算横向振动的固有周期中，应加到跨中处重量W上其总重量的分数是多少？假设振动过程中梁的形状相当于荷重W影响下的静力挠度曲线。

答：13/35。

1.4—3 试用瑞利法计算重量为wl、弯曲刚度为EI的均匀梁自由横向振动的周期，假定该梁如前一习题一样为嵌固端。假设振动过程中，该梁保持与余弦曲线的全波相同的形态。亦即，以梁的左端为原点，动力挠度曲线借下列方程来表达：

$$y=\frac{y_m}{2}\left(1-\cos\frac{2\pi x}{l}\right)$$

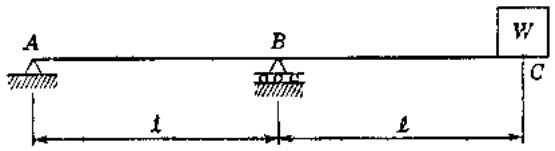
式中y_m为梁中央处的挠度。

答：$\tau=\frac{2\pi}{22.8}\sqrt{\frac{wl^4}{EIg}}$

1.4—4 对早先习题1.1—6中所给的框架，假设每一竖直柱的重量为20磅/英尺，并铰接于底端处。然后求算对柱的质量作了修正的框架横向振动的固有周期。采用前面习题1.1—6中所给的相同数据。

答：$\tau=1.69$秒。

1.4—5 试问，在求算图中梁ABC的横向振动的固有频率时，需要加到自由端重量W上该梁均布重量的部分是多少？假设由于C处荷重产生的静力挠度曲线。



习题 1.4—5

答：$239/1680\approx1/7$。

1.4—6 假设图1.1a中的弹簧（第1.1节中已讨论），在其自身单位长度下悬挂着，并假设荷重W已移去，试用瑞利法估算弹簧的基本振型的角频率。为此，用弹簧由于自身重量静止作用所产生的变位图式。

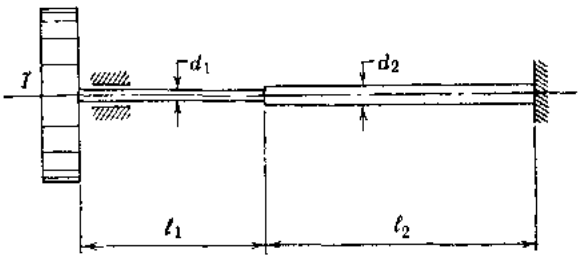
答：$p=1.58\sqrt{\frac{kg}{wl}}$

1.4—7 考虑图1.5a中所示，并早在第1.1节中所讨论，借两个串联的弹簧悬挂住的重量W。令符号l_1和w_1代表刚度为k_1的弹簧的长度和单位长度的重量，令l_2和w_2代表刚度为k_2的弹簧的诸相应项。假设振动系统的形态为由于静力作用的重量W所引起的形状，试计算由于弹簧重量需要的修正项。

地信网论坛 BBS.3S001.COM

答：$\dfrac{w_1 l_1 k_2^2 + 3w_2 l_2 k_2 (k_1 + k_2) + w_2 l_2 k_1^2}{3(k_1 + k_2)^2}$

1.4—8 试确定加于图中 I 以修正阶梯轴的质量惯性矩的表达式。令符号i_1和i_2代表轴的第1部分和第2部分单位长度的质量惯性矩，令k_{r1}和k_{r2}代表它们的旋转刚度。假设扭转的变化相应于作用在盘上的静力扭矩所引起的变化。



习题 1.4—8

答：$\dfrac{i_1 l_1 k_{r2}^2 + 3i_1 l_1 k_{r1} (k_{r1} + k_{r2}) + i_2 l_2 k_{r1}^2}{3(k_{r1} + k_{r2})^2}$

1.4—9 参见第1.2节中的习题1.2 - 9，试计算其图中飞轮边圈旋转振动的频率。对 n 根径向辐条的质量作修正，假设每一辐条的重量为W_s。

答：$f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{ngS_0 r_0}{(W + W_s n/3) r (r - r_0)}}$

1.4—10 参见第1.2节中的例题2，试求算图1.10a中对径向辐条的质量作了修正的飞轮旋转振动的频率。假设每一辐条沿其长度的均布质量为wr/g。

答：$f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{16gB}{[W + (116/105)wr]r^3}}$

1.5 具有多个质量的梁和轴

作为瑞利法的推广，让我们考虑图1.18所示具有多个质量的无重量梁的分析。这种类型的分析模型，可以与将梁的分布质量“集中”于沿其长度上几个点处的概念联系起来，以近似表示其动力特征。自然，一系列重量实际上可以考虑为结构上存在一个荷重组那样。

对每一情况，令W_1、W_2和W_3代表图1.18中梁上的重量，而以y_1、y_2和y_3代表其相应静力位移。在弯曲过程中储存于梁中的变形势能为：

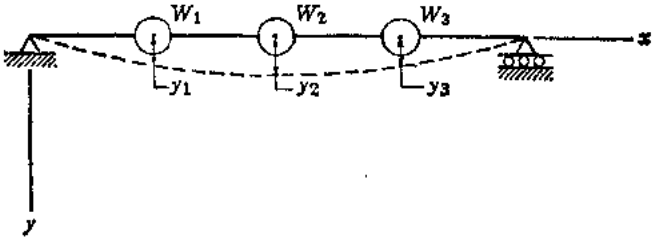


图 1.18

$$(PE)_{max} = \frac{1}{2} W_1 y_1 + \frac{1}{2} W_2 y_2 + \frac{1}{2} W_3 y_3 \qquad (a)$$

为了求算基本振型的角频率，我们可以写出该系统在其平衡位置时的动能为：

$$(KE)_{max} = \frac{1}{2g} W_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2g} W_2 \dot{y}_2^2 + \frac{1}{2g} W_3 \dot{y}_3^2 \qquad (b)$$

从第1.3节的方程（1.14），我们得到：

$$\dot{y}_1 = p y_1 \qquad \dot{y}_2 = p y_2 \qquad \dot{y}_3 = p y_3 \qquad (c)$$

这样，方程（b）可重新写为：

地信网论坛 BBS.3500L.COM

$$(KE)_{max}=\frac{p^2}{2g}(W_1y_1^2+W_2y_2^2+W_3y_3^2) \qquad (d)$$

当令方程（a）与方程（d）相等，则得到下列表达p^2的式子：

$$p^2=\frac{g(W_1y_1+W_2y_2+W_3y_3)}{(W_1y_1^2+W_2y_2^2+W_3y_3^2)} \qquad (e)$$

一般来说，对于梁上n个质量，表达式（e）成为：

$$p^2=\frac{g\sum_{i=1}^{n}W_iy_i}{\sum_{i=1}^{n}W_iy_i^2} \qquad (1.20)$$

它为前节中方程（1.18）的离散化形式。

方程（1.20）表明，为了估算具有几个质量的梁的振动频率或振动周期，只需要求重量W_1、W_2，……，W_n和静力挠度y_1、y_2，……，y_n。这后面诸量，借梁的挠度理论的方法可以很容易地得到。如果该梁是变截面的或考虑杆件自身重量的影响，则需要将梁分成几个部分，各部分的重量均应考虑为集中荷重。

附有几个刚体的轴的旋转振动，可以按类似于梁的形式来处理。为此，前节中方程（1.19）的离散化形式为：

$$p^2=\frac{\alpha\sum_{i=1}^{n}I_i\phi_i}{\sum_{i=1}^{n}I_i\phi_i^2} \qquad (1.21)$$

在此表达式中，符号ϕ_i代表第i个刚体由于静力扭矩组所产生的转动。对于第i个物体的这种扭矩取数值上等于αI_i，其中$\alpha=1$弧度/秒^2。

在导出方程（1.18）至（1.21）中的固有特性时，所用的势能和动能是根据该系统的平衡位置。诸静力荷重通常不是自身平衡的，而需要适当的约束。然而，无约束系统的振动，也可以借在已知零位移点或估算零位移点处，应用假想约束，以瑞利法来研究。还应注意当所施加的作用力与相应位移为相同指向时，方程（1.18）至（1.21）中所有分子项将为正。这通常是为保证所计算的频率为真实频率的上界的情况。

例题1 试用瑞利法计算图1.19所示具有两个质量的梁的基本振型的角频率。该梁的挠曲刚度为EI，其分布质量略去不计。为了简化假设$W_1=W_2=W$。

解：在此情况下，假设振动过程中，梁保持类似于图1.19中所示，按相反方向作用的力W_1和W_2所引起的静力挠度的形状。其相应的静力挠度求得为：

$$y_1=\frac{W_1l^3}{48EI}+\frac{W_2l^3}{32EI}=\frac{5Wl^3}{96EI}$$

$$y_2=\frac{W_1l^3}{32EI}+\frac{W_2l^3}{8EI}=\frac{5Wl^3}{32EI}$$

将这些值代入方程（1.20），我们得到：

$$p=\sqrt{\frac{192EIg}{25Wl^3}}$$

地信网论坛 BBS.3500L.COM

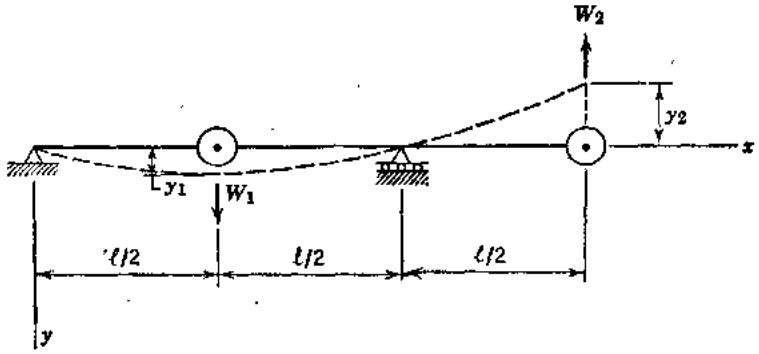


图 1.19

例题 2 图1.20 *a* 代表三层楼的简化模型，其中诸楼板假设为刚性者，诸柱假设是无质量的。试用瑞利法求出该建筑自由横向振动的近似的基本周期。为了简化，假设$W_1=W_2=W_3=W$，$l_1=l_2=l_3=l$，还假设每一柱的挠曲刚度为EI。

解：我们假设在横向振动过程中，该建筑保持类似于借楼板重量W_1、W_2和W_3为作用于诸楼板处的水平力所产生的形式。为了求算诸楼板的横向挠度，我们首先考虑如图1.20 *b* 中所示，由于第 *i* 层剪力H_i作用，第 *i* 层楼顶面相对于其底面楼板产生的位移δ_i。由于每一柱有一个大小为$H_i/2$的剪力，并在其中间长度处有一个拐点，所以我们看到：

$$\delta_i=2\left[\frac{(H_i/2)(l/2)^3}{3EI}\right]=\frac{H_i l^3}{24EI} \qquad (f)$$

现在注意$H_1=W_1=W$，$H_2=W_1+W_2=2W$和$H_3=W_1+W_2+W_3=3W$，我们从方程（*f*）得到：

$$\delta_1=\frac{Wl^3}{24EI} \qquad \delta_2=\frac{2Wl^3}{24EI} \qquad \delta_3=\frac{3Wl^3}{24EI}$$

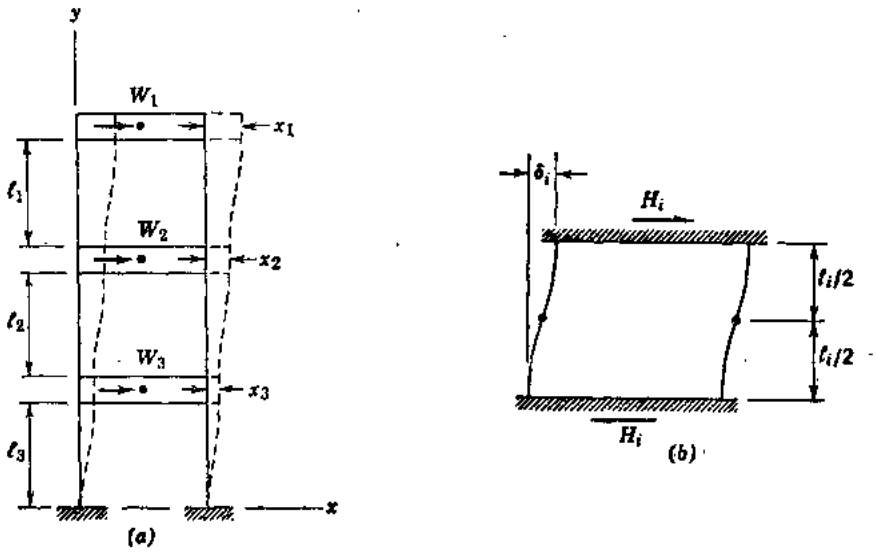


图 1.20

图1.20 *a* 中的静力挠度成为：

$$x_1=\delta_3+\delta_2+\delta_1=\frac{6Wl^3}{24EI}$$

$$x_2=\delta_3+\delta_2=\frac{5Wl^3}{24EI}$$

地信网论坛 BBS.3500L.COM

$$x_3=\delta_3=\frac{3Wl^3}{24EI}$$

将这些值代入方程（1.20），连同$W_1=W_2=W_3=W$，我们得到：

$$p^2=\frac{24EIg}{5Wl^3}$$

和

$$\tau=\frac{2\pi}{p}=2\pi\sqrt{\frac{5Wl^3}{24EIg}}$$

例题 3 假定第二个等于W的重量，加于第1.1节中早先所讨论的图1.5 a 中弹簧k_1和k_2的接合点处，试借瑞利法近似地确定该系统基本振型的角频率。

解：由于两个静止作用的重量，接合点移动$2W/k_1$值，而端点移动$2W/k_1+W/k_1$值，如果我们对这些位移采用一个为k_1k_2的共同分母，那么第一个值成为$W(2k_2)/k_1k_2$，第二个值成为$W(2k_2+k_1)/k_1k_2$。将这些项代入方程(1.20) 得出：

$$p^2=\frac{k_1k_2g[(2k_2)+(2k_2+k_1)]}{W[(2k_2)^2+(2k_2+k_1)^2]}$$

因而，

$$p=\sqrt{\frac{k_1k_2g(k_1+4k_2)}{W(k_1^2+4k_1k_2+8k_2^2)}}$$

例题 4 假想一个质量惯性矩为$2I$的第二个盘，加于图1.8内轴的长度中间处（见第1.2节）*。试用瑞利法估算旋转振动基本振型的角频率。

解：为了得到旋转位移，我们在该轴长度中间处作用数值上等于$2I\alpha$的扭矩，在端点处作用数值上等于$I\alpha$的扭矩。这些扭矩在长度中间处产生旋转位移$3I\alpha/2k_t$，在端点处产生旋转位移$3I\alpha/2k_t+I\alpha/2k_t=2I\alpha/k_t$（这里$k_t$表示整个轴的旋转刚度）。将这些项代入方程（1.21），产生，

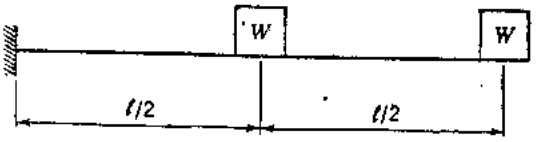
$$p^2=\frac{\alpha[2I(3I\alpha/2k_t)+I(2I\alpha/k_t)]}{2I(3I\alpha/2k_t)^2+I(2I\alpha/k_t)^2}$$

因此，

$$p=\sqrt{\frac{10k_t}{17I}}=0.767\sqrt{\frac{k_t}{I}}$$

习 题 组 1.5

1.5—1 一根均匀弯曲刚度的悬臂梁，带有两个相等的荷重W，如图所示。试用瑞利法计算自由横向振动的基本周期。其数据如下面所给：$W=1000$磅，$l=96$英寸，$EI=450\times10^6$磅-(英寸)^2。



习题 1.5—1

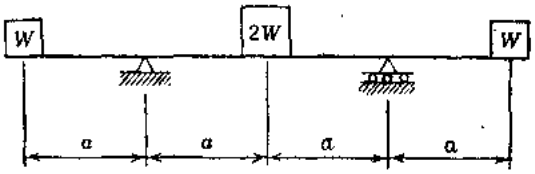
答：$\tau=0.271$秒。

1.5—2 一根具有挑臂的简支梁，带有荷重W、$2W$及W，如图所示。该梁的均匀弯曲刚度$EI=5\times10^6$磅-(英寸)^2，其分布质量与诸荷重相比非常小。试用瑞利法计算自由横向

* 即$l/2$处。 ——译注

振动的基本周期。假设$W=50$磅，$a=36$英寸。

答：$\tau=0.269$秒。



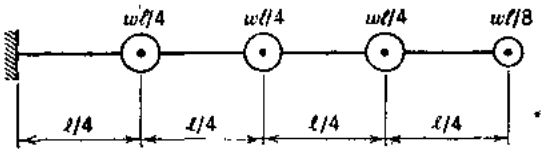
习题 1.5—2

1.5—3 假设图1.18中的重量W_1、W_2和W_3代表一棱柱形梁集中于跨中处和四分之一点处的分布重量。令每一个重量的大小为$wl/4$，试借瑞利法计算基本周期的近似值。

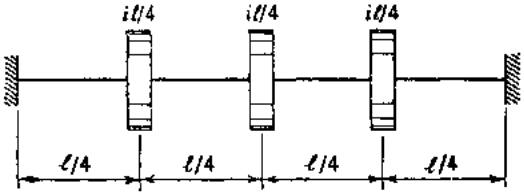
答：$$\tau=0.637\sqrt{\frac{wl^4}{EIg}}$$

1.5—4 图中表示一根均匀截面悬臂梁的集中质量分析模型。试用瑞利法估算基本周期。

答：$$\tau=1.84\sqrt{\frac{wl^4}{EIg}}$$



习题 1.5—4



习题 1.5—5

1.5—5 图中表示一根为固定端的均匀轴的集中惯量分析模型。试估算它旋转振动的第一振型的角频率。

答：$$p=3.35\sqrt{\frac{GJ}{il^2}}$$

1.5—6 考虑习题1.5—4中的系统，代表横截面积为A的棱柱形杆轴向振动的集中质量分析模型。试用瑞利法，估算它轴向振动的第一振型的角频率*。

答：$$p=1.57\sqrt{\frac{EAg}{wl^2}}$$

1.6 强迫振动：稳态

在第1.1节中，我们研究了弹簧-质量系统的自由振动，并看到它的运动取决于初始条件和它的物理特性k和W/g，这些特性确定它的固有频率。如果该系统受到别的影响，例如随时间变化的力或指定的支承运动，那么动力反应变得较复杂。在许多实际情况中，我们碰到作用于质量上的周期干扰力，对于这种情况的系统的反应称为强迫振动。

作为强迫振动的例子，考虑弹簧悬挂着重量为W的马达(图1.21)，该马达被限于仅在竖直方向移动。按第1.1节所讨论，该系统的固有角频率为$p=\sqrt{kg/W}$。现在假定马达以一等角速率ω开动着，还假定它的转子稍有不平衡，如图1.21中借A处一个偏心质量来表示。这种不平衡将产生一个旋转离心力P，此力也将使该系统产生强迫振动。除重力和弹簧力

* 此习题提到轴向振动，疑有误。——译注

外，我们现在要考虑旋转的力向量的竖直分量 $P\sin\omega t$。因而，运动方程成为：

$$\frac{W}{g}\ddot{x}=W-(W+kx)+P\sin\omega t \qquad (a)$$

其中 $P\sin\omega t$ 一项称为谐和施力函数。将下面诸符号引进方程（a）：

$$p^2=\frac{kg}{W}$$

和

$$q=\frac{Pg}{W} \qquad (b)$$

我们得到：

$$\ddot{x}+p^2x=q\sin\omega t \qquad (1.22)$$

借假设 x 与 $\sin\omega t$ 成比例，得到该方程的特解，亦即取：

$$x=C_3\sin\omega t \qquad (c)$$

这里 C_3 为一常数，它的大小必须选择使之满足方程（1.22）。将（c）代入该方程，我们求出：

$$C_3=\frac{q}{p^2-\omega^2}$$

这样，所需要求的特解为：

$$x=\frac{q\sin\omega t}{p^2-\omega^2} \qquad (d)$$

将此特解加到齐次方程（1.1）的通解（方程1.2）上，我们得到：

$$x=C_1\cos pt+C_2\sin pt+\frac{q\sin\omega t}{p^2-\omega^2} \qquad (1.23)$$

此式包含两个积分常数，并代表方程（1.22）的全解。

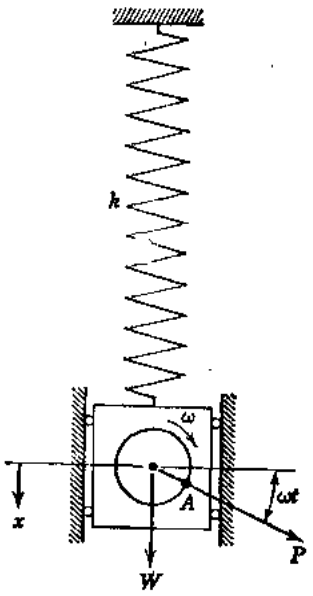


图 1.21

方程（1.23）中的前两项代表前面所讨论的自由振动，第三项取决于干扰力，它代表该系统的强迫振动。可以看到，这后一种振动与干扰力具有相同的周期 $T=2\pi/\omega$。将符号（b）用于方程（d）中，并且不去管自由振动*，我们得到借下式定义的所谓稳态强迫振动：

$$x=\left(\frac{P}{k}\sin\omega t\right)\left(\frac{1}{1-\omega^2/p^2}\right) \qquad (1.24)$$

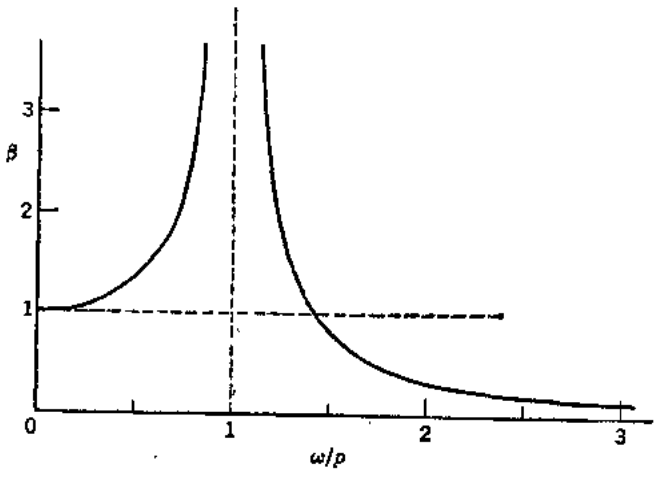


图 1.22

因子 $(P/k)\sin\omega t$ 为干扰力 $P\sin\omega t$ 静力作用下所产生的变位，因子 $1/(1-\omega^2/p^2)$ 考虑此

* 自由振动连同强迫振动一起的影响将在下一节中讨论。 ——译注

地信网论坛 BBS.3500L.COM

力的动力作用。这后一量的绝对值通常称为放大因子：

$$\beta=\left|\frac{1}{1-\omega^2/p^2}\right| \qquad (e)$$

我们看到β取决于频率比ω/p，该比值借系统自由振动的固有频率，去除干扰力的外加频率来得到。图1.22中，将放大因子β的值对频率比点绘了出来。可以看到，对于该比ω/p为很小值时，亦即干扰力的频率与自由振动的频率相比为很小的情况时，那么放大因子近似地为1，其挠度大致与力$P\sin\omega t$静力作用的情况相同。

当该比ω/p接近于1时，放大因子和强迫振动的振幅迅速增大，对于$\omega=p$时亦即干扰力的频率与该系统的自由振动频率完全一致时，该因子和该振幅成为无穷大。这是为共振的条件。强迫振动的振幅得到无穷大值，表示如果脉动力在原时间和原方向作用于振动系统上，只要没有能量耗散，那么振幅无限地增大。在实际问题中，由于阻尼，我们总是会有能量耗散的，能量耗散对强迫振动振幅的影响将在后面讨论（见第1.9节）。

当干扰力的频率增大超过自由振动的频率时，放大因子又成为有限者。它的绝对值随着ω/p比的增大而减小，当此比成为非常大时则接近于零。这样，当一高频率的脉动力作用于物体上时，它产生非常小的振幅的振动，在许多情况下，该物体可以考虑是保持不动的*。

考虑$1/(1-\omega^2/p^2)$式的正负号，可以看到在$\omega<p$的所有情况下，此式为正，而且振动着的质量的位移与干扰力沿相同方向。反之，在$\omega>p$的所有情况下，该式为负.质量的位移与该力成相反方向。在第一种情况下，其振动说成与激发**同相，而在后一种情况下，其反应说成不同相。

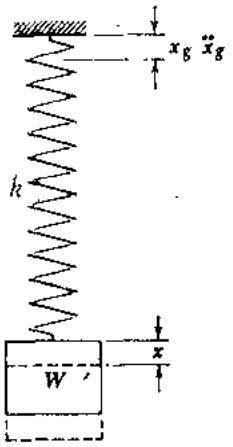


图 1.23

在上面讨论中，干扰力采取与$\sin\omega t$成比例，如果采取与$\cos\omega t$成比例，则得到相同的结论。另外，借周期支承运动（或地面运动）也可能产生强迫振动。例如，考虑图1.23中弹簧悬挂的重量，假定弹簧的上端给一顺竖直方向的简谐运动：

$$x_g=d\sin\omega t \qquad (f)$$

如果我们从$x_g=0$时的平衡位置度量所悬挂重量W的位移x，那么在任一瞬间t处弹簧的伸长量为$x-x_g+\delta_{st}$，弹簧中相应的力则为$k(x-x_g)+W$。这样，所悬挂重量的运动方程成为：

$$\frac{W}{g}\ddot{x}=W-\left[W+k(x-x_g)\right] \qquad (g)$$

将x_g的（f）式代进去，并应用下列符号：

$$p^2=\frac{kg}{W} \qquad 和 \qquad q_g=\frac{kgd}{W} \qquad (h)$$

我们得到：

$$\ddot{x}+p^2x=q_g\sin\omega t \qquad (1.25)$$

* 即可以考虑为不会引起强迫振动。——译注

** 这里的“激发”就是指干扰力。——译注

地信网论坛 BBS.3500L.COM

它在数学上与前面所得的方程（1.22）相同。因而，可以得出结论：对弹簧的上端给一简谐运动$d\sin\omega t$相当于直接作用一干扰力$(kd)\sin\omega t$，所有前面有关方程（1.22）的解的结论也适用于这种情况。最后我们得出结论：我们又将得到，借下式定义的稳态强迫振动：

$$x = (d\sin\omega t)\left(\frac{1}{1-\omega^2/p^2}\right) \tag{1.26}$$

方程（1.26）中$d\sin\omega t$项，可以考虑为代表当支承位移很缓慢地（或静止地）发生时质量的运动，因子$1/(1-\omega^2/p^2)$考虑支承运动的频率非零这一事实。因而，对于任何这样的问题，为了计算该系统的稳态反应，我们只需要考虑由于支承的静力位移所引起质量的位移。

有些情况下，讨论地面加速度要比讨论地面位移较为方便，因为有一种称为加速度计的度量仪器已用来得出有关地面运动的资料。例如，地震的地面运动，就是用典型地测量和记录地面加速度的三个正交分量（南—北、东—西和竖直方向的分量）来表达。所以，我们将以给定的周期地面加速度，代替周期位移重新研究地面运动问题。

现在假设图1.23中，弹簧的上端承受下列谐和加速度的条件：

$$\ddot{x}_g = a\sin\omega t \tag{i}$$

对此问题，方程（g）的重新排列形式为：

$$\frac{W}{g}\ddot{x} + k(x - x_g) = 0 \tag{j}$$

为了将（i）式用于方程（j），需要下列坐标变换：

$$x^* = x - x_g \qquad \ddot{x}^* = \ddot{x} - \ddot{x}_g \tag{k}$$

式中符号x^*代表质量对地面的相对位移。从（k）式将$x - x_g$和$\ddot{x}$代入方程（j），并重新排列，我们得到：

$$\frac{W}{g}\ddot{x}^* + kx^* = -\frac{W}{g}\ddot{x}_g \tag{l}$$

应用下列符号：

$$p^2 = \frac{kg}{W} \qquad \text{和} \qquad q_g^* = -a \tag{m}$$

并将方程（i）代入方程（l），我们求出：

$$\ddot{x}^* + p^2 x^* = q_g^* \sin\omega t \tag{1.27}$$

它在数学上与方程（1.22）和（1.25）相同。

方程（1.27）的解，仿照前面诸情况所熟悉的形式，我们可以得出结论：按相对坐标，系统的反应〔如用（k）式所定义〕与用等于$-(W/g)a\sin\omega t$的干扰力的作用所得相同。在这种情况下，系统相对于运动支承的稳态强迫振动，借下式给出：

$$x^* = \left(-\frac{Wa}{kg}\sin\omega t\right)\left(\frac{1}{1-\omega^2/p^2}\right) \tag{1.28}$$

除非可以得到初始地面位移和速度，否则质量的绝对运动是不可能计算出的。然而，这一事实通常是不重要的，因为相对运动确定结构中的力（在此情况下结构为一简单弹簧）。

例题1 试确定图1.8中的轴，由于脉动扭矩$M\sin\omega t$所产生的强迫扭转振动的振幅。假设同一轴的自由扭转振动的频率f =10周/秒，施力频率$\omega = 10\pi$弧度/秒，由于扭矩M(如果静止地作用于轴上）所产生的扭转角等于0.01弧度。

地信网论坛 BBS.3500L.COM

解：在这种情况下，运动方程（见第1.2节）为：

$$\ddot{\phi}+p^2\phi=\frac{M}{I}\sin\omega t \qquad (n)$$

式中ϕ为扭角，$p^2=k_t/I$。强迫振动为：

$$\phi=\frac{M}{I(p^2-\omega^2)}\sin\omega t=\frac{M}{k_t(1-\omega^2/p^2)}\sin\omega t \qquad (o)$$

注意，$M/k_t=0.01$和$p=2\pi f=20\pi$，我们得到所需要求的振幅：

$$\phi_m=\frac{0.01}{\left(1-\frac{1}{4}\right)}=0.0133\text{弧度}$$

例题 2 一个车轮以一水平等速度v沿一波形面上滚动，如图1.24所示。试确定借一弹簧附于车轮轴上的荷重W强迫竖直振动的振幅。假设在荷重W作用下弹簧的静力位移为$\delta_{st}=3.86$英寸，$v=60$英尺/秒，波形面借方程$y=d\sin\pi x/l$来定义，其中$d=1$英寸，$l=36$英寸。

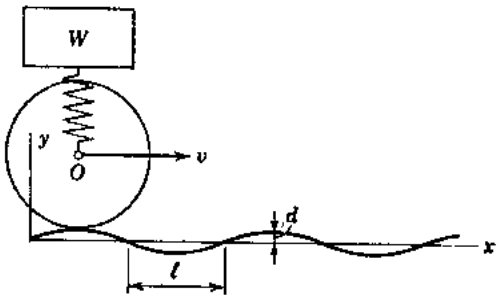


图 1.24

解：考虑荷重W在弹簧上的竖直振动，我们发现这种振动的角频率的平方为$p^2=g/\delta_{st}=100$秒$^{-2}$。由于波形面，滚动车轮的中心O成竖直振动。

假设在初始时刻（$t=0$），车轮的接触点位于$x=0$处，并令$x=vt$，我们以方程$y=d\sin\pi vt/l$来确定这种竖直振动。现在用方程（1.26）代入$d=1$英寸，$\omega=\pi v/l=20\pi$秒$^{-1}$和$p^2=100$秒$^{-2}$，得到荷重W的强迫振动，这种强迫振动的振幅为$1/(4\pi^2-1)=0.026$英寸。在所给速率$v=60$英尺/秒时，车轮的竖直振动仅传给荷重W很小部分。如果我们取轮的速率v为其原大小的$\frac{1}{4}$，我们得到$\omega=5\pi$，强迫振动的振幅成为$1/(\pi^2/4-1)=0.68$英寸。借进一步降低速度v，最后我们进入共振条件（当$\frac{\pi v}{l}=p$），在此条件时，荷重W将产生强烈的振动（在此讨论中略去了车轮的质量）。

例题 3 参见第1.1节例题3中支撑着的平台，并假设地面沿x方向产生谐和加速度〔如方程（i）所给〕。试确定该平台强迫振动的稳态振幅，如果$a=200$英寸/秒^{2}和$\omega=40$弧度/秒。

解：方程（1.28）给出系统相对于地面的稳态反应，这个运动的振幅为：

$$x_{max}=\frac{Wa}{kg}\left(\frac{1}{1-\omega^2/p^2}\right) \qquad (p)$$

从所参考的例题，我们得到$W=38,600$磅，$k=250,000$磅/英寸。所以，

$$p^2=\frac{kg}{W}=\frac{(250,000)(386)}{(38,600)}=2500\text{秒}^{-2}$$

按相对坐标，等效静止作用力的振幅为：

$$\frac{Wa}{g}=\frac{(38,600)(200)}{(386)}=20,000\text{磅}$$

在这种情况下，放大因子为：

地信网论坛 BBS.3500L.COM

$$\beta=\frac{1}{1-\omega^2/p^2}=\frac{1}{1-(1600/2500)}=2.78$$

最后，从方程（p）得到按相对坐标的强迫振动振幅为：

$$x^*_{max}=\frac{(20,000)(2.78)}{(250,000)}=0.222\text{英寸}$$

张拉钢丝中，由于此位移量所引起的应力变化为：

$$\frac{\sqrt{2}\,kx^*_{max}}{4A}=\frac{\sqrt{2}\,(250,000)(0.222)}{(4)(1/\sqrt{2})}=27,750\text{磅/英寸}^2$$

例题 4　假定竖直脉动力$P\sin\omega t$，直接作用于图1.1a中弹簧上距支承距离C的位置处。试问，重量W将产生什么样的稳态反应？

解：　考虑弹簧由两段组成，如图1.5a所示。长度为c的区段具有以k_1定义的弹簧常数，另一区段具有以k_2表示的弹簧常数。从第1.1节中的例题2，我们得到下列关系式：

$$k=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}\qquad(g)$$

在任何时刻，通过无质量弹簧传给质量的力的值为：

$$F(t)=\frac{k_2}{k_1+k_2}P\sin\omega t=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}\frac{P\sin\omega t}{k_1}\qquad(r)$$

方程（r）中第二个因子，代表当施力函数静止作用时，该质量的位移。引进下列符号：

$$\Delta_{st}=\frac{P}{k_1}\qquad(s)$$

我们可将方程（r）写为：

$$F(t)=k\Delta_{st}\sin\omega t\qquad(t)$$

此等效施力函数可以用来代替方程（1.24）中的$P\sin\omega t$，得出稳态反应：

$$x=(\Delta_{st}\sin\omega t)\left(\frac{1}{1-\omega^2/p^2}\right)\qquad(u)$$

从此结果可以作出结论，仅需要考虑由于施力函数所产生的质量静力位移，而不管施力函数的作用点。

习　题　组　1.6

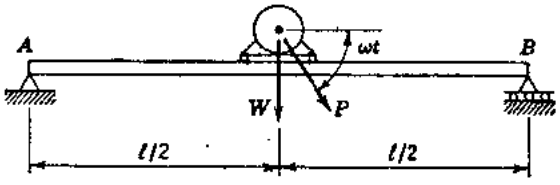
1.6—1　如果图1.23中弹簧上端，有振幅$d=1$英寸、角频率$\omega=180$秒$^{-1}$的竖直谐和运动，试求出所悬挂荷重W强迫振动的振幅。假设此重量的静止位移$\delta_{st}=3$英寸。

答：0.004英寸。

1.6—2　图1.21中所悬挂的重量W，有一静力位移$\delta_{st}=1$英寸。试问，由于干扰力$P\cos\omega t$所产生的强迫振动的振幅是多少？假设$P=2$磅，$\omega=10\pi$秒$^{-1}$，$W=10$磅。

答：0.128英寸。

1.6—3　一根净跨$l=12$英尺、$I=57.6$（英寸）^{4}的8英寸标准钢工字梁，简支于它的端点，如图中所示。跨中放了一台重量$W=1000$磅以转速1800转/分开动着的马达。由于失衡，该马达产生$P=500$磅的旋转离心力。试问，将产生的稳态强迫振动的振幅是多大？略去梁的质量。

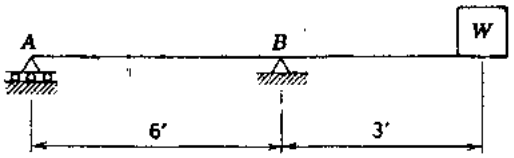


习题　1.6—3

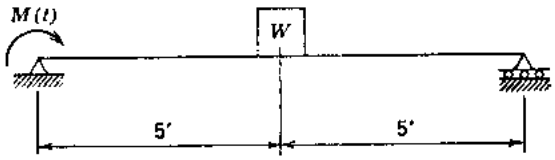
答：0.0077英寸。

1.6—4　一根横截面惯性矩 $I=4$(英寸)^4 的钢梁，如图示那样支承着，其自由端处承受着$W=600$磅重量。如果支承A，借$y_A=d\sin\omega t$式定义产生微小的竖直振动，试问，重量W的稳态强迫振动的振幅是多大？这里$d=0.12$英寸，$\omega=30$秒$^{-1}$。支承B不动，梁的质量略去不计。

答：0.137英寸。



习题 1.6—4



习题 1.6—5

1.6—5　有一个$W=12$千磅重量，置于由两根6英寸槽钢（$I=2\times17.4=34.8$(英寸)^4），背靠背地置放着的简支梁中央处（见图）。略去梁的质量，如果一个$M=M_1\cos\omega t$的脉动力矩，作用于所示梁的一端上，试求算W的稳态强迫振动的振幅。假设$\omega=0.90p$，$M_1=10{,}000$磅-英寸。

答：0.0457英寸。

1.6—6　有一台重量$W=16{,}000$磅的电动机，置放在两根平行工字钢梁的跨中处，如习题1.6—3图中所示。每一梁为截面$I=64.9$(英寸)^{4}净跨为12英尺的8英寸型钢。如果该电动机以600转/分开动着，而且其转子不平衡达到在10英寸半径处为4磅的程度，试问稳态强迫振动的振幅是多大？略去两个梁的质量。

答：3.95×10^{-3}英寸。

1.6—7　参见习题1.6—6中的装置，假设转子的轴线高出电动机底面20英寸，电动机安装在梁的顶翼缘上。如果电动机绕转子轴线的质量惯性矩为10,000磅-英寸-秒^2；试问，由于力$P\cos\omega t$的水平分量所引起稳态旋转振动的振幅是多大？

答：5.15×10^{-6}弧度。

1.6—8　假设习题1.6—6中的电动机停止了，但是梁于A和B处的支承按方程（i）竖直加速。试确定当$a=40$英寸/秒^2、$\omega=60$弧度/秒，该电动机相对于地面强迫振动的稳态振幅。

答：0.0187英寸。

1.7　强迫振动：瞬态

在前节中，仅考虑了方程（1.23）中代表强迫振动的最后一项。一般来说，干扰力作用也使系统产生按方程（1.23）中前两项所代表的自由振动。这样，实际的运动为两种具有不同振幅和不同频率的谐和运动之迭加，形成一种非常复杂的运动。然而，由于阻尼作用（在方程1.23的推导中没有考虑阻尼），在经过一个短时间后自由振动消失掉，仅剩下稳态强迫振动，它借干扰力作用保持不变。借图1.25中位移曲线图解来说明一种特定情况。在代表角频率为ω的强迫振动的虚线上，与具有较高角频率p而由于阻尼降低振幅的自由振动迭加起来。这样，整个运动借实线给出，在稳态时，实线逐渐接近于虚线。这个运动的前一部分，

地信网论坛 BBS.3500L.COM

亦即出现自由振动的开始几转，一般称为瞬态。详细研究这种运动往往是特别有意义的。

自由振动的振幅，可以借考虑初始条件从方程（1.23）来得到。如第1.1节，我们令时间 $t=0$ 处 $x=x_0$ 和 $\dot{x}=\dot{x}_0$。将这些条件代入方程（1.23）和它对时间的一次导数，我们得到：

$$C_1=x_0$$

和

$$C_2=\frac{\dot{x}_0}{p}-\frac{q\omega/p}{p^2-\omega^2} \qquad (a)$$

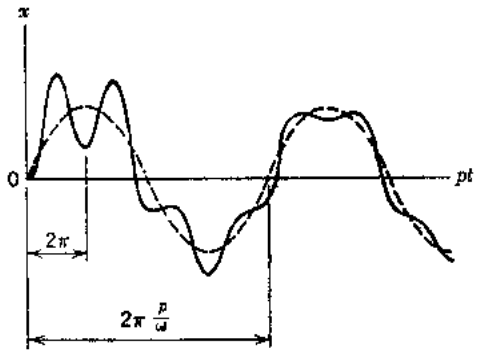


图 1.25

将这些值代入方程（1.23），得到：

$$x=x_0\cos pt+\frac{\dot{x}_0}{p}\sin pt+\frac{q}{p^2-\omega^2}\left(\sin\omega t-\frac{\omega}{p}\sin pt\right) \qquad (1.29a)$$

如果初始条件取为 $x_0=\dot{x}_0=0$，那么此方程简化为：

$$x=\frac{q}{p^2-\omega^2}\left(\sin\omega t-\frac{\omega}{p}\sin pt\right) \qquad (1.29b)$$

方程（1.29 b）代表对施力函数 $P\sin\omega t$ 的反应。可以看出，它由两部分组成，第一部分为与 $\sin\omega t$ 成比例的稳态反应（前节中所讨论的），而第二部分由与 $\sin pt$ 成比例的自由振动组成。即使它是由两个谐和函数组成，但是它们之和不是一个谐和运动，因为各个分量具有不同的频率。

如果施力函数取为 $P\cos\omega t$ 而不是 $P\sin\omega t$，那么用 $\cos\omega t$ 项代替方程（1.23）中的 $\sin\omega t$。此情况下，初始条件得出下列积分常数：

$$C_1=x_0-\frac{q}{p^2-\omega^2} \qquad 和 \qquad C_2=\frac{\dot{x}_0}{p} \qquad (b)$$

将这些值代入解中，给出：

$$x=x_0\cos pt+\frac{\dot{x}_0}{p}\sin pt+\frac{q}{p^2-\omega^2}(\cos\omega t-\cos pt) \qquad (1.30a)$$

如果初始条件取为 $x_0=\dot{x}_0=0$，那么此方程成为：

$$x=\frac{q}{p^2-\omega^2}(\cos\omega t-\cos pt) \qquad (1.30b)$$

在此情况下，不管 ω/p 的比值如何，反应的自由振动部分具有与稳态相同的振幅。

特别关心的是施力函数的频率等于或很接近于系统的自由振动频率的情况，亦即 ω 接近 p 的情况。在研究这种情况时，让我们引进下列符号：

$$p-\omega=2\varepsilon \qquad (c)$$

式中 ε 为一个很小的量。然而按下面等效方式重新写出方程(1.29 b)（由于施力函数 $P\sin\omega t$ 产生的反应）*：

$$x=\frac{q/p}{p^2-\omega^2}\left[\frac{p+\omega}{2}(\sin\omega t-\sin pt)+\frac{p-\omega}{2}(\sin\omega t+\sin pt)\right] \qquad (d)$$

---

* 此解是C.C.Wang作出的，他是California, Santa Clara, Mechanical Engineering Dept, Interactive Technology的干事（私人通讯，1970年）。

将三角恒等式代入方程（d）得出：

$$x=\frac{q/p}{p^2-\omega^2}\left[(p+\omega)\cos\frac{(\omega+p)t}{2}\sin\frac{(\omega-p)t}{2}\right.$$
$$\left.+(p-\omega)\sin\frac{(\omega+p)t}{2}\cos\frac{(\omega-p)t}{2}\right] \qquad (e)$$

将（c）式用于方程（e），并简化，我们得到：

$$x=-\frac{q}{2p}\left[\frac{\sin\varepsilon t}{\varepsilon}\cos(p-\varepsilon)\,t-\frac{\cos\varepsilon t}{p-\varepsilon}\sin(p-\varepsilon)\,t\right] \qquad (f)$$

对此方程求极限，我们得到*：

$$\lim_{\varepsilon\to 0}x=-\frac{q}{2p^2}(pt\cos pt-\sin pt) \qquad (1.31a)$$

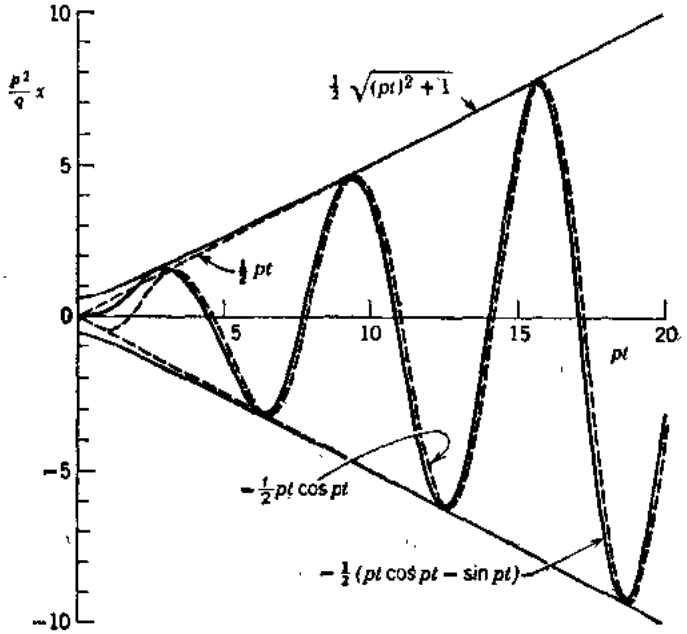


图 1.26

按相角形式，此式成为：

$$x=-\frac{q}{p^2}A\cos(pt-\alpha) \qquad (g)$$

式中

$$A=\frac{1}{2}\sqrt{(pt)^2+1} \qquad 和 \qquad \alpha=\tan^{-1}\frac{-1}{pt} \qquad (h)$$

这样，在$\omega=p$的极限情况下，振幅随着时间无限地增大，如图1.26所示。图中实曲线为方程（1.31a）的无量纲曲线图；然而，虚曲线为仅取第一项的相似曲线图。可以看到，经过短时间后，第一项代表总反应的良好的近似值如下：

$$\lim_{\varepsilon\to 0}x\approx-\frac{qt}{2p}\cos pt \qquad (1.31b)$$

图1.26中诸曲线说明，系统在无阻尼下共振时，强迫振动的振幅在理论上达到无穷大，但是形成这种无穷大的振幅需要无限长的时间。这样，设计的机械在共振之上运转的情况下，穿

* 方程（1.31a）也可借 L'Hôpital 规则用于方程（1.29b）来得到。 ——译注

地信网论坛 BBS.3500L.COM

过共振条件将是没有很大困难的，只要这种飞越非常快地完成。然而，实验说明，如果振动系统允许正好低于共振到达稳态，那么，穿过共振条件去加速机器就变得困难了。为此所供给额外动力增大振幅，而不是增大机器的运转速率。

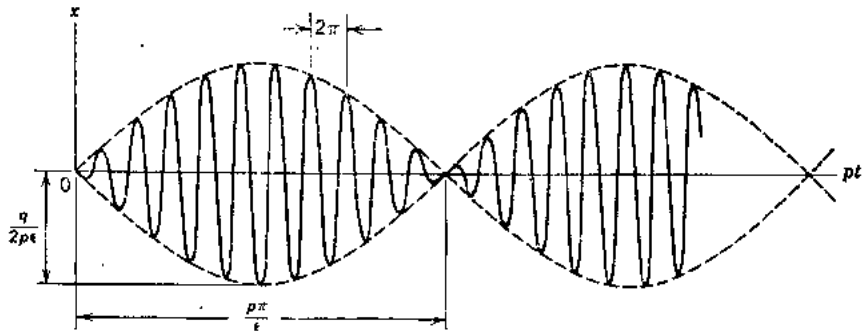


图 1.27

当施力函数的频率接近（但不正好等于）振动着的系统的频率时，可以观察到一种称为拍的现象。方程（f）代表这种情况，我们借考虑其第一项的下列简化方式可以得到该反应的良好近似值：

$$x \approx -\frac{q\sin\varepsilon t}{2p\varepsilon}\cos pt \tag{1.32}$$

因为方程（1.32）中ε这个量很小，所以函数$\sin\varepsilon t$变化缓慢，它的周期等于$2\pi/\varepsilon$，该值是很大的。因此，方程（1.32）可以视为代表周期为$2\pi/p$、可变振幅等于$(q/2p\varepsilon)\sin\varepsilon t$的振动。这种振动按图1.27中所示拍的规则图式增大和缩小。拍的周期等于π/ε，当ω接近p时（或当$\varepsilon\to 0$）增大。共振时，拍的周期成为无穷大，其增大是连续的，如图1.26中所示。

例题 图1.23中，弹簧的上端在某一瞬间$t=0$时有一均匀向下的速度v_0，它成为一简谐运动：

$$x_g=\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t \tag{i}$$

试确定，所悬挂的重量W接着发生的运动的全部表达式。

解：在这种情况下，运动的初始条件为：

$$x_0=0 \qquad \dot{x}_0=v_0 \tag{j}$$

将这些值代入（a）式，我们得到：

$$C_1=0 \qquad \text{和} \qquad C_2=\frac{v_0}{p}-\frac{q\omega/p}{p^2-\omega^2} \tag{k}$$

将这些常数代回方程（1.23），并注意在此情况下，

$$q_g=\frac{kgd}{W}=p^2d=\frac{p^2v_0}{\omega}$$

我们得到反应为：

$$x=\frac{v_0/\omega}{1-\omega^2/p^2}\left(\sin\omega t-\frac{\omega^3}{p^3}\sin pt\right) \tag{l}$$

习 题 组 1.7

1.7—1 对于图1.23中所示系统，重量$W=10$磅，弹簧常数$k=10$磅/英寸。假设干扰力为$P\sin\omega t$，其中$P=2$磅，$\omega=10\pi$秒$^{-1}$，当$t=0$时初始条件$x_0=\dot{x}_0=0$。试求出在

地信网论坛 BBS.3500L.COM

$t=1$ 秒时重量W的速度和位移。

答：$x_1=0.147$英寸；　$\dot{x}_1=-1.22$英寸/秒。

1.7—2　如果前一习题中的干扰力为$P\cos\omega t$而不是$P\sin\omega t$，试问，前一习题在$t=1$秒时重量W的位移和速度是多少？假设所有其它数据与习题1.7—1中相同。

答：$x_1=-0.035$英寸，　$\dot{x}_1=-1.81$英寸/秒。

1.7—3　试导出类似于方程（1.31 a）的表达式，但是是由于强迫函数$P\cos\omega t$引起的而不是$P\sin\omega t$引起的。

答：　$x=\dfrac{qt}{2p}\sin pt$

1.7—4　从习题1.7—3作一类似于图1.26的反应曲线的无量纲曲线图。

1.8　具有粘滞阻尼的自由振动

在前面自由振动和强迫振动讨论中，我们没有考虑由于摩擦或空气阻力所引起的耗散力的影响。因此，我们发现自由振动的振幅随时间保持不变，但是实验说明，振幅却随着时间减小，还说明振动随着时间逐渐衰减。理论说明，在强迫振动情况下，共振时振幅可以无限制地增大。然而，我们知道因为有阻尼，即使在共振时也总是为某一稳态反应的有限振幅。

为了使振动的分析讨论与实际条件较为一致，必须考虑阻尼力。这些阻尼力可以从几个不同来源产生，例如干的滑动面之间的摩擦、润滑面之间的摩擦、空气或液体的阻力、电的阻尼、材料的不完全弹性引起的内摩擦等等。在所有这些能量耗散的来源中，阻尼力与速度成比例的情况在数学处理上是最简单的，这些称为粘滞阻尼。由于这个原因，为了分析，性质复杂的阻力，经常用等效粘滞阻尼来替代。这种等效阻尼按这样的方式来确定：它一周产生的耗消能量与实际阻力产生的耗消能量相同。例如，由于内摩擦产生的阻尼可借这种方法来处理。

现在我们将考虑包括粘滞阻尼的弹簧—质量系统的情况，如图1.28中减震器所表示。假设减震器中粘滞液体与速度成比例地阻止运动。在这种情况下，运动的微分方程为：

$$\frac{W}{g}\ddot{x}=W-(W+kx)-c\dot{x} \qquad (a)$$

方程（a）中的系数c，代表粘滞阻尼系数或阻尼常数，其量纲为力/速度。阻尼力前面的负号表示它总是顺速度的相反方向作用。用W/g除方程（a），并采用下列符号：

$$p^2=\frac{kg}{W} \quad 和 \quad 2n=\frac{cg}{W} \qquad (b)$$

我们得到具有粘滞阻尼的自由振动的下列方程：

$$\ddot{x}+2n\dot{x}+p^2x=0 \qquad (1.33)$$

在讨论此方程中，我们应用求解具有常系数的线性微分方程的常用方法，假设其解为下列形式：

$$x=Ce^{rt} \qquad (c)$$

其中e为自然对数的底，t为时间，r为一常数，这个常数必须从（c）式满足方程(1.33)的条件来确定。将（c）代入方程（1.33），我们得到：

$$r^2+2nr+p^2=0$$

地信网论坛 BBS.35001.COM

从它得到：

$$r = -n \pm \sqrt{n^2 - p^2} \qquad (d)$$

让我们首先考虑与阻尼有关的n^2这个量小于p^2量的情况。在这种情况下，下列量为正。

$$p_d^2 = p^2 - n^2$$

我们得到两个对r的复根：

$$r_1 = -n + ip_d \quad 和 \quad r_2 = -n - ip_d$$

将这些根代入（c）式，我们得到方程（1.33）的两个解。这两个解之和或差与任一常数相乘，也将为一解。按这种方式，我们求得：

$$x_1 = \frac{C_1}{2}(e^{r_1 t} + e^{r_2 t}) = C_1 e^{-nt}\cos p_d t$$

$$x_2 = \frac{C_2}{2i}(e^{r_1 t} - e^{r_2 t}) = C_2 e^{-nt}\sin p_d t$$

将这些解加起来，我们得到方程（1.33）的下列形式通解：

$$x = e^{-nt}(C_1\cos p_d t + C_2 \sin p_d t) \qquad (1.34)$$

式中C_1和C_2为常数，它们必须从初始条件来确定。方程（1.34）中因子e^{-nt}随时间减小，原来产生的振动将逐渐衰减。

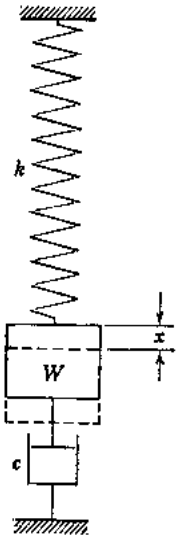


图 1.28

方程（1.34）中，括号内的表达式与我们前面对无阻尼振动所得的（见方程1.2)形式相同。它代表具有角频率p_d的周期函数，这里，

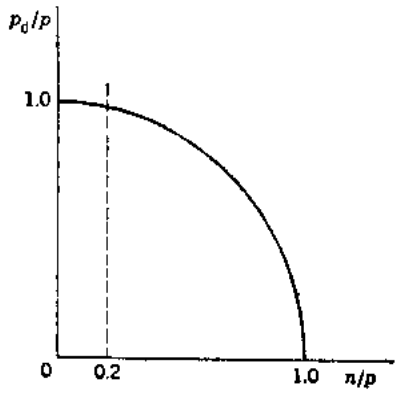


图 1.29

$$p_d = \sqrt{p^2 - n^2} \qquad (e)$$

称为阻尼振动的角频率。其相应周期为：

$$\tau_d = \frac{2\pi}{p_d} = \frac{2\pi}{p}\frac{1}{\sqrt{1 - (n^2/p^2)}} \qquad (f)$$

将此式与前面对无阻尼振动所得的周期$\tau = 2\pi/p$相比，我们看到该阻尼振动的周期τ_d较高。然而，如果n与p相比很小，那么这种增大为一很小量，可以略去不计。即使阻尼比n/p高到为0.2，频率比p_d/p也接近于1，可在图1.29中看出，图中将下面表达式（它为圆的方程）点绘于第一象限中：

$$\frac{p_d}{p} = \sqrt{1 - \frac{n^2}{p^2}}$$

地信网论坛 BBS.3500I.COM

为了确定方程（1.34）中的常数C_1和C_2，让我们假设在初始瞬间（$t=0$）时振动着的物体从其平衡位置移动x_0值，并且有初始速度$\dot{x}_0$。将这些量代到方程（1.34）和其对时间的一次导数中，我们得到：

$$C_1=x_0 \quad 和 \quad C_2=\frac{\dot{x}_0+nx_0}{p_d} \tag{g}$$

将（g）式代入方程（1.34）得到：

$$x=e^{-nt}\left(x_0\cos p_d t+\frac{\dot{x}_0+nx_0}{p_d}\sin p_d t\right) \tag{1.35}$$

此式中与$\cos p_d t$成比例的第一项仅取决于初始位移x_0，与$\sin p_d t$成比例的第二项取决于初始位移x_0和初始速度$\dot{x}_0$。

方程（1.35）可以写成等效形式*：

$$x=Ae^{-nt}\cos\ (p_d t-\alpha_d) \tag{1.36}$$

其中最大值为：

$$A=\sqrt{C_1^2+C_2^2}=\sqrt{x_0^2+\frac{(\dot{x}_0+nx_0)^2}{p_d^2}} \tag{h}$$

和

$$\alpha_d=\tan^{-1}\frac{C_2}{C_1}=\tan^{-1}\left(\frac{\dot{x}_0+nx_0}{p_d x_0}\right) \tag{i}$$

我们可以把方程(1.36)看成代表一种具有按指数律减小的振幅Ae^{-nt}、相角α_d和周期$\tau_d=2\pi/p_d$的伪谐和运动（pseudoharmonic motion）。该运动的图解示于图1.30中。这个位移—时间曲线与包络线$\pm Ae^{-nt}$于相隔间距$\tau_d/2$的时刻处的m_1、m_1'、m_2、m_2'等点相切。因为这些点处的切线不是水平的，所以诸切点不与距离平衡位置的诸极限位移点重合。如果阻尼比很小，那么这些点的差别可以略去不计。然而，在任何情况下，两相邻极限位置之间的时间间隔为常数，且等于周期之半（$\tau_d/2$）。为了证明这一点，我们将方程（1.36）对时间进行一次微分，得到振动着的物体的速度：

$$\dot{x}=-Ae^{-nt}p_d\sin(p_d t-\alpha_d)-Ane^{-nt}\cos(p_d t-\alpha_d)$$

令此速度等于零，我们求出：

$$\tan(p_d t-\alpha_d)=-\frac{n}{p_d}$$

因而，诸极限位移点（零速度）按$t=\pi/p_d=\tau_d/2$的相等时间间隔分隔开。

减幅率取决于阻尼比n/p，从图1.30看到，两个相继振幅x_{mi}和$x_{m(i+1)}$之比为：

$$\frac{x_{mi}}{x_{m(i+1)}}=\frac{Ae^{-nt_i}}{Ae^{-n(t_i+\tau_d)}}=e^{n\tau_d}=e^{\delta} \tag{j}$$

$\delta=n\tau_d$这一量称为对数减缩，按照下式：

$$\delta=\ln\frac{x_{mi}}{x_{m(i+1)}}=n\tau_d=\frac{2\pi n}{p_d}\approx\frac{2\pi n}{p} \tag{1.37}$$

方程（1.37），可以用于实验测定阻尼系数n。它只需要借实验确定两个相继振幅之比来确定。然而，如果利用相距j周的两个振幅之比，那么得到具有较好精确度的结果。在这种情况下，方程（j）成为：

---

* 或译为等价形式。 ——译注

$$\frac{x_{mi}}{x_{m(i+j)}}=e^{jnT_d} \tag{k}$$

其对数减缩为：

$$\delta=\frac{1}{j}\ln\frac{x_{mi}}{x_{m(i+j)}} \tag{l}$$

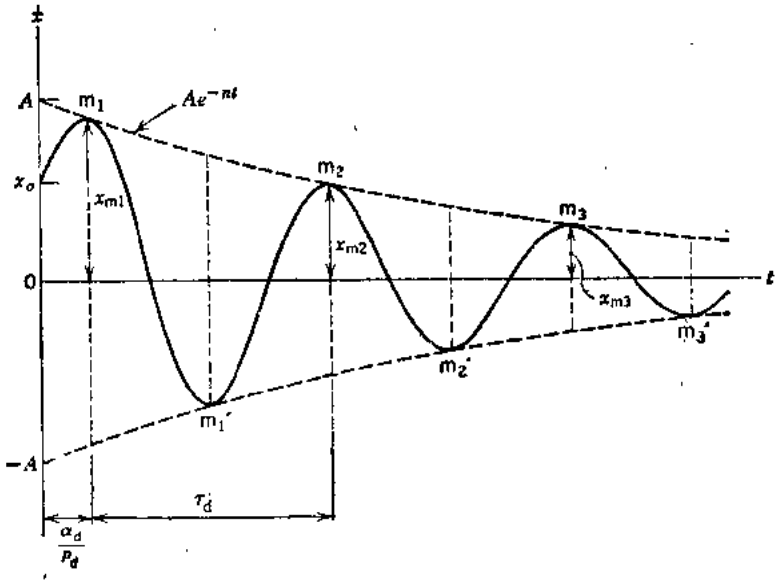


图 1.30

在前面方程（1.33）的讨论中，我们假设 $n<p$。如果 $n>p$，那么两个根（d）成为实根且均为负的。将它们代入（c）式，我们得到方程（1.33）的两个解，其通解成为：

$$x=C_1e^{r_1t}+C_2e^{r_2t} \tag{1.38}$$

在这种情况下，此解不是周期性的，而且不代表振动运动。其粘滞阻力如此大，以致当物体从其平衡位置移动时，它不振动，但是仅逐渐移回到平衡位置。在这样一种情况下，该系统说成是过阻尼（overdaming）的，其运动称为非周期者。

方程（1.38）中诸常数，可借 $x=x_0$ 和 $\dot{x}=\dot{x}_0$（在时间 $t=0$ 处）代入该方程及其一次导数来求得。代入这些得出：

$$C_1+C_2=x_0 \qquad r_1C_1+r_2C_2=\dot{x}_0$$

从它们得到：

$$C_1=\frac{\dot{x}_0-r_2x_0}{r_1-r_2} \qquad C_2=\frac{r_1x_0-\dot{x}_0}{r_1-r_2} \tag{m}$$

这样，方程（1.38）成为：

$$x=\frac{\dot{x}_0-r_2x_0}{r_1-r_2}e^{r_1t}+\frac{r_1x_0-\dot{x}_0}{r_1-r_2}e^{r_2t} \tag{1.39}$$

方程（1.39）的图解的一般外貌取决于 n、x_0和$\dot{x}_0$。

在阻尼不足的情况和过阻尼的情况之间，存在 $n=p$ 的特殊情况，它是运动首先失去振动特性时的阻尼情况。应用符号（b），对这种情况我们求出：

$$C_{cr}=2n\frac{W}{g}=2p\frac{W}{g}=2\sqrt{\frac{kW}{g}} \tag{n}$$

地信网论坛 BBS.3500L.COM

其中符号 C_c 代表临界阻尼。对于 $n=p$ 的临界阻尼情况，方程（d）说明 $r_1=r_2=-p$ 和 $p_d=0$。方程（1.35）和方程（1.39）都不构成解，在这种重复根的特殊情况下，其解采取下列形式：

$$x=C_1e^{-pt}+C_2te^{-pt} \tag{1.40}$$

将初始条件代入方程（1.40）及其一次导数，我们得到：

$$C_1=x_0 \qquad C_2=\dot{x}_0+nx_0$$

于是其一般的解变成

$$x=e^{-pt}[x_0+(\dot{x}+nx_0)t] \tag{1.41}$$

图1.31说明，借方程（1.41）对x_0的一个固定值和$\dot{x}_0$的 n 个值所表示的位移—时间曲线组。对于上边的两根曲线（图中 1 和 2 所示），其初始速度x_0是正的，对于曲线 3，初始速度为零，对于曲线 4 和 5，初始速度是负的。

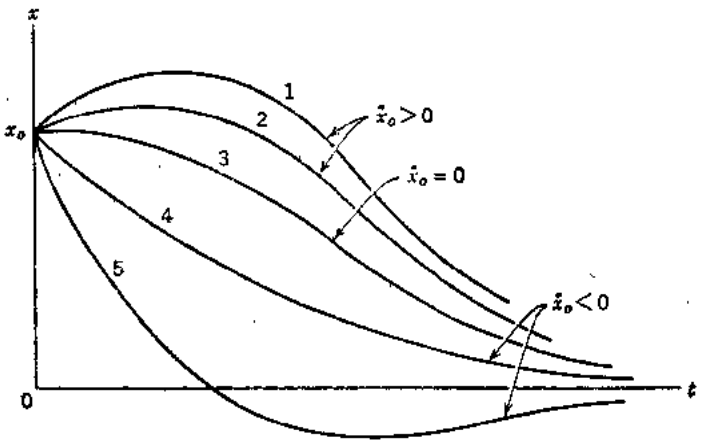


图 1.31

在前面讨论中，我们总是考虑 n 为一正量，亦即阻尼代表一个阻力。这样，由于它的作用，能量耗散掉，振动的振幅逐渐减小，运动衰减。然而，有些情况，运动时将能量带给物体，由此振动的振幅随时间增大。在这种情况下，有时用负阻尼的概念。从解(1.34)，我们看到，如果 n 是负的，那么因子e^{-nt}随时间增大，振动逐步增大。n 为正的情况（在这种情况下，振动衰减）代表稳定运动，而负 n 的情况代表非稳定运动。

例题 1　一个粘滞振动的物体，每秒产生10周完整的振动，在 100 周中，其振幅减小 10%。试求算对数减缩，并确定阻尼常数 n 和阻尼比 n/p。要问，如果阻尼移去，振动周期减小的比例是多少？

解：从方程（l），对数减缩为：

$$\delta=n\tau_d\approx\frac{1}{100}\ln\left(\frac{1.0}{0.9}\right)=0.001054$$

周期$\tau_d=0.1$秒，$p_d=2\pi/\tau_d=62.83$秒$^{-1}$。这样，$n=0.01054$秒$^{-1}$，阻尼比近似地为：

$$\frac{n}{p}\approx\frac{n}{p_d}=\frac{0.01054}{62.83}=0.000168$$

方程（f）说明无阻尼情况对阻尼情况的周期比为：

$$\frac{\tau}{\tau_d}=\sqrt{1-\frac{n^2}{p^2}}\approx\sqrt{1-\frac{n^2}{p_d^2}}=\sqrt{1-2.82\times10^{-8}}$$

例题 2　如果阻尼大于临界阻尼，即 $n>p$，试确定，弹簧—悬排质量，以初始位移x_0但无初始速度放松产生的运动的位移—时间曲线之一般性质。

解：将初始条件 $x=x_0$和$\dot{x}_0=0$ 代入方程（1.39），我们求出：

地信网论坛 BBS.3500L.COM

$$x=\frac{x_0}{r_1-r_2}\left(r_1e^{r_2t}-r_2e^{r_1t}\right) \qquad (p)$$

将此方程对时间微分两次，我们得到下列速度和加速度的表达式：

$$\dot{x}=\frac{r_1r_2x_0}{r_1-r_2}\left(e^{r_2t}-e^{r_1t}\right) \qquad (q)$$

$$\ddot{x}=\frac{r_1r_2x_0}{r_1-r_2}\left(r_2e^{r_2t}-r_1e^{r_1t}\right) \qquad (r)$$

从（q）式，我们看到，在 $t=0$ 和 $t=\infty$ 处速度为零，并看到，对于所有中间 t 值时速度是负的，因为 r_1 和 r_2 都是负的。为了求出此负速度为最大时的时间 t_1，我们令（r）式等于零，求出：

$$t_1=\frac{\ln(r_2/r_1)}{r_1-r_2} \qquad (s)$$

从（p）式至（s）式，我们得出结论：位移—时间曲线具有图1.31中曲线 3 所示的一般形状。对于任何具有给定阻尼系数 c 的特定系统，其曲线的精确细节，借回顾下面式子来建立：

$$r_1=-n+\sqrt{n^2-p^2}$$

$$r_2=-n-\sqrt{n^2-p^2}$$

式中 n 和 p 由（b）式定义。

习 题 组 1.8

1.8—1 一个重量 $W=10$ 磅的物体，借弹簧常数 $k=10$ 磅/英寸的弹簧支承着，有一减振阻尼器与之联结（图1.28），调整该阻尼器使之在速度为 1 英寸/秒时正产生 0.01 磅阻力。试问，10周后振幅的减小比为多少？

答：0.539/1。

1.8—2 一个 $W=2$ 磅的重量，借一个 $k=1$ 磅/英寸的弹簧悬挂着，并受到 $n=\sqrt{5}\ p/2$ 的阻尼。如果以初始位移 $x_0=2$ 英寸从静止放松，试问，在它返回到平衡位置时，将达到多大的最大负速度？

答：$\dot{x}_{max}=-9.45$ 英寸/秒。

1.8—3 有一弹簧—悬挂着的质量，是为临界衰减，其弹簧常数 $k=1$ 磅/英寸，重量 $W=3.86$ 磅，如果给该重量一个初始位移 $x_0=1$ 时，初始速度 $\dot{x}_0=-12$ 英寸/秒。试问，放松后它到达平衡位置 $x=0$ 处的时间 t 是多少？在这样一种情况下，该重量越过平衡位置有多远，亦即它所到达数值上为最大的负位移是多少？

答：$t=0.50$ 秒；　$(-x)_{max}=0.000496$ 英寸。

1.8—4 有一弹簧—悬挂着的质量，以观察到的周期 $\tau_d=1/2$ 秒进行振动，其阻尼使10个完整周之后，振幅从 $x_1=2$ 英寸降低到 $x_{11}=1$ 英寸。试计算粘滞阻尼系数 c。

答：$c=0.00143$ 磅/英寸/秒。

1.8—5 一个弹簧—质量系统，当无阻尼时，具有固有振动频率 f。试计算当粘滞阻尼系数 $c=c_{cr}/2$ 时的频率 f_d。

答：$f_d=\sqrt{3}\ f/2$。

地信网论坛 BBS.3500L.COM

1.9 具有粘滞阻尼的强迫振动

在前节中，我们讨论了具有粘滞阻尼的弹簧—悬挂质量的自由振动。现在我们将考虑除弹簧力$-kx$和阻力$-c\dot{x}$外，还有外部作用于振动质量上成谐和变化的干扰力。因为我们在第1.6节中早已看到，一个以等角速度ω开动着的不平衡马达可以产生这样的干扰力。这样，如图1.32所示，作用着的转动离心力Q有一竖直分量$Q\cos\omega t$。在这样的条件下，所悬挂着的马达质量m的运动方程成为：

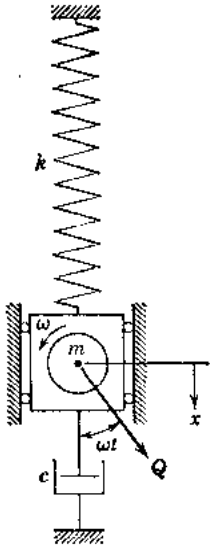


图 1.32

$$m\ddot{x}=-kx-c\dot{x}+Q\cos\omega t \qquad (a)$$

用m去除，并引进下列符号：

$$p^2=\frac{k}{m}\quad 2n=\frac{c}{m}\quad q=\frac{Q}{m} \qquad (b)$$

我们得到：

$$\ddot{x}+2n\dot{x}+p^2x=q\cos\omega t \qquad (1.42)$$

它为具有粘滞阻尼的强迫振动的运动微分方程。方程(1.42)的特解，可以采取下列形式：

$$x=M\cos\omega t+N\sin\omega t \qquad (1.43)$$

式中M和N均为常数。为了确定这些常数，我们将试探解(1.43)代入方程(1.42)，得到：

$$(-\omega^2M+2n\omega N+p^2M-q)\cos\omega t+(-\omega^2N-2n\omega M+p^2N)\sin\omega t=0$$

仅当诸括号内的诸式变为零时，此方程对所有t值可以得到满足。这样，我们得到两个计算M和N的线性代数方程：

$$-\omega^2M+2n\omega N+p^2M=q$$
$$-\omega^2N-2n\omega M+p^2N=0$$

从它们得到：

$$M=\frac{q(p^2-\omega^2)}{(p^2-\omega^2)^2+4n^2\omega^2}$$

$$N=\frac{q(2n\omega)}{(p^2-\omega^2)^2+4n^2\omega^2} \qquad (c)$$

将这些常数代入方程(1.43)，我们得到方程(1.42)的特解。

方程(1.42)的全解，借将特解(1.43)与第1.8节中按方程(1.34)所得的通解加起来得到。这样，仅考虑亚临界阻尼(subcritical damping)，我们得到：

$$x=e^{-nt}(C_1\cos p_dt+C_2\sin p_dt)+M\cos\omega t+N\sin\omega t \qquad (1.44)$$

方程(1.44)中前两项代表阻尼自由振动，而后面两项代表阻尼强迫振动。如前节中所讨论，自由振动的周期$\tau_d=2\pi/p_d$；强迫振动的周期$T=2\pi/\omega$，它与产生强迫振动的干扰力的周期相等。我们看到，由于因子e^{-nt}，自由振动逐渐平息下来，仅留下借最后面两项所代表的稳态强迫振动。这些强迫振动，借干扰力的作用无限期地保持着，所以在实用上是很重要

地信网论坛 BBS.3500L.COM

的。我们在第1.6节中早已讨论无阻尼的这种强迫振动，但是现在我们将看到它们是怎样受到阻尼影响的。

稳态反应（方程1.43），可以写成等效相角形式，

$$x = A\cos(\omega t - \theta) \tag{1.45}$$

式中

$$A = \sqrt{M^2 + N^2} = \frac{q}{\sqrt{(p^2-\omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}} = \frac{q/p^2}{\sqrt{(1-\omega^2/p^2)^2 + 4n^2\omega^2/p^4}} \qquad (d)$$

和

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{N}{M}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2\omega n}{p^2-\omega^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2n\omega/p^2}{1-\omega^2/p^2}\right) \qquad (e)$$

这样，我们看到具有粘滞阻尼的稳态强迫振动，是一种具有常数振幅A〔按（d）式所给〕、相角θ〔按（e）式所给〕和周期$T = 2\pi/\omega$的简谐运动。

从（b）式应用p^2和q值，并引进阻尼比的符号γ：

$$\gamma = \frac{n}{p} = \frac{c}{c_{cr}} \qquad (f)$$

我们可以将（d）代入方程（1.45）得到：

$$x = \frac{Q}{k}\beta\cos(\omega t - \theta) \tag{1.46}$$

式中放大因子为：

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2/p^2)^2 + (2\gamma\omega/p)^2}} \tag{1.47}$$

此外，相角的表达式〔方程（e）〕成为：

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2\gamma\omega/p}{1-\omega^2/p^2}\right) \tag{1.48}$$

从方程（1.46），我们看到稳态强迫振动的振幅，借放大因子β乘下列静荷重位移来得到：

$$x_{st} = \frac{Q}{k} \qquad (g)$$

该放大因子不仅取决于频率比ω/p，而且还取决于阻尼比γ。

图1.33说明，对于各种不同水平的阻尼，把放大因子β对ω/p之比绘成曲线，从这些曲线我们看到，当外加角频率ω与固有角频率p相比很小时，放大因子β与1没有多大区别。这样，在振动过程中，悬挂着的质量的位移x近似地为干扰力$Q\cos\omega t$静力作用下产生的位移。

当ω与p相比很大时，亦即当外加频率比固有频率大很多时，放大因

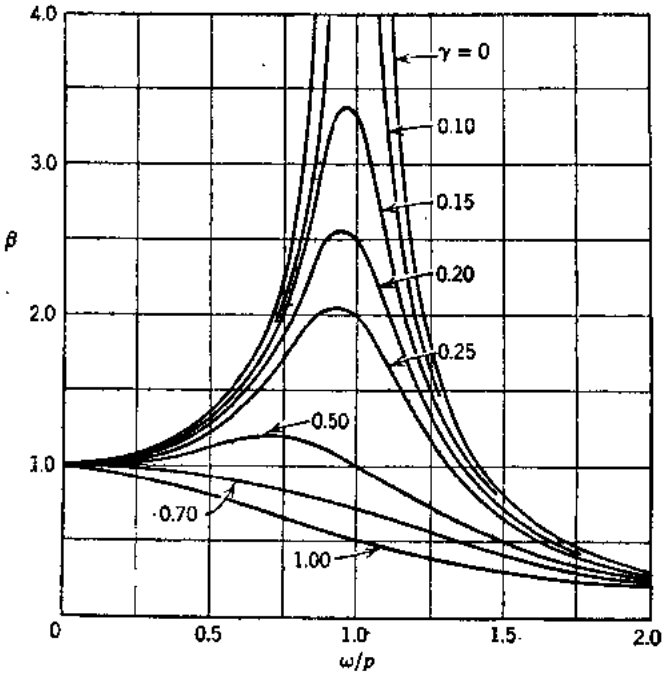


图 1.33

地信网论坛 BBS.3500I.COM

子的值趋于零，与阻尼量无关。这意味着高频率干扰力对于具有低的固有频率的系统实际上不产生强迫振动。在两种极端情况下（$\omega<<p$和$\omega>>p$），我们注意阻尼对放大因子β的大小仅有次要影响。这样，在强迫振动的这两种情况下，完全略去阻尼的影响和应用前面第1.6节中所提出的方程是说得过去的。

当ω的值接近于p的值，亦即ω/p接近于1时，放大因子迅速增大，在共振和近于共振时，它的值受阻尼值的变化是很敏感的。还应注意，β的最大值发生于ω/p值稍小于1的时候。令β对ω/p的导数等于零，我们求出当：

$$\frac{\omega}{p}=\sqrt{1-2\gamma^2} \qquad (h)$$

时发生最大值。对于很小的阻尼比，β的最大值发生于非常近于共振的时候，允许取共振时的β值作为最大值。于是，从方程（1.46）以及（b）式和（f）式，最大的振幅近似地成为：

$$A_{max}=\frac{Q}{k}\beta_{res}=\frac{Q}{k}\ \frac{1}{2\gamma}=\frac{Q}{p^2m}\ \frac{1}{2n/p}=\frac{Q}{c\omega} \qquad (i)$$

由此讨论我们看到：在低于共振很远或高于共振很远的范围内，阻尼对系统的反应，仅具有次要的影响，在接近共振条件时，则是非常重要的，如果我们要计算重要的结果，那是不能不管的。

现在让我们考虑稳态振动与产生振动的干扰力之间的相位关系。这借方程（1.46）中的相角θ表示，其值借(1.48)式给定。

由于干扰力按$\cos\omega t$变化，强迫振动按$\cos(\omega t-\theta)$变化，所以我们说，其反应迟于施力函数θ角。亦即，当图1.32中的力Q向下作用时，该力所作用悬挂着的质量仍然不是在其最低位置，但是它在θ/ω秒后到达最低位置，在这个时候，力Q已到了与铅直线成θ角的位置。（1.48）式说明θ的值如同β的值一样，取决于阻尼比和频率比。图1.34中诸曲线说明对于几种不同水平的阻尼时相角θ对ω/p的变化。在零阻尼的情况下，对于所有$\omega/p<1$的值，强迫振动正好与干扰力同相（$\theta=0$），对于所有$\omega/p>1$的值，它们不同相，相差整整半周（$\theta=\pi$）。还对此条件*，在共振（$\omega=p$)时可以看出相角是不定的。

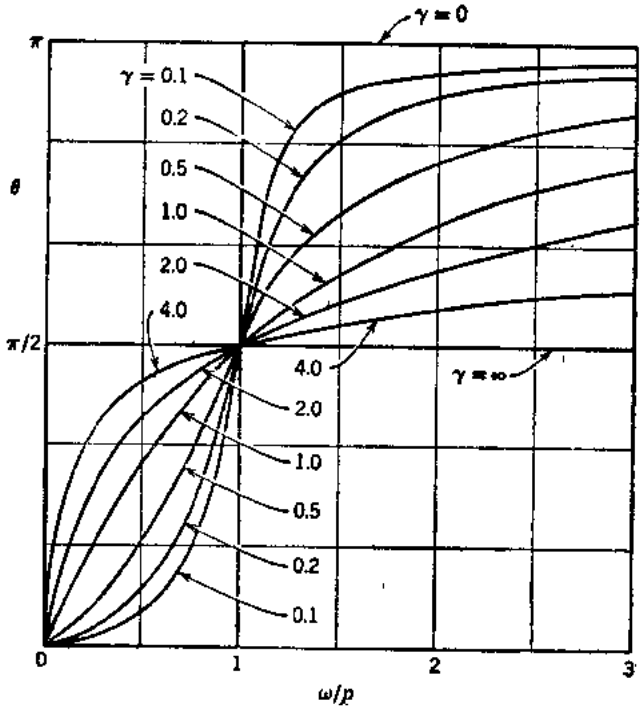


图 1.34

当存在阻尼时，我们注意θ随着比值ω/p增大连续变化。此外，不管阻尼大小，我们求出共振时$\theta=\pi/2$。亦即，在共振时，强迫振动迟于干扰力四分之一周。例如，在图1.32中，当振动质量通过其中点位置时，力Q指向下面，当质量运动到它的最低位置时，力Q转动

* 指零阻尼情况。 ——译注

地信网论坛 BBS.3500L.COM

$\pi/2$角，并按水平向右作用。

对低于共振很远和高于共振很远的ω/p值，我们注意很小的阻尼比，对相角仅有次要的影响。亦即，低于共振很远时，角θ实际上为零，而高于共振很远时，实际上则为π。因而，阻尼对相角的影响还是可以不管，但在共振或近于共振时除外。

例题1 令图1.32中不平衡的马达的总重量$W=1000$磅，偏心重量的质量$m_1=1$磅-秒^2/英寸，位于半径$r_1=1$英寸处。马达的速率为600转/分，弹簧的静荷载位移$\delta_{st}=0.01$英寸，阻尼常数c为100磅-秒/英寸。试确定，在该速率和在共振时（这里$\omega=p$），稳态强迫振动的振幅。

解：

$$\omega=2\pi\left(\frac{600}{60}\right)=20\pi$$

$$\omega^2=400\pi^2 \qquad p^2=\frac{g}{\delta_{st}}=38,600$$

$$n=\frac{cg}{2W}=\frac{(100)(386)}{(2)(1000)}=19.3$$

$$q=\frac{g}{W}\omega^2=(0.386)(400\pi^2)$$

从方程（d）

$$A=\frac{q}{\sqrt{(p^2-\omega^2)^2+4n^2\omega^2}}=\frac{(0.386)(400\pi^2)}{\sqrt{(38,600-400\pi^2)^2+(4)(19.3)^2(400\pi^2)}}$$

$$=0.044\text{英寸}$$

共振时，$\omega=p=\sqrt{38,600}$，从方程（i），我们得到：

$$A_{max}=\frac{Q}{c\omega}=\frac{\omega}{c}=\frac{\sqrt{38,600}}{100}=1.96\text{英寸}$$

例题2 对一阻尼系统，考虑用下式给出谐和地面位移的情况（见图1.35）：

$$x_g=d\cos\omega t \qquad (j)$$

试对此施力函数，导出系统的稳态反应。

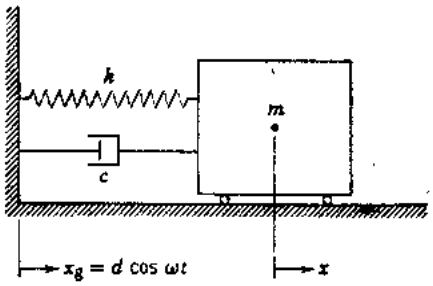


图 1.35

解： 对于这种情况，运动方程成为：

$$m\ddot{x}=-c(\dot{x}-\dot{x}_g)-k(x-x_g) \qquad (k)$$

其中

$$\dot{x}_g=-d\omega\sin\omega t \qquad (l)$$

将（j）式和（l）式代入方程（k），并重新排列，我们得到：

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=d(k\cos\omega t-c\omega\sin\omega t) \qquad (m)$$

将右边部分按相角形式表达给出：

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=Bd\cos(\omega t-\phi) \qquad (n)$$

其中

$$B=\sqrt{k^2+c^2\omega^2} \qquad (o)$$

和

$$\phi=\tan^{-1}\left(\frac{-c\omega}{k}\right) \qquad (p)$$

地信网论坛 BBS.35001.COM

在这种情况下，我们看到施力函数 $Bd\cos(\omega t-\phi)$ 代替 $Q\cos\omega t$，其解，可以从方程（1.46）借乘积 Bd 代替 Q 并将相角 ϕ 包括进其结果中来得到。这样，

$$x=\frac{Bd}{k}\beta\cos(\omega t-\phi-\theta) \qquad (q)$$

例题 3 一个具有亚临界阻尼的系统的瞬态反应，可借方程（1.44）中引进初始条件来确定。试求出这种系统由于施力函数 $Q\cos\omega t$ 所引起的自由振动的反应。

解：将 $x=x_0$ 和 $\dot{x}=\dot{x}_0$（时间 $t=0$ 处）代入方程（1.44）和其一次导数，我们求出积分常数为：

$$C_1=x_0-M \quad 和 \quad C_2=\frac{\dot{x}_0+n(x_0-M)-N\omega}{p_d} \qquad (r)$$

将这些式子代入方程（1.44）给出：

$$\begin{aligned}x=e^{-nt}&\left(x_0\cos p_dt+\frac{\dot{x}_0+nx_0}{p_d}\sin p_dt\right)\\&+M\left[\cos\omega t-e^{-nt}\left(\cos p_dt+\frac{n}{p_d}\sin p_dt\right)\right]\\&+N\left(\sin\omega t-e^{-nt}\frac{\omega}{p_d}\sin p_dt\right)\end{aligned} \qquad (s)$$

如果初始条件取为 $x_0=\dot{x}_0=0$，那么，保持的反应的瞬态部分 x_{tr} 可以看出为：

$$x_{tr}=-e^{-nt}\left(M\cos p_dt+\frac{Mn+N\omega}{p_d}\sin p_dt\right) \qquad (t)$$

将此瞬态表达成相角形式，我们得到：

$$x_{tr}=-e^{-nt}\frac{C}{p_d}\cos(p_dt-\psi) \qquad (u)$$

其中

$$C=\sqrt{(Mp_d)^2+(Mn+N\omega)^2} \qquad (v)$$

和

$$\psi=\tan^{-1}\left(\frac{Mn+N\omega}{Mp_d}\right) \qquad (w)$$

习 题 组 1.9

1.9—1 一根简支梁，在跨中处载有一台重量 $W=2000$ 磅的电动机，如习题组 1.6 中习题1.6—3那样。该梁的刚度适使跨中处静力挠度 $\delta_{st}=0.10$ 英寸，粘滞阻尼适使自由振动 10 周后振幅减小到初始值的一半。该电动机按600转/分开动着，由于其转子不平衡，在此速率时产生离心力 $Q=500$ 磅。略去梁的分布质量，试求出稳态强迫振动的振幅。

答：$A=0.79$ 英寸。

1.9—2 一台重量 $W=16,000$ 磅的转动机，置于两根平行简支钢梁中点处，每一梁为净跨 $l=12$ 英尺、横截面惯性矩 $I=64.2$（英寸）^{4} 的标准型钢 8I23。该机以300转/分开动着，其转子在 10 英寸半径处不平衡达到 40 磅。试问，如果该系统的等效粘滞阻尼为临界阻尼的 10% 时，稳态强迫振动的振幅是多大？

答：$A=0.044$ 英寸。

地信网论坛 BBS.3500I.COM

1.9—3　参见图1.33，试写出对所有阻尼比值曲线上最大值的轨迹方程。

答：　$\beta_{max}=\dfrac{1}{\sqrt{1-\omega^4/p^4}}$。

1.9—4　试对受到施力函数 $Q\sin\omega t$ 的阻尼系统，导出表达成相角形式的稳态反应表达式。

答：　$x=\dfrac{Q}{k}\beta\cos(\omega t-\theta)$；　$\theta=\tan^{-1}\left(\dfrac{\omega^2-p^2}{2n\omega}\right)$。

1.9—5　试对受到支承运动 $x_g=d\sin\omega t$ 的阻尼系统，导出表达成相角形式的稳态反应表达式。

答：　$x=\dfrac{Bd}{k}\beta\cos(\omega t-\phi-\theta)$；　$\phi=\tan^{-1}\left(\dfrac{k}{c\omega}\right)$。

1.9—6　假设形式为 $\ddot{x}_g=a\cos\omega t$ 的谐和地面加速度，试导出，该系统按相角形式的阻尼稳态反应。

答：　$x^*=\dfrac{-ma}{k}\beta\cos(\omega t-\theta)$；　$\theta=\tan^{-1}\left(\dfrac{2n\omega}{p^2-\omega^2}\right)$。

1.9—7　试导出，受到地面加速度 $\ddot{x}_g=a\sin\omega t$ 的阻尼系统的稳态反应（按相角形式）。

答：　$x^*=\dfrac{-ma}{k}\beta\cos(\omega t-\theta)$；　$\theta=\tan^{-1}\left(\dfrac{\omega^2-p^2}{2n\omega}\right)$。

1.9—8　试对具有亚临界阻尼的系统确定由于施力函数 $Q\sin\omega t$ 引起的瞬变反应。按类似于例题3中方程（t）给出解。

答：　$x_{tr}=-e^{-nt}\left(N\cos p_d t+\dfrac{M\omega+Nn}{p_d}\sin p_d t\right)$

1.10　等效粘滞阻尼

如第1.8节开始时所述，各种类型的阻尼，可以用等效粘滞阻尼*代替，得出谐和运动的线性微分方程。阻尼的最重要影响，发生在强迫振动问题中共振或接近共振时。所以，让我们考虑前节中所讨论的稳态反应过程中，每一周干扰力所做的功。在该情况下，一周中力 $Q\cos\omega t$ 所做的功 U_Q 为：

$$U_Q=\int_0^\tau Q(\cos\omega t)\,\dot{x}\,dt \qquad (a)$$

速度 $\dot{x}$，可借方程（1.45）对时间微分来得到：

$$\dot{x}=-A\omega\sin(\omega t-\theta) \qquad (b)$$

将此式代入方程（a），并应用三角恒等式，我们得到：

$$U_Q=-QA\omega\int_0^\tau(\cos\omega t)(\sin\omega t\cos\theta-\cos\omega t\sin\theta)\,dt$$

积分得出：

---

* L·S· Jacobsen, "Steady Forced Vibrations as Influenced by Damping" Trans.ASME, Vol.52, 1930, p. APM-169.

$$U_Q=\pi Q A\sin\theta \qquad (c)$$

类似地，每一周由于阻尼力$c\dot{x}$所耗散的功U_C为：

$$U_C=\int_0^T c\dot{x}\dot{x}\,dt \qquad (d)$$

将方程（b）代入方程（d）给出：

$$U_C=cA^2\omega^2\int_0^T\sin^2(\omega t-\theta)\,dt$$

上面积分后成为：

$$U_C=\pi c A^2\omega \qquad (e)$$

这样，输入的能量U_Q，随振幅A成线性增大，而耗散的能量U_C，按振幅的平方来增大，它们在这两种能量函数相交处相等(见图1.36)。我们可以借令（c）式和（e）式相等，求出稳态振幅。因而：

$$A=\frac{Q\sin\theta}{c\omega} \qquad (f)$$

共振时（$\omega=p$），相角θ（见方程1.48）为$\pi/2$，A的值为最大（对于$c\ll c_{cr}$）：

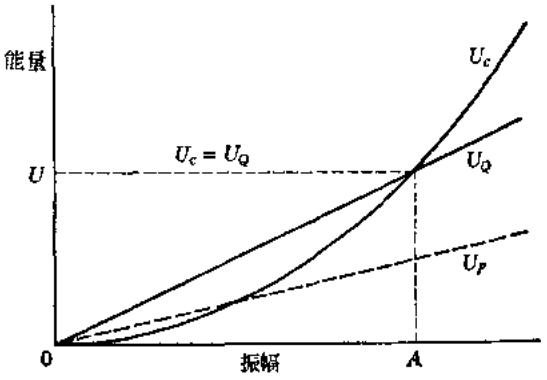


图 1.36

$$A_{max}=\frac{Q}{c\omega} \qquad (g)$$

此方程与第1.9节中借另一种方法所得的方程（i）一致。

方程（e）给出强迫振动一周中因粘滞阻尼所耗散的能量。此能量表达式，可以令等于因某种其它阻尼所引起的能量，来得到等效粘滞阻尼常数c_{eq}。例如，考虑结构阻尼，它是由于不完全弹性的结构材料中内摩擦引起的（如钢和铝合金）。材料每单位体系所耗散的能量，用图1.37中滞后回线内阴影面积来表示。该回线借增大（或“加载”）和减小（或“卸载”）应力和应变等级以应力—应变曲线构成。图1.37说明，相应于振动一周应力和应变的完整回转。这种阻尼机制所耗散的能量，近似地与应变幅度的平方成比例*，滞后回线的形状与幅度和应变率关系不大。

由于振幅与应变幅度成比例，所以由于结构阻尼引起每一周所耗散的功U_S，可以写成：

$$U_S=sA^2 \qquad (h)$$

式中s为一代表比例的纯量。令（e）式与（h）式相等，得出等效粘滞阻力常数为：

$$c_{eq}=\frac{s}{\pi\omega}=\frac{\eta k}{\omega} \qquad (1.49)$$

因子s/π的单位为k的单位，通常s/π用ηk来代替（如方程1.49中），这里无量纲量

$$\eta=\frac{s}{\pi k} \qquad (i)$$

称为结构阻尼因子。这个量可以借定义$c_{cr}=2pm$〔见第1.8节方程(n)〕去除方程(1.49)，

* A.L. Kimball, “Vibration Damping, Including the Case of solid Damping”, Trans, ASME, Vol. 51, 1929, p. APM-227.

并应用符号 $k=p^2m$〔从第1.9节方程（b）〕与等效粘滞阻尼比γ_{eq}联系起来：

$$\gamma_{eq}=\frac{c_{eq}}{c_{cr}}=\frac{p}{2\omega}\eta \tag{1.50}$$

当γ_{eq}的这个定义代入方程（1.47）时，稳态反应的放大因子成为：

$$\beta_S=\frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2/p^2)^2+\eta^2}} \tag{j}$$

最后，在共振时，我们得到$\gamma_{res}=\eta/2$，$\beta_{res}=1/\eta$，从方程（1.49）和（g）得到：

$$A_{max}=\frac{Q}{k\eta} \tag{k}$$

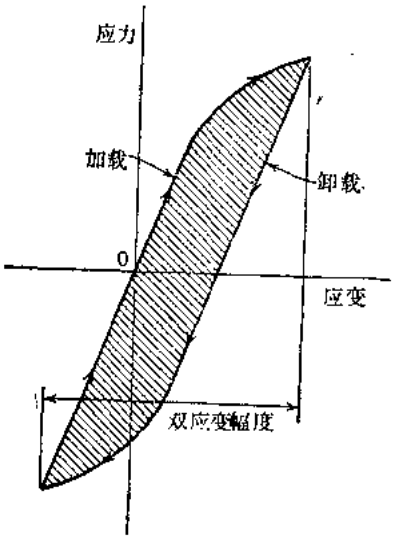


图 1.37

作为确定等效粘滞阻尼的第二个例题，考虑图1.38，该图中，一个附于弹簧上的物体在一面上滑动，该面对运动提供摩阻力。在干摩擦情况下，经常用到库仑定律，它假设摩擦力F与作用于两面之间的法向力N成正比，因而：

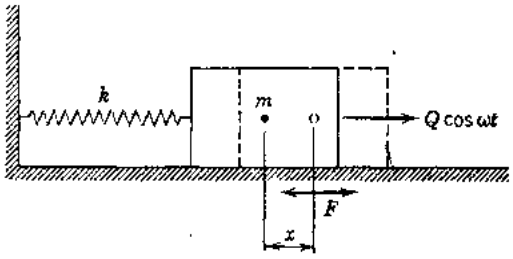


图 1.38

$$F=\mu N \tag{l}$$

式中μ为摩擦系数。实验说明，低速度运动过程中，摩擦系数几乎为常数（小于静力值）。另外，不是滑动摩擦，而是滚动摩擦情况，也可以按方程（l）处理。

图1.38中的摩擦力，通常作用于与物体的速度相反的方向，如在阻尼器情况下那样。然而，摩阻力假设为常数，与速度无关。这种阻尼机制，称为库仑阻尼。当它作用时，系统对谐和施力函数的反应的精确解*，比粘滞阻尼的情况的解要较复杂。为了确定用于代替摩阻力的等效粘滞阻尼常数，我们计算每一周由于摩擦力F所耗散的功U_F：

$$U_F=4AF \tag{m}$$

令此式等于方程（e），我们得到：

$$c_{eq}=\frac{4F}{\pi A\omega} \tag{1.51}$$

在这种情况下，c_{eq}的大小，不仅取决于F和ω，而且还取决于振幅A。借定义$c_{cr}=2pm$除方程（1.51），并应用符号$k=p^2m$，我们写出等效粘滞阻尼比为：

$$\gamma_{eq}=\frac{c_{eq}}{c_{cr}}=\frac{2F}{\pi Ak\omega} \tag{1.52}$$

当用此γ_{eq}公式时，具有等效粘滞阻尼的稳态强迫振动的振幅成为：

---

* J.P.Den Hartog, "Forced Vibrations With Combined Coulomb and Viscous Damping", Trans. ASME, Vol. 53, 1931, p.APM-107.

地信网论坛 BBS.3500L.COM

$$A=\frac{Q/k}{\sqrt{(1-\omega^2/p^2)^2+(4F/\pi Ak)^2}} \qquad (n)$$

对A求解，我们得到：

$$A=\pm\frac{Q}{k}\cdot\frac{\sqrt{1-(4F/\pi Q)^2}}{1-\omega^2/p^2} \qquad (1.53)$$

方程（1.53）右边第一个因子代表静荷重位移，第二个为放大因子。我们看到，仅当，

$$\frac{F}{Q}<\frac{\pi}{4} \qquad (o)$$

时，此因子有一实值。

在实际应用中，我们通常涉及很小的摩擦力，这个条件是满足的。然而，也观察到在条件（o）得到满足的所有情况下，在共振时（此时$\omega=p$），放大因子成为无穷大。如果我们将共振时所耗散的能量U_F与施力函数所做的功U_Q相比较，那么这一事实可以得到说明。求解条件（o）中的F，并将它代入方程（m），我们得到：

$$U_F<\pi Q A \qquad (p)$$

但是方程（o）说明共振时U_Q的值为$\pi Q A$。所以，我们得出结论：

$$U_F<U_Q \qquad (q)$$

这样，每一周所耗散的能量小于输入的能量。

这个事实，在图1.36中作了说明。只要条件（o）是满足的，该图代表方程（m）的虚线，表明其斜度小于代表（c）的实线。

为了用作等效粘滞阻尼概念的第三个例子，我们转到一个浸于低粘度流体（如空气）中振动着的物体的情况。如果该物体的质量很小，而其体积很大，那么，流体阻力的阻尼影响可能是很重要的。图1.39描述一个在空气中受到强迫振动的空心轻球，对于这种情况，由于流体所产生的阻力，可以用下式近似表示*：

$$P=\frac{1}{2}\rho\dot{x}^2C_DA_P \qquad (r)$$

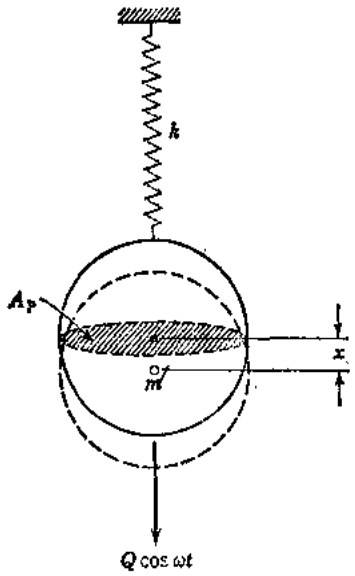


图 1.39

方程（r）中符号ρ代表流体的质量密度，C_D为阻力系数，A_P表示该物体投影于垂直运动方向的平面上的面积（见图1.39）。在这种情况下，其阻力与速度的平方成正比，并且总是顺速度的相反方向作用。每一周由于力P所耗散的功U_P借下式给出：

$$U_P=4\int_0^{T/4}P\dot{x}dt \qquad (s)$$

* J.K.Vennard, Elementary Fluid Mechanics, 4th ed., Wiley, New York, 1961。阻力系数C_D不是常数，而随雷诺（Reynold）数而变，而该数为速度的函数。在现在讨论中，自然应用的是C_D的平均值。

地信网论坛 BBS.3500L.COM

将方程（r）和（b）代入方程（s），并令 $C_P=\frac{1}{2}\rho C_D A_P$，我们得到：

$$U_p=4C_P A^3\omega^3\int_0^{T/4}\sin^3(\omega t-\theta)dt$$

积分得出：

$$U_p=\frac{8}{3}C_P A^3\omega^2 \qquad (t)$$

令此式等于方程（e），得出：

$$c_{eq}=\frac{8C_P A\omega}{3\pi} \qquad (1.54)$$

这样，在这种情况下，等效粘滞阻尼直接与 C_P、A和 ω 成比例。如同前面那样，我们用 $c_{cr}=2pm$去除方程（1.54），并应用 $k=p^2m$，得到等效粘滞阻尼比为：

$$\gamma_{eq}=\frac{c_{eq}}{c_{cr}}=\frac{4C_P A\omega p}{3\pi k} \qquad (1.55)$$

稳态强迫振动的振幅成为：

$$A=\frac{Q/k}{\sqrt{(1-\omega^2/p^2)^2+(8C_P A\omega^2/3\pi k)^2}} \qquad (u)$$

将方程（u）平方，并重新排列各项，得出下列四次多项式：

$$\left(\frac{8C_P\omega^2}{3\pi}\right)^2 A^4+k^2\left(1-\frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 A^2-Q^2=0 \qquad (1.56)$$

它必需用二次公式求解出A^2。于是，振动的振幅按 $A=\sqrt{A^2}$计算。

归纳起来，对于任何耗散机制，总是可以借假设的粘滞阻尼器的功等于实际机制的功确定出等效粘滞阻尼常数。功的表达式，建于该系统对谐和施力函数稳态反应的速度〔方程（b）〕之上。等效粘滞阻尼常数确定为：

$$c_{eq}=\frac{1}{\pi A^2\omega}\int_0^T R\dot{x}\,dt=\frac{U_R}{\pi A^2\omega} \qquad (1.57)$$

式中符号R表示阻力。然后应用这样所得的 c_{eq}值，可以进行系统的简化动力分析。另外，可以同时处理一种以上的阻尼。例如：对于库仑阻尼与粘滞阻尼的组合，我们从方程(1.57)求出：

$$c_{eq}=\frac{4F}{\pi A\omega}+c \qquad (v)$$

按前面那样用这个c_{eq}值进行，我们得到下列用以确定强迫振动时振幅A的方程：

$$\left[\left(1-\frac{\omega^2}{p^2}\right)^2+\left(2\gamma\frac{\omega}{p}\right)^2\right]A^2+\frac{16F\gamma\omega}{\pi kp}A+\left(\frac{4F}{\pi k}\right)^2-\frac{Q^2}{k^2}=0 \qquad (w)$$

它必须用二次公式求解。

1.11 一般周期干扰力

在所有前面的强迫振动讨论中，我们假设简谐施力函数与$\sin\omega t$或 $\cos\omega t$ 成比例。一般地说，有可能碰到较为复杂的周期施力函数。本节中将讨论一个自由度系统对这种函数的反应。

例如，考虑图1.40中所示一个气缸的引擎，当这种引擎具有不平衡的往复部分，它将产生引起整个系统振动的周期干扰力。在研究这种强迫振动中，我们需要知道该干扰力确切的性质。特别重要的是它的周期与系统的固有周期有关系。

在干扰力的分析中，活塞杆的质量可以足够精确地用两个质量来代替，第一个质量位于曲柄销钉处，第二个位于活塞处，运动中所有不平衡的质量，可以容易地都简化到这两点处，因而最后只需要考虑M_1和M_2两个质量（见图1.40）。如果我们取向下的力为正，那么质量M_1的惯性力的竖直分量为：

$$F_1=-M_1\omega^2 r\cos\omega t \qquad (a)$$

式中ω为曲柄轴的角速度，r为曲柄的半径，ωt为曲柄与竖直轴线的夹角。

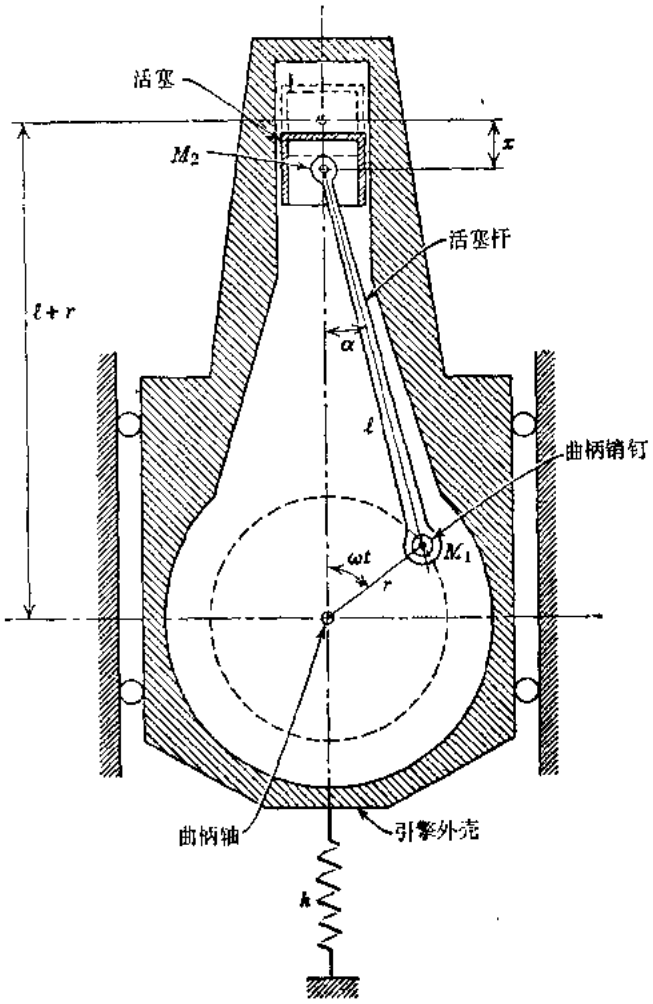


图 1.40

往复质量M_2的运动是较复杂的。令x表示从顶上静止中心位置算起的M_2的位移，还令α为活塞杆与竖直轴线之间的夹角。从图上的几何关系下，我们得出：

$$x=l(1-\cos\alpha)+r(1-\cos\omega t) \qquad (b)$$

和

$$r\sin\omega t=l\sin\alpha \qquad (c)$$

从（c），

$$\sin\alpha=\frac{r}{l}\sin\omega t$$

活塞杆的长度l通常要比曲柄半径大好几倍，因而可以足够精确地假设：

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\frac{r^2}{l^2}\sin^2\omega t}\approx 1-\frac{r^2}{2l^2}\sin^2\omega t$$

它只包括实际表达式的二次展开式中前两项。将此近似式代入方程（b），我们得到：

$$x=r(1-\cos\omega t)+\frac{r^2}{2l}\sin^2\omega t \qquad (d)$$

将此方程对时间进行微分，我们求出往复质量M_2的速度为：

$$\dot{x}=r\omega\sin\omega t+\frac{r^2\omega}{2l}\sin 2\omega t$$

二次微分得到其加速度，因此质量M_2的惯性力为：

地信网论坛 BBS.3500I.COM

$$F_2 = -M_2\omega^2 r\left(\cos\omega t + \frac{r}{l}\cos 2\omega t\right) \qquad (e)$$

将此结果与（a）合并，我们得到干扰力的完整的表达式为：

$$F(t) = -(M_1 + M_2)\omega^2 r\cos\omega t - \frac{r}{l}M_2\omega^2 r\cos 2\omega t \qquad (f)$$

应注意，此表达式由两项组成，一项具有等于机械速率的角频率，另一项具有等于该速率两倍的角频率。从这一事实可以得出结论，在现在考虑的情况下，我们的引擎具有两个临界速率：第一个是在每秒机器旋转次数等于该系统的固有频率 $f = \frac{1}{\tau}$ 时，第二个是在机器的旋转次数为此频率的一半时。借适当选择弹簧刚度 k，总是有可能使固有频率足够地远离这种临界速率，按此种方式消去大的振动的可能性。

必须回顾，往复质量的惯性力的表达式（e），是借取$\cos\alpha$的二项展开式中前两项来得到的。较精确的解还将包括较高阶的谐函数，得出比上面所考虑的要低的临界速率。然而，通常这些对实用不重要，因为相应的力使系统产生实质性的振动是太小了。

一般来说，任何一种周期干扰力都可以用三角（或傅里叶）级数的形式来表示：

$$F(t) = a_0 + a_1\cos\omega t + a_2\cos 2\omega t + \cdots + b_1\sin\omega t + b_2\sin 2\omega t + \cdots$$

$$= a_0 + \sum_{i=1}^{\infty}(a_i\cos i\omega t + b_i\sin i\omega t) \qquad (1.58)$$

干扰力的周期 $T = 2\pi/\omega$，a_0、a_i和b_i诸量均为待定常数。

为了求算方程（1.58）中的任何一个系数，只要$F(t)$为已知，就可以采用下面的方法。假设系数a_i是所需要求的，那么方程的两边可以用$\cos i\omega t\,dt$去乘，并从 $t = 0$ 积分到 $t = T$。可以证明：

$$\int_0^T a_0\cos i\omega t\,dt = 0 \qquad \int_0^T a_j\cos j\omega t\cos i\omega t\,dt = 0$$

$$\int_0^T b_j\sin j\omega t\cos i\omega t\,dt = 0 \qquad \int_0^T a_i\cos^2 i\omega t\,dt = \frac{a_i}{2}T = a_i\frac{\pi}{\omega}$$

式中 i 和 j 表示整数 1，2，3，…，借应用这些公式，我们从方程（1.58）得到：

$$a_i = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\cos i\omega t\,dt \qquad (1.59a)$$

按同样的方式，借$\sin i\omega t\,dt$乘方程（1.58），并积分，我们得到：

$$b_i = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\sin i\omega t\,dt \qquad (1.59b)$$

最后，用dt乘方程（1.58），并从 $t = 0$ 积分到 $t = T$，我们得到：

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T F(t)\,dt \qquad (1.59c)$$

可以看到，如果$F(t)$按分析为已知，那么借应用公式（1.59），方程（1.58）中的诸系数就可以求算出来。如果$F(t)$按图解给出，而无分析式可以用，那么，对计算积分（1.59）需要采用某一近似数值法。

地信网论坛 BBS.3500L.COM

假设干扰力用三角级数形式表示，我们将阻尼强迫振动方程写成：

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = a_0 + a_1\cos\omega t + a_2\cos 2\omega t + \cdots + b_1\sin\omega t + b_2\sin 2\omega t + \cdots \tag{1.60}$$

此方程的通解，将由两部分组成，一个是自由振动的解，另一个是强迫振动的解。由于阻尼，自由振动将逐渐减小。借叠加级数（1.58）的每一项所产生的稳态强迫振动，得到一线性方程的强迫振动。这些后面的振动，可以按第1.9节所说明的相同方式来求得，并且可以得出结论：当级数（1.58）内诸项之一的周期与系统的固有振动周期相吻合，亦即如果干扰力的周期 T 等于周期 τ_d 或为它的倍数，那么可能发生大的强迫振动。

例题1 对于图1.40中所示系统，给予下列数据：

活塞的重量，$W_p = 6.00$ 磅；

活塞杆的重量，$W_C = 3.00$ 磅；

$$M_1 g = 2/3 W_C = 2.00 \text{磅}；$$

$$M_2 g = W_p + 1/3 W_C = 7.00 \text{磅}；$$

引擎的总重量，$W = 500$ 磅；

引擎的速率 $= 600$ 转/分；

曲柄半径，$r = 8$ 英寸；

活塞杆的长度，$l = 24$ 英寸；

弹簧刚度，$k = 11{,}500$ 磅-英寸；

略去阻尼，试求引擎在系统的稳态强迫振动过程中距其平衡位置的最大位移。假设曲柄轴是完全平衡的。

解：我们从计算该系统振动的固有角频率开始。

$$p = \sqrt{\frac{kg}{W}} = \sqrt{\frac{(11{,}500)(386)}{(500)}} = \sqrt{8878} = 94.3 \text{秒}^{-1}$$

另外，

$$\omega = \frac{(600)(2\pi)}{(60)} = 20\pi = 62.83 \text{秒}^{-1}$$

我们求出：

$$\frac{\omega}{p} = \frac{62.83}{94.3} = \frac{2}{3} \qquad \frac{2\omega}{p} = \frac{4}{3}$$

从这些比值，我们看到，与 $\cos\omega t$ 成比例的干扰力在共振以下进行工作，而与 $\cos 2\omega t$ 成比例的干扰力则在共振以上进行工作。略去干扰力的较高频率分量，我们只选加方程（a）和（e）所表示的惯性力的影响，并且合并于上面（f）中。将这些项写成下列形式：

$$P_1\cos\omega t = -(M_1 + M_2)\omega^2 r\cos\omega t$$

$$P_2\cos 2\omega t = -\frac{r}{l}M_2\omega^2 r\cos 2\omega t \tag{g}$$

我们得到：

$$P_1 = -(M_1 + M_2)\omega^2 r = -\left(\frac{2+7}{386}\right)(400\pi^2)(8) = -736 \text{磅}$$

$$P_2 = -\frac{r}{l}M_2\omega^2 r = -\left(\frac{8}{24}\right)\left(\frac{7}{386}\right)(400\pi^2)(8) = -191 \text{磅}$$

现在回到第1.6节中的方程（1.24），我们发现，由于两个干扰力〔方程（g）〕分别产生

地信网论坛 BBS.3500L.COM

的无阻尼强迫振动为：

$$x_1=\frac{P_1}{k}\left(\frac{1}{1-\omega^2/p^2}\right)\cos\omega t=\frac{-736}{11,500}\left(\frac{1}{1-4/9}\right)\cos\omega t=-0.115\cos\omega t$$

$$x_2=\frac{P_2}{k}\left(\frac{1}{1-4\omega^2/p^2}\right)\cos2\omega t=\frac{-191}{11;500}\left(\frac{1}{1-16/9}\right)\cos2\omega t=0.0214\cos2\omega t$$

对于最大位移，我们取$\omega t=\pi$，于是：

$$(x_1+x_2)_{max}=0.115+0.0214=0.136\text{英寸}$$

例题 2 有一个为一个自由度的系统，承受按图1.41中所示按时间变化的干扰力$F(t)$，略去阻尼，如果质量m和弹簧常数k使$\omega/p=0.9$，试求出将要产生的稳态强迫振动。

解：我们从对所给的力作谐波分析着手，假设该力可以用三角级数（1.58）来表示。为此，我们取定义级数中系数a_0、a_i和b_i的方程（1.59）。

首先考虑方程（1.59c），我们看到，$\int_0^{2\pi/\omega}F(t)dt$简单地为图1.41中纵坐标$t=0$和$t=T=2\pi/\omega$之间所给锯齿图下面的面积。显然此面积为零，因此$a_0=0$。

其次考虑方程（1.59a），我们看到，图1.41中图解的每一纵坐标需要用$\cos i\omega t$相乘，然后从$t=0$积分到$t=2\pi/\omega$。现在从$F(t)$对$t=\pi/\omega$成反对称，以及$\cos i\omega t$对这相同时间为对称，我们又得出结论：方程（1.59a）中的积分变为零，所以$a_i=0$。

最后，考虑方程（1.59b），我们看到图1.41中$F(t)$的每一纵坐标需要乘以$\sin i\omega t$，并从$t=0$积分到$t=2\pi/\omega$。在这种情况下，$F(t)$从$t=0$至$t=\pi/\omega$对，$t=\pi/2\omega$成对称，而从$t=\pi/\omega$至$t=2\pi/\omega$对$t=3\pi/2\omega$成对称。然而，当i为一偶整数时，$\sin i\omega t$的相应部分分别对$t=\pi/2\omega$和$t=3\pi/2\omega$成反对称。这样，对于$i=2$，4，6，…，我们得出结论$b_i=0$。

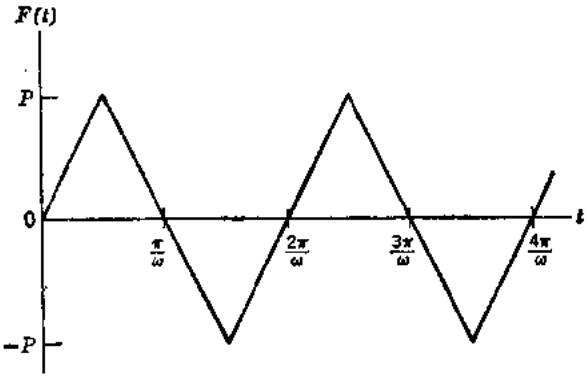


图 1.41

当i为一奇整数时，$F(t)$和$\sin i\omega t$二者对纵坐标$t=\pi/\omega$均为反对称，方程(1.59b)给出：

$$b_i=\frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega}F(t)\sin i\omega t\,dt=\frac{4\omega}{\pi}\int_0^{\pi/2\omega}F(t)\sin i\omega t\,dt \qquad (h)$$

参见图1.41，我们看到在$t=0$到$t=\pi/2\omega$的间隔中：

$$F(t)=\frac{2P\omega t}{\pi}$$

将此式代入方程（h），我们得到：

$$b_i=\frac{8P\omega^2}{\pi^2}\int_0^{\pi/2\omega}t\sin i\omega t\,dt=\frac{8P}{i^2\pi^2}\int_0^{i\pi/2}u\sin u\,du$$

进行积分并代入界限，得到：

地信网论坛 BBS.3500L.COM

$$b_i=\frac{8P}{i^2\pi^2}\sin\frac{i\pi}{2}=\frac{8P}{i^2\pi^2}(-1)^{(i-1)/2}\quad (i)$$

式中 $i=1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots$。

采用$a_0=0$，$a_i=0$和b_i的（i）式，我们发现三角级数（1.58）成为：

$$F(t)=\frac{8P}{\pi^2}\left(\sin\omega t-\frac{1}{3^2}\sin3\omega t+\frac{1}{5^2}\sin5\omega t-\cdots\right)\quad (j)$$

所以，为了用三角级数表示图1.41中的锯齿图，我们只需要将自 $t=0$ 至 $t=2\pi/\omega$ 的间隔内全波中诸奇数正弦曲线迭加起来。另外，我们看到，级数（j）收敛很快，因而只有第一项是重要的。亦即锯齿形干扰力近似地产生与借下式所给稍小幅度的正弦干扰力相同的影响：

$$F(t)=\frac{8P}{\pi^2}\sin\omega t\quad (k)$$

为了判断第二项没有意义，我们考虑对于$\omega/p=0.9$其放大因子为：

$$\beta_3=\frac{1}{1-(3\omega/p)^2}=-0.159$$

这样，由于第二项所产生的强迫振动的振幅仅为力 $8P/\pi^2$ 静止地产生的 $0.159/3^2=0.0177$ 倍，然而第一项的放大因子为：

$$\beta_1=\frac{1}{1-\omega^2/p^2}=5.26$$

我们得出结论：应用近似式（k）所得的误差小于0.4%，其反应的近似解为：

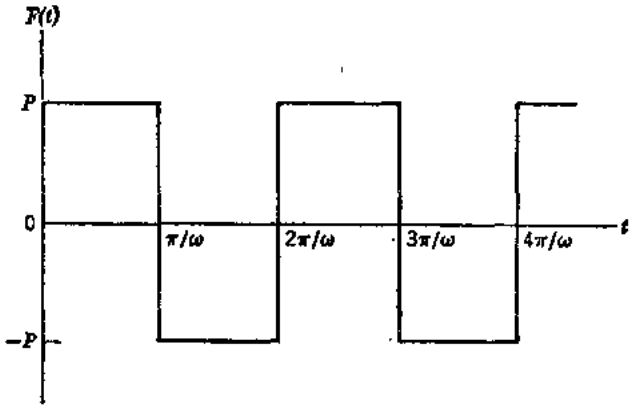
$$x=\frac{8P\beta_1}{\pi^2 k}\sin\omega t\quad (l)$$

习 题 组 1.11

1.11—1 试用上面例题 1 的数据作出图 1.40 中系统的稳态强迫振动的位移—时间曲线 $x=f(t)$。

1.11—2 试将图中用图解所表示的干扰力$F(t)$展开成三角级数。

答：$F(t)=\frac{4P}{\pi}\left(\sin\omega t+\frac{1}{3}\sin3\omega t+\cdots\right)$。

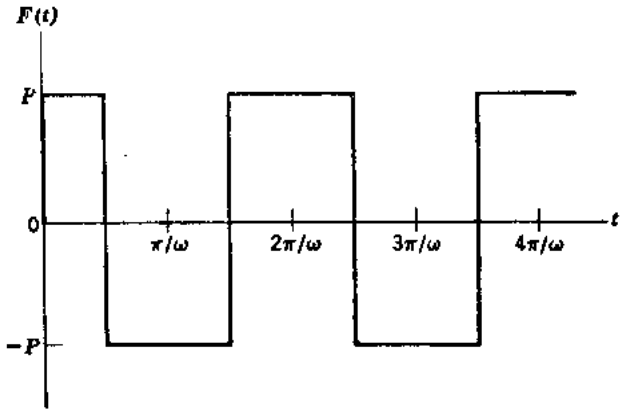


习题 1.11—2

1.11—3 试将图中用图解所表示的干扰力$F(t)$展开成三角级数。

答：$F(t)=\frac{4P}{\pi}\left(\cos\omega t-\frac{1}{3}\cos3\omega t+\cdots\right)$。

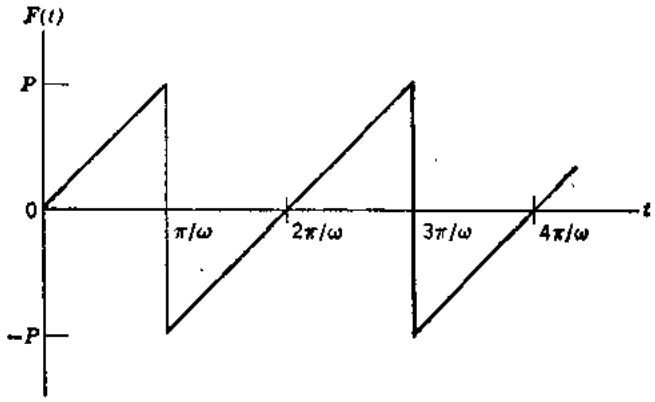
地信网论坛 BBS.3500L.COM



习题 1.11—3

1.11—4 试将图中用图解所表示的干扰力$F(t)$展开成三角级数。

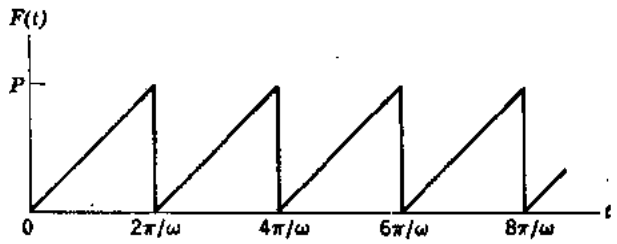
答：$$F(t)=\frac{2P}{\pi}\left(\sin\omega t-\frac{1}{2}\sin 2\omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t-\cdots\right)。$$



习题 1.11—4

1.11—5 试将图中用图解所表示的干扰力$F(t)$展开成三角级数。

答：$$F(t)=\frac{P}{2}-\frac{P}{\pi}\left(\sin\omega t+\frac{1}{2}\sin 2\omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t+\cdots\right)。$$



习题 1.11—5

1.11—6 试导出一个自由度系统受到方程(1.58)所表达的施力函数的阻尼稳态强迫振动的一般表达式。

答：$$x=\frac{a_0}{k}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i\cos(i\omega t-\theta_i)+b_i\sin(i\omega t-\theta_i)}{k\sqrt{(1-i^2\omega^2/p^2)^2+(2\gamma i\omega/p)^2}}$$

地信网论坛 BBS.3500L.COM

1.12 任意干扰力

在前节中，我们考虑了可以用傅里叶级数形式表示的周期干扰力的一般情况。然而，对于无周期性的任意干扰力的情况，其问题应采取稍微不同的方法。

现在让我们考虑，承受任意施力函数 $Q=F(t')$ 的一个自由度阻尼系统（见图 1.42 a）的运动微分方程：

$$m\ddot{x}=-c\dot{x}-kx+Q \qquad (a)$$

用质量 m 去除方程（a），并重新排列诸项，我们得到：

$$\ddot{x}+2n\dot{x}+p^2x=q \qquad (1.61)$$

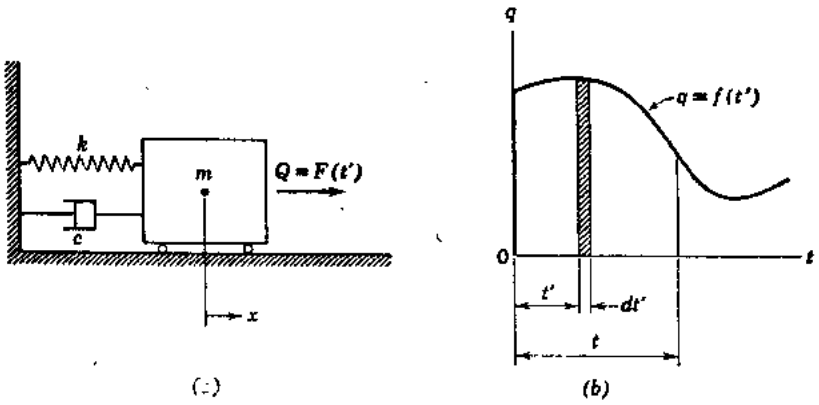


图 1.42

式中

$$q=\frac{Q}{m}=\frac{F(t')}{m}=f(t') \qquad (b)$$

它为单位质量的干扰力。在讨论方程（1.61）时，我们假设力 q 表达为虚构时间变数 t' 的函数，如图1.42 b 所示，于是在任何时刻 t'，我们可以计算出图解中阴影线窄条所代表的增量冲量 $q\,dt'$。此冲量给每一单位质量的速度瞬时增加（或增量速度）等于：

$$d\dot{x}=q\,dt' \qquad (c)$$

不管有什么其它力作用于它上面（例如弹簧力），也不管时刻 t' 处质量的位移和速度，将此速度增量好像初始速度(在时刻 t' 处)那样来处理，并应用第1.8节中方程（1.35），我们得出结论，在任何后面时间 t 处，系统的增量位移将为：

$$dx=e^{-n(t-t')}\frac{q\,dt'}{p_d}\sin p_d(t-t') \qquad (d)$$

由于 $t'=0$ 和 $t'=t$ 之间，每一增量冲量 $q\,dt'$ 有这样一种效应，于是干扰力 q 的连续作用，我们得到总位移为：

$$x=\frac{e^{-nt}}{p_d}\int_0^t e^{nt'}q\sin p_d(t-t')\,dt' \qquad (1.62)$$

这种数学形式，称为杜哈梅积分（Duhamels' integral）。

地信网论坛 BBS.3500L.COM

(1.62) 式，代表由于作用在时间间隔 0 至 t 过程中，干扰力 q 所产生的整个位移，它包括稳态项和瞬态项，在研究一振动系统对任何一种干扰力的反应中是特别有用的。如果函数 $q=f(t')$不能用分析表达，那么方程 (1.62) 中的积分，总可以用一适当的图解或积分的数值法来近似求算。为了考虑 $t=0$ 处初始位移x_0和初始速度$\dot{x}_0$的影响，只需要将方程 (1.62) 的结果与借第 1.8 节中方程 (1.15) 所给出的这种初始条件的解加起来。这样，其全解为：

$$x=e^{-nt}\left[x_0\cos p_d t+\frac{\dot{x}_0+nx_0}{p_d}\sin p_d t+\frac{1}{p_d}\int_0^t e^{nt'}q\sin p_d(t-t')dt'\right] \tag{1.63}$$

如果略去阻尼，我们取 $n=0$ 和$p_d=p$，对于这样一种情况，方程 (1.62) 简化为：

$$x=\frac{1}{p}\int_0^t q\sin p(t-t')dt' \tag{1.64}$$

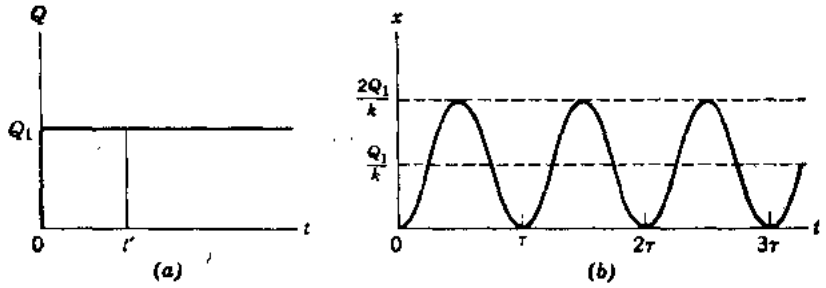


图 1.43

在此情况下，如果我们也考虑 $t=0$ 处初始位移x_0和初始速度$\dot{x}_0$的影响，那么无阻尼的方程 (1.63) 成为：

$$x=x_0\cos pt+\frac{\dot{x}_0}{p}\sin pt+\frac{1}{p}\int_0^t q\sin p(t-t')dt' \tag{1.65}$$

作为应用方程 (1.64) 的例子，让我们假设一个常数力Q_1(见图1.43 a)，突然作用于图1.42 a 中的质量上，这种动力加载条件，称为阶梯函数。在此情况下，我们取$q_1=\frac{Q_1}{m}=$常数，方程 (1.64) 成为：

$$x=\frac{q_1}{p}\int_0^t \sin p(t-t')dt' \tag{e}$$

该积分容易求算出如下：

$$x=\frac{q_1}{p^2}(1-\cos pt)=\frac{Q_1}{k}(1-\cos pt) \tag{1.66}$$

从此结果，我们看到一个突然作用的常数力，产生迭加在大小为Q_1/k的静力位移上振幅大小相同为Q_1/k的自由振动 (见图1.43 b)。这样，由于突然作用的力所产生的最大变位，比相同力静止作用所产生的大一倍。

在上面所讨论的情况下，常数力Q_1作用于不定的时间内。当它仅作用时间t_1时，我们

地信网论坛 BBS.3500L.COM

得到图1.44 a 内所示矩形冲量。在力为非零的时间内，系统的反应与方程(1.66)所给相同。在时间t_1以后发生的反应，可以借按 0 至t_1和t_1至 t 两个范围求算杜哈梅积分来得到。仅在第一范围内的积分产生非零的结果，因为在第二范围内施力函数为零。总的说来，对于这种情况的解归纳如下：

对于 $0 \leqslant t \leqslant t_1$

$$x = \frac{Q_1}{k}(1-\cos pt) \qquad \text{(重复1.66)}$$

对于 $t_1 \leqslant t$ •

$$x = \frac{Q_1}{k}[\cos p(t-t_1) - \cos pt] \qquad (1.67)$$

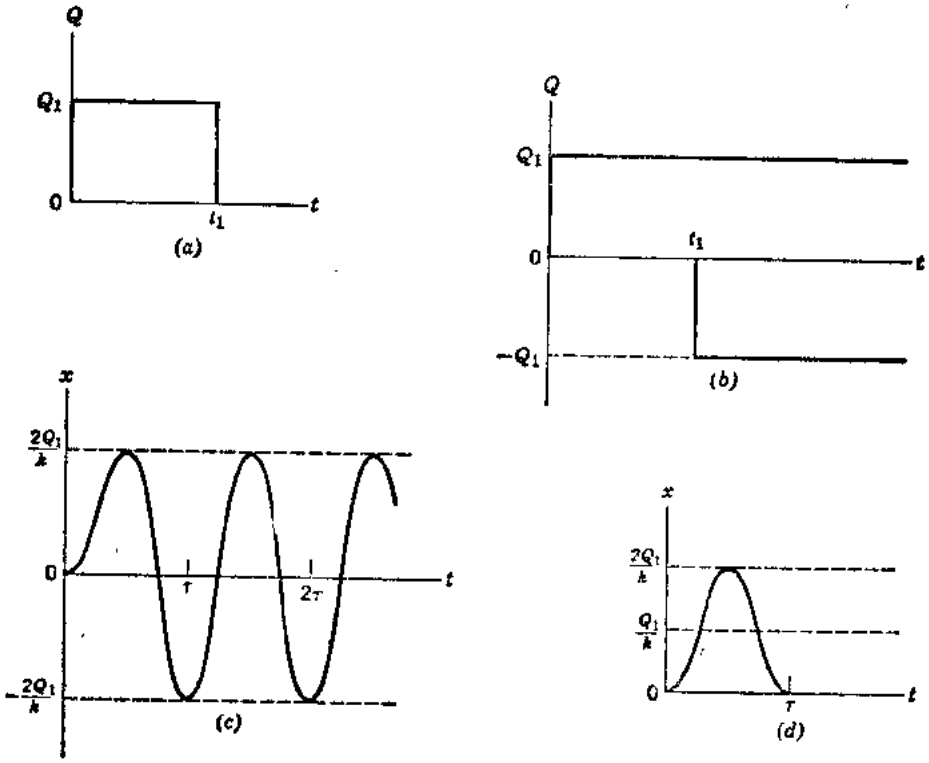


图 1.44

借考虑图1.44 a 中矩形冲量，由图 1.44b中所示两个阶梯函数组成，可以得到相同的结果。第一个阶梯函数（大小为Q_1）开始于 $t=0$，而第二个阶梯函数（大小为$-Q_1$）开始于 $t=t_1$。

确定如方程（1.67）所给结果的第三个方法，涉及应用方程（1.66）求算系统在时间t_1处的位移和速度。这样：

$$x_{t_1} = \frac{Q_1}{k}(1-\cos pt_1) \qquad (f)$$

$$\dot{x}_{t_1} = \frac{Q_1 p}{k}\sin pt_1 \qquad (g)$$

如果把这两个量作为时刻t_1处的初始位移和初始速度，那么，以后的自由振动反应可从下式求算出来：

$$x = x_{t_1}\cos p(t-t_1) + \frac{\dot{x}_{t_1}}{p}\sin p(t-t_1) \qquad (h)$$

将(f)式和(g)式代入方程(h)，进行简单的三角运算，得到与方程（1.67）的相同结果。

地信网论坛 BBS.3500I.COM

矩形冲量之后的自由振动反应的振幅，可以从下式确定：

$$A=\sqrt{x_{t_1}^2+\left(\frac{\dot{x}_{t_1}}{p}\right)^2} \qquad (i)$$

将（f）式和（g）式用于方程（i）中并简化，我们求出：

$$A=\frac{Q_1}{k}\sqrt{2(1-\cos pt_1)}=\frac{2Q_1}{k}\sin(pt_1/2)=\frac{2Q_1}{k}\sin(\pi t_1/\tau) \qquad (j)$$

从上面方程（j）的最后形式，我们看到其自由振动的振幅取决于 t_1/τ 之比，这里 τ 为系统的固有周期。借取矩形冲量的持续时间为 $t_1=\tau/2$，我们得到振幅 $A=2Q_1/k$，其反应如图1.44 c 所示，在这种情况下，力 Q_1 通过位移 0 至 A 作用，在系统上作正功。在端点位置*处该力移去后，系统（没有阻尼）保持这个能量，我们得到由于时间 t_1 处初始位移 $2Q_1/k$ 引起的自由振动。

考虑另一特殊情况，让我们规定冲量的持续时间 $t_1=\tau$。从方程（j），我们得到振幅 $A=0$，其反应如图 1.44 d 所示。在此情况下，常数力 Q_1 从 0 至 A 作正功，从 A 回到 0 作相等量的负功。所以，净功为零，当力移去时，该系统保持静止。

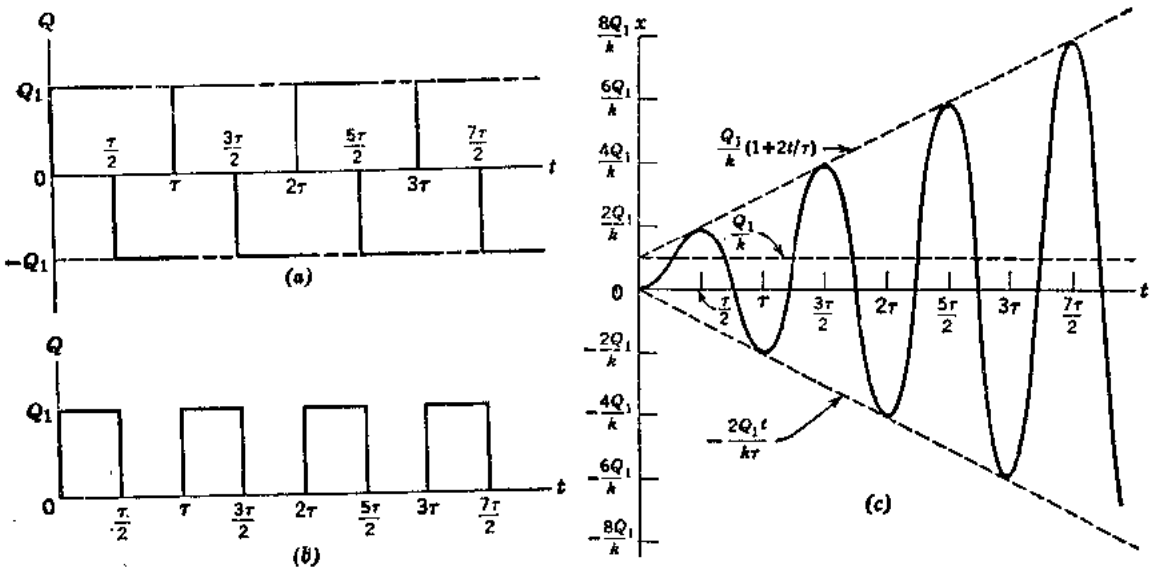


图 1.45

现在假定一系列，如图1.45 a 中所示带有交替正负号的阶梯函数，产生图1.45 b 中所出现的矩形冲量序列，该连续阶梯函数之间的时间差规定为 $\tau/2$，因而冲击的作用总是与速度同相，而且在振动的每一周中将作正功。从迭加原理，我们可以作出结论，在 n 个矩形冲量作用之后，自由振动的振幅为：

$$A_n=\frac{2nQ_1}{k} \qquad (k)$$

亦即，在振动的每一周中，振幅增大 $2Q_1/k$，反应无限地增大。图 1.45 c 说明，表示振动中前几周内这种增大的曲线。从这个说明我们可以作出结论：凡与系统成共振的任何周期施力函数，如果在每一周中作正的净功，那么将产生很大的强迫振动的振幅。另外，用杜哈梅

* 或译极点 (extreme position)。 ——译注

地信网论坛 BBS.3500L.COM

积分计算一般周期施力函数的反应，是为第1.11节中所讨论的另一种方法，在第1.11节中，动力荷载被分解成傅里叶级数。

例题1 试确定一个自由度系统，对图1.46 a 中给出所谓斜坡函数的直线增长力的无阻尼反应。单位时间内力Q的增大率为δQ。

解：本例中以 δQ 和t'表达的施力函数简单地为：

$$Q=\delta Q t' \tag{l}$$

单位质量的力为：

$$q=\frac{\delta Q}{m}t' \tag{m}$$

将方程（1.64）用于这种情况，我们得到：

$$x=\frac{\delta Q}{mp}\int_0^t t'\sin p(t-t')dt'$$

借分部积分，得到：

$$x=\frac{\delta Q}{k}\left(t-\frac{1}{p}\sin pt\right) \tag{n}$$

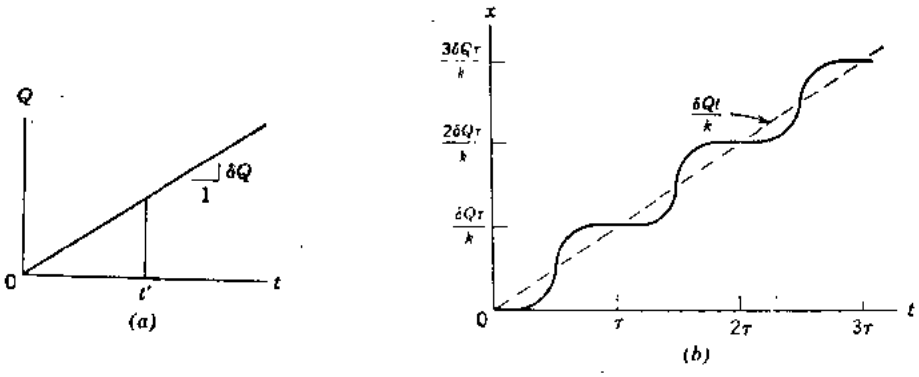


图 1.46

从此结果，我们看到，对于斜坡函数的反应，由线性增大的静力位移 $\delta Q t/k$ 与振幅为$\delta Q/kp$ 的自由振动之和组成，如图 1.46 b 所示。在任何时刻 t 处的速度借（n）式对时间的一次导数来给出。亦即：

$$\dot{x}=\frac{\delta Q}{k}(1-\cos pt)=\frac{\delta Q}{k}\left(1-\cos\frac{2\pi t}{\tau}\right) \tag{o}$$

这样，在时间 $t=0$、τ、2τ、3τ等处，速度为零；因而图1.46 b 中，位移曲线的斜度在 $t=0$、τ、2τ、3τ等处为零。另外，速度总是为正，并在时间$T=\tau/2$、$3\tau/2$、$5\tau/2$ 等处具有最大值$2\delta Q/k$。

（o）式的右边与阶梯函数的方程（1.66）的右边具有相同的数学形式。这是由于斜坡函数与时间成比例而不是与时间成常数这一事实得出来的。我们也可以得出结论：施力函数的抛物线变化，产生与方程（n）的右边相同形式的速度函数，和与方程（o）的右边相同形式的加速度函数。

例题2 让我们重新推导承受谐和函数的一个自由度系统无阻尼强迫振动的表达式。这种情况在前面第1.6节和第1.7节中作过详细讨论和推导。假设施力函数给出如下：

$$Q=Q_{max}\sin\omega t' \tag{p}$$

地信网论坛 BBS.3500L.COM

单位质量的力为

$$q = q_{max}\sin\omega t' \qquad (q)$$

式中 $q_{max} = Q_{max}/m$

将（q）式代入方程（1.64），给出

$$x = \frac{q_{max}}{p}\int_0^t \sin\omega t' \sin p(t-t')dt' \qquad (r)$$

对方程（r）中积分内的乘积应用三角恒等式，我们得到：

$$x = \frac{q_{max}}{2p}\int_0^t \{\cos[\omega t' - pt + pt'] - \cos[\omega t' + pt - pt']\}\ dt'$$

$$= \frac{q_{max}}{2p}\int_0^t \{\cos[(\omega + p)t' - pt] - \cos[(\omega - p)t' + pt]\}\ dt'$$

它可以直接积分。进行积分并简化，我们求出：

$$x = \frac{Q_{max}}{k}\left(\sin\omega t - \frac{\omega}{p}\sin pt\right)\left(\frac{1}{1-\omega^2/p^2}\right) \qquad (s)$$

将此结果与第1.7节中的方程（1.29b）相比较，我们看到它们是相同的。方程（s）中的第一个因子为由于常数荷载Q_{max}所引起系统的静力位移；第二个因子中的诸项，代表系统的稳态反应和瞬态反应；第三个因子为β，是对零阻尼的放大因子。注意反应的瞬态部分包括在杜哈梅积分的结果中，与初始条件无关。

例题3 试对图1.42a中所示系统，确定图1.43a中所给阶梯函数的阻尼反应。

解：在这种情况下，将单位质量的力$q_1 = Q_1/m$代入方程（1.62），以便求算阻尼反应：

$$x = \frac{q_1 e^{-nt}}{p_d}\int_0^t e^{nt'}\sin p_d(t-t')\,dt' \qquad (t)$$

方程（t）可分部进行积分，并写成下面形式：

$$x = \frac{Q_1}{k}\left[1 - e^{-nt}\left(\cos p_d t + \frac{n}{p_d}\sin p_d t\right)\right] \qquad (u)$$

此结果代表静力位移Q_1/k与具有下列振幅和相角的阻尼自由振动（见第1.8节）之和。

$$Ae^{-nt} = \frac{Q_1}{k}e^{-nt}\sqrt{1+\left(\frac{n}{p_d}\right)^2} \qquad (v)$$

$$\alpha_d = \tan^{-1}\frac{n}{p_d} \qquad (w)$$

当令阻尼为零时，方程（u）成为与方程(1.66)相同，振幅A成为等于Q_1/k，相角α_d成为零。

例题4 试对图1.45c中时间范围$5\tau/2 \leqslant t \leqslant 3\tau$导出无阻尼反应曲线的表达式。

解：施力函数是周期性的，具有与系统自身相同的周期。令第i个时间范围定义为周期$(i-1)\tau \leqslant t \leqslant i\tau$，这里$i = 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$，等。按图1.45$a$借应用方程(1.66)，可以写出在第$n$个周期中前半个周期系统的反应的一般表达式。这个表达式为：

$$x_{n_1} = \frac{Q_1}{k}\sum_{i=1}^{n}\left\{1 - \cos p\left[t - (i-1)\tau\right]\right\}$$

地信网论坛 BBS.35001.COM

$$-\frac{Q_1}{k}\sum_{i=1}^{n-1}\left\{1-\cos p\left[t-(2i-1)\frac{\tau}{2}\right]\right\} \qquad (x)$$

类似地，对于第 n 个周期中后半个周期，其反应可写成：

$$x_{n2}=\frac{Q_1}{k}\sum_{i=1}^{n}\left\{1-\cos p[t-(i-1)\tau]-1+\cos p\left[t-(2i-1)\frac{\tau}{2}\right]\right\}$$

$$=\frac{Q_1}{k}\sum_{i=1}^{n}\{\cos[pt-(2i-1)\pi]-\cos[pt-2(i-1)\pi]\}$$

将三角恒等式代入此式，得出：

$$x_{n2}=\frac{Q_1}{k}\sum_{i=1}^{n}\{\cos pt\cos(2i-1)\pi+\sin pt\sin(2i-1)\pi$$

$$-\cos pt\cos 2(i-1)\pi-\sin pt\sin 2(i-1)\pi\}$$

因为$\sin(2i-1)\pi$和$\sin 2(i-1)\pi$总是为零，所以这个方程简化为：

$$x_{n2}=\frac{Q_1}{k}\sum_{i=1}^{n}\{\cos pt[\cos(2i-1)\pi-\cos 2(i-1)\pi]\}$$

类似于上面进一步运算得出最终形式：

$$x_{n2}=-\frac{2nQ_1}{k}\cos pt \qquad (y)$$

所指定的时间范围 $5\tau/2\leqslant t\leqslant 3\tau$ 相当于第二个周期的后半个周期。这样，对于 $n=3$，表达式（y）给出：

$$x_{n2}=-\frac{6Q_1}{k}\cos pt \qquad (z)$$

习 题 组 1.12

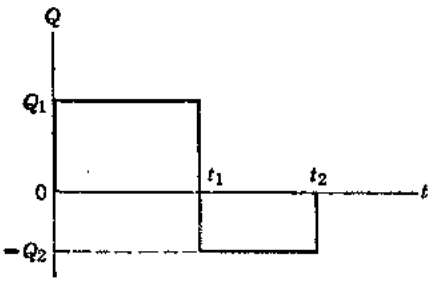
1.12—1 试确定一个自由度系统对图中施力函数的无阻尼反应。

答：$x=\dfrac{Q_1}{k}(1-\cos pt)$ $\qquad (0\leqslant t\leqslant t_1)$

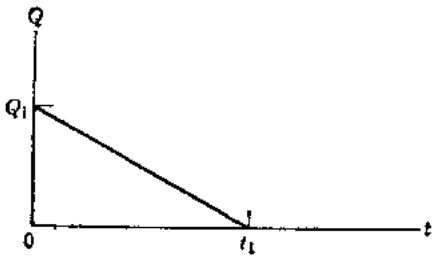
$x=\dfrac{Q_1}{k}[\cos p(t-t_1)-\cos pt]-\dfrac{Q_2}{k}[1-\cos p(t-t_1)]$ $\qquad (t_1\leqslant t\leqslant t_2)$

$x=\dfrac{Q_1}{k}[\cos p(t-t_1)-\cos pt]-\dfrac{Q_2}{k}[\cos p(t-t_2)-\cos p(t-t_1)]$

$\qquad (t_2\leqslant t)$



习题 1.12—1



习题 1.12—2

地信网论坛 BBS.3500L.COM

1.12—2 试确定一个自由度系统对图中施力函数的无阻尼反应。

答：

$$x=\frac{Q_1}{k}\left(1-\cos pt-\frac{t}{t_1}+\frac{\sin pt}{pt_1}\right) \qquad (0\leqslant t\leqslant t_1)$$

$$x=\frac{Q_1}{k}\left[-\cos pt+\frac{\sin pt-\sin p(t-t_1)}{pt_1}\right] \qquad (t_1\leqslant t)$$

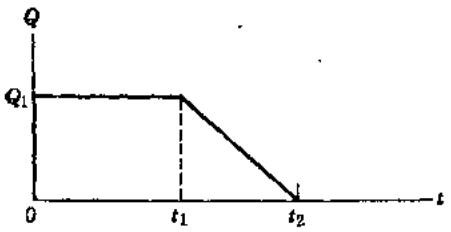
1.12—3 试确定一个自由度系统对图中施力函数的无阻尼反应。

答：

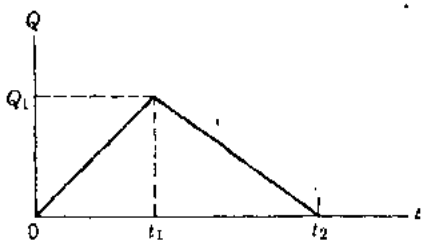
$$x=\frac{Q_1}{k}(1-\cos pt) \qquad (0\leqslant t\leqslant t_1)$$

$$x=\frac{Q_1}{k}\left[1-\cos pt-\frac{t-t_1}{t_2-t_1}+\frac{\sin p(t-t_1)}{p(t_2-t_1)}\right] \qquad (t_1\leqslant t\leqslant t_2)$$

$$x=\frac{Q_1}{k}\left[-\cos pt+\frac{\sin p(t-t_1)-\sin p(t-t_2)}{p(t_2-t_1)}\right] \qquad (t_2\leqslant t)$$



习题 1.12—3



习题 1.12—4

1.12—4 试确定一个自由度系统对图中施力函数的无阻尼反应。

答：

$$x=\frac{Q_1}{k}\left(\frac{t}{t_1}-\frac{\sin pt}{pt_1}\right) \qquad (0\leqslant t\leqslant t_1)$$

$$x=\frac{Q_1}{k}\left[\frac{t}{t_1}-\frac{\sin pt}{pt_1}-\frac{t_2(t-t_1)}{t_1(t_2-t_1)}+\frac{t_2\sin p(t-t_1)}{pt_1(t_2-t_1)}\right] \qquad (t_1\leqslant t\leqslant t_2)$$

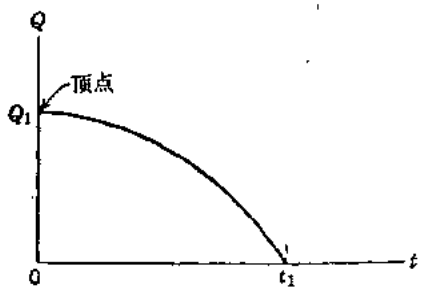
$$x=\frac{Q_1}{k}\left[-\frac{\sin pt}{pt_1}+\frac{t_2\sin p(t-t_1)}{pt_1(t_2-t_1)}-\frac{\sin p(t-t_2)}{p(t_2-t_1)}\right] \qquad (t_2\leqslant t)$$

1.12—5 试确定一个自由度系统对图中抛物线施力函数 $Q=Q_1(1-t^2/t_1^2)$ 的无阻尼反应。

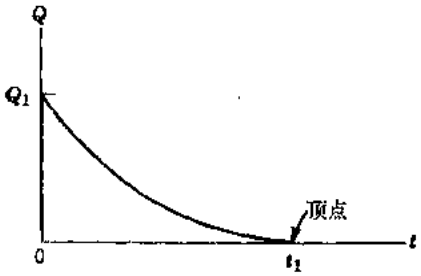
答：

$$x=\frac{Q_1}{k}\left[\left(1+\frac{2}{p^2t_1^2}\right)(1-\cos pt)-\frac{t^2}{t_1^2}\right] \qquad (0\leqslant t\leqslant t_1)$$

$$x=\frac{Q_1}{k}\left\{\frac{2}{p^2t_1^2}[\cos p(t-t_1)-\cos pt]-\frac{2}{pt_1}\sin p(t-t_1)-\cos pt\right\} \qquad (t_1\leqslant t)$$



习题 1.12—5



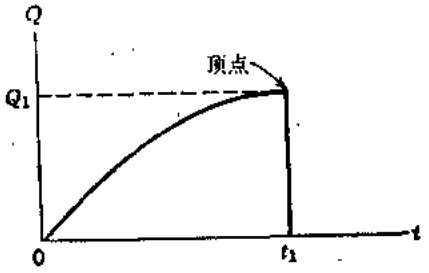
习题 1.12—6

1.12—6 试确定一个自由度系统对图中抛物线施力函数 $Q=Q_1(t-t_1)^2/t_1^2$ 的无阻尼反应。

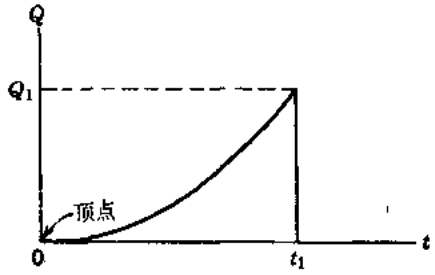
答：
$$x=\frac{Q_1}{k}\left[\left(1-\frac{2}{p^2t_1^2}\right)\left(1-\cos pt\right)-\frac{2t}{t_1}+\frac{t^2}{t_1^2}+\frac{2\sin pt}{pt_1}\right]$$
$$(0\leqslant t\leqslant t_1)$$
$$x=\frac{Q_1}{k}\left\{\frac{2}{p^2t_1^2}[\cos pt-\cos p(t-t_1)]-\cos pt+\frac{2\sin pt}{pt_1}\right\}\qquad(t_1\leqslant t)$$

1.12—7 试确定一个自由度系统对图中三角施力函数 $Q=Q_1\sin\pi t/2t_1$ 的无阻尼反应。

答：
$$x=\frac{Q_1}{k}\left(\sin\omega t-\frac{\omega}{p}\sin pt\right)\beta,\ \omega=\pi/2t_1\qquad(0\leqslant t\leqslant t_1)$$
$$x=\frac{Q_1}{k}\left[\cos p(t-t_1)-\frac{\omega}{p}\sin pt\right]\beta\qquad(t_1\leqslant t)$$



习题 1.12—7



习题 1.12—8

1.12—8 试确定一个自由度系统对图中三角施力函数 $Q=Q_1(1-\cos\pi t/2t_1)$ 的无阻尼反应。

答：
$$x=\frac{Q_1}{k}[1-\cos pt-(\cos\omega t-\cos pt)\beta],\ \omega=\frac{\pi}{2t_1}\qquad(0\leqslant t\leqslant t_1)$$
$$x=\frac{Q_1}{k}\left\{\cos p(t-t_1)-\cos pt+\left[\cos pt+\frac{\omega}{p}\sin p(t-t_1)\right]\beta\right\}\qquad(t_1\leqslant t)$$

1.12—9 试对图1.42 a 中一个自由度系统确定对图1.46 a 中，斜坡函数的阻尼反应。

答：
$$x=\frac{\delta Q}{k}\left[t-\frac{2n}{p^2}+e^{-nt}\left(\frac{2n}{p^2}\cos p_dt-\frac{p_d^2-n^2}{p^2p_d}\sin p_dt\right)\right]$$

1.13 任意支承运动

在某些实际问题中，振动系统的反应是由于支承运动而不是由于直接作用于扰力引起的。由于谐和的支承位移和加速度所引起的强迫振动，已在第1.6节及第1.9节中对无阻尼系统和具有粘滞阻尼作了讨论。本节中，我们将讨论所规定的支承运动为时间的任意函数的情况。

考虑图1.47 a 中有阻尼的一个自由度系统，并令地面位移 x_g 作为一个分析的时间函数给出。对于这种情况，运动方程成为：
$$m\ddot{x}=-c\ (\dot{x}-\dot{x}_g)-k\ (x-x_g)\qquad(a)$$
重新排列方程（a），我们得到：
$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=kx_g+c\dot{x}_g\qquad(b)$$

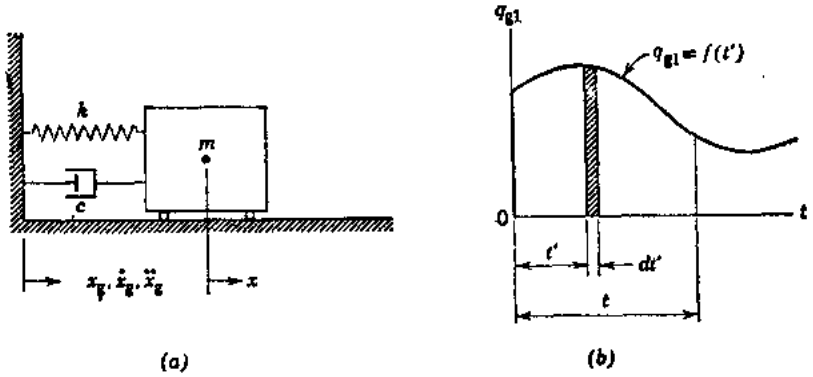


图 1.47

如果x_g的表达式，可以对时间进行微分，那么，我们在方程（b）的右边得到两个分析施力函数。其中的第一个相当于大小为kx_g直接作用于质量上的干扰力，而第二个，相当于大小为$c\dot{x}_g$的相似力。用质量m除方程（b）的两边，我们得到：

$$\ddot{x}+2n\dot{x}+p^2x=q_g=q_{g1}+q_{g2} \tag{1.68}$$

其中

$$q_{g1}=p^2x_g=p^2F(t')=f(t') \tag{c}$$

代表由于支承位移x_g所产生单位质量的等效力，q_{g2}量具有下列定义：

$$q_{g2}=\frac{2n}{p^2}\dot{q}_{g1} \tag{d}$$

如同作用施力函数那样，我们假设位移x_g和相应力q_{g1}表达为虚构时间变量t'的函数（见图1.47b）。

从这点，其分析按类似于作用施力函数的方式来进行。然而，在这种情况下，增量冲量有两部分，在时间t'处增量速度的表达式成为：

$$d\dot{x}=(q_{g1}+q_{g2})\,dt' \tag{e}$$

其中，第一项借图1.47b中的阴影线窄条来表示。在后面任何时间t处，增量位移为：

$$dx=e^{-n(t-t')}\frac{1}{p_d}(q_{g1}+q_{g2})\sin p_d(t-t')dt' \tag{f}$$

由于支承运动的连续效应，质量的总位移成为：

$$x=x_1+x_2=\frac{e^{-nt}}{p_d}\int_0^t e^{nt'}(q_{g1}+q_{g2})\sin p_d(t-t')dt' \tag{1.69}$$

它是比前面第1.12节中方程（1.62）所给的要稍复杂的杜哈梅积分式。

如果略去阻尼，我们得到$n=0$和$p_d=p$；方程（1.69）简化为：

$$x=\frac{1}{p}\int_0^t q_{g1}\sin p(t-t')dt'=p\int_0^t x_g\sin p(t-t')dt' \tag{1.70}$$

其中第一部分在数学上与第1.12节中方程（1.64）相同。

然后，让我们考虑规定地面加速度$\ddot{x}_g$的情况。如第1.6节中对强迫振动所做的那样，我们将应用下列坐标变换：

$$x^*=x-x_g \qquad \dot{x}^*=\dot{x}-\dot{x}_g \qquad \ddot{x}^*=\ddot{x}-\ddot{x}_g \tag{g}$$

地信网论坛 BBS.3500L.COM

其中符号 x^* 表示质量对地面的相对位移。从方程（g）将 $x-x_g$、$\dot{x}-\dot{x}_g$ 和 $\ddot{x}$ 代入方程（a），重新排列，我们得到：

$$m\ddot{x}^* + c\dot{x}^* + kx^* = -m\ddot{x}_g \qquad (h)$$

此方程右边那一项相当于直接作用于质量上大小为 $-m\ddot{x}_g$ 的干扰力。当方程（h）被 m 去除，则可以写成：

$$\ddot{x}^* + 2n\dot{x}^* + kx^* = q_g^* \qquad (1.71)$$

其中

$$q_g^* = -\ddot{x}_g = -f(t') \qquad (i)$$

代表由于地面加速度所产生按相对坐标的施力函数。

方程（1.71）在数学上与第1.12节中方程（1.61）相同，我们可以得出结论，按相对坐标的系统的反应，遵循前面诸情况所熟悉的图式在这种情况下，相对于地面的阻尼反应的杜哈梅积分为：

$$x^* = \frac{e^{-nt}}{p_d}\int_0^t e^{nt'} q_g^* \sin p_d(t-t')\,dt' \qquad (1.72)$$

如果阻尼略去不计，那么方程（1.72）简化成较简单的形式：

$$x^* = -\frac{1}{p}\int_0^t q_g^* \sin p(t-t')\,dt' \qquad (1.73)$$

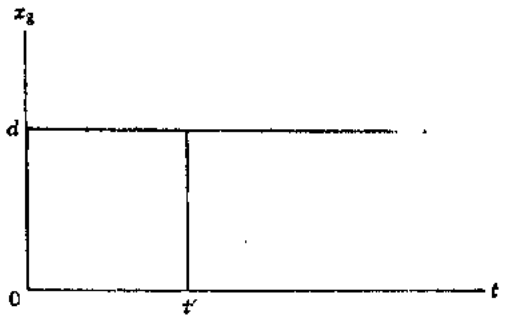


图 1.48

此外，如果地面位移和速度的初始条件已给定，那么系统的绝对反应可以计算出来。

例题 1 假设图1.47 a 中的支承，突然按照图1.48中所给的位移阶梯函数向右运动，试确定，对此瞬时支承位移的无阻尼反应。

解：在此情况下，我们从方程（c）得到 $q_{g1}=p^2d=$ 常数，方程（1.70）给出无阻尼反应：

$$x = pd\int_0^t \sin p(t-t')\,dt' = d(1-\cos pt) \qquad (j)$$

它与方程（1.66）相同，但是 Q_1/k 为常数 d 所代替。这样，我们看到该反应由迭加在相同大小的静力位移 d 上，振幅为 d 的自由振动所组成。

例题 2 作为应用方程（1.69）的说明，让我们考虑图 1.49 中所给支承位移的斜坡函数。图中直线的坡度在单位时间内为 δd。试导出由于这种支承运动所引起图 1.47 a 中系统的阻尼反应表达式。

解：支承位移以 t' 和 δd 表达为：

$$x_g = t'\delta d \qquad (k)$$

方程（c）中施力函数成为：

$$q_{g1} = p^2 t'\delta d \qquad (l)$$

方程（d）所给单位质量的等效力的第二部分为：

$$q_{g2} = 2n\delta d \qquad (m)$$

从方程（l）和（m）将 q_{g1} 和 q_{g2} 的表达式代入方程（1.69），我们得到：

地信网论坛 BBS.3500I.COM

$$x=x_1+x_2=\frac{\delta d e^{-nt}}{p_d}\int_0^t e^{nt'}(p^2t'+2n)\sin p(t-t')dt' \qquad (n)$$

进行所示的积分，对于第一部分我们得到：

$$x_1=\frac{\delta d}{p^2}\left\{p^2t-2n+e^{-nt}\left[2n\cos p_dt+\frac{1}{p_d}(n^2-p_d^2)\sin p_dt\right]\right\} \qquad (o)$$

对于第二部分，得到：

$$x_2=2n\delta d\left[1-e^{-nt}\left(\cos p_dt+\frac{n}{p_d}\sin p_dt\right)\right] \qquad (p)$$

第一部分的结果，由图 1.46 b 中所示类型的反应组成，但是振动逐渐减小。当令阻尼为零时，方程（o）成为与第1.12节中方程（n）相同，只是δd代替$\delta Q/k$。此外，对于第二部分的方程（p）中的结果与第1.12节中方程（u）相同，只是$2n\delta d$代替Q_1/k。

例题 3 假定图1.49中的斜坡函数，说明地面加速度$\ddot{x}_g$而不是地面位移，还假定该线的斜度在单位时间内为δa。假设在时间 $t=0$ 处，地面位移的初始条件x_{g0}和地面速度$\dot{x}_{g0}$均为已知，试确定一个自由度系统由于这种地面运动在时间 t 处产生的绝对的无阻尼反应。

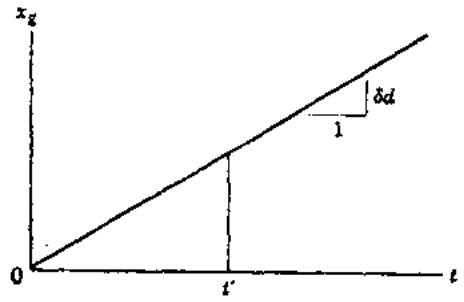


图 1.49

解：在此情况下，方程（i）所给的施力函数q_g^*成为：

$$q_g^*=-t'\delta a \qquad (q)$$

将此式代入方程 (1.73)，我们得到：

$$x^*=-\frac{\delta a}{p}\int_0^t t'\sin p(t-t')dt' \qquad (r)$$

方程（r）的积分得出按相对坐标的无阻尼反应：

$$x^*=-\frac{\delta a}{p^2}\left(t-\frac{1}{p}\sin pt\right) \qquad (s)$$

和

$$\dot{x}^*=-\frac{\delta a}{p^2}(1-\cos pt) \qquad (t)$$

其全解由支承运动和相对运动之和组成。这样，从方程（g）和初始条件，我们求出绝对速度为：

$$\dot{x}=\dot{x}_g+\dot{x}^*=\dot{x}_{g0}+\int_0^t\ddot{x}_gdt'+\dot{x}^*=\dot{x}_{g0}+{}_0\delta a\left[\frac{t^2}{2}-\frac{1}{p^2}(1-\cos pt)\right] \qquad (u)$$

绝对位移为：

$$x=x_g+x^*=x_{g0}+\dot{x}_{g0}t+\int_0^t\dot{x}_gdt'+x^*=x_{g0}+\dot{x}_{g0}t$$

$$+\delta a\left[\frac{t^3}{6}-\frac{1}{p^2}\left(t-\frac{1}{p}\sin pt\right)\right] \qquad (u)$$

例题 4 一个重量为W的无阻尼升降机（见图1.50），借一根横截面为A、弹性模量为E的柔性钢索悬挂着，它以等速度v_0向下移动。当对卷扬机施加制动时，引起等于a/r的

地信网论坛 BBS.3500L.COM

角减速度*。这里 r 为滚筒的半径。在此状态下，当时间 v_0/a 处钢索将停止绞动（从制动初始作用的时间 $t=0$ 计算），试求出在时间间隔 $0\leqslant t\leqslant v_0/a$ 过程中升降机的位移 x，假设在 $t=0$ 时，自由钢索的长度为 l，并略去制动过程中长度的变化。

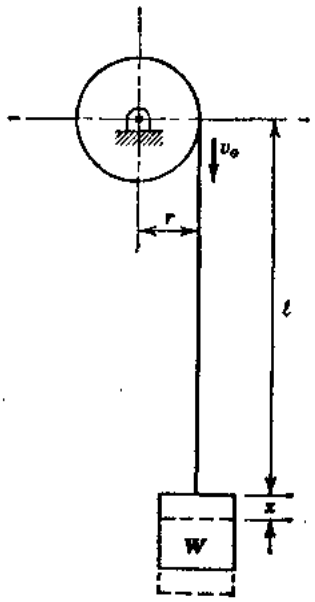


图 1.50

解：本例题表示大小为 $-a$ 的支承等加速度的情况，无阻尼相对反应的方程（1.73）给出：

$$x^*=\frac{a}{p}\int_0^t \sin p(t-t')\,dt'=$$

$$\frac{a}{p^2}(1-\cos pt) \qquad (w)$$

如前面例题，我们可以将此相对反应加到钢索顶面处的运动上，得出总的反应：

$$x=x_g+x^*=v_0t-a\left[\frac{t^2}{2}-\frac{1}{p^2}(1-\cos pt)\right] \qquad (x)$$

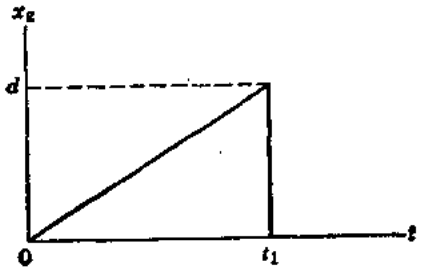
自然，在实际的升降机中，设计成使制动比较平顺地作用上去，任何振动的趋势被适当的阻尼器所抑制。

习 题 组 1.13

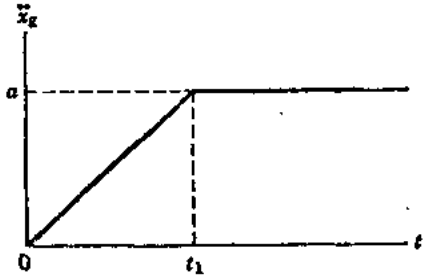
1.13—1 试确定一个自由度系统，对图中支承位移的无阻尼反应。

答：
$$x=d\left(\frac{t}{t_1}-\frac{\sin pt}{pt_1}\right) \qquad (0\leqslant t\leqslant t_1)$$

$$x=d\left[\frac{\sin p(t-t_1)-\sin pt}{pt_1}+\cos p(t-t_1)\right] \qquad (t_1\leqslant t)$$



习题 1.13—1



习题 1.13—2

1.13—2 试确定一个自由度系统，对图中支承加速度的无阻尼反应。

答：
$$x^*=-\frac{a}{p^2}\left(\frac{t}{t_1}-\frac{\sin pt}{pt_1}\right) \qquad (0\leqslant t\leqslant t_1)$$

$$x^*=-\frac{a}{p^2}\left[1+\frac{\sin p(t-t_1)-\sin pt}{pt_1}\right] \qquad (t_1\leqslant t)$$

*这里 a 表示线减速度。——译注

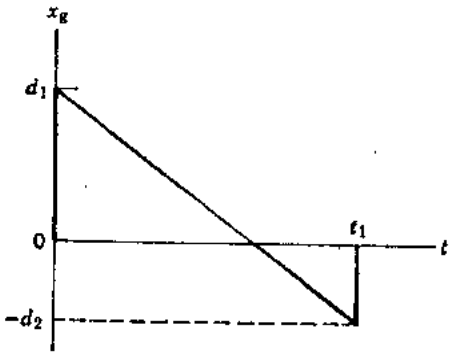
地信网论坛 BBS.3S001.COM

1.13—3　试确定一个自由度系统对图中支承位移的无阻尼反应。

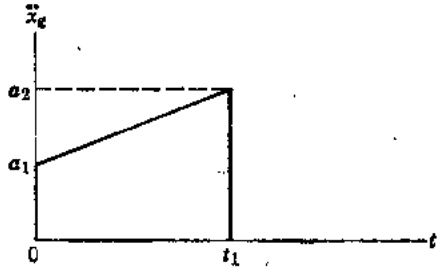
答：

$$x=d_1(1-\cos pt)-(d_1+d_2)\left(\frac{t}{t_1}-\frac{\sin pt}{pt_1}\right) \qquad (0\leqslant t\leqslant t_1)$$

$$x=-d_1\cos pt-d_2\cos p\ (t-t_1)-\frac{d_1+d_2}{pt_1}[\sin p(t-t_1)-\sin pt] \qquad (t_1\leqslant t)$$



习题　1.13—3



习题　1.13—4

1.13—4　试确定一个自由度系统对图中支承加速度的无阻尼反应。

答：

$$x^*=-\frac{a_1}{p^2}(1-\cos pt)-\frac{a_2-a_1}{p^2}\left(\frac{t}{t_1}-\frac{\sin pt}{pt_1}\right) \qquad (0\leqslant t\leqslant t_1)$$

$$x^*=-\frac{a_1}{p^2}[\cos p\ (t-t_1)-\cos pt]$$

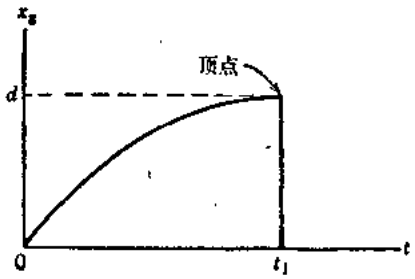
$$-\frac{a_2-a_1}{p^2}\left[\frac{\sin p(t-t_1)-\sin pt}{pt_1}+\cos p(t-t_1)\right] \qquad (t_1\leqslant t)$$

1.13—5　试确定一个自由度系统对图中所给支承位移的抛物线函数 $x_g=d[1-(t-t_1)^2/t_1^2]$ 的无阻尼反应。

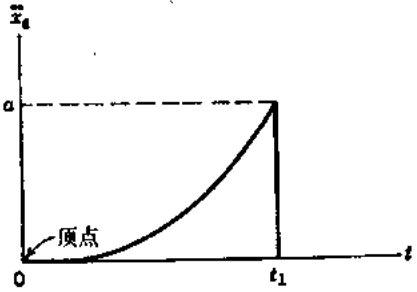
答：

$$x=d\left[\frac{2}{p^2t_1^2}(1-\cos pt-pt_1\sin pt)+\frac{2t}{t_1}-\frac{t^2}{t_1^2}\right] \qquad (0\leqslant t\leqslant t_1)$$

$$x=d\left\{\frac{2}{p^2t_1^2}[\cos p(t-t_1)-\cos pt-pt_1\sin pt]+\cos p\ (t-t_1)\right\} \qquad (t_1\leqslant t)$$



习题　1.13—5



习题　1.13—6

1.13—6　试确定一个自由度系统对图中所给支承加速度的抛物线函数 $\ddot{x}_g=at^2/t_1^2$ 的无阻尼反应。

答：

$$x^*=-\frac{a}{p^2}\left[\frac{t^2}{t_1^2}-\frac{2}{p^2t_1^2}(1-\cos pt)\right] \qquad (0\leqslant t\leqslant t_1)$$

地信网论坛 BBS.3500L.COM

$$x^*=-\frac{a}{p^2}\left\{\frac{2}{p^2t_1^2}\left[\cos pt-\cos p(t-t_1)+pt_1\sin p(t-t_1)\right]+\cos p(t-t_1)\right\}$$

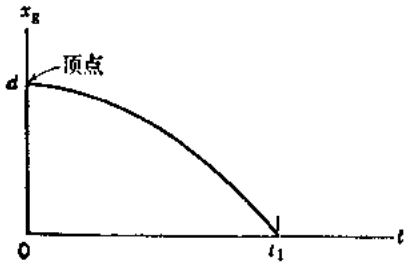
$$(t_1\leqslant t)$$

1.13—7　试确定一个自由度系统对图中所给支承位移的三角函数 $x_g=d\cos\pi t/2t_1$ 的无阻尼反应。

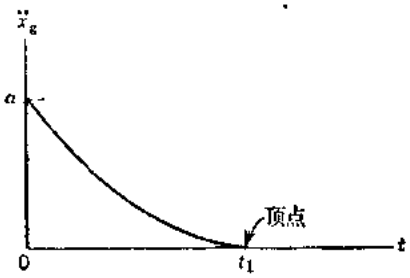
答：

$$x=d(\cos\omega t-\cos pt)\beta;\quad \omega=\pi/2t_1 \qquad (0\leqslant t\leqslant t_1)$$

$$x=-d\left[\cos pt+\frac{\omega}{p}\sin p(t-t_1)\right]\beta \qquad (t_1\leqslant t)$$



习题　1.13—7



习题　1.13—8

1.13—8　试确定一个自由度系统对图中所给支承加速度的三角函数 $\ddot{x}_g=a(1-\sin\pi t/2t_1)$ 的无阻尼反应。

答：

$$x^*=-\frac{a}{p^2}\left[1-\cos pt-(\sin\omega t-\frac{\omega}{p}\sin pt)\beta\right];\quad \omega=\pi/2t_1\quad (0\leqslant t\leqslant t_1)$$

$$x^*=-\frac{a}{p^2}\left\{\cos p(t-t_1)-\cos pt-\left[\cos p(t-t_1)-\frac{\omega}{p}\sin pt\right]\beta\right\}\quad (t_1\leqslant t)$$

1.13—9　参见图 1.50 中无阻尼系统，试用例题 4 的结果去求出卷扬机停止后升降机所产生的自由振动的振幅。

答：

$$A^*=\frac{\sqrt{2}\,a}{p^2}\sqrt{1-\cos\left(\frac{pv_0}{a}\right)}$$

1.14　反　应　谱

第1.12和1.13节中所讨论的脉冲激发，对于弹性系统引起振动反应，这些反应的最大值可以小于、等于或大于相应的静力反应。一般来说，最大的反应，取决于系统的特性和加载的性质。对于无阻尼的一个自由度系统，固有周期（或频率）是为确定该系统对所给施力函数的反应的特征。此外，施力函数的形状和持续时间本身，在反应中起重要的作用。最大反应值对系统挑选出的参数或对施力函数挑选出的参数所点绘的曲线图，称为反应谱。这样一种图，在设计中是重要的，因为它们提供断定结构中最大动力应力与相应静力应力之比的可能性。系统最大反应发生的时间也是重要的，此变量与反应谱的曲线图，在本节中讨论。

让我们重新考虑图1.51a中所示的矩形冲量，这种冲量在第1.12节中作了广泛的讨论。在该节中，我们已研究了持续时间为$t_1=\tau/2$的矩形冲量正好引起$x_m=2Q_1/k$的最大反应*。此最大值，与由于突然作用不定持续时间的力Q_1（阶梯函数）所引起的相同**。这样，持续

---

* 见图1.44(d)。　——译注

** 见图1.43(b)。　——译注

地信网论坛 BBS.3500L.COM

时间超过$\tau/2$的矩形冲量，始终引起系统的最大反应等于静力荷载反应的两倍。应用下列符号：

$$x_{st}=\frac{Q_1}{k} \qquad (a)$$

对此情况，我们可以叙述：

$$\frac{x_m}{x_{st}}=2 \qquad (t_1\geqslant\tau/2) \quad (b)$$

如果矩形冲量的持续时间小于$\tau/2$，那么，最大反应将小于$2x_{st}$。这种例子示于图1.51b中，图中绘出了$t_1=\tau/10$和$t_1=2\tau/10$的反应曲线。在所有这些情况下，最大位移，均发生于脉冲作用结束之后，因为在时间t_1处速度为正〔见第1.12节方程(g)〕。因此，为了求出反应的最大值和它发生的时间，我们必须研究方程（1.67），它适用于$t_1\leqslant t$。该方程可以写成无量纲形式：

$$\frac{x}{x_{st}}=\cos p(t-t_1)-\cos pt \qquad (c)$$

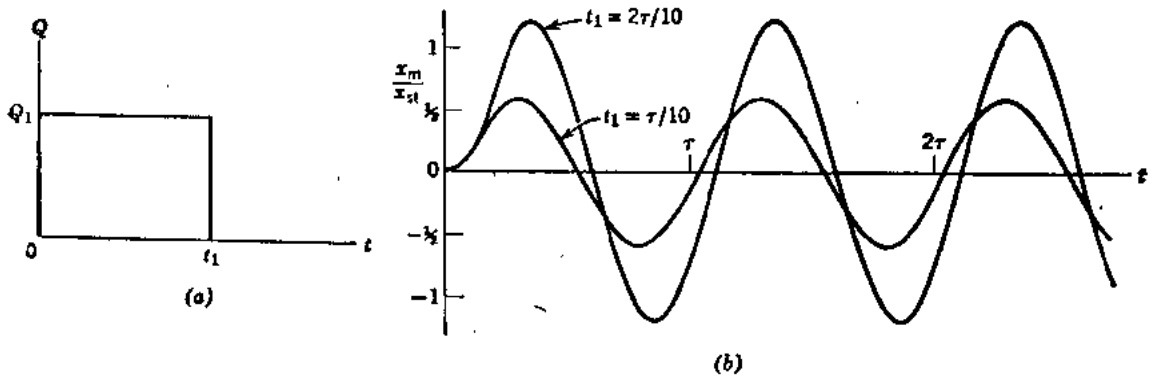


图 1.51

将此式对时间微分，我们得到：

$$\frac{\dot{x}}{x_{st}}=p[\sin pt-\sin p(t-t_1)] \qquad (d)$$

借令括号内等于零，我们求出最大位移发生的时间t_m的式子：

$$\sin pt_m=\sin p(t_m-t_1) \qquad (e)$$

这样，

$$pt_m=\frac{\pi}{2}+\frac{pt_1}{2} \qquad (f)$$

方程（f）说明t_m与t_1成线性关系。此外，由于pt_1的重要范围为$0\leqslant pt_1\leqslant\pi$，所以$pt_m$的相应范围为$\pi/2\leqslant pt_m\leqslant\pi$。从方程($f$)，将$pt_m$的式子代替$pt$代入方程($c$)中，得到：

$$\frac{x_m}{x_{st}}=2\sin\frac{pt_1}{2}=\sqrt{2(1-\cos pt_1)} \qquad (g)$$

方程（g）与第1.12节中借不同方法所得的方程（j）相同。这样，矩形冲量的反应谱可以归纳如下：

地信网论坛 BBS.3500L.COM

对于 $0 \leqslant t_1/\tau \leqslant \frac{1}{2}$

$$\frac{x_m}{x_{st}} = 2\sin \pi t_1/\tau \qquad (1.74a)$$

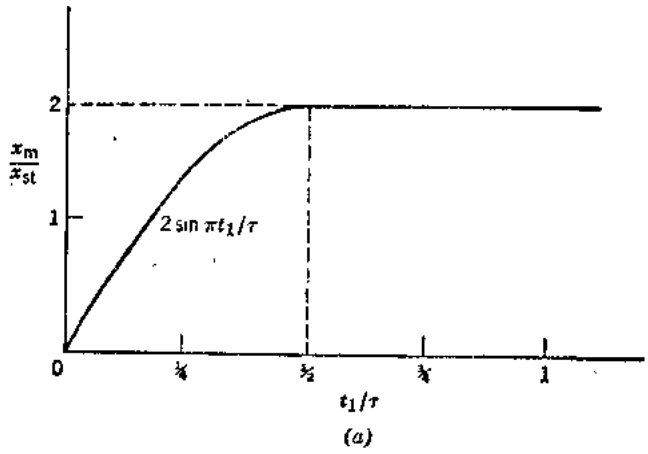
$$\frac{t_m}{\tau} = \frac{1}{4}(1 + 2t_1/\tau) \qquad (1.74b)$$

对于 $\frac{1}{2} \leqslant t_1/\tau$

$$\frac{x_m}{x_{st}} = 2 \qquad (1.74c)$$

$$\frac{t_m}{\tau} = \frac{1}{2} \qquad (1.74d)$$

这些无量纲式的图解给于图1.52a和1.52b中，图中的x_m/x_{st}和t_m/τ都是对t_1/τ绘出。从方程（1.74a），我们看到，如果冲量的持续时间小于$\tau/6$，那么动力反应小于由于静止作用的荷载引起的反应。反之，如果冲量的持续时间在$\tau/6$和$\tau/2$之间，那么x_m/x_{st}在1和2之间。自然，如果$t_1 \geqslant \tau/2$，那么x_m/x_{st}的值总是等于2。



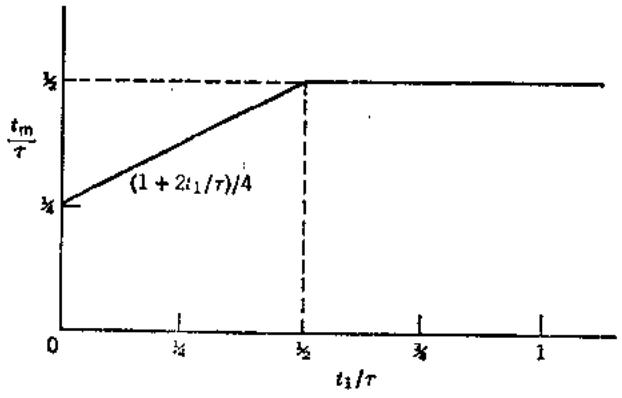


图 1.52

在这一点上，有趣地看到，强迫振动的放大因子的曲线图，代表按本节所定义的反应谱。第1.9节中图1.33，包含$\beta = x_m/x_{st}$对频率比ω/p点绘的曲线族。应回想这些曲线仅构成反应的稳态部分，不同曲线是对一种阻尼得到的。如果要包括强迫振动的瞬变部分，那么，图1.33中的反应谱会稍高一些，但是这种影响是不大的。此外，虽然阻尼在强迫振动问题中是很重要的，但是在考虑由于脉冲激发所产生的反应谱中往往略去。低的阻尼值，对这种反应的极大值（*maxima*）影响很小，这种极大值通常发生在大量能量耗散之前。然而，对于任一施力函数总是可以构成阻尼反应谱族，对每一级阻尼为一不同曲线。对于简单情况，这可以借导出适当的分析函数来完成，但是对于复杂的情况，则需要利用数值法。

例题1 图1.53a表示一个在时间t_1内，从0按直线增大到Q_1然后为常数的施力函数。无阻尼的一个自由度系统对这种激发的反应为（见习题1.13—2）：

$$x = \frac{Q_1}{k}\left(\frac{t}{t_1} - \frac{\sin pt}{pt_1}\right) \qquad (0 \leqslant t \leqslant t_1) \quad (h)$$

$$x = -\frac{Q_1}{k}\left[1 + \frac{\sin p(t-t_1) - \sin pt}{pt_1}\right] \qquad (t_1 \leqslant t) \quad (i)$$

试确定这种情况的反应谱和相应的时间函数。

地信网论坛 BBS.3S001.COM

解：借观察方程（h）和（i），我们看到，最大的反应总是在时间t_1以后发生。这样，这里只有方程（i）是有意义的，它可以表达成下列无量纲形式：

$$\frac{x}{x_{st}}=\frac{1}{pt_1}[pt_1+\sin p(t-t_1)-\sin pt] \qquad (j)$$

将方程（j）对时间微分，我们得到：

$$\frac{\dot{x}}{x_{st}}=\frac{1}{t_1}[\cos p(t-t_1)-\cos pt] \qquad (k)$$

令括号内等于零，得出时间t_m的表达式：

$$\cos pt_m=\cos p(t_m-t_1) \qquad (l)$$

因此，

$$pt_m=\pi+\frac{pt_1}{2} \qquad (m)$$

如前面情况那样，t_m与t_1成直线联系。此外，我们从方程（m）得出结论，pt_m的范围为$\pi\leqslant pt_m$。将（m）式代入方程（j）得出：

$$\frac{x_m}{x_{st}}=1+\frac{2}{pt_1}\sin\frac{pt_1}{2}=1\pm\frac{1}{pt_1}\sqrt{2(1-\cos pt_1)} \qquad (n)$$

这些式子表示极大值和极小值，它们取决于pt_1值。对极大值概括起来在$t_1\leqslant t$范围内，我们得到：

$$\frac{x_m}{x_{st}}=1+\frac{\tau}{\pi t_1}\left|\sin\pi t_1/\tau\right| \qquad (o)$$

和

$$\frac{t_m}{\tau}=(1+t_1/\tau)/2 \qquad (p)$$

图1.53b和1.53c，分别包括方程（o）和（p）的曲线图。从此反应谱（图1.53b）我们看到，$\frac{x_m}{x_{st}}=2$的最高值发生在$t_1=0$的时候，它相应于阶梯函数的情况。当$t_1\leqslant\tau/4$时，x_m/x_{st}的值近似地为2；此结果与对于阶梯函数没有多大区别。由于零兴起时间（*zero rise time*）实际上是不可能的，可以很好地认为很短，但是是有限的兴起时间，实际上给予相同的结果。$t_1\geqslant\tau$时，x_m值不超过x_{st}很多，在很大的兴起时间中，加载基本上是静态的。

例题2 考虑作用于一个自由度阻尼系统（图1.42a）上矩形冲量（图1.51a）的情况。我们可以按在时间$t=0$处开始的阶梯函数（大小为Q_1），和在时间$t=t_1$处开始的第二个阶梯函数（大小为$-Q_1$）之和，来合成这个施力函数。这样，该阻尼系统的无量纲反应（对于$t_1\leqslant t$）成为（见第1.12节例题3）：

$$\frac{x}{x_{st}}=e^{-n(t-t_1)}\left[\cos p_d(t-t_1)+\frac{n}{p_d}\sin p_d(t-t_1)\right]$$
$$-e^{-nt}\left(\cos p_d t+\frac{n}{p_d}\sin p_d t\right) \qquad (q)$$

地信网论坛 BBS.3500L.COM

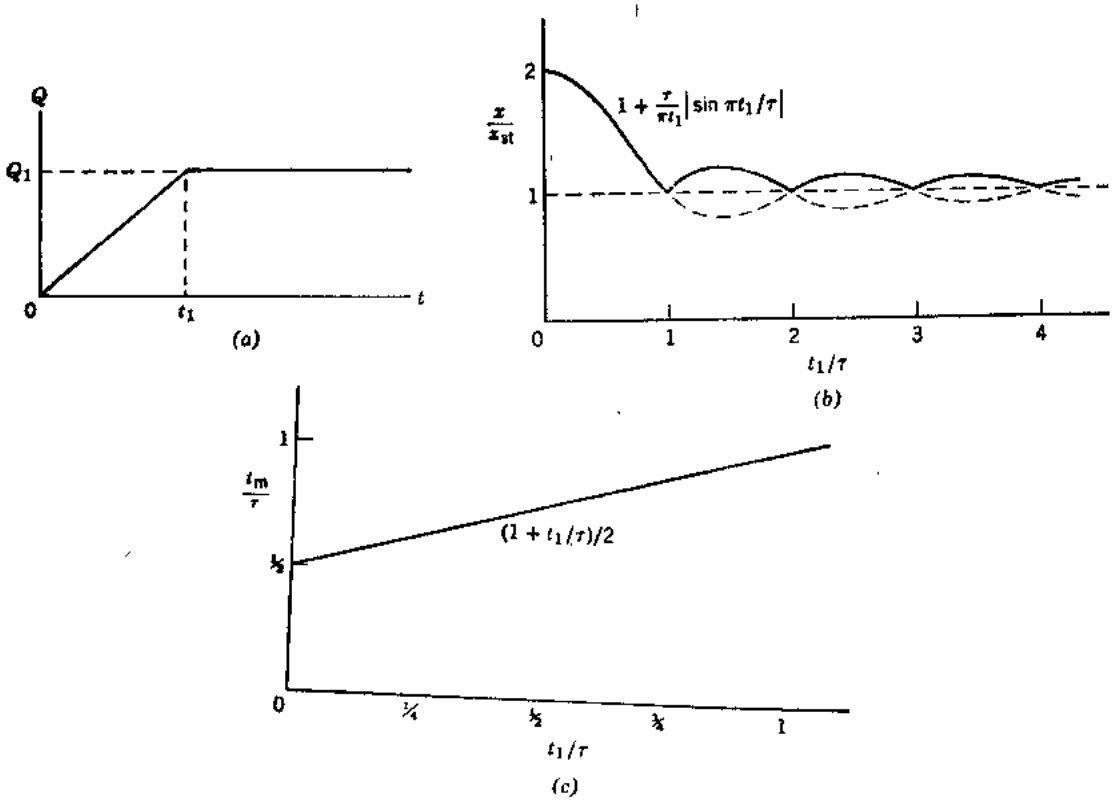


图 1.53

试导出反应谱的表达式和最大反应的时间。

解：借应用三角恒等式和重新排列诸项，方程（q）可以简化得到：

$$\frac{x}{x_{st}}=e^{-nt}(A\cos p_d t+B\sin p_d t) \qquad (r)$$

式中

$$A=e^{nt_1}\left(\cos p_d t_1-\frac{n}{p_d}\sin p_d t_1\right)-1 \qquad (s)$$

和

$$B=e^{nt_1}\left(\sin p_d t_1+\frac{n}{p_d}\cos p_d t_1\right)-\frac{n}{p_d} \qquad (t)$$

将方程（r）对时间微分，并令其结果等于零，得出：

$$t_m=\frac{1}{p_d}\tan^{-1}\left(\frac{p_d B-nA}{p_d A+nB}\right) \qquad (u)$$

还有，

$$\sin p_d t_m=\frac{p_d B-nA}{C} \qquad \cos p_d t_m=\frac{p_d A+nB}{C} \qquad (v)$$

式中

$$C=\sqrt{(p_d^2+n^2)(A^2+B^2)}$$

将(v)式代入方程(r)，并合并诸项，我们得到：

$$\frac{x}{x_{st}}=e^{-nt_m}\sqrt{1+e^{2nt_1}-2e^{nt_1}\cos p_d t_1} \qquad (w)$$

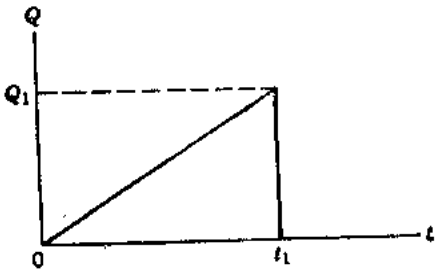
地信网论坛 BBS.3S001.COM

当令阻尼常数等于零时，方程（w）成为与无阻尼情况的方程（g）相同。

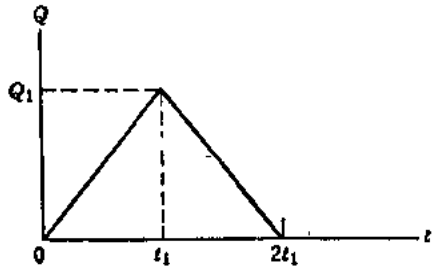
本节中所介绍的诸例题导出了 t_m/τ 和 x_m/x_{st} 的明确表达式，但是应说明这些都是特殊情况。一般来说，鉴别最大反应发生的时间范围是困难的。另外，含有t_m/τ的方程可能是超越方程，在这些情况下，不可能直接求解，需要借应用时间比 t_1/τ 的连续值 作大量详尽的计算来得到x_m/x_{st}和x_m/τ的值。对于每一个t_1/τ值，以t/τ表达的x/x_{st}表达式，可以绘成曲线，从这里可以得到x_m/x_{st}和t_m/τ。

习 题 组 1.14

1.14—1 试对图中施力函数，绘出反应谱x/x_{st}和最大反应的时间t_m/τ对t_1/τ的曲线（见习题1.13—1反应公式）。



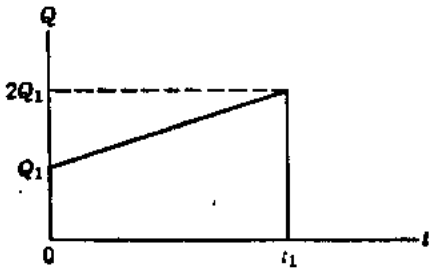
习题 1.14—1



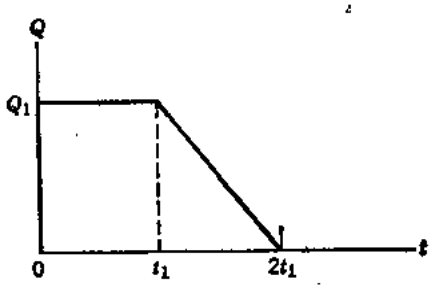
习题 1.14—2

1.14—2 试对图中施力函数，重复习题1.14—1（见习题1.12—4反应公式）。

1.14—3 试对图中施力函数，重复习题1.14—1（见习题1.13—4反应公式）。



习题 1.14—3

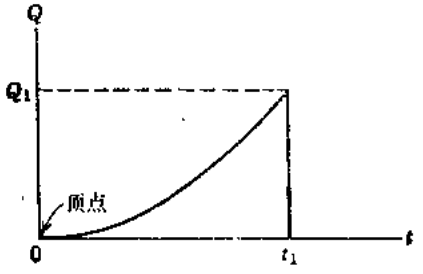


习题 1.14—4

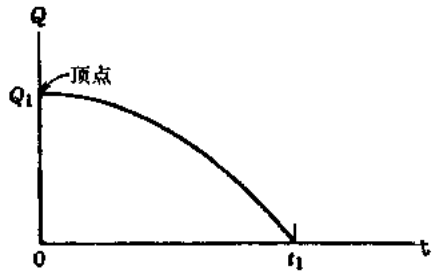
1.14—4 试对图中施力函数，重复习题1.14—4（见习题1.12—3反应公式）。

1.14—5 试对图中抛物线施力函数$Q=Q_1t^2/t_1^2$，重复习题1.14—1（见习题1.13—6反应公式）。

1.14—6 试对图中抛物线施力函数$Q=Q_1(1-t^2/t_1^2)$，重复习题1.14—1（见习题1.12—5反应公式）。



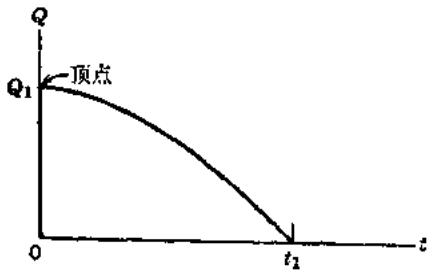
习题 1.14—5



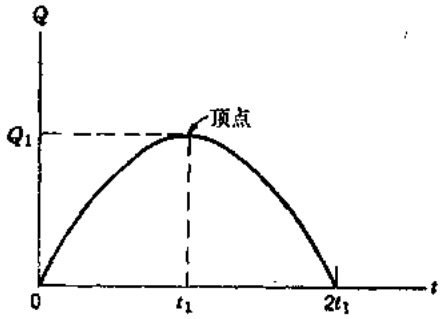
习题 1.14—6

地信网论坛 BBS.3500L.COM

1.14—7 试对图中三角施力函数$Q=Q_1\cos\pi t/2t_1$，重复习题1.14—1（见习题1.13—7反应公式）。



习题 1.14—7



习题 1.14—8

1.14—8 试对图中三角施力函数$Q=Q_1\sin\pi t/2t_1$，重复习题1.14—1（见习题1.12—7中时间范围$0\leqslant t\leqslant 2t_1$内的反应公式，导出对$2t_1\leqslant t$所需要的公式）。

1.14—9 试对例题2中阻尼情况用阻尼比$\gamma=0.1$绘出反应谱x/x_{st}和最大反应时间t_m/τ对t_1/τ的曲线。

1.15 反应的数值解

有许多实际问题，其施力函数不是分析的表达式，而是用图上一系列点子或借表中一些数字来表示。在这些情况下，借曲线求律法（curve fitting method），以某些公式去代替这些数据，然后将这些公式用于杜哈梅积分，这是可以行得通的。然而，求算反应的较为一般的方法是用一些简单的内插函数，采取一系列反复计算。本节将对几种内插函数讨论这后一种数值分析法。

假设图1.54中阻尼一个自由度系统，承受按某种一般方式随时间变化的力Q的作用，例如，承受图1.55中曲线所表示的力的作用，这样的施力函数，可以用一系列不同大小且开始于不同时间的阶梯函数来模拟，如图1.55所示。第一个阶梯函数的大小为ΔQ_0，开始于时间$t=0$处；第二个的大小为ΔQ_1，开始于时间$t=t_1$处，等等。在任一时间间隔$t_{i-1}\leqslant t\leqslant t_i$内，系统对这一系列阶梯函数的反应为（见第1.12节例题3）：

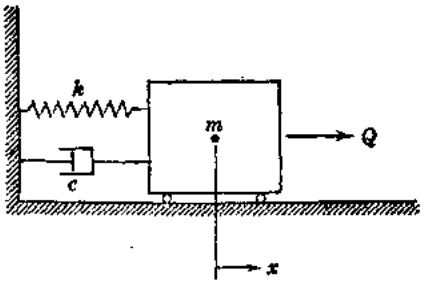


图 1.54

$$x=\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{i-1}\Delta Q_j\left\{1-e^{-n(t-t_j)}\left[\cos p_d(t-t_j)+\frac{n}{p_d}\sin p_d(t-t_j)\right]\right\} \tag{1.75a}$$

在时间t_i处，此式成为：

$$x_i=\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{i-1}\Delta Q_j\left\{1-e^{-n(t_i-t_j)}\left[\cos p_d(t_i-t_j)+\frac{n}{p_d}\sin p_d(t_i-t_j)\right]\right\} \tag{1.75b}$$

对于无阻尼情况，它给出：

地信网论坛 BBS.3500L.COM

$$x_i=\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{i-1}\Delta Q_j\left[1-\cos p(t_i-t_j)\right] \tag{1.75c}$$

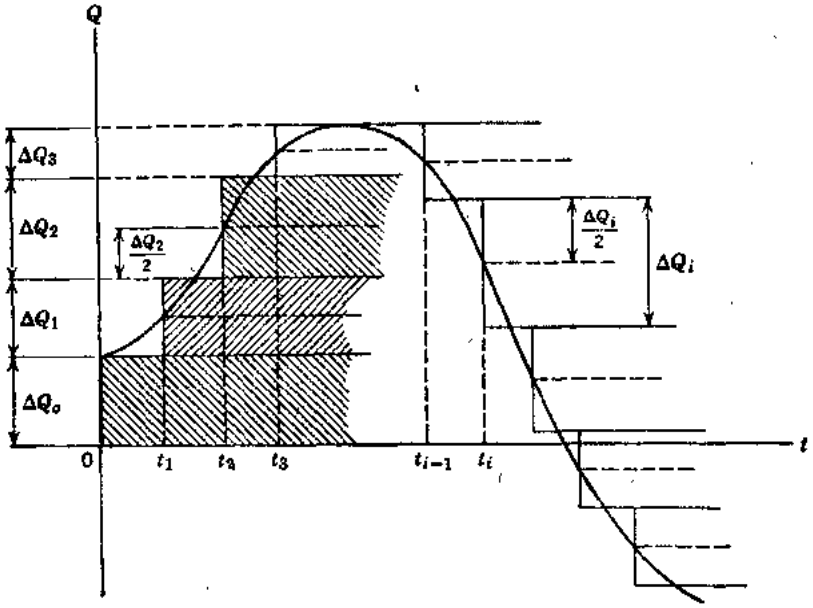


图 1.55

在此方法中，典型阶梯的ΔQ_i量可能为正也可能为负，取决于所模拟曲线的斜率。为了在此方法中得到良好的精确度，各阶梯应该相当小，施力函数下面积的误差应能近似地自行补偿。亦即图1.55中位于曲线上面的诸阴影线面积，应近似地等于曲线下面无阴影线的面积。达到这个目的的一种方法是，令每一阶梯（第一个阶梯以后）开始于当曲线的纵坐标位于阶梯的一半高度的时间处，如图中所示。自然，如果施力函数实际上是由以水平线和竖直线为界的冲量组成，那么，此法给予精确的结果。

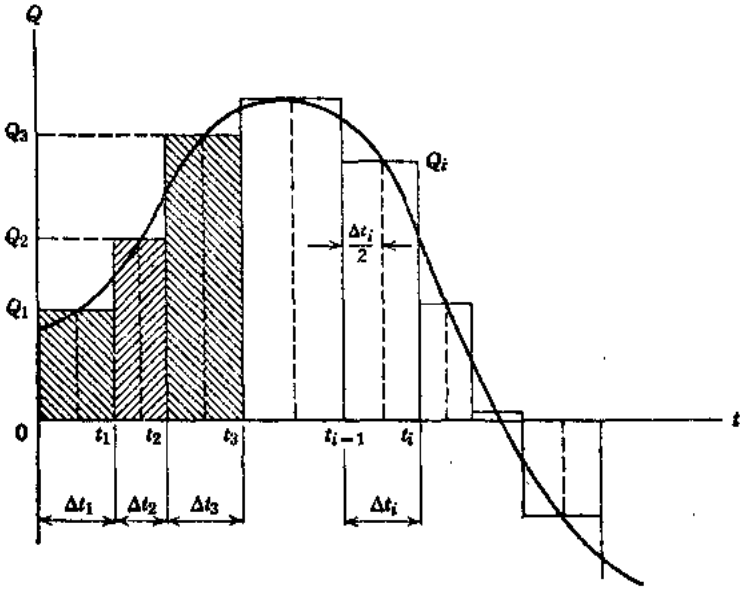


图 1.56

图1.56中说明另一种利用一些平行于参考轴的线的方法。在这种情况下，其曲线借一系列不同大小和不同持续时间的矩形冲量来近似表示。为了得到良好的精确度，典型冲量的

地信网论坛 BBS.3500L.COM

Q_i量，应选为时间间隔Δt_i的中央处曲线的纵坐标，如图1.56所示。在任一时间间隔$t_{i-1}\leqslant t\leqslant t_i$中，一个自由度系统的阻尼反应，可按时间$t_{i-1}$处初始条件的效应与间隔$\Delta t_i$内冲量的效应之和来计算：

$$x=e^{-n(t-t_{i-1})}\left[x_{i-1}\cos p_d(t-t_{i-1})+\frac{\dot{x}_{i-1}+nx_{i-1}}{p_d}\sin p_d(t-t_{i-1})\right]$$

$$+\frac{Q_i}{k}\left\{1-e^{-n(t-t_{i-1})}\left[\cos p_d(t-t_{i-1})+\frac{n}{p_d}\sin p_d(t-t_{i-1})\right]\right\} \qquad (1.76a)$$

在该时间间隔终了处，此式成为：

$$\dot{x}_i=e^{-n\Delta t_i}\left[x_{i-1}\cos p_d\Delta t_i+\frac{\dot{x}_{i-1}+nx_{i-1}}{p_d}\sin p_d\Delta t_i\right]$$

$$+\frac{Q_i}{k}\left[1-e^{-n\Delta t_i}\left(\cos p_d\Delta t_i+\frac{n}{p_d}\sin p_d\Delta t_i\right)\right] \qquad (1.76b)$$

对于零阻尼的情况，方程（1.76b）简化成：

$$x_i=x_{i-1}\cos p\Delta t_i+\frac{\dot{x}_{i-1}}{p}\sin p\Delta t_i+\frac{Q_i}{k}(1-\cos p\Delta t_i) \qquad (1.76c)$$

另外，还可以得到时间间隔终了处的速度$\dot{x}_i$，用p去除，得出：

$$\frac{\dot{x}_i}{p}=-x_{i-1}\sin p\Delta t_i+\frac{\dot{x}_{i-1}}{p}\cos p\Delta t_i+\frac{Q_i}{k}\sin p\Delta t_i \qquad (1.76d)$$

方程（1.76c）和（1.76d）代表用于求算阶梯i终了处，无阻尼反应和用于提供阶梯$i+1$起始处初始条件的递推公式。这些公式，可以重复地用来得出一个自由度系统的位移的时间过程和速度的时间过程，但是通常位移是较为关心的*。

上面所导出的递推方程（方程1.76c和1.76d），在一连串计算的基础上给出第i个时间间隔终了处的反应。另一种方法是，在平行计算的基础上，确定对所有前面矩形冲量的反应（在时间t_i处）。对于无阻尼情况，这种方法包括下列递推公式：

$$x_i=x_0\cos pt_i+\frac{\dot{x}_0}{p}\sin pt_i+\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{i}Q_j[\cos p(t_i-t_j)-\cos p(t_i-t_{j-1})] \qquad (1.76e)$$

由于方程（1.76e）的后面一部分中诸项求和，所以此式比方程（1.76b）和（1.76c）需要做更多的算术运算。因此，在手算情况下，当确定反应的整个时间过程时，优先采用方程（1.76c）和（1.76d）。然而，如果仅需要求在一特定时间处的反应，那么选用方程（1.76e）则是合适的。

用上面所述分段常数类的内插，去平衡施力函数以上面积和以下面积的误差，并不总是方便的。有一种较粗糙的方法是，令时间间隔开始（或终了）处，曲线的纵坐标控制矩形冲量

---

* 对于具有分段常数型内插函数的无阻尼系统的解，可以在相平面（x对$\dot{x}/p$）内用图解求出，这里反应用圆弧来表示。见J. Lamoen的"Etude graphique des vibrations de systèmes à un seul degrè de liberté" Rev. universelle mines, Ser.8, Vol.11, No.7, May 1935; 及 L.S.Jacobsen 和 R.S. Ayre 的 Engineering Vibrations, McGraw-Hill, New York, 1958.

地信网论坛 BBS.3500L.COM

（或阶梯函数）的值。于是需要较多的时间步长（time step）*，以保持解中具有相同的精确程度，舍入误差在计算中变得很重要。为了避免这些困难，可以考虑较高阶的内插函数。图1.57用斜线和竖直窄条表示模拟一个脉冲激发的另一种逻辑选择。对于这种分段线性内插，在时间间隔$t_{i-1}\leqslant t\leqslant t_i$内，一个自由度系统的阻尼反应为：

$$x=e^{-n(t-t_{i-1})}\left[x_{i-1}\cos p_d(t-t_{i-1})+\frac{\dot{x}_{i-1}+nx_{i-1}}{p_d}\sin p_d(t-t_{i-1})\right]$$
$$+\frac{Q_{i-1}}{k}\left\{1-e^{-n(t-t_{i-1})}\left[\cos p_d(t-t_{i-1})+\frac{n}{p_d}\sin p_d(t-t_{i-1})\right]\right\}$$
$$+\frac{\Delta Q_i}{k\Delta t_i}\left\{t-t_{i-1}-\frac{2n}{p^2}+e^{-n(t-t_{i-1})}\left[\frac{2n}{p^2}\cos p_d(t-t_{i-1})\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{p_d^2-n^2}{p^2p_d}\sin p_d(t-t_{i-1})\right]\right\} \qquad (1.77a)$$

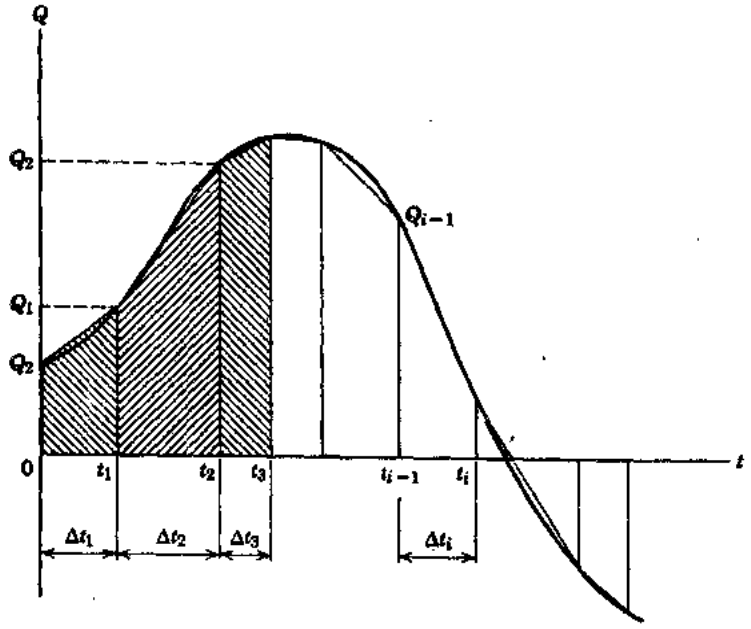


图 1.57

式中$\Delta Q_i=Q_i-Q_{i-1}$。方程(1.77a)的后一部分，是从斜坡函数的阻尼解写来的（见习题1.12—9）。在时间间隔终了处，方程（1.77a）成为：

$$x_i=e^{-n\Delta t_i}\left[x_{i-1}\cos p_d\Delta t_i+\frac{\dot{x}_{i-1}+nx_{i-1}}{p_d}\sin p_d\Delta t_i\right]$$
$$+\frac{Q_{i-1}}{k}\left[1-e^{-n\Delta t_i}\left(\cos p_d\Delta t_i+\frac{n}{p_d}\sin p_d\Delta t_i\right)\right]$$
$$+\frac{\Delta Q_i}{k\Delta t_i}\left[\Delta t_i-\frac{2n}{p^2}+e^{-n\Delta t_i}\left(\frac{2n}{p^2}\cos p_d\Delta t_i\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{p_d^2-n^2}{p^2p_d}\sin p_d\Delta t_i\right)\right] \qquad (1.77b)$$

* 或译为时间步幅。 ——译注

地信网论坛 BBS.3500L.COM

当阻尼为零时，此式得出：

$$x_i = x_{i-1}\cos p\Delta t_i + \frac{\dot{x}_{i-1}}{p}\sin p\Delta t_i + \frac{Q_{i-1}}{k}(1-\cos p\Delta t_i) + \frac{\Delta Q_i}{pk\Delta t_i}(p\Delta t_i - \sin p\Delta t_i) \tag{1.77c}$$

其速度$\dot{x}_i$用p去除为：

$$\frac{\dot{x}_i}{p} = -x_{i-1}\sin p\Delta t_i + \frac{\dot{x}_{i-1}}{p}\cos p\Delta t_i + \frac{Q_{i-1}}{k}\sin p\Delta t_i + \frac{\Delta Q_i}{pk\Delta t_i}(1-\cos p\Delta t_i) \tag{1.77d}$$

方程（1.77c）和（1.77d）为类似于对矩形冲量的方程（1.76c）和（1.76d）的递推公式。为了仅计算在时间t_i处的反应，无阻尼情况的另一种方程（具有分段线性内插）为：

$$x_i = x_0\cos pt_i + \frac{\dot{x}_0}{p}\sin pt_i + \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{i}\left\{Q_{j-1}[\cos p(t_i - t_j) - \cos p(t_i - t_{j-1})] + \frac{\Delta Q_j}{k\Delta t_j}\left[\Delta t_j\cos p(t_i - t_j) + \frac{1}{p}\sin p(t_i - t_j) - \frac{1}{p}\sin p(t_i - t_{j-1})\right]\right\} \tag{1.77e}$$

其中后一部分，是从习题1.13－4写来的。

例题1　图1.58a至1.58d表示用竖直窄条模拟施力函数的四种不同方法。在所有这些图中，均采取$\Delta t = t_1/10$的相等的时间步长。前三种情况为矩形冲量，而最后一种情况为梯形冲量（为分段线性内插）。在图1.58a、1.58b和1.58c的方法中，各冲量的大小分别以步长开始处、步长终了处和步长中央处曲线的纵坐标来确定。为了比较这些选择，选定一根为下式的简单曲线：

$$Q = Q_1\cos\frac{\pi t}{2t_1} \tag{a}$$

它的零阻尼的精确解，已知为（见习题1.13－7）：

$$x = \frac{Q}{k}\left(\cos\frac{\pi t}{2t_1} - \cos\frac{2\pi t}{\tau}\right)\beta \qquad (0 \leqslant t \leqslant t_1) \tag{b}$$

式中

$$\beta = \frac{1}{1-(\tau/4t_1)^2} \tag{c}$$

作为一种特定情况，我们令$t_1 = \tau/2$，方程（b）成为：

$$x = \frac{4Q_1}{3k}\left(\cos\frac{\pi t}{2t_1} - \cos\frac{\pi t}{t_1}\right) \tag{d}$$

试对图1.58a至1.58d中所示四种模拟，在时间范围$0 \leqslant t \leqslant t_1$内，求算并绘出无阻尼反应的时间过程。假设在时间$t = 0$处初始条件为$x_0 = 0$，$\dot{x}_0 = 0$，还假设$Q_1$和$k$的值均为1。

解：对于前三种情况，应用方程（1.76c）和（1.76d），而用方程（1.77c）和（1.77d）确定第四种情况。从本例中所给诸参数，我们得到$\Delta t_i = \tau/20$；$p\Delta t_i = \pi/10 = 18°$；$\cos p\Delta t_i = 0.951$；$\sin p\Delta t_i = 0.309$；$(1-\cos p\Delta t_i) = 0.0489$和$(p\Delta t_i - \sin p\Delta t_i) = 0.00514$。各个解最好按列表形式来表示，对于第一种情况求算中的所有步骤，均给于表1.1中。

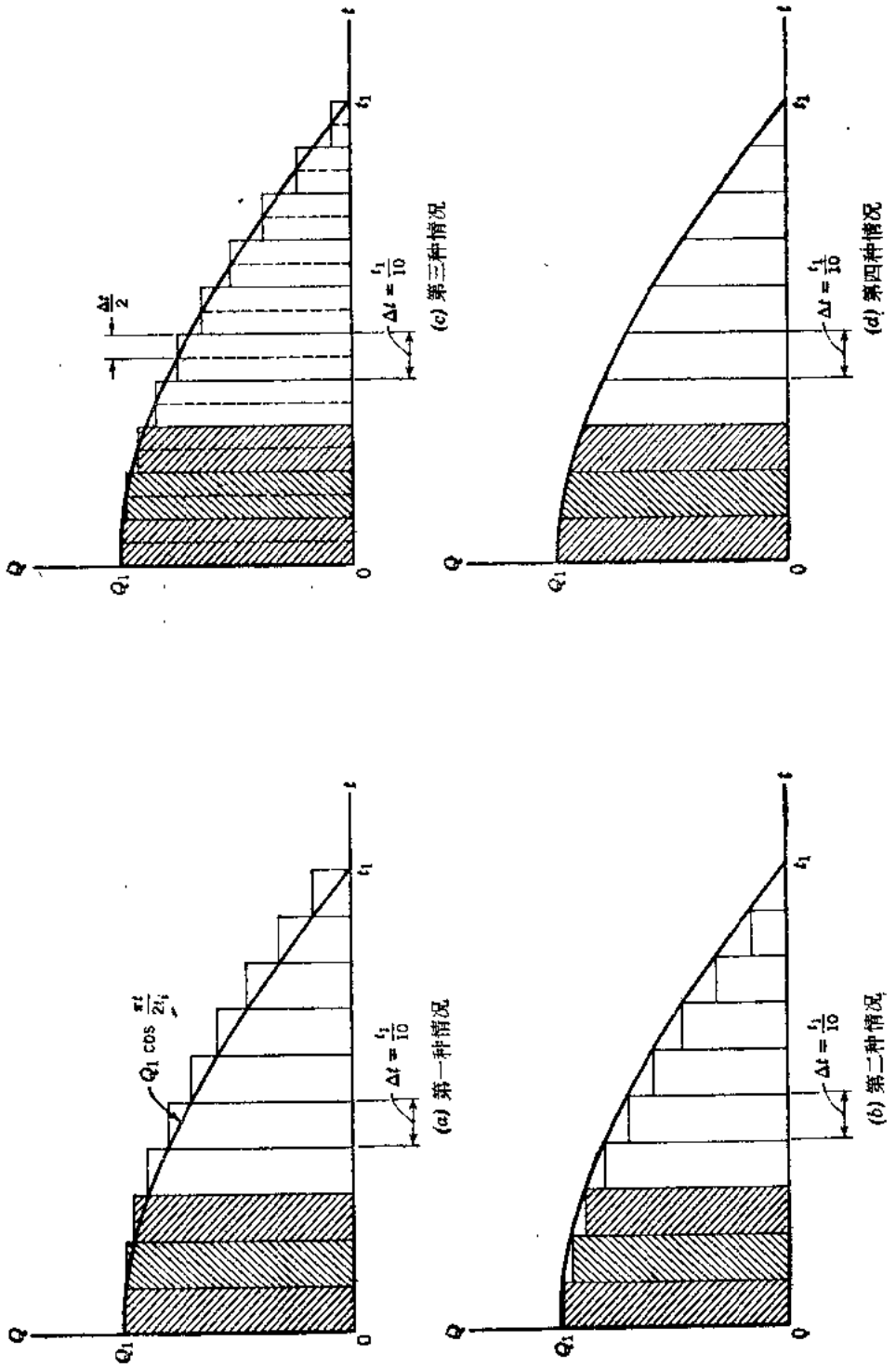

Q
Q1
0
t
t1
Δt = t1/10
Q1 cos πt/2t1
Δt/2
(a) 第一种情况
(b) 第二种情况
(c) 第三种情况
(d) 第四种情况

图 1.58

地信网论坛 BBS.3500L.COM

例 题 1 的 第 一 种 情 况　　表 1·1

i	(1) $\frac{t_i}{t_1}$	(2) $\frac{\Delta t_i}{t_1}$	(3) Q_i	(4) $\frac{Q_i}{k}$	(5) $\frac{Q_i}{k}(1-\cos p\Delta t_i)$	(6) $\frac{Q_i}{k}\sin p\Delta t_i$	(7) $x_{i-1}\cos p\Delta t_i$
0	0	—	—	—	—	—	—
1	0.1	0.1	1.000	1.000	0.0489	0.309	0
2	0.2	0.1	0.987	0.987	0.0483	0.305	0.047
3	0.3	0.1	0.951	0.951	0.0465	0.294	0.181
4	0.4	0.1	0.891	0.891	0.0436	0.275	0.388
5	0.5	0.1	0.809	0.809	0.0396	0.250	0.643
6	0.6	0.1	0.707	0.707	0.0346	0.219	0.914
7	0.7	0.1	0.588	0.588	0.0288	0.182	1.166
8	0.8	0.1	0.454	0.454	0.0222	0.140	1.364
9	0.9	0.1	0.309	0.309	0.0151	0.095	1.477
10	1.0	0.1	0.156	0.156	0.0077	0.048	1.482

续上表

i	(8) $x_{i-1}\sin p\Delta t_i$	(9) $\frac{\dot{x}_{i-1}}{p}\cos p\Delta t_i$	(10) $\frac{\dot{x}_{i-1}}{p}\sin p\Delta t_i$	(11) x_i	(12) $\frac{\dot{x}_i}{p}$
0	—	—	—	0	0
1	0	0	0	0.049	0.309
2	0.015	0.294	0.095	0.190	0.584
3	0.059	0.555	0.180	0.408	0.790
4	0.126	0.752	0.244	0.676	0.901
5	0.209	0.857	0.278	0.961	0.898
6	0.297	0.854	0.278	1.226	0.776
7	0.379	0.738	0.240	1.434	0.540
8	0.443	0.514	0.167	1.553	0.211
9	0.480	0.201	0.065	1.558	−0.184
10	0.481	−0.175	−0.057	1.432	−0.608

开始时，该表的前六列可以全部填上，初始值x_0和$\dot{x}_0/p$（在这种情况下二者均为零）可以分别填入第（11）列和第（12）列的第一行内。于是，第二行的第（7）列至第（10）列的值算出如下：

第（7）列：$x_0\cos p\Delta t_1 = 0$

第（8）列：$x_0\sin p\Delta t_1 = 0$

第（9）列：$(\dot{x}_0/p)\cos p\Delta t_1 = 0$

第（10）列：$(\dot{x}_0/p)\sin p\Delta t_1 = 0$

在这点处，x_1和$\dot{x}_1/p$的值，可以按照方程（1.76c）和（1.76d）求算出来，并分别放到第（11）列和第（12）列内。这样，

第（11）列＝第（5）列＋第（7）列＋第（10）列

第（12）列＝第（6）列－第（8）列＋第（9）列

所有后面接着的诸行，按第二行的相同方法填入。

本例中其它三种情况，可以按类似方式处理。所有四种情况的位移和精确解的位移归纳于表 1.2 中。这些结果的曲线图示于图 1.59 内，图中精确解用实线表示。如所预料到的，第 1 种情况（图 1.58a）的曲线位于准确曲线的上面，而第 2 种情况（图 1.58b）的曲线，

地信网论坛 BBS.3500L.COM

位于准确曲线的下面。第3种和第4种情况（图1.58c和1.58d）的曲线，实际上与准确曲线没有区别，但是观察表1.2中诸数字，揭示出这样一个事实：这两种内插均得出稍低于正确值的结果。

例　题　1　的　位　移　　表1·2

$\frac{t_1}{t_2}$	第一种情况	第二种情况	第三种情况	第四种情况	精　确　的
0.0	0	0	0	0	0
0.1	0.049	0.048	0.049	0.049	0.049
0.2	0.190	0.187	0.189	0.189	0.190
0.3	0.408	0.397	0.404	0.403	0.404
0.4	0.676	0.652	0.666	0.665	0.667
0.5	0.961	0.917	0.942	0.941	0.943
0.6	1.226	1.156	1.195	1.193	1.218
0.7	1.434	1.332	1.388	1.386	1.408
0.8	1.553	1.416	1.489	1.488	1.504
0.9	1.558	1.383	1.475	1.474	1.484
1.0	1.432	1.223	1.332	1.331	1.333

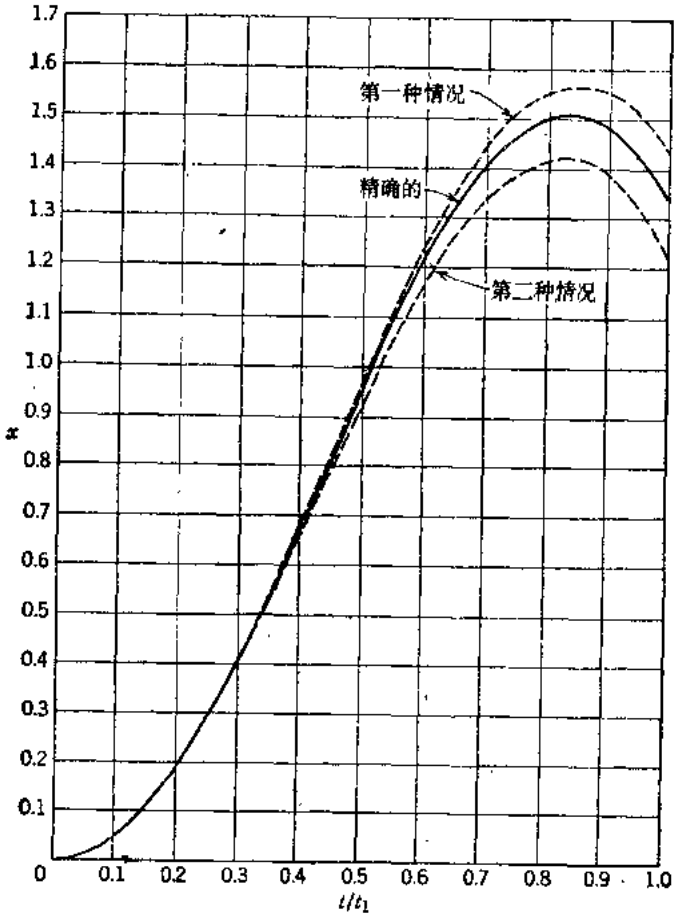
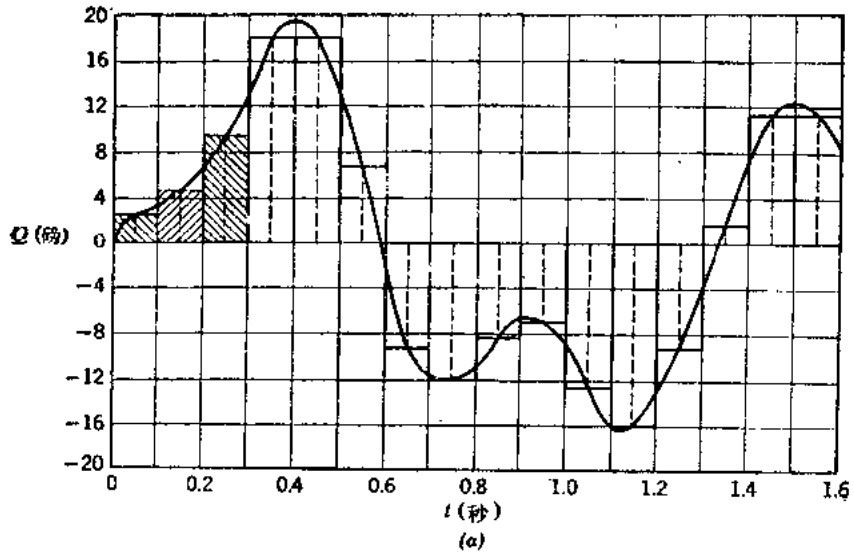


图　1.59



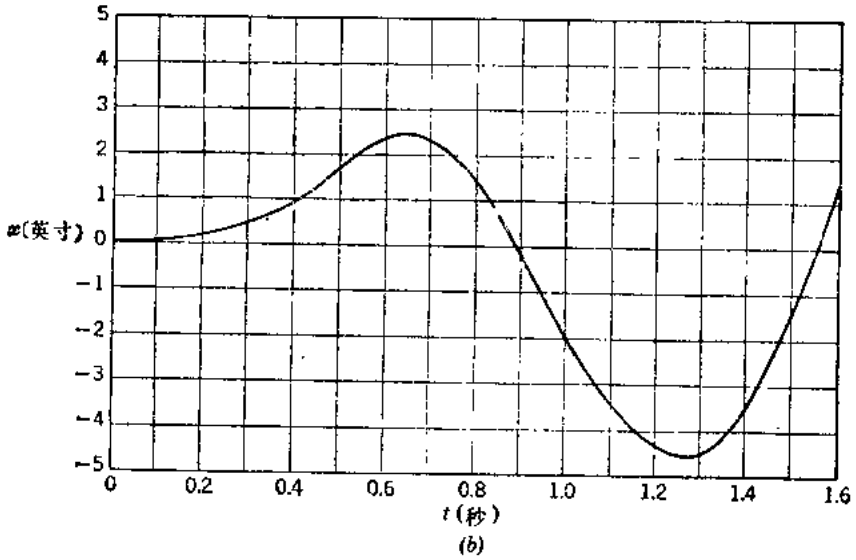


图 1.60

例题 2 假设一个无阻尼的一个自由度系统具有弹簧常数 $k=10$ 磅/英寸和固有周期 $\tau=1.2$秒，一个干扰力Q随时间如图1.60a所示地变化，Q的诸数值列于表 1.3 的第（3）列中。如图1.60a所示，选择具有$\Delta t_i=0.1$秒的均匀时间步长的分段常数内插函数。每一矩形冲量的值取作步长中间处曲线的纵坐标。还假设此问题的初始条件为$x_0=0$和$\dot{x}_0=0$。试求算并绘出在时间范围 $0\leqslant t\leqslant 1.6$秒内系统的位移。

解：在此例题中，我们知 $\Delta t_i/\tau=1/12$；$p\Delta t_i=\pi/6=30°$；$\cos p\Delta t_i=0.866$；$\sin p\Delta t_i=0.500$ 和 $(1-\cos p\Delta t_i)=0.134$。表1.3 包括计算中的所有步骤，图1.60$b$ 说明位移对时间的曲线图。

地信网论坛 BBS.3500L.COM

例　题　2　的　解　　表1·3

i	(1) t_i (秒)	(2) Δt_i (秒)	(3) Q_i (磅)	(4) $\frac{Q_i}{k}$ (英寸)	(5) $\frac{Q_i}{k}(1-\cos p\Delta t_i)$ (英寸)	(6) $\frac{Q_i}{k}\sin p\Delta t_i$ (英寸)	(7) $x_{i-1}\cos p\Delta t_i$ (英寸)
0	0	—	—	—	—	—	—
1	0.1	0.1	2.50	0.25	0.033	0.125	0
2	0.2	0.1	4.60	0.46	0.062	0.230	0.029
3	0.3	0.1	9.20	0.92	0.123	0.460	0.133
4	0.4	0.1	19.00	1.90	0.255	0.950	0.361
5	0.5	0.1	19.00	1.90	0.255	0.950	0.820
6	0.6	0.1	6.60	0.66	0.088	0.330	1.500
7	0.7	0.1	−9.20	−0.92	−0.123	−0.460	2.075
8	0.8	0.1	−12.00	−1.20	−0.161	−0.600	2.064
9	0.9	0.1	−8.40	−0.84	−0.112	−0.420	1.254
10	1.0	0.1	−7.00	−0.70	−0.094	−0.350	−0.129
11	1.1	0.1	−12.70	−1.27	−0.170	−0.635	−1.655
12	1.2	0.1	−16.00	−1.60	−0.214	−0.800	−2.967
13	1.3	0.1	−9.30	−0.93	−0.125	−0.465	−3.817
14	1.4	0.1	1.50	0.15	0.020	0.075	−3.938
15	1.5	0.1	11.20	1.12	0.150	0.560	−3.094
16	1.6	0.1	11.20	1.12	0.150	0.560	−1.273

续上表

i	(8) $x_{i-1}\sin p\Delta ti$ (英寸)	(9) $\frac{\dot{x}_{i-1}}{p}\cos p\Delta t_i$ (英寸)	(10) $\frac{\dot{x}_{i-1}}{p}\sin p\Delta t_i$ (英寸)	(11) x_i (英寸)	(12) $\frac{\dot{x}_i}{p}$ (英寸)
0	—	—	—	0	0
1	0	0	0	0.033	0.125
2	0.017	0.108	0.062	0.153	0.322
3	0.077	0.278	0.161	0.417	0.662
4	0.208	0.573	0.331	0.946	1.315
5	0.473	1.139	0.657	1.732	1.616
6	0.866	1.399	0.808	2.396	0.863
7	1.198	0.748	0.432	2.383	−0.910
8	1.192	−0.788	−0.455	1.448	−2.580
9	0.724	−2.234	−1.290	−0.148	−3.378
10	−0.074	−2.926	−1.689	−1.911	−3.201
11	−0.956	−2.773	−1.601	−3.426	−2.452
12	−1.713	−2.123	−1.226	−4.407	−1.210
13	−2.204	−1.043	−0.605	−4.547	0.691
14	−2.273	0.598	0.345	−3.572	2.946
15	−1.786	2.552	1.473	−1.470	4.898
16	−0.735	4.242	2.449	1.326	5.537

地信网论坛 BBS.35001.COM

习 题 组 1.15*

1.15—1 试确定，对于用方程（1.76e）所表示的无阻尼反应被 p 所除的速度$\dot{x}_i$的表达式。

答：
$$\frac{\dot{x}_i}{p}=-x_0\sin pt_i+\frac{\dot{x}_0}{p}\cos pt_i+\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{i}Q_j\left[-\sin p(t_i-t_j)+\sin p(t_i-t_{j-1})\right]$$

1.15—2 试确定对于用方程（1.77e）所表示的无阻尼反应被 p 所除的速度$\dot{x}_i$的表达式。

答：
$$\frac{\dot{x}_i}{p}=-x_0\sin pt_i+\frac{\dot{x}_0}{p}\cos pt_i+\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{i}\left\{Q_{j-1}\left[-\sin p(t_i-t_j)+\sin p(t_i-t_{j-1})\right]+\frac{\Delta Q_j}{k\Delta t_j}\left[-\Delta t_j\sin p(t_i-t_j)+\frac{1}{p}\cos p(t_i-t_j)-\frac{1}{p}\cos p(t_i-t_{j-1})\right]\right\}$$

1.15—3 试导出一个适用于模拟具有水平窄条的脉冲激发，而类似于分段线性内插函数的方程（1.75c）的表达式（见习题1.13—2）。

答：
$$x_i=\frac{1}{k}\left\{\Delta Q_0(1-\cos pt_i)+\sum_{j=1}^{i}\frac{\Delta Q_j}{\Delta t_j}\left[\Delta t_j+\frac{1}{p}\sin p(t_i-t_j)-\frac{1}{p}\sin p(t_i-t_{j-1})\right]\right\}$$

1.15—4 试确定对方程（1.76b）所表示的阻尼反应以 p_d 所除的速度$\dot{x}_i$的表达式。

答：
$$\frac{\dot{x}_i}{p_d}=e^{-n\Delta t_i}\left[-x_{i-1}\sin p_d\Delta t_i+\frac{\dot{x}_{i-1}+nx_{i-1}}{p_d}\cos p_d\Delta t_i-\frac{n}{p_d}\left(x_{i-1}\cos p_d\Delta t_i+\frac{\dot{x}_{i-1}+nx_{i-1}}{p_d}\sin p_d\Delta t_i\right)\right]+\frac{Q_i}{k}e^{-n\Delta t_i}\left(1+\frac{n^2}{p_d^2}\right)\sin p_d\Delta t_i$$

1.15—5 试证实表1.2中对于第 2 种情况所给出的结果（见例题 1）。应用类似重复应用方程（1.76c）和（1.76d）的表1.1的形式。

1.15—6 试证实表1.2中对于第 3 种情况所给出的结果（见例题 1）。应用类似重复应用方程（1.76c）和（1.76d）的表1.1的形式。

1.15—7 试证实表 1.2 中对于第 4 种情况所给出的结果（见例题 1）。应用类似重复应用方程（1.77c）和（1.77d）的表1.1的形式（但是带有附加列）。

---

* 作为本节中所包含手算的另一种方法，推荐数字计算机程序，以高速度和高精确度进行无味的数字运算。为此目的，按称为BASIC的分时语言编制名为 CONFORCE 的程序（用于计算分段常数施力函数），列于本书附录内。考虑诸递推公式的差异，修改CONFORCE中的语句可以得到一种名为 LINFORCE（用于分段线性施力函数）的类似程序。

地信网论坛 BBS.3500L.COM

1.15—8　试用图1.56所示分段常数内插方法，求算并绘出一个无阻尼的一个自由度系统承受习题1.12—7中所给施力函数的位移。取$\Delta t_i = t_1/10$的均匀时间步长，并令时间范围为$0 \leqslant t \leqslant t_1$。假设初始条件为$x_0 = \dot{x}_0 = 0$，还假设$Q_1$和$k$值均为1。将结果与本习题的精确解进行比较，假设$t_1 = \tau/2$。

答：$x_{10} = 4/3$（精确的）。

1.15—9　试用图1.57中所示分段线性内插方法重复习题1.15—8。

1.15—10　试对习题1.12—8中所给施力函数重复习题1.15—8。

答：$x_{10} = 2/3$（精确的）

1.15—11　试用图1.57中所示分段线性内插方法，重复习题1.15—10。

1.15—12　对例题2中所述系统，用图1.57中所示分段线性内插方法，计算并绘出（在时间范围$0 \leqslant t \leqslant 1.0$内）对下面所给施力函数的反应：

t_i(秒)：	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
Q_i(磅)：	−8.3	−13.5	−15.4	−14.3	−11.6	−8.2	−3.5	3.7	11.2	15.1	17.3

答：$x_{10} = 2.73$英寸。

地信网论坛 BBS.35001.COM

第二章　具有非线性特征的系统

2.1　非线性系统的例子

在第 1 章中，当讨论一个自由度的系统的振动特性时，我们总是假设弹簧内的力与其变形成比例。我们还认识到，粘滞阻尼的处理要比其它能量耗散的原因容易得到，这里阻尼力与速度成比例。为了避免数学上的困难，在第1.10节中引进了等效粘滞阻尼的概念。此外，质量总是取作不随时间而变。因此，这种系统的运动方程为下面所示线性的、具有常系数的二阶常微分方程：

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F(t) \tag{2.1}$$

这个方程很好地表示许多实际问题，在线性振动理论中起重要作用。然而，也有许多用具有常系数的线性微分方程，不足以描述其运动的物理系统，这种系统的分析需要讨论非线性微分方程。

如果我们略去质量可变的可能性，那么，一个自由度系统的运动方程的一般形式可以表达成：

$$m\ddot{x}+F(x,\dot{x},t)=0 \tag{2.2}$$

我们称具有非线性特征的系统为非线性系统，而且我们称它们的运动为非线性振动或非线性反应。首先应认识到，在第 1 章中常用的迭加原理不适用于非线性系统。例如，如果一施力函数的量是倍增的，而非线性系统的反应却未必是倍增的。一般来说，非线性振动不是谐和的，它们的频率随振幅而变。

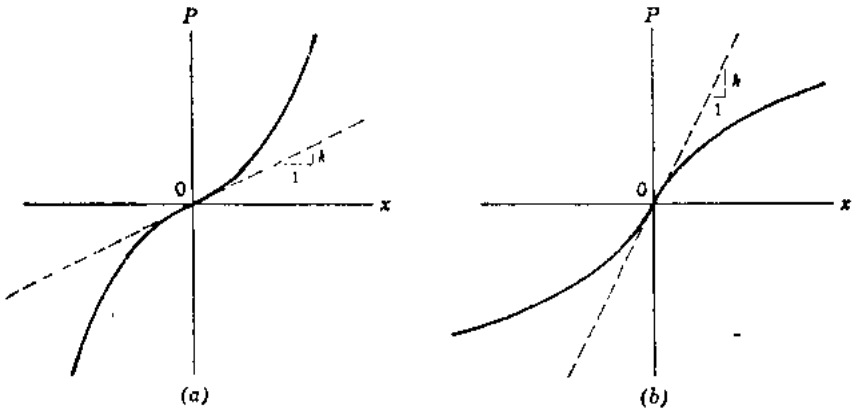


图 2.1

当一弹簧的恢复力不与其变形成比例时，出现一种重要的非线性。图 2.1*a* 说明，关于非线性弹性的“硬化弹簧(hardening spring)”的静力荷载—位移曲线，这里斜率随荷载增大而增大。图中的虚线在原点处与曲线相切，其斜率 k 表示该弹簧的初始刚度。类似地，图2.1*b*描述一个非线性弹性的“软化弹簧(softening spring)”的荷载—位移曲线，这里斜率随荷载增大而减小。在这些图的每一图中，曲线对原点成对称，其弹簧说成具有对称

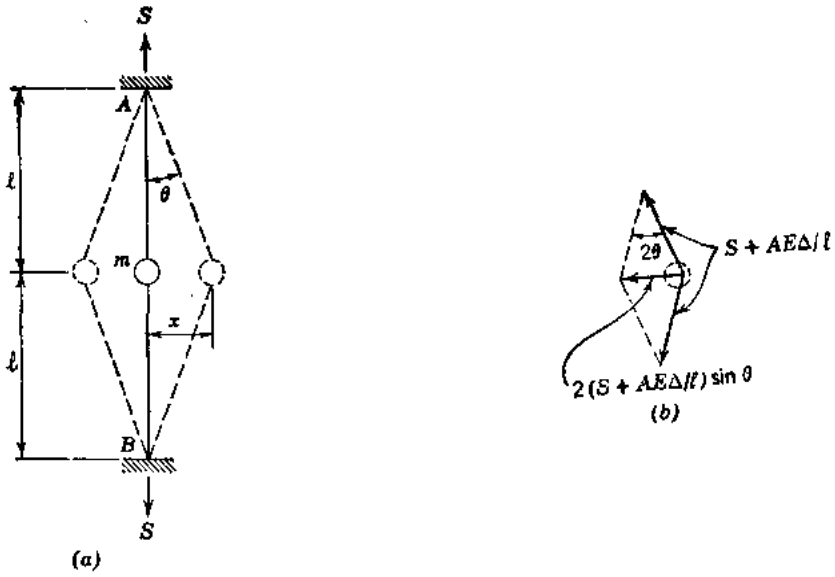


图 2.2

恢复力。如果荷载—位移曲线对原点不对称，那么该弹簧说成具有非对称恢复力。

图2.2*a*中，表示一个具有对称恢复力硬化弹簧特征的系统的例子。一个很小质量 m 置于长度为 $2l$ 拉紧着的钢丝 AB 的中间，该质量承受用符号 S 表示的初始拉力。当质量从其平衡位置侧向移动距离 x 时，钢丝产生恢复力，如图2.2*b*所示。这样，该系统可以进行自由振动，这个系统的运动方程为：

$$m\ddot{x} + 2\left(S + \frac{AE\Delta}{l}\right)\sin\theta = 0 \qquad (a)$$

方程(*a*)中符号 A、E 和 Δ 代表钢丝的横截面积、它的弹性模量和由于位移 x 使长度 l 产生的变化；θ 角表示钢丝与竖直线之间的倾斜角。观察图2.2*a*中的几何关系，说明：

$$\Delta = \sqrt{l^2 + x^2} - l \qquad \sin\theta = \frac{x}{\sqrt{l^2 + x^2}} \qquad (b)$$

当这些式子代入方程(*a*)，我们得到：

$$m\ddot{x} + 2\left[S + \frac{AE\left(\sqrt{l^2 + x^2} - l\right)}{l}\right]\frac{x}{\sqrt{l^2 + x^2}} = 0 \qquad (2.3a)$$

这个精确的非线性运动方程可以借下面近似关系式以较简单（但是精确度差一些）的方程来代替：

$$\Delta \approx \frac{x^2}{2l} \qquad \sin\theta \approx \frac{x}{l} \qquad (c)$$

将这些式子代入方程(*a*)，得到：

$$m\ddot{x} + \frac{2S}{l}x + \frac{AE}{l^3}x^3 = 0 \qquad (2.3b)$$

这个运动的近似微分方程包含 x 三次方一项，所以，仍然是非线性的。如果初始拉力 S 很高，同时位移 x 很小，那么方程 (2.3*b*) 中的立方项可以略去不计。在这些条件下，质量的运动近似地借余下诸项表示为谐和运动，否则，立方项必须考虑，其恢复力属于图2.1*a* 表示的类型。因为荷载—位移曲线的斜率随位移增大，所以自由振动的频率随振幅而增大。

地信网论坛 BBS.35001.COM

应注意，图 2.2a 中系统的非线性，是由于大位移的几何因素的结果，而不是由于钢丝材料的非线性的结果。几何非线性的另一个例子，借图 2.3 中重量为 W、长度为 L 的单摆来表示。在距竖直线移动了 ϕ 角的位置处，该摆对旋转中心点 C，有一个等于 $WL\sin\phi$ 的恢复力矩。这样，对该旋转中心的旋转运动方程成为：

$$I\ddot{\phi}+WL\sin\phi=0 \qquad (d)$$

将质量的惯性矩 $I=WL^2/g$ 代入此式，我们得到

$$\ddot{\phi}+\frac{g}{L}\sin\phi=0 \qquad (2.4a)$$

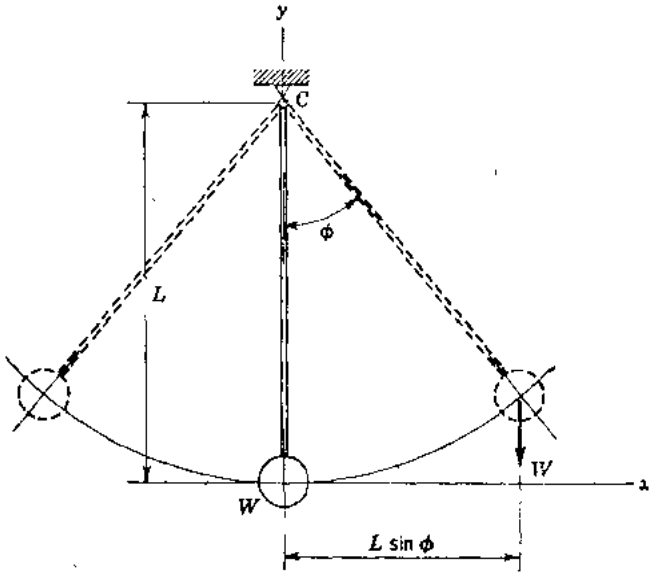


图 2.3

对于微小的振幅，$\sin\phi$ 近似地等于角 ϕ，其运动可以考虑为简谐运动。如果振幅不是很小，那么恢复力矩与 $\sin\phi$ 成比例，$\sin\phi$ 可以用幂级数近似表示。将该级数的前两项代入方程 (2.4a)，得到：

$$\ddot{\phi}+\frac{g}{L}\left(\phi-\frac{\phi^3}{6}\right)=0 \qquad (2.4b)$$

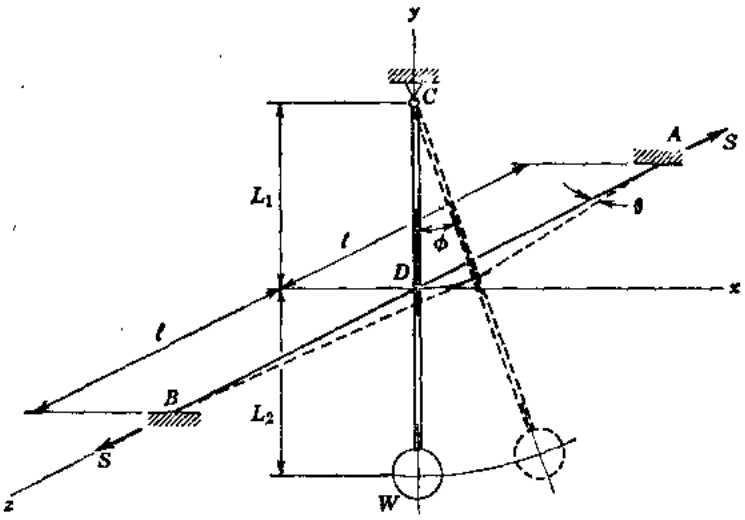
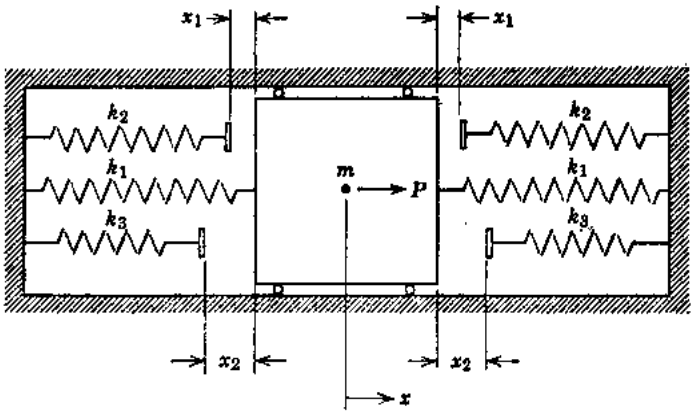


图 2.4

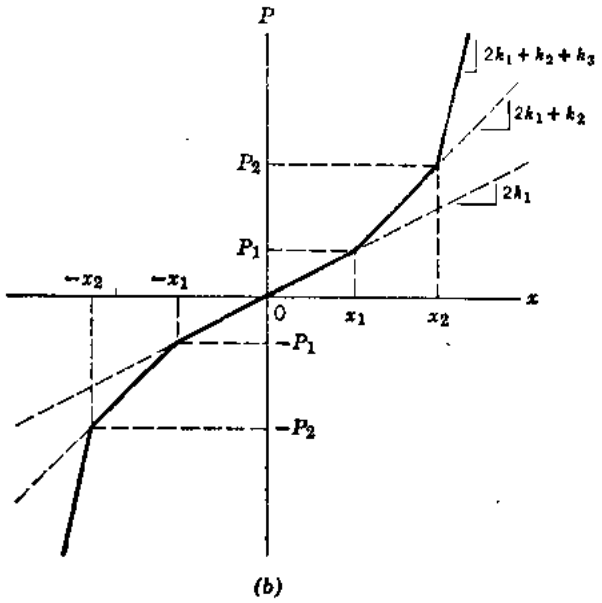
在这种情况下，我们看到，恢复力矩对 ϕ 的曲线的斜率随着转动增大而减小，因而振动的频率随振幅减小。

比较方程 (2.3b) 和 (2.4b)，揭示出这样一个事实：在图 2.4 所示类型的组合系统中，这两个表达式内非线性项趋于互相补偿。亦即，用附于摆杆上 D 点处（且垂直于振动的平面）张拉着的水平钢丝 AB 将摆约束住，可以得到等时振动(isochronic oscillation)的较好近似值。

图2.5*b* 和 2.6*b* 表示分段线性恢复力的图解，它可考虑为图 2.1*a* 和 2.1*b* 中连续曲线的近似值。现在它们相应于图 2.5*a* 和 2.6*a* 中线性弹性的不连续系统。虽然在这些图中诸弹簧均为线性弹性者，但是质量的运动均非连续函数。这样，一种系统将在本章的后一部分(见第2.5节)作详细论述。然而，在这点上，清楚地认识到非线性恢复力可借一些连续的直线线段模拟来近似表示为分段线性函数。



(*a*)



(*b*)

图 2.5

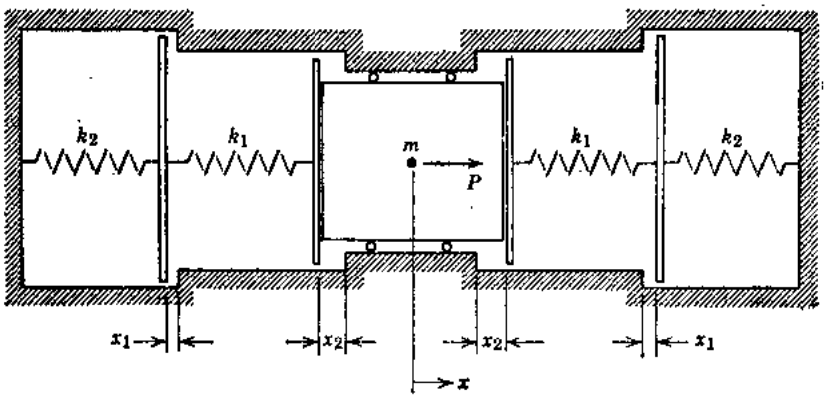
如果动力荷载使结构或机器的一部分产生超出材料弹性范围的变形，那么所产生的运动称为非弹性反应。虽然在正常工作条件下超出弹性范围的偏差是不容许的，但是在承受极端条件的结构或机器中，永久破坏的范围，往往是设计工程师所关心的。例如，承受剧烈冲击波或地震荷载的建筑物，可能产生非弹性变形。

图 2.7*a* 描述屋顶处承受横向荷载 P 的矩形建筑物的一个理想化二维钢框架。如果诸柱的弯曲刚度小于梁的弯曲刚度，而且荷载不定地增大，那么诸柱端点处将形成所谓的塑性铰。荷载 P 对位移 x 的曲线在 P_{y1} 值之前是线性的（见图 2.7*b* 中标明①的线），P_{y1} 值处材料开始屈服。接着，以类似图2.1*b* 中关于软化弹簧的图解方式进行弯曲（见标明②的曲线）。卸载时，材料如图2.7*b* 中曲线③那样弹性地回过来。图中这一部分借另一平行于弹性—荷载线（曲线图的①部分）的直线来表示。如果作用反向的荷载，那么产生图2.7*b* 中标明④和⑤的部分；接着卸载，产生线⑥。实验说明，如果最大正的力 P_{m1} 和最大负的力 $-P_{m2}$（图上 B 和 E 点的纵坐标）数值上相等，那么由于循环加载形成的滞后回线(hysteresis loop)对原点对称*。

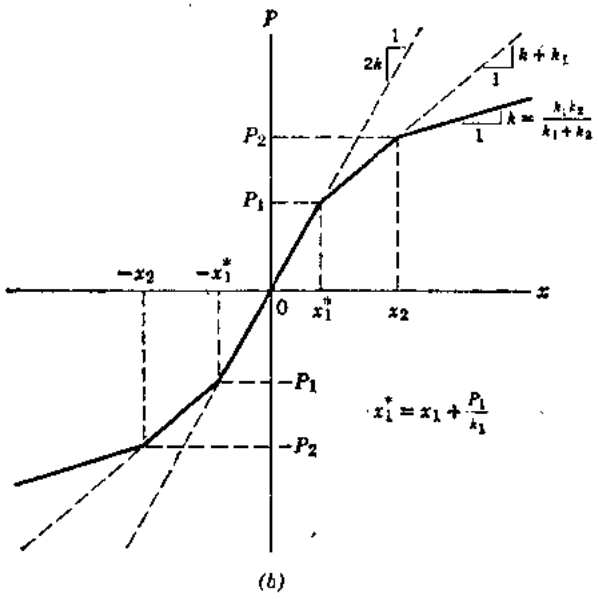
---

* W.Ramberg和W.R.Osgood, "Description of Stress-Strain Curves by Three Parameters", NACA Tech.Note No.902, July, 1943; 还见S.C.Goel和G.V.Berg, "Inelastic Earthquake Response of Tall Steel Frames, "Jour.Struc.Div., ASCE, Vol.94, No. ST8, August, 1968, pp.1907—1934; 以及E.P.Popov和E.R. Pinkney , "Cyclic Yield Reversal in Steel Building Joints", Jour.Struc. Div., ASCE, Vo..95, No.ST3, March, 1969, pp.327—353.

地信网论坛 BBS.35001.COM



(a)

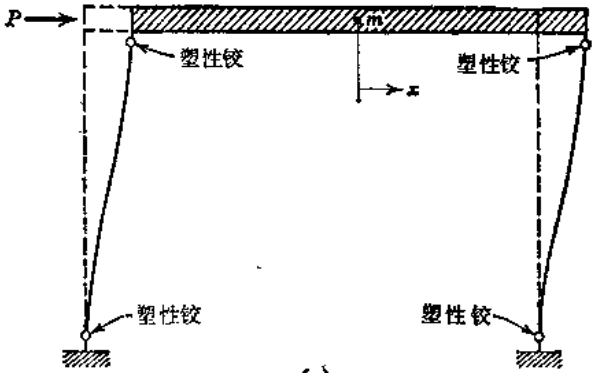


(b)

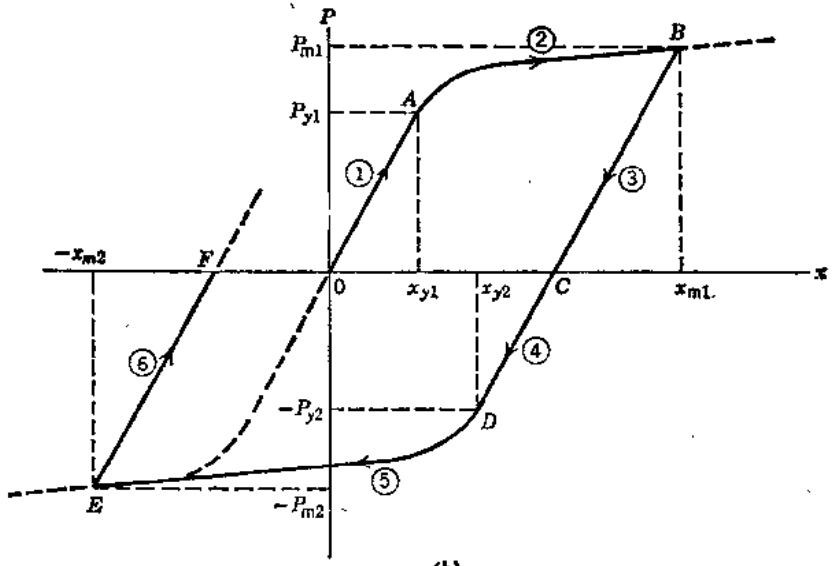
图 2.6

图2.7b中，弯曲部分往往用直线来代替，近似表示其真实性能。图 2.7c 就说明这样一种简化的荷载—位移图，称为双线性非弹性恢复力(bilinear inelastic restoring force)。它由两根非弹性性能的平行线（图中标明②和④）和一族弹性性能的平行线（以标有①和③为代表）组成。如果②线和④线的斜率均为零，如图 2.7d 那样，那么该图表示弹塑性恢复力，亦即，P对x的曲线图由一些直线段组成，其性能假设不是完全弹性的就是完全塑性的。例如，让我们考虑图2.7a中的框架，假定荷载P增大到P_m值（见图2.7d的A点）。如果假设图2.7a中的诸塑性铰同时形成，那么不要相应增加荷载而位移增大，如图 2.7d 中水平线从A至B所示。荷载减小引起位移按图2.7d中线③减小，等等。

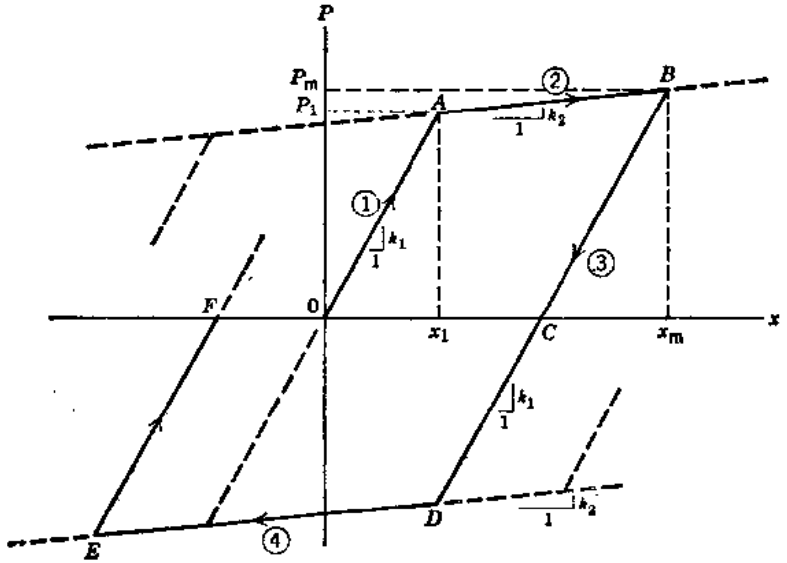
在梁和框架的弹塑性分析中，固有的滞后回线代表第 1.10 节中早已讨论的离散化的结构阻尼的肉眼可见形式。在这种情况下，自然假设塑性铰处失去所有耗散能量，而结构的其余部分保存着能量。让我们称这种耗散的机制为弹塑性阻尼，它代表滞后阻尼的一种特殊情况。它是位移的分段线性函数，并与第1.10节中讨论过的另一种滞后阻尼—库仑(或摩擦的)


P
塑性铰
塑性铰
塑性铰
塑性铰
x

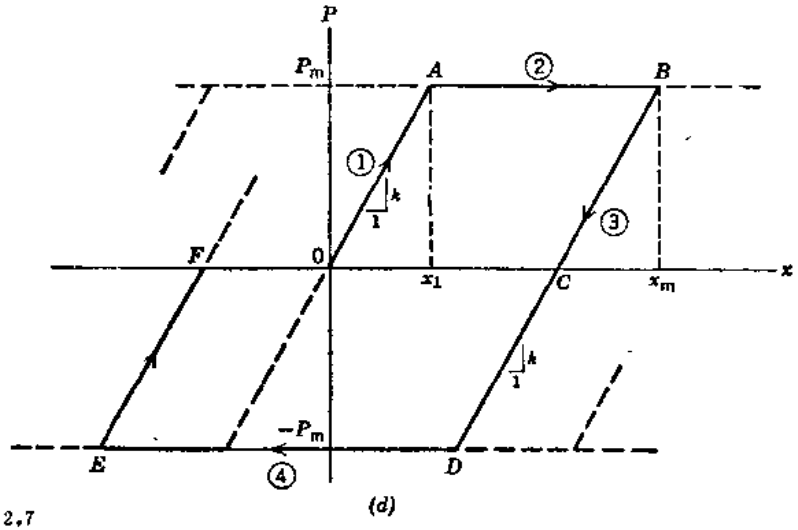
(a)


P
P_{m1}
P_{y1}
A
B
①
②
③
④
⑤
⑥
$-x_{m2}$
F
0
x_{y1}
x_{y2}
C
x_{m1}
x
$-P_{y2}$
D
E
$-P_{m2}$

(b)


P
P_m
P_1
A
B
①
②
③
④
k_1
k_2
1
F
0
x_1
C
x_m
x
D
E

(c)


P
P_m
A
B
①
②
③
④
k
1
F
0
x_1
C
x_m
x
$-P_m$
D
E

(d)

图 2.7

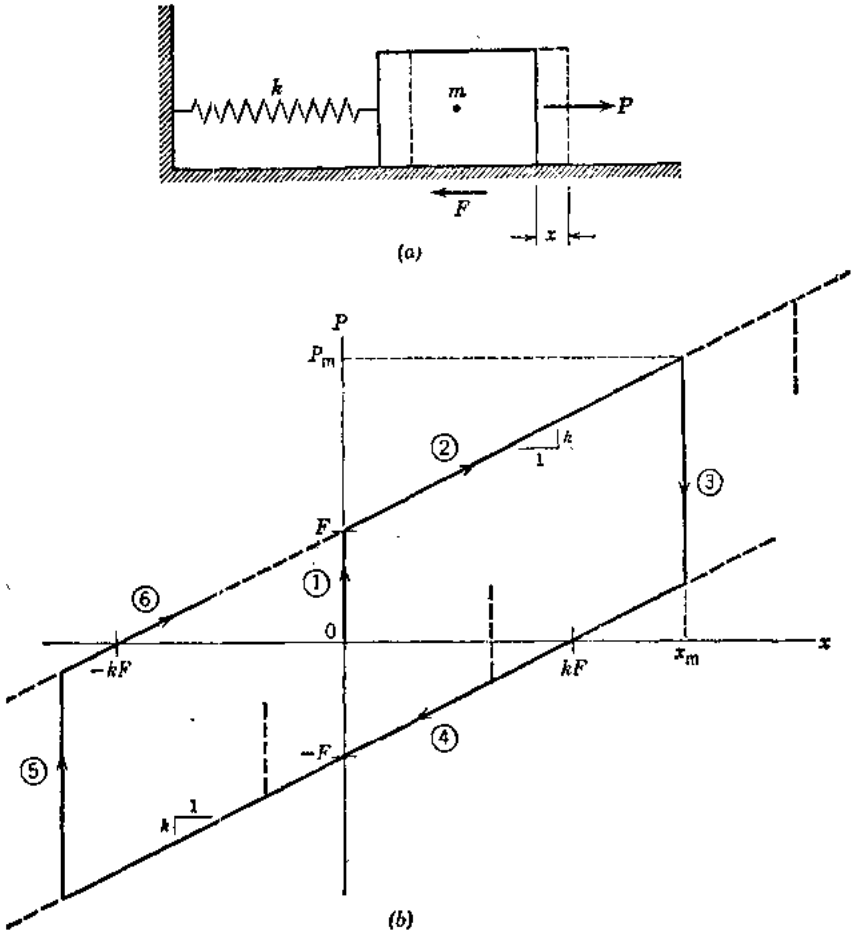


图 2.8

阻尼具有同样的某些特征。图 2.8*a* 说明具有这种摩擦阻力 F 的一个自由度系统，这种情况的滞后回线示于图 2.8*b* 中。如果当 P 第一次作用时系统没有残余摩擦力，那么 P 对 x 的曲线遵循图 2.8*b* 中的线①和线②。以后减小荷载并反方向加载则借线③和④表示，反向卸载后再加载则符合图中线⑤和线⑥。在这种情况下，双线性图由斜线②和④（二者的斜率均等于弹簧常数 k）以及以③和⑤代表的竖直线族组成。

有趣地注意到，如果图2.7*d* 中诸斜线（①型和③型）的斜率取为无穷大，而图 2.8*b* 中诸斜线（②型和④型）的斜率取为零，那么借这些图所表示的两个问题在数学上成为相同。前一问题限于刚—塑性恢复力（rigid-plastic restoring force）的情况，对于这种情况，弹簧在其弹性范围内的变形假设与材料塑性范围内的变形相比是很小的。反之，后一问题成为一个无弹簧的质量的情况，它的运动仅由摩擦制止。

如第1.10节所述，所有已知耗散机制，除了粘滞阻尼之外，均产生非线性振动。例如，液体阻尼（或“速度平方的”阻尼），引起浸于液体中迅速运动的物体的运动方程出现与 $\dot{x}|\dot{x}|$ 成比例项。这种非线性的和许多其它类型的非线性，可以借本章的方法进行分析。然而，始终假设振动系统的质量、阻尼和刚度的特征不随时间变化，还假设施力函数与位移、

地信网论坛 BBS.3500L.COM

速度以及加速度无关。这些可能性与振动的稳定性、粘弹性和“自行激发的”* 振动等方面问题有关，关于它们的讨论超出了本书的范围。

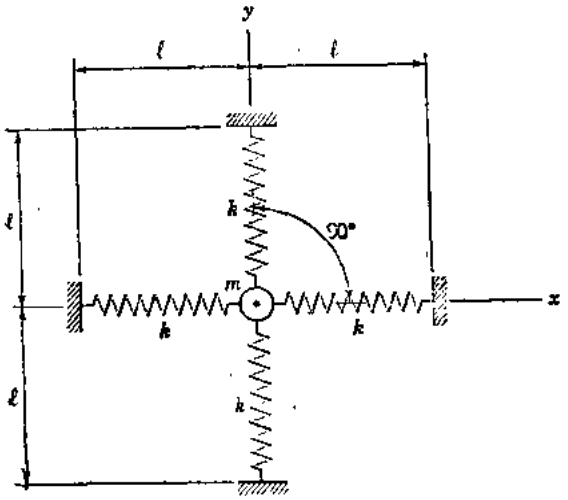
习 题 组 2.1

2.1—1 图中表示一个由四根线性弹性弹簧约束住的微小质量m，每一根弹簧具有刚度常数k，无应力时的长度为l。试确定（a）该质量顺x方向的大位移的非线性运动方程，(b)大位移运动的近似的非线性方程，以及(c)小位移运动的近似的线性方程。

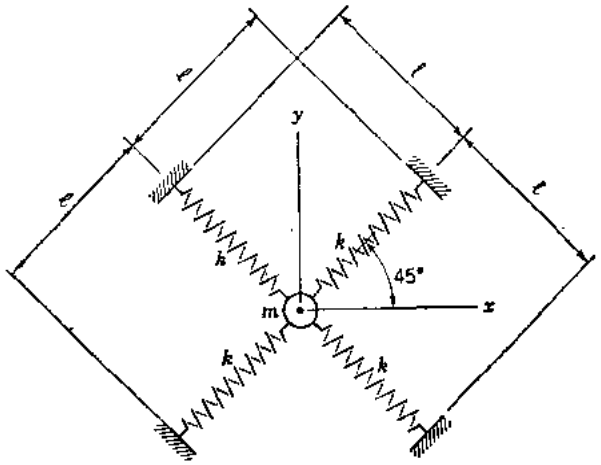
答：（a）$m\ddot{x}+2kx\left(2-l/\sqrt{l^2+x^2}\right)=0$

（b）$m\ddot{x}+2kx\left(1+x^2/2l^2\right)=0$

（c）$m\ddot{x}+2kx=0$



习题 2.1—1



习题 2.1—2

2.1—2 图中的系统与习题2.1—1中相同，每一根弹簧与x轴之间的角为45°。试确定(a) 质量顺x方向大位移的非线性运动方程，（b）小位移的近似的线性运动方程。

答：$(a)m\ddot{x}+2k\left\{2x-l\left[\frac{1}{\sqrt{1+1/(1+\sqrt{2}\,x/l)^2}}\right.\right.$

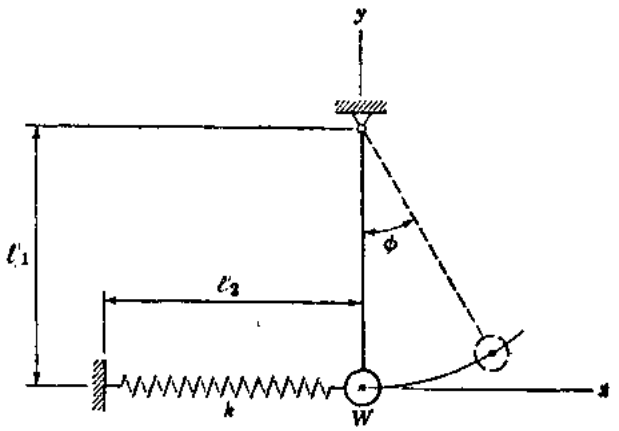
$\left.\left.-\frac{1}{\sqrt{1+1/(1-\sqrt{2}\,x/l)^2}}\right]\right\}=0$

（b）$m\ddot{x}+2kx=0$

2.1—3 试对图中约束着的摆，确定(a)大转动的非线性运动方程，（b)小转动的近似的线性运动方程。

答：（a）$\ddot{\phi}+\frac{g}{l_1}\left[\sin\phi+\frac{F}{W}\cos(\phi-\theta)\right]=0$

其中



习题 2.1—3

* 关于自行激发的和不稳定的振动的讨论见J.P.Den Hartoy, Mechanical Vibrations, 4th ed., McGraw-Hill, New York, 1956, 第7章和第8章。

地信网论坛 BBS.3500L.COM

$$F=k\left(\frac{l_2+l_1\sin\phi}{\cos\theta}-l_2\right);\qquad \theta=\tan^{-1}\left[\frac{l_1(1-\cos\phi)}{l_2+l_1\sin\phi}\right]。$$

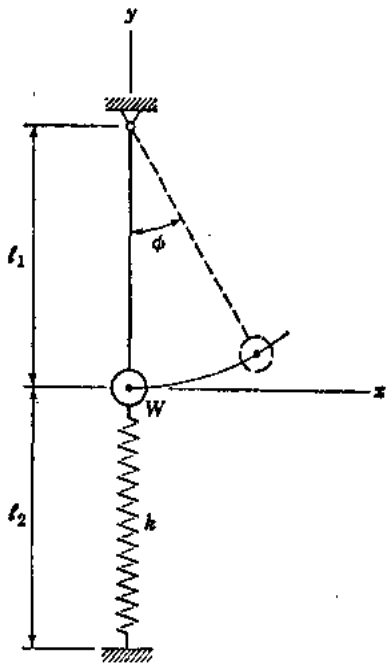
$$(b)\ \ddot{\phi}+\left(\frac{g}{l_1}+\frac{kg}{W}\right)\phi^3=0$$

2.1—4　试对图中约束着的摆，确定(a)大转动的非线性运动方程，(b)大转动的近似的非线性运动方程，以及(c)小转动近似的线性运动方程。

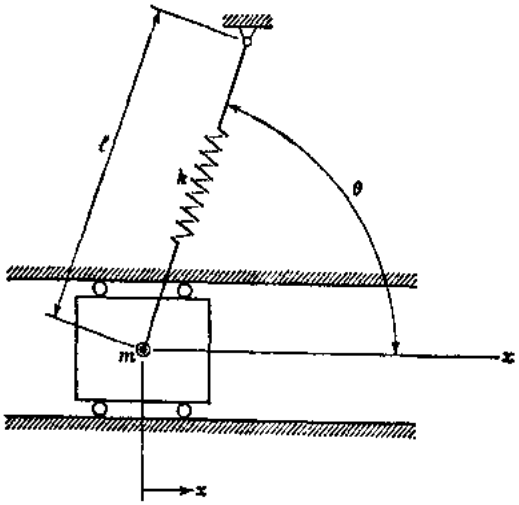
答：　$(a)\ \ddot{\phi}+\frac{g}{l_1}\sin\phi+\frac{kg}{Wl_1}(l_1+l_2)\left[1-\frac{l_2}{\sqrt{l_2^2+2l_1(l_1+l_2)(1-\cos\phi)}}\right]\sin\phi=0$

$(b)\ \ddot{\phi}+\frac{g}{l_1}\phi+\frac{g}{2}\left[\frac{k}{W}\left(\frac{l_1}{l_2}+1\right)^2-\frac{1}{3l_1}\right]\phi^3=0$

$(c)\ \ddot{\phi}+\frac{g}{l_1}\phi=0$



习题　2.1—4



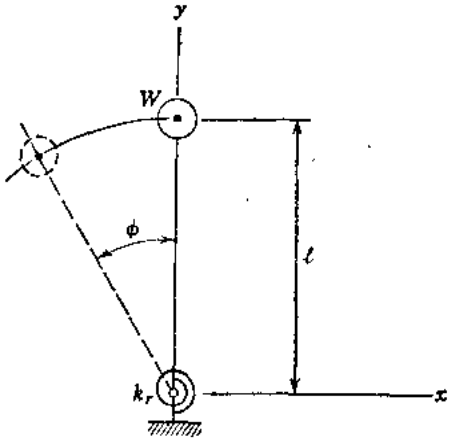
习题　2.1—5

2.1—5　图中表示一个借未变形时长度等于 l 的斜弹簧约束着的质量。在其稳定平衡位置之一处，弹簧与水平线倾斜成 θ 角，如图所示。试写出此系统与顺 x 方向大位移有关的非线性运动方程。

答：　$m\ddot{x}+k\left[x-l\cos\theta+\frac{l(l\cos\theta-x)}{\sqrt{l^2+x^2-2lx\cos\theta}}\right]=0$

2.1—6　一个倒摆，在其旋转中心处，设有一个线性弹性旋转弹簧，如图所示。试确定此系统的大转动的非线性运动方程。

答：　$\ddot{\phi}+\frac{k_r g}{Wl^2}\phi-\frac{g}{l}\sin\phi=0$



习题　2.1—6

地信网论坛 BBS.3500L.COM

2.2 速度和周期的直接积分

让我们考虑具有非线性弹性的、对称恢复力的无阻尼系统的自由振动。这种情况的运动方程为：

$$m\ddot{x} + F(x) = 0 \qquad (a)$$

或

$$\ddot{x} + p^2 f(x) = 0 \qquad (2.5)$$

其中$p^2 f(x) = F(x)/m$一项，代表单位质量上为位移x的函数的恢复力。方程（2.5）中的加速度，可以按下列方式用速度的导数来表达：

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}\dot{x} = \frac{1}{2}\frac{d(\dot{x})^2}{dx} \qquad (b)$$

将上式代入方程（2.5），我们得到：

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d(\dot{x})^2}{dx} + p^2 f(x) = 0 \qquad (c)$$

假设单位质量的恢复力$p^2 f(x)$，借图2.9中的曲线给出，还假设相应于端点位置处x_m的速度为零，我们可以对方程（c）求积，得到：

$$-\frac{1}{2}\dot{x}^2 = -p^2\int_{x_m}^{x} f(\xi)\,d\xi = p^2\int_{x}^{x_m} f(\xi)\,d\xi \qquad (d)$$

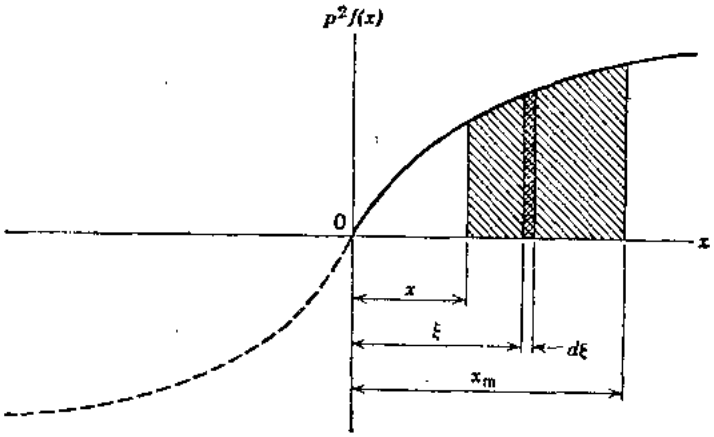


图 2.9

这样，对于振动系统的任一位置，其单位质量的动能等于图2.9中曲线下画阴影线的面积所表示的势能。自然，在平衡位置处所获得的最大动能，我们从第1.3节的方程（1.13）来得到*：

$$(\mathrm{KE})_{max} = \frac{1}{2}\dot{x}_m^2 = p^2\int_0^{x_m} f(\xi)\,d\xi = (\mathrm{PE})_{max} \qquad (2.6)$$

方程（d）得出任何位置处振动质量的速度$\dot{x}$的表达式：

---

* (2.6) 式中KE为英文kinetic energy（动能）的缩写，PE为英文potential energy（势能）的缩写。——译注

地信网论坛 BBS.3S001.COM

$$\dot{x}=\frac{dx}{dt}=\pm p\sqrt{2\int_{x}^{x_m} f(\xi)d\xi} \qquad (e)$$

从它，一周内任何部分的时间可以借二次积分得到。因而，整周的时间成为：

$$\tau=\frac{4}{p}\int_{0}^{x_m}\frac{dx}{2\int_{x}^{x_m}\sqrt{f(\xi)d\xi}} \qquad (2.7)$$

这样，如果恢复力的分析式已给出，那么该系统的固有周期，可以借求算方程（2.7）中的积分来求得。此外，平衡位置处的速度 $\dot{x}_m$ 与端点位置处的位移 x_m 之间的关系式，可以从方程（2.6）来得到。该式对于求出开始时移动然后允许自由振动的非线性系统的最大速度是有用的。反过来，它可以用于计算由于一初始速度所产生的最大位移。这样一种初始速度，可以借一个与系统的周期相比是短的持续时间的冲量来给予质量。

现在我们将考虑一些特殊情况，先从与 x 的任何奇次方成比例的恢复力开始。亦即：

$$f(x)=x^{2n-1} \qquad (f)$$

式中 n 为正整数，荷载—位移曲线与原点成对称。将（f）式用于方程（2.6）中，并积分，我们求出：

$$\dot{x}_m=\pm\frac{px_m^n}{\sqrt{n}} \qquad (g)$$

对于 $n=1$，它成为 $\dot{x}_m=\pm px_m$；对于 $n=2$，$\dot{x}_m=\pm 0.707px_m^2$，等等。其次，我们将（$f$）式代入方程（2.7），并积分，得到：

$$\tau=\frac{4\sqrt{n}}{p}\int_{0}^{x_m}\frac{dx}{\sqrt{x_m^{2n}-x^{2n}}} \qquad (2.8a)$$

对于线性恢复力的情况（$n=1$），得到第二个积分：

$$\tau=\frac{4}{p}\int_{0}^{x_m}\frac{dx}{\sqrt{x_m^2-x^2}}=\frac{4}{p}\int_{0}^{1}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{4}{p}\left[\cos^{-1}u\right]_{1}^{0}=\frac{2\pi}{p} \qquad (h)$$

其中 $u=x/x_m$。当 $n=2$ 时，恢复力与 x^3 成比例，方程（2.8a）得出：

$$\tau=\frac{4\sqrt{2}}{p}\int_{0}^{x_m}\frac{dx}{\sqrt{x_m^4-x^4}}=\frac{4\sqrt{2}}{px_m}\int_{0}^{1}\frac{du}{\sqrt{1-u^4}} \qquad (i)$$

方程（i）中后一积分的数值是已知的*，等于 $1.8541/\sqrt{2}$。所以，固有周期的表达式成为：

$$\tau=\frac{7.4164}{px_m} \qquad (2.8b)$$

在此情况下，振动的周期与振幅成反比。方程（2.8b）的曲线示于图2.10中，它适合图2.2a中系统当钢丝的初始拉力 S 等于零的时候。

如果图2.2a中钢丝的初始拉力不为零，那么，我们得到较为一般的振动情况，在这种情况下，单位质量的恢复力采取下列形式：

$$p^2f(x)=p^2(x+ax^3) \qquad (j)$$

---

* 见数值结果的标准函数表。

地信网论坛 BBS.3S001.COM

其中，$p^2=2S/ml$和$\alpha=AE/2Sl^2$。在此情况下，方程（2.6）得出：

$$\dot{x}_m=\pm px_m\sqrt{1+\alpha x_m^2/2} \qquad (k)$$

当$\alpha=0$时，它简化为$\dot{x}_m=\pm px_m$。为了计算自由振动的周期，我们将（j）式代入方程（2.7），得到：

$$\tau=\frac{4}{p}\int_0^{x_m}\frac{dx}{\sqrt{(x_m^2-x^2)+\alpha(x_m^4-x^4)/2}}$$

或

$$\tau=\frac{4}{p}\int_0^{x_m}\frac{dx}{\sqrt{(x_m^2-x^2)[1+\alpha(x_m^2+x^2)/2]}}$$

为了将这后一式右边的椭圆积分转换成标准型，我们应用下列符号：

$$u=\frac{x}{x_m} \quad 和 \quad v=\alpha x_m^2 \qquad (l)$$

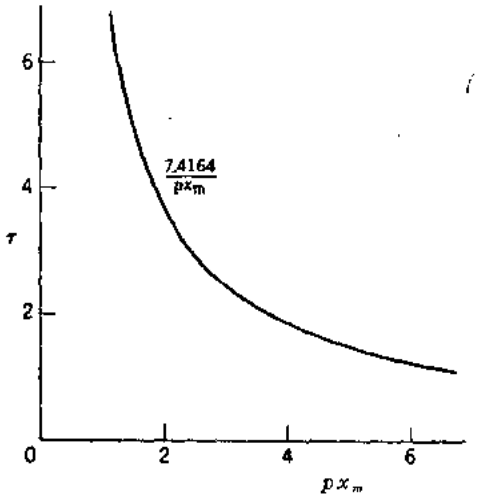


图 2.10

于是：

$$\tau=\frac{4}{p}\int_0^1\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)[1+v(1+u^2)/2]}}$$

或

$$\tau=\frac{4}{p}\sqrt{\frac{2}{v}}\int_0^1\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)[(2+v)/v+u^2]}} \qquad (m)$$

在椭圆积分表中，我们找到下列形式：

$$\int_0^1\frac{du}{\sqrt{(a^2-u^2)(b^2+u^2)}}=\frac{1}{c}F\left(\frac{a}{c},\ \phi\right) \qquad (n)$$

式中$F(a/c,\ \phi)$代表第一种椭圆积分。方程（n）中符号c和ϕ具有下列意义：

$$c^2=a^2+b^2 \quad 和 \quad \sin^2\phi=\frac{c^2}{a^2(b^2+1)}$$

比较方程（m）和（n）中的积分，我们得出结论：

$$a^2=1 \qquad 和 \qquad b^2=\frac{2+v}{v}$$

所以，

$$c=\sqrt{\frac{2(1+v)}{v}} \quad 和 \quad \phi=\sin^{-1}(1)=\frac{\pi}{2}$$

因此，方程（m）成为：

$$\tau=\frac{4}{p}\frac{1}{\sqrt{1+v}}F\left(\sqrt{\frac{v}{2(1+v)}},\ \frac{\pi}{2}\right) \qquad (2.9)$$

如果弹簧特性与线性相差很小，那么，我们可以令α（和v）等于零。于是方程（2.9）得出相应于线性恢复力的情况的（h）式。反之，如果α（和v）很大，那么，方程（j）中的第一项可以略去不计。从而，方程（2.9）中$1+v$一量近似地成为等于v，我们得到τ的表达式：

地信网论坛 BBS.3500L.COM

$$\tau=\frac{7.4164}{px_m\sqrt{\alpha}} \qquad (o)$$

方程（o）除出现$\sqrt{\alpha}$之外与方程（2.86）相同〔由于方程（j）中立方项为$p^2\alpha x^3$而不是p^2x^3〕。对于任何介于这两种极端之间的情况，需要计算$\sqrt{v/2(1+v)}$的数值，从表中得到相应的椭圆积分值。

在上面推导中，我们讨论了“硬化弹簧”的情况〔见方程（j）〕，这里恢复力的斜率随位移增大。现在让我们考虑“软化弹簧”的情况，并采取下列恢复力的表达式：

$$p^2f(x)=p^2(x-\alpha x^3) \qquad (p)$$

按前面相同方式进行，我们得到方程（k）和（m）的相对应部分：

$$\dot{x}_m=\pm px_m\sqrt{1-\alpha x_m^2/2} \qquad (q)$$

和

$$\tau=\frac{4}{p}\sqrt{\frac{2}{v}}\int_0^1\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)\left[(2-v)/v-u^2\right]}} \qquad (r)$$

从表中，我们找出下列形式：

$$\int_0^1\frac{du}{\sqrt{(a^2-u^2)(b^2-u^2)}}=\frac{1}{b}F\left(\frac{a}{b},\ \phi\right) \qquad (s)$$

式中$\sin\phi=1/a$。比较方程（r）和（s）中的积分，我们得出结论：

$$a^2=1 \quad b^2=\frac{2-v}{v} \quad \phi=\frac{\pi}{2}$$

所以，方程（r）成为：

$$\tau=\frac{4}{p}\sqrt{\frac{2}{2-v}}F\left(\sqrt{\frac{v}{2-v}},\ \frac{\pi}{2}\right) \qquad (2.10)$$

又，对于任何α（和v）的值，我们用椭圆积分表，可以从方程（2.10）容易地计算出τ值。

借合理选择方程（j）和（p）中的比例常数α，可以近似表示硬化弹簧和软化弹簧的各种情况。对于较为一般的情况，当恢复力用下列多项式表示时，问题也可以用椭圆积分来处理*：

$$p^2f(x)=p^2(x+\alpha x^2+\beta x^3)$$

用图2.3中的摆表示可以得到严格解的另一个对称恢复力的例子。在此情况下，运动的方程为〔见第2.1节方程（2.4a）〕：

$$\ddot{\phi}+p^2\sin\phi=0$$

式中$p^2=g/L$。对于旋转振动，方程(2.6)和（2.7）的相对应部分为：

$$(\mathrm{KE})_{max}=\frac{1}{2}\dot{\phi}_m^2=p^2\int_0^{\phi_m}f(\Psi)d\Psi=(\mathrm{PE})_{max} \qquad (2.11a)$$

和

---

* 见G.Duffing,Erzwungene Schwingungen bei veranderlicher Eigenfrequenz, Braunsweig, F. Vieweg u. Sohn, 1918；也见A. Weigand 的论文Forsch.Gebiete Ingenieurw., Vol.12,1941, p.274.

地信网论坛 BBS.3S001.COM

$$\tau=\frac{4}{p}\int_0^{\phi_m}\frac{d\phi}{\sqrt{2\int_{\phi}^{\phi_m}f(\Psi)d\Psi}} \tag{2.11b}$$

对于该摆，这些方程成为：

$$\dot{\phi}_m=\pm p\sqrt{2(1-\cos\phi_m)} \tag{t}$$

和

$$\tau=\frac{4}{p}\int_0^{\phi_m}\frac{d\phi}{\sqrt{2(\cos\phi-\cos\phi_m)}}=\frac{2}{p}\int_0^{\phi_m}\frac{d\phi}{\sqrt{\sin^2(\phi_m/2)-\sin^2(\phi/2)}} \tag{u}$$

引进符号 $k=\sin(\phi_m/2)$ 和一新变量 θ，以致

$$\sin(\phi/2)=k\sin\theta=\sin(\phi_m/2)\sin\theta \tag{v}$$

我们求出：

$$d\phi=\frac{2k\cos\theta d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \tag{w}$$

将（v）式和(w)式代入方程（u），并从方程（v）考虑到当ϕ从 0 变至ϕ_m时，θ从 0 变至$\pi/2$，我们得出：

$$\tau=\frac{4}{p}\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}=\frac{4}{p}F\left(k,\frac{\pi}{2}\right) \tag{2.12}$$

它属于第一种椭圆积分的标准型。这样，相应于任一 k 值时，方程（2.12）中积分的数值可以从表取得。

当摆的最大旋转位移ϕ_m很小时，k 值也很小，我们可以略去方程（2.12）中的 $k^2\sin^2\theta$ 量。于是，该积分变为等于$\pi/2$，我们得到微小转动的摆的固有周期 $\tau=2\pi/p$。

例题 1　假设一个装有借内部弹簧约束着一个质量的外壳，从高度 h 落到混凝土楼板上，弹簧作用于该质量的恢复力从试验已知近似地为：

$$F(x)=\alpha x^5 \tag{x}$$

式中 x 为质量相对于外壳的位移。试确定该质量相对于外壳的最大位移。假设外壳对楼板为非弹性冲击。

解：在冲击的瞬间时，下落的外壳具有等于gh的单位质量的动能。用m去除方程（x），我们得到$p^2f(x)=\alpha x^5/m$，方程（2.6）得出：

$$(\mathrm{KE})_{max}=gh=\alpha x_m^6/6m=(\mathrm{PE})_{max}$$

这样，

$$x_m=\left(\frac{6mgh}{\alpha}\right)^{1/6} \tag{y}$$

例题 2　试导出习题2.1—5中（见第2.1节）的质量，从$\theta<\pi/2$的位置“一下穿到”$\theta>\pi/2$的位置处所需要的初始速度的表达式。

解：从能量考虑，我们看到，初始速度无论如何必须使弹簧在竖直位置处（$\theta=\pi/2$）的初始动能等于其势能。弹簧处于竖直位置处长度的变化为：

$$\Delta=l(1-\sin\theta)$$

弹簧中所储存的势能为：

$$(\mathrm{PE})_{vert}=k\Delta^2/2=kl^2(1-\sin\theta)^2/2$$

地信网论坛 BBS.35001.COM

令此式等于质量的初始动能，我们求出：

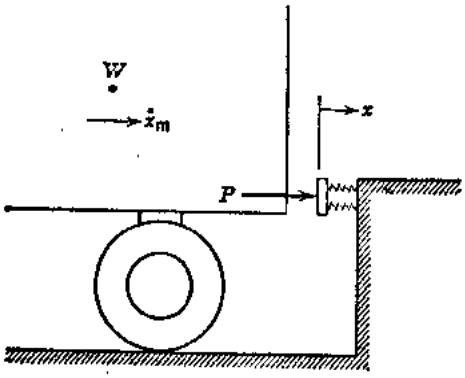
$$\dot{x}_0 \geqslant l(1-\sin\theta)\sqrt{k/m} \qquad (z)$$

作为“一下穿到”的标准。

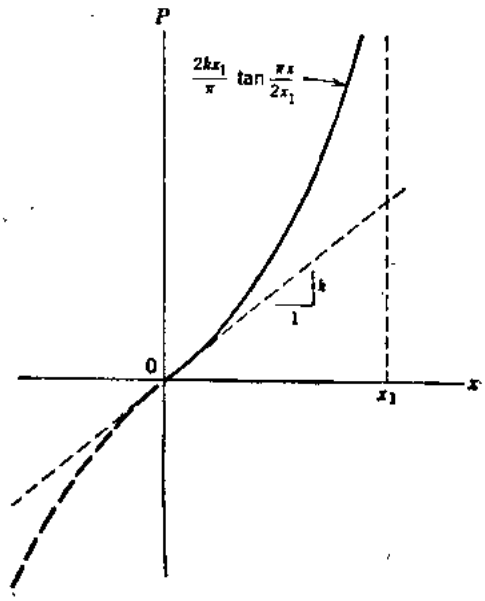
习 题 组 2.2

2.2—1 图中表示在货车站台处安装的一个冲击减震器。减震器有一硬化弹簧，该弹簧提供按$F(x)=k(x+\alpha x^3)$确定的恢复力，这里$k=400$磅/英寸，$\alpha=2$(英寸)$^{-2}$。如果货车的重量$W=38,600$磅，当后退碰到站台时其速度为10英寸/秒，试确定减震器的最大位移以及发生相碰时的最大恢复力和时间（从冲击时$t=0$算起）。假设减震器的质量与车辆的质量相比是很小的，并假设相碰后二者保持接触。

答：$x_m=2.13$英寸；$P_m=8563$磅，$\tau/4=0.308$秒。



习题 2.2—1



习题 2.2—2

2.2—2 假定习题2.2—1中减震器内的弹簧用另一套按图中正切函数提供恢复力的弹簧来代替。如前面那样，令$k=400$磅/英寸，但是当阻力为无穷大时的限制位移$x_1=10$英寸。试确定最大位移x_m和最大恢复力P_m。

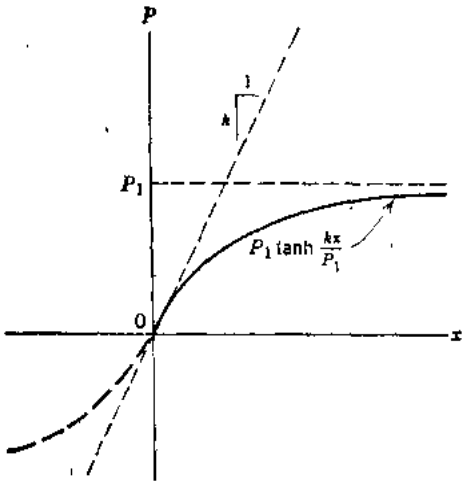
答：$x_m=4.75$英寸；$P_m=2350$磅。

2.2—3 令习题2.2—1中减震器内的硬化弹簧用一套按图中双曲正切线函数提供恢复力的软化弹簧代替。在这种情况下，假设原点处曲线的斜率$k=1000$磅/英寸，还假设减震器的极限抵抗能力$P_1=100,000$磅。试计算由于货车碰击减震器引起的x_m值和P_m值。

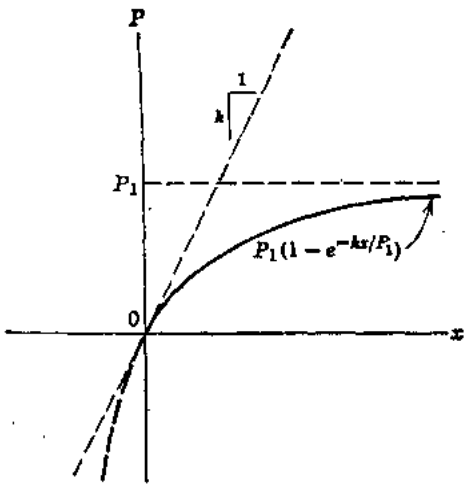
答：$x_m=3.16$英寸；$P_m=3170$磅。

2.2—4 试对按图中的指数函数表示的恢复力重复习题2.2—3。

答：$x_m=3.18$英寸；$P_m=3130$磅。



习题 2.2—3



习题2.2—4

2.3 自由振动的近似方法

一般来说，非线性微分方程的精确解是不知道的，只能得到一个近似解。在任何情况下，我们可以近似地选择满足某一指定标准的时间函数来模拟非线性振动。本节中叙述两种大家所熟悉的有关这种近似模拟的方法。

逐次逼近法　如果弹簧特性与线性相差甚微时，那么无阻尼的一个自由度系统的自由振动运动方程，可以按下列形式来表示：

$$\ddot{x} + p^2 x + \alpha f(x) = 0 \tag{2.13}$$

其中α为一个微小的因子，$f(x)$为x的最低次方不小于2的x多项式。对于荷载—位移曲线对原点成对称的系统，我们取：

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \pm x\,|x^i| \tag{a}$$

这种通常发生的情况，借仅将（a）式的二次正项代入方程（2.13）来得到。于是运动方程成为：

$$\ddot{x} + p^2 x + \alpha x^3 = 0 \tag{2.14}$$

一种模拟这种拟线性系统（quasi-linear system）的运动的方法，由逐次逼近确定周期解组成*。

让我们假设在时间$t = 0$时，系统的初始条件为$x_0 = x_m$和$\dot{x}_0 = 0$。一个替代实际系统的线性系统接着发生的谐和运动，借下式表示：

$$x = x_m \cos p_1 t \tag{b}$$

其中，符号p_1表示该替代系统的角频率。方程（b）可以考虑为对于所给初始条件下方程（2.14）的解的第一近似值。由于因子α微小，所以我们可以假设角频率p_1基本上与线性系统的频率p没有区别。于是我们可以写出：

---

* 见A.N.Kryloff 和N.Bogoliuboff, "Introduction to Nonlinear Mechanics," Ann. Math. Studies 11, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J.,1943.

地信网论坛 BBS.3S001.COM

$$p^2 = p_1^2 + (p^2 - p_1^2) \qquad (c)$$

式中 $(p^2 - p_1^2)$ 是一个微小的量。将（c）式代入方程（2.14），我们得到：

$$\ddot{x} + p_1^2 x + (p^2 - p_1^2)\, x + \alpha x^3 = 0 \qquad (d)$$

现在 x 的第一近似值（b），可以代入方程（d）中都很小的最后两项，给出：

$$\ddot{x} + p_1^2 x = -x_m (p^2 - p_1^2) \cos p_1 t - \alpha x_m^3 \cos^3 p_1 t$$

或用下面恒等式，

$$\cos^3 p_1 t = (3\cos p_1 t + \cos 3p_1 t)/4$$

我们求出：

$$\ddot{x} + p^2 x = -\left(p^2 - p_1^2 + \frac{3\alpha x_m^2}{4}\right) x_m \cos p_1 t - \frac{\alpha x_m^3}{4} \cos 3p_1 t \qquad (e)$$

此方程，具有与承受谐和施力函数的无阻尼一个自由度系统相同的数学形式。然而，此方程右边第一项代表一个具有与替代系统相同频率 p_1 的施力函数。它将引起一种随着时间无限制地增大并违背具有等振幅的自由振动条件的反应，为了消除这种假的共振，我们应令 $\cos p_1 t$ 的系数等于零。这一步是为这种方法的基本特点，因为这一步产生 p_1 的一个近似值。这样，

$$p_1^2 = p^2 + \frac{3\alpha x_m^2}{4} \qquad (2.15)$$

鉴于 p^2 项可以考虑为 p_1^2 的第一近似值，所以方程（2.15）代表由第一次增大 $3\alpha x_m^2/4$ 项组成的第二近似值。

从方程（e）的其余部分，我们求出其全解由下面组成：

$$x = C_1 \cos p_1 t + C_2 \sin p_1 t + \frac{\alpha x_m^3}{32 p_1^2} \cos 3p_1 t \qquad (f)$$

为了满足所给的初始条件（$x_0 = x_m$，$\dot{x}_0 = 0$），积分常数必须为：

$$C_1 = x_m - \frac{\alpha x_m^3}{32 p_1^2} \quad \text{和} \quad C_2 = 0$$

所以，运动的第二近似值成为：

$$x = x_m \cos p_1 t + \frac{\alpha x_m^3}{32 p_1^2} (\cos 3p_1 t - \cos p_1 t) \qquad (2.16)$$

这样，第二近似值中的改正项包括与 $\cos 3p_1 t$ 成比例的较高谐波，其图解示于图2.11 a 中。自然，它与简单余弦曲线相差的大小取决于因子 α 的值。还应记住，角频率 p_1 随振幅增大，如图2.11 b 中方程（2.15）的曲线图所示那样。

如果需要求运动的第三近似值，那么可以将第二近似值（方程2.16）代入方程（d），并重复其过程。然而，三角运算变得很繁，而需要一种比较有秩序的技巧。为此，我们考虑方程（2.15）和（2.16）可以写成下列形式：

$$\begin{aligned} p^2 &= p_1^2 + \alpha c_1 \\ x &= \phi_0 + \alpha \phi_1 \end{aligned} \qquad (g)$$

亦即，频率和位移的第二近似值的表达式包含 α 量的一次幂。于是对于进一步的近似值，我们将按下列级数形式取附加项：

$$x = \phi_0 + \alpha \phi_1 + \alpha^2 \phi_2 + \alpha^3 \phi_3 + \cdots \qquad (2.17a)$$

和

$$p^2 = p_1^2 + \alpha c_1 + \alpha^2 c_2 + \alpha^3 c_3 + \cdots \qquad (2.17\,b)$$

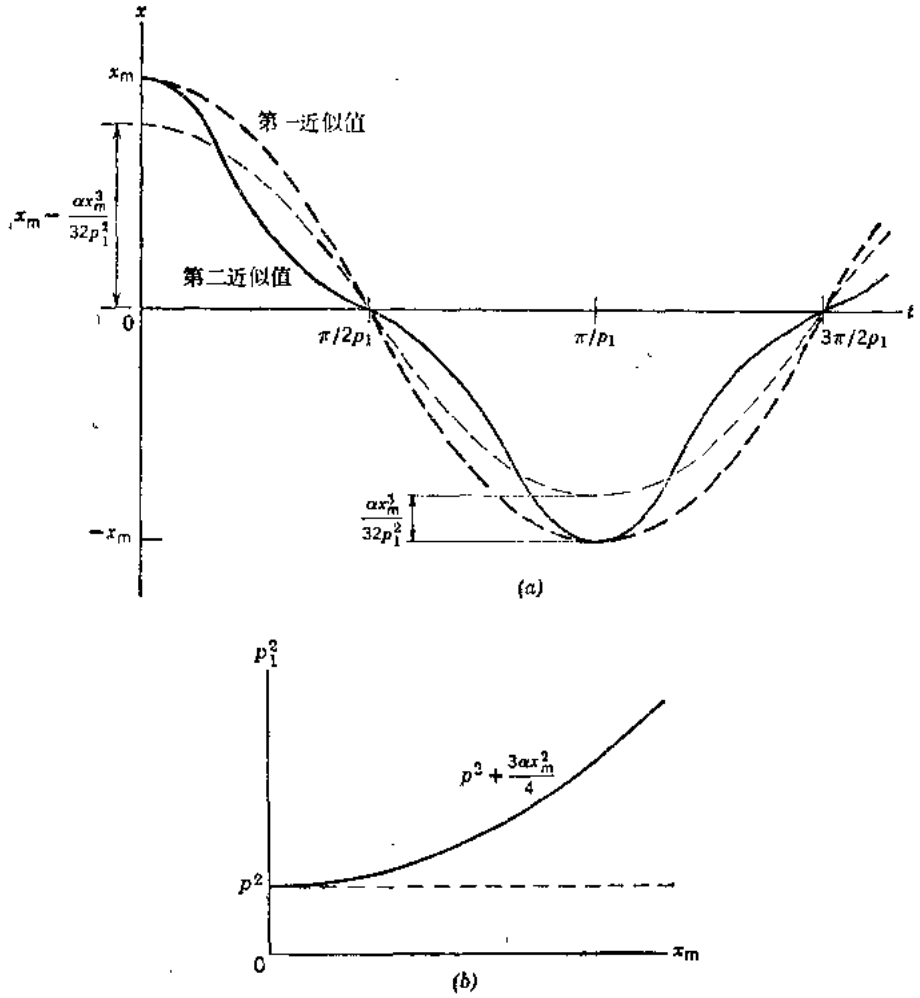


图 2.11

它们都包含微小量α的诸次幂。在这些级数中，符号ϕ_0、ϕ_1、ϕ_2代表时间的未知函数；c_1、c_2、c_3等为常数，它们的选择应使共振条件消除，如同上面在计算第二近似值中所说明的那样。借增加级数中的项数，我们可以按要求计算多次连续近似值。在下面讨论中，我们限制我们计算中略去包含α高于三次幂的所有项。将方程（2.17 a）和（2.17 b）代入方程（2.14），我们得到：

$$\ddot{\phi}_0 + \alpha\ddot{\phi}_1 + \alpha^2\ddot{\phi}_2 + \alpha^3\ddot{\phi}_3 + (p_1^2 + \alpha c_1 + \alpha^2 c_2 + \alpha^3 c_3)(\phi_0 + \alpha\phi_1 + \alpha^2\phi_2 + \alpha^3\phi_3) + \alpha(\phi_0 + \alpha\phi_1 + \alpha^2\phi_2 + \alpha^3\phi_3)^3 = 0 \qquad (h)$$

在进行所示代数运算，并略去所有包含高于α的三次幂的诸项之后，我们可以用下面形式表示方程（h）：

$$\ddot{\phi}_0 + p_1^2\phi_0 + \alpha(\ddot{\phi}_1 + p_1^2\phi_1 + c_1\phi_0 + \phi_0^3) + \alpha^2(\ddot{\phi}_2 + p_1^2\phi_2 + c_2\phi_0 + c_1\phi_1 + 3\phi_0^2\phi_1)$$

地信网论坛 BBS.3500L.COM

$$+\alpha^3(\ddot{\phi}_3+p_1^2\phi_3+c_3\phi_0+c_2\phi_1+c_1\phi_2+3\phi_0^2\phi_2+3\phi_0\phi_1^2)=0 \qquad (i)$$

这个方程应对微小量 α 的任何值都成立，这意味着 α 的三个幂中每一个的因子都应为零。这样，方程（ i ）可以分离成下列方程组：

$$\ddot{\phi}_0+p_1^2\phi_0=0$$

$$\ddot{\phi}_1+p_1^2\phi_1=-c_1\phi_0-\phi_0^3$$

$$\ddot{\phi}_2+p_1^2\phi_2=-c_2\phi_0-c_1\phi_1-3\phi_0^2\phi_1$$

$$\ddot{\phi}_3+p_1^2\phi_3=-c_3\phi_0-c_2\phi_1-c_1\phi_2-3\phi_0^2\phi_2-3\phi_0\phi_1^2$$

取与前面相同的初始条件（亦即，对于 $t=0$，$x_0=x_m$ 和 $\dot{x}_0=0$），并将它们代入方程（2.17 a）和其导数，我们得到：

$$\phi_0(0)+a\phi_1(0)+a^2\phi_2(0)+a^3\phi_3(0)=x_m$$

$$\dot{\phi}_0(0)+a\dot{\phi}_1(0)+a^2\dot{\phi}_2(0)+a^3\dot{\phi}_3(0)=0$$

此外，由于这些方程应对任何 a 值都成立，所以我们得到：

$$\begin{aligned}&\phi_0(0)=x_m && \dot{\phi}_0(0)=0\\ &\phi_1(0)=0 && \dot{\phi}_1(0)=0\\ &\phi_2(0)=0 && \dot{\phi}_2(0)=0\\ &\phi_3(0)=0 && \dot{\phi}_3(0)=0\end{aligned} \qquad (k)$$

考虑方程（ j ）中的第一个方程和方程系（ k ）中第一行所表示的相应初始条件，我们如前面那样求出：

$$\phi_0=x_m\cos p_1 t \qquad (l)$$

将这个第一近似值代入方程（ j ）中第二个方程的右边，我们得到：

$$\ddot{\phi}_1+p_1^2\phi_1=-c_1x_m\cos p_1t-x_m^3\cos^3 p_1t$$

$$=-\left(c_1x_m+\frac{3x_m^3}{4}\right)\cos p_1t-\frac{x_m^3}{4}\cos 3p_1t$$

为了消除共振的条件，我们将选择适使该方程右边第一项等于零的常数 c_1。这样，我们求出：

$$c_1=-\frac{3x_m^2}{4} \qquad (m)$$

于是，ϕ_1 的通解成为：

$$\phi_1=C_1\cos p_1t+C_2\sin p_1t+\frac{x_m^3}{32p_1^2}\cos 3p_1t$$

为了满足方程系（ k ）中第二行所给的初始条件，我们求出：

$$C_1=-\frac{x_m^3}{32p_1^2} \qquad 和 \qquad C_2=0$$

这样，

$$\phi_1=\frac{x_m^3}{32p_1^2}(\cos 3p_1t-\cos p_1t) \qquad (n)$$

如果我们只计算第二近似值，那么将（ l ）、（ m ）和（ n ）诸式代入方程（2.17 a）和

地信网论坛 BBS.3S001.COM

(2.17b)，我们得到：

$$x = x_m \cos p_1 t + \frac{\alpha x_m^3}{32 p_1^2} (\cos 3 p_1 t - \cos p_1 t) \qquad (o)$$

式中

$$p_1^2 = p^2 + \frac{3\alpha x_m^2}{4} \qquad (p)$$

这些结果与前面所得的式子（见方程2.15和2.16）完全一致。

为了得到第三近似值，我们将（l）、（m）和（n）诸式，代入方程（j）中第二方程的右边，得到：

$$\ddot{\phi}_2 + p_1^2 \phi_2 = -c_2 x_m \cos p_1 t + 3 x_m^2 \left(\frac{1}{4} - \cos^2 p_1 t \right) \left[\frac{x_m^3}{32 p_1^2} (\cos 3 p_1 t - \cos p_1 t) \right]$$

借应用倍角的三角函数公式，我们可以将此方程写成下面形式：

$$\ddot{\phi}_2 + p_1^2 \phi_2 = -x_m \left(c_2 - \frac{3 x_m^4}{128 p_1^2} \right) \cos p_1 t - \frac{3 x_m^5}{128 p_1^2} \cos 5 p_1 t$$

另外，为了消除共振条件，我们令：

$$c_2 = \frac{3 x_m^4}{128 p_1^2} \qquad (q)$$

于是，ϕ_2的通解成为：

$$\phi_2 = C_1 \cos p_1 t + C_2 \sin p_1 t + \frac{x_m^5}{1024 p_1^4} \cos 5 p_1 t$$

借应用方程系（k）中第三行，我们求出积分常数为：

$$C_1 = -\frac{x_m^5}{1024 p_1^4} \qquad 和 \qquad C_2 = 0$$

这样，我们得到：

$$\phi_2 = \frac{x_m^5}{1024 p_1^4} (\cos 5 p_1 t - \cos p_1 t) \qquad (r)$$

反应的第三近似值成为：

$$x = x_m \cos p_1 t + \frac{\alpha x_m^3}{32 p_1^2} (\cos 3 p_1 t - \cos p_1 t) + \frac{\alpha^2 x_m^5}{1024 p_1^4} (\cos 5 p_1 t - \cos p_1 t) \qquad (2.18)$$

现在式中p_1借下式确定：

$$p_1^2 = p^2 + \frac{3\alpha x_m^2}{4} - \frac{3\alpha^2 x_m^4}{128 p^2} \qquad (2.19)$$

为了得到第四近似值，我们将ϕ_0、ϕ_1、ϕ_2、c_1和c_2诸式代入方程（j）中最后一个方程，如前面那样进行。我们求出：

$$x = x_m \cos p_1 t + \frac{\alpha x_m^3}{32 p_1^2} (\cos 3 p_1 t - \cos p_1 t) + \frac{\alpha^2 x_m^5}{1024 p_1^4} (\cos 5 p_1 t - \cos p_1 t) + \frac{\alpha^3 x_m^7}{32{,}768 p_1^6} (\cos 7 p_1 t - 6 \cos 3 p_1 t + 5 \cos p_1 t) \qquad (2.20)$$

其中p_1借下列近似式来确定：

地信网论坛 BBS.3500L.COM

$$p_1^2 = p^2 + \frac{3\alpha x_m^2}{4} - \frac{3\alpha^2 x_m^4}{128 p^2} + \frac{9\alpha^3 x_m^6}{512 p^4} \tag{2.21}$$

总结起来，逐次逼近法包括：借假设一个第一近似值的形式〔例如方程(*b*)〕所得的一系列函数模拟非线性自由振动，然后，考虑方程（*k*）所列举的初始条件循环地求解（*j*）型方程组。用这种方法所选定的近似值，仅当振动系统在端点位置或中间位置的瞬时处自然地满足其运动方程。虽然理论上我们可以得到的连续近似值的数目没有限制，但是，通常第二近似值就可以满足实际应用。

里兹平均法　借级数解近似表示非线性振动的另一技巧，是使每一周虚功的平均值变为零。这种方法通称为里兹平均法*，可以比具有相同项数的逐次逼近法得到较好的解。此外，该平均法不局限于拟线性系统，而且它可以用于强迫振动（见下一节）和自由振动。

让我们考虑无阻尼的一个自由度系统的自由振动，其运动方程可以写成：

$$\ddot{x} + f(x) = 0 \tag{2.22}$$

其中左边诸项代表单位质量的惯性力和恢复力。借达朗伯原理，方程（2.22）可以考虑为这两个力彼此平衡的力的动力平衡方程。如果该系统产生虚位移δx，那么这些力所做的功必定等于零。这样：

$$[\ddot{x} + f(x)]\,\delta x = 0 \tag{s}$$

在应用里兹法中，我们假设自由振动的一个近似解为一级数：

$$x = a_1\phi_1(t) + a_2\phi_2(t) + a_3\phi_3(t) + \cdots = \sum_{i=1}^{n} a_i\phi_i(t) \tag{2.23}$$

其中$\phi_1(t)$、$\phi_2(t)$等为挑选的时间函数，a_1，a_2等为按每一周虚功变为零这样的方式所确定的加权因子（weighting factor）。诸虚位移采取下面形式：

$$\delta x_i = \delta a_i \phi_i(t) \tag{t}$$

借对整个一周中的功进行积分，我们得到：

$$\sum_{i=1}^{n}\int_0^{\tau} [\ddot{x} + f(x)]\,\delta a_i\phi_i(t)\,dt = 0 \tag{u}$$

由此得出：

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\tau} [\ddot{x} + f(x)]\,\phi_1(t)\,dt = 0\\
&\int_0^{\tau} [\ddot{x} + f(x)]\,\phi_2(t)\,dt = 0\\
&\qquad\cdots\\
&\int_0^{\tau} [\ddot{x} + f(x)]\,\phi_n(t)\,dt = 0
\end{aligned} \tag{2.24}$$

方程（2.24）代表*n*个代数方程，它们可以联解确定出a_1、a_2、…、a_n的值。

---

* W. Ritz, "Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variations-probleme der mathematischen Physik," Crelles Jour. f. d. reine u. ang. Math., No. 135, 1909, pp. 1-61, 和B. G. Galerkin, "Series solutions of Some Problems of Elastic Equilibrium of Rods and Plates"（从俄文译来的标题），Vestnik Ingenerov Petrograd, NO. 19, 1915, p. 897.

地信网论坛 BBS.3500U.COM

作为一个例子，让我们重新考虑方程（2.14）为其运动方程的拟线性系统。如果我们取自由振动的第一近似值为：

$$x = a_1\phi_1(t) = a_1\cos p_1 t \qquad (v)$$

那么方程（2.24）的第一个方程给出：

$$\int_0^{\tau} [-p_1^2 a_1\cos p_1 t + p^2 a_1\cos p_1 t + \alpha a_1^3\cos^3 p_1 t]\cos p_1 t\,dt = 0$$

考虑到：

$$\int_0^{\tau}\cos^2 p_1 t\,dt = \frac{1}{p_1}\int_0^{2\pi}\cos^2 p_1 t\,d(p_1 t) = \frac{\pi}{p_1}$$

和

$$\int_0^{\tau}\cos^4 p_1 t\,dt = \frac{1}{p_1}\int_0^{2\pi}\cos^4 p_1 t\,d(p_1 t) = \frac{3\pi}{4p_1}$$

我们求出：

$$p_1^2 = p^2 + \frac{3\alpha a_1^2}{4} \qquad (2.25)$$

此式与逐次逼近法中的方程（2.15）的形式相同，它确定以p、p_1和α表达的a_1值。求解方程（2.25）中的a_1，并将结果代入方程（v），得出：

$$x = 2\sqrt{\frac{p_1^2 - p^2}{3\alpha}}\cos p_1 t \qquad (2.26)$$

作为满足这个例子中，对称条件的更好的近似值，我们可以取二项级数：

$$x = a_1\phi_1(t) + a_2\phi_2(t) = a_1\cos p_1 t + a_2\cos 3p_1 t \qquad (w)$$

将（w）式代入方程（2.24）中的前面两个方程，随后对各项积分，得到两个联立三次方程，它们必须用数值求解a_1和a_2。虽然分析中的这一部分是麻烦的，但是其困难只是代数上的。

2.4 强迫非线性振动

本章前节中，我们仅考虑了非线性系统的自由振动。现在我们将应用里兹平均法得出近似解来讨论承受周期施力函数作用下的非线性系统的稳态反应。

假定一系统，具有与速度的某一函数$f_1(\dot{x})$成比例的阻尼和与位移的某一另外函数$f_2(x)$成比例的恢复力，如果一个周期施力函数$mf_3(t)$作用于质量上，那么它的运动方程可以写成：

$$\ddot{x} + 2nf_1(\dot{x}) + p^2 f_2(x) = f_3(t) \qquad (2.27)$$

其中诸项代表单位质量的惯性力、阻尼力、恢复力和所作用的力。借里兹平均法，我们对稳态振动假设一个如第2.3节中方程（2.23）所给级数形式的近似解。为了使强迫振动的每一周虚功变为零，我们取下列条件：

$$\int_0^{\tau} [\ddot{x} + 2nf_1(\dot{x}) + p^2 f_2(x) - f_3(x)]\phi_i(t)\,dt = 0$$

$$(i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n) \qquad (2.28)$$

地信网论坛 BBS.3500L.COM

让我们先考虑无阻尼而且其运动方程为下式所示的特殊情况：

$$\ddot{x}+p^2(x\pm\mu x^3)=q\cos\omega t \tag{2.29}$$

此式，通称为杜法因方程(Duffing's equation)，因为这个式子为杜法因*在他的振动著作中作了广泛研究。这种强迫振动对于平衡位置成对称，无阻尼时其反应不是与干扰力同相就是不同相180°。作为第一近似值，我们可以假设：

$$x=a_1\phi_1(t)=a_1\cos\omega t \tag{a}$$

于是方程（2.28）的第一个方程成为：

$$\int_0^{\cdot}[-\omega^2 a_1\cos\omega t+p^2(a_1\cos\omega t\pm\mu a_1^3\cos^3\omega t)-q\cos\omega t]\cos\omega t\,dt=0$$

积分并重新排列诸项，得出：

$$p^2a_1\pm\frac{3p^2\mu a_1^3}{4}=\omega^2a_1+q \tag{2.30}$$

对于任何给定的参数 p^2、μ和 q 之值，方程（2.30）代表稳态强迫振动中振幅a_1与外加频率ω之间的两个近似关系式。对于绘制硬化弹簧情况下反应谱（类似于第1.6节中图1.22）的较方便的形式为：

$$\frac{3\mu a_1^3}{4}=\left(\frac{\omega^2}{p^2}-1\right)a_1+\frac{q}{p^2} \tag{2.31}$$

对于软化弹簧的情况为：

$$\frac{3\mu a_1^3}{4}=\left(1-\frac{\omega^2}{p^2}\right)a_1-\frac{q}{p^2} \tag{2.32}$$

下面讨论一种从方程（2.31）和（2.32）作出a_1对ω/p的曲线的方法。

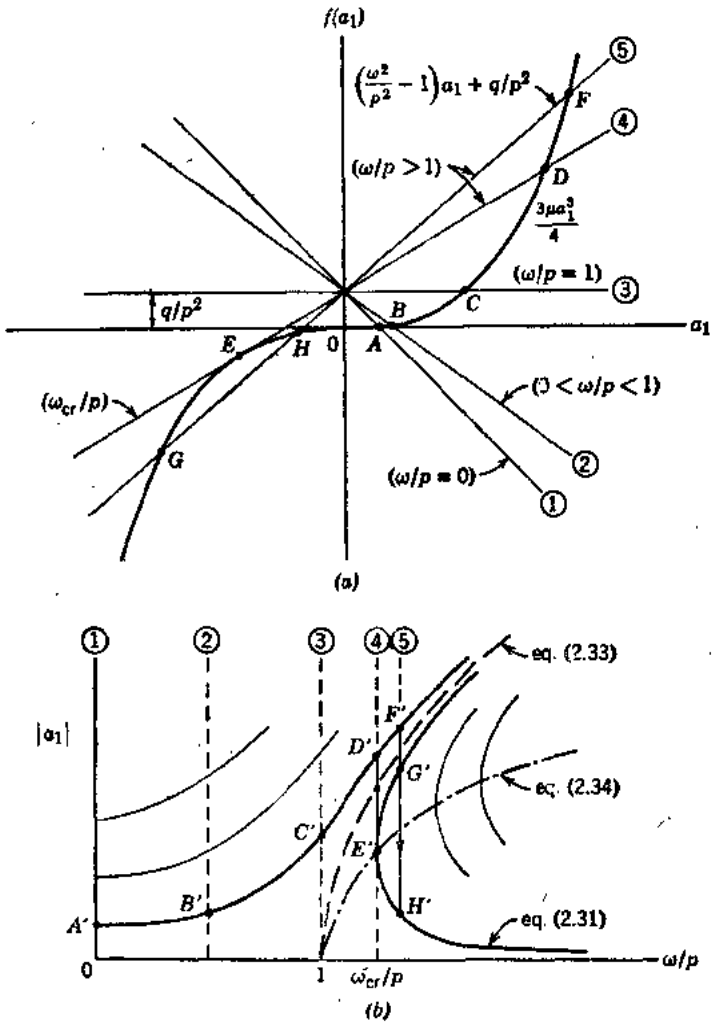


图 2.12

方程（2.31）可以想像为左边a_1的立方函数与右边a_1的线性函数的交叉点。图2.12 a 表示该立方函数和对于几种频率比ω/p值的线性函数族。图2.12 a 中，标明①而相应于图2.12 b 中$\omega/p=0$的竖直线的斜线与立方曲线交于A点处。该交叉点的a_1值绘于图2.12 b 中 A' 点。在图2.12 a 中，标明②的线（$0<\omega/p<1$）交曲线于 B 点，图

* 见第164页中的G.Duffing。

地信网论坛 BBS.3500U.COM

2.12 b 中的相应点为 B'。图2.12 a 中，标明③的水平线则代表线性系统的共振，但是这种情况下，在图上仅仅产生另一对 C 和 C' 点。当图2.12a中诸线的斜率增大，到达线④时不仅在 D 处与曲线的上面部分相交，而且还于 E 处与下面部分相切。图2.12 b 中反应谱上的相应点 D' 和 E' 均发生于临界频率处（$\omega_{cr} \geqslant p$），该处反应谱具有无穷大的斜率（在 E' 点处）。图2.12 a 中再陡一些的线，如标明⑤的一根线，与立方曲线相交于三个点处，譬如 F、G 和 H，它们的相对应点（F'、G' 和 H'）均示于反应谱中。按这种方式，图 2.12 b 中的实曲线构成方程（2.31）的图解描述。

硬化弹簧的反应谱，有一根双曲渐近线，它用虚曲线示于图2.12 b 中，它相当于令方程（2.31）中 q 等于零所得的非线性自由振动的情况。这样，自由振动的振幅—频率关系式成为：

$$\frac{3\mu a_1^2}{4} = \frac{\omega^2}{p^2} - 1 \tag{2.33}$$

其中的ω现在代表自由非线性振动的角频率。此外，对于各种荷载 q 值可以建立起类似于图2.12 b 中实曲线的反应谱族（用细曲线表示者）*。这种反应谱上 E' 型的诸临界点的轨迹（其斜率为无穷大），在图 2.12 b 中用点—虚线表示。这根曲线的方程可以借方程（2.31）微分得到为：

$$\frac{9\mu a_1^2}{4} = \frac{\omega^2}{p^2} - 1 \tag{2.34}$$

把我们的注意力转到软化弹簧情况的方程（2.32），我们可以用类似于上面所述的图解技巧绘出一个典型反应谱。对于这种情况，其立方曲线连同代表几个ω/p值的方程（2.32）右边的线族示于图 2.13 a 中。线①和线②与立方曲线均有三次相交；线③有一次相交并与曲线相切；线④和线⑤均与曲线有一个交叉点。图2.13 a 中点 A—J 在图2.13 b 中，有以点 A'—J' 表示的它们的相似点。在此情况下，反应谱在点 H' 处有一竖直切线，当外加频率小于线性系统的共振频率时（$\omega_{cr} \leqslant p$），发生临界频率。

借令方程（2.32）中 $q = 0$，我们得到图2.13 b 中虚线的方程，为：

$$\frac{3\mu a_1^2}{4} = 1 - \frac{\omega^2}{p^2} \tag{2.35}$$

它为代表自由振动情况的椭圆。对于反应谱族 H' 型临界点的轨迹，也以点—虚线示于图中。其方程借方程（2.32）微分求出为：

$$\frac{9\mu a_1^2}{4} = 1 - \frac{\omega^2}{p^2} \tag{2.36}$$

图2.12 b 和2.13 b 中所示的反应谱，代表在承受谐和施力函数的非线性机械系统实验中所观察到的降—跃现象（drop-jump phenomenon）的数学模型**。在硬化弹簧情况下，施力频率的逐渐增大（从 $\omega = 0$ 开始）直至如 F' 点为止，将产生以图 2.12 b 中曲线左面那根分支确定的稳态振幅。由于外来干扰，频率将从曲线上 F' 点突然降到 H' 点，此时，相角从0°急剧地变到180°。外加频率接着增大，于是引起反应谱右边分支不断减小的那一段。反之，如果施力频率从一很高的值（大于 ω_{cr}）缓慢地减小，那么稳态振幅将逐渐增大直至到达临界点 E' 为止。然后振幅将从 E' 跃到 D'，相角从180°急剧改变为0°。外加频率接着减

---

* 见 K. Klotter, "Non-Linear Vibration Problems Treated by the Averaging Method of W.Ritz," Proc. 1st U.S. Natl. Congr.Appl.Mech.,1951, pp.125-131.

** 见第164页所注G.Duffing.

地信网论坛 BBS.35001.COM

小，于是引起反应沿路线$D'C'B'A'$减小。我们看到，当施力频率减小时，振幅必从E'点跃到D'点，因为对于$\omega<\omega_{cr}$的情况只有一个解。

已由克罗特尔（Klotter）* 证明图2.12b中的虚曲线和点—虚曲线勾划出不稳定区域，并证明曲线$E'G'$上诸点代表实际系统中不可能观察到的条件。这样，E'点将反应谱的右边部分划分为不稳定的上面部分$E'G'$和稳定的下面部分$E'H'$。

在软化弹簧情况下，施力频率从$\omega=0$缓慢地增大到$\omega>\omega_{cr}$，将引起稳态振幅遵循图2.13b中的路线$C'F'H'G'I'J'$。反之，如果我们逐渐将外加频率从$\omega>\omega_{cr}$减小到零，那么反应遵循路线$J'I'G'D'F'C'$。在第一种情况下，有从H'点至G'点的跳跃，这里相角从0°改变到180°。在后一种情况下，我们得到从D'点到F'点的急剧降落，这里相角反过来从180°变为0°。在这种情况下，不稳定区被竖直线$\omega/p=0$和代表方程（2.35)和(2.36）的曲线围起来。这样，H'点将反应谱的左边部分划分为不稳定的上面部分$B'E'H'$和稳定的下面部分$C'F'H'$。

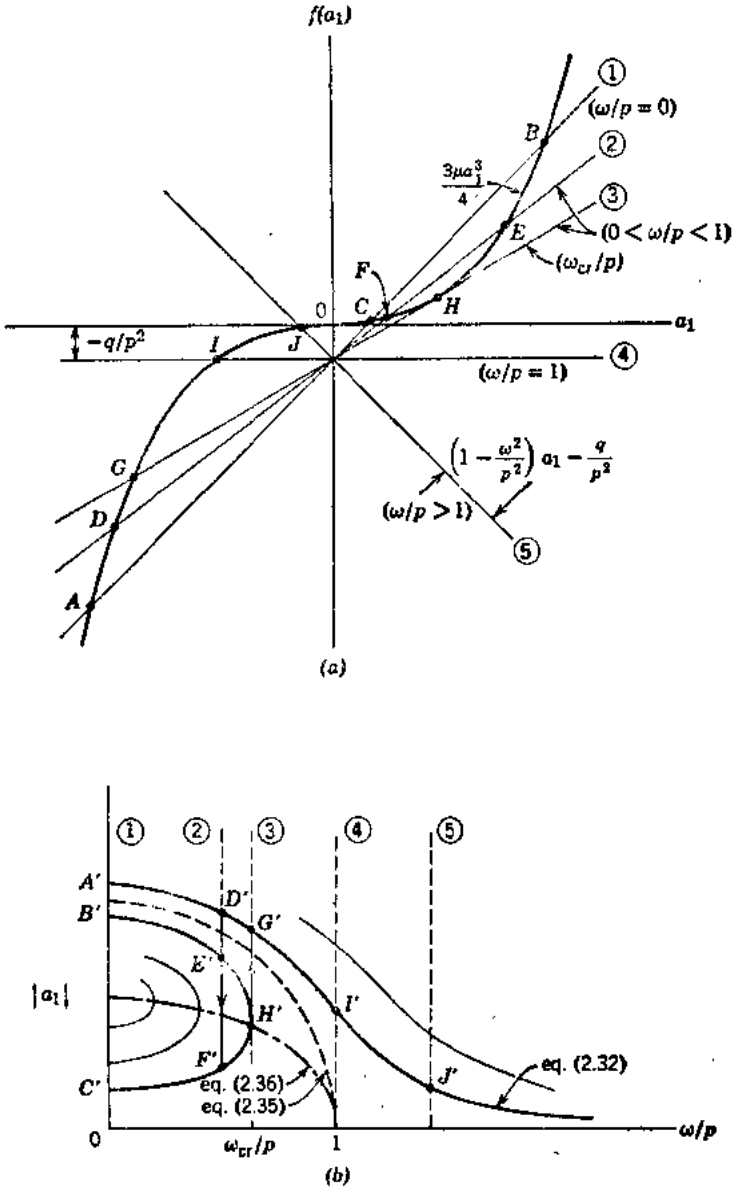


图 2.13

现在让我们考虑具有各种不同阻尼的杜法因方程的问题，这里阻尼力与速度成比例。在这种情况下，运动的方程可以写成：

$$\ddot{x}+2n\dot{x}+p^2(x\pm\mu x^3)=q\cos\omega t \qquad (2.37)$$

稳态强迫振动将包括一相角ψ，我们假设第一近似值为：

$$x=c_1\cos(\omega t-\psi)=a_1\cos\omega t+b_1\sin\omega t \qquad (b)$$

式中$c_1^2=a_1^2+b_1^2$，且$\tan\psi=b_1/a_1$。为了用里兹平均法确定a_1和b_1两个常数，我们应用

* K.Klotter 和E.Pinney, "A Comprehensive Stability Criterion for the Forced Vibrations of Non-Linear Systems," Jour. Appl. Mech., Vol. 20, 1953, p. 5.

地信网论坛 BBS.3500U.COM

两个（2.28）形式的方程。在此情况下，它们成为：

$$\int_0^{\tau}[\ddot{x}+2n\dot{x}+p^2(x\pm\mu x^3)-q\cos\omega t]\cos\omega t\,dt=0$$

$$\int_0^{\tau}[\ddot{x}+2n\dot{x}+p^2(x\pm\mu x^3)-q\cos\omega t]\sin\omega t\,dt=0$$

将 x 的方程（b），代入这些式子并积分，我们得到下列方程：

$$-a_1\omega^2+2n\omega b_1+p^2a_1\pm\frac{3p^2\mu a_1c_1^2}{4}-q=0 \qquad (c)$$

$$-b_1\omega^2-2n\omega a_1+p^2b_1\pm\frac{3p^2\mu b_1c_1^2}{4}=0 \qquad (d)$$

然后，借应用 $a_1=c_1\cos\psi$ 和 $b_1=c_1\sin\psi$，我们得到：

$$2n\omega c_1\sin\psi+\left(-\omega^2+p^2\pm\frac{3p^2\mu c_1^2}{4}\right)c_1\cos\psi-q=0 \qquad (e)$$

$$-2n\omega c_1\cos\psi+\left(-\omega^2+p^2\pm\frac{3p^2\mu c_1^2}{4}\right)c_1\sin\psi=0 \qquad (f)$$

用 $\cos\psi$ 乘方程（e），用 $\sin\psi$ 乘方程（f），进行相加，我们得到：

$$-\omega^2+p^2=\frac{3p^2\mu c_1^2}{4}=\frac{q}{c_1}\cos\psi \qquad (g)$$

反之，用 $\sin\psi$ 乘方程（e），用 $\cos\psi$ 乘方程（f），进行相减，我们求出：

$$2n\omega=\frac{q}{c_1}\sin\psi \qquad (h)$$

将方程（g）和（h）进行平方并相加，我们得到：

$$\left(-\omega^2+p^2\pm\frac{3p^2\mu c_1^2}{4}\right)^2+4n^2\omega^2=\left(\frac{q}{c_1}\right)^2 \qquad (2.38)$$

用方程（g）去除方程（h）得到：

$$\psi=\tan^{-1}\left(\frac{2n\omega}{-\omega^2+p^2\pm3p^2\mu c_1^2/4}\right) \qquad (2.39)$$

这两个方程对于任何给定的 p^2、μ、n 和 q 的值将振幅 c_1 和相角 ψ 与施力频率 ω 联系起来。如果令阻尼因子 n 等于零，那么相角成为 0 或 π，$b_1=0$，$c_1=a_1$，方程（2.38）成为与前面无阻尼情况所导得的方程（2.30）相同。

为了绘出反应谱，可以重新排列方程（2.38），并分开为下面两个式子：

$$\frac{3\mu c_1^3}{4}=\left(\frac{\omega^2}{p^2}-1\right)c_1+\frac{q}{p^2}\sqrt{1-\frac{(2n\omega c_1)^2}{q^2}} \qquad (2.40)$$

和

$$\frac{3\mu c_1^3}{4}=\left(1-\frac{\omega^2}{p^2}\right)c_1-\frac{q}{p^2}\sqrt{1-\frac{(2n\omega c_1)^2}{q^2}} \qquad (2.41)$$

其中，第一个式子用于硬化弹簧的情况，第二个式子用于软化弹簧的情况。对于零阻尼，这些方程变成与方程（2.31）和（2.32）相同。方程（2.40）和（2.41）的右边不再为直线，因而现在反应谱的图解作图要比无阻尼情况较为复杂。然而，所得的曲线的一般形状却是相似，如图2.14和2.15中分别对于硬化弹簧和软化弹簧所示那样。

图2.14中的虚线具有与前面相同的定义（见方程2.33），反应谱与此自由振动曲线相交

地信网论坛 BBS.35001.COM

处诸点的轨迹，可以借联解方程（2.33）和（2.40）来求出。按这种方式，我们求出：

$$(c_1)_{res}=\frac{q/2np}{\omega_{res}/p}=\frac{q}{2n\omega_{res}}$$

其中ω_{res}表示共振频率，$(c_1)_{res}$为共振振幅。方程（2.42）代表在c_1对ω/p的平面内双曲线族（见图2.14中的点—虚线）。这样，对于任一特定$q/2np$量的值，可以作出方程（2.42）所给的双曲线。它与自由振动曲线的交叉点近似地确定稳态强迫振动的最大可能振幅。如果仅需要求此最大值，那么不需要作出整个反应谱，绘出方程（2.40）的困难可以避免。

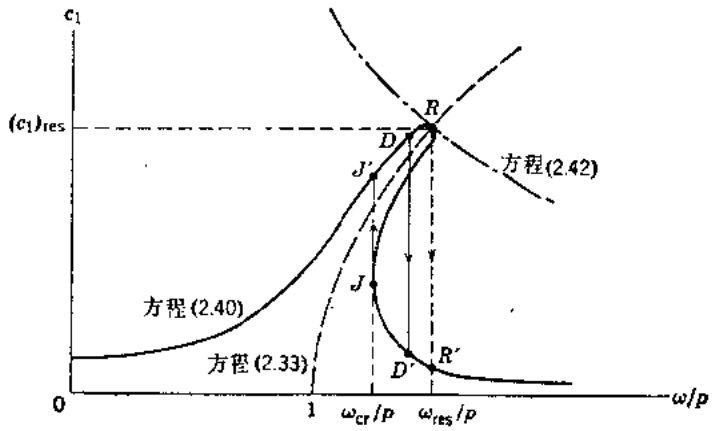


图 2.14

类似地，图2.15中的虚曲线也具有与前面相同的定义（见方程2.35）。反应谱与此自由振动曲线相交诸点的轨迹可以借联解方程（2.35）和（2.41）来求出，所得式子与上面所给方程（2.42）相同。图2.15中点—虚曲线列举说明这样一根双曲线，在这种情况下，可能有两个轨迹交叉点，表示存在于反应谱的上面一支没有实际意义。

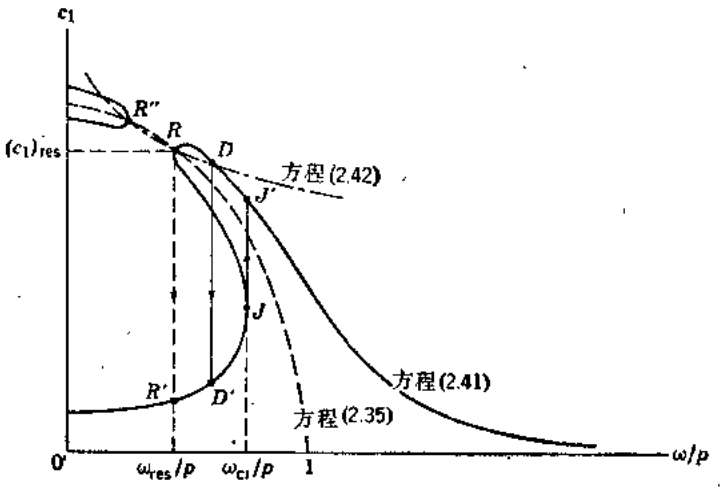


图 2.15

在轻微阻尼系统中，借图2.14和2.15中标以R的点所代表的理论共振条件，实际上不可能得到，因为有降—跃现象的缘故。在这每一图中，降落的可能性表明发生于从D点至D'点，但是跳跃总是发生于从J点至J'点。外加干扰可引起降落过早发生，从而排除实际共振的可能性。没有这样一种干扰影响时，每一图中的降落将近似地为反应谱上从R点至R'点。

对于阻尼系统，当施力频率ω从0变至∞时，相角ψ从0连续变至π。共振时，相角在理论上为$\pi/2$，但是实际上当降落或跳跃发生时，它将急剧改变。这种改变是从稍低于（或稍高于）$\pi/2$的值变为稍高于（或稍低于）$\pi/2$的值。

里兹平均法，已成功地用于涉及非线性系统的自由振动和强迫振动的各种问题。对于具有对称n阶和分段线性恢复力的系统，应用单项近似值已得到极好的精确度*。强迫振动的杜

* 参见第117页，见K.Klotter的论文。

地信网论坛 BBS.3500L.COM

法因方程，仅代表前一类的一个例子。对于具有非对称恢复力的系统，至少需要两项近似值，并迅速增大代数困难。

2.5 分段线性系统

如第 2.1 节所述，某些振动系统呈现分段线性特性。这些系统的分析是简单的，有些情况下，经得起精确解的检验。这个范围所包括的有：具有不连续的线性弹性弹簧的系统具有多重线性非弹性材料性能（包括弹塑性）的系统和具有库仑（或摩擦）阻尼的系统。本节中将对这样一种系统讨论它们对位移和速度初始条件的自由振动的反应由于周期函数引起的强迫振动，以及由于任意激发引起的瞬变反应。

图2.16 a 表示一个质量位于两线性弹性弹簧之间间隙处的振动系统。如果我们从中央位置度量质量的运动，那么其静力荷载—位移图采取图 2.16 b 中所给的形式。在此情况下，自由振动的周期取决于间隙的大小和其它参数。假设在时间 $t=0$ 处，质量的初始位移为零，但是它的初始速度为 x_0。穿过间隙 x_1 所需要的时间借下式给出：

$$t_1=\frac{x_1}{x_0} \qquad (a)$$

穿过间隙后，质量与右边弹簧接触，以后发生的运动为谐和运动，直到在过后时间 t_2 处质量从弹簧弹回为止。速度从 x_0 变为零的过程中的时间，等于附于刚度等于 k 的弹簧上质量 m 的固有周期的四分之一。这样，在最大位移发生处的时间 t_m 为：

$$t_m=t_1+\frac{\pi}{2p}=\frac{x_1}{x_0}+\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (b)$$

因而，实际系统的完整振动周期为：

$$\tau=4t_m=\frac{4x_1}{x_0}+\frac{2\pi}{p}=\frac{4x_1}{x_0}+2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (2.43)$$

另外，由于初始速度引起质量的最大位移，等于间隙 x_1 与上面所述谐和运动的振幅之和。亦即

$$x_m=x_1+\frac{\dot{x}_0}{p}=x_1+\dot{x}_0\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (2.44)$$

对于此系统的无阻尼自由振动，其位移的时间过程和速度的时间过程，示于图2.16c和2.16d中。注意在质量不与任一弹簧接触时，这后一图中速度为常数。

对于特定的间隙 x_1、质量 m 和弹簧常数 k 值，方程（2.43）中的周期 τ 仅取决于初始速度 $\dot{x}_0$。当 $\dot{x}_0$ 的值接近零时，该周期趋于无穷大；当速度变得很大时，周期接近于 $2\pi/p$。图2.16 e 中为这种变化的曲线图，显然这样的系统将趋于与具有大于或等于 $2\pi/p$ 的周期的任何周期施力函数共振。然而，除施力函数的周期（或其谐和分量之一）具有等于 $2\pi/p$ 的周期的情况外，这种强迫振动的振幅总是有一上限。

现在让我们假定图2.16 a 中系统开始时处于静止，承受图2.16 f 中所示阶梯函数。由于等值的力 Q_n，在间隙内质量的加速度为 $q_n=Q_n/m$；其速度和位移借下面诸式给出：

$$\dot{x}=q_nt \qquad 和 \qquad x=q_nt^2/2 \qquad (c)$$

这后一个式子，在图2.16 g 中所绘的位移—时间图上，从 $t=0$ 至 $t=t_1$ 用抛物线表示。前一个式子，在图2.16 h 中速度图上相同时间范围内呈现一直线。在此情况下，质量穿过间隙 x_1 所需要的时间 t_1 为：

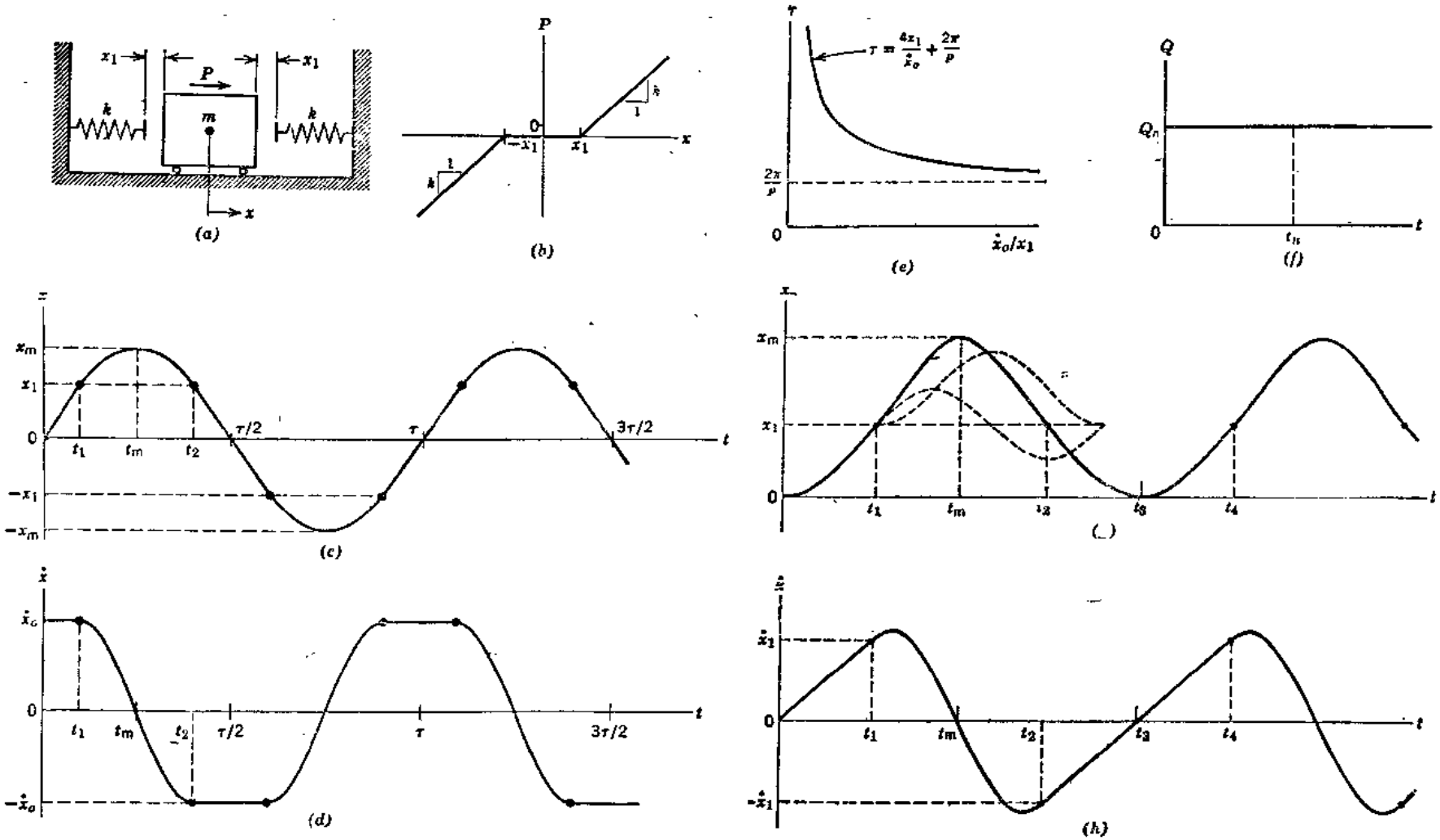

x1
P
x1
k
m
k
x
(a)
P
k
1
0
−x1
x1
x
1
k
(b)
τ
τ = 4x1/ẋo + 2π/p
2π/p
0
ẋo/x1
(e)
Q
Qn
0
tn
t
(f)
x
xm
x1
0
−x1
−xm
τ/2
τ
3τ/2
t
t1
tm
t2
(c)
x
xm
x1
0
t1
tm
t2
t3
t4
t
(g)
ẋ
ẋo
0
−ẋo
t1
tm
t2
τ/2
τ
3τ/2
t
(d)
ẋ
ẋ1
0
−ẋ1
t1
tm
t2
t3
t4
t
(h)

图 2.16

地信网论坛 BBS.3500L.COM

$$t_1=\sqrt{2x_1/q_n} \qquad (d)$$

在时间t_1处的速度为：

$$\dot{x}_1=q_n t_1=\sqrt{2q_n x_1} \qquad (e)$$

当质量接触右边弹簧时，它具有初始速度$\dot{x}_1$，在时间$t_1\leqslant t\leqslant t_2$范围内，系统的反应可以写成：

$$x=x_1+\frac{\dot{x}_1}{p}\sin p(t-t_1)+\frac{Q_n}{k}[1-\cos p(t-t_1)] \qquad (f)$$

其中，右边第二项是由于初始速度$\dot{x}_1$产生的，而最后一项是由于施力函数所引起的。这两项在图2.16 g 中$t_1\leqslant t\leqslant t_2$的时间范围内均以虚线表示，所有三项之和为所示的钟形实曲线。借（f）式微分，我们求出最大位移x_m发生于下列t_m处：

$$t_m=t_1+\frac{1}{p}\tan^{-1}\left(-\frac{\dot{x}_1/p}{Q_n/k}\right) \qquad (2.45)$$

其振幅为：

$$x_m=x_1+\frac{Q_n}{k}+\sqrt{\left(\frac{Q_n}{k}\right)^2+\left(\frac{\dot{x}_1}{p}\right)^2} \qquad (2.46)$$

因为钟形曲线对时间t_m成对称，所以在下式所给的时间t_2处又下降为x_1：

$$t_2=2t_m-t_1 \qquad (g)$$

然后质量不与右边弹簧接触，并在$t_2\leqslant t\leqslant t_4$时间范围内遵循抛物线轨道，如图2.16 g 中所示。此抛物线对时间t_3成对称，这里关心的时间是：

$$t_3=t_2+t_1 \qquad 和 \qquad t_4=t_2+2t_1 \qquad (h)$$

在时间t_4处，质量又与右边弹簧接触，前面位移图式再重复，相应的速度的时间过程给于图2.16 h 中。我们看到，在质量不与弹簧接触时该图为一直线。

如果在时间t_n处，常数力Q_n突然从系统上移去（见图2.16 f），那么我们得到矩形冲量而不是简单阶梯函数。在时间t_n处，该系统具有某位移x_n和某速度$\dot{x}_n$，可以从图2.16 g 和2.16 h 中的图解确定出来。用这些量作为初始条件，以后发生的自由振动反应可以按类似于得出图2.16 c 和2.16 d 中曲线的方式推演出来。

作为分段线性弹性系统的第二个例子，我们将考虑图2.17 a 中的对称装置。这个系统类似于图2.16 a 中的系统，但是它有附加弹簧，对于距中央位置的任何非零位移提供恢复力。对于此情况，其静力荷载—位移图示于图2.17 b 中。图内穿过原点的线具有斜率k_1，较陡线具有等于k_2的斜率。如果该系统的位移决不超过$\pm x_1$，那么该运动将为简谐运动，但是如果位移在数值上大于x_1，那么运动变得较复杂。

为了研究此系统的自由振动特性，让我们假设在时间 $t=0$ 处，质量的初始位移为零，但是其初始速度$\dot{x}_0>p_1x_1$，这里 $p_1=\sqrt{k_1/m}$。这样大小的速度，将使质量产生超出x_1处转变点的偏移，产生图2.17 c 中所绘位移的时间过程。在$0\leqslant t\leqslant t_1$的时间范围内，此系统的位移为：

$$x=\frac{\dot{x}_0}{p_1}\sin p_1 t \qquad (i)$$

其速度借下式给出：

$$\dot{x} = \dot{x}_0 \cos p_1 t \qquad (j)$$

在时间t_1处，质量移到第一个弹性范围的极限值x_1处，我们从方程（i）得到：

$$t_1 = \frac{1}{p_1} \sin^{-1}\left(\frac{p_1 x_1}{\dot{x}_0}\right) \qquad (k)$$

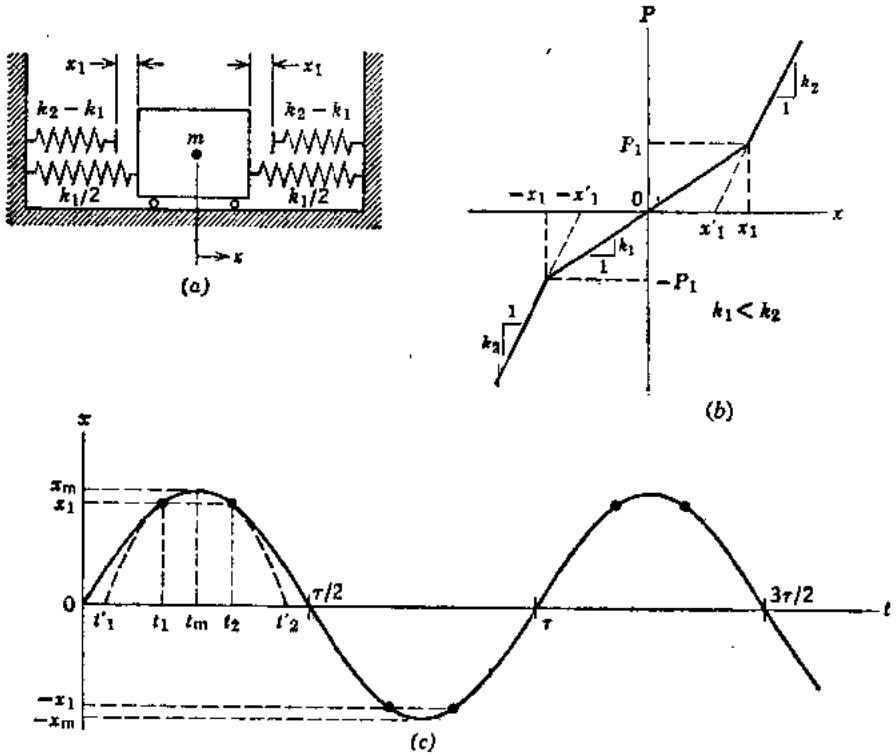


图 2.17

借方程（j）给出相应速度为：

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_0 \sqrt{1 - \left(\frac{p_1 x_1}{\dot{x}_0}\right)^2} \qquad (l)$$

然后，质量与图2.17 a 中上面右边弹簧接触，其运动方程成为：

$$m\ddot{x} + k_1 x + (k_2 - k_1)(x - x_1) = 0$$

或

$$m\ddot{x} + k_2 x = (k_2 - k_1) x_1 \qquad (m)$$

方程（m）中右边项为一常数，可以考虑为作用于弹簧常数为k_2的系统上的假阶梯函数。用这种方法，其总反应可以按时间t_1处初始条件的效应与假阶梯函数的影响之和来计算。这样，我们得到：

$$x = x_1 \cos p_2(t - t_1) + \frac{\dot{x}_1}{p_2} \sin p_2(t - t_1) + \frac{k_2 - k_1}{k_2} x_1 [1 - \cos p_2(t - t_1)]$$

$$= \left(1 - \frac{k_1}{k_2}\right) x_1 + \frac{k_1}{k_2} x_1 \cos p_2(t - t_1) - \frac{\dot{x}_1}{p_2} \sin p_2(t - t_1) \qquad (n)$$

速度的表达式为：

$$\dot{x} = -\frac{k_1}{k_2} p_2 x_1 \sin p_2(t - t_1) + \dot{x}_1 \cos p_2(t - t_1) \qquad (o)$$

地信网论坛 BBS.3500L.COM

方程(*n*)和(*o*)中的符号 p_2 代表对于第二个弹性范围内谐和运动的角频率 $p_2=\sqrt{k_2/m}$。从方程(*o*)，我们看出最大反应的时间为：

$$t_m=t_1+\frac{1}{p_2}\tan^{-1}\left(\frac{k_2x_1}{k_1p_2\dot{x}_1}\right) \qquad (p)$$

方程(*n*)中用下式给出的第一项

$$x_1'=\left(1-\frac{k_1}{k_2}\right)x_1 \qquad (q)$$

代表图2.17*b*中较陡线，穿过正 x 轴的点。此外，方程(*n*)中余弦项的系数表示相对于该穿过点的初始位移：

$$\frac{k_1}{k_2}x_1=x_1-x_1'$$

图2.17*c*中虚曲线，可以想像为在第二弹性范围内移动的谐和运动的延长部分。此运动的半周开始于时间 t_1' 处，终结于时间 t_2' 处。这些时间为：

$$t_1'=t_m-\frac{\pi}{2p_2} \qquad 和 \qquad t_2'=t_m+\frac{\pi}{2p_2}$$

虚曲线与实曲线相切的第二个点的时间 t_2 为：

$$t_2=t_1+\frac{2}{p_2}\tan^{-1}\left(\frac{k_2x_1}{k_1p_2\dot{x}_1}\right) \qquad (r)$$

如同前面的情况一样，振动的全周期可以计算为：

$$\tau=4t_m=4t_1+\frac{4}{p_2}\tan^{-1}\left(\frac{k_2x_1}{k_1p_2\dot{x}_1}\right) \qquad (2.47)$$

此外，方程(*n*)说明，由于所给初始速度产生的质量最大位移 x_m 等于 x_1' 与在第二弹性范围内移动的谐和运动的振幅之和。亦即：

$$x_m=\left(1-\frac{k_1}{k_2}\right)x_1+\sqrt{\left(\frac{k_1}{k_2}x_1\right)^2+\left(\frac{\dot{x}_1}{p_2}\right)^2} \qquad (2.48)$$

自然，应以(*l*)式代替方程 (2.47) 和 (2.48) 的 $\dot{x}_1$，以便用初始速度 $\dot{x}_0$ 表达它们。

如果图2.17*a*中的系统承受谐和施力函数 $Q\sin\omega t$，那么，其运动方程应按三个 x 区段写出如下：

对于 $-x_1\leqslant x\leqslant x_1$ $\qquad m\ddot{x}+k_1x=Q\sin\omega t \qquad (s)$

对于 $x_1\leqslant x$ $\qquad m\ddot{x}+k_2x=Q\sin\omega t+(k_2-k_1)x_1 \qquad (t)$

对于 $x\leqslant -x_1$ $\qquad m\ddot{x}+k_2x=Q\sin\omega t-(k_2-k_1)x_1 \qquad (u)$

尽管这些方程可以用于计算该系统的瞬变反应，但是它们不适于求算稳态反应。克罗特尔*已经以一项近似值应用里兹平均法，研究了这种强迫振动的情况。对于刚度比 $k_1/k_2=1/2$ 的反应谱族示于图2.18内。为了使诸图解成为无量纲者，采用了几个荷载参数 $\zeta=Q/k_1x_1$ 值将 x/x_1 对 ω^2/p^2 绘出。

---

* K.Klotter, "Non-Linear Vibration Problems Treated by the Averaging Method of W. Ritz," Technical Report No. 17, Parts Ⅰ和Ⅱ, Division of Engineering Mechanics, Stanford University, Stanford, Cal., 1951.

地信网论坛 BBS.3500L.COM

作为非弹性分段线性系统的说明，让我们把我们的注意力集中到图2.19 a 的系统上，这里质量 m 置于一竖直柔性杆的端点处。假设水平荷载作用仅引起微小的位移 x，并假设该系统表现为弹塑性者，如前面第 2.1 节所讨论那样。亦即，其静力的荷载—位移图(图2.19 b)，具有等于某一非零常数 k 的斜率直到靠近杆的底部刚刚形成塑性铰时为止。在塑性铰形成时，图的纵坐标等于最大值 P_m，图的斜率成为零。让我们假定：在 $t=0$ 处，质量的初始位移为零，但其初始速度 $\dot{x}_0 > p x_1$，这里 $p=\sqrt{k/m}$，x_1 为塑性铰第一次形成时的时间 t_1 处之位移。在 $0 \leqslant t \leqslant t_1$ 的时间范围内，位移和速度的方程为：

$$x=\frac{\dot{x}_0}{p}\sin pt \qquad 和 \qquad \dot{x}=\dot{x}_0\cos pt \tag{v}$$

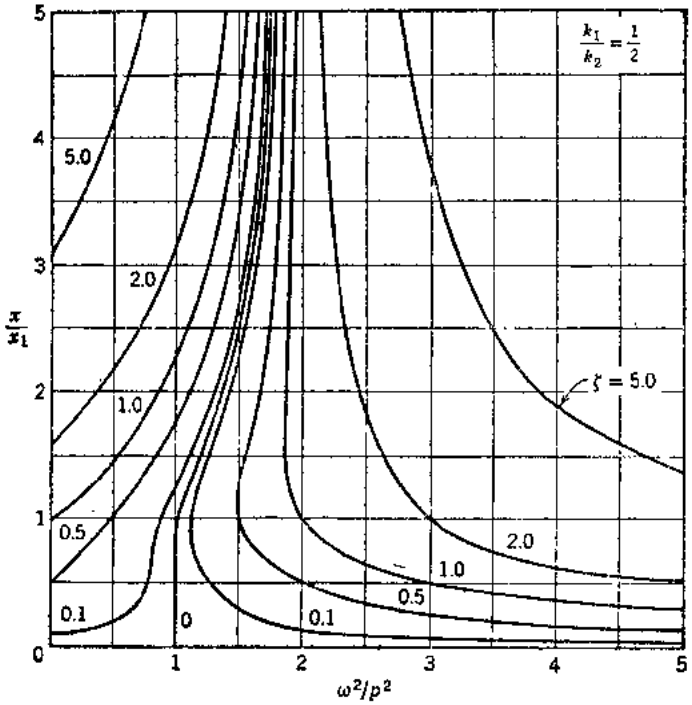


图 2.18

如图2.19 c 和2.19 d 中标明①的曲线所示。将 $x_1=P_m/k$ 代入方程（v），我们得到：

$$t_1=\frac{1}{p}\sin^{-1}\left(\frac{P_m p}{k\dot{x}_0}\right) \qquad 和 \qquad x_1=\dot{x}_0\sqrt{1-\left(\frac{P_m p}{k\dot{x}_0}\right)^2} \tag{w}$$

在塑性铰形成之后，$t_1 \leqslant t \leqslant t_m$ 时间范围内，质量的位移和速度由下面诸式给出：

$$x=x_1+\dot{x}_1(t-t_1)-\frac{P_m(t-t_1)^2}{2m}$$

和

$$\dot{x}=\dot{x}_1-\frac{P_m(t-t_1)}{m} \tag{x}$$

这些公式（一根为抛物线，一根为直线）如图2.19 c 和2.19 d 中标明②的部分绘出。从方程（x），我们看到最大位移 x_m 发生于下列时间处：

$$t_m=t_1+\frac{m\dot{x}_1}{P_m}=t_1+\frac{1}{p}\sqrt{\left(\frac{k\dot{x}_0}{P_m p}\right)^2-1} \tag{2.49}$$

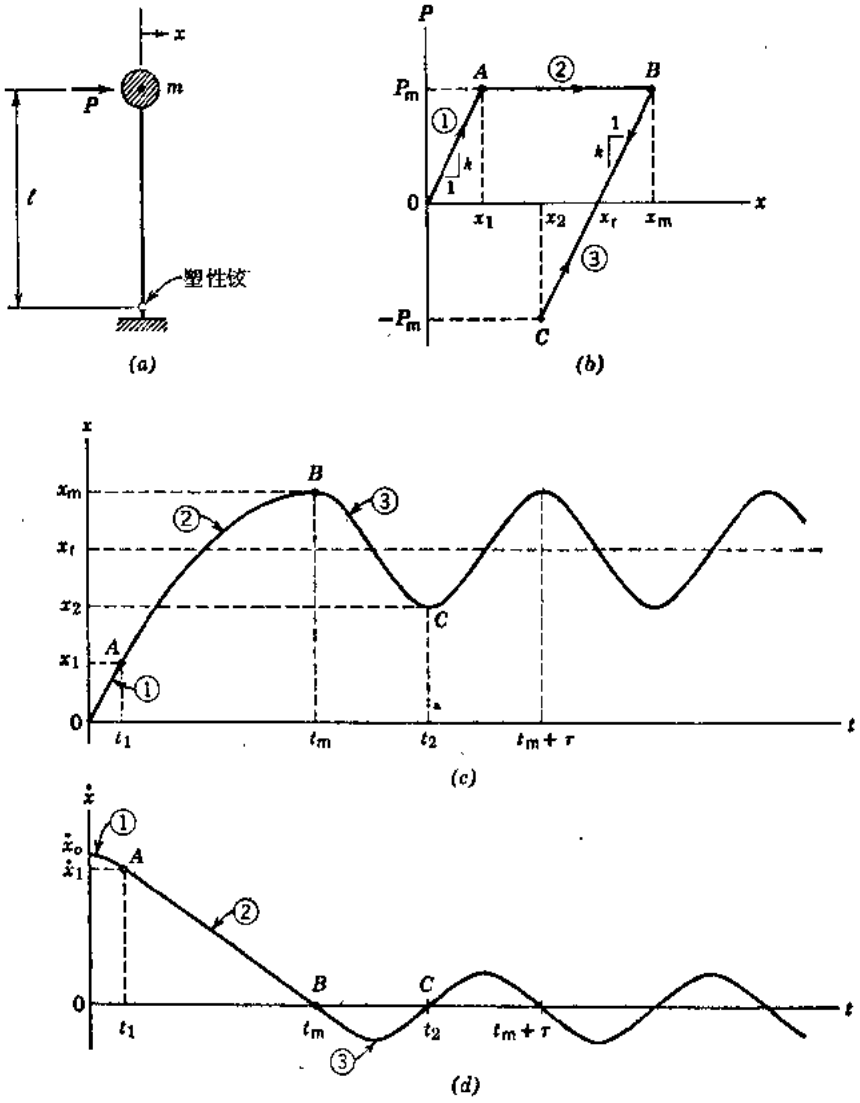


图 2.19

而其值为：

$$x_m = x_1 + \dot{x}_1(t_m - t_1) - \frac{P_m(t_m - t_1)^2}{2m} = \frac{P_m}{2k}\left[\left(\frac{k\dot{x}_0}{P_m p}\right)^2 + 1\right] \tag{2.50}$$

时间t_m以后，塑性铰不再出现；质量沿荷载—位移图中弹性分支弹回，如图2.19 *b* 中标明③的线所示。在$t_m \leqslant t$ 的时间范围内，其自由振动反应为借下式表示的简谐运动：

$$x = x_m - \frac{P_m}{k}(1 - \cos pt) = x_r + \frac{P_m}{k}\cos pt \tag{y}$$

其中，由于材料的永久变形引起的残余位移x_r为：

$$x_r = x_m - \frac{P_m}{k} = \frac{P_m}{2k}\left[\left(\frac{k\dot{x}_0}{P_m p}\right)^2 - 1\right] \tag{2.51}$$

最后，在该时间范围内其速度为：

$$\dot{x} = -\frac{P_m p}{k}\sin pt \tag{z}$$

地信网论坛 BBS.3500L.COM

方程(*y*)和(*z*)以标明③的曲线绘于图 2.19*c* 和 2.19*d* 中。从(*y*)式中的第二种形式，我们看到残余振动的新平衡位置为残余位移x_r（见图2.19*c*）。

如果图2.19*a* 中的系统，承受一个冲击荷载，那么其反应可以按类似于上面所述对于初始速度的方式来确定。具体地说，可以考虑大小为Q_n且持续时间为t_n的矩形冲量；借对参数的不同值作出大量解，我们可以作出图 2.20 所示反应谱*。这些曲线是在不同级的比P_m/Q_n时最大反应比x_m/x_1对t_n/τ绘制的，包括第1.14 节中所讨论的弹性反应情况（见图1.52*a*）。当横向位移 x 对图 2.19*a* 中的几何图形为很大时，重力感生力矩（gravity-induced moment）mgx的效应，应考虑为增大力矩Pl（由于水平力引起的）的一个量。

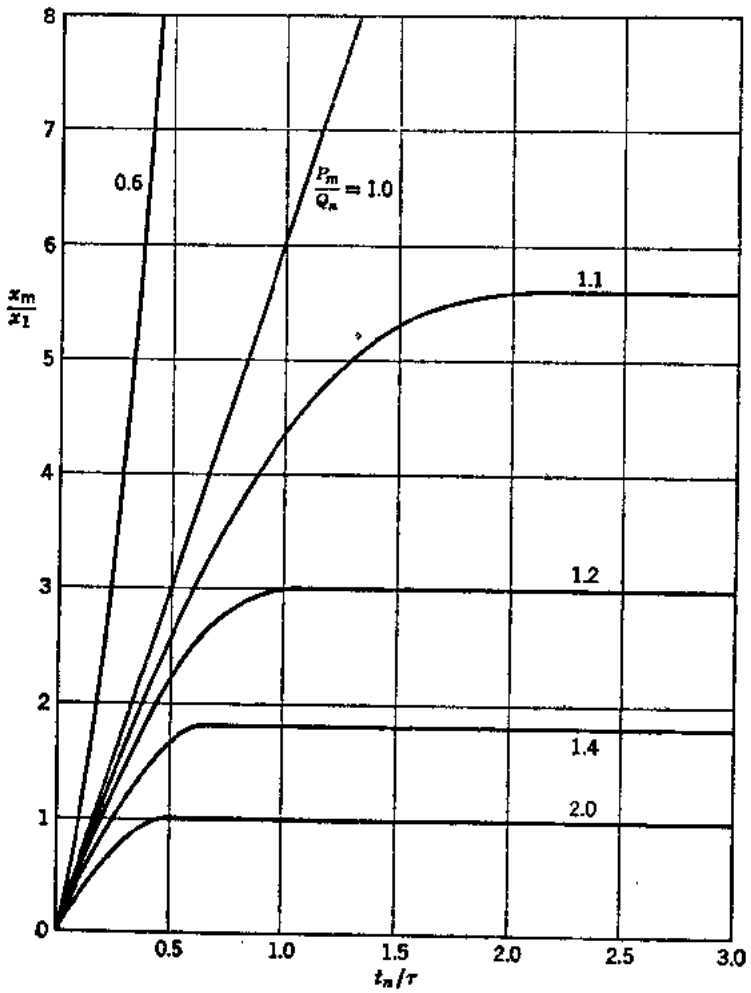


图 2.20

在结束我们分段线性问题的讨论时，我们考察在第 2.1 节中作了简短的叙述的一个具有库仑（或摩擦）阻尼的系统。首先我们认为，图 2.21*a* 中块体具有一个以上的静力平衡位置这一事实。事实上，在$-\Delta \leqslant x \leqslant \Delta$的位移范围内，它具有无穷多个这种位置，这里符号$\Delta = F/k$表示摩擦力$F$与弹簧力$k\Delta$相等的位置。另外，摩擦力 F 总顺系统运动中速度的相

* "Design of Structures to Resist the Effects of Atomic Weapons," U. S. Army Corps of Engineers, Manual EM 1110-345-415, 1957.

地信网论 BBS.35001.COM

反方向作用。所以，对此系统的自由振动，我们须要写两个微分方程。当图2.21 a 中的块体向右运动时，我们取：

$$m\ddot{x}+kx=-F \qquad (\dot{x}>0) \qquad (a')$$

当它向左运动时，我们取：

$$m\ddot{x}+kx=F \qquad (\dot{x}<0) \qquad (b')$$

方程(a')和(b')可以更简洁地写成：

$$m\ddot{x}+kx=-F\,\mathrm{sgn}(\dot{x}) \qquad (c')$$

其中函数 $\mathrm{sgn}(\dot{x})$给予相当于速度$\dot{x}$的正负号。

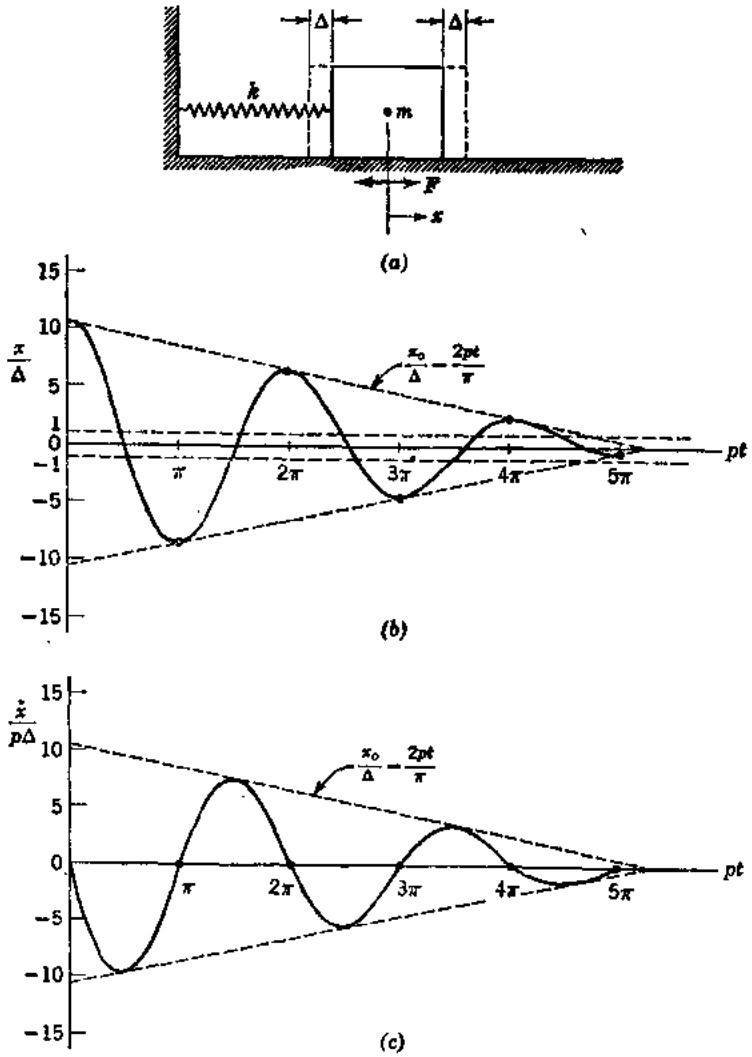


图 2.21

假定图2.21 a 中块体向右移动一个量$x_0 \gg \Delta$，并以零初速放松。当块体向左运动时，采用方程(b')，其解为：

$$x=x_0\cos pt+\frac{F}{k}(1-\cos pt)=\Delta+(x_0-\Delta)\cos pt \qquad (2.52a)$$

在此时间过程中，速度借下式给出：

地信网论坛 BBS.35001.COM

$$\dot{x} = -p(x_c - \Delta)\sin pt \qquad (2.52b)$$

这样，在 $0 \leqslant t \leqslant \pi/p$ 的时间范围内，其运动为谐和运动，$p = \sqrt{k/m}$ 代表此运动的角频率。在时间 $t = \pi/p$ 处，最大负位移为 $-(x_0 - 2\Delta)$。速度的方向从负变为正，于是在下一个 $\pi/p \leqslant t \leqslant 2\pi/p$ 的时间范围内块体向右运动，我们从方程（a′）得到下列解：

$$x = -(x_0 - 2\Delta)\cos pt - \frac{F}{k}(1 - \cos pt) = -\Delta - (x_0 - 3\Delta)\cos pt \qquad (2.53a)$$

而速度为：

$$\dot{x} = p(x_0 - 3\Delta)\cos pt \qquad (2.53b)$$

这样，在第二个时间范围内，其运动也是谐和运动，并且具有相同的角频率 p。

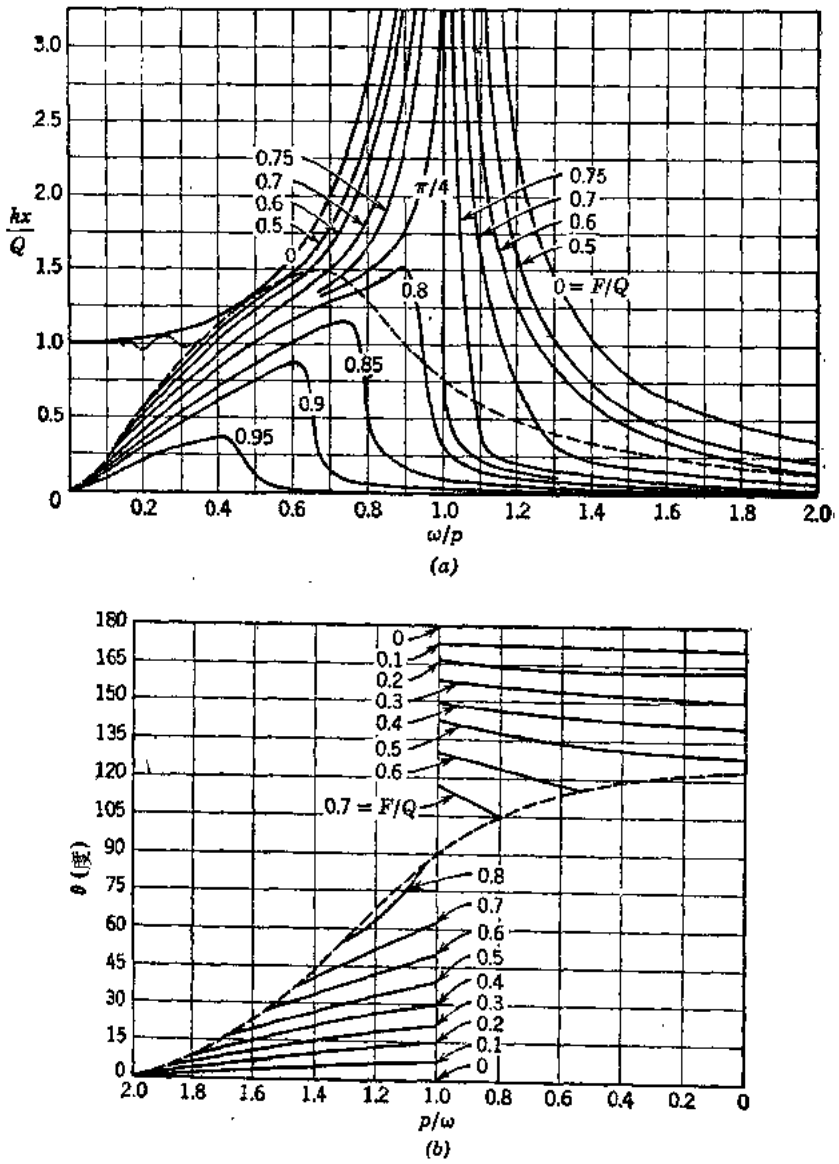


图 2.22

地信网论坛 BBS.35001.COM

检查方程（2.52a）和（2.53a），表明前者代表振幅为$x_0-\Delta$对右边平衡位置(在$x=\Delta$处）的振动，而后者代表振幅为$x_0-3\Delta$对左边平衡位置（在$x=-\Delta$处）的振动。这样，在时间π/p内，最大位移的数值减小2Δ量，在时间$2\pi/p$内减小4Δ量。借连续分析，我们发现在每半周中运动的振幅减小2Δ，直到振幅成为小于Δ为止。然后块体于$-\Delta\leqslant x\leqslant\Delta$的位移范围内在其端点位置之一处停止。

图2.21b和2.21c包括图2.21a中块体由于以初始条件$x_0=10.5\Delta$和$\dot{x}_0=0$放松所产生的位移的无量纲时间过程和速度的无量纲时间过程。这些图的振幅按下式成算术减小：

$$\frac{x_m}{\Delta}=-\frac{\dot{x}_m}{p\Delta}=\pm\left(\frac{x_0}{\Delta}-\frac{2pt}{\pi}\right) \tag{2.54}$$

这些函数表示为外包于图2.21b和2.21c中曲线的斜虚线。对于假设的初始条件，在振动$2\frac{1}{2}$周后停止于位置$x=-0.5\Delta$处。因为阻尼力在$t=\pi/p$、$2\pi/p$等时间处急剧改变，所以图2.21c中诸曲线的斜率在这些时间处是不连续的。

虽然摩擦力在每半周内改变方向，但是分析图2.21a中的系统由于脉冲激发所引起的瞬变反应是不困难的。然而，对于如$Q\cos wt$的周期施力函数的稳态反应是比较复杂的。一个建于等效粘滞阻尼概念基础上的近似解，已给于第1.10节中，但是也有精确解可以利用*。具有摩擦阻尼的系统的强迫振动放大因子kx/Q和相角θ的图解示于图2.22a和2.22b中。这些图中每一曲线代表借F/Q比值确定的不同级阻尼。图2.22a中的虚线表示一个极限，高于此极限便发生不停止的振动运动。低于该极限运动则有间歇停止，在此停止过程中，内摩擦力具有$-F\leqslant P\leqslant F$范围内的某一被动值P。

习 题 组 2.5

2.5—1 对图2.16a中系统，假设大小为Q_n的矩形冲量在时间t_n处终结（见图2.16f）。令时间t_n等于图2.16h中速度$\dot{x}$达到其第一个最大值所需要的时间，试确定此时间t_n和以后的自由振动的振幅。

答：
$$t_n=t_1+\frac{1}{p}\tan^{-1}[(Q_n/k)/(\dot{x}_1/p)]$$

$$A=\sqrt{\left(x_1+\frac{Q_n}{k}\right)^2+\left(\frac{Q_n}{k}\right)^2+\left(\frac{\dot{x}_1}{p}\right)^2}$$

2.5—2 令图2.17a中的系统，承受大小为$Q_n=k_1x_1$开始于时间$t=0$处的阶梯函数，试确定最大反应x_m和它发生时的时间t_m。

答：
$$t_m=\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\frac{m}{k_1}}+\sqrt{\frac{m}{k_2}}\right);\quad x_m=x_1\left(1+\sqrt{\frac{k_1}{k_2}}\right)$$

2.5—3 假定习题2.5—2中的冲量当到达转变点（$x=x_1$）时，在时间t_n处明确地停止。试确定时间t_n和以下的自由振动的振幅。

答：
$$t_n=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k_1}};\quad A=x_1\left[1+\frac{k_1}{k_2}\left(1-\sqrt{1+\frac{k_2}{k_1}}\right)\right]$$

2.5—4 假设图2.19a中的系统，承受大小为$Q_n=kx_1/1.5$开始于时间$t=0$处的阶梯函

* J.P. Den Hartog, "Forced Vibrations With Combined Coulomb and Viscous Damping", Trans. ASME, Vol.53, 1931, p.APM-107。

地信网论坛 BBS.3500L.COM

数。试导出最大反应x_m和它发生的时间t_m的表达式。

答：$t_m=3.83\sqrt{m/k}$；$x_m=3x_1/2$

2.5—5　假设图2.19a中的系统，承受大小$Q_n=kx_1$开始于时间$t=0$处的矩形冲量。如果当塑性铰形成时，冲量在时间t_n处停止。试确定最大反应x_m和残余位移x_r的表达式。

答：$x_m=3x_1/2$；$x_r=x_1/2$

2.5—6　图2.21a中的块体，从无应力位置移动$x_0=10$英寸的量，然后以初速为零放松。其重量$W=2$磅，弹簧常数$k=1$磅/英寸。如果摩擦系数为1/4，试问该物体将振动多长时间？

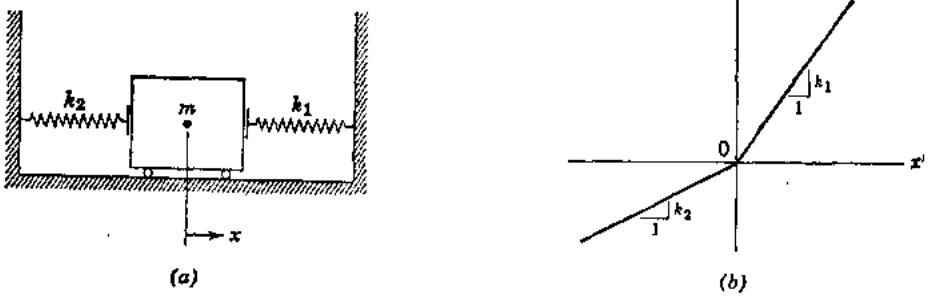
答：2.26秒

2.5—7　假定图2.21a中系统的弹簧常数按$k=4W$给出，这里W为块体的重量。如果自由振动的振幅在10周中从25英寸减小到22.5英寸，试问摩擦系数是多少？

答：0.25

2.5—8　图（a）中所示质量被具有不等刚度的弹簧约束着，图（b）中的静力荷载—位移图对原点是非对称的。假设在时间$t=0$处，初始条件为$x_0=0$和$\dot{x}_0\neq 0$。试作出自由振动中一个全周的位移的时间过程和速度的时间过程。

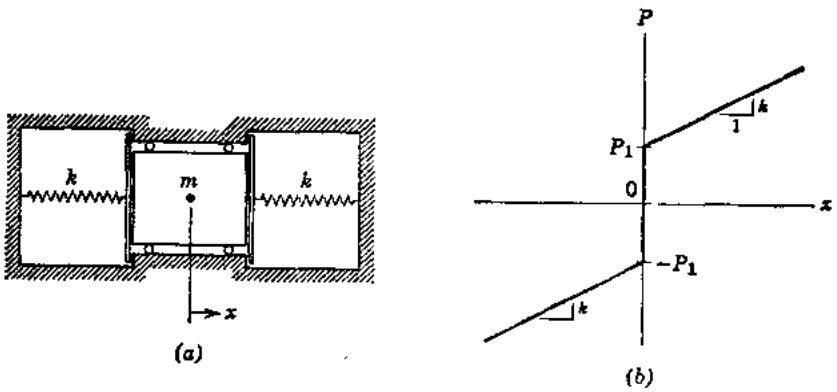
答：$\tau=\pi(\sqrt{m/k_1}+\sqrt{m/k_2})$；　$x_m=\dot{x}_0\sqrt{m/k_2}$



习题　2.5—8

2.5—9　图（a）中每一个弹簧预压P_1值，如图（b）中静力荷载—位移图所示。试对初始条件$x_0=0$和$\dot{x}_0\neq 0$，作出代表自由振动中一个全周的位移时间过程和速度时间过程。

答：$\tau=\frac{2}{p}\tan^{-1}\left(\frac{k\dot{x}_0}{P_1 p}\right)$；　$x_m=\sqrt{\left(\frac{\dot{x}_0}{p}\right)^2+\left(\frac{P_1}{k}\right)^2}-\frac{P_1}{k}$



习题　2.5—9

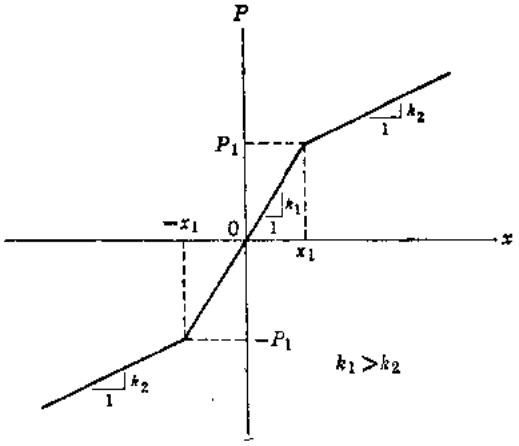
地信网论坛 BBS.3500L.COM

2.5—10　假设一分段线性弹性系统具有图中所示的静力荷载—位移图。试作出由于初始条件$x_0=0$，且$\dot{x}_0>p_1x_1$所产生代表自由振动中一个整周的位移时间过程和速度时间过程。

答：

$$\tau=4t_1+\frac{4}{p_2}\tan^{-1}\left(\frac{k_2\dot{x}_1}{k_1p_2x_1}\right)$$

$$x_m=\left(1-\frac{k_1}{k_2}\right)x_1+\sqrt{\left(\frac{k_1}{k_2}x_1\right)^2+\left(\frac{\dot{x}_1}{p_2}\right)^2}$$



习题　2.5—10

2.5—11　参见图2.7c中(第2.1节所讨论)双线性滞后图，并假设$k_1=5k_2$。如果适用此图的系统，承受大小$Q_n=k_1x_1$的阶梯函数，试作出包括一周残余振动的位移时间过程。

答：　$x_m=x_1(1+\sqrt{5})$；　$x_r=4x_1/\sqrt{5}$

2.5—12　重复习题2.5—11，假设$Q_n=2k_1x_1$

答：　$x_m=x_1(6+2\sqrt{10})$；　$x_r=4x_1(1+2\sqrt{2/5})$。

2.6　非线性系统的数值解

非线性系统的运动方程总是可以用逐步积分近似地求解。许多大家知道的数值解涉及求解的外推公式或内插公式，这些公式采用一系列很小但是是有限的时间间隔。本节中将叙述和比较两种简单且又有效的这种技巧，并对其它方法作简短的讨论。

对于具有非线性特性的一个自由度系统，其运动方程的一般形式可以表达为：

$$\ddot{x}=f(t,x,\dot{x}) \tag{2.55}$$

开始求解时，我们可以从方程(2.55)求算初始加速度(在时间$t=0$)，得出：

$$\ddot{x}_0=f(0,x_0,\dot{x}_0) \tag{2.56}$$

在任一以后时间t处所需要求的方程(2.55)的解，将写成符号形式：

$$x=F(t) \tag{2.57}$$

图2.23表示代表在$x-t$平面内为一光滑曲线的解的图形。符号x_1，x_2，…x_i，…，等表示由时间间隔Δt_1，Δt_2，…，Δt_i，…，等分布的时间测点t_1，t_2…t_i，…等处的x值。通常这些时间间隔采取均匀的持续时间Δt，自然这种规定是不必要的。

在我们将称为平均加速度法*的方法中，时间测点t_i处的速度$\dot{x}_i$，近似表示为：

$$\dot{x}_i=\dot{x}_{i-1}+\frac{\ddot{x}_{i-1}+\ddot{x}_i}{2}\Delta t_i \tag{2.58}$$

式中$\dot{x}_{i-1}$为前一时间测点t_{i-1}处的速度。此公式称为数值分析的梯形规则，它说明在该时间

*这种方法近几年称为Newmark　$\beta=1/4$法和常数平均加速度法。我们称它为平均加速度法。

地信网论坛 BBS.3500L.COM

步长中加速度取为$\ddot{x}_{i-1}$和$\ddot{x}_i$的平均。类似地，位移x,用梯形规则近似表达成下式：

$$x_i = x_{i-1} + \frac{\dot{x}_{i-1} + \dot{x}_i}{2}\Delta t_i \tag{2.59}$$

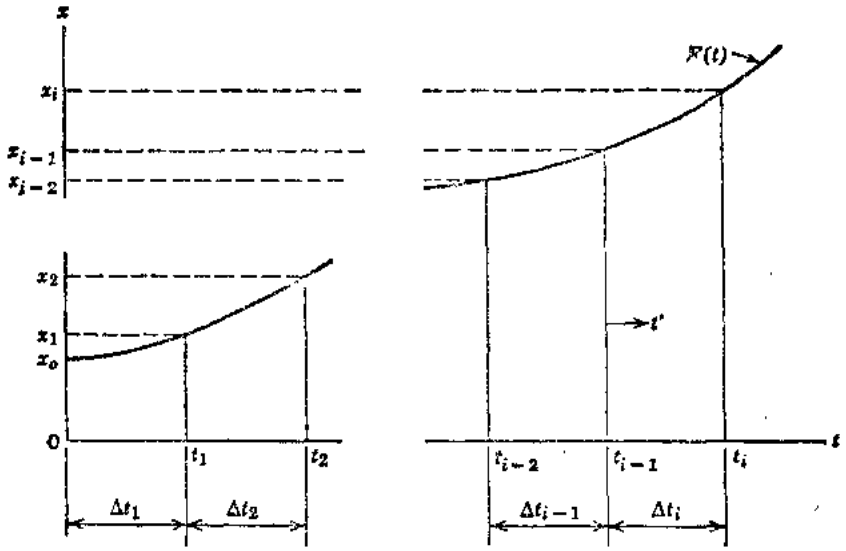


图 2.23

这里，在该时间步长中，速度取为$\dot{x}_{i-1}$和$\dot{x}_i$的平均。将方程（2.58）代入方程（2.59）得出：

$$x_i = x_{i-1} + \dot{x}_{i-1}\Delta t_i + (\ddot{x}_{i-1} + \ddot{x}_i)(\Delta t_i)^2/4 \tag{2.60}$$

估算计算x_i时直接应用方程（2.60）所存在的误差可以用泰勒级数展开x_i和$\ddot{x}_i$来得到：

$$x_i = x_{i-1} + \Delta t_i \dot{x}_{i-1} + \frac{(\Delta t_i)^2}{2!}\ddot{x}_{i-1} + \frac{(\Delta t_i)^3}{3!}\dddot{x}_{i-1} + \frac{(\Delta t_i)^4}{4!}x_{i-1}^{(4)} + \cdots \tag{2.61}$$

$$\ddot{x}_i = \ddot{x}_{i-1} + \Delta t_i \dddot{x}_{i-1} + \frac{(\Delta t_i)^2}{2!}x_{i-1}^{(4)} + \cdots \tag{2.62}$$

将方程（2.62）代入方程（2.60），从其结果减去方程（2.61），我们求出局部截断误差（或余数）R_x为：

$$R_x = \frac{(\Delta t_i)^3}{12}\dddot{x}_{i-1} + \frac{(\Delta t_i)^4}{12}x_{i-1}^{(4)} + \cdots = R_{x1} + R_{x2} + \cdots \tag{2.63}$$

此余数中的第一项R_{x1}是最重要的，它称为局部截断误差的主要项。

在应用此法中，我们不直接应用方程（2.60），而是连续地应用方程（2.58）和(2.59)。由于$\ddot{x}_i$的值事先是不知道的，所以在每一步长内必须迭代求解，下面的递推式代表第i个时间步长的第j次迭代：

$$(\dot{x}_i)_j = A_{i-1} + (\ddot{x}_i)_{j-1}\Delta t_i/2 \qquad (j>1) \tag{2.64}$$

$$(x_i)_j = B_{i-1} + (\dot{x}_i)_j\Delta t_i/2 \tag{2.65}$$

$$(\ddot{x}_i)_j = f[t_i, (x_i)_j, (\dot{x}_i)_j] \tag{2.66}$$

地信网论坛 BBS.3S001.COM

式中

$$A_{i-1}=\dot{x}_{i-1}+\ddot{x}_{i-1}\Delta t_i/2 \qquad (a)$$

和

$$B_{i-1}=x_{i-1}+\dot{x}_{i-1}\Delta t_i/2 \qquad (b)$$

这种迭代过程不是由本身开始的，因为它需要用于确定每一时间步长中$\dot{x}_i$的第一估算量的补充公式。在从方程（2.56）求算$\ddot{x}_0$之后，我们可以借用欧拉外推公式近似表示$\dot{x}$着手第一步长的迭代：

$$(\dot{x}_1)_1=\dot{x}_0+\ddot{x}_0\Delta t_1 \qquad (2.67)$$

于是分别从方程（2.65）和（2.66）得到x_1和$\ddot{x}_1$的第一近似值。对于第一个时间步长的所有以后迭代涉及方程（2.64）、（2.65）和（2.66）的重复应用。

为了在第i个时间步长中开始迭代，我们可以再用欧拉公式确定$\dot{x}_i$的第一估算值为：

$$(\dot{x}_i)_1=\dot{x}_{i-1}+\ddot{x}_{i-1}\Delta t_i \qquad (2.68)$$

方程（2.67）和（2.68）二者意味着在诸时间步长中加速度为常数值。当后一式中的$\dot{x}_i$代入方程（2.59）中，我们得到：

$$x_i=x_{i-1}+\dot{x}_{i-1}\Delta t_i+\ddot{x}_{i-1}(\Delta t_i)^2/2 \qquad (c)$$

将方程（c）减去x_i的泰勒级数展开式（方程2.61）得到余数为：

$$R'_x=-\frac{(\Delta t_i)^3}{6}\dddot{x}_{i-1}-\frac{(\Delta t_i)^4}{24}x^{(4)}_{i-1}-\cdots=R'_{x_1}+R'_{x_2}+\cdots \qquad (d)$$

此式中，主要项的绝对值为方程（2.63）中的两倍。为了改善第i个步长的第一次迭代结果的精确度，我们可以用下面仅对均匀时间步长是正确的稍好的公式：

$$(\dot{x}_i)_1=\dot{x}_{i-2}+2\ddot{x}_{i-1}\Delta t \qquad (2.69)$$

此式跨过从t_{i-2}至t_i的两个相等时间步长（见图2.23），并利用时间t_{i-1}处中点加速度。将方程（2.69）代入方程（2.59）产生：

$$x_i=x_{i-1}+(\dot{x}_{i-2}+\dot{x}_{i-1}+2\ddot{x}_{i-1}\Delta t)\Delta t/2 \qquad (e)$$

其速度$\dot{x}_{i-2}$可以展开成泰勒级数：

$$\dot{x}_{i-2}=\dot{x}_{i-1}-\ddot{x}_{i-1}\Delta t+\dddot{x}_{i-1}(\Delta t)^2/4-\cdots \qquad (f)$$

将方程（f）代入方程（e），并将其结果减去方程（2.61），我们求出局部截断误差的主要项为：

$$R''_i=-\frac{(\Delta t)^3}{12}\dddot{x}_{i-1} \qquad (g)$$

它与方程（2.63）中R_{x1}相同*。

方程（c）和（e）归纳为显（或开）式外推公式（或预估算子），它提供明显地以以前确定的x、$\dot{x}$或$\ddot{x}$值表达x_i的估算值。反之，方程(2.60)称为隐（或闭）式内插公式（或校正算子），它在得到$\ddot{x}_i$的估算后得出x_i的改善值。平均加速度法包括一次预估算子的应用

* 指与方程（2.63）右边第一项相同。 ——译注

地信网论坛 BBS.35001.COM

之后，为校正算子的迭代应用。这种方法称为预估算子—校正算子技巧。

求解的迭代型需要停止或改变步长大小的某一标准，例如迭代次数的限度。第 i 步长中收敛的最适当标准由 x_i 的两个连续值之差对 R_x 中主要项的比较组成。然而，求算高于二阶的导数不方便（这也是泰勒级数本身不是很有效的外推公式的理由）。比较方便的标准是控制 x_i 的有效数的数字，如下所述：

$$|(x_i)_i-(x_i)_{i-1}|<\varepsilon_x|(x_i)_i| \tag{2.70}$$

式中 ε_x 为分析者所选定的某个很小的数字。例如，四位有效数的近似精确度可以取 $\varepsilon_x=0.0001$。本节中将此精确程度用于所有数字例题中。

例题 1 考虑熟悉的一个自由度系统的线性运动方程：

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=Q(t) \tag{h}$$

令 $m=1$ 磅-秒^2/英寸；$c=1.2$ 磅-秒/英寸；$k=9$ 磅/英寸和 $Q(t)=Q_1=9$ 磅(阶梯函数)。于是 $p=\sqrt{k/m}=3$ 秒$^{-1}$，$n=c/2m=0.6$ 秒$^{-1}$，$\gamma=n/p=0.2$，方程（h）成为

$$\ddot{x}+1.2\dot{x}+9x=9 \tag{i}$$

对大小为 Q_1 的阶梯函数的阻尼反应之精确表达式为（见第1.12节）：

$$x=\frac{Q_1}{k}\left[1-e^{-nt}\left(\cos p_d t+\frac{n}{p_d}\sin p_d t\right)\right]=\frac{Q_1}{k}\left[1-Ae^{-nt}\cos(p_d t-\alpha_d)\right] \tag{j}$$

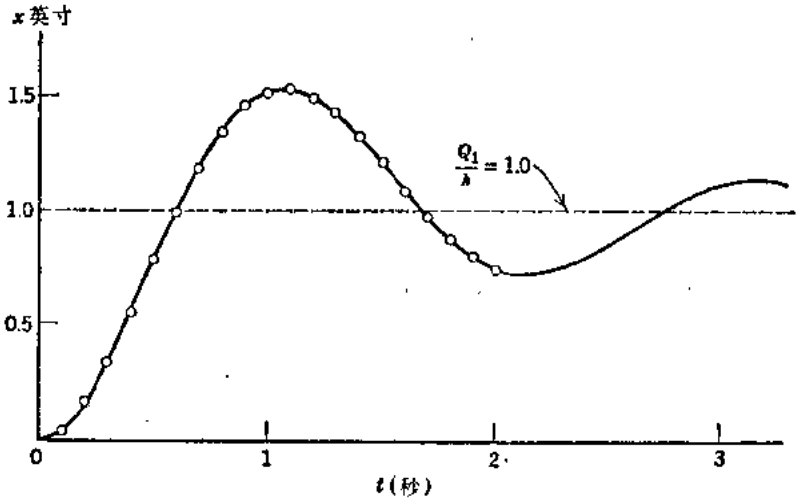


图 2.24

式中 $p_d=p\sqrt{1-\gamma^2}=3\sqrt{0.96}$ 秒$^{-1}$；$A=\sqrt{1+(n/p_d)^2}=3\sqrt{2}/4$ 和 $\alpha_d=\tan^{-1}(n/p_d)=\tan^{-1}(0.2/\sqrt{0.96})$。图2.24表示对于这种情况的精确解的曲线。

为了数值求解作准备，我们将方程（i）写成方程（2.55）的形式：

$$\ddot{x}=9-9x-1.2\dot{x} \tag{k}$$

如果初始条件取为 $x_0=0$ 和 $\dot{x}_0=0$，那么初始加速度成为（见方程2.56）：

$$\ddot{x}_0=9 \tag{l}$$

我们将取持续时间 $\Delta t=0.1$ 秒的均匀时间步长，并对位移取四位有效数的精确度（见方程2.70）。

地信网论坛 BBS.3500L.COM

解：第一步长的第一近似值计算如下：

方程 (2.67)： $(\dot{x}_1)_1 = 0 + (9)(0.1) = 0.9$

方程(2.65)： $(x_1)_1 = 0 + (0.9)(0.1)/2 = 0.045$

方程(2.66)： $(\ddot{x}_1)_1 = 9 - 9(0.045) - 1.2(0.9) = 7.515$

第二近似值：

方程 (2.64)： $(\dot{x}_1)_2 = 0.45 + (7.515)(0.1)/2 = 0.82575$

方程 (2.65)： $(x_1)_2 = 0 + (0.82575)(0.1)/2 = 0.041288$

方程 (2.66)： $(\ddot{x}_1)_2 = 9 - 9(0.041288) - 1.2(0.82575) = 7.6375$

第三近似值：

方程 (2.64)： $(\dot{x}_1)_3 = 0.45 + (7.6375)(0.1)/2 = 0.83188$

方程 (2.65)： $(x_1)_3 = 0 + (0.83188)(0.1)/2 = 0.041594$

方程 (2.66)： $(\ddot{x}_1)_3 = 9 - 9(0.041594) - 1.2(0.83188) = 7.6274$

第四近似值：

方程 (2.64)： $(\dot{x}_1)_4 = 0.45 + (7.6274)(0.1)/2 = 0.83137$

方程 (2.65)： $(x_1)_4 = 0 + (0.83137)(0.1)/2 = 0.041569$

方程 (2.66)： $(\ddot{x}_1)_4 = 9 - 9(0.041569) - 1.2(0.83137) = 7.6282$

第五近似值：

方程 (2.64)： $(\dot{x}_1)_5 = 0.45 + (0.76282)(0.1)/2 = 0.83141$

方程 (2.65)： $(x_1)_5 = 0 + (0.83141)(0.1)/2 = 0.041570$

方程 (2.66)： $(\ddot{x}_1)_5 = 9 - 9(0.041570) - 1.2(0.83141) = 7.6282$

在这点上，我们看到第一步长的解在五次迭代中收敛于四位有效数。

第二步长的第一近似值确定如下：

方程 (2.69)： $(\dot{x}_2)_1 = 0 + 2(7.6282)(0.1) = 1.5256$

方程 (2.65)： $(x_2)_1 = 0.08314 + (1.5256)(0.1)/2 = 0.15942$

方程 (2.66)： $(\ddot{x}_2)_1 = 9 - 9(0.15942) - 1.2(1.5256) = 5.7345$

第二近似值：

方程 (2.64)： $(\dot{x}_2)_2 = 1.2128 + (5.7345)(0.1)/2 = 1.4995$

方程 (2.65)： $(x_2)_2 = 0.08314 + (1.4995)(0.1)/2 = 0.15812$

方程 (2.66)： $(\ddot{x}_2)_2 = 9 - 9(0.15812) - 1.2(1.4995) = 5.7775$

第三近似值：

方程 (2.64)： $(\dot{x}_2)_3 = 1.2128 + (5.7775)(0.1)/2 = 1.5017$

方程 (2.65)： $(x_2)_3 = 0.08314 + (1.5017)(0.1)/2 = 0.15823$

方程 (2.66)： $(\ddot{x}_2)_3 = 9 - 9(0.15823) - 1.2(1.5017) = 5.7739$

第四近似值：

方程 (2.64)： $(\dot{x}_2)_4 = 1.2128 + (5.7739)(0.1)/2 = 1.5015$

地信网论坛 BBS.3500L.COM

方程（2.65）：$(x_2)_4=0.08314+(1.5015)(0.1)/2=0.15822$

方程（2.66）：$(\ddot{x}_2)_4=9-9(0.15822)-1.2(1.5015)=5.7742$

在此步长中，其解在第四轮中收敛于四位有效数。

对于20个时间步长的结果归纳于表2.1a中，这里可以看出，x的近似值与精确值〔从方程（j）算出〕相比，近似到三位有效数。这样，图2.24中所绘的诸点与精确曲线上相应诸点区别不出来。

用平均加速度法解例题 1　　表2·1a

i	t_i（秒）	迭代次数	近似的 x（英寸）	精确的 x（英寸）
0	0	—	0	0
1	0.1	5	0.0416	0.0429
2	0.2	4	0.1582	0.1616
3	0.3	4	0.3319	0.3374
4	0.4	3	0.5419	0.5491
5	0.5	3	0.7667	0.7748
6	0.6	3	0.9860	0.9939
7	0.7	3	1.1821	1.1888
8	0.8	3	1.3413	1.3458
9	0.9	3	1.4545	1.4559
10	1.0	3	1.5173	1.5151
11	1.1	3	1.5302	1.5243
12	1.2	3	1.4975	1.4884
13	1.3	3	1.4271	1.4154
14	1.4	3	1.3289	1.3156
15	1.5	2	1.2143	1.2006
16	1.6	3	1.0946	1.0817
17	1.7	3	0.9803	0.9694
18	1.8	3	0.8803	0.8724
19	1.9	3	0.8014	0.7970
20	2.0	3	0.7477	0.7473

另一种近似表示方程（2.55）的解的方法，称为线性加速度法。从名称说明此技巧需要假设每一时间步长内加速度成线性变化。按这个假设，时间步长Δt_i内$\ddot{x}$的表达式（见图2.23）可以写出如下：

$$\ddot{x}(t')=\ddot{x}_{i-1}+\frac{(\ddot{x}_i-\ddot{x}_{i-1})t'}{\Delta t_i} \qquad (m)$$

式中t'从该时间步长开始量起。如果加速度成线性变化，那么相应的速度成抛物线变化，位移将随时间成三次方变化。这样：

$$\dot{x}(t')=\dot{x}_{i-1}+\ddot{x}_{i-1}t'+\frac{(\ddot{x}_i-\ddot{x}_{i-1})(t')^2}{2\Delta t_i} \qquad (n)$$

$$x(t')=x_{i-1}+\dot{x}_{i-1}t'+\ddot{x}_{i-1}(t')^2/2+\frac{(\ddot{x}_i-\ddot{x}_{i-1})(t')^3}{6\Delta t_i} \qquad (o)$$

在时间步长终了处，速度和位移为：

$$\dot{x}_i=\dot{x}_{i-1}+\frac{(\ddot{x}_{i-1}+\ddot{x}_i)\Delta t_i}{2} \qquad (2.71)$$

$$x_i=x_{i-1}+\dot{x}_{i-1}\Delta t_i+(2\ddot{x}_{i-1}+\ddot{x}_i)(\Delta t_i)^2/6 \qquad (2.72)$$

地信网论坛 BBS.35001.COM

方程（2.71）与平均加速度法的方程（2.58）相同，但是方程（2.72）与方程（2.60）中，它的相对应项稍有不同。当方程（2.62）代入方程（2.72）中的$\ddot{x}_i$，并将其结果减去x_i的泰勒级数展开式〔方程(2.61)〕时，我们发现在这种情况下，余数中的主要项为：

$$R^*_{i-1}=-\frac{(\Delta t_i)^4}{24}x^{(4)}_{i-1} \qquad (p)$$

将方程（p）与方程（2.63）比较，表明借线性加速度法所计算的位移应认为比借平均加速度法所计算的要较精确。然而，早已说明*，线性加速度法只是有限制的稳定，其意思是在某一不利条件下传播误差可能不定地扩大。反之，平均加速度法是无限制的稳定，虽然精确度差一点。

我们将类似前面平均加速度方法所述的方式应用线性加速度法，因为方程（2.71）与方程（2.58）相同，所以$\dot{x}_i$的第j次迭代的递推式与方程（2.64）相同。为了得到x_i和$\dot{x}_i$之间的直接关系式，我们求出方程（2.71）中的$\ddot{x}_i$，并将其结果代入方程（2.72）得出：

$$x_i=x_{i-1}+(2\dot{x}_{i-1}+\dot{x}_i)\Delta t_i/3+\ddot{x}_{i-1}(\Delta t_i)^2/6 \qquad (2.73)$$

这样，我们写出x_i的第j次迭代的递推式为：

$$(x_i)_j=B^*_{i-1}+(\dot{x}_i)_j\Delta t_i/3 \qquad (2.74)$$

式中：

$$B^*_{i-1}=x_{i-1}+2\dot{x}_{i-1}\Delta t_i/3+\ddot{x}_{i-1}(\Delta t_i)^2/6 \qquad (q)$$

早先给出的公式〔见方程（2.67）和（2.68）或（2.69）〕又可以用于开始每一步长中的迭代。

当例题1中的问题用线性加速度法求解时，其结果如表2.1b所示。在这种情况下，x的大多数近似值要比表2.1a中平均加速度法的值更接近精确值。对线性问题已考查了这些方法，现在我们将它们用于非线性的例子。

例题2 图2.3中的单摆（见第2.1节），具有下列非线性运动方程：

$$\ddot{\phi}+p^2\sin\phi=0 \qquad (重复2.4a)$$

式中$p^2=g/L$。如果我们令L在数值上等于g，那么$p^2=1$；我们将取初始条件为$\phi_0=\pi/2$和$\dot{\phi}_0=0$。在第2.2节中，该摆的周期的精确表达式已导出为方程（2.12）。应用初始条件$\phi_0=\phi_m=\pi/2$，我们从椭圆积分表得到$K=F(k,\pi/2)=1.8541$。因此，四分之一周期为$\tau/4=K/p=1.8541$秒。另一种，如果我们取$p=k=1.8541$，那么$\tau/4=1$秒；将应用这个关系式，因为它比较简单。

这样，按数字求解时方程为：

$$\ddot{\phi}=-p^2\sin\phi=-3.437687\sin\phi \qquad (r)$$

并且由初始条件给出：

$$\ddot{\phi}_0=-p^2\sin\pi/2=-3.437687 \qquad (s)$$

表2.2包括用平均加速度法和线性加速度法求20个时间步长（以$\Delta t=0.1$秒）的结果。在t_{10}处，ϕ角的值应等于零，线性加速度法得出ϕ_{10}的两个近似值中的较小值。然而，两种

* N.M.Newmark,"A Method of Computation for Structural Dynamics," Jour. Eng. Mech. Div., ASCE, Vol.85, No.EM3, Proc. Paper 2394, July 1959, pp.67-94.

地信网论坛 BBS.3500L.COM

方法均得出正确的最后值$\phi_{20}=-1.5708$弧度。ϕ的近似值对时间的曲线示于图2.25中。

用线性加速度法解例题 1　　表2·1b

i	t_i (秒)	迭代次数	近似的 x (英寸)	精确的 x (英寸)
0	0	—	0	0
1	0.1	5	0.0427	0.0429
2	0.2	4	0.1608	0.1616
3	0.3	4	0.3359	0.3374
4	0.4	3	0.5471	0.5491
5	0.5	3	0.7727	0.7748
6	0.6	3	0.9921	0.9939
7	0.7	3	1.1876	1.1888
8	0.8	3	1.3456	1.3458
9	0.9	3	1.4570	1.4559
10	1.0	3	1.5177	1.5151
11	1.1	3	1.5283	1.5243
12	1.2	3	1.4935	1.4884
13	1.3	3	1.4212	1.4154
14	1.4	3	1.3217	1.3157
15	1.5	2	1.2064	1.2006
16	1.6	3	1.0867	1.0817
17	1.7	3	0.9731	0.9694
18	1.8	3	0.8744	0.8723
19	1.9	3	0.7973	0.7970
20	2.0	3	0.7457	0.7473

例　题　2　的　结　果　　表2·2

i	t_i (秒)	迭代次数	近似的 ϕ (弧度)	
			平均加速度法	线性加速度法
0	0	—	1.5708	1.5708
1	0.1	2	1.5536	1.5536
2	0.2	2	1.5021	1.5021
3	0.3	2	1.4163	1.4163
4	0.4	3	1.2967	1.2966
5	0.5	3	1.1442	1.1440
6	0.6	3	0.9608	0.9603
7	0.7	3	0.7496	0.7487
8	0.8	3	0.5154	0.5140
9	0.9	3	0.2646	0.2627
10	1.0	4	0.0051	0.0025
11	1.1	2	−0.2546	−0.2577
12	1.2	3	−0.5059	−0.5093
13	1.3	3	−0.7409	−0.7444
14	1.4	3	−0.9530	−0.9564
15	1.5	3	−1.1376	−1.1407
16	1.6	3	−1.2913	−1.2939
17	1.7	3	−1.4123	−1.4142
18	1.8	2	−1.4994	−1.5007
19	1.9	2	−1.5522	−1.5529
20	2.0	2	−1.5708	−1.5708

地信网论坛 BBS.3500L.COM

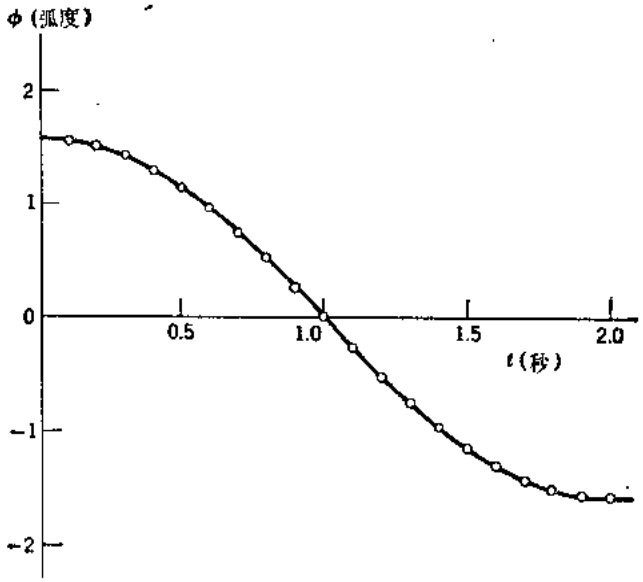


图 2.25

例题 3 作为第二个非线性例子，考虑具有硬化弹簧的系统的下列运动方程：

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+k(x+\alpha x^3)=Q(t) \qquad (t)$$

或

$$\ddot{x}+2n\dot{x}+p^2(x+\alpha x^3)=q(t) \qquad (u)$$

从习题2.2—1（见第2.2节）我们将取：

$$m=100\text{磅-秒}^2/\text{英寸},\quad k=400\text{磅}/\text{英寸},$$

$$p^2=4\text{秒}^{-2},\quad \alpha=2(\text{英寸})^{-2},c=Q(t)=0。$$

对于这些参数值，用数值求解时，方程成为：

$$\ddot{x}=-p^2(x+\alpha x^3)=-4(x+2x^3) \qquad (v)$$

将初始条件$x_0=0$和$\dot{x}_0=10$英寸/秒代入方程（v）得出：

$$\ddot{x}_0=-4(0+0)=0 \qquad (w)$$

应用两种方法，对于20个时间步长的结果（以$\Delta t=0.025$秒）给于表2.3中，x的近似值对时间的曲线示于图2.26内。最大位移近似为2.12英寸发生于时间$t_{12}=0.30$秒左右，这是对的。

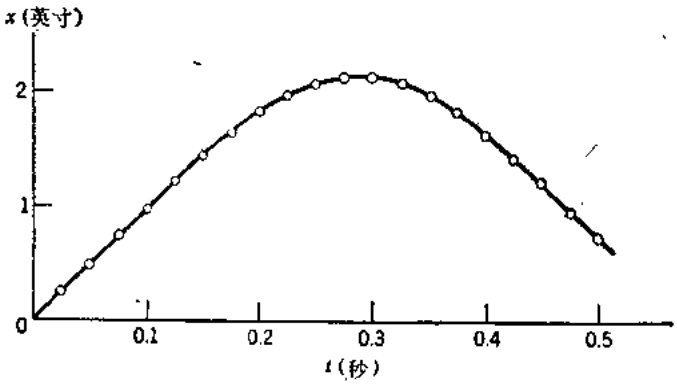


图 2.26

虽然本节中诸迭代例题可以采用台式计算器求解，但是其数值运算变得冗长，最好应用数字计算机。将分别借平均加速度法以名为**AVAC1A**、**AVAC2A**和**AVAC3A**的专用计算程序用于例题1、2和3。这些程序是按**BASIC**编制的，列于本书附录内。它们可以仅借改变每一程序中很少几行就容易变换成应用线性加速度法名为**LINAC1A**、**LINAC2A**和**LINAC3A**的程序。另外，本节末尾处的大多数习题可以用这些相同程序作些变更来求解。

地信网论坛 BBS.3500L.COM

例　题　3　的　结　果　　表 2·3

i	t_i (秒)	迭代次数	近似的 x (英寸) 平均加速度法	线性加速度法
0	0	—	0	0
1	0.025	3	0.2498	0.2499
2	0.050	3	0.4988	0.4990
3	0.075	3	0.7457	0.7461
4	0.100	3	0.9884	0.9890
5	0.125	3	1.2234	1.2243
6	0.150	3	1.4457	1.4472
7	0.175	3	1.6490	1.6511
8	0.200	2	1.8256	1.8282
9	0.225	2	1.9673	1.9702
10	0.250	3	2.0665	2.0694
11	0.275	3	2.1171	2.1196
12	0.300	3	2.1158	2.1175
13	0.325	3	2.0628	2.0632
14	0.350	3	1.9614	1.9603
15	0.375	3	1.8178	1.8151
16	0.400	2	1.6397	1.6355
17	0.425	3	1.4353	1.4298
18	0.450	3	1.2122	1.2058
19	0.475	3	0.9768	0.9696
20	0.500	3	0.7339	0.7263

如果运动方程（2.55）是线性的，那么可能避免数值解的隐式公式的迭代，将方程(2.58)和（2.60）代入方程（h），求解$\ddot{x}_i$，可以得到一种用于平均加速度法的直接的线性外推公式：

$$\ddot{x}_i = Q_i^* \Big/ m^* \tag{2.75a}$$

式中

$$m^* = m + c\Delta t_i/2 + k(\Delta t_i)^2/4 \tag{2.75b}$$

和

$$Q_i^* = Q_i - c\left(\dot{x}_{i-1} + \ddot{x}_{i-1}\Delta t_i/2\right) - k\left[x_{i-1} + \dot{x}_{i-1}\Delta t_i + \ddot{x}_{i-1}(\Delta t_i)^2/4\right] \tag{2.75c}$$

荷载Q_i在时间步长Δt_i内，通常取为一常数平均值。方程（2.75a）是以该步长开始处的x_{i-1}、$\dot{x}_{i-1}$和$\ddot{x}_{i-1}$表达加速度$\ddot{x}_i$的显式公式。这个式子连同方程（2.58）和（2.59）作出每一步长中$\ddot{x}_i$、$\dot{x}_i$和x_i的计算。这样，我们得到不需要迭代的自动的直接外推技巧。

线性加速度法和类似的变式，也可以应用直接外推技巧。另外，非线性系统的运动方程，可借下列增量形式表达在一个很小的时间步长内进行线性化：

$$m_{i-1}\Delta\ddot{x}_i + c_{i-1}\Delta\dot{x}_i + k_{i-1}\Delta x_i = \Delta Q_i \tag{2.76}$$

在此方程中，Δx_i、$\Delta\dot{x}_i$、$\Delta\ddot{x}_i$和ΔQ_i为第i个步长内位移、速度、加速度和荷载的增量

地信网论坛 BBS.35001.COM

值；m_{i-1}、c_{i-1}和k_{i-1}为该步长开始处的质量、阻尼和刚度常数。对于增量加速度$\Delta\ddot{x}_i$、增量$\Delta\dot{x}_i$或增量Δx_i，可以导得类似于方程（2.75a）的显式公式*。

也可能将精确的表达式（如第1.15节中），用于求算线性化系统的增量反应。逐步图解法已经被用于具有分段常数施力函数的无阻尼系统**。然而，如果系统是高度非线性的，那么通常需要某种迭代过程或改正过程，以便从这些技巧中的任一技巧获得好的结果。这样，当需要迭代或改正时，最好采用比较简单的预估算子—校正算子方法。

在有关数值分析的文献中，有比本节所述更为精确的方法可以利用§。最常用的方法不是建于借泰勒级数〃展开目标函数$x=F(t)$和其导数的基础之上，就是建于多项式内插函数积分公式的基础之上*。它们均适用于一阶微分方程并反映出按方程（2.55）形式的任何二阶表达式都可以变换为两个一阶方程的原理。这后一形式，借引进下列辅助应变数来得到：

$$\dot{x}=y \tag{2.77a}$$

以y代替方程（2.55）中的$\dot{x}$，得出：

$$\dot{y}=f(t,x,y) \tag{2.77b}$$

方程（2.77a）和（2.77b）代表两个联立一阶表达式，它们可以用x和y的外插平行式按一组进行数值积分。虽然这种技巧是简单的，但是它没有利用方程（2.77a）具有比方程（2.77b）较为特殊的形式这一事实。比较高效率的方法是，先求算y，然后“连续”求算x，而不是“平行”求算。如果这样做，那么该方法变得与本节中用$\dot{x}$和x的两个连续外推公式求二阶方程数值解的方法相同。

习 题 组 2.6

2.6—1 重复例题1，但是将阶梯函数改变为下列斜坡函数：$Q(t)=9$吨。问题的所有其它特性均与该例题相同。

答：$x_{10}\approx 0.760$英寸。

2.6—2 对例题1中的线性系统，假设$Q(t)=0$，但是初始条件为$x_0=1$英寸和$\dot{x}_0=-1$英寸/秒。问题的所有其它特性，保持与该例题相同。

答：$x_{10}\approx -0.553$英寸。

2.6—3 重复例题2，但是将初始条件改变为$\phi_0=0$和$\dot{\phi}_0=2.618$弧度/秒。问题的所有其它特性保持与该例题相同。

---

*E.L.Wilson, I.Farhoomand和K.J.Bathe,“Nonlinear Dynamic Analysis of Complex Structures,” Int. J.Earthq.Engng. Struct.Dyn.,Vol.1,No.3, Jan.-March,1973,pp.241-252.

**L.S.Jacobsen, “Ona General Method of Solving Second Order Ordinary Differential Equations by Phase-Plane Displacements,”Jour.Appl.Mech.,Vol.19, No.4, Dec.1952, pp.543-553.

§见B.Carnahan, H.A.Luther和J.O.Wilkes, Applied Numerical Methods, Wiley, New York,1969.

〃C.Runge, “Über die numerische Ausflösung von Differentialgleichungen,” Math.Ann., Vol.46, 1895, pp. 167-178; 以及 W.Kutta,“Beitrag zur näherungsweisen Integration totaler Differentialgleichungen,” Z.Math. Phys., Vol.46, 1901, pp.435-453.

*F.Bashforth和 J.C.Adams, An Attempt to Test the Theories of Capillary Attraction, Cambridge Univ. Press, 1883; 以及F.R.Moulton, Differential Equations, Macmillan, New York,1930.

地信网论坛 BBS.3500L.COM

答：$\phi_{10}\approx\pi/2$弧度。

2.6—4 试对习题2.1—1中的系统（见第2.1节），用平均加速度法，确定对初始条件$x_0=l/4$和$\dot{x}_0=y_0=\dot{y}_0=0$的自由振动反应。应用精确的运动方程和该系统的下列参数值：$k=10$磅/英寸；$m=8$磅-秒^2/英寸，$l=4$英寸。取十个持续时间$\Delta t=0.1$秒的相等时间步长，并绘出其结果。

答：$\dot{x}_{max}\approx1.6$英寸/秒。

2.6—5 试对习题2.1—6中的系统（见第2.1节）用线性加速度法确定对初始条件$\phi_0=0$和$\dot{\phi}_0=10.64$弧度/秒的自由振动反应。应用精确的运动方程和该系统的下列参数值：$W=5$磅、$l=10$英寸、$k_r=100$磅-英寸/弧度。取20个持续时间$\Delta t=0.025$秒的相等时间步长，并绘出其结果。

答：$\phi_{max}\approx\pi/2$弧度。

2.6—6 重复例题3，但是从习题2.2—1中，将弹簧特性改变为习题2.2—2中的特性。试用平均加速度法，确定最大位移和它发生的时间。

答：$x_m\approx4.75$英寸；$t_m\approx0.725$秒。

2.6—7 重复例题3，但是从习题2.2—1将弹簧特性改变为习题2.2—4中的特性。试用线性加速度法，确定最大位移和它发生的时间。

答：$x_m\approx3.18$英寸；$t_m\approx0.50$秒。

2.6—8 试用平均加速度法求解习题2.5—2（见第2.5节）*，该系统采用下列参数值：$m=1$磅-秒^2/英寸；$k_1=\pi^2$磅/英寸；$k_2=4k_1$；$x_1=1$英寸。

答：$x_m\approx1.5$英寸；$t_m\approx0.75$秒。

2.6—9 试用线性加速度法求解习题2.5—4（见第2.5节）*，该系统采用下列参数值：$m=1$磅-秒^2/英寸；$k=\pi^2$磅/英寸；$x_1=1$英寸。

答：$x_m\approx1.5$英寸；$t_m\approx1.22$秒。

2.6—10 试用线性加速度法求解习题2.5—11（见第2.5节）*，该系统采用下列参数值：$m=1$磅-秒^2/英寸；$k_1=\pi^2$磅/英寸；$x_1=1$英寸。

答：$x_m\approx3.24$英寸；$t_m\approx1.62$秒。

* 习题2.6—8、2.6—9和2.6—10都是分段线性的，在分析的各个不同阶段中，k值以一常数急剧地变到另一常数。

地信网论坛 BBS.35001.COM

第三章　具有两个自由度的系统

3.1　两个自由度系统的例子

在第 1 章和第 2 章中，我们讨论了具有一个自由度的系统。在本章和下一章中，我们将讨论具有多个自由度的系统，在这种系统中，最简单的是具有两个自由度的系统。这种振动系统的形态借两个坐标或位移来确定，需要用两个微分方程去描述它的运动。

图3.1 a 表示两个与地面接触，且彼此用常数分别为 k_1和 k_2 的弹簧相连接的质量 m_1 和 m_2。假设这两个质量只可以顺 x 方向运动，还假设系统内没有摩擦力或其它类型的阻尼。我们取这两个质量距它们静力平衡位置(相应于弹簧无变形时)的位移x_1和x_2，作为确定此系统运动的坐标。图3.1 a 中还表示了作用于质量m_1和m_2的施力函数$Q_1=F_1(t)$和$Q_2=F_2(t)$。运动过程中，在一个移动后位置处弹簧作用于诸质量上的力如图 3.1 b 所示。应用牛顿第二定律，我们得到m_1和m_2的运动方程为：

$$m_1\ddot{x}_1=-k_1x_1+k_2(x_2-x_1)+Q_1 \qquad (a)$$

$$m_2\ddot{x}_2=-k_2(x_2-x_1)+Q_2 \qquad (b)$$

如果$x_1>x_2$，这些式子不变，因为在这种情况下，方程（a）中作用于每个质量上受压的弹簧力$k_2(x_1-x_2)$有一负号，在方程（b）中有一正号。从新排列这些方程中诸项，得出：

$$m_1\ddot{x}_1+(k_1+k_2)x_1-k_2x_2=Q_1 \qquad (3.1a)$$

$$m_2\ddot{x}_2-k_2x_1+k_2x_2=Q_2 \qquad (3.1b)$$

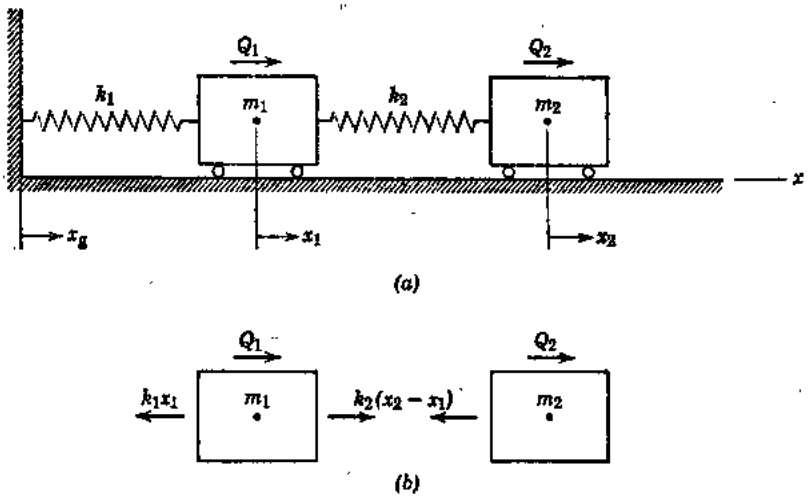


图　3.1

这样，我们得到两个具有常系数的联立线性二阶微分方程。

为了研究这个系统的自由振动，我们令Q_1和Q_2均等于零，得到下列齐次方程：

地信网论坛 BBS.3S001.COM

$$m_1\ddot{x}_1+(k_1+k_2)x_1-k_2x_2=0 \qquad (c)$$

$$m_2\ddot{x}_2-k_2x_1+k_2x_2=0 \qquad (d)$$

按类似于具有一个自由度的系统的方式，我们假设下列形式的解：

$$x_1=A\sin(pt+\phi) \qquad (e)$$

$$x_2=B\sin(pt+\phi) \qquad (f)$$

这些式子，意味着在固有振型中，这两个质量均服从具有角频率 p 和相角 ϕ 的相同谐和函数。符号 A 和 B 代表振动运动的最大值或振幅。将方程（e）和（f）代入方程（c）和（d），产生下列代数方程，一定要满足：

$$(k_1+k_2-p^2m_1)A-k_2B=0 \qquad (g)$$

$$-k_2A+(k_2-p^2m_2)B=0 \qquad (h)$$

这些方程的一种可能的解为 $A=B=0$，这相当于在平衡的位置处，不得出有关振动的数据。仅当 A 和 B 的系数的行列式等于零时，这些方程才可以有非零解。这样：

$$\begin{vmatrix}(k_1+k_2-p^2m_1) & -k_2\\ -k_2 & (k_2-p^2m_2)\end{vmatrix}=0 \qquad (i)$$

此行列式的展开得出：

$$(k_1+k_2-p^2m_1)(k_2-p^2m_2)-k_2^2=0 \qquad (j)$$

或

$$m_1m_2p^4-[m_1k_2+m_2(k_1+k_2)]p^2+k_1k_2=0 \qquad (k)$$

此式为 p^2 的二次式，称为该系统的频率方程（或特征方程）。它有两个根（称为特征值），可借下面二次公式来确定：

$$p_{1,2}^2=\frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad (l)$$

式中

$$a=m_1m_2;\quad b=-[m_1k_2+m_2(k_1+k_2)];\quad c=k_1k_2; \qquad (m)$$

因为方程（l）中，根号下的式子总是正的，所以 p_1^2 和 p_2^2 二个根均为实根。还可以看出平方根项小于 $-b$，并且两个根都是正的。另外，方程（l）是按 $p_1<p_2$ 的方式写出的。这样，特征方程得出两个固有振动频率，它们仅取决于系统的物理常数。

将特征值 p_1^2 和 p_2^2 代入齐次代数方程（g）和（h），我们发现不能得到 A 和 B 的真实值。然而这些方程可以用于提供分别相应于 p_1^2 和 p_2^2 的比值 $r_1=A_1/B_1$ 和 $r_2=A_2/B_2$。这样：

$$r_1=\frac{A_1}{B_1}=\frac{k_2}{k_1+k_2-p_1^2m_1}=\frac{k_2-p_1^2m_2}{k_2} \qquad (n)$$

$$r_2=\frac{A_2}{B_2}=\frac{k_2}{k_1+k_2-p_2^2m_1}=\frac{k_2-p_2^2m_2}{k_2} \qquad (o)$$

这些振幅比代表该系统的两个固有振型（亦称主型）的形状。由于方程（j），具有对偶定义，它们的值，仅取决于物理常数 m_1、m_2、k_1 和 k_2。

将较小的角频率 p_1 和相应的振幅比 r_1 用于方程（e）和（f）中，我们得到：

$$x_1'=r_1B_1\sin(p_1t+\phi_1) \qquad (p)$$

$$x_2'=B_1\sin(p_1t+\phi_1) \qquad (q)$$

这些式子完整地描述了振动的第一振型*，也可以称为基本振型**。它由两个均具有角频率p_1和相角ϕ_1的质量的简谐运动组成。在这种运动过程中，任何时间处位移比x_1'/x_2'与振幅比r_1相同。在振动的每一周中，两个质量均通过它们的平衡位置两次，而且它们同时到达它们的端点位置。我们的分析揭示出在相角上没有限制，但是由于方程（e）和（f）的定义，对于两个质量必定相同。

将较大的角频率p_2和相应的振幅比r_2代入方程（e）和（f），得到：

$$x_1'' = r_2 B_2 \sin(p_2 t + \phi_2) \qquad (r)$$

$$x_2'' = B_2 \sin(p_2 t + \phi_2) \qquad (s)$$

它们描述振动的第二振型。两个质量的这种简谐运动，按角频率p_2和共同的相角ϕ_2发生。在这种情况下，位移比总是为$x_1''/x_2'' = r_2$。

方程（c）和（d）的通解，由方程（p）、（q）、（r）和（s）中的诸主型解之和组成。这样，我们得到：

$$x_1 = x_1' + x_1'' = r_1 B_1 \sin(p_1 t + \phi_1) + r_2 B_2 \sin(p_2 t + \phi_2) \qquad (t)$$

$$x_2 = x_2' + x_2'' = B_1 \sin(p_1 t + \phi_1) + B_2 \sin(p_2 t + \phi_2) \qquad (u)$$

这些式子包括四个任意常数（B_1、B_2、ϕ_1和ϕ_2），它们可借满足时间$t = 0$处，两个质量的位移和速度的四个初始条件来得到。方程（t）和（u）表示不是周期性的较复杂的运动，除非固有频率p_1和p_2碰巧是通约的，仅当一开始是按其主型之一进行时，该系统才会作纯谐和运动。

当讨论任何具有两个自由度的系统时，我们总是可能按类似于上面对图 3.1a 中系统所示方式确定其频率和振型形状。因为所有多自由度系统的运动方程具有相似的数学形式，所以这些方程的进一步求解暂时推迟一下。它们将在本章的后面和第 4 章中用矩阵法系统地讨论。

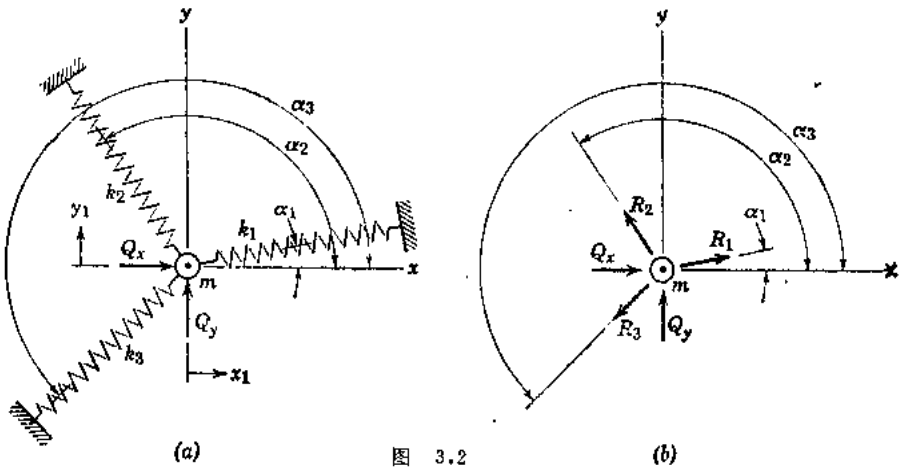


图 3.2

作为具有两个自由度系统的第二个例子，考虑图3.2a 中弹簧一悬挂着的质量。图中所示的三个弹簧全都位于同一平面内，它们具有常数k_1、k_2和k_3。假设该质量限于仅在诸弹簧平面内移动（x-y 平面）。这里，它的运动由相对于平衡位置平动的x分量和y分量（x_1

* 或译为第一种振动方式 (first mode of vibration)。 ——译注

** 或译为基本振动方式 (fundamental mode)。 ——译注

地信网论坛 BBS.3500L.COM

和y_1）来确定。图3.2a中也示出了顺x和y方向作用的施力函数Q_x和Q_y。如果我们只考虑微小的位移，那么弹簧作用于质量上的恢复力R_1、R_2和R_3（见图3.2b），可以考虑与处于平衡位置处的诸弹簧具有相同的倾斜角。用这种假定，该质量的运动方程成为：

$$m\ddot{x}_1=\sum_{i=1}^{3}R_i\cos\alpha_i+Q_x \qquad (v)$$

和

$$m\ddot{y}_1=\sum_{i=1}^{3}R_i\sin\alpha_i+Q_y \qquad (w)$$

其中

$$R_i=-k_i(x_1\cos\alpha_i+y_1\sin\alpha_i) \qquad (x)$$

将方程（x）代入方程（v）和（w）并重新排列诸项，我们得到：

$$m\ddot{x}_1+\sum_{i=1}^{3}k_i(x_1\cos^2\alpha_i+y_1\sin\alpha_i\cos\alpha_i)=Q_x \qquad (3.2a)$$

$$m\ddot{y}_1+\sum_{i=1}^{3}k_i(x_1\sin\alpha_i\cos\alpha_i+y_1\sin^2\alpha_i)=Q_y \qquad (3.2b)$$

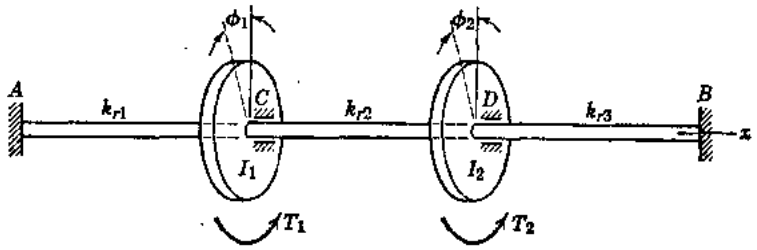


图 3.3

图3.3表示第三个例子，它由安装在一轴上的两个盘组成，该轴固定于A点和B点处，并于C点和D点约束着横向平动。该轴的三段具有如图中所示的旋转弹簧常数k_{r1}、k_{r2}和k_{r3}。图中还示出了诸盘的旋转自由度ϕ_1和ϕ_2、它们的质量惯性矩I_1和I_2以及所作用的扭矩T_1和T_2。在这种情况下，旋转运动的方程为：

$$I_1\ddot{\phi}_1=-k_{r1}\phi_1+k_{r2}(\phi_2-\phi_1)+T_1 \qquad (y)$$

$$I_2\ddot{\phi}_2=-k_{r2}(\phi_2-\phi_1)-k_{r3}\phi_2+T_2 \qquad (z)$$

重新排列，成为：

$$I_1\ddot{\phi}_1+(k_{r1}+k_{r2})\phi_1-k_{r2}\phi_2=T_1 \qquad (3.3a)$$

$$I_2\ddot{\phi}_2-k_{r2}\phi_1+(k_{r2}+k_{r3})\phi_2=T_2 \qquad (3.3b)$$

作为最后一个例子，我们考虑图3.4中用弹簧连接的一对单摆。它们具有相同的长度l和相同的质量m，并且A和B处均为铰，允许它们仅在图平面内自由摆动。角θ_1和θ_2确定运动过程中系统的形态。施力函数P_1和P_2顺水平方向作用。假设产生微小的系统位移，我们写出运动方程为：

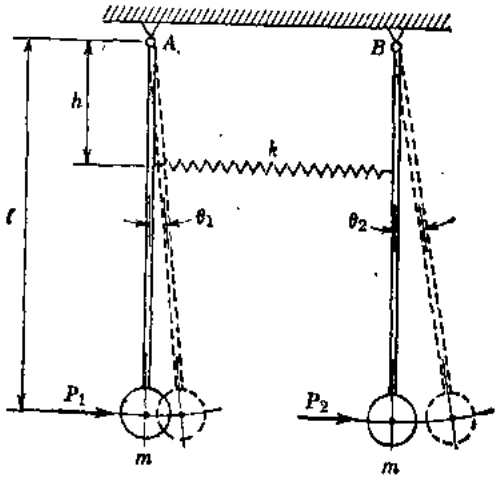


图 3.4

地信网论坛 BBS.3500L.COM

$$ml^2\ddot{\theta}_1 = -mgl\theta_1 + kh^2(\theta_2 - \theta_1) + P_1 l \qquad (a')$$

$$ml^2\ddot{\theta}_2 = -mgl\theta_2 - kh^2(\theta_2 - \theta_1) + P_2 l \qquad (b')$$

重新排列这些式子中的诸项，我们得到：

$$ml^2\ddot{\theta}_1 + (kh^2 + mgl)\theta_1 - kh^2\theta_2 = P_1 l \qquad (3.4a)$$

$$ml^2\ddot{\theta}_2 - kh^2\theta_1 + (kh^2 + mgl)\theta_2 = P_2 l \qquad (3.4b)$$

显然，每一个例子的运动方程具有相似的形式。在下节中将要利用这种相似性。

3.2 作用力方程：刚度系数

方程（3.1a）和（3.1b）可以写成下列矩阵形式*：

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \qquad (3.5)$$

这同一个关系式也可以更简单地叙述为：

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{S}\mathbf{X} = \mathbf{Q} \qquad (3.6)$$

式中 $\mathbf{X}$、$\ddot{\mathbf{X}}$是不知道的，它们与$\mathbf{Q}$均为列矩阵：

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \ddot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \qquad (a)$$

其系数矩阵为：

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \qquad (b)$$

方程（3.6）称为用矩阵符号表示的运动作用力方程系。选用这个术语，是因为它可以代表许多种运动方程，其中的单位可以是力也可以是力矩（更普遍地称为作用力）。刚度矩阵$\mathbf{S}$由诸刚度影响系数组成，质量矩阵$\mathbf{M}$包括对角线位置处m_1和m_2。虽然对于大多数问题质量矩阵是按对角线形成，但是对于有些振动系统它却不是对角线形式。这种情况在第 3.4 节中讨论。

现在我们将集中到刚度矩阵$\mathbf{S}$的特性的讨论，并用一种有组织的方式推导其内容。在这种阵列中，任何一项S_{ij}为从单位j类位移得出相应于i类位移的作用力。我们借对每一位移坐标给以单位位移计算所需要拥有的作用力，来导出所有这些项。图3.5a和3.5b中说明前节中第一个例题的这种过程。在图3.5a中，给以单位位移$x_1 = 1$，而$x_2 = 0$。将保持这种情况所需要拥有的静止作用力标以S_{11}和S_{21}（作用力向量上划有斜线是提醒大家，它们是作为保持位置的作用力）。符号S_{11}代表对于第 1 类单位位移所需第 1 类保持位置的作用力，S_{21}代表对于第 1 类单位位移所需要的第 2 类作用力。它们的值为$S_{11} = k_1 + k_2$和$S_{21} = -k_2$，它们构成刚度矩阵的第一列。$\mathbf{S}$的第二列诸项从图3.5b来得到，该图表示$x_2 = 1$的单位位移（而$x_1 = 0$）。在这种情况下，保持位置的力为$S_{12} = -k_2$和$S_{22} = k_2$，它们为第 2 类

* 关于矩阵运算的介绍见J.M.Gere和W.Weaver,Jr著Matrix Algebra for Engineers, Van Nostrand, Princeton,N.J., 1965.

地信网论坛 BBS.3500L.COM

单位位移所需要的第 1 类和第 2 类作用力。对于具有微小位移的线性弹性系统，刚度矩阵总是对称的*，在这种情况下，我们看出$S_{12}=S_{21}=-k_2$。

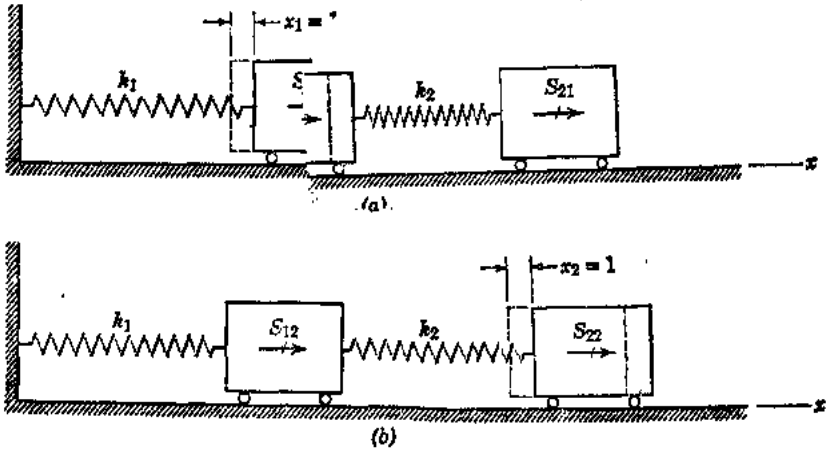


图 3.5

当前节中第二个例题的运动方程〔见图3.2和方程（3.2 a， b）〕写成矩阵形式时，我们得到：

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \end{bmatrix}+\sum_{i=1}^{3} k_i \begin{bmatrix} \cos^2\alpha_i & \sin\alpha_i\cos\alpha_i \\ \sin\alpha_i\cos\alpha_i & \sin^2\alpha_i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

方程（3.7）中刚度矩阵的第一列，可以直接从条件 $x_1=1$ （而 $y_1=0$）来得到，第 2 列从条件$y_1=1$ （或$x_1=0$）来得到。

类似地，第三个例题的运动方程按矩阵格式成为〔见图3.3和方程（3.3 a， b）〕：

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_{r1}+k_{r2} & -k_{r2} \\ -k_{r2} & k_{r2}+k_{r3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

在这种情况下，位移是转动，其相应作用力是扭矩或力矩。包括I_1和I_2的系数矩阵仍称为“质量矩阵”，自然，这是一个不妥当的名字。如同前面一样，刚度矩阵中，诸项可以从条件$\phi_1=1$ （对于第一列）和$\phi_2=1$ （对于第二列）导得。

最后，在末尾一个例题中，运动方程的矩阵形式〔见图3.4和方程（3.4 a， b）〕可以写成：

$$\begin{bmatrix} ml^2 & 0 \\ 0 & ml^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} kh^2+mgl & -kh^2 \\ -kh^2 & kh^2+mgl \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P_1 l \\ P_2 l \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

然而，在这种情况下，我们得到刚度恢复作用力与重力恢复作用力的混合情况。如果这两种恢复作用力的影响系数分成分开的阵列，我们得到：

$$\mathbf{S}^*=\mathbf{S}+\mathbf{G} \tag{3.10}$$

其中

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix} kh^2 & -kh^2 \\ -kh^2 & kh^2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{G}=\begin{bmatrix} mgl & 0 \\ 0 & mgl \end{bmatrix} \tag{c}$$

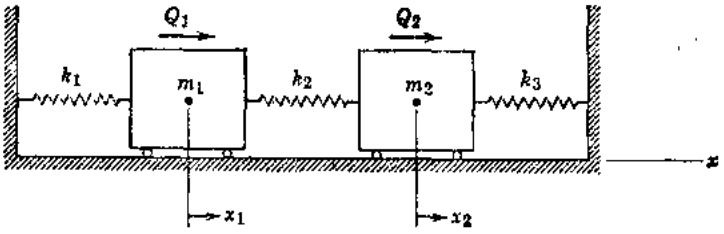
*关于这种说明的证明见J.M.Gere和W.Weaver,Jr著Analysis of Framed Structures,Van Nostrand, Princeton, N.J., 1965, pp.34—36。

地信网论坛 BBS.35001.COM

这前一种阵列包括通常的刚度影响系数，而后一种阵列包括重力影响系数，它定义为，在重力出现时单位位移所需要的作用力。在没有重力时，重力矩阵G中诸项均为零。

习 题 组 3.2

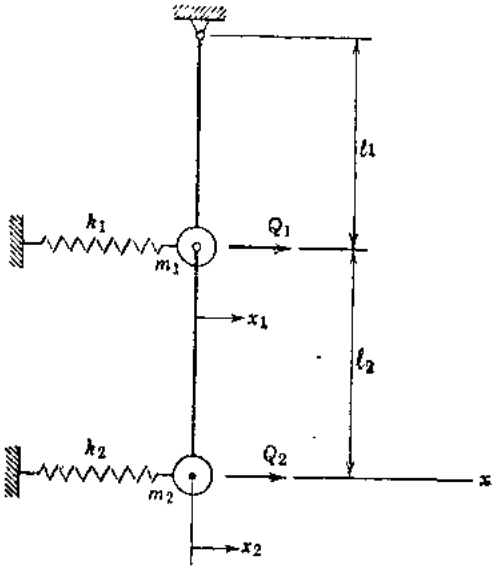
3.2—1 试对图中所示两个质量的系统，确定其刚度矩阵 S，并按矩阵形式写出运动的作用力方程。



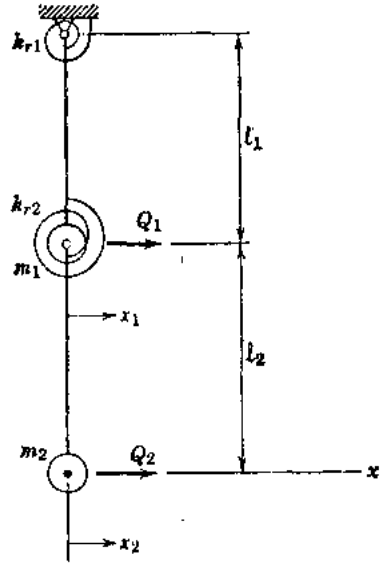
习题 3.2—1

3.2—2 令图3.2中弹簧常数$k_1=k_2=k_3=k$，并假设诸角为下列值：$\alpha_1=0°$,$\alpha_2=120°$和$\alpha_3=210°$。试确定以k表达悬挂质量的刚度矩阵。

3.2—3 图中表示一个带有附于质量m_1和m_2上的约束弹簧的双摆。采用质量的微小水平平动x_1和x_2作为位移坐标。试对此系统导出刚度矩阵 S 和重力矩阵 G，按矩阵形式写出运动的作用力方程。



习题 3.2—3

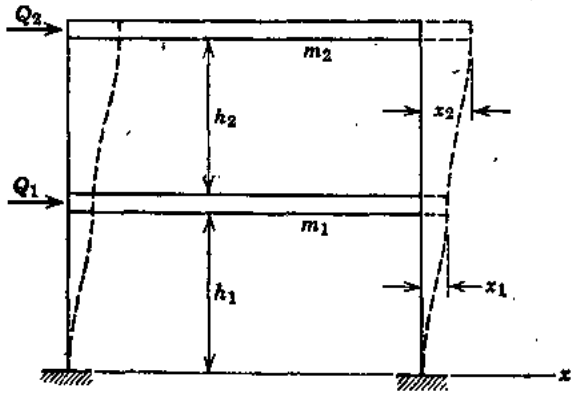


习题 3.2—4

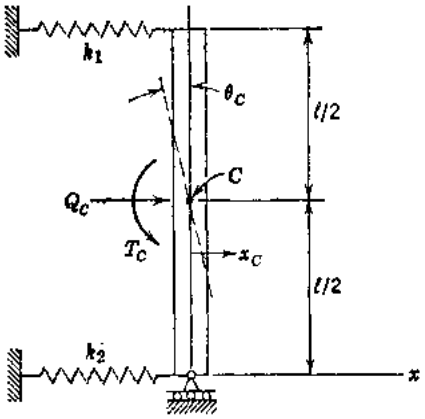
3.2—4 图中的双摆具有两个穿过铰的旋转弹簧。采用质量的微小水平平动x_1和x_2作为位移坐标，试确定矩阵 S 和 G，并按矩阵形式写出运动的作用力方程。

3.2—5 试对图中两层楼建筑框架确定其刚度矩阵 S，并按矩阵形式写出运动的作用力方程。为此目的，假设梁是刚性的，并采用微小的水平平动x_1和x_2作为位移坐标。框架中诸柱均为棱柱形的，下层的弯曲刚度为EI_1，上层为EI_2。

地信网论坛 BBS.35001.COM



习题 3.2—5



习题 3.2—6

3.2—6 一根刚性杆竖直支于一个辊轴上，顶面和底面处被水平弹簧约束抵抗侧向运动（见图）。令符号 l、A和ρ代表杆的长度、横截面积和质量密度，试导出此系统的刚度矩阵、重力矩阵和质量矩阵。采用其质量中心（C点）的微小位移x_c和θ_c作为位移坐标，试按矩阵形式写出包括作用于C点处水平力Q_c和扭矩T_c的运动的作用力方程。

3.3 位移方程：柔度系数

对于静定系统，有时采用运动的位移方程代替作用力方程更为方便。在这种方法中，我们写出以其柔度表达的系统的位移坐标（平动或转动）表达式。为此，我们引进下列符号：

$$\delta=\frac{1}{k} \tag{a}$$

它称为一个具有刚度常数 k（前面称为弹簧常数）的弹簧的柔度常数。用这个符号，我们确定图3.1 a 中两个弹簧的柔度常数为$\delta_1=1/k_1$和$\delta_2=1/k_2$。

假定作用于图3.1 a 诸质量上的力Q_1和Q_2是静止地作用上去的（以致不出现惯性力）。在这种条件下，以柔度常数δ_1和δ_2所表达的质量的位移则为：

$$(x_1)_{st}=\delta_1(Q_1+Q_2) \tag{b}$$

$$(x_2)_{st}=\delta_1(Q_1+Q_2)+\delta_2 Q_2 \tag{c}$$

这些式子可以按矩阵形式写出如下：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{st}=\begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_1 \\ \delta_1 & \delta_1+\delta_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \tag{d}$$

这种位移——作用力关系式也可以比较简单地叙述为：

$$\mathbf{X}_{st}=\mathbf{FQ} \tag{e}$$

式中符号$\mathbf{F}$ 表示柔度矩阵：

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_1 \\ \delta_1 & \delta_1+\delta_2 \end{bmatrix} \tag{f}$$

这个阵列包括诸柔度影响系数，这些系数定义为由于相应诸位移的作用力的单位值所产生的位移。

柔度矩阵中的诸项可以按得出刚度的方式来导出。柔度矩阵中，任一元素 F_{ij} 为由于 j 类单位作用力所产生 i 类的位移。我们借作用于相应每一位移坐标的单位作用力（一次一

地信网论坛 BBS.3500L.COM

个）计算所产生的位移，来确定所有这种元素。图 3.6 a 和3.6 b 说明图 3.1 a 中系统的这种过程。在图3.6 a 中，单位力$Q_1=1$ 静止地作用于质量m_1 上，而没有力作用于 m_2 上。图中所得的静力位移，标明 F_{11}和F_{21}。符号 F_{11} 代表由于第 1 类单位作用力所产生的第 1 类位移，F_{21} 为由于第 1 类作用力所引起的第 2 类位移。应用符号（a），我们确定 $F_{11}=F_{21}$

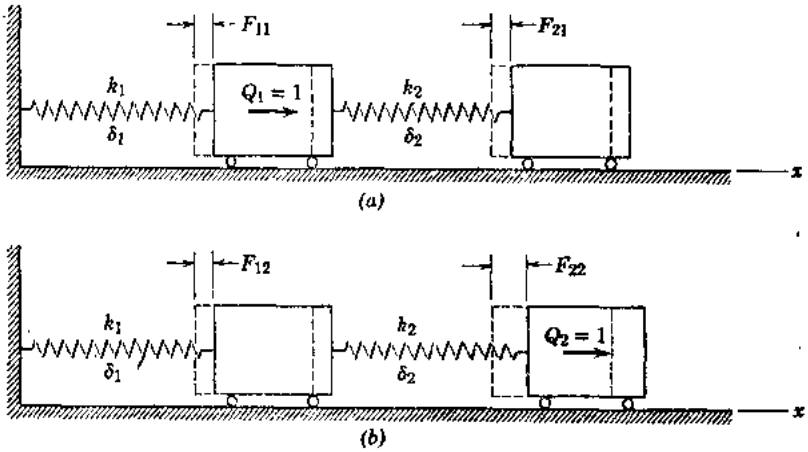


图 3.6

$=\delta_1=1/k_1$，这些项构成柔度矩阵的第一列。**F**中第二列的诸项从图3.6 b 得到，该图表示一个单位力 $Q_2=1$ 静止地作用于质量 m_2 而无力作用于 m_1。在这种情况下，柔度 $F_{12}=\delta_1=1/k_1$ 和 $F_{22}=\delta_1+\delta_2=(k_1+k_2)/k_1k_2$，它们为由于第 2 类单位作用力所引起的第 1、2 类位移。如刚度矩阵那样，线性弹性系统的柔度矩阵总是对称的*（是为对称矩阵之逆的固有特性），在这种情况下$F_{12}=F_{21}=\delta_{12}$。

现在令力Q_1和Q_2为动力作用的力，在这种情况下，惯性力$-m_1\ddot{x}_1$ 和 $-m_2\ddot{x}_2$也必须考虑。我们重新写方程（d）为：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_1 \\ \delta_1 & \delta_1+\delta_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_1 & -m_1\ddot{x}_1 \\ Q_2 & -m_2\ddot{x}_2 \end{bmatrix} \tag{g}$$

如果将质量与加速度按分开阵列来置放，那么，方程（g）采取下面展开形式：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_1 \\ \delta_1 & \delta_1+\delta_2 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}\right) \tag{3.11}$$

它也可以简洁地表示为：

$$\mathbf{X}=\mathbf{F}(\mathbf{Q}-\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}) \tag{3.12}$$

这个式子阐述：动力位移等于问题中柔度矩阵与作用力之乘积。所施加的诸作用力和诸惯性作用力均包括于右边括号内。

为了将此方法与前节中的方法作比较，我们对方程（3.6）求解**X**如下：

$$\mathbf{X}=\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{Q}-\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}) \tag{h}$$

方程（h）中意味着刚度矩阵 **S** 是非奇异的，并意味着其逆 $\mathbf{S}^{-1}$ 存在。比较方程（3.12）和（h），我们看到：

---

* 柔度矩阵的对称性从J.C.Maxwell于1864年所提出的Maxwell互等定理得到。

地信网论坛 BBS.3500L.COM

$$\mathbf{F}=\mathbf{S}^{-1} \tag{3.13}$$

它为相应于同一系统同一坐标的 F 和S 之关系式。例如，如果我们对方程（f）中矩阵 F 求逆，并且应用关系式（a），我们求出：

$$\mathbf{F}^{-1}=\frac{1}{\delta_1\delta_2}\begin{bmatrix}\delta_1+\delta_2 & -\delta_1\\ -\delta_1 & \delta_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_1+k_2 & -k_2\\ -k_2 & k_2\end{bmatrix} \tag{i}$$

它为图3.1 a 中系统的刚度矩阵〔见第3.2节方程（b）〕。自然，如果一个系统的刚度矩阵是奇异的，那么其相应柔度矩阵不存在。

因为图3.1 a 中的系统是静定的，所以其柔度矩阵容易导出，通常对于静不定系统这是不容易的。大多数振动系统，应用带有刚度系数的作用力方程是比较容易分析的，但是也发生这种柔度系数方法较为方便的许多情况。下面例题说明柔度影响系数的应用。

例题1 图 3.7 a 表示一根具有分别位于长度中点处和自由端处质量 m_1 和 m_2 的悬臂梁。我们假设该梁是棱柱形的，而且弯曲刚度为 EI。仅考虑与弯曲变形有关的微小位移，我们取顺 y 方向的平动 y_1 和 y_2 作为位移坐标。对此问题，试用柔度影响系数建立运动的位移方程。

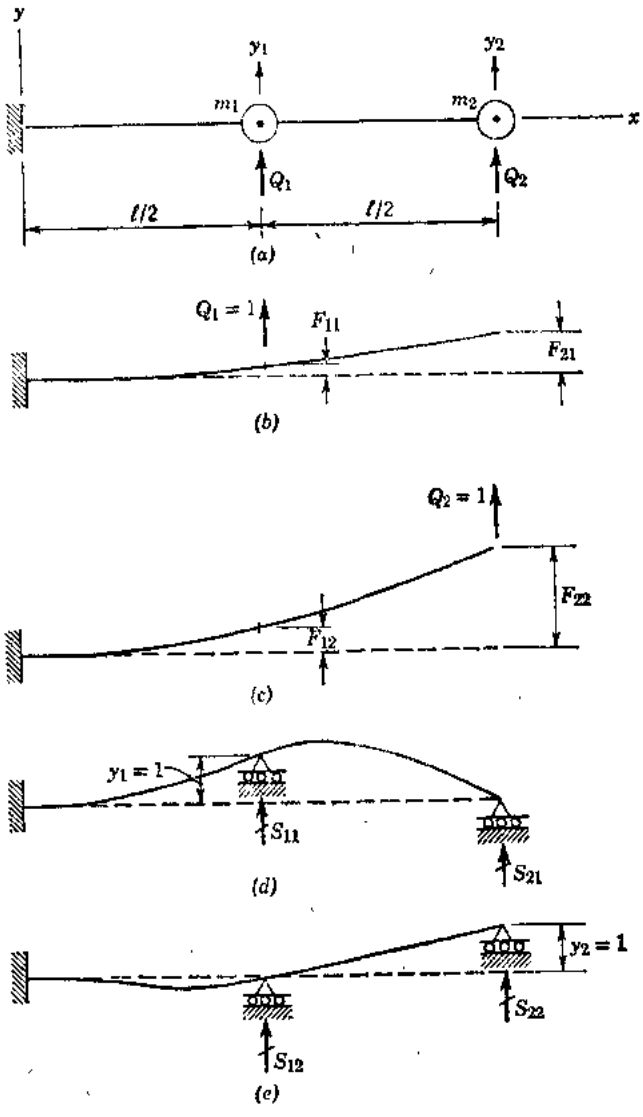


图 3.7

解：为了导出所需要的柔度系数，我们首先作用一单位力 $Q_1=1$，如图 3.7 b 所示。求算出下面诸项：

$$F_{11}=\frac{l^3}{24EI}\qquad F_{21}=\frac{5l^3}{48EI} \tag{j}$$

然后，我们作用一单位力 $Q_2=1$，如图 3.7 c 所示，得到：

$$F_{12}=\frac{5l^3}{48EI}\qquad F_{22}=\frac{l^3}{3EI} \tag{k}$$

这样，柔度矩阵为：

$$\mathbf{F}=\frac{l^3}{48EI}\begin{bmatrix}2 & 5\\ 5 & 16\end{bmatrix} \tag{l}$$

按矩阵格式，运动的位移方程成为：

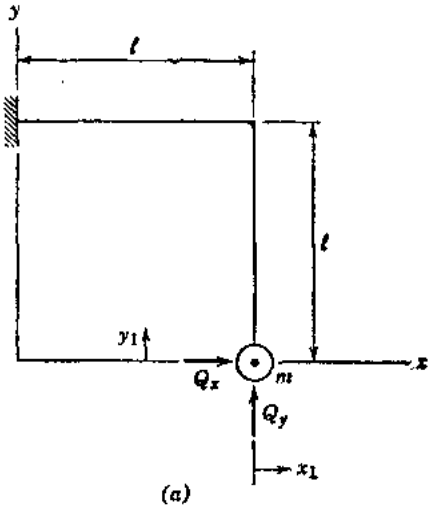
$$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=\frac{l^3}{48EI}\begin{bmatrix}2 & 5\\ 5 & 16\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}Q_1\\ Q_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}m_1 & 0\\ 0 & m_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{y}_1\\ \ddot{y}_2\end{bmatrix}\right) \tag{m}$$

其柔度矩阵之逆得出：

地信网论坛 BBS.3500L.COM

$$\mathbf{S}=\mathbf{F}^{-1}=\frac{48EI}{7l^3}\begin{bmatrix}16 & -5\\ -5 & 2\end{bmatrix} \tag{n}$$

这个逆阵列也可以借图3.7d和3.7e所示过程直接得到。然而，直接提出这种问题的刚度要比确定柔度困难得多。所以，如果需要求刚度，那么如本例题这样借柔度矩阵之逆来求得是较为方便的。



例题2 图3.8a中的简单框架由两根弯曲刚度为EI的棱柱形杆组成。一个质量m在其自由端处与框架连接，该点处微小位移x_1和y_1（由于弯曲变形）的大小同级。试用x_1和y_1为位移坐标并略去重力影响写出此系统运动的作用力方程。

解：如同前面例题那样，柔度的导出要比刚度的导出容易得多。图3.8b和3.8c，表示单位荷载$Q_x=1$和$Q_y=1$一次作用一个的效应。所得的柔度矩阵为：

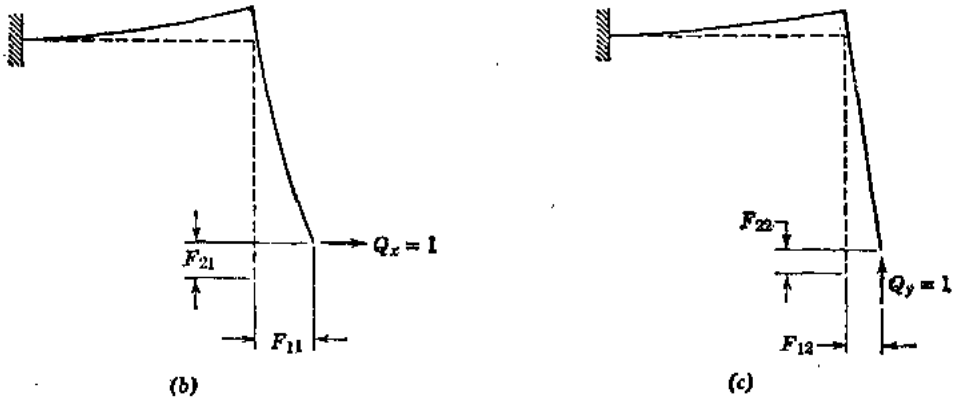


图 3.8

$$\mathbf{F}=\frac{l^3}{6EI}\begin{bmatrix}8 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix} \tag{o}$$

借求逆，我们得到：

$$\mathbf{S}=\mathbf{F}^{-1}=\frac{6EI}{7l^3}\begin{bmatrix}2 & -3\\ -3 & 8\end{bmatrix} \tag{p}$$

于是，运动的作用力方程，可以写成为：

$$\begin{bmatrix}m & 0\\ 0 & m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{y}_1\end{bmatrix}+\frac{6EI}{7l^3}\begin{bmatrix}2 & -3\\ -3 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_x\\ Q_y\end{bmatrix} \tag{q}$$

例题3 作为计算柔度的第三个例题，我们考虑图3.9a中两个刚性摆，它们借一根具有旋转刚度k_r的扭杆连接着。试建立诸摆绕x轴微小转动（θ_1和θ_2）的运动位移方程。

解：由于对此系统容易导出刚度系统（和重力系数），所以它们直接写为〔见方程(3.10)〕：

$$\mathbf{S}^*=\mathbf{S}+\mathbf{G}=\begin{bmatrix}k_r & -k_r\\ -k_r & k_r\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}mgl & 0\\ 0 & mgl\end{bmatrix} \tag{r}$$

因为刚度矩阵 S 是奇异的，所以柔度矩阵 $\mathbf{F}=\mathbf{S}^{-1}$ 不存在。然而，$\mathbf{S}^*$ 的逆存在，我们求算它得到：

$$\mathbf{F}^*=(\mathbf{S}^*)^{-1}=\frac{1}{mgl(2k_r+mgl)}\begin{bmatrix}k_r+mgl & k_r\\ k_r & k_r+mgl\end{bmatrix} \qquad (s)$$

在阵列 $\mathbf{F}^*$ 中的诸项，不能分成柔度影响系数和重力影响系数，因此它们被称为假柔度。它们可借作用单位力矩（或按力 $P_1=1/l$ 和 $P_2=1/l$ 的形式的等效效应）直接导出，如图 3.9 b 和 3.9 c 中所示。对于这前一个图，我们写出力矩平衡条件：

$$mglF^*_{11}+mglF^*_{21}=P_1l=1 \qquad (t)$$

旋转协调条件：

$$F^*_{11}-F^*_{21}=\frac{mglF^*_{21}}{k_r} \qquad (u)$$

当联解方程（t）和（u）时，我们求出：

$$F^*_{11}=\frac{k_r+mgl}{mgl(2k_r+mgl)}$$

$$F^*_{21}=\frac{k_r}{mgl(2k_r+mgl)} \qquad (v)$$

它与方程（s）中阵列的第一列内诸项相同。类似地，$\mathbf{F}^*$ 的第二列内诸项可以按图 3.9 c 的情况直接导出。于是对于此例题以 $\mathbf{F}^*$ 表达的位移方程成为：

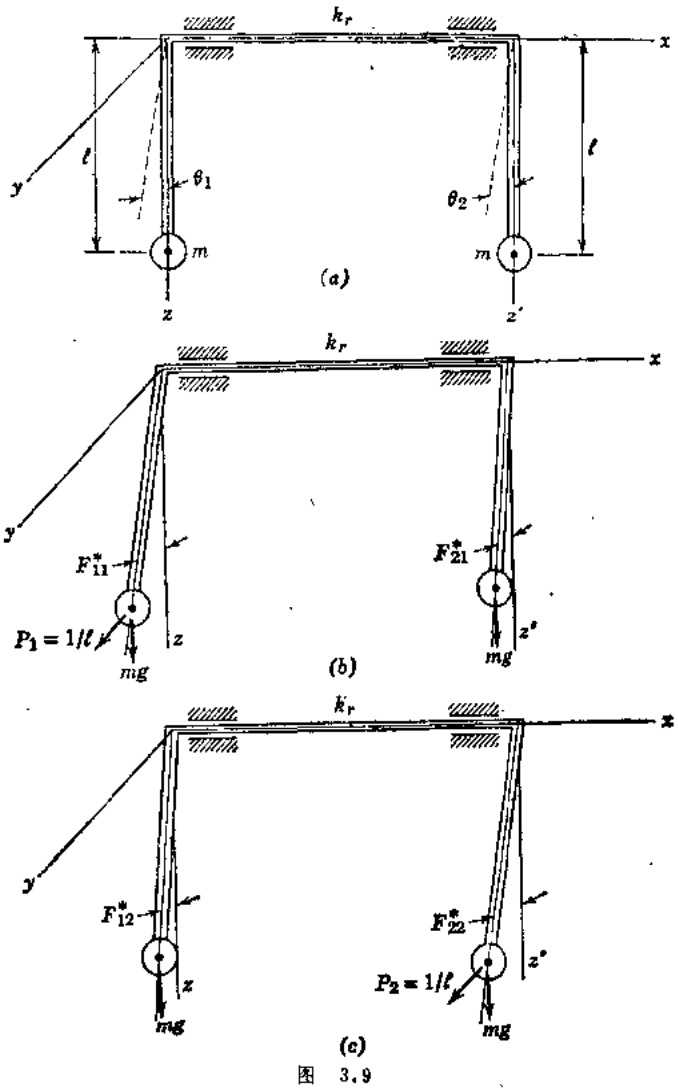


图 3.9

$$\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{bmatrix}=\mathbf{F}^*\left(\begin{bmatrix}P_1l\\ P_2l\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}ml^2 & 0\\ 0 & ml^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\theta}_1\\ \ddot{\theta}_2\end{bmatrix}\right) \qquad (w)$$

习 题 组 3.3

3.3—1 试对习题3.2—1的两个质量系统，借对质量m_1和m_2一次作用一个单位力来确定其柔度系数。还按矩阵形式写出运动的位移方程，并校核关系式$\mathbf{S}=\mathbf{F}^{-1}$。

3.3—2 对第3.1节图3.3中的系统应用位移方程方法。试直接导出柔度系数，并校核关系式$\mathbf{S}=\mathbf{F}^{-1}$。

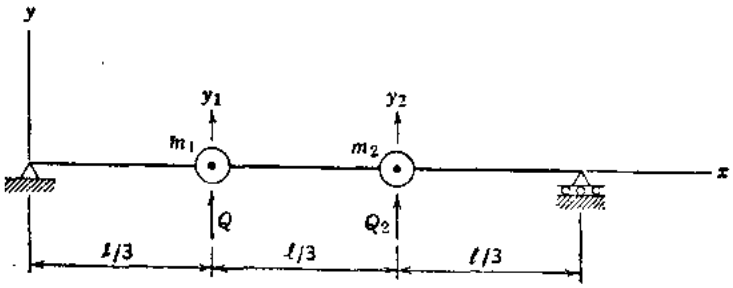
3.3—3 重新考虑第 3.1 节图 3.4 中弹簧连接的一对摆，并借 $\mathbf{S}^*$ 求逆确定假柔度矩阵 $\mathbf{F}^*$。此外，借应用相应于位移坐标θ_1和θ_2的单位作用力，直接导出$\mathbf{F}^*$的诸元素。

地信网论坛 BBS.3500L.COM

3.3—4　试借应用单位荷载，对习题3.2—5中两层的框架确定诸柔度。还以矩阵形式写出运动的位移方程，并校核关系式$\mathbf{S}=\mathbf{F}^{-1}$。

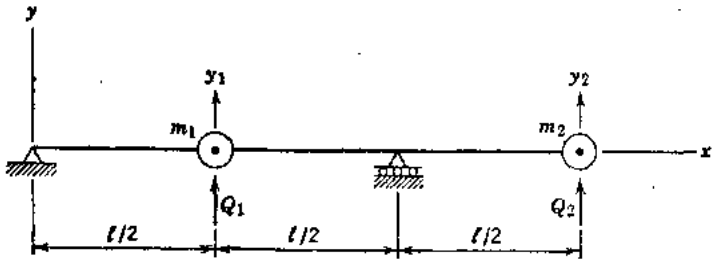
3.3—5　试对习题3.2—6中系统存在重力情况下，导出柔度矩阵$\mathbf{F}_c$。求$\mathbf{F}_c$的逆得出$\mathbf{S}_c$，然后与$\mathbf{G}_c$相加得出$\mathbf{S}_c^*$，再对$\mathbf{S}_c^*$求逆确定$\mathbf{F}_c^*$。

3.3—6　图中所示的简支梁，在位于它的三分之一点处有质量m_1和m_2。假设该梁是棱柱形的，弯曲刚度为EI，试用平动y_1和y_2作为位移坐标，导出柔度系数，并以矩阵形式写出运动的位移方程。



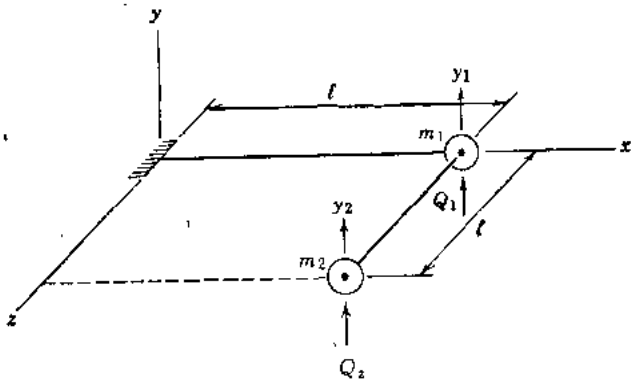
习题　3.3—6

3.3—7　图中表示一根带有两个质量m_1和m_2的挑臂棱柱形梁（弯曲刚度为EI）。试确定柔度矩阵$\mathbf{F}$，求其逆，得到刚度矩阵$\mathbf{S}=\mathbf{F}^{-1}$，并以矩阵形式写出运动的作用力方程。



习题　3.3—7

3.3—8　假设图中水平框架的每一杆都是棱柱形的，弯曲刚度均为EI，扭转刚度均为GJ。试对竖直平动y_1和y_2导出柔度矩阵且求逆，并按矩阵形式建立运动的作用力方程。



习题　3.3—8

地信网论坛 BBS.3500I.COM

3.4 惯性的与重力的耦合

直到本章所讨论的两个自由度的系统，质量矩阵和重力矩阵均为对角线者，运动方程中诸耦合项仅作为非对角元素出现于刚度矩阵和柔度矩阵中。这种耦合，将称为弹性耦合（elasticity coupling），因为诸项不是与弹性单元的刚度性能相联系就是与柔度性能相联系。质量矩阵中和重力矩阵中，也有可能产生非对称项，取决于如何去写运动方程。第一类诸项，往往发生于包括刚体的系统的运动方程中，称为惯性耦合，而第二类诸项，称为重力耦合。

为了说明如何可能出现惯性耦合，我们将写出图3.10 a 中系统对于选择几种位移坐标时的运动作用力方程。质量为 m 的刚杆，借刚度常数为 k_1 和 k_2 的弹簧支于 A 点和 D 点。约束抵抗顺 x 方向的平动，只可以在 $x-y$ 平面内运动。C 点代表杆的质量中心，I_c 表示绕通过 C 的 z 轴（未示出）的质量惯性矩。标明 B 的点是为：

$$k_1 l_4 = k_2 l_5 \qquad (a)$$

的点。B 处顺 y 方向的力产生平动而无转动，B 处的力矩产生转动而无平动。

图3.10 b 表示这个系统的位移坐标的一种选择，它们取为 y_A（A 点的 y 平动）和 θ_A（杆绕 A 点的转动）。图上还示出了 A 处施加的作用力（Q_A 和 T_A）、A 和 D 处的弹簧力和 C 处的惯性作用力。当这最后一种作用力示于自由体图上时，该自由体可以考虑为处于动力平衡状态。于是我们应用达朗伯原理，得出顺 y 方向的力的平衡方程为：

$$m(\ddot{y}_A + l_1\ddot{\theta}_A) + k_1 y_A + k_2(y_A + l\theta_A) = Q_A \qquad (b)$$

对于第二个平衡方程，我们对 A 点计算力矩写出：

$$m(\ddot{y}_A + l_1\ddot{\theta}_A)l_1 + I_C\ddot{\theta}_A + k_2(y_A + l\theta_A)l = T_A \qquad (c)$$

按矩阵形式，方程（b）和（c）成为：

$$\begin{bmatrix} m & ml_1 \\ ml_1 & I_C + ml_1^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{y}_A \\ \ddot{\theta}_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 l \\ k_2 l & k_2 l^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_A \\ \theta_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_A \\ T_A \end{bmatrix} \qquad (3.14a)$$

它呈现惯性耦合和弹性耦合。

作为此系统的位移坐标的第二种选择，我们取 y_B 和 θ_B（B 点的 y 平动和杆绕 B 点的转动）和相应施加的作用力 Q_B 和 T_B。如前面那样进行，我们得到按矩阵形式的运动的作用力方程为：

$$\begin{bmatrix} m & ml_3 \\ ml_3 & I_C + ml_3^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{y}_B \\ \ddot{\theta}_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & 0 \\ 0 & k_1 l_4^2 + k_2 l_5^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_B \\ \theta_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_B \\ T_B \end{bmatrix} \qquad (3.14b)$$

其中，有惯性耦合但无弹性耦合。

对于坐标的第三种选择，我们采用质量中心（C 点）作为杆的刚体运动的参考点。在这种情况下，位移坐标为 y_C 和 θ_C（C 点处杆的 y 平动和转动），相应施加的作用力为 Q_C 和 T_C。对此参考点的运动方程成为：

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{y}_C \\ \ddot{\theta}_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 l_2 - k_1 l_1 \\ k_2 l_2 - k_1 l_1 & k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_C \\ \theta_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_C \\ T_C \end{bmatrix} \qquad (3.14c)$$

它有弹性耦合但无惯性耦合。这样，显然运动方程系中的耦合，取决于位移坐标的选择。

地信网论坛 BBS.35001.COM

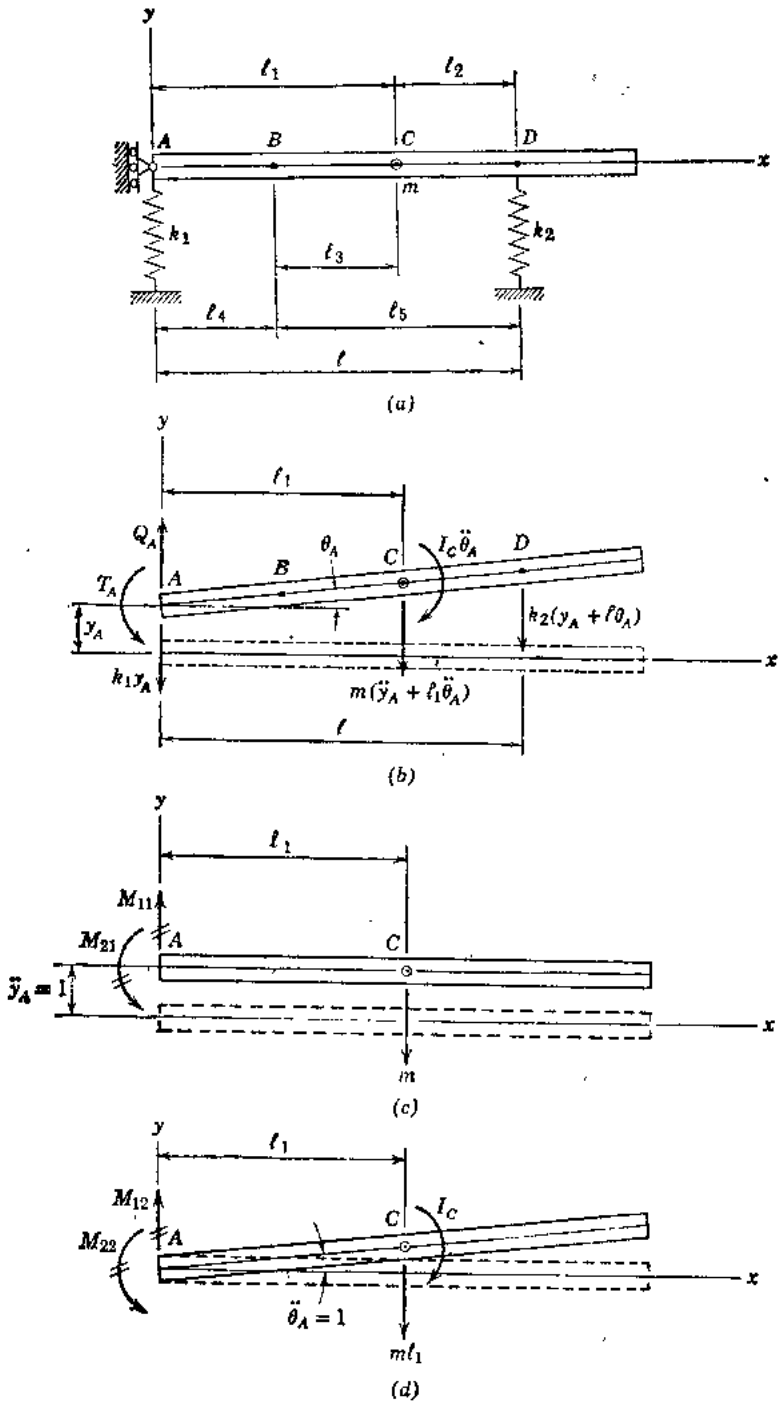


图 3.10

在任何质量矩阵中的诸项，例如在方程（3.14 a）中的诸项，可以考虑为惯性影响系数，该系数定义为单位加速度所需要的作用力：

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} m & ml_1 \\ ml_1 & I_C+ml_1^2 \end{bmatrix} \qquad (d)$$

质量矩阵中，典型项 M_{ij} 为 j 类一个单位（瞬时的）加速度所需要的 i 类一个作用力。这个定义类似于刚度影响系数，确定**M**中诸列的形式过程，类似于前面推导**S**中诸列时所述那

地信网论坛 BBS.3500L.COM

样。图3.10c和3.10d说明，当把A点作为刚杆运动的参考点时的过程。单位加速度$\ddot{y}_A=1$（而$\ddot{\theta}_A=0$）所需要的作用力M_{11}和M_{21}示于图3.10c中。单位加速度$\ddot{\theta}_A=1$（而$\ddot{y}_A=0$）所需要的作用力M_{12}和M_{22}示于图3.10d中（为了帮助直观，加速度好象是位移那样表示出来。A点处箭头上的双斜线，用作表示单位加速度所需要的作用力）。从动力平衡条件，我们看到，惯性影响系数为$M_{11}=m$，$M_{21}=M_{12}=ml_1$和$M_{22}=I_C+ml_1^2$，如方程（d）中所给。

还可以导出定义为由单位作用力所引起的加速度的逆惯性影响系数，它类似于柔度影响系数。如果阵列$\mathbf{M}$是非奇异的，那么逆矩阵$\mathbf{M}^{-1}$就存在，求解方程（3.6）中的加速度$\ddot{\mathbf{X}}$得到：

$$\ddot{\mathbf{X}}=\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{Q}-\mathbf{S}\mathbf{X}) \tag{3.15}$$

它为运动的加速度方程。这种方程可以与前节中所讨论的运动的位移方程（见方程3.12）相比。然而，此概念是不重要的，本节不作进一步讨论。

为了说明重力耦合的出现，让我们重新考虑图3.4中用弹簧连接的一对摆。如前面所写，它们的运动方程（方程3.4a和3.4b）仅有弹性耦合。然而，如果方程（3.4b）与方程（3.4a）相加，并将其结果与方程（3.4b）成对，那么我们得到同样有效的方程：

$$\begin{bmatrix} ml^2 & ml^2 \\ 0 & ml^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -kh^2 & kh^2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} mgl & mgl \\ 0 & mgl \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} T_1+T_2 \\ T_2 \end{bmatrix} \tag{e}$$

式中$T_1=P_1l$和$T_2=P_2l$。该新方程组中的第一个方程，表达图3.4中整个系统对A点的动力力矩平衡，而第二个方程仅表示右边摆对B点的力矩平衡。借这种原来诸方程的线性组合，我们在质量矩阵和重力矩阵中都引进了非对角线项。同时，刚度矩阵的对称性被破坏了。方程（e）也可以看作是下列转置算子A^T左乘第3.2节中方程（3.9）的结果：

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^T=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{f}$$

上标T表示转置。这样，按简洁的矩阵符号，我们重新表示方程（e）为：

$$\mathbf{A}^T\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\theta}}+\mathbf{A}^T(\mathbf{S}+\mathbf{C})\boldsymbol{\theta}=\mathbf{A}^T\mathbf{T} \tag{g}$$

如果我们在方程（g）的$\ddot{\boldsymbol{\theta}}$和$\boldsymbol{\theta}$的前面写进下列恒等矩阵：

$$\mathbf{I}=\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} \tag{h}$$

那么所有系数矩阵的对称性将得到恢复。式中$\mathbf{A}^{-1}$为算子$\mathbf{A}$之逆：

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{i}$$

于是，方程（g）成为：

$$\mathbf{A}^T\mathbf{M}\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\ddot{\boldsymbol{\theta}}+\mathbf{A}^T(\mathbf{S}+\mathbf{G})\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\theta}=\mathbf{A}^T\mathbf{T} \tag{j}$$

或

$$\mathbf{M}_A\ddot{\boldsymbol{\theta}}_A+(\mathbf{S}_A+\mathbf{G}_A)\boldsymbol{\theta}_A=\mathbf{T}_A \tag{3.16}$$

式中

$$\boldsymbol{\theta}_A=\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\theta}=\begin{bmatrix} \theta_1 \\ -\theta_1+\theta_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{T}_A=\mathbf{A}^T\mathbf{T}=\begin{bmatrix} T_1+T_2 \\ T_2 \end{bmatrix}$$

地信网论坛 BBS.35001.COM

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}}_A=\mathbf{A}^{-1}\ddot{\boldsymbol{\theta}}=\begin{bmatrix}\ddot{\theta}_1\\-\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2\end{bmatrix}\qquad \mathbf{M}_A=\mathbf{A}^T\mathbf{M}\mathbf{A}=ml^2\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}\qquad (k)$$

$$\mathbf{S}_A=\mathbf{A}^T\mathbf{S}\mathbf{A}=kh^2\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\qquad \mathbf{G}_A=\mathbf{A}^T\mathbf{G}\mathbf{A}=mgl\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}$$

方程（3.16）代表另一种形式的运动作用力方程，这里广义作用力为 $\mathbf{T}_A$，相应的广义位移为 $\boldsymbol{\theta}_A$。按这种方式改变坐标（从 $\boldsymbol{\theta}$ 变为 $\boldsymbol{\theta}_A$）称为坐标变换。由于同等变换诸如 $\mathbf{M}_A=\mathbf{A}^T\mathbf{M}\mathbf{A}$ 等得出对称的结果，这一事实使转换了的系数矩阵保持对称。按新的坐标，我们看到，诸方程具有惯性耦合和重力耦合两种，但没有弹性耦合。

例题 1　图3.11表示一个质量为 m 连于一悬臂梁端点的刚体。令 I_C 代表该物体绕通过其质心（C 点）的 z 轴的质量惯性矩。该点位于 x 轴上距梁端距离 b 处。我们将假设该梁是棱柱形的，其弯曲刚度为 EI。仅考虑由于弯曲变形所产生 $x-y$ 平面内的微小位移，我们将该系统按具有两个自由度的系统来对待，写出运动的位移方程。

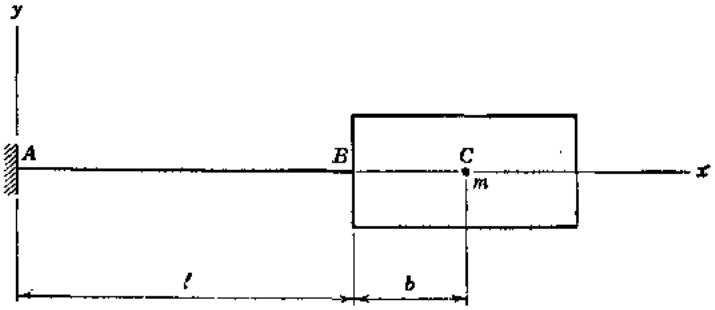


图　3.11

解：如果我们选定平动 y_B 和转动 θ_B（刚体上的 B 点）作为位移坐标，那么柔度系数就容易得到。此外，质量矩阵中诸项类似于方程（d）中的诸项，但 l_1 被距离 b 代替。这样，我们可以对参考点 B 写出运动的位移方程为：

$$\begin{bmatrix}y_B\\\theta_B\end{bmatrix}=\frac{l}{6EI}\left(\begin{bmatrix}2l^2&3l\\3l&6\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}Q_B\\T_B\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}m&mb\\mb&I_C+mb^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{y}_B\\\ddot{\theta}_B\end{bmatrix}\right)\right)\qquad (l)$$

它具有弹性耦合和惯性耦合两种。

反之，如果将 C 点作为刚体运动的参考点，那么我们得到下列位移方程：

$$\begin{bmatrix}y_C\\\theta_C\end{bmatrix}=\frac{l}{6EI}\left(\begin{bmatrix}2(l^2+3lb+3b^2)&3(l+2b)\\3(l+2b)&6\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}Q_C\\T_C\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}m&0\\0&I_C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{y}_C\\\ddot{\theta}_C\end{bmatrix}\right)\right)\qquad (m)$$

它具有较复杂的弹性耦合，但无惯性耦合。

例题 2　考虑图3.12 a 中所示双混合摆，它由 B 点处铰接到一起并铰接支挂于点 A 的两个刚体组成。存在重力时，这个系统可以在 $x-y$ 平面内摆动，我们取微小转动 θ_1 和 θ_2 作为位移坐标。这两物体的质量为 m_1 和 m_2，它们的质心位于 C_1 点和 C_2 点处，它们绕通过这些点的 z 轴的质量惯性矩用 I_1 和 I_2 表示。试对这个系统写出运动的作用力方程。

解：应用达朗伯原理，我们写出整个系统绕 A 点动力平衡的力矩方程（见图3.12 a）得到：

$$I_1\ddot{\theta}_1+I_2\ddot{\theta}_2+m_1h_1^2\ddot{\theta}_1+m_2(l\ddot{\theta}_1+h_2\ddot{\theta}_2)(l+h_2)+m_1gh_1\theta_1+m_2g(l\theta_1+h_2\theta_2)=T_1+T_2\qquad (n)$$

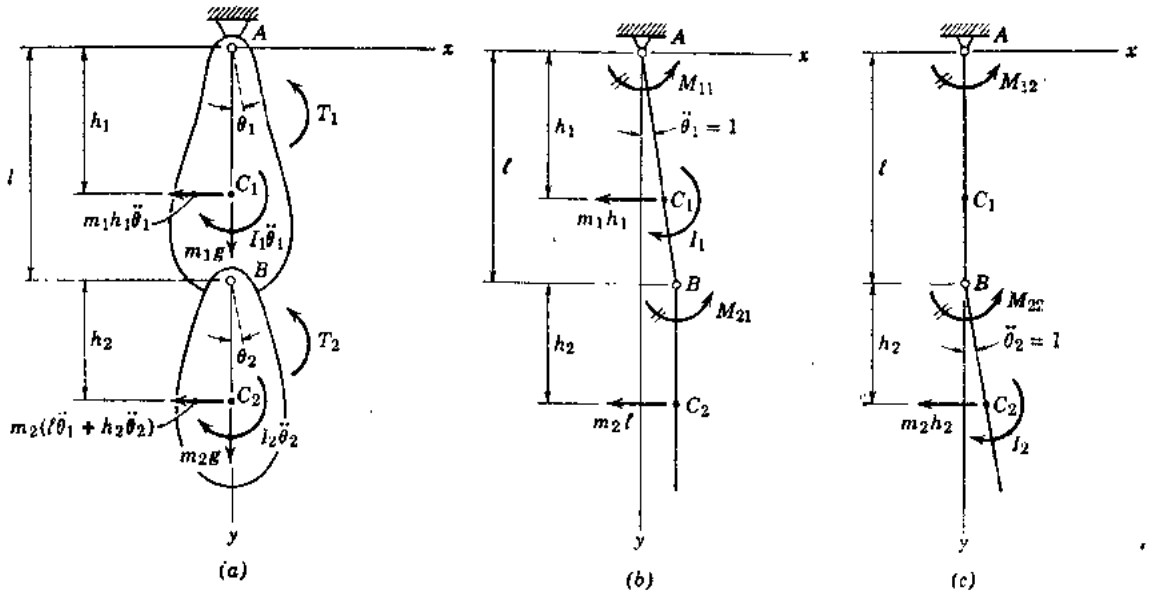


图 3.12

类似地，第二个物体绕B点的力矩平衡条件得出：

$$I_2\ddot{\theta}_2+m_2(l\ddot{\theta}_1+h_2\ddot{\theta}_2)h_2+m_2gh_2\theta_2=T_2 \qquad (o)$$

将方程（n）和（o）写成矩阵形式，我们得到：

$$\begin{bmatrix} I_1+m_1h_1^2+m_2l(l+h_2) & I_2+m_2h_2(l+h_2) \\ m_2lh_2 & I_2+m_2h_2^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} (m_1h_1+m_2l)g & m_2h_2g \\ 0 & m_2h_2g \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} T_1+T_2 \\ T_2 \end{bmatrix} \qquad (p)$$

方程（p）类似方程（e），因为诸广义作用力不相当于诸位移坐标，所以系数矩阵都是非对称的。然而，如果我们用方程（n）去减方程（o），并将其结果与方程（o）相配起来，我们得到下列方程系：

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\theta}}+\mathbf{G}\boldsymbol{\theta}=\mathbf{T}=\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} \qquad (q)$$

式中**M**和**G**为下列对称矩阵：

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} I_1+m_1h_1^2+m_2l^2 & m_2lh_2 \\ m_2lh_2 & I_2+m_2h_2^2 \end{bmatrix} \qquad (r)$$

和

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix} (m_1h_1+m_2l)g & 0 \\ 0 & m_2h_2g \end{bmatrix} \qquad (s)$$

现在第一个方程代表仅第一个物体绕A点的动力力矩平衡。

对称阵列**M**和**G**可以分别按惯性影响系数和重力影响系数直接产生。图 3.12b 和 3.12c 用图解表示$\ddot{\theta}_1=1$（而$\ddot{\theta}_2=0$）和$\ddot{\theta}_2=1$（而$\ddot{\theta}_1=0$）的情况，它们是推导**M** 中诸项所需要的。从这些图中的第一个图，我们看到：

$$M_{21}=m_2lh_2 \qquad (t)$$

地信网论坛 BBS.3S001.COM

和

$$M_{11}=I_1+m_1h_1^2+m_2l(l+h_2)-M_{21}=I_1+m_1h_1^2+m_2l^2 \qquad (u)$$

它们构成**M**的第一列〔见方程（r）〕。从图3.12c，我们得出第二列的诸项为：

$$M_{22}=I_2+m_2h_2^2 \qquad (v)$$

和

$$M_{12}=I_2+m_2h_2(l+h_2)-M_{22}=mlh_2 \qquad (w)$$

G中诸元素可以按类似方式产生，但是应用单位位移，而不用加速度。

3.5 无阻尼自由振动

第3.1节中，我们导出了图3.1a中两个质量系统无阻尼自由振动的固有频率的表达式和振型形状。现在将以更为正式的方式重复这种工作，以得到可以适用于具有两个自由度的所有振动系的表达式。将要考虑作用力方程和位移方程，并将诸任意常数从位移和速度的初始条件来确定。此外，还要讨论与自由振动有关的几个特殊课题，并用例子来说明。

如果没有荷载作用到图3.1a中两个质量的系统上，那么运动的作用力方程〔方程(3.6)〕成为：

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}+\mathbf{S}\mathbf{X}=\mathbf{0} \qquad (3.17)$$

式中符号**0**表示零荷载矩阵。对于本节中的讨论，我们将仅考虑对角线质量矩阵（如图3.1a中的系统的情况），并用展开形式写出方程（3.17）为：

$$\begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (3.18)$$

对于这个齐次方程组，我们假设前面第3.1节中所引进形式的谐和解。这样，

$$x_1=x_{m1}\sin(pt+\phi) \qquad (a)$$

$$x_2=x_{m2}\sin(pt+\phi) \qquad (b)$$

方程（a）和（b）中的符号x_{m1}和x_{m2}，代表振动运动的最大值或振幅。

将方程（a）和（b）代入方程（3.18），得到一定满足下列条件的代数方程：

$$-p^2M_{11}x_{m1}+S_{11}x_{m1}+S_{12}x_{m2}=0 \qquad (c)$$

$$-p^2M_{22}x_{m2}+S_{21}x_{m1}+S_{22}x_{m2}=0 \qquad (d)$$

或

$$\begin{bmatrix} S_{11}-p^2M_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22}-p^2M_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{m1} \\ x_{m2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (e)$$

为了得到位移的非零解，方程（e）中系数矩阵的行列式必定等于零。这样，

$$\begin{vmatrix} S_{11}-p^2M_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22}-p^2M_{22} \end{vmatrix}=0 \qquad (f)$$

展开此行列式，得到：

$$(S_{11}-p^2M_{11})(S_{22}-p^2M_{22})-S_{12}^2=0 \qquad (g)$$

或

$$M_{11}M_{22}(p^2)^2-(M_{11}S_{22}+M_{22}S_{11})p^2-S_{11}S_{22}-S_{12}^2=0 \qquad (h)$$

这个特征方程为p^2的二次方程，其根代表系统的特征值。借二次公式求解方程（h），我们得到：

地信网论坛 BBS.3500L.COM

$$p_{1,2}^2=\frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{3.19}$$

式中

$$a=M_{11}M_{22}\qquad b=-(M_{11}S_{22}+M_{22}S_{11})\qquad c=S_{11}S_{22}-S_{12}^2=|\mathbf{S}| \qquad (i)$$

用（i）式，方程(3.19)中b^2-4ac项的展开式说明它总是正的，所以，p_1^2和p_2^2两个根都是实根。此外，如果S的行列式（等于常数c）不是负的，那么平方根项将小于或等于b，这样p_1^2和p_2^2两个根都是正的（或为零）。

将特征值p_1^2和p_2^2代入齐次方程（c）和（d），我们可以使诸解化为振幅比r_1和r_2：

$$r_1=\frac{x_{m1,1}}{x_{m2,1}}=\frac{-S_{12}}{S_{11}-p_1^2M_{11}}=\frac{S_{22}-p_1^2M_{22}}{-S_{21}} \tag{3.20a}$$

$$r_2=\frac{x_{m1,2}}{x_{m2,2}}=\frac{-S_{12}}{S_{11}-p_2^2M_{11}}=\frac{S_{22}-p_2^2M_{22}}{-S_{21}} \tag{3.20b}$$

由于方程（g），每一振幅比的定义都是正确的。一般对于齐次代数方程，这些解只能得出带有某些任意常数。亦即，振幅的绝对值不可能确定出来，但是只能确定出它们的比或振型形状。方程（3.20a）和（3.20b）内振幅中的第二个角标（1或2），表示相应于根p_1^2和p_2^2的固有振型（或主型），如第3.1节中那样，特征方程的解（方程3.19），按$p_1<p_2$的方式写出。其较小值为第一振型（或基本型）的角频率，较大值为第二振型的角频率。

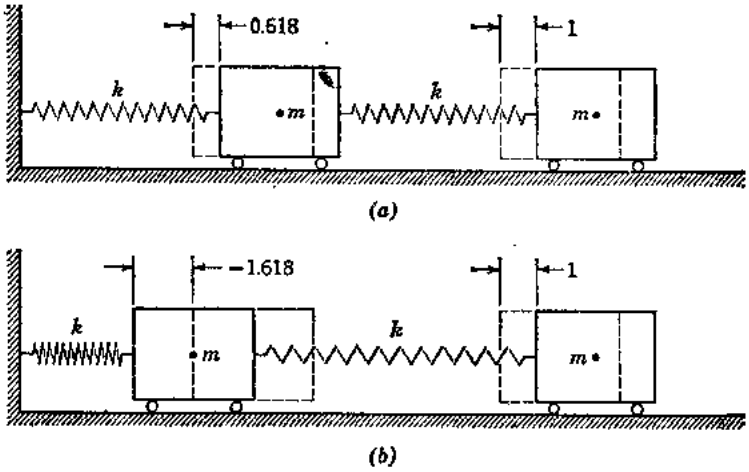


图 3.13

为了说明频率的计算和振型的形状，令图3.1a中的系统的诸质量为$m_1=m_2=m$，诸弹簧的刚度常数为$k_1=k_2=k$。于是$M_{11}=M_{22}=m$；$S_{11}=2k$，$S_{12}=S_{21}=-k$，$S_{22}=k$，方程（3.19）得出：

$$p_1^2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\ \frac{k}{m}=0.382\ \frac{k}{m} \qquad (j)$$

$$p_2^2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\ \frac{k}{m}=2.618\ \frac{k}{m} \qquad (k)$$

将这些根的每一个，代入方程（3.20a）和（3.20b）中振幅比的每一定义内，得出下列振型形状：

地信网论坛 BBS.3500L.COM

第一振型：
$$r_1=\frac{x_{m1,1}}{x_{m2,1}}=\frac{2}{1+\sqrt{5}}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=0.618 \qquad (l)$$

第二振型：
$$r_2=\frac{x_{m1,2}}{x_{m2,2}}=\frac{2}{1-\sqrt{5}}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}=-1.618 \qquad (m)$$

自然，这两种振型形状的振幅可以按所要求的尺度衡量，但是它们的比保持常数。图3.13 a 表示按基本振型振动的两质量系统，这里振幅是对第二个质量的振幅归一化的。类似地，第二振型的形状描述于图3.13 b 中，其中振幅仍是对第二个质量归一化。

如果我们采用运动的位移方程而不采用作用力方程，那么方程（3.17）用下式代替：

$$\mathbf{FM}\ddot{\mathbf{X}}+\mathbf{X}=\mathbf{0} \qquad (3.21)$$

按展开形式，此方程组可以写成：

$$\begin{bmatrix} F_{11}M_{11} & F_{12}M_{22} \\ F_{21}M_{11} & F_{22}M_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (3.22)$$

将方程（a）和（b）代入方程（3.22），我们得到下列代数方程：

$$-p^2F_{11}M_{11}x_{m1}-p^2F_{12}M_{22}x_{m2}+x_{m1}=0 \qquad (n)$$

$$-p^2F_{21}M_{11}x_{m1}-p^2F_{22}M_{22}x_{m2}+x_{m2}=0 \qquad (o)$$

或

$$\begin{bmatrix} F_{11}M_{11}-\lambda & F_{12}M_{22} \\ F_{21}M_{11} & F_{22}M_{22}-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{m1} \\ x_{m2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (p)$$

式中$\lambda=1/p^2$。对于非平凡解，方程（p）中系数矩阵的行列式必定使之等于零，产生：

$$(F_{11}M_{11}-\lambda)(F_{22}M_{22}-\lambda)-F_{12}^2M_{11}M_{22}=0 \qquad (q)$$

或

$$\lambda^2-(F_{11}M_{11}+F_{22}M_{22})\lambda+(F_{11}F_{22}-F_{12}^2)M_{11}M_{22}=0 \qquad (r)$$

（r）式为相应于运动的齐次位移方程的特征方程，其诸解为角频率平方的倒数。我们从下面任一形式计算诸根：

$$\lambda_{1,2}=\frac{-d\pm\sqrt{d^2-4e}}{2} \qquad (3.23a)$$

或

$$p_{1,2}^2=\frac{1}{\lambda_{1,2}}=\frac{2}{-d\pm\sqrt{d^2-4e}} \qquad (3.23b)$$

式中

$$d=-(F_{11}M_{11}+F_{22}M_{22})$$

$$e=(F_{11}F_{22}-F_{12}^2)M_{11}M_{22}=|\mathbf{F}|M_{11}M_{22} \qquad (s)$$

方程(3.23a)和(3.23b)中的λ_1值（λ的较大值）相当于p_1^2（p^2的较小值），λ_2值（λ的较小值）相当于p_2^2（p^2的较大值）。如果**F**的行列式是正的，那么两个根（和它们的倒数）将都是实根且为正的。

将特征值λ_1和λ_2代入齐次方程〔见方程(p)〕，我们得到振幅比r_1和r_2的对偶定义为：

$$r_1=\frac{x_{m1,1}}{x_{m2,1}}=\frac{-F_{12}M_{22}}{F_{11}M_{11}-\lambda_1}=\frac{F_{22}M_{22}-\lambda_1}{-F_{21}M_{11}} \qquad (3.24a)$$

$$r_2=\frac{x_{m1,2}}{x_{m2,2}}=\frac{-F_{12}M_{22}}{F_{11}M_{11}-\lambda_2}=\frac{F_{22}M_{22}-\lambda_2}{-F_{21}M_{11}} \qquad (3.24b)$$

地信网论坛 BBS.3500L.COM

由于方程（q），它们都是正确的。

如果假设图3.1a中系统为相等质量和相等的弹簧常数，那么柔度影响系数$F_{11}=\delta$，$F_{12}=F_{21}=\delta$和$F_{22}=2\delta$(这里$\delta=1/k$)。于是方程（3.23a）给出下列值：

$$\lambda_1=\frac{(3+\sqrt{5})m\delta}{2}=\frac{m\delta}{0.382} \qquad (t)$$

$$\lambda_2=\frac{(3-\sqrt{5})m\delta}{2}=\frac{m\delta}{2.618} \qquad (u)$$

它们为方程（j）和（k）中值的倒数。将方程（t）和（u）代入方程(3.24a)和(3.24b)，得到下列振幅比：

第一振型：
$$r_1=\frac{x_{m1,1}}{x_{m2,1}}=\frac{2}{1+\sqrt{5}}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=0.618$$

第二振型：
$$r_2=\frac{x_{m1,2}}{x_{m2,2}}=\frac{2}{1-\sqrt{5}}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}=-1.618$$

它们与方程（l）和（m）相同。因而，我们看出诸频率和振型形状不随列式子的类型而变。

确定出所给系统的振动特征后，我们可借迭加诸固有振型，写出自由振动的全解：

$$x_1=r_1x_{m2,1}\sin(p_1t+\phi_1)+r_2x_{m2,2}\sin(p_2t+\phi_2) \qquad (v)$$

$$x_2=x_{m2,1}\sin(p_1t+\phi_1)+x_{m2,2}\sin(p_2t+\phi_2) \qquad (w)$$

在这些式子的第一个式子中，$r_1x_{m2,1}$和$r_2x_{m2,2}$分别用来代替$x_{m1,1}$和$x_{m1,2}$。方程(v)和(w)也可以写成下面等效形式：

$$x_1=r_1(C_1\cos p_1t+C_2\sin p_1t)+r_2(C_3\cos p_2t+C_4\sin p_2t) \qquad (3.25a)$$

$$x_2=C_1\cos p_1t+C_2\sin p_1t+C_3\cos p_2t+C_4\sin p_2t \qquad (3.25b)$$

借方程(3.25a)和(3.25b)对时间微分，得到速度的表达式：

$$\dot{x}_1=-p_1r_1(C_1\sin p_1t-C_2\cos p_1t)-p_2r_2(C_3\sin p_2t-C_4\cos p_2t) \qquad (3.25c)$$

$$\dot{x}_2=-p_1(C_1\sin p_1t-C_2\cos p_1t)-p_2(C_3\sin p_2t-C_4\cos p_2t) \qquad (3.25d)$$

方程(3.25a)至(3.25d)中四个任意常数C_1-C_4，可以从位移的和速度的四个初始条件来确定。对于两个自由度系统在时间$t=0$处，这些条件用符号x_{01}，$\dot{x}_{01}$，x_{02}和$\dot{x}_{02}$来表示。将初始条件代入方程(3.25a)至(3.25d)，我们求算出诸常数为：

$$C_1=\frac{x_{01}-r_2x_{02}}{r_1-r_2} \qquad C_2=\frac{\dot{x}_{01}-r_2\dot{x}_{02}}{p_1(r_1-r_2)}$$

$$C_3=\frac{r_1x_{02}-x_{01}}{r_1-r_2} \qquad C_4=\frac{r_1\dot{x}_{02}-\dot{x}_{01}}{p_2(r_1-r_2)} \qquad (3.26)$$

为了说明这些式子的应用，我们将计算图3.1a中系统，对初始条件$x_{01}=x_{02}=1$和$\dot{x}_{01}=\dot{x}_{02}=0$的反应。对于该系统，具有相等质量和相等弹簧常数，$p_1$、$p_2$、$r_1$和$r_2$值均早已可以得到〔见方程（$j$）、（$k$）、（$l$）和($m$)〕。将诸已知值和诸条件代入方程(3.26)，我们求出诸常数为$C_1=1.171$，$C_2=0$，$C_3=-0.171$和$C_4=0$。然后从方程(3.25a)和(3.25b)，该系统的反应成为：

$$x_1=0.724\cos p_1t+0.277\cos p_2t \qquad (x)$$

$$x_2=1.171\cos p_1t-0.171\cos p_2t \qquad (y)$$

这种情况下，反应中仅有余弦项，因为初始速度为零。如果初始位移均为零，而初始速度均

地信网论坛 BBS.35001.COM

非零，那么反应中则仅出现正弦项。此外，系统的两个固有振型均对反应提供项次，但初始条件与这些振型之一的可能运动一致的情况除外。例如，如果初始位移恰与第一振型曲线（$x_{01}/x_{02}=r_1$）相配合，而 $\dot{x}_{01}=\dot{x}_{02}=0$，那么其反应成为：

$$x_1=x_{01}\cos p_1 t \qquad x_2=x_{02}\cos p_1 t$$

它们由纯第一振型反应组成。

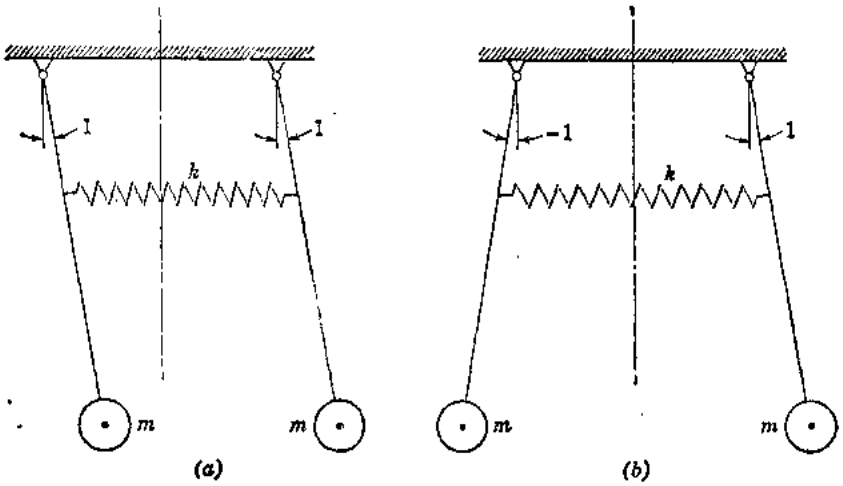


图 3.14

归纳起来，固有振型按方程（a）和（b）形式的假设，可以使我们将自由振动的齐次微分方程〔例如方程(3.17)或(3.21)〕变换为一个代数方程组。令它们的系数矩阵的行列式等于零，我们得到特征方程并求算出频率和振型形状。按这种方式，其解的形式便确定了，但是影响总反应的振型的个数，需要从初始条件来确定。

为了讨论与自由振动有关的几种特殊情况，我们还将考虑图3.4中用弹簧连接的一对简单摆。对于这个系统，其对角线质量矩阵中的诸项〔见第3.2节方程(3.9)〕为 $M_{11}=M_{22}=ml^2$。此外，包括重力项的阵列$\mathbf{S}^*$代替矩阵$\mathbf{S}$，因而我们得到 $S^*_{11}=S^*_{22}=kh^2+mgl$ 和 $S^*_{12}=S^*_{21}=-kh^2$。应用这些项，我们从方程(3.19)得到固有角频率为：

$$p_1=\sqrt{\frac{g}{l}} \qquad p_2=\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2kh^2}{ml^2}} \qquad (z)$$

于是，振幅比可以从方程(3.20a)和(3.20b)求出，简单地为：

$$r_1=1 \qquad r_2=-1 \qquad (a')$$

这两种固有振型示于图 3.14a 和 3.14b 中，图内的振幅是对右边摆成归一化。在第一振型中，摆以相同方向和相同振幅摆动（好像它们是一个摆似的），弹簧无变形。在第二种振型中，它们按相反方向以相等的振幅摆动，弹簧成周期性地伸长和压缩。

这个系统对两摆之间的竖直平面成对称。我们从图 3.14b 看到第二固有振型对该平面成对称，它称为对称振型。该系统的一半，可借约束弹簧中点不产生运动来代表这种振型（在这种情况下，半个弹簧的有效刚度常数为$2k$）。反之，图3.14a中第一固有振型对于对称平面成反对称，称为反对称振型。在这种情况下，如果弹簧中点允许自由地穿过对称平面移动（从而半个弹簧的有效刚度常数为零），那么可以采用半个系统。一般来说，具有一个对称平面的振动系统，对该平面仅具有对称振型和反对称振型，可以用两个简化的系统代替

地信网论坛 BBS.3500L.COM

分析。其简化系统之一，必须在对称平面处约束住仅允许成对称的位移图式，而另一简化系统仅允许成反对称形态移动。

如果用弹簧连接的摆不受重力场作用，那么矩阵S^*恢复为S，它是奇异的。在这种情况下，方程(z)中的诸根成为：

$$p_1=0 \qquad p_2=\frac{h}{l}\sqrt{\frac{2k}{m}} \tag{b'}$$

现在，该系统的第一振型由刚体运动组成，这没有什么困难。这样一种刚体振型的固有频率为零，其周期为无穷大。仅有正根的特征方程，称为是正定的，若其中有一个或多个零根则称为是正半定的。由于此理由，具有一个或多个刚体振型的振动系统，有时称为半定系统。

作为对于一对摆的另一讨论，假定重力存在，但是连接弹簧的刚度为零。在这种情况下，方程（z）中的第二角频率成为与第一角频率相同，我们得重根。两个摆可以按相同的频率独立地振动，它们的振幅之间没有固有的关系。

反之，如果连接两摆的弹簧有一很小的（但非零的）刚度常数，那么该系统的两个部分说成是稍有联系（lightly coupled）。在这种情况下，第二振型的频率将仅稍高于第一振型〔见方程(z)〕。假定我们以初始条件$\theta_{01}=\theta_0$，$\theta_{02}=0$和$\dot{\theta}_{01}=\dot{\theta}_{02}=0$开始系统的振动。应用方程（3.26），我们求算出$C_1=-C_3=\theta_0/2$和$C_2=C_4=0$，并从方程(3.25$a$)和（3.25$b$），求出其反应为：

$$\theta_1=\frac{\theta_0}{2}(\cos p_1 t+\cos p_2 t)=\theta_0\cos\frac{(p_1-p_2)t}{2}\cos\frac{(p_1+p_2)t}{2} \tag{c'}$$

$$\theta_2=\frac{\theta_0}{2}(\cos p_1 t-\cos p_2 t)=-\theta_0\sin\frac{(p_1-p_2)t}{2}\sin\frac{(p_1+p_2)t}{2} \tag{d'}$$

当频率p_1与p_2彼此接近时，每一位移θ_1和θ_2，由低频率$(p_1-p_2)/2$的三角函数与高频率$(p_1+p_2)/2$的三角函数的乘积组成。因而，将发生称为拍*的现象发生。在其反应开始处，左边的摆将以振幅θ_0振动，而右边的摆是停驻的。逐渐地，前一个摆的振幅减小，而后一个摆的振幅增大。在时间$t=\pi/(p_1-p_2)$处，左边的摆是停驻的，而右边的摆以振幅θ_0振动。然后，前者的振动开始增大，而后者的振动减小，直到时间$t=2\pi/(p_1-p_2)$为止又获得初始条件。如果系统中没有阻尼，那么这种现象本身不定地重复。当使弹簧刚度愈来愈小时，拍的周期增大。自然，当$k=0$时，诸摆之间完全没有相互影响，诸模态关系是不定的。

例题1 参见图3.3中的系统，假设其轴的每一部分具有相同的旋转刚度常数k_r，而且$I_2=2I_1$。如果整个系统以等角速度$\dot{\phi}_0$旋转，试确定，当轴突然于A点和B点处停止时所产生的自由振动的反应。

解：从第3.2节中的方程(3.8)，我们看到，$M_{11}=I_1$，$M_{22}=2I_1$，$S_{11}=S_{22}=2k_r$和$S_{12}=S_{21}=-k_r$。将这些值用于方程（3.19），我们确定出诸特征值为：

$$p_1^2=\frac{3-\sqrt{3}}{2}\frac{k_r}{I_1}=0.634\frac{k_r}{I_1} \tag{e'}$$

$$p_2^2=\frac{3+\sqrt{3}}{2}\frac{k_r}{I_1}=2.366\frac{k_r}{I_2}$$

从方程(3.20a)和(3.20b)，诸振幅比为：

---

* 前面有关拍的讨论见第1.7节。

地信网论坛 BBS.3500L.COM

$$r_1=\frac{2}{1+\sqrt{3}}=0.732 \qquad r_2=\frac{2}{1-\sqrt{3}}=-2.732 \tag{f'}$$

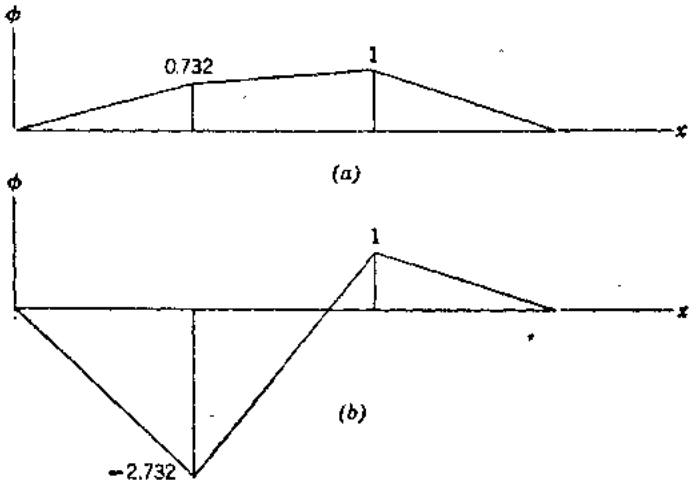


图 3.15

第一振型和第二振型的形状分别示于图3.15a和图3.15b中，图中诸振幅对右边盘的振幅归一化。

应用方程（3.26），我们求算出常数$C_1=C_3=0$，$C_2=1.352\dot{\phi}_0\sqrt{I_1/k_r}$和$C_4=-0.0502\dot{\phi}_0\sqrt{I_1/k_r}$。于是，从方程(3.25$a$)和(3.25$b$)，求出反应为：

$$\phi_1=(0.992\sin p_1 t+0.137\sin p_2 t)\,\dot{\phi}_0\sqrt{\frac{I_1}{k_r}} \tag{g'}$$

$$\phi_2=(1.352\sin p_1 t-0.0502\sin p_2 t)\,\dot{\phi}_0\sqrt{\frac{I_1}{k_r}} \tag{h'}$$

例题 2 前节中，图3.10a内的系统可以考虑为一辆支于其前面和后面诸弹簧上的汽车简化表示图。为了避免惯性耦合，我们将用C点处的质心作为跳动和俯仰运动的参考点。假设汽车具有下列特性值：

$$mg=3220\text{磅} \qquad k_1=2000\text{磅/英尺} \qquad k_2=2500\text{磅/英尺}$$

$$I_c=1500\text{磅-秒}^2\text{-英尺} \qquad l_1=4\text{英尺} \qquad l_2=6\text{英尺}$$

试确定该系统的频率和振型形状，并计算对于初始竖直平动Δ而无转动（$y_{0c}=\Delta$，$\theta_{0c}=0$，$\dot{y}_{0c}=\dot{\theta}_{0c}=0$）的自由振动反应。

解：参见前节方程（3.14c），我们看到$M_{11}=m=100$磅-秒^2/英尺，$M_{22}=I_c=1500$磅-秒^2-英尺，$S_{11}=k_1+k_2=4500$磅/英尺，$S_{12}=S_{21}=k_2l_2-k_1l_1=7000$磅和$S_{22}=k_1l_1^2+k_2l_2^2=122{,}000$磅-英尺。用这些值，方程(3.19)，(3.20$a$)和(3.20$b$)得到：

$$p_1=6.13\text{弧度/秒} \qquad p_2=9.42\text{弧度/秒}$$

$$(\tau_1\approx 1.02\text{周/秒} \qquad \tau_2\approx 0.67\text{周/秒})$$

$$r_1=-9.40\text{英尺/弧度}=-1.97\text{英寸/度}$$

$$r_2=1.59\text{英尺/弧度}=0.333\text{英寸/度}$$

图3.16a和3.16b，表示对转动归一化的第一和第二振型形状。它们等效于绕结点O'和O''的刚体转动，这些结点位于C点右边距离9.40英尺处和左边1.59英尺处。在其第一振型

时，汽车跳动得最厉害，反之，在其第二振型时，俯仰最厉害。

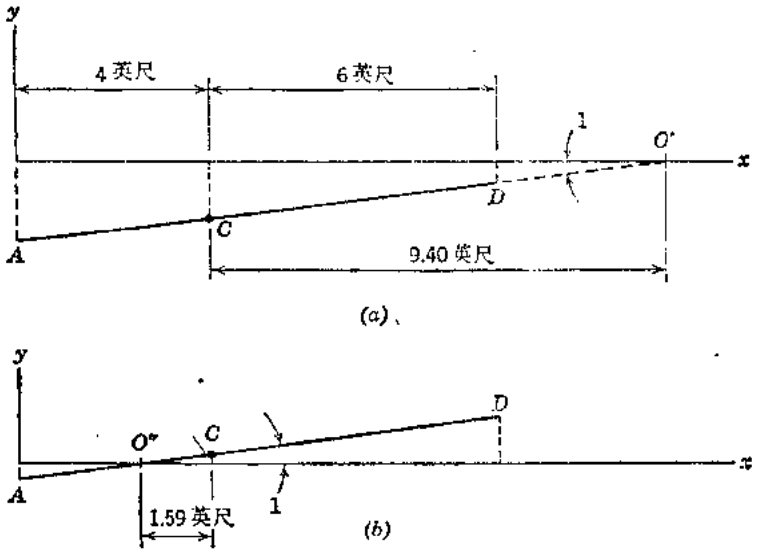


图 3.16

由于所给初始条件，从方程（3.26），诸常数为：$C_1=-C_3=-\Delta/10.99$和$C_2=C_4=0$。最后，从方程(3.25a)和(3.25b)求得汽车的反应为：

$$y_c=(0.856\cos p_1 t+0.145\cos p_2 t)\Delta$$

$$\theta_c=-0.0911(\cos p_1 t-\cos p_2 t)\Delta$$

它们为复杂的非周期性的跳动与俯仰的组合。

习 题 组 3.5

3.5—1 对于习题3.2—1中的系统（见第3.2节），假设$m_1=m_2=m$，并取$k_1=k_2=k_3=k$。试确定其特征值p_1^2和p_2^2以及模态比r_1和r_2。令初始条件$x_{01}=x_{02}=\Delta$和$\dot{x}_{01}=\dot{x}_{02}=0$，并计算自由振动反应。

答：$r_1=1$；$r_2=-1$。

3.5—2 试将习题3.2—2中规定的参数（见第3.2节）用于图3.2内的系统，求算特征值p_1^2和p_2^2，并确定模态比r_1和r_2。此外，求算该系统对于初始条件$x_{01}=\Delta$，$y_{01}=0$，$\dot{x}_{01}=\dot{y}_{01}=0$的反应。

答：$r_1=-\sqrt{3}/2$，$r_2=\sqrt{3}/2$。

3.5—3 对于习题3.2—3中的系统，令$m_1=m_2=m$，$l_1=l_2=l$和$k_1=k_2=0$（见第3.2节），试确定p_1^2、p_2^2、r_1和r_2。然后计算对初始条件$x_{01}=x_{02}=0$和$\dot{x}_{01}=\dot{x}_{02}=v$的反应。

答：$r_1=1/(1+\sqrt{2})$；$r_2=1/(1-\sqrt{2})$。

3.5—4 对于习题3.2—5中的两层框架（见第3.2节），令$m_1=2m$；$m_2=m$，$h_1=h_2=h$和$EI_1=EI_2=EI$。试求算p_1^2、p_2^2、r_1和r_2，并确定在低层水平面处突然放松静力荷载$(Q_1)_s$所产生的自由振动反应。

答：$r_1=0.894$；$r_2=-0.014$。

地信网论坛 BBS.35001.COM

3.5—5　假设对图3.7a中的系统$m_1=m_2=m$（见第3.3节例题1），并从方程(3.23a)、(3.24a)和(3.24b)计算λ_1、λ_2、r_1和r_2。然后求出由于突然放松梁自由端处的静力荷载$(Q_2)_{st}$所产生的反应。

答：　$r_1=0.168$；　$r_2=-2.86$。

3.5—6　试确定图3.8a中的系统的λ_1、λ_2、r_1和r_2（见第3.3节例题2）。由于冲击，质量得到顺x方向的初始速度v_x（$x_{01}=v_x$，　$\dot{y}_{01}=0$，$x_{01}=y_{01}=0$）。试计算对于这些初始条件的自由振动反应。

答：　$r_1=2.41$；$r_2=-0.414$

3.5—7　令习题3.3—6中系统的$m_1=m_2=m$（见第3.3节），并求算λ_1、λ_2、r_1和r_2。假定该梁从高度h处下落到它的支承上，此后借支承支持着。试确定对此初始条件的自由振动反应。

答：　$r_1=1$；　$r_2=-1$

3.5—8　假设习题3.3—8中的系统（见第3.3节），具有相等质量$m_1=m_2=m$，且假设$R=EI/GJ=1/3$，试求出λ_1、λ_2、r_1和r_2的值。此外，计算对作用于第一个质量处的静力荷载$(Q_1)_{st}$突然放松的反应。

答：　$r_1=1/(1+\sqrt{2})$；$r_2=-1/(1-\sqrt{2})$

3.5—9　假设有一个两个自由度系统的质量矩阵**M**填满了而不是对角线的，试用带有刚度系数的作用力方程，导出p_1^2、p_2^2、r_1和r_2的表达式。

3.5—10　试用带有柔度系数的位移方程，重复习题3.5—9。

3.5—11　试以A点作为刚体运动的参考点，求解本节中的例题2。对此参考点的作用力方程，如第3.4节中方程（3.14a）那样导出（解此习题需要用习题3.5—9中的诸式）。

答：　$r_1=-13.40$英尺/弧度，$r_2=-2.41$英尺/弧度

3.5—12　对图3.11中的系统（见第3.4节例题1）令$b=l/3$和$I_c=2mb^2$，试计算λ_1、λ_2、r_1和r_2。用B点作为刚体运动的参考点，对于它的位移方程如第3.4节方程（l）所给。（解此习题，需要用习题3.5—10中的诸式）

答：　$r_1=0.578l$；$r_2=-0.578l$

3.6　无阻尼强迫振动

现在我们将考虑具有两个自由度的系统的谐和激发。例如，假定图3.1a中两个质量的系统承受正弦施力函数：

$$Q_1=P_1\sin\omega t \qquad Q_2=P_2\sin\omega t \tag{a}$$

它们具有相同的频率ω，但具有不同大小的P_1和P_2。在这种情况下，运动的作用力方程[见方程(3.6)]成为：

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}+\mathbf{S}\mathbf{X}=\mathbf{P}\sin\omega t \tag{3.27}$$

式中

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}P_1\\P_2\end{bmatrix}$$

本节中，我们再仅考虑具有对角线质量矩阵的情况，并以展开的形式写出方程（3.27）：

地信网论 BBS.3500L.COM

$$\begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}\sin\omega t \tag{3.28}$$

这些方程的特解可以取为：

$$x_1=A_1\sin\omega t \qquad x_2=A_2\sin\omega t$$

或

$$\mathbf{X}=\mathbf{A}\sin\omega t \tag{b}$$

式中稳态反应的振幅为：

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$$

将方程（b）代入方程（3.28），得到下列代数方程：

$$\begin{bmatrix} S_{11}-\omega^2M_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22}-\omega^2M_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \tag{c}$$

求解**A**，我们得到：

$$\mathbf{A}=\mathbf{BP} \tag{d}$$

其中矩阵**B**为方程（c）中系数矩阵之逆。这样，

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}=\frac{1}{C}\begin{bmatrix} S_{12}-\omega^2M_{22} & -S_{12} \\ -S_{21} & S_{11}-\omega^2M_{11} \end{bmatrix} \tag{e}$$

和

$$C=(S_{11}-\omega^2M_{11})(S_{22}-\omega^2M_{22})-S_{12}^2 \tag{f}$$

B中诸项为影响系数（亦称变换函数），它可以定义为由于单位谐和施力函数所引起的稳态反应的振幅。将方程（d）代入方程（b），给出解的最终形式为：

$$\mathbf{X}=\mathbf{BP}\sin\omega t \tag{3.29}$$

它代表两个质量在角频率为ω时的简谐运动。

对于缓慢变化的干扰力（亦即，当$\omega\to 0$时），矩阵**B**成为刚度矩阵之逆，是为柔度矩阵。将方程（f）中C的式子与特征方程〔第3.5节中方程（g）〕比较，我们得出结论，当$\omega=p_1$或$\omega=p_2$时，振幅成为无穷大。这样，对于两个自由度系统，有两个共振条件，每一个相应于自由振动的两个固有频率之一。

从方程(d)，振幅A_1和A_2之比为：

$$\frac{A_1}{A_2}=-\frac{(S_{22}-\omega^2M_{22})P_1-S_{12}P_2}{S_{21}P_1+(S_{11}-\omega^2M_{11})P_2} \tag{g}$$

当$P_2=0$和$\omega\approx p_1$或$\omega=p_2$时，此比值接近第3.5节中方程（3.20a）和（3.20b）所给的r_1或r_2的第二种形式。反之，当$P_1=0$时，该比接近于共振条件下r_1或r_2的第一种形式。更一般地，如果我们用$-S_{12}$去除方程（g）的分子和分母，我们看到：

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{r_iP_1+P_2}{P_1+P_2/r_i}=r_i \qquad (i=1,\ 2) \tag{3.30}$$

此结果，意味着对于每一共振条件，其强迫振动按其相应的主振型。

为了作出两个自由度系统稳态振幅的反应谱，我们必须对问题的参数假定具体值。这样，对于图3.1a中两个质量系统，我们取$m_1=2m$，$m_2=m$和$k_1=k_2=k$，为了便于绘图，我们引进下列符号：

$$p_0^2=\frac{k_1}{m_1}=\frac{k}{2m} \tag{h}$$

地信网论坛 BBS.3500I.COM

求算以 p_0^2 表达该系统的特征值（见方程3.19）：

$$p_1^2 = 0.586 p_0^2 \qquad p_2^2 = 3.414 p_0^2 \tag{i}$$

当矩阵B 以 p_0^2 表达求算时，它成为：

$$\mathbf{B} = \frac{k}{C}\begin{bmatrix} 1 - \omega^2/2p_0^2 & 1 \\ 1 & 2(1-\omega^2/2p_0^2) \end{bmatrix} \tag{j}$$

式中

$$C = k^2\left[2(1-\omega^2/2p_0^2)^2 - 1\right] \tag{k}$$

在这种情况下，B矩阵中所有各项的单位都相同，所以，它可以借乘以k的简单运算使之成为无量纲。因此，我们令：

$$\boldsymbol{\beta} = k\mathbf{B} \tag{l}$$

并将方程（3.29）重新写成：

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\beta}(\mathbf{P}/k)\sin\omega t \tag{m}$$

方程（m）类似于第1.6节中的方程（1.24），$\boldsymbol{\beta}$矩阵可以看作为放大因子的阵列（不取绝对值）。

图3.17表示下列放大因子的无量纲图：

$$\beta_{11} = \frac{1 - \omega^2/2p_0^2}{2(1-\omega^2/2p_0^2)^2 - 1} \tag{n}$$

$$\beta_{21} = \frac{1}{2(1-\omega^2/2p_0^2)^2 - 1} \tag{o}$$

它们与函数$(P_1/k)\sin\omega t$有关。当$\omega = 0$时，这两个因子均为1，当ω增大时，它们都是正的，表明质量与干扰力$P_1\sin\omega t$同相振动。当ω接近第一固有频率p_1的值时，两个因子趋近于无穷大。当ω成为稍大于p_1时，两个因子都是负的，表明诸质量与力不同相，但是彼此仍同相。将ω进一步增大，两个因子都减小*直到因子β_{11}成为零（当$\omega = \sqrt{2}\,p_0$）为止，此时β_{21}具有-1值。当ω超过$\sqrt{2}\,p_0$值时，β_{11}是正的，而β_{21}保持负的。这意味着诸质量彼此不同相，但是第一个质量又与力同相。当$\omega = p_2$时，两因子第二次成为无穷大。当ω增大远远超过p_2时，两质量的运动趋向于零。

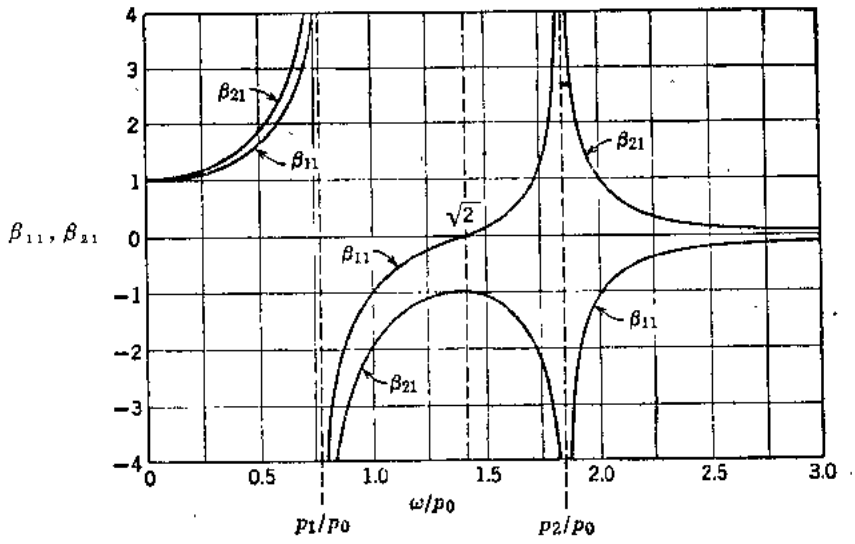


图 3.17

* 是指两个因子的绝对值减小 —— 译注

地信网论坛 BBS.3500L.COM

当 $\omega=\sqrt{2}\,p_0$ 时，β_{11} 成为零的事实是特别重要的，在此频率时，第一个质量是停驻的，而第二个质量按振幅 $-P_1/k$ 与施力函数相反运动。从方程（e）中 β_{11} 的定义看到：当

$$\omega=\sqrt{S_{22}/M_{22}} \qquad (p)$$

时，它成为零，对于两个质量的系统，此式等于 $\sqrt{k_2/m_2}=\sqrt{2}\,p_0$。为了说明此条件如何可以有利地应用，考虑图 3.18a 中质量为 m_1 支于刚度为 k_1 的梁上的电动机，当其角频率处于临界值 $\omega_{cr}=\sqrt{k_1/m_1}$ 时，由于转子的不平衡所产生的转动力向量 P_1，可以引起该系统强烈振动。为了抑制这些强迫振动，我们附上一个带有刚度为 k_2 的弹簧的辅助质量 m_2，如图3.18b中所示。如果 m_2 和 k_2 按使 $\sqrt{k_2/m_2}=\omega_{cr}$ 来选定，那么，我们得到电动机的振动消失的两个自由度的系统，而辅助质量以振幅 $-P_1/k_2$ 振动。这样一种辅助系统，称为动力阻尼器，因为它可以防止常速率机器在无实际阻尼下的振动。为了设计这种“阻尼器”，我们首先选定 k_2，以使振幅 $-P_1/k_2$ 为适当值，然后选定适使 $\sqrt{k_2/m_2}=\omega_{cr}$ 的质量。为了在不是 ω_{cr} 的速率时有效，动力阻尼器要求实际的阻尼（见第3.8节末尾处的例题）。

如早先第1.6节所述，强迫振动也可能由于周期性地面运动而产生。例如，假定图3.1a中，地面按简谐函数 $x_g=d\sin\omega t$ 顺 x 方向平动，这里 d 为位移振幅。在这种情况下，运动的作用力方程为：

$$m_1\ddot{x}_1=-k_1(x_1-x_g)+k_2(x_2-x_1) \qquad (q)$$

$$m_2\ddot{x}_2=-k_2(x_2-x_1) \qquad (r)$$

这些方程可以按矩阵形式写成：

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}+\mathbf{S}\mathbf{X}=\mathbf{P}_g\sin\omega t \qquad (3.31)$$

方程（3.31）中的阵列 $\mathbf{P}_g$，由因为地面位移引起通过诸弹簧传递给诸质量的最大力组成。在此情况下，仅 $\mathbf{P}_g$ 中诸项之一为非零，我们取

$$\mathbf{P}_g=\begin{bmatrix}k_1 d\\0\end{bmatrix} \qquad (s)$$

反之，假定水平地面加速度指定为 $\ddot{x}_g=a\sin\omega t$，式中 a 为加速度的幅度。在此情况下，我们将诸坐标改变为相对位移：

$$x_1^*=x_1-x_g \qquad x_2^*=x_2-x_g \qquad (t)$$

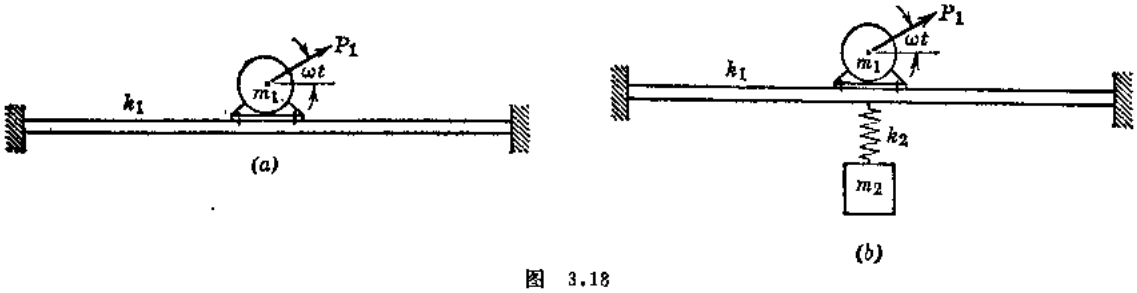


图 3.18

相应的加速度为：

$$\ddot{x}_1^*=\ddot{x}_1-\ddot{x}_g \qquad \ddot{x}_2^*=\ddot{x}_2-\ddot{x}_g \qquad (u)$$

于是，按相对坐标，作用力方程可以写成：

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}^*+\mathbf{S}\mathbf{X}^*=\mathbf{P}_g^*\sin\omega t \qquad (3.32)$$

地信网论坛 BBS.3500L.COM

对于图3.1a中，两个质量的系统，方程（3.32）中阵列$\mathbf{P}_g^*$成为：

$$\mathbf{P}_g^* = -\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} a \qquad (v)$$

这样，我们总可以将由于支承运动产生的强迫振动问题，写成与相应于位移坐标所施加的作用力问题相同的数学形式。另外，总可能把不相当于位移坐标所施加的力的作用，计算为相当于位移坐标的等效荷载*。如果我们用位移方程而不用作用力方程去分析强迫振动，那么方程（3.27）用下式代替：

$$\mathbf{FM}\ddot{\mathbf{X}} + \ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{FP}\sin\omega t \qquad (3.33)$$

或按展开的形式，我们得到：

$$\begin{bmatrix} F_{11}M_{11} & F_{12}M_{22} \\ F_{21}M_{11} & F_{22}M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \sin\omega t \qquad (3.34)$$

将方程（b）代入方程（3.34）得到：

$$\begin{bmatrix} 1-\omega^2 F_{11}M_{11} & -\omega^2 F_{12}M_{22} \\ -\omega^2 F_{21}M_{11} & 1-\omega^2 F_{22}M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \qquad (w)$$

在此情况下，$\mathbf{A}$的解可以写成：

$$\mathbf{A} = \mathbf{DFP} \qquad (x)$$

式中矩阵$\mathbf{D}$为方程（w）左边系数矩阵之逆。这样，

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{H} \begin{bmatrix} 1-\omega^2 F_{22}M_{22} & \omega^2 F_{12}M_{22} \\ \omega^2 F_{21}M_{11} & 1-\omega^2 F_{11}M_{11} \end{bmatrix} \qquad (y)$$

式中

$$H = (1-\omega^2 F_{11}M_{11})(1-\omega^2 F_{22}M_{22}) - \omega^4 F_{12}^2 M_{11}M_{22} \qquad (z)$$

$\mathbf{D}$中诸项为影响系数，它们可定义为由于诸质量的单位谐和位移所引起稳态反应的振幅。将方程（x）代入方程（b）得解如下：

$$\mathbf{X} = \mathbf{DFP}\sin\omega t \qquad (3.35)$$

将方程（3.35）与方程（3.29）比较，我们得出结论：

$$\mathbf{DF} = \mathbf{B} \qquad (3.36a)$$

所以，

$$\mathbf{D} = \mathbf{BS} \qquad (3.36b)$$

虽然$\mathbf{B}$和$\mathbf{S}$二者都是对称的，但是它们的乘积$\mathbf{D}$，通常是非对称的。

我们也可以引进下列符号：

$$\mathbf{\Delta}_{st} = \mathbf{FP} \qquad (3.37)$$

用此恒等式，我们重新将方程（3.33）写成：

$$\mathbf{FM}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{X} = \mathbf{\Delta}_{st}\sin\omega t \qquad (3.38)$$

于是，方程（3.35）中的解成为：

$$\mathbf{X} = \mathbf{D\Delta}_{st}\sin\omega t \qquad (3.39)$$

它类似第1.6节中例题4的方程（u）。矩阵$\mathbf{\Delta}_{st}$，由定义为因施力函数最大的值静力作用所引起质量的位移项组成。当形成方程（3.37）时，$\mathbf{\Delta}_{st}$中的诸项，由相应于位移坐标所施加

* 见Gere 和 Weaver, Analysis of Framed Structures, 第136—138页。

地信网论 BBS.3500L.COM

的作用力产生，但是诸相似项也可以由其它类型的作用力或由支承运动产生。

对于图3.1a中的系统，其地面谱和平动，用方程（3.38）进行分析是特别容易的。如果地面位移如前面那样借$x_g=d\sin\omega t$给出，那么，阵列$\mathbf{\Delta}_{st}$简单地成为：

$$\mathbf{\Delta}_{st}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}d \tag{a'}$$

它代表系统的刚体运动。反之，借$\ddot{x}_g=a\sin\omega t$所给的地面加速度比较难以处理。按相对坐标，方程(3.38)〔见方程(t)和(u)〕成为：

$$\mathbf{FM}\ddot{\mathbf{X}}^*+\mathbf{X}^*=\mathbf{\Delta}_{st}^*\sin\omega t \tag{3.40}$$

式中

$$\mathbf{\Delta}_{st}^*=\mathbf{FP}_g^* \tag{b'}$$

例题1 假设图3.1a中，两个质量系统受到正弦地面位移$x_g=d\sin\omega t$的作用。如同作图3.17中反应谱曲线那样，我们取$m_1=2m$，$m_2=m$和$k_1=k_2=k$。该系统的稳态反应用作用力方程法和位移方程技巧计算。

解：对于此系统，矩阵**B**〔见方程(j)和(k)〕和$\mathbf{P}_g$〔见方程(s)〕早已确定出来，我们可以立即将它们代入方程（3.29）得到结果为：

$$x_1=\frac{(1-\omega^2m/k)d\sin\omega t}{2(1-\omega^2m/k)^2-1} \tag{c'}$$

$$x_2=\frac{d\sin\omega t}{2(1-\omega^2m/k)^2-1} \tag{d'}$$

其次，我们用柔度$F_{11}=F_{12}=F_{21}=\delta$和$F_{22}=2\delta$推导出矩阵**D**〔见方程（$y$）和（$z$）〕：

$$\mathbf{D}=\frac{1}{H}\begin{bmatrix}1-2\omega^2m\delta & \omega^2m\delta\\ 2\omega^2m\delta & 1-2\omega^2m\delta\end{bmatrix} \tag{e'}$$

其中

$$H=(1-2\omega^2m\delta)^2-2\omega^4m^2\delta^2=2(1-\omega^2m\delta)^2-1 \tag{f'}$$

将**D**和$\mathbf{\Delta}_{st}$〔见方程(a')〕，代入方程（3.39）得到：

$$x_1=\frac{(1-\omega^2m\delta)d\sin\omega t}{2(1-\omega^2m\delta)^2-1} \tag{g'}$$

$$x_2=\frac{d\sin\omega t}{2(1-\omega^2m\delta)^2-1} \tag{h'}$$

由于$\delta=1/k$，我们看到方程（g'）和（h'）与方程（c'）和（d'）相同。

例题2 假定图3.8a中的框架（见第3.3节的例题2）承受上右角处顺z方向作用的扭矩$T=T_m\cos\omega t$。试确定由于这种激发所引起质量（附于框架自由端）的稳态反应。

解：我们将用位移方程法，回顾诸柔度$F_{11}=4l^3/3EI$，$F_{12}=F_{21}=l^3/2EI$和$F_{22}=l^3/3EI$来分析此系统。另外，诸质量项$M_{11}=M_{22}=m$。将这些值用于方程(y)和(z)中，我们推导出**D**矩阵为：

$$\mathbf{D}=\frac{1}{H}\begin{bmatrix}1-\omega^2ml^3/3EI & \omega^2ml^3/2EI\\ \omega^2ml^3/2EI & 1-4\omega^2ml^3/3EI\end{bmatrix} \tag{i'}$$

式中

$$H=1-5\omega^2ml^3/3EI+7\omega^4m^2l^6/36(EI)^2 \tag{j'}$$

静止地作用于框架右上角的最大扭矩T_m引起该质量顺x方向平动量T_ml^2/EI和顺y方向

地信网论坛 BBS.3500L.COM

平动量$T_m l^2/2EI$。所以，对此问题，矩阵$\mathbf{\Delta}_{,t}$成为：

$$\mathbf{\Delta}_{,t}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\frac{T_m l^2}{2EI} \qquad (k')$$

将这些阵列代入方程（3.39），以$\cos\omega t$代替$\sin\omega t$，得到下列结果：

$$x_1=\left(12-\frac{\omega^2 ml^3}{EI}\right)(T_m l^2\cos\omega t)/12EIH \qquad (l')$$

$$y_1=\left(3-\frac{\omega^2 ml^3}{EI}\right)(T_m l^2\cos\omega t)/6EIH \qquad (m')$$

3.7 具有粘滞阻尼的自由振动

图3.19a表示一个具有粘滞阻尼常数为c_1和c_2的减震阻尼器的两质量系统。如果没有荷载作用到系统上，那么运动的作用力方程为（见图3.19b）：

$$m_1\ddot{x}_1=-c_1\dot{x}_1+c_2(\dot{x}_2-\dot{x}_1)-k_1x_1+k_2(x_2-x_1) \qquad (a)$$

$$m_2\ddot{x}_2=-c_2(\dot{x}_2-\dot{x}_1)-k_2(x_2-x_1) \qquad (b)$$

按简洁的矩阵符号，这些方程成为：

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}+\mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}+\mathbf{S}\mathbf{X}=\mathbf{0} \qquad (3.41)$$

式中

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1+c_2 & -c_2\\ -c_2 & c_2\end{bmatrix} \qquad \dot{\mathbf{X}}=\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} \qquad (c)$$

方程（3.41）中的其它矩阵按前面所定义。阻尼矩阵$\mathbf{C}$包括阻尼影响系数，这些系数可以定义为单位速度所需要的作用力。亦即，粘滞阻尼系数的阵列中任一项C_{ij}，为一个与第j类单位速度有关的阻尼作用力相平衡的第i类作用力。这个定义类似于刚度系数和惯性系数的定义，推导$\mathbf{C}$中诸列的过程类似于前面确定$\mathbf{S}$和$\mathbf{M}$中诸列所述的过程。如果按照这样一种程序，那么阻尼矩阵总是对称的。

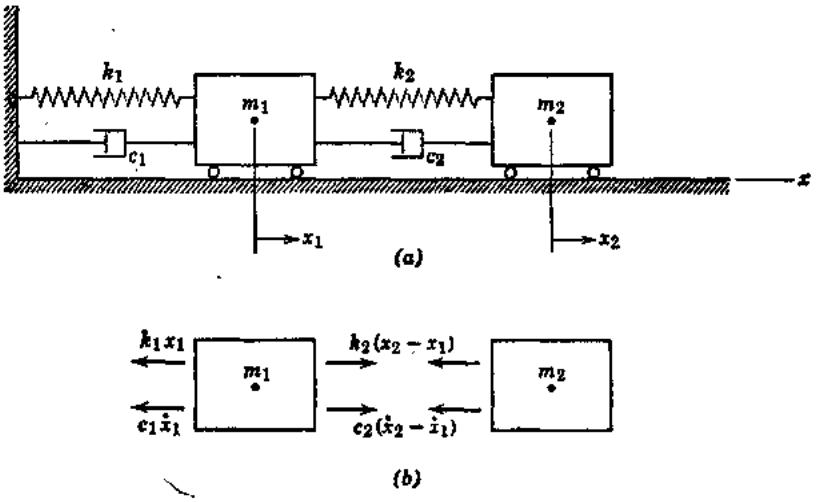


图 3.19

因为方程（3.41）中出现速度项，所以诸齐次微分方程的解，比第3.5节中无阻尼的情况要复杂。这里我们将寻找一般形式的解：

地信网论坛 BBS.3500I.COM

$$x_1 = A_1 e^{st} \qquad (d)$$

$$x_2 = A_2 e^{st} \qquad (e)$$

将方程（d）和（e）以及它们的导数代入方程（3.41），得到下列代数方程：

$$\begin{bmatrix} M_{11}s^2 + C_{11}s + S_{11} & C_{12}s + S_{12} \\ C_{21}s + S_{21} & M_{22}s^2 + C_{22}s + S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (f)$$

对于不平凡解，方程（f）中系数矩阵的行列式必定等于零。因此，我们得到特征方程为：

$$(M_{11}s^2 + C_{11}s + S_{11})(M_{22}s^2 + C_{22}s + S_{22}) - (C_{12}s + S_{12})^2 = 0 \qquad (g)$$

或

$$M_{11}M_{22}s^4 + (M_{11}C_{22} + M_{22}C_{11})s^3 + (M_{11}S_{22} + C_{11}C_{22} + M_{22}S_{11} - C_{12}^2)s^2 + (C_{11}S_{22} + C_{22}S_{11} - 2C_{12}S_{12})s + S_{11}S_{22} - S_{12}^2 = 0 \qquad (h)$$

如果对图3.19a中的系统采用实际值$M_{11}=m_1$，$M_{22}=m_2$，那么，方程（h）稍微简化。当这些值代入方程（h），它成为：

$$m_1m_2s^4 + [m_1c_2 + m_2(c_1 + c_2)]s^3 + [m_1k_2 + c_1c_2 + m_2(k_1 + k_2)]s^2 + (c_1k_2 + c_2k_1)s + k_1k_2 = 0 \qquad (i)$$

此式，必须用求多项式的根的某种数值法来求解，但是其解的一般形式是已知的，将作详细的讨论。

由于方程（i）中所有系数都是正的，所有这个四阶多项式的非零根可以既不是实根和正根，又不是带有正的实部的复根*。剩下的可能性是它们不是实根和负根（就是带有负的实部的复根）。如果阻尼很小，那么该系统可以自由振动，而且所有非零根将都是复根。它们按共轭对出现，可以表这为：

$$s_{11} = -n_1 + ip_{d1} \qquad s_{12} = -n_1 - ip_{d1} \qquad (3.42a)$$

和

$$s_{21} = -n_2 + ip_{d2} \qquad s_{22} = -n_2 - ip_{d2} \qquad (3.42b)$$

符号n_1和n_2代表可归因于阻尼的正数，而p_{d1}和p_{d2}表示阻尼角频率。将这些根的每一个根代入方程（f）中，我们得到相应的振幅比：

$$r_{jk} = \frac{-C_{12}s_{jk} - S_{12}}{M_{11}s_{jk}^2 + C_{11}s_{jk} + S_{11}} = \frac{M_{22}s_{jk}^2 + C_{22}s_{jk} + S_{22}}{-C_{21}s_{jk} - S_{21}} \qquad (3.43)$$

式中$j=1$或2和$k=1$或2。所得的比值r_{11}，r_{12}和r_{21}、r_{22}都是复共轭对。于是其解可以写为：

$$x_1 = r_{11}A_{11}e^{s_{11}t} + r_{12}A_{12}e^{s_{12}t} + r_{21}A_{21}e^{s_{21}t} + r_{22}A_{22}e^{s_{22}t} \qquad (3.44a)$$

$$x_2 = A_{11}e^{s_{11}t} + A_{12}e^{s_{12}t} + A_{21}e^{s_{21}t} + A_{22}e^{s_{22}t} \qquad (3.44b)$$

其中系数A_{11}、A_{12}和A_{21}、A_{22}都是复共轭对，必须从初始条件来确定。

如同对第1.8节一个自由度系统那样进行，我们可以将方程（3.44a）和（3.44b）变换为等效三角表达式。我们重新写出方程（3.44b）中x_2的前两项为：

$$A_{11}e^{s_{11}t} + A_{12}e^{s_{12}t} = e^{-n_1t}(C_1\cos p_{d1}t + C_2\sin p_{d1}t)$$

---

* J.W.S.Rayleigh, Theory of Sound, 2nd ed. Vol.1, Dover Publications, New York, 1945, p.142(Sec. 103b)。

地信网论坛 BBS.35001.COM

式中

$$\cos p_{d1}t=\frac{e^{ip_{d1}t}+e^{-ip_{d1}t}}{2} \qquad \sin p_{d1}t=\frac{e^{ip_{d1}t}-e^{-ip_{d1}t}}{2i}$$

和

$$C_1=A_{11}+A_{12} \qquad C_2=i(A_{11}-A_{12}) \tag{j}$$

它们都是实常数。方程（3.44a）中诸相应项，将借引进下列代表第一对复共轭振幅比的符号变换为三角形式：

$$r_{11}=a+ib \qquad r_{12}=a-ib \tag{k}$$

于是，我们按等效形式重新写出x_1的前两项：

$$r_{11}A_{11}e^{ip_{d1}t}+r_{12}A_{12}e^{ip_{d2}t}$$
$$=e^{-n_1t}[(C_1a-C_2b)\cos p_{d1}t+(C_1b+C_2a)\sin p_{d1}t]$$

类似地，x_1和x_2的最后两项可以用下面实常数

$$C_3=A_{21}+A_{22}' \qquad C_4=i(A_{21}-A_{22}) \tag{l}$$

并引进下面符号：

$$r_{21}=c+id \qquad r_{22}=c-id \tag{m}$$

变换为三角形式。

按这种形式，其全解成为：

$$x_1=e^{-n_1t}(r_1C_1\cos p_{d1}t+r_1'C_2\sin p_{d1}t)$$
$$+e^{-n_2t}(r_2C_3\cos p_{d2}t+r_2'C_4\sin p_{d2}t) \tag{3.45a}$$
$$x_2=e^{-n_1t}(C_1\cos p_{d1}t+C_2\sin p_{d1}t)$$
$$+e^{-n_2t}(C_3\cos p_{d2}t+C_4\sin p_{d2}t) \tag{3.45b}$$

式中实振型比为：

$$r_1=\frac{C_1a-C_2b}{C_1} \qquad r_1'=\frac{C_1b+C_2a}{C_2}$$
$$r_2=\frac{C_3c-C_4d}{C_3} \qquad r_2'=\frac{C_3d+C_4c}{C_4} \tag{n}$$

方程（3.45a）和（3.45b）与它们无阻尼振动的对应部分，在许多方面是相似的〔见第3.5节中方程（3.25a）和（3.25b）〕。然而，它们在一些重要方面与较简单式不同。振幅按照因子e^{-n_1t}和e^{-n_2t}随时间减小，最后完全消失。此外，阻尼角频率p_{d1}和p_{d2}与无阻尼情况不相同。还有，在阻尼情况下有四个振幅比，反之，只两个比值表示无阻尼振型的特征。因此，方程（3.45a）中x_1的表达式的第一部分与方程（3.45b）中x_2的表达式的第一部分不同相。类似地，x_1的表达式的第二部分与x_2的表达式的第二部分不同相。我们借相角形式写出这些部分，清楚地看到其相位差如下：

$$x_1=B_1'e^{-n_1t}\cos(p_{d1}t-\alpha_{d1}')+B_2'e^{-n_2t}\cos(p_{d2}t-\alpha_{d2}') \tag{3.46a}$$
$$x_2=B_1e^{-n_1t}\cos(p_{d1}t+\alpha_{d1})+B_2e^{-n_2t}\cos(p_{d2}t-\alpha_{d2}) \tag{3.46b}$$

其中

$$B_1=\sqrt{C_1^2+C_2^2} \qquad B_2=\sqrt{C_3^2+C_4^2}$$
$$B_1'=B_1\sqrt{a^2+b^2} \qquad B_2'=B_2\sqrt{c^2+d^2} \tag{o}$$

和

$$\alpha_{d1}=\tan^{-1}\left(\frac{C_2}{C_1}\right) \qquad \alpha_{d2}=\tan^{-1}\left(\frac{C_4}{C_3}\right)$$

地信网论坛 BBS.35001.COM

$$\alpha'_{d1}=\tan^{-1}\left(\frac{r'_1C_2}{r_1C_1}\right) \qquad \alpha'_{d2}=\tan^{-1}\left(\frac{r'_2C_4}{r_2C_3}\right) \tag{p}$$

这样，第3.5节中所定义的主振型，对于现在考虑中有阻尼的两个自由度系统不存在。存在的固有振型具有相位关系，使分析复杂化。对于具有多个自由度系统的主振型和阻尼的课题，将在第4章中作进一步的讨论。

如果粘滞阻尼系数非常小，那么特征方程（h）趋向无阻尼情况。我们采取下列近似值：

$$p_{d1}\approx p_1 \qquad p_{d2}\approx p_2$$
$$r'_1\approx r_1 \qquad r'_2\approx r_2 \tag{q}$$

用这些假设，方程（3.45a）和（3.45b）简化为：

$$x_1\approx r_1e^{-n_1t}(C_1\cos p_1t+C_2\sin p_1t)+r_2e^{-n_2t}(C_3\cos p_2t+C_4\sin p_2t) \tag{3.47a}$$

$$x_2\approx e^{-n_1t}(C_1\cos p_1t+C_2\sin p_1t)+e^{-n_2t}(C_3\cos p_2t+C_4\sin p_2t) \tag{3.47b}$$

为了求算常数C_1—C_4，我们将初始条件x_{01}、x_{02}、$\dot{x}_{01}$和$\dot{x}_{02}$（在时间$t=0$处）代入方程（3.47a）、（3.47b）和它们的导数中。所得这些常数的公式为：

$$C_1\approx\frac{x_{01}-r_2x_{02}}{r_1-r_2} \qquad C_2\approx\frac{\dot{x}_{01}+n_1x_0-r_2(\dot{x}_{02}+n_1x_{02})}{p_1(r_1-r_2)}$$

$$C_3\approx\frac{r_1x_{02}-x_{01}}{r_1-r_2} \qquad C_4\approx\frac{r_1(\dot{x}_{02}+n_2x_{02})-(\dot{x}_{01}+n_2x_{01})}{p_2(r_1-r_2)} \tag{r}$$

反之，如果阻尼非常大，那么特征方程的所有根，将都是实的且负的。在此情况下，其解不是振动的，可以表示为：

$$x_1=r_1D_1e^{-u_1t}+r_2D_2e^{-u_2t}+r_3D_3e^{-u_3t}+r_4D_4e^{-u_4t} \tag{3.48a}$$

$$x_2=D_1e^{-u_1t}+D_2e^{-u_2t}+D_3e^{-u_3t}+D_4e^{-u_4t} \tag{3.48b}$$

式中 u_1——u_4均为正数。另外，常数D_1——D_4和r_1——r_4都是实数。

也可能有两个是实的且负的根，而另外两个为带有负实部的复共轭根。在这样一种情况下，其解可以写成：

$$x_1=e^{-n_1t}(r_1C_1\cos p_dt+r'_1C_2\sin p_dt)+r_3C_3e^{-u_3t}+r_4C_4e^{-u_4t} \tag{3.49a}$$

$$x_2=e^{-n_1t}(C_1\cos p_dt+C_2\sin p_dt)+C_3e^{-u_3t}+C_4e^{-u_4t} \tag{3.49b}$$

阻尼自由振动也可以用运动的位移方程而不用作用力方程来分析。用这种方法，其微分方程成为：

$$\mathbf{F}(\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}+\mathbf{C}\dot{\mathbf{X}})+\mathbf{X}=\mathbf{0} \tag{3.50}$$

这种方法的细节与用运动的作用力方程的细节相类似，这里不作讨论。

3.8 具有粘滞阻尼的强迫振动

令图3.19a中的系统受到下面按复式给出的一般谐和激发：

$$\mathbf{Q}=\mathbf{P}e^{i\omega t}=\mathbf{P}(\cos\omega t+i\sin\omega t) \tag{a}$$

式中向量**P**具有与第3.6节方程（3.27）中相同的意义。于是第3.7节中方程（3.41）成

地信网论坛 BBS.3500L.COM

为：

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{S}\mathbf{X} = \mathbf{P}e^{i\omega t} \tag{3.51}$$

仅考虑稳态强迫振动，我们假设其解为复式：

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}e^{i\omega t} \tag{b}$$

将方程（b）和其导数代入方程（3.51），得到下列代数矩阵方程：

$$(\mathbf{S} - \omega^2\mathbf{M} + i\omega\mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{P} \tag{c}$$

对方程（c）中$\mathbf{A}$求解，我们得到：

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}^*\mathbf{P} \tag{d}$$

将方程（d）代入方程（b）表示其解为：

$$\mathbf{X} = \mathbf{B}^*\mathbf{P}e^{i\omega t} \tag{3.52}$$

它代表角频率为ω的两个质量的谐和运动。

从方程（c）和（d），我们看到矩阵$\mathbf{B}^*$的定义为：

$$\mathbf{B}^* = (\mathbf{S} - \omega^2\mathbf{M} + i\omega\mathbf{C})^{-1} \tag{e}$$

这个阵列与第3.6节中矩阵$\mathbf{B}$相似，但是$\mathbf{B}^*$包括由于阻尼产生的虚部。当$\mathbf{M}$是对角线矩阵时，$\mathbf{B}^*$的展开形式成为：

$$\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} B^*_{11} & B^*_{12} \\ B^*_{21} & B^*_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{C^*}\begin{bmatrix} S_{22} - \omega^2 M_{22} + i\omega C_{22} & -S_{12} - i\omega C_{12} \\ -S_{21} - i\omega C_{21} & S_{11} - \omega^2 M_{11} + i\omega C_{11} \end{bmatrix} \tag{f}$$

式中

$$C^* = (S_{11} - \omega^2 M_{11} + i\omega C_{11})(S_{22} - \omega^2 M_{22} + i\omega C_{22}) - (S_{12} + i\omega C_{12})^2 \tag{g}$$

$\mathbf{B}^*$中的诸项为称为复变换函数的影响系数。在这样一个阵列中，其复数代表由于单位谐和施力函数所引起稳态阻尼反应的振幅和相位。

对复数应用标准关系式，我们可以以实的振幅和相角，表达方程（3.52）所给的解：

$$x_1 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{g^2 + h^2}} P_1\cos(\omega t - \theta_1) + \frac{\sqrt{c^2 + d^2}}{\sqrt{g^2 + h^2}} P_2\cos(\omega t - \theta_2) \tag{3.53a}$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{c^2 + d^2}}{\sqrt{g^2 + h^2}} P_1\cos(\omega t - \theta_2) + \frac{\sqrt{e^2 + f^2}}{\sqrt{g^2 + h^2}} P_2\cos(\omega t - \theta_3) \tag{3.53b}$$

其中

$$\begin{aligned} a &= S_{22} - \omega^2 M_{12} \\ b &= \omega C_{22} \\ c &= S_{12} \\ d &= \omega C_{12} \\ e &= S_{11} - \omega^2 M_{11} \\ f &= \omega C_{11} \\ g &= (S_{11} - \omega^2 M_{11})(S_{22} - \omega^2 M_{22}) - S_{12}^2 - \omega^2(C_{11}C_{22} - C_{12}^2) \\ h &= \omega[C_{11}(S_{22} - \omega^2 M_{22}) + C_{22}(S_{11} - \omega^2 M_{11}) - 2C_{12}S_{12}] \end{aligned} \tag{h}$$

和

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \tan^{-1}\left(\frac{ah - bg}{ag + bh}\right) \\ \theta_2 &= \tan^{-1}\left(\frac{ch - dg}{cg + dh}\right) \end{aligned} \tag{i}$$

地信网论坛 BBS.35001.COM

$$\theta_3=\tan^{-1}\left(\frac{eh-fg}{eg+fh}\right)$$

例题 为了将阻尼强迫振动原理用于实际问题，我们重新考虑图3.18 b 中所表示并在第3.6节中作了简短讨论的动力阻尼器。图 3.20 以图示说明在主要质量 m_1 与辅助质量 m_2 之间安装了一个减震阻尼器的这类装置。因为包括阻尼，该辅助系统*称为振动吸收器**，它可以抑制变速率机器和常速率机器中的振动。如图所示。一个简谐施力函数 $P\cos\omega t$ 作用于主要质量上，减震阻尼器的阻尼系数用 c 表示。由于质量 m_1 的反应的振幅是最重要的，所以我们从方程（3.53 a）采取此项为：

$$x_{m1}=\frac{P\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{g^2+h^2}}$$

$$=\frac{P\sqrt{(k_2-\omega^2m_2)^2+(\omega c)^2}}{\sqrt{[(k_1-\omega^2m_1)(k_2-\omega^2m_2)-\omega^2m_2k_2]^2+[(\omega c)(k_1-\omega^2m_1-\omega^2m_2)]^2}} \tag{j}$$

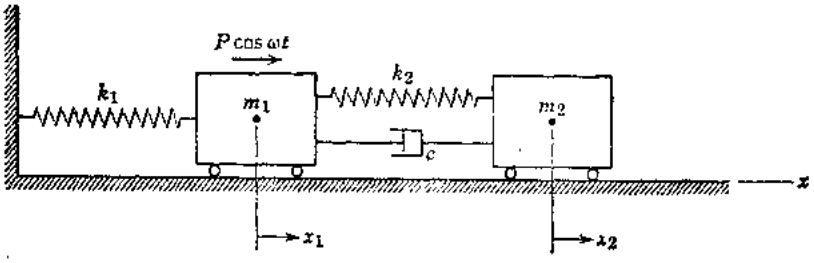


图 3.20

为了进一步简化振动吸收器的讨论，我们借引进下列符号使全部式子成为无量纲者：

$\Delta_{st}=P/k_1$ ＝由于力 P 所产生的静力变位；

$p_0=\sqrt{k_1/m_1}$ ＝单独主系统的角频率；

$p_a=\sqrt{k_2/m_2}$ ＝单独辅助系统的角频率；

$\beta=m_2/m_1$ ＝吸收器质量与主要质量之比；

$\delta=p_a/p_0$ ＝吸收器的频率与主系统的频率比；

$\gamma=\omega/p_0$ ＝干扰力的频率与主系统的频率比；

用这些定义，方程（j）可以重新写成：

$$\frac{x_{m1}^2}{\Delta_{st}^2}=\frac{4\mu^2\gamma^2+(\gamma^2-\delta^2)^2}{4\mu^2\gamma^2(\gamma^2-1+\beta\gamma^2)^2+[\beta\delta^2\gamma^2-(\gamma^2-1)(\gamma^2-\delta^2)]^2} \tag{k}$$

其中阻尼用 $\mu=c/2m_2p_0$ 来定义。

借取 $\mu=0$，我们从方程（k）得到：

$$\frac{x_{m1}}{\Delta_{st}}=\frac{\gamma^2-\delta^2}{\beta\delta^2\gamma^2-(\gamma^2-1)(\gamma^2-\delta^2)} \tag{l}$$

当 $\beta=1/20$ 和 $\delta=1$ 的振幅时，$\mu=0$ 的反应谱借图3.21中的虚曲线表示。应注意（l）式的绝对值已绘于该图中，而此式在 $\gamma=0.895$ $\gamma=1$ 和 $\gamma=1.12$ 时发生变号。

另一种极端情况是借取 $\mu=\infty$ 来定义。如果阻尼无穷大，那么质量 m_1 与 m_2 之间无相对运

---

* 指辅助质量 m_2 和减震阻尼器。 ——译注

** J.Ormondroyd和J.P.Den Hartog, "Theory of Dynamic Vibration Absorber", Trans. ASME, vol. 50, 1928, p.APM-241.

地信网论坛 BBS.3500L.COM

动。这样，我们得到一个质量为m_1+m_2、弹簧常数为k_1的一个自由度系统。为了确定这种系统强迫振动的振幅，方程（k）给出：

$$\frac{x_{m1}^2}{\Delta_{st}^2}=\frac{1}{(\gamma^2-1+\beta\gamma^2)^2} \qquad (m)$$

其临界频率比借令（m）的字母等于零得出：

$$\gamma_{cr}=\frac{1}{\sqrt{1+\beta}}=0.976 \qquad (n)$$

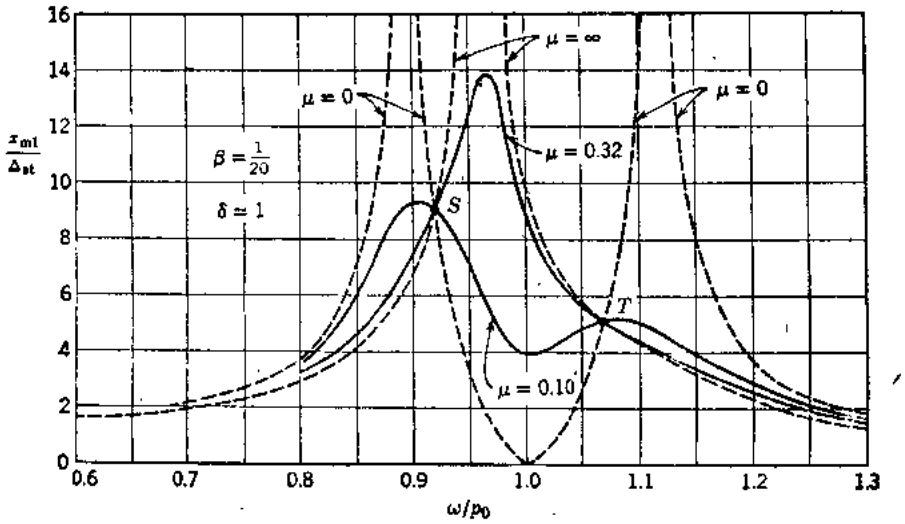


图 3.21

对于$\mu=\infty$的反应谱也用虚曲线示于图3.21中。此反应谱与图1.22中具有一个自由度的系统相同（见第1.6节）。对于任何其它μ值，其共振曲线可借应用（k）式绘出。在图3.21中，表示了$\mu=0.10$的曲线和$\mu=0.32$的曲线。

有趣的是注意：图3.21中所有曲线都交于S点和T点。这意味着对于这两个相应γ值，质量m_1的强迫振动之振幅与阻尼量无关。这些γ值可借令方程（l）和方程（m）所得x_{m1}/Δ_{st}的绝对值相等来得到。这样，我们得到：

$$\frac{\gamma^2-\delta^2}{\beta\delta^2\gamma^2-(\gamma^2-1)(\gamma^2-\delta^2)}=\frac{1}{\gamma^2-1+\beta\gamma^2} \qquad (o)$$

借下面推理过程，从（k）式可以推出相同的方程。交点S和T确定（k）式中大小不随诸阻尼而变的γ值。（k）式具有下面一般形式：

$$\frac{x_{m1}^2}{\Delta_{st}^2}=\frac{M\mu^2+N}{P\mu^2+Q} \qquad (p)$$

所以，仅当$M/P=N/Q$时，它与μ^2无关，它也得出方程（o）。此方程可以写成下面形式：

$$(\gamma^2-\delta^2)(\gamma^2-1+\beta\gamma^2)=\beta\delta^2\gamma^2-(\gamma^2-1)(\gamma^2-\delta^2)$$

或

$$\gamma^4-2\gamma^2\frac{1+\delta^2+\beta\delta^2}{2+\beta}+\frac{2\delta^2}{2+\beta}=0 \qquad (q)$$

从方程（q），可以求出两个根（γ_1^2和γ_2^2），它们确定S点和T点的横坐标。于是，

地信网论坛 BBS.3500L.COM

强迫振动的相应振幅值借γ_1^2和γ_2^2代入方程（l）或方程（m）来计算。用这后者比较简单，我们得到S点和T点的纵坐标式子*：

$$\frac{(x_{m1})_S}{\Delta_{st}}=-\frac{1}{\gamma_1^2-1+\beta\gamma_1^2} \tag{r}$$

和

$$\frac{(x_{m1})_T}{\Delta_{st}}=\frac{1}{\gamma_2^2-1+\beta\gamma_2^2} \tag{s}$$

这些纵坐标的值，取决于定义吸收器的质量和弹簧的β量和δ量。借适当选定这些特征，我们可以改善吸收器的效率。由于图3.21中所有曲线必须通过S点和T点，所以这些曲线的最大纵坐标（给予强迫振动的最大振幅）将取决于S点和T点的纵坐标。宜要求最满意情况是使S的纵坐标与T的纵坐标相等来得到，亦即它要求：

$$-\frac{1}{\gamma_1^2-1+\beta\gamma_1^2}=\frac{1}{\gamma_2^2-1+\beta\gamma_2^2}$$

或

$$\gamma_1^2+\gamma_2^2=\frac{2}{1+\beta} \tag{t}$$

我们回顾γ_1^2和γ_2^2为二次方程（q）的两个根，并且这样一种方程的两个根之和等于中间项的负系数。所以，

$$\frac{2}{1+\beta}=2\frac{1+\delta^2+\beta\delta^2}{2+\beta}$$

它从，

$$\delta=\frac{1}{1+\beta} \tag{u}$$

这个简单公式给予“调整”吸收器的适当方法。如果吸收器的质量m_2已选定，那么β值为已知，我们便从方程（u）确定δ的适当值，该值确定出吸收器的频率和弹簧常数。

为了确定相应于S点和T点的强迫振动之振幅，我们将方程（q）的诸根之一的值代入方程（s）。对于正确地调整的吸收器，方程（u）成立，方程（q）成为：

$$\gamma^4-\frac{2\gamma^2}{1+\beta}+\frac{2}{(2+\beta)(1+\beta)^2}=0$$

它得出：

$$\gamma_{1,2}^2=\frac{1}{1+\beta}\left(1\pm\sqrt{\frac{\beta}{2+\beta}}\right) \tag{v}$$

然后从方程（s），我们得到：

$$\frac{(x_{m1})_T}{\Delta_{st}}=\sqrt{\frac{2+\beta}{\beta}}=\frac{(x_{m1})_S}{\Delta_{st}} \tag{w}$$

S点和T点的位置与吸收器中的阻尼值无关。然而，图3.21中的反应谱的最大纵坐标取决于μ的大小。我们借反应谱在S处或T处具有一水平切线这样一种方法，选定μ来得到最满意情况。两根这种曲线，一根在S处具有最大值，另一根在T处具有最大值，示于图3.22中。它们是对$\beta=1/4$的情况计算出来的。可以看到这些曲线的最大纵坐标与S点和T点的纵坐标相差甚微。所以，我们可以叙述：只要μ按上面所说明的方式来选择，方程（w）就

* 假设γ_1^2是方程（q）中较小者，而且在方程（m）得到的平方根前面必须取减号，以得到正的振幅值。

地信网论坛 BBS.3500U.COM

以相当好的精确度给出m_1的强迫振动的振幅。

现在须说明应如何选择阻尼，以使共振曲线在S和T处为最大。我们借（k）式写成方程（p）的形式来着手。求解这后一方程中的μ^2，我们得到：

$$\mu^2=\frac{N-Q(x_{m1}/\Delta_{st})^2}{P(x_{m1}/\Delta_{st})^2-M} \qquad (x)$$

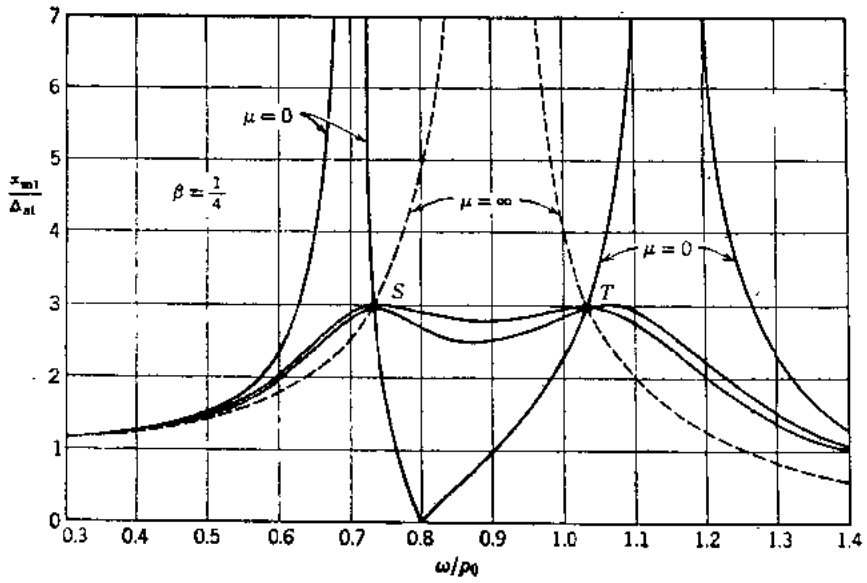


图 3.22

当吸收器的质量m_2一经选定，β就为已知，我们从方程（u）得到δ，于是相应于S和T点的$\gamma_{1,2}^2$的值，可以从方程（v）计算出来，x_{m1}/Δ_{st}从方程（w）确定出来。如果将所有这些量都代入方程（x），那么我们得到μ^2的不定式0/0，因为S点和T点的位置与μ无关。然而，让我们考虑反应谱上一个很接近S的点。如果我们在S处有一最大值，那么其x_{m1}/Δ_{st}的值，不因该点稍微移动而改变。β值和δ值也将保持相同，只是γ_1^2有一稍微不同的值。从这种改变，我们发现（x）式具有一定值，它是使切线在S处与曲线成水平所要求的μ^2的值。按同样方式，我们可以得到使切线在T处成水平时的μ^2的值。

吸收器的弹簧常数从方程（u）确定。如果我们知道最大相对位移$x_{rel}=(x_2-x_1)_{max}$，那么可以求出弹簧中由于振动引起的最大应力。这个量的精确计算需要求两个质量m_1和m_2的运动，包括它们的相位差的复杂研究。借假设主质量的振动在脉动荷载$P\cos\omega t$后面的$\pi/2$弧度，则可以得到x_{rel}的满意近似值。在这个假设下，每一周所做的功为$\pi P x_{m1}$〔见第1.10节方程（c）〕。由于与相对速度成比例的阻尼力所引起的每一周能量耗散为$\pi c(x_{rel})^2\omega$（见第1.10节方程e）。令耗散的能量等于每一周所做的功，我们得到：

$$x_{rel}^2=\frac{Px_{m1}}{c\omega} \qquad (y)$$

用我们的无量纲参数，方程（y）成为：

$$\frac{x_{rel}^2}{\Delta_{st}^2}=\frac{x_{m1}}{\Delta_{st}}\,\frac{1}{2\mu\gamma\beta} \qquad (z)$$

因为μ和β通常都是很小的量，所以从此方程所得的相对位移x_{rel}将比质量m_1的位移x_{m1}大得多。

地信网论坛 BBS.3500I.COM

第四章　具有多个自由度的系统

4.1　引　　言

前章中对于两个自由度系统所介绍的概念将引伸到本章具有多个自由度的系统。在这个范围内，我们包括所有具有多于一个自由度，但少于无穷多个自由度的系统。这种振动系统的形态借有限多个位移坐标来确定。如果有 n 个自由度与诸质量项有关，那么需要 n 个微分方程描述该系统的运动。

在第 3 章中，除了阻尼情况外，两个自由度系统的自由振动和它们对谐和激发的反应处理起来没有多少困难。但在多个自由度的系统中则出现较多的麻烦，因为诸项的项数随自由度数目而迅速增加。自然，用矩阵排列公式证明处理大量项数是非常有效的。然而，比这更为重要的是受到任意激发的系统按原来坐标分析变得极为困难，特别是存在阻尼的时候。应用较为适合的坐标系可以避免这些困难。

如果将多个自由度系统的诸主振型用作广义坐标，那么无阻尼运动的诸方程成为无联系。按这些坐标，每一个方程可以好像是只有一个自由度系统那样来求解。本章中推导这种称为动力分析的正规型方法，并用于一般所关心的问题。首先处理无阻尼的系统，对于阻尼系统所需要的特殊考虑，在本章的后面部分中进行讨论。

4.2　无阻尼系统的频率和振型形状

对于具有 n 个自由度的系统，其无阻尼自由振动的作用力方程（见第3.5节中方程3.17）采取下列一般形式：

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & \cdots & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & \cdots & M_{2n} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & \cdots & M_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ M_{n1} & M_{n2} & M_{n3} & \cdots & M_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \cdots \\ \ddot{x}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & \cdots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & \cdots & S_{2n} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & \cdots & S_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{n1} & S_{n2} & S_{n3} & \cdots & S_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

我们假设在固有振型中所有质量遵循下列谐和函数：

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{X}_{M_i} \sin(p_i t + \phi_i) \qquad (a)$$

式中 p_i 和 ϕ_i 为第 i 振型的角频率和相角。方程（a）中符号 $\mathbf{X}_i$ 表示第 i 振型的诸位移的列矩阵（或向量），$\mathbf{X}_{M_i}$ 代表相应的最大值或振幅的向量。亦即

$$\mathbf{X}_i = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}_i \qquad \mathbf{X}_{M_i} = \begin{pmatrix} x_{m1} \\ x_{m2} \\ x_{m3} \\ \cdots \\ x_{mn} \end{pmatrix}_i$$

将方程（a）代入方程（4.1）得出一个代数方程组，可以叙述为：

$$\mathbf{H}_i \mathbf{X}_{M_i} = \mathbf{0} \tag{4.2}$$

地信网论坛 BBS.3500L.COM

式中$\mathbf{H}_i$为特征矩阵：

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{S} - p_i^2 \mathbf{M} \tag{4.3}$$

为求方程（4.2）的非平凡解，令特征方程的行列式等于零，给出下列特征方程的一般形式：

$$|\mathbf{H}_i| = \begin{vmatrix} S_{11}-p_i^2M_{11} & S_{12}-p_i^2M_{12} & S_{13}-p_i^2M_{13} & \cdots & S_{1n}-p_i^2M_{1n} \\ S_{21}-p_i^2M_{21} & S_{22}-p_i^2M_{22} & S_{23}-p_i^2M_{23} & \cdots & S_{2n}-p_i^2M_{2n} \\ S_{31}-p_i^2M_{31} & S_{32}-p_i^2M_{32} & S_{33}-p_i^2M_{33} & \cdots & S_{3n}-p_i^2M_{3n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ S_{n1}-p_i^2M_{n1} & S_{n2}-p_i^2M_{n2} & S_{n3}-p_i^2M_{n3} & \cdots & S_{nn}-p_i^2M_{nn} \end{vmatrix} = 0 \tag{4.4}$$

展开此行列式得出一个最高阶项为$(p_i^2)^n$的多项式。如果该多项式不能分解因子，那么它的n个根p_1^2、$p_2^2 \cdots p_i^2 \cdots p_n^2$可借数值方法求出。这种根前面称为特征值，也称为本征值（eigenvalue）（在德文中，这前一部分eigen的意思是“固有”）。如果$\mathbf{M}$是正定的*，$\mathbf{S}$是正定的或正半定的，那么诸本征值将全都是实数，不是为正就是为零。然而，它们未必是不同的（亦即它们未必彼此不同）。重根的问题在后面第4.7节中讨论。

诸模态振幅向量中任何一个用$\mathbf{X}_{Mi}$代表，称为特征向量，或本征向量。如果一个系统的诸本征值作为特征方程（4.4）的根已计算出，那么诸本征向量可以从齐次代数方程（4.2）求算出来（到只有某些任意常数）。因为有n个特征值，所以也将有n个相应模态向量。对于一个不同的本征值（不是重根），本征向量中$n-1$个振幅可以借求解$n-1$个联立方程以剩余振幅来表达。然而，如果对$\mathbf{H}_i$之逆考虑下面形式定义，那么我们将看到这种广泛的计算是不需要的：

$$\mathbf{H}_i^{-1} = \frac{\mathbf{H}_i^*}{|\mathbf{H}_i|} = \frac{(\mathbf{H}_i^c)^T}{|\mathbf{H}_i|} \tag{b}$$

方程（b）中的符号$\mathbf{H}_i^*$表示$\mathbf{H}_i$的伴随矩阵，它定义为余因子矩阵$\mathbf{H}_i^c$的转置。自然，$\mathbf{H}_i$之逆实际上不存在，因为行列式$|\mathbf{H}_i|$为零〔见方程（4.4）〕。然而，为了这种讨论，我们可以重新写方程（b）为：

$$\mathbf{H}_i\mathbf{H}_i^* = |\mathbf{H}_i|\,\mathbf{I} = \mathbf{0} \tag{c}$$

将方程（c）与方程（4.2）比较，我们得出结论，本征向量$\mathbf{X}_{Mi}$与伴随矩阵$\mathbf{H}_i^*$的任何非零列成比例。由于本征向量可以任意地改变比例，所以它可取为等于这样一列成按要求归一化。

当采用运动的位移方程而不采用作用力方程时，方程（4.1）用下式代替〔见第3.5节中方程（3.21）〕：

$$\begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & \cdots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & \cdots & F_{2n} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & \cdots & F_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ F_{n1} & F_{n2} & F_{n3} & \cdots & F_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & \cdots & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & \cdots & M_{2n} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & \cdots & M_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ M_{n1} & M_{n2} & M_{n3} & \cdots & M_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \cdots \\ \ddot{x}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

将方程（a）代入方程（4.5），我们得到代数方程：

$$\mathbf{L}_i\mathbf{X}_{Mi} = \mathbf{0} \tag{4.6}$$

此式中$\mathbf{L}_i$代表特征矩阵，定义为：

---

* 如果实数矩阵中所有前主子式是正的，那么该矩阵是正定的。如果这些子式中有些为零，那么说成是正半定的。

地信网论坛 BBS.3500L.COM

$$\mathbf{L}_i=\mathbf{FM}-\lambda_i\mathbf{I} \tag{4.7}$$

式中$\lambda_i=1/p_i^2$。对于方程（4.6）的非平凡解，令$\mathbf{L}_i$的行列式等于零，得出此情况下特征方程的一般形式：

$$\left|\begin{pmatrix}F_{11}&F_{12}&F_{13}&\cdots&F_{1n}\\F_{21}&F_{22}&F_{23}&\cdots&F_{2n}\\F_{31}&F_{32}&F_{33}&\cdots&F_{3n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\F_{n1}&F_{n2}&F_{n3}&\cdots&F_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}M_{11}&M_{12}&M_{13}&\cdots&M_{1n}\\M_{21}&M_{22}&M_{23}&\cdots&M_{2n}\\M_{31}&M_{32}&M_{33}&\cdots&M_{3n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\M_{n1}&M_{n2}&M_{n3}&\cdots&M_{nn}\end{pmatrix}-\lambda_i\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}\right|=0 \tag{4.8}$$

方程（4.8）中行列式的展开得出一个n阶多项式，从它可以得到诸根λ_1、λ_2、$\cdots\lambda_i$、$\cdots\lambda_n$。这些根构成此情况的诸本征值，其本征向量可借这些值代入方程（4.6）来确定。或者，典型本征向量可按要求改变比例取作伴随矩阵$\mathbf{L}_i$的任何一列。

从前面第3章的讨论，显然方程（4.3）中的刚度矩阵$\mathbf{S}$可以用一个重力矩阵$\mathbf{G}$来代替或增大（见第3.2节方程3.10）。类似地，方程（4.7）中的柔度矩阵$\mathbf{F}$可以用一个与重力影响有关的假柔度阵列来代替（见第3.3节例题3）。任何情况下，如果质量矩阵$\mathbf{M}$是对角线的而不是填满的，那么计算大为简化。现在将用多个自由度系统的具体例题来说明固有频率和振型形状的确定。

例题1 图4.1*a*表示三个质量借三个弹簧互相连接起来并与地面连接。位移坐标x_1、x_2和x_3确定这三个自由度系统的运动。为了简单起见，令$m_1=m_2=m_3=m$和$k_1=k_2=k_3=k$。试用作用力方程的方法确定特征值和主振型形状。

解：此系统的质量矩阵为对角线阵列

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}m_1&0&0\\0&m_2&0\\0&0&m_3\end{pmatrix}=m\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \tag{d}$$

刚度矩阵为

$$\mathbf{S}=\begin{pmatrix}k_1+k_2&-k_2&0\\-k_2&k_2+k_3&-k_3\\0&-k_3&k_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{pmatrix} \tag{e}$$

我们将这些阵列形成方程（4.3）中的特征矩阵：

$$\mathbf{H}_i=\begin{pmatrix}2k-p_i^2m&-k&0\\-k&2k-p_i^2m&-k\\0&-k&k-p_i^2m\end{pmatrix} \tag{f}$$

令$\mathbf{H}_i$的行列式等于零（见方程4.4）并归并诸项，我们得到下列特征方程：

$$(p_i^2)^3-5\left(\frac{k}{m}\right)(p_i^2)^2+6\left(\frac{k}{m}\right)^2(p_i^2)+\left(\frac{k}{m}\right)^3=0 \tag{g}$$

这个三次方方程不可能分解因子，但是它的根可借尝试法确定为：

$$p_1^2=0.198\frac{k}{m}\qquad p_2^2=1.555\frac{k}{m}\qquad p_3^2=3.247\frac{k}{m} \tag{h}$$

为了确定相应于最低本征值的振型形状，我们将p_1^2值代入方程（4.2），以$x_{m1,1}$表达求解$x_{m2,1}$和$x_{m3,1}$。此解的结果为

地信网论坛 BBS.3500L.COM

$$x_{m2,1}=1.802x_{m1,1} \qquad x_{m3,1}=2.247x_{m1,1} \tag{i}$$

类似地，将p_2^2和p_3^3的值代入方程（4.2）导出诸解：

$$x_{m2,2}=0.445x_{m1,2} \qquad x_{m3,2}=-0.802x_{m1,2} \tag{j}$$

和

$$x_{m2,3}=-1.247x_{m1,3} \qquad x_{m3,3}=0.555x_{m1,3} \tag{k}$$

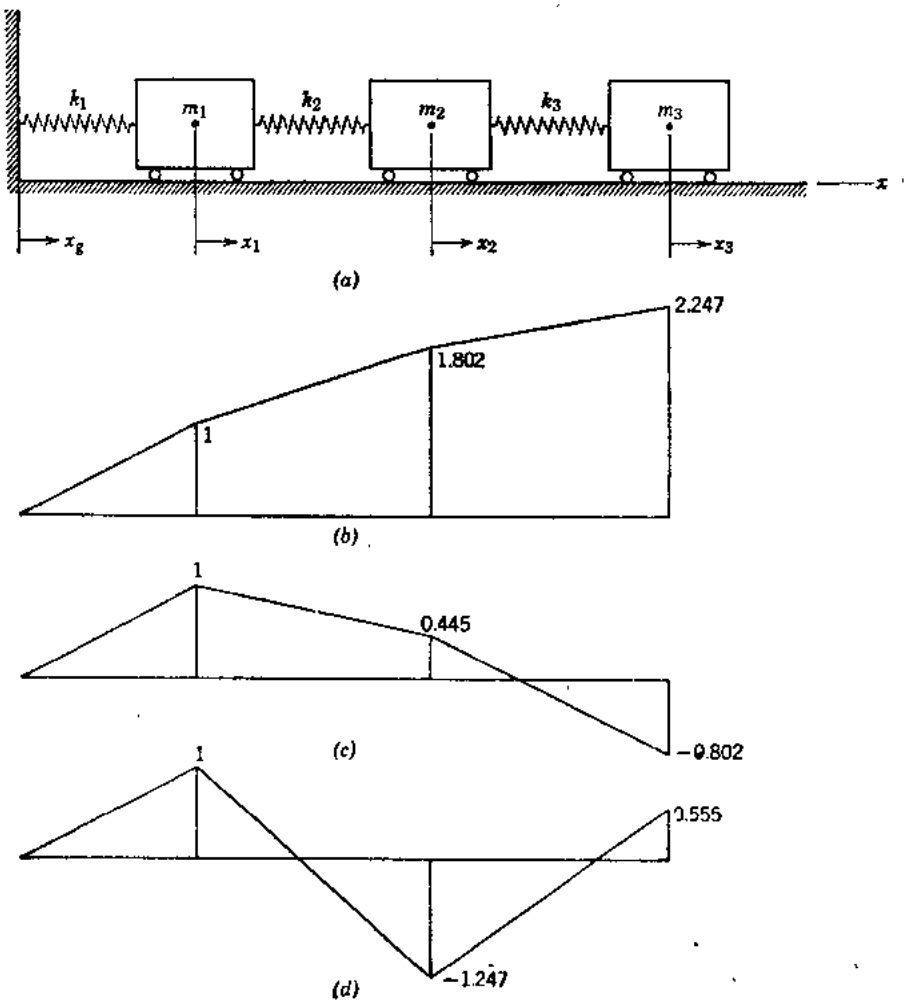


图 4.1

或者，从方程（f）导得伴随矩阵$\mathbf{H}_i^*$如下：

$$\mathbf{H}_i^*=\begin{pmatrix}(2k-p_i^2m)(k-p_i^2m)-k^2 & k(k-p_i^2m) & k^2\\ k(k-p_i^2m) & (2k-p_i^2m)(k-p_i^2m) & k(2k-p_i^2m)\\ k^2 & k(2k-p_i^2m) & (2k-p_i^2m)^2-k^2\end{pmatrix} \tag{l}$$

将p_1^2的值代入方程（l）得到

$$\mathbf{H}_i^*=k^2\begin{pmatrix}0.445 & 0.802 & 1.000\\ 0.802 & 1.445 & 1.802\\ 1.000 & 1.802 & 2.247\end{pmatrix}$$

此矩阵的第三列（被k^2除）提供对第一个质量的振幅归一化的第一本征向量。这样，我们得到

地信网论坛 BBS.3500L.COM

$$\mathbf{X}_{M1}=\{1.000,\ 1.802,\ 2.247\} \qquad (m)$$

用方程（i）校核它。自然，我们只需要产生伴随矩阵的一列去确定此结果，因为所有列均与$\mathbf{X}_{M1}$成比例。

按相似的方式，本征向量$\mathbf{X}_{M2}$和$\mathbf{X}_{M3}$借p_2^2值和p_3^2值代入方程（l）中$\mathbf{H}_i^a$的第三列来确定。所得的向量为

$$\mathbf{X}_{M2}=\{1.000,\ 0.445,\ -0.802\} \qquad (n)$$

和

$$\mathbf{X}_{M3}=\{1.000,\ -1.247,\ 0.555\} \qquad (o)$$

它们与方程（j）和（k）相符。方程（m）、（n）和（o）中三个主振型形状分别用图4.1b、4.1c和4.1d中的纵坐标表示。

现在假定图4.1a中第一个弹簧的刚度常数k_1为零。在这种情况下，该系统将如同刚体那样自由平动和振动。刚度系数S_{11}从$2k$变到k，特征矩阵中相应项成为$H_{i11}=k-p_i^2m$。因此，特征方程简化成分解因子的式子：

$$p_i^2\left(p_i^2-\frac{k}{m}\right)\left(p_i^2-\frac{3k}{m}\right)=0 \qquad (p)$$

从它我们得到

$$p_1^2=0 \qquad p_2^2=\frac{k}{m} \qquad p_3^2=\frac{3k}{m} \qquad (q)$$

这里的零根相当于刚体振型。

方程（l）中伴随矩阵$\mathbf{H}_i^a$的第三列改变为

$$\mathbf{H}_{i3}^a=\begin{vmatrix} k^2 \\ k(k-p_i^2m) \\ (k-p_i^2m)(2k-p_i^2m)-k^2 \end{vmatrix} \qquad (r)$$

将此半定系统的本征值连续代入方程（r）得到下列本征向量：

$$\mathbf{X}_{M1}=\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{X}_{M2}=\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{X}_{M3}=\begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{vmatrix} \qquad (s)$$

此系统的主振型形状借观察这些向量容易想象出来。

例题 2　有三个质量置于一根紧紧张拉着的钢丝上，如图 4.2a 所示。钢丝中的拉力假设很大，因而对于诸质点微小的横向位移拉力不会有明显的改变。此系统的特征值和特征向量取$m_1=m_2=m_3=m$和$l_1=l_2=l_3=l_4=l$用位移方程法求出。

解：其质量矩阵与例题 1 中相同，柔度矩阵导出为

$$\mathbf{F}=\frac{l}{4T}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad (t)$$

用这些项，我们构成方程（4.7）中的特征矩阵为

$$\mathbf{L}_i=\begin{vmatrix} 3\alpha-\lambda_i & 2\alpha & \alpha \\ 2\alpha & 4\alpha-\lambda_i & 2\alpha \\ \alpha & 2\alpha & 3\alpha-\lambda_i \end{vmatrix} \qquad (u)$$

式中$\alpha=lm/4T$。然后令$\mathbf{L}_i$的行列式等于零得出特征方程：

$$(\lambda_i-2\alpha)(\lambda_i^2-8\alpha\lambda_i+8\alpha^2)=0 \qquad (v)$$

方程（v）的诸根按递降次序为

$$\lambda_1=2(2+\sqrt{2})\alpha \qquad \lambda_2=2\alpha \qquad \lambda_3=2(2-\sqrt{2})\alpha \qquad (w)$$

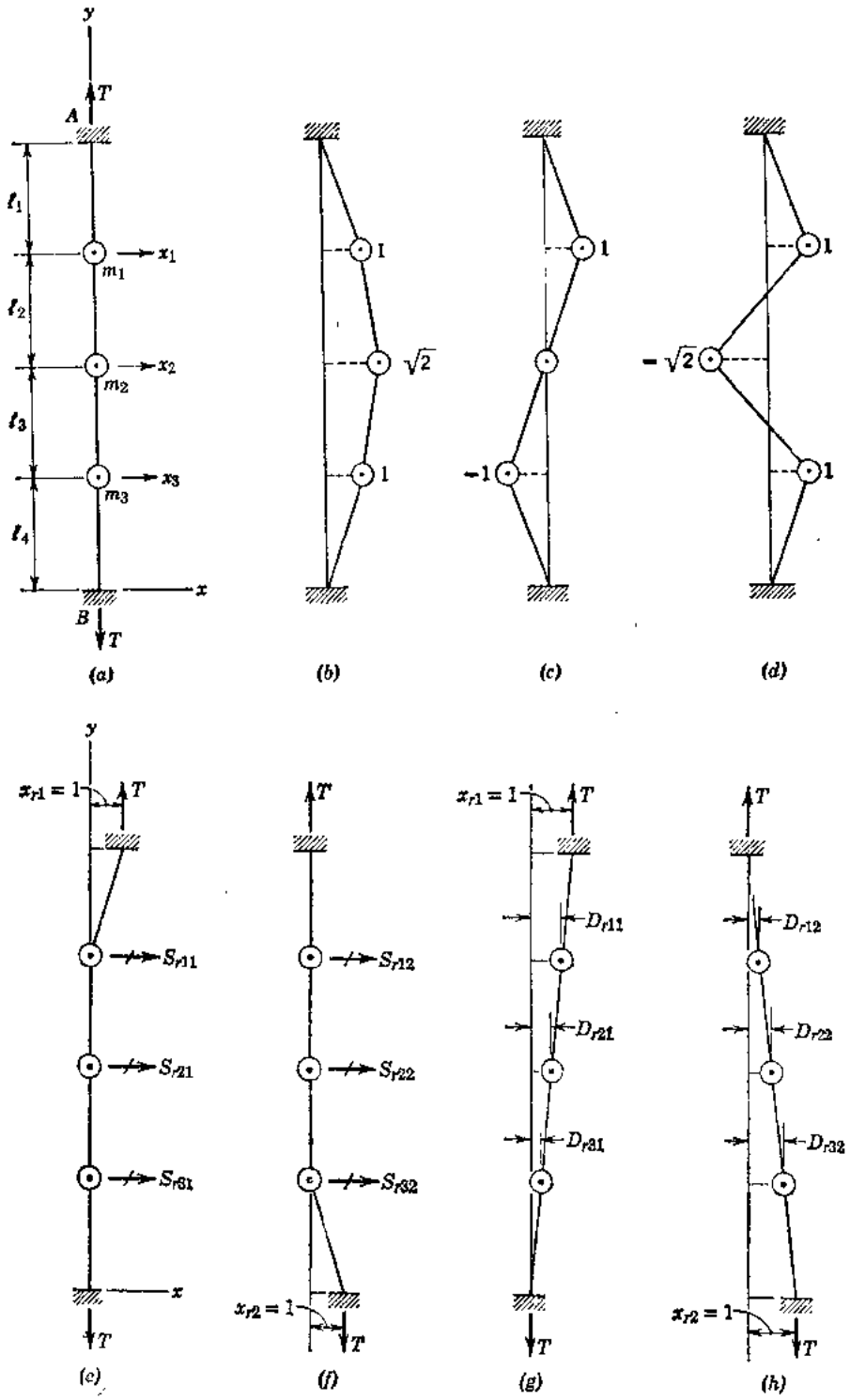


图 4.2

地信网论坛 BBS.3500L.COM

为了求出此系统的振型形状，我们只导出$\mathbf{L}_1$的伴随矩阵的第一列如下：

$$\mathbf{L}_{1,1}^{a}=\begin{vmatrix}(4\alpha-\lambda_i)(3\alpha-\lambda_i)-4\alpha^2\\-2\alpha(3\alpha-\lambda_i)+2\alpha^2\\4\alpha^2-\alpha(4\alpha-\lambda_i)\end{vmatrix} \tag{x}$$

将诸本征值连续代入方程（x）（并在每一振型中对x_{m1}归一化）得到本征向量：

$$\mathbf{X}_{M1}=\begin{Bmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{Bmatrix}\qquad \mathbf{X}_{M2}=\begin{Bmatrix}1\\0\\-1\end{Bmatrix}\qquad \mathbf{X}_{M3}=\begin{Bmatrix}1\\-\sqrt{2}\\1\end{Bmatrix} \tag{y}$$

这些振型形状分别示于图4.2b、4.2c和4.2d中。

本节中所述求得特征值和特征向量的两种方法都可以表达为

$$\mathbf{A}\mathbf{X}_{M_i}=\lambda_i\mathbf{X}_{M_i} \tag{z}$$

式中$\mathbf{A}$为实数的方阵。方程（z）称为本征值问题的标准形式。对于线性弹性振动系统，系数矩阵$\mathbf{A}$借合理选定坐标总可以导出为对称的、正定的（或正半定的）阵列。当本征值问题要用数值求解时这样的形式往往是需要的，使系数矩阵成为对称的技巧在下面讨论中介绍。

从位移方程法，方程（4.6）可以用$\mathbf{F}$和$\mathbf{M}$表达写出为

$$\mathbf{F}\mathbf{M}\mathbf{X}_{M_i}=\lambda_i\mathbf{X}_{M_i} \tag{4.9}$$

此方程是为方程（z）的标准形式，但是系数矩阵$\mathbf{FM}$是非对称的。即使当$\mathbf{M}$为一对角线矩阵，但$\mathbf{F}$与$\mathbf{M}$的乘积缺乏对称性，当对角线上所有各项均相等的特殊情况除外。为了在该系数矩阵中得到对称性，需要改变坐标。如果$\mathbf{M}$是正定的，那么它可借邱列斯基平方根法（Cholesky squareroot method）*分解因子成为

$$\mathbf{M}=\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{U} \tag{4.10}$$

式中$\mathbf{U}$为一上三角矩阵，$\mathbf{U}^{\mathrm{T}}$为其转置。借方程（4.10）代入方程（4.9）并用$\mathbf{U}$去左乘方程（4.9）的两边，我们得到

$$\mathbf{U}\mathbf{F}\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{U}\mathbf{X}_{M_i}=\lambda_i\mathbf{U}\mathbf{X}_{M_i}$$

此方程可以重新写成

$$\mathbf{F}_U\mathbf{X}_{U_i}=\lambda_i\mathbf{X}_{U_i} \tag{4.11}$$

式中

$$\mathbf{X}_{U_i}=\mathbf{U}\mathbf{X}_{M_i} \tag{4.12a}$$

或

$$\mathbf{X}_{M_i}=\mathbf{U}^{-1}\mathbf{X}_{U_i} \tag{4.12b}$$

和

$$\mathbf{F}_U=\mathbf{U}\mathbf{F}\mathbf{U}^{\mathrm{T}} \tag{4.13}$$

方程（4.12a）定义的符号$\mathbf{X}_{U_i}$代表变换为一新坐标组的模态振幅，这里广义质量为一单位矩阵。按这些坐标，方程（4.13）所给的广义柔度矩阵$\mathbf{F}_U$是对称的，因为对称矩阵$\mathbf{F}$的同成分变换的结果。

这样，方程（4.11）是为具有对称正定系数矩阵的本征值问题的标准形式。显然这种变

---

* D.K.Faddeev和V.N.Faddeeva, Computational Methods of Linear Algebra, Freeman, San Francisco, 1963, pp.144—147。

地信网论坛 BBS.3500I.COM

换方程具有与原来方程（4.9）相同的本征值λ_i。然而，本征向量$\mathbf{X}_{U_i}$与$\mathbf{X}_{M_i}$不相同。按广义坐标求解本征向量$\mathbf{X}_{U_i}$之后，我们可以用方程（4.12*b*）将它们变换到原来坐标。

如果质量矩阵是对角线矩阵，那么方程（4.12*a*）和（4.12*b*）所给的变换得到简化。在此情况下，方程（4.10）中$\mathbf{M}$的因子分解导致：

$$\mathbf{U}=\mathbf{U}^{\mathrm{T}}=\mathbf{M}^{1/2}\qquad \mathbf{U}^{-1}=(\mathbf{U}^{-1})^{\mathrm{T}}=\mathbf{M}^{-1/2} \tag{4.14}$$

这些式子中，符号$\mathbf{M}^{1/2}$表示一个诸对角线项等于$\mathbf{M}$中对角线项的平方根的对角线矩阵，$\mathbf{M}^{-1/2}$表示一个包含$\mathbf{M}^{1/2}$中诸项倒数的对角线矩阵。于是方程(4.12*a*)、(4.12*b*)和(4.13)中的诸关系式成为：

$$\mathbf{X}_{U_i}=\mathbf{M}^{1/2}\mathbf{X}_{M_i} \tag{4.15a}$$

或

$$\mathbf{X}_{M_i}=\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{X}_{U_i} \tag{4.15b}$$

和

$$\mathbf{F}_U=\mathbf{M}^{1/2}\mathbf{F}\mathbf{M}^{1/2} \tag{4.16}$$

作用力方程方法的方程（4.2）也可以变换为广义坐标。我们首先用$\mathbf{S}$和$\mathbf{M}$表达写成：

$$\mathbf{S}\mathbf{X}_{M_i}=p_i^2\mathbf{M}\mathbf{X}_{M_i} \tag{4.17}$$

它与方程（*z*）中的标准形式不同，因为右边存在$\mathbf{M}$。方程（4.17）代表具有两个对称系数矩阵的非标准形本征值问题。它可借$\mathbf{M}^{-1}$左乘两边变换成标准形式，但是所得系数矩阵$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}$则是非对称的。为了避免这样失去对称性，我们将方程（4.12*b*）代入方程（4.17），并用$(\mathbf{U}^{-1})^{\mathrm{T}}$乘方程（4.17）的两边得到：

$$(\mathbf{U}^{-1})^{\mathrm{T}}\mathbf{S}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{X}_{U_i}=p_i^2(\mathbf{U}^{-1})^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{X}_{U_i} \tag{4.18}$$

将方程（4.10）中$\mathbf{M}$分解因子的形式用于方程（4.18）的右边，得到下列结果：

$$\mathbf{S}_U\mathbf{X}_{U_i}=p_i^2\mathbf{M}_U\mathbf{X}_{U_i}=p_i^2\mathbf{X}_{U_i} \tag{4.19}$$

式中

$$\mathbf{S}_U=(\mathbf{U}^{-1})^{\mathrm{T}}\mathbf{S}\mathbf{U}^{-1}=\mathbf{F}_U^{-1} \tag{4.20}$$

这里我们清楚地看到$\mathbf{M}_U$变换为单位矩阵：

$$\mathbf{M}_U=(\mathbf{U}^{-1})^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{U}^{-1}=(\mathbf{U}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{U}\mathbf{U}^{-1}=\mathbf{I} \tag{4.21}$$

现在方程（4.19）是为具有一对称系数矩阵的本征值问题的标准形式。如方程（4.20）所示，广义刚度矩阵$\mathbf{S}_U$为方程（4.13）所给的广义柔度矩阵之逆。自然，这样陈述之逆仅当$\mathbf{S}$（因而$\mathbf{S}_U$）为正定时是正确的。当质量矩阵是对角线矩阵时，方程（4.20）$\mathbf{S}_U$的变换简化为

$$\mathbf{S}_U=\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{S}\mathbf{M}^{-1/2} \tag{4.22}$$

例题 3　假定例题 2 中给予图4.2*a*中第二个质量$m_2=4m$值，而$m_1=m_3=m$。在此情况下，方程（4.9）中的乘积$\mathbf{F}\mathbf{M}$成为

$$\mathbf{F}\mathbf{M}=\frac{l}{4T}\begin{pmatrix}3&2&1\\2&4&2\\1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&1\end{pmatrix}m=\alpha\begin{pmatrix}3&8&1\\2&16&2\\1&8&3\end{pmatrix} \tag{a'}$$

此阵列是非对称的，因为$\mathbf{F}$的第二列与其它诸列所用的比例尺度不同。不用这种形式，借首先形成下列对角线矩阵$\mathbf{M}^{1/2}$（及其逆），我们可以保存$\mathbf{F}$中的固有对称性：

地信网论坛 BBS.3500L.COM

$$\mathbf{M}^{1/2}=\sqrt{m}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad \mathbf{M}^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{m}}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\tag{b'}$$

于是，阵列$\mathbf{M}^{1/2}$作为一个变换算子，如方程（4.16）所示，得到

$$\mathbf{F}_U=\mathbf{M}^{1/2}\mathbf{F}\mathbf{M}^{1/2}=a\begin{bmatrix}3&4&1\\4&16&4\\1&4&3\end{bmatrix}\tag{c'}$$

它具有所需要的对称性。变换了的矩阵$\mathbf{F}_U$用于求解方程（4.11）所给的标准形式的本征值问题。最后，方程（4.15b）提供用算子$\mathbf{M}^{-1/2}$确定按原来坐标的本征向量的方法。

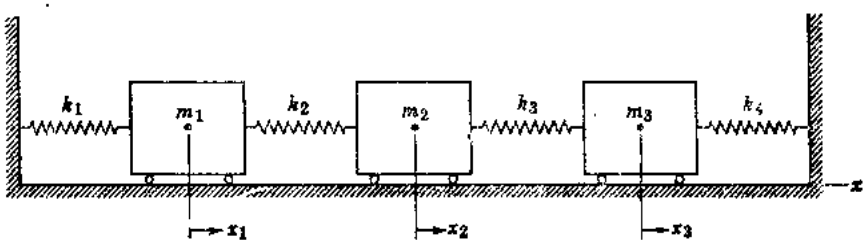
习 题 组 4.2

4.2—1 试用刚度影响系数借作用力方程方法确定图 4.2a 中系统的本征值p_i^2和本征向量$\mathbf{X}_{Mi}$（$i=1$、2、3）。假设$m_1=m_2=m_3=m$和$l_1=l_2=l_3=l_4=l$。

答：$p_{1,2,3}^2=(2-\sqrt{2})T/ml,\ 2T/ml,\ (2+\sqrt{2})T/ml$

4.2—2 图中表示一个具有三个质量和四个弹簧的系统。假设$m_1=m_2=m_3=m$和$k_1=k_2=k_3=k_4=k$，试用柔度影响系数借位移方程法求出本征值和本征向量。

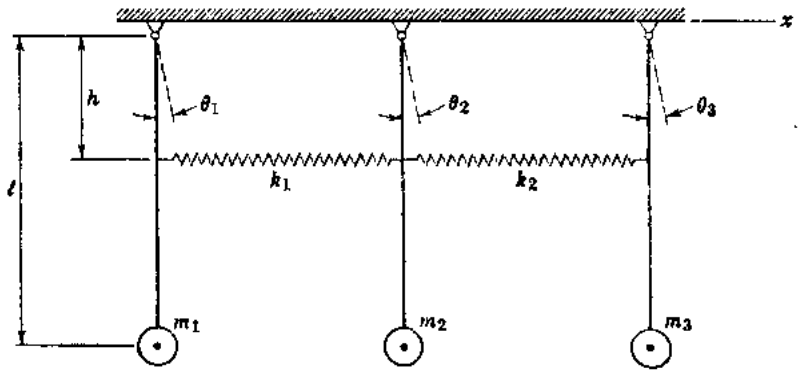
答：$\lambda_{1,2,3}=(2+\sqrt{2})m/2k,\ m/2k,\ (2-\sqrt{2})m/2k$



习题 4.2—2

4.2—3 三个单摆借两个弹簧连接，如图所示。令$m_1=m_2=m_3=m$及$k_1=k_2=k$。试用微小的角θ_1，θ_2和θ_3作为位移坐标以作用力方程方法求出本征值和本征向量。

答：$p_{1,2,3}^2=\dfrac{g}{l},\quad \dfrac{g}{l}+\dfrac{kh^2}{ml^2},\quad \dfrac{g}{l}+\dfrac{3kh^2}{ml^2}$

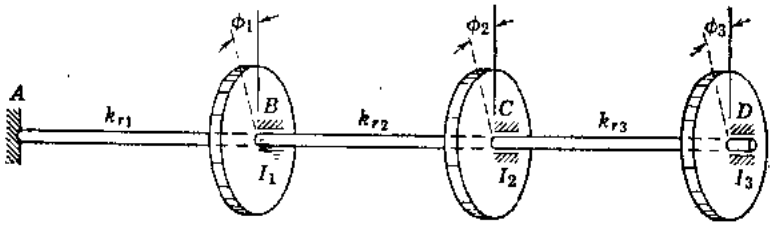


习题4.2—3

地信网论坛 BBS.3500L.COM

4.2—4　图中表示三个盘置于一根在A点处固定但是在B、C和D点处诸轴承中自由转动的轴上。假设$I_1=I_2=I_3=I$和$k_{r1}=k_{r2}=k_{r3}=k_r$，试用运动的位移方程确定本征值和本征向量。用角ϕ_1、ϕ_2和ϕ_3作为此系统的位移坐标。

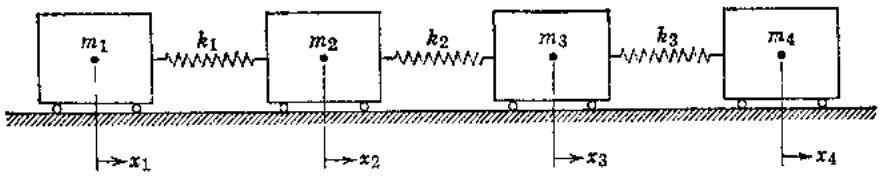
答：$\lambda_{1,2,3}=5.05I/k_r$，$0.643I/k_r$，$0.308I/k_r$



习题　4.2—4

4.2—5　有四个质量借三个弹簧连接着，可以顺x方向自由平动，如图所示。假设$m_1=m_2=m_3=m_4=m$和$k_1=k_2=k_3=k$，试用作用力方程法计算本征值和本征向量。

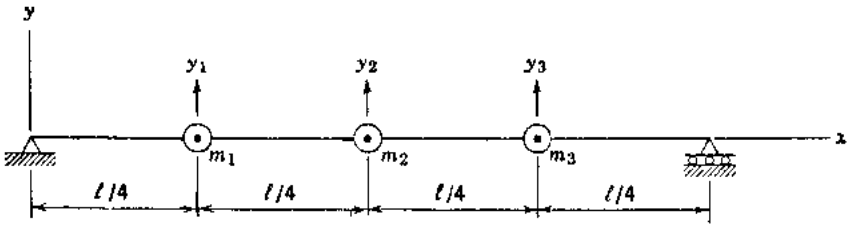
答：$p^2_{1,2,3,4}=0$，$(2-\sqrt{2})k/m$，$2k/m$，$(2+\sqrt{2})k/m$



习题　4.2—5

4.2—6　图中简支梁有三个置于它的四分之一点处的质量。试以微小的平动y_1、y_2和y_3作为位移坐标，借位移方程法确定此系统的本征值和本征向量。假设$m_1=m_2=m_3=m$，还假设该无质量棱柱形梁的弯曲刚度为EI。

答：$\lambda_{1,2,3}=31.6\alpha$，$2\alpha$，$0.444\alpha(\alpha=ml^3/768EI)$



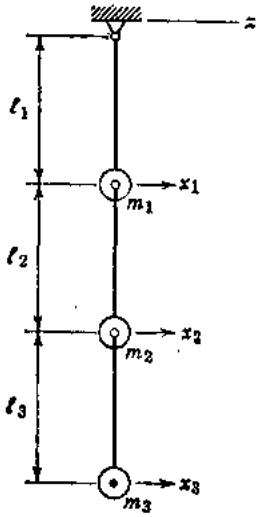
习题　4.2—6

4.2—7　试对图中三摆借作用力方程法求出本征值和本征向量。用微小的平动x_1、x_2和x_3作为位移坐标，并令$m_1=m_2=m_3=m$和$l_1=l_2=l_3=l$。

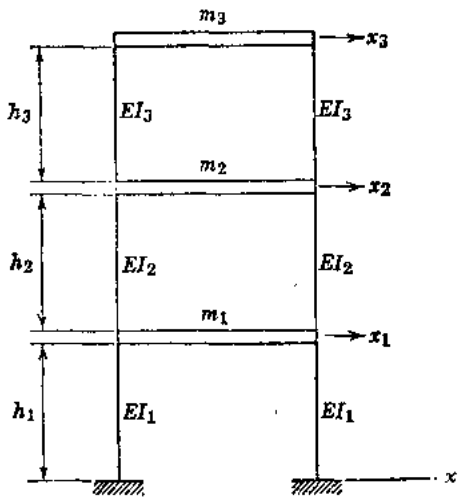
答：$p^2_{1,2,3}=0.416g/l$，$2.29g/l$，$6.29g/l$。

4.2—8　图中表示一座带有刚性梁和柔性柱的三层楼建筑。假设$m_1=m_2=m_3=m$，$h_1=h_2=h_3=h$，$EI_1=3EI$，$EI_2=2EI$和$EI_3=EI$。用微小的水平平动x_1、x_2和x_3作为位移坐标，试借位移方程法计算本征值和本征向量。

答：$\lambda_{1,2,3}=14.4\alpha$，$2.62\alpha$，$0.954\alpha(\alpha=mh^3/144EI)$



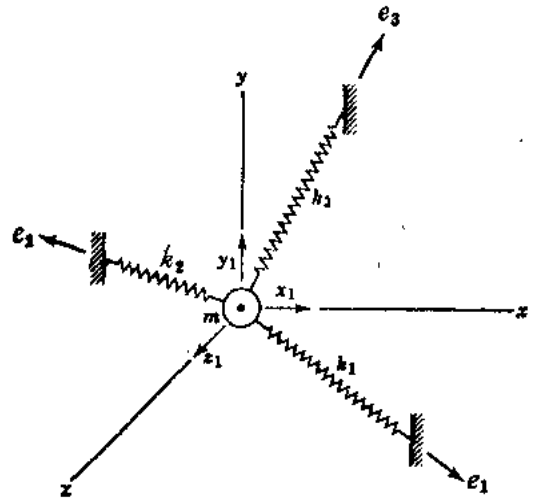
习题 4.2—7



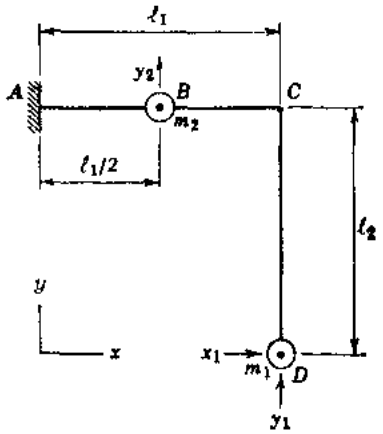
习题 4.2—8

4.2—9 用图中微小的正交平动 x_1、y_2和 z_1作为弹簧-悬挂着的质量的位移坐标。给予顺诸弹簧方向单位向量$\mathbf{e}_1=0.8\mathbf{i}-0.6\mathbf{j}$，$\mathbf{e}_2=0.6\mathbf{j}+0.8\mathbf{k}$和$\mathbf{e}_3=0.6\mathbf{j}-0.8\mathbf{k}$（这里 i、j和k分别表示顺 x、y 和 z 方向的单位向量）。假设所有弹簧的刚度常数均相等，试用作用力方程法确定本征值和本征向量。

答：$p^2_{1,2,3}=0.332k/m$，$1.28k/m$，$1.39k/m$



习题 4.2—9



习题 4.2—10

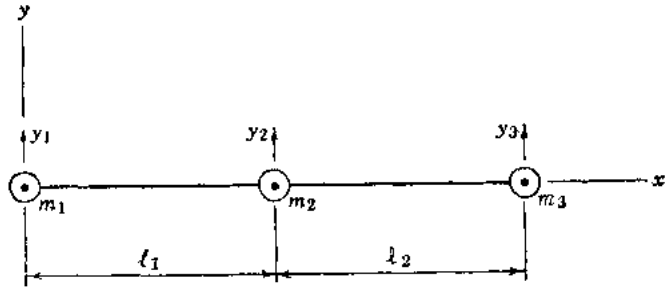
4.2—10 图中的平面框架具有两根弯曲刚度为EI的棱柱形杆。框架于A处固定，C处连接，诸质量置于B点和D点处。取微小的位移x_1、y_1和y_2作为位移坐标。假设 $m_1=m_2=m$和$l_1=l_2=l$，试用位移方程法求出本征值和本征向量。

答：$\lambda_{1,2,3}=74.7\alpha$，$6.99\alpha$，$0.307\alpha(\alpha=ml^3/48EI)$

4.2—11 假设置有三个质量的梁（见图）仅顺y方向自由平动。试在$m_1=m_2=m_3=m$和$l_1=l_2=l$的条件下用作用力方程法求出本征值和本征向量。该梁是棱柱形的，其弯曲刚度为EI。

地信网论坛 BBS.3500L.COM

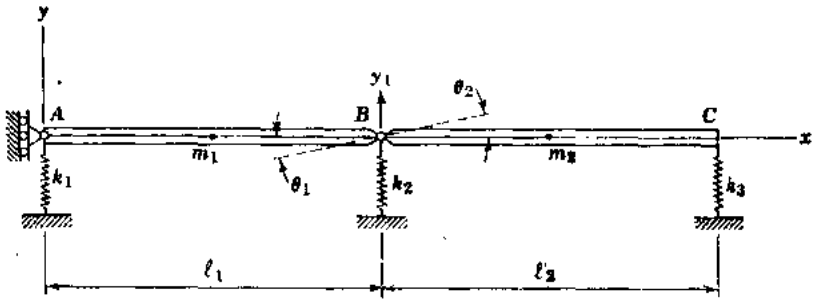
答：$p_{1,2,3}^2=0,\ 0,\ 9EI/ml^3$



习题 4.2—11

4.2—12 图中表示两根于B点处铰接到一起并借弹簧支承着的刚性杆。假设$l_1=l_2=l$，$k_1=k_2=k_3=k$，$m_1=m_2=m$，还假设诸质量沿诸杆长度均匀分布。将B点的微小平动y_1和诸杆绕B点的微小转动θ_1和θ_2用作位移坐标。试借作用力方程法确定此系统的本征值和本征向量。

答：$p_{1,2,3}^2=(3-\sqrt{3})k/m,\ 3k/m,\ (3+\sqrt{3})k/m$



习题 4.2—12

4.3 主坐标与正规坐标

为了研究诸主振型中某些固有关系，我们将考虑作用力方程中本征值问题的i型和j型（见前节中方程4.17）如下：

$$\mathbf{S}\mathbf{X}_{\mathrm{M}i}=p_i^2\mathbf{M}\mathbf{X}_{\mathrm{M}i} \tag{a}$$

$$\mathbf{S}\mathbf{X}_{\mathrm{M}j}=p_j^2\mathbf{M}\mathbf{X}_{\mathrm{M}j} \tag{b}$$

用$\mathbf{X}_{\mathrm{M}j}^{\mathrm{T}}$左乘这些式子中的第一式和用$\mathbf{X}_{\mathrm{M}i}$右乘第二式的转置，得到

$$\mathbf{X}_{\mathrm{M}j}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}\mathbf{X}_{\mathrm{M}i}=p_i^2\mathbf{X}_{\mathrm{M}j}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{X}_{\mathrm{M}i} \tag{c}$$

$$\mathbf{X}_{\mathrm{M}j}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}\mathbf{X}_{\mathrm{M}i}=p_j^2\mathbf{X}_{\mathrm{M}j}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{X}_{\mathrm{M}i} \tag{d}$$

方程（c）和（d）的左边相等，所以第一方程减第二方程得到下列关系

$$(p_i^2-p_j^2)\mathbf{X}_{\mathrm{M}j}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{X}_{\mathrm{M}i}=0 \tag{e}$$

反之，如果我们用p_i^2除方程（c）的两边和用p_j^2除方程（d）的两边，那么诸右边成为相等。然后相减给出

$$\left(\frac{1}{p_i^2}-\frac{1}{p_j^2}\right)\mathbf{X}_{\mathrm{M}j}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}\mathbf{X}_{\mathrm{M}i}=0 \tag{f}$$

地信网论坛 BBS.3500I.COM

为了当$i \neq j$和诸本征值不同（$p_i^2 \neq p_j^2$）时满足方程（e）和（f），下列关系必须成立：

$$\mathbf{X}_{Mi}^{T}\mathbf{M}\mathbf{X}_{Mj}=\mathbf{X}_{Mi}^{T}\mathbf{M}\mathbf{X}_{Mj}=0 \tag{4.23}$$

和

$$\mathbf{X}_{Mi}^{T}\mathbf{S}\mathbf{X}_{Mj}=\mathbf{X}_{Mi}^{T}\mathbf{S}\mathbf{X}_{Mj}=0 \tag{4.24}$$

这些式子代表诸主振型中的正交性关系。从方程（4.23）我们看到诸本征向量对$\mathbf{M}$是正交的，方程（4.24）表明它们对$\mathbf{S}$也是正交的。

对于当$i=j$的情况时，方程（e）和（f）得出

$$\mathbf{X}_{Mi}^{T}\mathbf{M}\mathbf{X}_{Mi}=M_{Pi} \tag{4.25}$$

和

$$\mathbf{X}_{Mi}^{T}\mathbf{S}\mathbf{X}_{Mi}=S_{Pi} \tag{4.26}$$

式中M_{Pi}和S_{Pi}均为常数，取决于本征向量$\mathbf{X}_{Mi}$是如何归一化的。为了提高运算效率，我们将所有本征向量顺列方向置放成下面形式的$n \times n$模态矩阵：

$$\mathbf{X}_{M}=[\mathbf{X}_{M1}\ \mathbf{X}_{M2}\ \mathbf{X}_{M3}\cdots\mathbf{X}_{Mn}] \tag{4.27}$$

于是，我们可以将方程（4.23）和（4.25）集中起来叙述为：

$$\mathbf{X}_{M}^{T}\mathbf{M}\mathbf{X}_{M}=\mathbf{M}_{P} \tag{4.28}$$

式中$\mathbf{M}_P$为对角线阵列，称为主质量矩阵。类似地，方程（4.24）和（4.26）合并成

$$\mathbf{X}_{M}^{T}\mathbf{S}\mathbf{X}_{M}=\mathbf{S}_{P} \tag{4.29}$$

其中$\mathbf{S}_P$为另一对角线阵列，称为主刚度矩阵。方程（4.28）和（4.29）代表矩阵$\mathbf{M}$和$\mathbf{S}$的对角化。如果它们之一早已是对角线的，那么不是方程（4.28）就是方程（4.29）的运算中仅仅对角线上的值改变比例。

为了利用对角化方法的优点，让我们重新考虑一个无阻尼多个自由度系统自由振动的运动作用力方程：

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}+\mathbf{S}\mathbf{X}=0 \tag{4.30}$$

用$\mathbf{X}_M^T$左乘方程（4.30），并在$\ddot{\mathbf{X}}$和$\mathbf{X}$的前面插进$\mathbf{I}=\mathbf{X}_M\mathbf{X}_M^{-1}$，得到

$$\mathbf{X}_{M}^{T}\mathbf{M}\mathbf{X}_{M}\mathbf{X}_{M}^{-1}\ddot{\mathbf{X}}+\mathbf{X}_{M}^{T}\mathbf{S}\mathbf{X}_{M}\mathbf{X}_{M}^{-1}\mathbf{X}=0$$

它可以重新叙述为

$$\mathbf{M}_{P}\ddot{\mathbf{X}}_{P}+\mathbf{S}_{P}\mathbf{X}_{P}=0 \tag{4.31}$$

此方程中的位移向量和加速度向量定义为

$$\mathbf{X}_{P}=\mathbf{X}_{M}^{-1}\mathbf{X} \tag{4.32}$$

和

$$\ddot{\mathbf{X}}_{P}=\mathbf{X}_{M}^{-1}\ddot{\mathbf{X}} \tag{4.33}$$

由于方程（4.28）和（4.29），方程（4.31）中的广义质量矩阵和广义刚度矩阵二者都是对角线矩阵。方程（4.32）所给的广义位移$\mathbf{X}_P$称为主坐标，对于主坐标运动方程（4.31）既没有惯性耦合又没有弹性耦合。从方程（4.32）我们发现借下面运算将原来诸坐标与诸主坐标联系起来：

$$\mathbf{X}=\mathbf{X}_{M}\mathbf{X}_{P} \tag{4.34}$$

还有，从方程（4.33）我们得到

$$\ddot{\mathbf{X}}=\mathbf{X}_{M}\ddot{\mathbf{X}}_{P} \tag{4.35}$$

地信网论坛 BBS.3500L.COM

回顾方程（4.27）中模态矩阵的定义，我们看到方程（4.34）中的广义位移$\mathbf{X}_P$作为$\mathbf{X}_M$中诸模态列的比例因子以得出实际位移$\mathbf{X}$值。这样，多个自由度系统的主坐标为其固有振型。

方程（a）中本征值问题可以借扩展$\mathbf{X}_{M_i}$成为$\mathbf{X}_M$（见方程4.27）以概括方式重新叙述，得出

$$\mathbf{S}\mathbf{X}_M=\mathbf{M}\mathbf{X}_M\mathbf{p}^2 \tag{g}$$

方程（g）中的符号$\mathbf{p}^2$代表对角线上具有p_i^2值的对角线矩阵：

$$\mathbf{p}^2=\begin{bmatrix} p_1^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & p_3^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_n^2 \end{bmatrix} \tag{4.36}$$

这种阵列称为本征值矩阵或特征值矩阵，有时称为谱矩阵。它在方程（g）中右乘$\mathbf{X}_M$，因而典型的模态列$\mathbf{X}_{M_i}$按相应的本征值p_i^2改变比例。用$\mathbf{X}_M^T$左乘方程（g）并应用关系式（4.28）和（4.29），我们得到

$$\mathbf{S}_P=\mathbf{M}_P\mathbf{p}^2 \tag{4.37}$$

因此

$$S_{P_i}=M_{P_i}p_i^2 \tag{h}$$

这样，按主坐标第i个主刚度等于第i个主质量与第i个本征值相乘。

因为模态向量可以任意改变比例，所以诸主坐标不是唯一的。事实上，有无穷多个这种广义位移组，但是最普通的选择是使其质量矩阵变换为单位矩阵。我们借规定方程（4.25）中M_P必须等于1来叙述此条件如下：

$$\mathbf{X}_{N_i}^T\mathbf{M}\mathbf{X}_{N_i}=M_{P_i}=1 \tag{i}$$

式中

$$\mathbf{X}_{N_i}=\mathbf{X}_{M_i}/C_i \tag{j}$$

在此条件下，改变比例的本征向量$\mathbf{X}_N$，说成是对质量矩阵归一化者。方程（j）中纯量C_i按下面计算

$$C_i=\pm\sqrt{\mathbf{X}_{M_i}^T\mathbf{M}\mathbf{X}_{M_i}}=\pm\sqrt{\sum_{j=1}^{n}X_{Mji}\left(\sum_{k=1}^{n}M_{jk}X_{Mki}\right)} \tag{4.38}$$

如果质量矩阵是对角线的，那么此式简化为

$$C_i=\pm\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(M_jX_{Mji}^2)} \tag{4.39}$$

当模态矩阵中所有向量都按这种方式归一化时，我们将角标M改变为N，并用符号$\mathbf{X}_N$代替$\mathbf{X}_M$。于是方程（4.28）所给的主质量矩阵成为：

$$\mathbf{X}_N^T\mathbf{M}\mathbf{X}_N=\mathbf{M}_P=\mathbf{I} \tag{4.40}$$

另外，从方程（4.29）和（4.37），可以看出主刚度矩阵为：

$$\mathbf{X}_N^T\mathbf{S}\mathbf{X}_N=\mathbf{S}_P=\mathbf{p}^2 \tag{4.41}$$

或，对于第i型

$$\mathbf{X}_{N_i}^T\mathbf{S}\mathbf{X}_{N_i}=S_{P_i}=p_i^2 \tag{k}$$

这样，当诸本征向量对$\mathbf{M}$归一化时，按主坐标的诸刚度均等于本征值。这种特殊的主坐标组

地信网论坛 BBS.3500L.COM

称为正规坐标。

为了说明正规坐标对于作用力方程的应用，让我们重新考虑图 4.2a 中张拉着的钢丝上的三个质量。从前节中例题 2，我们得到了此系统的本征向量，它们成为模态矩阵的诸列：

$$\mathbf{X}_M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \qquad (l)$$

为了使此阵列对$\mathbf{M}$归一化，$\mathbf{M}$等于$m\mathbf{I}$，我们从方程（4.39）计算诸纯量：

$$C_1 = \sqrt{m(1)^2 + m(\sqrt{2})^2 + m(1)^2} = 2\sqrt{m}$$

$$C_2 = \sqrt{m(1)^2 + m(0)^2 + m(-1)^2} = \sqrt{2m}$$

$$C_3 = \sqrt{m(1)^2 + m(-\sqrt{2})^2 + m(1)^2} = 2\sqrt{m}$$

用这些值除$\mathbf{X}_M$的诸列得到

$$\mathbf{X}_N = \frac{1}{2\sqrt{m}} \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{vmatrix} \qquad (m)$$

此系统的刚度矩阵为

$$\mathbf{S} = \frac{T}{l} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \qquad (n)$$

将方程（m）和（n）代入方程（4.41）得出

$$\mathbf{S}_P = \frac{T}{ml} \begin{vmatrix} 2-\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2+\sqrt{2} \end{vmatrix} \qquad (o)$$

它在对角线上包含p_1^2、p_2^2和p_3^2的值（见习题4.2-1的答案）。自然，方程（o）中的诸本征值早已可以得到，因而将刚度变换为正规坐标的优点是不明显的。但是这些优点对于后面诸节中的反应计算将是明显的。

作为按方程（4.30）形式建立运动方程的另一种方法，我们可以用$\mathbf{M}^{-1}$左乘，将它们变换成加速度方程如下：

$$\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{X} = 0 \qquad (4.42)$$

此方程可借代入$\mathbf{X}$的方程（4.34）和$\ddot{\mathbf{X}}$的方程（4.35）变换到主坐标。然后用$\mathbf{X}_M^{-1}$左乘给出

$$\ddot{\mathbf{X}}_P + \mathbf{X}_M^{-1}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{X}_M\mathbf{X}_P = 0 \qquad (p)$$

借$\mathbf{S}$前面插入单位矩阵$\mathbf{I} = (\mathbf{X}_M^{-1})^T\mathbf{X}_M^T$，方程（$p$）中的系数矩阵成为

$$\mathbf{X}_M^{-1}\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{X}_M^{-1})^T\mathbf{X}_M^T\mathbf{S}\mathbf{X}_M = \mathbf{M}_P^{-1}\mathbf{S}_P = \mathbf{p}^2 \qquad (q)$$

因此，按主坐标，加速度的矩阵方程可以写成：

$$\ddot{\mathbf{X}}_P + \mathbf{p}^2\mathbf{X}_P = 0 \qquad (4.43)$$

它也可借$\mathbf{M}_P^{-1}$左乘方程（4.31）来得到。由于借这任一方法得到相同的结果，所以我们可以避免应用方程（4.42），该方程需要推导$\mathbf{M}^{-1}$。自然，当$\mathbf{M}$为对角线矩阵时，计算$\mathbf{M}$之逆是没有困难的，但是当该阵列填满了时，$\mathbf{M}^{-1}$的确定是较为复杂的。

地信网论坛 BBS.3500L.COM

反之，$\mathbf{M}_P$总是对角线矩阵，所以得出其逆是一件容易的事。这个事实对于建立模态矩阵之逆是有利的，建立模态矩阵之逆往往是需要的。这种逆的公式借$\mathbf{X}_M^{-1}$右乘方程（4.28）和$\mathbf{M}_P^{-1}$左乘它来确定，得出：

$$\mathbf{X}_M^{-1}=\mathbf{M}_P^{-1}\mathbf{X}_M^{\mathrm{T}}\mathbf{M} \tag{4.44a}$$

如果诸本征向量对M归一化，那么诸主质量全部为1，方程（4.44a）成为

$$\mathbf{X}_N^{-1}=\mathbf{X}_N^{\mathrm{T}}\mathbf{M} \tag{4.44b}$$

从包括诸刚度和诸主刚度的方程（4.29）可以导出类似于方程（4.44a）和（4.44b）的公式。然而，除非诸本征向量是对S归一化，方程（4.44a）和（4.44b）还是较好的。

如果用运动的位移方程而不用作用力方程，那么方程（4.30）用下式代替：

$$\mathbf{FM}\ddot{\mathbf{X}}+\mathbf{X}=\mathbf{0} \tag{4.45}$$

我们借代入X的方程（4.34）和$\ddot{\mathbf{X}}$的方程（4.35）将此方程变换为主坐标。然后用$\mathbf{X}_M^{-1}$左乘得出

$$\mathbf{X}_M^{-1}\mathbf{FM}\mathbf{X}_M\ddot{\mathbf{X}}_P+\mathbf{X}_P=\mathbf{0} \tag{r}$$

当单位矩阵$\mathbf{I}=(\mathbf{X}_M^{-1})^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_M^{\mathrm{T}}$插于M的前面时，方程（$r$）中的系数矩阵成为

$$\mathbf{X}_M^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{X}_M^{-1})^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_M^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{X}_M=\mathbf{F}_P\mathbf{M}_P \tag{s}$$

方程（s）中的符号$\mathbf{F}_P$代表一个相应于$\mathbf{S}_P$的主柔度矩阵，定义为

$$\mathbf{F}_P=\mathbf{X}_M^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{X}_M^{-1})^{\mathrm{T}}=\mathbf{S}_P^{-1} \tag{4.46}$$

自然，此定义仅适用于当S（因而$\mathbf{S}_P$）是正定的时候。这样，按主坐标的运动位移方程可以写成：

$$\mathbf{F}_P\mathbf{M}_P\ddot{\mathbf{X}}_P+\mathbf{X}_P=\mathbf{0} \tag{4.47}$$

另外，方程（g）中本征值问题的扩展形式用下式代替：

$$\mathbf{FM}\mathbf{X}_M=\mathbf{X}_M\boldsymbol{\lambda} \tag{t}$$

方程（t）中的本征值矩阵$\boldsymbol{\lambda}$由对角线上包括λ_i值的对角线阵列组成：

$$\boldsymbol{\lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}=(\mathbf{p}^2)^{-1} \tag{4.48}$$

用$\mathbf{X}_M^{-1}$左乘方程（t），并应用关系式（s），我们求出：

$$\mathbf{F}_P\mathbf{M}_P=\boldsymbol{\lambda} \tag{4.49}$$

当模态矩阵对质量矩阵归一化时，从方程（4.46）和（4.49）可以看出主柔度矩阵为

$$\mathbf{X}_N^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{X}_N^{-1})^{\mathrm{T}}=\mathbf{F}_P=\boldsymbol{\lambda}=(\mathbf{p}^2)^{-1} \tag{4.50}$$

这样，按正规坐标的柔度矩阵成为本征值矩阵$\boldsymbol{\lambda}$，也等于$(\mathbf{p}^2)^{-1}$。从此我们得出结论，方程（4.43）给出按正规坐标的运动方程的形式，与按原坐标列方程的方法无关。

作为对位移方程应用正规坐标的一个例子，我们再考虑图4.2a中张拉着的钢丝上的三个质量。这个系统的柔度矩阵为：

$$\mathbf{F}=\frac{l}{4T}\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix} \tag{u}$$

地信网论坛 BBS.3500U.COM

按照方程（4.44b），从方程（m）对$\mathbf{X}_N$求逆，并将结果连同方程（u）一起代入方程（4.50）给出

$$\mathbf{F}_P=\frac{lm}{2T}\begin{bmatrix}2+\sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2-\sqrt{2}\end{bmatrix} \qquad (v)$$

它在对角线上包括$\lambda_1=1/P_1^2$，$\lambda_2=1/P_2^2$和$\lambda_3=1/P_3^2$诸值（见第4.2节中例题2）。

按前节末尾处所述，本征值问题经常借首先将它变换为带有对称系数矩阵的标准形式来求解。当采用此方法时，本征向量通常归一化为单位长度。令符号$\mathbf{V}_i$代表这样一个归一化本征向量，我们指定

$$\mathbf{V}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{V}_i=\mathbf{I} \qquad (w)$$

从标准形式（见第4.2节方程4.12a）将本征向量$\mathbf{X}_{Ui}$改变比例得出$\mathbf{V}_i$为

$$\mathbf{V}_i=\frac{\mathbf{X}_{Ui}}{D_i} \qquad (x)$$

式中纯量D_i为

$$D_i=\pm\sqrt{\mathbf{X}_{Ui}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_{Ui}}=\pm\sqrt{\sum_{j=1}^{n}X_{ji}^2} \qquad (1.51)$$

用这种归一化，模态矩阵$\mathbf{V}$具有下列性质：

$$\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}=\mathbf{I} \qquad \mathbf{V}^{-1}=\mathbf{V}^{\mathrm{T}} \qquad (4.52)$$

简单地称它为正交矩阵。将此模态矩阵变换回到原来坐标（见第4.2节方程4.12b），我们得到

$$\mathbf{X}_N=\mathbf{U}^{-1}\mathbf{V} \qquad (4.53)$$

为了证明此运算产生$\mathbf{X}_N$，我们将方程（4.53）和定义$\mathbf{M}=\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{U}$代入方程（4.40），给出

$$\mathbf{V}^{\mathrm{T}}(\mathbf{U}^{-1})^{\mathrm{T}}\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{U}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{V}=\mathbf{I}$$

这样，按原来坐标的诸本征向量已对$\mathbf{M}$归一化。

4.4 对初始条件的正规型反应

从前节中方程（4.43），我们看到，按正规坐标的无阻尼自由振动典型运动方程为

$$\ddot{x}_{Pi}+P_i^2x_{Pi}=0 \qquad (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n) \qquad (4.54)$$

此种方式的每一方程与所有其它方程是无联系的，我们将该式好像是属于一个自由度系统来处理〔见第1.1节中方程(1.1)〕。如果我们按每一正规坐标可以提供位移初始条件x_{0P_i}和速度初始条件$\dot{x}_{0P_i}$（在时间$t=0$处），那么我们就可以计算第i振型的自由振动反应：

$$x_{Pi}=x_{0P_i}\cos P_it+\frac{\dot{x}_{0P_i}}{P_i}\sin P_it \qquad (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n) \qquad (4.55)$$

此式是从第1.1节中无阻尼的一个自由度系统的方程（1.5）写来的。

应用方程（4.32），我们得到按正规坐标的初始位移如下：

$$\mathbf{X}_{0P}=\mathbf{X}_N^{-1}\mathbf{X}_0 \qquad (4.56)$$

方程（4.56）中的符号$\mathbf{X}_0$和$\mathbf{X}_{0P}$分别代表按原来坐标和按正规坐标的初始位移的向量。这样，

地信网论坛 BBS.35001.COM

$$\mathbf{X}_0=\begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ x_{03} \\ \cdots \\ x_{0n} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X}_{0P}=\begin{bmatrix} x_{0P1} \\ x_{0P2} \\ x_{0P3} \\ \cdots \\ x_{0Pn} \end{bmatrix} \tag{a}$$

类似地，系统的初始速度可借下列运算变换为正规坐标：

$$\dot{\mathbf{X}}_{0P}=\mathbf{X}_N^{-1}\dot{\mathbf{X}}_0 \tag{4.57}$$

式中 $\dot{\mathbf{X}}_0$ 和 $\dot{\mathbf{X}}_{0P}$ 分别为按原来坐标和正规坐标的初始速度的向量。方程（4.57）是从方程（4.56）对时间微分得到的，每一速度向量的形式与方程（a）中每一位移向量的形式相同。

有了按正规坐标所要求的初始条件，我们可以分别用方程（4.55）计算正规型位移向量 $\mathbf{X}_P=\{x_{Pi}\}$ 中的诸项。然后用方程（4.34）所给的运算将这些结果变换回到原来坐标。这样，

$$\mathbf{X}=\mathbf{X}_N\mathbf{X}_P \tag{4.58}$$

此种运算的次序与原来运动方程写成作用力方程或位移方程无关而都相同。然而，对于作用力方程方法，存在一个或多个刚体振型的可能性。对于这样一种主型，本征值 p_i^2 为零，方程（4.54）成为：

$$\ddot{x}_{Pi}=0 \tag{4.59}$$

此方程对时间积分两次，得到

$$x_{Pi}=x_{0Pi}+\dot{x}_{0Pi}t \tag{4.60}$$

方程（4.60）用来代替方程（4.55）求算按正规坐标的刚体振型的反应。

例题 1　第3.5节中我们借求算任意常数计算出图3.1a 中两个质量的系统对初始条件 $x_{01}=x_{02}=1$ 和 $\dot{x}_{01}=\dot{x}_{02}=0$ 的自由振动反应。现在我们将用正规型方法确定此相同的结果。

解：假设 $m_1=m_2=m$ 和 $k_1=k_2=k$。前面我们已求出该系统的本征值为 $p_1^2=0.382k/m$ 和 $p_2^2=2.618k/m$。此外，振幅比得出为 $r_1=0.618$ 和 $r_2=-1.618$。所以，模态矩阵为

$$\mathbf{X}_M=\begin{bmatrix} 0.618 & -1.618 \\ 1.000 & 1.000 \end{bmatrix} \tag{b}$$

为了将此阵列对 $\mathbf{M}=m\mathbf{I}$ 归一化，我们从方程（4.39）求算下面诸纯量：

$$C_1=\sqrt{m(0.618)^2+m(1.000)^2}=1.175\sqrt{m}$$

$$C_2=\sqrt{m(-1.618)^2+m(1.000)^2}=1.902\sqrt{m}$$

当 $\mathbf{X}_M$ 的诸列被这些值去除，其结果为

$$\mathbf{X}_N=\frac{1}{\sqrt{m}}\begin{bmatrix} 0.526 & -0.851 \\ 0.851 & 0.526 \end{bmatrix} \tag{c}$$

从方程（4.44b）得到初始条件变换为正规坐标所要求的 $\mathbf{X}_N$ 之逆：

$$\mathbf{X}_N^{-1}=\mathbf{X}_N^T\mathbf{M}=\sqrt{m}\begin{bmatrix} 0.526 & 0.851 \\ -0.851 & 0.526 \end{bmatrix} \tag{d}$$

按向量形式，初始条件为

$$\mathbf{X}_0=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \dot{\mathbf{X}}_0=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{e}$$

地信网论坛 BBS.3500I.COM

依照方程（4.56），非零初始位移的向量变换为正规坐标如下：

$$\mathbf{X}_{0P}=\mathbf{X}_N^{-1}\mathbf{X}_0=\sqrt{m}\begin{bmatrix}1.377\\-0.325\end{bmatrix} \tag{f}$$

应用方程（4.55）两次，我们按正规坐标形成解的向量为：

$$\mathbf{X}_P=\sqrt{m}\begin{bmatrix}1.377\cos p_1 t\\-0.325\cos p_2 t\end{bmatrix} \tag{g}$$

于是，按原来坐标的反应借方程（4.58）中的回代变换为

$$\mathbf{X}=\mathbf{X}_N\mathbf{X}_P=\begin{bmatrix}0.724\cos p_1 t+0.276\cos p_2 t\\1.171\cos p_1 t-0.171\cos p_2 t\end{bmatrix} \tag{h}$$

这些结果与第3.5节中的结果相同。

例题 2 对于具有刚体运动的例子，我们重新考虑图 4.1 a 中三个质量的系统，并令$k_1=0$。此外，我们假设$m_1=m_2=m_3=m$和$k_2=k_3=k$。在这些条件下，诸本征值已求出为$p_1^2=0$，$p_2^2=k/m$和$p_3^2=3k/m$（见第 4.2 节例题 1）。诸本征向量也已得到，模态矩阵为，

$$\mathbf{X}_M=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&2\\1&-1&1\end{bmatrix} \tag{i}$$

假定当第一个质量以突然得到速度v这样一种方式打击时该系统是处于静止。试确定该系统由于这种冲击所引起的反应。

解：$\mathbf{X}_M$对质量矩阵的归一化得出：

$$\mathbf{X}_N=\frac{1}{\sqrt{6m}}\begin{bmatrix}\sqrt{2}&\sqrt{3}&1\\\sqrt{2}&0&-2\\\sqrt{2}&-\sqrt{3}&1\end{bmatrix} \tag{j}$$

$\mathbf{X}_N$之逆为

$$\mathbf{X}_N^{-1}=\mathbf{X}_N^{\mathrm{T}}\mathbf{M}=\sqrt{\frac{m}{6}}\begin{bmatrix}\sqrt{2}&\sqrt{2}&\sqrt{2}\\\sqrt{3}&0&-\sqrt{3}\\1&-2&1\end{bmatrix} \tag{k}$$

初始条件的向量为

$$\mathbf{X}_0=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\qquad \dot{\mathbf{X}}_0=\begin{bmatrix}v\\0\\0\end{bmatrix} \tag{l}$$

将非零初始速度向量变换到正规坐标，我们求出

$$\dot{\mathbf{X}}_{0P}=\mathbf{X}_N^{-1}\dot{\mathbf{X}}_0=v\sqrt{\frac{m}{6}}\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{3}\\1\end{bmatrix} \tag{m}$$

方程（4.60）必定适用于刚体型，而方程（4.55）提供振型的反应。这样，正规型反应的向量成为：

地信网论坛 BBS.3S001.COM

$$\mathbf{X}_P = v\sqrt{\frac{m}{6}}\begin{Bmatrix} \sqrt{2}\,t \\ (\sqrt{3}\sin p_2 t)/p_2 \\ (\sin p_3 t)/p_3 \end{Bmatrix} \qquad (n)$$

将这些结果变换到原来坐标，给出

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_N\mathbf{X}_P = \frac{v}{6}\begin{Bmatrix} 2t + (3\sin p_2 t)/p_2 + (\sin p_3 t)/p_3 \\ 2t - (2\sin p_3 t)/p_3 \\ 2t - (3\sin p_2 t)/p_2 + (\sin p_3 t)/p_3 \end{Bmatrix} \qquad (o)$$

方程（o）中每一反应的刚体分量等于$vt/3$。

如果所有质量具有相同的初始速度v，那么初始速度向量成为$\dot{\mathbf{X}}_0 = \{v,\ v,\ v\}$，而方程（$m$）、（$n$）和（$o$）用下式代替：

$$\mathbf{X}_{0P} = v\sqrt{3m}\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{X}_P = v\sqrt{3m}\begin{Bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{X} = vt\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad (p)$$

在此情况下，运动由纯刚体平动组成，没有振动。

例题 3 试确定图 4.2a 中的系统对在第二个质量处顺x方向作用的静力P突然放松的自由振动反应。假设$m_1 = m_2 = m_3 = m$和$l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l$。

解：从第4.2节的例题 2，我们得到模态矩阵：

$$\mathbf{X}_M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (q)$$

将$\mathbf{X}_M$对$\mathbf{M}$归一化，产生

$$\mathbf{X}_N = \frac{1}{2\sqrt{m}}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X}_N^{-1} = \frac{\sqrt{m}}{2}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \qquad (r)$$

初始条件向量为

$$\mathbf{X}_0 = \frac{Pl}{2T}\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \dot{\mathbf{X}}_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (s)$$

按正规坐标，初始位移成为

$$\mathbf{X}_{0P} = \mathbf{X}_N^{-1}\mathbf{X}_0 = \frac{Pl\sqrt{m}}{2T}\begin{Bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 0 \\ 1-\sqrt{2} \end{Bmatrix} \qquad (t)$$

重复地应用方程（4.55），我们得到正规型反应为

$$\mathbf{X}_P = \frac{Pl\sqrt{m}}{2T}\begin{Bmatrix} (1+\sqrt{2})\cos p_1 t \\ 0 \\ (1-\sqrt{2})\cos p_3 t \end{Bmatrix} \qquad (u)$$

于是该结果按原来坐标计算为

地信网论坛 BBS.3500L.COM

$$\mathbf{X}=\mathbf{X}_N\mathbf{X}_P=\frac{pl}{4T}\begin{Bmatrix}(1+\sqrt{2})\cos p_1t+(1-\sqrt{2})\cos p_3t\\(\sqrt{2}+2)\cos p_1t-(\sqrt{2}-2)\cos p_3t\\(1+\sqrt{2})\cos p_1t+(1-\sqrt{2})\cos p_3t\end{Bmatrix} \qquad (v)$$

不激发反对称的第二型，只有对称的第一型和第二型影响方程（v）中的诸项。因此，质量 1 和 3 具有相同反应。

习 题 组 4.4

4.4—1 试确定图 4.1a 中的系统对作用于第三个质量顺 x 方向作用的静力 P 突然放松的自由振动反应。如果我们取 $m_1=m_2=m_3=m$ 和 $k_1=k_2=k_3=k$，那么其本征值和本征向量为第 4.2 节例题 1 中所计算出的第一组。

答：$x_1=P\ (1.220\cos p_1t-0.280\cos p_2t+0.060\cos p_3t)\ /4k$

4.4—2 试对习题4.2—2中的三个质量系统确定对于初始条件 $\mathbf{X}_0=\{0,\ 0,\ 0\}$ 和 $\dot{\mathbf{X}}_0=\{v,\ 0,\ -v\}$ 的自由振动反应。

答：$x_1=v\ (\sin p_2t)/p_2$

4.4—3 试对习题 4.2—3 中弹簧连接着的摆计算对初始条件 $\theta_0=\{0,\ \phi,\ 0\}$ 和 $\dot{\theta}_0=\{0,\ 0,\ 0\}$ 的自由振动反应。

答：$\theta_1=\phi(\cos p_1t-\cos p_3t)/3$

4.4—4 试确定习题4.2—4中旋转系统对初始条件 $\phi_0=\{0,0,0\}$ 和 $\dot{\phi}_0=\{\dot{\theta},\dot{\theta},\dot{\theta}\}$ 的自由振动反应。

答：$\phi_1=\dot{\theta}\ [0.543(\sin p_1t)/p_1+0.349(\sin p_2t)/p_2+0.108(\sin p_3t)/p_3]$。

4.4—5 试计算习题4.2—5中的四个质量系统对初始条件 $\mathbf{X}_0=\{0,\ 0,\ 0,\ 0\}$ 和 $\dot{\mathbf{X}}_0=\{v,\ 0,\ 0,\ v\}$ 的反应。

答：$x_1=v[t+(\sin p_3t)/p_3]/2$

4.4—6 假定习题4.2—6中无质量梁绕左边支承以等角速度 θ 转动，而右边支承固定。试确定该系统对此初始速度条件的反应

答：$y_1=\dot{\theta}l[1.707(\sin p_1t)/p_1-(\sin p_2t)/p_2+0.293(\sin p_3t)/p_3]/4$。

4.4—7 对于习题4.2—7中的三摆假设初始条件 $\mathbf{X}_0=\{\Delta,\ \Delta,\ \Delta\}$ 和 $\dot{\mathbf{X}}_0=\{0,\ 0,\ 0\}$，试计算随后发生的反应。

答：$x_1=\Delta(0.334\cos p_1t+0.314\cos p_2t+0.352\cos p_3t)$

4.4—8 试确定习题 4.2—8 中的三层楼建筑框架由于作用于第三层楼水平线上静荷载 $Q_3=P$ 突然放松引起的反应。

答：$x_1=Ph^3(2.611\cos p_1t-0.754\cos p_2t+0.142\cos p_3t)/144EI$

4.4—9 令习题4.2—9中的质量具有顺 x 方向的初始速度 v_x，而所有其它初始速度和位移分量均为零。试确定该质量产生的运动。

答：$x_1=v_x[0.708(\sin p_1t)/p_1+0.292(\sin p_3t)/p_3]$

4.4—10 假设在习题4.2—10中的框架上 C 点处有一静力 P 顺 y 方向作用。试求出该系统由于此力突然放松引起的反应。

答：$x_1=Pl^3(26.40\cos p_1t-2.381\cos p_2t-0.021\cos p_3t)/48EI$

地信网论坛 BBS.3500I.COM

4.4—11　试计算习题4.2—11中的系统对初始条件$\mathbf{Y}_0=\{0,\ 0,\ 0\}$和$\dot{\mathbf{Y}}_0=\{v,\ 2v,\ v\}$的反应。

答：$y_1=v[4t-(\sin p_3 t)/p_3]/3$

4.4—12　试对习题4.2—12中的系统求出对初始条件$y_{01}=\Delta$，$\theta_{01}=\theta_{02}=0$，$\dot{y}_{01}=0$和$\dot{\theta}_{01}=\dot{\theta}_{02}=0$的反应。令$l=3$英尺。

答：$y_1=\Delta(1.367\cos p_1 t-0.367\cos p_3 t)$

4.5 对施加作用力的正规型反应

现在我们考虑多个自由度系统承受相当于位移坐标的施加作用力的情况。按矩阵形式运动的作用力方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}+\mathbf{S}\mathbf{X}=\mathbf{Q} \tag{4.61}$$

式中符号$\mathbf{Q}$代表随时间变化的施加作用力的列矩阵（或向量）：

$$\mathbf{Q}=\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ \cdots \\ Q_n \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \\ \cdots \\ F_n(t) \end{Bmatrix} \tag{a}$$

方程（4.61）借$\mathbf{X}_M^T$左乘两边并代入$\mathbf{X}$和$\ddot{\mathbf{X}}$的方程（4.34）和（4.35）变换为主坐标，得到

$$\mathbf{X}_M^T\mathbf{M}\mathbf{X}_M\ddot{\mathbf{X}}_P+\mathbf{X}_M^T\mathbf{S}\mathbf{X}_M\mathbf{X}_P=\mathbf{X}_M^T\mathbf{Q}$$

此方程也可以写成

$$\mathbf{M}_P\ddot{\mathbf{X}}_P+\mathbf{S}_P\mathbf{X}_P=\mathbf{Q}_P \tag{4.62}$$

其中矩阵$\mathbf{M}_P$和$\mathbf{S}_P$是借方程（4.28）和（4.29）给出。方程（4.62）中的符号$\mathbf{Q}_P$表示按主坐标的施加作用力的向量，它借下面运算来计算：

$$\mathbf{Q}_P=\mathbf{X}_M^T\mathbf{Q} \tag{4.63a}$$

用展开形式，此乘法的结果为：

$$\begin{Bmatrix} Q_{P1} \\ Q_{P2} \\ Q_{P3} \\ \cdots \\ Q_{Pn} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} X_{M11}Q_1+X_{M21}Q_2+X_{M31}Q_3+\cdots+X_{Mn1}Q_n \\ X_{M12}Q_1+X_{M22}Q_2+X_{M32}Q_3+\cdots+X_{Mn2}Q_n \\ X_{M13}Q_1+X_{M23}Q_2+X_{M33}Q_3+\cdots+X_{Mn3}Q_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_{M1n}Q_1+X_{M2n}Q_2+X_{M3n}Q_3+\cdots+X_{Mnn}Q_n \end{Bmatrix} \tag{4.63b}$$

如果模态矩阵对质量矩阵归一化，那么方程（4.63a）得到

$$\mathbf{Q}_P=\mathbf{X}_N^T\mathbf{Q} \tag{4.64}$$

按正规坐标第i个运动方程采取下面形式：

$$\ddot{x}_{Pi}+p_i^2x_{Pi}=q_{Pi}\qquad(i=1,\ 2,\ 3\cdots n) \tag{4.65}$$

式中第i个正规型荷载为：

$$q_{Pi}=X_{N1i}Q_1+X_{N2i}Q_2+X_{N3i}Q_3+\cdots+X_{Nni}Q_n \tag{4.66}$$

借方程（4.66）确定的q_{Pi}项构成一个对第i个正规坐标的施加作用力。显然具有加速度的

地信网论坛 BBS.3500I.COM

单位，因为广义质量为 1 。

借（4.65）所代表的 n 个方程中的每一方程与所有其它方程无联系，我们看到它具有与一个自由度系统的相同形式。所以，我们可以用杜哈梅积分计算对施加作用力的第 i 个正规坐标的反应：

$$x_{P_i}=\frac{1}{p_i}\int_0^t q_{P_i}\sin p_i(t-t')\,dt' \tag{4.67}$$

此式是从第1.12节中方程（1.64）写来的，它是对一个初始时处于静止的无阻尼一个自由度系统推导出来的。将它重复地用于计算正规型位移向量 $\mathbf{X}_P=\{x_{P_i}\}$ 中的诸项。然后，将诸结果用前节中方程（4.58）变换为原来坐标。

对于相应于刚体运动的正规型，本征值 p_i^2 为零，因而方程（4.65）成为

$$\ddot{x}_{P_i}=q_{P_i} \tag{4.68}$$

在此情况下，正规型反应（由于该系统初始处于静止）为：

$$x_{P_i}=\int_0^t\int_0^{t'} q_{P_i}\,dt''dt' \tag{4.69}$$

在遇到刚体型时，方程（4.69）代替方程（4.67）

归纳起来，在计算多个自由度系统对施加作用力的反应时，我们首先用方程（4.64）将施加的作用力变换到正规坐标，然后从方程（4.67）中的积分得到每一振型的反应，对于每一刚体型则借方程（4.69）中的积分来确定。最后，实际位移坐标的值用方程（4.58）的逆变换运算来求出。如果所施加的诸作用力不与诸位移坐标相当，那么总是可以用适当的等效荷载作为开始的一步来计算（见本节末尾处例题 3）。

在进一步进行之前，让我们研究相应于第 j 个位移坐标的荷载 $Q_j=F_j(t)$ 产生第 k 个位移坐标的动力反应的效应。从方程（4.66），由于 Q_j 产生的第 i 个正规型荷载为

$$q_{P_i}=X_{Nji}Q_j \tag{b}$$

如果该系统只有振动型，那么第 i 型的反应从方程（4.67）得到为

$$x_{P_i}=\frac{X_{Nji}}{p_i}\int_0^t Q_j\sin p_i(t-t')\,dt' \tag{c}$$

借方程（4.58）将该反应变换回到原来坐标，得出第 k 个位移坐标的反应：

$$(x_k)_{Q_j}=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{X_{Nki}X_{Nji}}{p_i}\int_0^t Q_j\sin p_i(t-t')\,dt'\right] \tag{d}$$

类似地，由于相应于第 k 个位移坐标的荷载 $Q_k=F_k(t)$ 引起的第 j 个位移坐标的反应可以写出：

$$(x_j)_{Q_k}=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{X_{Nji}X_{Nki}}{p_i}\int_0^t Q_k\sin p_i(t-t')\,dt'\right] \tag{e}$$

如果 $Q_j=Q_k=F(t)$，那么方程（d）和（e）的右边相等，我们可以令诸左边相等，得到

$$(x_k)_{Q_j}=(x_j)_{Q_k}\qquad[Q_j=Q_k=F(t)] \tag{4.70}$$

地信网论坛 BBS.3500L.COM

方程（4.70）构成动力荷载互等定理*，它类似于马克斯威尔的静力荷载互等定理。它叙述为由于任一相应于第 j 个坐标随时间变化的作用力所产生的第 k 个位移坐标的动力反应等于因施加于第 k 个坐标处相同作用力所引起第 j 个坐标的反应。将方程（4.69）代替方程(4.67)用于方程（c）中可以看到该定理对于具有刚体型和振动型的系统都是成立的。

如果我们用运动的位移方程而不是用作用力方程去分析一个振动系统，那么方程(4.61)用下列代替：

$$\mathbf{FM}\ddot{\mathbf{X}}+\mathbf{X}=\mathbf{FQ}=\boldsymbol{\Delta} \tag{4.71}$$

在此方程中，符号 $\boldsymbol{\Delta}$ 代表借静力分析求得随时间变化的位移的向量。由于这个向量包括时间函数，所以它比第3.6节方程（3.37）中所定义的 $\boldsymbol{\Delta}_{st}$ 较为全面。这后一个符号表示由于谐和施力函数的最大值所引起的静力位移的常数向量。方程（4.71）中的阵列 $\boldsymbol{\Delta}$ 可以包括由于除了相应于诸位移坐标的作用力之外的干扰所引起的诸项。对于因支承运动出现的这种随时间变化的位移的情况在下节中讨论。

方程（4.71）借分别代入 $\mathbf{X}$ 和 $\ddot{\mathbf{X}}$ 的方程（4.34）和（4.35）变换到正规坐标（用 $\mathbf{X}_M$ 归一化成为 $\mathbf{X}_N$）。然后用 $\mathbf{X}_N^{-1}$ 左乘，得出

$$\mathbf{X}_N^{-1}\mathbf{FMX}_N\ddot{\mathbf{X}}_P+\mathbf{X}_P=\mathbf{X}_N^{-1}\mathbf{FQ}=\mathbf{X}_N^{-1}\boldsymbol{\Delta}$$

或

$$\mathbf{F}_P\ddot{\mathbf{X}}_P+\mathbf{X}_P=\boldsymbol{\Delta}_P \tag{4.72}$$

式中 $\mathbf{F}_P$ 由方程（4.50）给出，$\boldsymbol{\Delta}_P$ 定义为

$$\boldsymbol{\Delta}_P=\mathbf{X}_N^{-1}\boldsymbol{\Delta} \tag{4.73}$$

方程（4.72）所代表的 n 个方程中的每一方程具有下面形式：

$$\lambda_i\ddot{x}_{P_i}+x_{P_i}=\delta_{P_i}\qquad(i=1,2,3\cdots n) \tag{4.74}$$

式中 δ_{P_i} 为按第 i 个正规坐标随时间变化的位移。

如果方程（4.72）的两边均左乘 $\mathbf{S}_P=\mathbf{F}_P^{-1}$，那么该式成为

$$\ddot{\mathbf{X}}_P+\mathbf{S}_P\mathbf{X}=\mathbf{S}_P\boldsymbol{\Delta}_P \tag{4.75}$$

n 个方程中的每一方程采取下面形式

$$\ddot{x}_{P_i}+p_i^2x_{P_i}=q_{P\delta_i}\qquad(i=1,2,3\cdots n) \tag{4.76}$$

其中

$$q_{P\delta_i}=p_i^2\delta_{P_i} \tag{4.77}$$

方程（4.77）所定义的 $q_{P\delta_i}$ 项构成由于随时间变化的位移 δ_{P_i} 产生的等效正规型荷载。当利用运动的位移方程时，代以 q_{P_i}。

对等效荷载 $q_{P\delta_i}$ 的第 i 正规型的反应也可借杜哈梅积分计算。在此情况下，我们得到

$$x_{P_i}=\frac{1}{p_i}\int_0^t q_{P\delta_i}\sin p_i(t-t')\,dt'=p_i\int_0^t\delta_{P_i}\sin p_i(t-t')\,dt' \tag{4.78}$$

它相当于第1.13节中的方程（1.70）。在重复应用方程（4.78）之后，借方程（4.58）中的运算将诸结果变换回到原来的坐标。

动力位移互等定理可以按类似于方程（4.70）中对于荷载互等定理的推导方式推导出

---

* 这个定理是J.W.S.Rayleigh在Theory of Sound, Vol.1 p.151 (Sec.107) 中所提出的几个定理之一。

地信网论坛 BBS.35001.COM

来。这样，我们写出下列等式：

$$(x_k)_{\Delta_j} = (x_j)_{\Delta_k} \quad [\Delta_j = \Delta_k = f(t)] \tag{4.79}$$

此式意味着由于第 j 个坐标的任一随时间变化的位移所产生的第 k 个位移坐标的动力反应等于由于第 k 个坐标处的相同位移所产生第 j 个坐标的反应。

例题 1 我们再考虑图 3.1 a 中两个质量的系统，该系统对初始条件的反应在前节的例题 1 中已计算。假定一阶梯函数 $Q_1 = P$ 作用于第一个质量上。试确定这个开始为静止的系统对该施力函数的反应。

解：对于这种简单情况，施加作用力的向量为 $\mathbf{Q} = \{P, 0\}$。按照方程 (4.64)，我们借下面运算将这个向量变换到正规坐标：

$$\mathbf{Q}_P = \mathbf{X}_N^T \mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.526 & 0.851 \\ -0.851 & 0.526 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{P}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.526 \\ -0.851 \end{bmatrix} \tag{f}$$

从对于一阶梯函数的杜哈梅积分的结果（见第1.12节中方程1.66），我们得到第 i 个正规坐标的反应形式为

$$x_{Pi} = q_{P_i}(1 - \cos p_i t)/p_i^2 \tag{g}$$

这样，正规型位移的向量为

$$\mathbf{X}_P = \frac{P}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.526(1 - \cos p_1 t)/p_1^2 \\ -0.851(1 - \cos p_2 t)/p_2^2 \end{bmatrix} \tag{h}$$

将 $p_1^2 = 0.382k/m$ 和 $p_2^2 = 2.618k/m$ 代入方程（h）得出

$$\mathbf{X}_P = \frac{P\sqrt{m}}{k} \begin{bmatrix} 1.377(1 - \cos p_1 t) \\ -0.325(1 - \cos p_2 t) \end{bmatrix} \tag{i}$$

借方程 (4.58) 将该解变换到原来的坐标，我们得到

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_N \mathbf{X}_P = \frac{P}{k} \begin{bmatrix} 1 - 0.724\cos p_1 t - 0.276\cos p_2 t \\ 1 - 1.171\cos p_1 t + 0.171\cos p_2 t \end{bmatrix} \tag{j}$$

观察这些结果说明：诸质量对由于静止作用荷载所引起的移动后的位置 $(x_1)_{st} = (x_2)_{st} = P/k$ 进行振动。

按类似方式进行，我们还可以计算该系统对作用于第二个质量的阶梯函数 $Q_2 = P$ 的反应。在此情况下，我们求出

$$\mathbf{X} = \frac{P}{k} \begin{bmatrix} 1 - 1.171\cos p_1 t + 0.171\cos p_2 t \\ 2 - 1.895\cos p_1 t - 0.105\cos p_2 t \end{bmatrix} \tag{k}$$

方程（k）表示第一个质量对移动后的位置 $(x_1)_{st} = P/k$ 进行振动，而第二个质量对位置 $(x_2)_{st} = 2P/k$（由于静止地施加荷载引起的）进行振动。比较方程（j）和（k），我们还看到由于作用于质量 1 的阶梯函数 $Q_1 = P$ 所产生质量 2 的动力反应等于由于作用于质量 2 的阶梯函数 $Q_2 = P$ 所产生质量 1 的反应。这种相等证明了方程 (4.70) 中的互等定理。

例题 2 假设前节中例题 2 的半定系统受到施加于第二个质量的斜坡函数 $Q = Rt$ 的作用（符号 R 表示力对时间的变化率）。试计算三个质量系统对此激发的反应。

解：将此系统的 $\mathbf{X}_N^T$ 左乘施加作用力的向量 $\mathbf{Q} = \{0, Rt, 0\}$，我们将它变换到正规坐标：

$$\mathbf{Q}_P = \mathbf{X}_N^T \mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{6m}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ Rt \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{Rt}{\sqrt{6m}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \tag{l}$$

地信网论坛 BBS.3500L.COM

第一正规型的反应（刚体型）从方程（4.69）得到为

$$x_{P1}=\frac{Rt^3\sqrt{2}}{6\sqrt{6m}} \qquad (m)$$

由于第二型对称，所以它对此反对称加载无反应。然而，第三型按方程（4.67）的解反应。对于斜坡函数，杜哈梅积分求算得出：

$$x_{P3}=-2R\left(t-\frac{1}{p_3}\sin p_3 t\right)/p_3^2\sqrt{6m} \qquad (n)$$

它是从第1.12节中例题1写来的。用前面所计算的$p_3^2=3k/m$的值，我们写出正规型反应为

$$\mathbf{X}_P=\frac{R}{6\sqrt{6m}}\begin{Bmatrix} t^3\sqrt{2} \\ 0 \\ -\dfrac{4m}{k}\left(t-\dfrac{1}{p_3}\sin p_3 t\right) \end{Bmatrix} \qquad (o)$$

将这些位移变换到原来坐标，给出

$$\mathbf{X}=\mathbf{X}_N\mathbf{X}_P=\frac{R}{18m}\begin{Bmatrix} t^3-\dfrac{2m}{k}\left(t-\dfrac{1}{p_3}\sin p_3 t\right) \\ t^3+\dfrac{4m}{k}\left(t-\dfrac{1}{p_3}\sin p_3 t\right) \\ t^3-\dfrac{2m}{k}\left(t-\dfrac{1}{p_3}\sin p_3 t\right) \end{Bmatrix} \qquad (p)$$

方程（p）中每一反应的刚体分量等于$Rt^3/18m$，而只有第三主型影响振动运动。

例题3 再参见图4.2a中的系统，我们假设诸质量和长度如前节例题3中所指定。假定顺x方向施加的谐和施力函数$P\sin\omega t$作用于第一个和第二个质量之间的钢丝中点上。试对这个系统所产生的稳态强迫振动借作用力方程方法和位移方程法来确定。

解： 借观察，我们看到作用于诸质量上的等效力为$\mathbf{Q}=\{P(\sin\omega t)/2,\ P(\sin\omega t)/2,\ 0\}$。用$\mathbf{X}_N^{\mathrm{T}}$左乘此向量得出下列按正规坐标的施力函数：

$$\mathbf{Q}_P=\mathbf{X}_N\mathbf{Q}=\frac{P\sin\omega t}{4\sqrt{m}}\begin{matrix}1\\ \sqrt{2}\\ 1\end{matrix}\begin{matrix}\sqrt{2} & 1\\ 0 & -\sqrt{2}\\ -\sqrt{2} & 1\end{matrix}\begin{Bmatrix}1\\1\\0\end{Bmatrix}=\frac{P\sin\omega t}{4\sqrt{m}}\begin{Bmatrix}1+\sqrt{2}\\ \sqrt{2}\\ 1-\sqrt{2}\end{Bmatrix} \qquad (q)$$

略去瞬变状态，我们写出正规型反应为

$$\mathbf{X}_P=\frac{P\sin\omega t}{4\sqrt{m}}\begin{Bmatrix}(1+\sqrt{2})\beta_1/p_1^2\\ \sqrt{2}\,\beta_2/p_2^2\\ (1-\sqrt{2})\beta_3/p_3^2\end{Bmatrix} \qquad (r)$$

式中第i正规型的放大因子按下式给出

$$\beta_i=\frac{1}{1-\omega^2/p_i^2} \qquad (i=1,2,3) \qquad (s)$$

方程（r）借$1/p_1^2=(2+\sqrt{2})lm/2T$，$1/p_2^2=lm/2T$和$1/p_3^2=(2-\sqrt{2})lm/2T$代入改变为

$$\mathbf{X}_P=\frac{Pl\sqrt{m}\sin\omega t}{8T}\begin{Bmatrix}(4+3\sqrt{2})\beta_1\\ \sqrt{2}\,\beta_2\\ (4-3\sqrt{2})\beta_3\end{Bmatrix} \qquad (t)$$

于是，按原来坐标，反应成为

地信网论坛 BBS.3500I.COM

$$\mathbf{X}=\mathbf{X}_N\mathbf{X}_P=\frac{Pl\sin\omega t}{16T}\begin{bmatrix}(4+3\sqrt{2})\beta_1+2\beta_2+(4-3\sqrt{2})\beta_3\\2\quad(3+2\sqrt{2})\beta_1+2\quad(3-2\sqrt{2})\beta_3\\(4+3\sqrt{2})\beta_1-2\beta_2+(4-3\sqrt{2})\beta_3\end{bmatrix}\qquad(u)$$

为了将运动的位移方程用于此问题，我们首先按下列乘积导出位移向量$\boldsymbol{\Delta}$：

$$\boldsymbol{\Delta}=\mathbf{F}\mathbf{Q}=\frac{Pl\sin\omega t}{8T}\begin{bmatrix}3&2&1\\2&4&2\\1&2&3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\1\\0\end{Bmatrix}=\frac{Pl\sin\omega t}{8T}\begin{Bmatrix}5\\6\\3\end{Bmatrix}\qquad(v)$$

用方程（4.73）将这些位移变换到正规坐标：

$$\boldsymbol{\Delta}_P=\mathbf{X}_N^{-1}\boldsymbol{\Delta}=\frac{Pl\sqrt{m}\sin\omega t}{16T}\begin{bmatrix}1&\sqrt{2}&1\\\sqrt{2}&0&-\sqrt{2}\\1&-\sqrt{2}&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}5\\6\\3\end{Bmatrix}$$

$$=\frac{Pl\sqrt{m}\sin\omega t}{8T}\begin{Bmatrix}4+3\sqrt{2}\\\sqrt{2}\\4-3\sqrt{2}\end{Bmatrix}\qquad(w)$$

此向量引起与方程（t）中相同的正规型反应，再借方程（u）给出最终结果。

习　题　组　4.5

4.5—1　对图4.1a中三个质量的系统假设$m_1=m_2=m_3=m$和$k_1=k_2=k_3=k$。试确定此系统对作用于第三个质量的谐和施力函数$Q_3=P\cos\omega t$的稳态反应。

答：　$x_1=(P\cos\omega t)(0.242\beta_1/p_1^2-0.436\beta_2/p_2^2+0.194\beta_3/p_3^2)/m$

4.5—2　试计算习题4.2—2中三个质量系统对作用于第一个质量的阶梯函数$Q_1=P$的反应。

答：$x_1=P\left[6-(2+\sqrt{2})\cos p_1t-2\cos p_2t-(2-\sqrt{2})\cos p_3t\right]/8k$

4.5—3　假定一个水平向右作用的斜坡力Rt作用于习题4.2—3内中间摆的质量上。试确定该系统对于微小转角的反应。

答：$\theta_1=\frac{R}{3ml}\left[(t-\frac{1}{p_1}\sin p_1t)/p_1^2-(t-\frac{1}{p_3}\sin p_3t)/p_3^2\right]$

4.5—4　试对习题4.2—4中的系统计算对作用于第二个盘和第三个盘之间轴上中央处扭矩$T\sin\omega t$的稳态反应。

答：$\phi_1=(T\sin\omega t)(0.218\beta_1/p_1^2-0.097\beta_2/p_2^2-0.121\beta_3/p_3^2)/I$

4.5—5　试确定习题4.2—5中四个质量的系统对作用于第一个和第四个质量上的阶梯函数$Q_1=Q_4=P$的反应。

答：$x_1=P[t^2+(1-\cos p_3t)m/k]4m$

4.5—6　假设斜坡函数$Q_1=Q_3=Rt$作用于习题4.2—6内附于梁上的质量m_1和m_3处，试求出该系统的反应。

答：$y_1=\frac{R}{2m}\left[(t-\frac{1}{p_1}\sin p_1t)/p_1^2+(t-\frac{1}{p_3}\sin p_3t)/p_3^2\right]$

4.5—7　令习题4.2—7中的三摆承受顺x方向作用于第一个质量和第二个质量之间中点上的力$P\cos\omega t$。试计算该系统的稳态反应。

答：$x_1=(P\cos\omega t)(0.077\beta_1/p_1^2+0.290\beta_2/p_2^2+0.132\beta_3/p_3^2)/m$

地信网论坛 BBS.3500L.COM

4.5—8　试对习题4.2—8中的三层楼建筑框架求出对同时作用于每一层处阶梯函数$Q_1=Q_2=Q_3=P$的反应。

答：$x_1=Ph^3\ (5.977-4.820\cos p_1t-0.821\cos p_2t-0.336\cos p_3t)/144EI$

4.5—9　试确定习题4.2—9中弹簧悬挂着的质量由于顺z方向作用于该质量的斜坡函数Rt的反应。

答：$z_1=\dfrac{R}{p_2^2m}\left(t-\dfrac{1}{p_2}\sin p_2t\right)$

4.5—10　试计算习题4.2—10中的框架对顺y方向作用于B点处的力$P\sin\omega t$的稳态反应。

答：$x_1=(P\sin\omega t)(0.095\beta_1/p_1^2-0.146\beta_2/p_2^2+0.052\beta_3/p_3^2)/m$

4.5—11　令习题4.2—11中的系统承受顺y方向作用于第一个和第三个质量处的斜坡函数$Q_1=Q_3=Rt$。试求算该系统的反应。

答：$y_1=\dfrac{R}{9m}\left[t^3+3\left(t-\dfrac{1}{p_3}\sin p_3t\right)/p_3^2\right]$

4.5—12　试对习题4.2—12中的系统求出由于顺y方向作用于右边杆的质量中心处的阶梯力P所引起的反应。令$l=3$英尺。

答：$y_1=P(0.0379-0.0631\cos p_1t+0.0252\cos p_3t)/k$

4.6　对支承运动的正规型反应

在许多情况下，我们关心由于支承运动而不是施加作用力引起的多个自由度系统的反应。例如，如果图4.1a中地面顺x方向按下列函数平动：

$$x_g=F_g(t) \tag{a}$$

那么运动的作用力方程可以写成：

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}+\mathbf{S}\mathbf{X}^*=\mathbf{0} \tag{b}$$

其中向量$\mathbf{X}^*$包含诸质量相对于地面的位移：

$$\mathbf{X}^*=\mathbf{X}-\mathbf{1}x_g \tag{c}$$

（c）式中符号$\mathbf{1}$表示一个填满1值的向量，它具有使x_g重现n次的效应。这种处理地面位移的方式类似于前面用于具有一个或两个自由度的系统的技巧〔例如见第1.6节方程（j）〕。然而，一个较为一般的方法是按等效方式写出下列运动方程：

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}+\mathbf{S}\mathbf{X}+\mathbf{S}_gx_g=\mathbf{0} \tag{d}$$

在此情况下，式中

$$\mathbf{S}_g=-\mathbf{S}\mathbf{1} \tag{e}$$

符号$\mathbf{S}_g$代表一个刚度影响系数向量，它定义为当引起x_g单位值时相应于自由位移坐标*所需的保持位置的作用力。这种作用力可以直接（以$x_g=1$借系统的静力分析）得出，但是对于现在考虑中的情况，它们也可以从方程（e）计算出来，它说明它们等于矩阵$\mathbf{S}$中诸行之和的负值。

* 本节中为了避免模糊，我们采用“自由位移坐标”一词将一个可以自由移动的位移坐标和一个强加的位移坐标区别开。这后一种是指支承运动或约束运动。

地信网论坛 BBS.3500L.COM

我们将方程（d）中乘积$\mathbf{S}_g x_g$移到等号的右边使它写成前节中方程（4.61）的形式。这样，我们得到

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{S}\mathbf{X} = \mathbf{Q}_g \tag{4.80}$$

式中

$$\mathbf{Q}_g = -\mathbf{S}_g x_g = \mathbf{S}\mathbf{1}x_g \tag{4.81}$$

向量$\mathbf{Q}_g$包含相应于因地面运动所引起自由位移坐标的诸等效荷载。这种等效荷载借与实际荷载相同的运算变换到正规坐标。因此，从方程（4.64）我们写出

$$\mathbf{Q}_{PS} = \mathbf{X}_N^T \mathbf{Q}_g \tag{4.82}$$

按正规坐标的第 i 个运动方程成为：

$$\ddot{x}_{Pi} + p_i^2 x_{Pi} = q_{Pgi} \qquad (i = 1, 2, 3 \cdots n) \tag{4.83}$$

式中q_{Pgi}为由于地面运动所引起按第 i 个正规坐标的等效作用力。

为了计算第 i 型的反应，我们应用杜哈梅积分：

$$x_{Pi} = \frac{1}{p_i}\int_0^t q_{Pg_i} \sin p_i(t-t')\,dt' \tag{4.84}$$

此方程与前节中方程（4.67）的数学方式相同，但是q_{Pi}项被 q_{Pgi} 项所代替。如前面那样，将重复应用方程（4.84）所得到的诸结果借运算$\mathbf{X} = \mathbf{X}_N \mathbf{X}_P$变换到原来坐标。

如果对图 4.1 a 中的系统指定地面加速度$\ddot{x}_g$（而不是地面平动x_g），那么将坐标改变为方程（c）中所给相对运动。相应于$\mathbf{X}^*$的加速度为

$$\ddot{\mathbf{X}}^* = \ddot{\mathbf{X}} - \mathbf{1}\ddot{x}_g \tag{f}$$

从方程（f）将$\ddot{\mathbf{X}}$代入方程（b）给出按相对坐标的运动方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}^* + \mathbf{S}\mathbf{X}^* = \mathbf{Q}_g^* \tag{4.85}$$

式中

$$\mathbf{Q}_g^* = -\mathbf{M}\mathbf{1}\ddot{x}_g \tag{4.86}$$

因为对于图4.1 a 中的系统，其质量矩阵为对角线矩阵，所以在此特定情况下$\mathbf{Q}_g^*$ 的展开形式为：

$$\mathbf{Q}_g^* = \begin{pmatrix} -m_1\ddot{x}_g \\ -m_2\ddot{x}_g \\ -m_3\ddot{x}_g \end{pmatrix} \tag{g}$$

这样，相应于相对自由位移坐标的等效荷载等于质量与地面加速度$\ddot{x}_g$相乘的负值。确定这些等效作用力之后，我们可以用向量$\mathbf{Q}^*$代替$\mathbf{Q}_g$计算该系统相对于地面的反应。因为方程（4.85）中的系数矩阵与方程（4.80）相同，所以可以用相同的变换算子 $\mathbf{X}_N$ 将相对坐标与正规坐标联系起来。

如果我们用运动的位移方程而不用作用力方程，那么图 4.1 a 中地面平动的效应可以表达为

$$\mathbf{F}\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{X} - \mathbf{1}x_g = 0 \tag{h}$$

它可借$\mathbf{F} = \mathbf{S}^{-1}$左乘方程（$b$）来得到。将此式写成前节中方程（4.71）的形式，我们得到

$$\mathbf{F}\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{X} = \boldsymbol{\Delta}_g \tag{4.87}$$

地信网论坛 BBS.3S001.COM

式中

$$\mathbf{\Delta}_g = \mathbf{1} x_g \tag{4.88}$$

向量$\mathbf{\Delta}_g$由于地面运动所引起自由位移坐标随时间变化的位移组成，它的诸项借静力分析求得。自然，对于现在考虑中的情况，此向量中的每一项简单地等于平动x_g。这些位移借前面方程（4.73）中所给的运算变换到正规坐标。这样，我们得到

$$\mathbf{\Delta}_{Pg} = \mathbf{X}_N^{-1} \mathbf{\Delta}_g \tag{4.89}$$

在此情况下，按正规坐标的第 i 个运动方程（见方程4.74）成为

$$\ddot{x}_{Pi} + \lambda_i x_{Pi} = \delta_{Pgi} \qquad (i = 1, 2, 3 \cdots n) \tag{4.90}$$

其中δ_{Pgi}项为由于地面运动第 i 个正规坐标随时间变化的位移。

为了计算第 i 个型的反应，我们应用前节方程（4.78）中的杜哈梅积分的第二种形式，这样，我们得到

$$x_{Pi} = p_i \int_0^t \delta_{Pgi} \sin p_i (t - t') dt' \tag{4.91}$$

式中δ_{Pgi}代替δ_{Pi}。重复应用方程（4.91）之后，以常用方式将诸结果变换到原来坐标。

如果指定地面加速度$\ddot{x}_g$，而不是x_g，那么按相对坐标的运动位移方程采取下列形式：

$$\mathbf{FM}\ddot{\mathbf{X}}^* + \mathbf{X}^* = \mathbf{FQ}_g^* \tag{4.92}$$

它是借$\mathbf{F} = \mathbf{S}^{-1}$左乘方程（4.85）求得。在这种情况下，我们从方程（4.86）得到

$$\mathbf{\Delta}_g^* = \mathbf{FQ}_g^* = -\mathbf{FM}\mathbf{1}\ddot{x}_g \tag{4.93}$$

然后该系统相对于地面的反应可以用$\mathbf{\Delta}^*$代替$\mathbf{\Delta}_g$来计算。

我们已讨论四种处理一个特定多个自由度系统支承运动的方法（图4.1 a）。当应用运动作用力方程时，等效荷载借对指定的位移用方程（4.81）或借对指定的加速度用方程(4.86)来确定。这后一运算通常较前一运算简单，但是所计算的反应是相对于运动的支承的。反之，当写运动位移方程时，由于地面平动所引起自由位移坐标随时间变化的值借方程(4.88)给出，由于地面加速度引起的值借方程（4.93）求得。比较这两种式子，我们看到前者比后者要方便。此外，方程（4.88）也比作用力方程方法的方程（4.81）或方程（4.86）要简单。所以，如果支承位移指定了而且柔度不难得到，那么位移方程方法可能是有利的。这对于图4.1 a 中的静定系统，当它受到地面刚体平动时当然是正确的。然而，如果系统是静不定的，那么作用力方程方法通常提供较大的方便。

例题1 假定图3.1 a 中约束着两个质量系统的地面突然按照位移阶梯函数 $x_g = d$ 向右运动（如同一刚体那样）。试确定该系统对此瞬时支承位移的反应，假设$m_1 = m_2 = m$和$k_1 = k_2 = k$。

解：对于作用力方程方法，我们从方程（4.81）计算相应于自由位移坐标的等效荷载如下：

$$\mathbf{Q}_g = -\mathbf{S}_g x_g = \mathbf{S}\mathbf{1} x_g = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} d = \begin{bmatrix} kd \\ 0 \end{bmatrix} \tag{i}$$

此向量借方程（4.82）变换到正规坐标，得出

$$\mathbf{Q}_{Pg} = \mathbf{X}_N^{\mathrm{T}} \mathbf{Q}_g = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.526 & 0.851 \\ -0.851 & 0.526 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} kd \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{kd}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.526 \\ -0.851 \end{bmatrix} \tag{j}$$

地信网论坛 BBS.3500L.COM

应用方程（4.84）两次，我们得到对阶梯函数按正规坐标的反应为

$$\mathbf{X}_P=\frac{kd}{\sqrt{m}}\begin{bmatrix}0.526(1-\cos p_1 t)/p_1^2\\-0.851(1-\cos p_2 t)/p_2^2\end{bmatrix}=d\sqrt{m}\begin{bmatrix}1.377(1-\cos p_1 t)\\-0.325(1-\cos p_2 t)\end{bmatrix}\qquad(k)$$

按原来坐标，该解成为

$$\mathbf{X}=\mathbf{X}_N\mathbf{X}_P=d\begin{bmatrix}1-0.721\cos p_1 t-0.276\cos p_2 t\\1-1.171\cos p_1 t+0.171\cos p_2 t\end{bmatrix}\qquad(l)$$

它类似于在第一个质量处施加一个阶梯力（见前节的例题1），除了以 d 代替 P/k 之外。

为了用位移方程方法求解此问题，我们从方程（4.88）求算由于阶梯位移引起诸自由位移坐标的平动

$$\mathbf{\Delta}_g=\mathbf{1}x_g=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}d=\begin{bmatrix}d\\d\end{bmatrix}\qquad(m)$$

按正规坐标，此向量变换为

$$\mathbf{\Delta}_{Pg}=\mathbf{X}_N^{-1}\mathbf{\Delta}_g=\sqrt{m}\begin{bmatrix}0.526&0.851\\-0.851&0.526\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d\\d\end{bmatrix}=d\sqrt{m}\begin{bmatrix}1.377\\-0.325\end{bmatrix}\qquad(n)$$

两次应用方程（4.91）产生与方程（k）中相同的正规型反应。所以，最终结果仍借方程（l）给出。

例题 2　对图4.1a 中三个质量的系统，令 $m_1=m_2=m_3=m$ 和 $k_1=k_2=k_3=k$。试确定此系统对为抛物线函数 $\ddot{x}_g=a_1t^2/t_1^2$ 的支承加速度的反应，这里 a_1 为时间 t_1 处刚体地面加速度。

解：首先考虑作用力方程方法，借方程（g）我们得到此系统的等效荷载 $\mathbf{Q}^*$。这样，

$$\mathbf{Q}_g^*=\frac{-a_1t^2m}{t_1^2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\qquad(o)$$

按正规坐标，此向量成为

$$\mathbf{Q}_{Pg}^*=\mathbf{X}_N^T\mathbf{Q}_g^*=\frac{-a_1t^2\sqrt{m}}{t_1^2}\begin{bmatrix}0.328&0.591&0.737\\0.737&0.328&-0.591\\0.591&-0.737&0.328\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{-a_1t^2\sqrt{m}}{t_1^2}\begin{bmatrix}1.656\\0.474\\0.182\end{bmatrix}\qquad(p)$$

从三次应用杜哈梅积分，我们得到

$$\mathbf{X}_P^*=\frac{-a_1\sqrt{m}}{t_1^2}\begin{bmatrix}1.656[t^2-2(1-\cos p_1 t)/p_1^2]/p_1^2\\0.474[t^2-2(1-\cos p_2 t)/p_2^2]/p_2^2\\0.182[t^2-2(1-\cos p_3 t)/p_3^2]/p_3^2\end{bmatrix}\qquad(q)$$

其中每一个解的形式是借第1.13节末尾处习题1.13—6的答案给出的。将 $1/p_1^2=5.05m/k$，$1/p_2^2=0.643m/k$ 和 $1/p_3^2=0.308m/k$ 代入方程（q）得出

$$\mathbf{X}_P^*=\frac{-a_1\sqrt{m^3}}{t_1^2k}\begin{bmatrix}8.363[t^2-10.10m(1-\cos p_1 t)/k]\\0.305[t^2-1.286m(1-\cos p_2 t)/k]\\0.056[t^2-0.616m(1-\cos p_3 t)/k]\end{bmatrix}\qquad(r)$$

地信网论坛 BBS.3500L.COM

于是，按原来相对坐标的反应成为

$$\mathbf{X}^{*}=\mathbf{X}_{\mathrm{N}}\mathbf{X}_{\mathrm{P}}^{*}=\frac{-a_1 m}{t_1^2 k}\begin{Bmatrix}3t^2-27.70f_1(t)-0.289f_2(t)-0.020f_3(t)\\5t^2-49.92f_1(t)-0.129f_2(t)+0.025f_3(t)\\6t^2-62.26f_1(t)+0.232f_2(t)-0.011f_3(t)\end{Bmatrix} \qquad (s)$$

式中 $f_1(t)=m(1-\cos p_1 t)/k$，$f_2(t)=m(1-\cos p_2 t)/k$ 和 $f_3(t)=m(1-\cos p_3 t)/k$。

转到位移方程方法，我们从方程（4.93）确定向量 $\mathbf{\Delta}_g^{*}$：

$$\mathbf{\Delta}_g^{*}=-\mathbf{FM1}\ddot{x}_g=\frac{-a_1 t^2 m}{t_1^2 k}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\1\\-1\end{Bmatrix}=\frac{-a_1 t^2 m}{t_1^2 k}\begin{Bmatrix}3\\5\\6\end{Bmatrix} \qquad (t)$$

此向量变换到正规坐标给出

$$\mathbf{\Delta}_{Pg}^{*}=\mathbf{X}_{\mathrm{N}}^{-1}\mathbf{\Delta}_g^{*}=\frac{-a_1 t^2\sqrt{m^3}}{t_1^2 k}\begin{bmatrix}0.328&0.591&0.737\\0.737&0.328&-0.591\\0.591&-0.737&0.328\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}3\\5\\6\end{Bmatrix}$$

$$=\frac{-a_1 t^2\sqrt{m^3}}{t_1^2 k}\begin{Bmatrix}8.363\\0.305\\0.056\end{Bmatrix} \qquad (u)$$

三次应用杜哈梅积分得出方程（r）中的正规型反应，所以最终结果与方程（s）相同。从这些结果表现出基本型影响反应的大部分，第二型影响比第一型小得多，第三型影响比第二型小得多。

前面诸例说明用于分析系统只指定一种类型的地面刚体平动的各种技巧。在比较复杂的问题中，可能有三个地面刚体平动分量和三个地面刚体转动分量。在这样的情况下，x_g 项必须扩展成包含六种位移的向量，向量 $\mathbf{S}_g$ 成为一个 $n\times 6$ 的矩阵。此外，地面转动必须限于微小的转动，以便保持正规型法所基于的线性特性。线性分析中唯一允许大的运动为刚体平动。涉及这种大的运动的问题应该应用相对坐标进行分析，以避免在振动反应中有损数值精度。然后，系统的绝对运动可借相对位移与地面位移相加来得到。

对与地面具有多重连接的系统，仍可能借建立适当的刚度系数或柔度系数来计算对诸支承点独立运动的反应*。在这种情况下，诸支承的相对位移应很小，以便保持线性性能。如果一个具有 n 个自由度的系统有 r 个支承约束，而这些支承可以独立运动，那么作用力方程（d）推广为：

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}+\mathbf{SX}+\mathbf{S}_{\mathrm{R}}\mathbf{X}_{\mathrm{R}}=0$$

或

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}+\mathbf{SX}=\mathbf{Q}_{\mathrm{R}} \qquad (4.94)$$

式中

$$\mathbf{Q}_{\mathrm{R}}=-\mathbf{S}_{\mathrm{R}}\mathbf{X}_{\mathrm{R}} \qquad (4.95)$$

在这些式子中，$\mathbf{X}_{\mathrm{R}}$ 表示诸约束位移的向量，$\mathbf{S}_{\mathrm{R}}$ 为一个将诸自由位移坐标与诸支承约束联系起来 $n\times r$ 的刚度矩阵。$\mathbf{Q}_{\mathrm{R}}$ 为由于诸约束的运动所引起的等效荷载的向量。

---

* 见 W. Weaver, Jr., "Dynamics of Discrete-Parameter Structures," Developments in Theoretical and Applied Mechanics, Vol.2, edited by W.A.Shaw, Pergamon Press, New York, 1965, pp.629-651。

地信网论坛 BBS.3500L.COM

另一种方法，我们借$\mathbf{F}=\mathbf{S}^{-1}$左乘方程（4.94）的两边，将该方程变换为位移方程：

$$\mathbf{FM}\ddot{\mathbf{X}}+\mathbf{X}=\boldsymbol{\Delta}_R \tag{4.96}$$

其中

$$\boldsymbol{\Delta}_R=-\mathbf{FS}_R\mathbf{X}_R=\mathbf{D}_R\mathbf{X}_R \tag{4.97}$$

在此方法中，向量$\boldsymbol{\Delta}_R$由诸支承约束独立运动所引起自由位移坐标随时间变化的位移组成。象与这种性质的其它向量一样，其诸项借静力分析求得。方程（4.97）表明这种诸项可借下列算子左乘$\mathbf{X}_R$来建立：

$$\mathbf{D}_R=-\mathbf{FS}_R=-\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S}_R \tag{4.98}$$

符号$\mathbf{D}_R$代表一个 $n\times r$ 的位移影响系数矩阵，这些系数定义为由于约束运动的单位值所引起自由位移坐标的位移。而方程（4.98）提供对复杂系统计算这种项的有用公式，有时可以直接导出它们。下面例题说明这些技巧对于具有独立约束运动的系统的应用。

例题 3 再一次考虑图 4.2a 中的系统，假设支承点A和B可以顺x方向独立平动。令x_{R1}和x_{R2}分别代表A点和B点的微小位移。试确定由于约束运动$x_{R2}=d\sin\omega t$而$x_{R1}=0$所引起该系统的稳态反应。如前面那样，取$m_1=m_2=m_3=m$和$l_1=l_2=l_3=l_4=l$，因而前面所计算的系统的特性可以利用。

解：对此问题，诸约束位移的向量采取下列形式：

$$\mathbf{X}_R=\begin{bmatrix}x_{R1}\\x_{R2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\d\sin\omega t\end{bmatrix} \tag{v}$$

为了应用方程（4.94）的作用力方程法，我们导出矩阵$\mathbf{S}_R$为

$$\mathbf{S}_R=\begin{bmatrix}S_{R11}&S_{R12}\\S_{R21}&S_{R22}\\S_{R31}&S_{R32}\end{bmatrix}=\frac{T}{l}\begin{bmatrix}-1&0\\0&0\\0&-1\end{bmatrix} \tag{w}$$

此阵列中的第一列按图4.2e中对位移$x_{R1}=1$在诸质量处应有的保持位置的作用力来导得。类似地，$\mathbf{S}_R$的第二列由图4.2f中对$x_{R2}=1$所需的保持位置的作用力组成。根据方程(4.95)，我们得到相应于诸自由位移坐标的等效荷载为

$$\mathbf{Q}_R=-\mathbf{S}_R\mathbf{X}_R=\frac{Td\sin\omega t}{l}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \tag{x}$$

将此向量变换到正规坐标，得出

$$\mathbf{Q}_{PR}=\mathbf{X}_N^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_R=\frac{Td\sin\omega t}{2l\sqrt{m}}\begin{bmatrix}1&\sqrt{2}&1\\\sqrt{2}&0&-\sqrt{2}\\1&-\sqrt{2}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{Td\sin\omega t}{2l\sqrt{m}}\begin{bmatrix}1\\-\sqrt{2}\\1\end{bmatrix} \tag{y}$$

主型的稳态反应为

$$\mathbf{X}_P=\frac{Td\sin\omega t}{2l\sqrt{m}}\begin{bmatrix}\beta_1/p_1^2\\-\sqrt{2}\beta_2/p_2^2\\\beta_3/p_3^2\end{bmatrix}=\frac{d\sqrt{m}\sin\omega t}{4}\begin{bmatrix}(2+\sqrt{2})\beta_1\\-\sqrt{2}\beta_2\\(2-\sqrt{2})\beta_3\end{bmatrix} \tag{z}$$

地信网论坛 BBS.3500I.COM

这样，按原来坐标，我们求出结果为

$$\mathbf{X}=\mathbf{X}_N\mathbf{X}_P=\frac{d\sin\omega t}{8}\begin{pmatrix}(2+\sqrt{2})\beta_1-2\beta_2+(2-\sqrt{2})\beta_3\\ 2(1+\sqrt{2})\beta_1+2(1-\sqrt{2})\beta_3\\ (2+\sqrt{2})\beta_1+2\beta_2+(2-\sqrt{2})\beta_3\end{pmatrix} \tag{a'}$$

对于方程（4.96）的位移方程方法，我们可以借方程（4.98）建立诸位移影响系数的阵列$\mathbf{D}_R$如下：

$$\mathbf{D}_R=-\mathbf{F}\mathbf{S}_R=\frac{-l}{4T}\begin{pmatrix}3&2&1\\2&4&2\\1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&0\\0&-1\end{pmatrix}\frac{T}{l}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&1\\2&2\\1&3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}D_{R11}&D_{R12}\\D_{R21}&D_{R22}\\D_{R31}&D_{R32}\end{pmatrix} \tag{b'}$$

另一种，我们按图4.2*g*和4.2*h*分别由位移$x_{R1}=1$和$x_{R2}=1$所引起的诸质量位移来导出$\mathbf{D}_R$中第一列的诸项和第二列的诸项。当此算子用作方程（*v*）中$\mathbf{X}_R$的左乘时，我们得到自由位移坐标随时间变化的位移。这样

$$\mathbf{\Delta}_R=\mathbf{D}_R\mathbf{X}_R=\frac{d\sin\omega t}{4}\begin{pmatrix}3&1\\2&2\\1&3\end{pmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}-\frac{d\sin\omega t}{4}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \tag{c'}$$

将此向量变换到正规坐标，我们求出

$$\mathbf{\Delta}_{PR}=\mathbf{X}_N^{-1}\mathbf{\Delta}_R=\frac{d\sqrt{m}\sin\omega t}{8}\begin{pmatrix}1&\sqrt{2}&1\\\sqrt{2}&0&-\sqrt{2}\\1&-\sqrt{2}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\frac{d\sqrt{m}\sin\omega t}{4}\begin{pmatrix}2+\sqrt{2}\\-\sqrt{2}\\2-\sqrt{2}\end{pmatrix} \tag{d'}$$

在这点上，我们看到按正规坐标的解相当于方程（*z*），按原来坐标的结果借方程（*a'*）给出。

习 题 组 4.6

4.6—1 假定图4.1*a*中地面按斜坡函数$x_g=d_1t/t_1$进行平动，这里d_1为时间t_1处刚体地面平动。试用作用力方程法确定此系统的反应，假设$m_1=m_2=m_3=m$和$k_1=k_2=k_3=k$。

答：$x_1=kd_1[0.108f_1(t)+0.543f_2(t)+0.349f_3(t)]/t_1m$，这里$f_1(t)=(t-\frac{1}{p_1}\sin p_1t)/p_1^2$等等。

4.6—2 试求出习题4.2—2中三个质量的系统由于地面刚体阶梯位移$x_g=d$引起的反应。对此习题应用分析的位移方程法。

答：$x_1=d[4-(2+\sqrt{2})\cos p_1t-(2-\sqrt{2})\cos p_3t]/4$。

4.6—3 试用作用力方程法确定习题4.2—3中用弹簧连接的摆由于刚体谐和地面加速度$\ddot{x}_g=a\sin\omega t$所产生的稳态转动反应。在这种情况下，转动是绝对的，不是相对的。

答：$\theta_1=-(a/g)\beta_1\sin\omega t$

4.6—4 考虑习题4.2—4中的系统，假设该轴在*A*点处给予转动加速度$\ddot{\phi}_A=\alpha_1t^2/t_1^2$，

地信网论坛 BBS.3500L.COM

这里a_1为时间t_1处的角加速度。试用位移方程法求出诸盘相对于A点处轴的转动的旋转反应。

答：

$\phi_1^* = -a_1 I[3t^2 - I(28.01 - 27.70\cos p_1 t - 0.289\cos p_2 t - 0.020\cos p_3 t)/k_r]/t_1^2 k_r$。

4.6—5　令习题4.2—5中系统的第四个质量按斜坡函数$x_4 = d_1 t/t_1$平动，这里d_1为时间t_1处它的位移。试用作用力方程法确定其它三个质量的反应。

答：$x_1 = kd_1[0.242 f_1(t) - 0.435 f_2(t) + 0.194 f_3(t_1)]/t_1 m$，这里$f_1(t) = (t - \frac{1}{p_1}\sin p_1 t)/p_1^2$等等。

4.6—6　假定习题4.2—6中梁的左边支承突然顺y方向平动一个量d。试用位移方程法计算附于该梁上的诸质量的反应。

答：$y_1 = d(3 - 1.707\cos p_1 t - \cos p_2 t - 0.293\cos p_3 t)/4$。

4.6—7　试用位移方程法求出习题4.2—7中的三摆由于支承点阶梯平动$x_g = d$引起的反应。

答：$x_1 = d(1 - 0.334\cos p_1 t - 0.314\cos p_2 t - 0.352\cos p_3 t)$

4.6—8　假定习题4.2—8中的建筑框架受到用$\ddot{x}_g = a\sin\omega t$给定的水平地面加速度。试用作用力方程法确定诸三层楼水平面处相对于地面的稳态水平运动。

答：$x_1^* = -a\sin\omega t(0.334\beta_1/p_1^2 + 0.314\beta_2/p_2^2 + 0.352\beta_3/p_3^2)$。

4.6—9　考虑习题4.2—9中用弹簧连接着的质量，令第一个（或较低的）弹簧的地面连接点突然顺x方向移动一个量d。试用作用力方程法计算该质量的反应。

答：$x_1 = d(1 - 0.708\cos p_1 t - 0.292\cos p_3 t)$

4.6—10　令习题4.2—10中框架上A点绕垂直于$x-y$平面的轴经历微小的谐和转动$\theta_A = \phi\cos\omega t$。试用位移方程法求出所附的诸质量的稳态反应。

答：$x_1 = \phi l\cos\omega t(1.242\beta_1/p_1^2 - 0.248\beta_2/p_2^2 + 0.007\beta_3/p_3^2)$。

4.6—11　假定习题4.2—11中系统的中央质量引起按抛物线函数$\ddot{y}_2 = a_1 t^2/t_1^2$给定的加速度，这里$a_1$为时间$t_1$处的加速度。试用作用力方程法确定质量$m_1$和$m_3$相对于$m_2$的反应。

答：$y_1^* = y_3^* = -a_1[t^2 - 2(1 - \cos pt)/p^2]/p^2 t_1^2$，这里$p^2 = 3EI/l^3 m$。

4.6—12　假设习题4.2—12中C点下面弹簧的下端处支承点顺y方向按$y_R = d\sin\omega t$成谐和平动。试用位移方程法求算对此干扰力的稳态反应，假设$l = 3$英尺。

答：　$y_1 = d\sin\omega t(0.096\beta_1/p_1^2 - 0.096\beta_3/p_3^2)$

4.7　频率和振型形状的迭代法

第4.2节中用于确定一个系统的本征值所述的方法通常仅用于当特征方程的诸根不难得到的时候。还有各种不同的数值法可以应用*，通常这些方法对于具有许多自由度的系统更为有效。本节中所讨论的技巧有时称为幂法或斯托多拉—维亚里罗法（Stodola-Vianello method），但通常简称迭代法。这种方法适用较低阶矩阵用计算尺手算或用台式计算机计

* J.H. Wilkinson, The Algebraic Eigenvalue Problem, Oxford Univ. Press, London, 1965.

地信网论坛 BBS.3500I.COM

算，但是对于较大的问题应在数字计算机上进行。

在振动问题中，当只有几个最低的频率和相应振型形状需要确定时，迭代法是最有用的。如果对于具有许多自由度的系统需要求所有的本征值和本征向量，那么别的数值方法比较好，因为它们需要较少的算术运算。此外，如果振型形状事先可以估计，那么迭代过程收敛较快。通常，基本振型的形态可以很好地近似表示，可是较高型的形状估计起来就较困难。虽然这样，但是所预测的振型形状的精确度仅影响收敛的速度，而不影响最终结果。

为了导出迭代方法，不论振动如何，我们从下面标准形式表达本征值问题着手：

$$\mathbf{A}\mathbf{X}_{M_i}=\lambda_i\mathbf{X}_{M_i} \tag{4.99}$$

它与第4.2节中方程（z）相同。诸本征值λ_i之一的第一近似值可借一试用本征向量$(\mathbf{X})_1$代入方程（4.99）的两边然后求解λ_i来得到。为此目的，令该方程左边矩阵$\mathbf{A}$与试用本征向量$(\mathbf{X})_1$之乘积用向量$(\mathbf{Y})_1$来代表：

$$(\mathbf{Y})_1=\mathbf{A}(\mathbf{X})_1 \tag{a}$$

如果向量$(\mathbf{X})_1$不是正确的本征向量，那么将它代入方程（4.99）仅近似地满足该方程。这样，我们得到

$$(\mathbf{Y})_1\approx\lambda_1(\mathbf{X})_1 \tag{b}$$

特征值的第一近似值$(\lambda_i)_1$可借向量$(\mathbf{Y})_1$中n个元素的任何一元素被向量$(\mathbf{X})_1$中相应元素相除来得到〔注意，如果$(\mathbf{X})_1$是正确的本征向量，那么所有这种比值都相等〕。我们表这所有这些可能选择值为下列比：

$$(\lambda_i)_1=(y_i)_1/(x_j)_1 \tag{c}$$

其中$1\leqslant j\leqslant n$。

在第二步迭代的准备中，通常向量$(\mathbf{Y})_1$按某种方式归一化（例如用第一个或最后一个元素除它的所有元素）。一般来说，我们用一个任意常数b_1去除$(\mathbf{Y})_1$得到第二次试用的向量$(\mathbf{X})_2$

$$(\mathbf{X})_2=(\mathbf{Y})_1/b_1 \tag{d}$$

用矩阵$\mathbf{A}$去左乘这个向量得到下列新的向量$(\mathbf{Y})_2$：

$$(\mathbf{Y})_2=\mathbf{A}(\mathbf{X})_2 \tag{e}$$

接着，按下式计算本征值的第二次近似值

$$(\lambda_i)_2=(y_i)_2/(x_i)_2 \tag{f}$$

然后，向量$(\mathbf{Y})_2$借任意常数b_2除它来改变比例，以得到第三次试用向量$(\mathbf{X})_3$：

$$(\mathbf{X})_3=(\mathbf{Y})_2/b_2 \tag{g}$$

重复此手续直到本征值和有关的本征向量确定到所需要的精确度为止。

在第k次迭代中，上面所述各步的递推方程为

$$(\mathbf{Y})_k=\mathbf{A}(\mathbf{X})_k \tag{4.100}$$

$$(\lambda_i)_k=(y_i)_k/(x_i)_k \tag{4.101}$$

$$(\mathbf{X})_{k+1}=(\mathbf{Y})_k/b_k \tag{4.102}$$

其中b_k为一任意选定的除数。它将表明：当重复应用这些方程时，其过程收敛于数值上最大的本征值和有关的本征向量。所以，为了帮助收敛，第一次试用的向量$(\mathbf{X})_1$应该是与数值上最大本征值有关的本征向量的近似值。

为了证明这种迭代技巧收敛于最大的本征值，我们用该系统的正确的诸本征向量表达第一次试用的向量$(\mathbf{X})_1$：

地信网论坛 BBS.3S001.COM

$$(\mathbf{X})_1=\sum_{i=1}^{n}a_i\mathbf{X}_{Mi} \qquad (h)$$

其中a_1，a_2，…，a_i，…，a_n为比例因子。此式的正确性取决于n个线性独立（虽然未知）本征向量的实际情况，它为振动系统所满足的一个标准。我们还将假设诸相应本征值按下降次序排列，并假设最大本征值λ_1不重复。亦即

$$\lambda_1>\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_i\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n \qquad (i)$$

将方程（h）代入方程（a），并将方程（4.99）用于该结果，我们导出以真本征向量表达的下列$(\mathbf{Y})_1$的式子：

$$(\mathbf{Y})_1=\sum_{i=1}^{n}a_i\mathbf{A}\mathbf{X}_{Mi}=\sum_{i=1}^{n}a_i\lambda_i\mathbf{X}_{Mi} \qquad (j)$$

在迭代的第二步中，我们取

$$(\mathbf{Y})_2=\mathbf{A}(\mathbf{X})_2=\mathbf{A}(\mathbf{Y}_1)/b_1 \qquad (k)$$

将方程（j）代入方程（k），仍用方程（4.99），我们求出$(\mathbf{Y})_2$的表达式为

$$(\mathbf{Y})_2=\sum_{i=1}^{n}a_i\lambda_i\mathbf{A}\mathbf{X}_{Mi}/b_1=\sum_{i=1}^{n}a_i\lambda_i^2\mathbf{X}_{Mi}/b_1 \qquad (l)$$

在第k次迭代中，$(\mathbf{Y})_k$的表达式成为

$$(\mathbf{Y})_k=\sum_{i=1}^{n}a_i\lambda_i^k\mathbf{X}_{Mi}/b_1b_2\cdots b_{k-1} \qquad (m)$$

式中λ_i增加到k次幂。分解因子λ_1^k并将包括$\mathbf{X}_{Mi}$的项与其它项分开，我们得到

$$(\mathbf{Y})_k=\lambda_1^k\left[a_1\mathbf{X}_{M1}+\sum_{i=2}^{n}a_i(\lambda_i/\lambda_1)^k\mathbf{X}_{Mi}\right]/b_1b_2\cdots b_{k-1}$$

从所假设的本征值的次序〔见方程（i）〕，看出当k增大时，因子$(\lambda_i/\lambda_1)^k$趋近于零。所以，我们得出结论：

$$(\mathbf{Y})_k\approx\lambda_1^ka_1\mathbf{X}_{M1}/b_1b_2\cdots b_{k-1} \qquad (n)$$

此式表示$(\mathbf{Y}_k)$趋近于$\mathbf{X}_{M1}$的形式，因为所有其它项均为常数。如果我们从方程（n）的右边分解因子λ_1，我们求出：

$$(\mathbf{Y})_k\approx\lambda_1(\lambda_1^{k-1}a_1\mathbf{X}_{M1}/b_1b_2\cdots b_{k-1})=\lambda_1(\mathbf{X})_k \qquad (o)$$

这样，从方程（o）看到方程（4.101）所给的λ_i的第k个近似值为λ_1的近似值。由于这种收敛情况，所以数值上最大的本征值λ_1称为主本征值，相应的向量$\mathbf{X}_{M1}$称为主本征向量。

现在我们将用迭代法去确定多个自由度系统的基本振型的本征值和本征向量。因为该方法收敛于最大本征值，所以我们必须用位移方程法，那里最大本征值等于最低角频率平方的倒数。这样，从第4.2节方程（4.9），我们得到

$$\mathbf{FMX}_{M1}=\lambda_1\mathbf{X}_{M1} \qquad (4.103)$$

式中

$$\lambda_1=1/P_1^2 \qquad (4.104)$$

方程（4.103）为方程（4.99）中本征值问题的标准形式。对于这种应用，我们看到

$$\mathbf{A}=\mathbf{FM} \qquad (4.105)$$

它是非对称的，除非$\mathbf{M}$为一个在对角线上具有相等项的对角线矩阵。然而，当用迭代法确定

地信网论坛 BBS.3500L.COM

基本振型时，缺乏这样的对称性是不重要的。

作为一个数值例子，让我们考虑对图4.1 a 中三个质量系统应用位移方程法，该系统在第4.2节的例题 1 中已用作用力方程法作了分析。如果$k_1=k_2=k_3=k$和$m_1=m_2=m_3=m$，那么此系统的柔度矩阵和质量矩阵为

$$\mathbf{F}=\delta\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{bmatrix}\qquad \mathbf{M}=m\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

式中$\delta=1/k$，如前面那样。所以，方程（4.105）中的矩阵**A**成为

$$\mathbf{A}=m\delta\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{bmatrix}\qquad (p)$$

基本振型的好的近似形状可借取矩阵**A**的诸行和来得到。这种方法得出由于静止施加作用力产生的位移的向量，这些作用力与诸质量成比例，如瑞利法中那样（见第 1.4 节）。一种完成这同一目的的间接方法由取

$$(\mathbf{X})_1=\{1,\ 1,\ 1\}$$

作为第一试用向量来组成。根据方程（4.100），用矩阵**A**左乘$(\mathbf{X})_1$，得出向量：

$$(\mathbf{Y})_1=m\delta\{3,\ 5,\ 6\}$$

如方程（4.101）所指出，λ_1 的第一近似值可按三个不同方向来计算。为了后面计算方便，我们将用$(\mathbf{X})_1$的最后元素去除$(\mathbf{Y})_1$的最后元素，得到

$$(\lambda_1)_1\simeq(y_n)_1/(x_n)_1=6m\delta$$

基　本　型　的　迭　代　　表 4·1

试用向量 $(\mathbf{X})_k$	$(\mathbf{X})_1$	$(\mathbf{X})_2$	$(\mathbf{X})_3$	$(\mathbf{X})_4$	$(\mathbf{X})_5$
$\frac{\mathbf{A}}{m\delta}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{bmatrix}$	1	0.500	0.452	0.446	0.445
	1	0.833	0.806	0.803	0.802
	1	1.000	1.000	1.000	1.000
本征值 $(\lambda_1)_k/m\delta$	6	5.167	5.065	5.051	5.049

在准备迭代的第二次循环中，向量$(\mathbf{Y})_1$借最后元素除每一元素来归一化（见方程 4.102），得出第二个试用向量：

$$(\mathbf{X})_2=\{0.500,\ 0.833,\ 1.000\}$$

当用这种归一化时，除数$b_1=6m\delta$与近似的本征值一致。

迭代的第二次循环由应用方程（4.100）、（4.101）和（4.102）得出$(\mathbf{Y})_2$、$(\lambda_1)_2$和$(\mathbf{X})_3$值组成。对于其它循环重复这种迭代手续，直到两次连续迭代得出的本征向量与前次确定的精确度一致为止。表4.1归纳了诸结果，在此情况下，第五次循环所得的向量与第四次循环近似精确到三位小数。这样，我们得到

$$\lambda_1\approx5.049m\delta\qquad p_1^2=1/\lambda_1\approx0.198k/m\qquad (q)$$

$$\mathbf{X}_{M1}\approx\{0.445,\ 0.802,\ 1.000\}$$

这些结果除归一化$\mathbf{X}_{M1}$的方式外，与第4.2节中例题 1 所给的相同。

地信网论坛 BBS.3500I.COM

在基本振型确定出来之后，还可以借迭代法进一步进行，得出较高型的本征值和本征向量。如果第一振型借引进适当的约束而受到抑制，那么第二振型将成为支配者。如果第一型和第二型都受到抑制，那么第三振型则成为支配者，等等。因为固有振型的数目等于自由度的数目，所以模态约束的引进将减少自由度的数目。这样，我们应希望当对第二型迭代时系数矩阵的阶将为 $n-1$，对于第三型迭代时，为 $n-2$，等等。然而，为了列表计算和数字计算，应用马上将要说明的简单技巧去保持 n 阶矩阵是有利的。

模态约束可借指定某一主振型位移等于零来引进。从第4.3节中方程(4.32)和(4.44a)，我们得到

$$\mathbf{X}_P = \mathbf{X}_M^{-1}\mathbf{X} = \mathbf{M}_P^{-1}\mathbf{X}_M^T\mathbf{M}\mathbf{X} \qquad (r)$$

它将向量$\mathbf{X}_P$中的主坐标与向量$\mathbf{X}$中的原来坐标联系起来。为了消去第一型，我们从方程(r)令x_{P1}的式子等于零：

$$x_{P1} = \frac{1}{M_{P1}}\mathbf{X}_{M1}^T\mathbf{M}\mathbf{X} = 0 \qquad (s)$$

如果取向量$\mathbf{X}$为一本征向量$\mathbf{X}_{Mi}$（这里 $i=2, 3, \cdots, n$），那么我们看到此约束条件与第一型和较高型对$\mathbf{M}$的正交性一致。为了简化，假设质量矩阵为对角线矩阵，于是方程（s）的展开成为

$$M_{11}X_{M11}x_1 + M_{22}X_{M21}x_2 + M_{33}X_{M31}x_3 + \cdots + M_{nn}X_{Mn1}x_n = 0$$

作为一任意选择，我们将x_1用其它位移表达求解如下：

$$x_1 = -\frac{M_{22}X_{M21}}{M_{11}X_{M11}}x_2 - \frac{M_{33}X_{M31}}{M_{11}X_{M11}}x_3 - \cdots - \frac{M_{nn}X_{Mn1}}{M_{11}X_{M11}}x_n \qquad (t)$$

将此x_1式代入本征值问题的原来方程〔见方程（4.99）〕得到有 $n-1$ 个未知数的 n 个方程。这些方程的第一个将为剩余 $n-1$ 个方程的线性组合，可以放弃，留下具有 $n-1$ 个未知数的 $n-1$ 个方程的缩减方程组。然而，该 n 个线性相关方程的全方程组（没有第一型）可以对第二型迭代而不缩减矩阵的大小。为此目的，我们将（t）式连同平凡关系$x_2 = x_2$，$x_3 = x_3$等写成矩阵格式：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ \hline 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (u)$$

式中

$$c_{12} = -\frac{M_{22}X_{M21}}{M_{11}X_{M11}} \qquad c_{13} = -\frac{M_{33}X_{M31}}{M_{11}X_{M11}} \cdots \qquad c_{1n} = -\frac{M_{nn}X_{Mn1}}{M_{11}X_{M11}} \qquad (v)$$

方程（u）中右边向量的第一个元素x_1'取作虚位移，它总是被零去乘。此矩阵方程可以简洁地写成：

$$\mathbf{X} = \mathbf{T}_{S1}\mathbf{X}' \qquad (w)$$

其中$\mathbf{T}_{S1}$表示 x_1、x_2、$x_3 \cdots x_n$ 对于 x_2、$x_3 \cdots x_n$ 的依赖性。将$\mathbf{X}_{Mi}$的方程（w）代进方程（4.99）的左边，给出

$$\mathbf{A}\mathbf{T}_{S1}\mathbf{X}_{Mi}' = \lambda_i\mathbf{X}_{Mi} \qquad (x)$$

此式中$\mathbf{T}_{S1}$的出现提供对迭代第二型所必需的线性相关性。在迭代的每次循环中，此算子左

地信网论坛 BBS.3500L.COM

乘一个试用向量，保证它与第一型的正交性。然而，为了更方便，通常仅用一次，作为矩阵**A**的右乘数。阵列$\mathbf{T}_{S1}$称为清除矩阵（Sweeping matrix），因为它的效应是“清除”第一型特性，允许第二型成为支配者。这样，我们取

$$\mathbf{A}_1\mathbf{X}_{M_1}=\lambda_1\mathbf{X}_{M_1} \tag{4.106}$$

式中

$$\mathbf{A}_1=\mathbf{A}\mathbf{T}_{S1} \tag{4.107}$$

$\mathbf{T}_{S1}$具有方程（u）中所给的形式。

为了说明这种技巧的应用，现在我们将确定图4.1 a 中系统的第二型的本征值和本征向量。已经得到第一本征向量$\mathbf{X}_{M1}$，我们用它的分量形成清除矩阵$\mathbf{T}_{S1}$如下

$$\mathbf{T}_{S1}=\left[\begin{array}{c|cc} 0 & -1.802 & -2.247 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{y}$$

用$\mathbf{T}_{S1}$右乘矩阵**A**〔见方程（p）〕得到

$$\mathbf{A}_1=m\delta\left[\begin{array}{c|cc} 0 & -0.802 & -1.247 \\ 0 & 0.198 & -0.247 \\ 0 & 0.198 & 0.753 \end{array}\right] \tag{z}$$

假设我们对第二型形状毫无所知，我们取其第一试用向量为

$$(\mathbf{X})_1=\{1,\ 1,\ 1\}$$

它代表真本征向量的粗劣近似值。较好的估算应在迭代很少几次循环后收敛于正确解。

用矩阵$\mathbf{A}_1$左乘$(\mathbf{X})_1$〔见方程（4.100）〕得出下列向量：

$$(\mathbf{Y})_1=m\delta\ \{-2.049,\ -0.049,\ 0.951\}$$

2

第二型的迭代　　表4·2

试用向量 $(\mathbf{X})_k$			$(\mathbf{X})_1$	$(\mathbf{X})_2$	$(\mathbf{X})_3$	$(\mathbf{X})_4$	$(\mathbf{X})_5$
$\frac{\mathbf{A}_1}{m\delta}=$	0	−0.802 −1.247	1	−2.155	−1.623	−1.416	−1.326
	0	0.198 −0.247	1	−0.052	−0.346	−0.461	−0.511
	0	0.198 0.753	1	1.000	1.000	1.000	1.000
本征值 $(\lambda_2)_k/m\delta$			0.951	0.743	0.684	0.662	0.652

用$(\mathbf{X})_1$的最后元素除$(\mathbf{Y})_1$的最后元素（见方程4.101），我们得到λ_2的第一近似值：

$$(\lambda_2)_1=0.951m\delta$$

然后向量$(\mathbf{Y})_1$借最后元素除其每一元素〔见方程（4.102）〕进行归一化，给出第二次试算向量：

$$(\mathbf{X})_2=\{-2.155,\ -0.052,\ 1.000\}$$

这些结果和其以后的结果均示于表4.2中，在迭代五个循环后，其手续仍然没有收敛。继续通过十一次迭代循环，我们求出收敛值为

$$\lambda_2\approx 0.643m\delta \qquad p_2^2=\frac{1}{\lambda_2}\approx 1.555\frac{k}{m} \tag{a'}$$

$$\mathbf{X}_{M2}\approx\{-1.247,\ -0.555,\ 1.000\}$$

地信网论坛 BBS.3500L.COM

除了归一化$\mathbf{X}_{M2}$的方法外，这些结果与第4.2节例题1中所给的一致。

在第二型确定之后，可借类似消去第一型的过程从方程系将它消除掉。应用约束条件$x_{p1}=0$和$x_{p2}=0$，我们以x_3，…，x_n表达求解x_2，并将诸位移关系写成矩阵格式：

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ \cdots\cdots \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:ccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & d_{23} & \cdots & d_{n3} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} x_1' \\ \cdots\cdots \\ x_2' \\ x_3 \\ \cdots \\ x_n \end{Bmatrix} \tag{b'}$$

式中

$$d_{23}=-\frac{M_{33}(X_{M11}X_{M32}-X_{M12}X_{M31})}{M_{22}(X_{M11}X_{M22}-X_{M12}X_{M21})}\cdots$$

$$d_{n3}=-\frac{M_{nn}(X_{M11}X_{Mn2}-X_{M12}X_{Mn1})}{M_{22}(X_{M11}X_{M22}-X_{M12}X_{M21})} \tag{c'}$$

诸括号内的式子为$\mathbf{X}_M$的前两列的子式，它们出现于求解以$x_3\cdots x_n$表达x_2的过程中。一个附加虚位移x_2'呈现于方程（b'）的右边向量中。此方程可以较简洁地写成：

$$\mathbf{X}'=\mathbf{T}_{S2}\mathbf{X}'' \tag{d'}$$

矩阵$\mathbf{T}_{S2}$说明x_2，$x_3\cdots x_n$对$x_3\cdots x_n$的相关性。将$\mathbf{X}_{Mi}'$的方程（d'）代到方程（4.106）的左边，得出：

$$\mathbf{A}_2\mathbf{X}_{Mi}''=\lambda_i\mathbf{X}_{Mi} \tag{4.108}$$

式中

$$\mathbf{A}_2=\mathbf{A}_1\mathbf{T}_{S2} \tag{4.109}$$

然后没有前两型的方程（4.108）可以重复用于第三型。

将此技巧用于图4.1a中的系统，我们求算（c'）式中第一式为：

$$d_{23}=-\frac{(0.445)(1.000)-(-1.247)(1.000)}{(0.445)(-0.555)-(-1.247)(0.802)}=-\frac{1.692}{0.753}=-2.247$$

形成清除矩阵$\mathbf{T}_{S2}$为

$$\mathbf{T}_{S2}=\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & -2.247 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{e'}$$

用$\mathbf{T}_{S2}$右乘矩阵$\mathbf{A}_1$〔见方程（z）〕给出：

$$\mathbf{A}_2=m\delta\left[\begin{array}{cc:c} 0 & 0 & 0.555 \\ 0 & 0 & -0.692 \\ 0 & 0 & 0.308 \end{array}\right] \tag{f'}$$

$\mathbf{A}_2$的第三列与第三本征向量成比例，对于该最后型不需要迭代。此外，第三本征值出现于此向量的最后位置中，我们得到

$$\lambda_3\approx 0.308m\delta \qquad p_2^2=1/\lambda_3\approx 3.247k/m \qquad \mathbf{X}_{M3}\approx\{1.802,\ -2.247,\ 1.000\} \tag{g'}$$

这些值与第4.2节中例题1所得的相同，只是归一化$\mathbf{X}_{M3}$的方式除外。

地信网论坛 BBS.3S001.COM

如果一系统具有两个或多个重复本征值，那么这些本征值为相等优势，对迭代法收敛的本征向量取决于第一试用向量的形式。虽然本征值可以是重复的，但清除矩阵将使每一后继的本征向量与其前面所得的成正交。由于相应于重复本征值的本征向量常常包含零元素，所以特别注意在归一化手续中应避免用零相除。

作为具有重复根的系统的一个简单例子，假设支持着习题4.2— 9 中质量的三个弹簧(见习题组4.2) 顺 x 、 y 和 z 轴置放。取 $k_1=k_2=k_3=k$，我们求出此问题的矩阵**A**成为

$$\mathbf{A}=\mathbf{FM}=m\delta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

借观察可以看出此系统的本征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=m\delta$ 。然而，诸本征向量为未知，要借用于前例的相同方法来确定。采用的试用向量 $\{x_1,\ y_1,\ z_1\}=\{1,\ 1,\ 1\}$ 满足方程(4.103) 。因而该向量成为此系统的第一本征向量。于是第一个清除矩阵 $\mathbf{T}_{s1}$〔见方程(*u*)、(*v*)和(*w*)〕求出为

$$\mathbf{T}_{s1}=\left[\begin{array}{c|cc}0&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right]$$

矩阵 $\mathbf{A}_1$ 从方程 (4.107) 计算为

$$\mathbf{A}_1=\mathbf{AT}_{s1}=m\delta\left[\begin{array}{c|cc}0&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right]$$

为了确定第二振型形状，我们再取向量 $\{x_1,\ y_1,\ z_1\}=\{1,\ 1,\ 1\}$，在迭代的两次循环中，我们得到第二本征向量为 $\{x_1,\ y_1,\ z_1\}=\{-2,\ 1,\ 1\}$ 。于是第二清除矩阵 $\mathbf{T}_{s2}$〔见方程(*b′*)、(*c′*)和(*d′*)〕形成下面阵列：

$$\mathbf{T}_{s2}=\left[\begin{array}{cc|c}1&0&0\\\hline0&0&-1\\0&0&1\end{array}\right]$$

用此算子，我们从方程 (4.109) 求出矩阵 $\mathbf{A}_2$：

$$\mathbf{A}_2=\mathbf{A}_1\mathbf{T}_{s2}=m\delta\left[\begin{array}{cc|c}0&0&0\\0&0&-1\\0&0&1\end{array}\right]$$

这样，可以看出第三本征向量为 $\{x_1,\ y_1,\ z_1\}=\{0,\ -1,\ 1\}$，它与另两个本征向量成正交（对于**M**）。此本征向量组不是唯一的，但是它满足分析正规型方法中对本征向量所要求的正交性条件。

前面讨论中所述的迭代-缩减过程在理论上可以重复地应用直至多个自由度系统的所有频率和振型形状都确定出来为止。然而，按这种方式所得到的每一个本征值和本征向量仅是近似的。由于这个理由，每一缩减中固有的正交化则是不完美的。另外，每一次缩减包含舍入误差，一次缩减的舍入误差积累到另一次缩减中。其精确度问题与这样的事实有关：就是用这种方法去得出很多频率和振型形状需要许多算术运算次数。所以，如本节开始时所述，当只有很少几种最低振型需要确定时，迭代法是最适用的。此外，对于具有许多个自由度的系

地信网论坛 BBS.35001.COM

统所需要的大量算术运算应交给数字计算机去做，特别是当振型形状难以估计的时候。为此目的，附录包括了一种借迭代法计算一系统的前三个本征值和本征向量名为EIGIT3的BASIC程序*。

一系统只有在很少本征值和本征向量时用迭代法来确定的这一事实并不排除正规型法对反应计算的应用。如果n_1个振型已找出，这里$n_1 \leqslant n$，那么模态矩阵$\mathbf{X}_M$(或$\mathbf{X}_N$)仅由n_1列组成而不是n列。这样的矩形阵列不存在逆，因而包括转置阵列$\mathbf{X}_M^T$和$\mathbf{X}_N^T$的方程（4.44a）和（4.44b）中的诸关系总是用来代替其逆。另外，只要计算n_1个正规型反应，而其它诸型对总反应的影响均略去。这种正规型法的修正称为模态截断，这对于系统只有很少几种固有型为重要激发的问题是很有价值的一种概念。

我们没有考虑将迭代法用于作用力方程方法的本征值问题中〔见第4.2节方程(4.17)〕，因为最高的本征值p_n^2会是支配者。在刚度系数比柔度系数容易导出的问题中，非奇异刚度矩阵$\mathbf{S}$总是可以求逆得出方程（4.103）中所需要的柔度矩阵$\mathbf{F}$。反之，对于刚度矩阵是奇异的半定系统需要特殊处理。在这种情况下，其刚度矩阵和质量矩阵须借改变坐标为一新坐标组以致没有刚体型这样来缩减。幸运的是刚体的振型形状通常可借观察来确定，而且可以想出消除它们的简单步骤。

假定一个振动系统已知仅有一个借第一本征向量$\mathbf{X}_{M1}$定义的刚体型。此型可借指定约束条件$x_{P1}=0$从作用力方程组消除掉。于是我们构成一个由方程（u）中清除矩阵$\mathbf{T}_{S1}$内分块线右边$n\times(n-1)$阶子矩阵组成的缩减-变换矩阵$\mathbf{T}_{R1}$。在此情况下，我们应用下面关系式

$$\mathbf{X}=\mathbf{T}_{R1}\mathbf{X}_{R1} \tag{4.110}$$

它表达$\mathbf{X}=\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n\}$对$\mathbf{X}_{R1}=\{x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n\}$的依赖性(这后一向量不包含清除矩阵中使用的虚位移$x_1$)。由于阵列$\mathbf{T}_{R1}$不是时间的函数，所以我们还可以写出

$$\ddot{\mathbf{X}}=\mathbf{T}_{R1}\ \ddot{\mathbf{X}}_{R1} \tag{h'}$$

式中$\ddot{\mathbf{X}}_{R1}=\{\ddot{x}_2,\ \ddot{x}_3,\cdots,\ddot{x}_n\}$。将方程（4.110）和（$h'$）代入自由振动的运动作用力方程〔第4.3节方程（4.30)〕，并用$\mathbf{T}_{R1}^T$左乘其结果，我们得到

$$\mathbf{T}_{R1}^T\mathbf{M}\mathbf{T}_{R1}\ddot{\mathbf{X}}_{R1}+\mathbf{T}_{R1}^T\mathbf{S}\mathbf{T}_{R1}\mathbf{X}_{R1}=0$$

或

$$\mathbf{M}_{R1}\ddot{\mathbf{X}}_{R1}+\mathbf{S}_{R1}\mathbf{X}_{R1}=0 \tag{4.111}$$

其中

$$\mathbf{M}_{R1}=\mathbf{T}_{R1}^T\mathbf{M}\mathbf{T}_{R1}\qquad \mathbf{S}_{R1}=\mathbf{T}_{R1}^T\mathbf{S}\mathbf{T}_{R1} \tag{4.112}$$

阵列$\mathbf{M}_{R1}$和$\mathbf{S}_{R1}$都是$n-1$阶的方形对称矩阵，方程（4.111）代表变换为无刚体型的缩减坐标组的运动方程。在这些坐标中，刚度矩阵$\mathbf{S}_{R1}$可以求逆得出柔度矩阵：

$$\mathbf{F}_{R1}=\mathbf{S}_{R1}^{-1} \tag{4.113}$$

然后，形成乘积：

$$\mathbf{A}_{R1}=\mathbf{F}_{R1}\mathbf{M}_{R1} \tag{4.114}$$

---

* BASIC是英文Beginner's All-purpose Symbol Instruction Code的缩写，即"初学者的通用指令码"之意。它是目前流行的电子数字计算机程序设计语言中的一种，如同ALGOL程序设计语言和FORTRAN程序设计语言一样。但是，BASIC简单易学，功能较强，进行运算中发现错误时可以当场修改。这种语言在小型计算机上也易于实现。——译注

地信网论坛 BBS.3500L.COM

为迭代法用于与方程（4.111）有关的本征值问题作准备。借此过程求得的诸本征向量用方程（4.110）变换回到原来坐标。

如果存在第二刚体型，且为本征向量$\mathbf{X}_{M2}$所定义，那么需要第二个约束条件$x_{P2}=0$。与此条件有关的缩减-变换矩阵$\mathbf{T}_{R2}$由方程（b'）清除矩阵$\mathbf{T}_{S2}$中分块线右下方（$n-1$）×（$n-2$）阶子矩阵组成。在此情况下，我们得到下面关系式

$$\mathbf{X}_{R1}=\mathbf{T}_{R2}\mathbf{X}_{R2} \tag{4.115}$$

它表示以$\mathbf{X}_{R2}=\{x_3, \cdots, x_n\}$表达$\mathbf{X}_{R1}=\{x_2, x_3, \cdots, x_n\}$。根据前面相同的论证方法，我们可以将矩阵$\mathbf{M}_{R1}$和$\mathbf{S}_{R1}$缩减为$\mathbf{M}_{R2}$和$\mathbf{S}_{R2}$如下：

$$\mathbf{M}_{R2}=\mathbf{T}_{R2}^{T}\mathbf{M}_{R1}\mathbf{T}_{R2} \qquad \mathbf{S}_{R2}=\mathbf{T}_{R_2}^{T}\mathbf{S}_{R1}\mathbf{T}_{R2} \tag{4.116}$$

另一种，将方程（4.115）代入方程（4.110），得到下面关系式：

$$\mathbf{X}=\mathbf{T}_{R2}^{*}\mathbf{X}_{R2} \tag{4.117}$$

式中

$$\mathbf{T}_{R2}^{*}=\mathbf{T}_{R1}\mathbf{T}_{R2} \tag{4.118}$$

组合算子$\mathbf{T}_{R2}^{*}$[大小为$n\times(n-2)$]借$\mathbf{T}_{R1}$[$n\times(n-1)$]与$\mathbf{T}_{R2}$[$(n-1)\times(n-2)$]相乘得到，它表示$\mathbf{X}$直接对$\mathbf{X}_{R2}$的依赖性。用这样一种组合算子，把$\mathbf{M}$和$\mathbf{S}$直接化为$\mathbf{M}_{R2}$和$\mathbf{S}_{R2}$：

$$\mathbf{M}_{R2}=(\mathbf{T}_{R2}^{*})^{T}\mathbf{M}\mathbf{T}_{R2}^{*} \qquad \mathbf{S}_{R2}=(\mathbf{T}_{R2}^{*})^{T}\mathbf{S}\mathbf{T}_{R2}^{*} \tag{4.119}$$

此技巧可以推广到消除所给系统中不论存在多少个刚体型。

为了说明该方法，假定图4.1 a中第一个弹簧的刚度系统k_1为零。如果$k_2=k_3=k$和$m_1=m_2=m_3=m$，那么其刚度矩阵和质量矩阵为

$$\mathbf{S}=k\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}=m\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

借检查，我们可以看到该系统是半定的，而且看到其刚体型的形状用下列向量来确定：

$$\mathbf{X}_{M1}=\{1, 1, 1\}$$

从此数据，求出3 × 2缩减-变换矩阵$\mathbf{T}_{R1}$

$$\mathbf{T}_{R1}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{i'}$$

用此算子，我们按照方程（4.112）将质量矩阵和刚度矩阵变换如下：

$$\mathbf{M}_{R1}=m\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=m\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix} \tag{j'}$$

$$\mathbf{S}_{R1}=k\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}5 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix} \tag{k'}$$

这后一结果之逆得出柔度矩阵

地信网论坛 BBS.3500L.COM

$$\mathbf{F}_{R1}=\mathbf{S}_{R1}^{-1}=\frac{\delta}{9}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 5\end{pmatrix} \qquad (l')$$

其次，我们构成方程（4.114）所给乘积：

$$\mathbf{A}_{R1}=\mathbf{F}_{R1}\mathbf{M}_{R1}=\frac{m\delta}{3}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix} \qquad (m')$$

容易证明（借迭代解法或直接解法）：与此矩阵有关的本征值为$\lambda_2=m\delta$和$\lambda_3=m\delta/3$，其相应本征向量为$(\mathbf{X}_{R1})_{M2}=\{0,\ -1\}$和$(\mathbf{X}_{R1})_{M3}=\{-2,\ 1\}$。借方程（4.110）将这些向量变换回到原来坐标，我们得到

$$\mathbf{X}_{M2}=\mathbf{T}_{R1}\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix} \qquad \mathbf{X}_{M3}=\mathbf{T}_{R2}\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 1\end{pmatrix} \qquad (n')$$

它们与第4.2节例题1中后面部分所给的相同。

习 题 组 4.7

4.7—1 试用迭代法确定图 4.2a 中系统的本征值和本征向量。假设 $m_1=m_3=m$，且$m_2=2m$，并假设$l_1=l_2=l_3=l_4=l$。

答：$\lambda_{1,2,3}\approx 1.707ml/T$，$0.500ml/T$，$0.293ml/T$。

4.7—2 用迭代法重复习题4.2—2，假设$m_1=m_3=2m$和$m_2=m$。

答：$\lambda_{1,2,3}\approx 2.618m\delta$，$1.000m\delta$，$0.382m\delta$。

4.7—3 用迭代法重复习题4.2—6，假设$m_1=m_2=m$和$m_3=2m$。

答：$\lambda_{1,2,3}\approx 39.68\alpha$，$2.815\alpha$，$0.501\alpha(\alpha=ml^3/768EI)$。

4.7—4 用迭代法重复习题4.2—7，假设$m_1=m_2=3m$和$m_3=m$。

答：$p_{1,2,3}^2\approx 0.246g/l$，$1.252g/l$，$2.169g/l$。

4.7—5 用迭代法重复习题4.2—8，假设$m_1=m_2=2m$和$m_3=m$。

答：$\lambda_{1,2,3}\approx 19.12\alpha$，$4.000\alpha$，$1.884\alpha(\alpha=mh^3/144EI)$。

4.7—6 用迭代法重复习题4.2—10，假设$m_1=m$和$m_2=3m$。

答：$\lambda_{1,2,3}\approx 76.32\alpha$，$8.978\alpha$，$0.700\alpha(\alpha=ml^3/48EI)$。

4.7—7 试用本节末尾所述抑制刚体型的方法重复习题4.2—11。假设$m_1=m_3=m$和$m_2=2m$。

答：$p_{1,2,3}^2=0$，0，$6EI/ml^3$。

4.8 多个自由度系统中的阻尼

第4.3—4.6节中所介绍的正规型法仅适用于无阻尼的多个自由度系统。往往阻尼对于振动系统反应的效应是次要的，可以略去不计，例如，在持续很短的激发过程中很小的阻尼量对系统反应的影响多半是不重要的。此外，当激发的频率不近于共振时，阻尼在系统对周期性施力函数的反应中为次要作用。然而，对于频率等于固有频率或近于固有频率的周期性激发，那么阻尼则是极重要的，必须给予考虑。因为其效应一般来说事先是不知道的，所以通常阻尼包括于振动分析中直至其重要性弄清为止。

地信网论坛 BBS.3500L.COM

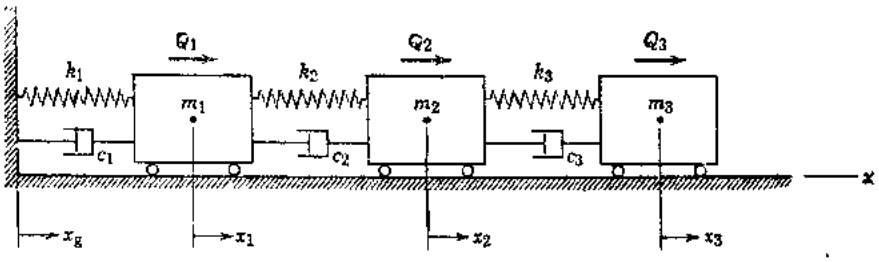


图 4.3

在第 3 章中，我们讨论了具有粘滞阻尼的两个自由度系统的自由振动和强迫振动，现在我们将考虑具有 n 个自由度的阻尼系统。当耗散力是借阻尼器提供时，如图 4.3 中三个质量的系统那样，那么其运动的作用力方程可以写成

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{S}\mathbf{X} = \mathbf{Q} \tag{4.120}$$

其中阻尼矩阵$\mathbf{C}$具有下列一般形式

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & \cdots & C_{2n} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & \cdots & C_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{n1} & C_{n2} & C_{n3} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix} \tag{a}$$

此对称阵列中的诸影响系数在第3.7节中早已定义过。

我们先考虑阻尼矩阵与质量矩阵和刚度矩阵成线性关系的特殊系统。亦即，我们取

$$\mathbf{C} = a\mathbf{M} + b\mathbf{S} \tag{4.121}$$

式中 a 和 b 均为常数。这种阻尼称为比例阻尼，因为$\mathbf{C}$与$\mathbf{M}$和$\mathbf{S}$的线性组合成比例。在这样一种情况下，诸运动方程（4.120）借无阻尼系统的同样变换成为无联系者*。这样，按主坐标，我们取

$$\mathbf{M}_P\ddot{\mathbf{X}}_P + \mathbf{C}_P\dot{\mathbf{X}}_P + \mathbf{S}_P\mathbf{X}_P = \mathbf{Q}_P \tag{4.122}$$

式中

$$\mathbf{C}_P = \mathbf{X}_M^T\mathbf{C}\mathbf{X}_M = a\mathbf{M}_P + b\mathbf{S}_P \tag{b}$$

符号$\mathbf{C}_P$代表一对角线阵列，称为主阻尼矩阵，由$\mathbf{M}_P$和$\mathbf{S}_P$的线性组合组成。当模态矩阵对$\mathbf{M}$归一化时，按正规坐标的阻尼矩阵成为

$$\mathbf{C}_P = \mathbf{X}_N^T\mathbf{C}\mathbf{X}_N = a\mathbf{I} + b\mathbf{p}^2 \tag{4.123}$$

此式中对角线矩阵$\mathbf{p}^2$包含无阻尼情况的诸特征值p_i^2〔见第4.3节方程（4.36）〕。所以，按正规坐标的第 i 个运动方程为

$$\ddot{x}_{P_i} + (a + bp_i^2)\dot{x}_{P_i} + p_i^2 x_{P_i} = q_{P_i} \quad (i = 1, 2, 3, \cdots, n) \tag{c}$$

为了使此式类似于一个自由度系统的式子〔见第 1.12 节方程（1.61）〕，我们引进下列诸符号：

$$C_{P_i} = 2n_i = a + bp_i^2 \qquad \gamma_i = \frac{n_i}{p_i} \tag{d}$$

式中$C_{P_i} = 2n_i$定义为第i正规型的模态阻尼常数，γ_i代表相应的模态阻尼比。用方程（c）中

---

* Rayleigh, Theory of Sound, pp·130—132 (Sec.97)。

地信网论坛 BBS.3500L.COM

的第一个定义，我们得到

$$\ddot{x}_{Pi}+2n_i\dot{x}_{Pi}+p_i^2x_{Pi}=q_{Pi}\qquad(i=1,2,3,\cdots,n)\qquad(4.124)$$

此式所代表的 n 个方程中的每一个方程与所有其它方程无联系。所以，我们可以按具有粘滞阻尼的一个自由度系统的相同方式确定第 i 型的反应。

从定义（d），我们可以用常数 a 和 b 表达模态阻尼比 γ_i 为下：

$$\gamma_i=\frac{a+bp_i^2}{2p_i}\qquad(4.125)$$

此式对于研究变化方程（4.121）中常数 a 和 b 对模态阻尼的效应是有用的。例如，令常数 a 等于零（而 b 为非零），意味着阻尼矩阵与刚度矩阵成比例。这种阻尼有时称为相对阻尼，因为它与位移坐标的相对速度有关。这样，在 $a=0$ 的条件下，方程（4.125）成为

$$\gamma_i=\frac{b}{2}p_i\qquad(e)$$

它意味着每一主型的阻尼比与该型的无阻尼角频率成比例。所以，一系统的较高型反应比较低型反应衰减更快。

反之，令 b 等于零（而 a 为非零），意味着阻尼矩阵与质量矩阵成比例。这种阻尼有时称为绝对阻尼，因为它与位移坐标的绝对速度有关。在此情况下，方程（4.125）简化成

$$\gamma_i=\frac{a}{2p_i}\qquad(f)$$

因而每一型的阻尼比与无阻尼频率成反比。在此条件下，一系统的较低型将比较高型更有力地被抑制。

已被揭示*方程*(4.121) 所给的条件是阻尼系统中主型存在的充分条件但不是必要条件。主型存在的必不可少的条件是使阻尼矩阵对角线化的变换也使诸运动方程无联系。此条件较方程（4.121）的约束性较小且包含较大的可能性。

然而，在一般大多数情况下，阻尼影响系数致使阻尼矩阵不可能与质量矩阵和刚度矩阵同时对角线化。按第 3.7 节中说明存在相位关系的固有型使分析复杂化。这种系统的本征值不是实的和负的就是具有负实部分的复本征值。复本征值按共轭对发生〔见第 3.7 节方程（3.42a）和（3.42b）〕，其相应本征向量也由复共轭对组成。在高阻尼系统中，耗散力所引起的虚项是重要的，对于这种系统可以利用福斯法(method of Foss)**。此方法将 n 个二阶运动方程变换成$2n$个无联系的一阶方程。

轻阻尼系统不需要按这样一种复杂的方式去处理，特别是考虑到实际系统中阻尼的性能是不完全知道的。最简单的方法是假设借没有阻尼的系统所得的模态矩阵使诸运动方程分离开。换句话说，假设矩阵 $\mathbf{X}_M$ 不仅对 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{S}$ 正交（见方程4.23和4.24）而且与 $\mathbf{C}$ 正交：

$$\mathbf{X}_{Mi}^T\mathbf{C}\mathbf{X}_{Mj}=\mathbf{X}_{Mi}^T\mathbf{C}\mathbf{X}_{Mj}=0\qquad(i\neq j)\qquad(4.126)$$

这种假设意味着从运算 $\mathbf{C}_P=\mathbf{X}_M^T\mathbf{C}\mathbf{X}_M$ 所得的任何非对角线诸项都是很小的，可以略去不计。另外，通常用试验（或假设）得出固有振动型的阻尼比 γ_i 较确定矩阵 $\mathbf{C}$ 中诸阻尼影响系数要方便。所以，我们重新以 γ_i 表达写出方程（4.124）为

---

* T.K.Caughey, "Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems," Jour. Appl. Mech., ASME, Vol. 27, 1960, pp. 269—271, 以及 Vol, 32, 1965, pp. 583—588.

** K.A.Foss, "Coordinates which Uncouple the Equations of Motion of Damped Linear Dynamics Systems," Jour. Appl. Mech., ASME, Vol. 25, 1958, pp.361—364.

地信网论坛 BBS.3500L.COM

$$\ddot{x}_{P_i}+2\gamma_i p_i \dot{x}_{P_i}+p_i^2 x_{P_i}=q_{P_i} \quad (i=1,2,3,\cdots,n) \tag{4.127}$$

为了使此式与轻阻尼系统相适应，我们将规定对于所有型 $0\leqslant\gamma_i\leqslant 0.20$。与这一系列假定有关的阻尼是有很大实用价值的，简称为模态阻尼。应记住此概念是建于无阻尼系统的正规坐标之上的，且记住诸阻尼比是按这些坐标确定的。

当按系统的正规坐标假设模态阻尼时，或许还要确定按原坐标的阻尼矩阵。这种阵列可借下面逆变换手段来求得

$$\mathbf{C}=\left(\mathbf{X}_N^{-1}\right)^T \mathbf{C}_P \mathbf{X}_N^{-1} \tag{g}$$

然而，不是对$\mathbf{X}_N$求逆，而是我们应用$\mathbf{X}_N^{-1}=\mathbf{X}_N^T\mathbf{M}$关系〔见第 4.3 节方程(4.44 b)〕重新写方程（g）为

$$\mathbf{C}=\mathbf{M}\mathbf{X}_N\mathbf{C}_P\mathbf{X}_N^T\mathbf{M} \tag{4.128}$$

当分析中不包括所有固有型时（模态截断），这种变换方式是特别适当的。

4.9 对周期性激发的阻尼反应

按前节所述，当周期性激发的频率接近多个自由度系统诸固有频率之一时，阻尼是极为重要的。在第 3.8 节中借转换函数法处理了两个自由度系统的稳态强迫振动课题。此方法可以容易推广到具有n个自由度的系统，在这种情况下，其基本关系式〔见方程(3.51)和(3.52)〕在符号上保持相同。然而，用这种技巧求解需要求一个包括复项的 $n\times n$ 阶矩阵之逆。如果一系统的本征值和本征向量已经得到，那么正规型法提供关于转换函数法的一种有用的方法。知道了激发的频率和系统的诸固有频率，我们就可以以直接方式计算振型频率接近强加频率的稳态反应。简谐施力函数和一般周期施力函数二者都将给予讨论；如前节所述，假设为比例阻尼或模态阻尼。

如果一个轻阻尼系统承受一个作用力系，而所有作用力均与简谐函数$\cos\omega t$成比例，那么作用力向量$\mathbf{Q}$可以写成

$$\mathbf{Q}=\mathbf{P}\cos\omega t \tag{a}$$

式中

$$\mathbf{P}=\{P_1,P_2,P_3,\cdots,P_n\} \tag{b}$$

方程（a）中诸P值作为比例因子作用于函数$\cos\omega t$上。运动的作用力方程变换为正规坐标产生下列典型模态方程

$$\ddot{x}_{P_i}+2n_i\dot{x}_{P_i}+p_i^2 x_{P_i}=q_{P_i}\cos\omega t \quad (i=1,2,3,\cdots,n) \tag{4.129}$$

其中q_{P_i}为一常数。此方程与第1.9节中方程（1.42）具有相同形式。所以，我们可以取第 i 型的阻尼稳态反应为

$$x_{P_i}=\frac{q_{P_i}}{p_i^2}\beta_i\cos(\omega t-\theta_i) \tag{4.130}$$

其中放大因子β_i为

$$\beta_i=\frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2/p_i^2)^2+(2\gamma_i\omega/p_i)^2}} \tag{4.131}$$

相角θ_i为

地信网论坛 BBS.3500I.COM

$$\theta_i = \tan^{-1}\left(\frac{2\gamma_i \omega / p_i}{1-\omega^2/p_i^2}\right) \tag{4.132}$$

方程（4.130）、（4.131）和（4.132）是分别从方程（1.46）、（1.47）和（1.48）写来的。于是，方程（4.130）所给的反应可以按常用方式变换回到原来坐标。

为了确定自身角频率p_i非常接近外加角频率的振型的反应，我们在变换形成正规坐标中只需用模态列$\mathbf{X}_{Ni}$，亦即使第4.5节中方程（4.64）化为

$$q_{Pi} = \mathbf{X}_{Ni}^T \mathbf{P} \tag{4.133}$$

第（4.4）节中方程（4.58）成为

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_{Ni} x_{Pi} \tag{4.134}$$

如果需要，此手续可以重复用于频率接近ω的其它型。

当用运动的位移方程而不用作用力方程时，诸位移的向量$\boldsymbol{\Delta}$成为

$$\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{F}\mathbf{Q} = \mathbf{F}\mathbf{P}\cos\omega t = \boldsymbol{\Delta}_{st}\cos\omega t \tag{c}$$

式中$\boldsymbol{\Delta}_{st}$代表由于$\mathbf{P}$中诸作用力的静力作用引起的位移向量。由于用求逆算子$\mathbf{X}_N^{-1} = \mathbf{X}_N^T\mathbf{M}$将诸位移变换为正规坐标，所以方程（4.133）的相似物成为

$$\delta_{Pi} = \mathbf{X}_{Ni}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Delta}_{st} \tag{4.135}$$

式中δ_{Pi}为一常数。按第4.5节方程（4.77）所给第i等效正规荷载为

$$q_{P\delta i} = p_i^2 \delta_{Pi} \tag{d}$$

所以，第i型的阻尼稳态反应〔见方程（4.130）〕成为

$$x_{Pi} = \delta_{Pi}\beta_i \cos(\omega t - \theta_i) \tag{4.136}$$

此反应变换回到原来坐标保持方程（4.134）那样。

现在让我们考虑一轻阻尼系统承受与一般周期函数$f(t)$成比例的作用力系。在这种情况下，作用力向量$\mathbf{Q}$可以写成

$$\mathbf{Q} = \mathbf{F}(t) = \mathbf{P} f(t) \tag{e}$$

式中向量$\mathbf{P}$由方程（b）给出。按第1.11节中所述进行，我们用傅里叶级数形式表达$f(t)$〔见方程（1.58）〕如下：

$$f(t) = a_0 + \sum_{j=1}^{m}(a_j \cos j\omega t + b_j \sin j\omega t) \tag{4.137}$$

此式中系数a_j、b_j和a_0可以用方程（1.59a、b和c）所示方式来求算。

运动的作用力方程变换为正规坐标产生典型模态方程：

$$\ddot{x}_{Pi} + 2n_i \dot{x}_{Pi} + p_i^2 x_{Pi} = q_{Pi} f(t) \quad (i = 1,2,3,\cdots,n) \tag{4.138}$$

式中q_{Pi}为一常数。从第1.11节末尾处习题1.11—6的解，我们取第i型的阻尼稳态反应为

$$x_{Pi} = \frac{q_{Pi}}{p_i^2}\left\{a_0 + \sum_{j=1}^{m}\beta_{ij}[a_j \cos(j\omega t - \theta_{ij}) + b_j \sin(j\omega t - \theta_{ij})]\right\} \tag{4.139}$$

其中放大因子β_{ij}为

$$\beta_{ij} = \frac{1}{\sqrt{(1-j^2\omega^2/p_i^2)^2 + (2\gamma_i j\omega/p_i)^2}} \tag{4.140}$$

相角θ_{ij}为

$$\theta_{ij} = \tan^{-1}\left(\frac{2\gamma_i j\omega/p_i}{1-j^2\omega^2/p_i^2}\right) \tag{4.141}$$

地信网论坛 BBS.3500L.COM

因为许多项影响方程（4.139）中第 i 型的反应，从而对于一般周期函数共振的可能性（$j\omega \approx p_i$）要比对于简谐函数大得多。所以，变得较难预先推测诸固有型中那一振型受到强烈的影响。然而，当施力函数表达成傅里叶级数之后，每一个 $j\omega$ 频率可以与每一个 p_i 频率相比较以预先推测大的强迫振动。

如果采用运动的位移方程，那么周期位移的向量 $\boldsymbol{\Delta}$ 借下式给出

$$\boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{\Delta}_{st} f(t) \qquad (f)$$

式中 $\boldsymbol{\Delta}_{st}$ 保留以前的定义。根据与前面相同的推理方法，我们得出结论，方程（4.139）中的常数 q_{Pi}/p_i^2 为 δ_{Pi} 所代替。在任何情况下，诸结果均按方程（4.134）变换回到原来坐标。

例题1 假定图 4.3 中的系统承受简谐施力函数 $Q_1 = Q_2 = Q_3 = P\cos\omega t$，式中 $\omega = 1.25\sqrt{k/m}$。试计算诸质量的稳态反应，假设 $m_1 = m_2 = m_3 = m$、$k_1 = k_2 = k_3 = k$、每一主型中的阻尼比 $\gamma_i = 0.01$（$i = 1, 2, 3$）。

解：外加角频率的平方（$\omega^2 = 1.5625k/m$）非常接近第4.2节中例题1所得该系统的第二本征值（$p_2^2 = 1.555k/m$）。所以，即使荷载模型类似于第一型形状，我们还要希望该系统的第二型是为反应的主要影响部分。用方程（4.133），我们确定第二正规型荷载为

$$q_{P2} = \mathbf{X}_{N2}^{T}\mathbf{P} = \frac{1}{\sqrt{m}}\begin{bmatrix} 0.737 & 0.328 & -0.591 \end{bmatrix}\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} P = 0.474\frac{P}{\sqrt{m}}$$

第二型的放大因子从方程（4.131）得到为

$$\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{(1-1.5625/1.555)^2 + (0.02)^2(1.5625/1.555)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(0.004823)^2 + (0.02006)^2}} = 48.50$$

从方程（4.130），我们求出第二型的阻尼稳态反应为

$$x_{P2} = \frac{(0.474)(48.50)}{(1.555)}\frac{P}{k}\sqrt{m}\cos(\omega t - \theta_2)$$

$$= 14.77\frac{P}{k}\sqrt{m}\cos(\omega t - \theta_2)$$

式中

$$\theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{0.02006}{0.004823}\right) = \tan^{-1}4.159 = 76°29'$$

是按方程（4.132）给出的。

用方程（4.134）将第二型反应变换回为原来坐标，我们得到

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_{N2}x_{P2} = \begin{Bmatrix} 10.89 \\ 4.84 \\ -8.73 \end{Bmatrix}\frac{P}{k}\cos(\omega t - \theta_2) \qquad (g)$$

可以看到，在此系统中很小的阻尼值对第二型反应具有很大的效应。如果该系统是无阻尼的，那么放大因子为 $\beta_2 = 1/0.004823 = 207.3$，相角为 $\theta_2 = 0$。

按类似方式进行，我们可以确定第一型所影响的反应为

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} 0.398 \\ 0.717 \\ 0.895 \end{Bmatrix}\frac{P}{k}\cos(\omega t - \theta_1) \qquad (h)$$

地信网论坛 BBS.3500L.COM

第三型所产生的反应求出为

$$\mathbf{X}=\begin{Bmatrix}0.0637\\-0.0794\\0.0353\end{Bmatrix}\frac{P}{k}\cos(\omega t-\theta_3) \qquad (i)$$

这两个向量中的振幅与方程（g）中的相比非常小。另外，阻尼对方程（h）和（i）中的结果的影响可以略去不计。

例题2 图4.4表示一个成为方形波形状的周期性施力函数。如果此函数作用于图 4.3 中的第一个质量上，试确定每一正规型的阻尼稳态反应。

解：将该方形波展开成傅里叶级数（见第1.11节习题1.11—2），我们得到：

$$F(t)=Pf(t)=\frac{4P}{\pi}\left(\sin\omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t+\cdots\right) \qquad (j)$$

将荷载向量变换到正规坐标，产生

$$\mathbf{Q}_P=\mathbf{X}_N^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}=\mathbf{X}_N^{\mathrm{T}}\begin{Bmatrix}F(t)\\0\\0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}X_{N11}\\X_{N12}\\X_{N13}\end{Bmatrix}F(t) \qquad (k)$$

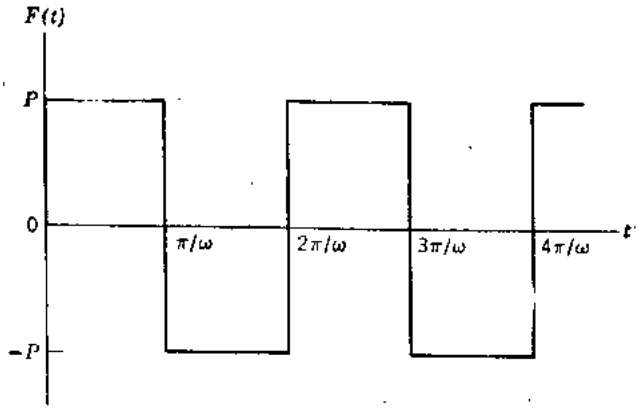


图 4.4

按照方程（4.139），正规型反应成为：

$$\mathbf{X}_P=\frac{4P}{\pi}\begin{Bmatrix}X_{N11}\left[\beta_{11}\sin(\omega t-\theta_{11})+\frac{\beta_{13}}{3}\sin(3\omega t-\theta_{13})+\cdots\right]/p_1^2\\X_{N12}\left[\beta_{21}\sin(\omega t-\theta_{21})+\frac{\beta_{23}}{3}\sin(3\omega t-\theta_{23})+\cdots\right]/p_2^2\\X_{N13}\left[\beta_{31}\sin(\omega t-\theta_{31})+\frac{\beta_{33}}{3}\sin(3\omega t-\theta_{33})+\cdots\right]/p_3^2\end{Bmatrix} \qquad (l)$$

式中的放大因子和相角分别借方程（4.140）和（4.141）给出。

4.10 阻尼系统的瞬变反应

当所关心的时间与系统的固有周期相比相当长的时候，瞬变反应计算中应包括阻尼的效应。如果所关心的时间很短，但是模态阻尼比相当大（$\gamma_i>0.05$），那么阻尼的存在仍然具有一定的意义。所以，我们将修改第4.4、4.5和4.6节中所列诸方程以考虑按正规坐标时阻尼

地信网论坛 BBS.3500L.COM

对瞬变反应的影响。按前节那样，在整个讨论中不是假设为比例阻尼就是假设为模态阻尼。

在第 4.4 节中，我们已用公式表示了多个自由度系统对位移和速度初始条件的正规型反应。当存在阻尼时，方程(4.55)所给第 i 型自由振动的反应须改变为

$$x_{Pi}=e^{-n_i t}\left(x_{0Pi}\cos p_{di}t+\frac{\dot{x}_{0Pi}+n_i x_{0Pi}}{p_{di}}\sin p_{di}t\right) \tag{4.142}$$

它是从第1.8节中方程（1.35）写来的。方程（4.142）中阻尼振动的角频率为

$$p_{di}=\sqrt{p_i^2-n_i^2}=p_i\sqrt{1-\gamma_i^2} \tag{a}$$

其中 p_i 代表无阻尼角频率。初始条件向量 $\mathbf{X}_0$ 和 $\dot{\mathbf{X}}_0$ 成为正规坐标的变换，保持与方程(4.56)和（4.57）相同，反应的回转变换仍借方程（4.58）给出。

刚体运动不受模态阻尼影响也不受相对阻尼（与刚度矩阵成比例）影响。然而，绝对阻尼（与质量矩阵成比例）将影响刚体振型，对于这种特殊阻尼，第4.4节中的方程(4.59)用下式代替：

$$\ddot{x}_{Pi}+a\dot{x}_{Pi}=0 \tag{4.143}$$

方程（4.143）的解为

$$x_{Pi}=x_{0Pi}+\dot{x}_{0Pi}\left(\frac{1-e^{-at}}{a}\right) \tag{4.144}$$

此式可以用来代替方程（4.60）去求算具有绝对阻尼的系统的刚体运动。注意，如果令 a 等于零（对于无阻尼），那么方程（4.144）中括号内一项成为

$$\lim_{a\to 0}\left(\frac{1-e^{-at}}{a}\right)=t \tag{b}$$

其反应式恢复到方程（4.60）。

类似地，按第 4.5 节内所述，在施加作用力的正规型反应计算中，当存在比例阻尼或模态阻尼时，只需要稍许修正。施加的作用力成为正规坐标的变换保持与方程（4.64）相同，但是方程（4.67）中的杜哈梅积分必须改变为

$$x_{Pi}=\frac{e^{-n_i t}}{p_{di}}\int_0^t e^{n_i t'}q_{Pi}\sin p_{di}(t-t')dt' \tag{4.145}$$

它是取自第1.12节中的方程（1.62）。如果假设绝对阻尼，那么刚体运动方程（4.68）用下式代替：

$$\ddot{x}_{Pi}+a\dot{x}_{Pi}=q_{Pi} \tag{4.146}$$

对于开始处于静止的系统，方程（4.146）的解具有下列形式

$$x_{Pi}=\int_0^t q_{Pi}\left[\frac{1-e^{-a(t-t')}}{a}\right]dt' \tag{4.147}$$

它代替方程（4.69）。

如果用运动的位移方程而不是作用力方程，那么位移向量 $\boldsymbol{\Delta}$ 借第4.5节中的方程(4.73)变换成为正规坐标。此外，第 i 等效正规型荷载为

$$q_{Pdi}=p_i^2\delta_{Pi} \tag{c}$$

它是取自方程（4.77）。所以，方程（4.145）中的杜哈梅积分成为

$$x_{Pi}=\frac{p_i^2}{p_{di}}e^{-n_i t}\int_0^t e^{n_i t'}\delta_{Pi}\sin p_{di}(t-t')dt' \tag{4.148}$$

地信网论坛 BBS.3500L.COM

这种积分形式对于随时间变化的位移Δ容易按第 4.5 节中所说明那样借静力分析求得的系统求算阻尼反应特别有用。

如第 4.6 节所述，对支承运动的正规型反应，也可以修改考虑比例阻尼或模态阻尼。在许多情况下，只需要将方程（4.145）和（4.148）中的 q_{Pi}和δ_{Pi}，用第4.6节中所定义的它们的相应部分 q_{Pgi}、$\dot{q}_{Pgi}$、δ_{Pgi}、$\dot{\delta}_{Pgi}$、q_{PRi}或δ_{PRi}去代替。然而，在某些支承位移是强加的情况下，原来坐标的向量$\mathbf{Q}_g$、$\mathbf{\Delta}_g$、$\mathbf{Q}_R$或$\mathbf{\Delta}_R$必须修正以包括自由位移坐标与支承约束两者之间的速度耦合。例如，图 4.3 中的系统具有一个与地面联系的阻尼器。如果地面按 $x_g=F_g(t)$顺 x 方向平动，那么运动的作用力方程成为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}+\mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}+\mathbf{C}_g\dot{x}_g+\mathbf{S}\mathbf{X}+\mathbf{S}_g x_g=0 \qquad (d)$$

其中$\mathbf{C}_g$表示把诸质量与地面结合起来的阻尼影响系数的向量。将方程（d）写成方程(4.120）的形式，我们得到

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}+\mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}+\mathbf{S}\mathbf{X}=\mathbf{Q}_g=\mathbf{Q}_{g1}+\mathbf{Q}_{g2} \qquad (4.149)$$

式中

$$\mathbf{Q}_{g1}=-\mathbf{S}_g x_g \qquad \mathbf{Q}_{g2}=-\mathbf{C}_g\dot{x}_g \qquad (4.150)$$

向量$\mathbf{Q}_{g1}$和$\mathbf{Q}_{g2}$分别包含由于地面位移和地面速度所引起（相应于诸位移坐标）的等效荷载。如果需要，这些项在整个分析中可以保持分开，在这种情况下，变换为正规坐标产生

$$\mathbf{Q}_{Pg}=\mathbf{X}_N^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_g=\mathbf{X}_N^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{g1}+\mathbf{X}_N^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{g2}=\mathbf{Q}_{Pg1}+\mathbf{Q}_{Pg2} \qquad (4.151)$$

于是按正规坐标的第 i 运动方程采取下列形式：

$$\ddot{x}_{Pi}+2n_i\dot{x}_{Pi}+p_i^2x_{Pi}=q_{Pgi}=q_{Pgi1}+q_{Pgi2}\quad(i=1,\ 2,\ 3\cdots n) \qquad (4.152)$$

它类似于第1.13节中的方程（1.68）。最后，方程（4.145）中的杜哈梅积分成为

$$x_{Pi}=x_{Pi1}+x_{Pi2}=\frac{e^{-n_i t}}{p_{di}}\int_0^t e^{n_i t'}(q_{Pgi1}+q_{Pgi2})\sin p_{di}(t-t')\,dt' \qquad (4.153)$$

它可与第1.13节中的方程（1.69）相比较。

在上面对于速度耦合的地面运动的例子中所解释的复杂性，可借采用地面加速度和改变诸坐标为相对位移$\mathbf{X}'=\mathbf{X}-\mathbf{1}x_g$来避免。如第1.13节中对一个自由度系统所述（见方程1.71和1.72），按相对坐标诸质量与地面之间既无位移耦合又无速度耦合。这里仅存在与地面的惯性耦合，它与对无阻尼的系统相同。反之，如果涉及 r 个支承约束的独立运动，那么刚体地面运动的概念必须放弃。在这样一种情况下，存在于诸自由位移坐标与诸支承约束之间存在的任何速度耦合必须直接加以考虑。

例题1 令图4.3中系统的第三个质量承受阶梯函数$Q_3=P$，而$Q_1=Q_2=0$。假设该系统在开始时处于静止，试确定由于此施加作用力所引起的正规型阻尼反应。

解：将荷载变换为正规坐标，我们得到

$$\mathbf{Q}_P=\mathbf{X}_N^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}=\mathbf{X}_N^{\mathrm{T}}\begin{Bmatrix}0\\0\\P\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}X_{N31}\\X_{N32}\\X_{N33}\end{Bmatrix}P \qquad (e)$$

由于阶梯函数，正规型反应（见第1.12节中例题3）为

地信网论坛 BBS.3500L.COM

$$\mathbf{X}_P = P \begin{Bmatrix} X_{N31}\left[1 - e^{-n_1 t}\left(\cos p_{d1} t + \frac{n_1}{p_{d1}} \sin p_{d1} t\right)\right] / p_1^2 \\ X_{N32}\left[1 - e^{-n_2 t}\left(\cos p_{d2} t + \frac{n_2}{p_{d2}} \sin p_{d2} t\right)\right] / p_2^2 \\ X_{N33}\left[1 - e^{-n_3 t}\left(\cos p_{d3} t + \frac{n_3}{p_{d3}} \sin p_{d3} t\right)\right] / p_3^2 \end{Bmatrix} \qquad (f)$$

例题 2 假定图4.3中地面按斜坡函数$x_g = d_1 t / t_1$平动，式中d_1为时间t_1处刚体地面平动。试列出正规型的阻尼反应式，假设该系统初始时处于静止。

解：按方程（4.150）所给，等效荷载向量为：

$$\mathbf{Q}_{g1} = -\mathbf{S}_g x_g = \begin{pmatrix} k_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{d_1 t}{t_1} \qquad \mathbf{Q}_{g2} = -\mathbf{C}_g \dot{x}_g = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{d_1}{t_1} \qquad (g)$$

将这些向量成为正规坐标的变换（见方程4.151）产生

$$\mathbf{Q}_{Pg} = \mathbf{Q}_{Pg1} + \mathbf{Q}_{Pg2} = \frac{k_1 d_1 t}{t_1} \begin{pmatrix} X_{N11} \\ X_{N12} \\ X_{N13} \end{pmatrix} + \frac{c_1 d_1}{t_1} \begin{pmatrix} X_{N11} \\ X_{N12} \\ X_{N13} \end{pmatrix} \qquad (h)$$

由于$\mathbf{Q}_{Pg1}$中斜坡承数产生的诸正规型反应用下式代表：

$$x_{P,1} = \frac{k_1 d_1 X_{N1i}}{t_1 p_i^2}\left[t - \frac{2n_i}{p_i^2} + e^{-n_i t}\left(\frac{2n_i}{p_i^2}\cos p_{di} t - \frac{p_{di}^2 - n_i^2}{p_i^2 p_{di}} \sin p_{di} t\right)\right] \qquad (i)$$

式中$i = 1$，2，3（见第1.12节中习题1.12－9），此外，Q_{pg2}中阶梯函数引起借下式所给的正规型反应（见例题1）：

$$x_{P,2} = \frac{c_1 d_1 X_{N1i}}{t_1 p_i^2}\left[1 - e^{-n_i t}\left(\cos p_{di} t + \frac{n_i}{p_{di}} \sin p_{di} t\right)\right] \qquad (j)$$

式中 $i = 1$，2，3。

4.11 瞬变反应的数值解

在第1.15节中我们讨论了承受不是分析式的施力函数的一个自由度系统之数值解。该节中所用的两个基本方法涉及分段常数内插函数和分段线性内插函数。现在将这些技巧合并到计算多个自由度系统瞬变反应的正规型方法中。要如前节那样，假设比例阻尼或模态阻尼。由于需要大量计算，所以意味着本节中诸方法需要在数字计算机上进行。

我们将首先考虑第1.15节中图1.56所说明的分段常数内插法。一次仅处理一个分段常数施力函数$f_c(\Delta t_i)$，不失去一般性，分段常数作用力向量$\mathbf{Q}_{ci}$表达为

$$\mathbf{Q}_{ci} = \mathbf{F}_c(\Delta t_i) = \mathbf{P} f_c(\Delta t_i) \qquad (i = 1, 2, 3 \cdots n_1) \qquad (a)$$

式中Δt_i代表一个有限的时间步长，n_1为诸步长的个数。按这种形式，$\mathbf{P}$的诸值如共同函数$f_c(\Delta t_i)$的比例因子作用。如果有一个以上这样的函数同时作用，那么它们之中每一个分开处理的反应可以迭加起来。

运动的作用力方程成为正规坐标的变换，得出典型模态方程：

地信网论坛 BBS.35001.COM

$$\ddot{x}_{P_i,j}+2n_i\dot{x}_{P_i,j}+p_i^2x_{P_i,j}=q_{P_i,j}\quad\begin{Bmatrix}i=1,\ 2,\ 3\cdots n\\ j=1,\ 2,\ 3\cdots n_1\end{Bmatrix}\tag{4.154}$$

其中$q_{P_i,j}$在第j个时间步长内为一常数。应用第1.15节中的方程（1.76b），我们写出时间测点t_j处第i型的阻尼反应为

$$x_{P_i,j}=e^{-n_i\Delta t_j}\left[x_{P_i,j-1}\cos p_{di}\Delta t_j+\frac{\dot{x}_{P_i,j-1}+n_ix_{P_i,j-1}}{p_{di}}\sin p_{di}\Delta t_j\right]$$
$$+\frac{q_{P_i,j}}{p_i^2}\left[1-e^{-n_i\Delta t_j}\left(\cos p_{di}\Delta t_j+\frac{n_i}{p_{di}}\sin p_{di}\Delta t_j\right)\right]\tag{4.155a}$$

将此式对时间微分并用p_{di}除其结果，我们还得到

$$\frac{\dot{x}_{P_i,j}}{p_{di}}=e^{-n_i\Delta t_j}\left[-x_{P_i,j-1}\sin p_{di}\Delta t_j+\frac{\dot{x}_{P_i,j-1}+n_ix_{P_i,j-1}}{p_{di}}\cos p_{di}\Delta t_j\right.$$
$$\left.-\frac{n_i}{p_{di}}\left(x_{P_i,j-1}\cos p_{di}\Delta t_j+\frac{\dot{x}_{P_i,j-1}+n_ix_{P_i,j-1}}{p_{di}}\sin p_{di}\Delta t_j\right)\right]$$
$$+\frac{q_{P_i,j}}{p_i^2}e^{-n_i\Delta t_j}\left(1+\frac{n_i^2}{p_{di}^2}\right)\sin p_{di}\Delta t_j\tag{4.155b}$$

方程（4.155a）和（4.155b）代表用于计算第j个时间步长末尾处每一正规型阻尼反应的递推公式。它们也提供在$j+1$个步长开始处位移和速度的初始条件。这些公式可以重复用来产生每一正规型反应的时间过程。然后，将每一时间测点的结果按常用方法变换回到原坐标。

如果一系统的第i型为一刚体运动，那么必须将刚体反应的适当式子用来代替上面所给的递推公式。例如，如果系统没有绝对阻尼，那么位移表达式〔方程(4.155a)〕用下式代替：

$$x_{P_i,j}=x_{P_i,j-1}+\dot{x}_{P_i,j-1}\Delta t_j+\frac{q_{P_i,j}}{2}(\Delta t_j)^2\tag{4.156a}$$

速度表达式（方程4.155b）用下式代替

$$\dot{x}_{P_i,j}=\dot{x}_{P_i,j-1}+q_{P_i,j}\Delta t_j\tag{4.156b}$$

然而，对于具有绝对阻尼的系统，必须使用前节中的方程（4.144）和（4.147）。

当用运动的位移方程而不用作用力方程时，分段常数位移函数的向量$\mathbf{\Delta}_{cj}$成为

$$\mathbf{\Delta}_{cj}=\mathbf{FQ}_{cj}=\mathbf{FP}f_c(\Delta t_j)=\mathbf{\Delta}_{st}f_c(\Delta t_j)\quad(j=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n_1)\tag{b}$$

式中$\mathbf{\Delta}_{st}$为由于$\mathbf{P}$中诸作用力所引起的诸静力位移的向量。根据与前节相同的推理过程，我们得出结论：方程（4.155a）和（4.155b）中的$q_{P_i,j}/p_i^2$项用$\delta_{P_i,j}$代替，它为从$\mathbf{\Delta}_{cj}$变换为正规坐标得到的一个典型项。

为了应用方程（4.155a）和（4.155b）所给的递推公式，按**BASIC**编制了一种计算机程序，已列于附录中。这种程序名为**DYNACON3**，用于计算阻尼多个自由度系统承受分段常数施力函数的前三型动力反应。图4.5中的上面部分表示这样一种函数f_c，其数值（在0.5秒的诸时间间隔处）列于表4.3的第四列中。此函数被荷载因子向量$\mathbf{P}=\{0.2,\ 0.3,\ 0.6\}$相乘后作用于图4.3中的系统上，按程序**DYNACON3**所得的瞬变反应给于该表最后三列中。对这一分析，我们假设$m_1=m_2=m_3=1$磅-秒^2/英寸，$k_1=k_2=k_3=1$磅/英寸，并且$\gamma_1=\gamma_2=\gamma_3=0.05$。此外，诸初始条件取为$x_{01}=x_{02}=x_{03}=0$和$\dot{x}_{01}=\dot{x}_{02}=\dot{x}_{03}=0$。

图4.5中的下面部分表示位移x_1、x_2和x_3的时间函数曲线图。显然，反应的绝大部分是

地信网论坛 BBS.3500L.COM

受第一型的影响，第一型具有近似为14.1秒的周期。为了保证这样的曲线图呈现出第三型的局部效应，必须用相当小的时间步长。此例中，第三型的固有周期近似地为3.5秒，选择$\Delta t=0.5$秒的均匀时间步长。

现在转到分段线性内插函数（见第1.15节图1.57），我们一次取一个函数$f_i(\Delta t_j)$，写出分段线性作用力向量$\mathbf{Q}_{ij}$为

$$\mathbf{Q}_{ij}=\mathbf{F}_i(\Delta t_j)=\mathbf{P}f_i(\Delta t_j)\quad(j=1,\ 2,\ 3\cdots n_t)\qquad(c)$$

在此情况下，将运动的作用力方程变换到正规坐标得出典型模态方程

$$\ddot{x}_{Pi}+2n_i\dot{x}_{Pi}+p_i^2x_{Pi}=q_{Pi,j-1}+\Delta q_{Pi,j}t/\Delta t_j\qquad(4.157)$$

此式中的符号$q_{Pi,j-1}$代表时间测点t_{j-1}处q_{Pi}的值。此外，我们定义$\Delta q_{Pi,j}=q_{Pi,j}-q_{Pi,j-1}$，它为时间步长$\Delta t_j$过程中$q_{Pi}$的变化。

从第1.15节中方程（1.77 b），我们确定在时间测点t_j处第i型的阻尼反应为

$$\begin{aligned}x_{Pi,j}=e^{-n_i\Delta t_j}&\left[x_{Pi,j-1}\cos p_{di}\Delta t_j+\frac{\dot{x}_{Pi,j-1}+n_ix_{Pi,j-1}}{p_{di}}\sin p_{di}\Delta t_j\right]\\&+\frac{q_{Pi,j-1}}{p_i^2}\left[1-e^{-n_i\Delta t_j}\left(\cos p_{di}\Delta t_j+\frac{n_i}{p_{di}}\sin p_{di}\Delta t_j\right)\right]\\&+\frac{\Delta q_{Pi,j}}{p_i^2\Delta t_j}\left[\Delta t_j-\frac{2n_i}{p_i^2}+e^{-n_i\Delta t_j}\left(\frac{2n_i}{p_i^2}\cos p_{di}\Delta t_j\right.\right.\\&\left.\left.-\frac{p_{di}^2-n_i^2}{p_i^2p_{di}}\sin p_{di}\Delta t_j\right)\right]\end{aligned}\qquad(4.158a)$$

将此式对时间微分，并用p_{di}去除，产生

$$\begin{aligned}\frac{\dot{x}_{Pi,j}}{p_{di}}=e^{-n_i\Delta t_j}&\left[-x_{Pi,j-1}\sin p_{di}\Delta t_j+\frac{\dot{x}_{Pi,j-1}+n_ix_{Pi,j-1}}{p_{di}}\cos p_{di}\Delta t_j\right.\\&\left.-\frac{n_i}{p_{di}}\left(x_{Pi,j-1}\cos p_{di}\Delta t_j+\frac{\dot{x}_{Pi,j-1}+n_ix_{Pi,j-1}}{p_{di}}\sin p_{di}\Delta t_j\right)\right]\\&+\frac{q_{Pi,j-1}}{p_i^2}e^{-n_i\Delta t_j}\left(1+\frac{n_i^2}{p_{di}^2}\right)\sin p_{di}\Delta t_j\\&+\frac{\Delta q_{Pi,j}}{p_i^2p_{di}\Delta t_j}\left[1-e^{-n_i\Delta t_j}\left(\cos p_{di}\Delta t_j+\frac{n_i}{p_{di}}\sin p_{di}\Delta t_j\right)\right]\end{aligned}\qquad(4.158b)$$

方程（4.158 a）和（4.158 b）构成计算时间测点t_j处每一正规型阻尼反应的递推公式，它们还提供下一步长的初始位移和速度。

如果第i型由一刚体运动组成，那么位移表达式（方程4.158 a）须用下式代替

$$x_{Pi,j}=x_{Pi,j-1}+\dot{x}_{Pi,j-1}\Delta t_j+\frac{q_{Pi,j-1}}{2}(\Delta t_j)^2+\frac{\Delta q_{Pi,j-1}}{6}(\Delta t_j)^3\qquad(4.159a)$$

速度表达式（方程4.158 b）用下式代替：

$$\dot{x}_{Pi,j}=\dot{x}_{Pi,j-1}+q_{Pi,j-1}\Delta t_j+\frac{\Delta q_{Pi,j-1}}{2}(\Delta t_j)^2\qquad(4.159b)$$

在写这些表达式中，我们表示该系统中没有绝对阻尼。否则，必须用方程(4.144)和(4.147)。

当用运动的位移方程而不用作用力方程时，分段线性位移函数的向量$\mathbf{\Delta}_{ij}$成为

$$\mathbf{\Delta}_{ij}=\mathbf{F}\mathbf{Q}_{ij}=\mathbf{F}\mathbf{P}f_{ij}(\Delta t_j)=\mathbf{\Delta}_{st}f_i(\Delta t_j)\quad(j=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n_t)\qquad(d)$$

在这样的分析中，方程（4.158 a）和（4.158 b）的$q_{Pi,j-1}/p_i^2$项和$\Delta q_{Pi,j}/p_i^2$项要分别用$\delta_{Pi,j-1}$和$\Delta\delta_{Pi,j}$代替。

地信网论坛
BBS.3S001.COM

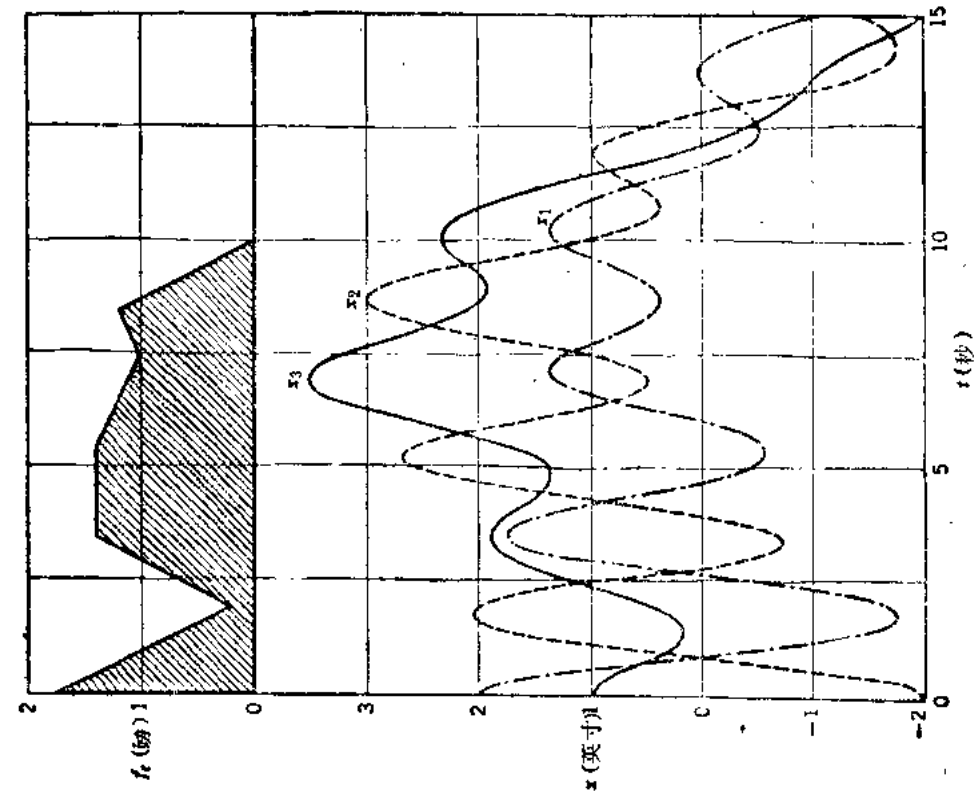


图 4.5

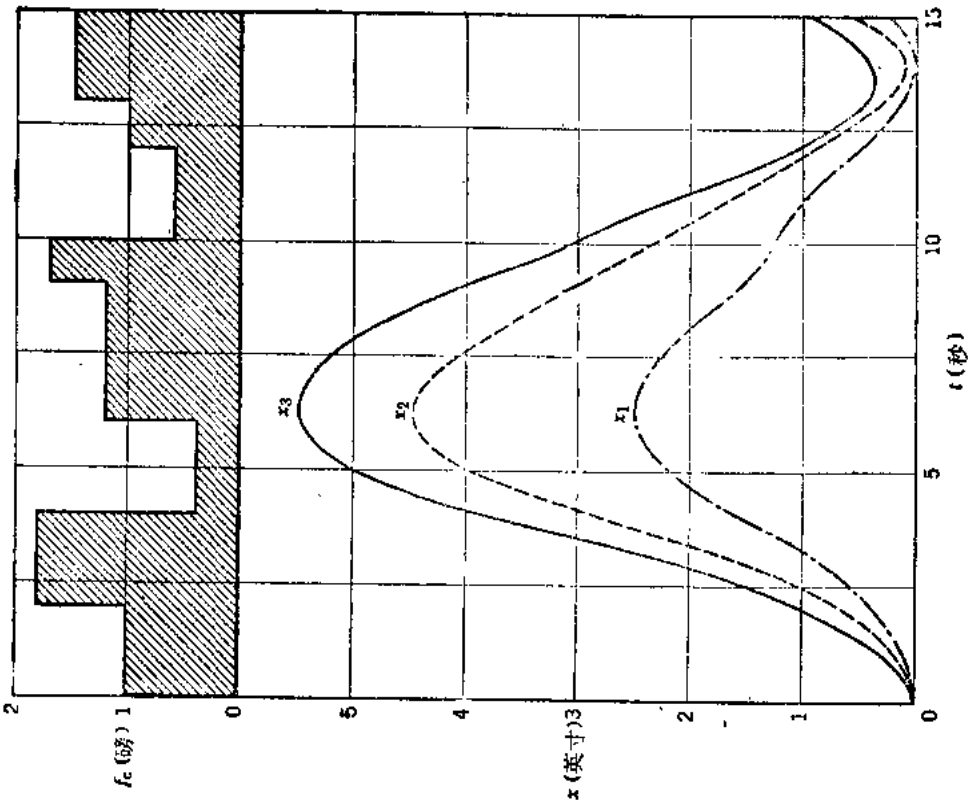


图 4.6

地信网论坛 BBS.3500L.COM

根据程序DYNACON3的结果　　表4·3

j	t_j(秒)	Δt_j(秒)	f_{cj}(磅)	x_{1j}(英寸)	x_{2j}(英寸)	x_{3j}(英寸)
0	0	—	—	0	0	0
1	0.5	0.5	1.0	0.025	0.038	0.074
2	1.0	0.5	1.0	0.095	0.156	0.283
3	1.5	0.5	1.0	0.205	0.363	0.603
4	2.0	0.5	1.0	0.352	0.660	1.004
5	2.5	0.5	1.8	0.555	1.062	1.518
6	3.0	0.5	1.8	0.830	1.576	2.175
7	3.5	0.5	1.8	1.167	2.176	2.935
8	4.0	0.5	1.8	1.545	2.834	3.757
9	4.5	0.5	0.4	1.906	3.468	4.498
10	5.0	0.5	0.4	2.193	3.983	5.030
11	5.5	0.5	0.4	2.394	4.330	5.355
12	6.0	0.5	0.4	2.495	4.475	5.480
13	6.5	0.5	1.2	2.506	4.438	5.472
14	7.0	0.5	1.2	2.433	4.273	5.384
15	7.5	0.5	1.2	2.277	4.024	5.199
16	8.0	0.5	1.2	2.057	3.728	4.904
17	8.5	0.5	1.2	1.809	3.403	4.504
18	9.0	0.5	1.2	1.574	3.050	4.020
19	9.5	0.5	1.7	1.390	2.688	3.523
20	10.0	0.5	1.7	1.267	2.346	3.082
21	10.5	0.5	0.6	1.153	2.014	2.641
22	11.0	0.5	0.6	0.998	1.673	2.146
23	11.5	0.5	0.6	0.798	1.332	1.636
24	12.0	0.5	0.6	0.568	0.984	1.151
25	12.5	0.5	1.0	0.347	0.642	0.754
26	13.0	0.5	1.0	0.167	0.340	0.482
27	13.5	0.5	1.5	0.055	0.133	0.363
28	14.0	0.5	1.5	0.025	0.082	0.409
29	14.5	0.5	1.5	0.079	0.208	0.595
30	15.0	0.5	1.5	0.219	0.503	0.905

为了应用递推公式（4.158a）和（4.158b），按BASIC还编制了第二计算机程序（名为 DYNALIN3）。这种程序用于计算阻尼多个自由度系统承受分段线性函数的前三型动力反应。DYNALIN3的编制可借修改DYNACON3中的诸语句计入这些程序所根据的诸递推公式之差异来得到。

图4.6的上面部分，表示一个分段线性施力函数 f_t，其0.5秒时间间隔处的诸数值给于表4.4的第四列中。应用向量$\mathbf{P}=\{-0.3,\ 0,\ 0,6\}$，$\mathbf{X}_0=\{2,-2,1\}$、$\dot{\mathbf{X}}_0=\{0,\ 0,\ 0\}$以及与前面相同的系统参数，我们用程序DYNALIN3求出列于表4.4中最后三列内的瞬变反应。图4.6的下面部分表示位移x_1、x_2和x_3的曲线图，我们看到初始位移图式导致第三型显著的激发。因为施力函数的持续过程为10秒，所以此后反应仅由自由振动组成。

地信网论坛 BBS.3500L.COM

根据程序 DYNALIN3 的结果　　表 4·4

j	t_j(秒)	Δt_j(秒)	f_{1j}(镑)	x_{1j}(英寸)	x_{2j}(英寸)	x_{3j}(英寸)
0	0	—	1.8	2.000	−2.000	1.000
1	0.5	0.5	1.4	1.255	−1.205	0.791
2	1.0	0.5	1.0	−0.364	0.521	0.379
3	1.5	0.5	0.6	−1.634	1.876	0.188
4	2.0	0.5	0.2	−1.681	1.963	0.484
5	2.5	0.5	0.6	−0.536	0.910	1.115
6	3.0	0.5	1.0	0.943	−0.319	1.691
7	3.5	0.5	1.4	1.748	−0.699	1.908
8	4.0	0.5	1.4	1.458	0.091	1.722
9	4.5	0.5	1.4	0.460	1.492	1.413
10	5.0	0.5	1.4	−0.419	2.532	1.356
11	5.5	0.5	1.4	−0.567	2.567	1.774
12	6.0	0.5	1.3	0.032	1.731	2.538
13	6.5	0.5	1.2	0.867	0.776	3.245
14	7.0	0.5	1.1	1.344	0.483	3.504
15	7.5	0.5	1.0	1.224	1.089	3.209
16	8.0	0.5	1.1	0.753	2.150	2.592
17	8.5	0.5	1.2	0.400	2.905	2.060
18	9.0	0.5	0.8	0.463	2.840	1.916
19	9.5	0.5	0.4	0.875	2.034	2.112
20	10.0	0.5	0.0	1.276	1.040	2.313
21	10.5	0.5	0.0	1.293	0.449	2.190
22	11.0	0.5	0.0	0.828	0.464	1.642
23	11.5	0.5	0.0	0.125	0.797	0.843
24	12.0	0.5	0.0	−0.407	0.937	0.068
25	12.5	0.5	0.0	−0.514	0.545	−0.482
26	13.0	0.5	0.0	−0.273	−0.303	−0.787
27	13.5	0.5	0.0	−0.012	−1.202	−0.985
28	14.0	0.5	0.0	−0.049	−1.729	−1.236
29	14.5	0.5	0.0	−0.457	−1.740	−1.591
30	15.0	0.5	0.0	−1.022	−1.440	−1.958

地信网论坛 BBS.3500L.COM

第五章　弹性体的振动

5.1　引　　言

所有结构和机械都由具有质量和柔度的部分组成。许多情况下，这些部分可以理想化为点质量、刚性体或无质量的可变形杆件。这样的系统具有有限多个自由度，可借前面诸章所述的方法来分析。然而，也可能而较严密地处理某些系统而不进行分析模型的离散化。本章中，我们将分析质量和变形性能连续分布的弹性体。可以按这种方式处理的部件包括杆、轴、钢索、梁、简单框架、环、拱、薄膜、板、壳以及三维固体。对这些问题中的许多问题将作详细的讨论，但是壳和三维固体的课题超出了本书的范围*。此外几何上复杂的结构，诸如框架、拱、分离出来的板、飞机机身、船体等等按弹性连续体进行分析是很困难的（甚至是不可能的）。在这样的情况下，需要采用具有大量但又是有限的自由度的离散化分析模型**。

当按弹性连续体分析一物体时，我们考虑它由无穷多个质量组成。为了确定该物体中每一点的位置，就需要无穷多个位移坐标，而且该系统说成具有无穷多个自由度。这些坐标作为一连续函数来处置，它对时间的一次导数和二次导数代表一般点的速度和加速度。因为它的质量是分布的，所以一弹性体具有无穷多个固有振型，它的动力反应可以按诸正规型影响之和来计算。

在考虑弹性体的振动中，我们将假设材料是均匀的和各向同性的，并且服从虎克定律。位移假设相当微小以至对动力激发的反应总是线性弹性的。虽然本章中不讨论阻尼，但是按第4.8节中所述借假设模态阻尼比容易把它包括进去。

5.2　棱柱形杆的自由纵向振动

在一弹性杆呈现的各种固有振动中，其纵向振动分析起来是最简单的。扭转振动和横向振动也可能发生，这些类型的运动在后面诸节中要论及到。在讨论纵向振动时，我们将假设杆的横截面保持为平面，而且每一横截面内诸质点仅顺该杆轴线方向运动。杆在这种振动过程中所发生的纵向伸长和纵向压缩将伴随发生一定的横向变形。然而，下面讨论中仅考虑纵波的长度比杆的横截面尺寸大得多的情况。在这种情况下，横向位移对纵向运动的效应可以略去不计，不会有显著误差***。

图 5.1a 表示一根长度为 l 的无约束棱柱形杆，在距杆的左端距离 x 处有一个无限小长度 dx 的典型分段。令符号 u 表示 x 处横截面上一点的纵向位移。当该杆按纵向振动时，每

---

* 弹性体振动的较完整的讨论可在下面书中找到：J. W. S. Rayleigh, Theory of Sound, 2nd ed., Vol. 1, Dover Publ. New York, 1945; 亦见 A.E.H. Love, Mathematical Theory of Elasticity, 4th ed., Cambridge Univ. Press, London, 1934.

** 关于分析离散化连续体的有限单元法的讨论见 J.S. Przemieniecki, Theory of Matrix Structural Analysis, McGraw-Hill, New York, 1968（第10-13章讨论弹性系统的动力学）。

*** 圆截面柱形杆纵向振动考虑侧向位移时的全解为 L. Pochhammer, 给出，见 Jour. Math. (Crelle), Vol. 81, 1876, P.324; 亦见 E. Giebe 和 E. Blechschmidt, Ann, Physik, Ser. 5, Vol. 18, 1933, p.457.

一分段上的诸轴向力（见图5.1 b）可以按达朗伯定理加起来，得到

$$S+\frac{\partial S}{\partial x}dx-S-\rho A dx\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \qquad (a)$$

其中符号 S 表示 x 处横截面上的内轴向应力合力。这个式子中的惯性力由材料的质量密度 ρ、分段的体积 Adx（这里 A 为杆的横截面积）和加速度 $\partial^2 u/\partial t^2$ 的乘积组成。应用虎克定律，我们可以用轴向应力 σ 表这轴向力 S，然后，用轴向应变 $\varepsilon=\partial u/\partial x$ 表达如下

$$S=A\sigma=EA\varepsilon=EA\frac{\partial u}{\partial x} \qquad (b)$$

式中 E 为弹性模量。将（b）式代入方程（a），并重新排列诸项，得出

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (5.1)$$

其中

$$a=\sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad (5.2)$$

方程（5.1）往往称为一维波动方程，它表明在纵向振动过程中位移模式顺轴向以速度 a 传播，这个速度为材料内声的速率。此问题的波动解用下面形式表达：

$$u=f(x-at) \qquad (c)$$

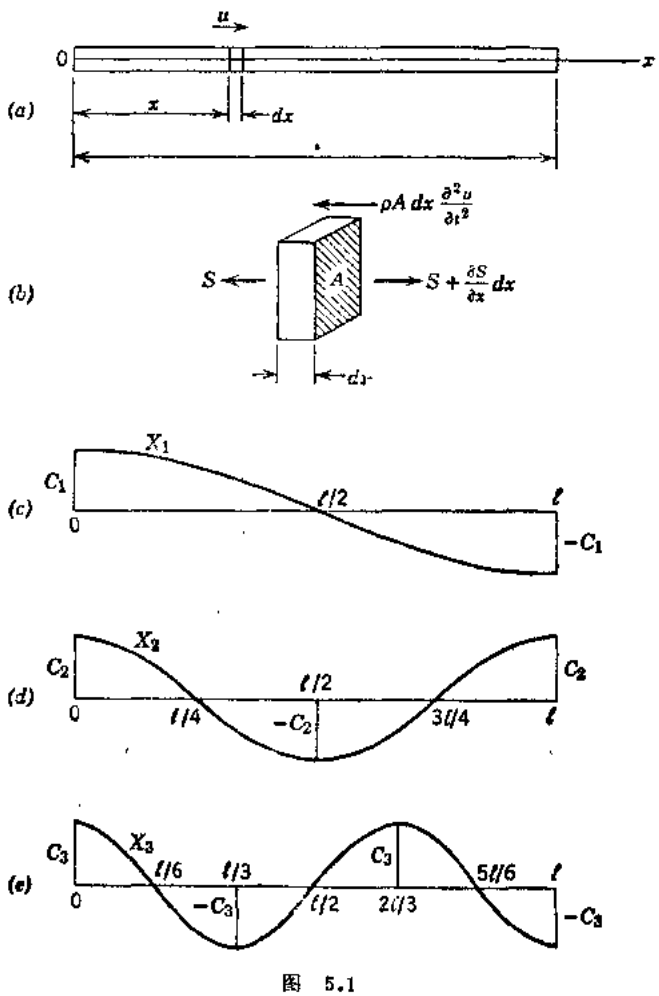


图 5.1

它代表任一以速度 a 移动的 x 的函数。可以看出此式借求算必要的导数满足方程（5.1）：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'(x-at) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''(x-at)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-af'(x-at) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2 f''(x-at)$$

将诸二次导数代入方程（5.1）得出两边恒等结果，因此满足该方程。波动解较为一般的形式为

$$u=f_1(x-at)+f_2(x+at) \qquad (d)$$

其中第一项代表顺正的 x 方向移动的函数 $f_1(x)$，第二项由顺负的 x 方向移动的函数 $f_2(x)$ 组成。虽然波动解适合具有很短持续过程的冲量的某一冲击问题，但是这种分析不像振动解那样有用，现在将详细地叙述这种振动解。

当图5.1 a 中的杆按其固有型之一振动时，方程（5.1）的解可以采取下面形式

$$u=X(A\cos pt+B\sin pt) \qquad (e)$$

式中 A 和 B 为常数，p 为角频率。符号 X 代表 x 的函数，称为主函数，或正规函数，该函数

地信网论坛 BBS.3500L.COM

定义固有振型的形状。将方程（e）代入方程（5.1）得到

$$\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{p^2}{a^2}X=0 \qquad (f)$$

其解为

$$X=C\cos\frac{px}{a}+D\sin\frac{px}{a} \qquad (g)$$

在此函数X的表达式中，常数C和D借满足诸杆端处边界条件来确定(具有一个任意常数)。由于图5.1 a 中的杆具有自由端，所以正比于 dX/dx 的轴向力在每一末端处必定为 零。这样，此问题的边界条件可以写为

$$\left(\frac{dX}{dx}\right)_{x=0}=0 \qquad \left(\frac{dX}{dx}\right)_{x=l}=0 \qquad (h)$$

为了满足这些条件的第一个条件，必须令方程（g）中$D=0$。在$C\neq 0$的情况下（非平凡解），仅当

$$\sin\frac{pl}{a}=0 \qquad (5.3)$$

时，第二个条件才得到满足。

达是现在所考虑的情况下的频率方程，具有自由端的杆纵向振动时诸固有型的频率可以从此方程计算出来。此方程借令

$$\frac{p_i l}{a}=i\pi \qquad (i)$$

来得到满足，式中i为一整数。取$i=0$，1，2，3，…，我们可以得到纵向运动时各种不同型的频率。$i=0$的值得出一个零频率，它意味着杆顺x方向刚体平动。基本振型的频率借令方程（i）中$i=1$来求出：

$$p_1=\frac{a\pi}{l}=\frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad (5.4)$$

相应的振动周期为

$$\tau_1=\frac{1}{f_1}=\frac{2\pi}{p_1}=2l\sqrt{\frac{\rho}{E}} \qquad (5.5)$$

此振型具有图5.1 c 中所说明的形状，它[从方程(g)]表达为

$$X_1=C_1\cos\frac{p_1x}{a}=C_1\cos\frac{\pi x}{l}$$

图5.1 d 和5.1 e 中代表第二和第三振型，对于它们

$$\frac{p_2 l}{a}=2\pi \qquad X_2=C_2\cos\frac{2\pi x}{l}$$

和

$$\frac{p_3 l}{a}=3\pi \qquad X_3=C_3\cos\frac{3\pi x}{l}$$

方程（5.1）的振动解（e）的一般形式可以写成：

$$u_i=\cos\frac{i\pi x}{l}\left(A_i\cos\frac{i\pi at}{l}+B_i\sin\frac{i\pi at}{l}\right) \qquad (j)$$

借迭加这样一些解，我们可以用下列形式表示杆的任一纵向振动：

$$u=\sum_{i=1}^{\infty}\cos\frac{i\pi x}{l}\left(A_i\cos\frac{i\pi at}{l}+B_i\sin\frac{i\pi at}{l}\right) \qquad (5.6)$$

地信网论坛 BBS.3S001.COM

方程（5.6）中的常数 A_i 和 B_i 总是可以按满足任何初始条件这样一种方式来选定。例如，假设在初始瞬间（当 $t=0$ 时），位移 u 借方程 $(u)_{t=0}=f_1(x)$ 给出，并且假设初始速度借方程 $(\dot{u})_{t=0}=f_2(x)$ 来表达。将 $t=0$ 代入方程（5.6），我们得到

$$f_1(x)=\sum_{i=1}^{\infty}A_i\cos\frac{i\pi x}{l} \qquad (k)$$

将方程（5.6）对 t 取导数，并代以 $t=0$，我们得到

$$f_2(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i\pi a}{l}B_i\cos\frac{i\pi x}{l} \qquad (l)$$

现在方程（k）和（l）中的系数 A_i 和 B_i 可以用下列公式如前面所说明那样求算出来〔见第1.11节方程（1.59a）〕：

$$A_i=\frac{2}{l}\int_0^l f_1(x)\cos\frac{i\pi x}{l}dx \qquad (m)$$

$$B_i=\frac{2}{i\pi a}\int_0^l f_2(x)\cos\frac{i\pi x}{l}dx \qquad (n)$$

作为一个例子，现在我们考虑一根因施加于两端点处的力而压缩的棱柱形杆，在时间 $t=0$ 处此压缩突然解除。假设杆中央处保持稳定，我们取

$$(u)_{t=0}=f_1(x)=\frac{\varepsilon_0 l}{2}-\varepsilon_0 x \qquad f_2(x)=0$$

式中 ε_0 代表在瞬间 $t=0$ 处的压缩应变量。我们从方程（m）和（n）得到

$A_i=\frac{4\varepsilon_0 l}{\pi^2 i^2}$（对于 i 为奇数）

$A_i=0$（对于 i 为偶数）

$B_i=0$

通解（5.6）成为

$$u=\frac{4\varepsilon_0 l}{\pi^2}\sum_{i=1,3,5\cdots}^{\infty}\frac{1}{i^2}\cos\frac{i\pi x}{l}\cos\frac{i\pi a t}{l} \qquad (o)$$

只有奇整数 $i=1$，3，5，……成为此解的组成部分，振动对杆中央横截面为对称。

作为第二个例子，让我们考虑一根一端固定，另一端自由的杆（见图5.2a）的自由纵向振动。在此情况下，端点条件为

$$(u)_{x=0}=0 \qquad \left(\frac{du}{dx}\right)_{x=l}=0 \qquad (p)$$

为了满足这些条件中的第一个条件，我们在正规函数的一般式（g）中取 $C=0$。第二个条件得出频率方程：

$$\cos\frac{pl}{a}=0$$

从它，各种振型的频率和周期为

$$p_i=\frac{i\pi a}{2l} \qquad \tau_i=\frac{2\pi}{p_i}=\frac{4l}{ia} \qquad (i=1,\ 3,\ 5\cdots\infty) \qquad (q)$$

于是，各种振型的一般式（e）成为

地信网论坛 BBS.3500L.COM

$$u_i = \sin\frac{i\pi x}{2l}\left(A_i\cos\frac{i\pi at}{2l} + B_i\sin\frac{i\pi at}{2l}\right) \qquad (r)$$

然后，纵向振动的全解借迭加得出如下：

$$u = \sum_{i=1,3,5,\cdots}^{\infty} \sin\frac{i\pi x}{2l}\left(A_i\cos\frac{i\pi at}{2l} + B_i\sin\frac{i\pi at}{2l}\right) \qquad (5.7)$$

每一特定情况下常数 A_i和B_i从初始条件（在时间 $t=0$ 处）来确定。

例如，假设杆在开始时由一个作用于自由端处的轴向力P_0张拉着（见图 5.2a），还假定在时间 $t=0$ 处此力突然移去。对于初始应变 P_0/EA 应用符号 ε_0，我们得到初始条件

$$(u)_{t=0} = \varepsilon_0 x$$

$$(\dot{u})_{t=0} = 0$$

这些条件中的第二个条件借使（r）式中常数 B_i 变为零得到满足。为了确定常数 A_i，我们得到下列方程

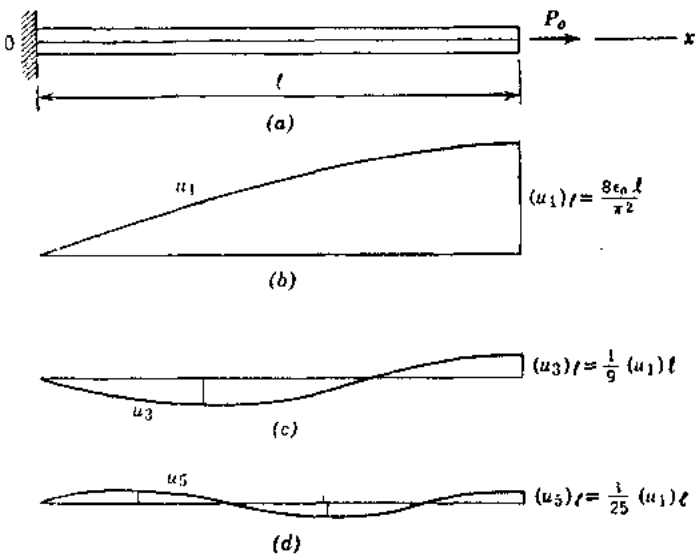


图 5.2

$$A_i\sin\frac{i\pi x}{2l} = \varepsilon_0 x \qquad (i = 1,\ 3,\ 5,\ \cdots,\ \infty)$$

从第1.11节应用方程（1.59b），我们求出

$$A_i = \frac{2\varepsilon_0}{l}\int_0^l x\sin\frac{i\pi x}{2l}\,dx = \frac{8\varepsilon_0 l}{i^2\pi^2}(-1)^{(i-1)/2}$$

(5.7) 式成为

$$u = \frac{8\varepsilon_0 l}{\pi^2}\sum_{i=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{(-1)^{(i-1)/2}}{i^2}\sin\frac{i\pi x}{2l}\cos\frac{i\pi at}{2l} \qquad (s)$$

图5.2b、c和d表示前三型对于杆的总反应的影响。可以看出各种振型的振幅随 i 的增大而迅速减小。杆自由端的位移借 $x=l$ 代入（s）式来得到。

对于时间 $t=0$，我们求出

$$(u)_{\substack{x=l\\t=0}} = \frac{8\varepsilon_0 l}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} - \cdots\right) = \frac{8\varepsilon_0 l}{\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{8}\right) = \varepsilon_0 l$$

这是完全对的。

例题1　试求一根长度为 l 两端均固定的杆纵向振动的正规函数。

解：在此情况下，诸端点条件为

$$(u)_{x=0} = (u)_{x=l} = 0$$

为了满足这些条件，我们将$C=0$代入（g）式，得到频率方程 $\sin\frac{p_i l}{a} = 0$，从它得出

地信网论坛 BBS.3500L.COM

$p_i = i\pi a / l$。因此，正规函数为

$$X_i = A_i \sin \frac{i\pi x}{l} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ \infty) \qquad (t)$$

例题 2 有一根嵌固端的杆，在中央处作用一个集中轴向力P_0，如图5.3 a 中所示。试问如果力P_0突然移去，将产生什么样的振动？

解：杆左部中的拉应变$\varepsilon_0 = P_0/2EA$，它在数值上等于右部中的压应变。初始位移$(u)_{t=0}$借$g_1(x) = \varepsilon_0 x$（对于$0 \leqslant x \leqslant l/2$）和$g_2(x) = \varepsilon_0(l - x)$（对于$l/2 \leqslant x \leqslant l$）给出，如图5.3$b$所表示。在前面例题中，对此情况我们已求出了正规函数〔方程（t）〕，满足初始条件$(\dot{u})_{t=0} = 0$的振动的一般式为

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \sin \frac{i\pi x}{l} \cos \frac{i\pi a t}{l} \qquad (u)$$

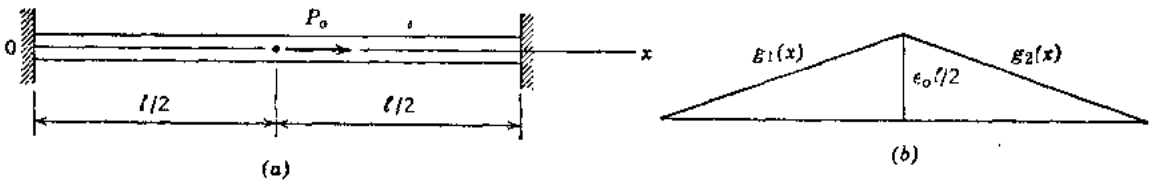


图 5.3

常数A_i从初始位移形态求得，导出：

$$A_i = \frac{2}{l}\left[\int_0^{l/2} \varepsilon_0 x \sin \frac{i\pi x}{l} dx + \int_{l/2}^{l} \varepsilon_0 (l - x) \sin \frac{i\pi x}{l} dx\right]$$

$$= \left(\frac{4\varepsilon_0 l}{\pi^2}\right) \frac{(-1)^{(i-1)/2}}{i^2} \qquad (\text{对于 } i = 1,3,5,\cdots,\ \infty)$$

$$A_i = 0 \qquad (\text{对于 } i = 2,4,\cdots,\ \infty)$$

这样，

$$u = \frac{4\varepsilon_0 l}{\pi^2} \sum_{i=1,3,5,\cdots}^{\infty} \frac{(-1)^{(i-1)/2}}{i^2} \sin \frac{i\pi x}{l} \cos p_i t \qquad (v)$$

例题 3 一根以常速度v沿x轴运动的杆突然左端点$x = 0$处停止，因而初始条件$(u)_{t=0} = 0$和$(\dot{u})_{t=0} = v$。试确定以后发生的振动。

解：在此情形下，位移的一般式借方程 (5.7)给出。由于初始位移变为零，所以我们将$A_i = 0$代入该式。于是从下面方程得到常数B_i

$$(\dot{u})_{t=0} = \sum_{i=1,3,5,\cdots}^{\infty} B_i \frac{i\pi a}{2l} \sin \frac{i\pi x}{2l} = v$$

它给出

$$B_i = \frac{8vl}{\pi^2 i^2 a}$$

因此

$$u = \frac{8vl}{\pi^2 a} \sum_{i=1,3,5,\cdots}^{\infty} \frac{1}{i^2} \sin \frac{i\pi x}{2l} \sin p_i t \qquad (w)$$

地信网论坛 BBS.3500L.COM

用此公式，我们可以计算在任一给定时间处杆中任一横截面的位移。例如，取杆的自由端（$x=l$），并假设 $t=l/a$（它为声传播距离l所需要的时间），我们得到

$$(u)_{\substack{x=l\\ t=l/a}}=\frac{8vl}{\pi^2 a}\left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\cdots\right)=\frac{vl}{a}$$

振动过程中杆内的应变为

$$\frac{du}{dx}=\frac{8vl}{\pi^2 a}\sum_{i=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{i^2}\cdot\frac{i\pi}{2l}\cos\frac{i\pi x}{2l}\sin p_i t$$

在固定端处（$x=0$），我们得到

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=0}=\frac{4v}{\pi a}\sum_{i=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{i}\sin\frac{i\pi at}{2l}=\frac{v}{a}\left(\text{对于 }0<\frac{\pi at}{2l}<\frac{\pi}{2}\right)$$

在停止的瞬间（$t=0$）杆左端发生的拉力波沿杆以速率 a 运动，在瞬间 $t=l/a$，它到达杆的自由端。在此时间，杆的所有质点的速度均变为零，并在此相同时间处均匀伸长，因而拉应变$\varepsilon=v/a$。

习 题 组 5.2

5.2—1　有一杆，在 $x=0$ 的端点处为自由，在 $x=l$ 的端点处固定着，试确定该杆纵向振动的一般表达式。

答：$u=\sum_{i=1,3,5,\cdots}^{\infty}\cos\frac{i\pi x}{2l}\left(A_i\cos\frac{i\pi at}{2l}+B_i\sin\frac{i\pi at}{2l}\right)$

5.2—2　有一根以常速度 v 顺 x 轴运动的杆在 $x=l/2$的中点处突然停止。试求出所产生的自由振动的表达式。

答：$u=\frac{4vl}{\pi^2 a}\sum_{i=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{i^2}\cos\frac{i\pi x}{l}\sin\frac{i\pi at}{l}$

5.2—3　假定例题 2 中的初始力P_0作用于杆的四分之一点处（$x=l/4$）而不是中点处。此外，假设一个相等且相反的力$-P_0$作用于四分之三点处（$x=3l/4$）。试问当这些力突然移去时产生什么样的振动？

答：$u=\frac{P_0 l}{\pi^2 EA}\sum_{i=2,6,10,\cdots}^{\infty}\frac{(-1)^{(i-2)/4}}{i^2}\sin\frac{i\pi x}{l}\cos\frac{i\pi at}{l}$

5.2—4　令图5.2a中的初始力P_0沿杆的长度均匀分布（荷载的强度$=P_0/l$）。试确定由于此分布荷载突然移去所引起的杆的反应。

答：$u=\frac{16P_0 l}{\pi^3 EA}\sum_{i=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{i^3}\sin\frac{i\pi x}{2l}\cos\frac{i\pi at}{2l}$

5.3　棱柱形杆的强迫纵向反应

现在让我们考虑一个作用于图5.2a中棱柱形杆右端的干扰力$P=F(t)$。该杆的自由振动已在前节中研究过，我们已求出对此情况的正规函数借下式给出

地信网论坛 BBS.3500L.COM

$$X_i = D_i \sin\frac{i\pi x}{2l} \qquad (i = 1,3,5,\cdots,\infty) \qquad (a)$$

任何位移 $u = f(x)$ 可以借相应于正规振型（a）的诸位移迭加来得到。所以，由于该干扰力 P 所产生的振动用下面级数来表示：

$$u = \phi_1 \sin\frac{\pi x}{2l} + \phi_3 \sin\frac{3\pi x}{2l} + \phi_5 \sin\frac{5\pi x}{2l} + \cdots = \sum_{i=1,3,5,\cdots}^{\infty} \phi_i \sin\frac{i\pi x}{2l} \qquad (5.8)$$

其中 ϕ_1、ϕ_3、ϕ_5…为时间的一些未知函数。在自由振动的情况下，这些函数用前节方程（5.7）中括号内的诸表达式表示。为了求出强迫振动情况的这些函数，我们将应用虚功原理。这里，我们必须考虑三种力：振动杆每一单元内的惯性力、由于杆变形引起每一单元的弹性力以及作用于端点处的干扰力。我们可以取满足连续性条件和固端处条件（$\delta u_{x=0} = 0$）的任一纵向位移 δu 作为一虚位移，可发现按方程（a）所给的正规函数形式取作虚位移是有利的。这样

$$\delta u_i = X_i = D_i \sin\frac{i\pi x}{2l} \qquad (b)$$

注意，杆上两相邻横截面之间一单元的质量为 $\rho A dx$，我们求出惯性力对假设的虚位移做的功 δW_i 为

$$\delta W_i = \int_0^l (-\rho A dx)\ddot{u}\delta u_i = -\rho A \int_0^l \ddot{u} D_i \sin\frac{i\pi x}{2l} dx$$

将级数（5.8）代入 u，并考虑：

$$\int_0^l \sin\frac{i\pi x}{2l} \sin\frac{j\pi x}{2l} dx = 0 \qquad \int_0^l \sin^2\frac{i\pi x}{2l} dx = \frac{l}{2}$$

我们得出

$$\delta W_i = -\frac{\rho A l}{2} D_i \ddot{\phi}_i \qquad (c)$$

为了计算由于弹性力所做的虚功 δW_E，我们考虑每一单元上的力为 $EAu''dx$。这样

$$\delta W_E = \int_0^l (EAu'' dx)\delta u_i$$

将方程（5.8）对 x 的二次导数代入此式，并应用 δu_i 的方程（b），我们得到

$$\delta W_E = -\frac{i^2\pi^2 EA}{8l} D_i \phi_i \qquad (d)$$

在后面诸节中，用物体的应变能着手得出弹性力的虚功是有利的。在现在弹性杆的情况下，应变能的表达式为

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l EA\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx \qquad (e)$$

代入 u 的级数（5.8），并考虑

$$\int_0^l \cos\frac{i\pi x}{2l} \cos\frac{j\pi x}{2l} dx = 0 \qquad \int_0^l \cos^2\frac{i\pi x}{2l} dx = \frac{l}{2}$$

我们求出应变能为

地信网论坛 BBS.3500L.COM

$$U=\frac{i^2\pi^2EA}{16l}\sum_{i=1,3,5,\cdots}^{\infty}\phi_i^2 \qquad (f)$$

我们看到任一时刻处杆中应变能的大小取决于确定杆的位移的ϕ_i诸量。如果我们给这些量之一以一增量$\delta\phi_i$，那么相应的位移为：

$$\delta u_i=\delta\phi_i\sin\frac{i\pi x}{2l} \qquad (g)$$

相应的应变能增量为

$$\delta U=\frac{\partial U}{\partial\phi_i}\delta\phi_i=\frac{i^2\pi^2EA}{8l}\phi_i\delta\phi_i \qquad (h)$$

同一量取负号则代表弹性力对位移（g）所做的功。为了得出弹性力对虚位移（b）所做的功，我们只需要用D_i代替$\delta\phi_i$，这从比较（b）式和（g）式可以看出。按此方法，我们得到该功的表达式

$$\delta W_E=-\frac{\partial U}{\partial\phi_i}\delta\phi_i=-\frac{i^2\pi^2EA}{8l}\phi_iD_i \qquad (i)$$

它与方程（d）相同。

为了确定作用于端点处干扰力P的虚功δW_P，我们考虑此端的虚位移借l代入（b）式的x来得到。其相应虚功为

$$\delta W_P=PD_i\sin\frac{i\pi}{2}=PD_i(-1)^{(i-1)/2} \qquad (j)$$

（c）、（i）和（j）式之和给予我们总虚功。令它等于零，我们得到

$$\frac{\rho Al}{2}\ddot{\phi}_i+\frac{i^2\pi^2EA}{8l}\phi_i=P(-1)^{(i-1)/2}$$

或

$$\ddot{\phi}_i+p_i^2\phi_i=\frac{2}{\rho Al}P(-1)^{(i-1)/2} \qquad (k)$$

式中 $p_i=i\pi a/2l$，$i=1,3,5,\cdots,\infty$。注意，（b）式确定瞬间虚位移大小的常数D_i从方程（k）中消除掉了，这是对的。

我们看到如果P被认为是时间的函数，那么级数（5.8）中的每一个量ϕ_i可以容易从方程（k）得到。倘若初始位移和速度均为零，我们只需要考虑由于干扰力P所产生的振动。按杜哈梅积分形式写出方程（k）的解，我们得出：

$$\phi_i=\frac{4(-1)^{(i-1)/2}}{i\pi a\rho A}\int_0^t P\sin\left[\frac{i\pi a}{2l}(t-t')\right]dt' \qquad (l)$$

将方程（l）代入（5.8)式，我们得到由于干扰力P所产生的下列形式的反应

$$u=\frac{4}{\pi a\rho A}\sum_{i=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{(-1)^{(i-1)/2}}{i}\sin\frac{i\pi x}{2l}\int_0^t P\sin\left[\frac{i\pi a}{2l}(t-t')\right]dt' \qquad (5.9)$$

作为一个特例，让我们取时间$t=0$处突然作用一常数力P使杆产生振动的情况。在这样一种情况下，方程(5.9)中的积分容易求算出来，我们得到

$$u=\frac{8lP}{\pi^2a^2\rho A}\sum_{i=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{(-1)^{(i-1)/2}}{i^2}\sin\frac{i\pi x}{2l}\left(1-\cos\frac{i\pi at}{2l}\right) \qquad (m)$$

地信网论坛 BBS.3500L.COM

将 $x = l$ 代入此级数，我们求出杆端的位移为

$$(u)_{x=l} = \frac{8lP}{\pi^2 a^2 \rho A} \sum_{i=1,3,5,\cdots}^{\infty} \frac{1}{i^2}\left(1-\cos\frac{i\pi at}{2l}\right) \qquad (n)$$

可以看出，由于力 P 突然作用，杆的所有振型都激发出来。当 $t = 2l/a$ 时，产生最大的挠度，因为在该瞬间

$$1-\cos\frac{i\pi at}{2l} = 2$$

我们得到

$$(u)_{x=l} = \frac{16lP}{\pi^2 a^2 \rho A} \sum_{i=1,3,5,\cdots}^{\infty} \frac{1}{i^2}$$

考虑到

$$\sum_{i=1,3,5,\cdots}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad 和 \quad a^2 = \frac{E}{\rho}$$

我们求出

$$(u)_{x=l} = \frac{2lP}{EA}$$

这样，我们得出结论：突然作用力 P 产生的挠度为其平静作用产生的挠度的两倍。

作为第二个例子，让我们考虑具有自由端并在 $x = l$ 的端点处承受突然作用力 P 的杆的纵向反应（见图5.1 a）*。按上面例题那样进行，并应用具有自由端的杆的正规函数〔见第5.2节方程（5.6）〕，我们可以用下面级数表示该振动杆的纵向位移

$$u = \phi_0 + \phi_1\cos\frac{\pi x}{l} + \phi_2\cos\frac{2\pi x}{l} + \phi_3\cos\frac{3\pi x}{l} + \cdots$$

$$= \phi_0 + \sum_{i=1}^{\infty}\phi_i\cos\frac{i\pi x}{l} \qquad (5.10)$$

第一项 ϕ_0 代表杆如同刚体的运动。将杆的各种纵向振型迭加到此运动上。为了确定函数 ϕ_0，我们取下面方程

$$\rho Al\ddot{\phi}_0 = P \qquad (o)$$

函数 ϕ_1、ϕ_2、ϕ_3…如前面那样借虚位移原理来求得。取一虚位移

$$\delta u_i = C_i\cos\frac{i\pi x}{l} \qquad (p)$$

我们求出诸惯性力对此位移所做的功为

$$\delta W_I = -\int_0^l \rho A\ddot{u}C_i\cos\frac{i\pi x}{l}dx = \frac{1}{2}\rho AlC_i\ddot{\phi}_i \qquad (q)$$

在任一瞬间处，振动杆的应变能为

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l EA\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx = \frac{\pi^2 EA}{4l}\sum_{i=1}^{\infty} i^2\phi_i^2 \qquad (r)$$

---

* 当研究用于深油井的长钻杆提升过程中所产生的振动时，碰到相似的问题，此问题为B.F.Langer和E.H.Lamberger所讨论，见Jour.Appl.Mech., Vol.10, 1943, p.1.

地信网论坛 BBS.3500I.COM

弹性力对位移（p）所做的功为

$$\delta W_E=-\frac{\partial U}{\partial \phi_i}\delta\phi_i=-\frac{i^2\pi^2EA}{2l}C_i\phi_i \qquad (s)$$

最后，力P对位移（p）所做的功为

$$\delta W_p=PC_i\cos i\pi=C_iP(-1)^i \qquad (t)$$

令（q）、（s）和（t）诸式之和等于零，我们得到下列方程：

$$\ddot{\phi}_i+p_i^2\phi_i=\frac{2}{\rho Al}P(-1)^i \qquad (u)$$

式中$p_i=i\pi a/l$。从此方程和方程（o），我们得到（假设该杆起始处于静止）：

$$\phi_0=-\frac{Pt^2}{2\rho Al} \qquad (v)$$

$$\phi_i=(-1)^i\frac{2}{i\pi a\rho A}\int_0^t P\sin\left[\frac{i\pi a}{l}(t-t')\right]dt'$$

$$=\frac{(-1)^i2lP}{i^2\pi^2a^2\rho A}\left(1-\cos\frac{i\pi at}{l}\right) \qquad (w)$$

将这些式子代入方程（5.10），我们求出

$$u=\frac{Pt^2}{2\rho Al}+\frac{2lP}{\pi^2a^2\rho A}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i^2}\cos\frac{i\pi x}{l}\left(1-\cos\frac{i\pi at}{l}\right) \qquad (x)$$

为了得到力P所作用的杆端处的位移，我们将$x=l$代入解（x），给出

$$(u)_{x=l}=\frac{Pt^2}{2\rho Al}+\frac{2lP}{\pi^2a^2\rho A}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}\left(1-\cos\frac{i\pi at}{l}\right) \qquad (y)$$

对于$t=l/a$，此式成为

$$(u)_{x=l}=\frac{Pl}{2EA}+\frac{4Pl}{\pi^2EA}\left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\cdots\right)=\frac{Pl}{EA} \qquad (z)$$

在此瞬间，该位移等于均匀拉力P作用下杆的伸长量。

例题1　试确定一端固定另一端自由的杆在作用于杆自由端处脉动轴向力$P=P_1\sin\omega t$所引起的稳态强迫振动（见图5.2a）。

解：在此情况下，方程（k）成为

$$\ddot{\phi}_i+p_i^2\phi_i=\frac{2(-1)^{(i-1)/2}}{\rho Al}P_1\sin\omega t$$

其稳态强迫振动为

$$\phi_i=\frac{2P_1(-1)^{(i-1)/2}}{\rho Al(p_i^2-\omega^2)}\sin\omega t$$

将此式代入方程（5.8），我们可以得到所需要求的杆的强迫振动。可以看到，如果ω接近杆的诸固有频率之一的值，那么相应振动的振幅成为很大。

例题2　有一根钻杆为4000英尺长的钢管。考虑它为一根具有自由端的杆，试求其基本振型的周期τ_1。此外，确定在时间$t=\tau_1/2$处由于拉应力$\sigma=P/A=3000$磅/英寸^{2}突然作用于一端处（$x=l$）所引起该端的位移δ。取$E=30\times10^6$磅/英寸^{2}和$\rho=0.720\times10^{-3}$磅·秒^2/英寸^4。

地信网论坛 BBS.3500L.COM

解：此杆中声的速度为

$$a=\sqrt{\frac{E}{\rho}}=204\times10^3\text{英寸/秒}$$

其基本振型的周期$\tau_1=2l/a=0.470$秒。从方程（z），所需要求的位移$\delta=(3000)(4000)/(30\times10^6)=0.40$英尺。

习 题 组 5.3

5.3—1 假定一常数轴向力P突然作用于图5.3a中固端杆的中点处。试确定该杆从静止起的纵向反应。

答：$u=\dfrac{2lP}{\pi^2a^2\rho A}\sum_{i=1,3,5,\cdots}^{\infty}\dfrac{(-1)^{(i-1)/2}}{i^2}\sin\dfrac{i\pi x}{l}\left(1-\cos\dfrac{i\pi at}{l}\right)$

5.3—2 有一根自由端的杆（见图5.1a）承受一个作用于端点$x=0$处的轴向斜坡力$P=P_1t/t_1$。假设该杆起初处于静止，试确定其纵向反应。

答：$u=\dfrac{P_1t^3}{6\rho Alt_1}+\dfrac{2lP_1}{\pi^2\rho a^2At_1}\sum_{i=1}^{\infty}\dfrac{1}{i^2}\cos\dfrac{i\pi x}{l}\left(t-\dfrac{l}{i\pi a}\sin\dfrac{i\pi at}{l}\right)$

5.3—3 试求一根$x=0$的端点处固定，而$x=l$端为自由的杆（见图5.2a），由于沿其长度作用均匀干扰轴向力$(P_1/l)\sin\omega t$所引起该杆的稳态强迫振动。

答：$u=\dfrac{4P_1\sin\omega t}{\pi\rho Al}\sum_{i=1,3,5,\cdots}^{\infty}\dfrac{\sin(p_ix/a)}{i(p_i^2-\omega^2)};\quad p_i=\dfrac{i\pi a}{2l}$

5.3—4 考虑一根在$x=0$端处为自由，$x=l$端处为固定的杆。试确定它对突然作用于中点（$x=l/2$）处的常数轴向力P的反应。

答：$u=\dfrac{8lP}{\pi^2a^2\rho A}\sum_{i=1,3,5,\cdots}^{\infty}\dfrac{\cos(i\pi/4)}{i^2}\cos\dfrac{i\pi x}{2l}\left(1-\cos\dfrac{i\pi at}{2l}\right)$

5.4 棱柱形杆的正规型法

前节中的分析已说明与第4章中所讨论的多个自由度系统正规型法的某些相似性。现在我们将导出对于具有分布质量和无穷多个自由度的棱柱形杆的正规型技巧。虽然所列方程可供棱柱形杆纵向振动的特定参考，但是这是所讨论的正规型方法的一般概念可以推广到任何一种弹性体的分析。

让我们重新考虑图5.1a中棱柱形杆的自由纵向振动。杆中典型单元的运动微分方程〔见第5.2节方程（a）和（b）〕可以写成

$$m\ddot{u}dx-ru''dx=0 \qquad (a)$$

式中的点和撇表示位移u分别对t和x的微分。$m=\rho A$这一项代表杆单位长度上的质量，$r=EA$这一量为其轴向刚度。当杆按其第i固有型振动时，具有下列谐和运动

$$u_i=X_i(A_i\cos p_it+B_i\sin p_it) \qquad (b)$$

将方程（b）代入方程（a），并重新排列诸项，得到

$$rX_i''+mp_i^2X_i=0 \qquad (c)$$

地信网论坛 BBS.3S001.COM

其解具有下列形式：

$$X_i = C_i \cos\frac{p_i x}{a} + D_i \sin\frac{p_i x}{a} \qquad (d)$$

（式中 $a = \sqrt{r/m}$），如第5.2节先前讨论的那样。

现在我们将以另一种方式重新叙述方程（c）：

$$X_i'' = \lambda_i X_i \qquad (5.11)$$

式中

$$\lambda_i = -\frac{m p_i^2}{r} = -\left(\frac{p_i}{a}\right)^2 \qquad (e)$$

方程（5.11）为一本征值问题的形式，方程中的本征值λ_i和本征函数X_i从边界条件来确定。这种本征值问题可以表征为这样一个问题：其函数X_i的二次导数（对x）等于同一函数被常数λ_i相乘。

现在我们将借考虑本征值问题的 i 型和 j 型来考察本征函数的正交性性能：

$$X_i'' = \lambda_i X_i \qquad (f)$$

$$X_j'' = \lambda_j X_j \qquad (g)$$

用X_j乘方程（f）和用X_i乘方程（g），并按杆的整个长度对诸乘积进行积分，我们得到

$$\int_0^l X_i'' X_j \, dx = \lambda_i \int_0^l X_i X_j \, dx \qquad (h)$$

$$\int_0^l X_j'' X_i \, dx = \lambda_j \int_0^l X_i X_j \, dx \qquad (i)$$

借分部这些方程左边的积分得出

$$[X_i' X_j]_0^l - \int_0^l X_i' X_j' \, dx = \lambda_i \int_0^l X_i X_j \, dx \qquad (j)$$

$$[X_j' X_i]_0^l - \int_0^l X_i' X_j' \, dx = \lambda_j \int_0^l X_i X_j \, dx \qquad (k)$$

对于杆两端处为自由的条件或为固定的条件，已积出的诸项均为零。所以，用方程（j）减方程（k）得到

$$(\lambda_i - \lambda_j) \int_0^l X_i X_j \, dx = 0 \qquad (l)$$

当 $i \neq j$ 且诸本征值不同时（$\lambda_i \neq \lambda_j$），为了满足方程（l），下列关系必须成立：

$$\int_0^l X_i X_j \, dx = 0 \qquad (i \neq j) \qquad (5.12)$$

将此关系式用于方程（j）中，我们求出

$$\int_0^l X_i' X_j' \, dx = 0 \qquad (i \neq j) \qquad (5.13)$$

从方程（h）也可以看出

$$\int_0^l X_i'' X_j \, dx = 0 \qquad (i \neq j) \qquad (5.14)$$

地信网论坛 BBS.3500I.COM

这样，棱柱形杆的诸本征函数不仅彼此成正交，而且在它们的导数中间也存在正交性关系。

对于 $i = j$ 的情况，方程（l）中的积分可以为任一常数。如果该常数指定为a_i，那么我们取

$$\int_0^l X_i^2 dx = a_i \qquad (i = j) \qquad (5.15)$$

当诸本征函数用此式所示方式归一化时，方程（h）和（j）得出

$$\int_0^l X_i'' X_i dx = -\int_0^l (X_i')^2 dx = \lambda_i a_i = -\frac{mp_i^2}{r} a_i = -\left(\frac{p_i}{a}\right)^2 a_i \qquad (5.16)$$

在下面讨论中，将明显看出反应计算中a_i应选定什么值。

按前节，我们以时间函数ϕ_i和位移函数X_i表达一杆的纵向运动：

$$u = \sum_i \phi_i X_i \qquad (i = 1,2,3,\cdots,\infty) \qquad (5.17)$$

将方程（5.17）代入自由振动的运动方程（a）得出

$$\sum_{i=1}^{\infty} (m\ddot{\phi}_i X_i - r\phi_i X_i'') dx = 0$$

用正规函数X_j乘此式，并对整个杆长进行积分，我们得到

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(m\ddot{\phi}_i \int_0^l X_i X_j dx - r\phi_i \int_0^l X_i'' X_j dx \right) = 0 \qquad (m)$$

从方程（5.12）和（5.14）所给的正交性关系，我们推断出（对于 $i = j$）运动方程（m）缩减成下面形式：

$$m_{Pi}\ddot{\phi}_i + r_{Pi}\phi_i = 0 \qquad (i = 1,2,3,\cdots,\infty) \qquad (5.18)$$

其中

$$m_{Pi} = m\int_0^l X_i^2 dx = ma_i \qquad (5.19)$$

和

$$r_{Pi} = -r\int_0^l X_i'' X_i dx = r\int_0^l (X_i')^2 dx = mp_i^2 a_i \qquad (5.20)$$

符号m_{Pi}代表第 i 型的主质量（或广义质量），r_{Pi}为主刚度（亦称广义刚度）。这样，方程（5.18）构成按主坐标的自由振动的典型运动方程。

如果诸本征函数X_i按下面这样一种方式归一化：

$$m_{Pi} = m\int_0^l X_i^2 dx = 1 \qquad (n)$$

那么它们说成是对单位长度上的质量归一化。用这种归一化，主质量m_{Pi}为 1；常数 a_i〔见方程（5.15）〕等于$1/m$；方程（5.20）表示主刚度成为

$$r_{Pi} = p_i^2 \qquad (o)$$

于是运动方程（5.18）简化为

$$\ddot{\phi}_i + p_i^2\phi_i = 0 \quad (i = 1,2,3,\cdots,\infty) \qquad (5.21)$$

地信网论坛 BBS.3S001.COM

现在它说成是按正规坐标来表达的。如果任意常数a_i选定为1，那么我们得到$m_{Pi}=m$和$r_{Pi}=mp_i^2$。于是运动方程（5.21）将包含公因子m，可以划出来。这样，为了方便，我们将取$a_i=1$（而不取$1/m$）。

概括起来，运动的微分方程（a）借代以u的方程（5.17）用X_i相乘并对杆的整个长度积分变换到正规坐标。当诸本征函数归一化，以致

$$\int_0^l X_i^2 dx=1 \qquad \int_0^l X_i'' X_i dx=-\int_0^l (X_i')^2 dx=-\left(\frac{p_i}{a}\right)^2 \tag{5.22}$$

那么每一主坐标的广义质量等于m，广义刚度为mp_i^2。然而，公因子m可以括出来得到方程（5.21）。

现在我们将用正规型法确定一杆对位移和速度初始条件的纵向反应。按第5.2节，我们假设当$t=0$时，诸初始位移表达为$u_0=f_1(x)$，并假设初始速度借$\dot{u}_0=f_2(x)$给出。按方程（5.17）的形式展开u_0和$\dot{u}_0$，我们取

$$\sum_{i=1}^{\infty}\phi_{0i}X_i=f_1(x) \tag{p}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\dot{\phi}_{0i}X_i=f_2(x) \tag{q}$$

用X_j乘这些式子，并对杆的整个长度积分，我们得到

$$\sum_{i=1}^{\infty}\dot{\phi}_{0i}\int_0^l X_i X_j dx=\int_0^l f_1(x)X_j dx \tag{r}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\dot{\phi}_{0i}\int_0^l X_i X_j dx=\int_0^l f_2(x)X_j dx \tag{s}$$

从方程（5.12）和（5.22）所给的正交性和归一化关系，可以看到（对于$i=j$）方程(r)和（s）得出下列按正规坐标的初始条件：

$$\phi_{0i}=\int_0^l f_1(x)X_i dx \tag{5.23}$$

$$\dot{\phi}_{0i}=\int_0^l f_2(x)X_i dx \tag{5.24}$$

所以，正规型的自由振动反应为

$$\phi_i=\phi_{0i}\cos p_i t+\frac{\dot{\phi}_{0i}}{p_i}\sin p_i t \qquad (i=1,2,3,\cdots,\infty) \tag{t}$$

将此式代入方程（5.17）得到所有各型的合成反应为

$$u=\sum_{i=1}^{\infty}X_i\left(\phi_{0i}\cos p_i t+\frac{\dot{\phi}_{0i}}{p_i}\sin p_i t\right) \tag{5.25}$$

它代表第5.2节中方程（5.6）和（5.7）所给的特定解的一般形式。

接着，我们将正规型法用于棱柱形杆强迫纵向反应的计算。为此目的，假设该杆承受单位长度上分布力Q（x，t），如图5.4所示。在此情况下，杆上一典型单元的运动微分方

地信网论坛 BBS.35001.COM

程成为：

$$\ddot{m}u\,dx - ru''dx = Q(x,t)dx \qquad (u)$$

为了方便，我们用 $m=\rho A$（单位长度的质量）除此方程的两边，得出

$$\ddot{u}\,dx - a^2u''dx = q(x,t)dx \qquad (v)$$

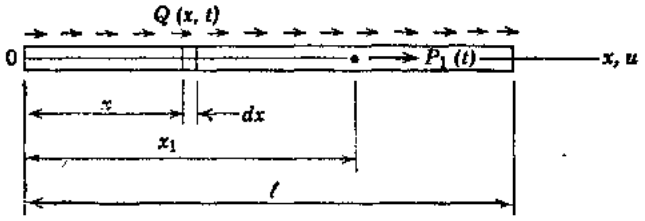


图 5.4

式中 $a^2=r/m=E/\rho$ 和 $q(x,\ t)=Q(x,\ t)/m$。方程（v）借代以 u 的表达式(5.17)，乘以 X_i，并对杆的整个长度积分变换到正规坐标：

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\ddot{\phi}_i\int_0^l X_iX_j\,dx - a^2\phi_i\int_0^l X_i''X_j\,dx\right)=\int_0^l X_jq(x,\ t)dx \qquad (w)$$

用方程（5.12）、（5.14）和（5.22）所给的正交和归一化条件，我们得到（对于 $i=j$）

$$\ddot{\phi}_i + p_i^2\phi_i = \int_0^l X_iq(x,\ t)dx \qquad (i=1,2,3,\cdots,\infty) \qquad (5.26)$$

此式代表按正规坐标的典型运动方程，右边的积分为第 i 个正规型荷载。

第 i 振型的反应借杜哈梅积分求得为

$$\phi_i = \frac{1}{p_i}\int_0^t X_i\int_0^t q(x,\ t')\sin p_i(t-t')dt'dx \qquad (5.27)$$

将此时间函数代人方程（5.17）给出总的振动反应为

$$u=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{X_i}{p_i}\int_0^t X_i\int_0^t q(x,\ t')\sin p_i(t-t')dt'dx \qquad (5.28)$$

如果一荷载 $P_1(t)$ 集中于 x_1 点处，如图5.4所示，那么不需要沿整个长度积分。对此种加载的反应从下面较简单式子计算出来：

$$u=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{X_iX_{i1}}{p_i}\int_0^t q_1(t')\sin p_i(t-t')dt' \qquad (5.29)$$

其中符号 X_{i1} 代表 x_1 点处求算的正规函数 X_i，另外 $q_1(t)=P_1(t)/m$。

计算对所施加荷载的反应的正规型方法等效于前节中所述的虚功方法。下面诸例说明方程（5.28）和（5.29）对于分布力和集中力的应用。

例题 1 假设图5.4中杆的左端固定，右端自由，试确定它对单位长度上强度为 Q 的均布纵向力突然作用的反应。

解：因为荷载强度 $q=Q/m$ 既不随 x 变化也不随 t 变化，所以它可以放到方程（5.28）中诸积分的外面。从此杆的自由振动分析，我们得到

$$p_i=\frac{i\pi a}{2l} \qquad X_i=D_i\sin\frac{p_ix}{a}\quad (i=1,3,5,\cdots,\infty)$$

为了按方程（5.22）归一化 X_i，我们必须取 $D_i=\sqrt{2/l}$。于是方程（5.28）得出

$$u=\frac{2Q}{lm}\sum_{i=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{p_i}\sin\frac{p_ix}{a}\int_0^t\sin\frac{p_ix}{a}\int_0^t\sin p_i(t-t')dt'dx$$

地信网论坛 BBS.3500L.COM

$$=\frac{4Q}{\pi m}\sum_{i=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{ip_i^2}\sin\frac{p_ix}{a}(1-\cos p_it)$$

$$=\frac{16l^2Q}{\pi^3a^2m}\sum_{i=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{i^3}\sin\frac{i\pi x}{2l}\left(1-\cos\frac{i\pi at}{2l}\right)\qquad(x)$$

例题 2 试对具有例题 1 中端点条件的杆，计算对突然作用于右端处（$x_1=l$）一个集中力 P 的反应。

解：在此情况下，我们用方程（5.29）得到反应如下：

$$u=\frac{2P}{lm}\sum_{i=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{p_i}\sin\frac{p_ix}{a}\sin\frac{p_il}{a}\int_0^t\sin p_i(t-t')dt'$$

$$=\frac{2P}{lm}\sum_{i=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{p_i^2}\sin\frac{p_ix}{a}\sin\frac{p_il}{a}(1-\cos p_it)$$

$$=\frac{8lP}{\pi^4a^2m}\sum_{i=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{(-1)^{(i-1)/2}}{i^2}\sin\frac{i\pi x}{2l}\left(1-\cos\frac{i\pi at}{2l}\right)\qquad(y)$$

此式与第5.3节中的方程（m）相同。

习 题 组 5.4

5.4—1 假设图5.3 a 中的初始力 P_0 作用于杆的三分之一点处（$x=l/3$）而不是中点处。试用正规型法求出此力突然移去所产生的自由振动。

答：$$u=\frac{2P_0}{3\pi EA}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}\sin\frac{i\pi x}{l}\left[\frac{l}{i\pi}\left(3\sin\frac{i\pi}{3}-\sin\frac{2i\pi}{3}\right)-\frac{l}{3}\cos\frac{2i\pi}{3}\right]\cos\frac{i\pi at}{l}$$

5.4—2 假定图 5.2 a 中杆的右半部在时间 $t=0$ 时具有顺轴向的初始速度 v。试确定由于此条件所产生的杆的自由振动。

答：$$u=\frac{8vl}{\pi^2a}\sum_{i=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{i^2}\cos\frac{i\pi}{4}\sin\frac{i\pi x}{2l}\sin\frac{i\pi at}{2l}。$$

5.4—3 有一固定端杆，突然承受在 $x=0$ 处强度为零，至 $x=l$ 处强度为 Q 成线性变化的分布轴向荷载。试用正规型法求出此杆的纵向反应。

答：$$u=\frac{2l^2Q}{\pi^3a^2m}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i-1}}{i^3}\sin\frac{i\pi x}{l}\left(1-\cos\frac{i\pi at}{l}\right)$$

5.4—4 试确定一根自由端杆，由于作用其中点处（$x=l/2$）一轴向力 $P=P_1(t/t_1)^2$ 所产生的纵向反应。

答：$$u=\frac{P_1t^4}{12lmt_1^2}+\frac{2lP_1}{\pi^2a^2mt_1^2}\sum_{i=2,4,6,\cdots}^{\infty}\frac{(-1)^{i/2}}{i^2}\cos\frac{i\pi x}{l}\times\left[t^2-\frac{2l^2}{(i\pi a)^2}\left(1-\cos\frac{i\pi at}{l}\right)\right]$$

地信网论坛 BBS.3500I.COM

5.5 端点带有一个质量或一个弹簧的棱柱形杆

除了前节讨论的固定端或自由端条件外，我们可能碰到一个集中质量或一个弹性约束，或者它们二者都存在于图5.5中杆的右端处。本节内，将要用正规型法处理这两种端点条件*。

让我们首先考虑图5.5中杆的右端处弹簧的刚度常数 k 等于零而仅有集中质量 M 的情况。在此种情况下，由于振动过程中集中质量作用于杆端上的力等于 $-M(\ddot{u})_{x=l}$。这样，该杆的边界条件可以写成：

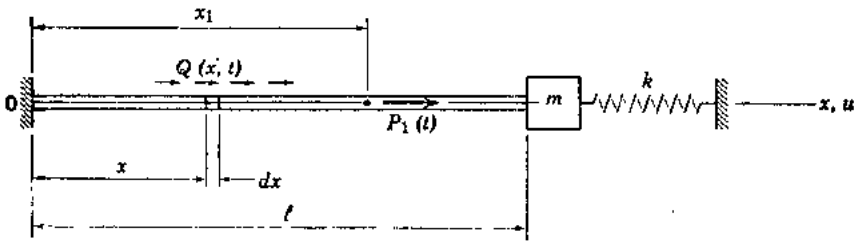


图 5.5

$$(u)_{x=0}=0 \quad r(u')_{x=l}=-M(\ddot{u})_{x=l} \tag{a}$$

因为这些条件中的第二个条件涉及集中质量的运动，所以其分析要比单根杆的分析稍要复杂。然而，运动仍是谐和的，对于第 i 型，我们可以再取

$$u_i=X_i(A_i\cos p_i t+B_i\sin p_i t) \tag{b}$$

将方程（b）代入边界条件（a）得出

$$X_{i0}=0 \qquad rX'_{il}=Mp_i^2X_{il} \tag{c}$$

式中脚标 0 和 l 分别表示 $x=0$ 和 $x=l$ 的位置。如前面那样，其正规函数具有下列形式：

$$X_i=C_i\cos\frac{p_i x}{a}+D_i\sin\frac{p_i x}{a} \tag{d}$$

方程（c）中的第一个边界条件要求 $C_i=0$，第二个条件得出下列关系式：

$$\frac{rp_i}{a}\cos\frac{p_i l}{a}=Mp_i^2\sin\frac{p_i l}{a} \tag{e}$$

我们可以较简洁地将此式重新写为：

$$\xi_i\tan\xi_i=\eta \tag{5.30}$$

其中 $\xi_i=p_i l/a$ 和 $\eta=ml/M$（杆的质量与集中质量之比）。

方程（5.30）为现在所考虑中的情况的频率方程。因为此式是超越方程，所以其角频率 p_i 须借试探来求得。基本振型通常是极为重要的。对于各种质量比 η 值的相应 ξ_1 值（对第一型）给出如下：

$\eta=0.01$	0.10	0.30	0.50	0.70	0.90	1.00	1.50
$\xi_1=0.10$	0.32	0.52	0.65	0.75	0.82	0.86	0.98
$\eta=2.00$	3.00	4.00	5.00	10.0	20.0	100.0	∞
$\xi_1=1.08$	1.20	1.27	1.32	1.42	1.52	1.57	$\pi/2$

*一种是指端点处有一个集中质量或一个弹性约束的情况，另一种是指端点不仅有一个集中质量而且还有一个弹性约束的情况。——译注

地信网论坛 BBS.3500L.COM

如果杆的质量与所附上的质量相比为很小，那么η值和ξ_1值二者都很小，方程（5.30）可以借取$\tan\xi_1\approx\xi_1$来简化。于是我们得到

$$\xi_1^2\approx\eta=\frac{ml}{M}\qquad \xi_1=\frac{p_1 l}{a}\approx\sqrt{\frac{ml}{M}}$$

因此

$$p_1\approx\frac{a}{l}\sqrt{\frac{ml}{M}}=\sqrt{\frac{EA}{Ml}}$$

式中EA/l为杆的轴向刚度。此结果与杆和质量按一个自由度系统处理所得的一致。反之，如果质量比η很大，那么频率方程成为

$$\tan\frac{p_1 l}{a}=\infty$$

此式得出角频率

$$p_i=\frac{i\pi a}{2l}\qquad (i=1,3,5,\cdots,\ \infty)$$

它与第5.2节中所得的相同。

为了导出端点处带有一质量的杆的正交性关系式，我们对两个不同型i和j重新写出本征值问题〔见第5.4节方程（5.11）〕如下：

$$rX_i''=-mp_i^2X_i \qquad (f)$$

$$rX_j''=-mp_j^2X_j \qquad (g)$$

用X_j乘这些式子中的第一个式子，用X_i乘第二个式子，并对整根杆积分，我们得到

$$r\int_0^l X_i''X_j\,dx=-mp_i^2\int_0^l X_iX_j\,dx \qquad (h)$$

$$r\int_0^l X_j''X_i\,dx=-mp_j^2\int_0^l X_iX_j\,dx \qquad (i)$$

位于$x=l$处的质量必定也包括在正交关系中，对于i型和j型，方程（c）的第二个边界条件可以重新写为：

$$rX_{il}'X_{il}=Mp_i^2X_{il}X_{il} \qquad (j)$$

$$rX_{jl}'X_{il}=Mp_j^2X_{il}X_{jl} \qquad (k)$$

上面第一个式子已用X_{jl}相乘，第二个式子已用X_{il}相乘。将方程（h）和（i）减方程（j）和（k）得到组合关系：

$$r\int_0^l X_i''X_j\,dx-rX_{il}'X_{jl}=-p_i^2\left(m\int_0^l X_iX_j\,dx+MX_{il}X_{jl}\right) \qquad (l)$$

$$r\int_0^l X_j''X_i\,dx-rX_{jl}'X_{il}=-p_j^2\left(m\int_0^l X_iX_j\,dx+MX_{il}X_{jl}\right) \qquad (m)$$

借诸式左边的分部积分得出

$$-rX_{i0}'X_{j0}-r\int_0^l X_i'X_j'\,dx=-p_i^2\left(m\int_0^l X_iX_j\,dx+MX_{il}X_{jl}\right) \qquad (n)$$

$$-rX_{j0}'X_{i0}-r\int_0^l X_i'X_j'\,dx=-p_j^2\left(m\int_0^l X_iX_j\,dx+MX_{il}X_{jl}\right) \qquad (o)$$

地信网论坛 BBS.3500L.COM

由于左边诸积分项均为零，所以方程（o）减方程（n）得到

$$(p_i^2-p_j^2)\left(m\int_0^l X_iX_j\,dx+MX_{il}X_{jl}\right)=0 \qquad (p)$$

当$i\neq j$（和$p_i^2\neq p_j^2$）时，方程（p）给出正交关系：

$$m\int_0^l X_iX_j\,dx+MX_{il}X_{jl}=0 \qquad (i\neq j)(5.31)$$

从方程（n），我们还看到

$$r\int_0^l X_i'X_j'\,dx=0 \qquad (i\neq j)\ (5.32)$$

方程（l）给出

$$r\int_0^l X_i''X_j\,dx-rX_{il}'X_{jl}=0 \qquad (i\neq j)\ (5.33)$$

将这些式子与第5.2节中它们的相对部分比较〔见方程（5.12）、（5.13）和(5.14)〕，我们看到方程（5.31）和（5.33）中存在附加项。

对于$i=j$的情况，方程（p）中的第二个因子可以为任一常数。我们将任意选定该常数为m，得到

$$m\int_0^l X_i^2\,dx+MX_{il}^2=m \qquad (i=j)\ (5.34)$$

当诸本征函数归一化以满足此式时，方程（l）和（n）给出

$$r\int_0^l X_i''X_i\,dx-rX_{il}'X_{il}=-r\int_0^l (X_i')^2\,dx=-mp^2 \qquad (5.35)$$

为了确定系统对时间$t=0$处初始条件$u_0=f_1(x)$和$\dot{u}_0=f_2(x)$的纵向反应，我们首先求算在$x=l$处所附质量的初始位移$u_{0l}=f_1(l)$和初始速度$\dot{u}_{0l}=f_2(l)$。然后，将杆和质量的初始条件以时间和位移函数〔见第5.4节方程(5.17)〕表达展开如下：

$$\sum_{i=1}^{\infty}\phi_{0i}X_i=f_1(x)\qquad \sum_{i=1}^{\infty}\dot{\phi}_{0i}X_i=f_2(x) \qquad (q)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\phi_{0i}X_{il}=f_1(l)\qquad \sum_{i=1}^{\infty}\dot{\phi}_{0i}X_{il}=f_2(l) \qquad (r)$$

其次，我们用mX_j乘方程（q），并对杆的整个长度积分。此外，用MX_{jl}乘方程（r），并与从方程（q）所得的结果加起来，得到

$$\sum_{i=1}^{\infty}\phi_{0i}\left(m\int_0^l X_iX_j\,dx+MX_{il}X_{jl}\right)=m\int_0^l f_1(x)X_j\,dx+Mf_1(l)X_{jl} \qquad (s)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\dot{\phi}_{0i}\left(m\int_0^l X_iX_j\,dx+MX_{il}X_{jl}\right)=m\int_0^l f_2(x)X_j\,dx+Mf_2(l)X_{jl} \qquad (t)$$

应用方程（5.31）和（5.34）所给的正交性和归一化关系，我们求出（对于$i=j$）方程（s）和（t）产生按正规坐标的下列初始条件：

地信网论坛 BBS.3S001.COM

$$\phi_{0i}=\int_0^l f_1(x)X_i dx+\frac{l}{\eta}f_1(l)X_{il} \tag{5.36}$$

$$\dot{\phi}_{0i}=\int_0^l f_2(x)X_i dx+\frac{l}{\eta}f_2(l)X_{il} \tag{5.37}$$

用这些ϕ_{0i}和$\dot{\phi}_{0i}$的式子，对诸初始条件的反应与第5.4节方程（5.25）中相同。

为了说明如何计算系统对所作用的纵向力的反应，我们建立杆上一典型单元的运动微分方程（见图5.5）为

$$m\ddot{u}\,dx-ru^*dx=Q(x,t)dx \tag{u}$$

在杆的右端处，我们从方程（a）得到下列关系式：

$$M\ddot{u}_l+ru'_l=0 \tag{v}$$

按方程（5.17）展开方程（u），然后我们用X_j去乘它，并对整个长度积分，得到

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(m\ddot{\phi}_i\int_0^l X_iX_j dx-r\phi_i\int_0^l X''_iX_j dx\right)=\int_0^l X_jQ(x,t)dx \tag{w}$$

类似地，展开方程（v），并用X_{jl}相乘，给出

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(M\ddot{\phi}_iX_{il}X_{jl}+r\phi_iX'_{il}X_{jl}\right)=0 \tag{x}$$

将方程（w）与（x）加起来，得到

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\ddot{\phi}_i\left(m\int_0^l X_iX_j dx+MX_{il}X_{jl}\right)-\phi_ir\left(\int_0^l X''_iX_j dx-X'_{il}X_{jl}\right)\right]$$

$$=\int_0^l X_jQ(x,t)dx \tag{y}$$

从方程（5.31）（5.33）、（5.34）和（5.35）中的正交性和归一化的条件，我们看到（对于$i=j$）：

$$m\ddot{\phi}_i+mP_i^2\phi_i=\int_0^l X_iQ(x,t)dx \tag{z}$$

当用m除此方程时，它成为与第5.4节中方程（5.26）相同，其中$q(x,t)=Q(x,t)/m$。所以，第i型的反应仍借方程（5.27）给出，总反应从方程（5.28）求得。对于位于x_1点处的集中力$P_1(t)$（见图5.5），其反应可从方程（5.29）来计算。当$x_1=l$时，集中力直接作用于质量M上，对于这种条件不需要特殊处理。

本节中所有前面讨论是指图5.5中弹簧刚度系数k等于零和集中质量M为非零的情况。现在我们将考虑相反的情况，其中$k\neq 0$而$M=0$。在这种情况下，振动过程中弹簧作用于杆端的力将等于$-k(u)_{x=l}$。所以，杆的边界条件成为

$$(u)_{x=0}=0 \qquad r(u')_{x=l}=-k(u)_{x=l} \tag{a'}$$

根据类似于集中质量情况的推理过程，我们推断出，正规函数仍借下式给出：

$$X_i=D_i\sin\frac{p_ix}{a} \tag{b'}$$

方程（a'）中的第二个边界条件导致下列关系式：

地信网论坛 BBS.3500I.COM

$$\frac{rp_i}{a}\cos\frac{p_i l}{a}=-k\sin\frac{p_i l}{a} \qquad (c')$$

如果我们定义无量纲参数$\zeta_i=ml p_i^2/k$，那么频率方程的简洁形式成为

$$\xi_i\tan\xi_i=-\zeta_i \qquad (5.38)$$

其中$\xi_i=p_i a/l$如前面那样。这些，如果用$-\zeta_i$代替参数η，那么前面对第一型所给数值级数仍然适用。当弹簧的刚度常数k很小时（$k\to 0$），方程（c'）成为右端处无约束（但固定于左端处）的杆的频率方程。反之，当k很大时（$k\to\infty$），方程（c'）被k相除，成为两端固定杆的频率方程。

为了提出端点处带有一个弹簧的杆的正交关系，我们按类似于端点处带有一个质量的杆的方式进行。然而，在此情况下，方程（j）和（k）用下面式子代替：

$$rX_i'X_{jl}=-kX_{il}X_{jl} \qquad (d')$$

和

$$rX_j'X_{il}=-kX_{il}X_{jl} \qquad (e')$$

用方程（h）和（i）减这些式子，得到合成的关系式：

$$r\int_0^l X_i''X_j\,dx-rX_i'X_{jl}-kX_{il}X_{jl}=-mp_i^2\int_0^l X_iX_j\,dx \qquad (f')$$

$$r\int_0^l X_j''X_i\,dx-rX_j'X_{il}-kX_{il}X_{jl}=-mp_j^2\int_0^l X_iX_j\,dx \qquad (g')$$

左边诸项借分部积分，并用方程（g'）减方程（f'）导致此系统的下列正交性关系式：

$$m\int_0^l X_iX_j\,dx=0 \qquad (i\neq j) \quad (5.39)$$

$$r\int_0^l X_i'X_j'\,dx+kX_{il}X_{jl}=0 \qquad (i\neq j) \quad (5.40)$$

$$r\int_0^l X_i''X_j\,dx-rX_i'X_{jl}-kX_{il}X_{jl}=0 \qquad (i\neq j) \quad (5.41)$$

将这些式子与第5.4节中的方程（5.12）、（5.13）和（5.14）比较，说明方程（5.39）与无弹簧的系统的式子相同。然而，在方程（5.40）和（5.41）中出现附加项。

对于$i=j$的情况，其归一化步骤任意选定以给出：

$$m\int_0^l X_i^2\,dx=m \qquad (5.42)$$

和

$$r\int_0^l X_i''X_i\,dx-rX_i'X_{il}-kX_{il}^2=-r\int_0^l(X_i')^2\,dx-kX_{il}^2=-mp_i^2 \qquad (5.43)$$

因为方程（5.42）与第5.4节中所用的归一化类型一致〔见方程（5.22）〕，所以该节对初始条件的反应所导得的公式〔方程（5.23）、（5.24）和（5.25）〕也适用于现在的情况。另外，该系统对所作用的纵向力的反应可仍用第5.4节中的方程（5.28）和（5.29）来计算。这样，我们看到虽然弹簧的存在影响杆的频率和振型的形状，但是确定其动力反应的正规型方法不变。

地信网论坛 BBS.3500L.COM

如果质量和弹簧二者都存在（$M \neq 0$ 和 $k \neq 0$），如图 5.5 中所示，那么诸边界条件成为

$$(u)_{x=0}=0 \qquad r(u')_{x=l}=-M(\ddot{u})_{x=l}-k(u)_{x=l} \tag{h'}$$

在这种组合情况下，正规函数仍借方程（b'）来代表，方程（h'）中的第二个边界条件得出

$$\frac{rp_i}{a}\cos\frac{p_i l}{a}=(Mp_i^2-k)\sin\frac{p_i l}{a} \tag{i'}$$

从它，求得频率方程的简洁形式为

$$\xi_i\tan\xi_i=\frac{\eta\zeta_i}{\zeta_i-\eta} \tag{5.44}$$

这种情况的正交性诸关系式由方程（5.31）、（5.40）和（5.41）组成，其归一化的必要条件为方程（5.34）和（5.43）所包括。按正规坐标的初始位移和初始速度借方程（5.36）和（5.37）代表，对初始条件和所作用的力的反应借第 5.4 节中方程（5.25）、（5.28）和（5.29）给出。

本节中的诸技巧可以推广到在杆的两端各有一个质量和一个弹簧的较复杂情况。在这样一种情况下，正规函数将包含两个非零部分，如方程（d）所代表的那样。在频率方程中将出现较多项。此外，正交性和归一化关系式将包括杆件两端的质量项和刚度项，而按正规坐标的初始条件可以仅在质量影响的基础上计算出来。将它作为练习留给读者去导出棱柱形杆纵向振动的这些较复杂（但是易做到的）的式子。在第 5.7 节中将讨论轴两端处带有盘这种在数学上相似的情况，在第5.8节中讨论两端带有侧向约束弹簧的张拉着的钢丝。

5.6 承受纵向支承运动的杆

现在将考虑棱柱形杆由于支承运动而不是作用力所引起的纵向反应。例如，在图5.6中，如果地面顺 x 方向按下面函数平动：

$$u_g=g(t) \tag{a}$$

那么该杆中典型单元的运动微分方程可以写成：

$$m\ddot{u}\,dx-r(u-u_g)'dx=0 \tag{b}$$

为了求解此方程，我们引进下面符号：

$$u^*=u-u_g \tag{c}$$

它代表杆上任一点相对于地面的刚体平动位移。此外，任一点的绝对加速度 $\ddot{u}$ 可以表达为

$$\ddot{u}=\ddot{u}^*+\ddot{u}_g \tag{d}$$

将方程（c）和（d）代入方程（b）得出

$$m(\ddot{u}^*+\ddot{u}_g)dx-r(u^*)'dx=0$$

或

$$m\ddot{u}^*dx-r(u^*)'dx=-m\ddot{u}_g dx=-m\ddot{g}(t)dx \tag{e}$$

此运动方程与第5.4节中方程（u）比较说明按相对坐标的等效分布荷载为 $-m\ddot{g}(t)$。这样列出公式与前面诸章对于地面加速度是给定的〔例如见第 1.6 节中方程（l）〕离散参数系统所导出的相类似。

地信网论坛 BBS.3500L.COM

为了方便，我们用单位长度上的质量m除方程（e）得到

$$\ddot{u}^{*}dx-a^{2}(u^{*})''dx=-\ddot{g}(t)dx \qquad (f)$$

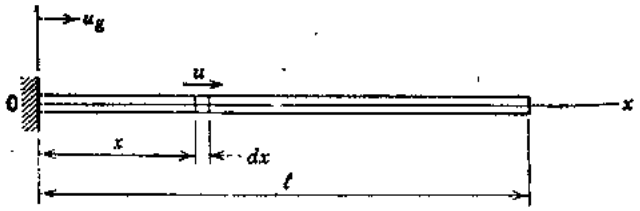


图 5.6

将此方程与第5.4节中的方程（v）比较，我们看到其$q(x,t)$为$-\ddot{g}(t)$所代替，于是方程（5.26）成为

$$\ddot{\phi}_i+p_i^2\phi_i=-\ddot{g}(t)\int_0^l X_i dx \qquad (i=1,2,3,\cdots,\infty) \quad (5.45)$$

式中右边项为第i个等效正规型荷载。第i振型的反应借杜哈梅积分计算：

$$\phi_i=-\frac{1}{p_i}\int_0^l X_i dx\int_0^t \ddot{g}(t')\sin p_i(t-t')dt' \qquad (5.46)$$

按照方程（5.17），将所有正规型反应叠加起来，我们得到

$$u^{*}=-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{X_i}{p_i}\int_0^l X_i dx\int_0^t \ddot{g}(t')\sin p_i(t-t')dt' \qquad (5.47)$$

它代表杆上任一点相对于地面运动的振动运动。其全解借相对（振动）运动与地面运动相加来确定：

$$u=u_g+u^{*}=g(t)+u^{*} \qquad (5.48)$$

这样，借将$u_g=g(t)$的二次导数(对时间的)用于方程(5.47)和该函数本身用于方程(5.48)，我们可以计算杆对地面纵向刚体平动的反应。方程（5.48）中的函数$u_g=g(t)$可以表示无质量杆（和地面）的刚体运动，相对运动u^{*}说明是由于整个杆长上所分布的惯性力产生的。

按类似于上面对刚体地面运动推导的方式，我们将列出一杆对两端约束独立平动的纵向反应。为此目的，让我们考虑图5.7和下面诸函数：

$$u_{g1}=g_1(t) \qquad u_{g2}=g_2(t) \qquad (g)$$

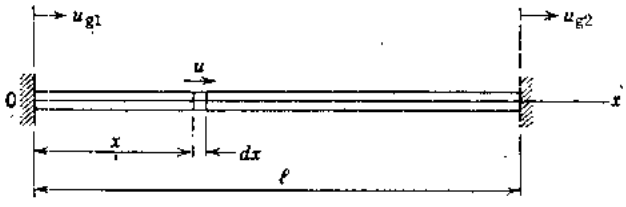


图 5.7

它们分别代表左端和右端的独立平动。虽然这些平动可能很大，但是在任一时间t处它们的差假设是很小的。

当分析一杆对诸独立支承运动的纵向反应时，考虑绝对位移u为下面之和是有利的：

$$u=u_{st}+u^{*} \qquad (h)$$

地信网论坛 BBS.3500I.COM

此式中，符号$u_{s,t}$表示该无质量杆（具有两约束端）上任一点由于所给诸支承运动引起的位移。这种函数借静力分析来确定，对于一棱柱形杆，它取下面形式：

$$u_{s,t}=\frac{l-x}{l}g_1(t)+\frac{x}{l}g_2(t)=(u_{s,t})_1+(u_{s,t})_2 \tag{5.49}$$

位移的这部分表示无质量杆的柔体运动。方程（h）中的符号u^*现在代表杆上任一点相对于$u_{s,t}$的位移。这样，相对运动u^*将仍与杆的整个长度上分布的惯性力联系起来。

类似地，杆上任一点的加速度$\ddot{u}$可以写成

$$\ddot{u}=\ddot{u}_{s,t}+\ddot{u}^* \tag{i}$$

它是借方程（h）对时间微分两次来得到。现在图5.7中杆的典型单元的运动方程将以方程（h）和（i）中诸定义表达写出如下：

$$m(\ddot{u}_{s,t}+\ddot{u}^*)dx-r(u_{s,t}+u^*)''dx=0 \tag{j}$$

对于棱柱形杆，$u''_{s,t}$项变为零，方程（j）可以重新写为

$$m\ddot{u}^*dx-r(u^*)''dx=-m\ddot{u}_{s,t}(x,t)dx \tag{k}$$

它可与刚体地面运动方程（e）相比。我们从方程（k）看到在现在考虑的情况下，按相对坐标的等效分布荷载为$-m\ddot{u}_{s,t}(x,t)$。用单位长度上的质量m除方程（k），我们得到

$$\ddot{u}^*dx-a^2(u^*)''dx=-\ddot{u}_{s,t}(x,t)dx \tag{l}$$

在此情况下，$-\ddot{u}_{s,t}(x,t)$项代替$q(x,t)$。所以，按正规坐标的节i运动方程成为

$$\ddot{\phi}_i+p_i^2\phi_i=-\int_0^l X_i\ddot{u}_{s,t}(x,t)dx \qquad (i=1,2,3,\cdots\infty) \tag{5.50}$$

其中第i等效正规型荷载借右边式子给出。应用杜哈梅积分，我们确定第i振型反应为

$$\phi_i=-\frac{1}{p_i}\int_0^t X_i\int_0^t\ddot{u}_{s,t}(x,t')\sin p_i(t-t')dt'dx \tag{5.51}$$

所有振型迭加得到

$$u^*=-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{X_i}{p_i}\int_0^t X_i\int_0^t\ddot{u}_{s,t}(x,t')\sin p_i(t-t')dt'dx \tag{5.52}$$

此式代表杆上任一点相对于无质量杆运动$u_{s,t}$的反应。为了得到总反应，我们将两种运动相加如下：

$$u=u_{s,t}+u^*=\frac{l-x}{l}g_1(t)+\frac{x}{l}g_2(t)+u^* \tag{5.53}$$

总起来说，一杆对诸端点约束的独立平动的纵向反应可借相对运动u^*（也可称为振动运动）与无质量杆的柔体运动$u_{s,t}$加起来计算。虽然位移$u_{s,t}$用静力分析确定，但是它为x和t二者的函数。位移u^*代表总反应u与位移$u_{s,t}$的偏差，并说明杆是非零质量的缘故。然而，方程（k）中的等效分布荷载$-m\ddot{u}_{s,t}$既不与按原来坐标的分布惯性力$-m\ddot{u}$相同也不与按相对坐标的分布惯性力$-m\ddot{u}^*$相同。这一项可以看作仅由于坐标从绝对运动改变为相对运动所施加的荷载来处理。对相对坐标的本征值和本征函数与对原来坐标的（具有两固端杆）相同，因为方程（k）中系数m和r具有与前面相同的值。

如果杆两端处的函数$g_1(t)$和$g_2(t)$相等，因而

地信网论坛 BBS.3500I.COM

$$g_1(t)=g_2(t)=g(t)$$

那么方程（5.49）得出$u_{st}=u_g=g(t)$。在此情况下，柔体运动简化为刚体运动（具有两约束端），方程（5.50）至（5.53）成为与方程（5.45）至（5.48）相同。

例题1 假定图5.6中的支承按抛物线函数$u_g=g(t)=u_1(t/t_1)^2$平动，这里u_1为时间t_1处的位移。假设该杆初始处于静止，试确定对此地面运动的反应。

解：从此杆的前面分析，我们得到

$$p_i=\frac{i\pi a}{2l}\qquad X_i=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{p_i x}{a}\qquad (i=1,3,5\cdots\infty)$$

式中X_i已归一化满足第5.4节中的方程（5.22）。刚体运动u_g对时间微分两次给出

$$\ddot{u}_g=\ddot{g}(t)=\frac{2u}{t_1^2}$$

于是方程（5.47）得出相对运动

$$u^*=-\frac{4u_1}{lt_1^2}\sum_{i=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{p_i}\sin\frac{p_i x}{a}\int_0^t\sin\frac{p_i x}{a}dx\int_0^t\sin p_i(t-t')dt'$$

$$=-\frac{8u_1}{\pi t_1^2}\sum_{i=1,3,5\cdots}^{\infty}\frac{1}{ip_i^2}\sin\frac{p_i x}{a}(1-\cos p_i t)$$

$$=-\frac{32l^2u_1}{\pi^3a^2t_1^2}\sum_{i=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{i^3}\sin\frac{i\pi x}{2l}\left(1-\cos\frac{i\pi at}{2l}\right)\qquad (m)$$

从方程（5.48），总反应为

$$u=\frac{u_1}{t_1^2}\left[t^2-\frac{32l^2}{\pi^3a^2}\sum_{i=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{i^3}\sin\frac{i\pi x}{2l}\left(1-\cos\frac{i\pi at}{2l}\right)\right]\qquad (n)$$

例题2 考虑图5.7中的杆，让我们假设诸支承按下列简谐运动进行振动：

$$u_{g1}=g_1(t)=u_1\sin\omega_1 t\qquad u_{g2}=g_2(t)=u_2\sin\omega_2 t$$

这些式子中，符号u_1和u_2分别代表左边支承和右边支承振动的振幅，ω_1和ω_2均为外加角频率。试确定杆上任何一点由于这些独立的支承运动引起的稳态强迫振动。

解：由于图5.7中杆的两端均约束着，所以对此情况的固有频率和所用的归一化型的形状为

$$p_i=\frac{i\pi a}{l}\qquad X_i=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{p_i x}{a}\qquad (i=1,2,3,\cdots,\infty)$$

从方程（5.49），我们看到无质量杆的柔体反应借下式给出：

$$u_{st}=\frac{l-x}{l}u_1\sin\omega_1 t+\frac{x}{l}u_2\sin\omega_2 t\qquad (o)$$

此式对时间的二次导数为

$$\ddot{u}_{st}=-\frac{l-x}{l}\omega_1^2u_1\sin\omega_1 t-\frac{x}{l}\omega_2^2u_2\sin\omega_2 t\qquad (p)$$

杆上任一点相对于位移u_{st}的稳态反应u^*已求出〔方程（5.52）对时间积分后〕如下：

$$u^*=\frac{2}{l}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{p_i^2}\sin\frac{i\pi x}{l}\left(\omega_1^2u_1\beta_{i1}\sin\omega_1 t\int_0^t\frac{l-x}{l}\sin\frac{i\pi x}{l}dx\right.$$

地信网论坛 BBS.3500L.COM

$$+\omega_2^2 u_2\beta_{i2}\sin\omega_2 t\int_0^t \frac{x}{l}\sin\frac{i\pi x}{l}dx\Big)$$

$$=\frac{2l^2}{\pi^3 a^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^3}\sin\frac{i\pi x}{l}\Big[\omega_1^2 u_1\beta_{i1}\sin\omega_1 t$$

$$-(-1)^i\omega_2^2 u_2\beta_{i2}\sin\omega_2 t\Big] \qquad (q)$$

在此结果中，放大因子定义为

$$\beta_{i1}=\frac{1}{1-\omega_1^2/p_i^2}\qquad \beta_{i2}=\frac{1}{1-\omega_2^2/p_i^2}$$

将方程（o）和（q）代入方程（5.53），我们求出总反应为

$$u=\Big[\frac{l-x}{l}+\frac{2l^2\omega_1^2}{\pi^3 a^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\beta_{i1}}{i^3}\sin\frac{i\pi x}{l}\Big]u_1\sin\omega_1 t$$

$$+\Big[\frac{x}{l}-\frac{2l^2\omega_2^2}{\pi^3 a^2}\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i\frac{\beta_{i2}}{i^3}\sin\frac{i\pi x}{l}\Big]u_2\sin\omega_2 t \qquad (r)$$

习 题 组 5.6

5.6—1 有一根 $x=0$ 端处为自由、$x=l$ 端处为固定的杆，承受谐和支承运动 $u_g=g(t)=d\sin\omega t$，式中 d 为振动的振幅。试确定该杆由于此运动所产生的稳态强迫振动。

答：$u=\Big[1+\frac{16l^2\omega^2}{\pi^3 a^2}\sum_{i=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{\beta_i}{i^3}(-1)^{(i-1)/2}\cos\frac{i\pi x}{2l}\Big]d\sin\omega t$

5.6—2 试求出一根固端杆，由于刚体支承运动 $u_g=g(t)=u_1(t/t_1)^2$ 引起的纵向反应。

答：$u=\frac{u_1}{t_1^2}\Big[t^2-\frac{8l^2}{\pi^3 a^2}\sum_{i=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{i^3}\sin\frac{i\pi x}{l}\Big(1-\cos\frac{i\pi a t}{l}\cdots\Big)\Big]$

5.6—3 有一根固端杆，在 $x=0$ 的端点处受到支承运动 $u_{g1}=g_1(t)=u_1(t/t_1)^2$，而 $x=l$ 的端点处保持不动。试确定由于这些条件引起该杆的纵向反应。

答：$u=\frac{u_1}{t_1^2}\Big[\frac{(l-x)}{l}t^2-\frac{4l^2}{\pi^3 a^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^3}\sin\frac{i\pi x}{l}\Big(1-\cos\frac{i\pi a t}{l}\cdots\Big)\Big]$

5.6—4 假定习题5.6—3中固端杆的 $x=l$ 端也运动，并且假定此运动为 $u_{g2}=g_2(t)=u_2(t/t_2)^3$。试求出该杆与习题5.6—3相加的附加反应。

答：$u=\frac{u_2}{t_2^3}\Big[\frac{x}{l}t^3+\frac{12l^2}{\pi^3 a^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i^3}\sin\frac{i\pi x}{l}\Big(t-\frac{l}{i\pi a}\sin\frac{i\pi a t}{l}\Big)\Big]$

5.7 圆轴的扭转振动

图5.8a 表示一根圆形横截面直轴，我们对它进行扭转振动分析。为此目的，令符号 θ 表示位于距左端 x 距离处任一横截面的转动（绕该轴的轴线）。当轴按扭转方式振动时，典型段上的弹性扭矩和惯性扭矩（见图5.8b）可以按达朗伯定理相加起来：

地信网论坛 BBS.3500U.COM

$$T+\frac{\partial T}{\partial x}dx-T-\rho I_p\,dx\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=0 \qquad (a)$$

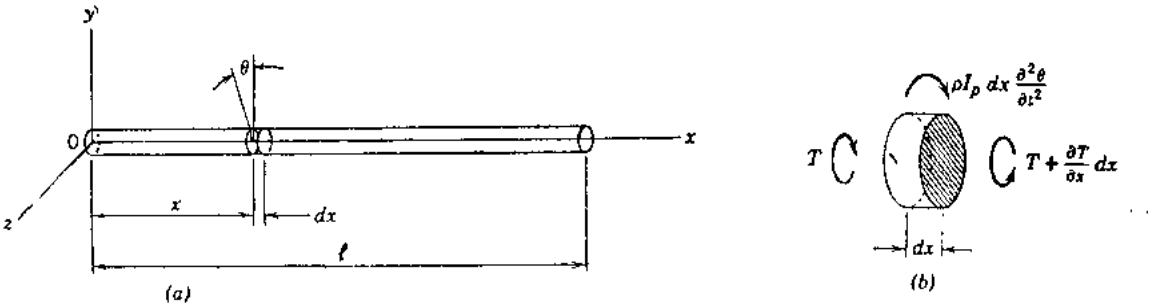


图 5.8

在此微分方程中，x 处横截面上的内扭矩用符号 T 表示，其正方向示于图5.8 b 中。此外，横截面的极惯性矩以 I_p 表示。用此符号，该段的质量惯性矩为 $\rho I_p dx$，其转动加速度为 $\partial^2\theta/\partial t^2$。从初等扭转理论，我们得到下列关系

$$T=GI_p\frac{\partial\theta}{\partial x} \qquad (b)$$

式中 G 为剪切弹性模量。将（b）式代入方程（a）并重新排列诸项，我们得到

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}=\frac{1}{b^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} \qquad (5.54)$$

此式具有一维波动方程的形式，其扭转波的传播速度为

$$b=\sqrt{\frac{G}{\rho}} \qquad (5.55)$$

方程（5.54）和（5.55）与第5.2节中方程（5.1）和（5.2）的数学形式相同，只是符号 u、a 和 E 分别为 θ、b 和 G 所代替。所以，所有前面对于棱柱形杆纵向振动之推导可以仅借改变符号用于圆形轴的扭转振动。例如，在具有两自由端的轴的情况下，扭转振动固有型的频率和正规函数为

$$p_i=\frac{i\pi b}{l}\qquad X_i=C_i\cos\frac{p_i x}{b}\qquad (i=1,2,3,\cdots,\infty)\quad (c)$$

自由振动的解〔见方程（5.6）〕具有下列形式

$$\theta=\sum_{i=1}^{\infty}\cos\frac{i\pi x}{l}\left(A_i\cos\frac{i\pi bt}{l}+B_i\sin\frac{i\pi bt}{l}\right) \qquad (5.56)$$

类似地，一端固定或两端固定的轴的自由扭转振动的解仍可以从第 5.2 节中前面已推得的公式写出，其正规型解的一般形式借第5.4节中方程（5.25）给出。

为了分析轴承受分布扭矩的强迫转动反应，我们可以应用第5.4节中的方程（5.28）。在此情况下，符号 $q(x,t)$ 代表单位长度上的分布扭矩除以单位长度上质量惯性矩 ρI_p。类似地，方程（5.29）可以改写用于在 $x=x_1$ 点处作用集中扭矩 $T_1(t)$ 的情况，只要该式中荷载项取为 $q_1(t)=T_1(t)/\rho I_p$。

前节中，我们分析了棱柱形杆对纵向诸支承平动的反应。在那里所提出的方法可以容易地用于承受诸约束绕其自身轴线旋转的轴。如果诸约束如一刚体转动，那么可以应用第 5.6 节中的方程（5.47）和（5.48），但是位移函数成为 $\theta_g=g(t)$。反之，如果一根在两端处约

地信网论坛 BBS.3500U.COM

束着的轴承受两端独立转动，那么可以用方程（5.52）和（5.53）。在此情况下，左端和右端的支承转动分别定为函数$\theta_{g1}=g_1(t)$和$\theta_{g2}=g_2(t)$。

现在我们将考虑一根两端带有盘的轴，如图 5.9 中所示。该轴转动自由，两盘对 x 轴线的质量惯性矩表示为I_1（在 $x=o$ 处）和I_2（在 $x=l$ 处）。这种装置由于在轴的分布质量略去不计的情况下第 1.2 节中作为仅具有一个振型的系统已研究过了。当这种质量考虑进去时，该系统具有无穷多个固有振型，而且可以得到较精确的结果。将以第 5.5 节中已叙述过的对于端点带有一个质量或一个弹簧的棱柱形杆的方法用于两端带有盘的轴。

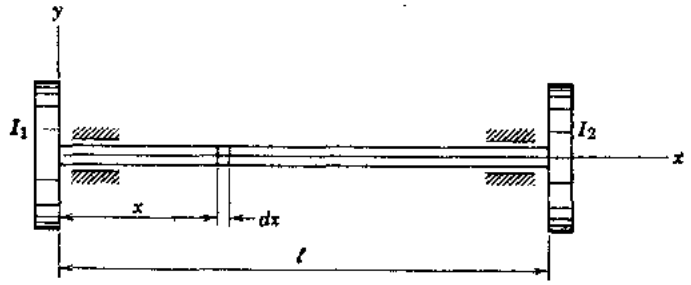


图 5.9

当图 5.9 中的轴经历转动振动时，诸盘对轴两端所作用的惯性扭矩构成边界条件如下：

$$GI_p(\theta')_{x=0}=I_1(\ddot{\theta})_{x=0} \qquad GI_p(\theta')_{x=l}=-I_2(\ddot{\theta})_{x=l} \tag{d}$$

如前面那样，我们对第 i 固有振型假设其谐和运动为：

$$\theta_i=X_i(A_i\cos p_i t+B_i\sin p_i t) \tag{e}$$

将此式代入方程（d），我们得到

$$GI_pX'_{i0}=-I_1p_i^2X_{i0} \qquad GI_pX'_{il}=I_2p_i^2X_{il} \tag{f}$$

式中脚标 0 和 l 分别表示$x=0$和$x=l$的位置。在此情况下，正规函数可以写为

$$X_i=C_i\cos\frac{p_ix}{b}+D_i\sin\frac{p_ix}{b} \tag{g}$$

将方程（g）代入方程（f），产生

$$GI_p\frac{p_i}{b}D_i=-I_1p_i^2C_i \tag{h}$$

和

$$GI_p\frac{p_i}{b}\left(-C_i\sin\frac{p_il}{b}+D_i\cos\frac{p_il}{b}\right)=I_2p_i^2\left(C_i\cos\frac{p_il}{b}+D_i\sin\frac{p_il}{b}\right) \tag{i}$$

方程（h）和（i）构成一对包含未知常数C_i和D_i的齐次代数方程。从两方程消去这些常数，我们可以得到频率方程：

$$-GI_p\frac{p_i}{b}\left(\sin\frac{p_il}{b}+\frac{I_1bp_i}{GI_p}\cos\frac{p_il}{b}\right)=I_2p_i^2\left(\cos\frac{p_il}{b}-\frac{I_1bp_i}{GI_p}\sin\frac{p_il}{b}\right) \tag{j}$$

由于p_i作为一个公因子出现于此式的两边，因而可以看出$p_0=0$值代表该系统刚体转动的频率。为了便于确定诸振型的频率，我们令

$$\xi_i=\frac{p_il}{b} \qquad \eta_1=\frac{\rho I_pl}{I_1}=\frac{I_0}{I_1} \qquad \eta_2=\frac{I_0}{I_2} \tag{k}$$

式中$I_0=\rho I_pl$为轴绕其自身轴线的质量惯性矩。应用符号（k），我们以较简单的形式重新写出频率方程（j）：

地信网论坛 BBS.35001.COM

$$-\left(\tan\xi_i+\frac{\xi_i}{\eta_1}\right)=\frac{\xi_i}{\eta_2}\left(1-\frac{\xi_i}{\eta_1}\tan\xi_i\right)$$

或

$$\left(\frac{\xi_i^2}{\eta_1\eta_2}-1\right)\tan\xi_i=\left(\frac{1}{\eta_1}+\frac{1}{\eta_2}\right)\xi_i \tag{5.57}$$

如果我们令ξ_1、ξ_2、ξ_3…等代表此超越方程的诸非零正根（按上升次序），那么从方程（g）和（h）可以写出相应正规函数为

$$X_i=C_i\left(\cos\frac{\xi_i x}{l}-\frac{\xi_i}{\eta_1}\sin\frac{\xi_i x}{l}\right) \tag{5.58}$$

假定诸盘的质量惯性矩I_1和I_2与轴的质量惯性矩相比很小。在此情况下，参数η_1和η_2将很大，从方程（5.57）所得的相邻根为π、2π、3π…等，方程（5.58）中诸正规函数成为具有两自由端的轴的正规函数〔见方程（c）〕。反之，如果I_1和I_2的值与I_0相比很大，那么比值η_1和η_2将很小，方程（5.57）左边因子中为1的值与$\xi_i^2/\eta_1\eta_2$项相比可以略去不计。在此情况下，频率方程成为

$$\xi_i\tan\xi_i=\eta_1+\eta_2 \tag{l}$$

此方程与第5.5节中关于纵向振动的方程（5.30）形式相同。对于第一扭转振型，方程（l）中的所有项将很小，该关系式可取$\tan\xi_1\approx\xi_1$来简化。于是我们得到

$$\xi_1^2\approx\eta_1+\eta_2=\frac{I_0(I_1+I_2)}{I_1I_2}$$

因而

$$p_1=\frac{b\xi_1}{l}\approx\frac{b}{l}\sqrt{\frac{I_0(I_1+I_2)}{I_1I_2}}=\sqrt{\frac{GI_p(I_1+I_2)}{lI_1I_2}}$$

基本周期成为

$$\tau_1=2\pi\sqrt{\frac{lI_1I_2}{GI_p(I_1+I_2)}}$$

此结果与第1.2节中略去轴的质量且仅为一个振型的系统进行分析所得的方程(1.11)一致。

借第5.5节中已用过的方法，我们可以提出两端带有盘的轴的下列正交性关系：

$$\rho I_p\int_0^l X_iX_j\,dx+I_1X_{i0}X_{j0}+I_2X_{il}X_{jl}=0\quad(i\neq j) \tag{5.59}$$

$$GI_p\int_0^l X_i'X_j'\,dx=0\quad(i\neq j) \tag{5.60}$$

$$GI_p\left(\int_0^l X_i''X_j\,dx+X_{i0}'X_{j0}-X_{il}'X_{jl}\right)=0\quad(i\neq j) \tag{5.61}$$

此外，归一化条件选定（对$i=j$）为

$$\rho I_p\int_0^l X_i^2\,dx+I_1X_{i0}^2+I_2X_{il}^2=\rho I_p \tag{5.62}$$

由此得出

$$GI_p\left(\int_0^l X_i''X_i\,dx+X_{i0}'X_{i0}-X_{il}'X_{il}\right)=-GI_p\int_0^l(X_i')^2\,dx=-\rho I_pp_i^2 \tag{5.63}$$

方程（5.59）至（5.63）类似于方程（5.31）至（5.35），但是$m=\rho A$被ρI_p代替，$r=EA$

地信网论坛 BBS.3500L.COM

被GI_p代替。此外，与$x=0$位置处的盘有关的诸项连同与$x=l$位置处的盘有关的诸项一并出现于现在诸式中。

让我们考虑图 5.9 中的系统对时间$t=0$处初始条件$\theta_0=f_1(x)$和$\dot{\theta}_0=f_2(x)$的旋转反应。为此目的，我们必须求算$x=0$和$x=l$处诸盘的初始位移$f_1(0)$、$f_1(l)$和初始速度$f_2(0)$和$f_2(l)$。于是该轴和诸盘的初始条件用时间和位移函数表达展开如下：

$$\sum_{i=1}^{\infty}\phi_{0i}X_i=f_1(x)\qquad\sum_{i=1}^{\infty}\dot{\phi}_{0i}X_i=f_2(x)\tag{m}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\phi_{0i}X_{i0}=f_1(0)\qquad\sum_{i=1}^{\infty}\dot{\phi}_{0i}X_{i0}=f_2(0)\tag{n}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\phi_{0i}X_{il}=f_1(l)\qquad\sum_{i=1}^{\infty}\dot{\phi}_{0i}X_{il}=f_2(l)\tag{o}$$

在组合这些式子中，我们用$\rho I_p X_j$乘方程（m），并对轴的整个长度积分。然后，分别用I_1X_{j0}和I_2X_{jl}去乘方程（n）和（o），并与从方程（m）所得的结果加起来。借这种方法，我们得到

$$\sum_{i=1}^{\infty}\phi_{0i}\left(\rho I_p\int_0^l X_iX_j\,dx+I_1X_{i0}X_{j0}+I_2X_{il}X_{jl}\right)$$

$$=\rho I_p\int_0^l f_1(x)X_j\,dx+I_1f_1(0)X_{j0}+I_2f_1(l)X_{jl}\tag{p}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\dot{\phi}_{0i}\left(\rho I_p\int_0^l X_iX_j\,dx+I_1X_{i0}X_{j0}+I_2X_{il}X_{jl}\right)$$

$$=\rho I_p\int_0^l f_2(x)X_j\,dx+I_1f_2(0)X_{j0}+I_2f_2(l)X_{jl}\tag{q}$$

从方程（5.59）和（5.62）所给的正交性和归一化关系，我们看到（对于$i=j$）方程（p）和（q）得出按正规坐标的初始坐标和初始速度：

$$\phi_{0i}=\int_0^l f_1(x)X_i\,dx+\frac{l}{\eta_1}f_1(0)X_{i0}+\frac{l}{\eta_2}f_1(l)X_{il}\tag{5.64}$$

$$\dot{\phi}_{0i}=\int_0^l f_2(x)X_i\,dx+\frac{l}{\eta_1}f_2(0)X_{i0}+\frac{l}{\eta_2}f_2(l)X_{il}\tag{5.65}$$

这些式子类似于第 5.5 节中的方程（5.36）和（5.37），但是两盘的诸项出现于现在诸公式中。用这些ϕ_{0i}和$\dot{\phi}_{0i}$的定义，我们可以应用第 5.4 节中的方程（5.25）确定所考虑中的系统的反应。

如果本征函数归一化满足方程（5.62），那么图 5.9 中的系统对所作用的扭矩的反应可以用第 5.4 节中的方程（5.28）和（5.29）来计算。此反应可以与刚体运动加起来，刚体运动从下列方程来确定：

$$J\ddot{\phi}_0=R\tag{r}$$

此式中，符号$J=I_0+I_1+I_2$代表系统的总质量惯性矩，$\ddot{\phi}_0$为刚体型的加速度，R为作用于

地信网论坛 BBS.3500L.COM

轴上和诸盘上的总扭矩。

例题 1 假定图5.8*a*中未约束的轴承受施加于左端的扭矩 $R=R_1t/t_1$（式中R_1为时间t_1处的扭矩）。假设该轴初始时处于静止，试确定它对此斜坡函数的反应。

解：将$J=J_0=\rho I_p l$和$R=R_1t/t_1$代入方程（*r*）并对*t*积分两次，我们得到刚体转动

$$\phi_0=\frac{R_1t^3}{6\rho I_p l t_1}=\frac{R_1t^3}{6I_0t_1} \tag{s}$$

与此刚体运动相加的振动反应从方程（5.29）求出为：

$$\theta=\frac{2R_1}{\rho I_p l t_1}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{p_i}\cos\frac{p_i x}{b}\int_0^t t'\sin p_i(t-t')dt'$$

$$=\frac{2R_1}{I_0t_1}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{p_i^2}\cos\frac{p_i x}{b}\left(t-\frac{1}{p_i}\sin p_i t\right)$$

$$=\frac{2l^2R_1}{\pi^2b^2I_0t_1}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}\cos\frac{i\pi x}{l}\left(t-\frac{l}{i\pi b}\sin\frac{i\pi bt}{l}\right) \tag{t}$$

轴的总的运动由方程（*s*）和方程（*t*）之和组成。例如，扭矩所作用杆端处（在$x=0$处）的总位移为

$$(\theta)_{x=0}=\frac{R_1}{I_0t_1}\left[\frac{t^3}{6}+\frac{2l^2}{\pi^2b^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}\left(t-\frac{l}{i\pi b}\sin\frac{i\pi bt}{l}\right)\right] \tag{u}$$

令$t=t_1=l/b$，我们求出

$$(\theta)_{x=0}=\frac{R_1l^2}{I_0b^2}\left[\frac{1}{6}+\frac{2}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots\right)\right]=\frac{R_1l}{2GI_p} \tag{v}$$

例题 2 假设图 5.9 中系统上三部分的质量惯性矩均相等（$I_0=I_1=I_2$），试确定对下列初始条件反应的表达式：

$$\theta_0=f_1(x)=\frac{\alpha_0}{l}(2x-l)\qquad \dot{\theta}_0=f_2(x)=0 \tag{w}$$

初始位移函数θ_0是因作用于诸盘相等而相反的扭矩所引起的（引起相对转动$2\alpha_0$），这些扭矩在瞬间$t=0$时放松。

解：对此情况$\eta_1=\eta_2=1$，超越频率方程（5.57）简化为

$$(\xi_i^2-1)\tan\xi_i=2\xi_i \tag{x}$$

在此情况下，函数X_i要归一化〔见方程（5.62）〕以使

$$\int_0^l X_i^2dx+X_{i0}^2+X_{il}^2=1 \tag{y}$$

对于所给的初始条件（*w*），方程（5.64）和（5.65）成为

$$\phi_{0i}=\frac{\alpha_0}{l}\left[\int_0^l(2x-l)X_i dx-l^2(X_{i0}-X_{il})\right]$$

和

$$\dot{\phi}_{0i}=0$$

这样，自由振动反应的表达式〔见方程（5.25）〕可以写为：

$$\theta=\frac{\alpha_0}{l}\sum_{i=1}^{\infty}X_i\left[\int_0^l(2x-l)X_i dx-l^2(X_{i0}-X_{il})\right]\cos\left(\frac{\xi_i bt}{l}\right) \tag{z}$$

地信网论坛 BBS.3500L.COM

5.8 张拉着的钢絲的横向振动

图5.10 a 中表示运动方程具有一维波动方程形式的另一种弹性系统，它由一根紧紧张拉着可以自由横向振动的钢丝（无弯曲刚度）组成。假设该钢丝中的拉力 S 当钢丝在 x-y 平面内微小振动时保持常数。我们用符号 y 表示钢丝上距左端 x 距离处任何一点的横向位移。图5.10 b 表示长度为 dx 的典型段的自由体图式，其中顺 y 方向的力是最主要的。在自由振动过程中，惯性力为该分段两端点处拉力顺 y 分量之差来抵抗。对于微小斜度，此动力平衡条件可以写成

$$S\left(\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,dx\right)-S\frac{\partial y}{\partial x}-m\,dx\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0 \qquad (a)$$

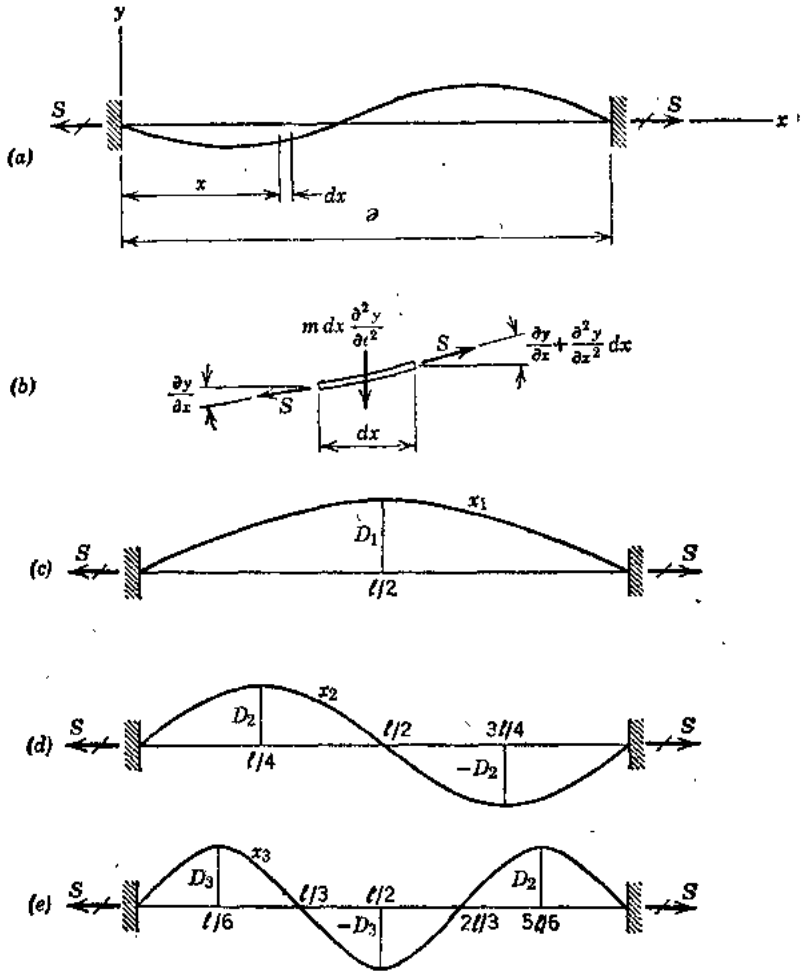


图 5.10

式中 m 为单位长度上钢丝的质量。因而，此系统的运动微分方程为

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad (5.66)$$

其中

$$c=\sqrt{\frac{S}{m}} \qquad (5.67)$$

地信网论坛 BBS.3500I.COM

表示横向波的纵向速度。

可以看出，方程（5.66）和（5.67）与第5.2节中方程（5.1）和（5.2）具有相同的数学形式，只是符号u、a、E和ρ分别被y、c、S和m所代替。所以，前面提出杆和轴的纵向振动和扭转振动公式中的许多公式借简单改变符号可以用于张拉着的钢丝的侧向振动。然而，在此情况下，诸边界条件多少受到保持钢丝中拉力为S的必要性的限制。最简单的边界条件示于图5.10a中，这里钢丝的两端都是固定的。对此情况，诸条件为

$$(y)_{x=0}=0 \qquad (y)_{x=l}=0 \tag{b}$$

诸频率和正规函数成为

$$p_i=\frac{i\pi c}{l} \qquad X_i=D_i\sin\frac{p_i x}{c} \quad (i=1,2,3,\cdots,\infty) \tag{c}$$

图5.10c、d和e分别说明1、2、3型的正规函数。当这些函数按方程（5.22）归一化时〔见第5.4节〕，我们得到$D_i=\sqrt{2/l}$。

让我们代表钢丝上任何一点的初始横向位移（在时间$t=0$处）为$y_0=f_1(x)$和初始速度为$\dot{y}_0=f_2(x)$。从第5.4节中方程（5.23）和（5.24），我们看到按正规坐标的诸初始条件为

$$\phi_{0i}=\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l f_1(x)\sin\frac{i\pi x}{l}dx \qquad \dot{\phi}_{0i}=\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l f_2(x)\sin\frac{i\pi x}{l}dx \tag{d}$$

方程（5.25）给出对这些条件的反应为

$$y=\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{i=1}^{\infty}\sin\frac{i\pi x}{l}\left(\phi_{0i}\cos\frac{i\pi ct}{l}+\frac{\dot{\phi}_{0i}}{p_i}\sin\frac{i\pi ct}{l}\right) \tag{5.68}$$

此外，对一分布横向力$Q(x,\ t)$的反应从方程（5.28）求得为

$$y=\frac{2}{l}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{p_i}\sin\frac{i\pi x}{l}\int_0^l\sin\frac{i\pi x}{l}\int_0^t q(x,\ t')\sin p_i(t-t')dt'dx \tag{5.69}$$

其中$q(x,\ t)=Q(x,\ t)/m$。如果横向荷载$P_1(t)$集中于x_1点处，那么方程（5.29）所给的反应成为

$$y=\frac{2}{l}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{p_i}\sin\frac{i\pi x}{l}\sin\frac{i\pi x_1}{l}\int_0^t q_1(t')\sin p_i(t-t')dt' \tag{5.70}$$

式中$q_1(t)=P_1(t)/m$。

第5.6节中我们讨论了棱柱形杆受到两端约束独立纵向平动的情况。对该目的所导出的诸公式将以一种直接方式用于张拉着的钢丝端点横向平动（顺y方向）的情况。图5.11a和5.11b表示两支承的独立横向平动，左端和右端的位移分别定为

$$y_{s1}=g_1(t) \qquad y_{s2}=g_2(t) \tag{e}$$

由于这些位移，相应于无质量钢丝上任何一点的横向运动为

$$y_{st}=(y_{st})_1+(y_{st})_2=\frac{l-x}{l}g_1(t)+\frac{x}{l}g_2(t) \tag{5.71}$$

在此情况下，位移y_{st}（见图5.11c）为一刚体运动，由顺y方向的平动和绕垂直于x-y平面一轴线的微小转动组成。另外，图5.11a和5.11b中每一分量运动$(y_{st})_1$和$(y_{st})_2$具有这种相同特性。当$g_1(t)=g_2(t)=g(t)$时，其合成运动为纯平动，当$g_1(t)=-g_2(t)$时为绕中点的纯转动。这样，我们看到第5.6节中所引进的无质量系统柔体运动的概念与具有横向端

点位移的张拉着的钢丝情况下刚体运动的概念一致。

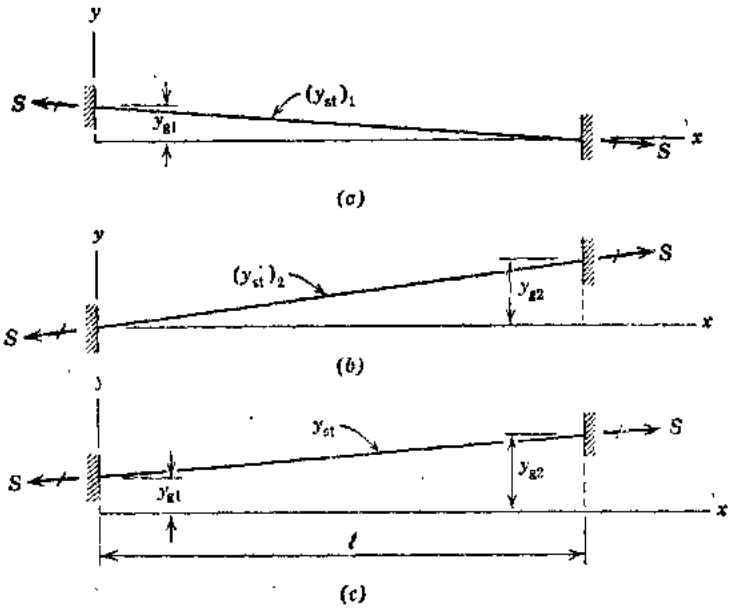


图 5.11

将方程（5.71）对时间的二次导数代入第 5.6 节中的方程（5.52），连同从方程（c）的归一化本征函数一起，给出该钢丝的振动反应：

$$y^*=-\frac{2}{l}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{p_i}\sin\frac{i\pi x}{l}\int_0^t\sin\frac{i\pi x}{l}\int_0^t\left[\frac{l-x}{l}\ddot{g}_1(t')+\frac{x}{l}\ddot{g}_2(t')\right]\sin p_i(t-t')\,dt'\,dx \tag{5.72}$$

为了得到总反应，我们将该振动运动与刚体运动相加如下：

$$y=y_{st}+y^*=\frac{l-x}{l}g_1(t)+\frac{x}{l}g_2(t)+y^* \tag{5.73}$$

上面的讨论是对两端具有刚性约束的张拉着的钢丝。现在我们将研究具有弹性横向约束的钢丝情况，如图5.12中所示。假设 $x=0$处和 $x=l$处弹簧的刚度常数k_1和k_2均为已知，还假设钢丝两端顺 y 方向移动自由。将早先用于一端处有一个质量或一个弹簧的棱柱形杆的方法（见第 5.5 节）用于两端处具有弹簧的钢丝。

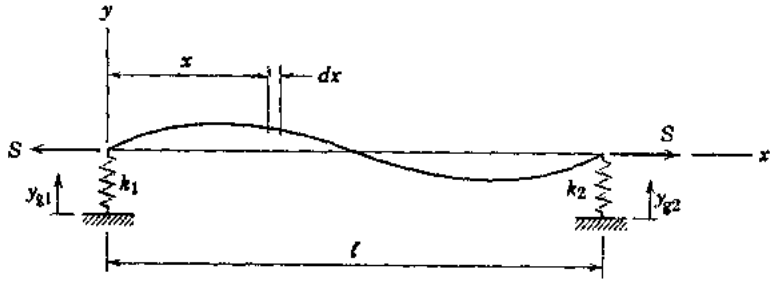


图 5.12

图5.12中钢丝上典型单元的运动方程〔见方程（a）〕可以写为：

$$m\ddot{y}\,dx-Sy^*\,dx=0 \tag{f}$$

钢丝每一端处，弹簧力必定与该钢丝中拉力 S 的 y 分量相平衡。所以，诸边界条件为

地信网论坛 BBS.3500L.COM

$$S(y')_{x=0}=k_1(y)_{x=0} \qquad S(y')_{x=l}=-k_2(y)_{x=l} \tag{g}$$

对第 i 固有振型我们照常假设为谐和运动

$$y_i=X_i(A_i\cos p_it+B_i\sin p_it) \tag{h}$$

将此式代入方程（g），得出

$$SX'_{i0}=k_1X_{i0} \qquad SX'_{il}=-k_2X_{il} \tag{i}$$

如前面那样写出正规函数，我们取

$$X_i=C_i\cos\frac{p_ix}{c}+D_i\sin\frac{p_ix}{c} \tag{j}$$

借方程（j）代入方程（i），我们得到

$$\frac{Sp_i}{c}D_i=k_1C_i \tag{k}$$

和

$$\frac{Sp_i}{c}\left(-C_i\sin\frac{p_il}{c}+D_i\cos\frac{p_il}{c}\right)=-k_2\left(C_i\cos\frac{p_il}{c}+D_i\sin\frac{p_il}{c}\right) \tag{l}$$

从方程（k）和（l）消去常数C_i和D_i，得出频率方程：

$$\frac{Sp_i}{c}\left(\sin\frac{p_il}{c}-\frac{k_1c}{Sp_i}\cos\frac{p_il}{c}\right)=k_2\left(\cos\frac{p_il}{c}+\frac{k_1c}{Sp_i}\sin\frac{p_il}{c}\right) \tag{m}$$

为了简化此式，我们令

$$\xi_i=\frac{p_il}{c} \qquad \zeta_{i1}=\frac{mlp_i^2}{k_1} \qquad \zeta_{i2}=\frac{mlp_i^2}{k_2} \tag{n}$$

重新写方程（m）为

$$\tan\xi_i-\frac{\xi_i}{\zeta_{i1}}=\frac{\xi_i}{\zeta_{i2}}\left(1+\frac{\xi_i}{\zeta_{i1}}\tan\xi_i\right)$$

或

$$\left(1-\frac{\xi_i^2}{\zeta_{i1}\zeta_{i2}}\right)\tan\xi_i=\left(\frac{1}{\zeta_{i1}}+\frac{1}{\zeta_{i2}}\right)\xi_i \tag{5.74}$$

此式为两端具有弹簧的钢丝的超越频率方程。在此情况下，从方程（j）和（k），正规函数可以写成

$$X_i=C_i\left(\cos\frac{\xi_ix}{l}+\frac{\xi_i}{\zeta_{i1}}\sin\frac{\xi_ix'}{l}\right) \tag{5.75}$$

如果k_1和k_2的值二者都很大，那么方程（m）趋近于

$$\sin\frac{p_il}{c}=0 \tag{o}$$

它为两端固定的钢丝的频率方程。在此情况下，方程（5.75）趋近于方程（c）的形式。反之，当k_1和k_2二者都很小时，方程（5.74）和（5.75）得出：

$$p_i=\frac{i\pi c}{l} \qquad X_i=C_i\cos\frac{p_ix}{c}\quad(i=1,2,3,\cdots,\infty) \tag{p}$$

它意味着无横向约束。最后，只有k_1很大而k_2很小，那么方程（m）趋近于

$$\cos\frac{p_il}{c}=0 \tag{q}$$

其频率和正规函数（从方程5.75）为

$$p_i=\frac{i\pi c}{2l} \qquad X_i=D_i\sin\frac{p_ix}{c}\quad(i=1,3,5,\cdots,\infty) \tag{r}$$

地信网论坛 BBS.3500L.COM

这些式子意味着钢丝的左端是固定的，而右端可以自由地平动。

借前面第 5.5 节中所用的方法，我们可以导出两端具有弹簧的张拉着的钢丝的下列正交性关系（对于 $i \neq j$）：

$$m\int_0^l X_i X_j dx = 0 \tag{5.76}$$

$$S\int_0^l X_i' X_j' dx + k_1 X_{i0} X_{j0} + k_2 X_{i1} X_{j1} = 0 \tag{5.77}$$

$$S\int_0^l X_i'' X_j dx + SX_{i0}' X_{j0} - k_1 X_{i0} X_{j0} - SX_{i1}' X_{j1} - k_2 X_{i1} X_{j1} = 0 \tag{5.78}$$

而且，归一化条件选为

$$m\int_0^l X_i^2 dx = m \quad (i=j) \tag{5.79}$$

由此得出

$$S\int_0^l X_i'' X_i dx + SX_{i0}' X_{i0} - k_1 X_{i0}^2 - SX_{i1}' X_{i1} - k_2 X_{i1}^2$$

$$= -S\int_0^l (X_i')^2 dx - k_1 X_{i0}^2 - k_2 X_{i1}^2 = -mp_i^2 \tag{5.80}$$

方程（5.76）至（5.80）类似于方程（5.39）至(5.43)，但是刚度$r=EA$被拉力S所代替。此外，除包括了右端弹簧的诸项外，左端弹簧的诸项也包括在内。

因为方程（5.79）与第 5.4 节中所用的归一化类型一致，所以在那里对初始条件的反应所导得的式子〔方程（5.23）、（5.24）和（5.25）〕也可以用于弹性地约束着的钢丝的情况。另外，此系统对所施加的横向力的反应可以用方程（5.28）和（5.29）来计算。还有，对独立的支承平动y_{g1}和y_{g2}的反应（见图5.12）可以从第 5.6 节中方程（5.52）和（5.53）来确定。这样，我们看到弹性约束影响钢丝的频率和振型形状，但是不影响动力反应求解中的后来诸步骤。

5.9 棱柱形梁的横向棱动

现在让我们考虑一根棱柱形梁在 x-y平面内的横向振动（见图5.13a），该平面假设为任一横截面的对称平面。如前节对张拉着的钢丝那样，我们用符号 y 代表梁上距左端距离 x 处一典型段的横向位移。但是钢丝的弯曲刚度EI假设是很小的，而梁却必须考虑。图5.13b表示一个长度为 dx 带有作用于它上面的内作用力和惯性作用力的分段自由体图。此图中，剪力V和弯矩M的方向遵循梁的正负号惯例*。当梁横向振动时，诸力顺 y 方向的动力平衡条件为

$$V - V - \frac{\partial V}{\partial x} dx - \rho A dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \tag{a}$$

* 见Timoshenko and Young, Elements of Strength of Materials, 5th ed., Van Nostrand, 1968, p.96。

地信网论坛 BBS.3500I.COM

力矩平衡条件给出

$$-V\,dx+\frac{\partial M}{\partial x}dx\approx 0 \qquad (b)$$

将方程（b）的V代入方程（a）产生

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}\,dx=-\rho A\,dx\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad (c)$$

从初等弯曲理论，我们得到下列关系式

$$M=EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad (d)$$

将此式用于方程（c）中，我们得到

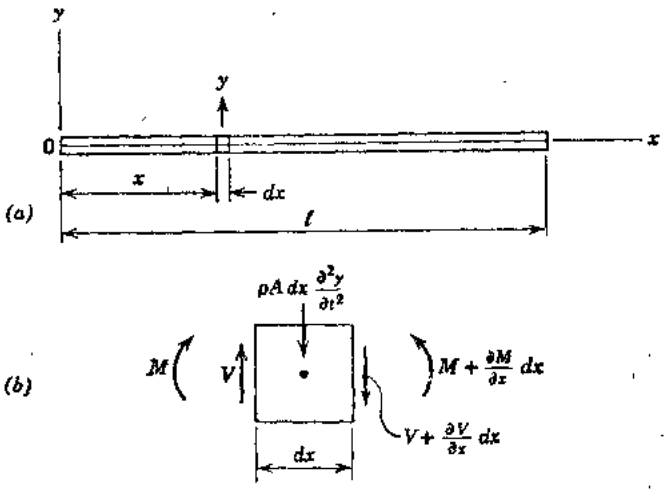


图 5.13

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)dx=-\rho A\,dx\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad (5.81)$$

它为梁横向自由振动的一般方程。在棱柱形梁的特定情况下，弯曲刚度EI不随x而变，我们得到：

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\,dx=-\rho A\,dx\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad (5.82)$$

此方程也可以写为

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}=-\frac{1}{a^2}\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad (5.83)$$

这里应用的符号a具有下列定义

$$a=\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \qquad (5.84)$$

当一梁按其诸固有振型之一作横向振动时，任一位置处的挠度随时间成如下的谐和变化：

$$y=X(A\cos pt+B\sin pt) \qquad (e)$$

式中为了表示方便将第i振型的脚标i省去了。把方程（e）代入方程（5.83）得到

$$\frac{d^4X}{dx^4}-\frac{p^2}{a^2}X=0 \qquad (f)$$

为了有助于求解这个四阶常微分方程，我们引进下列符号

$$\frac{p^2}{a^2}=k^4 \qquad (g)$$

重新写出方程（f）为

$$\frac{d^4X}{dx^4}-k^4X=0 \qquad (h)$$

为了满足方程（h），我们令$X=e^{nx}$，得到

$$e^{nx}(n^4-k^4)=0 \qquad (i)$$

这样，诸n值求出为$n_1=k$，$n_2=-k$，$n_3=jk$和$n_4=-jk$，式中$j=\sqrt{-1}$。方程（h）的解的一般形式成为

$$X=Ce^{kx}+De^{-kx}+Ee^{jkx}+Fe^{-jkx} \qquad (j)$$

地信网论坛 BBS.3S001.COM

它也可以用等效形式写出

$$X = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + C_3 \sin hkx + C_4 \cos hkx \tag{5.85}$$

此式代表一棱柱形梁横向振动的典型正规函数。

每一特定情况下，方程（5.85）中的常数C_1、C_2、C_3和C_4必须从梁诸端边界条件来确定（具有一个任意常数）。例如，在一简支端处，挠度和弯矩均等于零，我们得到

$$X = 0 \qquad X'' = 0 \tag{k}$$

在固定端处，挠度和斜度均等于零。在此情况下，诸条件为

$$X = 0 \qquad X' = 0 \tag{l}$$

在自由端处，弯矩和剪力二者都变为零，我们得到

$$X'' = 0 \qquad X''' = 0 \tag{m}$$

对于一梁的两端，我们总会有四个这种端点条件可以用来求出C_1、C_2、C_3和C_4的值，它们导出自由振动的频率和振型形状。然后可以迭加诸正规型得出总反应为

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} X_i (A_i \cos p_i t + B_i \sin p_i t) \tag{5.86}$$

具有各种端点条件的梁的特定情况，将在下面诸节中考虑。

现在我们重新考虑方程（h）为下列形式的本征值问题：

$$X_i'''' = \lambda_i X_i \tag{5.87}$$

式中

$$\lambda_i = k_i^4 = \left(\frac{p_i}{a}\right)^2 \tag{n}$$

这类问题可以表示这样一个问题：本征函数X_i的四次导数（对x）等于该同一函数与本征值λ_i相乘。诸本征函数的正交性性质借考虑第i型和j型来研究：

$$X_i'''' = \lambda_i X_i \tag{o}$$

$$X_j'''' = \lambda_j X_j \tag{p}$$

用X_i乘方程（o）和用X_j乘方程（p）并将这些乘积对整个梁长进行积分，我们得到

$$\int_0^l X_j'''' X_i \, dx = \lambda_i \int_0^l X_i X_j \, dx \tag{q}$$

$$\int_0^l X_i'''' X_j \, dx = \lambda_j \int_0^l X_i X_j \, dx \tag{r}$$

这些方程的左边借分部积分得到：

$$[X_j''' X_i]_0^l - [X_j'' X_i']_0^l + \int_0^l X_j'' X_i'' \, dx = \lambda_i \int_0^l X_i X_j \, dx \tag{s}$$

$$[X_i''' X_j]_0^l - [X_i'' X_j']_0^l + \int_0^l X_i'' X_j'' \, dx = \lambda_j \int_0^l X_i X_j \, dx \tag{t}$$

端点条件（k）、（l）和（m）要求方程（s）和（t）中的积分项变为零。所以，方程（s）减方程（t）得出

$$(\lambda_i - \lambda_j) \int_0^l X_i X_j \, dx = 0 \tag{u}$$

地信网论坛 BBS.3500I.COM

当$i \neq j$且诸本征值不同时（$\lambda_i \neq \lambda_j$），为了满足方程（u），我们必须取

$$\int_0^l X_i X_j = 0 \qquad (i \neq j) \tag{5.88}$$

将此式代入方程（s），我们求出

$$\int_0^l X_i'' X_j'' = 0 \qquad (i \neq j) \tag{5.89}$$

从方程（q）也可以看出

$$\int_0^l X_i^{\mathrm{IV}} X_j = 0 \qquad (i \neq j) \tag{5.90}$$

方程（5.88）、（5.89）和（5.90）构成一棱柱形梁横向振动的诸正交性关系式。

对于$i = j$的情况，方程（u）中的积分可以为任一常数α_i，如下：

$$\int_0^l X_i^2 dx = \alpha_i \qquad (i = j) \tag{5.91}$$

当诸本征函数按这种方式归一化时，方程（q）和（s）得出

$$\int_0^l X_i^{\mathrm{IV}} X_i dx = \int_0^l (X_i'')^2 dx = \lambda_i \alpha_i = k_i^4 \alpha_i = \left(\frac{p_i}{a}\right)^2 \alpha_i \tag{5.92}$$

为了将运动方程（5.82）变换到主坐标，我们将它重新写为

$$m\ddot{y} dx + r y^{\mathrm{IV}} dx = 0 \tag{v}$$

其中$m = \rho A$为梁上单位长度的质量，$r = EI$为其弯曲刚度。用时间函数ϕ_i和位移函数X_i表达横向运动的展开式，给出

$$y = \sum_i \phi_i X_i \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots, \infty) \tag{5.93}$$

将方程（5.93）代入运动方程（v），我们得到

$$\sum_{i=1}^{\infty} (m\ddot{\phi}_i X_i + r\phi_i X_i^{\mathrm{IV}}) dx = 0 \tag{w}$$

用正规函数X_j乘方程（w），随后对整个长度积分，产生

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(m\ddot{\phi}_i \int_0^l X_i X_j dx + r\phi_i \int_0^l X_i^{\mathrm{IV}} X_j dx \right) = 0 \tag{x}$$

从方程（5.88）和（5.90）至（5.92）所给的关系，我们看到（对于$i = j$）按主坐标的运动方程成为

$$m_{\mathrm{P}i}\ddot{\phi}_i + r_{\mathrm{P}i}\phi_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots, \infty) \tag{5.94}$$

其中

$$m_{\mathrm{P}i} = m\int_0^l X^2 dx = m\alpha_i \tag{5.95}$$

和

$$r_{\mathrm{P}i} = r\int_0^l X_i^{\mathrm{IV}} X_i dx = r\int_0^l (X_i'')^2 dx = m p_i^2 \alpha_i \tag{5.96}$$

地信网论坛 BBS.3500L.COM

这样，弯曲振动的主质量 m_{P_i} 按对轴向振动〔见第 5.4 节方程(5.19)〕的相同方式来计算。然而，方程（5.96）中的主刚度 r_{P_i} 不是按轴向振动（见方程5.20）的相同方法来得到。

如前面那样，我们可以令归一化常数等于 1，因而方程（5.91）和（5.92）给出

$$\int_0^l X_i^2 dx=1 \qquad \int_0^l X_i'' X_i dx=\int_0^l (X_i')^2 dx=k_i^4=\left(\frac{p_i}{a}\right)^2 \tag{5.97}$$

然后用 m 除方程（5.94），采取熟悉的形式：

$$\ddot{\phi}_i+p_i^2\phi_i=0 \qquad (i=1,2,3,\cdots,\infty) \tag{5.98}$$

我们看到诸梁弯曲振动的正规型法相似于前面第 5.4 节中所述轴向振动的正规型法。由于这种相似性，我们不需要重新推导对于初始条件和对施加作用力的反应的表达式。弯曲振动的反应公式将与轴向振动相同〔见第 5.4 节中方程（5.23）至（5.29）〕，只是纵向位移 u 用横向位移 y 代替。

5.10 简单梁的横向振动

作为梁的横向振动的第一种特定情况，我们将分析图5.14所示的简支棱柱形梁。对于这种情况的边界条件为

$$\begin{aligned}(X)_{x=0}&=0 \qquad \left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)_{x=0}=0\\ (X)_{x=l}&=0 \qquad \left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)_{x=l}=0\end{aligned} \tag{a}$$

它们表示每一端处位移和弯矩均为零。

按下列等效形式写出正规函数的一般表达式〔方程（5.85）〕是有用的：

$$\begin{aligned}X=&C_1(\cos kx+\cosh kx)+C_2(\cos kx-\cosh kx)\\&+C_3(\sin kx+\sinh kx)+C_4(\sin kx-\sinh kx)\end{aligned} \tag{5.99}$$

从方程（a）中的前两个条件，我们推断出，方程（5.99）中的常数 C_1 和 C_2 必定等于零。从第三和第四个条件，我们得到 $C_3=C_4$ 和

$$\sin kl=0 \tag{5.100}$$

它为现在所考虑的情况下的频率方程。此方程的非零的相邻正根为 $k_i l=i\pi$，其中 $i=1,2,3,\cdots,\infty$。因而，我们得到

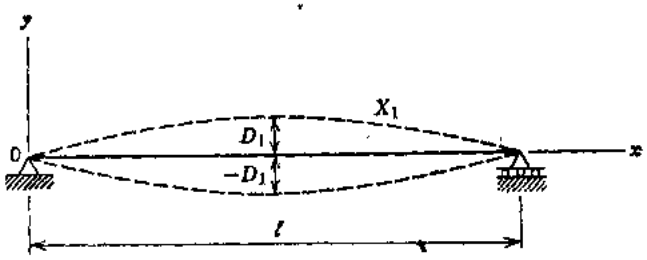


图 5.14

$$k_i=\frac{i\pi}{l} \qquad (i=1,2,3,\cdots,\infty) \tag{5.101}$$

相应于这些 k_i 值的角频率为

$$p_i=k_i^2 a=\frac{i^2\pi^2 a}{l^2}=\frac{i^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \tag{5.102}$$

其固有周期为

地信网论坛 BBS.3500L.COM

$$\tau_i=\frac{1}{f_i}=\frac{2\pi}{p_i}=\frac{2l^2}{i^2\pi}\sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \tag{5.103}$$

可以看到任何型的振动周期与长度的平方成正比而与横截面的回转半径成反比。这样，对于相同材料且几何上相似的梁，其固有周期与尺寸直接成比例变化。

各种振型的挠度曲线形状用$C_1=C_2=0$和$C_3=C_4=D/2$借正规函数〔方程（5.99）〕给出如下：

$$X_i=D_i\sinh_i x=D_i\sin\frac{i\pi x}{l}\quad(i=1,2,3,\cdots,\infty) \tag{5.104}$$

这样，诸振型形状均为正弦曲线，其中第一型用图5.14中的虚线表示。可以看出简单梁的正规函数与具有固定端张拉着的钢丝相同（见图5.10c、d和e）。为了满足前节中方程(5.97)的归一化必要条件，我们采用常数$D_i=\sqrt{2/l}$。

现在我们将确定一简单梁对位移和速度的初始条件的反应。象对于一根张拉着的钢丝一样，我们表示梁上任一点的初始横向位移（在时间$t=0$处）为$y_0=f_1(x)$，初始速度为$\dot{y}_0=f_2(x)$。其解的一般形式借前节中方程（5.86）给出，它等效于第5.4节中正规型法的方程（5.25）。如果我们从方程（5.104）将归一化函数代入方程（5.23）和（5.24），结果为

$$\phi_{0i}=\int_0^l f_1(x)X_i\,dx=\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l f_1(x)\sin\frac{i\pi x}{l}\,dx \tag{b}$$

$$\dot{\phi}_{0i}=\int_0^l f_2(x)X_i\,dx=\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l f_2(x)\sin\frac{i\pi x}{l}\,dx \tag{c}$$

将这些式子代入方程（5.25），以y代替u，得出

$$y=\frac{2}{l}\sum_{i=1}^{\infty}\sin\frac{i\pi x}{l}\left[\cos p_i t\int_0^l f_1(x)\sin\frac{i\pi x}{l}\,dx+\frac{1}{p_i}\sin p_i t\int_0^l f_2(x)\sin\frac{i\pi x}{l}\,dx\right] \tag{5.105}$$

将此公式与方程（5.86）比较，我们看到常数A_i和B_i借下面诸式给出

$$A_i=\frac{2}{l}\int_0^l f_1(x)\sin\frac{i\pi x}{l}\,dx \tag{d}$$

$$B_i=\frac{2}{lp_i}\int_0^l f_2(x)\sin\frac{i\pi x}{l}\,dx \tag{e}$$

作为一个例子，让我们假设对距左边支承距离x_1处梁上一短段δ作用初始速度v。在此情况下，我们得到$f_1(x)=0$；除$x=x_1$点处$f_2(x_1)=v$外，所有其它位置处$f_2(x)$均等于零。将这些条件代入方程（d）和（e），我们得到

$$A_i=0\qquad B_i=\frac{2v\delta}{lp_i}\sin\frac{i\pi x_1}{l}$$

总的反应成为

$$y=\frac{2v\delta}{l}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{p_i}\sin\frac{i\pi x}{l}\sin\frac{i\pi x_1}{l}\sin p_i t \tag{f}$$

地信网论坛 BBS.3500L.COM

如果作用发生于跨中处($x_1=l/2$)，我们得到：

$$y=\frac{2v\delta}{l}\left(\frac{1}{p_1}\sin\frac{\pi x}{l}\sin p_1t-\frac{1}{p_3}\sin\frac{3\pi x}{l}\sin p_3t+\frac{1}{p_5}\sin\frac{5\pi x}{l}\sin p_5t-\cdots\right)$$

$$=\frac{2v\delta l}{a\pi^2}\left(\sin\frac{\pi x}{l}\sin p_1t-\frac{1}{9}\sin\frac{3\pi x}{l}\sin p_3t+\frac{1}{25}\sin\frac{5\pi x}{l}\sin p_5t-\cdots\right)\qquad(g)$$

可以看到在此情况下，仅激发起对称的振型，方程（g）中诸相邻模态影响的振幅按比例$\frac{1}{i^2}$减小。

习 题 组 5.10

5.10－1　试求出一根简支端I梁在其腹板平面内振动时的固有频率f_i，假设$l=30$英尺，$E=30\times10^6$磅/英寸^2，$I=3021$英寸^4，每英尺重量为100磅。

答：　$f_i=24.8i^2$周/秒。

5.10－2　一简支梁因作用于中央处力P产生挠曲。试问如果荷载P突然移去该梁将发生什么样的振动？

答：　$y=\frac{2Pl^3}{\pi^4EI}\sum\frac{(-1)^{(i-1)/2}}{i^4}\sin\frac{i\pi x}{l}\cos p_it$

$(i=1,3,5,\cdots,\infty)$

5.10－3　试求解前一习题，假设力P作用于$x=x_1$的位置处。

答：　$y=\frac{2Pl^3}{\pi^4EI}\sum\frac{1}{i^4}\sin\frac{i\pi x}{l}\sin\frac{i\pi x_1}{l}\cos p_it$

$(i=1,2,3,\cdots,\infty)$

5.10－4　一简支梁承受强度为w的均布荷载。试求荷载突然移去时该梁发生的振动。

答：　$y=\frac{4wl^4}{\pi^5EI}\sum\frac{1}{i^5}\sin\frac{i\pi x}{l}\cos p_it$　　$(i=1,3,5,\cdots,\infty)$

5.10－5　一简支梁除两个端点外所有其它点均给以横向速度v（在时间$t=0$），试确定该梁的振动。

答：　$y=\frac{4v}{\pi}\sum\frac{1}{ip_i}\sin\frac{i\pi x}{l}\sin p_it$　　$(i=1,3,5,\cdots,\infty)$

5.11 具有其它端点条件的梁的振动

具有自由端的梁　在此情况下，我们得到下列边界条件：

$$\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)_{x=0}=0\qquad\left(\frac{d^3X}{dx^3}\right)_{x=0}=0\qquad\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)_{x=0}=0\qquad\left(\frac{d^3X}{dx^3}\right)_{x=0}=0$$

(a)

为了满足前两个条件，我们必须在通解〔方程(5.99)〕中取$C_2=C_4=0$，因而

地信网论坛 BBS.3500L.COM

$$X=C_1(\cos kx+\cosh kx)+C_3(\sin kx+\sinh kx) \tag{5.106}$$

从第三个和第四个条件我们求出

$$C_1(-\cos kl+\cosh kl)+C_3(-\sin kl+\sinh kl)=0 \qquad (b)$$

$$C_1(\sin kl+\sinh kl)+C_3(-\cos kl+\cosh kl)=0 \qquad (c)$$

常数C_1和C_3（不等于零）的解，仅可在方程(b)和(c)的行列式变为零的情况下得到。按此方式，得到下列频率方程：

$$(-\cos kl+\cosh kl)^2-(\sinh^2 kl-\sin^2 kl)=0 \qquad (d)$$

或重新回顾

$$\cosh^2 kl-\sinh^2 kl=1 \qquad \cos^2 kl+\sin^2 kl=1$$

我们重新写方程（d）为

$$\cos kl\cosh kl=1 \tag{5.107}$$

此方程的几个最低相邻根为

k_0l	k_1l	k_2l	k_3l	k_4l	k_5l
0	4.730	7.853	10.996	14.137	17.279

其中第一个为代表两种刚体运动的重根。诸非零根可以用下列公式近似表示

$$k_il\approx(i+1/2)\pi$$

在现在考虑的情况下，梁的诸频率可借应用方程 $f_i=p_i/2\pi=k_i^2a/2\pi$来计算，它给出

$$f_0=0 \qquad f_1=\frac{p_1}{2\pi}=\frac{k_1^2a}{2\pi} \qquad f_2=\frac{p_2}{2\pi}=\frac{k_2^2a}{2\pi}\cdots \qquad (e)$$

将方程（5.107）的诸相邻根代入方程(b)和(c)，我们可以求出每一振型的C_1/C_3。于是从方程(5.106)得到振动过程中挠度曲线的形状。前三个相应于频率f_1、f_2和f_3的振型分别示于图5.15a、b和c中。对于这些振动，杆的位移可如刚体一样迭加起来。合成的刚体运动可以表示为

$$X=c_1+c_2x \qquad (f)$$

此式代表一个连同转动的平动位移可以与自由振动迭加。

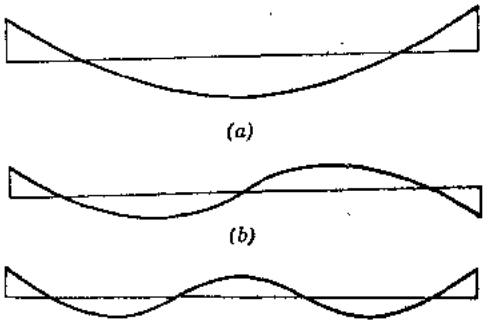


图 5.15

具有固定端的梁　此种情况的边界条件为

$$(X)_{x=0}=0 \qquad \left(\frac{dX}{dx}\right)_{x=0}=0 \qquad (X)_{x=l}=0 \qquad \left(\frac{dX}{dx}\right)_{x=l}=0 \qquad (g)$$

如果在通解〔方程(5.99)〕中我们取$C_1=C_3=0$，那么前两个条件将得到满足，因而

$$X=C_2(\cos kx-\cosh kx)+C_4(\sin kx-\sinh kx) \tag{5.108}$$

从另外两个条件，得下列诸方程：

$$C_2(\cos kl-\cosh kl)+C_4(\sin kl-\sinh kl)=0 \qquad (h)$$

$$C_2(\sin kl+\sinh kl)+C_4(-\cos kl+\cosh kl)=0 \qquad (i)$$

从它们可以推演出与前一情况相同的频率方程〔方程(5.107)〕。这个结果意味着具有两固定端的梁的诸相邻非零振动频率与具有自由端的梁相同。图5.16a、b和c说明这种情况下前三型的形状。

地信网论坛 BBS.3500L.COM

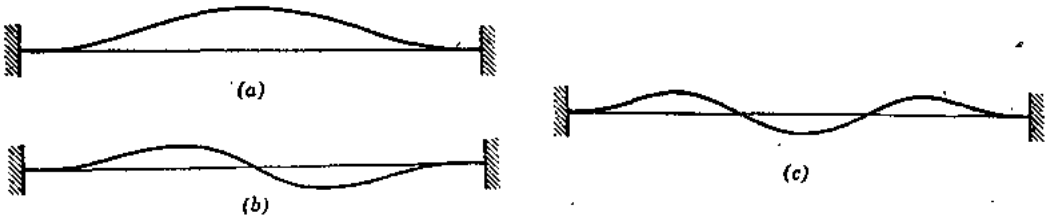


图 5.16

具有一个固定端和一个自由端的梁　假设左端（$x=0$）为嵌固，我们得到边界条件如下：

$$(X)_{x=0}=0 \qquad \left(\frac{dX}{dx}\right)_{x=0}=0 \qquad \left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)_{x=l}=0 \qquad \left(\frac{d^3X}{dx^3}\right)_{x=l}=0 \tag{j}$$

从前两个条件，我们得出结论，在通解中〔方程(5.99)〕中$C_1=C_3=0$，因此诸振型形状的一般形式仍由方程（5.108）给出。余下的两个条件给予我们下列频率方程：

$$\cos kl\ \cosh kl=-1 \tag{5.109}$$

此方程的诸相邻根如下

k_1l	k_2l	k_3l	k_4l	k_5l	k_6l
1.875	4.694	7.855	10.996	14.137	17.279

这些根的近似值可以用下列公式计算：

$$k_il\approx(i-1/2)\pi$$

可以看出，随着增大频率，方程（5.109）的诸根趋近于上面对具有两自由端的杆所得方程（5.107）的诸根。

任一型的振动频率为

$$f_i=\frac{p_i}{2\pi}=\frac{ak_i^2}{2\pi} \tag{k}$$

例如，取基本振型，我们得到

$$f_1=\frac{a}{2\pi}\left(\frac{1.875}{l}\right)^2 \tag{l}$$

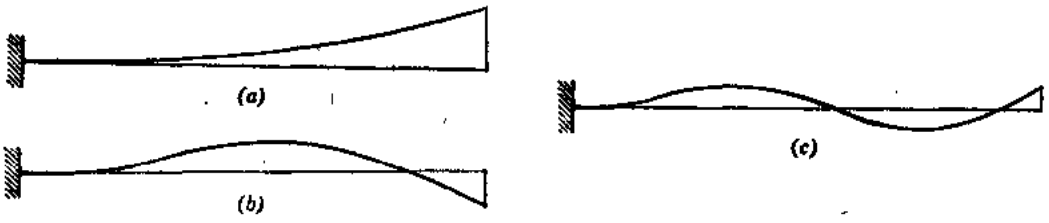


图 5.17

相应的振动周期

$$\tau_1=\frac{1}{f_1}=\frac{2\pi}{a}\frac{l^2}{(1.875)^2}=\frac{2\pi}{3.515}\sqrt{\frac{\rho Al^4}{EI}} \tag{m}$$

此种情况的前三种振型形状描述于图5.17a、b和c中。

具有一个固定端和一个简支端的梁　在此情况下，其频率方程为

$$\tan kl=\tanh kl \tag{5.110}$$

地信网论坛 BBS.35001.COM

此方程的诸相邻根为

k_1l	k_2l	k_3l	k_4l	k_5l
3.927	7.069	10.210	13.352	16.493

这些根用下列公式给出，具有很好的精确度：

$$k_il\approx(i+1/4)\pi$$

图5.18*a*、*b*和*c*表示此种情况的前三种振型形状。

对于我们已讨论的所有端点条件，其正规函数和它们的相邻导数已列成表*。借这些表，梁振动问题的求解可以大大简化。现在我们将说明如何用这些表中的诸值来计算梁对初始条件的反应。下一节讨论一种计算对施加作用力的反应的相似方法。

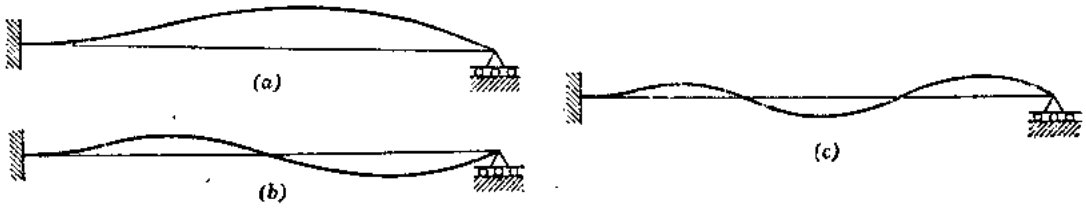


图 5.18

前面用于确定弹性体对初始条件反应的方法涉及下面形式的积分：

$$\int_0^l f_1(x)X_i\,dx \qquad \int_0^l f_2(x)X_i\,dx$$

当正规函数X_i复杂时，这些式子的直接积分变得很困难。在我们研究过的各类梁中，只有简支梁具有简单的振型形状。具有其它端点条件的梁涉及双曲线函数，通常需要数值积分。然而，找出另一种方法是有益的，特别是当诸初始条件是由于一个集中力或一个集中力矩引起的时候。由于一个集中力P_0（在时间$t=0$处突然移去）引起初始位移$y_0=f_1(x)$的情况在下面讨论，对于一个集中力矩可以按相似的方式处理。

一梁的任何初始位移曲线$y_0=f_1(x)$可以用正规函数X_i表达如下：

$$y_0=b_1X_1+b_2X_2+b_3X_3+\cdots=\sum_{i=1}^{\infty}b_iX_i \qquad (n)$$

式中常数b_i为所要确定的比例因子。棱柱形梁处于挠曲位置时梁内的应变能可以写成：

$$U=\frac{EI}{2}\int_0^l(y_0'')^2\,dx \qquad (o)$$

从方程（*n*）将y_0的二次导数（对x）代入方程（*o*）给出

$$U=\frac{EI}{2}\sum_{i=1}^{\infty}b_i^2\int_0^l(X_i'')^2\,dx \qquad (p)$$

从第5.9节的方程（5.91）和（5.92），我们得到

$$\int_0^l(X_i'')^2\,dx=k_i^4\int_0^l X_i^2\,dx \qquad (q)$$

* 见 "Tables of Characteristic Functions Representing Normal Modes of Vibration of a Beam", by Dana Young and R.P.Felgar, Univ. Texas Publ., No. 4913, 1949.

地信网论坛 BBS.3500L.COM

将此关系式用于方程（p），我们得到

$$U=\frac{EI}{2}\sum_{i=1}^{\infty}b_i^2k_i^4\int_0^l X_i^2dx \qquad (r)$$

假定方程（n）中的初始位移y_0是因作用于$x=x_1$点处顺y方向的集中力P_0引起的。我们将用虚功原理确定对于此种情况方程（n）中所需要求的诸常数b_i。让我们考虑虚位移δb_iX_i，并令所施加作用力的虚功等于应变能的增量：

$$P_0\delta b_iX_{i1}=\frac{\partial U}{\partial b_i}\delta b_i=EIb_ik_i^4\delta b_i\int_0^l X_i^2dx \qquad (s)$$

其中X_{i1}代表$x=x_1$处所求算的X_i。求解方程（s）中的b_i，我们得到

$$b_i=\frac{P_0X_{i1}}{EIk_i^4\int_0^l X_i^2dx} \qquad (t)$$

将此b_i表达式代入方程（n）得到

$$y_0=\frac{P_0}{EI}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{X_iX_{i1}}{k_i^4\int_0^l X_i^2dx}\right) \qquad (u)$$

可以看出，归一化X_i的方式不影响y_0的值。在上面所述及的诸表中，归一化过程借下式给出

$$\int_0^l X_i^2dx=l \qquad (v)$$

在此条件下，方程（t）可以重新写为

$$b_i=\frac{P_0l^3X_{i1}}{EI(k_il)^4} \qquad (5.111)$$

方程（u）成为

$$y_0=\frac{P_0l^3}{EI}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{X_iX_{i1}}{(k_il)^4} \qquad (5.112)$$

它可用于表示一梁的挠度曲线的静力分析。

回顾一弹性梁按形态b_iX_i进行初始移动的自由振动反应为

$$y_i=b_iX_i\cos p_it \qquad (w)$$

我们可以计算由于y_0所产生的总反应为

$$y=\sum_{i=1}^{\infty}b_iX_i\cos p_it \qquad (x)$$

从方程（5.111）将b_i代入方程（x）给出

$$y=\frac{P_0l^3}{EI}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{X_iX_{i1}}{(k_il)^4}\cos p_it \qquad (5.113)$$

为了用此式，我们根据需要求的振型从诸表中得到诸X_{i1}值。

此方法可以用于分布荷载和集中荷载，然而，从实用观点来看，这样做不是特别有利的。分布荷载的虚功计算〔见方程（s）〕需要求沿整个梁长荷载强度与每一正规函数之乘积

地信网论坛 BBS.3500I.COM

的积分。此种带有荷载函数的积分相似于带有位移函数那样，它是一种我们首先要避免的运算。然而，在大多数情况下，带有荷载函数要比带有位移函数积分起来较为简单。

例题 假定一根具有两固定端的梁受到作用于跨中处横向力P_0的作用。假设该力在时间$t=0$处立即移去，试确定该梁中心处的自由振动反应。

解：具有两固定端的梁的正规函数〔见方程(5.108)〕可以表达为

$$X_i=\cosh k_i x-\cos k_i x-\alpha_i(\sinh k_i x-\sin k_i x) \qquad (y)$$

式中

$$\alpha_i=\frac{\cosh k_i l-\cos k_i l}{\sinh k_i l-\sin k_i l}$$

这样，$\alpha_1=0.9825$，$\alpha_2=1.0008$，$\alpha_3\approx 1$，$\alpha_4\approx 1$等等。从上面所述诸表，我们对固端梁的奇数型求出：

$$(X_1)_{x=l/2}=1.588 \qquad (X_3)_{x=l/2}=1.406 \qquad (X_5)_{x=l/2}=1.415\text{等等。}$$

将这些值用于方程（5.113），连同早已给出的诸$k_i l$值（第287页），我们得到梁中心处的下列反应：

$$\begin{aligned}(y)_{x=l/2}&=\frac{P_0 l^3}{EI}\left[\frac{(1.558)^2}{(4.730)^4}\cos p_1 t+\frac{(1.406)^2}{(10.996)^4}\cos p_3 t\right.\\&\left.+\frac{(1.415)^2}{(17.279)^4}\cos p_5 t+\cdots\right]\\&=\frac{P_0 l^3}{EI}(5038\cos p_1 t+135\cos p_3 t+22\cos p_5+\cdots)\times 10^{-6} \qquad (z)\end{aligned}$$

可以看到在现在所考虑的情况下，该级数收敛迅速。

习 题 组 5.11

5.11—1 试用数值确定一根一端固定另一端简支的梁的正规函数，并绘出第一振型和第二振型的挠度曲线。

答：正规函数的表达式〔从方程(b)、(c)和(5.106)〕为：

$$X_i=\cosh k_i x-\cos k_i x-\alpha_i(\sinh k_i x-\sin k_i x)$$

式中

$$\alpha_i=\frac{\cosh k_i l-\cos k_i l}{\sinh k_i l-\sin k_i l}$$

应用此情况的频率方程诸根，我们得到

$$k_1 l=3.927 \qquad k_2 l=7.069 \qquad \alpha_1=1.0008 \qquad \alpha_2=1.0000$$

用这些数值可以作出所需要求的曲线。

5.11—2 试求解前一习题，假设梁上$x=0$端为固定、$x=l$端为自由。

答： 在此情况下，正规函数为

$$X_i=\cosh k_i x-\cos k_i x-\alpha_i(\sinh\beta_i x-\sin\beta_i x)$$

式中

$$\alpha_i=\frac{\cosh k_i l+\cos k_i l}{\sinh k_i l+\sin k_i l}$$

应用此梁的频率方程诸根，我们得到

$$k_1 l=1.875 \qquad k_2 l=4.694 \qquad \alpha_1=0.7341 \qquad \alpha_2=1.0185$$

地信网论坛 BBS.3500L.COM

5.11－3　试证明频率方程（5.110）对于支承住的悬臂梁是正确的，并确定其正规函数的表达式。

5.11－4　试求出固定端梁自由振动的表达式，假设它因作用于$x=l/4$处一集中力P。引起弯曲，还假设此力在$t=0$时突然移去。

5.11－5　试对一根一端固定另一端自由的梁求解前一习题。其初始挠度因施加于自由端处荷载P。所产生。

5.12　旋转惯量的效应和剪切变形的效应

在前面弯曲振动的讨论中，我们实际上假设梁的横截面尺寸与其长度相比是很小的。现在将对该理论加以修正以便考虑横截面尺寸对频率的效应。这些修正对于研究当振动杆被结点横截面细分成比较短的部分时的较高频率振型是很重要的。

容易看到在振动过程中梁上一个典型单元（见图5.13b）不仅产生平动运动，而且产生转动*。其转角等于挠度曲线的斜度，用$\partial y/\partial x$来表达；相应的角速度和角加速度将借下式给出：

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} \quad 和 \quad \frac{\partial^3 y}{\partial x \partial t^2}$$

所以，该单元绕通过其质量中心且垂直于$x-y$平面的轴线的惯性矩将为**：

$$-\rho I \frac{\partial^3 y}{\partial x \partial t^2} dx$$

此惯性矩在写典型单元的动力平衡方程时应考虑进去。这样不同于第5.9节中的方程（b），我们将得到

$$-V dx + \frac{\partial M}{\partial x} dx - \rho I \frac{\partial^3 y}{\partial x \partial t^2} dx = 0 \qquad (a)$$

从此式将剪力V代进顺y方向诸力的平衡方程〔第5.9节方程(a)〕，我们得到

$$\frac{\partial V}{\partial x} dx = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \rho I \frac{\partial^3 y}{\partial x \partial t^2}\right) dx = -\rho A dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad (b)$$

应用第5.9节方程(d)，我们得到

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \rho I \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} \qquad (5.114)$$

此为棱柱形梁横向振动的微分方程，其中右边第二项代表旋转惯量的效应。

如果不仅旋转惯量而且由于剪力产生的挠度也考虑进去，那么得到更加精确的微分方程***。挠度曲线的斜率不仅取决于杆横截面的转动，而且取决于剪切变形。令ψ表示略去剪力时挠度曲线的斜率，β表示同一横截面内中性轴处的剪切角。于是我们求出总斜率为

$$\frac{dy}{dx} = \psi + \beta \qquad (c)$$

---

* 见 J.W.S.Rayleigh, op.cit., Sec.186.

** 当力矩反时针方向时取为正。

*** 见S.Timoshenko的论文, Phil.Mag.Ser.6,Vol.41,p.744, 和Vol.43, p.125, 1921.剪力效应的实验验证为E.Goens 所做, Ann.Physik, Ser.5, Vol.11, 1931, p.649, 亦见 R.M.Davies, Phil.Mag., Ser.7, Vol.23, 1937, p.1129. 梁上冲击情况下需要考虑剪力变形为W.Flügge所讨论, 见 Z.angew.Math.u. Mech. Vol.22, 1942, p.312.

地信网论坛 BBS.3500L.COM

从初等弯曲理论，我们得到下列弯矩和剪力方程：

$$M = EI\frac{d\psi}{dx} \qquad V = -k'\beta AG = -k'\left(\frac{dy}{dx} - \psi\right)AG \tag{d}$$

其中k'为一个取决于横截面形状的数值因子，A为横截面面积，G为剪切弹性模量。一单元的转动微分方程现在将为

$$-V\,dx + \frac{\partial M}{\partial x}dx - \rho I\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}dx = 0 \tag{e}$$

将方程（d）代入方程（e），我们得到

$$EI\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + k'\left(\frac{\partial y}{\partial x} - \psi\right)AG - \rho I\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \tag{f}$$

同一单元顺竖直方向平动运动的微分方程仍将为

$$-\frac{\partial V}{\partial x}dx - \rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}dx = 0 \tag{g}$$

将方程（d）的第二个关系式代入方程（g）给出

$$k'\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\right)G - \rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \tag{h}$$

从方程（f）和（h）消去ψ，我们得到棱柱形杆横向振动时下列较完整的微分方程：

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \rho I\left(1 + \frac{E}{k'G}\right)\frac{\partial^4 y}{\partial x^2\partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{k'G}\frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 0 \tag{5.115}$$

此方程对于计算梁频率的应用将在下面讨论中说明。

让我们重新考虑第5.10节中已分析过的简支梁（见图5.14）。为了较精确地求出诸频率值，我们应该用方程（5.115）而不用方程（5.83）。以ρA除方程（5.115），并应用下列符号

$$r_g^2 = \frac{I}{A} \tag{i}$$

我们得到

$$a^2\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - r_g^2\left(1 + \frac{E}{k'G}\right)\frac{\partial^4 y}{\partial x^2\partial t^2} + r_g^2\frac{\rho}{k'G}\frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 0 \tag{5.116}$$

此方程和诸端点条件借取

$$y_i = \left(\sin\frac{i\pi x}{l}\right)\left(A_i\cos p_i t + B_i\sin p_i t\right) \tag{j}$$

得到满足，上式包括与没有旋转惯量和剪切变形时梁的相同正规函数。将方程（j）代入方程（5.116），我们得到下列计算诸频率的方程：

$$a^2\frac{i^4\pi^4}{l^4} - p_i^2 - p_i^2\frac{i^2\pi^2 r_g^2}{l^2} - p_i^2\frac{i^2\pi^2 r_g^2}{l^2}\frac{E}{k'G} + \frac{r_g^2\rho}{k'G}p_i^4 = 0 \tag{5.117}$$

仅考虑此方程中的前两项，我们得到

$$p_i = a\frac{i^2\pi^2}{l^2} = \frac{a\pi^2}{\lambda_i^2} \tag{k}$$

其中$\lambda_i = (l/i)$为振动过程中杆被划分成小的半波长度。这与前面所得方程（5.102）的结果一致。借取方程（5.117）中的前三项，并应用二项展开式，我们得到

$$p_i = \frac{a\pi^2}{\lambda_i^2}\left(1 - \frac{\pi^2 r_g^2}{2\lambda_i^2}\right) \tag{l}$$

地信网论坛 BBS.3500L.COM

按此种方式，考虑到旋转惯量效应；我们看出这种修正随着λ_i的减小亦即随着振动频率的增大而愈来愈重要。

为了得到剪切变形效应，我们应考虑方程（5.117）中的所有项。借p_i的第一近似值（k）代入此方程的最后一项，可以说明此项与$\pi^2 r_g^2/\lambda_i^2$一量相比是一个二级微小量。略去最后项，我们得到

$$p_i=\frac{a\pi^2}{\lambda_i^2}\left[1-\frac{1}{2}\frac{\pi^2 r_g^2}{\lambda_i^2}\left(1+\frac{E}{k'G}\right)\right] \tag{5.118}$$

假设$G=3E/8$，并取一矩形横截面的杆，其$k'=0.833$*，我们得到

$$\frac{E}{k'G}=3.2$$

这样，因剪切引起的修正比因旋转惯量引起的修正大3.2倍**。假设第i振型的波长λ_i比梁的高度大十倍，我们得到

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2 r_g^2}{\lambda_i^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{12}\right)\left(\frac{1}{100}\right)\approx 0.004$$

旋转惯量和剪切变形的总修正约为1.7%。

5.13 简单梁的强迫反应

本节中我们将考虑一简支梁对分布力$Q(x,t)$和作用于$x=x_1$处的一集中力$P_1(t)$或一集中力矩$M_1(t)$的横向反应（见图5.19）。按早先所述（第5.9节），不需要导出梁对这前两种荷载反应的一般表达式。参见第5.4节中方程(5.28)，我们写出由于分布力$Q(x,t)$产生的横向反应y为

$$y=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{X_i}{p_i}\int_0^l X_i\int_0^t q(x,t')\sin p_i(t-t')\,dt'\,dx \tag{5.119}$$

式中$q(x,t)=Q(x,t)/m$。类似地，从方程（5.29）我们得到因集中力$P_1(t)$引起的反应表达式为

$$y=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{X_i X_{i1}}{p_i}\int_0^t q_1(t')\sin p_i(t-t')\,dt' \tag{5.120}$$

其中X_{i1}表示在$x=x_1$处求算的正规函数X_i，而$q_1(t)=P_1(t)/m$。

因为力矩$M_1(t)$不相当于一般的位移，所以它必须间接处理。为此目的，我们将按前面所示的方式应用虚功法（见第5.3节）。在此方法中，挠度曲线展开成级数：

$$y=\sum_{j=1}^{\infty}\phi_j X_j \qquad (a)$$

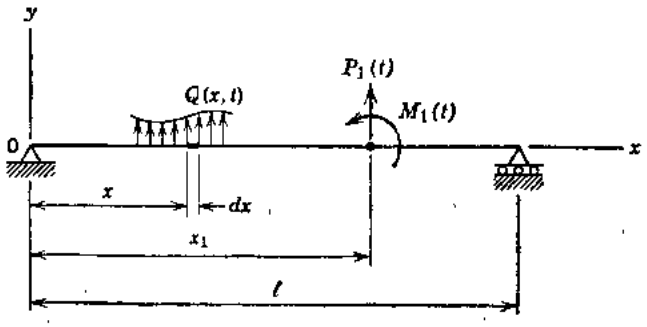


图 5.19

* R.G.Olsson 建议了稍微不同的k'值，见 Z.angew.Math u Mech., Vol.15, 1935.

** 关于方程（5.116）的解，见 R.A.Anderson, "Flexural Vibrations in Uniform Beams According to the Timoshenko Theory", Trans., ASME, Vol.75, 1953, pp.APM504-514.

地信网论坛 BBS.3500L.COM

并且我们对第 i 振型取虚位移 $\delta y_i=\delta\phi_i X_i$。于是分布惯性力经历第 i 振型虚位移的虚功为

$$\delta W_{Ii}=\int_0^l(-\rho A\,dx\ddot{y})\delta y_i=-m\delta\phi_i\int_0^l\ddot{y}X_i\,dx \qquad (b)$$

将方程（a）代入方程（b），并应用方程（5.88）和（5.97）中的正交性和归一化关系，我们得到（对于$i=j$）

$$\delta W_{Ii}=-m\ddot{\phi}_i\delta\phi_i\int_0^l X_i^2\,dx=-m\ddot{\phi}_i\delta\phi_i \qquad (c)$$

与梁中弯曲有关的应变能为

$$U=\int_0^l\frac{EI}{2}(y'')^2\,dx=\frac{r}{2}\int_0^l(y'')^2\,dx \qquad (d)$$

将方程（a）代入方程（d），并应用关系式（5.89）和（5.97）得到

$$U=\frac{r}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\phi_j^2\int_0^l(X_j'')^2\,dx=\frac{r}{2}\sum_{j=1}^{\infty}k_j^4\phi_j^2 \qquad (e)$$

于是诸弹性力的虚功（对于$i=j$）为

$$\delta W_{Ei}=-\frac{\partial U}{\partial\phi_i}\delta\phi_i=-rk_i^4\phi_i\delta\phi_i=-mp_i^2\phi_i\delta\phi_i \qquad (f)$$

为了确定集中力矩的虚功，我们看到它经过其作用点处的转动 $\delta y_1'$ 做功。这样，我们写出 M_1 经历第 i 型的虚位移的功为

$$\delta W_{M1i}=M_1\delta y_{i1}'=M_1\delta\phi_i X_{i1}' \qquad (g)$$

式中 X_{i1}' 为 X_i 在 $x=x_1$ 处所求算的一次导数（对于 x）。

将（c）、（f）和（g）式加起来，并令其结果等于零，我们得到

$$m\ddot{\phi}_i+mp_i^2\phi_i=M_1X_{i1}' \qquad (h)$$

用 m 除方程（h），产生

$$\ddot{\phi}_i+p_i^2\phi_i=\frac{M_1X_{i1}'}{m}\qquad(i=1,2,3,\cdots,\infty) \qquad (5.121)$$

此式代表按正规坐标的典型运动方程，其右边项为现在考虑情况下的第 i 正规型荷载。

第 i 振型的反应借杜哈梅积分求得为

$$\phi_i=\frac{X_{i1}'}{mp_i}\int_0^t M_1(t')\sin p_i(t-t')\,dt' \qquad (5.122)$$

总的振动反应为

$$y=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{X_iX_{i1}'}{mp_i}\int_0^t M_1(t')\sin p_i(t-t')\,dt' \qquad (5.123)$$

这样，虚功技巧与正规型概念结合起来产生集中力矩的反应表达式，此式相似于集中力的情况〔见方程(5.120)〕。然而，P_1 项和 X_{i1} 项分别为 M_1 和 X_{i1}' 所代替。

在简支梁的特定情况下，角频率和归一化形状函数为（见第5.10节）

$$p_i=k_i^2a=\frac{i^2\pi^2a}{l^2}\qquad X_i=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{i\pi x}{l}\qquad(i=1,2,3,\cdots,\infty) \qquad (i)$$

地信网论坛 BBS.3500L.COM

将正规函数代入对于分布力的方程（5.119），给出

$$y=\frac{2}{l}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{p_i}\sin\frac{i\pi x}{l}\int_0^t\sin\frac{i\pi x}{l}\int_0^t q(x,t')\sin p_i(t-t')\,dt'\,dx \qquad (5.124)$$

类似地，对于集中力的方程（5.120）成为

$$y=\frac{2}{l}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{p_i}\sin\frac{i\pi x}{l}\sin\frac{i\pi x_1}{l}\int_0^t q_1(t')\sin p_i(t-t')\,dt' \qquad (5.125)$$

对于集中力矩的方程（5.123）得出为

$$y=\frac{2\pi}{ml^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{p_i}\sin\frac{i\pi x}{l}\cos\frac{i\pi x_1}{l}\int_0^t M_1(t')\sin p_i(t-t')\,dt' \qquad (5.126)$$

方程（5.124）和（5.125）与张拉着的钢丝的方程（5.69）和（5.70）相同（见第5.8节），但是方程（5.126）仅可用于具有弯曲刚度的杆件。

作为一个例子，让我们考虑作用于$x=x_1$处为谐和变化的力$P_1=P\sin\omega t$的情况。在此情况下，方程（5.125）所给的反应为

$$\begin{aligned}y&=\frac{2P}{ml}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{p_i}\sin\frac{i\pi x}{l}\sin\frac{i\pi x_1}{l}\int_0^t\sin\omega t'\sin p_i(t-t')\,dt'\\&=\frac{2P}{ml}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{p_i^2}\sin\frac{i\pi x}{l}\sin\frac{i\pi x_1}{l}\left(\sin\omega t-\frac{\omega}{p_i}\sin p_i t\right)\beta_i\\&=\frac{2Pl^3}{m\pi^4a^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^4}\sin\frac{i\pi x}{l}\sin\frac{i\pi x_1}{l}\left(\sin\omega t-\frac{\omega l^2}{i^2\pi^2 a}\sin p_i t\right)\beta_i \qquad (5.127)\end{aligned}$$

式中放大因子β_i借下式给出：

$$\beta_i=\frac{1}{1-\omega^2/p_i^2} \qquad (j)$$

方程（5.127）的第一部分代表梁的稳态强迫振动，而第二部分由瞬变自由振动组成。这后一振动在存在阻尼时将消失掉，实用上只有稳态反应是重要的。

如果脉动力$P\sin\omega t$很缓慢地变化，那么ω为一个很小的量，且$\beta_i\approx 1$。于是稳态反应成为

$$y=\frac{2Pl^3}{m\pi^4a^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^4}\sin\frac{i\pi x}{l}\sin\frac{i\pi x_1}{l}\sin\omega t$$

或，用$ma^2=EI$，我们得到

$$y=\frac{2Pl^3}{EI\pi^4}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^4}\sin\frac{i\pi x}{l}\sin\frac{i\pi x_1}{l}\sin\omega t \qquad (k)$$

此式代表由于荷载$P\sin\omega t$所产生的梁的静力挠度。在力P作用于中央处（$x_1=l/2$）的特定情况下，我们得到

$$y=\frac{2Pl^3}{EI\pi^4}\left(\sin\frac{\pi x}{l}-\frac{1}{3^4}\sin\frac{3\pi x}{l}+\frac{1}{5^4}\sin\frac{5\pi x}{l}-\cdots\right)\sin\omega t \qquad (l)$$

级数（l）收敛迅速，仅取第一项将得到挠度的满意近似值。按此方式，我们求出中央处的幅度y_m：

地信网论坛 BBS.3500L.COM

$$(y_m)_{x=l/2}=\frac{2Pl^3}{EI\pi^4}=\frac{Pl^3}{48.7EI}$$

此近似值的误差约为1.5%。

以α表示干扰力的频率与自由振动基本型的频率之比，我们从（i）得到

$$\alpha=\frac{\omega}{p_1}=\frac{\omega l^2}{a\pi^2}$$

从方程（5.127），稳态强迫振动成为

$$y=\frac{2Pl^3\sin\omega t}{EI\pi^4}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sin(i\pi x/l)\sin(i\pi x_1/l)}{i^4-\alpha^2} \qquad (m)$$

如果脉动力作用于中央处，那么我们得到

$$y=\frac{2Pl^3\sin\omega t}{EI\pi^4}\left[\frac{\sin(\pi x/l)}{1-\alpha^2}-\frac{\sin(3\pi x/l)}{3^4-\alpha^2}+\frac{\sin(5\pi x/l)}{5^4-\alpha^2}-\cdots\right] \qquad (n)$$

对于很小的α值，此级数的第一项代表具有很好精确度的挠度，将方程（n）与方程（l）相比，我们可以得出结论，动力挠度与静力挠度之比近似地等于

$$\beta_1=\frac{1}{1-\alpha^2} \qquad (o)$$

例如，如果干扰力的频率为基本振型频率的四分之一，那么动力挠度大于静力挠度约6%。

从方程（5.126）我们可以得到由于作用于端点处（$x=0$）的脉动力矩$M_1=M\sin\omega t$所产生的反应。根据相似于上面的推理过程，我们求出

$$y=\frac{2Ml^2\sin\omega t}{EI\pi^3}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\beta_i}{i^3}\sin\frac{i\pi x}{l} \qquad (5.128)$$

它代表由于力矩$M\sin\omega t$所产生的稳态强迫振动。

因为梁的振动问题借线性微分方程来代表，所以迭加原理是成立的；如果梁上存在几个作用着的脉动力或脉动力矩，那么所产生的振动可以借迭加各别作用所产生的振动来得到。

连续分布的脉动力的情况也可以用方程（5.124）按相似的方式来求解。例如，假设该梁承受强度为$Q(t)=w\sin\omega t$的均布力。那么从方程（5.124），我们得到

$$y=\frac{4wl^4\sin\omega t}{EI\pi^5}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\beta_i}{i^5}\sin\frac{i\pi x}{l} \qquad (5.129)$$

如果荷载的频率与基本振型的频率相比很小，那么我们得到下面近似值：

$$y=\frac{4wl^4}{EI\pi^5}\left(\sin\frac{\pi x}{l}+\frac{1}{3^5}\sin\frac{3\pi x}{l}+\frac{1}{5^5}\sin\frac{5\pi x}{l}+\cdots\right)\sin\omega t \qquad (p)$$

这个很快收敛的级数代表由于均布荷载$w\sin\omega t$所产生的梁的静力挠度。借取$x=l/2$，我们得到中央处的挠度

$$(y)_{x=l/2}=\frac{4wl^4}{EI\pi^5}\left(1-\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}-\cdots\right)\sin\omega t \qquad (q)$$

如果仅用此级数中的第一项，那么中央处挠度的误差约为0.25%。

习　题　组　5.13

5.13—1 有一简支梁在施加于中央处力 P 作用下施力点处挠曲1英寸。如果频率ω等于梁的基本频率的一半，试问由于施加于中央处一脉动力$P\sin\omega t$所产生的强迫振动的振幅

地信网论坛 BBS.3500L.COM

是多大?

答:

$$(y_m)_{x=l/2}=\frac{2Pl^3}{\pi^4EI}\left(\frac{1}{1-1/4}+\frac{1}{3^4-1/4}+\frac{1}{5^4-1/4}+\cdots\right)\approx 1.328\text{英寸}。$$

5.13—2 前一习题中的梁在施加于诸三分之一点处两个脉动力$P\sin\omega t$作用下,如果ω与前一习题具有相同值,试求中央处强迫振动的振幅。

答:
$$(y_m)_{x=l/2}=\frac{4Pl^3}{\pi^4EI}\left[\frac{\sin(\pi/3)}{1-1/4}+\frac{\sin(5\pi/3)}{5^4-1/4}-\frac{\sin(7\pi/3)}{7^4-1/4}+\cdots\right]$$
$$\approx 2.255\text{英寸}$$

5.13—3 试求一简支梁由于满布于左半跨上强度为$w\sin\omega t$的分布脉动荷载所引起中央处强迫振动的振幅。

答:
$$(y_m)_{x=l/2}=\frac{2wl^4}{\pi^5EI}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{(i-1)/2}}{i(i^4-a^2)}$$

5.13—4 试确定一简支梁由于突然作用于跨中处一力P的反应。

答:
$$y=\frac{2Pl^3}{\pi^4EI}\sum_{i=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{(-1)^{(i-1)/2}}{i^4}\sin\frac{i\pi x}{l}(1-\cos p_i t)$$

5.13—5 试确定一简支梁由于按正弦分布的脉动荷载$Q(x,t)=w\sin\frac{\pi x}{l}\sin\omega t$所产生的稳态反应。

答:
$$y=\frac{wl^4\beta_1\sin\omega t}{\pi^4EI}\sin\frac{\pi x}{l}$$

5.13—6 试用虚功法导出一梁对单位长度上分布力矩$M(x,t)$的反应的一般表达式。然后给出简支梁的解。

答:
$$y=\frac{2\pi}{ml^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{p_i}\sin\frac{i\pi x}{l}\int_0^t\cos\frac{i\pi x}{l}\int_0^t M(x,t')\sin p_i(t-t')dt'dx$$

5.14 具有其它端点条件的梁的强迫反应

前节中方程(5.119)意味着一般来说分布荷载为x和t二者的函数。然而,如果荷载$Q(x,t)$可以表达为下列乘积

$$Q(x,t)=f(x)Q(t) \qquad (a)$$

那么方程(5.119)可以写成较简单的形式

$$y=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{X_i}{p_i}\int_0^t f(x)X_i\,dx\int_0^t q(t')\sin p_i(t-t')dt' \qquad (5.130)$$

其中$q(t)=Q(t)/m$。方程(5.130)中的第一个积分包括荷载函数$f(x)$与第i正规函数的乘积。此种运算在前面第5.11节中讨论过,对于非简支梁它成为一个困难的步骤。

反之,如果诸荷载由集中的力或力矩组成,那么方程(5.120)和(5.123)可以用来计算一梁的振动反应,与梁是如何支承无关。作为一个例子,让我们考虑匡定端梁的情况,并假设因作用于距左端距离$x=x_1$处脉动力$P_1(t)=P\sin\omega t$产生振动(见图5.20)。在此情

地信网论坛 BBS.3500L.COM

况下，方程（5.120）给出

$$y=\frac{2P}{ml}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{X_iX_{i1}}{p_i}\int_0^t\sin\omega t'\sin p_i(t-t')dt'$$

$$=\frac{2P}{ml}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{X_iX_{i1}}{p_i^2}\left(\sin\omega t-\frac{\omega}{p_i}\sin p_it\right)\beta_i \qquad (5.131)$$

这个一般结果对于任何一种梁都成立，如果我们希望在现在考虑中的情况下使用它，我们必须应用固端杆的频率p_i和正规函数X_i。

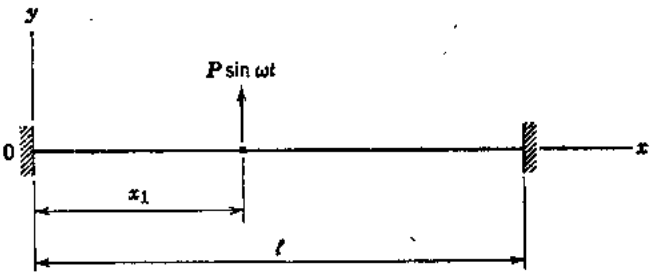


图 5.20

假定图5.20中的脉动力作用于梁的中央处，并假定我们想要计算作用点处的稳态反应。为此目的，方程（5.131）的第一部分得出

$$(y)_{x=l/2}=\frac{2P\sin\omega t}{ml}\sum\frac{\beta_i}{p_i^2}(X_i)_{x=l/2}^2 \quad (i=1,\ 3,\ 5,\ \cdots,\ \infty) \qquad (b)$$

将关系式$p_i^2=a^2k_i^4$和$ma^2=EI$代入方程（b），我们得到

$$(y)_{x=l/2}=\frac{2Pl^3\sin\omega t}{EI}\sum\frac{\beta_i}{(k_il)^4}(X_i)_{x=l/2}^2 \quad (i=1,\ 3,\ 5,\ \cdots,\ \infty) \qquad (c)$$

从第5.11节中的例题，我们得到级数中诸值如下

$$(y)_{x=l/2}=\frac{2Pl^3\sin\omega t}{EI}(5038\beta_1+135\beta_3+22\beta_5+\cdots)\times10^{-6} \qquad (d)$$

习 题 组 5.14

5.14—1 试确定一悬臂梁在自由端处作用一脉动力$P\sin\omega t$时的稳态强迫振动。

答：
$$y=\frac{Pl^3\sin\omega t}{EI}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\beta_iX_i(X_i)_{x=l}}{(k_il)^4},\qquad \beta_i=\frac{1}{1-\omega^2/p_i^2}$$

这里X_i为一端固定另一端自由的梁的正规函数，诸k_il值相当于该情况下诸固有振型的角频率。

5.14—2 试求算前一习题中悬臂梁自由端的反应。

答：
$$(y)_{x=l}=\frac{Pl^3\sin\omega t}{EI}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\beta_i(X_i)_{x=l}^2}{(k_il)^4}$$

从诸表我们求出

$$(X_i)_{x=l}=2(-1)^{i+1}$$

然后，从第5.11节取诸k_il值，我们得到

$$(y)_{x=l}=\frac{4Pl^3}{EI}\left[\frac{\beta_1}{(1.875)^4}+\frac{\beta_2}{(4.694)^4}+\frac{\beta_3}{(7.855)^4}+\cdots\right]\sin\omega t$$

地信网论坛 BBS.3500L.COM

$$=\frac{4Pl^3}{EI}\ (0.08091\beta_1+0.00206\beta_2+0.00026\beta_3+\cdots)\sin\omega t$$

5.14—3 如果一脉动力 $P\sin\omega t$ 作用于跨中处，试确定一端固定另一端简支的梁的稳态强迫振动。

5.14—4 试用下列数值计算前一习题中梁中央处的反应：

$(X_1)_{x=l/2}=1.4449$　　$(X_2)_{x=l/2}=0.5704$

$(X_3)_{x=l/2}=-1.3005$　　$(X_4)_{x=l/2}=-0.5399$

$(X_5)_{x=l/2}=1.3068$

此梁的诸 k,l 值给于第5.11节中。

5.15 承受支承运动的梁

在第 5.6 节中我们讨论了棱柱形杆由于地面刚体平动或支承约束（顺轴向）的独立平动产生的纵向反应。对于梁要考虑两种刚体运动。通常它们取为顺 y 方向的纯平动和绕原点处垂直于 x 和 y 轴的 z 轴微小转动（见图5.13）。用这两类地面运动，梁上任何一点的 y 平动将借下式给出：

$$y_g=g_1(t)+xg_2(t)\qquad(a)$$

式中 $g_1(t)$ 和 $g_2(t)$ 分别为刚体平动和转动。参见第5.6节中方程（5.47），我们写出一梁由于这样的刚体地面运动产生的相对反应为

$$y^*=-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{X_i}{p_i}\left[\int_0^l X_i\,dx\int_0^t \ddot{g}_1(t')\sin p_i(t-t')\,dt'\right.$$
$$\left.+\int_0^l xX_i\,dx\int_0^t \ddot{g}_2(t')\sin p_i(t-t')\,dt'\right]\qquad(5.132)$$

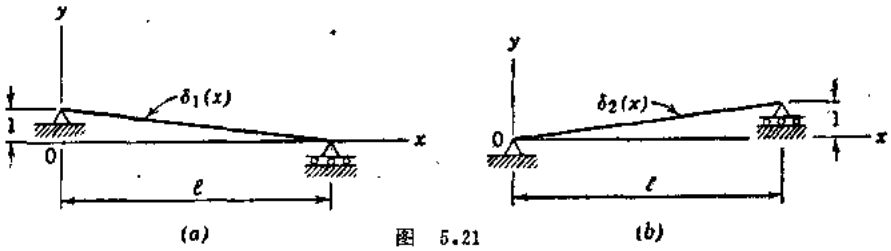


图 5.21

其中函数 X_i 是属于梁的，并借方程（5.97）所示归一化。此式代表该梁上任何一点相对刚体运动的振动运动。其全解借该振动运动与地面运动加起来得到

$$y=y_g+y^*=g_1(t)+xg_2(t)+y^*\qquad(5.133)$$

从方程（5.132）可以看到对整个长度的积分是相当简单的，并且与对时间的积分可以分开。

一种较为一般的支承运动问题包括各别约束的独立位移。图5.21a和5.21b表示一简支梁的约束的单位平动（顺 y 方向）效应。对于此种梁，位移函数为

$$\delta_1(x)=1-\frac{x}{l}\qquad\delta_2(x)=\frac{x}{l}\qquad(b)$$

其诸正规函数 X_i 均与第5.8节中所讨论的张拉着的钢丝相同。所以，该梁的相对反应可以写

地信网论坛 BBS.3500I.COM

成〔见方程 (5.72)〕：

$$y^*=-\frac{2}{l}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{p_i}\sin\frac{i\pi x}{l}\left[\int_0^l\delta_1(x)\sin\frac{i\pi x}{l}dx\int_0^t\ddot{g}_1(t')\sin p_i(t-t')dt'\right.$$

$$\left.+\int_0^l\delta_2(x)\sin\frac{i\pi x}{l}dx\int_0^t\ddot{g}_2(t')\sin p_i(t-t')dt'\right] \tag{5.134}$$

总的反应为〔见方程 (5.73)〕：

$$y=y_{st}+y^*=\delta_1(x)g_1(t)+\delta_2(x)g_2(t)+y^* \tag{5.135}$$

式中$g_1(t)$和$g_2(t)$分别为左端处和右端处指定的平动。

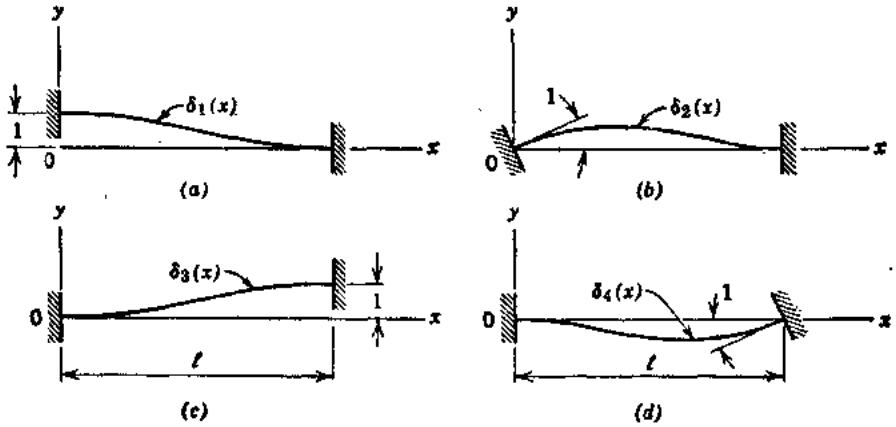


图 5.22

简单梁的方程（b）中诸位移函数是我们称之为位移影响函数表达式的例子。我们定义这种函数为由于一支承约束的单位位移所引起一个一般点的位移。图5.22a、b、c和d表示一根固定端梁的四个这种影响函数。它们为

$$\delta_1(x)=1-\frac{3x^2}{l^2}+\frac{2x^3}{l^3}\qquad \delta_2(x)=x-\frac{2x^2}{l}+\frac{x^3}{l^2}$$

$$\delta_3(x)=\frac{3x^2}{l^2}-\frac{2x^3}{l^3}\qquad \delta_4(x)=-\frac{x^2}{l}+\frac{x^3}{l^2} \tag{c}$$

当这些影响函数与指定的支承约束运动相乘，它们产生该梁的柔体运动：

$$y_{st}=\delta_1(x)g_1(t)+\delta_2(x)g_2(t)+\delta_3(x)g_3(t)+\delta_4(x)g_4(t) \tag{d}$$

此式中符号$g_1(t)$和$g_2(t)$表示左端的平动和转动，$g_3(t)$和$g_4(t)$表示右端的平动和转动。

图5.23a和5.23b描写一根左端固定（坐标原点）的悬臂梁独立约束运动的单位值。在此情况下，其位移影响函数为

$$\delta_1(x)=1\qquad \delta_2(x)=x \tag{e}$$

它与较早讨论的刚体地面运动一致〔见方程（a）〕。反之，支撑柱的悬臂梁（见图 5.24a、b和c）具有下列位移影响函数

$$\delta_1(x)=1-\frac{3x^2}{2l^2}+\frac{x^3}{2l^3}\qquad \delta_2(x)=x-\frac{3x^2}{2l}+\frac{x^3}{2l^2}$$

$$\delta_3(x)=\frac{3x^2}{2l^2}-\frac{x^3}{2l^3} \tag{f}$$

当这些函数与相应的支承运动相乘时，它们产生支撑住的悬臂梁的柔体运动：

$$y_{st}=\delta_1(x)g_1(t)+\delta_2(x)g_2(t)+\delta_3(x)g_3(t) \tag{g}$$

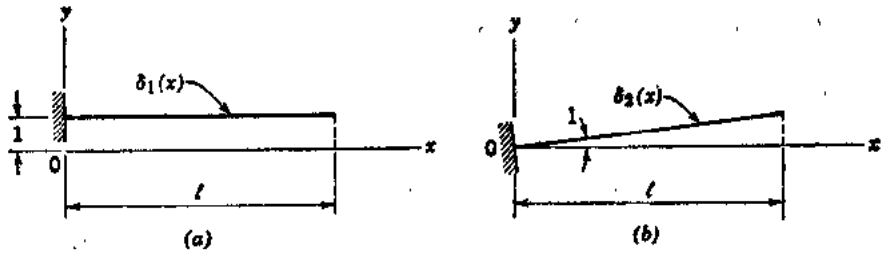


图 5.23

这样，对于一支承梁的任一独立约束运动 $g(t)$，我们可以确定其相应位移影响函数 $\delta(x)$并求算出振动反应为

$$y^*=-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{X_i}{p_i}\int_0^l\delta(x)X_i\,dx\int_0^t\ddot{g}(t')\sin p_i(t-t')\,dt' \tag{5.136}$$

于是从下式得到总的反应：

$$y=y_{st}+y^*=\delta(x)g(t)+y^* \tag{5.137}$$

如果涉及一种以上的支承运动，那么每一种的结果可以迭加起来，如对简单梁所说明的那样〔见方程（5.134）和（5.135）〕。

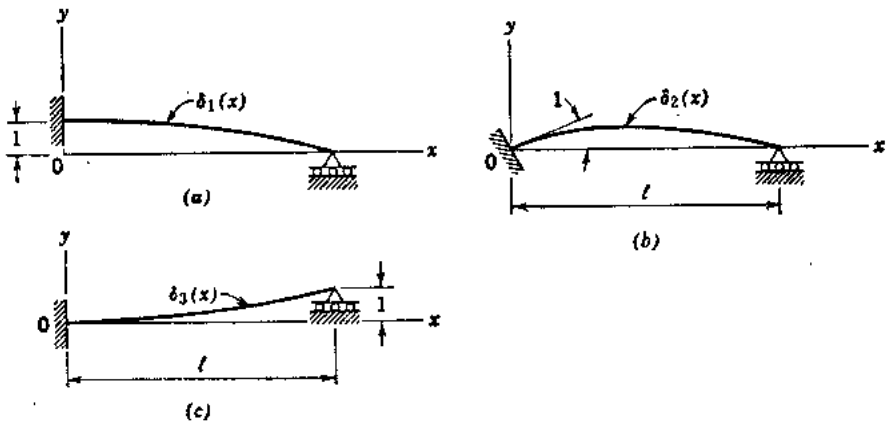


图 5.24

例题 假定一梁左端简支，右端固定。试列出该梁由于左端顺y方向一个指定平动 $g(t)$所产生的反应表达式。

解：对于此种情况的正规函数求得为

$$X_i=\sinh k_i l\sin k_i x-\sin k_i l\sinh k_i x \tag{h}$$

式中诸k_i值按下列超越频率方程计算：

$$\tan k_i l=\tanh k_i l \tag{i}$$

如第5.11节所讨论。为了按方程(5.97)所示方式将诸函数归一化，我们应用方程（h）得到

$$\int_0^l X_i^2\,dx=\frac{l}{2}(\sinh^2 k_i l-\sin^2 k_i l)=a_i \tag{j}$$

于是X_i的归一化形式成为

$$X_i=(\sinh k_i l\sin k_i x-\sin k_i l\sinh k_i x)/\sqrt{a_i} \tag{k}$$

左边支承顺y方向平动的位移影响函数为

地信网论坛 BBS.3500I.COM

$$\delta(x)=1-\frac{3x}{2l}+\frac{x^3}{2l^3} \qquad (l)$$

在此情况下，相对反应方程（5.136）成为

$$y^*=-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{X_i}{p_i}\int_0^l\left(1-\frac{3x}{2l}+\frac{x^3}{2l^3}\right)X_i\,dx\int_0^t\ddot{g}(t')\sin p_i(t-t')\,dt' \qquad (m)$$

其中正规函数X_i借方程（k）给出。对此情况的全解〔见方程（5.137）〕为：

$$y=\left(1-\frac{3x}{2l}+\frac{x^3}{2l^3}\right)g(t)+y^* \qquad (n)$$

习 题 组 5.15

5.15—1 试确定一简支梁受其左边支承谐和运动$g_1(t)=y_1\sin\omega t$的反应(见图5.21a)。

答：$$y=\left[1-\frac{x}{l}+\frac{2l^4\omega^2}{\pi^5a^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\beta_i}{i^5}\sin\frac{i\pi x}{l}\right]y_1\sin\omega t$$

5.15—2 假定图5.23b中悬臂梁的左端按函数$g_2(t)=\theta_2(t/t_2)^2$转动，这里θ_2为一很小的角。试写出以X_i和p_i表这该梁的反应的一般表达式。

答：$$y=\frac{\theta_2}{t_2^2}\left[\frac{x}{l}t^2-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2X_i}{p_i^2}\int_0^l xX_i\,dx\,(1-\cos p_it)\right]$$

5.15—3 试写出一固端梁受其右边支承谐和转动$g_4=\theta_4\sin\omega t$的反应的一般表达式(见图5.22d)，假设θ_4为一微小的角。

答：$$y=\left[-\frac{x^2}{l}+\frac{x^3}{l^2}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\omega^2X_i}{(p_i^2-\omega^2)}\int_0^l\left(-\frac{x^2}{l}+\frac{x^3}{l^2}\right)X_i\,dx\right]\theta_4\sin\omega t$$

5.15—4 试写出一支撑住的悬臂梁受其右边支承平动$g_3(t)=y_3(t/t_3)^3$的反应的一般表达式（见图5.24c）。

答：$$y=\frac{y_3}{t_3^3}\left[\left(\frac{3x^2}{2l^2}-\frac{x^3}{2l^3}\right)t^3-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{6X_i}{p_i^2}\int_0^l\left(\frac{3x^2}{2l^2}-\frac{x^3}{2l^3}\right)X_i\,dx\left(t-\frac{1}{p_i}\sin p_it\right)\right]$$

5.16 运动荷载通过的梁

大家知道在一坐桥上或在一根梁上一个滚动荷载要比平静作用相同荷载产生较大的挠度和较大的应力。活载对于桥的这种效应是非常重要的，许多工程师已作出了这个问题的解*。本节中我们将讨论一个在梁上产生常数力或脉动力的运动荷载的情况。梁的分布质量考虑进去，但是荷载本身的质量则省略掉。因为荷载的位置连续地改变，包括荷载质量（跳跃的或非跳跃的）的系统就得出具有存在可变系数的微分方程，这样一种系统的分析变得很复杂，超出了本节讨论的范围。

* 一个非跳跃质量跨过无质量梁的问题首先为R.Willis所讨论，"Appendix to the Report of the Commissioners Appointed to Inquire into the Application of Iron to Railway Structures," H. M. Stationery Office, London, 1849。此问题的级数解（对于以等速运动的质量）为 G.G.Stokes 所提出，"Discussions of a Differential Equation Related to the Breaking of Railway Bridges", Trans. Cambridge Phil. Soc., Vol.8, Part 5, 1867, pp.707-735。Stokes 还说明了一均匀质量由于一等速运动的力通过时的解。

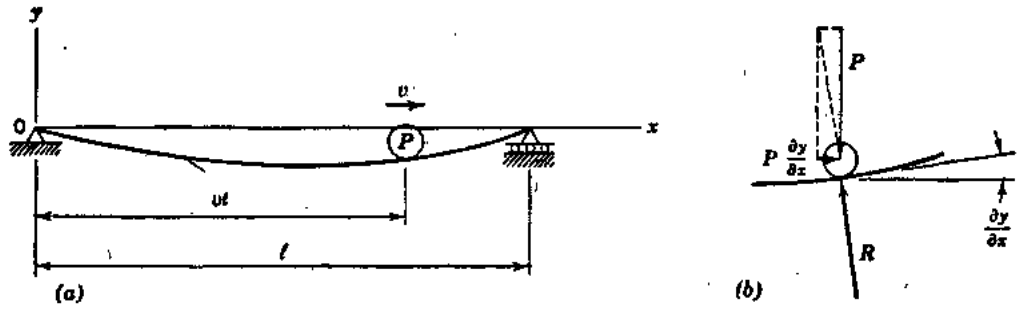


图 5.25

让我们首先考虑一个作用于简单梁上以等速 v 向右运动的滚动荷载 P，如图 5.25a* 所示。假设在时间 $t=0$ 处，该荷载位于左边支承处，我们观察在以后任何时间 t 处，该荷载距左支承的距离则为 vt。该竖直力对梁的第 i 个固有振型的虚位移 $\delta y_i=\delta\phi_i X_i$ 所做的虚功为

$$\delta W_{pi}=-P\delta\phi_i X_{i1}=-P\delta\phi_i\sin\frac{i\pi vt}{l} \qquad (a)$$

应用运动荷载的这个虚功表达式，并按第5.13节进行，我们得到下列解：

$$y=-\frac{2Pl^3}{m\pi^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sin(i\pi x/l)}{i^2(i^2\pi^2a^2-v^2l^2)}\sin\frac{i\pi vt}{l}$$
$$+\frac{2Pl^4v}{m\pi^3a}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sin(i\pi x/l)}{i^3(i^2\pi^2a^2-v^2l^2)}\sin\frac{i^2\pi^2at}{l^2} \qquad (5.138)$$

此解中的第一个级数代表强迫振动，第二个级数为梁的自由振动。

如果运动荷载的速度 v 非常小，那么我们可以令上面解中 $v=0$ 和 $vt=x_1$。于是我们得到

$$y=-\frac{2Pl^3}{m\pi^4a^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^4}\sin\frac{i\pi x}{l}\sin\frac{i\pi x_1}{l} \qquad (b)$$

此式代表因作用于距左支承距离 x_1 处荷载 P 所产生的梁的静力挠度。借应用下列符号：

$$a^2=\frac{v^2}{ap_1}=\frac{v^2l^2}{a^2\pi^2} \qquad (c)$$

和关系式 $ma^2=EI$，我们使方程（5.138）中强迫振动的解写成下列形式：

$$y=-\frac{2Pl^3}{EI\pi^4}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sin(i\pi x/l)\sin(i\pi vt/l)}{i^2(i^2-a^2)} \qquad (d)$$

有趣的是注意此挠度与梁上（除了作用于距左支承距离 $x_1=vt$ 处横向荷载 P 外）作用有纵向压力 S 的静力挠度一致，以致

$$\frac{S}{S_{cr}}=\frac{Sl^2}{EI\pi^2}=\alpha^2 \qquad (e)$$

---

* 见A. N. Krylov的论文，"Uber die Erzwungenen Schwingungen von Gleichformigen Elastischen Staben," Math. Ann. Vol. 61, 1905, p. 211; 和S. Timoshenko, "Erzwungene Schwingungen Prismatishe Stabe", Z. Math.u Phys., Vol. 59, 1911, p. 163; 和C. E. Inglis, "A Mathematical Treatise on Vibrations in Railway Bridges", Cambridge Univ. Press, London, 1934.

地信网论坛 BBS.3500L.COM

这里 S_{cr} 表示梁的欧拉屈曲荷载。从方程（c）和（e），我们得到

$$\frac{Sl^2}{EI\pi^2}=\frac{v^2l^2}{a^2\pi^2}$$

或

$$S=mv^2$$

相反地，此力对承受 P 的梁的静力挠度效应等效于运动力 P 的速度对代表强迫振动的挠度（d）的效应。

在速度 v 增大达到方程（5.138）中诸分母之一变成等于零的情况下。例如，假设

$$v^2l^2=a^2\pi^2 \qquad (g)$$

在此情况下，借 $\tau_1=2\pi/p_1=2l^2/a\pi$ 所给梁的基本振动周期成为等于 $2l/v$，比力 P 通过整个梁所需要的时间大一倍。在条件（g）下，方程（5.138）中两个级数的第一项的分母均变为零；这两项之和为

$$y=-\frac{2Pl^3}{m\pi^2}\left(\sin\frac{\pi x}{l}\right)\frac{\sin(\pi vt/l)-(lv/\pi a)\sin(\pi^2at/l^2)}{\pi^2a^2-v^2l^2} \qquad (h)$$

此式具有0/0的形式，可求算如下：

$$\lim_{v\to a\pi/l} y=\frac{Pt}{m\pi v}\cos\frac{\pi vt}{l}\sin\frac{\pi x}{l}-\frac{Pl}{m\pi^2v^2}\sin\frac{\pi vt}{l}\sin\frac{\pi x}{l} \qquad (i)$$

当 $t=l/v$ 时，方程（i）具有最大值，它等于

$$y_{max}=-\frac{Pl}{m\pi^2v^2}\left(\sin\frac{\pi vt}{l}-\frac{\pi vt}{l}\cos\frac{\pi vt}{l}\right)_{t=l/v}\sin\frac{\pi x}{l}$$

$$=-\frac{Pl^3}{EI\pi^3}\sin\frac{\pi x}{l} \qquad (j)$$

考虑到表达式（i）代表方程（5.138）所给动力挠度的满意近似值，我们得出结论在共振条件（g）时，最大动力挠度比最大静力挠度约大50%，最大静力挠度为

$$y_{st}=-\frac{Pl^3}{48EI} \qquad (k)$$

有趣的是注意当力 P 离开梁时发生最大动力挠度。在这一瞬间，力 P 下的挠度等于零，因此当通过整个梁时此力所做的功显然也等于零。为了解释在力 P 通过过程中振动的梁内所聚集的能量的来源，我们假设没有摩擦力，并假设该梁顺弹性曲线的法线方向产生一反力 R（见图5.25 b）。从平衡条件，可见达里必须存在一个等于 $P(\partial y/\partial x)$ 的水平力。该力沿梁通过的过程中所做功为

$$W=\int_0^{l/v}P\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=vt}v\,dt \qquad (l)$$

将 y 的方程（i）代入方程（l）产生

$$W=-\frac{P^2}{m\pi v^2}\int_0^{l/v}\left(\sin\frac{\pi vt}{l}-\frac{\pi vt}{l}\cos\frac{\pi vt}{l}\right)\cos\frac{\pi vt}{l}v\,dt=\frac{P^2l}{m\pi^2v^2}\left(\frac{\pi^2}{4}\right)$$

应用方程（g）和关系式 $ma^2=EI$，我们得到

$$W=\frac{P^2l^3}{4EI\pi^2} \qquad (m)$$

这个功的大小非常接近 $t=l/v$ 时梁中弯曲势能的大小。该梁由于中央处力 P 引起弯曲的势能为

地信网论坛 BBS.3500L.COM

$$U=\frac{P^2l^3}{96EI}\text{和}\quad\frac{W}{U}=2.43$$

此比值非常接近动力条件的与静力条件的最大挠度之比的平方，它等于 $(48/\pi^3)^2=2.38$。该差异应归因于较高振型引起的*。

在桥梁情况下，荷载通过桥梁的时间与基本振型的周期相比通常要比基本振型的周期为大，方程（c）所给的α^2量很小。于是借仅取方程（5.138）中每一级数的第一项，并假设在最不利情况下强迫振动的振幅与自由振动的振幅彼此加起来，我们得到最大的挠度：

$$y_{max}=-\frac{2Pl^3}{m\pi^2}\left(\frac{1}{\pi^2a^2-v^2l^2}+\frac{vl}{a\pi}\frac{1}{\pi^2a^2-v^2l^2}\right)$$

$$=-\frac{2Pl^3}{EI\pi^4}\frac{1+\alpha}{1-\alpha^2}=-\frac{2Pl^3}{EI\pi^4}\frac{1}{1-\alpha}\qquad(5.139)$$

这是一个多少有点夸大了的最大动力挠度值，因为讨论中完全略去了阻尼。根据迭加原理，一集中运动力系情况下的问题求解和运动分布力情况下的问题求解都可以没有困难地进行。

现在考虑一脉动力$P_1(t)=-P\cos\omega t$以等速度v沿着梁运动的情况**。例如，一个不平衡的机车车轮通过铁路桥梁时，就可能发生这样一种情况。假设在起始时刻（$t=0$）处该力为最大且向下作用。应用与前面相同的推理方式，我们求出运动的脉动力对位移$\delta y_i=\delta\phi_i X_i$的虚功为

$$\delta W_{p_i}=-P\cos\omega t\left(\delta\phi_i\sin\frac{i\pi vt}{l}\right)\qquad(n)$$

用此运动荷载的虚功表达式，如前面那样进行，我们得到下列解：

$$y=-\frac{Pl^3}{EI\pi^4}\sum_{i=1}^{\infty}\sin\frac{i\pi x}{l}\left[\frac{\sin(i\pi v/l+\omega)t}{i^4-(\psi+i\alpha)^2}+\frac{\sin(i\pi v/l-\omega)t}{i^4-(\psi-i\alpha)^2}\right.$$

$$\left.-\frac{\alpha}{i}\left(\frac{\sin(i^2\pi^2at/l^2)}{-i^2\alpha^2+(i^2-\psi)^2}+\frac{\sin(i^2\pi^2at/l^2)}{-i^2\alpha^2+(i^2+\psi)^2}\right)\right]\qquad(5.140)$$

式中$\alpha=vl/\pi a$为梁的基本振型的周期$\tau_1=2l^2/\pi a$与两倍时间$t=l/v$之比，此时间为该力通过梁的时间。还有，$\psi=\tau_1/T$为梁的基本振型的周期与脉动力的周期$T=2\pi/\omega$之比。

当脉动力的周期T等于梁的基本振型的周期τ_1时，该项$\psi=1$；我们得到了共振的条件。在脉动力运动过程中，振幅逐渐增大，在$t=l/v$时振幅达到最大值。此时，方程（5.140）的右边级数中对y最重要部分的第一项（对于$i=1$）可以简化成下列形式：

$$y=-\frac{2Pl^3}{\alpha EI\pi^4}\sin\frac{\pi x}{l}\sin\omega t\qquad(o)$$

最大挠度借下列公式给出

$$y_{max}=-\frac{2Pl^3}{\alpha EI\pi^4}=-\frac{2l}{v\tau_1}\left(\frac{2Pl^3}{EI\pi^4}\right)\qquad(5.141)$$

由于实际情况下，时间间隔$t=l/v$与固有振动的周期τ_1相比是很大的这一事实，所以因脉动力产生的最大动力挠度将比相同力静止地作用于梁中间处所产生的挠度$2Pl^3/EI\pi^4$要大许多倍。

---

* 关于该问题的进一步讨论见E. H. Lee, "On a Paradox in Beam Vibration Theory", Quarterly of Appl. Math. Vol. X, No. 3, 1952, p. 290.

** 见S. Timoshenko, "On the Transverse Vibrations of Bars of Uniform Cross Section", Phil. Mag. Vol. 43, 1922, p. 125.

地信网论坛 BBS.3500L.COM

5.17 轴向力对梁的振动的效应

如果一根振动着的梁受到如图5.26所示的拉力S，那么在静力横向荷载下，挠度曲线的微分方程为

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=M+Sy \qquad (a)$$

式中M表示由于强度为w的横向荷载所产生的弯矩（见图5.26）。借方程（a）对x两次微分，我们得到

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2y}{dx^2}\right)=w+S\frac{d^2y}{dx^2} \qquad (b)$$

为了形成横向振动的微分方程，我们用单位长度上的惯性力代替w，给出

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2y}{\partial x^2}\right)-S\frac{\partial^2y}{\partial x^2}=-\rho A\frac{\partial^2y}{\partial t^2} \qquad (c)$$

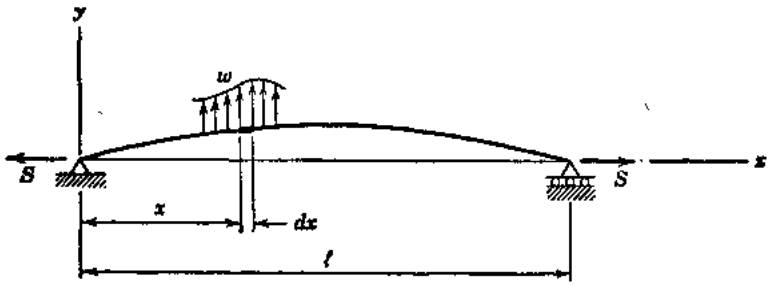


图 5.26

在棱柱形梁的情况下，我们得到

$$EI\frac{\partial^4y}{\partial x^4}-S\frac{\partial^2y}{\partial x^2}=-\rho A\frac{\partial^2y}{\partial t^2} \qquad (5.142)$$

假设该梁按其诸固有振型之一振动，我们取方程（5.142）的解为下列形式

$$y=X(A\cos pt+B\sin pt) \qquad (d)$$

式中X为一正规函数。将方程（d）代入方程（5.142），我们求出

$$EI\frac{d^4X}{dx^4}-S\frac{d^2X}{dx^2}=\rho Ap^2X \qquad (e)$$

此方程满足所述端点条件的解提供相应的正规函数。如果梁的端点是简支的，那么我们得到最简单的情况。这些条件借取

$$X_i=\sin\frac{i\pi x}{l} \qquad (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ \infty) \qquad (f)$$

来满足。将此式代入方程（e），我们得到相应的振动角频率：

$$p_i=\frac{i^2\pi^2a}{l^2}\sqrt{1+\frac{Sl^2}{i^2EI\pi^2}} \qquad (5.143)$$

如前面那样，式中$a=\sqrt{EI/\rho A}$。此频率大于前面当轴向力S不存在时所得的频率〔见第5.10节方程（5.102）〕。

如果我们有一个在很大拉力下的极易弯曲的梁（譬如说一根钢丝），那么方程（5.143）中根号下的第二项与1相比非常大；如果i^2不是很大，那么我们可以令

地信网论坛 BBS.3500L.COM

$$p_i \approx \frac{i^2\pi^2 a}{l^2}\sqrt{\frac{Sl^2}{i^2EI\pi^2}} = \frac{i\pi}{l}\sqrt{\frac{S}{\rho A}} \qquad (g)$$

它为张拉着的钢丝的固有频率（见第5.8节）。

将（f）式代入解（d）中，我们得到具有 i 个正弦半波的固有振型。这种振型之和得出具有轴向拉力的简单梁自由振动的通解：

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} \sin\frac{i\pi x}{l}\left(A_i\cos p_i t + B_i \sin p_i t\right) \qquad (h)$$

其中 p_i 借方程（5.143）给出。如果初始挠度和初始速度已给定，那么方程（h）中的常数 A_i 和 B_i 可以按前面相同方式来计算（见第5.10节）。

如果杆上作用的是压力而不是拉力，那么横向振动的频率减小，借方程（5.143）中的 S 改变为 $-S$，我们得到诸频率值：

$$p_i = \frac{i^2\pi^2 a}{l^2}\sqrt{1-\frac{Sl^2}{i^2EI\pi^2}} \qquad (5.144)$$

此频率表达式得出比没有轴向压力的简单梁要小的值。其值取决于轴向力与欧拉屈曲荷载之比值项 $Sl^2/EI\pi^2$。如果此比值接近于 1，那么最低振型的频率接近于零，我们得到横向屈曲。

在研究具有轴向力 S 的简支梁强迫反应时，我们按第 5.13 节进行。只需要用方程(5.143)或方程（5.144）代替前面所用的比较简单的表达式（5.102）。分析中的所有其它步骤保持与前面一样*。

5.18 弹性支承上的梁或弹性地基上的梁

梁端点处支承约束条件可以介于零约束和完全约束之间。如果这种抵抗平动或转动的约束是线性弹性的，那么它们可以理想化为弹簧，如图5.27中所示。令符号 k_1 和 k_2 代表左端处平动弹簧和转动弹簧的刚度常数，k_3 和 k_4 为右端处平动弹簧和转动弹簧的刚度常数。在此情况下，诸边界条件可以表达为：

$$\begin{aligned} V_{x=0} &= -EI(X''')_{x=0} = k_1(X)_{x=0} \\ M_{x=0} &= EI(X'')_{x=0} = k_2(X')_{x=0} \\ V_{x=l} &= EI(X''')_{x=l} = k_3(X)_{x=l} \\ M_{x=l} &= EI(X'')_{x=l} = -k_4(X')_{x=l} \end{aligned} \qquad (a)$$

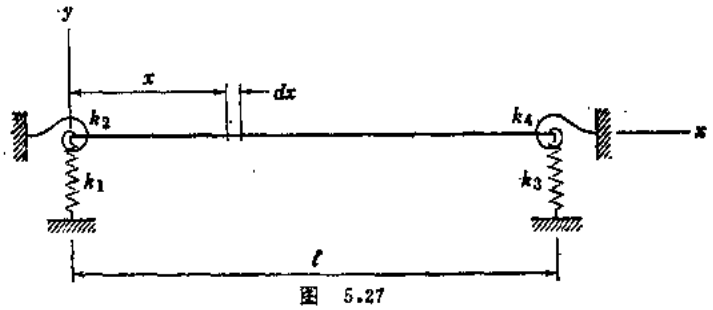


图 5.27

* 如果梁不是简支的，那么诸型形状必须满足方程（5.142）和已知边界条件。在这样一种情况下，诸型形状和固有频率均不同于第5.11节。

地信网论坛 BBS.3500L.COM

诸正规函数和所要求它们对于 x 的导数为〔见第5.9节方程（5.85）〕：

$$\begin{aligned} X &= C_1\sin kx + C_2\cos kx + C_3\sinh kx + C_4\cosh kx \\ X' &= k(C_1\cos kx - C_2\sin kx + C_3\cosh kx + C_4\sinh kx) \\ X'' &= k^2(-C_1\sin kx - C_2\cos kx + C_3\sinh kx + C_4\cosh kx) \\ X''' &= k^3(-C_1\cos kx + C_2\sin kx + C_3\cosh kx + C_4\sinh kx) \end{aligned} \tag{b}$$

其中 $k = \sqrt{p/a}$，与前面一样。将方程（b）代入方程（a）产生

$$\begin{aligned} &EIk^3C_1 - k_1C_2 - EIk^3C_3 - k_1C_4 = 0 \\ &-k_2C_1 - EIkC_2 - k_2C_3 + EIkC_4 = 0 \\ &(-EIk^3\cos kl - k_3\sin kl)C_1 + (EIk^3\sin kl - k_3\cos kl)C_2 + (EIk^3\cosh kl \\ &-k_3\sinh kl)C_3 + (EIk^3\sinh kl - k_3\cosh kl)C_4 = 0 \\ &(-EIk\sin kl + k_4\cos kl)C_1 + (-EIk\cos kl - k_4\sin kl)C_2 + (EIk\sinh kl \\ &+k_4\cosh kl)C_3 + (EIk\cosh kl + k_4\sinh kl)C_4 = 0 \end{aligned} \tag{5.145}$$

这四个齐次方程组仅当 C_1，…，C_4 的系数的行列式为零时具有非平凡解。这样，借展开此 4×4 的行列式，我们可以得到图5.27中弹性地支承着的梁的频率方程。将此特征方程代回方程（5.145），可能确定诸正规函数（归为一个任意常数）。

相应于具有零约束或完全约束的梁的行列式可令适当弹簧常数等于零或无穷大从方程（5.145）来得到。例如，一根左端固定右端自由的悬臂梁则取 $k_1=\infty$，$k_2=\infty$，$k_3=0$ 和 $k_4=0$。在此情况下，行列式成为：

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\cos kl & \sin kl & \cosh kl & \sinh kl \\ -\sin kl & -\cos kl & \sinh kl & \cosh kl \end{vmatrix} = 0 \tag{c}$$

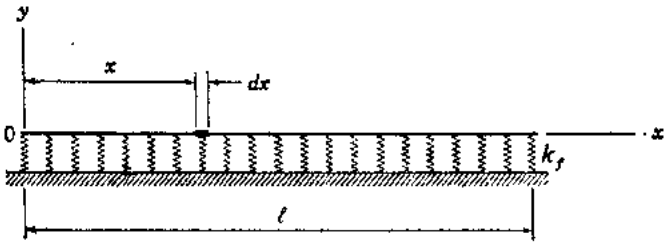


图 5.28

式中第一行的诸元素已被 $-k_1$ 相除，第二行的诸元素已被 $-k_2$ 相除。此行列式的展开得出频率方程

$$\cos kl\cosh kl = -1 \tag{d}$$

它与第5.11节中方程（5.109）相同。正规函数的方程（归纳为任意常数 C_i）求得为

$$X_i = C_i\left(\frac{\sin k_il - \sinh k_il}{\cos k_il + \cosh k_il}\cos k_ix - \sin k_ix + \frac{\cos k_il - \cosh k_il}{\sin k_il - \sinh k_il}\cosh k_ix\right) \tag{e}$$

如果抵抗横向运动的弹性约束沿杆的长度连续地分布，那么我们称此问题为弹性地基上的梁。图5.28表示这样一种梁，它下面的弹性地基描述成大量靠近地布置的平动弹簧。我们定义地基系数 k_f 为使地基产生位移等于1时所需要梁单位长度上的荷载。当梁横向振动时，一个长度为 dx 的典型单元的运动微分方程为

地信网论坛 BBS.3500I.COM

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)dx=-k_f y dx-\rho A dx\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad (f)$$

式中右边第一项代表由于弹性地基所产生的恢复力。对于一棱柱形梁，此式成为

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+k_f y=-\rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad (5.146)$$

为了求解此方程，我们取振动的固有振型为下列形式：

$$y_i=X_i(A_i\cos p_i t+B_i\sin p_i t) \qquad (g)$$

将方程（g）代入方程（5.146）给出

$$EI\frac{d^4X_i}{dx^4}-(\rho Ap_i^2-K_f)X_i=0 \qquad (h)$$

用EI除此方程，我们得到

$$\frac{d^4X_i}{dx^4}-\left(\frac{p_i^2}{a^2}-\frac{k_f}{EI}\right)X_i=0 \qquad (i)$$

为了方便，令

$$\frac{p_i^2}{a^2}-\frac{k_f}{EI}=k_i^4 \qquad (j)$$

于是，方程（i）成为

$$\frac{d^4X_i}{dx^4}-k_i^4X_i=0 \qquad (k)$$

此微分方程具有下列解

$$X_i=C_{1i}\sin k_i x+C_{2i}\cos k_i x+C_{3i}\sinh k_i x+C_{4i}\cosh k_i x \qquad (l)$$

它与没有弹性地基的梁的解一样。所以，以前对于具有各种端点条件的梁所导得的所有公式也适用于现在所考虑的情况。唯一需要的修正是我们将用从方程（j）所得的下式代替关系式$p_i=k_i^2a$：

$$p_i=k_i^2a\sqrt{1+\frac{k_f}{EIk_i^4}} \qquad (5.147)$$

考虑两端具有平动约束的梁的最简单情况（一根弹性地基上的简单梁），我们得到诸正规函数

$$X_i=C_i\sin k_i x \qquad (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ \infty) \qquad (m)$$

诸角频率为

$$p_i=\frac{i^2\pi^2a}{l^2}\sqrt{1+\frac{k_f l^4}{EIi^4\pi^4}}=\frac{\pi^2a}{l^2}\sqrt{i^4+\mu} \qquad (5.148)$$

式中$\mu=k_f l^4/EI\pi^4$。除了此项角频率的修正外，简单梁对各种影响的反应公式（例如，见第5.10、5.13、5.15和5.16节）均适用于弹性地基上的梁。

归纳起来，我们看到一梁两端处的弹性支承（见图5.27）影响其频率和其振型的形状。但是，弹性地基的存在（见图5.28）只影响固有频率。如同对于具有弹性约束的张拉着的钢丝一样，求解弹性支承上或弹性地基上梁的动力反应中的后面诸步骤则与前面对于各种较简单情况所讨论的相同。

例题 考虑当一脉动力$P_1(t)=P\sin\omega t$作用于距弹性地基上简单梁左边支承距离x_1处的情况。试求算这种情况的稳态反应。

解：由于分布力所产生的振动在第5.13节中方程（5.127）已给出，在现在考虑的情况下，它可以写成：

地信网论坛 BBS.3500L.COM

$$y=\frac{2Pl^3}{m}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{\sin(i\pi x/l)\sin(i\pi x_1/l)\sin\omega t}{\pi^4a^2(i^4+\mu)-\omega^2l^4}-\frac{\omega\sin(i\pi x/l)\sin(i\pi x_1/l)\sin p_it}{l^4p_i(p_i^2-\omega^2)}\right] \tag{n}$$

此式中的第一项代表梁的强迫振动，第二项代表梁的自由振动。

如果脉动力$P\sin\omega t$缓慢地变化（$\omega\to 0$），那么方程（n）中反应的稳态部分成为

$$y=\frac{2Pl^3}{EI\pi^4}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sin(i\pi x/l)\sin(i\pi x_1/l)\sin\omega t}{i^4+\mu} \tag{o}$$

在$x_1=l/2$的情况下，方程（o）得出

$$y=\frac{2Pl^3}{EI\pi^4}\left[\frac{\sin(\pi x/l)}{1+\mu}-\frac{\sin(3\pi x/l)}{3^4+\mu}+\frac{\sin(5\pi x/l)}{5^4+\mu}-\cdots\right]\sin\omega t \tag{p}$$

将此结果与第5.13节中方程（l）作比较，我们得出结论，分母中的附加项μ代表弹性地基对梁挠度的影响。

5.19 计算频率的里兹法

在第1.4节中，瑞利法已用来近似表示一梁或一轴的最低频率。为了用此方法需要对振动弹性体的挠曲形状作某一假设。然后根据考虑该系统的能量求出相应的频率。按这种方式选定挠度曲线的一定形状，自然地涉及引进一些附加约束，这些约束将该系统简化成具有一个自由度的系统。这样一种附加约束只能增大系统的刚度，并使振动频率（按瑞利法所得）稍高于其精确值。计算基本频率（还有较高振型的频率）的较好近似值可借里兹第一法得到*，这种方法是瑞利方法的进一步改进**。在应用里兹第一法中，我们假设具有多个参数的挠度曲线，诸参数值按使振动频率变为最小这样一种方式来选定。现在将对张拉着的钢丝振动的情况来说明选定挠度曲线形状的方式和计算诸相邻频率的手续（见第5.8节）。

如果一根张拉着的钢丝的横向挠度非常小，那么振动过程中拉力S的变化可以略去不计，由于挠度引起变形势能的增加可借S与钢丝长度的增长值相乘来得到。在挠曲后的位置处，钢丝的长度成为

$$L=\int_0^l\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

对于很小的挠度，此式可借下式近似地表示为：

$$L\approx\int_0^l\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]dx$$

于是势能的增加将是：

$$\Delta U\approx\frac{S}{2}\int_0^l\left(\frac{dy}{dx}\right)^2dx \tag{a}$$

当振动着的钢丝处于其极端位置时，产生最大势能。在此位置处，$y_{max}=X$，方程（a）成为

---

* W. Ritz, Gesammelte Werke, Paris, 1911, p.265.

** Lord Rayleigh 仅将该法用作复杂系统基本振型频率的近似计算。他怀疑它对较高振型研究的应用（见他的论文Phil. Mag., Vol. 47, Ser.5, 1899, p.566, 和Vol. 22, Ser. 6, 1911, p. 225）。

地信网论坛 BBS.3500L.COM

$$\Delta U_{max}\approx\frac{S}{2}\int_0^l\left(\frac{dX}{dx}\right)^2dx \qquad (b)$$

振动着的钢丝的动能为

$$T=\frac{m}{2}\int_0^l(\dot{y})^2dx \qquad (c)$$

当振动着的钢丝处于中央位置时，亦即当$\dot{y}_{max}=pX$时，动能产生最大值。这样

$$T_{max}=\frac{p^2m}{2}\int_0^lX^2dx \qquad (d)$$

假设能量无损失，我们可以令（b）与（d）相等，得到

$$p^2=\frac{S}{m}\frac{\int_0^l\left(\frac{dX}{dx}\right)^2dx}{\int_0^lX^2dx} \qquad (5.149)$$

借假设各种振型的形状并将相应的X的表达式代入方程（5.149）中，我们可以近似地计算这些振型的频率。

里兹法的第一个步骤是选定挠度曲线的适当代表式。令$\phi_1(x)$、$\phi_2(x)$、…为可以适当地代表X且满足诸端点条件的一系列函数$\phi_n(x)$。于是我们得到

$$X=a_1\phi_1(x)+a_2\phi_2(x)+a_3\phi_3(x)+\cdots \qquad (e)$$

我们知道在（e）式中取有限多项对钢丝挠度曲线的可能形状将加以某些限制。所以，按方程（5.149）算出的频率通常高于此频率的精确值。为了使该近似值尽可能接近真实值，里兹建议使方程（5.149）的结果为最小值来选定（e）式中的系数a_1、a_2、a_3…按这种方式，将得到一个每一方程具有下列形式的方程系：

$$\frac{\partial}{\partial a_n}\frac{\int_0^l\left(\frac{dX}{dx}\right)^2dx}{\int_0^lX^2dx}=0 \qquad (5.150)$$

进行方程（5.150）所示微分，我们得到

$$\int_0^lX^2dx\frac{\partial}{\partial a_n}\int_0^l\left(\frac{dX}{dx}\right)^2dx-\int_0^l\left(\frac{dX}{dx}\right)^2dx\ \frac{\partial}{\partial a_n}\int_0^lX^2dx=0 \qquad (f)$$

根据方程（5.149）：

$$\int_0^l\left(\frac{dX}{dx}\right)^2dx=\frac{p^2m}{S}\int_0^lX^2dx$$

我们求出

$$\frac{\partial}{\partial a_n}\int_0^l\left[\left(\frac{dX}{dx}\right)^2-\frac{p^2m}{S}X^2\right]dx=0 \qquad (5.151)$$

将X的（e）式代入方程（5.151），进行所示运算，我们得到以a_1、a_2、a_3…表示的齐次线性方程系。这样一种方程的个数等于级数（e）中系数a_1、a_2、a_3…的个数。仅当

a_1、a_2、a_3 … 的系数的行列式等于零时，这样的方程系才可能得出不等于零的解。此条件得出频率方程，从它可以计算出各种振型的频率。

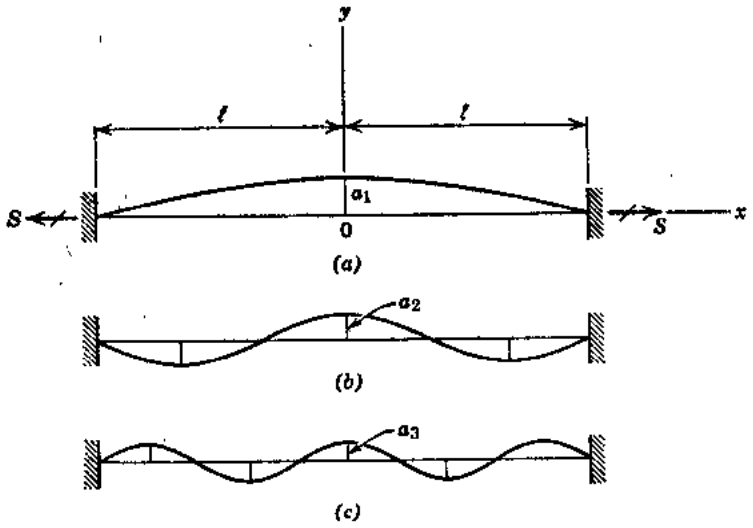


图 5.29

让我们考虑一根张拉着的钢丝对中间平面成对称的振型，如图5.29 a、b 和 c 所示。容易看出诸如l^2-x^2这种代表对称抛物线且满足端点条件$(y)_{x=\pm l}=0$的函数为代表图5.29 a 中振型的适当公式。用x^2、x^4、…乘此函数，也可以得到一系列满足诸端点条件的对称曲线。按此方式，我们得到下列振动钢丝挠度曲线的表达式：

$$X=a_1(l^2-x^2)+a_2x^2(l^2-x^2)+a_3x^4(l^2-x^2)+\cdots \qquad (g)$$

为了说明随着（g）式中项数的增加怎样很快地改善我们计算的精确度，我们从只有一项开始，令

$$X_1=a_1\ (l^2-x^2) \qquad (h)$$

方程（5.149）所需要的积分为*：

$$\int_0^l (X_1)^2dx=\frac{8}{15}a_1^2l^5 \qquad \int_0^l\left(\frac{dX_1}{dx}\right)^2dx=\frac{4}{3}a_1^2l^3$$

将这些值代入方程（5.149），我们得到

$$p_1^2=\frac{5S}{2l^2m} \qquad (i)$$

将此结果与精确解$p_1^2=\pi^2S/(4l^2m)$作比较，我们看到频率的误差约为0.66%。这样，当（g）式只有一项时，曲线的形状就完全确定了，该系统减少为具有一个自由度的系统，如瑞利法中那样。

为了得到更为接近的近似值，让我们取级数（g）中的两项。于是我们取a_1和a_2两个参数，借改变这两量之比值，我们还可以改变（在某种程度上）曲线的形状。当此比值适使按方程（5.149）所得的结果成为最小值时，得到最好的近似值，使方程（5.149）为最小值需要满足条件（5.151）。取下式作为第二近似值：

$$X_2=a_1(l^2-x^2)+a_2x^2(l^2-x^2) \qquad (j)$$

* 对于对称型或反对称型，仅考虑系统的一半就足够了。

地信网论坛 BBS.3500L.COM

我们得到：

$$\int_0^l X_2^2 dx = \frac{8}{15}a_1^2 l^5 + \frac{16}{105}a_1 a_2 l^7 + \frac{8}{315}a_2^2 l^9$$

$$\int_0^l \left(\frac{dX_2}{dx}\right)^2 dx = \frac{4}{3}a_1^2 l^3 + \frac{8}{15}a_1 a_2 l^5 + \frac{44}{105}a_2^2 l^7$$

将这些值代入方程（5.151），并对a_1和a_2求导数，我们得到

$$\left(1 - \frac{2}{5}k^2 l^2\right)a_1 + l^2\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{35}k^2 l^2\right)a_2 = 0 \qquad (k)$$

$$\left(1 - \frac{2}{7}k^2 l^2\right)a_1 + l^2\left(\frac{11}{7} - \frac{2}{21}k^2 l^2\right)a_2 = 0 \qquad (l)$$

其中

$$k^2 = \frac{p^2 m}{S} \qquad (m)$$

$$k^4 l^4 - 28k^2 l^2 + 63 = 0$$

时，方程（k）和（l）的行列式将变为零。此方程的两个根为

$$k_1^2 l^2 = 2.46744 \qquad k_2^2 l^2 = 25.6$$

记住我们现在只考虑对中间成对称的振型，应用方程（m），对第一和第三振型，我们得到

$$p_1^2 = \frac{2.46744 S}{l^2 m} \qquad p_3^2 = \frac{25.6 S}{l^2 m}$$

将这些结果与下面精确解进行比较

$$p_1^2 = \frac{\pi^2 S}{4l^2 m} = \frac{2.46740 S}{l^2 m} \qquad p_3^2 = \frac{9\pi^2 S}{4l^2 m} = \frac{22.207 S}{l^2 m}$$

我们得出结论，用它们所得基本频率的精确度是非常高的（误差约为0.00081%）。反之，第三振型的频率误差约为7.4%。用级数（g）中三项，将得到误差小于0.5%的第三振型频率。

可以看到应用里兹法，借对挠度曲线表达式取足够多项，不仅基本频率而且较高振型频率也可以得到良好的精确度。下一节将说明里兹第一法对于变截面梁振动研究的应用。还将解释和证明其第二法。

5.20 非棱柱形梁的振动

我们在前面讨论中，考虑的是棱柱形梁的各种振动问题。然而，有一些重要的工程问题，例如涡轮机叶片的振动、船壳的振动、桥上变高度梁的振动等，涉及变截面梁的振动理论。这样一种振动梁的运动微分方程前面已经讨论过了〔见第5.9节方程(5.81)〕。它具有下面形式：

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) + \rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \qquad (a)$$

其中I和A为x的某种函数。只有在后面将要考虑的一些特殊情况下，才可以确定出其正规函数和频率的精确表达式。这样，往往用近似法计算固有振动频率。

地信网论坛 BBS.3500L.COM

当里兹第一法用于梁的振动时，我们写出下列最大势能表达式和最大动能表达式：

$$U_{max}=\frac{1}{2}\int_0^l EI\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)^2dx \qquad (b)$$

$$T_{max}=\frac{p^2}{2}\int_0^l \rho AX^2dx \qquad (c)$$

从它们得到

$$p^2=\frac{E}{\rho}\frac{\int_0^l I\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)^2dx}{\int_0^l AX^2dx} \qquad (d)$$

为了得到近似解，我们按前节那样进行，取挠度曲线形状为级数形式：

$$X=a_1\phi_1(x)+a_2\phi_2(x)+a_3\phi_3(x)+\cdots \qquad (e)$$

其中诸函数 ϕ_n 中的每一个函数满足梁诸端点处的条件。最小化方程（d）中诸结果的条件为：

$$\frac{\partial}{\partial a_n}\frac{\int_0^l I\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)^2dx}{\int_0^l AX^2dx}=0 \qquad (f)$$

或

$$\int_0^l AX^2dx\frac{\partial}{\partial a_n}\int_0^l I\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)^2dx-\int_0^l I\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)^2dx\frac{\partial}{\partial a_n}\int_0^l AX^2dx=0 \qquad (g)$$

从方程（d）和（g），我们得到：

$$\frac{\partial}{\partial a_n}\int_0^l\left[I\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)^2-\frac{p^2A\rho}{E}X^2\right]dx=0 \qquad (5.152)$$

这样，该问题简化为去求方程（e）中使下列积分为最小时的a_1、a_2、a_3…诸常数值：

$$Z=\int_0^l\left[I\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)^2-\frac{p^2A\rho}{E}X^2\right]dx \qquad (h)$$

从（5.152）得出的方程是以a_1、a_2、a_3…表示的齐次线性方程。它们的个数等于级数（e）中的项数。令这些方程的行列式等于零，我们得到频率方程，从它可以计算出各种振型的频率。

劈的振动 现在我们将里兹第一法用于一端自由另一端固定的单位厚度的劈*，如图5.30所示。我们得到下列几何关系式

$$A=\frac{2bx}{l}\qquad I=\frac{1}{12}\left(\frac{2bx}{l}\right)^3 \qquad (i)$$

---

* 英文Wedge通常多译为“劈”，有时也译为“楔”。——译注

地信网论坛 BBS.3500L.COM

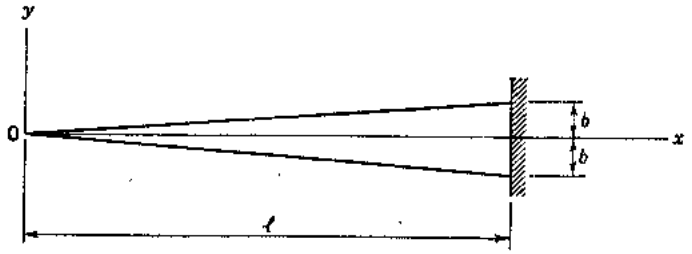


图 5.30

式中 l 为悬臂的长度，$2b$ 为其固定端处的高度。此种情况的边界条件为

$$\left(EI\frac{d^2X}{dx^2}\right)_{x=0}=0 \qquad \frac{d}{dx}\left(EI\frac{d^2X}{dx^2}\right)_{x=0}=0$$

$$(X)_{x=l}=0 \qquad \left(\frac{dX}{dx}\right)_{x=l}=0 \tag{j}$$

为了满足这些条件，我们取挠度曲线为下列级数形式

$$X=a_1\left(1-\frac{x}{l}\right)^2+a_2\frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right)^2+a_3\frac{x^2}{l^2}\left(1-\frac{x}{l}\right)^2+\cdots \tag{k}$$

容易看到，当 $x=l$ 时，每一项以及它对 x 的导数成为等于零，从而方程（j）中的第三个和第四个端点条件将得到满足。第一个和第二个条件也得到满足，因为对于 $x=0$ 时 I 和 dI/dx 均为零。

取下式作为第一近似值

$$X_1=a_1\left(1-\frac{x}{l}\right)^2 \tag{l}$$

将它代入方程（d），我们得到

$$p^2=\frac{10Eb^2}{\rho l^4} \qquad f=\frac{p}{2\pi}=\frac{5.48\,b}{2\pi l^2}\sqrt{\frac{E}{3\rho}} \tag{m}$$

为了得到更接近的近似值，我们取级数（k）中的两项，如下：

$$X_2=a_1\left(1-\frac{x}{l}\right)^2+a_2\frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right)^2 \tag{n}$$

将此式代入方程（h），我们得到

$$Z_2=\frac{2}{3}\frac{b^3}{l^3}\left[(a_1-2a_2)^2+\frac{24}{5}a_2(a_1-2a_2)+6a_2^2\right]$$

$$-\frac{2b\rho l p^2}{E}\left[\frac{a_1^2}{30}+\frac{2a_1a_2}{105}+\frac{a_2^2}{280}\right]$$

从下列诸条件

$$\frac{\partial Z_2}{\partial a_1}=0 \qquad \frac{\partial Z_2}{\partial a_2}=0$$

我们求出下列两个线性方程：

$$\left(\frac{E}{\rho}\frac{b^2}{3l^4}-\frac{p^2}{30}\right)a_1+\left(\frac{2E}{5\rho}\frac{b^2}{3l^4}-\frac{p^2}{105}\right)a_2=0 \tag{o}$$

$$\left(\frac{2E}{5\rho}\frac{b^2}{3l^4}-\frac{p^2}{105}\right)a_1+\left(\frac{2E}{5\rho}\frac{b^2}{3l^4}-\frac{p^2}{280}\right)a_2=0 \tag{p}$$

令这些方程的行列式等于零，我们得到

$$\left(\frac{E}{\rho}\frac{b^2}{3l^4}-\frac{p^2}{30}\right)\left(\frac{2E}{5\rho}\frac{b^2}{3l^4}-\frac{p^2}{280}\right)-\left(\frac{2E}{5\rho}\frac{b^2}{3l^4}-\frac{p^2}{105}\right)^2=0 \tag{q}$$

地信网论坛 BBS.35001.COM

从此方程可以算出$p_{1,2}^2$，这两个根中的较小者得出：

$$f_1=\frac{p_1}{2\pi}=\frac{5.319b}{2\pi l^2}\sqrt{\frac{E}{3\rho}} \qquad (r)$$

对于现在考虑的情况，存在一个精确解，其正规函数按贝塞尔函数确定*。此精确解给出：

$$f_1=\frac{p_1}{2\pi}=\frac{5.315b}{2\pi l^2}\sqrt{\frac{E}{3\rho}} \qquad (5.153)$$

将此式与方程（m）和（r）比较，我们得出结论，第一近似值的误差约为3.1%，而第二近似值的误差近似地为0.075%。仅当还要计算较高振型的频率时，级数（e）中的项数需要进一步增加。为了进一步比较，我们注意，对于具有与该劈厚端处相同截面的棱柱形悬臂梁的情况，已得到下列结果（见第5.11节）：

$$f_1=\frac{p_1}{2\pi}=\frac{(1.875)^2a}{2\pi l^2}=\frac{3.515b}{2\pi l^2}\sqrt{\frac{E}{3\rho}} \qquad (s)$$

里兹第一法也可以用于A和I不是x的连续函数代表的情况。这些函数可以有几个非连续点或者可以借沿长度l不同间隔用不同数学表达式来定义。在这样一种情况下，积分（h）应细分成许多间隔，而使这些间隔中每一间隔内的I和A可以用一连续函数来代表**。如果函数A和I用图解或用数值表给出，那么里兹第一法仍可应用。在这样一种情况下，需要借数值技巧来计算（h）中的积分。

上述计算可应用里兹第二法来简化***，在里兹第二法中，我们直接应用振动微分方程而不用能量表达式。我们举等截面悬臂梁振动的已知情况作为一个例子，定义其正规函数的微分方程为

$$EI\frac{d^4X}{dx^4}-\rho Ap^2X=0 \qquad (t)$$

假设该梁左端固定，右端自由，我们得到下面边界条件：

$$(X)_{x=0}=0 \qquad \left(\frac{dX}{dx}\right)_{x=0}=0 \qquad \left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)_{x=l}=0 \qquad \left(\frac{d^3X}{dx^3}\right)_{x=l}=0 \qquad (u)$$

在应用里兹第二法中，我们还取X为级数（e）的形式。由于它不是严格的解，所以它不满足方程（t）；我们将得到（根据代入该方程的左边）一个不等于零的量，它代表沿悬臂长度分布的某一荷载$Q(x)$。于是级数（e）中的系数a_1、a_2、a_3…值可以从荷载$Q(x)$对虚位移$\delta y_n=\delta a_n\phi_n(x)$的虚功变为零的条件来得到。按这种方式我们得到下列形式的方程：

$$\int_0^l\left(EI\frac{d^4X}{dx^4}-\rho Ap^2X\right)\phi_n(x)dx=0 \qquad (5.154)$$

将级数（e）代入此式积分后，我们得到一个a_1、a_2、a_3…的线性方程系；如前面那样，其频率方程借令这些方程中诸系数的行列式等于零来得到。

仅取级数（e）中的两项，假设在我们的情况下

---

* G. R. Kirchhoff, Monatsberichte, Berlin, 1879, p. 815, 或 Gesammelte Abhandlungen, Leipzig, 1882, p. 339.

** 此类例子为K. A. Traenkel所讨论, Ing.-Arch., Vol. 1, 1930, p. 499.

*** 如第2.3节所注释，该方法有时归于Galerkin，但是它为W. Ritz首先介绍。

地信网论坛 BBS.3500L.COM

$$X=a_1\ (6l^2x^2-4lx^3+x^4)\ +a_2\ (20l^3x^2-10l^2x^3+x^5) \qquad (v)$$

两括号中的每一个表达式都满足端点条件（u）。第一个表达式代表均匀受载悬臂梁的挠度，第二个表达式代表悬臂梁在其固端处为零向自由端成线性增大的三角形荷载作用下的挠度。将（v）式代入方程（5.154），进行积分，我们得到

$$\left(\frac{104}{45}\ \frac{p^2l^4}{a^2}-\frac{144}{5}\right)a_1+\left(\frac{2644}{315}\ \frac{p^2l^4}{a^2}-104\ \right)a_2=0 \qquad (w)$$

$$\left(\frac{2644}{315}\ \frac{p^2l^4}{a^2}\ -104\ \right)a_1+\left(\frac{21128}{693}\ \frac{p^2l^4}{a^2}-\frac{2640}{7}\right)a_2=0 \qquad (x)$$

令这两个方程的行列式等于零，我们求出

$$p_1=3.517\frac{a}{l^2}=\frac{3.517}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \qquad p_2=\frac{22.78}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \qquad (y)$$

p_1的值具有较高的精度，p_2的误差约为3.4%。

锥形梁的振动　尖端自由而根部嵌固的锥形梁的振动问题首先为克尔希霍夫（Kirchhoff）所分析*。他得到的基本振型为：

$$f_1=\frac{p_1}{2\pi}=\frac{4.359r}{2\pi l^2}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad (5.155)$$

式中 r 为根部的半径，l 为梁的长。为了比较，必须记住相同长度和相同底面积的圆柱形梁具有下列频率

$$f_1=\frac{p_1}{2\pi}=\frac{(1.875)^2\,a}{2\pi l^2}=\frac{1.758r}{2\pi l^2}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad (z)$$

这样，锥形梁和圆柱形梁的基本振型的频率之比值为4.359/1.758≈2.5。一般来说，锥形梁任一振型的频率可以按下列方程计算：

$$f_n=\frac{p_n}{2\pi}=\frac{a_nr}{2\pi l^2}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad (5.156)$$

其中a_n具有下面值**：

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
4.359	10.573	19.225	30.339	43.921	59.956

变截面悬臂梁的其它情况　在一般情况下，悬臂梁横向振动的频率可以用下列方程来计算：

$$f_n=\frac{p_n}{2\pi}=\frac{a_nr_g}{2\pi l^2}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad (5.157)$$

此式中r_g为嵌固截面的回转半径，l 为悬臂的长度，a_n为一个取决于梁的形状和取决于振型的常数。对于某些实用上很重要的特定情况，常数a_1值如下：

1．　如果横截面面积和惯性矩沿 x 轴的变化可用下列形式表达：

$$A=ax^n \qquad I=bx^m \qquad (a')$$

（x从自由端起度量），那么r_g沿悬臂的长度保持常数，基本型的常数a_1可借下面方程足够精确地确定***：

$$a_1=3.47\ (1+1.05m) \qquad (b')$$

---

* 出处同上。

** 见D. Wrinch, Proc. Roy. soc. (London), Vol. 101, 1922, p. 493.

*** A. Ono, Jour. Soc. Mech. Engrs. (Tokyo), Vol. 27, 1924, p. 467。

地信网论坛 BBS.35001.COM

2. 如果横截面面积和惯性矩沿 x 轴的变化可用下列形式表达：

$$A = a\left(1 - c\frac{x}{l}\right) \qquad I = b\left(1 - c\frac{x}{l}\right) \tag{c'}$$

（x 从嵌固端起度量），那么 r_0 沿梁的长度保持常数；α_1 量在下列表中给出*：

$c=$	0	0.4	0.6	0.8	1.0
$\alpha=$	3.515	4.098	4.585	5.398	7.16

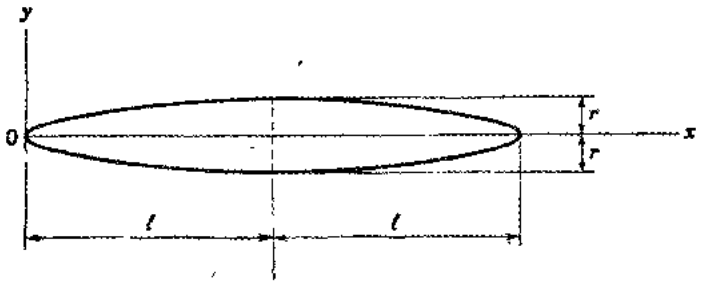


图 5.31

自由端变截面梁　现在让我们考虑由两半相等部分在其厚端处连接组成侧向振动的“两端自由”梁（见图5.31），其左半个部分借下列曲线绕 x 轴旋转形成：

$$y = ax^m \tag{d'}$$

在此情况下，对某些 m 值用，贝塞尔函数表达的精确解已经获得**，基本振型的频率可以用下列形式来表示：

$$f_1 = \frac{p_1}{2\pi} = \frac{\alpha_1 r}{4\pi l^2}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{5.158}$$

此公式中，r 为最厚横截面的半径，$2l$ 为梁的长度，α_1 为一个取决于曲线形状（d'）的常数，其诸值给于下表中

$m=$	0	1/4	1/2	3/4	1
$\alpha_1=$	5.593	6.957	8.203	9.300	10.173

5.21 梁的弯曲和扭转的联合振动

在前面梁横向振动的讨论中，总是假设梁在对称平面内振动。如果不是这种情况，那么弯曲振动通常将与扭转振动联合起来。作为一个例子，让我们考虑一槽钢在垂直于对称平面（$x-z$ 平面）的 $x-y$ 平面内振动（见图5.32a）。在讨论竖直荷载作用下槽钢的弯曲中，我们看到，仅当荷载作用在平行于形心轴 $C-C'$ 且位于对称平面内的剪切中心轴 $O-O'$ 处时，在竖直平面内发生弯曲而不伴随扭转。取该剪切中心轴为 x 轴。它距腹板中间面的距离 e 和距形心的距离 c 借下列公式给出***：

$$e = \frac{b^2h^2t}{4I_z} \qquad c = e + \frac{b^2}{2b+h} \tag{a}$$

---

* Ono, op. cit., Vol. 28, 1925, p. 429。

** 见J. W. Nicholson, Proc.Roy.Soc. (London), Vol.93, 1917, p. 506。

*** 见 S. Timoshenko, Strength of Materials, 3rd ed., Vol.1, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1955, p. 239。

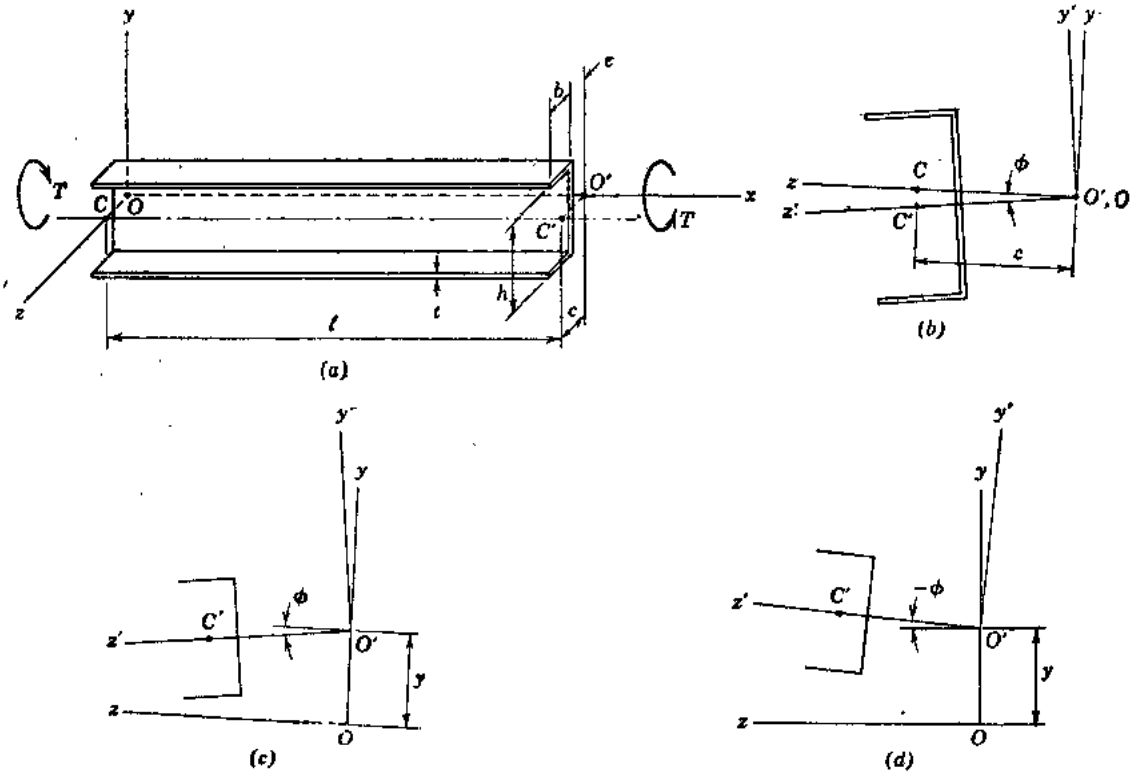


图 5.32

其中 b 为翼缘的宽度*，h 为两翼缘中心之间的距离，t 为翼缘和腹板的厚度。对于竖直荷载，挠度曲线的微分方程为

$$EI_z\frac{d^4y}{dx^4}=w \qquad (b)$$

其中 w 为分布荷载的强度（正的向上），EI_z 为槽钢对 z 轴的弯曲刚度。

如果荷载沿形心轴分布，那么我们总是可以用沿剪切中心轴 x 分布的相同荷载和强度为 wc 的扭矩来代替。在这样一种情况下，我们将得到用方程（b）所定义的弯曲与对剪切中心轴 x 的扭转之组合。此扭转是非均匀的，变化的扭矩 $T(x)$ 与扭角 ϕ 之间的关系借下面方程给出**：

$$T(x)=R\frac{d\phi}{dx}-R_1\frac{d^3\phi}{dx^3} \qquad (c)$$

其中 R 为对于均匀扭转的扭转刚度，R_1 为翘曲刚度。我们按图5.32b 所示取扭角为正方向，它遵循右手规则。将方程（c）对 x 微分并遵守正扭矩为图5.32a 中所示的方向，我们得到

$$R\frac{d^2\phi}{dx^2}-R_1\frac{d^4\phi}{dx^4}=wc \qquad (d)$$

方程（b）和（d）定义当静力荷载沿形心轴分布时梁的联合弯曲和扭转。

当梁振动时，我们必须考虑下列强度的横向惯性力***：

$$-\rho A\frac{\partial^2}{\partial t^2}(y-c\phi)$$

---

* 如果 e 为剪切中心轴 $O-O'$ 至腹板中间面的距离，那么图5.32中的 b 应自腹板中间面量起。——译注

** Timoshenko, op. cit., Vol. 2, p. 265.

*** 与翘曲有关的纵向惯性力略去不计。

地信网论坛 BBS.3500I.COM

和下列强度的惯性扭矩

$$-\rho I_p \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

式中I_p为横截面的形心极惯性矩。用这些惯性作用力中的第一个代替方程（b）和（d）中静止作用的荷载，我们得到下列弯曲和扭转联合振动的微分方程：

$$EI_z \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2}(y - c\phi) \tag{5.159a}$$

$$R \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - R_1 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} = -\rho Ac \frac{\partial^2}{\partial t^2}(y - c\phi) + \rho I_p \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \tag{5.159b}$$

假设该梁按诸固有振型之一进行，那么我们写出：

$$y = X(A\cos pt + B\sin pt)\ ;\ \phi = X_1(A_1\cos pt + B_1\sin pt) \tag{e}$$

式中p为振动的角频率，X和X_1为正规函数。将（e）式代入方程(5.159a)和(5.159b)，我们得到求X和X_1的下列方程：

$$EI_z X^{IV} = \rho Ap^2(X - cX_1) \tag{f}$$

$$R_1 X_1^{IV} - RX_1'' = -\rho Ap^2 c(X - cX_1) + \rho I_p p^2 X_1 \tag{g}$$

在每一种特定情况下，我们必须对X和X_1求出满足所规定的梁端条件的解以及方程（f）和（g）。

我们取具有简支端的梁，作为一个例子，其边界条件为：

$$y = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{对于 } x = 0 \text{ 和 } x = l) \tag{h}$$

这些必要条件用下面诸函数得到满足：

$$X_i = C_i \sin\frac{i\pi x}{l}, \quad X_{1i} = D_i \sin\frac{i\pi x}{l} \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ \infty) \tag{i}$$

式中C_i和D_i均为常数。将这些式子代入方程（f）和（g）并用下列符号

$$\frac{EI_z i^4\pi^4}{l^4 \rho A} = \omega_{bi}^2, \quad \frac{(R_1^2\pi^2 l^2 + R_1 i^4\pi^4)}{l^4 \rho (I_p + Ac^2)} = \omega_{ti}^2, \quad \frac{Ac^2}{I_p + Ac^2} = \lambda \tag{j}$$

我们得到

$$(\omega_{bi}^2 - p_i^2)\ C_i + p_i^2 c D_i = 0 \tag{k}$$

$$\frac{\lambda}{c} p_i^2 C_i + (\omega_{ti}^2 - p_i^2)\ D_i = 0 \tag{l}$$

仅当这些方程的行列式变为零时，这些方程可以给出C_i和D_i不为零的解，在此情况下，频率方程成为：

$$(\omega_{bi}^2 - p_i^2)(\omega_{ti}^2 - p_i^2) - \lambda p_i^4 = 0 \tag{m}$$

从它我们得到

$$p_i^2 = \frac{(\omega_{ti}^2 + \omega_{bi}^2) \mp \sqrt{(\omega_{ti}^2 - \omega_{bi}^2)^2 + 4\lambda\omega_{bi}^2\omega_{ti}^2}}{2(1 - \lambda)} \tag{5.160}$$

对于所有其它具有一对称平面且在垂直于该平面的方向内振动的简支梁，将得到相似的结果。

如果剪切中心与形心一致，那么距离c为零，$\lambda = 0$，而且我们得到

$$p_i^2 = \frac{\omega_{ti}^2 + \omega_{bi}^2}{2} \mp \frac{\omega_{ti}^2 - \omega_{bi}^2}{2}$$

它给予我们两组频率：

地信网论坛 BBS.3500L.COM

$$p_{1i}=\omega_{bi} \qquad p_{2i}=\omega_{ti} \tag{n}$$

从符号（j）可以看出，在此情况下，这些频率相当于无联系的弯曲振动和非均匀扭转振动的频率，它们彼此无关。如果 c 不变为零，我们从解（5.160）得到 p_i^2 的两个值，其中一个大于（n）的诸值，另一个小于（n）的诸值。对于 p_i^2 的较大值，我们从方程（k）和（l）求出 C_i 和 D_i 具有相同的正负号，对于 p_i^2 的较小值，它们为相反的正负号。相应的两种形态分别示于图5.32 c 和5.32 d 中。

对于具有其它端点条件的梁，也可以得到相似的结果。然而方程（f）和（g）的解变得较为复杂，但是我们应用瑞利-里兹法*可以计算联合振动的频率的近似值。在梁无对称平面的情况下，问题变得更加复杂**。其扭转振动与两个主平面内的弯曲振动耦合，我们得到三个联立微分方程而不是两个。在实际应用中，我们还遇到变截面非对称梁的扭转和弯曲联合振动的更复杂问题。例如，涡轮机叶片、飞机机翼和螺旋桨之类会产生这种问题。为了求解这些问题，通常应用数值法。

5.22 圆环的振动

圆环的振动问题在研究转动着的机器中各类圆形部分的频率时会碰到。在下面讨论中，考虑几种涉及等截面圆环振动的简单问题，此时假设环的横截面尺寸与其中心线的半径 r 相比很小（见图5.33 a）。还假设环的平面（$x-y$ 平面）为每一横截面的对称平面。

扩展振动　最简单的扩展振型是环的中心线形成周期性地变化半径的圆，所有横截面作径向运动而无转动（图5.33 b）。令符号 u 表示环上任何一点的径向位移（正的向外）。于是该环顺圆周方向的单位长度的伸长（伸张应变）等于 u/r。由于这种简单的拉力能量组成的变形势能借下列方程给出：

$$U=\frac{AEu^2}{2r^2}2\pi r \tag{a}$$

其中 A 为环的横截面面积。此外，振动过程中的动能为

$$T=\frac{\rho A}{2}\dot{u}^2 2\pi r \tag{b}$$

令势能最大值和动能最大值相等，并应用 $\dot{u}_{max}=pu_{max}$，我们得到

$$p=\sqrt{\frac{E}{\rho r^2}} \tag{c}$$

这样，基本扩展型的频率（见图5.33 b）为

$$f=\frac{p}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{E}{\rho r^2}} \tag{5.161}$$

圆环还具有类似于棱柱形杆纵向振动的其它扩展型。如果 i 表示圆周的波长数目，那么环的较高扩展振型的频率从下列方式来确定***：

---

* 按此方式，C.F.Garland研究了悬臂梁弯曲与扭转的联合振动。

** 一般情况的微分方程为K.Federhofer所讨论，Stizber.Akad.Wiss.Wien, Abt.IIa, Vol.156, 1947, p.343。

*** A.E.H.Love, Mathematical Theory of Elasticity, 4th ed., Cambridge Univ. Press, London, 1934, p.454。

地信网论坛 BBS.3500U.COM

$$f_i=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{E(1+i^2)}{\rho r^2}} \tag{5.162}$$

当 $i=0$ 时，此式得出纯径向振动的方程（5.161）。

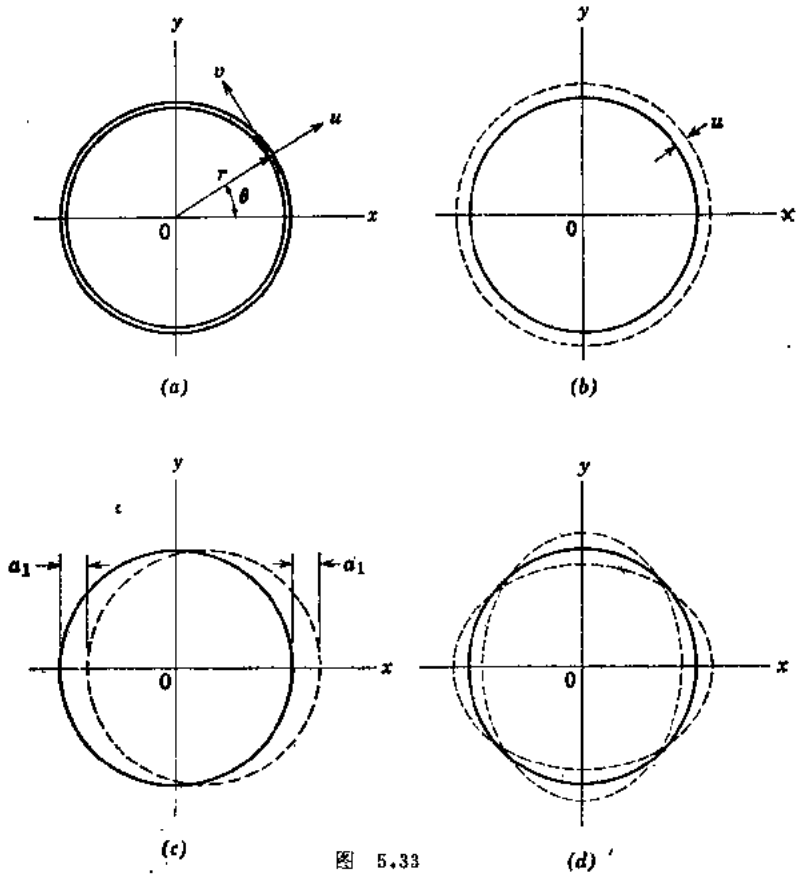


图 5.33

扭转振动　现在考虑扭转振动的基本型。在此型中，环的中心线保持不变形，环的所有横截面转过相同的角 ψ（见图5.34）。由于此种转动，距环中间平面距离 z 处的一点将有一近似等于 $z\psi$ 的径向位移，相应的圆周应变可取等于 $z\psi/r$。环变形的势能现在可以计算如下：

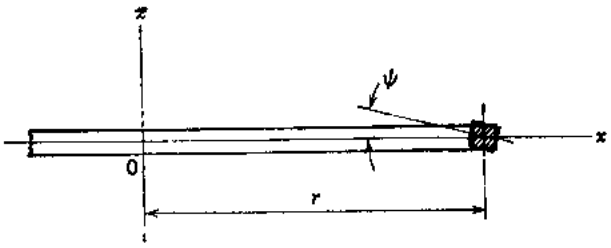


图 5.34

$$U=2\pi r\int_A\frac{E}{2}\left(\frac{z\psi}{r}\right)^2 dA=\frac{\pi EI_x\psi^2}{r} \tag{d}$$

此式中 I_x 为横截面绕 x 轴的惯性矩。

扭转振动过程中环的动能为

$$T=2\pi r\frac{\rho I_p\dot{\psi}^2}{2} \tag{e}$$

式中 I_p 为横截面的极惯性矩。

令 U_{max} 与 T_{max} 相等，并应用 $\dot{\Psi}_{max}=p\Psi_{max}$，我们求出

$$p=\sqrt{\frac{EI_x}{\rho r^2 I_p}} \qquad (f)$$

于是扭转振动的频率为

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{EI_x}{\rho r^2 I_p}} \qquad (5.163)$$

将此结果与公式（5.161）比较，我们得出结论，扭转振动的频率与纯径向振动的频率之比为 $\sqrt{I_x/I_p}$。

对于圆形横截面的环，扭转振型的频率借下列公式给出*：

$$f_1=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{E(1+i^2)}{2\rho r^2}} \qquad (5.164)$$

回顾

$$\sqrt{\frac{E}{\rho r^2}}=\frac{a}{r}$$

式中 a 为声顺环的切线方向传播的速度，我们看到上面所考虑的扩展振动和扭转振动通常具有高的频率。如果考虑环的弯曲振动，那么将得到很低的频率。

弯曲振动　圆形环的弯曲振动分为两类，亦即在环平面内的弯曲振动和包括对环平面成直角的位移和扭转位移的弯曲振动。让我们应用下列诸符号考虑在环平面内的弯曲振动（图 5.33a）

θ＝确定环上一点的位置的角。

u＝径向位移（正的向外）。

v＝切向位移（顺增大θ的方向为正）。

I＝横截面对垂直于环平面的主轴的惯性矩。由于位移 u 和 v，任一点处环中心线的单位伸长为

$$e=\frac{u}{r}+\frac{\partial v}{r\partial\theta} \qquad (g)$$

其曲率的改变可以用下列方程表示**：

$$\frac{1}{r+\Delta r}-\frac{1}{r}=-\frac{\partial^2 u}{r^2\partial\theta^2}-\frac{u}{r^2} \qquad (h)$$

对于在环平面内弯曲振动的最普遍的情况，径向位移 u 可以展开成三角级数形式***：

$$u=a_1\cos\theta+a_2\cos2\theta+\cdots+b_1\sin\theta+b_2\sin2\theta+\cdots \qquad (i)$$

其中系数 a_1、a_2、$\cdots b_1$、b_2、$\cdots$ 均为时间的函数。考虑无扩展的弯曲振动****，我们取 $e=0$；方程（g）给出

$$u=-\frac{\partial v}{\partial\theta} \qquad (j)$$

将方程（i）代入方程（j），随着积分*****，得出

$$v=-a_1\sin\theta-\frac{1}{2}a_2\sin2\theta-\cdots+b_1\cos\theta+\frac{1}{2}b_2\cos2\theta+\cdots \qquad (k)$$

---

* Love, op.cit., p.453.

** 此方程为Boussinesq所建立, Comptes rend., Vol.97, 1883, p.843。

*** 相当于纯径向振动的级数常数项已省略。

**** 关于考虑扩展的弯曲振动的讨论见F.W.Waltking, Ing.-Arch., Vol.5, 1934, p.429, 和K.Federhofer, Sitzber.Acad.Wiss.Wien, Abt.IIa, Vol.145, 1936, p.29。

***** 代表环在其自身平面内刚体旋转的积分常数已省略。

地信网论坛 BBS.3500I.COM

环上任一横截面的弯矩为

$$M=-\frac{EI}{r^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+u\right) \tag{l}$$

因而，我们得到弯曲势能：

$$U=\frac{EI}{2r^4}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+u\right)^2 r\,d\theta \tag{m}$$

将级数（i）代入方程（m），并应用下列公式

$$\int_0^{2\pi}\cos m\theta\cos n\theta\,d\theta=0 \qquad \int_0^{2\pi}\sin m\theta\sin n\theta\,d\theta=0 \qquad (m\neq n)$$

$$\int_0^{2\pi}\cos m\theta\sin m\theta\,d\theta=0 \qquad \int_0^{2\pi}\cos^2 m\theta\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sin^2 m\theta\,d\theta=\pi$$

我们得到

$$U=\frac{EI\pi}{2r^3}\sum_{i=1}^{\infty}(1-i^2)^2(a_i^2+b_i^2) \tag{n}$$

振动着的环的动能为

$$T=\frac{\rho A}{2}\int_0^{2\pi}(\dot{u}^2+\dot{v}^2)r\,d\theta \tag{o}$$

将 u 和 v 的方程（i）和（k）代入，我们发现方程（o）成为

$$T=\frac{\pi r\rho A}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{i^2}\right)(\dot{a}_i^2+\dot{b}_i^2) \tag{p}$$

应用拉格朗日方程于保守系统*和广义坐标a_i，我们得到下列运动微分方程：

$$\pi r\rho A\left(1+\frac{1}{i^2}\right)\ddot{a}_i+\frac{EI\pi}{r^3}(1-i^2)^2 a_i=0$$

或

$$\ddot{a}_i+\frac{EIi^2(1-i^2)^2}{\rho Ar^4(1+i^2)}a_i=0 \tag{q}$$

并对广义坐标b_i得到相同形式的方程。因此，第 i 振型的频率借下式给出

$$f_i=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{EIi^2(1-i^2)^2}{\rho Ar^4(1+i^2)}} \tag{5.165}$$

当 $i=1$ 时，我们得到 $f_1=0$。在此情况下 $u=a_1\cos\theta$ 和 $v=a_1\sin\theta$；该环如刚体一样运动。按图5.33 c 所示，a_1项代表顺 x 方向的刚体运动。当 $i=2$ 时，环按基本弯曲振型振动。在此振动过程中环的极端位置用虚线示于图5.33 d 中。

在圆形横截面环的弯曲振动的情况下，涉及垂直于环平面的位移和扭转位移，其主振型的频率可以从下列方程计算**：

$$f_i=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{EIi^2(i^2-1)^2}{\rho Ar^4(i^2+1+\nu)}} \tag{5.166}$$

---

* 见 S.Timoshenko 和 D.H.Young, Advanced Dynamics, McGraw-Hill, New York, 1948, p.212。

** Love, op.cit., p.453。

地信网论坛 BBS.3500L.COM

其中 ν 表示泊松比。比较方程（5.165）和（5.166），我们得出结论，即使在最低型（$i=2$）时，这两类弯曲振动的频率是不同的，但是相差甚微。

5.23 薄膜的横向振动

张拉着的薄膜是第 5.8 节中所讨论的张拉着的钢丝（或弦）的二维相似物。在下面讨论中，假设薄膜是一完全柔性的等厚度的薄片。进一步假设它顺任何方向被拉力均匀地张拉着，此拉力大到以致振动过程中微小挠度引起该拉力的波动可以略去不计。取薄膜的平面为 $x-y$ 平面，我们应用下列诸符号：

v = 薄膜上任何一点顺垂直 $x-y$ 平面方向的位移；

S = 边界单位长度上的均匀拉力（见图5.35）；

w = 单位面积的薄膜重量。

挠曲后的薄膜势能的增加可借薄膜表面积的增大与均匀拉力 S 相乘来得到。处于挠曲后位置时，薄膜的表面积成为：

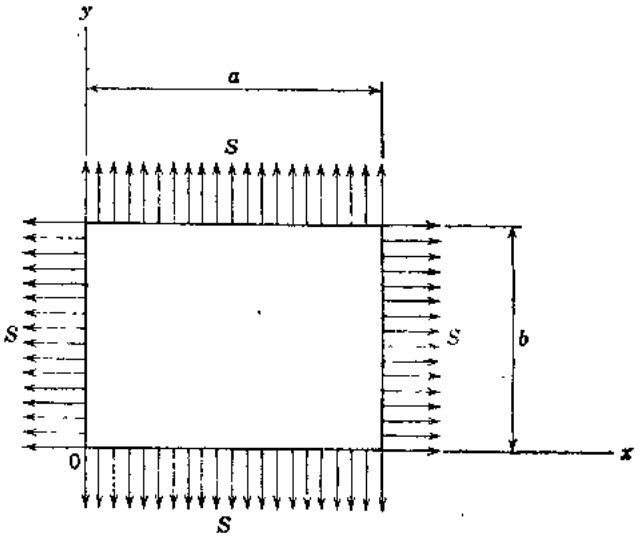


图 5.35

$$A=\iint\sqrt{1+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

对于微小的挠度，此式可以用下式近似表示：

$$A\approx\iint\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right\}dxdy$$

于是势能的增量为

$$\Delta U\approx\frac{S}{2}\iint\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right\}dxdy \qquad (a)$$

另外，振动过程中薄膜的动能为

$$T=\frac{W}{2g}\iint\dot{v}^2\,dxdy \qquad (b)$$

现在将研究特定类型的薄膜的振动特征。

矩形薄膜 令 a 和 b 表示矩形薄膜的各边长度，如图5.35所示。不论坐标函数 v 是什么样子的，它在矩形边界内总可以借下面二重级数来表示：

$$v=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\phi_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \qquad (c)$$

其中诸系数 ϕ_{mn} 均为时间的函数。容易看出级数（c）中的每一项满足诸边界条件。亦即，满足 $x=0$ 和 $x=a$，$v=0$；满足于 $y=0$ 和 $y=b$，$v=0$。将方程（c）代入势能增量的（a）式，我们得到

地信网论坛 BBS.35001.COM

$$\Delta U \approx \frac{S\pi^2}{2}\int_0^a\int_0^b\left\{\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\phi_{mn}\frac{m}{a}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\right)^2\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\phi_{mn}\frac{n}{b}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\right)^2\right\}dxdy$$

此式对整个薄膜面积进行积分，我们用第1.11节中的公式求出

$$\Delta U \approx \frac{S}{2}\ \frac{ab\pi^2}{4}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\phi_{mn}^2 \qquad (d)$$

按相似方式，方程（b）中的动能可以表达为

$$T=\frac{wab}{8g}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\dot{\phi}_{mn}^2 \qquad (e)$$

薄膜上典型单元的惯性力为$-(w/g)\ddot{v}dxdy$。如前面那样进行，并考虑一虚位移：

$$\delta v_{mn}=\delta\phi_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

我们得到按主坐标的自由振动运动微分方程为

$$\frac{wab}{4g}\ddot{\phi}_{mn}+S\frac{ab\pi^2}{4}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\phi_{mn}=0 \qquad (f)$$

由此得出

$$f_{mn}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{gS}{w}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)} \qquad (5.167)$$

令$m=n=1$，就得到基本振型：

$$f_{11}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{gS}{w}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)} \qquad (5.168)$$

在此情况下，薄膜挠曲后的表面借级数（c）中第一项定义为

$$v=C\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} \qquad (g)$$

从方程（f）看出，按级数（c）这样一些项构成现在所讨论情况下的正规函数。如果薄膜是方形的（$a=b$），那么最低频率为

$$f_{11}=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{gS}{2w}} \qquad (5.169)$$

此频率直按正比于拉力S的平方根，而反比于长度a和单位面积重量w的平方根。

令数目m或n中的一个等于2，另一个等于1，得到下面两个较高振型。这两个振型具有相同频率（对于$a=b$）但形状不同。图5.36a和5.36b中的虚线表示这两个振型的波节线（振动过程中沿达种线的挠度为零）。因为频率相同这一事实，所以按它们最大挠度的各种比值将这两个面彼此迭加起来是有趣的。这样一种组合借下式来表达：

$$v=C\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}+D\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{a}$$

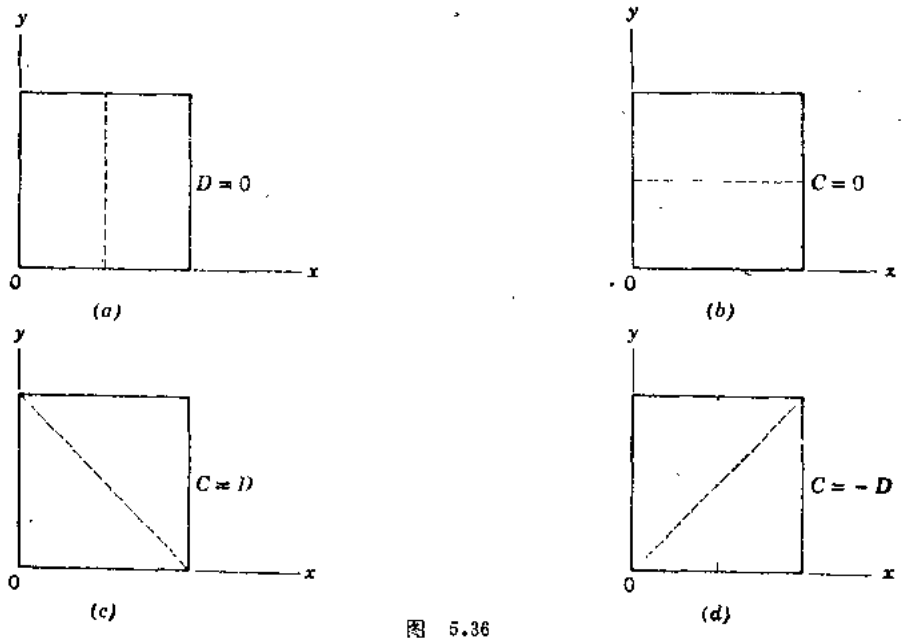


图 5.36

式中C和D非常小但是是任意的量。四种这样组合振动的特定情况已示于图5.36 a、b、c和d中。取$D=0$，我们得到上面所述示于图5.36 a中的振动。振动着的薄膜借一根平行于y轴的波节线划分成两个部分。当$C=0$时，薄膜借一根平行于x轴的波节线划分如图5.36 b所示。当$C=D$时，我们得到

$$v = C\left(\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a} + \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{a}\right)$$

$$= 2C\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}\left(\cos\frac{\pi x}{a} + \cos\frac{\pi y}{a}\right)$$

当

$$\sin\frac{\pi x}{a} = 0 \qquad 或 \qquad \sin\frac{\pi y}{a} = 0$$

或当

$$\cos\frac{\pi x}{a} + \cos\frac{\pi y}{a} = 0$$

时，前式变为零。这前两个方程给予我们诸边界边，从第三个方程我们得到

$$\frac{\pi x}{a} = \pi - \frac{\pi y}{a}$$

或

$$x + y = a$$

此式代表方形的一根对角线，如图5.36 c中所示。反之，图5.36 d代表当$C=-D$的情况。在这最后两种情况下，薄膜的每半个部分可以分开按三角形薄膜考虑。图5.36 a、b、c和d中任一振型的频率借方程（5.167）给出为

$$f = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{gS}{w}\left(\frac{4}{a^2} + \frac{1}{a^2}\right)} = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{5gS}{w}} \tag{5.170}$$

按这种方式，还可以考虑方形薄膜或矩形薄膜的较高振型*。

* 更详细的讨论可在J.W.S.Rayleigh, Theory of Sound, 2nd ed., Vol.I, Dover Publ., New York, 1945, Chap.Ⅸ。

地信网论坛 BBS.3500L.COM

现在让我们考虑薄膜的强迫振动，其运动微分方程（f）为

$$\frac{wab}{4g}\ddot{\phi}_{mn}+S\frac{ab\pi^2}{4}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\phi_{mn}=Q_{mn} \tag{h}$$

其中Q_{mn}按这样的方式来选定，即$Q_{mn}\delta\phi_{mn}$代表按主坐标干扰力的虚功。作为一个例子，我们取作用于薄膜中心处一谐和力$P_1(t)=P\cos\omega t$的情况。借引起薄膜一虚位移δv_{mn}〔见方程（c）〕，我们求出由于该力所做的虚功：

$$\delta W_p-P\cos\omega t\delta\phi_{mn}\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}=Q_{mn}\delta\phi_{mn}$$

从此式我们看到当m和n二者均为奇数时，$Q_{mn}=\pm P\cos\omega t$，反之，$Q_{mn}=0$。将此结果代入方程（h）并应用杜哈梅积分，我们得到

$$\phi_{mn}=\pm\frac{4gP}{abwp_{mn}}\int_0^t\sin p_{mn}(t-t')\cos\omega t'\,dt'$$

$$=\pm\frac{4gP}{abw(p_{mn}^2-\omega^2)}(\cos\omega t-\cos p_{mn}t) \tag{i}$$

式中m和n二者均为奇数，而且

$$p_{mn}^2=\frac{gS\pi^2}{w}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)$$

将方程（i）代入（c）式，产生现在讨论情况中的全解。

当强度为$Q(x,\ y,\ t)$的分布干扰力作用于薄膜上时，我们得到

$$Q_{mn}=\int_0^b\int_0^a Q\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dxdy \tag{j}$$

例如，假设均布荷载Q_0在初始时刻（$t=0$）作用于薄膜上。于是从方程（j）我们得到

$$Q_{mn}=\frac{abQ_0}{mn\pi^2}(1-\cos m\pi)(1-\cos n\pi)$$

当m和n二者均为奇数时，此式得出

$$Q_{mn}=\frac{4abQ_0}{mn\pi^2} \tag{k}$$

否则，Q_{mn}变为零。将方程（k）代入方程（h），并假设该薄膜起始时处于静止，我们求出

$$\phi_{mn}=\frac{16gQ_0(1-\cos p_{mn}t)}{wmn\pi^2p_{mn}^2} \tag{l}$$

因而，由于突然作用压力Q_0所产生的振动借下式给出

$$v=\frac{16gQ_0}{\pi^2w}\sum_m\sum_n\frac{1-\cos p_{mn}t}{mnp_{mn}^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{m}$$

式中m和n二者均为奇数。

里兹法　在计算薄膜固有振型的频率中，里兹法是非常有用的。为了应用这种方法，我们假设振动着的薄膜的挠度借下式给出

$$v=Z\cos(pt-\alpha) \tag{n}$$

式中Z为坐标x和y的适当函数，它近似表示挠曲后薄膜的形状，亦即近似表示振型。将方程（n）代入势能增量的式（a），我们求出其最大值为

地信网论坛 BBS.3500U.COM

$$\Delta U_{max}\approx\frac{S}{2}\iint\left\{\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2\right\}dxdy \qquad (o)$$

从（b）我们得到最大动能：

$$T_{max}=\frac{W}{2g}p^2\iint Z^2dxdy \qquad (p)$$

令（o）式与（p）式相等，我们求出

$$p^2=\frac{Sg}{w}\frac{\iint\left\{\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2\right\}dxdy}{\iint Z^2dxdy} \qquad (q)$$

在里兹法中，我们取薄膜挠曲后表面的表达式Z为级数形式

$$Z=a_1\Phi_1(x,y)+a_2\Phi_2(x,y)+a_3\Phi_3(x,y)+\cdots \qquad (r)$$

其中每一项满足边界处的诸条件（薄膜边界处的挠度必定等于零）。级数中的系数a_1，a_2，a_3，…应按使（q）式得出p^2的一个最小值这样的方式来选定。这样

$$\frac{\partial}{\partial a_n}\frac{\iint\left\{\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2\right\}dxdy}{\iint Z^2dxdy}=0$$

或

$$\iint Z^2dxdy\frac{\partial}{\partial a_n}\iint\left\{\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2\right\}dxdy-\iint\left\{\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2\right\}dxdy\frac{\partial}{\partial a_n}\iint Z^2dxdy=0$$

将关系式（q）用于这后一方程中，我们求出

$$\frac{\partial}{\partial a_n}\iint\left\{\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2-\frac{p^2w}{gS}Z^2\right\}dxdy=0 \qquad (s)$$

按这种方式我们得到与级数（r）中的系数一样多的（s）型方程。所有这些方程将与a_1，a_2，a_3…成线性，令这些方程的行列式等于零就得到薄膜的频率方程。

例如，考虑与x轴和y轴成对称的方形薄膜（见图5.37)的振型，我们可以取级数(r)为下列形式：

$$Z=(a^2-x^2)(a^2-y^2)(a_1+a_2x^2+a_3y^2+a_4x^2y^2+\cdots)$$

当$x=y=\pm a$时此级数的每一项等于零。因此，边界处诸条件得到满足。

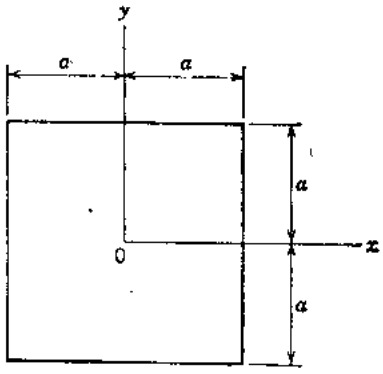


图 5.37

对于成凸多边形形状的薄膜，其边界条件借取下式得到满足：

$$Z=[(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)\cdots]\sum_m\sum_n a_{mn}x^my^n$$

式中$a_1x+b_1y+c_1=0$，…等为多边形的诸边方程。仅取此级数的第一项（$m=0$，$n=0$），通常我们将求出一个满意的基本振型的近似值。如果需要求较高振型的频率，那么需要采取较多的项。

地信网论坛 BBS.3500L.COM

圆形薄膜　我们将考虑圆形薄膜振动的最简单情况，这里薄膜挠曲后的表面对圆中心成对称。在此情况下，挠度仅取决于径向距离 r，其边界条件借下面级数得到满足：

$$Z = a_1\cos\frac{\pi r}{2a} + a_2\cos\frac{3\pi r}{2a} + \cdots \qquad (t)$$

其中 a 代表边界的半径。

为了方便，我们采用极坐标，在此情况下，方程（o）须用下列方程代替：

$$\Delta U_{max} \approx \frac{S}{2}\int_0^a \left(\frac{\partial Z}{\partial r}\right)^2 2\pi r\,dr \qquad (o')$$

另外，不用方程（p），我们取

$$T_{max} = \frac{w}{2g}\,p^2\int_0^a Z^2 2\pi r\,dr \qquad (p')$$

方程（s）用下式代替

$$\frac{\partial}{\partial a_n}\int_0^a\left\{\left(\frac{\partial Z}{\partial r}\right)^2 - \frac{p^2 w}{gS}\,Z^2\right\}2\pi r\,dr = 0 \qquad (s')$$

仅取级数（t）中的第一项，并将 $Z = a_1\cos\pi r/2a$ 代入方程（s'），我们得到

$$\frac{\pi^2}{4a^2}\int_0^a \sin^2\frac{\pi r}{2a}\,r\,dr = \frac{p^2 w}{gS}\int_0^a \cos^2\frac{\pi r}{2a}\,r\,dr$$

从它得出

$$\frac{\pi^2}{4a^2}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi^2}\right) = \frac{p^2 w}{gS}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi^2}\right)$$

或

$$p = \frac{2.415}{a}\sqrt{\frac{gS}{w}}$$

此情况的精确解*为

$$p = \frac{2.404}{a}\sqrt{\frac{gS}{w}} \qquad (5.171)$$

第一近似值的误差小于0.5%。

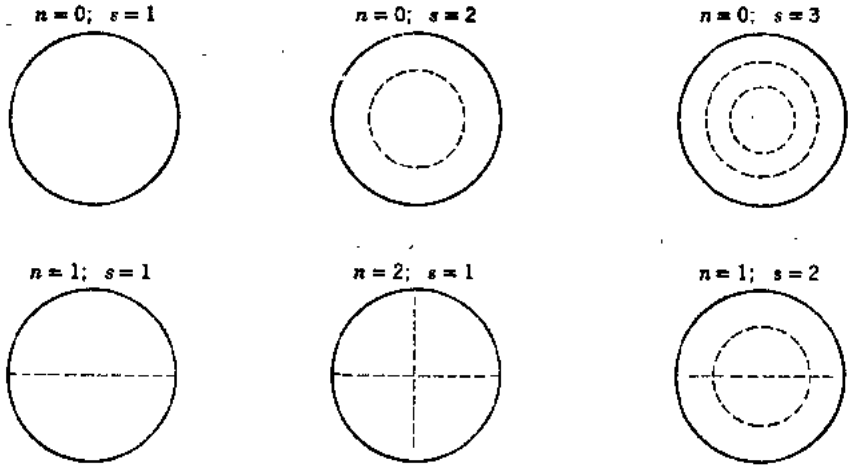


图　5.38

* Rayleigh，出处同上。

地信网论坛 BBS.35001.COM

为了得到基本振型和较高振型频率的较好近似值，我们须取级数（t）中的较多项。这些较高振型将有一个、两个、三个等波节圆，振动过程中，这些波节圆处的位移 v 为零。

除了对中心成对称的振型外，圆形薄膜还可能有这样的振型，在振动过程中沿一根、两根、三根直径的挠度为零的振型，这种直径称为波节直径。几种圆形薄膜的振型示于图5.38中，图中诸波节圆和诸波节直径均以虚线表示。

在所有情况下，确定频率的p_{ns}量可以表达成：

$$p_{ns}=\frac{a_{ns}}{a}\sqrt{\frac{gS}{w}} \tag{5.172}$$

此公式中常数a_{ns}给于表5.1内*，该表中的 n 代表波节直径的数目，s 为波节圆的数目（边界圆包括在 s 的数目中）。

在前面讨论中，假设薄膜具有一个完整的圆形面积，并且假设仅固定于圆形边界处，但是已经得到的结果也包括其它问题的解，如由两个同心圆和两个半径所包围的薄膜，或扇形形状的薄膜。例如，考虑一个半圆薄膜。此薄膜的所有可能振型包括在圆形薄膜可能产生的振型之中。仅需要考虑圆形薄膜波节直径之一为固定边界。

表 5·1

s	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
1	2.404	3.832	5.135	6.379	7.586	8.780
2	5.520	7.016	8.417	9.760	11.064	12.339
3	8.654	10.173	11.620	13.017	14.373	15.700
4	11.792	13.323	14.796	16.224	17.616	18.982
5	14.931	16.470	17.960	19.410	20.827	22.220
6	18.071	19.616	21.117	22.583	24.018	25.431
7	21.212	22.760	24.270	25.749	27.200	28.628
8	24.353	25.903	27.421	28.909	30.371	31.813

当薄膜的边界近似地为圆形时，其最低振型接近具有相同面积和相同 gS/w 值的圆形薄膜。一般来说，确定薄膜基本振型的频率的方程可取下列形式：

$$p=a\sqrt{\frac{gS}{wA}} \tag{5.173}$$

式中A为薄膜的面积。此方程中常数 a 按下列表给出，该常数说明偏离圆形形式的效应**：

圆形	$a=2.404\sqrt{\pi}=4.261$
方形	$a=\pi\sqrt{2}=4.443$
四分之一圆	$a=(5.135/2)\sqrt{\pi}=4.551$
60°圆扇形	$a=6.379\sqrt{\pi/6}=4.616$
矩形($a/b=3/2$)	$a=\pi\sqrt{13/6}=4.624$
等边三角形	$a=2\pi\sqrt{\tan 30^\circ}=4.774$
半圆	$a=3.832\sqrt{\pi/2}=4.803$
矩形($a/b=2/1$)	$a=\pi\sqrt{5/2}=4.967$
矩形($a/b=3/1$)	$a=\pi\sqrt{10/3}=5.736$

* 表5.1中的诸值是Bourget计算的，Ann.l'e'cole normale, Vol.3, 1866。

** Rayleigh，出处同上。

地信网论坛 BBS.3500L.COM

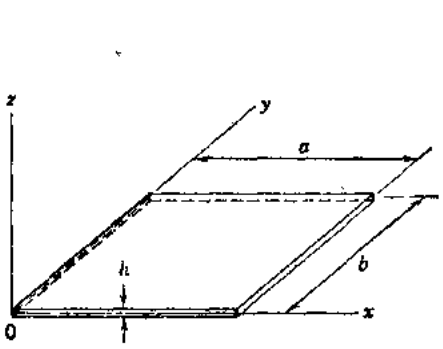
在边界不同于上面所讨论的情况下，振动研究出现较大的数学困难。然而，椭圆形边界的情况已完全求解出来了*。

5.24 板的横向振动

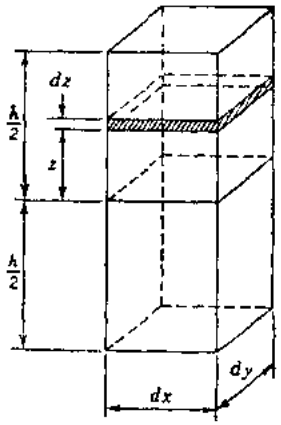
图5.39 a 表示一块均匀厚度 h 的板，假设此厚度与板的其它尺寸相比很小。我们取 $x-y$ 平面为板的中间平面，并假设顺 z 方向的挠度与厚度 h 相比很小。另外，在振动过程中板的中间平面的法线假设保持垂直于挠曲后的中间面。

让我们考虑图5.39 b 内距中间面距离 z 处阴影面积所示一薄层典型单元的诸应变。这些应变用下列方程代表**：

$$\varepsilon_x=-z\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\qquad \varepsilon_y=-z\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\qquad \gamma_{xy}=-2z\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\tag{a}$$



(a)



(b)

图 5.39

这些式子中，v 表示板顺 z 方向的挠度；ε_x、ε_y和γ_{xy}为该薄层中的诸法向应变和剪切应变。相应于这些应变的应力用大家知道的下列关系式来确定***：

$$\sigma_x=\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x+\nu\varepsilon_y)=-\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

$$\sigma_y=\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y+\nu\varepsilon_x)=-\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)\tag{b}$$

$$\tau_{xy}=G\gamma_{xy}=-\frac{Ez}{(1+\nu)}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$$

其中ν表示泊松比。

在变形过程中，阴影单元薄层内聚集的势能为

$$dU=\left(\frac{\varepsilon_x\sigma_x}{2}+\frac{\varepsilon_y\sigma_y}{2}+\frac{\gamma_{xy}\tau_{xy}}{2}\right)dxdydz$$

将方程（a）和（b）代入此式得出

$$dU=\frac{Ez^2}{2(1-\nu^2)}\left\{\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)^2+2\nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right.$$

---

* E Mathieu, J, Math.(Liouville), Vol.13, 1868。

** 假设中间面无伸长。

*** 见S.Timoshenko和J.N.Goodier, Theory of Elasticity, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1970。

地信网论坛 BBS.3500L.COM

$$+2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)^2\Big\}dxdydz \qquad (c)$$

将方程（c）对板的整个体积进行积分，我们得到弯曲势能为

$$U=\iiint dU=\frac{D}{2}\iint\Big\{\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)^2+2\nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$
$$+2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)^2\Big\}dxdy \qquad (5.174)$$

式中$D=Eh^3/[12(1-\nu^2)]$为板的弯曲刚度。

横向振动着的板的动能为

$$T=\frac{\rho h}{2}\iint \dot{v}^2 dxdy \qquad (5.175)$$

式中ρh为单位面积的质量。现在将这些U和T的表达式用于特殊类型的板。

矩形板　在具有简支边的矩形板情况下（见图5.39a），我们可以按矩形薄膜那样进行，并取振动过程中板的挠度为二重级数：

$$v=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\phi_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \qquad (d)$$

这是为现在考虑情况中的正规函数。容易看出此级数的每一项满足诸边缘处条件，这些条件要求在$x=0$处和$x=a$处$v=\partial^2 v/\partial x^2=0$；在$y=0$和$y=b$处$v=\partial^2 v/\partial y^2=0$。如果方程（$d$）代入方程（5.174），那么得到下列势能表达式：

$$U=\frac{\pi^4 ab}{8}D\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\phi_{mn}^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2 \qquad (5.176)$$

此外，动能〔方程(5.175)〕成为

$$T=\frac{\rho hab}{8}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\dot{\phi}_{mn}^2 \qquad (5.177)$$

板上典型单元的惯性力为$-\rho h\ddot{v}dxdy$。如前面那样进行，并考虑一虚位移：

$$\delta v_{mn}=\delta\phi_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

我们得出按主坐标的自由振动的运动微分方程为

$$\rho h\ddot{\phi}_{mn}+\pi^4 D\phi_{mn}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2=0$$

此方程之解为

$$\phi_{mn}=C_1\cos pt+C_2\sin pt$$

式中

$$p=\pi^2\sqrt{\frac{D}{\rho h}}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right) \qquad (5.178)$$

从此公式，可以容易地计算出振动频率。例如，在方形板的情况下，我们得到最低振型：

$$f_1=\frac{p_1}{2\pi}=\frac{\pi}{a^2}\sqrt{\frac{D}{\rho h}} \qquad (5.179)$$

在考虑较高振型和它们的波节线时，我们看到前面对方形薄膜振动所作的讨论（见图5.36）同样很好地适用于方形板。此外，具有简支边缘的矩形板的强迫振动可以没有困难地得到解

地信网论坛 BBS.35001.COM

决。应注意，两条相对边缘为支承着而另外两条边缘为自由或嵌固着的矩形板的振动，也可以没有很大的数学困难而得到分析*。

然而，所有边缘为自由或为嵌固的板的振动分析是相当复杂的。对于这些问题的解，里兹法是非常有用的**。为了用此方法，我们假设

$$v = Z\cos(pt-\alpha) \qquad (e)$$

式中Z为x和y的函数，它近似表示振型。将方程（e）代入方程（5.174）和（5.175），我们得到下列振动的最大势能和最大动能的表达式

$$U_{max}=\frac{D}{2}\iint\left\{\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\right)^2+2\nu\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}+2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}\right)^2\right\}dxdy$$

$$T_{max}=\frac{\rho h}{2}p^2\iint Z^2dxdy$$

令这些表达式相等，并对p^2求解，我们求出

$$p^2=\frac{2}{\rho h}\frac{U_{max}}{\iint Z^2dxdy} \qquad (5.180)$$

现在我们取函数Z为下列级数形式：

$$Z=a_1\Phi_1(x,y)+a_2\Phi_2(x,y)+a_3\Phi_3(x,y)+\cdots \qquad (f)$$

其中每一项满足板边界处的诸条件。然后需要按使方程（5.180）的结果为最小的方式确定系数a_1，a_2，$a_3\cdots$。按这种方法，我们得到下列类型的方程系：

$$\frac{\partial}{\partial a_n}\iint\left\{\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\right)^2+2\nu\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}+2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{p^2\rho h}{D}Z^2\right\}dxdy=0 \qquad (5.181)$$

它们对常数a_1，a_2，$a_3\cdots$成线性。令这些方程的行列式等于零，我们求出板的频率方程。

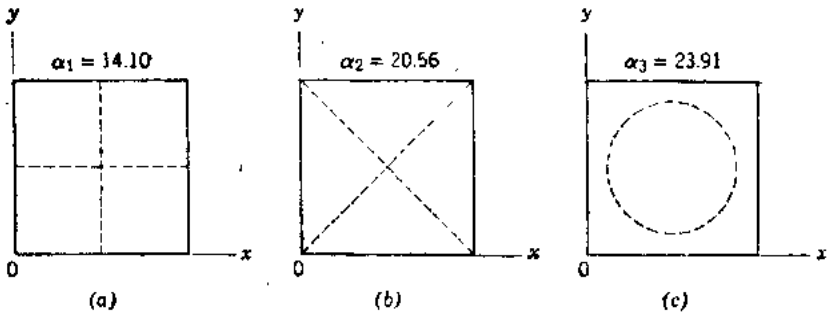


图 5.40

W.里兹将此方法用于研究具有自由边缘的方形板的振动***。在此情况下，曾取级数（f）为下列形式：

---

* 见W.Voigt, Nachr.Ges.Wiss.Göttinger, 1893, p.225.

** 见W.Ritz, Ann.Physik, Vol.28, 1909, p.737。Ritz 法的精确度已为S.Tomatika所讨论, Phil. Mag., ser.7, Vol.21, 1936, p.745.亦见A.Weinstein和W.Z.Chien, Quart.Appl.Math., Vol.1, 1943, p.61.

*** 出处同上。里兹法对于几种其它边缘条件的应用为 Dana Young 所作, Jour. Appl. Mech., Vol.17, 1950, p.448。

$$Z=\sum_m\sum_n a_{mn}X_m(x)Y_n(y) \qquad (f')$$

式中$X_m(x)$和$Y_n(y)$为自由端棱柱形梁振动的正规函数（见第5.11节）。各种振型频率可以借下列公式确定：

$$p=\frac{\alpha}{a^2}\sqrt{\frac{D}{\rho h}} \qquad (5.182)$$

其中α为取决于振型的常数。对于三种最低振型，此常数的值为*

$$\alpha_1=14.10 \qquad \alpha_2=20.56 \qquad \alpha_3=23.91$$

诸相应振型的波节线示于图5.40a、b和c中。

圆形板　圆形板的振动问题已为G.R.克希霍夫所解决**，他计算了自由边界板的几种振型的频率。此种问题的精确解涉及贝塞尔函数的应用。下面借里兹法提出一个近似解，通常它对最低型的应用给以足够的精确度。在应用这种方法中，将势能和动能的表达式(5.174)和（5.175）变换为极坐标是有益的。

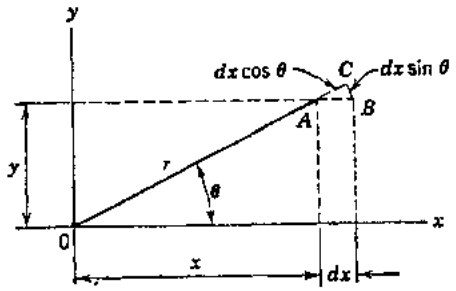


图　5.41

图5.41中，我们从基本三角形ABC看到顺坐标x的微小增量dx相当于

$$dr=dx\cos\theta \qquad d\theta=-\frac{dx\sin\theta}{r}$$

然后，考虑挠度v为r和θ的函数，我们得到

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial v}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{r}$$

按相似的方式，我们求出

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial r}\sin\theta+\frac{\partial v}{\partial\theta}\frac{\cos\theta}{r}$$

重复进行微分，给予我们：

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{r}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial v}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{r}\right)$$

$$=\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\cos^2\theta-2\frac{\partial^2 v}{\partial\theta\partial r}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}+\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\sin^2\theta}{r}$$

$$+2\frac{\partial v}{\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}\frac{\sin^2\theta}{r^2} \qquad (g)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\sin^2\theta+2\frac{\partial^2 v}{\partial\theta\partial r}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}+\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\cos^2\theta}{r}$$

$$-2\frac{\partial v}{\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}\frac{\cos^2\theta}{r^2} \qquad (h)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 v}{\partial r\partial\theta}\frac{\cos2\theta}{r}-\frac{\partial v}{\partial\theta}\frac{\cos2\theta}{r^2}$$

---

* 泊松比采取等于0.225。

** 见 Jour.Math. (Crelle), Vol.40, 1850. Gesammelte Abhandlungen, Leipzig, 1882, P.237, 或 Vorlesungen über mathematische Physik Mechanik, Leipzig, Vorlesung 30, 1876.

地信网论坛 BBS.3500L.COM

$$-\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}-\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2} \tag{i}$$

从它我们求出

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2} \tag{j}$$

和

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)^2=\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}\right)-\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)\right\}^2 \tag{k}$$

将方程（j）和（k）代入方程（5.174），并取板的中心为原点，我们得到

$$U=\frac{D}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^a\left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}\right)^2-2(1-\nu)\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}\right)+2(1-\nu)\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)\right\}^2\right]r\,d\theta\,dr \tag{5.183}$$

式中 a 表示板的半径。当板的挠度对中心对称时，v 将仅为 r 的函数，方程（5.183）成为

$$U=\pi D\int_0^a\left\{\left(\frac{d^2 v}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dv}{dr}\right)^2-2(1-\nu)\frac{d^2 v}{dr^2}\frac{1}{r}\frac{dv}{dr}\right\}r\,dr \tag{5.184}$$

在板于边缘处固定的情况下，下列积分

$$\iint\left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}\right)-\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)\right\}^2\right]r\,d\theta\,dr$$

变为零，我们从方程（5.183）得到

$$U=\frac{D}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^a\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}\right)^2 r\,d\theta\,dr \tag{5.185}$$

如果这样一块板的挠度对中心成对称，那么我们得到

$$U=\pi D\int_0^a\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 r\,dr \tag{5.186}$$

按极坐标，动能的表达式将为

$$T=\frac{\rho h}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^a\dot{v}^2 r\,d\theta\,dr \tag{5.187}$$

在对称情况下，我们得到

$$T=\pi\rho h\int_0^a\dot{v}^2 r\,dr \tag{5.188}$$

借用这些势能和动能的表达式，我们可以计算各种不同边界条件的圆形板固有振型的频率*。

---

* 圆板的强迫振动为W.Flugge所研究，Z.tech.Phys.Vol.13, 1932, p.139。

地信网论坛 BBS.3500L.COM

边界固定的圆形板　边缘处固定的圆形板的问题对于用于电话接收器以及类似装置是特别重要的。在应里兹法中，我们假设其解从方程（e）得到，但是将 Z 表达为 r 和 θ 的函数。对于最低振型，振动着的板的形状对中心是对称的，Z 将仅为 r 的函数。如果 Z 取为下列级数

$$Z=a_1\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)^2+a_2\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)^3+\cdots \qquad (l)$$

那么对称性的条件将得到满足。边界处诸条件也将得到满足，因为当 $r=a$ 时，级数（l）的每一项连同它对 r 的一次导数变为零。

在现在考虑的情况下，相应于方程（5.181）的最小化方程成为

$$\frac{\partial}{\partial a_n}\int_0^a\left\{\left(\frac{d^2Z}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dZ}{dr}\right)^2-\frac{p^2\rho h}{D}Z^2\right\}rdr=0 \qquad (5.189)$$

借仅取级数（l）中的一项，代入方程（5.189），我们得到

$$\frac{96}{9a^2}-\frac{p^2\rho h}{D}\frac{a^2}{10}=0$$

由此得出

$$p=\frac{10.33}{a^2}\sqrt{\frac{D}{\rho h}} \qquad (5.190)$$

为了得到更为接近的近似值，我们取级数（l）中的前两项。于是我们得到

$$\int_0^a\left(\frac{d^2Z}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dZ}{dr}\right)^2rdr=\frac{96}{9a^2}\left(a_1^2+\frac{3}{2}a_1a_2+\frac{9}{10}a_2^2\right)$$

和

$$\int_0^a Z^2rdr=\frac{a^2}{10}\left(a_1^2+\frac{5}{3}a_1a_2+\frac{5}{7}a_2^2\right)$$

方程（5.189）得出

$$a_1\left(\frac{192}{9}-\frac{\lambda}{5}\right)+a_2\left(\frac{144}{9}-\frac{\lambda}{6}\right)=0$$

和 $\qquad (m)$

$$a_1\left(\frac{144}{9}-\frac{\lambda}{6}\right)+a_2\left(\frac{96}{5}-\frac{\lambda}{7}\right)=0$$

式中

$$\lambda=a^4p^2\frac{\rho h}{D} \qquad (n)$$

令方程（m）的行列式等于零，我们得到

$$\lambda^2-\frac{(204)(48)}{5}\lambda+(768)(36)(7)=0$$

由此得出

$$\lambda_1=104.3 \qquad \lambda_2=1854$$

将这些值代入方程（n），我们求出

$$p_1=\frac{10.21}{a^2}\sqrt{\frac{D}{\rho h}} \qquad p_2=\frac{43.06}{a^2}\sqrt{\frac{D}{\rho h}} \qquad (5.191)$$

这样，p_1 给出板的最低振型的频率的改善近似值；p_2 提供第二振型的频率的粗糙近似值，

地信网论坛 BBS.3500L.COM

在这里振动着的板具有一个波节圆。用这种方法，具有波节直径的振型也可以加以研究。

在所有情况下，振动的频率将借下列方程来确定

$$p=\frac{\alpha}{a^2}\sqrt{\frac{D}{\rho h}} \tag{5.192}$$

一些α常数值（对于给定的波节直径数目 n 和给定的波节圆的数目 s）列于表5.2中。

表5·2

s	$n=0$	$n=1$	$n=2$
0	10.21	21.22	34.84
1	39.78	—	—
2	88.90	—	—

如果板浸于流体中，那么它的固有频率可能大大改变。为了将流体的质量计入基本振型，我们应该用下面公式代替（5.192）式*

$$p_1=\frac{10.21}{a^2\sqrt{1+\eta}}\sqrt{\frac{D}{\rho h}} \tag{5.193}$$

其中

$$\eta=0.6689\frac{\rho_1}{\rho}\frac{a}{h}$$

(ρ_1/ρ) 为流体质量密度与板材料的质量密度之比。例如，考虑一块边缘嵌固着浸于水中的圆形钢板。如果 $a=3.5$英寸，$h=0.125$英寸，那么η的值成为

$$\eta=0.6689\left(\frac{1}{7.8}\right)\left(\frac{3.5}{0.125}\right)=2.40$$

于是$1/\sqrt{1+\eta}=0.542$，它表明最低振型降低到原来值的0.542倍。

具有其它边界条件的圆形板　在所有情况下，振动着的圆形板的频率可借改变常数 α 的值从方程（5.192）计算出来。对于具有 n 个波节直径和 s 个波节圆的自由圆形板，其 α 具有表5.3中所列的值**。

表5·3

s	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
0	—	—	5.251	12.23
1	9.076	20.52	35.24	52.91
2	38.52	59.86	—	—

对于中心固定并具有 s 个波节圆的圆形板，诸α值给于表5.4中***。具有波节直径的振型的频率将与自由板的情况相同。

表5·4

s	0	1	2	3
α	3.75	20.91	60.68	119.7

* H.Lamb, Proc.Roy.Soc. (London), Vol.98, 1921, p.205.

** 泊松比取1/3。

*** 见R.V.Southwell, Proc.Roy.Soc. (London), Vol.101, 1922, p.133.泊松比取0.3。

地信网论坛 BBS.3500L.COM

附录　计算机程序

A.1　引　　言

对于本书中某些课题，为了加速计算，应用数字计算机是极为需要的。这些课题事实上都是数值的，需要做许多算术运算。所以，已作出几种有用的程序，纳入了此附录中。它们是按通常所说的 **BASIC** 分时语言*编制的**，它们可以广泛应用，易于学习。采用 **FORTRAN**、**ALGOL** 或一些其它语言的用户可以翻译这些程序而不需要得到本书作者的许可。

A.2　线性系统的数值解

在第1.15节中，已对具有一个自由度的线性系统的数值解课题作了讨论。这种系统对分段常数施力函数和分段线性施力函数的无阻尼反应的公式已给于方程(1.76c)、(1.76d)、(1.77c) 和 (1.77d) 中。程序**CONFORCE**利用了计算对于分段常数力的反应算法中这些公式的前两个***。这种程序的编排示于下面，后面有用于“调试”该编码的一个简单问题的结果。此例为具有刚度常数 $k=1$ 磅/英寸和固有周期 $\tau=10$ 秒的一个自由度系统，作用一个单位阶梯函数，其反应是对 $\Delta t=1$ 秒的均匀时间间隔的五个步长计算的。在第五个步长末尾处，位移x_5应为 2.0 英寸，速度v_5应为 0 英寸/秒。观察诸结果表明这些值是在机器的数值精确度之内得到的。

程序**CONFORCE**可以变换成用于计算一个自由度系统对分段线性施力函数的反应名为**LINFORCE**的第二程序****。在此情况下，递推公式 (1.77c) 和 (1.77d) 用来代替方程 (1.76c) 和 (1.76d)。所以**CONFORCE**中的某些语句必须修正以考虑这些公式中的差异。虽然 **LINFORCE**比**CONFORCE** 稍微有较多的用途，但是二者对于计算不是连续分析式的施力函数的瞬变反应都是有用的。

A.3　非线性系统的数值解

第2.6节中包括求解一个自由度系统非线性运动方程的诸数值方法。其中所详细讨论的两种方法由对每一时间步长用迭代法的平均加速度法和线性加速度法组成。平均加速度法的外推法公式给于方程 (2.64) 至 (2.69)。为了说明这些公式用于第2.6节中的例题 1、2 和 3；介绍三种名为**AVAC1A**、**AVAC2A**和**AVAC3A** 的专门程序。

---

* 分时语言 (time-sharing Language) 即会话语言 (conversational language)，是指人-机联系的语言。——译注

** J.G.Kemeny 和 T.E.Kurtz, BASIC Programming, Wiley, New York, 1967。

*** 程序 CONFORCE 即用于计算一个自由度线性系统对分段常数施力函数 (piecewise-constant forcing function) 的无阻尼反应的程序。——译注

**** 程序 LINFORCE 即用于计算一个自由度线性系统对分段线性施力函数 (piecewise-linear forcing function) 的反应的程序。——译注

地信网论坛 BBS.3500L.COM

程序 AVAC1A 计算阻尼线性系统对一个量为 Q_1 的阶梯函数的近似反应，并将结果与精确解作比较。该程序终了处的数据相当于第2.6节例题 1 中所给的数据，其输出示于表2.1 a 中。这种程序借修正每一步长中计算加速度和精确位移的语句可以变换为其它类型施力函数的AVAC1B、1C等程序。

程序AVAC2A 确定一单摆对位移和速度的初始条件的近似反应。该程序终了处为有关的第 2.6 节例题 2 的数据，其输出列于表 2.2 内。可以建立这种程序的变化程序，名为AVAC-2B、2C 等用于分析如习题组2.1中那些几何非线性的其它系统。

程序 AVAC3A 计算具有硬化弹簧的阻尼系统的近似反应，对于这种系统，其荷载-位移曲线为第 2.6 节例题 3 中所用的立方函数。假设该系统具有粘滞阻尼，并且它可以承受一个量为 Q_1 的阶梯函数。该程序末尾处的数据用于例题 3，其输出已给于表2.3中。可以作出名为AVAC3B、3C等相似程序，用于如习题组 2.2 中那些具有非线性荷载-位移曲线的其它系统。

还可以写出用于分析如习题组2.5中那样具有分段线性特征的系统的名为 AVAC4A、4B 等许多专用程序。此外，平均加速度法的任何一种程序，应用方程（2.74）所给的递推公式代替方程（2.65），可以变换为线性加速度法的程序。事实上，AVAC1A、AVAC2A和 AV-AC3A变换为LINAC1A、LINAC2A 和 LINAC3A，只需要在每一程序中改变七行。另外，第2.6节中所述的直接外推技巧可以与迭代技巧一样编制程序。然而，那种程序没有列入本附录中。

A.4 本征值和本征向量的迭代法

第 4.7 节中讨论了计算多个自由度线性系统的频率和振型形状的迭代法。确定主导本征值和相应本征向量的递推公式如方程（4.100）、（4.101）和（4.102）所示；振动系统中本征值问题的适当表达式借方程（4.103）、(4.104) 和 (4.105) 给出。此外模态约束的引入和消除第一振型和第二振型的清除矩阵的应用均为导致方程（4.106）至（4.109）的概念。所有这些方程合并成一个名为EIGIT3的程序，用于借迭代法确定一个多个自由度系统的前三个本征值和本征向量。此程序的编目包括了图4.1 a 中三个质量系统的数据，它在第4.7节中用作一数值例（见表4.1和4.2）。

EIGIT3代表一种可以用于如习题组4.7中那些具有正定系数矩阵的多个自由度系统的有用工具。它可以扩大到确定多于三个的振型，它为下一程序（DYNACON3）的组成部分。

A.5 多个自由度系统的数值解

第4.11节中，正规型法用于计算承受分段常数施力函数和分段线性施力函数的阻尼线性多个自由度系统的瞬变反应。程序DYNACON3 执行具有分段常数施力函数的系统前三个振型的方程（4.155 a）和（4.155 b）。此程序将程序CONFORCE和EIGIT3 中的逻辑与动力分析正规型法中所要求的坐标变换概念结合起来。

程序 DYNACON3的编目末尾处的数据属于图4.3 中的阻尼三个质量系统，它代表用于“调试”译码诸问题之一。在这个例子中，系统的诸参数具有这样的值 $\gamma_1=\gamma_2=\gamma_3=0.05$，$k_1=k_2=k_3=1$ 磅/英寸和 $m_1=m_2=m_3=1$ 磅-秒^2/英寸。初始的位移和速度全都为零，

地信网论坛 BBS.3500L.COM

而且一个单位阶梯函数作用于第三个质量上。用 $\Delta t = 1$ 秒的均匀时间步长，计算出了对于10秒的反应。程序后面是此数据输出的打印，我们得到了该系统前三个振型的本征值、本征向量和反应。所示数字已为手算所证实，因此，该程序认为是正确的。

如第4.11节中所讲，**DYNACON3**用于得出表 4.3所列并在图4.5中作了说明的结果。此外，从名为**DYNALIN3**的相似程序所得的结果示于表4.4和图 4.6 中。此程序计算一个承受分段线性施力函数有阻尼多个自由度系统前三个振型的动力反应。它是借应用反应表达式（4.158a）和（4.158 b）代替方程（4.155 a）和（4.155 b）从**DYNACON3**建立的。将它留给读者作为确定为此目的所要求的修正的一个练习。一个高能程序装置还可把**DYNALIN3**扩展到令振型的个数为输入参数由 1 至 n 的整数而不是拨在 3。它还有可能在反应计算中包括刚体振型（见第4.11节），有一些求解本征问题的其它数值法可以代替迭代技巧。总起来说，许多有趣且有用的程序设计有可能存在，这里仅包括它们中很少的几个。

地信网论坛 BBS.3500L.COM

附录：计算机程序

```
 1. REM……VIBRATIONS PROGRAM--CONFORCE              W. WEAVER, JR.
 2. REM  (PIECEWISE-CONSTANT FORCING FUNCTION)   STANFORD UNIV.
 3. REM……NOTATION
 4. REM       N1=NUMBER OF TIME STEPS
 5. REM       T=TIME, D=TIME INTERVAL
 6. REM       Q=MAGNITUDE OF FORCING FUNCTION
 7. REM       X=DISPLACEMENT, V=VELOCITY
 8. REM       K=SPRING CONSTANT
 9. REM       T1=NATURAL PERIOD, P=ANGULAR FREQUENCY
10. REM       X0,V0=INITIAL VALUES OF X AND V
11. DIM T(100), D(100), Q(100), X(100), V(100)
12. READ K, T1, X0, V0, N1
13. P=2*P1/T1
14. MAT READ T(N1), Q(N1)
15. PRINT 'UNDAMPED RESPONSE TO PIECEWISE-CONSTANT FORCING FUNCTION'
16. PRINT
17. PRINT
18. PRINT 'T(I)   D(I)   Q(I)      X(I)          V(I)'
19. PRINT
20. PRINT ' 0    -    -    ';X0, V0
21. REM……COMPUTE AND PRINT RESPONSE
22. D(1)=T(1)
23. X1=X0
24. V1=V0
25. FORI=1 TO N1
26.     IF I=1 THEN GO TO 30
27.     D(I)=T(I)-T(I-1)
28.     X1=X(I-1)
29.     V1=V(I-1)
30.     C1=COS (P*D(I))
31.     C2=SIN (P*D(I))
32.     X (I) =X1*C1+V1*C2/P+Q (I) * (1-C1) /K
33.     V (I) = -X1*C2*P+V1*C1+Q (I) *C2*P/K
34.     PRINT T(I), D(I), Q(I), X(I), V(I)
35. NEXT I
36. PRINT
37. STOP
38. DATA 1, 10, 0, 0, 5
39. DATA 1, 2, 3, 4, 5
40. DATA 1, 1, 1, 1, 1
41. END
COMMAND ? go
UNDAMPED RESPONSE TO PIECEWISE-CONSTANT FORCING FUNCTION
T(I) D(I) Q(I) X(I)     V(I)
 0    -    -    0          0
 1    1    1    .190983    .3693163
 2    1    1    .6909829   .5975664
 3    1    1   1.309016    .5975664
 4    1    1   1.809015    .3693166
 5    1    1   1.999998   1.430511E-06
LINE   37  (4000) STOP  EXECUTED
COMMAND ?
```

地信网论坛 BBS.3S001.COM


```
  1. REM……VIBRATIONS PROGRAM…AVAC1A                    W.WEAVER,JR.
  2. REM (AVERAGE-ACCELERATION METHOD)                  STANFORD UNIV.
  3. REM……NOTATION
  4. REM       T=TIME, D=TIME INTERVAL
  5. REM       X, Y, Z=DISPLACEMENT, VELOCITY, AND ACCELERATION
  6. REM       M, C, K=MASS, DAMPING, AND SPRING CONSTANTS
  7. REM       X0, Y0=INITIAL VALUES OF X AND Y AT TIME T=0
  8. REM       T1=TIME RANGE OF IMTEREST
  9. REM       N1=NUMBER OF TIME INTERVALS
 10. REM       E1=ALLOWABLE ERROR RATIO
 11. REM       Q1=MAGNITUDE OF STEP FUNCTION
 12. DIN T(100), X(100), Y(100), Z(100)
 13. READ M, C, K, X0, Y0, T1, N1, E1, Q1
 14. N=C/(2*M)
 15. P=SQR (K/M-N*N)
 16. D=T1/N1
 17. PRINT 'AVAC1A……TIME INTERVAL.=', D
 18. PRINT
 19. PRINT
 20. PRINT 'TIME          ITERS.          APPROX. X       EXACT X'
 21. PRINT
 22. PRINT '0                    -    ',          X0,X0
101. REM……INITIALIZE Z0 AND ITERATE Y(I), X(I), Z(I)
102. Z0=(Q1-C*V0-K*X0)/M
103. FOR I=1 TO N1
104.       T(I)=I*D
105.       IF I=1 THEN GO TO 111
106.       IF I=2 THEN GO TO 115
107.       A=Y(I-1)+Z(I-1)*D/2
108.       B=X(I-1)+V(I-1)*D/2
109.       Y1=Y(I-2)+2*Z(I-1)*D
110.       GO TO 118
111.       A=Y0+Z0*D/2
112.       B=X0+Y0*D/2
113.       Y1=Y0+Z0*D
114.       GO TO 118
115.       A=Y(1)+Z(1)*D/2
116.       B=X(1)+Y(1)*D/2
117.       Y1=Y0+2*Z(1)*D
118.       J=1
119.       GO TO 123
120.       J=J+1
121.       X(I)=X1
122.       Y1=A+Z1*D/2
123.       X1=B+Y1*D/2
124.       Z1=(Q1-C*Y1-K*X1)/M
125.       IF J=10 THEN GO TO 127
126.       IF ABS(X1-X(I))>=E1*ABS(X1)THEN GO TO 120
127.       X(I)=X1
128.       Y(I)=Y1
129.       Z(I)=Z1
130.       E=EXP(-N*T(I))*(X0*COS(P*T(I))+(Y0+N*X0)*SIN(P*T(I))/P)
131.       F=FXP(-N*T(I))*(COS(P*T(I))+N*SIN(P*T(I))/P)
132.       E=E+(01/K)*(1-F)
133.       PRINT T(I), J, X(I), E
134. NEXT I
135. PRINT
136. STOP
137. DATA 1, 1.2, 9, 0, 0, 2, 20, 0.0001, 9
138. END
COMMAND ?
```

地信网论坛 BBS.3500L.COM


```
 1. REM……VIBRATIONS PROGRAM…AVAC2A                    W.WEAVER, JR.
 2. REM    (AVERAGE-ACCELERATION METHOD)               STANFORD UNIV.
 3. REM…… NOTATION
 4. REM       T=TIME, D=TIME INTERVAL
 5. REM       X,Y,Z=DISPLACEMENT, VELOCITY, AND ACCELERATION
 6. REM       K1=P**2=G/L FOR A SIMPLE PENDULUM
 7. REM       X0, Y0=INITIAL VALUES OF X AND Y AT TIME T=0
 8. REM       T1=TIME RANGE OF INTEREST
 9. REM       N1=NUMBER OF TIME INTERVALS
10. REM       E1=ALLOWABLE ERROR RATIO
11. DIM T(100), X(100), Y(100), Z(100)
12. READ K1, X0, Y0, T1, N1, E1
13. D=T1/N1
14. PRINT 'AVAC2A……TIME INTERVAL=', D
15. PRINT
16. PRINT
17. PRINT 'TIME   ITERS.   APPROX. X   APPROX. Y'
18. PRINT
19. PRINT '0          -          ',X0, Y0
101. REM……INITIALIZE Z0 AND ITERATE Y(I), X(I), Z(I)
102. Z0=-K1*SIN(X0)
103. FOR I=1 TO N1
104.       T(I)=I*D
105.       IF I=1 THEN GO TO 111
106.       IF I=2 THEN GO TO 115
107.       A=Y(I-1)+Z(I-1)*D/2
108.       B=X(I-1)+Y(I-1)*D/2
109.       Y1=Y(I-2)+2*Z(I-1)*D
110.       GO TO 118
111.       A=Y0+Z0*D/2
112.       B=X0+Y0*D/2
113.       Y1=Y0+Z0*D
114.       GO TO 118
115.       A=Y(1)+Z(1)*D/2
116.       B=X(1)+Y(1)*D/2
117.       Y1=Y0+2*Z(1)*D
118.       J=1
119.       GO TO 123
120.       J=J+1
121.       X(I)=X1
122.       Y1=A+Z1*D/2
123.       X1=B+Y1*D/2
124.       Z1=-K1*SIN(X1)
125.       IF I=10 THEN GO TO 127
126.       IF ABS(X1-X(I))>=E1*ABS(XJ) THEN GO TO 120
127.       X(I)=X1
128.       Y(I)=Y1
129.       Z(I)=Z1
130. PRINT T(I), J, X(I), Y(I)
131. NEXT I
132. PRINT
133. STOP
134. DATA 3.437687, 1.570796, 0, 2, 20, 0.0001
135. END
 COMMAND ?
```

地信网论坛 BBS.3500L.COM


```
 1. REM……VIBRATIONS PROGRAM…AVAC3A                    W.WEAVER, JR
 2. REM    (AVERAGE-ACCELERATION METHOD)               STANFORD UNIV.
 3. REM……NOTATION
 4. REM      T=TIME, D=TIME INTERVAL
 5. REM      X, Y, Z=DISPLACEMENT, VELOCITY, AND ACCELERATION
 6. REM      M, C, K=MASS, DAMPING, AND SPRING CONSTANTS
 7. REM      S=SCALAR MULTIPLYING NONLINEAR TERM
 8. REM      X0, Y0=INITIAL VALUES OF X AND Y AT TIME T=0
 9. REM      T1=TIME RANGE OF INTEREST
10. REM      N1=NUMBER OF TIME INTERVALS
11. REM      E1=ALLOWABLE ERROR RATIO
12. REM      Q1=MAGNITUDE OF STEP FUNCTION
13. DIM  T(100), X(100), Y(100), Z(100)
14. READ  M, C, K, S, X0, V0, T1, N1, E1, Q1
15. D=T1/N1
16. PRINT 'AVAC3A……TIME INTERVAL=', D
17. PRINT
18. PRINT
19. PRINT 'TIME          ITERS.          APPROX. X          APPROX. Y'
20. PRINT
21. PRINT '0                -                ', XO, YO
101. REM……INITIALIZE Z0 AND ITERATE Y(I), X(I), Z(I)
102. Z0=(Q1-C*Y0-K*(X0+S*X0*X0*X0))/M
103. FOR  I=1  TO  N1
104.       T(I)=I*D
105.       IF  I=1  THEN  GO  TO  111
106.       IF  I=2  THEN  GO  TO  115
107.       A=Y(I-1)+Z(I-1)*D/2
108.       B=X(I-1)+Y(I-1)*D/2
109.       Y1=Y(I-2)+2*Z(I-1)*D
110.       GO  TO  118
111.       A=Y0+Z0*D/2
112.       B=X0+Y0*D/2
113.       Y1=Y0+Z0*D
114.       GO  TO  118
115.       A=Y(1)+Z(1)*D/2
116.       B=X(1)+Y(1)*D/2
117.       Y1=Y0+2*Z(1)*D
118.       J=1
119.       GO  TO  123
120.       J=J+1
121.       X(I)=X1
122.       Y1=A+Z1*D/2
123.       X1=B+Y1*D/2
124.       Z1=(Q1-C*Y1  -K*(X1+S*X1*X1*X1))/M
125.       IF  J=10  THEN  GO  TO  127
126.       IF  ABS(X1-X(I))>=E1*ABS(X1)  THEN  GO  TO  120
127.       X(I)=X1
128.       Y(I)=Y1
129.       Z(I)=Z1
130.       PRINT  T(I), J, X(I), Y(I)
131. NEXT  I
132. PRINT
133. STOP
134. DATA  100, 0, 400, 2, 0, 10, 0.5, 20, 0.0001, 0
135. END
COMMAND ?
```

地信网论坛 BBS.3S001.COM


```
 1. REM……VIBRATIONS PROGRAM…EIGIT3                    W.WEAVER, JR.
 2. REM  (EIGENVALUES AND VECTORS BY ITERATION)        STANFORD UNIV.
 3. REM……NOTATION
 4. REM          A=COEFFICIENT MATRIX (OF ORDER N)
 5. REM          M=MASS VECTOR
 6. REM          X, Y, Z=EIGENVECTORS
 7. REM          E=EIGENVALUE
 8. REM          S=SWEEPING MATRIX
 9. REM          E1=ALLOWABLE ERROR
10. DIM A(10, 10), M(10), X(10), Y(10), Z(10, 2), S(10, 10)
11. READ N, E1
12. MAT READ A(N, N), M(N)
13. PRINT 'EIGIT3……THREE EIGENVALUES AND VECTORS BY ITERATION'
14. PRINT
15. I=0
16. REM……ITERATE AND PRINT EIGENVALUE AND EIGENVECTOR
17. I=I+1
18. MAT X=CON(N)
19. FOR K=1 TO 20
20.       MAT Y=A*X
21.       E=Y(N)/X(N)
22.       J1=0
23.       FOR J=1 TO N
24.             Y(J)=Y(J)/Y(N)
25.             IF ABS(Y(J)-X(J)) < E1 THEN J1=J1+1
26.             X(J)=Y(J)
27.       NEXT J
28.       IF J1=N THEN GO TO 30
29. NEXT K
30. PRINT
31. PRINT 'MODE'; I; 'EIGENVALUE='; E; 'NO.OF ITERS.='; K
32. PRINT 'EIGENVECTOR'
33. MAT PRINT X
34. IF I=3 THEN GO TO 57
35. REM……SET UP AND APPLY SWEEPING MATRIX
36. MAT S=IDN (N, N)
37. IF I=2 THEN GO TO 46
38. S(1, 1)=0
39. Z(1, 1)=X(1)
40. C=M(1)*X(1)
41. FOR J=2 TO N
42.       S(1, J)=-M(J)*X(J)/C
43.       Z(J, 1)=X(J)
44. NEXT J
45. GO TO 54
46. S(2, 2)=0
47. Z(1, 2)=X(1)
48. Z(2, 2)=X(2)
49. C=M(2)*(Z(1, 1)*Z(2, 2)-Z(1, 2)*Z(2, 1))
50. FOR J=3 TO N
51.       Z(J, 2)=X(J)
52.       S(2, J)=-M(J)*(Z(1, 1)*Z(J, 2)-Z(1, 2)*Z(J, 1))/C
53. NEXT J
54. MAT B=A*S
55. MAT A=B
56. GO TO 17
57. PRINT
58. STOP
59. DATA 3, 0.0001
60. DATA 1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 3
61. DATA 1, 1, 1
62. END
COMMAND ?
```

地信网论坛 BBS.3500I.COM


```
1.  REM·····VIBRATIONS  PROGRAM··DYNACON3                    W.WEAVER, JR.
2.  REM  (DYNAMIC RESPONSE OF MULTI-DEGREE SYSTEM     STANFORD UNIV.
3.  REM  TO PIECEWISE-CONSTANT  FORCING  FUNCTION)
4.  REM·····NOTATION
5.  REM        N=NUMBER  OF  DEGREES  OF  FREEDOM
6.  REM        N1=NUMBER  OF  TIME  STEPS
7.  REM        E1=ALLOWABLE  ERROR  FOR  EIGENVECTORS
8.  REM        G1=MODAL  DAMPING  RATIO   (GAMMA)
9.  REM        I1=TYPE  INDICATOR (0-STIFFNESS; 1-FLEXIBILITY)
10. REM        A=STIFFNESS  OR  FLEXIBILITY  MATRIX
11. REM        M=MASS  VECTOR
12. REM        B, C=INITIAL  DISPLACEMENTS  AND  VELOCITIES
13. REM        P=VECTOR  OF  LOAD  FACTORS
14. REM        T=TIME; D=TIME  INTERVAL
15. REM        F=FORCING  FUNCTION   (PIECEWISE-CONSTANT)
16. REM        E=EIGENVALUES; X, Y, Z=EIGENVECTORS
17. REM        S=SWEEPING  MATRIX
18. REM        G, H=INITIAL  DISPLS  AND  VELS.  IN  NORMAL  COORDS.
19. REM        Q=NORMAL-MODE  LOADS
20. REM        P1, P2=UNDAMPED  AND  DAMPED  ANGULAR  FREQUENCIES
21. REM        U, V=NORMAL-MODE  DISPLACEMENTS  AND  VELOCITIES
22. REM        R=RESPONSE  IN  ORIGINAL  COORDINATES
23. REM        W, L=WORKING  STORAGE
24. DIM  A(10, 10), M(10), B(10), C(10), P(10), T(100), D(100) F(100) E(3), X(10)
25. DIM  Y(10), Z(10, 3), Q(3, 100), U(3, 100), V(3, 100) R(1, 10), W(10, 10), L(10)
26. READ  N, N1, E1, G1, I1
27. MAT  READ  A(N, N), M(N), B(N), C(N), P(N), T(N1), F(N1)
28. IF      I1=0  THEN  MAT  A=INV(A)
29. FOR  K  =  1  TO  N
30.       FOR  J=1  TO  N
31.            A(J, K)=A(J, K)*M(K)
32.       NEXT  J
33. NEXT  K
34. D(1)=T(1)
35. FOR  J=2  TO  N1
36.       D(J)=T(J)-T(J-1)
37. NEXT  J
38. PRINT 'DYNACON3···DYNAMIC RESPONSE OF FIRST THREE MODES OF DAMPED'
39. PRINT 'MULTI-DEGEE SYSTEM TO PIECEWISE-CONSTANT FORCING FUNCTION'
40. PRINT
41. PRINT
42. PRINT 'THREE  EIGENVALUES  AND  VECTORS  BY  ITERATION'
43. MAT  Z=ZER (N, 3)
44. I  =  0
45. REM·····ITERATE  AND  PRINT  EIGENVALUE  AND  ANGULAR  FREQUENCY
46. I  =  I  +  1
47. MAT  X=CON (N)
48. FOR  K=1  TO  20
49.       MAT  Y=A*X
50.       E(I)=Y(N)/X(N)
51.       J1=0
52.       FOR  J=1  TO  N
53.            Y(J)=Y(J)/Y(N)
54.            IF  ABS(Y(J)-X(J))  <  E1  THEN  J1=J1+1
55.            X(J)=Y(J)
56.       NEXT  J
57.       IF  J1=N  THEN  GO  TO  59
58. NEXT  K
59. FOR  J=1  TO  N
60.       Z(J, I)  =  X(J)
61. NEXT  J
62. P1=1/SQR (E(I))
```

地信网论坛 BBS.3500I.COM

149160


```
63. PRINT
64. PRINT 'MODE'; I; 'E-VAL. = '; E(I); 'ANG.FREQ.= ';P1; ' ITERS. = '; K
65. IF I=3 THEN GO TO 84
66. REM……SET UP AND APPLY SWEEPING MATRIX
67. MAT S=IDN(N, N)
68. IF I=2 THEN GO TO 75
69. S(1, 1)=0
70. C1=M(1)*X(1)
71. FOR J=2 TO N
72.       S(1, J)=-M(J)*X(J)/C1
73. NEXT J
74. GO TO 81
75. IF N=2 THEN GO TO 84
76. S(2, 2)=0
77. C2=M(2)*(Z(1, 1)*Z(2, 2) - Z(1, 2)*Z(2, 1))
78. FOR J=3 TO N
79.       S(2, J)=-M(J)*(Z(1, 1)*Z(J, 2) - Z(1, 2)*Z(J, 1))/C2
80. NEXT J
81. MAT W=A*S
82. MAT A=W
83. GO TO 46
84. PRINT
85. PRINT 'MODAL MATRIX'
86. PRINT
87. MAT PRINT Z
88. REM……NORMALIZE MODAL MATRIX WITH RESPECT TO M
89. FOR I=1 TO 3
90.       C1=0
91.       FOR J=1 TO N
92.             C1=C1+M(J)*Z(J, I)*Z(J, I)
93.       NEXT J
94.       IF C1=0 THEN GO TO 100
95.       C1=SQR(C1)
96.       FOR J=1 TO N
97.             Z(J, I)=Z(J, I)/C1
98.       NEXT J
99. NEXT I
100. REM……TRANSFORM INFORMATION TO NORMAL COORDINATES
101. FOR I=1 TO 3
102.       G(I)=H(I)=L(I)=0
103.       FOR K=1 TO N
104.             G(I)=G(I)+Z(K, I)*M(K)*B(K)
105.             H(I)=H(I)+Z(K, I)*M(K)*C(K)
106.             L(I)=L(I)+Z(K, I)*P(K)
107.       NEXT K
108.       FOR J=1 TO N1
109.             Q(I, J)=L(I)*F(J)
110.       NEXT J
111. NEXT I
112. REM……COMPUTE RESPONSE IN NORMAL COORDINATES
113. FOR I=1 TO 3
114.       U1=G(I)
115.       V1=H(I)
116.       IF E(I)=0 THEN GO TO 134
117.       P1=1/SQR(E(I))
118.       P2=P1*SQR(1-G1*G1)
119.       FOR J=1 TO N1
120.             IF J=1 THEN GO TO 123
121.             U1=U(I, J-1)
```

地信网论坛
BBS.3S001.COM